

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 1, 2022

Акустическое течение, индуцированное колебанием стенки плоского прямоугольного резонатора <i>Д. А. Губайдуллин, П. П. Осипов, Р. Р. Насыров</i>	3
Интерпретация и механизм перестройки течения ближнего следа под действием тлеющего разряда <i>Г. В. Гембаржевский, К. Ю. Осипенко</i>	14
Влияние малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход сверхзвукового пограничного слоя на стреловидном крыле $C \chi = 72^\circ$ <i>Ю. Г. Ермолаев, А. Д. Косинов, В. Л. Кочарин, А. Н. Семенов, Н. В. Семенов, С. А. Шипуль, А. А. Яцких</i>	32
Колебания в жидкости пластин с ребрами жесткости <i>В. А. Бужинский, Д. А. Петряхин, Е. В. Соломонов</i>	39
Задача Коши–Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) <i>И. В. Стурова</i>	47
Моделирование нестационарных гидрофизических процессов на шельфе Японского моря <i>В. Ю. Ляпидевский, Ф. Ф. Храпченков, А. А. Чесноков, И. О. Яроцук</i>	57
Области пониженной полной энтальпии в ближнем следе за телом в потоке вязкого газа <i>А. И. Алексюк</i>	69
Структура отрывного обтекания цилиндрической каверны на стенке плоского канала <i>М. А. Зубин, А. Ф. Зубков</i>	81
Носовая часть тела вращения с минимальным аэродинамическим сопротивлением в диапазоне больших дозвуковых скоростей <i>А. П. Мазуров, С. А. Таковицкий</i>	90
Турбулентные структуры при обтекании волнистого квадратного цилиндра. Моделирование методом крупных вихрей <i>Dan Zhang, Akira Rinoshika, Yan Zheng, Zijuan Li, Ya Zhang</i>	101
Истечение жидкости из нескольких отверстий: исследование образования вихрей с воздушным ядром <i>M. Prabhu, R. A. Kumar, R. Warriar, B. S. N. V. Mouli, S. Kiran</i>	118
Экспериментальное исследование поведения области локального отрыва ламинарного потока на сечении прямого крыла <i>A. Roy, R. Mukherjee</i>	131

УДК 532.516

АКУСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ, ИНДУЦИРОВАННОЕ КОЛЕБАНИЕМ СТЕНКИ ПЛОСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

© 2022 г. Д. А. Губайдуллин^{а,*}, П. П. Осипов^{а,**}, Р. Р. Насыров^{а,***}

^а Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН,
Институт механики и машиностроения, Казань, Россия

*E-mail: gubaidullin@imm.knc.ru

**E-mail: petro300@rambler.ru

***E-mail: nasyrov.ravil@bk.ru

Поступила в редакцию 30.03.2021 г.

После доработки 17.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Рассмотрено движение вязкого сжимаемого газа в закрытом прямоугольном резонаторе, индуцированное гармоническим колебанием границы на первой резонансной частоте. Методом последовательных приближений исследуется двумерное акустическое течение в резонаторе произвольной ширины. Установлено существование акустического течения в виде четырех вихрей Рэлея и четырех вихрей Шлихтинга. Показано сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных гармонических колебаниях каверны и при колебаниях стенки резонатора, что говорит о слабом влиянии способа генерации стоячей волны на картину акустического течения. Обнаружено, что по мере уменьшения ширины канала, размеры вихрей Шлихтинга увеличиваются по сравнению с размерами вихрей Рэлея. При ширине канала меньше шести толщин акустического пограничного слоя, вихри Рэлея исчезают и остаются только вихри Шлихтинга. Установлено, что в случае колеблющейся каверны центры вихрей Рэлея и Шлихтинга лежат в одном поперечном сечении, а в случае резонатора с колеблющейся границей центры вихрей Шлихтинга смещены в сторону вертикальных стенок.

Ключевые слова: акустические течения, резонатор, вихри Рэлея, вихри Шлихтинга

DOI: 10.31857/S0568528122010054

В волновых полях в вязкой жидкости при определенных условиях формируются акустические течения. Впервые задача о возникновении акустического течения, создаваемого плоской стоячей волной в двумерном канале произвольной ширины, аналитически исследована в [1]. В [2, 3] предложены различные модификации решения [1], но основное внимание уделялось течению за пределами пограничного слоя [3, 4]. В [5] показано, что внутри пограничного слоя возникают вихри Шлихтинга, направление вращения которых противоположно направлению вращения внешних вихрей Рэлея. Теоретический и численный анализ акустических течений, создаваемых стоячей волной вдоль непроницаемой стенки в полубесконечной области, проведен в [6–8].

В работе [9] получено аналитическое решение редуцированных уравнений Навье–Стокса в неинерциальной системе отсчета, связанной с прямоугольной вибрирующей каверной, и рассчитано акустическое течение, возникающее в одномерной стоячей волне давления. В [10] численно изучено акустическое течение в неподвижном двумерном прямоугольном резонаторе на основе полных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого вязкого газа при гармоническом колебании левой границы. Показано, что в резонаторе образуется акустическое течение в виде вторичных вихрей Шлихтинга и Рэлея. Приведено сравнение и установлено хорошее согласование эпюр скорости акустического течения, полученных на основе аналитического решения редуцированных [9] и численного решения полных [10] уравнений Навье–Стокса. Несмотря на хорошее согласие результатов этих работ, отметим, что в них рассматриваются краевые задачи с различными граничными условиями и уравнениями. Поэтому целью данной работы является получение аналитического решения редуцированных уравнений Навье–Стокса для граничных условий, используемых в [10].

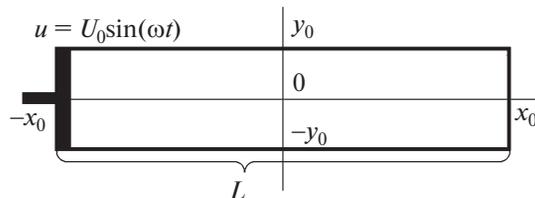


Рис. 1. Прямоугольный резонатор.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим закрытый прямоугольный резонатор длины $L = 2x_0$, занимающий в пространстве область $-x_0 \leq x \leq x_0$, $-y_0 \leq y \leq y_0$ (рис. 1). Акустическое течение в резонаторе возбуждается колебаниями левой границы. Уравнение неразрывности и редуцированные уравнения Навье–Стокса можно записать, следуя работе [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эта система из трех уравнений связывает четыре величины ρ , p , u , v . Для ее замыкания используется адиабата Пуассона $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{1/\gamma}$.

Заметим, что вместо уравнения импульса поперек канала используется условие равенства нулю поперечного градиента давления. При этом поперечная компонента скорости определяется из уравнения неразрывности. Подробное обоснование этого подхода дано в [11], где введен параметр порядка малости $\eta = y_0/L$, и получены оценки

$$\frac{v}{u} = O(\eta), \quad \frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial x} = O(\eta)$$

которые указывают на то, что в узких длинных каналах движение жидкости и градиенты давления направлены преимущественно вдоль оси x .

Далее рассмотрим периодическое решение (1.1) при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{1}{2y_0} \int_{-y_0}^{y_0} u(-x_0, y, t) dy &= U_0 e^{i\omega t} \\ u(x_0, y, t) &= 0 \\ u(x, -y_0, t) &= 0, \quad v(x, -y_0, t) = 0 \\ u(x, y_0, t) &= 0, \quad v(x, y_0, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Задача (1.1)–(1.2) может быть решена методом последовательных приближений в виде суммы возмущений первого и второго порядка малости [12]

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2, \quad p = p_0 + p_1 + p_2, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Для политропного газа с точностью до малых третьего порядка можно записать разложение

$$p = p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) + \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0}(\rho - \rho_0)^2 = p_0 + c_0^2\rho_1 + \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0}\rho_1^2$$

откуда $p_1 = c_0^2\rho_1$, $p_2 = \frac{(\gamma - 1)c_0^2}{2\rho_0}\rho_1^2 + \rho_2c_0^2 = \frac{\gamma - 1}{2\rho_0c_0^2}p_1^2 + \rho_2c_0^2$

Система (1.1) с точностью до малых третьего порядка примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_1 + \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0 + \rho_1 + \rho_2)(v_1 + v_2)}{\partial y} &= 0 \\ (\rho_0 + \rho_1 + \rho_2) \left(\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + (v_1 + v_2) \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial y} \right) &= \\ &= - \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2(u_1 + u_2)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.1. Первое приближение

Для возмущения первого порядка малости из (2.1) можно записать систему

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \quad p_1 = \rho_1 c_0^2$$

Решение этой системы ищется в комплексном виде

$$u_1 = \text{Im}[\tilde{u}_1 e^{i\omega t}], \quad v_1 = \text{Im}[\tilde{v}_1 e^{i\omega t}], \quad p_1 = \text{Im}[\tilde{p}_1 e^{i\omega t}] \quad (2.2)$$

для граничных условий (1.2).

Вводя комплексные амплитуды, решение в первом приближении примет вид

$$\tilde{u}_1 = u_0(x)Y_x(y), \quad \tilde{v}_1 = -fy_0 \frac{du_0}{dx}(x)Y_y(y), \quad \tilde{p}_1 = -(1-f) \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{du_0}{dx}$$

где

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{0.5U_0}{1-f} \left(\frac{\text{ch}\alpha x}{\text{ch}\alpha x_0} - \frac{\text{sh}\alpha x}{\text{sh}\alpha x_0} \right), \quad Y_x(y) = 1 - \frac{\text{ch}\beta y}{\text{ch}\beta y_0}, \quad Y_y(y) = \frac{y}{y_0} - \frac{\text{sh}\beta y}{\text{sh}\beta y_0} \\ \alpha &= \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}, \quad f = \frac{\text{th}\beta y_0}{\beta y_0}, \quad \beta = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \end{aligned}$$

2.2. Второе приближение и акустическое течение

Выделение возмущения второго порядка малости из (2.1) дает систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial\rho_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial y} \right) \\ \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial p_2}{\partial x} &= - \frac{\partial\rho_1 u_1}{\partial t} - \rho_0 \left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Осреднение системы (2.3) по периоду приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho_0 u_2 + \rho_1 u_1}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho_0 v_2 + \rho_1 v_1}}{\partial y} &= 0 \\ \mu \frac{\partial^2 \overline{u_2}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{p_2}}{\partial x} &= \rho_0 \left(\frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_1 v_1}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \overline{p_2}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Второе уравнение может быть представлено в виде

$$\mu \frac{\partial^2 \overline{u_2}}{\partial y^2} = \frac{d \overline{p_2}}{dx} - F(x, y) \quad (2.5)$$

$$\text{где } F(x, y) = -\rho_0 \left(\frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_1 v_1}}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

Используя в (2.6) связь среднего по периоду произведения двух гармоник с их комплексными амплитудами $\overline{u_1 v_1} = 0.5 \operatorname{Re}[\tilde{u}_1 \tilde{v}_1^*]$, $\overline{u_1^2} = 0.5 \operatorname{Re}[\tilde{u}_1 \tilde{u}_1^*]$, можно записать

$$\frac{F(x, y)}{\mu} = -\frac{\rho_0}{2\mu} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial(\tilde{u}_1 \tilde{u}_1^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}_1 \tilde{v}_1^*)}{\partial y} \right] = -V_0 \operatorname{Re} \left[G(x) \left(\frac{Y_x Y_x^*}{\delta^2} - \frac{y_0 f^*}{2\delta^2} \frac{d(Y_x Y_x^*)}{dy} \right) \right] \quad (2.7)$$

где $V_0 = \frac{|U_0|^2 \delta^2}{x_0 \nu} = \frac{2|U_0|^2}{x_0 \omega}$, $G(x) = \frac{x_0}{|U_0|^2} \tilde{u}_0 \frac{d\tilde{u}_0^*}{dx}$. Интегрирование (2.5) дважды по y приведет к уравнению

$$\mu \overline{u_2} = \frac{y^2}{2} \frac{d \overline{p_2}}{dx} - \iint F(x, y) dy dy + \mu C_1(x) y + \mu C_0(x)$$

где $C_0(x)$, $C_1(x)$ – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

В силу симметрии задачи $\overline{u_2}$ является четной функцией от y , откуда $C_1(x) = 0$ и окончательно

$$\overline{u_2} = \frac{y^2}{2\mu} \frac{d \overline{p_2}}{dx} - \frac{1}{\mu} \iint F(x, y) dy dy + C_0(x)$$

Двойной интеграл от (2.7) записан в виде

$$\frac{1}{\mu} \iint F(x, y) dy dy = -V_0 \operatorname{Re} [G(x) (H_1 + iH_2)] \quad (2.8)$$

где $H_1 = \frac{1}{\delta^2} \left(\iint Y_x Y_x^* dy dy - \frac{y^2}{2} \right)$, $H_2 = \frac{1}{\delta^2} \left(\int Y_x Y_x^* dy + \frac{if^* y^2}{4} \right)$

Используя соотношения

$$\beta^2 + \beta^{*2} = 0, \quad \beta^2 - \beta^{*2} = \frac{4i}{\delta^2}, \quad \operatorname{Re}[iz] = -\operatorname{Im}[z], \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z$$

получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\operatorname{ch}(2y/\delta) - \cos(2y/\delta)}{8|\operatorname{ch}\beta y_0|^2} - \operatorname{Im} \frac{\operatorname{ch}\beta y}{\operatorname{ch}\beta y_0} \\ H_2 &= f^* \frac{\operatorname{ch}\beta y - \beta y \operatorname{sh}\beta y}{4\operatorname{ch}\beta y_0} + \frac{1}{4\operatorname{ch}\beta^* y_0} \frac{\operatorname{ch}(2y/\delta) + i \cos(2y/\delta)}{8\beta\delta|\operatorname{ch}\beta y_0|^2} \end{aligned}$$

Для средней скорости

$$\bar{u}_2 = V(G, y) + C_2(x)y^2 + \bar{u}_2(x, 0)$$

где $V(G, y) = V_0 \text{Re}[G(H_1(y) + iH_2(y))]$, а в $C_2(x)$ войдут коэффициенты при исключенных из (2.8) членов пропорциональных y^2

$$C_2(x) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{d\bar{p}_2}{dx} + \frac{\rho_0 |U_0^2|}{2x_0} \text{Re}[(2 - f^*)G(x)] \right)$$

Это соотношение необходимо для определения давления \bar{p}_2 .

2.3. Средняя массовая скорость

Эту величину определяют как

$$\bar{\mathbf{u}}_2^M = \frac{\overline{\rho \mathbf{u}}}{\bar{\rho}} \approx \frac{(\rho_0 + \rho_1)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)}{\rho_0 + \rho_1} \approx \bar{\mathbf{u}}_2 + \frac{\rho_1 \mathbf{u}_1}{\rho_0}$$

Первое соотношение (2.4) показывает, что средняя массовая скорость соленоидальна, т.е. $\text{div} \bar{\mathbf{u}}_2^M = 0$. Она связана с комплексными амплитудами $\bar{\mathbf{u}}_2^M = \bar{\mathbf{u}}_2 + \frac{\text{Re}[\bar{p}_1 \bar{\mathbf{u}}_1^*]}{2\rho_0 c_0^2}$, откуда в проекции на ось x получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^M &= \bar{u}_2(x, y) + \frac{\text{Re}[\bar{p}_1 \bar{u}_1^*]}{2\rho_0 c_0^2} = \bar{u}_2(x, y) + \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \text{Re} \left[-(1-f) \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{d\bar{u}_0(x)}{dx} \bar{u}_0^*(x) Y_x^*(y) \right] = \\ &= \bar{u}_2(x, y) + V_0 \text{Re} \left[\frac{1}{4} i(1-f) G^*(x) Y_x^*(y) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

В силу соленоидальности поля массовой скорости введена функция тока ψ так, что

$$\bar{u}_2^M = \partial\psi/\partial y, \quad \bar{v}_2^M = -\partial\psi/\partial x \quad (2.10)$$

Проинтегрировав уравнение (2.9) по y , получится функция тока в виде

$$\psi(G, y) = \theta(G, y) + A_3(G) \frac{y^3}{y_0^3} + A_1(G) \frac{y}{y_0} \quad (2.11)$$

где $\theta(G, y) = V_0 \delta \text{Re} \left[G(x) \{H_3(y) + iH_4(y)\} + \frac{1}{4} i(1-f) G^*(x) H_5(y) \right]$, $H_{3,4} = \delta^{-1} \int H_{1,2} dy$, $H_5 = \delta^{-1} \int Y_x^* dy$.

Коэффициенты четных степеней y приняты равными нулю, потому что ψ должна быть нечетной функцией от y . Из соотношений (2.9), (2.11) получено

$$\begin{aligned} A_3(x) &= \frac{C_2(x)}{3} y_0^3, \quad A_1(x) = C_0(x) y y_0 + V_0 \text{Re} \left[\frac{1}{4} i(1-f) G^*(x) y \right] y_0 \\ H_3 &= \frac{\text{sh}(2y/\delta) - \sin(2y/\delta)}{16|\text{ch}\beta y_0|^2} - \text{Im} \frac{\text{sh}\beta y}{\beta \delta \text{ch}\beta y_0} \\ H_4 &= f^* \frac{2\text{sh}\beta y - \beta y \text{ch}\beta y}{4\beta \delta \text{ch}\beta y_0} + \frac{i}{4\beta \delta \text{ch}\beta^* y_0} - \frac{\text{sh}(2y/\delta) + i\sin(2y/\delta)}{16\beta \delta |\text{ch}\beta y_0|^2} \\ H_5 &= \frac{y}{\delta} - \frac{i}{\beta \delta} \frac{\text{sh}\beta^* y}{\text{ch}\beta^* y_0} \end{aligned}$$

Из (2.9), (2.10) выражена средняя продольная массовая скорость

$$\bar{u}_2^M(G, y) = V(G, y) + V_0 \text{Re} \left[\frac{1}{4} i(1-f) G^* Y_x^* \right] + \frac{1}{y_0} \left[3A_3(G) \frac{y^2}{y_0^2} + A_1(G) \right]$$

Так как $Y_x^*(y_0) = Y_x(y_0) = 0$, то неизвестные функции $A_1(G)$ и $A_3(G)$ определяются условиями прилипания и не протекания, соответственно

$$\bar{u}_2^M(G, y_0) = 0: V(G, y_0) + \frac{3}{y_0} A_3(G) + \frac{1}{y_0} A_1(G) = 0$$

$$\psi(G, y_0) = 0: \theta(G, y_0) + A_3(G) + A_1(G) = 0$$

откуда

$$\begin{cases} A_1(G) = -\frac{3}{2}\theta(G, y_0) + \frac{1}{2}y_0V(G, y_0) \\ A_3(G) = \frac{1}{2}\theta(G, y_0) - \frac{1}{2}y_0V(G, y_0) \end{cases}$$

Поперечная компонента средней массовой скорости находится дифференцированием (2.11). В силу линейной зависимости величин θ , A_3 , A_1 от G получено

$$\bar{v}_2^M(G, y) = -\left(\theta(G, y) + A_3(G)\frac{y^3}{y_0^3} + A_1(G)\frac{y}{y_0}\right)$$

где $G'(x) = \frac{dG(x)}{dx}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлены продольная и поперечная составляющие безразмерной скорости первого приближения (2.2) на левой границе резонатора. Ввиду симметричности компоненты скорости u и антисимметричности компоненты v представлены эпюры только для верхней полуплоскости резонатора. Графики соответствуют различным фазам периода T с шагом $T/8$. Ввиду условия прилипания скорость на вертикальной границе равна нулю. Видно, что продольная компонента скорости на левой границе почти всюду постоянна (не зависит от y), но сильно меняется в вязком пограничном слое, стремясь к нулю на верхней и нижней стенках. В отличие от продольной компоненты скорости, поперечная составляющая изменяется линейно по y почти всюду кроме вязкого пограничного слоя. Заметим, что эти эпюры соответствуют предположению об одномерном характере поля давления, т.е. $\partial p/\partial y = 0$.

На рис. 3 представлены продольная и поперечная составляющие средней массовой скорости течения для параметров, представленных в статье [10]. В качестве масштаба скоростей использована скорость Рэлея $u_R = \frac{3}{16} \frac{U_m^2}{c_0}$ – характерная скорость акустического течения, где U_m – максимальная скорость акустического течения. Здесь сплошной линией изображены эпюры средней скорости, рассчитанные в [10] для резонатора с колеблющейся левой границей. Точками изображены результаты, рассчитанные в [9] для каверны, совершающей продольные колебания. Пунктирной линией изображены эпюры скоростей, рассчитанные для резонатора с колеблющейся левой стенкой. Видно, что они хорошо согласуются с результатами для колеблющейся каверны.

На рис. 4 представлены линии тока акустического течения в виде четырех вихрей Рэлея и четырех вихрей Шлихтинга. Видно сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных колебаниях каверны (а) и при колебаниях левой стенки резонатора (б). Однако, в отличие от случая колеблющейся каверны, акустическое течение, индуцированное колебанием левой стенки, имеет перетоки вблизи подвижной стенки. В случае колеблющейся каверны центры вихрей Рэлея и Шлихтинга лежат в одном поперечном сечении, а в случае резонатора с колеблющейся стенкой эти центры не лежат на одной прямой, причем центры вихрей Шлихтинга смещены в сторону боковых границ.

Хотя частота возбуждения ω в полученном решении является произвольной, принято рассматривать возбуждение на самой низкой резонансной частоте системы, которую обозначим ω_1 . Метод определения ω_1 как функции y_0/δ состоит в том, чтобы найти значение ω , при котором продольная компонента скорости акустического течения является наибольшей в центре резонатора. Для оцен-

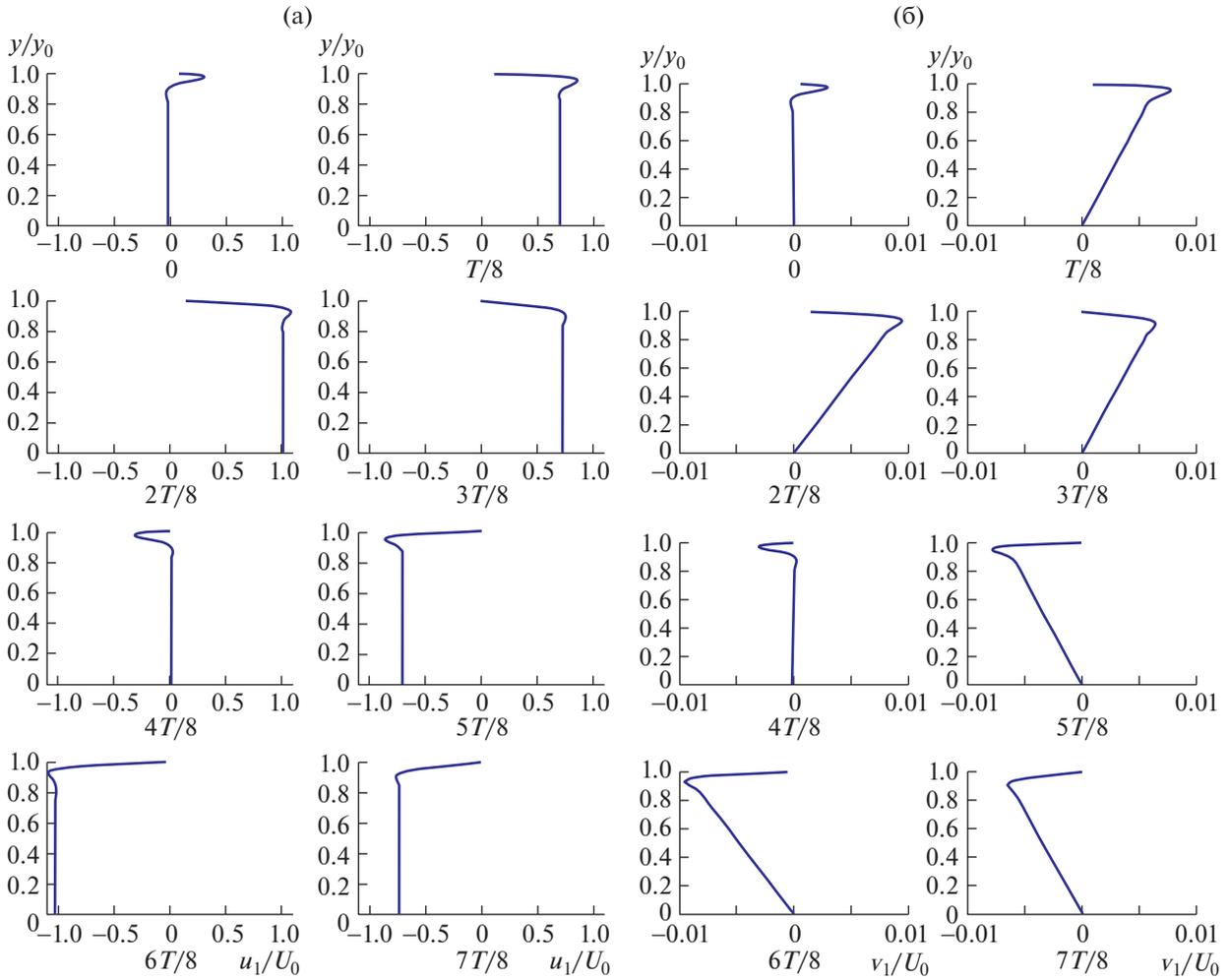


Рис. 2. Продольная (а) и поперечная (б) составляющие скорости первого приближения.

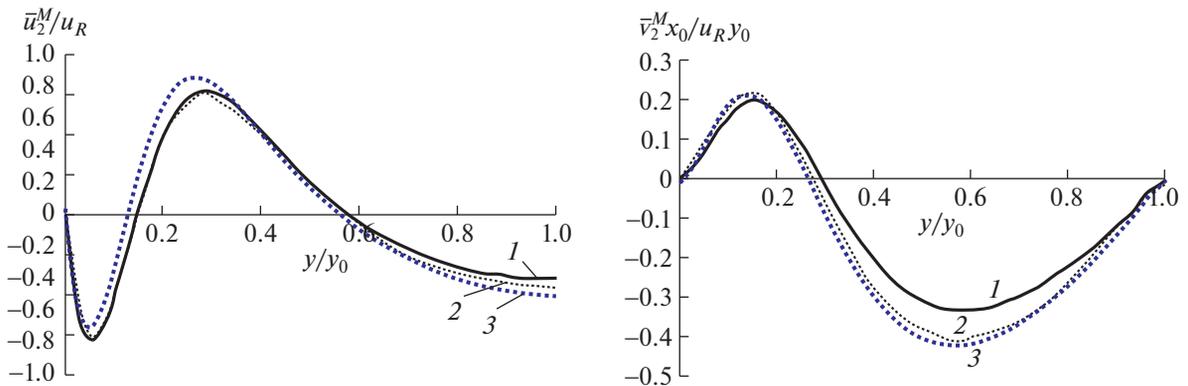


Рис. 3. Продольная (а) и поперечная (б) составляющие средней массовой скорости: 1 – результаты [10]; 2 – результаты [9]; 3 – настоящая работа.

ки комплексной амплитуды продольной компоненты скорости в центре резонатора $|\tilde{u}_x(0, 0)|$ использовано выражение комплексной амплитуды продольной компоненты скорости в первом приближении $\tilde{u}(x, y) = \frac{0.5U_0}{1-f} \left(\frac{\text{ch}\alpha x}{\text{ch}\alpha x_0} - \frac{\text{sh}\alpha x}{\text{sh}\alpha x_0} \right) \left(1 - \frac{\text{ch}\beta y}{\text{ch}\beta y_0} \right)$. Пусть $\omega_0 = \pi c_0/L$ – фундаментальная резо-

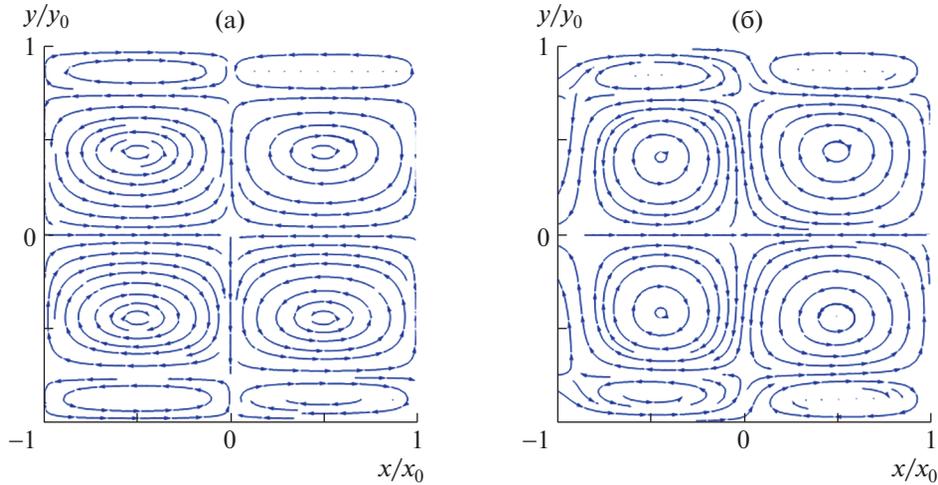


Рис. 4. Линии тока акустического течения: а – колеблющаяся каверна; б – колеблющаяся левая граница.

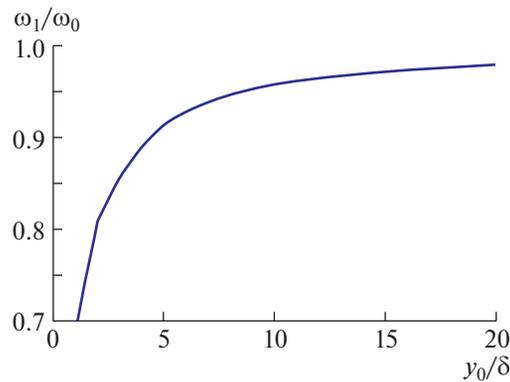


Рис. 5. Резонансная частота как функция ширины канала.

нансная частота. Значения ω_1/ω_0 , полученные таким образом, показаны на рис. 5. При $\omega_1 = \omega_0$ решение можно построить как функции от x/x_0 и y/y_0 в зависимости от единственного параметра y_0/δ .

На рис. 6а и б первые столбцы представляют линии тока; вторые столбцы – распределения продольной компоненты скорости в сечении $x/x_0 = 0.5$ (на рис. 6б сплошная линия – средняя массовая скорость, пунктирная линия – средняя скорость); третьи столбцы – распределения поперечной составляющей средней массовой скорости в сечении $x/x_0 = 0$. Видно сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных колебаниях каверны (рис. 6а) и при колебаниях левой стенки резонатора (рис. 6б), а также хорошее согласование средних массовых скоростей. На рис. 6б в столбце 2 представлен график продольной массовой и средней скорости. Они хорошо согласуются при толщине резонатора более десяти толщин акустического пограничного слоя $y_0 \geq 10\delta$. В случае, когда ширина резонатора менее шести толщин вязкого пограничного слоя $y_0 < 6\delta$, акустическое течение представлено только вихрями Шлихтинга, вихри Рэлея не образуются.

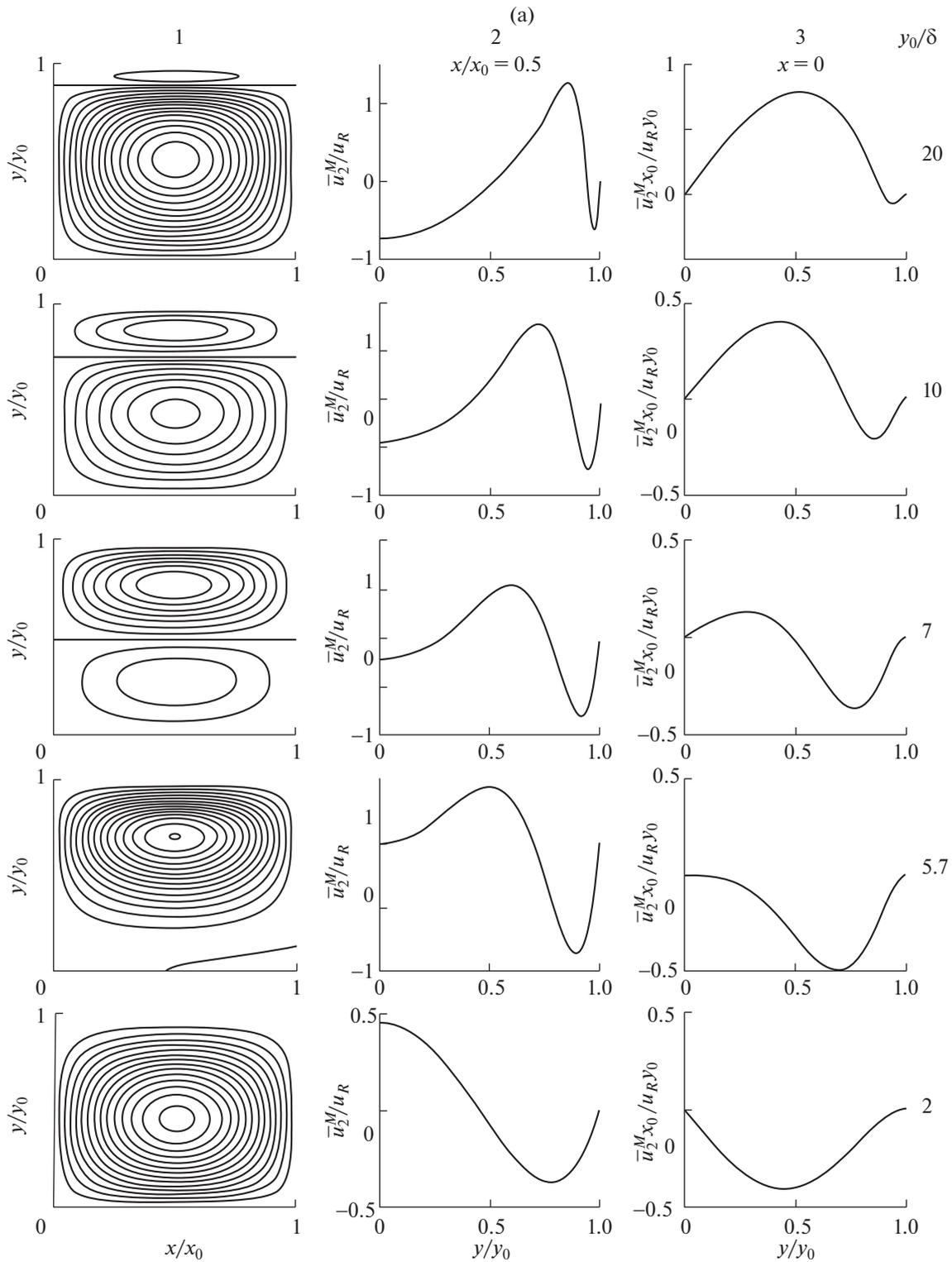


Рис. 6. Параметры акустического течения: а – [9]; б – результаты настоящей работы; 1 – линии тока; 2 – распределения продольной компоненты скорости в сечении $x/x_0 = 0.5$ (сплошная линия – средняя массовая скорость, пунктирная линия – средняя скорость); 3 – распределения поперечной составляющей средней массовой скорости в сечении $x/x_0 = 0$.

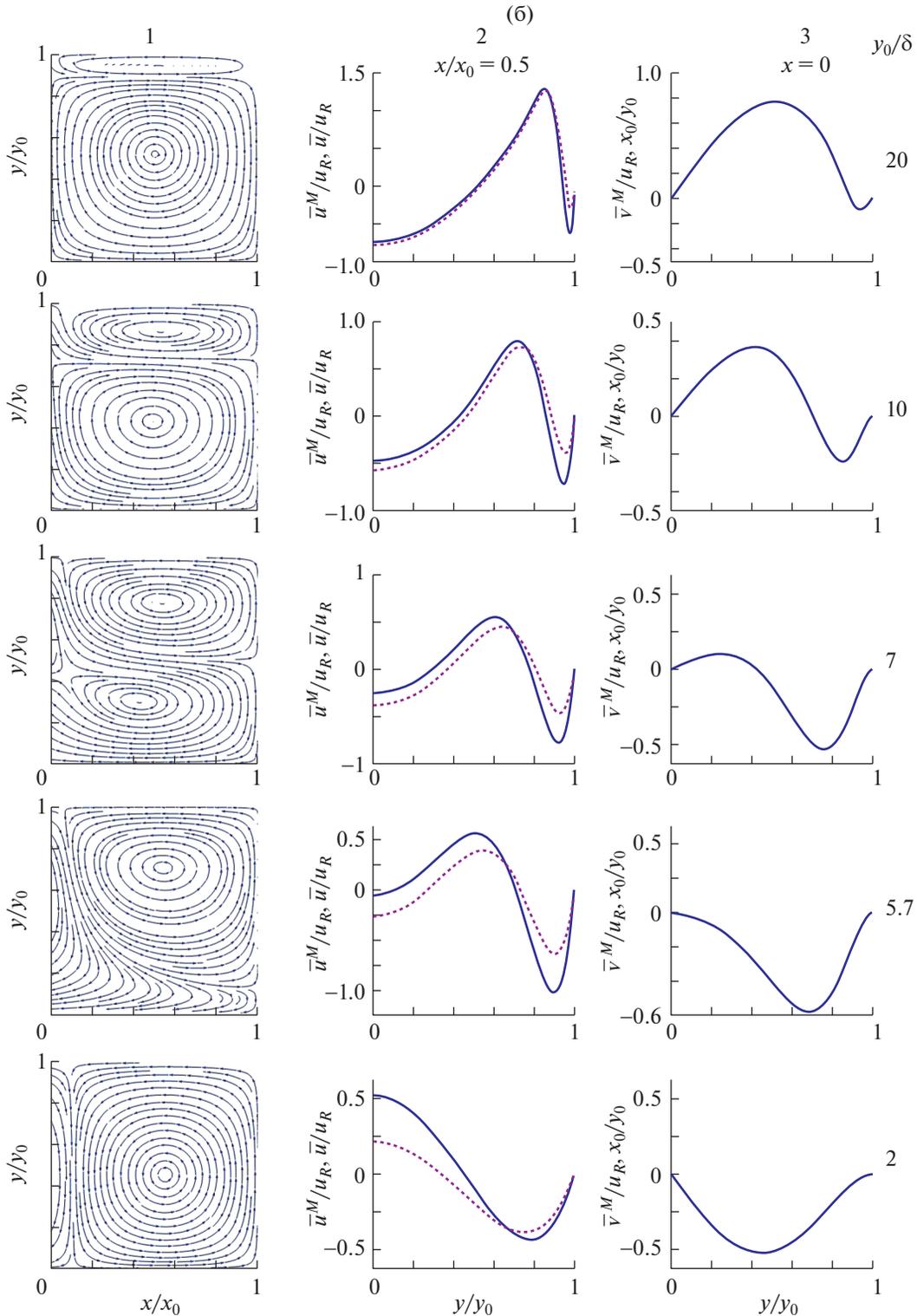


Рис. 6. Окончание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное приближенное решение задачи об акустическом течении в прямоугольном резонаторе, возбужденном колебанием левой границы на резонансной частоте, отличается от решения [9]. Однако сравнение решений показывает хорошее согласие между ними за исключением

области вблизи колеблющейся стенки, в частности в каверне и в резонаторе образуются вихри Рэлея и Шлихтинга. Условием применимости полученного решения является малость толщины пограничного слоя по сравнению с длиной акустической волны, а мгновенная скорость частиц газа пренебрежимо мала по сравнению со скоростью звука. Используемая модель не учитывает конвективное ускорение частиц газа и образование периодической ударной волны при больших амплитудах колебаний. Установлено сходство акустических течений, возникающих при горизонтальных гармонических колебаниях каверны и при колебаниях левой стенки резонатора, что говорит о малом влиянии способа генерации стоячей волны на паттерны акустических течений. В случае колеблющейся каверны центры вихрей Рэлея и Шлихтинга лежат в одном поперечном сечении, а в случае резонатора с колеблющейся границей центры вихрей Шлихтинга смещены в сторону боковых стенок. Обнаружено существование перетоков вблизи колеблющейся стенки резонатора, которое обусловлено постановкой граничных условий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lord Rayleigh (Stutt J.W.)* On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1884. V. 175. Sec. 3. P. 1–21.
<https://doi.org/10.1098/rstl.1884.0002>
2. *Westervelt P.J.* The theory of steady rotational flow generated by a sound field // *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. P. 60–67.
<https://doi.org/10.1121/1.1907009>
3. *Nyborg W.L.* Acoustic streaming // *Physical Acoustics*. 1965. V. 2. Part B. Chap. 11. P. 290–295.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-395662-0.50015-1>
4. *Nyborg W.L.* Acoustic streaming // *Nonlinear Acoustics*. 1998. Chap. 7. Sec. 3.3.
5. *Schlichting H., Gersten K.* *Boundary-Layer Theory*. New York: Springer Inc. 2017. 814 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5>
6. *Zarembko L.K.* Acoustic streaming // *High-Intensity Ultrasonic Fields*. 1971. Part III. P. 135–199.
https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5408-7_3
7. *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*. New York: Plenum. 1977. P. 206–210.
<https://doi.org/10.1002/jcu.1870060222>
8. *Gubaidullin D.A., Osipov P.P., Nasyrov R.R.* Numerical simulation of Schlichting streaming induced by standing wave in rectangular enclosure // *Journal of Physics: Conf. ser.* 2014. V. 567. № 12017. 8 p.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/567/1/012017>
9. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. P. 153–160.
<https://doi.org/10.1121/1.1528928>
10. *Aktas M.K., Farouk B.* Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 5. P. 2822–2831.
<https://doi.org/10.1121/1.1795332>
11. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 111. P. 2076–2086.
<https://doi.org/10.1121/1.1467675>
12. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.

УДК 532.517:537.525

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И МЕХАНИЗМ ПЕРЕСТРОЙКИ ТЕЧЕНИЯ БЛИЖНЕГО СЛЕДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

© 2022 г. Г. В. Гембаржевский^{a,b,*}, К. Ю. Осипенко^{a,**}

^a Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^b Московский авиационный институт, Москва, Россия

*E-mail: gvgemb@ipmnet.ru

**E-mail: osipenko@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.

После доработки 20.08.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Целью работы является физическое истолкование эффекта перестройки следа от двух цилиндров под действием тлеющего разряда. Для этого на основе теории возмущений построен вариант простой модели ближнего следа. В рамках модели комплексный след представляет собой две (по числу порождающих цилиндров) парциальные дорожки Кармана, взаимодействующие между собой в области формирования следа вблизи цилиндров. Каждая дорожка моделируется осциллятором типа Ван дер Поля—Стюарта—Ландау. На основе сопоставления литературных данных по визуализации следов и наших экспериментальных данных по осцилляциям скорости течения с выводами модели идентифицированы наблюдавшиеся режимы следа в газовом и плазменном течениях. Утверждается, что наблюдалась перестройка следа с одной глобальной гидродинамической моды на перемежающиеся моды. Обоснован вывод о том, что перестройка вызвана усилением взаимодействия между областями формирования парциальных дорожек Кармана, произошедшим в результате включения разряда.

Ключевые слова: формирование дорожек Кармана, глобальные моды следа, перемежаемость мод следа, пограничный слой, ионизационно-перегревная неустойчивость

DOI: 10.31857/S0568528122010042

Согласно современным представлениям турбулентное течение — это скорее не однородное изотропное поле случайных вихревых доменов различных масштабов по Тейлору—Колмогорову—Обухову, но подобное поле с возникшими из хаоса и развивающимися когерентными структурами различных масштабов. В контексте отмеченного ближний след от одного или группы цилиндров представляет несомненный теоретический интерес как в некотором смысле простейшее турбулентное течение, поскольку крупномасштабная когерентная структура этого течения — двумерная вихревая дорожка Кармана обладает одновременно свойствами сравнительной устойчивости и простоты. Для параметризации такой когерентной структуры турбулентного течения достаточно минимального числа степеней свободы. В прикладном аспекте ближний след цилиндров представляет интерес для обширного круга технических приложений, среди которых можно отметить задачи типа “ветрового резонанса” различных конструкций, проблемы стабилизации процессов горения топлив, оптимизации режимов и конструкции химических, ядерных реакторов, теплообменников [1–4]. Нас здесь интересует, прежде всего, проблема оптимизации свойств турбулизированных плазменных потоков в условиях тлеющего разряда, их нестабильность. Ранее нам удалось наблюдать перемежаемость таких плазменных течений в известной мере контролируемых условиях течения за парой цилиндров [5]. Для понимания механизмов подобной перестройки следов исследователь может обратиться к решению соответствующей краевой задачи для системы связанных уравнений Навье—Стокса и электродинамики, с последующей громоздкой обработкой массива полученных данных (видимо, с использованием того или иного алгоритма условного осреднения), причем для выяснения механизма явления решать задачу и обрабатывать решение придется для множества значений определяющих параметров. Однако есть и другой, более “прямой” путь к “пониманию” явления, это использование максимально упрощенных, но отражающих интересующие нас свойства, “физических” моделей. Убедительным примером подобного подхода может служить широко используемая модель классической дву-

мерной дорожки Кармана в идеальной жидкости. Известны и еще более простые – одномерные модели следа за цилиндрами. Настоящая статья посвящена опыту применения одномерных моделей ближнего следа к изучению перемежающегося турбулентного плазменного течения от пары цилиндров. Статья носит, в известной мере, обзорный характер, как в отношении используемых одномерных моделей, так и наших исследований плазменных следов.

1. БЛИЖНИЙ СЛЕД ОТ ЦИЛИНДРОВ В РАМКАХ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Нас здесь интересуют не все мыслимые свойства следовых течений, но условия катастрофической перестройки течения следа от пары цилиндров с одной крупномасштабной моды на другую, скажем не желательную по тем или иным соображениям. Можно ожидать, что такой феномен может быть более или менее успешно описан в рамках обобщения простой динамической модели ближнего следа от цилиндра в крупном масштабе – развивающейся вихревой дорожки Кармана. Известны два типа таких наипростейших – одномерных моделей ближнего следа от цилиндрических тел. Это модель Стюарта–Ландау (С-Л) [6], и Ван дер Поля (ВдП) [7]. Модель Л.Д. Ландау (1944 г.) создавалась для описания ламинарно-турбулентного перехода во внутренних течениях [8]. В современной общей теории динамических систем модель Ландау это – модель суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, и как таковая применима для подходящих систем в более или менее широкой закритической области перехода. Было показано [9], что для дорожки Кармана за одиночным цилиндром эта модель, называемая в данном случае моделью Стюарта–Ландау, количественно хорошо применима, по крайней мере, для режима двумерного квазиламинарного следа. Математическая форма модели С-Л – это эволюционное уравнение для “управляющего параметра модели” – комплексной величины A [9]:

$$\frac{dA}{dt} - \varepsilon_L [\lambda_L - \mu_L |A|^2] A = 0 \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) ε_L – вещественный, а λ_L и μ_L – комплексные параметры модели. Предполагается, что основные физические величины, представляющие интерес в рассматриваемой задаче, могут быть выражены через этот управляющий параметр A . В применении к течению следа управляющий параметр A модели С-Л отождествляют с медленно эволюционирующей комплексной (включающей фазу) амплитудой осцилляций поперечной составляющей скорости в характерной точке дорожки Кармана за цилиндром. Соответственно, пространственное распределение амплитуды и фазы осцилляций скорости V_{\perp} в следе считается фиксированным, заданным посредством комплексной функции $f(\mathbf{r})$:

$$V_{\perp(r,t)} = f_{(\mathbf{r})} A(t) \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.} \quad (1.2)$$

В рамках уравнения (1.2) учтены установившиеся осцилляции скорости на базовой частоте ω_0 , тогда амплитудный множитель $A(t)$ позволяет учесть медленную динамику следа – модуляцию этих колебаний в переходных режимах течения. Пространственное распределение амплитуды и фазы осцилляций – функцию $f(\mathbf{r})$ в соотношении (1.2) требуется оценивать независимо от модели С-Л, по экспериментальным данным или по результатам численных расчетов соответствующей краевой задачи для уравнений Навье–Стокса.

Теоретическое доказательство справедливости модели С-Л [9] заключается в обращении к решению соответствующей двумерной краевой задачи в форме (1.2). Это решение строится в виде разложения по малому параметру $\varepsilon_L = \text{Re}_*^{-1} - \text{Re}^{-1}$ надкритичности течения, поскольку известно, что для достаточно малых чисел Рейнольдса течения $\text{Re} < 180$ трехмерные возмущения не возникают. Тогда уравнение С-Л (1.1) получается как условие существования первого приближения для решения краевой задачи в форме (1.2). Фигурирующее в расчетах [9], число Рейнольдса Re определяется по невозмущенной скорости набегающего потока и диаметру цилиндра, тогда критическое число Рейнольдса для бифуркации к течению дорожки Кармана за одиночным цилиндром $\text{Re}_* = 46$ [10]. В целях верификации модели С-Л в [9] проведено сравнение расчетных и экспериментально измеренных характеристик следа. Расчетная оценка коэффициентов уравнения (1.1) получена прямым численным решением двумерной краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса при слегка закритическом числе Рейнольдса $\text{Re} = \text{Re}_* + 0.6$. Экспериментальная оценка получена из наблюдений переходных режимов следа в аналогичных условиях. Оказалось, что эти две оценки коэффициентов уравнения (1.1) при малом уровне надкритичности течения хорошо согласуются между собой. Более того, модель С-Л (1.1) с так фиксированными

ми коэффициентами хорошо применима, по крайней мере, в диапазоне чисел Рейнольдса $46 < Re < 180$, т.е. для квазидвумерного квазиламинарного режима обтекания достаточно коротких цилиндров. В частности, в случае $Re \approx Re_*$, экспериментальная и расчетная оценки установившейся частоты осцилляций в дорожке Кармана совпадают и составляют величину $\omega^{LC} = 0.74$ (в обозначениях [9]), а при увеличении числа Рейнольдса расчетная оценка дает несколько завышенное значение частоты, но на качественном уровне повторяет ход экспериментальной кривой. Так, в случае $Re = 120$ расчетная оценка (по формуле (2.34) или (2.44) статьи [9]) дает значение частоты установившихся осцилляций $\omega^{LC} = 1.20$ при экспериментальном значении $\omega^{LC} = 1.10$ [11]. Здесь следует иметь в виду, что штриховая кривая, иллюстрирующая расчетную зависимость $\omega_{(Re)}^{LC}$, приведенная на рис. 1а в [9] для сравнения с нанесенными на этот график экспериментальными данными, может вводить в заблуждение относительно погрешности собственной модели С-Л. Эта кривая рассчитана по формуле (2.34) в [9], но не для параметра малости модели $\varepsilon_L = Re_*^{-1} - Re^{-1}$, как указано в статье, а для линейризованного параметра малости $\varepsilon_L^* = (Re - Re_*) / (Re_*)^2$, что элементарно проверяется по подробным численным данным, приведенным в [9]. Обсуждая особенности модели С-Л, отметим ограничение, заложенное еще Л.Д. Ландау при ее формулировке, это – медленная скорость эволюции управляющего параметра (амплитуды осцилляций A поперечной составляющей скорости) в масштабах периода осцилляций. Математически это ограничение выражается неравенством

$$|\varepsilon_L| \ll 1 \quad (1.3)$$

В сравнении с моделью С-Л, модель ВдП (автогенератора с “мягким” возбуждением колебаний) давно и широко применяется в различных областях науки и техники [7, 12]. При изучении следовых течений модель ВдП широко используется для решения задач типа ветрового резонанса конструкций. Вещественное уравнение для управляющего параметра модели ВдП – X имеет вид

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + X - \varepsilon(1 - X^2) \frac{dX}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

В уравнении (1.4) время обезразмерено на период осцилляций T в дорожке Кармана $t = 2\pi t_{phys} / T$, так, чтобы базовая частота установившихся осцилляций была единичной $\omega = 1$. Аналогично модели С-Л, управляющий параметр модели ВдП X отождествляется либо с поперечной составляющей скорости в характерной точке следа, либо с поперечной составляющей силы, приложенной к цилиндру от обтекающей его жидкости. В первом варианте отождествления управляющего параметра пространственное распределение относительной амплитуды и фазы осцилляций скорости $V_{\perp}(\mathbf{r}, t)$, также как и в модели С-Л, следует считать фиксированным, определяемым теперь соотношением (1.5) вместо (1.2).

$$V_{\perp}(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}) X(t - \tau) \quad (1.5)$$

Здесь $g(\mathbf{r})$ – некоторая вещественная функция. Она определяется независимо от модели ВдП, аналогично функции $f(\mathbf{r})$ в модели С-Л. Определяющее относительную фазу колебаний в данной точке \mathbf{r} течения, время задержки τ зависит от положения точки в поле следа. Соотношение (1.5) можно рассматривать как интерпретацию известной гипотезы “замороженной турбулентности” Джеффри Тейлора. Соответственно, можно оценить время задержки τ как отношение расстояния между текущей точкой и некоторой опорной точкой течения, расположенной выше по течению, к средней продольной скорости (сноса) в этой области следа. Здесь можно отметить работу [13], в которой, в том числе, изучалась корреляция сигналов поперечной составляющей скорости в поле за цилиндром.

Уравнение (1.4) содержит единственный действительный параметр ε , определяющий скорость эволюции осцилляций, который в общей модели ВдП может быть произвольным числом. Тем самым допускается весь спектр колебаний от квазигармонических до релаксационных [12], затухающих и не затухающих. В применении к следовым течениям типа дорожки Кармана интерес представляет случай квазигармонических колебаний скорости. Согласно методологии Ван дер Поля-Крылова-Боголюбова [14], это случай не слишком больших значений параметра $0 < \varepsilon < 1$, когда решение (1.4) в первом приближении по малой величине ε имеет форму колеба-

ний $V_{\perp} = X = \rho \cos(t + P)$ на основной (несущей) частоте $\omega = 1$ с медленно изменяющейся амплитудой ρ . Соответствующая система осредненных по быстрым осцилляциям уравнений первого приближения по малой ε следующая:

$$\frac{d\rho}{dt} - \left(\frac{\varepsilon\rho}{2}\right) \left[1 - \frac{\rho^2}{4}\right] = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь (1.7) необходимо отметить, что в рамках стандартной модели ВдП (1.4) [7, 12] не учитывается дрейф фазы $P(t)$ колебаний скорости течения в переходных режимах следа. В то же время эта экспериментально наблюдаемая зависимость учтена (посредством коэффициента $\text{Im} \mu \neq 0$) в модели С-Л, что легко продемонстрировать, представив решение уравнения (1.1) в аналогичной форме $A = \rho_L \exp(iP_L)$. Тогда имеем эквивалентную (1.1) систему уравнений (1.8), (1.9).

$$\frac{d\rho_L}{dt} - \varepsilon_L \text{Re} \lambda_L \rho_L [1 - \rho_L^2] = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{dP_L}{dt} - \varepsilon_L \text{Im} \lambda_L \left[1 - \left(\frac{\text{Im} \mu_L \text{Re} \lambda_L}{\text{Im} \lambda_L \text{Re} \mu_L}\right) \rho_L^2\right] = 0 \quad (1.9)$$

Чтобы достигнуть совпадения двух систем уравнений (1.6), (1.7) и (1.8), (1.9), достаточно обобщить модель ВдП (1.4) до вида (1.10) (“совпадения” с учетом отличия в постоянных коэффициентах уравнений, вызванного несколько различающимся способом обезразмеривания уравнений в моделях ВдП и С-Л).

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - \varepsilon(1 - X^2) \frac{dX}{dt} + \left[1 - \Delta \left(X^2 + \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 - 4\right)\right] X = 0 \quad (1.10)$$

В результате такого обобщения система уравнений первого приближения модели ВдП по малым величинам ε , $|\Delta|$ примет вид (1.6), (1.11).

$$\frac{dP}{dt} - \left(\frac{\Delta}{2}\right) (\rho^2 - 4) = 0 \quad (1.11)$$

Сопоставление моделей позволяет теоретически обосновать ВдП модель следа от уединенного цилиндра как соответствующей обоснованной модели С-Л, работоспособной, по крайней мере, в диапазоне чисел Рейнольдса $46 < \text{Re} < 180$. Система уравнений первого приближения (1.6), (1.11) модели ВдП наглядна и позволяет дать физическую интерпретацию параметров модели. Так, параметр ε определяет скорость эволюции амплитуды осцилляций, а параметр Δ – скорость дрейфа фазы, причем оба процесса медленные в меру малости этих величин ε , $|\Delta| < 1$. Соответственно, оба параметра определяют слабый ангармонизм колебаний в следе.

Согласно проведенному сопоставлению моделей, уравнения С-Л можно рассматривать как осредненные по быстрым осцилляциям уравнения первого приближения по малым параметрам ε , $|\Delta|$ для решения обобщенного уравнения ВдП (1.10). Тем самым обнаруживается следующее преимущество модели ВдП в форме (1.10) в сравнении с моделью С-Л: при таком подходе метод Крылова–Боголюбова позволяет систематически уточнять результат, строя высшие приближения по малым величинам ε , $|\Delta| < 1$, тем самым ослабляя требование малости этих параметров. Кроме того, модель ВдП имеет преимущество по простоте – компактности, она содержит всего два действительных параметра, тогда как модель С-Л – три, два из которых – комплексные.

Обе одномерные модели С-Л и ВдП следа способны непосредственно описать только эволюцию крупномасштабной когерентной структуры этого течения – динамику параметров дорожек Кармана. Мелкомасштабная, высокочастотная структура течения находится вне рамок рассмотрения. Этот недостаток простых моделей следа является в то же время их достоинством, поскольку допускает принципиальную возможность применения моделей в широком диапазоне чисел Рейнольдса, включаяшем существовавшие турбулентные режимы течения, лишь бы крупномасштабная, низкочастотная, квазидвумерная структура дорожки Кармана была четко выражена. В подкрепление этого тезиса, помимо экспериментальных наблюдений следов, уместно привести один из основополагающих выводов теории динамических систем. Динамика низкочастот-

ных степеней свободы системы (дорожек Кармана) самодавяющая, определяющая эволюцию высокочастотных степеней свободы (мелкомасштабной турбулентности, формирующейся в прямом каскаде турбулентности). Обратное влияние мелкомасштабной турбулентности на дорожку Кармана в грубом приближении можно учесть перенормировкой коэффициента вязкости среды. В соответствии с указанными воззрениями, квазиламинарные модели обтекания цилиндра типа ВдП давно и широко применяют при решении задач гидроаэроупругости, в целях моделирования сил, действующих на погруженные в поток цилиндрические тела, т.е. при типичных числах Рейнольдса течения $Re \approx 10^4 - 10^5$. Соответствующая методика расчетов отражена в профильной монографии [15], пример современной публикации [16].

В сравнении со случаем следа от одиночного цилиндра течение за парой параллельных цилиндров исследовано существенно менее подробно, вероятно, ввиду большего числа определяющих параметров в задаче. В случае одинаковых цилиндров кроме числа Рейнольдса необходимо дополнительно учитывать расстояние между цилиндрами и угол между направлением невозмущенного течения и плоскостью содержащей оси цилиндров. Известно, что малые вариации любого из этих параметров в некоторых областях значений существенно меняют картину комплексного следа [1–4]. В настоящее время для моделирования следа от группы цилиндров в рамках обобщения моделей С-Л или ВдП рассматривается система уравнений этого типа, причем каждое уравнение моделирует парциальный след от индивидуального цилиндра. При этом уравнения системы модифицируют на учет взаимного влияния вихрей в процессе их формирования вблизи цилиндров. Видимо ввиду сложности задачи, многообразия наблюдаемых режимов комплексного следа, при модификации уравнений принято использовать простейшее – линейное приближение по управляющим параметрам при обобщении уравнений (1.1) или (1.4). Посредством подобных моделей, с линейной аппроксимацией взаимодействия парциальных дорожек, удастся воспроизвести основные наблюдаемые моды комплексного следа, но не уверенно наблюдаемый режим перемежаемости между модой синфазно-синхронизованных парциальных дорожек и модой *biased flow*, как следует, например, из рис. 2, 3 в [6]. Однако, режимы перемежаемости следа представляют первостепенный интерес для задач оптимизации течения при сохранении его устойчивости.

В качестве вывода из приведенного краткого обзора литературы по маломерному моделированию газовых и жидкостных следов отметим следующее. В отличие от течения за уединенным цилиндром, используемая методика моделирования комплексного следа от группы цилиндров еще недостаточно совершенна, а принятая – линейная форма обобщения уравнений на учет взаимодействия парциальных следов, на наш взгляд, не оптимальна и подлежит уточнению. Учитывая очерченную выше ситуацию с маломерным моделированием комплексных следовых течений, формулируем цель настоящей работы – построить максимально простую модель следа от двух цилиндров, воспроизводящую основные режимы такого течения, включая режимы перемежаемости между модами, равно пригодную как для нейтральных газовых течений, так и для течений плазмы в условиях тлеющего разряда. Подобная – достаточно универсальная, но одновременно достаточно простая модель позволит физически объяснить наблюдающуюся перестройку в сравнительно сложной и малоустойчивой системе турбулентного течения в условиях тлеющего разряда [5].

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛЕДОВ ОТ ГРУППЫ ЦИЛИНДРОВ

Рассматривается следующая основная конфигурация группы цилиндров – пара одинаковых параллельных цилиндров, установленных в плоскости, перпендикулярной набегающему потоку. Комплексный след от пары цилиндров рассматривается в стиле теории возмущений – как два взаимодействующих в области формирования вблизи цилиндров парциальных следа, которые трансформируются ниже области формирования в две дорожки Кармана от двух соседних цилиндров соответственно. Каждая дорожка моделируется обобщенным осциллятором типа ВдП (1.10) с целью достижения большей общности по допустимой скорости эволюции дорожек.

$$\frac{d^2 X_1}{dt^2} - \varepsilon(1 - X_1^2 - \lambda X_2^2 - lX_1 X_2) \frac{dX_1}{dt} + \left[1 - \Delta \left(X_1^2 + \left(\frac{dX_1}{dt} \right)^2 - 4 \right) \right] X_1 = St_1 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 X_2}{dt^2} - \varepsilon(1 - X_2^2 - \lambda X_1^2 - lX_1 X_2) \frac{dX_2}{dt} + \left[1 - \Delta \left(X_2^2 + \left(\frac{dX_2}{dt} \right)^2 - 4 \right) \right] X_2 = St_2 \quad (2.2)$$

Управляющие параметры дорожек Кармана X_i отождествлены с поперечной составляющей скорости течения в характерных точках каждой дорожки. В соответствии с (1.5) имеем для двух дорожек

$$V_{\perp}^i(\mathbf{r}_i, t) = g(\mathbf{r}_i) X_i(t - \tau_i) \quad (2.3)$$

Характерные точки дорожек \mathbf{r}_i , где калибруется пространственное распределение амплитуды осцилляций скорости $g(\mathbf{r}_i)$, выбираются симметрично расположенными относительно плоскости геометрической симметрии задачи, т.е. так, что продольные координаты точек совпадают $x_1 = x_2$, а поперечные координаты антисимметричны $y_1 = -y_2$ (с учетом того, что начало оси y лежит в плоскости симметрии задачи). Характерные точки удобно выбрать на внешних границах парциальных дорожек Кармана так, чтобы избежать перекрестного проникновения возмущений от одной дорожки в измеряемый сигнал другой дорожки.

Взаимодействие вихрей в области формирования дорожек Кармана учтено посредством обобщения коэффициента при первой производной управляющего параметра в его уравнении (1.10). Этот коэффициент $\varepsilon(1 - X_i^2)$ обобщен в уравнениях (2.1), (2.2) до квадратичного многочлена общего вида от управляющих параметров обеих дорожек: $\varepsilon(1 - X_i^2 - \lambda X_j^2 - l X_i X_j)$. Аргументом в пользу использования данной формы многочлена в рамках обобщения модели с использованием теории возмущений является квадратичная нелинейность уравнений Навье–Стокса. Проведенная модификация потребовала введения еще двух дополнительных параметров модели ВдП – λ и l , имеющих прозрачный физический смысл. Они характеризуют интенсивность взаимодействия парциальных следов, причем с учетом относительной фазы осцилляций в них – l . Соответственно виду многочлена, амплитуда и фаза осцилляций в соседней дорожке непосредственно влияют на амплитуду и фазу пульсаций в первой дорожке. Это основная отличительная особенность модели следа с нелинейным представлением взаимодействия парциальных дорожек, предложенной в рамках работ по проекту РФФИ 13-01-00742 [17]. В формализме теории возмущений величина учтенного в уравнениях (2.1), (2.2) взаимодействия парциальных дорожек Кармана характеризуется двумя безразмерными параметрами: $\varepsilon \lambda$ и εl . Априори, в соответствии с идеологией теории возмущений предполагаем эти величины малыми, ввиду малости параметра $\varepsilon < 1$.

Кроме обобщения на учет взаимодействия дорожек, однородные уравнения типа ВдП (1.10) для каждой парциальной дорожки обобщены до системы неоднородных уравнений (2.1), (2.2) с целью охвата области турбулентных режимов течения. Для этого, согласно теории случайных процессов, в правые части уравнений введены случайные “силы” Ланжевена St_i , моделирующие возникновение стохастизации в следе. Они обеспечивают, в частности, перемежаемость между квазиламинарными модами следа. По физическому смыслу это форма учета воздействия большого количества сравнительно слабо возбужденных высокочастотных мод турбулентного течения на основную низкочастотную моду осцилляций в дорожке Кармана. В той же форме следует учитывать возмущение дорожек турбулентностью набегающего потока.

Первые два параметра модели, определяющие скорость эволюции дорожек Кармана, $\varepsilon, |\Delta| < 1$ малы согласно расчетным и экспериментальным оценкам, например [9, 17, 18], для следа за одиночным цилиндром. Считая, что они не сильно изменяются при переходе от одного цилиндра к двум (в меру применимости теории возмущений), ищем решение системы (2.1), (2.2) по методу Ван дер Поля-Крылова-Боголюбова [14], в форме осцилляций на основной частоте $\omega = 1$ с медленно меняющимися амплитудами ρ и фазами P

$$X_i = \rho_i \cos(t + P_i) \quad (2.4)$$

Соответственно преобразованные осредненные уравнения первого приближения модели по малым параметрам $\varepsilon, |\Delta| < 1$ принимают вид уравнений для медленных амплитуд ρ_i и фаз P_i осцилляций в дорожках Кармана.

$$\frac{d\rho_1}{dt} - \left(\frac{\varepsilon\rho_1}{2}\right) \left[1 - \frac{\rho_1^2 + \lambda\rho_2^2(2 - \cos 2(P_1 - P_2)) + l\rho_1\rho_2 \cos(P_1 - P_2)}{4} \right] = St_{1p} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} - \left(\frac{\varepsilon\rho_2}{2}\right) \left[1 - \frac{\rho_2^2 + \lambda\rho_1^2(2 - \cos 2(P_1 - P_2)) + l\rho_1\rho_2 \cos(P_1 - P_2)}{4} \right] = St_{2p} \quad (2.6)$$

$$\frac{dP_1}{dt} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)(\rho_1^2 - 4) + \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)[\lambda\rho_2^2 \sin 2(P_1 - P_2) + l\rho_1\rho_2 \sin(P_1 - P_2)] = St_{1P} \quad (2.7)$$

$$\frac{dP_2}{dt} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)(\rho_2^2 - 4) + \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)[\lambda\rho_1^2 \sin 2(P_2 - P_1) + l\rho_1\rho_2 \sin(P_2 - P_1)] = St_{2P} \quad (2.8)$$

В силу проведенного в части 1 сопоставления моделей следа за одиночным цилиндром, системе уравнений (2.5)–(2.8) можно интерпретировать как обобщение модели С-Л на случай следа за парой цилиндров.

Предлагаемая модель следа (2.1), (2.2) выглядит на первый взгляд как чисто гидродинамическая, применимая только к течениям нейтральных флюидов, тем не менее, влияние разряда на след нашло отражение в модели посредством учета вариации параметров модели (прежде всего λ и l) под действием разряда. Учет этого воздействия разряда на гидродинамику течения обсуждается в разд. 4.

3. РЕЖИМЫ СЛЕДА ОТ ПАРЫ ЦИЛИНДРОВ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Анализ модели удобно вести, преобразовав систему уравнений (2.5)–(2.8) первого приближения к глобальным переменным, характеризующим комплексный след в целом [17]. Это суммарная интенсивность осцилляций $R^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$, асимметрия следа $N = (\rho_1^2 - \rho_2^2)/2(\rho_1^2 + \rho_2^2)$, и относительная фаза осцилляций в дорожках $P = P_1 - P_2$.

$$\frac{dR^2}{dt} - \varepsilon R^2 \left\{ 1 - \frac{R^2}{4} \left[1 + l \sqrt{\frac{1}{4} - N^2} \cos P + 2(\lambda(2 - \cos 2P) - 1) \left(\frac{1}{4} - N^2 \right) \right] \right\} = St_R \quad (3.1)$$

$$\frac{dN}{dt} - \frac{\varepsilon R^2 N}{2} [\lambda(2 - \cos 2P) - 1] \left(\frac{1}{4} - N^2 \right) = St_N \quad (3.2)$$

$$\frac{dP}{dt} + \Delta R^2 N + \frac{\varepsilon R^2}{8} \left[\lambda \sin 2P + 2l \sqrt{\frac{1}{4} - N^2} \sin P \right] = St_P \quad (3.3)$$

Проведенное преобразование зависимых переменных позволило сократить число уравнений и неизвестных в “ведущей” системе на единицу. Затем с помощью преобразования независимой переменной $R^2 dt = d\tau$ удастся упростить задачу до ведущей системы из двух уравнений (для неизвестных N и P). Глобальные квазиламинарные моды следа находим как линейно-устойчивые стационарные точки или квазипериодические решения системы уравнений (3.1)–(3.3) (и соответствующей двумерной системы) при нулевых правых частях. Точка покоя $R^2 = 0$ всегда существует, но неустойчива. Среди оставшихся точек покоя имеется три моды симметричного следа – состоящего из одинаковых дорожек Кармана $N = 0$

№ 1 Мода в виде двух одинаковых синфазно синхронизованных дорожек Кармана. Ее конфигурация, частота осцилляций скорости и область существования моды в пространстве параметров модели следующие:

$$R^2 = \frac{8}{1 + \lambda + l}; \quad N = 0; \quad P = 0; \quad \omega = 1 + 2\Delta \left(\frac{\lambda + l}{1 + \lambda + l} \right); \quad \lambda < 1; \quad l > -2\lambda \quad (3.4)$$

№ 2 Мода следа, представляющая собой две одинаковых противофазно синхронизованных дорожки Кармана. Конфигурация моды, частота осцилляций скорости в дорожках и область существования моды

$$R^2 = \frac{8}{1 + \lambda - l}; \quad N = 0; \quad P = \pi; \quad \omega = 1 + 2\Delta \left(\frac{\lambda - l}{1 + \lambda - l} \right); \quad \lambda < 1; \quad l < 2\lambda \quad (3.5)$$

№ 3 Мода в форме двух одинаковых дорожек Кармана, синхронизованных на угол, отличный от 0 и π . Ее конфигурация, частота осцилляций и область существования моды суть

$$R^2 = \frac{8}{1 + 3\lambda - (l^2/\lambda)}; \quad N = 0; \quad P = +/ - \arccos \left(\frac{-l}{2\lambda} \right);$$

$$\omega = 1 + 2\Delta \left(\frac{3\lambda - l^2/\lambda}{1 + 3\lambda - l^2/\lambda} \right);$$

$$\frac{-1}{3} < \lambda < 0; \quad |l| < -2\lambda \quad \cup \quad \lambda < \frac{-1}{3}; \quad \sqrt{\lambda(1+3\lambda)} < |l| < -2\lambda \quad (3.6)$$

Помимо мод симметричного следа, в рамках модели существуют асимметричные моды:

№ 4 Асимметричная мода в форме дорожки Кармана за одним из цилиндров при полностью подавленной второй дорожке, ее параметры

$$R^2 = 4; \quad N = +/ - 0.5; \quad \omega = 1; \quad \lambda > 0.5 \quad (3.7)$$

№ 5 Помимо одночастотных (№ 1–4), численно была рассчитана двухчастотная асимметричная мода следа. Ее примерная конфигурация представляет собой две дорожки Кармана, различающиеся между собой как по частоте, так и по интенсивности установившихся осцилляций [18]. Аппроксимация области существования этой моды

$$0.5 - 0.3 \exp(-2.6|l|^{-0.33}) < \lambda < 0.5 \quad (3.8)$$

На левой границе области существования этой квазипериодической моды (первое неравенство (3.8)) две частоты осцилляций сливаются в одну.

Для обеспечения полноты реализуемого спектра мод (без учета их устойчивости) следует упомянуть асимметричную моду № 6 в форме двух различающиеся по интенсивности дорожек Кармана, имеющих при этом одну частоту осцилляций. Мода существует в форме двух ветвей, расположенных в I и в III, или во II и IV квадрантах изменения P . Конфигурация моды № 6 и область ее формального существования следующие:

$$P_{I,III} = \frac{1}{2} \arccos\left(2 - \frac{1}{\lambda}\right); \quad P_{II,IV} = \pi + \frac{1}{2} \arccos\left(2 - \frac{1}{\lambda}\right); \quad \frac{1}{3} < \lambda < 1; \quad d = \frac{-\varepsilon}{8\Delta}; \quad (3.9)$$

$$N = d \sin P \left[\frac{2\lambda \cos P + l \sqrt{1 + 4d^2 \sin^2 P (l^2 - 4\lambda^2 \cos^2 P)}}{1 + 4d^2 l^2 \sin^2 P} \right];$$

$$R^2 = \frac{4}{1 + l \sqrt{0.25 - N^2 \cos P}};$$

Аналитически (с помощью критерия Рауса-Гурвица, примененного к характеристическому уравнению линеаризованной системы уравнений) доказывается, что мода № 6 линейно неустойчива всюду в области формального существования.

Для наглядности области существования устойчивых глобальных квазиламинарных мод следа проиллюстрированы в виде карты на плоскости параметров модели λ, l : рис. 1. Полученный результат интерпретируем в рамках теории возмущений. Включение взаимодействия $\lambda \neq 0, l \neq 0$ между дорожками Кармана приводит к возникновению пяти коллективных мод комплексного следа, причем вырождение по частоте осцилляций в состояниях этих мод можно считать снятым. Расщепление частот осцилляций ω по модам определяется масштабным параметром Δ модели, определяющим скорость дрейфа фазы осцилляций согласно уравнению (1.11), но также и параметрами λ, l , характеризующими интенсивность взаимодействия дорожек: (3.4)–(3.9).

Сопоставим полученный спектр мод течения с данными визуализации следа от пары цилиндров в нейтральных жидкостях и газах. При изменении расстояния между цилиндрами различают смену режимов течения в пределах широкого набора “экспериментальных мод” следа [1–4]. Ограничимся случаем следа от цилиндров, установленных в плоскости перпендикулярной скорости натекающего флюида. Весь набор экспериментальных мод в этом случае можно сгруппировать в три огрубленные моды. Это – две моды симметричного следа: в форме синфазно-синхронизованных шахматных дорожек Кармана, и в форме противофазно-синхронизованных дорожек соответственно. Третья огрубленная асимметричная мода следа представляет собой две дорожки Кармана, отличающиеся по ширине, амплитуде и частоте осцилляций, а также и по скорости затухания колебаний вниз по потоку. Эту моду принято называть “biased flow” – по характеру течения в зазоре между цилиндрами. Уместно отметить, что для всех трех мод каждая парциальная шахматная дорожка Кармана несколько искажается – теряет свою симметрию в результате и в меру взаимодействия областей их формирования, при этом увеличивается скорость ее затухания вниз по течению.

Эти три экспериментальные моды следа однозначно отождествляются с модельными модами № 1, 2, 5 соответственно. При этом, в полном соответствии с данными визуализации следов, мода асимметричного следа № 5 добавляется к паре симметричных мод только при превышении

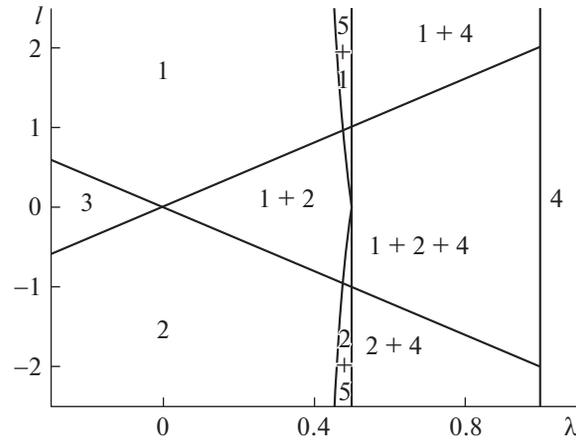


Рис. 1. Области существования глобальных мод следа от двух цилиндров на плоскости параметров модели λ, l . На каждом сегменте плоскости нанесены номера мод, реализующихся в пределах данного сегмента.

порогового значения параметра взаимодействия в модели – при выполнении левого неравенства (3.8). В эксперименте этому соответствует сближение цилиндров до расстояния $T/D < 2.1$. В рамках модели возможны все режимы перемежаемости между модами № 1, 2, 5 (в зависимости от значений параметров λ и l – рис. 1) при том, что экспериментаторы отмечают [1–4] наблюдение перемежаемости только между огрубленными модами № 1 и № 5. Иными словами, модель предоставляет более широкий набор режимов перемежаемого течения, чем реализуется в течениях нейтральных жидкостей и газов.

Отдельного комментария заслуживает модельная мода следа № 4. Комплексный след в состоянии этой моды представляет собой дорожку Кармана от одного из цилиндров при полностью подавленной шахматной дорожке от второго цилиндра, причем характеристики первой дорожки полностью совпадают с характеристиками следа от единственного цилиндра. Расчетная мода № 4 может реализовываться только при достаточно сильном взаимодействии областей формирования дорожек, а именно при $\lambda > 0.5$. На первый взгляд, отмеченные свойства моды № 4 удачно коррелируют с наблюдениями комплексного следа в форме одной широкой дорожки Кармана за достаточно близко расположенными цилиндрами, при $T/D < 1.2$ [1–4]. Однако при более внимательном рассмотрении данных визуализации отмечаем, что перестройка комплексного следа в результате сближения цилиндров (от формы двух отличающихся дорожек Кармана к течению одной широкой дорожки) происходит непрерывно, монотонно, т.е. в рамках одной глобальной моды – типа № 5. Вначале при расстояниях $T/D > 1.5–1.7$ в комплексном следе наблюдается и узкая высокочастотная, и широкая низкочастотная дорожки. При дальнейшем сближении цилиндров скорость затухания высокочастотной дорожки существенно увеличивается, и начиная с некоторого расстояния от цилиндров вниз по потоку наблюдается только одна широкая низкочастотная шахматная дорожка. (Процесс затухания дорожек параметризуется посредством функции $g(r)$ из (1.5).) При сближении цилиндров до расстояния $T/D \approx 1.2$ высокочастотная дорожка практически не обнаруживается уже вблизи цилиндров. Следовательно, мода № 4 оказалась избыточной в расчетном спектре мод следа, как и мода № 3. Чтобы отсечь эти не наблюдаемые расчетные моды № 3, 4 течения достаточно ограничить область изменения параметра взаимодействия дорожек в модели до интервала $0 < \lambda < 0.5$.

Сопоставление выводов модели с данными визуализации следов от пары цилиндров в нейтральных средах позволяет сделать следующее заключение. В рамках модели, построенной на основе теории возмущений, с нелинейным представлением взаимодействия парциальных дорожек Кармана удается воспроизвести, по крайней мере, на качественном уровне все три основных визуализированные моды комплексного следа: № 1, 2, 5, с учетом всех возможных режимов перемежаемости между ними. В целом можно надеяться на применимость сравнительно простой модели, допускающей аналитическое исследование, для физического моделирования следов от не слишком близко расположенных цилиндров благодаря вполне обозримому спектру потенциально воспроизводимых режимов течения, включая режимы перемежающегося следа.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛЕДА С ТЛЕЮЩИМ РАЗРЯДОМ В РАМКАХ МОДЕЛИ

В строгой постановке моделирование следа в условиях разряда потребовало бы решения краевой задачи для уравнений Навье–Стокса совместно с системой уравнений электродинамики и кинетических уравнений для плотности электронов и ионов. Получающаяся система нелинейных уравнений краевой задачи оказывается слишком сложной, связанной. Так, на движение ионов существенно влияет гидродинамика нейтральной компоненты плазмы, составляющей львиную долю частиц, при этом разряд оказывает (обратное) влияние на гидродинамику нейтралов через тепловыделение, а также и через силу Лоренца. Ввиду сложности такую задачу никогда не решают в полной постановке, а используют те или иные упрощения. Нас интересует случай тлеющего разряда, т.е. сравнительно низких плотностей тока, соответственно магнитогидродинамическим взаимодействием в плазме можно пренебречь. В условиях эксперимента [5] средняя плотность тока в объеме камеры не превышала 40 А/м^2 , а на катоде – менее 200 А/м^2 . Для случая тлеющего разряда в системе электродинамических уравнений краевой задачи можно ограничиться учетом уравнения Пуассона для потенциала электрического поля и уравнений переноса электронов и ионов с учетом процессов их рождения и гибели [19, 22]. Остается рассмотреть влияние тепловыделения в разряде на течение в рамках этой модели. Плотность диссипации энергии электрического поля σE^2 высока там, где велико электрическое поле. Тлеющий разряд отличается высоким пространственным контрастом напряженности поля. В этом случае поле мало в области основного объема разряда – “анодного столба” и прилегающих областей и, напротив, велико в узкой области катодного падения потенциала, прилегающей к катоду (а также и в области анодного падения). Практически вся диссипируемая в катодном (и анодном) падении энергия сразу выделяется в форме тепла, сообщаемого газу нейтральных частиц. В случае расчета течения плазмы молекулярных газов следует учитывать и другой канал нагрева. В молекулярных газах значительная (иногда большая) часть диссипируемой в анодном столбе энергии поступает непосредственно в колебательные степени свободы молекул, и лишь затем сравнительно медленно релаксирует в тепло. Поскольку фактически строится модель формирования ближнего следа в окрестности цилиндра порядка его диаметра, то отмеченным прогревом газа через канал колебательной релаксации молекул можно пренебречь в этом малом объеме, расположенном на входе колебательно невозбужденного газа в область разряда. Тем более нагревом плазмы в области цилиндров через канал колебательной релаксации можно пренебречь для таких медленно релаксирующих газов, как азот [19, 22]. Соответственно отмеченным особенностям тепловыделения, непосредственное влияние тлеющего разряда на след в рамках предлагаемой модели сводится к локальному нагреву и соответствующему расширению газа в области катодного падения потенциала, которая погружена в пограничный слой на катоде, либо примыкает к области пограничного слоя (вблизи передней точки торможения потока). Прогрев заторможенного газа и рост толщины пограничного слоя на катоде приводят к росту толщины пограничного слоя на цилиндрах-турбулизаторах, формируемого из этого уже нагретого и заторможенного газа (не по всей высоте цилиндров, но на середине высоты канала – в области следа катода: рис. 2б). Этот процесс естественно трактовать как некоторое эффективное сближение цилиндров, тогда в рамках модели, процесс локального прогрева плазмы следует рассматривать как некоторое увеличение параметров, характеризующих взаимодействие парциальных следов – λ и $|l|$. Эффективное сближение цилиндров будем количественно характеризовать вариацией толщины пограничного слоя на них.

В рамках решения краевой задачи (для уравнений Навье–Стокса, уравнения Пуассона для потенциала электрического поля, и кинетических уравнений для плотности заряженных частиц) для случая тлеющего разряда можно рассмотреть и обратное влияние течения на характеристики разряда, например, ВАХ. Однако нас здесь интересует только тепловыделение в области катодного падения потенциала, определяемое током и самим катодным падением. В эксперименте [5] режим горения разряда на катоде был близок к нормальному, может быть с некоторым заходом в режим аномального разряда, поскольку катодное пятно покрывало большую часть поверхности катода при обсуждаемых токах $I = 1.5\text{--}2.0 \text{ А}$. Величина катодного падения потенциала была близка к величине нормального катодного падения в покоящейся плазме, поскольку скорости дрейфа ионов в области катодного падения потенциала были существенно выше, чем скорость течения плазмы – порядка 100 м/с в условиях [5]. Тогда получаем, что при фиксированном токе с катода тепловыделение в локальной области, примыкающей к катоду и одному из цилиндров, могло варьировать за счет перераспределения плотности тока вдоль катода. Перераспределение тока вдоль катода возможно в меру перераспределения оставшейся свободной от катодного пят-

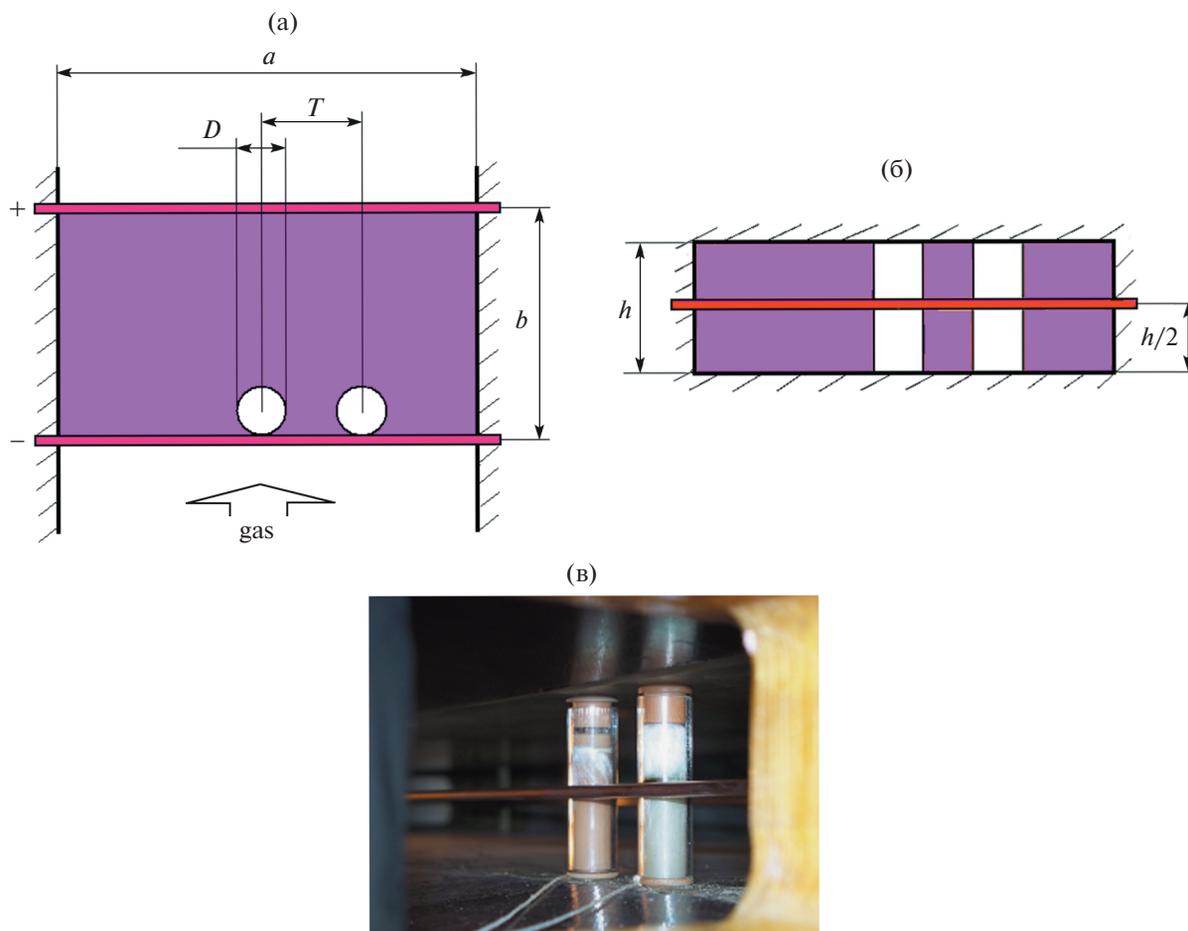


Рис. 2. Разрядная камера с вертикально расположенными цилиндрами-турбулизаторами потока: (а) – схематический вид камеры сверху; (б) – вид по направлению течения газа; (в) фото под углом 45 градусов к направлению втекающего слева направо в камеру газа (вид через смотровое окно в боковой стенке камеры). Хорошо различим горизонтальный медный катод, касающийся обоих кварцевых цилиндров.

на поверхности катода и в меру локального перехода пятна в режим аномального горения. Отмеченное перераспределение плотности тока вдоль катода может быть вызвано как неоднородностью прогрева плазмы в пограничном слое на катоде, так и процессами в объеме разрядной камеры – развитием ионизационно-перегревной неустойчивости при повышенных токах. На данном этапе построения модели выносим вопросы развития неустойчивости в объеме камеры за рамки рассмотрения.

Имея соответствующую модель объекта, можно приступить к анализу экспериментальных данных.

5. ЭФФЕКТ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В РАМКАХ МОДЕЛИ СЛЕДА

5.1. Экспериментальные данные и их первоначальная интерпретация

Нас интересуют в основном плазменные течения [19, 20], прежде всего, перестройка следа от пары цилиндров под действием тлеющего разряда [5]. В этом эксперименте разрядная камера имела протяженность вниз по потоку (от катода до анода) $b = 260$ мм, поперечное сечение камеры имело высоту $h = 53$ мм и ширину $a = 960$ мм (рис. 2). Два кварцевых цилиндра – турбулизатора потока, диаметром по $D = 15$ мм располагались на входе газа в разрядную камеру вертикально, на относительном расстоянии между их осями $T/D = 2.2$. Сигнал пульсаций скорости снимался на расстоянии 130 мм ниже одного из цилиндров пары с помощью специально разработанного датчика поперечной составляющей скорости течения [21]. Основной – несамостоятельный тлеющий разряд был приложен между параллельными медными трубчатыми катодом диаметром 4 мм и анодом диаметром 6 мм. Горизонтальные оси катода и анода были перпен-

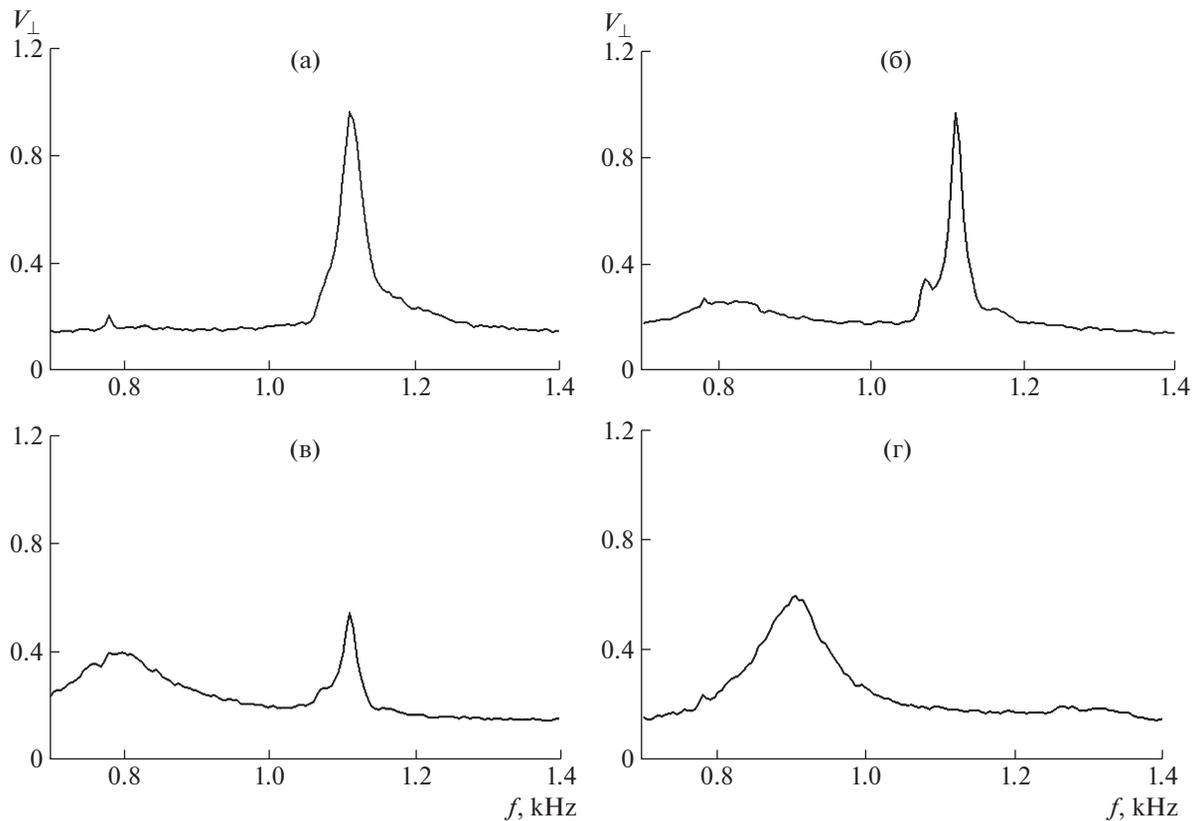


Рис. 3. Спектры поперечной составляющей скорости течения в следе от двух цилиндров (в относительных единицах): (а) – газовый след, безразмерная центральная частота ВЧ-пика $\omega^{HF} = \frac{f^{HF}}{f_{sol}} = \frac{1.12 \text{ kHz}}{0.90 \text{ kHz}} = 1.24$; (б) – плазменный след при плотности тока $J = 1.5 \text{ А/м}$, частоты НЧ- и ВЧ-пиков $\omega^{LF} = \frac{f^{LF}}{f_{sol}} = \frac{0.81 \text{ kHz}}{0.90 \text{ kHz}}$, $\omega^{HF} = \frac{f^{HF}}{f_{sol}} = \frac{1.12 \text{ kHz}}{0.90 \text{ kHz}} = 1.24$; (в) – плазменный след при плотности тока $J = 2 \text{ А/м}$, частоты $\omega^{LF} = \frac{f^{LF}}{f_{sol}} = \frac{0.80 \text{ kHz}}{0.90 \text{ kHz}} = 0.89$, $\omega^{HF} = \frac{f^{HF}}{f_{sol}} = \frac{1.12 \text{ kHz}}{0.90 \text{ kHz}} = 1.24$. Для сравнения: (г) – спектр скорости в плазменном следе от одиночного цилиндра при токе $J = 2 \text{ А/м}$, $f_{sol} = 0.9 \text{ кГц}$, $\omega_{sol} = 1$.

дикулярны осям кварцевых цилиндров – турбулизаторов и располагались посередине высоты цилиндров и разрядной камеры – рис. 2б. Цилиндры касались катода, причем были установлены сразу за катодом, в его аэродинамической тени – рис. 2а. Ввиду того, что диаметр катода был примерно в четыре раза меньше диаметра цилиндров, считаем, что эффектами трехмерности течения в сравнительно малой области точек касания можно в первом приближении пренебречь. Тогда сформировавшиеся за цилиндрами-турбулизаторами парциальные дорожки Кармана оставались квазидвумерными, соответственно, к такому следовому течению приложима разрабатываемая модель. Ионизация поступающего в камеру газа осуществлялась вспомогательным импульсным разрядом малой мощности в сравнении с мощностью основного разряда. Импульсное электрическое поле прикладывалось через пластины, диэлектрически замурованные в верхнюю и нижнюю стенки камеры. Высокая частота повторения импульсов – примерно 5 кГц существенно превышала наблюдаемые частоты осцилляций скорости и обеспечивала квазинепрерывное горение основного несамостоятельного тлеющего разряда.

Было обнаружено, что с увеличением тока основного разряда до погонной плотности $J = 2 \text{ А/м}$ на катоде, спектр пульсаций скорости в газовом следе перестраивался от спектра с единственным максимумом к спектру с двумя – рис. 3. Так, в эталонном газовом течении, при давлении

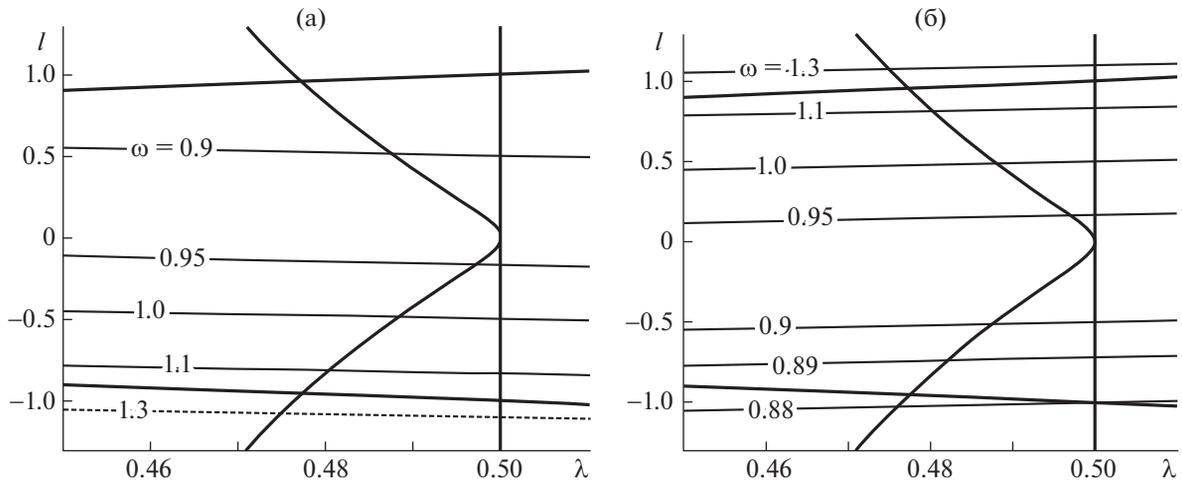


Рис. 4. Иллюстрация (тонкими линиями уровня) зависимости частот осцилляций $\omega(\lambda, l)$ по глобальным модам следа от параметров модели λ, l : (а) — для моды № 1; (б) — для моды № 2; для моды № 5 $\omega = 0.89$ на левой границе ее области существования. Жирные линии — границы областей существования мод. Здесь стоит отметить, что на рис. 4 приведен сильно растянутый по горизонтали малый фрагмент той широкой области параметров модели λ, l , что приведена на рис. 1.

смеси 18 Торр = $16N_2 + 2He$, невозмущенной скорости течения 60–70 м/с спектр пульсаций скорости представлял собой распределение с единственным высокочастотным пиком (ВЧП), с центром, расположенным на частоте 1.12 кГц. С ростом тока разряда этот ВЧП уменьшался в размерах, оставляя при этом неизменной центральную частоту пульсаций — 1.12 кГц. Одновременно с уменьшением “амплитуды” ВЧП в плазме появлялся и рос в размерах второй низкочастотный пик (НЧП) на центральной частоте 0.8 кГц. Для одиночного цилиндра в тех же условиях плазменного течения соответствующая частота осцилляций составила величину 0.9 кГц. Наблюдавшаяся перестройка следа была плавной в том смысле, что амплитуды ВЧП и НЧП изменялись непрерывно и монотонно с изменением тока разряда. Из этих наблюдений был сделан вывод, что имела место перестройка комплексного следа под действием разряда от режима одной (ВЧ) моды в газе к режиму перемежающихся ВЧ- и НЧ-мод в плазме. Благодаря наблюдению эффекта захвата частоты осцилляций по ВЧ-моду обертоном частоты вибраций установки, эта ВЧ-мода была идентифицирована как мода синфазно синхронизованных дорожек — № 1. Здесь следует обратить внимание на узость спектрального пика захваченной ВЧ-моды (рис. 3а) по сравнению с шириной пика для следа от одиночного цилиндра (рис. 3г) в отсутствие эффекта захвата. С учетом идентификации ВЧП, НЧ спектральный максимум остается отождествить с модой № 5 асимметричного следа и/или модой противозапно синхронизованных дорожек — № 2.

5.2. Оценка свободных параметров модели по данным эксперимента

Проведем сопоставление частот осцилляций по глобальным модам с экспериментальными данными по локализации ВЧП и НЧП: $\omega^{HF} = 1.24$, $\omega^{LF} = 0.89$. Для этого рассмотрим распределение расчетных частот осцилляций, проиллюстрированное на рис. 4 для случая $\Delta = -0.1$; $\varepsilon \approx 0.1-0.2$. Как отмечено в разд. 4, включению разряда и увеличению его тока соответствует движение изображающей точки по карте параметров модели — рис. 4 вниз-направо, в сторону увеличения модельных параметров $\lambda, |l|$, характеризующих взаимодействие парциальных дорожек Кармана. Такое движение изображающей точки означает приближение к границе области существования моды № 1, что влечет за собой уменьшение вероятности ее осуществления в пользу моды № 5 и/или № 2. Если точка пересекает границу области существования моды № 5, то реализуется и эта мода.

Допустим, что перестройка следа от моды № 1 в газе происходит сразу к двум модам в плазме: № 5 и № 2 (к той или к иной). В обоснование такой возможности отметим, что НЧ пик самый широкий среди наблюдавшихся — рис. 3а–г, что, по крайней мере, не противоречит возможно-

сти его отождествления с обеими модами № 5 и № 2. Тогда в точке перестройки следа к режиму трех перемежающихся мод (№ 1, 5, 2) должны быть выполнены три условия. Первое, параметр $\Delta = -0.1$ с тем, чтобы частота возникающего в условиях разряда НЧП удовлетворяла условию $\omega_{\text{№5}} = \omega^{LF} = 0.89$. Второе, аналогичное требование выставляем для моды № 2: $\omega_{\text{№2}} = \omega^{LF} = 0.89$. Третье условие – изображающая точка должна лежать на границе существования моды № 5: левая граница неравенства (3.8). Соответственно получаем оценку трех параметров модели, соответствующих точке перестройки от моды № 1 к двум модам № 5 и 2 сразу: $\Delta \approx -0.1$; $\lambda \approx 0.48$; $l \approx -0.77$. По результатам проведенного сопоставления расчетных и экспериментальных данных четвертый параметр модели остался несколько неопределенным, но он оценивался ранее экспериментально [17, 18]: $\varepsilon = 0.1-0.2$.

Перестройка течения сразу к двум модам – это вырожденный случай. Теперь рассмотрим общий случай бифуркации к одной из мод № 5 или № 2. Перестройка только к моде № 5 соответствует пересечению границы ее существования (3.8) изображающей точкой (рис. 4) где-то выше уровня $l \approx -0.77$. При этом значение параметра $\Delta \approx -0.1$ остается фиксированным, чтобы частота осцилляций по моде № 5 соответствовала экспериментально наблюдаемому значению $\omega_{\text{№5}} = \omega^{LF} = 0.89$.

Напротив, рассмотрим вариант перестройки течения к моде № 2 (без участия моды № 5); это случай $\Delta < -0.1$. Трансформация следа происходит на линии уровня $\omega_{\text{№2}} = \omega^{LF} = 0.89$, где-то вблизи границы существования моды № 1, скажем, на пересечении с прямой $l \approx -1.6\lambda$ (содержащей отмеченную выше точку $\lambda \approx 0.48$; $l \approx 0.77$ перестройки к режиму перемежаемости трех мод № 1, 2, 5). Соответственно, имеем оценку параметров модели в случае перестройки течения только к моде № 2: $\Delta < -0.1$; $\lambda \approx 0.386/(-18\Delta - 1)$; $l \approx -1.6\lambda$.

Здесь уместно привести независимый аргумент в пользу перестройки течения под действием разряда в режим именно моды № 5 асимметричного следа. Рассматривая эффект тлеющего разряда, следует учитывать его имманентное свойство – ионизационно-перегревную неустойчивость. Вблизи катода режим разряда был близок к самостоятельному, поскольку катод располагался на входе нейтрального газа в разрядную камеру, причем область катода находилась практически вне области ионизирующего поля. Соответственно самостоятельному режиму разряда, здесь и при умеренных токах вероятно развитие асимметрии токораспределения между двумя областями не секционированного катода, примыкающими к соседним цилиндрам рис. 2. Эта асимметрия токораспределения вдоль катода приводит к различию в нагреве пограничных слоев на цилиндрах, что в свою очередь индуцирует перестройку течения к гидродинамической моде асимметричного следа № 5 в условиях разряда.

Несмотря на некоторую неоднозначность полученного результата – неопределенности в идентификации НЧ-моды следа, проведенная оценка параметров модели для условий нашего эксперимента позволила продвинуться в обосновании предлагаемой модели комплексного следа. По результатам этой оценки, условия применимости теории возмущений оказались выполнены $\varepsilon\lambda \ll 1$, $\varepsilon|l| \ll 1$ для рассматриваемого случая [5]. Тем самым методика построения модели для системы слабо взаимодействующих парциальных дорожек Кармана на основании теории возмущений оказалась самосогласованной, по крайней мере, для области $L/D > 2$.

5.3. Механизм влияния тлеющего разряда на след

В качестве механизма влияния разряда на течение ближнего следа от цилиндров рассматривается сужение профиля скорости течения в зазоре между цилиндрами в результате нагрева плазмы, вызванного диссипацией энергии электрического поля. На качественном уровне рассмотрения картина следующая. Нагрев плазмы в области катодного падения потенциала приводит к росту толщины пограничного слоя на катоде, а также и толщины пограничных слоев на цилиндрах, формируемых из плазмы, заторможенной на катоде, поскольку цилиндры располагаются сразу за катодом. Кроме того, нагрев плазмы пограничных слоев на катоде и, соответственно, на цилиндрах означает уменьшение эффективного числа Рейнольдса течения, вызванное ростом коэффициента кинематической вязкости, что также ведет к росту толщины пограничных слоев на цилиндрах. Соответственно, в модели рост тока разряда означает некоторое эффективное сближение цилиндров, т.е. увеличение параметров взаимодействия дорожек λ , $|l|$ для плазменного

следа по сравнению со случаем эталонного газового течения, что и вызывает, в свою очередь, перестройку течения.

Для количественного обоснования теплового механизма эффекта оценим рост толщины пограничных слоев на цилиндрах, происходящий под действием разряда, т.е. при переходе от газового течения к плазменному. Толщину динамического пограничного слоя δ на цилиндрах в точке его отрыва $x = \pi D/4$ (где $D = 15$ мм – диаметр цилиндра) в газе оцениваем по простой формуле для пластины [23]. Для газового течения

$$\delta_{gas} \approx 5\sqrt{vx/V_\infty} \approx 2 \text{ мм} \quad (5.1)$$

при скорости потока $V_\infty = 60$ м/с, давлении $p = 2400$ Па = 18 Торр, температуре газа $T = 300$ К и кинематической вязкости азота аппроксимированной формулой

$$\nu = 1.6(10)^{-5}(10^5 \text{ Па/р})(T/300 \text{ К})^{1.78}, \text{ м}^2/\text{с} \quad (5.2)$$

Для случая плазменного течения средний перегрев плазмы пограничного слоя на цилиндрах $\langle \Delta T \rangle$ в точке его отрыва оцениваем из интегрального соотношения баланса (5.3).

$$\begin{aligned} \rho C_p \langle \Delta T \rangle U_\infty \delta_{pl} (d_c + 2\delta_c) &= U_{cf} I \left(\frac{l}{a} \right) \\ l \approx \delta_{pl} \left[\left(\frac{D}{2\delta_{pl}} \right)^{2/3} + \frac{1}{3} + O((\delta_{pl}/D)^{2/3}) \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

В формуле (5.3) объемная теплоемкость азота есть $\rho C_p = 7p/2T$ (где ρ – плотность азота), величина нормального катодного падения потенциала на меди в азоте $U_{cf} \approx 208V$ [22], погонная плотность тока на катоде $I/a \approx 2$ А/м, диаметр катода $d_c = 4$ мм, толщина пограничного слоя на катоде $\delta_c \approx 1$ мм (аналогично (5.1)), величина l – это длина участка катода вдоль его оси. Из газа миновавшего участок l (и только из него) формируется пограничный слой на цилиндрах в точке его отрыва. Считается, что плотность тока однородно распределена вдоль оси катода. В оценке (5.3) учтено, что толщина слоя нормального катодного падения потенциала меньше толщины пограничного слоя на катоде $pd = 0.23$ Торр·см для меди в воздухе [19, 22]. Никакой нагрев плазмы вне слоя катодного падения не учитывается. Кроме того, в этой оценке (5.3) не проводится различие между толщинами динамического и температурного пограничных слоев на катоде, поскольку число Прандтля мало отличается от единицы $Pr = 0.72$ [23].

Пограничный слой на цилиндрах в области “тени” за катодом (посередине высоты камеры – рис. 2б) формируется из плазмы ближнего следа катода. Соответственно, толщину динамического пограничного слоя на цилиндрах в области “тени”, для условий плазменного потока δ_{pl} , в сравнении со случаем газового течения (5.1), можно оценить (снизу) с помощью (5.3), по зависимости коэффициента кинематической вязкости газа/плазмы от температуры (5.2): $\delta_{pl}/\delta_{gas} \geq (\nu_{pl}/\nu_{gas})^{1/2}$.

$$\frac{\delta_{pl}}{\delta_{gas}} \approx \left(1 + \frac{\langle \Delta T \rangle}{T} \right)^{0.89} \quad (5.4)$$

Оценим сужение номинального зазора между цилиндрами – 18 мм на толщину пограничных слоев на двух цилиндрах. Для газового течения сужение составляет, где-то, $2\delta_{gas} = 4$ мм (по (5.1)), а в плазменном течении сужение достигает при токе разряда 2А примерно шести мм (по (5.3), (5.4)). Здесь подчеркнем, что оценка (5.3), (5.4) сужения зазора в плазменном течении при плотности тока в эксперименте 2 А/м – это оценка снизу. Оценка по минимуму, поскольку не учтен вклад процессов быстрой диссипации энергии разряда вне области катодного падения потенциала, но в ближнем следе катода (вклад, определяемый слабо контролируемой концентрацией примесей в газе [22]). Не учтены никакие нелинейные эффекты типа перераспределения тока вдоль ряда цилиндров, тогда как экспериментальные данные прямо указывают на нелинейную зависимость эффекта от тока разряда (рис. 3а, б, в).

Оцененный масштаб сужения зазора следует признать значимым, позволяющим объяснить эффект разряда ввиду высокой чувствительности следового течения за парой цилиндров к этой величине, если только зазор примерно равен диаметру цилиндров и менее $T/D < 2.2-2.3$ [1–4],

как в рассматриваемом случае [5]. В краткой формулировке заключение следующее: увеличение тока разряда вызывает рост модельных параметров взаимодействия λ , $|l|$ между парциальными дорожками Кармана, что приводит к бифуркации течения к режиму перемежаемости глобальных мод. Здесь следует подчеркнуть определенную роль (затравочную и стабилизирующую), которую играет взаимообусловленность неоднородности распределения тока вдоль ряда цилиндров и асимметрии течения комплексного следа. Развитие ионизационно-перегревной неустойчивости тлеющего разряда (на обратимой стадии – до контракции) усиливает фокусировку тока в участок катода, примыкающий к одному из цилиндров (индуцируя переход к аномальному разряду), увеличивая соответственно толщину пограничного слоя на этом цилиндре и тем самым усиливая асимметрию течения. И наоборот, асимметрия течения приведет к перераспределению тока между областями катода, примыкающими к двум цилиндрам (за счет вариации первого ионизационного коэффициента в результате неоднородного прогрева [19, 22]). Несомненно, что отмеченная положительная обратная связь наличествует, но вопрос, являлся ли вклад ионизационно-перегревной неустойчивости в механизм рассматриваемого эффекта определяющим, соответственно, был ли вклад асимметричной моды № 5 в НЧ пик основным, остается открытым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены особенности и взаимосвязь известных одномерных моделей следов: типа Стюарта–Ландау и Ван дер Поля. На их основе, в стиле теории возмущений примененной к известной, обоснованной модели следа от уединенного цилиндра, построена простая динамическая модель турбулентного следа от пары не слишком близко расположенных цилиндров, установленных в плоскости, перпендикулярной набегающему потоку. Модель отличается учетом нелинейного характера взаимодействия между областями формирования парциальных дорожек Кармана от каждого цилиндра пары, при этом интенсивность взаимодействия дорожек считается малой, допускающей применение теории возмущений. Установлено, что в рамках развиваемой модели реализуется набор из трех огрубленных мод следа, визуализируемых при различных расстояниях между такими цилиндрами [1–4]. Это две симметричные одночастотные моды в форме синфазно- и противофазно-синхронизованных парциальных дорожек Кармана и асимметричная двухчастотная мода, представляющая собой две различающиеся дорожки. Все эти три расчетные моды реализуются, в том числе, в различных режимах перемежаемости между ними (при соответствующем выборе параметров взаимодействия λ и l модели); при том, что в экспериментах с нейтральными жидкостями и газами отмечается единственный режим перемежаемости (между модой синфазно-синхронизованных дорожек и асимметричной модой “biased flow”).

На основе сопоставления выводов модели с результатами наших измерений частот осцилляций скорости течения в следе и литературных данных визуализации нейтральных следов подтверждена первоначальная интерпретация эффекта разряда – перестройка от одномодового течения к режиму перемежаемости глобальных мод. Установлено, что эталонный газовый след находился в состоянии глобальной моды в форме двух синфазно-синхронизованных дорожек Кармана. С включением разряда происходила бифуркация следа к режиму перемежаемости между указанной выше модой и модой асимметричного следа (и/или модой в форме противофазно-синхронизованных дорожек). Более того, в рамках сопоставления модельных и экспериментальных результатов удалось выполнить количественные оценки параметров модели следа для окрестности точки перестройки следа в условиях нашего эксперимента. Эти оценки позволили обосновать правомерность использования теории возмущений в целях построения модели комплексного следа от пары не слишком близко расположенных цилиндров.

Успешное решение задачи интерпретации позволило исследовать механизм наблюдавшегося эффекта. Для этого проведена оценка прогрева плазмы при включении разряда. Тлеющий разряд в азоте приводит к прогреву плазмы, прежде всего, в слое катодного падения потенциала. Из этой нагретой плазмы формируются пограничные слои на цилиндрах, расположенных вплотную за катодом. С ростом тока разряда растет толщина пограничного слоя на цилиндрах, и тем самым усиливается гидродинамическое взаимодействие областей формирования парциальных дорожек Кармана. В рамках модели усиление взаимодействия выражается в увеличении соответствующих параметров модели – λ , $|l|$. Вариация параметров модели в окрестности их бифуркационных значений с необходимостью приводит к перестройке течения следа. В соответствии с установленной в рамках модели картой режимов следа, наблюдается бифуркация от одномодового режима (синфазно синхронизованных дорожек) к режиму перемежающегося турбулентного течения.

Тема исследования турбулентных следовых течений в условиях тлеющего разряда давно привлекает наше внимание, и мы неоднократно публиковались по этой тематике. Настоящая статья может рассматриваться как обзорная по нашим исследованиям следа от пары цилиндров, поэтому не лишним представляется отметить новые, не опубликованные нами ранее материалы:

1. Выполнен краткий обзор известных одномерных моделей нейтральных следовых течений. На основе выводов по обзору сформулирована задача построения простой модели комплексных следов от группы цилиндров, воспроизводящей свойство перемежаемости следа, и пригодной для моделирования течения, в том числе, в условиях тлеющего разряда.

2. Рассматриваемый вариант такой модели был предложен нами ранее [17, 18]. В данной публикации подробно прописаны конфигурация и область существования всего спектра глобальных мод следа, существующих в рамках этой модели, приведено распределение частот осцилляций по модам. В частности, впервые представлены характеристики всюду линейно-неустойчивой моды № 6.

3. Впервые проведенное подробное сопоставление результатов модели с литературными данными визуализации нейтральных следов и с нашими данными по осцилляциям скорости позволило сделать вывод о пригодности модели в целом для случая сравнительно далеко отстоящих цилиндров, т.е. для сравнительно слабо взаимодействующих парциальных следов в рамках модели. В области слабого взаимодействия модель оказалась самосогласованной и работоспособной, по крайней мере, для условий нашего эксперимента: $T/D = 2.2$. Для этих условий экспериментальные оценки параметров малости теории возмущений, использованной при построении модели, оказались благоприятными: $\epsilon\lambda, \epsilon|l| \ll 1$.

4. Отмечаются простота и наглядность модели. Так, впервые показано, что четырехмерная система уравнений модели может быть сведена к системе двух ведущих уравнений. Параметры модели имеют прозрачный физический смысл, который впервые подробно прописан в статье. Влияние разряда учтено простейшим способом – посредством вариации параметров модели. Простота модели, в совокупности с впервые проведенной минимальной оценкой утолщения пограничного слоя на цилиндрах в условиях разряда позволили дать элементарное объяснение эффекта разряда. Наблюдалась перестройка глобальной моды течения в результате индуцированного разрядом роста толщины пограничного слоя на цилиндрах, что нашло выражение в дрейфе управляющих параметров $\lambda, |l|$ модели следа в области их бифуркационных значений. Минимальность проведенной оценки роста пограничного слоя обоснована, в том числе, с учетом впервые публикуемого спектра скорости при промежуточном значении плотности тока $J = 1.5 \text{ A/m}$ – рис. 36.

Статья составлена по материалам, представленным на конференции “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность-2020” и на “Конференцию по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли АММАИ-2020”.

Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию № АААА-А20-120011690135-5. Авторы признательны Эдуарду Владимировичу Теодоровичу за внимание к работе и дискуссию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sumner D., Reitenbach H.K.* Wake interference effects for two finite cylinders: A brief review and some new measurements // *J. Fluids Struct.* 2019. V. 89. P. 25–39.
2. *Wong C.W., Zhou Y., Alam Md.M., Zhou T.M.* Dependence of flow classification on the Reynolds number for two-cylinder wake // *J. Fluids Struct.* 2014. V. 49. P. 485–497.
3. *Sumner D.* Two circular cylinders in cross-flow: A review // *J. Fluids Struct.* 2010. V. 26. P. 849–899.
4. *Hu J.C., Zhou Y.* Flow structure behind two staggered circular cylinders. Part 1. Downstream evolution and classification // *J. Fluid Mech.* 2008. V. 607. P. 51–80.
5. *Гембаржевский Г.В.* Электроразрядный эффект в плазменном течении следа: перераспределение энергии пульсаций в область низких частот // *Письма в ЖТФ.* 2009. Т. 35. Вып. 5. С. 95–102.
6. *Peschard I., Le Gal P.* Coupled wakes of cylinders // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 77. № 15. P. 3122–3125.
7. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Либроком, 2010. 552 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с. Параграф 26.
9. *Sipp D., Lebedev A.* Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 593. P. 333–358.
10. *Barkley D.* Linear analysis of the cylinder wake mean flow // *Europhys. Lett.* 2006. V. 75. P. 750–756.

11. *Williamson C.H.K.* Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder // *Phys. Fluids*. 1988. V. 31. P. 2742–2744.
12. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения Ван дер Поля // *Изв. вузов. ПНД*. 2014. Т. 22. № 4. С. 3.
13. *Жуй Ч., Шан Л., Цзяньхуа Ц., Фен Б., Чжунжун Л.* Характеристики течения в следе за треугольными призмами // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 6. С. 48–59.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958. 408 с.
15. *Simiu E., Scanlan R.H.* Wind effects on structures: An introduction to wind engineering. N.Y.-Chichester-Brisbane-Toronto: John Willey & Sons, 1978. Chapter 6. Перевод: Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения. М.: Гидрометеоиздат, 1984. 358 с. Гл. 6. Раздел 6.1.1. С. 158–159.
16. *Qu Y., Metrikin A.* A single van der Pol wake oscillator model for coupled cross-flow and in-line vortex-induced vibrations // *Ocean Engineering*. 2020. V. 196. 106732.
17. *Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.* Моделирование эволюции плазменного следа пары цилиндров под действием электрического разряда // *Письма в ЖТФ*. 2015. Т. 41. Вып. 23. С. 40–48.
18. *Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.* Развитие простой модели следа от пары цилиндров: двухчастотная мода течения // *ТВТ*. 2019. Т. 57. № 1. С. 121–126.
19. *Суржиков С.Т.* Физическая механика газовых разрядов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 640 с.
20. *Воеводин А.В., Петров А.С., Петров Д.А., Судаков Г.Г.* Экспериментальные и расчетные исследования характеристик импульсных тепловых актюаторов // *Изв. РАН. МЖГ*. 2018. № 1. С. 107–120.
21. *Гембаржевский Г.В., Генералов Н.А., Косынкин В.Д.* Датчик пульсаций скорости турбулентного газового потока в условиях тлеющего разряда // *Приборы и техника эксперимента*. 1993. № 3. С. 149–155.
22. *Голубев В.С., Пашкин С.В.* Тлеющий разряд повышенного давления. М.: Наука, 1990. 335 с. Часть 2. Глава 3.
23. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1965. Перевод: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.

УДК 532.526

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ УГЛОВ АТАКИ НА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА СТРЕЛОВИДНОМ КРЫЛЕ С $\chi = 72^\circ$

© 2022 г. Ю. Г. Ермолаев^a, А. Д. Косинов^a, В. Л. Кочарин^a, А. Н. Семенов^a,
Н. В. Семенов^{a,*}, С. А. Шипуль^a, А. А. Яцких^a

^a *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия*

**E-mail: semion@itam.nsc.ru*

Поступила в редакцию 01.07.2021 г.

После доработки 25.08.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Проведены экспериментальные исследования влияния малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое стреловидного крыла с углом стреловидности передней кромки 72° при числах Маха 2, 2.5 (дозвуковая передняя кромка) и 4 (сверхзвуковая передняя кромка). Измерения проводились при помощи термоанемометра постоянного сопротивления в аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН. Получены кривые нарастания, амплитудно-частотные спектры пульсаций, определены положения ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое на модели стреловидного крыла для нескольких значений угла атаки. Показано, что изменение угла атаки оказывает сильное влияние на число Рейнольдса перехода при числах Маха потока $M = 2$ и 2.5 . При числе Маха 4 малое изменение угла атаки не привело к значительному увеличению числа Рейнольдса перехода. Уменьшение числа Рейнольдса перехода с ростом числа Маха, зафиксированное для модели крыла с углом стреловидности $\chi = 72^\circ$, хорошо согласуется с данными для модели крыла с $\chi = 45^\circ$.

Ключевые слова: эксперимент, сверхзвуковой пограничный слой, стреловидное крыло, угол атаки, угол стреловидности, ламинарно-турбулентный переход, число Рейнольдса перехода

DOI: 10.31857/S0568528122010030

Исследования выполнены с целью изучения влияния малых углов атаки на положение ламинарно-турбулентного перехода и на развитие возмущений в пограничных слоях на стреловидных крыльях при сверхзвуковых скоростях потока. Это имеет практический интерес, так как подобные течения реализуются при обтекании крыла самолета и необходимы для создания инженерных методов предсказания перехода.

Известно, что малое изменение угла атаки на острых конусах приводит к резкому уменьшению чисел Рейнольдса перехода на подветренной образующей, а на наветренной стороне наблюдается плавное возрастание [1–3]. Увеличение притупления носка конуса приводит к уменьшению чувствительности числа Рейнольдса перехода к углу атаки.

Результаты исследований, в которых в той или иной степени рассматривалось влияние угла атаки на положение ламинарно-турбулентного перехода на стреловидных крыльях при сверхзвуковых скоростях потока, приведены в работах [4, 5]. Эксперименты проводились на модели крыла с углом стреловидности передней кромки $\chi = 45^\circ$ при числе Маха $M = 2$ в малошумной аэродинамической трубе Т-325 в ИТПМ СО РАН. При изменении угла атаки приблизительно от -2° до 2.5° происходит увеличение числа Рейнольдса перехода Re_{cr} от 1.4×10^6 до 2.4×10^6 . Также было проведено сравнение развития возмущений в пограничном слое на стреловидных крыльях с результатами расчетов по линейной теории устойчивости. Результаты расчетов находятся в хорошем качественном согласовании с данными экспериментов. Показано, что оценка положения

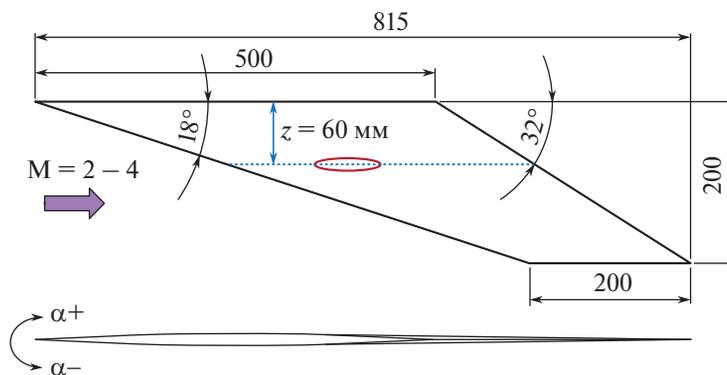


Рис. 1. Экспериментальная модель стреловидного крыла.

ламинарно-турбулентного перехода на основе линейной теории устойчивости по методу e^N может проводиться, в том числе, и для пространственных пограничных слоев.

Данная работа является продолжением цикла исследований по влиянию малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковых пограничных слоях на стреловидных крыльях. Представляются результаты исследований на крыле с углом стреловидности передней кромки 72° при числах Маха набегающего потока $M = 2, 2.5$ (дозвуковая передняя кромка) и 4 (сверхзвуковая передняя кромка). Проводится совместный анализ новых экспериментальных данных с результатами, полученными ранее на скользящем крыле с углом стреловидности кромки 45° , представленными в работах [4, 5].

ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты выполнены в малошумной сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН. На рис. 1 схематически показана экспериментальная модель стреловидного крыла. Измерения проводились на модели такого крыла с изменяемой длиной хорды по размаху (хорда у основания — 500 мм и 200 мм в конце крыла). Угол стреловидности передней кромки составляет 72° , задней — 58° . Это при $M = 2$ и 2.5 соответствует передней кромке дозвуковой, а при $M = 4$ — сверхзвуковой. Измерения проводились на верхней поверхности модели по линии вдоль потока на расстоянии 60 мм от основания модели (область измерений выделена на рис. 1).

Возмущения в потоке регистрировались термоанемометром постоянного сопротивления. Датчики термоанемометра изготавливались из вольфрамовой нити диаметром 10 мкм и длиной около 1.5 мм. Величина перегрева нити датчика устанавливалась 0.8 , а измеренные возмущения преимущественно соответствовали пульсациям массового расхода. Измерения пульсационных и средних характеристик потока проводились автоматизированной системой сбора данных. Постоянная составляющая напряжения E с выхода термоанемометра измерялась с помощью цифрового вольтметра Agilent 34401A. Пульсационный сигнал в диагонали моста термоанемометра оцифровывался 12-ти разрядным аналого-цифровым преобразователем (АЦП) и затем записывался в компьютер. Частота дискретизации АЦП составляла 750 кГц. По полученным данным определялись среднеквадратичный уровень пульсаций массового расхода, нормированный на среднее локальное течение, а также амплитудно-частотные спектры возмущений. Отметим, что на сегодняшний день термоанемометрия является наиболее эффективным методом исследований возникновения турбулентности в пограничных слоях. Более подробно постановка экспериментов и методика измерений описаны в [6].

В данных экспериментах использовались два способа определения положения ламинарно-турбулентного перехода с помощью термоанемометра: в первом методе проводятся измерения при фиксированном положении датчика, а изменяется значение единичного числа Рейнольдса потока Re_1 . Датчик устанавливался в сверхзвуковой части пограничного слоя немного ниже области максимальных пульсаций при минимальных значениях Re_1 , тогда при измерениях в переходной области датчик находился в окрестности максимума пульсаций. Во втором методе — выбирается $Re_1 = const$, а датчик перемещается вдоль координаты x . В этом случае проводилось перемещение датчика по координате x в области максимальных пульсаций по толщине погра-

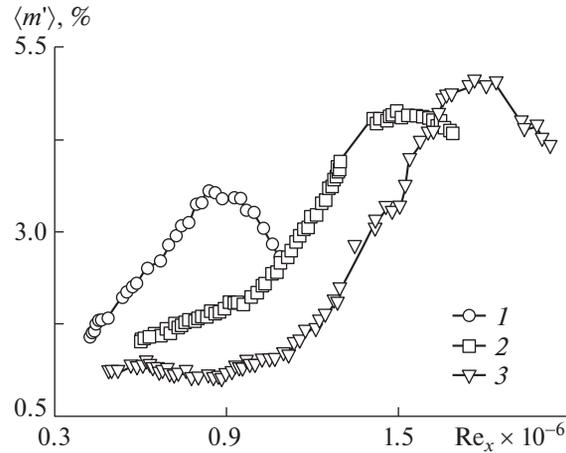


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичных пульсаций массового расхода от числа Рейнольдса при $M = 2$, где: 1 — $\alpha = -1^\circ$, 2 — $\alpha = 0^\circ$, 3 — $\alpha = 0.3^\circ$ (измерения по Re_1 ; $x = \text{const}$).

ничного слоя, а напряжение в диагонали моста термоанемометра поддерживалось постоянным за счет перемещения датчика по нормальной координате y . В результате измерений, как в первом, так и во втором случае, определялась зависимость среднеквадратичного уровня возмущений от числа Рейнольдса $Re_x = Re_1 \times x$. Максимум в распределении пульсаций массового расхода принято связывать с положением ламинарно-турбулентного перехода.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Выполнено экспериментальное исследование влияния угла атаки на положение ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном сверхзвуковом пограничном слое на модели стреловидного крыла с углом стреловидности 72° при числах Маха $M = 2, 2.5$ и 4 . При числе Маха набегающего потока $M = 2$ измерения проводились при постоянном значении продольной координаты x и различных значениях единичного числа Рейнольдса Re_1 . Полученные кривые нарастания возмущений при $M = 2$ и $x = 100$ мм представлены на рис. 2 для углов атаки $\alpha = -1^\circ$ (1), $\alpha = 0^\circ$ (2) и $\alpha = 0.3^\circ$ (3). Из представленных данных видно, что при увеличении угла атаки увеличивается число Re_x , при котором наблюдается максимальный уровень возмущений. При этом при больших углах атаки наблюдается больший уровень возмущений в пограничном слое.

Результаты экспериментов при $M = 2.5$ и 4 представлены на рис. 3а и рис. 3б соответственно. Для каждого случая измерения были проведены по x при фиксированных значениях единичного числа Рейнольдса потока Re_1 . Измерения при $M = 2.5$ были выполнены для следующих случаев: угол атаки $\alpha = -0.92^\circ$, $Re_1 = 9 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ (1); $\alpha = -0.4^\circ$, $Re_1 = 10^7 \text{ м}^{-1}$ (2); $\alpha = 0^\circ$, $Re_1 = 12 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ (3); $\alpha = 0.46^\circ$, $Re_1 = 11 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ (4). При $M = 4$ измерения были выполнены для углов атаки $\alpha = 0^\circ$ (1) и $\alpha = 0.46^\circ$ (2) при $Re_1 = 10^7 \text{ м}^{-1}$. Отметим, что только проведение измерений при минимальных значениях единичного числа Рейнольдса $Re_1 = 10^7 \text{ м}^{-1}$ для $M = 4$ и начала измерения от $x = 40$ мм от передней кромки модели позволили определить положение перехода. При отрицательных углах атаки переход наступает раньше и поэтому в возможной области измерений пограничный слой находится в турбулентном состоянии. Сложность определения положения перехода при $M = 4$ на Т-325 отмечалась еще в работе [7], и, видимо, связана с высоким уровнем шума набегающего потока. При $M = 2$ и 2.5 в свободном потоке Т-325 пульсации не превышают 0.2% от среднего течения в широком диапазоне значений единого числа Рейнольдса потока [6, 8–10], таким образом при данных числах Маха реализуется малозумный режим течения.

По данным, представленным на рис. 2 и 3, были получены числа Рейнольдса перехода Re_{tr} , соответствующие максимумам в зависимостях среднеквадратичных пульсаций $\langle m' \rangle$ от единичного числа Рейнольдса Re_1 . На рис. 4 показаны зависимости числа Рейнольдса перехода Re_{tr} от угла атаки на модели крыла с углом стреловидности передней кромкой ($\chi = 72^\circ$) при $M = 2$ (1, 2), 2.5 (3) и 4 (4). Кривые (1, 2) были получены при числе Маха $M = 2$ при разных положениях датчика термоанемометра относительно передней кромки крыла ($x = 100$ и 119 мм соответственно),

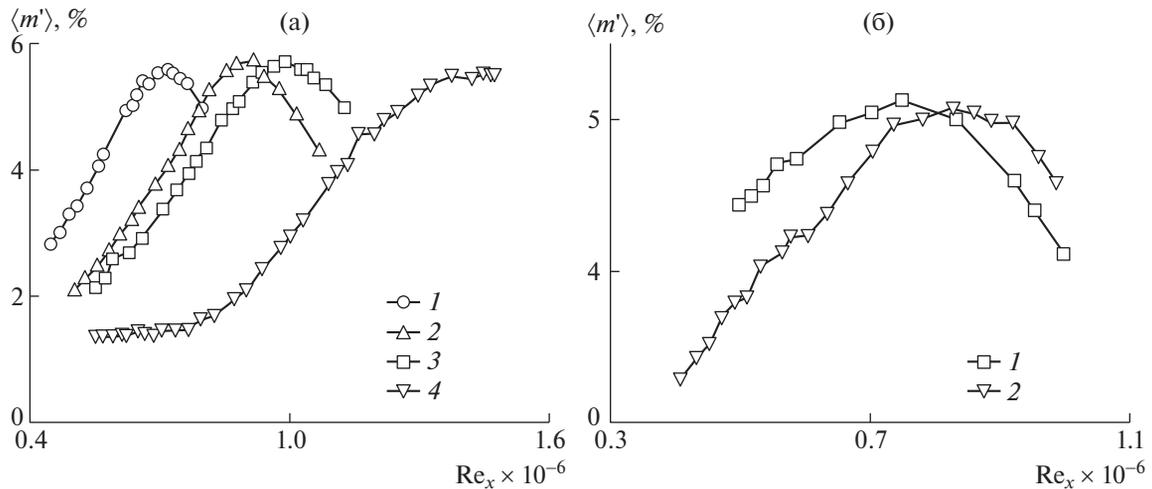


Рис. 3. Зависимости среднеквадратичных пульсаций массового расхода от числа Рейнольдса для различных углов атаки: (а) – $M = 2.5$; 1 – $\alpha = -0.92^\circ$, $Re_1 = 9 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$; 2 – $\alpha = -0.4^\circ$, $Re_1 = 10^7 \text{ м}^{-1}$; 3 – $\alpha = 0^\circ$, $Re_1 = 12 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$; 4 – $\alpha = 0.46^\circ$, $Re_1 = 11 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, (б): $M = 4$, $Re_1 = 10^7 \text{ м}^{-1}$; 1 – $\alpha = 0^\circ$, 2 – $\alpha = 0.46^\circ$.

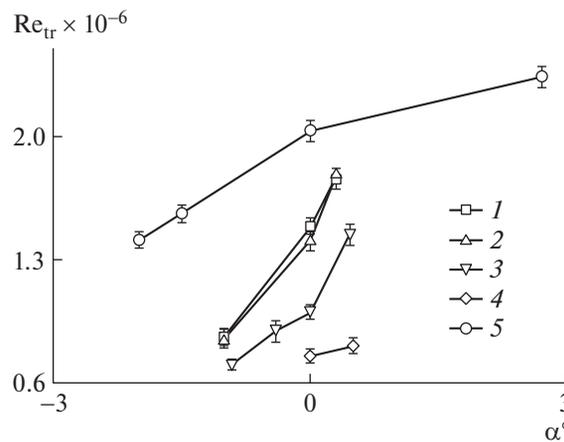


Рис. 4. Зависимости числа Рейнольдса перехода от угла атаки для различных чисел Маха: (1, 2) – $M = 2$, $\chi = 72^\circ$; 3 – $M = 2.5$, $\chi = 72^\circ$; 4 – $M = 4$, $\chi = 72^\circ$; 5 – $M = 2$, $\chi = 45^\circ$.

параметры измерений перехода при числах Маха $M = 2, 5$ и 4 приведены выше при описании рис. 3. Для сравнения на этом же графике представлены результаты измерений, выполненных на модели крыла с углом стреловидности передней кромки $\chi = 45^\circ$ при $M = 2$ (5). Отметим, что при числе Маха $M = 2$ крыло с $\chi = 45^\circ$ соответствует случаю со сверхзвуковой передней кромкой, а с $\chi = 72^\circ$ – дозвуковой.

Результаты измерений положения перехода при $M = 2$ (кривые (1) и (2) на рис. 4), проведенные при различных положениях датчика термоанемометра, показывают, что выбор области измерения практически не влияет на зависимость числа Рейнольдса перехода от угла атаки. При сравнении данных, полученных при $M = 2$, видно, что ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на крыле с дозвуковой передней кромкой значительно более чувствителен к изменению угла атаки по сравнению со случаем обтекания модели крыла со сверхзвуковой передней кромкой. На модели крыла с углом стреловидности $\chi = 72^\circ$ при изменении угла атаки приблизительно от -1° до 0.3° происходит увеличение числа Рейнольдса перехода Re_{tr} от 0.9×10^6 до 1.8×10^6 с ростом угла атаки, а на модели с $\chi = 45^\circ$ при изменении угла атаки приблизительно от -2° до 2.5° происходит увеличение Re_{tr} от 1.4×10^6 до 2.4×10^6 . Причиной такого влияния может

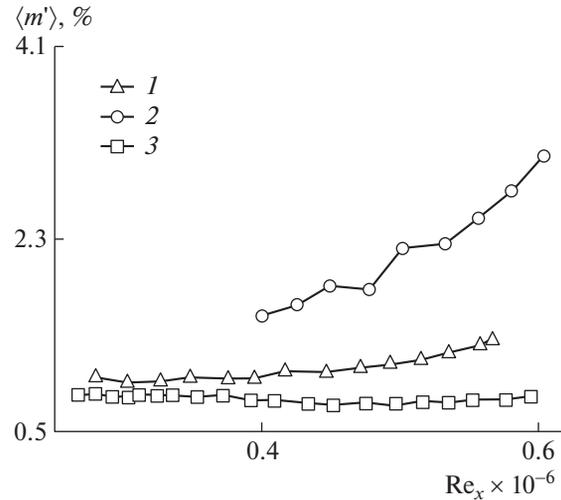


Рис. 5. Зависимость среднеквадратичных пульсаций массового расхода от числа Рейнольдса при $M = 2$: 1 – $\alpha = 0^\circ$, $Re_1 = 4.6 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, $\chi = 72^\circ$; 2 – $\alpha = -1^\circ$, $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, $\chi = 72^\circ$; 3 – $\alpha = 0^\circ$, $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, $\chi = 45^\circ$.

быть определяющая роль стационарных возмущений в процессе ламинарно-турбулентного перехода на модели стреловидного крыла с дозвуковой передней кромкой.

При числе Маха $M = 2.5$ изменение угла атаки приблизительно от -1° до 0.5° приводит к увеличению числа Рейнольдса перехода от 0.7×10^6 до 1.4×10^6 с ростом угла атаки. Получена незначительная дестабилизация течения при $M = 2.5$, и ламинарно-турбулентный переход наступает раньше (приблизительно на 10–20%) по сравнению с $M = 2$.

При числе Маха 4 изменение угла атаки от 0° до приблизительно 0.5° приводит к увеличению числа Рейнольдса перехода от 0.7×10^6 до 0.8×10^6 , что находится в пределах погрешности. Уменьшение числа Рейнольдса перехода с ростом числа Маха, зафиксированное для модели крыла с углом стреловидности $\chi = 72^\circ$, хорошо согласуется с экспериментальными данными для модели крыла с $\chi = 45^\circ$ при нулевом угле атаки, полученными также в аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН [11].

Дополнительно были проведены исследования развития возмущений на ранних стадиях возникновения турбулентности в пограничном слое крыла с дозвуковой передней кромкой. Исследования были выполнены на модели крыла с углом стреловидности $\chi = 72^\circ$ при $M = 2$ для углов атаки $\alpha = -1^\circ$ и 0° . Измерения проводились при постоянном значении единичного числа Рейнольдса потока вдоль продольной координаты: для $\alpha = -1^\circ$ при $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, а для нулевого угла атаки – при $Re_1 = 4.6 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$. Полученные зависимости среднеквадратичных пульсаций массового расхода $\langle m' \rangle$ от числа Рейнольдса (Re_x) представлены на рис. 5. Для сравнения на этом же графике представлена кривая нарастания возмущения для случая $\alpha = 0^\circ$, $\chi = 45^\circ$ и $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, описание этих экспериментов представлено в статье [12]. В указанной работе была проведена проверка на линейность, и показано, что при $Re_x < 0.6$ нарастание возмущений происходит в линейной области. Данные, представленные для $\chi = 45^\circ$, измерены в области линейного развития возмущений. В случае дозвуковой передней кромки при нулевом угле атаки при $Re_x < 0.4$ уровень возмущений остается практически постоянным, а при $Re_x > 0.4$ наблюдается слабый рост возмущений. При $\alpha = -1^\circ$ во всем измеренном диапазоне наблюдается интенсивный рост уровня возмущений. В работе [12] показано, что интенсивное нарастание интегральных пульсаций связано с нелинейным развитием возмущений. Отметим, что в целом представленные данные коррелируют с результатами измерения положения ламинарно-турбулентного перехода (см. рис. 2).

Эволюция амплитудно-частотных спектров при $M = 2$ представлена на рис. 6а и рис. 6б для углов атаки $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = -1^\circ$ соответственно. В случае $\alpha = -1^\circ$ наблюдается нарастание пульсаций в диапазоне частот до 20 кГц, на больших частотах пульсации практически не нарастают вниз по потоку. Такое поведение спектров возмущений характерно для нелинейного развития, на что также указывает интенсивный рост среднеквадратичных пульсаций массового расхода (рис. 5).

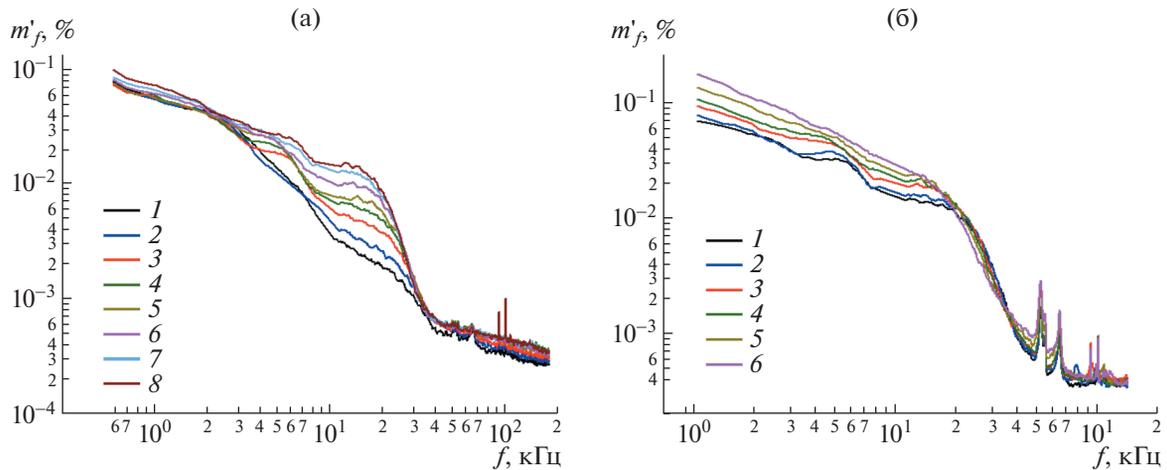


Рис. 6. Амплитудно-частотные спектры пульсаций массового расхода: (а) – $\alpha = 0^\circ$, $Re_1 = 4.6 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$; $Re_x = (0.32, 0.37, 0.32, 0.41, 0.44, 0.48, 0.53, 0.56) \times 10^6 (1-\delta)$; (б) – $\alpha = -1^\circ$, $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$; $Re_x = (0.40, 0.43, 0.48, 0.50, 0.55, 0.60) \times 10^6 (1-\delta)$.

При нулевом угле атаки наибольший рост пульсаций наблюдается в диапазоне частот 7–30 кГц. Такое поведение спектров возмущений характерно для ранних стадий ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковых пограничных слоях на моделях стреловидных крыльев, а наиболее растущие возмущения связаны с неустойчивостью поперечного течения. Амплитудно-частотные спектры возмущений, полученные на крыле с дозвуковой передней кромкой, по подобным результатам, полученным при $M = 2$ на модели со сверхзвуковой передней кромкой [4]. Получено хорошее согласование экспериментальных и расчетных диапазонов усиливающихся частот. В случае $\alpha = -1^\circ$ подобные спектры наблюдались в нелинейной области развития возмущений (при $Re_x \approx 10^6$ [12]) на модели крыла с $\chi = 45^\circ$ при близких параметрах набегающего потока.

Представленные данные по развитию возмущений и ламинарно-турбулентному переходу в пограничном слое крыла с дозвуковой передней кромкой могут быть использованы для верификации методов предсказания положения перехода для этого класса течений. Отметим, что для стреловидного крыла со сверхзвуковой передней кромкой было получено хорошее согласование теоретических расчетов с экспериментальными данными. В работе [5] для случая $M = 2$ и $\chi = 45^\circ$ проведено сравнение полученных в эксперименте чисел Рейнольдса перехода для различных величин угла атаки модели и расчетов положения перехода по методу e^N для различных значений N -фактора по линейной теории устойчивости. Полученные результаты расчетов по теории линейной устойчивости при значении N -фактора $N = 7-8$ хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работе [4] получено хорошее согласие расчетных и определенных из эксперимента степеней нарастания возмущений для модели крыла с $\chi = 45^\circ$ и нулевого угла атаки. Расхождение между расчетами и результатами измерений наблюдается только на частотах ниже 12 кГц и вызвано, скорее всего, шумом аэродинамической трубы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено экспериментальное исследование влияния угла атаки на положение ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном сверхзвуковом пограничном слое на модели стреловидного крыла с углом стреловидности 72° , при числах Маха $M = 2, 2.5$ и 4. Эксперименты при $M = 2$ и 2.5 проведены в условиях малошумного потока и соответствуют случаю дозвуковой передней кромки.

Получены кривые нарастания, амплитудно-частотные спектры пульсаций, определены положения ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое на модели стреловидного крыла для нескольких значений угла атаки. Показано, что изменение угла атаки оказывает сильное влияние на число Рейнольдса перехода при числах Маха потока $M = 2$ и 2.5. При изменении угла атаки приблизительно от -1° до 0.5° происходит увеличение числа Рейнольдса перехода от 0.9×10^6 до 1.8×10^6 при $M = 2$ и от 0.7×10^6 до 1.4×10^6 при $M = 2.5$ с ростом угла

атаки. При числе Маха 4 изменение угла атаки от 0° до приблизительно 0.5° не привело к значительному увеличению числа Рейнольдса перехода, в данном случае число Рейнольдса перехода увеличилось от 0.7×10^6 до 0.8×10^6 , что находится в пределах погрешности. Зафиксированное уменьшение числа Рейнольдса перехода с ростом числа Маха, полученное для модели крыла с углом стреловидности $\chi = 72^\circ$, хорошо согласуется с данными для модели крыла с $\chi = 45^\circ$.

Полученные результаты экспериментальных исследований расширяют знания о влиянии малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковых пограничных слоях на стреловидных крыльях в случае дозвуковой передней кромки. Представленные данные по развитию возмущений и ламинарно-турбулентному переходу, совместно с предыдущими данными [4, 5], относящиеся к случаю сверхзвуковой передней кромки, могут быть использованы для верификации методов предсказания положения перехода на крыльях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-08-00772) с использованием оборудования ЦКП “Механика” (ИТПМ СО РАН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nagamatsu H.T., Graber B.C., Sheer R.E. Roughness, bluntness, and angle-of-attack effects on hypersonic boundary-layer transition // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. № 1. P. 1–31.
2. Иванов А.К. Особенности перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на остром конусе под углом атаки в сверхзвуковом потоке газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 4. С. 34–43.
3. Schneider S.P. Hypersonic Laminar-Turbulent Transition on Circular Cones and Scramjet Forebodies // Progress of aerospace sciences. 2004. V. 40. P. 1–50.
4. Semionov N.V., Yermolaev Yu.G., Kocharin V.L., Kosinov A.D., Semenov A.N., Smorodsky B.V., Yatskikh A.A. An effect of small angle of attack on disturbances evolution in swept wing boundary layer at Mach number $M = 2$ // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2027. № 1. P. 030156. <https://doi.org/10.1063/1.5065250>
5. Kosinov A.D., Semionov N.V., Yermolaev Y.G., Smorodsky B.V., Kolosov G.L., Yatskikh A.A., Semenov A.N. The influence of moderate angle-of-attack variation on disturbances evolution and transition to turbulence in supersonic boundary layer on swept wing // Journal of Aerospace Engineering: Part G. Proc. of the Inst. of Mech. Engineers. 2020. V. 234. № 1. P. 96–101. <https://doi.org/10.1177/0954410019852804>
6. Yatskikh A.A., Kosinov A.D., Semionov N.V., Smorodsky B.V., Ermolaev Y.G., Kolosov G.L. Investigation of laminar-turbulent transition of supersonic boundary layer by scanning constant temperature hot-wire anemometer // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2027. № 1. P. 040041. <https://doi.org/10.1063/1.5065315>
7. Ваганов А.В., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В., Шалаев В.И. Экспериментальное исследование структуры течения и перехода в пограничном слое треугольного крыла с затупленными передними кромками при числах Маха 2, 2.5 и 4 // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 3. С. 164–173.
8. Kosinov A.D., Semionov N.V. The laminar-turbulent transition experiments in supersonic boundary layers // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2125. P. 030105. <https://doi.org/10.1063/1.5117487>
9. Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Кочарин В.Л., Семенов А.Н., Семенов Н.В., Шипуль С.А., Яцких А.А. Экспериментальное исследование влияния внешних возмущений на положение ламинарно-турбулентного перехода на стреловидных крыльях при $M = 2$ // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28. № 3. С. 343–350.
10. Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов А.Н., Семенов Н.В., Яцких А.А. Влияние единичного числа Рейнольдса на ламинарно-турбулентный переход на скользящем крыле при сверхзвуковых скоростях потока // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25. № 5. С. 685–692.
11. Semionov N.V., Kosinov A.D., Yermolaev Yu.G. Experimental study of turbulence beginning of supersonic boundary layer on swept wing at Mach numbers 2–4 // Journal of Physics: Conf. Ser. 2011. V. 318. № 032018. P. 1–9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/318/3/032018>
12. Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В. Экспериментальное исследование нелинейных процессов в пограничном слое на скользящем крыле при числе Маха $M = 2$ // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 5. С. 45–54.

УДК 532.582

КОЛЕБАНИЯ В ЖИДКОСТИ ПЛАСТИН С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

© 2022 г. В. А. Бужинский^{a,*}, Д. А. Петряхин^{a,**}, Е. В. Соломонов^{a,***}

^a Центральнй научно-исследовательский институт машиностроения, Королев, Россия

*E-mail: buzhinsky.valery@yandex.ru

**E-mail: denis.petryakhin@gmail.com

***E-mail: noble85@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.07.2021 г.

После доработки 17.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Рассматриваются колебания в своей плоскости пластин с двоякопериодической структурой ребер жесткости в жидкости. Представлены результаты экспериментального исследования диссипации энергии по затухающим колебаниям упруго подвешенных пластин в емкости с жидкостью. Исследована зависимость потерь энергии от безразмерной амплитуды колебаний и числа Рейнольдса. Основное внимание уделяется определению поверхностной плотности диссипации энергии при амплитудах колебаний, сравнимых с пространственным периодом ребер жесткости.

Ключевые слова: жидкость, колебания, пластина, ребра жесткости, диссипация энергии

DOI: 10.31857/S0568528122010029

При периодическом обтекании пластин параллельно их плоскости под углом к ребрам жесткости возникает сложное вихревое движение жидкости. Подробные экспериментальные и численные исследования выполнены только для двумерного обтекания простых цилиндрических тел периодическим потоком жидкости [1–4]. В этих работах исследовалась зависимость коэффициента сопротивления пластинки от числа Kc Келегана–Карпентера, выполнивших первые основательные экспериментальные исследования [5], и числа Рейнольдса Re , а также от толщины пластинки и формы ее кромки. Общий анализ современного состояния в области определения сопротивления тел, находящихся в периодическом потоке или совершающих колебания в жидкости, подведен в [6]. Отметим, для колебаний пластинки число Kc с точностью до множителя 2π совпадает с обезразмеренной на ее ширину амплитудой колебаний.

В некоторых приложениях интерес представляют не силы сопротивления, а диссипация энергии за период колебаний [7–9]. Основанная на энергетическом подходе асимптотическая теория вихревого сопротивления тел с острыми и двугранными кромками, применимая для малых амплитуд колебаний при больших числах Рейнольдса, предложена в [10, 11]. Определение диссипации энергии за период колебаний сведено к вычислению коэффициентов интенсивности скоростей, количественно характеризующих сингулярность скорости на кромках в рамках концепции потенциального движения жидкости. Этот подход может использоваться как для определения коэффициентов сопротивления, так и для определения демпфирования упругих колебаний пластинок в жидкости.

Асимптотическое решение двумерной задачи о диссипации энергии при периодических колебаниях плоской бесконечной стенки с равномерно установленными перпендикулярно к ней ребрами приведено в [12]. При этом ребра принимались бесконечно тонкими, а амплитуды колебаний малыми по сравнению с высотой ребер. В настоящей работе с использованием энергетического подхода экспериментально исследуется диссипация энергии при колебаниях пластин с амплитудами, которые превышают высоту ребер жесткости и сравнимы с расстоянием между ребрами жесткости.

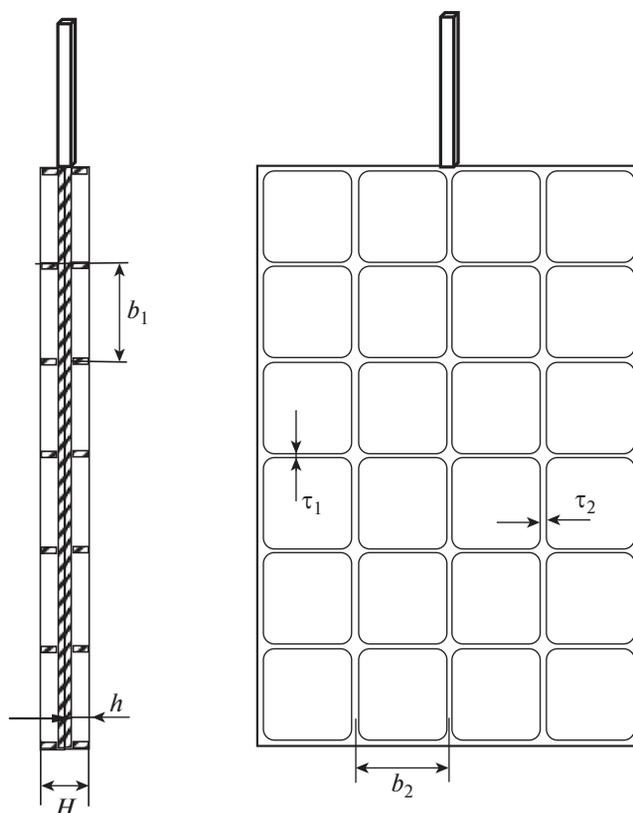


Рис. 1. Общий вид и принятые обозначения характерных размеров сборки пластин с двоякопериодической структурой ребер жесткости: H – толщина сборки пластин; b_1 , b_2 – высота и ширина ячейки ребер жесткости; τ_1 , τ_2 – толщина продольных и поперечных ребер жесткости; h – высота ребер жесткости.

1. ОБЪЕКТЫ И СХЕМА ИСПЫТАНИЙ

Экспериментально исследовалась диссипация энергии при колебаниях в жидкости пластин с двоякопериодической структурой ребер жесткости. Две одинаковые пластины, чтобы обеспечить симметричность обтекания, соединялись по их плоской части в сборку. Колебания совершались параллельно срединной плоскости сборки перпендикулярно ребрам жесткости. Выбор габаритных размеров пластин ограничивался имеющейся емкостью для проведения испытаний. Принималось во внимание, что число ячеек, образованных на пластине ребрами жесткости, не должно быть слишком малым, чтобы в первом приближении исключить влияние краевых эффектов. Общий вид сборки пластин показан на рис. 1, на котором приведены обозначения характерных размеров. Линейные размеры сборок пластин определяются количеством ячеек, образованных ребрами жесткости на каждой из пластин.

Начальным отклонением от положения равновесия задавались вертикальные затухающие колебания сборки пластин на упругом подвесе в емкости с водой. В качестве емкости использовался цилиндрический бак со сферическим днищем, который до самого верха заполнялся технической водой. Сборка пластин располагалась в центре бака на достаточном удалении от его стенок, днища и свободной поверхности жидкости. В испытаниях сборок 1 и 2 величина $L/H \approx 8$, где L – минимальное расстояние от краев сборок пластин до полюса днища и свободной поверхности жидкости, в испытаниях сборки 3 – отношение L/H в 2 раза больше. Диаметр цилиндрического бака в 1.8 раза превышал максимальный поперечный размер сборок пластин. Контролировалось отсутствие образования волн на свободной поверхности воды при колебаниях сборки пластин. Диссипация энергии за период колебаний определялась по затуханию свободных колебаний сборки пластин.

На рис. 2 показана принципиальная схема испытаний. Затухающие колебания сборки пластин измерялись лазерным виброметром PSV-500-Н [13].

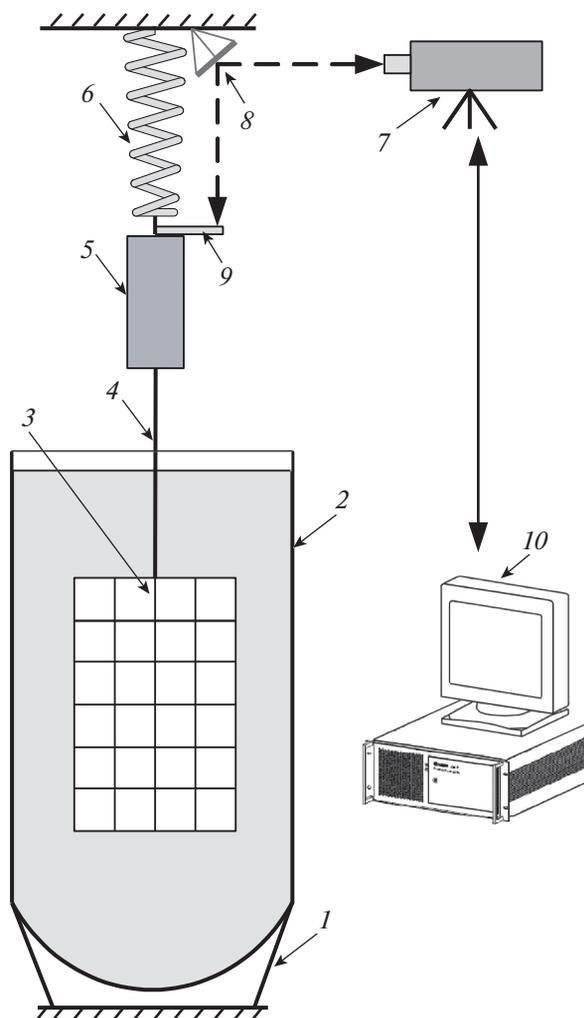


Рис. 2. Принципиальная схема испытаний сборки пластин с двоякопериодической структурой ребер жесткости в цилиндрическом баке с водой: 1 – подставка под бак; 2 – бак с водой; 3 – сборка пластин; 4 – тяга, 5 – груз; 6 – пружина подвески; 7 – головка лазерного виброметра; 8 – зеркальце; 9 – отражающая пластинка на грузе для измерения скорости колебаний; 10 – регистрирующая и обрабатывающая аппаратура лазерного виброметра. Штриховой линией показан ход лазерного луча.

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Уравнение свободных колебаний сборки пластин в жидкости

$$m_0\ddot{x} + \beta_0\dot{x} + kx = -F$$

где x – вертикальное перемещение от статического положения равновесия; m_0 – обобщенная масса при колебаниях сборки пластин в воздушной среде; k – коэффициент жесткости пружины упругой подвески; β_0 – коэффициент демпфирования, определяющий рассеяние энергии колебаний в упругой подвеске; F – гидродинамическая сила, действующая на сборку пластин.

Гидродинамическая сила F определяется зависимостью [6]

$$F = \frac{1}{2}\rho C_d R^2 |\dot{x}| \dot{x} + \rho C_m R^3 \ddot{x}$$

где ρ – плотность жидкости, R – характерный линейный размер. Коэффициенты сопротивления C_d и присоединенной массы C_m зависят от числа Келегана–Карпентера или относительной амплитуды колебаний и числа Рейнольдса. Поперечные размеры тяги, которая соединяет сборку пластин с подвеской, весьма малы, поэтому изменением силы Архимеда при колебаниях пренебрегается.

Уравнения колебаний сборки пластин в жидкости приводятся к требуемому для анализа экспериментальных данных виду

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

В общем случае коэффициенты этого уравнения

$$\omega^2 = k/m, \quad \beta = (\beta_0 + \rho C_d R^2 |\dot{x}|/2)/m, \quad m = m_0 + \rho C_m R^3$$

зависят от амплитуды колебаний и числа Рейнольдса, а коэффициент β также и от частоты колебаний.

Измеряемые в испытаниях частоты свободных колебаний зависят от величины демпфирования. При выполнении условия $\beta/\omega \leq 0.2$ можно пренебрегать отличием частоты свободных колебаний от частоты собственных колебаний ω , определяемой жесткостью подвески k и обобщенной массой m сборки пластин вместе с подвеской и присоединенной массой жидкости $\mu = \rho C_m R^3$. Коэффициент жесткости пружин подвески k определяется по испытаниям в воздухе методом добавочных масс

$$k = m_0 \omega_*^2, \quad m_0 = \frac{\Delta m_i}{\omega_*^2/\omega_i^2 - 1}$$

где ω_* – частота свободных колебаний сборки пластин с испытательной оснасткой, ω_i – частота свободных колебаний с дополнительной добавочной массой Δm_i . При испытаниях в воздухе определялись также и коэффициенты демпфирования β_* колебаний сборок пластин на упругой подвеске. Во всех этих испытаниях значения логарифмических декрементов колебаний $\delta_* = \pi\beta_*/\omega_*$ не превышали 0.003.

Диссипация энергии за период колебаний зависит от плотности жидкости ρ , амплитуды скорости v , частоты колебаний ω , характерного линейного размера R_* , кинематической вязкости жидкости ν . В качестве характерного линейного размера принимается величина $R_* = (b_1 b_2)^{1/2}$. Так как b_1, b_2 – стороны ячейки, образованной ребрами жесткости, то R_*^2 – ее площадь.

Основных единиц измерений механических величин три, поэтому согласно π -теореме подобия [14] из пяти параметров, характеризующих процесс диссипации энергии, можно составить две безразмерные комбинации, являющиеся критериями подобия – относительная амплитуда колебаний сборки пластин $a = v/(\omega R_*)$ и число Рейнольдса $Re = \omega R_*^2/\nu$. Диссипация энергии зависит также от безразмерных геометрических параметров $h/R_*, b_1/b_2, \tau_1/R_*, \tau_2/R_*$, состав которых обозначим одной переменной τ . Кроме того, безразмерный параметр H/R_* и число ячеек ребер жесткости отражают влияние краевых эффектов на диссипацию энергии колебаний сборки пластин в жидкости. Учитывая это, выражение для диссипации энергии за период колебаний можно представить в виде

$$\Delta E \approx 2N\rho v^2 R_*^3 f(a, Re, \tau) \quad (2.1)$$

где N – число ячеек ребер жесткости на одной стороне сборки пластин. Принимается, что при немалом количестве ячеек энергия диссипации линейно зависит от их числа. Функция $f(a, Re, \tau)$ в (2.1) определена без учета краевых эффектов, поэтому она характеризует поверхностную плотность диссипации энергии на бесконечной плоской стенке с ребрами жесткости, обтекаемой периодическим потоком жидкости.

В испытаниях сборок пластин 1, 2, 3 в жидкости значения логарифмических декрементов $\delta = \pi\beta/\omega$ в диапазоне относительных амплитуд колебаний $0.5 < a < 2.5$ находились в диапазоне 0.18–0.26. Эти значения намного больше величины логарифмического декремента колебаний сборок пластин в воздухе 0.003, поэтому диссипацией энергии в подвеске можно пренебрегать. При испытаниях в том же диапазоне относительных амплитуд колебаний сборки пластин 4 в жидкости значения логарифмических декрементов находились в диапазоне 0.03–0.05. В этом случае погрешность результатов, связанная с влиянием диссипации энергии в подвеске, не превышает 10%.

По результатам записи свободных затухающих колебаний сборок пластин в жидкости находится коэффициент поглощения энергии за период колебаний $\psi_i = \Delta E_i/E_i = (E_i - E_{i+1})/E_i$, где

E_i и E_{i+1} — полная энергия колебаний в начале и конце соответствующего периода колебаний. Полная энергия в начале соответствующего периода колебаний $E_i = mv_i^2/2$ определяется по обобщенной массе m и амплитуде скорости v_i . Так как амплитуда скорости и амплитуда перемещения связаны зависимостью $v_i = \omega R_* a_i$, то коэффициент поглощения энергии может быть выражен либо через амплитуды скорости, либо через безразмерные амплитуды перемещения $\psi_i = 1 - v_{i+1}^2/v_i^2 = 1 - a_{i+1}^2/a_i^2$.

При слабом демпфировании коэффициент поглощения ψ_i связан с логарифмическим декрементом колебаний $\delta_i = \ln(a_i/a_{i+1})$ зависимостью $\psi_i = 2\delta_i$. Индексом i отмечается зависимость коэффициента поглощения энергии ψ_i и декремента колебаний δ_i от амплитуды на соответствующем периоде колебаний.

Так как $\Delta E_i = \psi_i E_i = \psi_i mv_i^2/2$, то из (2.1), следует

$$f(a_i, \text{Re}, \tau) = \frac{m\psi_i}{4N\rho R_*^3} = \frac{m\psi_i}{4\rho S R_*} \quad (2.2)$$

где $S = NR_*^2$ — площадь плоской части одной из пластин сборки. В (2.2) коэффициенты поглощения энергии ψ_i вычисляются по записи свободных затухающих колебаний сборки пластин, а обобщенная масса — по измеренной частоте свободных колебаний и коэффициенту жесткости упругой подвески k . Функция $f(a, \text{Re}, \tau)$ определяется с погрешностью, так как в ней не учитывается влияние краевых эффектов.

Зависимость функции $f(a, \text{Re}, \tau)$ от числа Рейнольдса можно получить изменением жесткости пружин упругой подвески или массы груза на ней. В более широком диапазоне чисел Рейнольдса эту зависимость проще получить, испытывая сборки пластин с геометрически подобными ячейками, образованными ребрами жесткости.

Если функция $f(a, \text{Re}, \tau)$ экспериментально определена, то диссипация энергии за период колебаний на единице площади пластины, принимая во внимание зависимость (2.1), находится по формуле

$$\frac{\Delta E}{2S} = \rho v^2 R_* f(a, \text{Re}, \tau) \quad (2.3)$$

Заметим, что зависимость (2.3) приближенно выполняется и для неравномерного обтекания жидкостью стенки с ребрами жесткости, если скорость порождающего вихревое движение жидкости потока мало изменяется на расстоянии характерного размера R_* .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Проводились испытания сборок пластин, для которых $b_2/b_1 = 0.975$, т.е. с почти квадратной формой ячеек, образованных ребрами жесткости. Исследовалась зависимость функции $f(a, \text{Re}, \tau)$ от безразмерной амплитуды колебаний a и числа Рейнольдса Re . В испытаниях разныхборок пластин частоты свободных колебаний находились в диапазоне 0.365–0.425 Гц при постоянной жесткости упругой подвески. Изменение частоты свободных колебаний связано с изменением массыборок пластин, изменением присоединенной массы жидкости в разныхбороках и необходимостью размещенияборок в центре емкости с жидкостью.

На рис. 3 данные I соответствуют результатам экспериментального определения функции $f(a, \text{Re}, \tau)$ при испытаниях сборки 1 пластин с характерными безразмерными параметрами: $H/R_* = 0.455$, $h/R_* = 0.18$, $\tau_1/R_* = \tau_2/R_* = 0.03$. Количество ячеек ребер жесткости на пластине с одной стороны сборки $N = 4 \times 6$, как показано на рис. 1.

Демпфирование колебаний сборки пластин на упругой подвеске в жидкости достаточно высокое, так что реализуется малое число периодов колебаний с амплитудами, сравнимыми с характерным линейным размером ячеек ребер жесткости. Поэтому проводилась неоднократная запись свободных затухающих колебаний с разными начальными отклонениями от положения равновесия. Экспериментальные точки, показанные на рис. 3, получены при различных начальных отклонениях сборки пластин от положения равновесия.

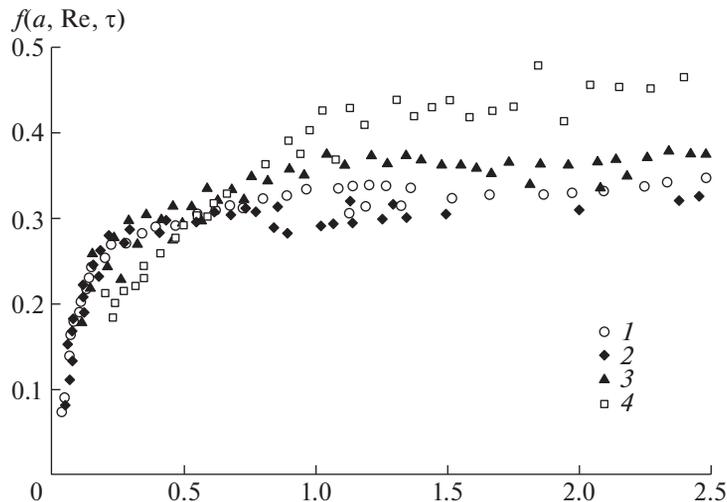


Рис. 3. Зависимость функции $f(a, Re, \tau)$ от безразмерной амплитуды колебаний в жидкости пластин с двояко-периодической структурой ребер жесткости: 1 – сборка 1, $Re = 28\,530$; 2 – сборка 2, $Re = 29\,362$; 3 – сборка 3, $Re = 7685$; 4 – сборка 4, $Re = 1245$.

Зависимость функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний имеет весьма характерный вид. До величины $a = 0.2$ функция резко возрастает, достигая значения 0.24. Далее до амплитуды $a = 1.0$ происходит относительно медленное возрастание, а в интервале амплитуд $1.0 < a < 2.5$ функция практически не изменяется, сохраняя значение около 0.32. Таким образом, в интересном для некоторых практических приложений диапазоне амплитуд, связанных с колебаниями жидкости в баках с вафельными стенками, эта функция принимает почти постоянное значение.

На рис. 3 данные 2 показывают результаты экспериментального определения функции $f(a, Re, \tau)$ при испытаниях сборки 2 пластин с характерными безразмерными параметрами: $h/R_* = 0.2$, $\tau_1/R_* = 0.022$, $\tau_2/R_* = 0.02$. Остальные размеры сохранились. По сравнению со сборкой 1 примерно в полтора раза уменьшилась толщина ребер жесткости и немного увеличилась высота ребер жесткости, но, как видно, зависимость функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний почти не изменилась.

Для определения зависимости диссипации энергии от числа Рейнольдса проводились испытания двухборок, которые собирались из пластин, выполненных с ячейками ребер жесткости в масштабе М 1:2 и М 1:5 к ячейкам ребер жесткости в пластинах сборки 1. Результаты экспериментального определения зависимости функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний при испытаниях сборки 3 показаны на рис. 3 данными 3. Характерный размер R_* в этой сборке пластин изменился в два раза, а число Рейнольдса изменилось не в четыре раза, а несколько меньше из-за небольшого увеличения частоты колебаний. Безразмерные геометрические параметры не изменились и такие же, как в сборке пластин 1. Габаритные линейные размеры этой сборки также не изменились. Количество ячеек ребер жесткости на пластине с одной стороны сборки $N = 8 \times 12$.

Зависимость функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний несколько изменилась. До амплитуды, равной характерному размеру R_* , безразмерная величина которой $a = 1.0$, функция плавно возрастает, достигая значения 0.35. При амплитудах колебаний, превышающих характерный размер R_* , функция от амплитуды практически не зависит. В этом диапазоне амплитуд уменьшение числа Рейнольдса в 3.7 раза привело к незначительному увеличению функции $f(a, Re, \tau)$ приблизительно от значения 0.32 до 0.35. Представляется вероятным, что при некоторой амплитуде периодического потока жидкости наступает насыщение вихревого движения в ячейках ребер жесткости, и дальнейший рост потерь энергии с увеличением амплитуды сильно замедляется.

Результаты экспериментального определения зависимости функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний при испытаниях сборки 4 показаны на рис. 3 данными 4. Характерный линейный размер R_* ячеек ребер жесткости по сравнению с пластинами в сборке 1 уменьшился в пять раз. Без-

размерная толщина ребер жесткости $\tau_1/R_* = \tau_2/R_* = 0.046$ увеличилась примерно в полтора раза из-за сложности изготовления пластин с ребрами жесткости весьма малой толщины. Геометрическое подобие по остальным параметрам сохранилось. Линейные габаритные размеры этой сборки пластин изменились. Количество ячеек ребер жесткости на пластине с одной стороны сборки $N = 20 \times 12$.

Как видно, существенно изменилась зависимость функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний. Наблюдается плавное возрастание функции приблизительно до значения 0.46 на безразмерной амплитуде $a \approx 2$, что примерно в 1.5 раза выше, чем при испытаниях сборки пластин 1 с той же безразмерной амплитудой колебаний. Числа Рейнольдса в этих испытаниях отличаются в 23 раза. Заметим, что при колебаниях в своей плоскости гладкой пластинки характерная толщина периодического пограничного слоя $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ [15]. Высота ребер жесткости в пластинах сборки 4 всего в четыре раза превышала эту величину, т.е. сравнима с толщиной пограничного слоя, что может объяснять изменение вида зависимости функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний.

Движение жидкости в ячейках, примыкающих к краям сборок пластин, несколько иное, чем в ячейках, удаленных от краев, и зависит от параметра H/R_* . Подобие по параметру H/R_* во всех испытаниях выполнялось. Следовательно, одинаковым должно быть и обусловленное этим параметром влияние. При испытаниях сборок пластин 1, 2 с числом ячеек 4×6 и сборок пластин 3 с числом ячеек 8×12 предельные значения функции $f(a, Re, \tau)$ отличаются весьма незначительно. Габаритные размеры пластин в этих сборках были одинаковые. С увеличением числа ячеек ребер жесткости влияние краевых эффектов уменьшается, а точность определения функции $f(a, Re, \tau)$ повышается. Представляется, что числа ячеек 8×12 достаточно для установления характера зависимости функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний.

Диссипация энергии в существенно большей степени зависит от числа поперечных ребер жесткости, перпендикулярных направлению колебаний. В сборке пластин 3 с числом ячеек 8×12 и в сборке пластин 4 с числом ячеек 20×12 число поперечных ребер жесткости одинаково и равно 12, а характер зависимости функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний существенно изменился. Так как подобие по параметру H/R_* выполняется, то влиянием краевых эффектов невозможно объяснить изменение характера зависимости функции $f(a, Re, \tau)$ от амплитуды колебаний при уменьшении числа Рейнольдса до величины $Re = 1245$.

Таким образом, при отношении высоты ребер жесткости к характерному линейному размеру ячеек ребер жесткости $h/R_* \approx 0.18$ зависимость функции $f(a, Re, \tau)$ исследована в широком диапазоне амплитуд колебаний и чисел Рейнольдса. Безразмерная амплитуда колебаний a определена отношением амплитуды к характерному линейному размеру ячеек ребер жесткости. Число Рейнольдса Re определено по круговой частоте колебаний, характерному линейному размеру ячеек ребер жесткости и кинематической вязкости жидкости. Переменной τ в функции обозначается совокупность всех безразмерных геометрических параметров ячеек ребер жесткости.

Из полученных результатов следует, что при больших числах Рейнольдса и амплитудах колебаний, сравнимых по порядку величины с характерным линейным размером ячеек ребер жесткости R_* , функция $f(a, Re, \tau)$ почти не зависит от безразмерных амплитуд колебаний и типичных малых размеров толщины ребер жесткости. Следовательно, принимая во внимание зависимость (2.3), диссипация энергии на единицу площади за период колебаний при этом пропорциональна линейному масштабу ячеек ребер жесткости и квадрату амплитуды колебаний скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено экспериментальное исследование диссипации энергии при колебаниях пластин с двоякопериодической структурой ребер жесткости в жидкости. Исследована зависимость диссипации энергии за период колебаний от безразмерной амплитуды колебаний и числа Рейнольдса, которые являются критериями подобия. Установлено, что при больших числах Рейнольдса и амплитудах колебаний, сравнимых по порядку величины с линейным размером ячеек ребер жесткости, диссипация энергии на единицу площади за период колебаний пропорциональна квадрату амплитуды скорости и линейному масштабу ячеек ребер жесткости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graham J.M.R.* The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. Pt. 2. P. 331–346.
2. *Bearman P.W., Downie M.J., Graham J.M.R., Obasaju E.D.* Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 154. № 1. P. 337–356.
3. *Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Паймушин В.М., Фирсов В.А.* Теоретико-экспериментальный метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления гармонически колеблющейся тонкой пластины // *Прикладная механика и техническая физика.* 2016. Т. 57. № 2. С. 96–104.
4. *Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Egorov A.G.* A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 874. P. 1057–1095.
5. *Keulegan G.H., Carpenter L.H.* Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // *J. Res. Bur. Stand.* 1958. V. 80. P. 423–440.
6. *Sarpkaya T.S.* Wave Forces on Offshore Structures. Cambridge: Univ. Press, 2010. 322 p.
7. *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and application. Cambridge: Univ. Press, 2005. 948 p.
8. *Калиниченко В.А., Со А.Н., Чашечкин Ю.Л.* Вихревое демпфирование колебаний жидкости в прямоугольном сосуде // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 5. С. 28–40.
9. *Бужинский В.А.* Колебания жидкости в цилиндрических баках с продольными демпфирующими перегородками // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 1. С. 9–21.
10. *Бужинский В.А.* Энергия вихреобразования при колебаниях в жидкости тела с острыми кромками // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 313. № 5. С. 1072–1074.
11. *Бужинский В.А.* Вихревое сопротивление пластинки при колебаниях в маловязкой жидкости // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 233–238.
12. *Бужинский В.А., Мельникова И.М.* Определение сопротивления колеблющихся пластин в жидкости // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 264–274.
13. PSV-500 Scanning Vibrometer. Polytec GmbH. Germany // www.polytec.com.
14. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 449 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

УДК 532.59:539.3

ЗАДАЧА КОШИ–ПУАССОНА ДЛЯ ЖИДКОСТИ С ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ (ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

© 2022 г. И. В. Стурова^{a,*}

^a Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

*E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 17.05.2021 г.

После доработки 21.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

В линейной постановке решена двумерная нестационарная задача об эволюции начального возмущения в жидкости, на поверхности которой плавает ледяной покров. В невозмущенном состоянии продольная скорость жидкости линейно меняется с глубиной. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом сжимающих усилий. Построено интегральное представление решения, описывающее поведение ледяного покрова. Получены асимптотики этого решения при больших временах, позволяющие описывать дальние поля возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

Ключевые слова: плавающая упругая пластина, изгибно-гравитационные волны, сжимающие усилия, сдвиговые течения, эволюция начального возмущения

DOI: 10.31857/S0568528122010108

Исследование нестационарного движения тяжелой жидкости, возникающего благодаря действию в начальный момент времени импульсного давления или нарушению вида горизонтальной равновесной поверхности жидкости (так называемая задача Коши–Пуассона), является одной из классических задач волновой гидродинамики, которая довольно подробно изучена для случая однородной несжимаемой жидкости, когда ее верхняя граница является свободной, и жидкость в начальный момент покоится (см., например, [1, 2]).

В последние годы активно исследуются более сложные постановки этой задачи. Исследование трехмерного случая для осесимметричного начального возмущения, создаваемого на поверхности жидкости под ледяным покровом без учета сжимающих усилий, выполнено в [3]. В исходном состоянии жидкость покоится и ее глубина бесконечна. Начальное возмущение вызвано распределенным импульсным давлением или вертикальным смещением ледяного покрова. В трехмерном случае задача Коши–Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и при наличии поверхностного натяжения на свободной поверхности изучена в работах [4, 5]. В невозмущенном состоянии линейное сдвиговое течение задано только для одной компоненты горизонтальной скорости жидкости. В [4] исследована эволюция осесимметричного начального возмущения свободной поверхности, а в [5] – действие внешнего давления. Экспериментальное подтверждение полученных теоретических результатов представлено в [6].

В данной работе в линейной постановке рассмотрена двумерная задача о поведении потока с вертикальным сдвигом скорости однородной идеальной несжимаемой жидкости, на поверхности которой плавает сплошной упругий ледяной покров с учетом продольного сжатия. В начальный момент времени верхняя граница жидкости отклоняется от невозмущенного горизонтального положения. Построено интегральное представление решения, описывающее поведение ледяного покрова. Получены асимптотики этого решения, позволяющие оценить дальние поля возмущений как вблизи, так и вдали от волнового фронта.

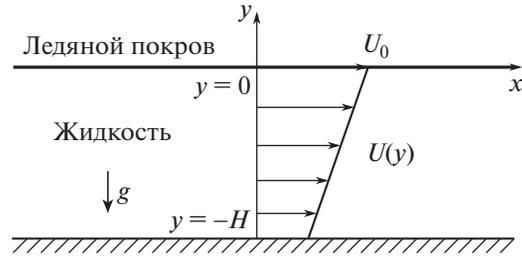


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В невозмущенном состоянии слой однородной невязкой несжимаемой жидкости постоянной глубины H имеет продольную скорость $U(y) = U_0 + \alpha y$. Система декартовых координат x, y введена так, что ось x совпадает с невозмущенной горизонтальной верхней границей жидкости, а ось y направлена вертикально вверх. На поверхности потока жидкости плавает сплошной ледяной покров, который моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины и плотности. Предполагается, что в упругой пластине существуют продольные сжимающие усилия и во все моменты времени t жидкость находится в контакте с пластиной. Схема течения приведена на рис. 1.

Вывод основных уравнений движения жидкости и ледяного покрова выполняется аналогично [7]. При наличии линейного сдвига продольной скорости основного течения горизонтальную $u(x, y, t)$ и вертикальную $v(x, y, t)$ компоненты скорости возмущенного течения можно представить в виде [8]

$$u(x, y, t) = U(y) + \partial\phi/\partial x, \quad v(x, y, t) = \partial\phi/\partial y$$

где функция $\phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 = 0 \quad (|x| < \infty, -H \leq y \leq 0) \quad (1.1)$$

и условию непротекания на дне

$$\partial\phi/\partial y = 0 \quad (y = -H) \quad (1.2)$$

Кинематическое и динамическое условия на верхней границе жидкости ($y = 0$) имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U_0 \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_s \quad (1.4)$$

Здесь $w(x, t)$ – вертикальный прогиб ледяного покрова, его цилиндрическая жесткость равна $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$, $M = \rho_1 h$; E , ρ_1 , h , ν – модуль Юнга, плотность, толщина и коэффициент Пуассона пластины; Q – продольное напряжение (сжатие при положительных и растяжение при отрицательных значениях); p_s – давление, действующее со стороны жидкости на ледяной покров. Первое слагаемое в динамическом условии (1.4) описывает упругие свойства ледяного покрова, второе слагаемое представляет сжимающее или растягивающее напряжение в нем, а третье – его инерционные свойства.

Используем уравнения Эйлера в форме Громеко для описания течения весомой жидкости (см., например, [9])

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy \right) = \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (u, v)$$

где $p(x, y, t)$ – гидродинамическое давление. Пренебрегая членами второго порядка малости, получим следующее уравнение для определения $p_s = p(x, 0, t)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{p_s}{\rho} + gw \right) = -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (y = 0)$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. После подстановки этого соотношения в (1.4) динамическое условие примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho U_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \rho gw \right) + \alpha \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0) \quad (1.5)$$

При этом сделано предположение, что упругая восстанавливающая сила в ледяном покрове существенно больше, чем инерционная сила, и слагаемым с коэффициентом M в (1.4) можно пренебречь. Начальные условия равны

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \varphi(x, y, 0) = \partial w / \partial t|_{t=0} = 0 \quad (1.6)$$

Далее для простоты предполагается, что функция $w_0(x)$ является четной.

Для решения задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) используется преобразование Фурье

$$\Phi(k, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, t) \exp(-ikx) dx$$

$$W(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) \exp(-ikx) dx$$

Из уравнения Лапласа (1.1) и граничного условия на дне (1.2) получим

$$\Phi(k, y, t) = G(k, t) \operatorname{ch}[k(y + H)]$$

где $G(k, t)$ – неизвестная функция. Из кинематического условия (1.3) имеем

$$\dot{W} + ikU_0 W = kG \operatorname{sh}(kH) \quad (1.7)$$

где точкой сверху обозначена производная по времени t . Согласно динамическому условию (1.5)

$$(i\dot{G} - kU_0 G) \operatorname{ch}(kH) + \alpha G \operatorname{sh}(kH) + i \left(\frac{k^4 D}{\rho} - \frac{k^2 Q}{\rho} + g \right) W = 0 \quad (1.8)$$

Исключая функцию $G(k, t)$ из (1.7), (1.8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $W(k, t)$

$$\dot{W} + A(k)W + B(k)W = 0 \quad (1.9)$$

с начальными условиями

$$W(k, 0) = W_0(k), \quad \dot{W}(k, 0) = 0 \quad (1.10)$$

Здесь

$$A(k) = i[2kU_0 - \alpha \operatorname{th}(kH)], \quad B(k) = k \left[\left(\frac{D}{\rho} k^4 - \frac{Q}{\rho} k^2 + \alpha U_0 + g \right) \operatorname{th}(kH) - U_0^2 k \right]$$

$$W_0(k) = 2 \int_0^{\infty} w_0(x) \cos(kx) dx$$

Представленные ниже расчеты выполнены для функции

$$w_0(x) = a \cos(bx) \exp(-cx^2)$$

преобразование Фурье для которой равно

$$W_0(k) = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c}} \left\{ \exp \left[-\frac{(k+b)^2}{4c} \right] + \exp \left[-\frac{(k-b)^2}{4c} \right] \right\}$$

Решение уравнения (1.9) с начальными условиями (1.10) имеет вид

$$W(k, t) = W_0(k) \exp[i\gamma(k)t] \left\{ \cos[\sigma(k)t] - \frac{i\gamma(k)}{\sigma(k)} \sin[\sigma(k)t] \right\}$$

где

$$\gamma(k) = \frac{\alpha}{2} \operatorname{th}(kH) - kU_0$$

$$\sigma(k) = \sqrt{k \operatorname{th}(kH) \left(\frac{D}{\rho} k^4 - \frac{Q}{\rho} k^2 + g \right) + \frac{\alpha^2}{4} \operatorname{th}^2(kH)}$$

После выполнения обратного преобразования Фурье

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k, t) \exp(ikx) dk$$

введения безразмерных переменных

$$x' = \frac{x}{H}, \quad t' = t \sqrt{\frac{g}{H}}, \quad w' = \frac{w}{a}, \quad D' = \frac{D}{\rho g H^4}, \quad Q' = \frac{Q}{\rho g H^2}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{H}{g}}$$

$$U_0' = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}, \quad W_0' = \frac{W_0}{aH}, \quad b' = Hb, \quad c' = H^2c$$

и перехода в подвижную систему координат $X = x' - U_0't'$ получим (далее штрихи опускаются)

$$w(X, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W_0(k) \{ C_-(k) \cos[\sigma_+(k)t + kX] + C_+(k) \cos[\sigma_-(k)t - kX] \} dk \quad (1.11)$$

где

$$C_{\pm}(k) = 1 \pm (\alpha \operatorname{th} k - kU_0) / S(k), \quad \sigma_{\pm}(k) = S(k) \pm \alpha \operatorname{th} k$$

$$S(k) = \sqrt{k \operatorname{th} k (1 + Dk^4 - Qk^2) + (\alpha \operatorname{th} k)^2} \quad (1.12)$$

При $D = Q = U_0 = \alpha = 0$ полученное решение совпадает с решением двумерной задачи Коши–Пуассона для первоначально покоящейся жидкости и обычной свободной поверхности (см., например, [1]). При $D = 0, Q = -T$ ($T > 0$) полученное решение является решением двумерной задачи Коши–Пуассона для свободной поверхности с учетом коэффициента поверхностного натяжения T . Трехмерный вариант этой задачи рассмотрен в [4].

Соотношение (1.12) накладывает ограничение на величину сжимающего усилия Q , так как для существования вещественного значения функции $S(k)$ необходимо, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. Это условие гарантирует устойчивость плавающей упругой пластины. При отсутствии сдвигового течения ($\alpha = 0$) имеет место хорошо известное ограничение на сжимающее усилие $Q \leq Q_* \equiv 2\sqrt{D}$ (см., например, [10]). При $\alpha \neq 0$ для определения Q_* необходимо решить систему уравнений

$$F(k_*) = dF/dk|_{k=k_*} = 0$$

где

$$F(k) = k(1 + Dk^4 - Qk^2) + \alpha^2 \operatorname{th} k$$

Для решения этой системы уравнений можно определить зависимость $k_*(\alpha)$ при заданном значении D из уравнения

$$2(Dk^4 - 1) + \alpha^2(1 - 3\operatorname{th} k/k - \operatorname{th}^2 k) = 0$$

и затем определить значение $Q_*(\alpha)$ из соотношения

$$Q_* = [k_* + Dk_*^5 + \alpha^2 \operatorname{th} k_*] / k_*^3$$

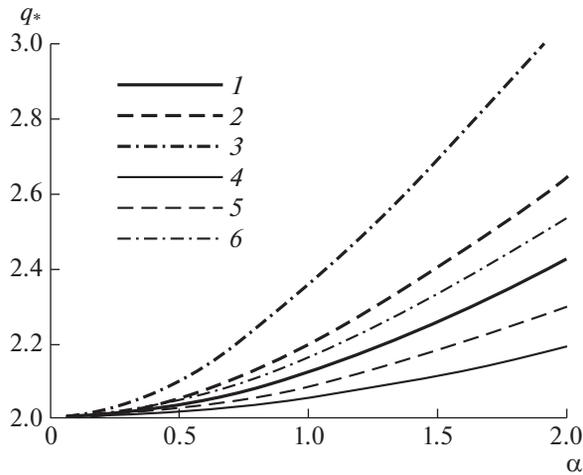


Рис. 2. Зависимость q_* от безразмерного параметра сдвига α при различных глубине жидкости H и толщине льда h : 1–3 – $H = 20$ м; 4–6 – $H = 50$ м; 1, 4 – $h = 10$ см; 2, 5 – $h = 20$ см; 3, 6 – $h = 50$ см.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Использованы следующие параметры ледяного покрова и жидкости

$$E = 5 \times 10^9 \text{ Па}, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 1025 \text{ кг/м}^3$$

На рис. 2 приведены зависимости $q_* \equiv Q_*/\sqrt{D}$ от безразмерного параметра α при различных глубинах жидкости $H = 20$ м и $H = 50$ м соответственно и толщинах льда $h = 10, 20, 50$ см. Видно, что при наличии сдвигового течения с увеличением толщины ледяного покрова и уменьшением глубины жидкости существенно возрастает диапазон допустимых значений параметра сжатия.

Представленные ниже расчеты выполнены для толщины ледяного покрова $h = 20$ см и глубины жидкости $H = 50$ м. На рис. 3 показаны прогибы ледяного покрова $w(X, t)$ для моментов времени $t = 2, 5, 10$ при различных значениях параметров сдвига, сжатия и скорости $U_0 = 0, 0.5, 1$. Для бессдвигового потока ($\alpha = 0$) безразмерный параметр сжатия $q \equiv Q/\sqrt{D} = 0, 1.9$, для сдвиговых потоков при $\alpha = 0.5, 1$ использованы параметры сжатия $q = 0, 2$. Численное интегрирование (1.11) выполнено для параметров начального возвышения $b = 3, c = 2$. При отсутствии сдвигового течения ($\alpha = 0$) и $U_0 = 0$ волновые возмущения симметричны относительно эпицентра начального возмущения. В остальных случаях волновые движения являются несимметричными. Область значений продольной координаты X , охваченной волновым движением, больше при $X < 0$ и с увеличением скорости U_0 также в этой области возрастают амплитуды волновых возмущений. Влияние параметра сжатия более всего проявляется в области малых значений $|X|$. При $q = 0$ с ростом времени в окрестности $|X| \approx 0$ волновые возмущения практически исчезают. Однако при $q \neq 0$ волновые движения в этой области довольно значительные.

Используя асимптотические оценки интеграла в (1.11), можно получить приближенные решения для волнового движения при больших временах. Для задачи Коши–Пуассона в случае первоначально покоящейся жидкости с обычной свободной поверхностью асимптотические решения получены, например, в [11]. В данной работе аналогичным образом выведены асимптотики решения в окрестности волновых фронтов для рассматриваемой задачи.

Используем метод стационарной фазы для оценки интеграла в (1.11) при $t \rightarrow \infty$. Фазовые функции первого и второго слагаемых в подынтегральном выражении равны соответственно

$$\Psi_1(k, V, t) = t\Lambda_1(k, V), \quad \Psi_2(k, V, t) = t\Lambda_2(k, V)$$

где

$$\Lambda_1(k, V) = S(k) + \alpha thk + kV, \quad \Lambda_2(k, V) = S(k) - \alpha thk - kV, \quad V = X/t$$

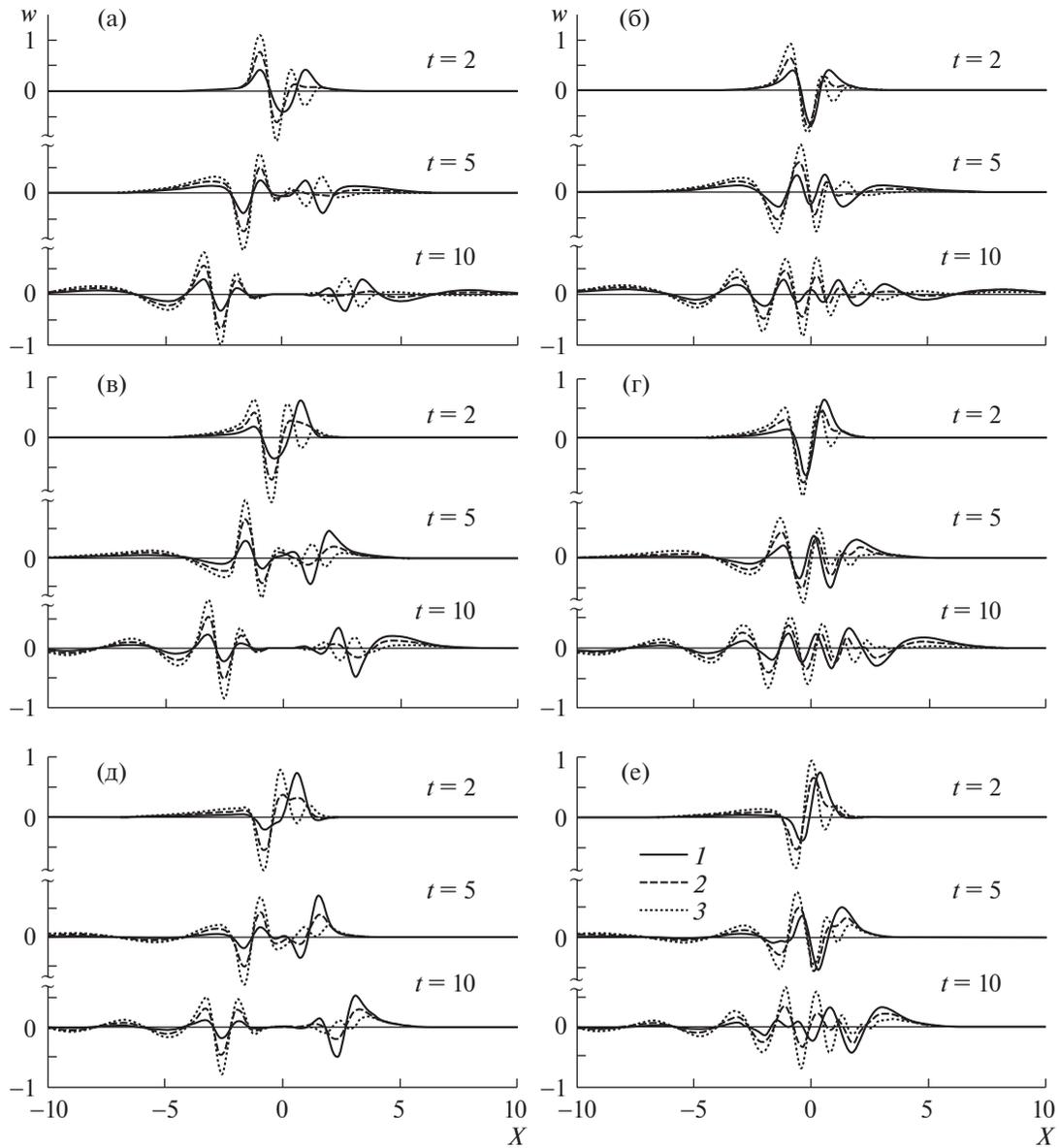


Рис. 3. Вертикальные прогибы ледяного покрова в моменты времени $t = 2, 5, 10$: $a-e - (\alpha, q) = (0, 0); (0, 1.9); (0.5, 0); (0.5, 2); (1, 0); (1, 2)$. Кривые 1–3 соответствуют $U_0 = 0, 0.5, 1$.

Стационарные точки должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial k} = \Omega_+(k) + V = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_2}{\partial k} = \Omega_-(k) - V = 0, \quad \Omega_{\pm} = \frac{dS}{dk} \pm \alpha(1 - \text{th}^2 k) \quad (2.1)$$

где

$$\frac{dS}{dk} = \frac{0.5}{S(k)} \{k(1 + Dk^4 - Qk^2)(1 - \text{th}^2 k) + \text{th}k[1 + 5Dk^4 - 3Qk^2 + 2\alpha^2(1 - \text{th}^2 k)]\}$$

На рис. 4 представлены зависимости функций $\Omega_{\pm}(k)$ при $\alpha = 0.5$ для двух значений параметра сжатия $q = 0$ и $q = 2$. Значения $\Omega_{\pm}(0)$ не зависят от параметра сжатия q и равны

$$\Omega_{\pm}(0) = \sqrt{1 + \alpha^2} \pm \alpha \quad (2.2)$$

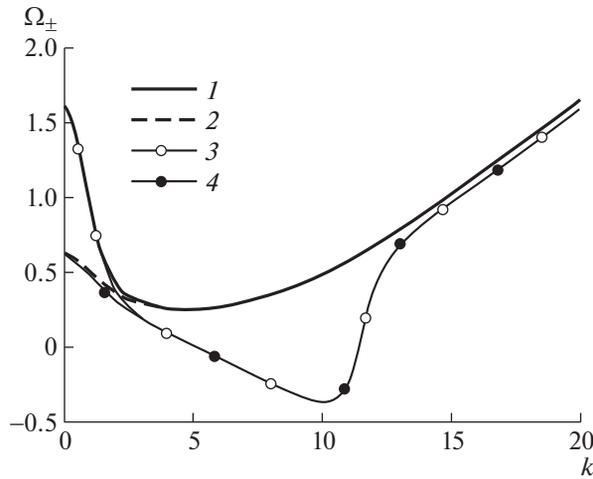


Рис. 4. Зависимости функций $\Omega_+(k)$ (кривые 1, 3) и $\Omega_-(k)$ (кривые 2, 4) при $\alpha = 0.5$: 1, 2 – $q = 0$; 3, 4 – $q = 2$.

С ростом α значение $\Omega_+(0)$ стремится к 2α , а значение $\Omega_-(0)$ – к нулю. Кривые, соответствующие $\Omega_+(k)$ и $\Omega_-(k)$, сливаются при достаточно больших значениях волнового числа k .

Далее для получения асимптотических выражений ограничимся только областью относительно малых значений волнового числа $0 \leq k < K$. При $q = 0$ выбрано значение $K = 4.8$, соответствующее минимуму функций $\Omega_{\pm}(k)$, а для $q = 2$ – значение $K = 5.1$, при котором эти функции еще являются положительными. С учетом введенных ограничений на диапазон значений волнового числа k уравнение $\partial\Lambda_1/\partial k = 0$ в (2.1) не имеет действительных корней при $V > 0$, а уравнение $\partial\Lambda_2/\partial k = 0$ не имеет действительных корней при $V < 0$. Следовательно, для описания волнового движения вниз по потоку ($X < 0$) при больших временах следует учитывать только первое слагаемое в подынтегральном выражении (1.11), а для волнового движения вверх по потоку ($X > 0$) – только второе слагаемое.

Согласно методу стационарной фазы справедливы асимптотики: при $X < 0$

$$w(X, t) \approx \frac{W_0(k_1)C_-(k_1)}{\sqrt{2\pi t \left| \frac{d\Omega_+}{dk} \right|_{k=k_1}}} \cos \left\{ [S(k_1) + \alpha \text{th} k_1] t - k_1 |X| - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (2.3)$$

при $X > 0$

$$w(X, t) \approx \frac{W_0(k_2)C_+(k_2)}{\sqrt{2\pi t \left| \frac{d\Omega_-}{dk} \right|_{k=k_2}}} \cos \left\{ [S(k_2) - \alpha \text{th} k_2] t - k_2 X - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (2.4)$$

где k_1 и k_2 являются корнями первого и второго уравнений в (2.1) соответственно.

Эти асимптотики становятся непригодными при $V \rightarrow V_-$ для $X > 0$ и $|V| \rightarrow V_+$ для $X < 0$, т.е. вблизи волновых фронтов $V_{\pm} = \Omega_{\pm}(0)$. Следует отметить, что согласно (2.2) положение волновых фронтов $|X_f^{\pm}| = V_{\pm} t$ зависит только от параметра сдвига α и не зависит от свойств ледяного покрова.

Локальные асимптотики в окрестности волновых фронтов выписываются отдельно для областей справа и слева от фронта. При $X < 0$ прогибы ледяного покрова справа от фронта описываются соотношением

$$w(X, t) \approx \frac{W_0(k_1)}{\sqrt{2t^{1/3}} \left| \frac{d\Omega_+}{dk} \right|_{k=k_1}^{1/2}} \frac{Z_1^{1/4}}{C_-(k_1)} \text{Ai}(-Z_1 t^{2/3}) \quad (2.5)$$

где

$$Z_1 = \left\{ \frac{3}{2} [\sigma_+(k_1) - |V| k_1] \right\}^{2/3}$$

а при $X > 0$ слева от фронта

$$w(X, t) \approx \frac{W_0(k_2)}{\sqrt{2t}^{1/3}} \frac{Z_2^{1/4}}{\left| \frac{d\Omega_-}{dk} \right|_{k=k_2}^{1/2}} C_+(k_2) \text{Ai}(-Z_2 t^{2/3}) \quad (2.6)$$

где

$$Z_2 = \left\{ \frac{3}{2} [\sigma_-(k_2) - V k_2] \right\}^{2/3}$$

$\text{Ai}(z)$ – функция Эйри (см., например, [12]). В отличие от формул (2.3), (2.4), полученных обычным методом стационарной фазы, вертикальные прогибы, описываемые соотношениями (2.5), (2.6), ограничены в окрестности волнового фронта.

Для нахождения локальной асимптотики в окрестности волнового фронта слева при $X < 0$ и справа при $X > 0$ вводится новая переменная $z = -ik$. Стационарная точка z_1 для $X < 0$ определяется как наименьшее положительное решение уравнения

$$d\Upsilon_+/dz = |V|$$

а стационарная точка z_2 для $X > 0$ как решение уравнения

$$d\Upsilon_-/dz = V$$

где

$$\Upsilon_{\pm} = \bar{S}(z) \pm \alpha \text{tg} z, \quad \bar{S}(z) = \sqrt{z \text{tg} z (1 + Dz^4 + Qz^2) + (\alpha \text{tg} z)^2}$$

При $X < 0$ прогиб ледяного покрова слева от волнового фронта описывается соотношением

$$w(X, t) \approx \frac{W_0(z_1)}{\sqrt{2t}^{1/3}} \frac{\bar{Z}_1^{1/4}}{\left| \frac{d^2\Upsilon_+}{dz^2} \right|_{z=z_1}^{1/2}} C_-(iz_1) \text{Ai}(\bar{Z}_1 t^{2/3}) \quad (2.7)$$

где

$$\bar{Z}_1 = \left\{ \frac{3}{2} [\Upsilon_+(z_1) - |V| z_1] \right\}^{2/3}$$

а при $X > 0$ справа от волнового фронта

$$w(X, t) \approx \frac{W_0(z_2)}{\sqrt{2t}^{1/3}} \frac{\bar{Z}_2^{1/4}}{\left| \frac{d^2\Upsilon_-}{dz^2} \right|_{z=z_2}^{1/2}} C_+(iz_2) \text{Ai}(\bar{Z}_2 t^{2/3}) \quad (2.8)$$

где

$$\bar{Z}_2 = \left\{ \frac{3}{2} [\Upsilon_-(z_2) - Vz_2] \right\}^{2/3}$$

На рис. 5а,б представлено сопоставление различных приближений с результатами численного интегрирования (1.11) при $U_0 = 0$, $\alpha = 0.5$, $t = 20$, $q = 0, 2$. Видно, что асимптотики (2.5)–(2.8) хорошо описывают поведение ледяного покрова, а приближение (2.3), (2.4) применимо только вдали от волнового фронта.

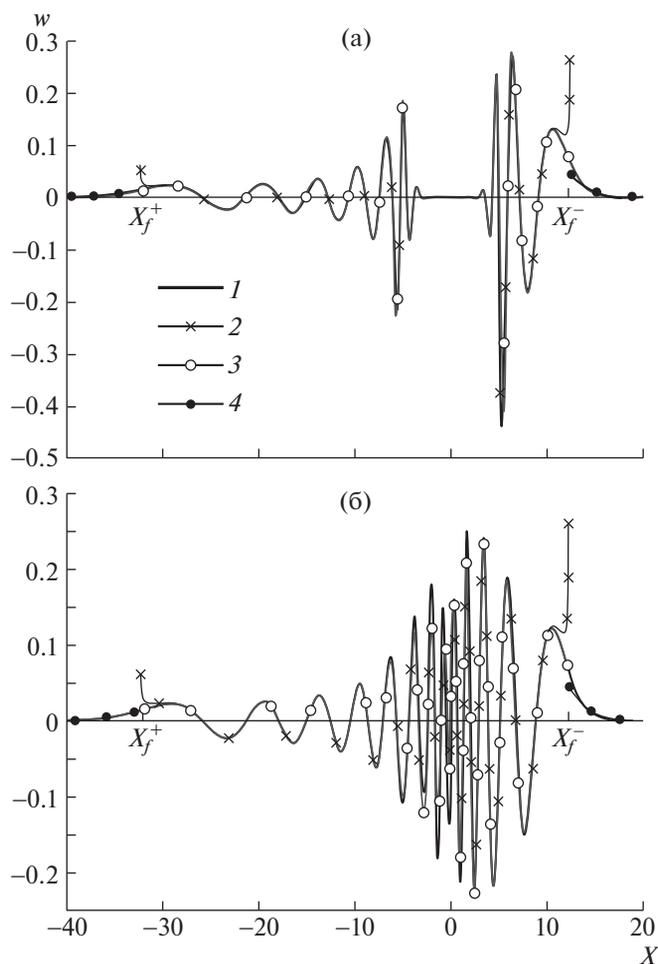


Рис. 5. Вертикальные прогибы ледяного покрова при $U_0 = 0$, $\alpha = 0.5$, $t = 20$: a , $b - q = 0, 2$; 1 – численное интегрирование (1.11); 2 – приближение стационарной фазы (2.3), (2.4); 3 – асимптотики (2.5), (2.6); 4 – асимптотики (2.7), (2.8). Положение волновых фронтов указано значениями X_f^\pm .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено решение задачи об эволюции начального возвышения верхней границы жидкости при наличии плавающего ледяного покрова и линейного сдвигового потока. Для ледяного покрова учитываются его упругие свойства и сжимающие усилия. Показано, что при наличии сдвигового потока с увеличением толщины ледяного покрова и уменьшением глубины жидкости существенно возрастает диапазон допустимых значений параметра сжатия.

С помощью метода стационарной фазы получено асимптотическое решение, описывающее динамику вертикальных смещений ледяного покрова при больших временах. Для уточнения асимптотического решения используется обобщенный метод стационарной фазы, позволяющий с помощью функции Эйри получить равномерную асимптотику по продольной переменной. Показано, что построенные равномерные асимптотики хорошо описывают поведение ледяного покрова в окрестности волнового фронта.

В подвижной системе координат положение волнового фронта не зависит от свойств ледяного покрова и определяется только значением параметра сдвига. При наличии сдвигового течения и/или продольной скорости основного потока волновые возмущения становятся несимметричными относительно эпицентра начального возмущения. Влияние сжатия ледяного покрова проявляется более всего в области малых значений продольной координаты. Представляет интерес исследование задачи Коши–Пуассона в трехмерном случае для неравномерно сжатого ледяного покрова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves. Handbuch der Physik. 1960. V. 9. P. 446–778.
2. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с.
3. *Maiti P., Mandal B.N.* Water waves generated due to initial axisymmetric disturbances in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2005. V. 74. № 9. P. 629–636.
<https://doi.org/10.1007/s00419-005-0384-7>
4. *Ellingsen S.Å.* Initial surface disturbance on a shear current: the Cauchy-Poisson problem with a twist // Phys. Fluids. 2014. V. 26. № 8. P. 082104.
<https://doi.org/10.1063/1.4891640>
5. *Li Y., Ellingsen S.Å.* Initial value problems for water waves in the presence of a shear current // Proc. 25th Intern. Ocean and Polar Eng. Conf. 2015. V. 3. P. 543–549.
6. *Smeltzer B.K., Aesoy E., Ellingsen S.Å.* Observation of surface wave patterns modified by sub-surface shear currents // J. Fluid Mech. 2019. V. 873. P. 508–530.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.424>
7. *Das S., Kar P., Sahoo T., Meylan M.H.* Flexural-gravity wave motion in the presence of shear current: Wave blocking and negative energy waves // Phys. Fluids. 2018. V. 30. № 10. P. 106606.
<https://doi.org/10.1063/1.5052228>
8. *Maissa P., Rousseaux G., Stepanyants Y.* Negative energy waves in a shear flow with a linear profile // Eur. J. Mech. B/ Fluids. 2016. V. 56. P. 192–199.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2016.01.003>
9. *Черкесов Л.В.* Основы динамики несжимаемой жидкости. Киев: Наук. Думка, 1984. 168 с.
10. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 215 с.
11. *Коробкин А.А., Стурова И.В.* Плоская задача Коши–Пуассона для бассейна с плавно меняющимся дном. Примеры численных расчетов // ПМТФ. 1990. № 3. С. 54–60.
12. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М., Наука, 1979. 832 с.

УДК 532.59:551.466

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ШЕЛЬФЕ ЯПОНСКОГО МОРЯ

© 2022 г. В. Ю. Ляпидевский^{a,*}, Ф. Ф. Храпченков^{b,**},
А. А. Чесноков^{a,***}, И. О. Ярошук^{b,****}

^a Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

^b Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Россия

*E-mail: liapid@hydro.nsc.ru

**E-mail: fedi@poi.dvo.ru

***E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

****E-mail: yaroshchuk@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 24.07.2021 г.

После доработки 21.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Нелинейные уравнения многослойной мелкой воды в приближении Буссинеска применены для моделирования нестационарных гидрофизических процессов в шельфовой зоне приливного моря. Выполнен расчет вертикального распределения температуры и горизонтальной компоненты скорости вдоль прямолинейной трассы на основе данных о вариации температуры на заданных горизонтах, полученных на одной из донных станций. Результаты численного моделирования верифицированы с использованием данных других контрольных станций, расположенных вдоль рассматриваемой трассы. Показано, что многослойная модель качественно воспроизводит структуру наблюдаемого волнового пакета, а уравнения двухслойного течения описывают динамику центральной части термоклина даже в том случае, когда стратификация существенно отличается от двухслойной. Сравнение результатов расчета с натурными данными позволяет сделать вывод о том, что гипотеза о квазидвумерном характере течения на шельфе, лежащая в основе применяемого подхода, соответствует реальности.

Ключевые слова: многослойная мелкая вода, внутренние волны, волновой бор, натурный эксперимент

DOI: 10.31857/S0568528122010066

Гидрофизические процессы в шельфовой зоне моря характеризуются большой пространственной и временной изменчивостью. Неоднородное вертикальное распределение плотности связано как с распреснением прибрежных вод, так и неравномерным прогревом верхних слоев, особенно в осенне-летний период. Стратификация существенно влияет на структуру разномасштабных течений и формирование нелинейных внутренних волн, регистрируемых в шельфовой зоне моря [1, 2]. Особое внимание исследователей привлекают внутренние боры, регулярно наблюдаемые в стратифицированных прибрежных водах в виде резкого вертикального смещения пикноклина с генерацией на фронте возмущения цуга внутренних волн [3–6].

Для описания структуры внутренних волн большой амплитуды широко применяются различные модификации уравнений Кортвега–де Фриза [7–9] и многослойные модели теории мелкой воды [10–12], учитывающие совместное влияние нелинейных и дисперсионных эффектов. Распространение и трансформация уединенных волн в трехслойной мелкой воде, в том числе, несимметричных внутренних волн второй моды, исследованы в недавних работах [13, 14]. Дисперсионная модель трехслойного течения стратифицированной жидкости с гидростатическим промежуточным слоем и некоторые ее упрощения использованы в [15, 16] для описания волновых процессов в шельфовой зоне моря. Более общая модель второго приближения теории длинных волн с произвольным числом гидростатических слоев, а также ее аппроксимация квазилинейными уравнениями первого порядка, выведены и верифицированы в [17, 18]. Эта многослойная

модель будет использована в данной работе для описания гидрофизических процессов в шельфовой зоне приливного моря.

Одним из эффективных способов регистрации параметров внутренних волн и определения структуры волновых фронтов является применение термогирлянд, позволяющих регистрировать изменение температуры на заданных горизонтах и восстанавливать заглужения рассматриваемых изотерм в окрестности измерительного комплекса как функцию времени [19, 20]. Применение нескольких измерительных станций, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, дает возможность идентифицировать определенные волновые структуры, например, отдельные уединенные волны или фронты распространяющихся возмущений, и отследить их фазовые и амплитудные характеристики, а также найти среднюю скорость распространения возмущений [21]. Полученная информация является основой для верификации математических моделей распространения внутренних волн. Попытки восстановить фазовые и амплитудные характеристики внутри волнового пакета при прохождении внутреннего бора на некотором расстоянии от измерительного комплекса предприняты в [8, 15, 16]. Сравнения с натурными измерениями, выполненными на конкретных станциях, показали, что удовлетворительных результатов можно достичь только на относительно небольших пространственных масштабах (порядка одного километра для шельфа Японского моря) из-за интенсивного взаимодействия отдельных волн внутри волнового пакета.

В данной работе исследуется возможность восстановления поля температуры и скорости в некоторой области шельфовой зоны по модифицированным уравнениям многослойной мелкой воды [18] на основе данных одного или нескольких измерительных комплексов. Физическая постановка задачи близка к рассматриваемой в [15, 16], однако речь идет о распределении фоновых гидрофизических характеристик без выделения внутренней структуры отдельных волновых пакетов. Такой подход оправдан, если основное поле внутренних волн является квазидвумерным и преобладает однонаправленное распространение возмущений от свала глубин в сторону берега. Результаты работы подтверждают эту гипотезу, по крайней мере, для выбранного времени проведения натурального эксперимента (сентябрь–октябрь 2019).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Система уравнений, описывающая распространение нелинейных волн в многослойной стратифицированной мелкой воде с учетом негидростатического распределения давления, выведена в [12]. Эти уравнения для двухслойных течений широко используются для моделирования уединенных внутренних волн [11]. В данной работе рассматривается упрощенная версия многослойной модели [12], в которой негидростатические эффекты учитываются только в верхнем (нижнем) слое. В приближении Буссинеска ($0 < (\rho_i - \rho_1)/\rho_1 \ll 1$, ρ_i – плотность жидкости в i -м слое, $\rho_{i+1} > \rho_i$) для течений над плавно меняющимся рельефом дна многослойные уравнения [12] принимают вид [17, 18]

$$\begin{aligned} h_{it} + (u_i h_i)_x &= 0, \quad (i = 1, \dots, n) \\ u_{it} + \left(\frac{u_i^2}{2} + \Pi + \frac{\varepsilon^2 h_i}{3} \frac{d^2 h_i}{dt^2} + \frac{\varepsilon^2}{6} \left(\frac{dh_i}{dt} \right)^2 \right)_x &= f_i, \\ u_{it} + (u_i^2/2 + p_i)_x &= -b_i Z_x + f_i, \quad (i = 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u_i и h_i – скорость и толщина i -го слоя жидкости, уравнение $z = Z(x)$ задает рельеф дна, $b_i = g(\rho_i - \rho_1)/\rho_1 \geq 0$ – коэффициенты плавучести, g – ускорение силы тяжести, $\rho_1 \Pi$ – модифицированное давление на верхней границе, ε – длинноволновый параметр (отношение полной глубины канала к характерной длине волны). Нумерация слоев ведется сверху вниз. Переменные p_i и оператор d/dt имеют вид

$$p_i = \Pi + \sum_{j=2}^{i-1} b_j h_j + b_i \sum_{j=i}^n h_j, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Функции f_i задают трение на границах слоев и при учете диссипативных эффектов (постоянная $c_f > 0$) определяются следующим образом

$$f_1 = -\frac{c_f}{h_1}(u_1 - u_2)|u_1 - u_2|, \quad f_n = -\frac{c_f}{h_n}(u_n - u_{n-1})|u_n - u_{n-1}|, \quad (1.3)$$

$$f_i = -\frac{c_f}{h_i}((u_i - u_{i-1})|u_i - u_{i-1}| + (u_i - u_{i+1})|u_i - u_{i+1}|), \quad (i = 2, \dots, n-1).$$

Диссипация энергии при распространении внутренних волн в многослойной среде в основном определяется перемешиванием и генерацией коротких волн на внутренних границах течения. Трение о дно также оказывает влияние на эволюцию придонных внутренних волн и может быть включено в модель соответствующим образом.

Необходимо отметить, что в приближении Буссинеска верхняя граница фиксирована и полный расход жидкости Q является функцией времени:

$$H + Z(x) = H_0 = \text{const}, \quad H = \sum_{i=1}^n h_i, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^n u_i h_i. \quad (1.4)$$

Систему (1.1) дополним соотношениями (1.4), которые позволяют выразить переменные u_n и h_n через остальные искомые функции u_i, h_i ($i = 1, \dots, n-1$).

Для численного моделирования распространения волновых возмущений в многослойной жидкости систему (1.1) удобно аппроксимировать квазилинейными уравнениями первого порядка. Следуя [10, 18], введем новые переменные η и v (“мгновенные” толщина и скорость жидкости верхнего слоя) по правилу

$$\frac{d\eta}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha b}{h_1}(h_1 - \eta),$$

где $\alpha > 0$ безразмерный параметр и $b = b_n$. Заменяем дисперсионные члены в уравнении импульса верхнего слоя системы (1.1) следующим образом

$$\frac{dh_1}{dt} \rightarrow v, \quad \frac{d^2 h_1}{dt^2} \rightarrow \frac{\alpha b}{h_1}(h_1 - \eta)$$

и переходом к переменным $s_i = u_{i+1} - u_i$ исключим функцию Π из уравнений движения. В результате получим замкнутую неоднородную систему законов сохранения [18] для определения $2n$ искомых функций $\mathbf{U} = (\eta, v, s_1, \dots, s_{n-1}, h_1, \dots, h_{n-1})$:

$$(h_1 \eta)_t + (u_1 h_1 \eta)_x = v h_1, \quad (v h_1)_t + (u_1 v h_1)_x = \alpha b (h_1 - \eta),$$

$$s_{1t} + \left(\frac{u_2 + u_1}{2} s_1 - b_2 h_1 - \frac{\alpha b \varepsilon^2}{3} (h_1 - \eta) - \frac{\varepsilon^2 v^2}{6} \right)_x = \varphi_1,$$

$$s_{it} + \left(\frac{u_{i+1} + u_i}{2} s_i - (b_{i+1} - b_i) \sum_{j=1}^i h_j \right)_x = \varphi_i, \quad (i = 2, \dots, n-1)$$

$$h_{it} + (u_i h_i)_x = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1).$$
(1.5)

Здесь

$$u_{i+1} = s_i + u_i, \quad u_1 = \frac{1}{H} \left(Q - \sum_{i=2}^n h_i \sum_{j=1}^{i-1} s_j \right),$$

$$h_n = H_0 - Z - \sum_{i=1}^{n-1} h_i, \quad \varphi_i = f_{i+1} - f_i.$$

Неоднородные законы сохранения (1.5) будут использоваться далее для проведения численного моделирования распространения нестационарных внутренних волн.

При $n = 2$ (двухслойная жидкость) система (1.5) упрощается, что позволяет в явном виде определить скорости характеристик. При этом гиперболичность уравнений двухслойного течения обеспечивается условием

$$\alpha > \frac{3}{\varepsilon^2} \left(\frac{(u_2 - u_1)^2}{bH} - 1 \right).$$

В общем случае можно утверждать, что система (1.5) является гиперболической при небольшом сдвиге скорости в слоях [18]. Отметим, что при $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$ модели (1.1) и (1.5) редуцируются к системе уравнений многослойной мелкой воды для гидростатических течений в приближении Буссинеска.

Согласно [10] при $\alpha \rightarrow \infty$ решения системы (1.5) аппроксимируют решения исходной дисперсионной модели (1.1). Очевидно, что увеличение параметра α приводит к увеличению скоростей характеристик и замедлению численных расчетов в силу условия Куранта. Выполненные в [14, 18] сравнения решений дисперсионных уравнений и их аппроксимаций показывают, что уже при $\alpha \sim 10$ уравнения первого порядка достаточно точно воспроизводят форму, по крайней мере, головной волны. В последнее время предложенный в [10] метод аппроксимации дисперсионных уравнений теории волн квазилинейными системами первого порядка путем введения дополнительных ‘мгновенных’ переменных получил широкое распространение [14, 22, 23]. Это объясняется простотой численной реализации гиперболических систем законов сохранения, сравнительно невысокой трудоемкостью вычислений и понятной постановкой граничных условий, связанных с характеристиками уравнений движения.

Для течений над ровным дном ($Z = 0$) рассматриваемая модель инвариантна относительно преобразования Галилея, поэтому решения в классе бегущих волн (искомые функции зависят от переменной $\zeta = x - Dt$, $D = \text{const}$) эквивалентны стационарным решениям ($D = 0$), определяемым системой

$$\begin{aligned} (u_i h_i)' &= 0, & (u_i^2/2 + p_i)' &= f_i, & (i = 2, \dots, n), \\ (u_1^2/2 + \Pi + \alpha \varepsilon^2 b(h_1 - \eta)/3 + v^2/6)' &= f_1, & u_1 \eta' &= v, \\ u_1 v' &= \alpha b(h_1 - \eta)/h_1, & \sum_{i=1}^n h_i &= H_0, & \sum_{i=1}^n u_i h_i &= Q. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной x , функции p_i и f_i определены формулами (1.2), (1.3). Для построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6) применяется изложенный в [18] алгоритм приведения этой системы к разрешенному относительно производных виду. Условия при $x = x_0$, обеспечивающие замыкание нетривиального решения уравнений движения к постоянному потоку $h_i = h_i^0$, $u_i = u_i^0$, также сформулированы в [18].

2. НАТУРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Исследования нестационарных волновых процессов на гидрофизическом полигоне Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичева ДВО РАН проводятся в течение ряда лет [19, 20]. Непрерывный мониторинг в различных точках шельфовой зоны на глубинах от 20 до 80 м осуществляется в летне-осенний период на протяжении 1–4 нед. В работе использованы данные измерений, полученные в октябре 2019 г. для последовательности донных станций S02, S09, S07 и S03, расположенных на линейной трассе (как показано на рис. 1). Из рисунка видно, что трасса пересекает изобаты практически по нормали. Расстояние между станциями: S02 и S09 – 4100 м, S09 и S07 – 1987 м, S07 и S03 – 1881 м. Глубина на соответствующих донных станциях: S02 – 55 м, S09 – 47.5 м, S07 – 42.5 м, S03 – 39 м. Достаточное количество датчиков на термогирляндах (36–37 датчиков через 1 м на S02, S09, S03 и 12 датчиков через 3 м на S07) позволяет получить детальную зависимость положения выбранных изотерм как функцию времени. Заметим, что в районе гидрофизического полигона соленость меняется незначительно. Поэтому в летне-осенний период основной вклад в стратификацию прибрежных вод вносит вертикальное распределение температуры.

Данные, полученные со всех донных станций, синхронизованы по времени. Начало отсчета – 12:00, 6 октября 2019 г. На рис. 2 показан фрагмент записи распределения температуры в градусах Цельсия на заданном горизонте. График демонстрирует изменение температуры на различных горизонтах при прохождении волнового бора. Такое представление данных удобно для визуализации внутренних волн, но для сравнения с результатами численного моделирования необходимо рассчитать нестационарное распределение изотерм в окрестности измерительной станции на основе полученных данных. Естественно, рассматриваемые изотермы должны представлять эволюцию основного термоклина, связанную с распространением внутренних волн. Количество изотерм, необходимое для сравнения с численными результатами, зависит от ис-

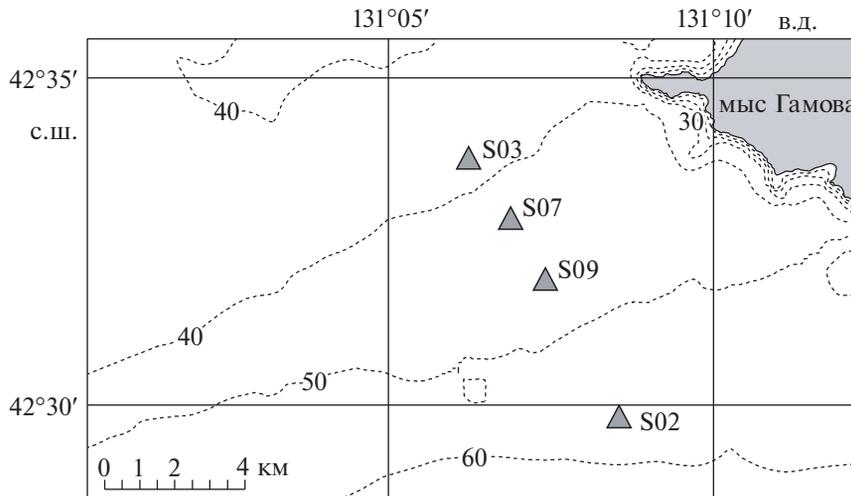


Рис. 1. Карта-схема района натуральных наблюдений в северо-западной части залива Петра Великого с указанием места расположения донных станций S02, S03, S07 и S09. Пунктирные линии – изобаты, числа на них соответствуют глубине в метрах.

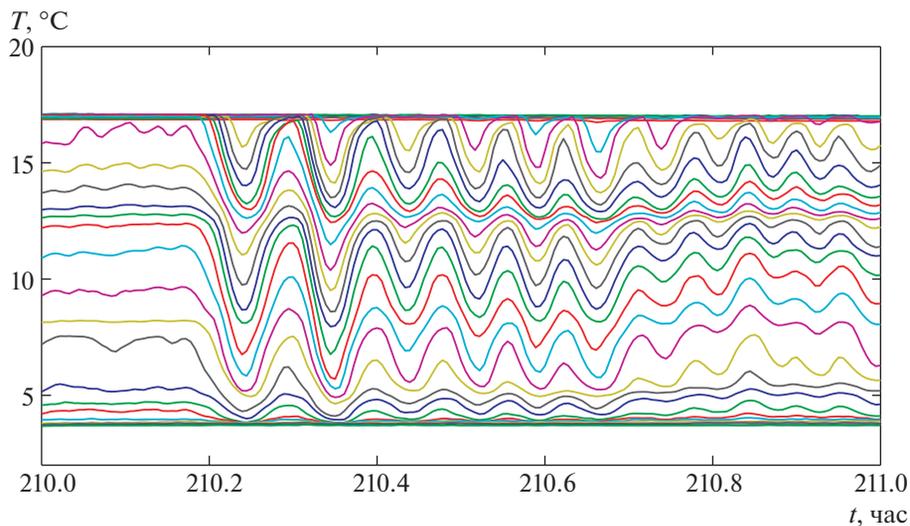


Рис. 2. Зависимость температуры на различных горизонтах от времени, полученная на станции S03 в октябре 2019 г.

пользуемой математической модели. В двухслойных моделях выбирается изотерма, соответствующая центральной части термоклина. При использовании уравнений многослойного течения появляется возможность учесть как толщину, так и реальное распределение температуры внутри термоклина.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численное моделирование распространения внутренних волн проводится на основе уравнений (1.5) с использованием простой и надежной TVD схемы второго порядка аппроксимации [24]. Расчетная область совпадает с участком трассы, направленной в сторону береговой линии от выбранной станции и включает одну или несколько других станций в качестве контрольных. Число узлов N по пространственной переменной x варьируется от 500 до 1000, сетка равномерная. Шаг по времени определяется из условия Куранта. Число слоев n в уравнениях (1.5) берется равным шести или двум. Все расчеты проведены при $\alpha = 10$ и $\epsilon = 1$. Коэффициент трения между

слоями $c_f = 0.006$ (либо равен нулю при игнорировании диссипативных эффектов). Рельеф дна аппроксимируется функцией

$$Z(x) = a(1 - \exp(-kx)), \quad (3.1)$$

где параметры a и k варьируются в зависимости от выбора расчетной области так, чтобы глубины основной и контрольных станций соответствовали данным натурального эксперимента.

В качестве граничных условий на левой границе расчетной области $x = 0$ используются данные о структуре термоклина на одной из донных станций, что позволяет определить толщины стратифицированных слоев $h_i^l(t)$ и задать условия: $h_i(t, 0) = h_i^l(t)$. При этом натурные данные осредняются на небольшом временном интервале (от 1 до 10 мин). Такое осреднение позволяет воспроизводить особенности волновых процессов в достаточно широком диапазоне параметров течения. Скорости жидкости в слоях на левой границе определяются на основе линеаризованных соотношений на разрыве по правилу:

$$u_i^l(t) = (h_i(t, x_1)u_i(t, x_1) + \lambda(h_i^l - h_i(t, x_1)))/h_i^l,$$

где λ – приближенно вычисленная максимальная скорость характеристик. Условия для ‘мгновенных’ переменных η и v имеют вид:

$$\eta^l(t) = h_i^l(t), \quad v^l(t) = \frac{(\lambda - u_i(t, x_1))h_i(t, x_1)v(t, x_1)}{(\lambda - u_i^l)h_i^l}.$$

С использованием данных при $x = 0$ вычисляются потоки на границе первой ячейки с центром в точке $x = x_1$. На правой границе расчетной области задаются ‘мягкие’ граничные условия $U_N = U_{N-1}$, обеспечивающие отсутствие отраженных волн (U_i – значения искомых функций в узловой точке x_i).

В начальный момент времени $t = 0$ в узловых точках расчетного интервала $[0, L]$ задаются постоянные толщины слоев $h_i = h_i^l(0)$ и нулевые скорости $u_i = 0$, а также $\eta = h_i^l(0)$ и $v = 0$. Заметим, что данные о вертикальном распределении температуры и скорости на трассе между станциями, как правило, отсутствуют. Поэтому как пространственное распределение температуры в слоях, так и горизонтальные компоненты скорости вдоль трассы в начальный момент могут задаваться произвольно. Но через некоторое время, достаточное для прохождения возмущений с левой границы через всю расчетную область, начальные данные “забываются” и построенное численное решение можно сравнивать с натурными данными, полученными на контрольных станциях.

Как отмечалось выше, при постановке граничных условий используется предположение о квазидвумерном характере распространения волновых фронтов в шельфовой зоне. Эта гипотеза может быть подтверждена сравнением натурных данных и численных расчетов. Для корректной постановки граничных условий в многослойных моделях требуется информация о скоростях распространения высших мод (о характеристиках в области гиперболичности). Упрощенный подход, используемый в этой работе, состоит в том, что как и в случае стратифицированных течений с небольшим сдвигом скорости в слоях, для многослойной модели (1.5) достаточно задать на границе толщины каждого из слоев как функцию времени. Для двухслойных течений такой подход является корректным и для конечного сдвига горизонтальной скорости в слоях, так как гиперболичность системы уравнений (1.5) при $n = 2$ и докритический режим течения во всей рассматриваемой области может быть обеспечен выбором параметра α . Поэтому для расчетов, охватывающих достаточно большой временной интервал, двухслойная модель является более предпочтительной.

3.1. Верификация многослойной модели

На рис. 3 показаны результаты численного моделирования волновых процессов на участке между станциями S07 и S03, полученные по многослойным уравнениям (1.5). В качестве граничных условий для уравнений движения задавались толщины слоев, соответствующие изотермам с интервалом $\Delta T = 2^\circ\text{C}$ для диапазона температур 6–14°C на станции S07. Аналогичные изотермы, полученные на станции S03, показаны тонкими сплошными линиями на рис. 3а. Толстыми сплошными кривыми изображены границы раздела между слоями, полученные по многослойной модели (1.5) при $n = 6$. Пунктиром показаны результаты расчета при двухслойном представлении течения (уравнения (1.5) при $n = 2$). Результаты расчета изменения скорости в слоях в за-

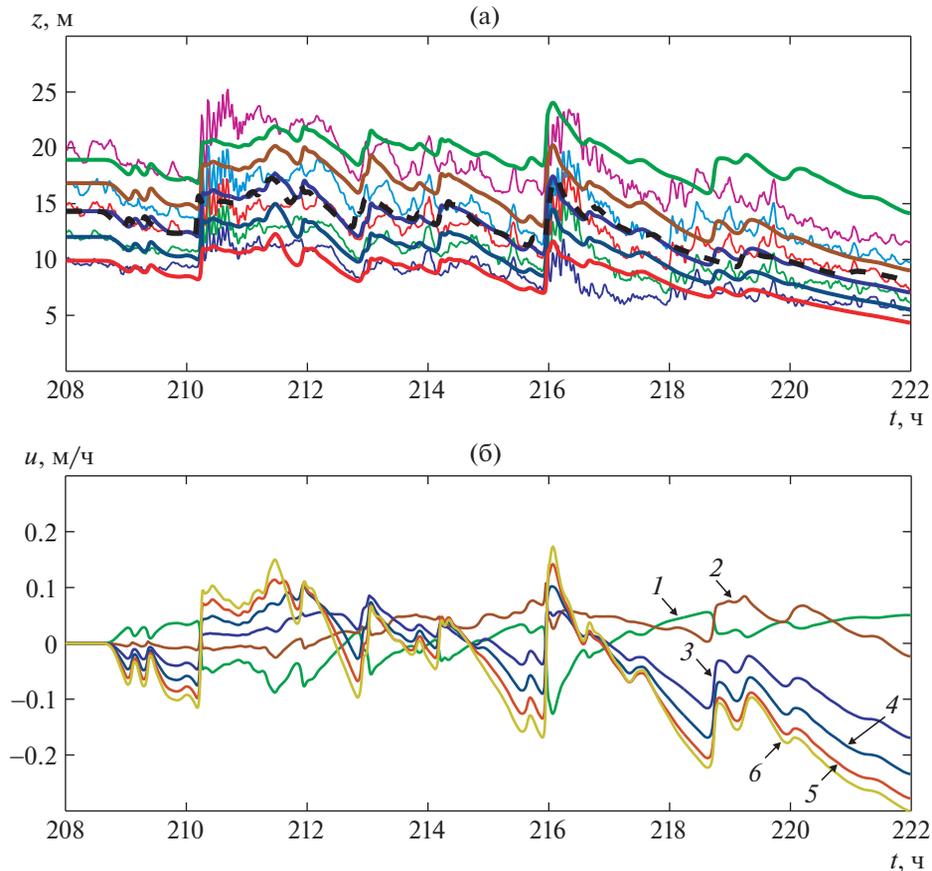


Рис. 3. Результаты расчета эволюции течения на промежутке 14 ч на станции S03 по данным станции S07: а – границы раздела слоев (толстые линии – расчет по 6-слойной модели (1.5), пунктир – по двухслойным уравнениям, тонкие кривые – данные натурных измерений станции S03); б – скорость жидкости в слоях 1–6.

висимости от времени на станции S03 представлены на рис. 3б. В данном случае плавучести для 6-слойной модели задавались по правилу $b_i = 0.02(1 - 0.2(6 - i))$ м/с² ($i = 2, \dots, 6$), для двухслойной – $b = 0.02$ м/с². Коэффициенты в формуле рельефа дна (3.1) – $a = 8.5$ м и $k = 2.8 \times 10^{-4}$ м⁻¹, что обеспечивает требуемый перепад глубины 3.5 м на расстоянии 1881 м между станциями.

На выбранном временном интервале 208–218 ч возмущения термоклина соответствуют прохождению двух придонных волновых боров. Более детальная структура первого бора представлена на рис. 2, показывающем изменение температуры на различных горизонтах. Из рис. 3 следует, что многослойная модель качественно воспроизводит осредненную структуру наблюдаемого волнового пакета, а двухслойные модели описывают динамику центральной части термоклина даже в том случае, когда стратификация существенно отличается от двухслойной.

Для того, чтобы численно воспроизвести структуру короткопериодных волн, генерируемых на фронте внутреннего бора (рис. 2), необходимо использовать второе приближение теории многослойной мелкой воды [15, 16]. Однако для моделирования процессов распространения более длинных нелинейных волн можно использовать и первое приближение, соответствующее гидростатическому распределению давления во всех слоях. При этом основная динамика развития гидродинамических процессов в шельфовой зоне все еще воспроизводится достаточно детально и результаты расчетов могут быть использованы для построения фоновой картины при изучении распространения короткопериодных внутренних волн и вихревых образований небольшого масштаба.

На рис. 3б показано, как меняются скорости на правой границе, соответствующей станции S03. Линии 1, 6 представляют скорости жидкости в приповерхностном и придонном слоях, кривые 2–5 – изменение скорости во внутренних слоях термоклина. Следует отметить, что перед внутренним бором, изображенным на рис. 3а ($t = 210$), толщина нижнего слоя уменьшается и

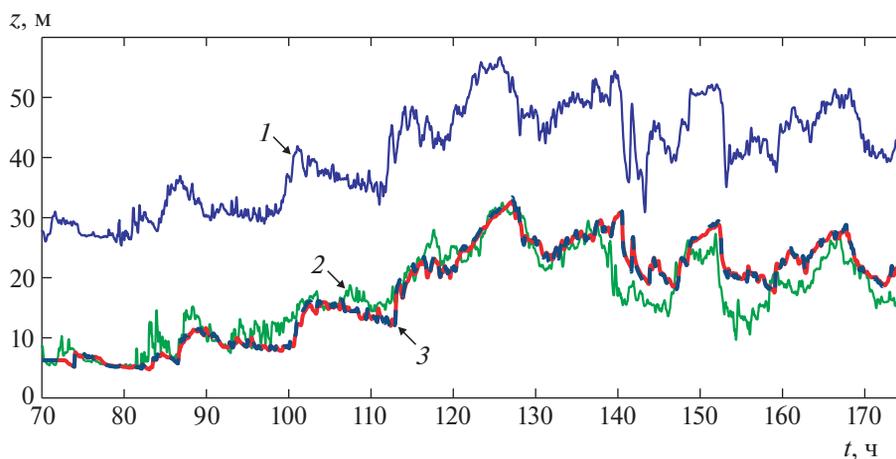


Рис. 4. Положение изотермы $T = 10^\circ\text{C}$ в зависимости от времени на станциях S02 (кривая 1, поднятая вверх на 20 м) и S09 (линия 2); кривая 3 — расчет по уравнениям (1.5) при $n = 2$; пунктир — по двухслойной гидростатической модели.

скорость в этом слое становится отрицательной. Такое поведение изотерм соответствует механизму генерации придонного волнового бора при распаде внутреннего прилива над шельфом ([16], рис. 2). Таким образом, внутренний бор распространяется в стратифицированной среде со сдвигом скорости в слоях и скорость его распространения может зависеть от этого сдвига. Другой характерной особенностью прохождения придонного внутреннего бора является изменение направления течения в слоях.

Отметим, что учет трения при расчетах на непродолжительных промежутках времени несущественно влияет на результат, поэтому в данном тесте коэффициент $c_f = 0$. В проводимом ниже моделировании волновых процессов на промежутках времени в несколько суток диссипативные эффекты учитываются ($c_f = 0.006$).

3.2. Расчеты по двухслойной модели на длительном интервале времени

На рис. 4, 5 приведены результаты расчета положений термоклина на контрольных станциях в течение нескольких суток с использованием двухслойной модели (уравнения (1.5) при $n = 2$). На рис. 4 линия 1 показывает положение изотермы $T = 10^\circ\text{C}$, измеренное на станции S02 и поднятое на 20 м над дном для удобства изображения. Эти данные использовались в качестве граничных условий на левой границе расчетной области по пространственной переменной. Линия 2 соответствует натурным данным о положении изотермы $T = 10^\circ\text{C}$ на контрольной станции S09 (правом конце расчетного интервала по x). Кривая 3 показывает результаты численного моделирования горизонта термоклина в зависимости от времени на правой границе расчетной области. Пунктирная линия, практически совпадающая с кривой 3, соответствует расчету по двухслойной гидростатической модели. Как видно из рисунка, негидростатическое распределение давления в верхнем слое не оказывает заметного влияния на структуру волн при расчете на протяжении нескольких суток. Коэффициент плавучести $b = 0.02 \text{ м/с}^2$; параметры в формуле (3.1) — $a = 19.1 \text{ м}$ и $k = 1.2 \times 10^{-4} \text{ м}^{-1}$.

На рис. 5 показана аналогичная зависимость положения термоклина от времени. Линия 1 — изотерма $T = 10^\circ\text{C}$ на станции S09, поднятая над дном на 40 м. Эти данные используются при проведении расчета в качестве граничного условия на левой границе. Линии 2 и 3 представляют эту же изотерму на станциях S07 (поднята на 20 м) и S03, соответствующих промежуточному положению контрольной станции и правой границе расчетного интервала по пространству. Кривые 4 и 5 — результаты расчета положения термоклина на станциях S07 и S03 в зависимости от времени. Для обеспечения требуемого перепада глубин 5 м между станциями S09, S07 и 3.5 м между S07, S03 выбираются параметры $a = 16.5 \text{ м}$ и $k = 1.9 \times 10^{-4} \text{ м}^{-1}$. Из представленных рисунков можно сделать вывод, что двухслойные модели мелкой воды достаточно полно описывают

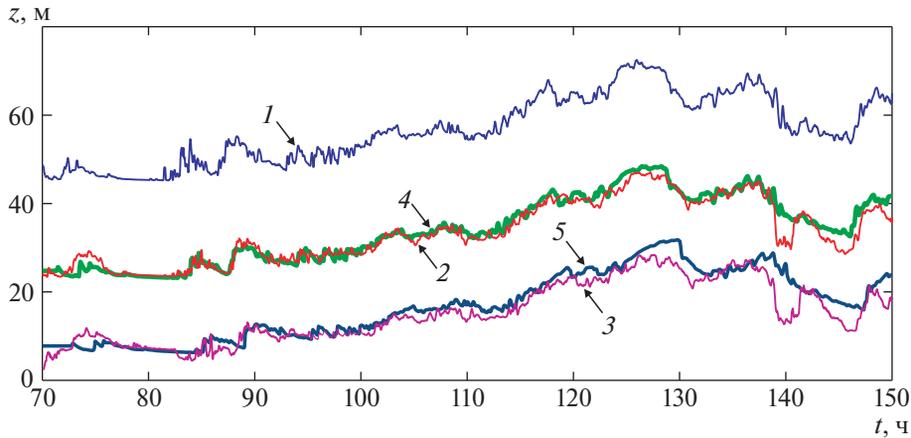


Рис. 5. Положение изотермы $T = 10^\circ\text{C}$ в зависимости от времени на станциях S09 (кривая 1, поднята на 40 м), S07 (линия 2, поднята на 20 м) и S03 (кривая 3); линии 4 и 5 – расчет по двухслойным уравнениям (1.5).

эволюцию основного термоклина на протяжении длительного интервала времени и могут быть использованы для мониторинга нелинейных волновых процессов, связанных с плотностной стратификацией прибрежных вод.

Интересной особенностью представленных на рис. 4, 5 расчетов является локальное отклонение натуральных данных и расчетных кривых на некоторых участках. Наиболее выражено это явление на рис. 5 в интервале 140–150 ч на станциях S07 и S03. Именно на этом участке гипотеза о квазидвумерной структуре внутренних волн перестает быть справедливой, что свидетельствует о наличии возмущения поля температуры источником другого типа. Поэтому информация о фоновом распределении гидродинамических полей в шельфовой зоне, полученная с использованием вертикальных термогирлянд, может оказаться полезной при интерпретации натуральных данных о вихре-волновом взаимодействии возмущений различной природы на шельфе.

3.3. Бегущие волны

Как было показано выше, дисперсионные эффекты слабо влияют на структуру волн при проведении расчетов на значительных (несколько суток) временных интервалах. Однако для корректного моделирования мелкомасштабных процессов необходимо учитывать негидростатическое распределение давления. Продемонстрируем это сравнением решения уравнений (1.5) в классе бегущих волн с данными натуральных наблюдений станции S03 на коротком интервале времени. Для построения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6) выполнено ее приведение к виду, разрешенному относительно производных, а также использованы условия примыкания нетривиального решения к заданному постоянному потоку [18].

Пунктирные линии на рис. 6 соответствуют границам раздела слоев с интервалом 2°C по данным натуральных наблюдений на станции S03 (увеличение рис. 3а в окрестности $t = 210.5$ ч). Сплошные кривые – расчет по стационарным уравнениям (1.6) с шестью слоями в системе координат, движущейся со скоростью D . Значения толщин слоев на правой границе $h_1 = 21.85$, $h_2 = 3.38$, $h_3 = 1.44$, $h_4 = 1.63$, $h_5 = 1.4$, $h_6 = 9.3$ (полная глубина $H = 39$ м), а также плавучести в слоях $b_k = (k - 1)b/5$, $b = 0.02$ м/с² задаются согласно данным натурального эксперимента на станции S03. Число Фруда $\text{Fr} = D_0/\sqrt{bH} = 0.46$ подобрано из условия соответствия амплитуды головной волны данным натуральных наблюдений. Сдвиг скорости в слоях не учитывался ($u_k = D_0 \approx 0.4063$ м/с), коэффициент трения $c_f = 0.006$. Переход от расчетного интервала по пространству $X = [0, L]$ (в метрах) к интервалу по времени $\tau = [t_0, t_1]$ (часы) дается формулой $\tau = (60^2 D)^{-1} X + t_0$, где $D = 1.4D_0$. Как видно из рисунка, модель достаточно точно описывает структуру волнового бора, если ввести поправку на абсолютную скорость распространения фронта волны D . По всей вероятности, для более точного описания структуры волн и определе-

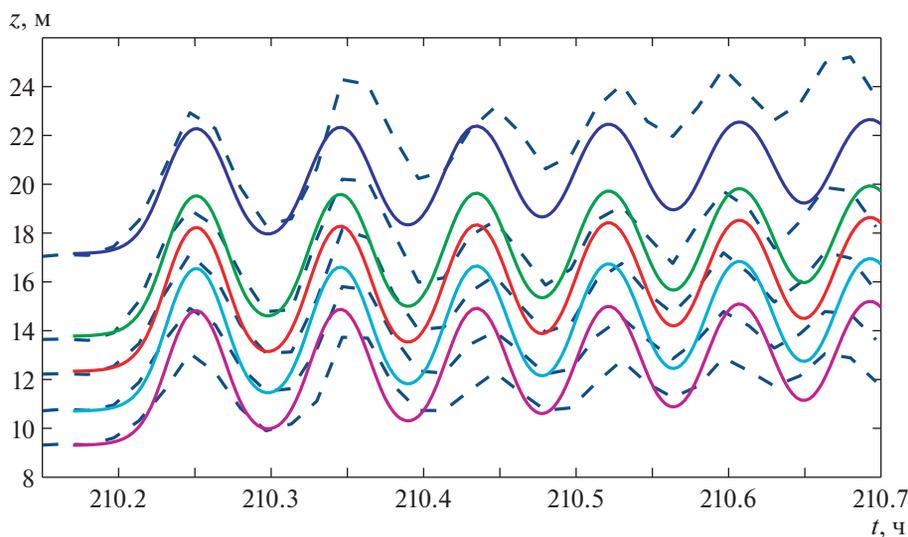


Рис. 6. Мелкомасштабная структура волн: сплошные линии – границы раздела слоев, полученные по модели (1.5) в классе бегущих волн; пунктир – данные натуральных наблюдений на станции S03.

ния скорости распространения волновых фронтов необходимо учитывать вертикальную и горизонтальную неоднородность скорости в слоях, что предполагается сделать в дальнейшем.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Применение теории мелкой воды для моделирования течений стратифицированной жидкости в гидрофизических приложениях является оправданным в силу того, что горизонтальные масштабы движения намного превосходят вертикальные масштабы. Уравнения многослойной мелкой воды позволяют учесть не только вертикальное распределение плотности, но и сдвиг скорости в слоях. Эти уравнения хорошо зарекомендовали себя при восстановлении внутренней структуры характерных волновых объектов (уединенные волны, внутренние боры и др.). Однако при численной реализации этой модели применительно к существующим нестационарным волновым процессам возникает ряд трудностей, связанных с устойчивостью численных решений и постановкой граничных условий.

В работе исследуется возможность применения уравнений многослойной мелкой воды и, в частности, двухслойной модели к проблеме мониторинга нестационарных гидрофизических процессов в шельфовой зоне приливного моря. Постановка задачи включает расчет вертикального распределения температуры и горизонтальной компоненты скорости вдоль прямолинейной трассы на основе данных о вариации температуры на заданных горизонтах, полученных на одной из донных станций. Верификация расчетов осуществляется с использованием данных других контрольных станций, расположенных вдоль этой трассы. Сравнение результатов численного расчета с натурными данными позволяет определить, насколько гипотеза о квазидвумерном характере течения на шельфе, лежащая в основе данного подхода, соответствует реальности. На рис. 6 представлена структура придонного волнового бора, построенного в классе бегущих волн для многослойной модели (1.6) при $n = 6$. Учет негидростатичности распределения давления в верхнем слое при построении такого решения является определяющим. Заметим, что пакет волн, генерируемых на фронте внутреннего бора, является короткопериодным (с периодом 5–6 мин). При осреднении моделируемых процессов на интервале 5–10 мин, используемом для мониторинга более плавных возмущений, короткопериодные волны сглаживаются, но волновая картина остается достаточно многообразной. На рис. 3 показан фрагмент расчета волновой структуры, содержащей два придонных волновых бора, полученный с использованием многослойной ($n = 6$) и двухслойной ($n = 2$) модели (1.5). Основной вывод, который можно сделать из сравнения расчетов, состоит в том, что двухслойные уравнения движения адекватно передают процесс трансформации термоклина при прохождении внутренних волн даже в случае, когда стратификация существенно отличается от двухслойной.

При увеличении интервала осреднения расчетных и натурных данных до 10 мин дисперсионные эффекты, связанные с вертикальным ускорением частиц жидкости, проявляются незначительно. На рис. 4, 5 расчеты по двухслойным уравнениям (1.5) при $\alpha = 10$, $\varepsilon = 1$ и $\alpha = \varepsilon = 0$ (т.е. по классическим уравнениям двухслойной мелкой воды) визуальны неотличимы. Поэтому возникает вопрос о целесообразности применения более сложной модели, учитывающей дисперсионные эффекты. В пользу выбора используемых уравнений со значением параметров $\alpha > 0$, $\varepsilon = 1$ можно привести два аргумента: эта модель пригодна для расчета как короткопериодных, так и более длинных внутренних волн, а также при численной реализации обладает большей устойчивостью по сравнению с классической моделью. Отметим, что приведенные на рис. 3–5 расчетные кривые с хорошей точностью соответствуют натурным данным. Это означает, что гипотеза о двумерном характере распространения возмущений поля температуры находит свое подтверждение. Тем более вызывает интерес наличие относительно небольших временных интервалов (рис. 4, 5), где различие между расчетными и экспериментальными данными становится существенным. Изучение природы этих локальных аномалий является предметом дальнейших исследований. Для определения источника таких вихре-волновых возмущений потребуются пространственное размещение измерительных комплексов на достаточно большой акватории гидрофизического полигона.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-11-20189) и в рамках государственного задания Тихоокеанского океанологического института им. В.И. Ильичева ДВО РАН (регистрационный номер АААА-А20-120021990003-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092129>
2. *Jackson C.R., da Silva J.C.B. Jeans G.* The generation of nonlinear internal waves // *Oceanogr.* 2012. V. 25. P. 108–123. <https://doi.org/10.5670/oceanog.2012.46>
3. *Small J., Hallock Z., Pavey G., Scott J.* Observations of large amplitude internal waves at the Malin Shelf edge during SESAME 1995 // *Cont. Shelf Res.* 1999. V. 19. P. 1389–1436. [https://doi.org/10.1016/S0278-4343\(99\)00023-0](https://doi.org/10.1016/S0278-4343(99)00023-0)
4. *Scotti A., Pineda J.* Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L22307. P. 1–5. <https://doi.org/10.1029/2004GL021052>
5. *Rayson M.D., Jones N.L., Ivey G.N.* Observations of large-amplitude mode-2 nonlinear internal waves on the Australian North West shelf // *J. Phys. Oceanogr.* 2019. V. 49. P. 309–328. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0097.1>
6. *Серебряный А.Н., Пао К.П.* Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // *Докл. РАН.* 2008. Т. 420. № 4. С. 543–547.
7. *Yuan C., Grimshaw R., Johnson E.* The evolution of second mode internal solitary waves over variable topography // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 836. P. 238–259. <https://doi.org/10.1017/jfm.2017.812>
8. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркин А.А., Куркина О.Е.* Моделирование динамики интенсивных внутренних волн на шельфе // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2014. Т. 50. № 6. С. 714–722. <https://doi.org/10.7868/S0002351514060169>
9. *Novotryasov V.V., Stepanov D.V., Yaroshchuk I.O.* Observations of internal undular bores on the Japan/East Sea shelf-coastal region // *Ocean Dyn.* 2016. V. 66. P. 19–25. <https://doi.org/10.1007/s10236-015-0905-z>
10. *Ляпидевский В.Ю., Теушков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.
11. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 386. P. 1–36. <https://doi.org/10.1017/S0022112099005820>
12. *Choi W.* Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves // *Proc. Fourth Inter. Conf. Hydrodynamics / Eds. Y. Goda, M. Ikehata, K. Suzuki.* 2000. P. 453–458.
13. *Barros R., Choi W., Milewski P.A.* Strongly nonlinear effects on internal solitary waves in three-layer flows // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 883. A16. P. 1–36. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.795>

14. *Chesnokov A.A., Liapidevskii V.Yu.* Hyperbolic model of internal solitary waves in a three-layer stratified fluid // *Europ. Phys. J. Plus.* 2020. V. 135. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1140/epjps13360-020-00605-3>
15. *Ляпидевский В.Ю., Новотрясов В.В., Храпченков Ф.Ф., Ярощук И.О.* Внутренний волновой бор в шельфовой зоне моря // *ПМТФ.* 2017. Т. 58. № 5. С. 60–71.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170506>
16. *Кукарин В.Ф., Ляпидевский В.Ю., Храпченков Ф.Ф., Ярощук И.О.* Нелинейные внутренние волны в шельфовой зоне моря // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2019. № 3. С. 38–47.
<https://doi.org/10.1134/S0568528119030083>
17. *Ляпидевский В.Ю., Турбин М.В., Храпченков Ф.Ф., Кукарин В.Ф.* Нелинейные внутренние волны в многослойной мелкой воде // *ПМТФ.* 2020. Т. 61. № 1. С. 53–61.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200105>
18. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А., Ермишина В.Е.* Квазилинейные уравнения динамики внутренних волн в многослойной мелкой воде // *ПМТФ.* 2021. Т. 62. № 4. С. 34–45.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210404>
19. *Леонтьев А.П., Ярощук И.О., Смирнов С.В., Кошелева А.В., Пивоваров А.А., Самченко А.Н., Швырев А.Н.* Пространственно-распределенный измерительный комплекс для мониторинга гидрофизических процессов на океаническом шельфе // *Приборы и техника эксперимента.* 2017. № 1. С. 128–135.
<https://doi.org/10.7868/S0032816216060227>
20. *Пивоваров А.А., Ярощук И.О., Долгих Г.И., Швырев А.Н., Самченко А.Н.* Автономный акустический регистратор и его применение в составе гидрофизического комплекса // *Приборы и техника эксперимента.* 2021. № 3. С. 123–128.
<https://doi.org/10.31857/S0032816221030253>
21. *Lien R.-Ch., Heneey F., Ma B., Yang Y.J.* Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China sea: properties and energetic // *J. Phys. Oceanogr.* 2014. V. 44. № 4. P. 1095–1115.
<https://doi.org/10.1175/JPO-D-13-088.1>
22. *Favrie N., Gavriluk S.* A rapid numerical method for solving Serre–Green–Naghdi equations describing long free surface gravity waves // *Nonlinearity.* 2017. V. 30. P. 2718–2736.
<https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa712d>
23. *Busto S., Dumbser M., Escalante C., Favrie N., Gavriluk S.* On high order ADER discontinuous Galerkin schemes for first order hyperbolic reformulations of nonlinear dispersive systems // *J. Sci. Comput.* 2021. V. 87. P. 1–47.
<https://doi.org/10.1007/s10915-021-01429-8>
24. *Nessyahu H., Tadmor E.* Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1990. V. 87. P. 408–463.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90260-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90260-8)

УДК 533.6.011

ОБЛАСТИ ПОНИЖЕННОЙ ПОЛНОЙ ЭНТАЛЬПИИ В БЛИЖНЕМ СЛЕДЕ ЗА ТЕЛОМ В ПОТОКЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

© 2022 г. А. И. Алексюк^{a,b,c,*}

^a Манчестерский университет, Математический факультет, Манчестер, Великобритания

^b МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

^c Институт водных проблем РАН, Москва, Россия

*E-mail: andrey.aleksyuk@manchester.ac.uk

Поступила в редакцию 13.09.2021 г.

После доработки 21.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Изучается влияние формы обтекаемого тела на степень охлаждения (снижение температуры торможения) газа в областях пониженной полной энтальпии в следе. Течения моделируются путем численного решения уравнений Навье–Стокса для задач двумерного обтекания теплоизолированных тел потоком вязкого совершенного газа при числах Рейнольдса $Re = 1000$ и Маха $M_\infty = 0.4$. В качестве обтекаемых тел рассматриваются цилиндры эллиптического сечения и пара круговых цилиндров, расположенных поперек потока. Обсуждается точность результатов упрощенной модели для описания этого явления на основе поля скоростей в развитом следе. Приводятся примеры, показывающие, что неучет перераспределения полной энтальпии при вихреобразовании в подобных моделях может приводить к значительным расхождениям с данными численных расчетов в вихревых ядрах.

Ключевые слова: полная энтальпия, вязкий совершенный газ, вихревой след, эллиптический цилиндр

DOI: 10.31857/S0568528122010017

Интерес к процессу перераспределения полной энтальпии i_0 в потоках сжимаемого газа, помимо фундаментального, связан с устройствами, способными разделять поток газа на холодный и горячий (с низкой и высокой температурой торможения) без механической работы или внешнего теплоподвода (например, вихревая труба Ранка–Хилша и труба Леонтьева) [1, 2]. В настоящее время исследуются различные методы повышения эффективности таких устройств [3–5]. В связи с этим актуальным является изучение процесса разделения энергии (перераспределения полной энтальпии) в канонических течениях. Один из примеров таких течений рассматривается в настоящей работе – изучается энергоразделение в потоке газа при обтекании тел.

Вопрос разделения энергии при обтекании тел обсуждался во многих экспериментальных и теоретических работах [6–16]. Основной мотивацией для этих исследований послужил эффект Эккерта–Вайса [6] (или “эффект аэродинамического охлаждения” [8]), который заключается в формировании области с низкой температурой восстановления на подветренной стороне теплоизолированного цилиндра: при определенных условиях температура восстановления может быть ниже статической температуры набегающего потока.

Из закона сохранения энергии, записанного в безразмерной форме (см. раздел 1)

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho Re} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\gamma}{\rho Re Pr} \nabla^2 T \quad (0.1)$$

следует, что перераспределение полной энтальпии i_0 в жидких частицах может происходить в результате пульсаций давления, работы вязких напряжений и теплопроводности. Если нестационарностью и диссипативными механизмами можно пренебречь (как, например, вне области следа), то полная энтальпия в жидких частицах сохраняется. В области развитого следа можно пренебречь диссипативными механизмами, поэтому процесс энергоразделения определяется пульсациями давления. Вблизи поверхности тела, вообще говоря, необходимо учитывать все ме-

ханизмы. Оценка степени влияния этих механизмов (слагаемых в уравнении (0.1)) на основе численных расчетов [14] подтверждает эти соображения.

Наиболее выраженное снижение i_0 наблюдается вблизи кормовой части тела, при этом падение полной энтальпии вдоль пограничного слоя во фронтальной части цилиндра оказывается значительно меньшим и, следовательно, не может служить объяснением этого эффекта. По результатам экспериментов [8] была предложена связь эффекта Эккерта–Вайса с процессом вихреобразования, которая также была неявно подтверждена в последующих экспериментальных работах [7, 9]. В [9] было показано, что эффект ослабевает при внесении в область формирования вихрей разделительной пластины. В [7] наблюдалось значительное уменьшение i_0 за счет интенсификации вихрей при резонансе между частотами стоячих акустических волн в аэродинамической трубе и срыва вихрей. В численных расчетах [16] воздействие на процесс вихреобразования осуществлялось путем изменения расстояния между двумя цилиндрами, расположенными поперек потока. Было показано существенное влияние процесса вихреобразования на интенсивность эффекта Эккерта–Вайса и предложено его объяснение. Согласно [16] эффект определяется балансом двух факторов:

(i) *охлаждение* – вихрь формируется вблизи поверхности тела таким образом, что на начальном этапе интенсивно роста он перемещается к центральной линии следа. При этом давление в вихре уменьшается, т.е. первое слагаемое в уравнении (0.1) отрицательное. Это является основной причиной образования областей охлажденной жидкости вблизи кормовой части тела;

(ii) *нагрев* – на следующем этапе, при смещении формирующегося вихря вниз по течению и сходу в поток, возникает интенсивное течение газа в зазоре между кормовой частью цилиндра и вихрем. Этот поток заполняет пространство вблизи тела нагретым газом, который возникает вследствие пульсаций давления в срывающихся с тела сдвиговых слоях. Кроме того, поскольку ядро вихря – это область пониженного давления, за вихрем, движущимся вниз по течению, $\partial p/\partial t > 0$. Эти обстоятельства оказывают противоположный эффект, стремясь увеличить осредненное по времени значение энтальпии торможения.

Таким образом, несмотря на то, что вблизи кормовой части поверхности тела все три механизма имеют сравнимый порядок, охлаждение поверхности тела определяется недиссипативным слагаемым. Изменение режима взаимодействия срывающихся вихрей с поверхностью тела может приводить к существенному увеличению интенсивности этих процессов. В разделе 2.1 обсуждаются влияние формы обтекаемого тела на эффект Эккерта–Вайса и распределение i_0 в области формирования вихрей.

Представление о распределении полной энтальпии в развитом следе можно получить, опираясь на экспериментальные данные и результаты численного моделирования [7, 9, 12, 14–16]. Осредненная по времени полная энтальпия \bar{i}_0 принимает пониженные значения вблизи центральной линии следа (здесь и далее осредненные по времени величины обозначаются чертой сверху). Минимальные значения достигаются в области формирования вихрей. Эффект ослабевает по мере удаления вниз по течению. Однако следует отметить, что стремление \bar{i}_0 к значению в набегающем потоке $i_{0\infty}$ может быть немонотонным из-за перестройки развитого вихревого следа, приводящей к появлению локальных экстремумов \bar{i}_0 .

Как было отмечено выше, процесс разделения энергии в развитом следе можно описать, пренебрегая действием вязких сил и теплопроводности. В [7] дано следующее объяснение охлаждения газа вблизи центральной линии следа. Траектории жидких частиц в развитом следе устроены таким образом, что перед (за) вихрями частицы движутся в область (из области) следа. Учитывая, что давление в ядрах вихрей понижено, имеем $\partial p/\partial t < 0$ ($\partial p/\partial t > 0$) перед (за) вихрем. Поэтому согласно уравнению (1) i_0 убывает при движении частиц к центральной части следа. Изменение полной энтальпии вдоль траекторий представлено в [14] на основе численных расчетов.

Используя модель дорожки Кармана на основе бесконечных вихревых цепочек, можно установить связь между полной энтальпией и параметрами вихревой дорожки вдоль центральной линии следа [7, 15]:

$$\bar{i}_0 - i_{0\infty} = -\frac{\Gamma_0}{l}(1 + U) \quad (0.2)$$

Здесь l – период дорожки Кармана; Γ_0 и $1 + U$ – циркуляция вихрей и их скорость в системе координат, связанной с цилиндром. В [15] эта идея была развита на случай следов, состоящих из N вихревых цепочек, и продемонстрирована согласованность оценок, полученных на основе

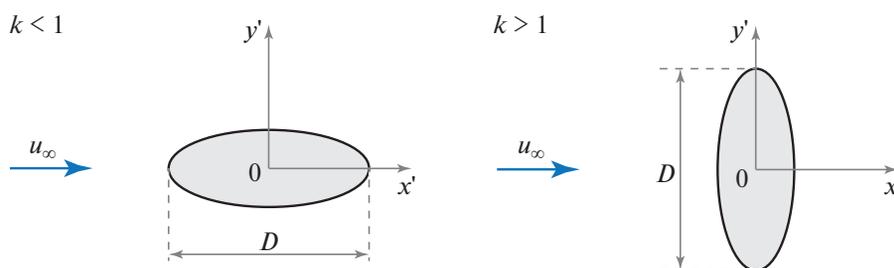


Рис. 1. Схема обтекания эллиптического цилиндра.

этой упрощенной модели, с численными результатами. Одной из основных трудностей при построении этих моделей является предположение о распределении температуры в вихревых ядрах, на которое оказывает влияние процесс вихреобразования. Этот вопрос обсуждается в разделах 2.2 и 2.3, опираясь на численный эксперимент.

Применимость подобных оценок осложняется в ситуации, когда крупномасштабные вихревые структуры в следе неупорядочены. Однако в расчетах и экспериментах (см. [16]) наблюдается подобие осредненных по времени профилей скоростей и полной энтальпии, причем обычно выполняется неравенство

$$\max_y [i_{0\infty} - \bar{i}_0(x, y)] < \max_y [1 - \bar{u}(x, y)]$$

Оно согласуется с уравнением (0.2) и может быть независимо получено для асимптотического дальнего следа при $Pr < 1$.

В настоящей работе рассматриваются процессы перераспределения полной энтальпии в ближнем следе за эллиптическим цилиндром и парой цилиндров на основе численного моделирования. Решаются начально-краевые задачи для уравнений Навье–Стокса, описывающие двумерные течения вязкого совершенного газа при числах Рейнольдса $Re = 1000$, Маха $M_\infty = 0.4$ и Прандтля $Pr = 0.72$. Постановка задачи обтекания тел и численный метод описаны в разделе 1. В разделе 2 обсуждаются результаты моделирования. Основное внимание уделяется вопросам: влияния формы обтекаемого тела на интенсивность энергоразделения (раздел 2.1); возникновения областей с пониженными значениями полной энтальпии i_0 в развитом следе и адекватности результатов упрощенной модели для их описания (разделы 2.2 и 2.3).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

1.1. Постановка задачи. Рассматриваются задачи обтекания цилиндра эллиптического сечения и пары круговых цилиндров в декартовой системе координат (x', y') , выбранной следующим образом: набегающий поток имеет скорость $(u_\infty, 0)$; в случае эллиптического цилиндра его центр находится в начале координат, в случае пары круговых цилиндров – центры расположены в точках $(0, 0)$ и $(0, L)$. Сечение эллиптического цилиндра удобно параметризовать, используя длину большой оси эллипса D и параметр сжатия k , равный отношению длин полуосей вдоль y' и x' (см. рис. 1). Таким образом, при $k = 1$ течение соответствует обтеканию кругового цилиндра диаметра D , при $k = 0$ и $k = \infty$ – бесконечно тонкой пластины длины D , расположенной вдоль и поперек потока соответственно. В случае пары круговых цилиндров также имеется два параметра, определяющих геометрию течения – диаметр цилиндров D и расстояние между их центрами L .

Течение жидкости описывается моделью вязкого совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями c_v , c_p при постоянном объеме и давлении, коэффициентами теплопроводности κ и вязкости μ . Решаются уравнения Навье–Стокса, которые в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \frac{d}{dt} \left(T + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \frac{\gamma}{\text{RePr}} \nabla^2 T \\ p &= (\gamma - 1) \rho T \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений со следующими компонентами:

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$\rho(x, y, t)$, $p(x, y, t)$, $\mathbf{u}(x, y, t) = (u, v)$ и $T(x, y, t)$ – плотность, давление, вектор скорости и температура; $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты. Числа Рейнольдса, Прандтля и Маха вводятся следующим образом:

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty D}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa}, \quad M_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty}$$

где ρ_∞ – плотность набегающего потока, $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ – скорость звука в набегающем потоке. Обезразмеривание выполнено с использованием следующих соотношений:

$$t = \frac{u_\infty t'}{D}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}'}{D}, \quad p = \frac{p'}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{u_\infty}, \quad T = \frac{c_p T'}{u_\infty^2}$$

Здесь размерные величины обозначаются штрихами.

Уравнения решаются в переменных (p, \mathbf{u}, T) , для которых ставятся следующие граничные условия:

– на поверхности цилиндра $\mathbf{u} = (0, 0)$ и $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$ (здесь \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали);

– на бесконечности $\mathbf{u} = (1, 0)$, $p = 1/(\gamma M_\infty^2)$, $T = 1/[\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2]$.

Начальные условия задаются с помощью добавления конечного интервала по времени, на котором происходит плавный разгон цилиндра(ов) из состояния покоя (с соответствующим изменением граничных условий и добавлением в уравнения сил инерции).

Решение уравнений зависит от следующих параметров: чисел Рейнольдса Re , Прандтля Pr , Маха M_∞ и параметра сжатия k (случай эллиптического цилиндра) или расстояния между цилиндрами L/D (случай пары цилиндров).

Следует упомянуть ограничения модели, связанные с учетом некоторых аспектов реальной физики течения, таких как трехмерность и мелкомасштабные турбулентные пульсации. Отсутствие этих аспектов в модели не является препятствием для правильного описания ключевых физических причин перераспределения полной энтальпии, поскольку модель включает: все три возможных механизма изменения полной энтальпии в жидкой частице, см. уравнение (0.1); характерные особенности потока, которые влияют на перераспределение полной энтальпии (процесс вихреобразования, вихревые дорожки и влияние сжимаемости). Соответствие между результатами расчетов в рамках используемой модели и экспериментальными данными подробно обсуждается в [16].

1.2. Численный метод. В разделе кратко описывается используемый численный метод, более подробная информация может быть найдена в работах [14, 16].

Задачи решаются численно стабилизированным методом конечных элементов (Galerkin least-squares method) на неструктурированных треугольных сетках. По времени используется неявная схема Эйлера. Система нелинейных алгебраических уравнений, полученная в результате дискретизации, решается итерационным методом Ньютона в сочетании с обобщенным методом минимальных невязок. Для уменьшения влияния искусственных дальних границ решение строится в большой расчетной области: $[-200, 400] \times [-200, 200]$.

Расчетная сетка имеет вложенную структуру со следующим разрешением в интересующих нас областях: в ближнем следе ($-1.5 \leq x \leq 26$) и вблизи поверхности цилиндров размер шага составляет около 0.025 и 0.0005 соответственно. Это приблизительно соответствует 40–70 вычислительным узлам поперек сформировавшихся вихрей, динамических и тепловых пограничных слоев при $Re = 10^3$ и $Pr = 0.72$. Шаг по времени $\Delta t = 0.0025$.

Подробное исследование влияния параметров численного метода (шага по времени и разрешения сетки) на решение (интегральные характеристики, частоты, распределение полной энтальпии в следе) для рассматриваемых режимов течения, а также сопоставление с данными других авторов представлено в работах [14, 16]. Показано, что уменьшение выбранного разрешения сетки и шага по времени не приводит к существенным изменениям результатов.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Влияние формы обтекаемого тела на области пониженной полной энтальпии. Пример влияния формы обтекаемого тела на распределение осредненной по времени полной энтальпии \bar{i}_0 при $Re = 1000$, $M_\infty = 0.4$ и $Pr = 0.72$ представлен на рис. 2. Для задачи обтекания эллиптического цилиндра значения параметра k выбраны из промежутка $0.1 \leq k \leq 10$, на котором след меняется от узкого стационарного без образования вихрей при $k = 0.1$ до широкого следа с формированием крупных вихрей высокой интенсивности при $k = 10$. Также рассматривается случай обтекания пары круговых цилиндров при $L/D = 1.1$, когда след за парой цилиндров становится подобен течению за одним телом с общей вихревой дорожкой. На рисунке характерная длина для этой задачи была выбрана равной $2.1D$ (по миделеву сечению) для удобства сравнения с результатами обтекания эллиптического цилиндра. При этом геометрия обтекаемой пары тел близка к случаю $k = 2$, это проявляется в схожих картинах течения и интенсивности перераспределения полной энтальпии (однако вихревой след за парой цилиндров оказывается менее упорядоченным).

На рис. 2а изображены картины течения в момент времени, соответствующий локальному максимуму коэффициента подъемной силы. Порции газа с повышенной (пониженной) полной энтальпией переносятся вместе с вихрями, причем во внутренней (внешней) по отношению к центральной линии следа части вихря $i_0 < i_{0\infty}$ ($i_0 > i_{0\infty}$). Поэтому при осреднении по времени (рис. 2б) имеем понижение \bar{i}_0 вблизи центральной части следа. Такая неоднородность $i_0 = \gamma T + (u^2 + v^2)/2$ в вихрях объясняется распределением кинетической энергии: в системе координат, связанной с цилиндром, во внутренней (внешней) части кинетическая энергия меньше (больше) значения в набегающем потоке.

На рис. 2в, г видно, что вклад внутренней и кинетической энергии в перераспределение \bar{i}_0 неоднозначен и существенно зависит от k . При $k = 0.5$ и 1 перераспределение кинетической энергии способствует увеличению \bar{i}_0 в развитом следе и уменьшению в области формирования. При $k \geq 2$ – наоборот: из-за увеличения поперечного расстояния между вихрями и их циркуляции происходит падение средней скорости и кинетической энергии в центральной части следа; а в области формирования она возрастает из-за интенсивного поперечного течения при образовании вихрей. При стационарном течении ($k = 0.1$) в центральной части понижение i_0 происходит за счет отрицательного вклада кинетической энергии. Осредненная по времени температура в ближнем следе также существенно зависит от структуры следа и процесса вихреобразования: при малых k в следе она выше статической, и поэтому стремится увеличить i_0 ; при больших k – наоборот, температура становится значительно ниже T_∞ , способствуя повышению интенсивности энергоделения. Причиной такого поведения является баланс между нагревом и охлаждением вихрей в процессе их формирования, который обсуждается в разделе 2.3.

Интенсивность перераспределения полной энтальпии (интенсивность энергоделения) в области Ω оценивается по локальному минимуму осредненной по времени нормированной полной энтальпии:

$$E = \left| \min_{(x,y) \in \Omega} \frac{\bar{i}_0(x,y) - i_{0\infty}}{i_{0\infty}} \right|$$

Значения E вычисляются на поверхности цилиндра и для двух областей Ω в ближнем следе – области формирования вихрей и области развитого следа, в которых отчетливо наблюдаются ло-

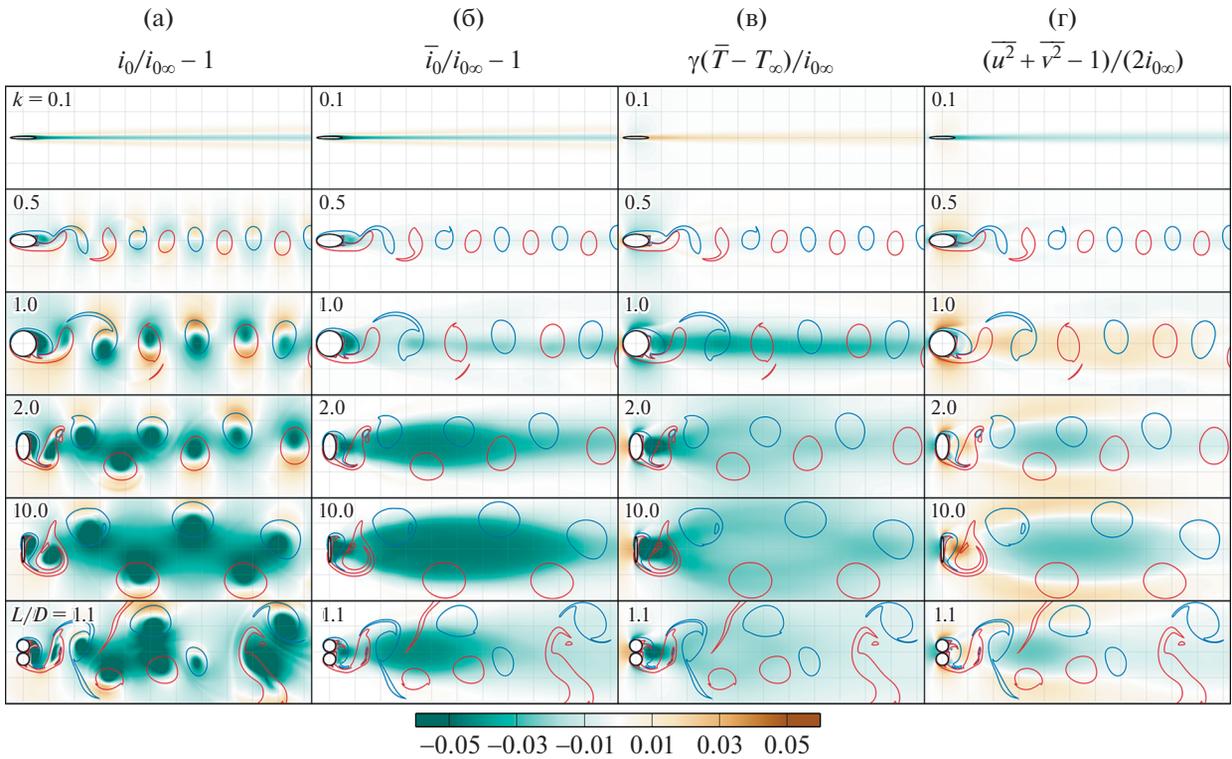


Рис. 2. Перераспределение полной энтальпии при обтекании тел различной формы: (а), (б) – мгновенное и осредненное по времени распределение полной энтальпии; (в), (г) – вклад изменения внутренней и кинетической энергии в распределение $\bar{i}_0: \bar{i}_0/i_{0\infty} - 1 = \gamma(\bar{T} - T_{\infty})/i_{0\infty} + (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 1)/(2i_{0\infty})$. Для случая $k = 0.1$ на рисунках (а), (б) масштаб цветовой шкалы уменьшен в 10 раз. Линии постоянной завихренности (кроме стационарного случая при $k = 0.1$) изображены в момент времени, который соответствует локальному максимуму коэффициента подъемной силы (красный и синий цвет линий соответствует $\omega = 1$ и $\omega = -1$).

кальные минимумы \bar{i}_0 (за исключением случаев $k = 0.1, 0.5$, см. рис. 2б). При $k \geq 0.5$ полная энтальпия имеет минимальные значения в области формирования вихрей (рис. 3). E в этой области растет с увеличением k и при $k = 10$ достигает 6.9%. Как видно на рис. 2, это связано с падением средней температуры. В развитом следе энергоразделение наиболее интенсивно также при $k = 10 - 4.7\%$. Это не сильно отличается от значения E при $k = 2 (4.5\%)$, но при этом площадь области с пониженными значениями \bar{i}_0 заметно больше. Увеличение площади связано с ростом поперечного расстояния между вихрями.

На рис. 4 изображено распределение коэффициента восстановления $r = 2(i_0 - i_{0\infty}) + 1$ на поверхности цилиндра. Видно, что как только стационарное течение в ближнем следе становится неустойчивым и начинают формироваться вихри ($k > 0.1$), в кормовой части тела происходит резкое падение коэффициента восстановления, что подтверждает связь процесса вихреобразования с эффектом Эккерта–Вайса. Наиболее сильно он проявляется при $k = 10$ – возникает обширная область с отрицательным коэффициентом восстановления, при этом температура в точке $\theta = 180^\circ$ на 0.6% ниже статической в набегающем потоке. Следует отметить, что зависимость $\min_{\theta} r(\theta)$ от k немонотонна – для объяснения этого, а также локальных экстремумов в зависимости $r(\theta)$, необходимо детальное рассмотрение вихреобразования и баланса между процессами нагрева и охлаждения кормовой части тела, описанными во введении, подобно [16].

2.2. Модель перераспределения полной энтальпии в развитом следе. Рассмотрим упрощенную модель следа, которая позволяет качественно объяснить перераспределение i_0 . Подобные модели для вихревых дорожек и отдельных вихрей, в частности, обсуждались в [7, 9, 10, 15]. Будем предполагать, что в развитом следе:

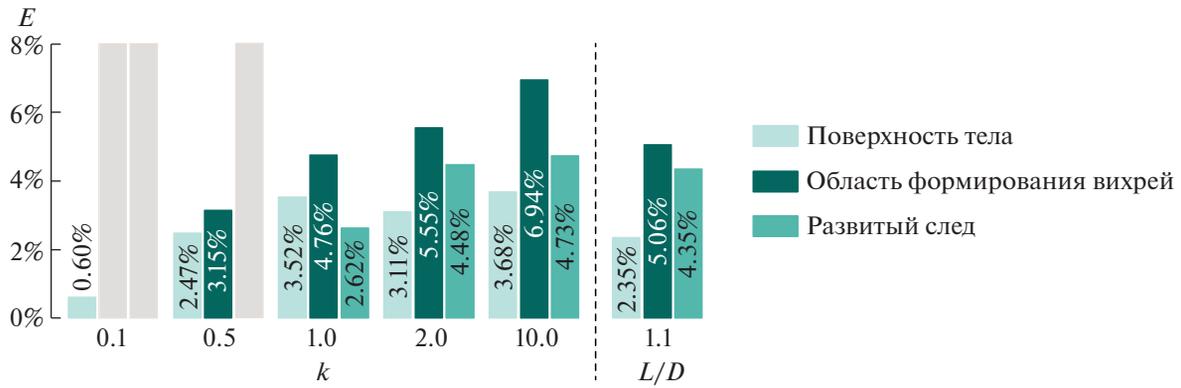


Рис. 3. Эффективность разделения энергии, $\min_{(x,y)}(\bar{i}_0/i_{0\infty} - 1)$, вычисленная на поверхности цилиндра, в области формирования вихрей и в развитом следе (область, в которой разыскивался минимум, ограничена: $x < 11$). Светло-серые полосы указывают на то, что при обтекании эллиптического цилиндра с малыми значениями k в рассматриваемой области локальный минимум отсутствует.

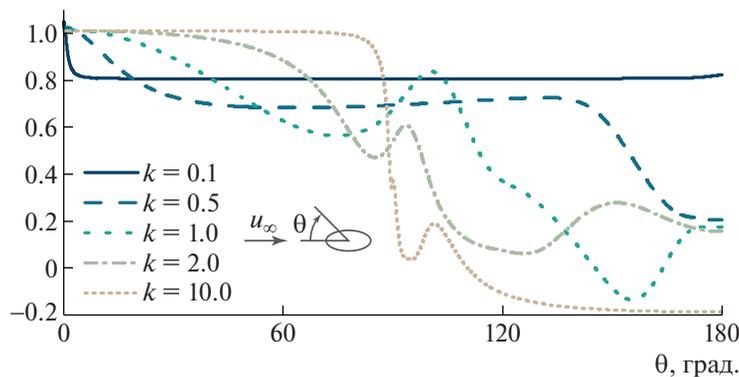


Рис. 4. Распределение коэффициента восстановления r по поверхности эллиптического цилиндра.

1) можно пренебречь диссипативными процессами (вторым и третьим слагаемыми в уравнении (0.1)), тогда изменение энтальпии описывается уравнением

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.1}$$

2) течение в системе координат, связанной с движущимися вдоль оси x вихрями, можно считать стационарным, тогда из соотношения (2.1) следует, что в этой системе координат полная энтальпия i_0^* постоянна вдоль линий тока:

$$i_0^* = \gamma T + \frac{1}{2}[(u - 1 - U)^2 + v^2] = C = \text{const} \tag{2.2}$$

где $1 + U$ – скорость движения центров вихрей;

3) константа C постоянна ($C = \gamma T_\infty + 0.5U^2$) вне и внутри вихревых ядер. Это позволяет выписать явное выражение температуры через скорость

$$\gamma(T - T_\infty) = (1 + U)(u - 1) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) \tag{2.3}$$

Распределение полной энтальпии (или температуры) внутри ядра является одной из основных трудностей для построения подобных моделей, поскольку: при формировании вихрей присутствуют механизмы, способные как повышать, так и понижать их температуру (и полную энтальпию); по мере движения вихрей вниз по потоку распределение температуры в ядрах может

качественно меняться (например, в [16] приведен пример ситуации, когда в ближнем следе вихри охлаждены, $T < T_\infty$, а в дальнем – нагреты, $T > T_\infty$).

Простейший способ замыкания модели, который используется в настоящей работе, – предположение, что в вихре также $C = \gamma T_\infty + 0.5U^2$. Таким образом, считается, что соотношение (2.3) выполнено во всей области развитого следа. В [7] рассматривалась модель, в которой предполагалось постоянство статической температуры в ядре вихря (поле скоростей описывалось парой вихревых цепочек, состоящих из вихрей Рэнкина). Применение этой модели для полученного численно поля скоростей осложняется необходимостью определения границы ядра при дополнительном ограничении, связанном с непрерывностью температуры, т.е., согласно (2.2), на границе ядра должно выполняться соотношение $(u - 1 - U)^2 + v^2 = \text{const}$. Способ корректного построения такой границы неочевиден. Поэтому данную модель удобнее использовать совместно с некоторой аппроксимацией поля скоростей (например, с помощью вихрей Рэнкина). Насколько хорошо оба эти предположения о распределении температуры в вихрях согласуются с численными расчетами, обсуждается в разделе 2.3.

В литературе встречается также модель с изэнтропическим распределением температуры в вихре $T = T_\infty (p/p_\infty)^{1-\gamma}$ [17]. В этом случае, помимо поля скорости, в развитом следе необходимо знать распределение давления или плотности. Поскольку для рассматриваемых случаев в вихрях энтропия оказывается существенно выше энтропии в набегающем потоке, модель дает сильно заниженные значения температуры в вихрях (при использовании давления из численного расчета) и в настоящей работе не рассматривается.

Используя (2.3), получаем следующее выражение для полной энтальпии:

$$i_0 - i_{0\infty} = \gamma(T - T_\infty) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) = (1 + U)(u - 1) \quad (2.4)$$

Для достижения минимальных значений $\bar{i}_0 - i_{0\infty}$ выгодно иметь большой дефект скорости $1 - \bar{u}$ (обычно $1 - \bar{u} > 0$), но при этом и высокую скорость движения вихрей $1 + U$ (обычно $-1 < U < 0$). Как видно из уравнения (2.3), последнее обстоятельство напрямую связано с распределением температуры – в рамках этой модели при фиксированном дефекте скорости ($1 - \bar{u}$) увеличение скорости движения вихрей $1 + U$ уменьшает среднюю температуру.

На рис. 5а, б видно, что модель действительно качественно повторяет распределение i_0 . Здесь скорость $1 + U$ определялась по вихрю, выделенному жирной линией, как скорость в точке локального максимума завихренности. Сопоставление имеет смысл только вблизи этого вихря.

Для применения модели достаточно знать поле скоростей в развитом вихревом следе. С помощью модели точечных вихрей (или обобщения, например, с заменой точечных вихрей вихрями Рэнкина) можно решить задачу об отыскании оптимальных с точки зрения интенсивности энергоразделения конфигураций следа, связав скорости u и U с характеристиками идеализированного вихревого следа (количеством вихревых цепочек, расстояниями между вихрями, циркуляцией вихрей – например, см. соотношение (0.2)) [7, 15].

2.3. Сопоставление результатов численного эксперимента и модели. По сути описанная модель дает явное выражение для температуры (2.3). На рис. 2в, г видно, что для рассматриваемых режимов вклады в \bar{i}_0 от перераспределения внутренней и кинетической энергии сопоставимы. Следовательно, при описании энергоразделения в следе выбор модели для распределения температуры в вихрях является существенным. В этом разделе рассмотрим вопрос о том, насколько модельное распределение температуры соответствует реальному.

На рис. 5в, г видно, что распределение температуры в вихрях, полученное в рамках модели, не соответствует результатам численного моделирования – температура в ядрах вихрей заметно ниже предсказаний модели при больших k (согласно (2.3), в центрах вихрей температура должна иметь локальный максимум). Именно это обстоятельство вызывает расхождения в распределении i_0 на рис. 5а, б. В пространстве между вихрями разница менее существенна.

Рассмотрим основные механизмы, определяющие температуру вихрей в ближнем следе. Изменение температуры T в жидких частицах описывается уравнением:

$$\frac{dT}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho \text{Re}} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{\gamma}{\rho \text{RePr}} \nabla^2 T, \quad (2.5)$$

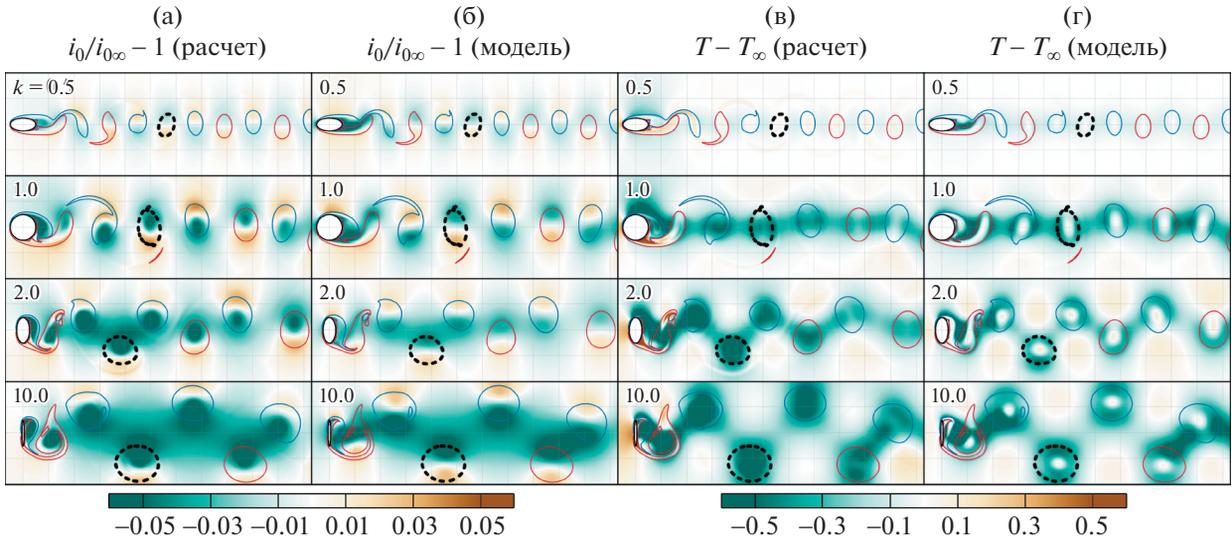


Рис. 5. Сопоставление полной энтальпии (а, б) и температуры (в, г), полученных путем решения уравнений Навье–Стокса (а, в) и предсказанных по полю скоростей (б, г): формулы (2.3), (2.4). На рисунке также изображены линии постоянной завихренности (красный и синий цвет соответствует $\omega = 1$ и $\omega = -1$); жирной штриховой линией отмечен вихрь, по которому определялась скорость U . Момент времени соответствует локальному максимуму коэффициента подъемной силы.

где первые два слагаемых в правой части отвечают за работу внутренних поверхностных сил давления и трения (первое и второе слагаемое соответственно); третье слагаемое — за изменения температуры в результате теплопроводности. Сумма первых двух слагаемых определяет переходы между внутренней энергией (в безразмерных переменных она совпадает с температурой) и кинетической энергией. Дополнительное изменение кинетической энергии $K = (u^2 + v^2)/2$ может происходить за счет работы внешних сил давления и трения (сумма первых двух слагаемых и четвертое слагаемое соответственно):

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho \text{Re}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{u}.$$

Температуру в формирующихся вихрях определяют два основных фактора. Первый — нагрев газа вблизи поверхности тела за счет работы внутренних сил (в первую очередь сил трения); второй — охлаждение в области формирования вихрей, в которой происходит существенное падение плотности (и, следовательно, температуры согласно первому слагаемому в правой части уравнения (2.5)). Поскольку при малых k ($k \leq 0.5$) имеем более обтекаемую форму тела, плотность за ним меняется слабо, и в вихрях наблюдается повышенная температура (рис. 2в, 5в). При больших k ($k > 1.0$) происходит существенное разрежение газа — температура вихрей при их формировании понижена. Так, например, в численных расчетах при $k = 0.1$ максимальное падение плотности составляет около 5%, в то время как при $k = 10$ в вихревых ядрах оно может превышать 40%. В рамках описанной выше модели в центре вихря достигается максимальное значение плотности:

$$\rho_{\max} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 U^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

Рассмотрим более подробно распределение температуры в вихрях, выделенных на рис. 5. На рис. 6 приведены температура и модуль скорости V (в системе координат, связанной с вихрем) в сечениях вихря $x = x_0$ и $y = y_0$, где (x_0, y_0) — координаты центра вихря. Внутри вихревых ядер зависимость скорости V от расстояния до центра (x_0, y_0) близка к линейной (рис. 6а, б). В этой области возникает качественное отличие в распределении температуры при $k \geq 1$ (рис. 6в, г): в рамках модели она растет, в расчете ядро имеет температуру ниже, чем в окружающей среде. Однако при $k = 0.5$, как и в модели, имеем локальный максимум в центре вихря. Как упоминалось ранее

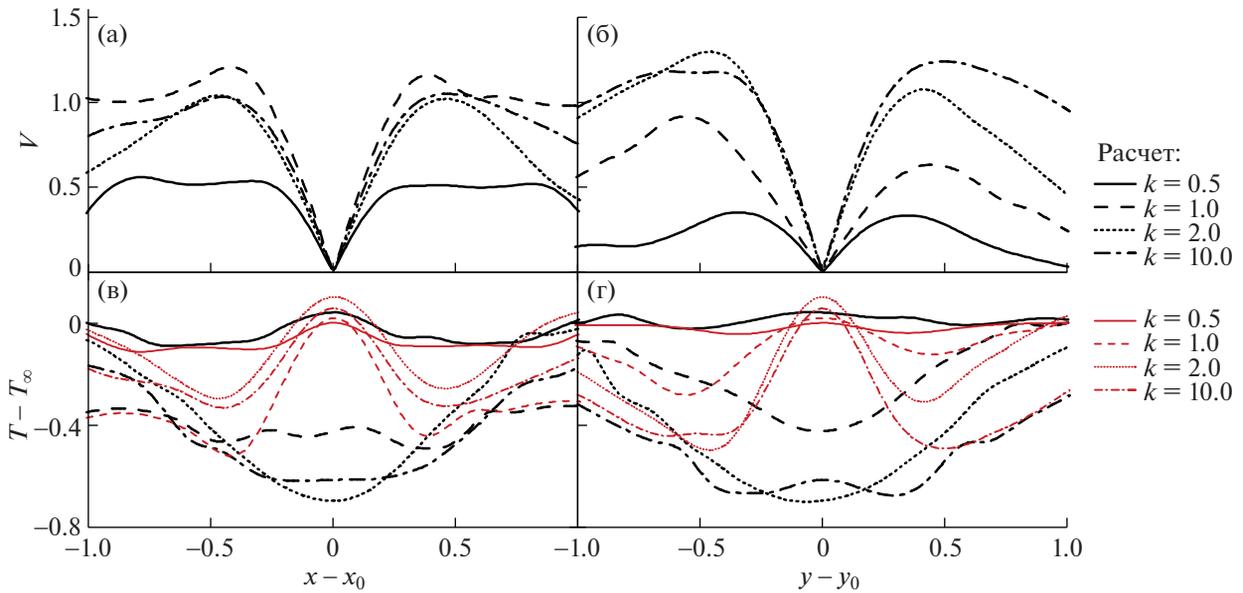


Рис. 6. Распределение скорости и температуры в вихревых ядрах. Представлены сечения вихрей, отмеченных жирной штриховой линией на рис. 5, линиями $x = x_0$ (б, г) и $y = y_0$ (а, в), где (x_0, y_0) – координаты центра вихря. (а), (б) – модуль скорости в системе координат, связанной с вихрем; (в), (г) – температура $T - T_\infty$, полученная при решении уравнений Навье–Стокса (черная линия) и вычисленная по формуле (2.3) (тонкая красная линия).

(раздел 2.2), при построении модели можно предположить, что в вихревых ядрах статическая температура постоянна. Такое предположение лучше согласуется с численным экспериментом только при $k \geq 1$, хотя, как видно на рис. 6в, г, при больших k все равно приводит к завышению значений температуры (в рамках модифицированной модели температура должна равняться температуре на границе ядра).

Результаты численных расчетов (рис. 5в и б) показывают, что температура в ядрах вихрей может как повышаться, так и понижаться. Это определяется течением в области формирования вихрей. Рассматриваемые модели на основе поля скоростей в развитом следе не учитывают этого обстоятельства. Поэтому предположение о распределении температуры в ядре вихря, приведшее к (2.3), оказывается грубым.

Таким образом, в ближнем следе за плохообтекаемым телом следует ожидать, что предсказания i_0 в вихрях с помощью упрощенной модели будут завышенными, поскольку она не учитывает дополнительное охлаждение вихрей в процессе их формирования. Для “широких” следов оценка интенсивности энергоразделения будет точнее в силу того, что в пространстве между вихрями, где достигается минимум \bar{i}_0 , распределение температуры хорошо согласуется с расчетами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе численного решения уравнений Навье–Стокса проведено исследование процесса перераспределения полной энтальпии в следе за цилиндрическими телами различного сечения в потоке вязкого совершенного газа при $Re = 1000$, $M_\infty = 0.4$ и $Pr = 0.72$.

Для плохообтекаемых тел имеет место более интенсивное перераспределение полной энтальпии в осредненном по времени потоке: уменьшается значение локального минимума \bar{i}_0 и увеличивается размер области существенно пониженных \bar{i}_0 . При обтекании эллиптического цилиндра с отношением поперечного размера к продольному $k = 10$ получено снижение минимального значения \bar{i}_0 (которое достигается в области формирования вихрей) на 6.9% по сравнению со значением в набегающем потоке. Для кругового цилиндра ($k = 1$) это значение составляет 4.8%, а

при $k = 0.1$ – всего 0.6%. Также при $k = 10$ происходит значительное увеличение площади области пониженных значений \bar{i}_0 в развитом следе с минимумом, составляющим 4.7%.

Интенсификация перераспределения \bar{i}_0 в развитом следе объясняется более интенсивным падением кинетической энергии в центральной части следа из-за увеличения циркуляции срывающихся вихрей и поперечного расстояния между ними и значительным разрежением в области формирования вихрей. Это приводит к снижению температуры в вихрях, срывающихся в поток.

Рассмотрена упрощенная модель, позволяющая оценить интенсивность перераспределения полной энтальпии i_0 в развитом ближнем следе по полю скоростей. Качественно результаты согласуются с численными расчетами. Недостатком модели является неучет перераспределения i_0 при формировании вихрей. Этот процесс существенно влияет на температуру газа в ядрах вихрей в ближнем следе, которая может оказаться как выше, так и ниже статической в набегающем потоке. Для плохообтекаемых тел это приводит к завышению значений i_0 , предсказываемых моделью.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-19-00234.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eiamsa-ard S., Promvong P.* Review of Ranque–Hilsch effects in vortex tubes // *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2008. V. 12. № 7. P. 1822–1842.
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2007.03.006>
2. *Леонтьев А.И.* Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // *Теплофиз. выс. темп.* 1997. V. 35. № 1. P. 157–159.
3. *Azhanov G.M., Osiptsov A.N.* The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2017. V. 106. P. 1125–1133.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.090>
4. *Leontiev A., Zditovets A., Kiselev N., Vinogradov Y., Strongin M.* Experimental investigation of energy (temperature) separation of a high-velocity air flow in a cylindrical channel with a permeable wall // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2019. V. 105. P. 206–215.
<https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2019.04.002>
5. *Kiselev N., Leontiev A., Vinogradov Y., Zditovets A., Strongin M.* Effect of large-scale vortex induced by a cylinder on the drag and heat transfer coefficients of smooth and dimpled surfaces // *Int. J. Therm. Sci.* 2019. V. 136. P. 396–409.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.11.005>
6. *Eckert E., Weise W.* Messungen der temperaturverteilung auf der oberfläche schnell angeströmter unbeheizter körper // *Forsch. Ingenieurwes.* 1942. V. 13. № 6. P. 246–254.
<https://doi.org/10.1007/BF02585343>
7. *Kurosaka M., Gertz J.B., Graham J.E., Goodman J.R., Sundaram P., Riner W.C., Kuroda H., Hankey W.L.* Energy separation in a vortex street // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 178. P. 1–29.
<https://doi.org/10.1017/S0022112087001095>
8. *Ryan L.F.* Experiments on aerodynamic cooling. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1951.
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000092033>
9. *Thomann H.* Measurements of the recovery temperature in the wake of a cylinder and of a wedge at Mach numbers between 0.5 and 3. Tech. Rep. Report 84, National Aeronautical Research Institute (FFA), Sweden, 1959.
10. *Eckert E.R.G.* Cross transport of energy in fluid streams // *Wärme-und Stoffübertragung.* 1987. V. 21. № 2–3. P. 73–81.
<https://doi.org/10.1007/BF01377562>
11. *Ng W.F., Chakroun W.M., Kurosaka M.* Time-resolved measurements of total temperature and pressure in the vortex street behind a cylinder // *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* 1990. V. 2. № 6. P. 971–978.
<https://doi.org/10.1063/1.857604>
12. *Goldstein R.J., Kulkarni K.S.* Energy separation in the wake of a cylinder // *J. Heat Transfer.* 2008. V. 130. № 6. P. 061703–061703–9.
<https://doi.org/10.1115/1.2891222>

13. *Kulkarni K., Goldstein R.* Energy separation in the wake of a cylinder: Effect of Reynolds number and acoustic resonance // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2009. V. 52. № 17–18. P. 3994–4000.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.03.024>
14. *Aleksyuk A.I., Osiptsov A.N.* Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2018. V. 119. P. 665–677.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.11.133>
15. *Aleksyuk A.I.* Influence of vortex street structure on the efficiency of energy separation // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019. V. 135. P. 284–293.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.01.103>
16. *Aleksyuk A.I.* The Eckert–Weise effect and energy separation under the flow interference behind side-by-side cylinders // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 915. P. A95.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2021.128>
17. *Wu J.-Z., Ma H.-Y., Zhou M.-D.* Vorticity and vortex dynamics. Springer, 2006.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-29028-5>

УДК 533.6.011.32:532.526.5

СТРУКТУРА ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАВЕРНЫ НА СТЕНКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА

© 2022 г. М. А. Зубин^{а,*}, А. Ф. Зубков^{а,**}

^а МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: zubinma@mail.ru

**E-mail: 9392998@mail.ru

Поступила в редакцию 15.09.2021 г.

После доработки 21.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Представлены результаты экспериментального исследования обтекания турбулентным дозвуковым потоком протяженной каверны на пластине или на стенке плоскопараллельного канала. Каверна представляет собой цилиндрическую траншею конечного размаха с закругленными сферическими торцами. Получены распределения коэффициента давления и визуализированы картины линий тока на поверхности каверны в зависимости от угла наклона ее продольной оси к набегающему потоку и относительной глубины. Обсуждается влияние этих параметров на интенсивность отрывного закрученного течения в каверне.

Ключевые слова: турбулентный поток, отрывные течения, обтекание каверны, коэффициент давления

DOI: 10.31857/S0568528122010121

Поиску эффективных искусственных рельефов, формируемых на стенках каналов, для интенсификации теплообмена посвящено большое количество статей и ряд монографий, обширная библиография отражена в [1]. Среди публикаций последнего времени доминирующее место занимают численные исследования обтекания одиночных и систем овально-траншейных лунок (ОТЛ), представляющих собой протяженные цилиндрические каверны со сферическими закруглениями на концах. Результаты численных исследований [2–9] ламинарного и турбулентного обтекания периодических рельефов, составленных из наклонных ОТЛ, прогнозируют исключительную эффективность таких рельефов на стенках узких каналов, выражающуюся в формировании зон течения со скоростью в 1.5 раза и более превосходящей среднемассовую скорость потока в канале и в повышении коэффициента теплообмена на десятки процентов по сравнению с гладким каналом. Эти эффекты объясняются “аномальной интенсификацией отрывного обтекания наклонных ОТЛ” [2–9], которая, в свою очередь, связана со специфическим распределением давления в ОТЛ. При этом в литературе практически нет экспериментальных данных о фактических распределениях давления по поверхности ОТЛ, что явилось мотивацией проведения настоящего исследования, в котором получены экспериментальные данные о влиянии угла наклона (атаки) и относительной глубины одиночной ОТЛ на стенке плоскопараллельного канала или уединенной пластины на структуру течения в ней.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ, МЕТОДИКИ И МОДЕЛИ

Исследования распределения давления по поверхности одиночной овально-траншейной лунки, расположенной на стенке плоского канала, проводились на установке ВИЯ НИИ механики МГУ. Установка представляет собой малую аэродинамическую трубу прямого действия, в которой поток создается нагнетающим вентилятором. Рабочий участок имеет длину 600 мм и прямоугольное поперечное сечение 200 × 50 мм (рис. 1а).

На нижней стенке в центре канала размещался поворотный диск диаметром 180 мм с выполненной в нем овально-траншейной лункой. Поворотом диска задается необходимый угол φ между направлением потока и продольной осью лунки. Для измерения статических давлений на поверхности, полного и статического давления во входном сечении канала применялись диффе-

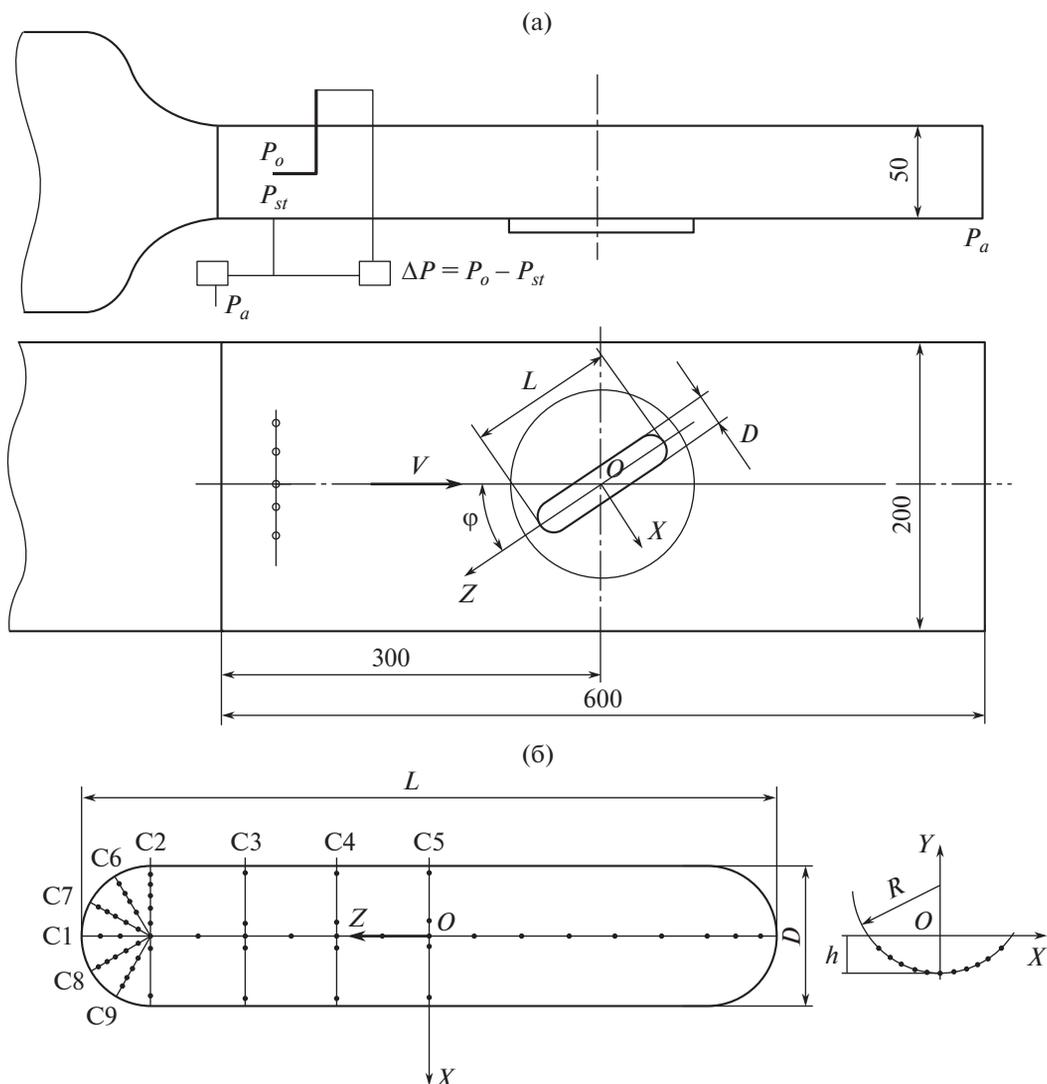


Рис. 1. Схема эксперимента (а); система координат и схема расположения дренажных сечений (б).

ренциальные датчики давления MPXV7002 фирмы Freescale с погрешностью 0.25%. В качестве опорного давления при измерении статических давлений использовалось атмосферное давление. Скоростной напор во входном сечении канала $q = \rho V^2/2 = P_o - P_{st}$ определялся с помощью датчика, измеряющего непосредственно перепад давления между полным P_o и статическим P_{st} давлениями в этом сечении.

В экспериментах использовались две модели овально-траншейных лунок, геометрия которых полностью определяется тремя параметрами их цилиндрической части: h – глубина, D – ширина, $L-D$ – длина, где L – полная длина входного сечения ОТЛ. По этим параметрам вычисляются радиус кривизны цилиндрической и сферической частей $R = h/2 + D^2/(8h)$ и все другие характерные размеры ОТЛ. Параметры моделей приведены в табл. 1.

По общепринятой классификации, лунки с относительной глубиной $h \leq 0.25D$ относятся к умеренным и мелким, а при $h \geq 0.25D$ – к глубоким. На рис. 1б представлены карта дренажных сечений для модели № 1 и принятая система координат. Диаметр дренажных отверстий равен 0.7 мм. Дренажные отверстия на моделях располагаются в продольном сечении C1 (17 точек), четырех поперечных C2–C5 (по 11 точек) и четырех радиальных C6–C9 (по 5 точек) на сферической части лунки. Возможность вращения модели лунки с помощью поворотного диска в диапазоне $0-180^\circ$ позволяет использовать дренаж в сечениях C2–C9 в обеих половинках лунки. Координаты дренажных точек на поверхности определяются в связанной декартовой системе

Таблица 1

Номер модели	L , мм	D , мм	h , мм	R , мм	h/D	L/D
1	150	30	7.5	18.75	0.25	5
2	150	30	15	15	0.5	5

координат X , Y , Z с началом в центре входного пятна ОТЛ на плоской стенке $Y = 0$ канала (рис. 1б). При этом ось Z направлена в сторону входного (переднего по потоку) сферического закругления ОТЛ, а полость лунки целиком расположена в области $Y < 0$. Угол φ наклона лунки относительно набегающего потока (угол атаки) варьируется от 0° до 90° .

В экспериментах измерялись непосредственно скоростной напор набегающего равномерного потока $q = P_0 - P_{st}$ во входном сечении канала (вне пограничного слоя) и избыточные давления ΔP_{st} и ΔP_i относительно атмосферного (опорного) давления во входном сечении и в дренажных точках на поверхности модели. При этом регистрировались большие выборки показаний датчиков давления (до 16 тыс. отсчетов при частоте опроса 1000 с^{-1}), по которым определялись средние величины, используемые при расчете значений коэффициента давления $C_p = (P_i - P_{st})/q$.

Сбор и обработка данных измерений давления осуществлялись многоканальной автоматизированной системой на базе ПЭВМ со встроенным АЦП РС1-6225 фирмы National Instruments. Функционирование системы обеспечивалось в программной среде Labview.

Измерения давления на поверхности овально-траншейных лунок установки ВИЯ проводились при скорости набегающего потока $V = 50 \text{ м/с}$, единичном числе Рейнольдса $Re_1 = 3.3 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ и углах наклона $\varphi = 35, 45, 55, 60, 75, 90^\circ$. Толщина турбулентного пограничного слоя в окрестности передней кромки лунки составляла около 5 мм.

Для визуализации течения на поверхности овально-траншейной лунки использовался метод масло-сажевых покрытий. Эта часть исследования проводилась в аэродинамической трубе А-8 Института механики МГУ [10]. Модель – прямоугольная пластина с вмонтированным поворотным диском, содержащим овально-траншейную лунку заданной геометрии. Пластина устанавливалась на специальном пилоне параллельно направлению потока в рабочей части трубы А-8. Испытания проводились при скорости набегающего потока $V = 150 \text{ м/с}$, соответствующее и единичное число Рейнольдса $Re_1 = 1.04 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$. Оценочная толщина турбулентного пограничного слоя в окрестности передней кромки ОТЛ 4 мм.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭСПЕРИМЕНТОВ

В дальнейшем все линейные размеры, координаты дренажных сечений и точек на поверхности ОТЛ нормированы на ширину цилиндрической вставки D . Для идентификации положения дренажных точек в сечениях С1–С9 (рис. 1б) используются безразмерные криволинейные координаты s , t . Параметр s определен для симметричных сечений С1–С5. По абсолютной величине он равен расстоянию вдоль соответствующего контура сечения, начиная от точки симметрии (центра) контура. При этом знак s совпадает со знаком декартовой координаты Z в случае сечения С1 или знаком координаты X в случае сечений С2–С5 (рис. 1б). Параметр $t > 0$ идентифицирует точки на поверхности в сферических частях лунки и равен расстоянию вдоль контуров радиальных сечений сферических закруглений лунки, начиная от центра линий сопряжения цилиндрической вставки с соответствующими сферическими частями ОТЛ (на рис. 1б это сечения С6–С9 и две ветви сечения С2). Угол между данными радиальными сечениями составляет 30° .

На рис. 2а,б построены экспериментальные зависимости распределения коэффициента давления C_p в характерных сечениях ОТЛ с относительной глубиной $h = 0.25$. Они дают общее представление о характере распределений давления в овально-траншейной лунке при различных углах атаки.

При угле атаки $\varphi = 90^\circ$ (поперечное обтекание) наблюдается практически симметричное распределение давления по размаху лунки. При уменьшении угла атаки на стенке головной части лунки появляются явно выраженные области с минимумом давления (рис. 2а). Существование этих областей прослеживается на всех зависимостях изменения давления в поперечном сечении С2 для углов атаки φ из интервала $45\text{--}90^\circ$, где при значениях s в районе -0.2 наблюдаются минимумы давления (рис. 2б). При этом в окрестности нижней по потоку кромки ОТЛ ($s \sim 0.45$) образуются области повышенного давления. Отметим, что в зоне минимальных давлений наблю-

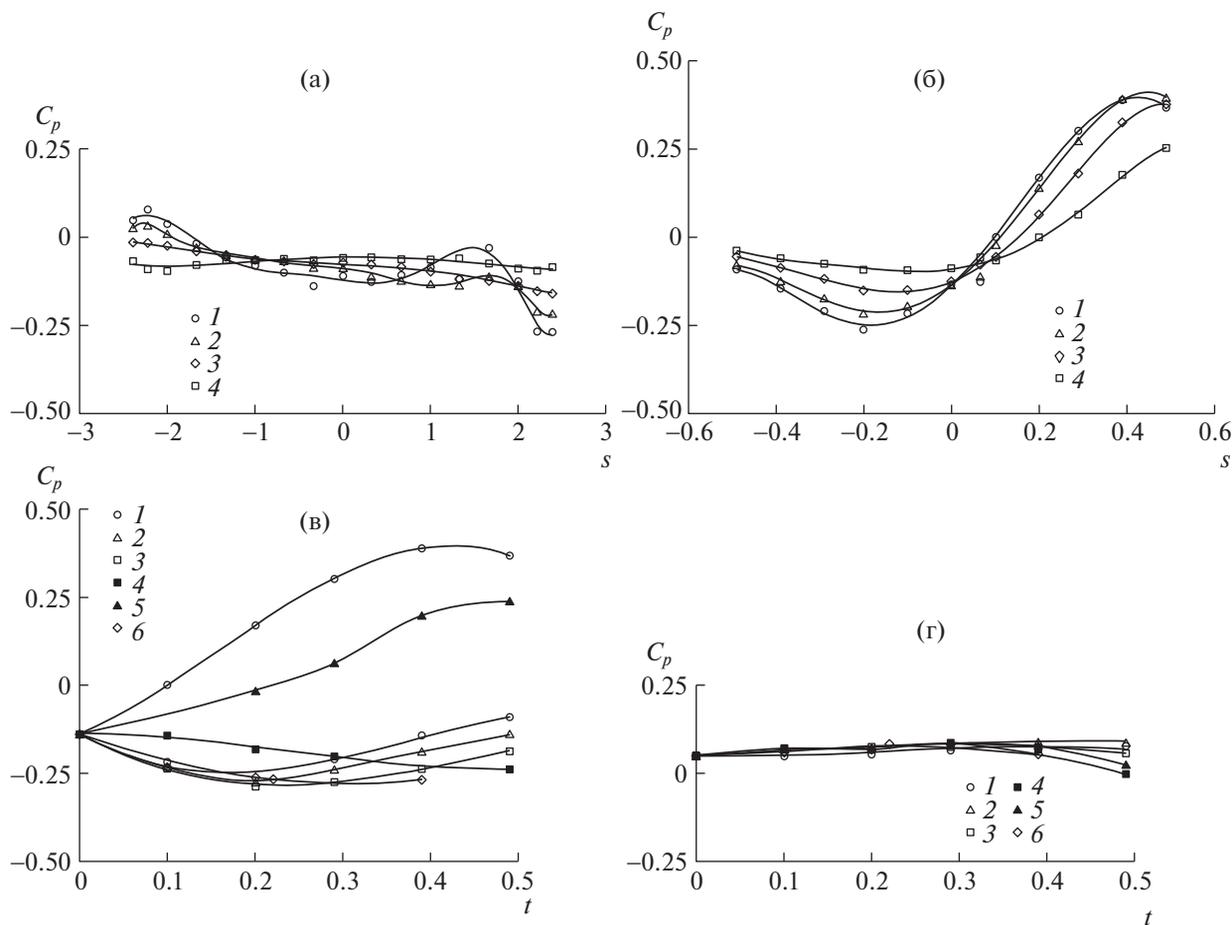


Рис. 2. Распределения коэффициента давления на поверхности ОТЛ при $h = 0.25$ в сечениях С1 (а) и С2 (б) при различных углах атаки: значки 1 – $\varphi = 45^\circ$, 2 – 60° , 3 – 75° , 4 – 90° ; и в радиальных сечениях передней (в) и задней (г) сферических частях ОТЛ при $\varphi = 45^\circ$: значки: 1 – сечение С2, 2 – С6, 3 – С7, 4 – С8, 5 – С9, 6 – С1.

дается более сильное влияние угла атаки на величины указанных экстремумов по сравнению с зоной максимальных давлений. Из сопоставления зависимостей изменения давления в сечениях С1–С9 (рис. 2в) входной (передней сферической) части лунки следует, что область минимальных давлений располагается в ее первой половине. В отличие от передней обтекание задней (выходной) сферической части лунки происходит при практически постоянном давлении по всей ее поверхности, близком к давлению в набегающем потоке (рис. 2г).

В целом приведенные на рис. 2 данные подтверждают результаты расчетов [2, 3, 6–8], показывающих, что при наклонном обтекании ОТЛ возникает своеобразная конфигурация распределения давления в передней сферической части лунки, состоящая из двух локализованных зон высокого и низкого давления. Область повышенного давления локализована у задней (выходной) кромки в окрестности сечения сопряжения С2, а зона минимального давления – в сферической части лунки. Возникновением такой двойной конфигурации при наклонном обтекании ОТЛ объясняется в [2, 3, 6–8] кардинальная перестройка возвратного течения, приводящая по терминологии, принятой в этих работах, к режимам с “аномальной интенсификацией отрывного обтекания ОТЛ” и значительным увеличением теплообмена на стенках канала в окрестности ОТЛ.

Перейдем к рассмотрению результатов визуализации пристеночных течений в ОТЛ и их сопоставлению с данными измерений давления при $h = 0.25$ и $h = 0.5$ (табл. 1). На рис. 3а,б представлены картины визуализации течения при поперечном обтекании мелкой и глубокой лунок, а также графики распределения коэффициента давления для двух характерных сечений С1 и С2 (рис. 1).

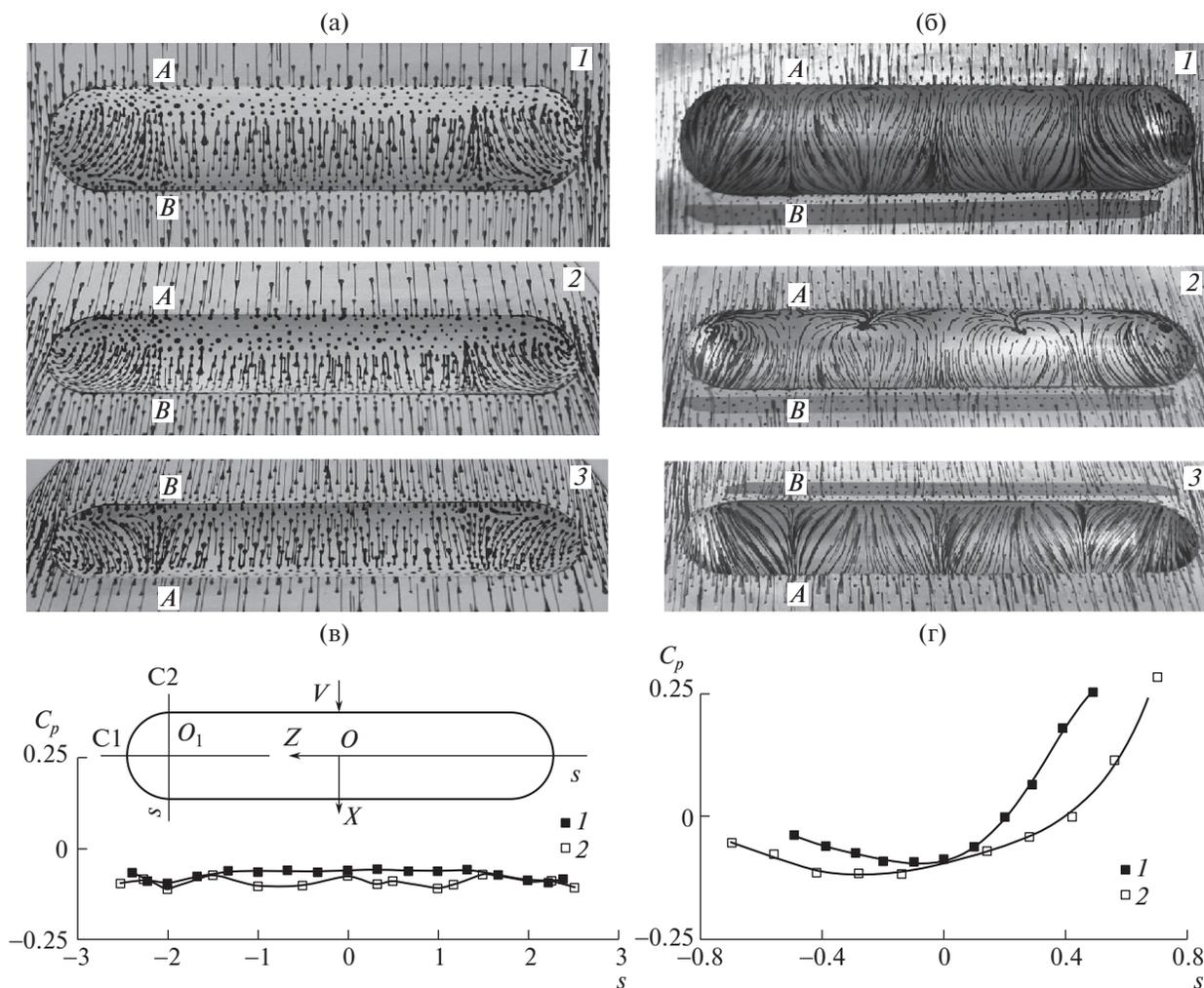


Рис. 3. Обтекание мелкой (а) и глубокой (б) ОТЛ при $\varphi = 90^\circ$ (виды: 1 – фронтальная проекция, 2 – проекция на переднюю кромку А, 3 – проекция на заднюю кромку В). Распределения коэффициента давления в продольном сечении С1 (v) и поперечном сечении С2 (г): значки: 1 – $h = 0.25$, 2 – $h = 0.5$.

На картинах предельных линий тока для мелкой и глубокой лунок наблюдается практически симметричное возвратное течение внутри лунки относительно поперечной оси X , состоящее из 4 фрагментов: двух концевых, располагающихся в сферических концах лунки, и двух центральных в области цилиндрической вставки. Причем при почти равных перепадах давления для мелкой и глубокой лунок в поперечных сечениях С2 (рис. 3г) наблюдается более сложная структура течения в 2 центральных фрагментах глубокой лунки по сравнению с мелкой лункой. Две симметрично расположенные особые точки типа фокус в окрестности передней кромки глубокой лунки (рис. 3б) свидетельствуют о существовании в возвратном течении двух симметричных вихрей с противоположенным вращением, оси которых совпадают с направлением возвратного течения. Появление этих вихрей, по-видимому, связано с потерей устойчивости возвратного течения, развивающегося от линии присоединения, расположенной в окрестности задней кромки, цилиндрической вставки, имеющей большую кривизну, чем в мелкой лунке. Наличие локальных минимумов при $s = \pm 1$ давления в продольном сечении С1 (рис. 3в) соответствует положению фокусов на линии стекания, и также указывает на возможность существования указанных вихревых структур в двух центральных фрагментах возвратного течения в глубокой лунке.

Поворот ОТЛ на угол атаки $\varphi = 45^\circ$ сопровождается значительными изменениями структур отрывного обтекания (рис. 4). При наклонном обтекании мелкой лунки (рис. 4а) наблюдается структура, состоящая из двух фрагментов. Первый – вихревое течение, образующееся при обтекании входной сферической части овально-траншейной лунки, второй – протяженный вихрь,

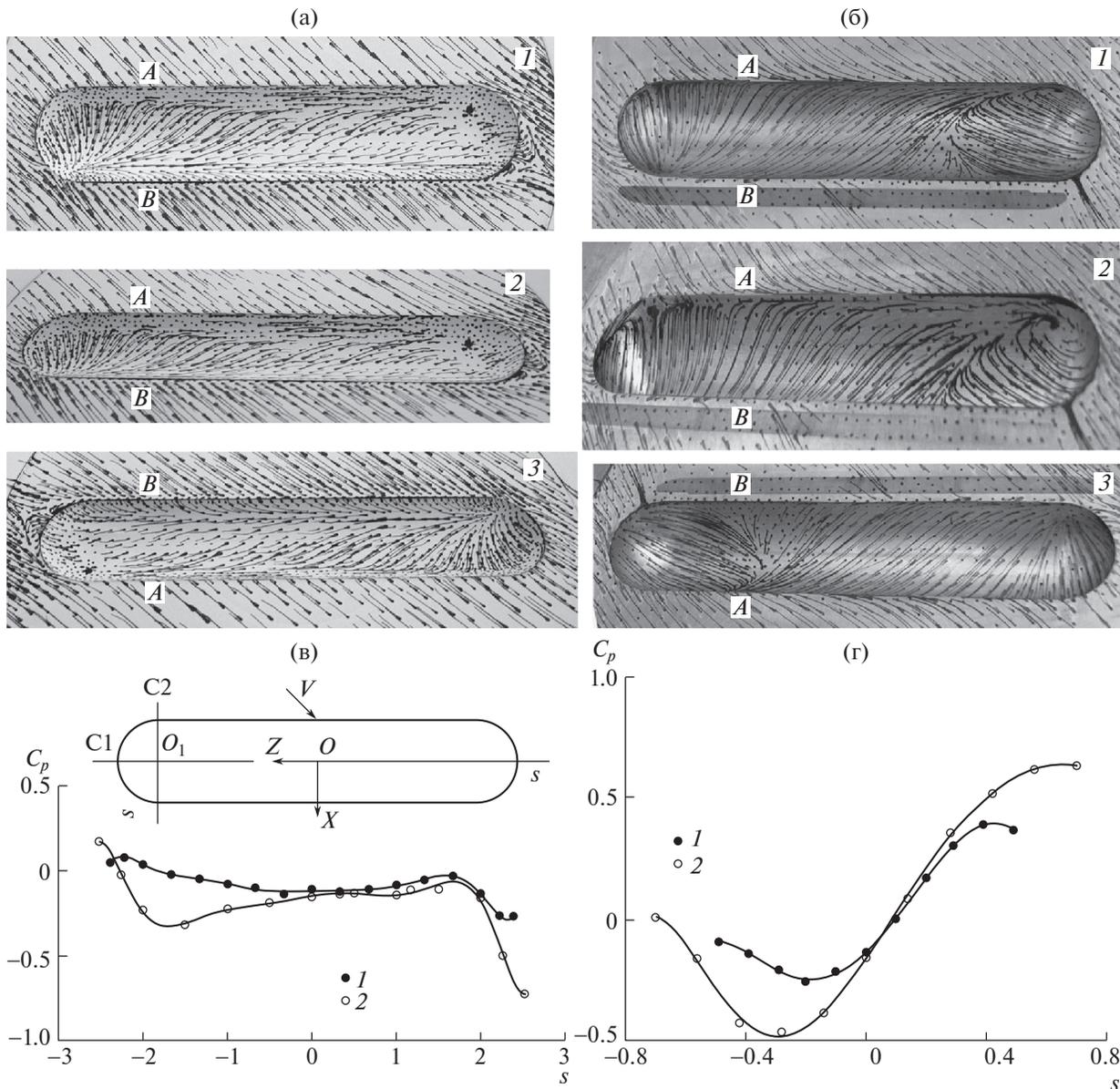


Рис. 4. Обтекание мелкой (а) и глубокой (б) ОТЛ при $\varphi = 45^\circ$ (виды: 1 – фронтальная проекция, 2 – проекция на переднюю кромку А, 3 – проекция на заднюю кромку В). Распределения коэффициента давления в продольном сечении С1 (в) и поперечном сечении С2 (г): значки: 1 – $h = 0.25$, 2 – $h = 0.5$.

распространяющийся по всей остальной части лунки и выходящий во внешний сносный поток в задней сферической части ОТЛ. В глубокой лунке (рис. 4б) реализуется несимметричная структура течения, включающая три вихревых фрагмента, два из которых формируются в сферических концах лунки, а третий протяженный занимает почти всю цилиндрическую часть. Наблюдаемые изменения структуры возвратного течения в мелкой и глубокой лунках находят отражение в характерных изменениях распределений давления. Относительная глубина h оказывает влияние не только на величины максимальных и минимальных давлений в продольном С1 (рис. 4в) и поперечном С2 (рис. 4г) сечениях, но и изменяет вид распределения давления в продольном сечении глубокой лунки. В окрестности $s \approx -1.8$ возникает локальный минимум давления, связанный с обтеканием сферической выходной (задней) части лунки.

На основании анализа картин предельных линий тока на поверхности мелкой и глубокой ОТЛ совместно с данными о распределении давления в характерных сечениях предложены возможные схемы отрывных течений в них. На условных развертках поверхности ОТЛ представле-

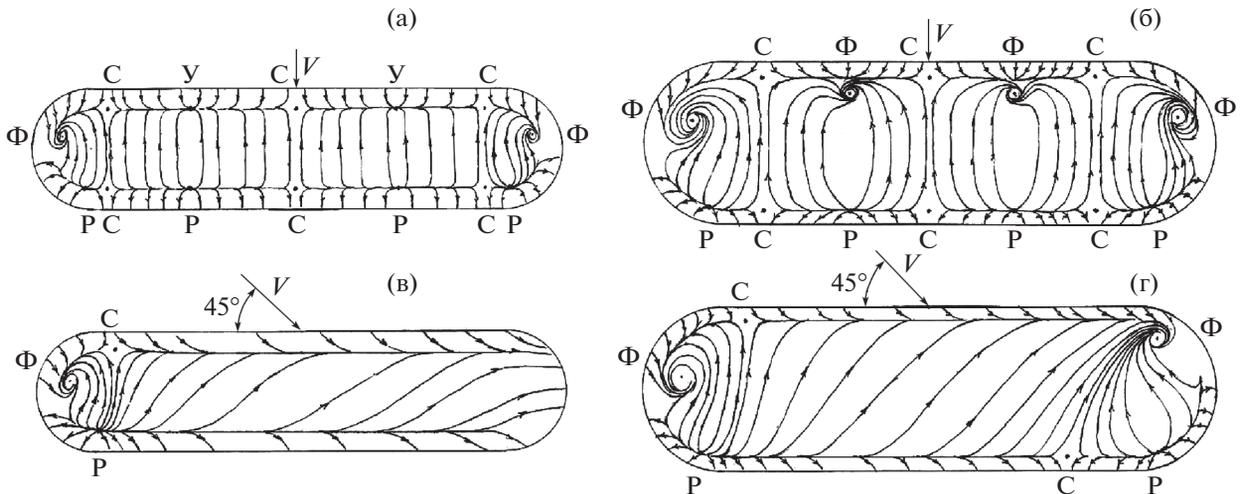


Рис. 5. Схемы течения при обтекании овально-траншейных лунок с различной относительной глубиной: а, б – поперечное обтекание при $\varphi = 90^\circ$; в, г – под углом наклона $\varphi = 45^\circ$; $h = 0.25$ – а, в; 0.5 – б, г.

ны схемы течения (рис. 5), где линиями со стрелками изображены линии тока, а буквами Р, С, У, Ф обозначены соответственно различные типы особых точек, а именно, растекания, седло, узел и фокус.

Отметим практически идентичные схемы при поперечном обтекании мелкой и глубокой лунок за исключением смены узловых точек фокусами на линии стекания (рис. 5а,б). В случае наклонного обтекания влияние относительной глубины ОТЛ более существенное (рис. 5в,г). В мелкой лунке происходит кардинальная перестройка с формированием возвратного течения вдоль поверхностей с меньшей кривизной. Это сопровождается существенными отличиями величин перепадов давления, реализующихся в характерных поперечных сечениях наклонной ОТЛ по сравнению с вариантом ее поперечного обтекания.

На рис. 6 приведены распределения коэффициента давления в различных поперечных сечениях, по размаху глубокой и мелкой ОТЛ (на графиках показаны данные только для нескольких из семи имеющихся сечений, рис. 1). Анализ распределений давления для всех поперечных сечений позволяет заключить, что в обеих овально-траншейных лунках вдоль продольной оси происходит торможение возвратного течения, формирующегося под действием перепадов давления в передней сферической, центральной цилиндрической и задней сферической частях лунки.

В целом можно отметить, что в каждом из поперечных сечений $Z = \text{const}$ цилиндрической части лунки имеются две точки локального экстремума по s зависимостей $C_p = f(s, Z)$. Расстояние и перепад давления между этими точками влияют на интенсивность возвратного течения в соответствующем поперечном сечении. При этом последовательность точки локализации максимумов и минимумов C_p на контуре сечения может быть разной. В мелкой лунке точки максимума располагаются в области $X > 0$ (рис. 1б), а точки минимума в области $X < 0$. В большинстве сечений глубокой лунки это тоже так. Однако в двух сечениях в около $Z = -1$ этот порядок изменился на обратный: точки максимума и минимума поменялись местами (рис. 6б). Это означает, что возвратное течение в зоне указанных сечений испытывает противодействие, что должно приводить к снижению интенсивности возвратного течения и, возможно, к уменьшению закрутки продольного вихря при прохождении зоны данных сечений с реверсным расположением точек экстремума на контуре.

В связи с этим можно предложить критерий

$$K(Z) = \frac{\Delta C_p(s, Z)}{\Delta s}$$

где ΔC_p – перепад между значениями экстремумов коэффициента давления на контуре поперечного сечения ОТЛ с учетом последовательности расположения точек максимума и минимума в данном сечении; Δs – расстояние вдоль контура сечения между соответствующими точками экстремума зависимости $C_p = f(s)$. Величину $K(Z)$ можно использовать как приближенную характе-

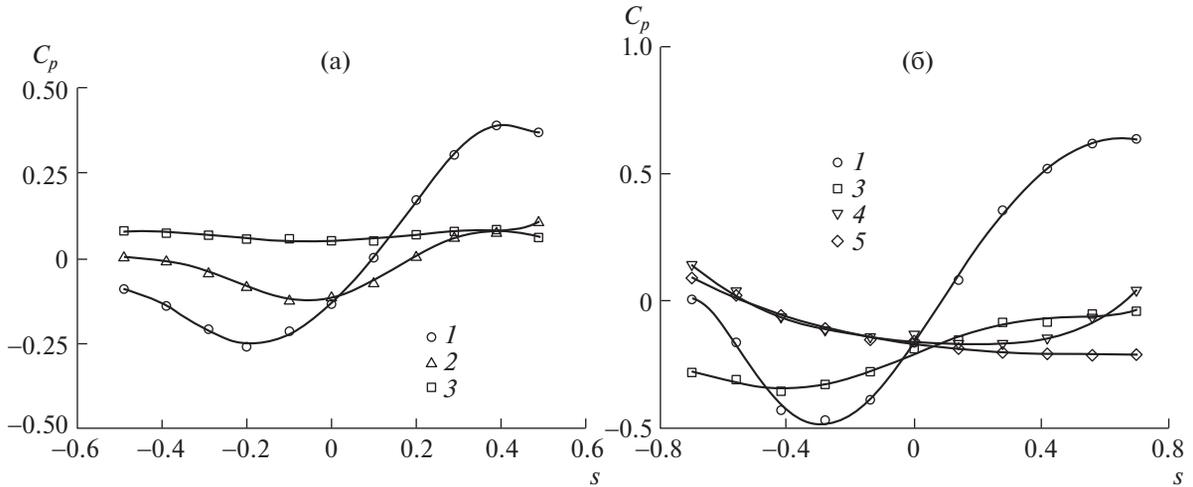


Рис. 6. Распределения коэффициента давления в поперечных сечениях мелкой (а) и глубокой (б) ОТЛ при наклонном обтекании под углом атаки $\varphi = 45^\circ$: значки 1 – сечение $Z = 2$, 2 – $Z = 0$, 3 – $Z = -2$, 4 – $Z = 0.33$, 5 – $Z = -0.33$.

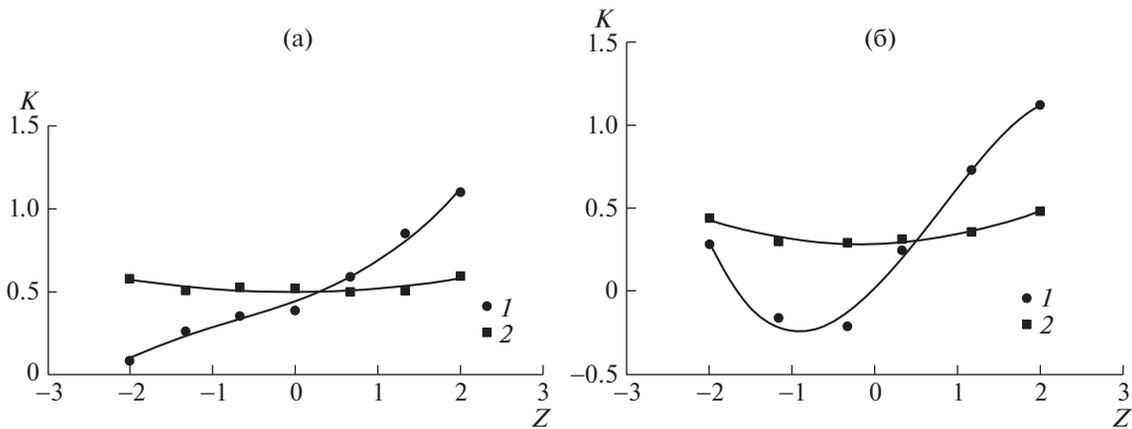


Рис. 7. Изменение критерия $K(Z)$ по длине цилиндрической части мелкой (а) и глубокой (б) ОТЛ при наклонном и поперечном обтекании: 1 – $\varphi = 45^\circ$, 2 – 90° .

ристку интенсивности продольно-вихревого течения (или скорости возвратного течения) в цилиндрической части овально-траншейной лунки (рис. 7). При обычной последовательности точек минимумов и максимумов C_p в сечении $Z = \text{const}$ критерий K принимает положительные значения, а при реверсном расположении этих точек $K < 0$.

Зависимости на рис. 7 ясно показывают, что при переходе от поперечного к наклонному обтеканию как мелкой, так и глубокой ОТЛ значительная интенсификация возвратного течения может достигаться только в верхней по потоку половине лунки ($Z > 0$), а во второй половине – наоборот, вызывающий раскрутку вихря градиент давления слабый или вообще отрицательный. Поэтому утверждения [2, 3, 6–8] о том, что при наклонном обтекании ОТЛ осуществляется “аномальная интенсификация отрывного течения”, можно подтвердить только в отношении передней части лунки. В связи с этим можно предложить V-образную конфигурацию каверны, составленную из первых частей двух наклонных ОТЛ, расположенных симметрично по отношению к направлению набегающего потока. В результате такой трансформации может быть получена V-образная каверна, состоящая из эффективных половин двух наклонных ОТЛ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено экспериментальное исследование обтекания двух овально-траншейных лунок (ОТЛ) с различной относительной глубиной, расположенных на пластине или стенке плоскопараллельного канала, при различных углах наклона их продольной оси к направлению набегающего потока.

Получены распределения давления по поверхности лунок в характерных сечениях и визуализированы картины поверхностных линий тока течений, возникающих при их поперечном и наклонном обтекании. Показано существенное влияние глубины и угла наклона ОТЛ на структуру течения.

Экспериментально подтверждено обнаруженное ранее в численных исследованиях существование в передней сферической части наклонной ОТЛ особого распределения давления в виде двух близко расположенных локализованных зон высокого и низкого давления, определяющего в целом формирование закрученного течения в ОТЛ.

Предложен критерий $K(Z)$, приближенно оценивающий интенсивность возникающего в ОТЛ возвратного течения при ее обтекании под различными углами наклона.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 19-19-00259).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.И., Алексеенко С.В., Волчков Э.П. и др. Вихревые технологии для энергетики. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. 350 с.
2. Isaev S., Schelchikov A.V., Leontiev A.I., Gortyshov Yu.F., Baranov P.A., Popov I.A. Tornado-like Heat Transfer Enhancement in the Narrow Plane-parallel Channel with the Oval-trench Dimple of Fixed Depth and Spot Area // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 109. P. 40–62.
3. Isaev S., Leontiev A., Chudnovsky Y., Popov I. Vortex Heat Transfer Enhancement in Narrow Channels with a Single Oval-trench Dimple Oriented at Different Angles to the Flow // J. Enhanced Heat Transfer. 2018. V. 25. № 6. P. 579–604.
4. Исаев С.А., Грицкевич М.С., Леонтьев А.И., Попов И.А., Судаков А.Г. Аномальная интенсификация турбулентного отрывного течения в наклоненных однорядных овально-траншейных лунках на стенке узкого канала // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 5. С. 797–800.
5. Исаев С.А., Грицкевич М.С., Леонтьев А.И., Мильман О.О., Никущенко Д.В. Ускорение турбулентного потока в узком облуненном канале и интенсификация отрывного течения при уплотнении однорядных наклоненных овально-траншейных лунок на стенке // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26. № 5. С. 697–702.
6. Isaev S., Gritckevich M., Leontiev A., Popov I. Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // Acta Astronautica. 2019. V. 163 (Part A). P. 202–207.
7. Isaev S.A., Leontiev A.I., Milman O.O., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G. The effect of anomalous intensification of the separated flow and vortex heat transfer in an inclined oval-trench dimple and the construction of energy-efficient well-structured surfaces // AIP Conference Proceedings. 2020. 2211, 020003.
8. Isaev S.A., Mazo A.B., Nikushchenko D.V., Popov I.A., Sudakov A.G. The influence of the angle of inclination of single-row oval-trench dimples in the stabilized hydrodynamic section of a narrow channel on the anomalous intensification of the separated turbulent flow // Technical Physics Letters. 2020. V. 46. № 11. P. 1064–1067.
9. Исаев С.А., Чулюнин А.Ю., Никущенко Д.В., Судаков А.Г., Усачов А.Е. Анализ аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена на стабилизированном участке узкого канала с однорядными наклоненными овально-траншейными лунками при использовании различных сеток и моделей турбулентности // Теплофизика высоких температур. 2021. № 1. С. 116–125.
10. Аэродинамические установки Института механики МГУ / Под. ред. Г.Г. Черного, А.И. Зубкова, Ю.А. Панова. М.: Изд-во Московского университета, 1985. 43 с.

УДК 533.6.013.128

НОСОВАЯ ЧАСТЬ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ В ДИАПАЗОНЕ БОЛЬШИХ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

© 2022 г. А. П. Мазуров^а, С. А. Таковицкий^{а,*}

^а Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Московская обл., Россия

*E-mail: c.a.t@tsagi.ru

Поступила в редакцию 07.09.2021 г.

После доработки 21.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Решена задача построения осесимметричных носовых частей, имеющих при заданном ограничении на удлинение минимальное аэродинамическое сопротивление в диапазоне больших дозвуковых скоростей полета. Поиск оптимальных форм основан на подходах локальной линеаризации, которые были использованы при анализе результатов моделирования в рамках уравнений Навье–Стокса и обеспечили сходимость с предельным уменьшением числа прямых расчетов процесса численной оптимизации при большом числе геометрических параметров (более 70). Исследовано влияние на сопротивление дополнительных ограничений, накладываемых на кривизну образующей. Дано сопоставление построенных носовых частей и носовых частей, обладающих близкими к оптимальным значениями характеристиками при дозвуковых и сверхзвуковых условиях: полукаверны Рябушинского и усеченного степенного тела. Подтверждена известная особенность тел, реализующих при заданной длине нулевое или минимальное волновое сопротивление, – возможность образования переднего торца как участка краевого экстремума.

Ключевые слова: аэродинамическое сопротивление, осесимметричная носовая часть, локальная линеаризация, трансзвуковые скорости

DOI: 10.31857/S0568528122010078

Носовая часть фюзеляжа вносит заметный вклад в суммарное аэродинамическое сопротивление и в значительной степени формирует течение около других элементов летательного аппарата. Посредством изменения формы носовой части можно добиться улучшения тех или иных аэродинамических характеристик. К классическим задачам аэродинамики относится построение образующей осесимметричной носовой части с целью увеличения критического числа Маха или уменьшения лобового сопротивления, что обеспечивает совершенствование летательных аппаратов по направлениям увеличения скорости и дальности полета.

Известны исследования, обосновывающие для дозвукового и сверхзвукового диапазона скоростей полета применение носовых частей в виде полукаверны Рябушинского и носовых частей с образующей, задаваемой степенной зависимостью радиуса от продольной координаты. Первое решение реализует в несжимаемой среде полочное распределение давления по поверхности тела и, согласно принципу максимума для скорости течения, может быть использовано для увеличения критического числа Маха [1–4]. Численные расчеты и испытания в аэродинамических трубах подтвердили превосходство полукаверны Рябушинского над параболическими носовыми частями по значениям аэродинамического сопротивления, которое сопровождается увеличением объема [5, 6]. Второе решение получено в рамках локальной модели течения и соответствует достижению минимальных значений волнового сопротивления для тел большого удлинения [7, 8]. В ЦАГИ выполнены расчетные и экспериментальные исследования тел степенной формы в широком диапазоне изменения числа Маха и удлинения [9]. Установлено, что оптимальные значения показателя степени, соответствующие достижению минимального сопротивления, близки к 2/3. В начале 2000-х годов теоретически и численно подтверждена справедливость решения, основанного на формуле Ньютона для давления на поверхности тела, в части, касающейся при-

тупления оптимальной носовой части по торцу [10, 11]. В частности, в рамках модели Эйлера показано, что близкие к минимальным значения волнового сопротивления достигаются в классе тел, имеющих передний торец и степенную образующую. Наличие торца является общей особенностью тел, оптимальных при заданной длине. Оптимальная образующая боковой поверхности с изломом стыкуется с передним торцом и может иметь дополнительные изломы. Локальное сглаживание изломов не приводит к заметному росту сопротивления [12]. Анализ и обобщение наиболее значимых решений задачи Ньютона об осесимметричной носовой части минимального сопротивления представлены в [13].

Основная цель настоящего исследования заключается в поиске решения, которое связывает известные результаты, полученные для дозвуковых и сверхзвуковых скоростей. Первым шагом в этом направлении стала попытка использования степенного закона зависимости радиуса от продольной координаты при построении носовых частей, имеющих минимальное сопротивление в диапазоне больших дозвуковых скоростей [14]. Установлено, что тело, прооптимизированное при числе Маха, близком к единице, может иметь недостаточно хорошие аэродинамические характеристики при меньших скоростях полета. Отмеченная особенность требует совершенствования оптимизационной процедуры. Например, допустимо представление целевой функции в виде суммы коэффициентов сопротивления с весовыми множителями, соответствующих двум или более значениям числа Маха. В результате будет получен Парето-фронт из не улучшаемых решений. Более удобным представляется сохранение однокритериальности задачи с введением дополнительных ограничений на гладкость образующей. Данная процедура реализована в представленной работе.

Метод оптимизации базируется на подходах локальной линеаризации связи между вариациями газодинамических функций и вариациями геометрических параметров [11, 15–18]. Таким образом, строится аналитическая аппроксимация целевой функции. Наиболее простая аппроксимация представляется квадратичной формой. В этом случае вычисляются градиент, матрица вторых производных, и посредством решения системы линейных уравнений находится положение экстремума. Допускается повышение порядка аппроксимации, что лишь незначительно усложняет поиск экстремума, поскольку функция остается аналитической. Заключительным действием является проверка найденных вариаций формы в численном расчете. Метод локальной линеаризации обеспечивает высокую скорость сходимости и позволяет проводить исследование при большом числе геометрических параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача минимизации аэродинамического сопротивления осесимметричной носовой части при заданных ограничениях на удлинение и кривизну образующей. Определяющими параметрами являются число Маха M_∞ и посчитанное на длину тела число Рейнольдса Re_L , которые характеризуют условия в набегающем потоке, и основная геометрическая характеристика – удлинение λ носовой части. Тело обтекается под нулевым углом атаки. Предполагается, что состояние пограничного слоя соответствует турбулентным условиям.

Образующая носовой части определяется набором из N точек с координатами $x_n, r_n, n = 1, \dots, N$. Соседние точки соединены прямолинейными отрезками. Начало системы координат совмещено с первой точкой ($x_1 = r_1 = 0$), радиус переднего торца равен r_2 . Для последней точки набора выполняются условия $r_N = R$ и $x_N = L$ (R и L – радиус основания и длина носовой части соответственно). Удлинение носовой части определяется отношением $\lambda = L/(2R)$.

Целевая функция – коэффициент лобового сопротивления носовой части C_x , который представляется суммой сил давления и сил трения по всем элементам образующей

$$C_x = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 R^2} \left[\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{p_n}{p_\infty} - 1 \right) (r_{n+1}^2 - r_n^2) + \sum_{n=2}^{N-1} c_{fn} (r_{n+1} + r_n) (x_{n+1} - x_n) \right]$$

Здесь p_∞ – давление в невозмущенном потоке, p_n и c_{fn} – осредненные значения давления и коэффициента трения на n -м отрезке образующей тела вращения, γ – отношение удельных теплотемкостей (в представленном исследовании принято $\gamma = 1.4$). При вычислении коэффициента сопротивления аэродинамическая сила отнесена к скоростному напору и площади основания носовой части.

Геометрическими параметрами, варьируемыми в процессе оптимизации, служат радиусы r_n в узловых сечениях с номерами $n = 2, \dots, N - 1$. Основное ограничение, накладываемое на габари-

ты тела, $\lambda = \text{const}$ учтено в постановочной части задачи. Таким образом, задача сведена к безусловной минимизации функции конечного числа переменных.

Предусмотрена возможность введения дополнительных ограничений для радиусов в сечениях, расположенных около переднего торца ($x_n < x_b$) и основания ($x_n > x_e$) носовой части.

Для точек с номерами $n < n_1$, где n_1 определяется из условий $x_{n_1-1} < x_b$ и $x_{n_1} \geq x_b$, радиус определяется степенной зависимостью от продольной координаты $r_n = r_2 + (r_{n_1} - r_2)(x_n/x_{n_1})^{0.5}$. При этом радиус переднего торца выбирается таким образом, чтобы в точке стыковки с пологим участком сохранялась непрерывность первой производной от радиуса.

Для точек с номерами $n > n_2$, где n_2 определяется из условий $x_{n_2} \leq x_e$ и $x_{n_2+1} > x_e$, зависимость радиуса от продольной координаты представляется полиномом третьей степени. Неизвестные коэффициенты выбираются из четырех граничных условий: гладкой стыковки в точке x_{n_2} и выходом на радиус основания с нулевой производной.

2. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

Для поиска минимума целевой функции применен прямой оптимизационный метод, объединяющий численное решение прямой задачи в рамках уравнений Навье—Стокса и определение улучшающих вариаций формы в приближенной постановке. При анализе особенностей целевой функции использованы подходы локальной линеаризации, на основе которых установлены соотношения, связывающие изменение давления на n -м отрезке образующей (при $n > 1$) с изменением радиусов в соседних поперечных сечениях. Если местное значение числа Маха M_n около рассматриваемого элемента поверхности (вне пограничного слоя) больше единицы, то изменение p_n связано с изменением r_n и r_{n+1} [11]

$$\frac{\Delta p_n}{p_\infty} = k \frac{\Delta r_{n+1} - \Delta r_n}{x_{n+1} - x_n}, \quad k = \frac{\gamma M_n^2 p_n}{p_\infty \sqrt{|M_n^2 - 1|}}$$

В противном случае анализируется зависимость p_n от радиусов в четырех сечениях [15]

$$\frac{\Delta p_n}{p_\infty} = k \frac{x_{n+2} - x_{n-1}}{2\pi(x_{n+1} - x_n)} \left[\frac{\Delta r_{n+2} - \Delta r_n}{x_{n+2} - x_n} - \frac{\Delta r_{n+1} - \Delta r_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} \right]$$

В результате целевая функция аппроксимируется аналитической зависимостью от геометрических параметров. Рассмотрены варианты с квадратичной и кубической аппроксимацией. Заметим, что аппроксимация строится при фиксированном значении радиуса переднего торца ($\Delta r_2 = 0$) и включает предположение, что коэффициенты трения на всех элементах образующей не изменяются при изменении образующей ($\Delta C_{fn} = 0$).

Для построенного приближения целевой функции определяются положение экстремума и соответствующая вариация формы носовой части. Применимость найденной вариации для уменьшения целевой функции проверяется в численном расчете. Задаются несколько шагов в установленном направлении спуска, строятся носовые части, для каждой из которых определяются поле течения и лобовое сопротивление. Результатом поиска минимума функции одной переменной является выбор шага, соответствующего минимуму.

Анализ, основанный на локальной линеаризации, дополнен прямой вариацией радиуса переднего торца. Таким образом, каждый цикл оптимизационного процесса состоял из последовательных спусков по двум направлениям в пространстве, задаваемом геометрическими параметрами. Условием остановки процесса являлось отсутствие выигрыша по сопротивлению после выполнения цикла. В качестве начального варианта использовалась носовая часть в виде полукаверны Рябушинского.

Численный расчет поля течения около носовой части тела вращения выполнялся на основе осредненных по Рейнольдсу нестационарных уравнений Навье—Стокса, записанных в приближении тонкого слоя относительно криволинейных координат, связанных с телом [19]. Для численного интегрирования уравнений движения применялась приближенно факторизованная разностная схема Бима—Уорминга второго порядка аппроксимации по пространственным переменным [20]. Стационарное решение получалось в процессе установления по времени. Турбулентная вязкость вычислялась с использованием алгебраической модели турбулентности Болдуина—Ломакса [21]. Предполагалось, что на всей поверхности носовой части пограничный слой

Таблица 1

сетка	C_{xp}	C_{xf}	C_x
Сетка 1: 251(72) × 101	0.04435	0.00264	0.04689
Сетка 2: 551(201) × 101	0.04486	0.00266	0.04752
Сетка 3: 251(72) × 330	0.03324	0.0088	0.04204
Сетка 4: 551(201) × 380	0.03529	0.00956	0.04485

турбулентный. При проведении расчетов к носовой части пристыковывалась цилиндрическая хвостовая часть длиной $5.5L$ (в методических расчетах установлено, что этой длины достаточно, чтобы граничные условия на правой выходной границе расчетной области не влияли на поле течения около носовой части). Свободная граница расчетной области вверх по потоку от носовой части задавалась дугой окружности с радиусом $20L$ и центром $(L, 0)$ и замыкалась цилиндрической поверхностью того же радиуса.

Применялась неоднородная разностная сетка со сгущением узлов в радиальном направлении вблизи поверхности тела, а также в осевом направлении вблизи торца носовой части. Наряду с телами, имеющими гладкую поверхность, исследовались тела с изломами контура, для которых характерными особенностями течения в окрестности стыковки переднего торца и боковой поверхности являются отрыв пограничного слоя и формирование веера волн разрежения. Оптимизационные исследования связаны с перебором различных вариантов аэродинамических конфигураций, что не позволило использовать сетку с большим числом узлов, достаточным для точного моделирования указанных локальных эффектов. Выбор оптимального варианта основывался на сопоставлении суммарных аэродинамических характеристик.

На примере носовой части с образующей Рябушинского проведены тестовые расчеты при $M_\infty = 0.9$ и $Re_L = 1.1 \times 10^6$ с целью оценить влияние числа узлов сетки на численное решение. Сопоставление распределений давления на поверхности носовой части и цилиндрического участка дано на рис. 1 для четырех расчетных сеток. В параметрах сетки на этом рисунке, а также в табл. 1 первое число указывает общее количество узлов в продольном направлении, число в скобках – непосредственно на носовой части; третье число – количество узлов в поперечном направлении. На переднем торце располагалось 20 расчетных точек со сгущением по квадратичному закону в радиальном направлении к точке стыковки с образующей боковой поверхности. Распределения давления, полученные на сетках 3 и 4, отличаются незначительно на образующей носовой части, и оба они близки к распределению, полученному в работе [14]. Некоторое различие распределения давления наблюдается на поверхности вблизи стыковки носовой части с цилиндром. Вблизи переднего торца распределения, полученные на сетках 1 и 2, заметно отличаются от других. В табл. 1 для разных сеток указаны значения коэффициентов сопротивления давления C_{xp} , трения C_{xf} и суммарного лобового сопротивления $C_x = C_{xp} + C_{xf}$ носовой части. Сопротивление давления определялось как равнодействующая аэродинамических сил, действующих на торец и боковую поверхность носовой части.

Основное влияние на аэродинамические коэффициенты оказывает число узлов в поперечном направлении и значительно в меньшей степени – число узлов в продольном направлении. Например, несмотря на то что количество узлов на сетке 2 вдоль образующей носовой части примерно в три раза больше, чем на сетке 1, отличие в аэродинамических коэффициентах весьма незначительно (примерно 1% в C_x). В то же время на сетке 2 и 4 при одинаковом числе узлов на образующей носовой части и разном числе в поперечном направлении отличие коэффициентов более заметно.

Двукратное, четырехкратное и восьмикратное увеличение числа узлов в поперечном направлении относительно сетки 1 показало монотонное увеличение сопротивления трения и уменьшение сопротивления давления. Для сопротивления трения реализуется линейная скорость сходимости и относительное отличие по C_{xf} между сетками с 401 и 801 узлами достигает 26%. При этом отличие по C_{xp} не превышает 1%. Установлено, что скорость сходимости по сетке может быть увеличена посредством использования параметров течения в двух слоях над поверхностью тела при вычислении производной скорости по нормальной координате. В этом случае относительное отличие по C_{xf} между двумя наиболее плотными сетками составляет около 10%.

Число узлов в поперечном направлении оказывает непосредственное влияние на величину трения на поверхности, однако при выборе формы носовой части с наименьшим сопротивлени-

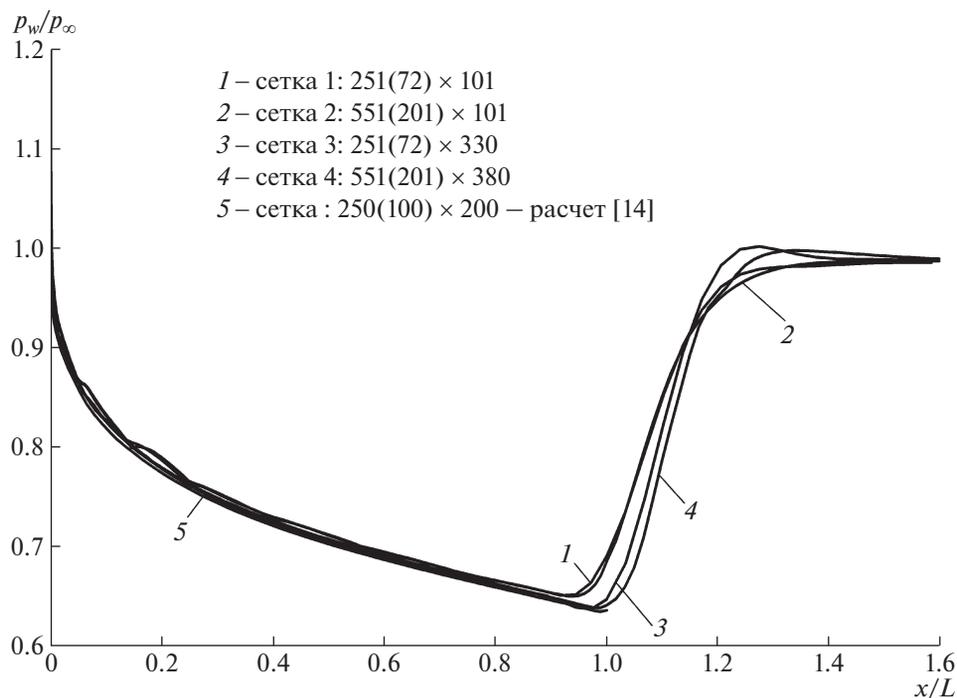


Рис. 1. Распределения давления по поверхности носовой части с образующей Рябушинского на разных сетках.

ем это не играет большой роли, поскольку сила трения изменяется незначительно для носовых частей одинаковой длины. Кроме того, сравнение носовых частей выполняется по суммарному сопротивлению, а расчеты проводятся на одной и той же сетке, вследствие чего погрешности, связанные с сеткой, не оказывают существенного влияния на процесс нахождения оптимальной формы носовой части.

Оптимизационные исследования проводились на сетке 1, поскольку требовалось выполнять большое число однотипных расчетов. Расчеты характеристик построенных оптимальных носовых частей при различных числах M_∞ проводились на сетке 3.

Для цилиндрического тела с носовой частью Рябушинского проведено сопоставление результатов численного расчета с экспериментальными данными [5]. Удлинение носовой части равнялось $\lambda = 0.867$, отношение длины тела к диаметру равнялось 3.5. При вычислении лобового сопротивления тела принималось, что донное давление за цилиндром равнялось давлению невозмущенного потока. Зависимости коэффициента сопротивления C_x от числа M_∞ , полученные в расчетах и эксперименте, сравниваются на рис. 2. Наблюдается хорошее согласование в качественном поведении зависимостей $C_x(M_\infty)$, рассчитанных в настоящей работе и измеренных в работе [5]. На рис. 2 видно, что при $M_\infty = 0.86$ начинается рост лобового сопротивления рассмотренного тела. Это значение числа M_∞ можно принять за критическое значение числа Маха для тела вращения с носовой частью, имеющей форму полукаверны Рябушинского. Количественное расхождение результатов расчета и эксперимента связано, по-видимому, с недостаточной точностью численного метода, а также погрешностями экспериментальных данных. В целом же для такого типа задач согласование расчета и эксперимента можно считать удовлетворительным. Для сравнения на рис. 2 нанесена зависимость $C_x(M_\infty)$, полученная в работе [14]. За исключением интервала чисел $0.84 \leq M_\infty \leq 0.88$ кривая этой зависимости практически сливается с кривой, полученной в настоящем исследовании.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Поиск оптимальной формы носовой части тела вращения выполнен при числе Маха $M_\infty = 0.9$ и числе Рейнольдса $Re_L = 1.1 \times 10^6$. Удлинение носовой части составляет $\lambda = 0.867$, что соответствует числу кавитации $\sigma = 0.382$ при осесимметричном обтекании диска по схеме Рябушинско-

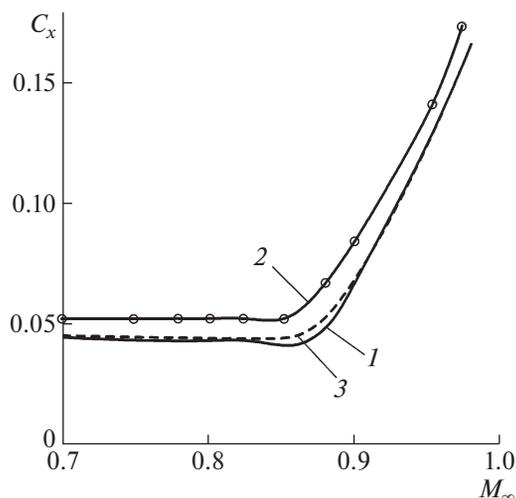


Рис. 2. Сопоставление результатов настоящего расчета (1) с результатами эксперимента [5] (2) и расчета [14] (3).

го. Число кавитации определяется как взятое с обратным знаком значение коэффициента давления вдоль границы каверны (образующей носовой части).

Форма носовой части задавалась набором из $N = 73$ точек. Точки сгущены к переднему торцу. Минимальное расстояние между продольными координатами соседних точек $x_{n+1} - x_n$ достигалось при $n = 2$ и составляло 0.02% длины носовой части L . Расстояние $x_N - x_{N-1}$ приближалось к 2.8% от L .

Для заданных значений определяющих параметров построено три носовых части (см. рис. 4). В первом случае (носовая часть № 1) решена безусловная оптимизационная задача, для которой $x_b = 0$ и $x_e = L$. В двух других случаях дополнительные ограничения были активны. Носовая часть № 2 построена при $x_b = 0.0127L$ и $x_e = 0.917L$, а носовая часть № 3 — при $x_b = 0.0573L$ и $x_e = 0.864L$. Понятно, что введение ограничений и расширение области их действия приводят к уменьшению выигрыша по сопротивлению относительно носовой части в виде полукаверны Рябушинского. Однако результатом безусловной минимизации является носовая часть с изломами контура в местах стыковки с передним торцом и замыкающим цилиндром. Такие тела могут иметь плохие аэродинамические характеристики в дозвуковом диапазоне скоростей [14]. Дополнительные ограничения нацелены на получение компромиссного решения — сохранение характеристик при малых скоростях и снижение сопротивления при трансзвуковых скоростях.

Метод оптимизации, основанный на локальной линеаризации, продемонстрировал достаточно высокую скорость сходимости. Для иллюстрации на рис. 3а показаны вариации Δr^k контура носовой части № 1 для разных оптимизационных циклов k . Вариации определялись по распределению давления на образующей носовой части, рассчитанного на предыдущем цикле $k - 1$. Распределения давления вдоль образующих носовых частей на разных циклах приведены на рис. 3б. В качестве нулевого приближения принималось распределение давления на поверхности носовой части Рябушинского. Относительное изменение коэффициента лобового сопротивления в зависимости от числа выполненных оптимизационных циклов при построении носовой части № 1 показано на рис. 3в. Сходимость достигнута после 7 циклов. При этом число прямых расчетов, соответствующее количеству носовых частей, для которых выполнялось моделирование обтекания и вычислено лобовое сопротивление, не превысило 25. Аналогичные результаты получены для носовых частей № 2 и № 3. Следует заметить, что на большей части поверхности тела ($x/L > 0.02$) число Маха вне пограничного слоя больше единицы. Поэтому при определении вариации контура используются сверхзвуковые соотношения, связывающие изменение давления с изменением радиусов в двух соседних сечениях. Дозвуковые соотношения используются только для элементов поверхности, примыкающих к переднему торцу.

Образующие построенных оптимальных носовых частей представлены на рис. 4. Носовые части № 2 и № 3 с ограничениями на кривизну вблизи торца и в месте стыковки с цилиндрической частью имеют чуть более наполненную форму по сравнению с носовой частью № 1, построенной без ограничений. Однако в целом образующие частей № 1, № 2 и № 3 отличаются незначительно.

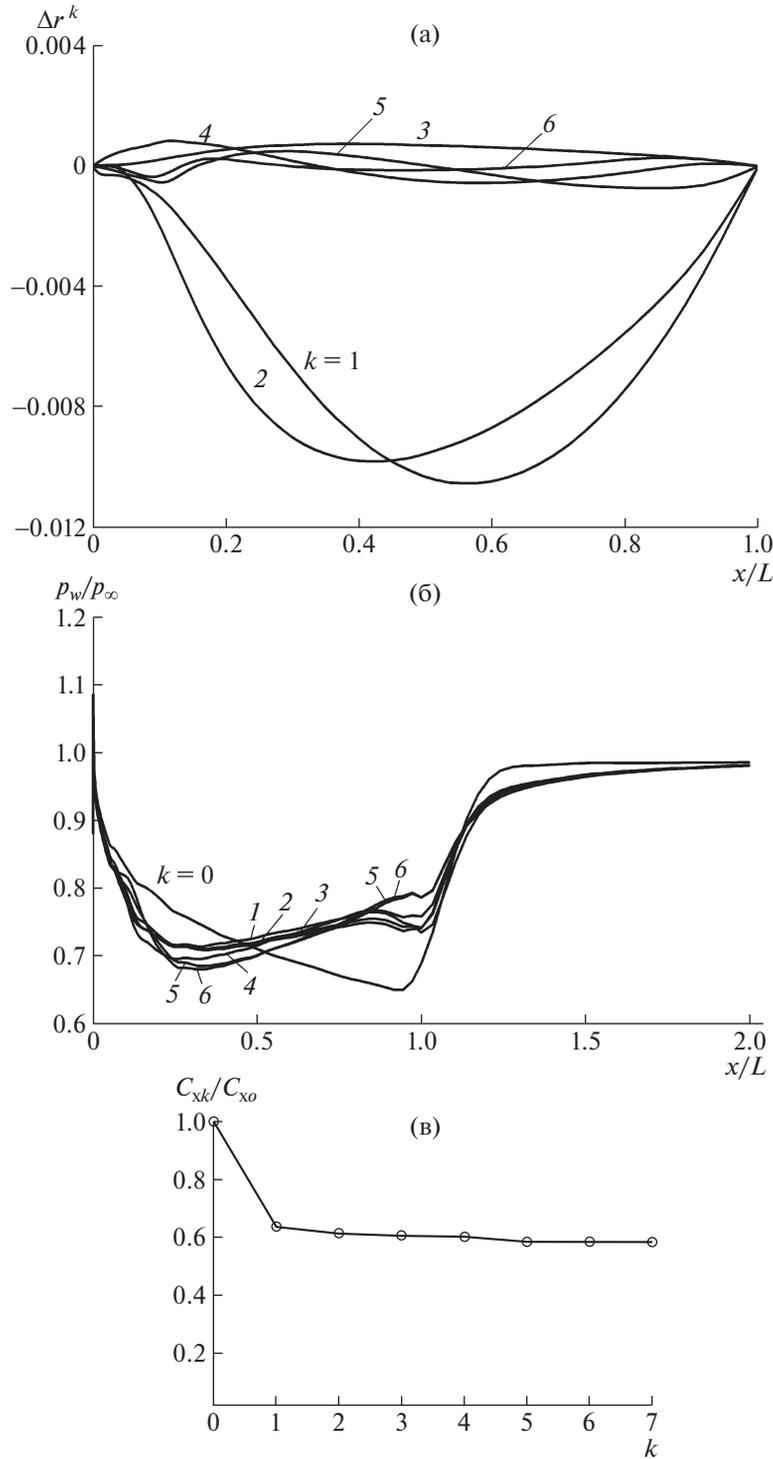


Рис. 3. Сходимость вариаций контура (а), распределений давления по контуру (б) и коэффициента сопротивления (в) в зависимости от номера оптимизационного цикла.

Для сравнения штриховой линией 4 на рис. 4 показана образующая носовой части Рябушинского. Видно, что она имеет более наполненную форму при $x/L > 0.2$ и при приближении к торцу практически совпадает с контуром носовой части № 1.

Распределения давления по поверхности носовых частей № 1 и № 2 имеют качественно одинаковый характер: сначала давление вблизи торца резко падает, потом плавно повышается на

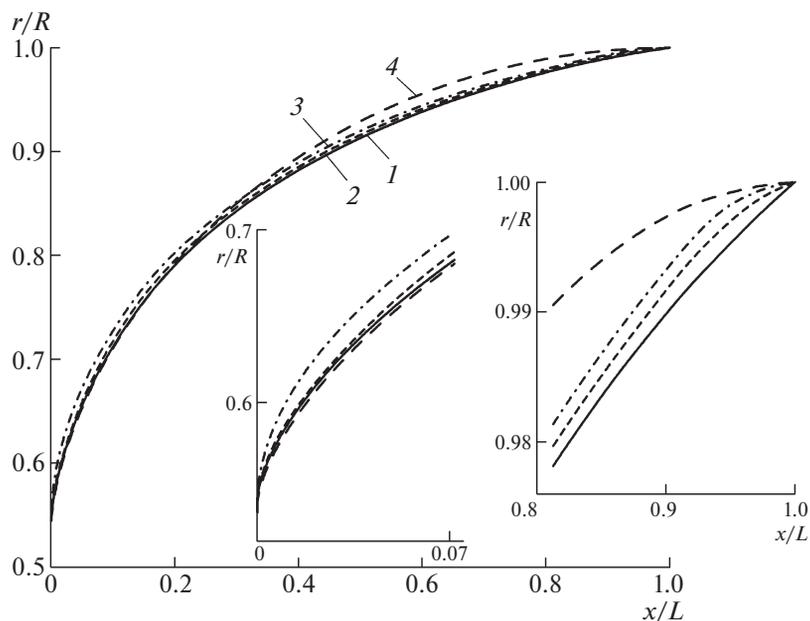


Рис. 4. Форма образующих оптимальных носовых частей № 1, № 2, № 3 (кривые 1, 2 и 3) и носовой части Рябушинского (кривая 4).

участке $0.2 < x/L \leq 1$, а затем достаточно круто повышается при $1 < x/L \leq 1.2$ в волне сжатия, и далее плавно восстанавливается до давления невозмущенного потока (рис. 5). В распределении давления на поверхности носовой части № 3 наблюдается немонотонность в виде “горба” при $x/L = 0.1$, а затем давление изменяется в продольном направлении аналогично зависимости, полученной для носовой части № 2. Наличие немонотонности вблизи торца в распределении давления обусловлено перерасширением потока, которое связано с кривизной контура носовой части. Напомним, что вблизи торца контур тела достраивался в соответствии со степенной зависимостью радиуса от продольной координаты.

Распределение давления по поверхности носовой части Рябушинского заметно отличается от распределения давления на носовых частях № 1, № 2 и № 3. На рис. 5 видно, что давление на ней по всей длине монотонно снижается и только при $1 < x/L \leq 1.2$ восстанавливается до давления невозмущенного потока.

Несмотря на то что визуально контур носовой части Рябушинского отличается от контуров построенных оптимальных носовых частей незначительно, структуры полей течения около них весьма заметно отличаются. Это видно, например, из сопоставления линий постоянных значений числа Маха около носовой части № 3 и носовой части Рябушинского, приведенных на рис. 6 для случая $M_\infty = 0.9$. Если около носовой части № 3 поле течения характеризуется разрежением и последующим сжатием, то около носовой части Рябушинского имеет место в основном разрежение, а сжатие происходит только в области, прилегающей к цилиндрическому участку.

Изменение коэффициентов лобового сопротивления оптимальных носовых частей, носовой части Рябушинского и тел со степенной образующей в зависимости от числа M_∞ показано на рис. 7. Зависимости $C_x(M_\infty)$ для построенных оптимальных носовых частей отличаются незначительно. При $M_\infty = 0.9$ отличие по сопротивлению между носовыми частями № 1 и № 2 составляет примерно 4%. Усиление ограничений, накладываемых на кривизну образующей, приводит к дополнительному увеличению сопротивления в пределах 1% (носовая часть № 3). По сравнению с носовой частью, имеющей степенную образующую с гладкой стыковкой боковой поверхности с передним торцом и цилиндром [14], выигрыш по сопротивлению превышает 25%. Из анализа результатов расчета следует, что у построенных носовых частей № 1, № 2 и № 3 при дозвуковом обтекании ($M_\infty < 0.86$) около 40% общего сопротивления составляет сопротивление трения.

Отметим, что у носовой части № 1, построенной без ограничений при $M_\infty = 0.9$, высокие аэродинамические характеристики сохраняются и при меньших значениях числа Маха. При до-

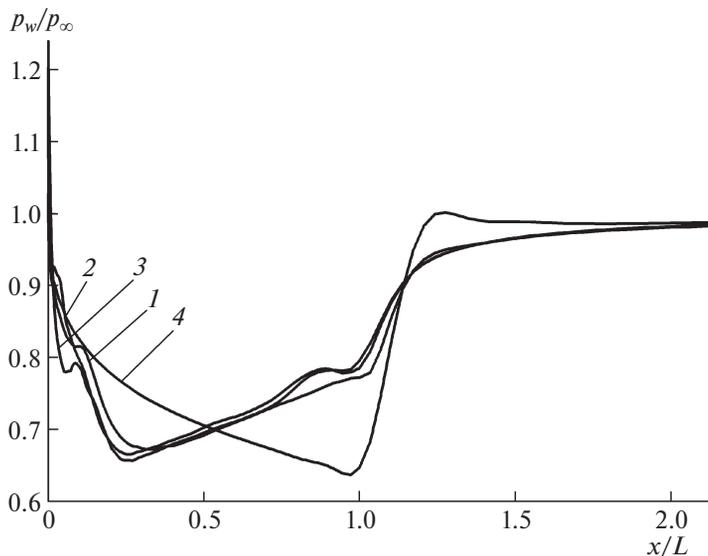


Рис. 5. Распределения давления вдоль образующих носовых частей: 1 – носовая часть № 1; 2 – носовая часть № 2; 3 – носовая часть № 3; 4 – носовая часть Рябушинского.

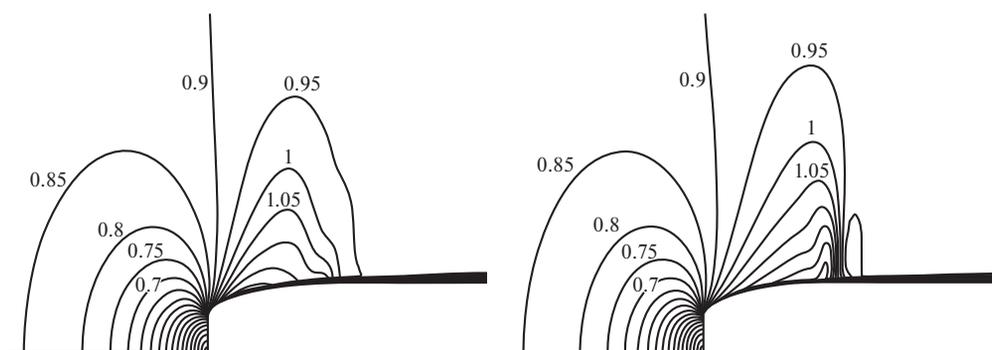


Рис. 6. Уровни числа Маха при $M_\infty = 0.9$ около носовой части № 3 (а) и носовой части Рябушинского (б).

звуковом режиме обтекания, когда число Маха меньше критического значения, сопротивление оптимальных носовых частей находится на одном уровне и практически такое же, как у носовой части Рябушинского. Совпадение аэродинамических характеристик носовых частей с гладкой и негладкой стыковкой боковой поверхности с передним торцом и замыкающим цилиндром в дозвуковом диапазоне скоростей в определенной степени уточняет результаты, полученные в работе [14]. Были выполнены дополнительные расчетные исследования, которые показали, что увеличение сопротивления происходит при достаточно больших значениях угла излома, при которых образуется обширная отрывная зона.

Оптимальное профилирование носовой части сопровождается увеличением числа Маха, при котором начинается резкий рост сопротивления. Коэффициент лобового сопротивления C_x носовой части Рябушинского возрастает при $M_\infty > 0.86$, в то время как у оптимальных носовых частей заметный рост сопротивления происходит при $M_\infty > 0.9$. Наличие немонотонности в зависимости $C_x(M_\infty)$ в диапазоне $M_\infty = 0.86–0.9$ связано с перестроением течения. Вблизи боковой поверхности носовой части реализуется сверхзвуковой режим обтекания. Именно в этом случае проявляется эффективность оптимизации, направленной на снижение волнового сопротивления. Таким образом, при $M_\infty = 0.9$ сопротивление носовой части № 1 примерно в два раза меньше, чем сопротивление носовой части Рябушинского. Данный результат справедлив и для носовой части тела вращения, построенного по условию достижения максимально возможного критического числа Маха [4].

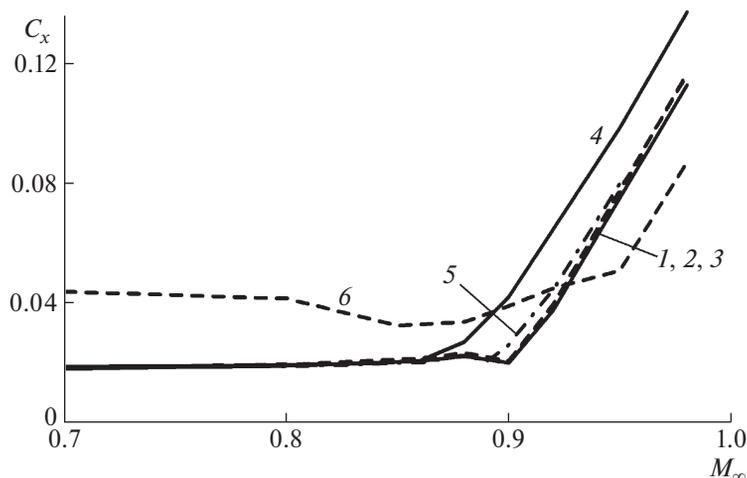


Рис. 7. Зависимость коэффициента сопротивления от числа M_∞ : 1 – носовая часть № 1; 2 – носовая часть № 2; 3 – носовая часть № 3; 4 – носовая часть Рябушинского; 5 – степенная носовая часть с гладким контуром [14]; 6 – усеченная степенная носовая часть.

Дальнейшее увеличение числа Маха ($M_\infty > 0.93$) ожидаемо приводит к тому, что построенные тела уступают по сопротивлению усеченному степенному телу. На рис. 7 представлены характеристики носовой части с отношением радиуса переднего торца к радиусу основания, равным 0.621, и показателем степени, равным 0.167. Указанные значения геометрических параметров соответствуют минимизации лобового сопротивления при $M_\infty = 0.95$ [14].

Важная аэродинамическая особенность исследованных носовых частей обусловлена характером распределения давления на поверхности. Сила давления, действующая на торец, направлена по потоку, а сила, действующая на боковую поверхность, направлена против потока. По абсолютному значению силы отличаются незначительно, примерно на 7%, и увеличиваются с ростом числа Маха при дозвуковом обтекании. Переход к сверхзвуковому режиму обтекания боковой поверхности сопровождается увеличением давления и резким ростом отношения силы сопротивления на торце к силе тяги на боковой поверхности.

Таким образом, можно заключить, что разработанный прямой метод численной оптимизации позволяет выполнять построение осесимметричных носовых частей, имеющих минимальное аэродинамическое сопротивление в диапазоне больших дозвуковых скоростей. Метод локальной линеаризации, объединенный с численным моделированием в рамках уравнений Навье–Стокса, обеспечивает высокую скорость сходимости при большом числе варьируемых геометрических параметров. Построенные оптимальные носовые части имеют значительно меньшее сопротивление по сравнению с носовой частью с образующей Рябушинского и носовой частью в виде усеченного степенного тела. Введение дополнительных ограничений, обеспечивающих гладкую стыковку боковой поверхности носовой части с передним торцом и цилиндрической частью, не является обязательным условием достижения высоких аэродинамических характеристик в дозвуковом диапазоне скоростей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00671).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number // *J. Ration. Mech. And Anal.* 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
2. *Кожуро Л.А.* Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // *Ученые записки ЦАГИ.* 1980. Т. 11. № 5. С. 109–115.
3. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // *ПММ.* 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
4. *Зигангарева Л.М., Киселев О.М.* Отрывное обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 3. С. 166–172.

5. *Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н.* Исследование обтекания тел вращения с образующей Рябушинского // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321:1. С. 33–35.
6. *Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н., Михайлов П.Д.* Тела вращения с минимальным сопротивлением в трансзвуковом потоке газа // Ученые записки ЦАГИ. 1992. Т. 23. № 2. С. 78–81.
7. *Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H.* Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic air speeds // NASA. Report № 1306. 1957. 12 p.
8. *Миеле А.* Тонкие тела минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм / Перевод с англ. под ред. А.Л. Гонора. М.: Мир, 1969. 507 с. С. 203–215.
9. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностроение, 1975. 183 с.
10. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
11. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 157–162.
12. *Большаинов И.П., Захаров Н.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Оптимальные осесимметричные головные части обтекаемых тел: расчеты и эксперимент // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 120–127.
13. *Крайко А.Н.* Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 734–748.
14. *Иванюшкин Д.С., Таковицкий С.А.* О минимуме сопротивления осесимметричных носовых частей в диапазоне больших дозвуковых скоростей полета // Ученые записки ЦАГИ, 2018. Т. 49. № 7. С. 20–27.
15. *Таковицкий С.А.* К построению плоских тел с увеличенным критическим числом Маха // Ученые записки ЦАГИ. 2016. Т. 47. № 6. С. 3–15.
16. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 775–782.
17. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус Пресс, 2010. 440 с.
18. *Таковицкий С.А.* Оптимизационные задачи сверхзвуковой аэродинамики. М.: Наука, 2015. 236 с.
19. *Мазуров А.П.* Расчет сверхзвукового обтекания хвостовой части мотогондолы в присутствии реактивной струи // Ученые записки ЦАГИ. 1991. Т. 22. № 4. С. 39–46.
20. *Beam R., Warming R.F.* An implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations // AIAA Paper 77-645, 1977.
21. *Baldwin B.S., Lomax H.* Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // AIAA Paper 78-257, 1978.

УДК 533.9

ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ВОЛНИСТОГО КВАДРАТНОГО ЦИЛИНДРА. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ

© 2022 г. Dan Zhang^a, Akira Rinoshika^b, Yan Zheng^{a,*,**}, Zijuan Li^a, Ya Zhang^a

^a School of Automotive and Traffic Engineering, Jiangsu University of Technology,
Changzhou, Jiangsu, China

^b Department of Mechanical Systems Engineering,
Graduate School of Science and Engineering Yamagata University, City, Country

*E-mail: zy30003333@163.com

**E-mail: zhengyan@jsut.edu.cn

Поступила в редакцию 18.03.2021 г.

После доработки 20.05.2021 г.

Принята к публикации 21.06.2021 г.

Структуры течения, образующиеся при обтекании волнистого квадратного цилиндра с длиной волны возмущения $5.6D$, исследованы численно при помощи метода крупных вихрей (LES) при числе Рейнольдса 23 500. Детально изучены силовые характеристики и картины течения в следе за волнистым цилиндром и выполнено их сравнение со случаем обтекания гладкого цилиндра с квадратным сечением. Под влиянием волнистости передней кромки тела имеет место снижение средней силы сопротивления и пульсаций подъемной силы на 27 и 98% соответственно. Трехмерность среднего течения приводит к возникновению интенсивного сдвигового течения между положениями узла и седла на поверхности тела и, как следствие, к образованию дополнительных вихревых пар в продольном и вертикальном направлениях. Эти вихревые структуры определяют трехмерность течения в следе за волнистым квадратным цилиндром. Мгновенные картины течения показывают, что разнесенная структура срыва вихрей Кармана исчезает и сменяется симметричным срывом вихрей в ближний след за волнистым цилиндром. Эта симметричная структура вихрей в ближнем следе играет свою роль в предотвращении взаимодействия между верхним и нижним сдвиговыми слоями. Частотно-временной анализ указывает на снижение доминирующей частоты срыва вихрей в случае волнистого цилиндра, что свидетельствует об относительно стационарном течении в следе. Причиной этому может быть изменение положения вихрей за волнистым цилиндром. В диапазоне высоких частот наблюдаются маленькие полоски, обусловленные усилением мелкомасштабных пульсаций волнистой передней кромкой. Полученные результаты показывают, что возмущение с длиной волны, соответствующей длине волны неустойчивости ламинарного течения с модой A, может быть положено за основу управления течением в турбулентном режиме.

Ключевые слова: след, вихри, частотно-временной анализ, квадратный цилиндр

DOI: 10.31857/S056852812201011X

Обтекание тупых тел во многих технических приложениях часто имеет турбулентный характер, как например, в теплообменниках или при обтекании дымовых труб, высотных зданий, мостовых настилов. Общими характерными особенностями обтекания тупых тел являются образование турбулентности и перенос вихрей. С этими особенностями связаны наличие силы сопротивления, пульсации подъемной силы, вибрации, индуцированные потоком, и акустический шум. В последние два десятилетия разрабатывались различные стратегии управления потоком с целью ослабить эти неблагоприятные эффекты путем изменения поля течения около тупого тела [1–5]. Для осуществления эффективного управления течением существенно понимание и предсказание характеристик потока, обтекающего тупое тело.

Развитие знаний о трехмерном характере обтекания различных тупых тел [6–11] позволило установить, что в ближнем следе за двумерным тупым телом преобладают два вида неустойчивости. Первичная, доминирующая неустойчивость ответственна за образование вихревой дорож-

ки, а вторичные неустойчивости связаны с трехмерными переходами в следе. Эти вторичные неустойчивости способствуют развитию трехмерности сдвиговых слоев и препятствуют взаимодействию между двумя вихревыми слоями. На основе идеи использования вторичной неустойчивости был разработан и широко применялся метод управления течением, известный как метод синусоидальных возмущений в направлении размаха тела (Spanwise Sinusoidal Perturbation, SSP). В частности, он применялся для управления течения в номинально двумерном следе за различными двумерными телами как круговой цилиндр, квадратный цилиндр, крыловой профиль и тело с эллиптической передней кромкой [12–17]. В этом подходе обычно используются либо периодические модификации геометрии тела, либо вдув/отсос на передней или задней кромке тела; согласно терминологии работы [18], этот подход принадлежит классу создания искусственной трехмерности. В вышеупомянутой литературе отмечается уменьшение сопротивления тела и подавление процесса срыва вихрей при использовании метода SSP, особенно, когда длина волны возмущения равна характерному размеру доминантной вторичной неустойчивости в направлении размаха тела. Однако оптимальное значение длины волны не одно и то же для различных тупых тел. Это объясняется тем фактом, что вторичная неустойчивость в следе за тупым телом зависит от формы тела.

Помимо параметра геометрической формы, на вторичную неустойчивость существенно влияет число Рейнольдса потока. Это затрудняет определение наиболее эффективной длины волны возмущения при управлении течением методом SSP. Обтекание квадратного цилиндра с синусоидальной волнистостью вдоль передней и задней кромок в ламинарном режиме ($10 \leq Re \leq 150$) было численно исследовано в работе [19]. При длине волны возмущения $5.6D$ (D – высота передней кромки квадратного цилиндра) было достигнуто максимальное снижение сопротивления на 14%. Согласно [20, 21], это значение длины волны очень близко к поперечному характерному размеру неустойчивости моды A за квадратным цилиндром при малых числах Рейнольдса ($Re \leq 300$). В турбулентном режиме ($Re = 23\,500$) в работе [22] достигнуто снижение уровня турбулентности на 78% путем применения метода SSP на передней кромке квадратного цилиндра с длиной волны, равной $2.4D$. При тех же значениях определяющих параметров, что и в эксперименте [22], в работе [16] было выполнено моделирование обтекания волнистого квадратного цилиндра методом крупных вихрей (LES), причем были получены снижение среднего сопротивления на 32% и существенное уменьшение пульсаций подъемной силы при длине волны $2.4D$. Это значение находится в соответствии с длиной волны неустойчивости моды A , определенной в [23] при том же числе Рейнольдса. Аналогичные результаты для квадратного цилиндра с синусоидальной лобовой поверхностью были получены в экспериментальной работе [24]. Однако максимальное снижение силы сопротивления было достигнуто при длине волны возмущения $5.6D$, что соответствует неустойчивости моды A , наблюдавшейся в ламинарном режиме течения. Из вышесказанного можно сделать вывод, что оптимальная длина волны при управлении методом SSP не универсальна и может меняться с изменением числа Рейнольдса. Поэтому было бы интересно изучить, может ли вторичная неустойчивость, наблюдавшаяся при малых числах Рейнольдса, послужить основой при управлении течением методом SSP при высоких числах Рейнольдса. Это и является целью настоящей работы.

В данном исследовании длина волны неустойчивости моды A , наблюдавшаяся в ламинарном режиме течения, задается на передней кромке квадратного цилиндра. Эффект этой длины волны в турбулентном режиме течения исследуется при помощи LES-моделирования при числе Рейнольдса 23 500. Валидация результатов для гладкого квадратного цилиндра выполнена на основе данных, имеющих в литературе, и измерений методом трассерной визуализации (PIV). Получены подробные данные о силовых характеристиках и структурах течения в следе при обтекании волнистого квадратного цилиндра и проведено их сравнение с данными для гладкого квадратного цилиндра. Эти сравнения касаются аэродинамических характеристик, осредненных и мгновенных полей течения, а также частотно-временных характеристик течения.

1. ЧИСЛЕННЫЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОДЫ

1.1. Численное решение

В настоящей работе решение нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса, описывающих обтекание гладкого и волнистого квадратного цилиндров несжимаемой жидкостью, осуществляется при помощи LES-моделирования с использованием метода конечного объема в пакете ANSYS Fluent. При решении нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса разделяются крупномасштабные и мелкомасштабные поля скорости. Крупномасштабные поля

скорости рассчитываются непосредственно, а мелкомасштабные поля моделируются при помощи подсеточной модели. Основные уравнения, решаемые посредством LES-моделирования, имеют вид:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь \bar{u}_i и \bar{p} – отфильтрованные давление и скорость, соответственно, а τ_{ij} – тензор напряжений подсеточной модели, задаваемый выражением $\tau_{ij} = \overline{\rho u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j$. В данной работе используется известная модель Смагоринского, а анизотропная часть тензора напряжений τ_{ij} моделируется следующим образом:

$$\tau_{ij} = -2\mu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (1.3)$$

где \bar{S}_{ij} – тензор скоростей деформации. Турбулентная вязкость μ_t в подсеточной модели определяется как

$$\mu_t \equiv \rho L_s^2 |\bar{S}| = \rho L_s \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (1.4)$$

$$L_s = \min(\kappa\delta, C_s V^{1/3}) \quad (1.5)$$

где L_s – длина пути смешения для подсеточных масштабов, κ – постоянная Кармана, $C_s (= 0.1)$ – постоянная Смагоринского, δ – расстояние до ближайшей стенки и V – объем расчетной ячейки.

В настоящей работе нестационарные процессы рассчитываются по неявной схеме второго порядка, а связь между давлением и скоростью осуществляется при помощи алгоритма неявного расщепления операторов для давления (pressure implicit splitting of operators. PISO). Пространственная дискретизация давления и импульса осуществляется по схеме второго порядка и центральной ограниченной схеме соответственно.

1.2. Расчетная область и граничные условия

На рис. 1 представлены геометрия и расчетная область для гладкого и волнистого цилиндров. В качестве базового варианта выбран случай квадратного цилиндра с высотой передней кромки D и поперечным размером $L_y = 16.8D$ ($D = 20$ мм). У волнистого цилиндра поперечное сечение с максимально выступающей кромкой называется узлом, а сечение с минимально выступающей кромкой – седлом. Длина волны λ между двумя узлами равна $5.6D$, а амплитуда синусоиды w равна $0.45D$. Численные расчеты проводятся в прямоугольной расчетной области размерами $L_x \times L_y \times L_z = 25D \times 16.8D \times 15D$. Входная граница расчетной области располагается на расстоянии $8D$ вверх по потоку от цилиндра, а выходная граница на расстоянии $16D$ вниз по потоку. Высота по вертикали и ширина по размаху тела расчетной области равны $15D$ и $16.8D$ соответственно.

На входной границе задавалось равномерное распределение скорости, $U = 17.2$ м/с, при уровне турбулентности 0.1%; при этом число Рейнольдса, вычисленное по высоте передней кромки, было $Re = 23500$. На выходной границе расчетной области задавалось давление. На нижней и верхней границах расчетной области (по вертикальному направлению z) ставились условия симметрии. На двух боковых границах (в направлении размаха тела y) задавались условия периодичности. На поверхностях обтекаемых тел ставились условия прилипания. Аналогичные граничные условия использовались в работе [25] при расчете турбулентного обтекания квадратного цилиндра. Шестигранные сетки, применявшиеся при расчетах обтекания гладкого и волнистого квадратных цилиндров, показаны на рис. 2. Как видно, в направлениях x и z генерируются неравномерные сетки погранслоного типа, а в поперечном направлении у сетка равномерна с шагом $0.1D$. Такое разрешение сетки вполне достаточно, чтобы уловить нестационарное поведение решения в поперечном направлении, согласно рекомендациям работы [26]. В плоскости xz расстояние между поверхностями цилиндров и ближайшими узлами сетки было выбрано равным $0.01D$, с тем чтобы обеспечить безразмерное расстояние от стенки y^+ не более, чем 1.

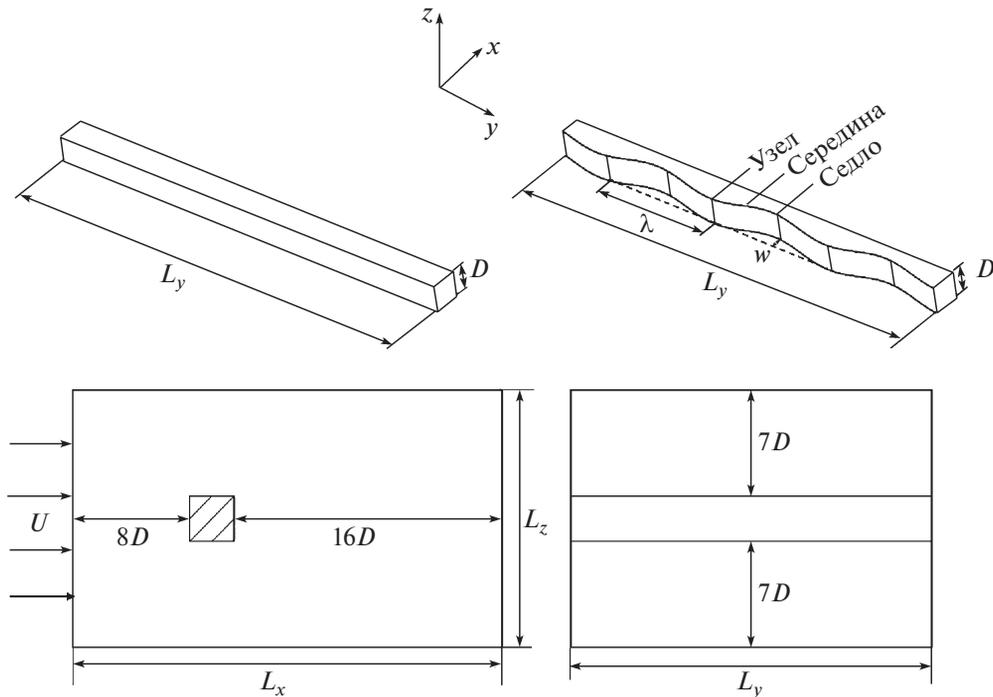


Рис. 1. Геометрические параметры и расчетная область в случае гладкого и волнистого квадратных цилиндров.

Расчетная сетка должна быть достаточно мелкой, чтобы на ней могли быть точно рассчитаны мгновенные структуры течения. В связи с этим исследовалась зависимость численных результатов для обтекания гладкого цилиндра от числа узлов сетки. Результаты по среднему коэффициенту сопротивления \bar{C}_d , числу Струхала St и длине циркуляционной зоны L_r представлены в табл. 1 для четырех сеточных конфигураций. При увеличении числа узлов сетки от $180 \times 168 \times 160$ (вариант М1) до $260 \times 168 \times 220$ (вариант М4) значения \bar{C}_d , St и L_r меняются в пределах 3.1, 5.2 и 5.4% соответственно. Когда число узлов сетки возрастает от $240 \times 168 \times 200$ (вариант М3) до $260 \times 168 \times 220$ (вариант М4), значения \bar{C}_d , St и L_r меняются не более, чем на 1%. В качестве оптимального выбора между вычислительными расходами и точностью численных результатов для численного моделирования взят вариант М3. Заметим, что длина циркуляционной зоны, рассчитанная в данной работе, несколько меньше экспериментального значения из работы [27], но больше, чем в численном исследовании [28]. Эти расхождения могут быть обусловлены различиями во входном уровне турбулентности, отношении длины тела к его ширине и заполненности расчетной области телом. Дальнейшая валидация результатов настоящих расчетов проводилась путем сравнения с ранее опубликованными данными и будет представлена в разделе 2.

В качестве первого шага был выполнен расчет стационарного состояния, а полученные результаты были использованы как начальные условия для расчета нестационарного течения. В LES-расчетах безразмерный шаг по времени был взят равным $\Delta t^* = \Delta t U/D \approx 0.008$, что соответствовало критерию Куранта–Фридрихса–Леви (CFL), меньшему единицы [29]. Для получения

Таблица 1. Тестирование сеточной зависимости численных решений для гладкого квадратного цилиндра

Вариант	Размер сетки	\bar{C}_d	St	L_r/D
М1	$180 \times 168 \times 160$	2.31	0.127	1.22
М2	$220 \times 168 \times 180$	2.27	0.132	1.26
М3	$240 \times 168 \times 200$	2.25	0.134	1.28
М4	$260 \times 168 \times 220$	2.24	0.134	1.29

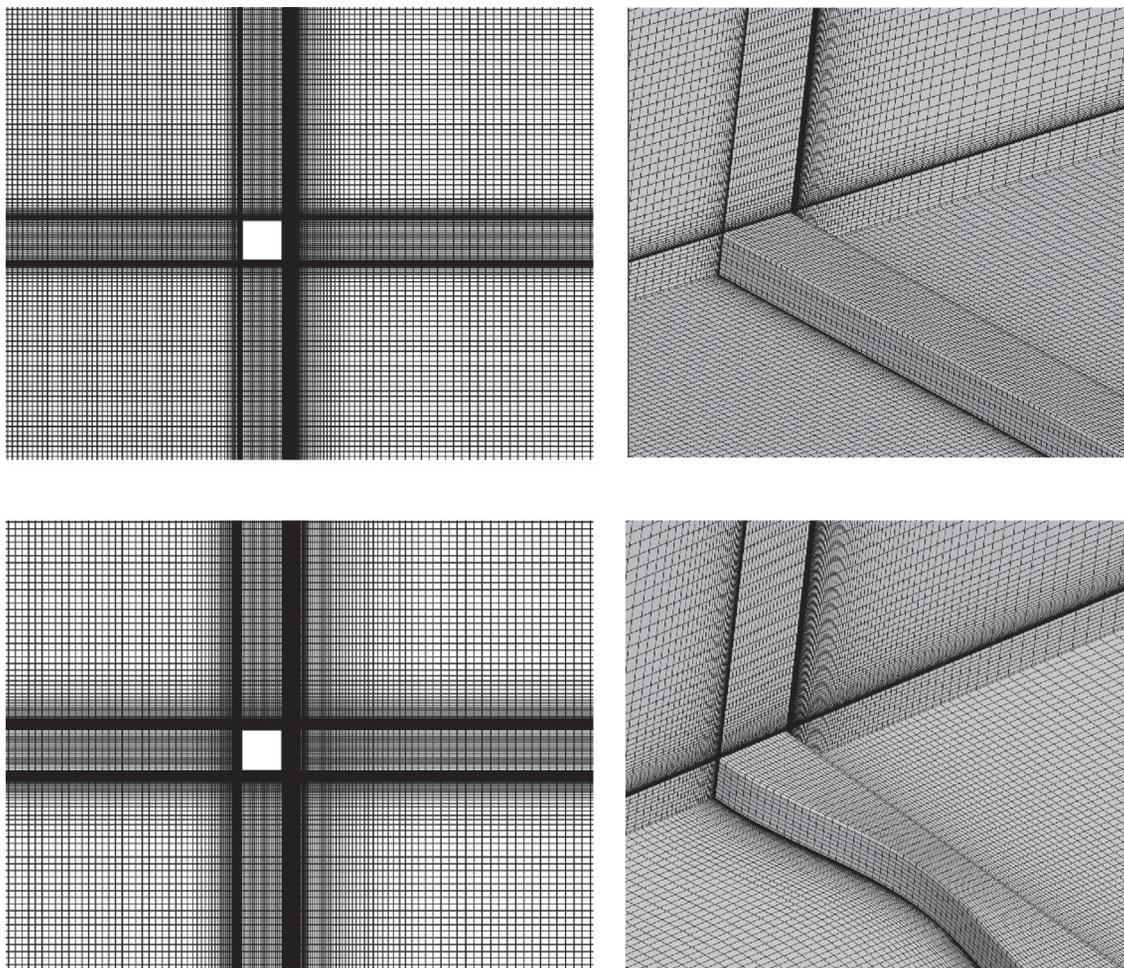


Рис. 2. Расчетные сетки в случае гладкого и волнистого квадратных цилиндров.

статистически сходящихся результатов на каждом шаге по времени проводилось 20 итераций и обрабатывались приблизительно 150 циклов срыва вихрей.

1.3. PIV-измерения

Для валидации результатов численного моделирования измерения методом высокоскоростной трассерной визуализации (PIV) были выполнены в лаборатории А. Риносика в университете Yamagata. Эксперименты проводились в гидроканале с рабочей частью, имеющей ширину 400 мм, высоту 300 мм и длину 1000 мм. Модели гладкого и волнистого квадратных цилиндров занимали всю ширину рабочей части и устанавливались на середине глубины гидроканала. Высота передней кромки D экспериментальных моделей была аналогична высоте расчетных моделей. Поперечная длина моделей была равна ширине гидроканала, так что отношение поперечного размера экспериментальной модели к ее высоте было равно 20. Измерения проводились при постоянной скорости набегающего потока $U = 0.08$ м/с, что соответствовало числу Рейнольдса $Re (UD/\nu) = 1553$. Уровень турбулентности составлял менее 0.5% от скорости набегающего потока.

Последовательные цифровые изображения частиц в продольной и поперечной плоскостях с частотой отбора 250 Гц были получены при помощи высокоскоростной камеры Photron FASTCAM SA3 с разрешением 1024×1024 пикселей. Компактный лазер, возбуждаемый постоянным источником мощностью 4 Вт, обладал цилиндрической линзой и создавал плоскостное освещение в 1.5 мм вдоль плоскостей, в которых проводились измерения. В качестве трассеров в поток запускались частицы полистирола диаметром 10–25 мкм. Мгновенные поля

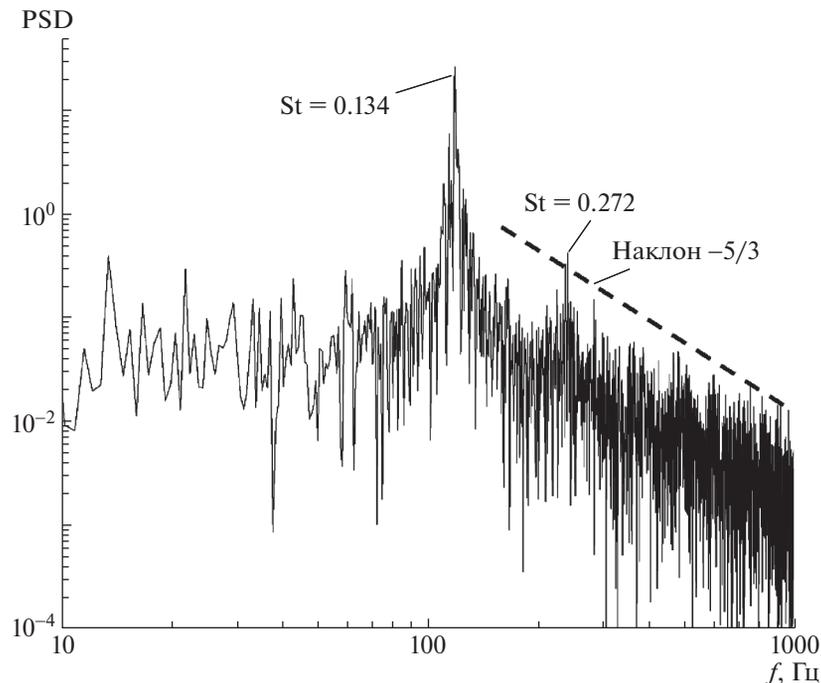


Рис. 3. Функция спектральной плотности (PSD) z -компоненты скорости в точке $x/D = 2$, $z/D = 2$, $y = 0$.

вектора скорости генерировались при помощи метода взаимной корреляции между двумя последовательными изображениями частиц, основанного на быстром преобразовании Фурье. Размер окна опроса составлял 32×32 пикселя с перекрытием в 50% для каждого набора условий эксперимента. Более подробно измерения методом PIV описаны в предыдущей работе [30].

2. ВАЛИДАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для валидации численных результатов по рассчитанным зависимостям z -компоненты скорости от времени определяли функцию спектральной плотности мощности, значения которой сравнивались с опубликованными экспериментальными результатами. На рис. 3 представлена функция спектральной плотности для z -компоненты скорости в точке $x/D = 2$, $z/D = 2$, $y = 0$, которая находится в соответствии с результатами работы [22]. Наиболее заметный пик наблюдается на частоте 118 Гц, что соответствует числу Струхаля 0.134 ($St = fD/U$) и представляет собой частоту срыва вихрей с тела. Второй пик в спектре имеет место при $St = 0.272$, что примерно в два раза больше, чем частота первого пика. Штриховая линия на рис. 3 показывает, что в диапазоне высоких частот спектральная плотность подчиняется степенному закону с показателем $-5/3$. Эти наблюдения хорошо согласуются с результатами предыдущих экспериментальных и численных исследований [16, 22], касающихся течений в следе за квадратным цилиндром.

В табл. 2 представлены экспериментальные и численные (полученные методом LES) данные по среднему коэффициенту сопротивления \bar{C}_d и числу Струхаля St для гладкого квадратного цилиндра. Можно видеть, что значение \bar{C}_d , полученное в данной работе, очень близко к экспериментальному результату работы [24], но несколько больше, чем в работах [26, 31, 32]; отклонение не превышает 7.2%. Что касается числа Струхаля, можно видеть, что полученное значение хорошо согласуется с данными из литературы. Для дальнейшей валидации численных решений проводилось сравнение средней продольной компоненты скорости для квадратного волнистого цилиндра, полученной в PIV-эксперименте, с результатами LES-моделирования при одинаковых условиях. Как следует из данных на рис. 4, пространственное распределение этой величины, полученное в расчете, весьма схоже с экспериментальными результатами; в обоих случаях отрывная область за волнистым цилиндром имеет овальную форму. На рис. 5 представлены осредненные по времени расчетные и экспериментальные профили продольной скорости для положений $x/D = 2$ и $x/D = 3$ в поперечной плоскости xu . Вблизи от тела ($x/D = 2$) результаты LES-расчета

Таблица 2. Средний коэффициент давления и число Струхалия при обтекании гладкого квадратного цилиндра

Вариант	Метод	Re	\bar{C}_d	St
Данная работа	LES	23 500	2.25	0.134
[16]	LES	23 500	2.346	0.139
[31]	LES	22 000	2.16	0.132
[24]	Эксперимент	22 000	2.24	0.130
[22]	Эксперимент	23 500	/	0.140
[32]	Эксперимент	22 000	2.10	0.130
[26]	Эксперимент	21 400	2.10	0.130

несколько занижают величину продольной скорости в точках, соответствующих положениям геометрических узлов (т.е. $y = 2.2$ и $y = 7.8$), по сравнению с экспериментом. Ниже по потоку в следе ($x/D = 3$) всюду имеет место хорошее согласование с экспериментальными результатами.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы гладкого и волнистого квадратных цилиндров

Для изучения влияния волнистости передней кромки на сопротивление и подъемную силу квадратного цилиндра представлены зависимости коэффициентов сопротивления и подъемной силы от времени для гладкого и волнистого цилиндров. Как видно на рис. 6, средние значения коэффициентов сопротивления в этих двух случаях составляют 2.25 и 1.67 соответственно. Таким образом, достигнуто снижение силы сопротивления, действующей на волнистый цилиндр, на 27% при значительном уменьшении амплитуды пульсаций сопротивления. Среднеквадратичные значения коэффициентов сопротивления гладкого и волнистого цилиндров равны 0.17 и 0.024 соответственно. Коэффициенты подъемной силы гладкого и волнистого цилиндров представлены на рис. 7. В случае гладкого цилиндра наблюдается периодическое изменение коэффициента подъемной силы, связанное со срывом вихрей в ближний след. Однако пульсации подъемной силы в случае волнистого квадратного цилиндра не обнаруживают столь очевидной периодичности. Помимо того, для волнистого цилиндра имеет место значительное снижение коэффициента подъемной силы, сопровождаемое уменьшением среднеквадратичного уровня пульсаций на 98%. Эти результаты аналогичны результатам численного исследования [16], где

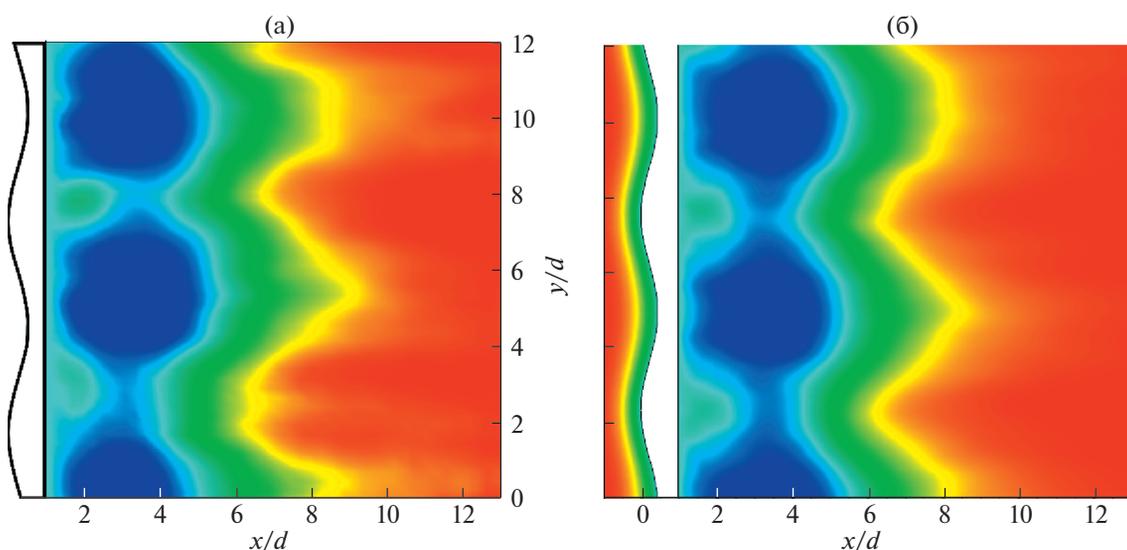


Рис. 4. Осредненные по времени распределения продольной скорости при числе Рейнольдса 1553. Эксперимент (а) и численный расчет (б).

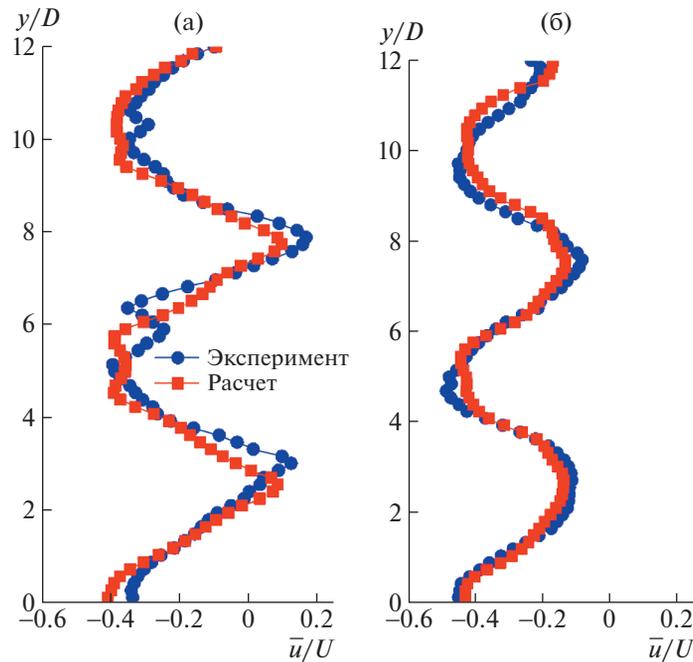


Рис. 5. Профили осредненной по времени продольной скорости при $x/D = 2$ и $x/D = 3$.

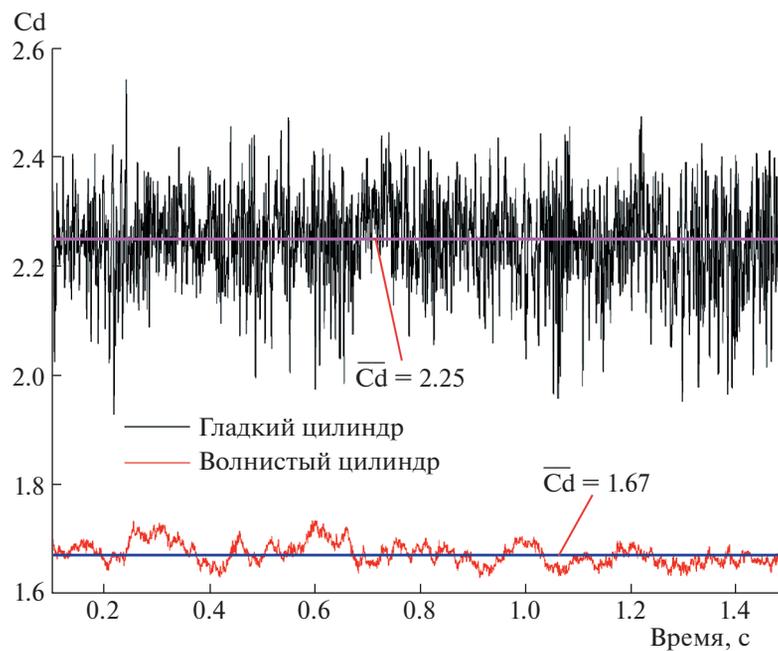


Рис. 6. Зависимость от времени коэффициента сопротивления гладкого и волнистого квадратных цилиндров.

получено уменьшение этого уровня на 95% для волнистого квадратного цилиндра с длиной волны $2.4D$. Уменьшение коэффициентов сопротивления и подъемной силы для волнистого квадратного цилиндра свидетельствует об ослаблении процесса срыва вихрей и может быть полезно в инженерной практике.

3.2. Поля течения, осредненные по времени

В настоящей работе получены статистические данные по 120 циклам срыва вихрей. Характерные структуры течений анализируются по картинам линий тока и распределениям скорости и

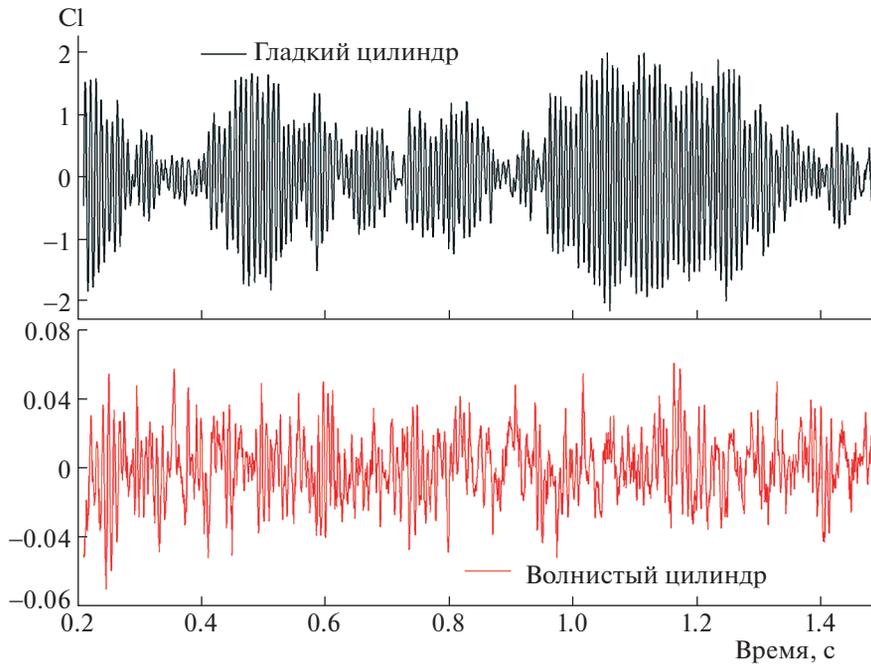


Рис. 7. Зависимость от времени коэффициента подъемной силы гладкого и волнистого квадратных цилиндров.

завихренности. На рис. 8 построены осредненные во времени трехмерные линии тока и распределения вертикальной скорости для гладкого и волнистого цилиндров. Здесь изоповерхности соответствуют средней по времени вертикальной скорости, а цветовая палитра на линиях тока представляет продольную скорость. На рис. 8а четко видна область отрыва, характеризующаяся вихревыми парами, вытянутыми в продольном направлении, что указывает на преимущественно двумерный характер течения. В случае волнистого цилиндра (рис. 8б) область отрыва сдвинута ниже по потоку и имеет синусоидальную форму, что указывает на трехмерную структуру следа за телом. Как для гладкого, так и для волнистого цилиндра средняя по времени вертикальная скорость является антисимметричной по отношению к центральной поперечной плоскости, что указывает на образование оторвавшихся сдвиговых слоев. Изоповерхности для волнистого цилиндра отличаются сильными изменениями в поперечном направлении, тогда как соответствующие изоповерхности для гладкого цилиндра имеют двумерный характер в направлении размаха. Вне области отрыва за волнистым цилиндром вертикальная скорость меняет знак около положения узла. Это говорит о перетекании потока между основным течением и течением в следе за положением узла, что приводит к сужению и укорачиванию области возвратного течения, как показано на рис. 8б. На рис. 9 изображена трехмерная отрывная область в виде изоповерхностей средней по времени скорости течения с $\bar{u} = 0$ для обоих цилиндров. Двумерные линии тока нанесены на средней поперечной плоскости. На рис. 9б четко различается трехмерная овальная область отрыва, простирающаяся дальше вниз по потоку, чем аналогичная область за гладким квадратным цилиндром (рис. 9а). По сравнению с отрывной областью за узлом, область отрыва за седлом расширена и в продольном, и вертикальном направлении, что говорит о трехмерном характере течения, обусловленном волнистой кромкой. Далее интересно отметить, что за положением узла имеется область с ненулевым распределением продольной скорости. Это означает, что отрывная область в окрестности узла возникает позже, чем в окрестности седла. Для дальнейшего исследования трехмерной структуры течения, обусловленной волнистой передней кромкой, на рис. 10 построены изоповерхности поперечной компоненты скорости. Несмотря на проведенное осреднение по 125 циклам срыва вихрей, распределение поперечной скорости в области отрыва за гладким квадратным цилиндром носит случайный характер (рис. 10а). Это, возможно, объясняется нестационарностью мелкомасштабных турбулентных пульсаций за гладким цилиндром. В случае волнистого цилиндра, как показано на рис. 10б, четко распознаются периодические повторения значений поперечной скорости, соответствующие геометрическим положениям узлов и седел, что указывает на наличие дополнительных поперечных течений, обуслов-

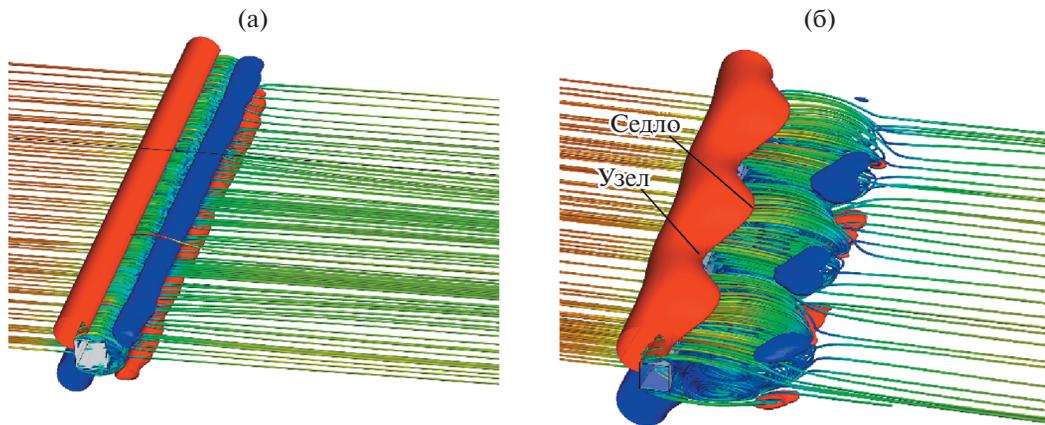


Рис. 8. Трехмерные, осредненные по времени линии тока и распределения вертикальной скорости для гладкого (а) и волнистого (б) квадратных цилиндров.

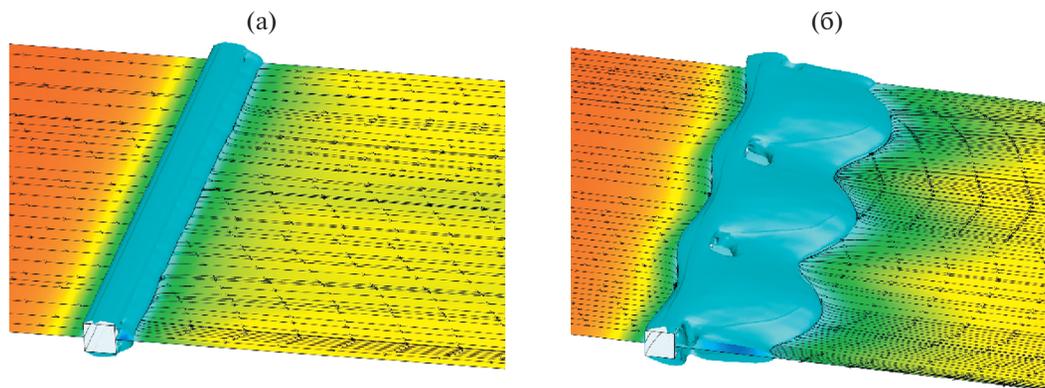


Рис. 9. Изолинии осредненной по времени продольной скорости и двумерные линии тока для гладкого (а) и волнистого (б) квадратных цилиндров.

ленных волнистостью передней кромки. В результате между положениями узла и седла образуется интенсивное сдвиговое течение, примыкающее к поверхности.

На рис. 11 представлены двумерные осредненные по времени картины линий тока при обтекании гладкого и волнистого квадратных цилиндров в продольной плоскости. В случае гладкого цилиндра результаты приведены в центральной по размаху плоскости, а для волнистого цилиндра, как показано на рис. 1, плоскости, в которых представлены результаты, проходят через узел, седло и середину интервала между ними. Во всех случаях наблюдаются крупномасштабные вихревые пары с хорошо выраженными фокусами ($F1$, $F2$) и седловыми точками ($S1$). Очевидно, что в случае волнистого цилиндра длина образующегося вихря (расстояние от центра до седловой точки) много больше, чем в случае гладкого цилиндра. В плоскости, содержащей узел на поверхности волнистого цилиндра (рис. 11б), топология линий тока четко указывает на наличие седловой точки ($S2$). Это означает, что область отрыва отодвигается дальше от положения узла вниз по потоку, что является благоприятным фактором для снижения сопротивления. Задержку отрыва можно объяснить антисимметричным распределением поперечной скорости в окрестности узла, благодаря которому импульс примыкающего течения переносится внутрь плоскости, содержащей узел. Помимо того, при переходе из плоскости узла в плоскость седла наблюдается изменение длины и ширины следа, что опять-таки подтверждает трехмерный характер следа за волнистым квадратным цилиндром.

Для дальнейшего изучения структуры течения, обусловленной волнистой передней кромкой, построены осредненные линии тока и изолинии завихренности в продольной и поперечной плоскостях (xu и uz). Как показано на рис. 12, имеют место симметричные вертикальные вихре-

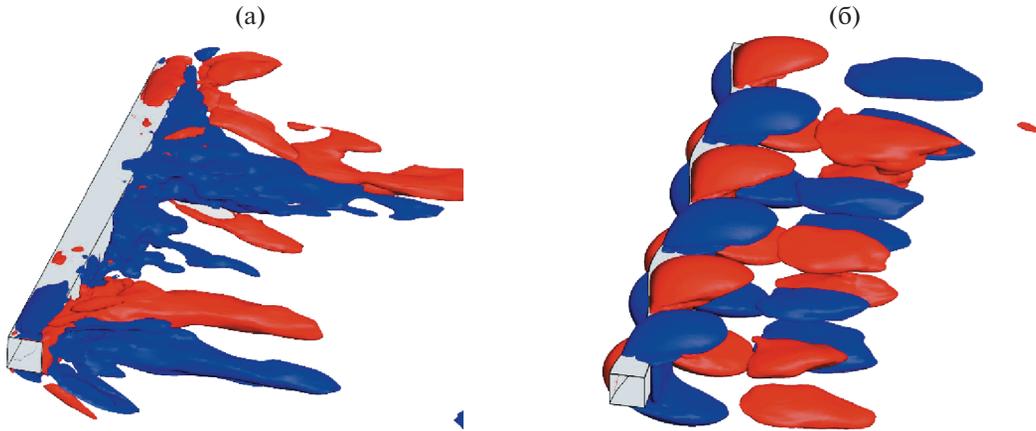


Рис. 10. Изолинии осредненной по времени поперечной скорости для гладкого (а) и волнистого (б) квадратных цилиндров.

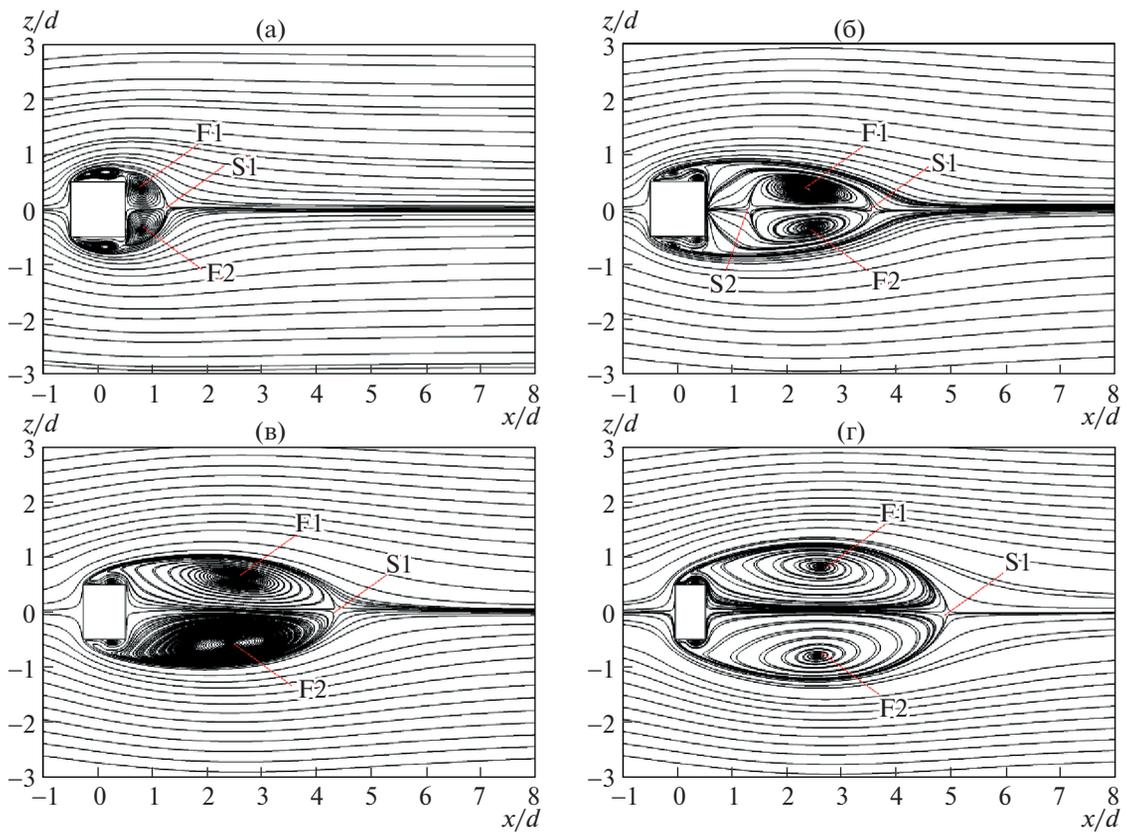


Рис. 11. Двумерные, осредненные по времени картины линий тока для гладкого и волнистого квадратных цилиндров в продольных плоскостях; гладкий цилиндр (а), плоскость узла (б), срединная плоскость (в), плоскость седла (г).

вые пары с противоположным направлением вращения относительно положений узлов. В центральной поперечной плоскости (рис. 12а) вихревые пары образуются непосредственно за задней поверхностью волнистого квадратного цилиндра; они способствуют задержке образования области отрыва за положением узла. Это наблюдение согласуется с осредненной картиной линий тока на рис. 11б. За исключением центральной поперечной плоскости, вихревые пары стремятся расширяться в направлении седла, в результате чего область отрыва в окрестности седла

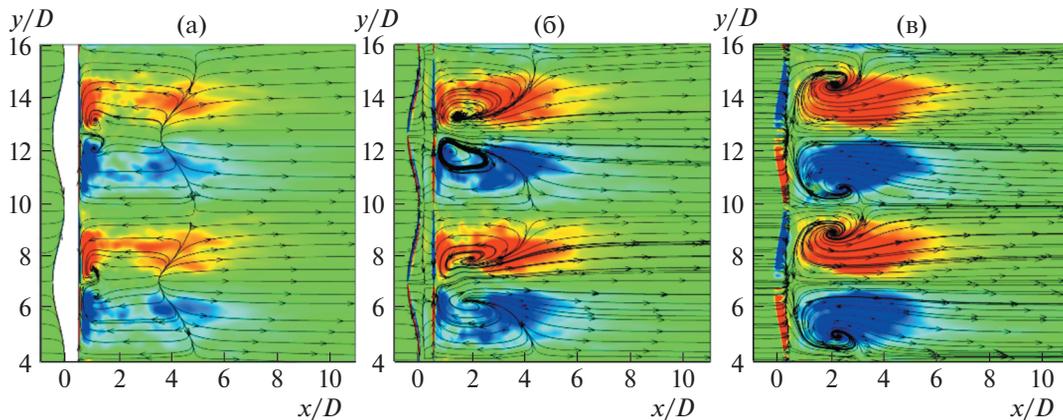


Рис. 12. Двумерные, осредненные по времени картины линий тока и изолинии вертикальной завихренности для волнистого квадратного цилиндра в продольных плоскостях $z/D = 0$ (а), $z/D = 0.5$ (б), $z/D = 0.6$ (в).

оказывается длиннее, как показано на рис. 12б и 12в. Аналогично распределению вертикальной вихревой структуры, представленной на рис. 12, продольные вихревые пары, вращающиеся в противоположных направлениях, существуют и в поперечных плоскостях (рис. 13). Эти вихревые пары генерируют течение вниз по потоку за узлами и течение вверх по потоку за седлами. В результате ширина следа уменьшается за положениями узлов и растет в областях за седлами. Эта картина течения в продольной и поперечной плоскостях говорит о том, что за волнистым квадратным цилиндром формируются дополнительные вертикальные и продольные вихревые структуры, в целом составляющие трехмерный вихрь вдоль размаха тела.

3.3. Мгновенные структуры течения и частотные характеристики

Для выявления структур течения за гладким и волнистым круговыми цилиндрами типичные трехмерные вихревые структуры были идентифицированы на основе Q -критерия. На рис. 14 представлены изоповерхности, соответствующие $Q = 1200$, окрашенные в соответствии со значениями поперечной завихренности. В случае гладкого цилиндра (рис. 14а) изоповерхность демонстрирует разнесенный характер вихревой дорожки Кармана, имеющей преимущественно двумерный характер в поперечном направлении (вдоль размаха). В случае волнистого цилиндра (рис. 14б) разнесенный характер течения существенно ослабляется, что свидетельствует о подавлении процесса срыва вихрей. Далее следует заметить, что в этом случае в определенных положениях вдоль размаха тела существуют поперечные вихри. По сравнению со случаем гладкого цилиндра эти вихри более устойчивы и способствуют смещению крупномасштабных вихрей, препятствуя сворачиванию сдвигового слоя в вихревую дорожку. Это может считаться причиной замедленного формирования вихрей за волнистым цилиндром. На рис. 15 построены мгновенные поля завихренности и картины линий тока за гладким и волнистым цилиндрами в продольных плоскостях. В случае гладкого цилиндра (рис. 15а) нижний сдвиговый слой сворачивается сразу же за задней поверхностью цилиндра, в то время как верхний сдвиговый слой начинает двигаться в обратном направлении. В результате в верхнем и нижнем сдвиговых слоях генерируются вихревые пары Кармана с противоположным направлением вращения. Это говорит об асимметричном характере срыва вихрей с гладкого квадратного цилиндра, что согласуется с классическим процессом срыва вихрей по Карману. В случае волнистого цилиндра (рис. 15б–г) сорвавшийся сдвиговый слой является симметричным относительно центральной линии следа. Внутри сдвигового слоя мелкомасштабные вихревые пары, образовавшиеся под действием волнистой передней кромки, стремятся одновременно сорваться с поверхности тела, свидетельствуя о симметричном характере срыва вихрей в ближний след. Однако симметричный срыв вихрей пропадает ниже по потоку (например, при $x = 3$ в срединной плоскости, рис. 15в), где крупномасштабный вихрь начинает сворачиваться вверх или вниз в вихревую дорожку. Эти вихревые пары играют роль в предотвращении взаимодействия между верхними и нижними сдвиговыми слоями в ближнем следе. Подобная симметричная вихревая структура в ближнем следе, очевидно, связана с уменьшением коэффициентов сопротивления и подъемной силы вол-

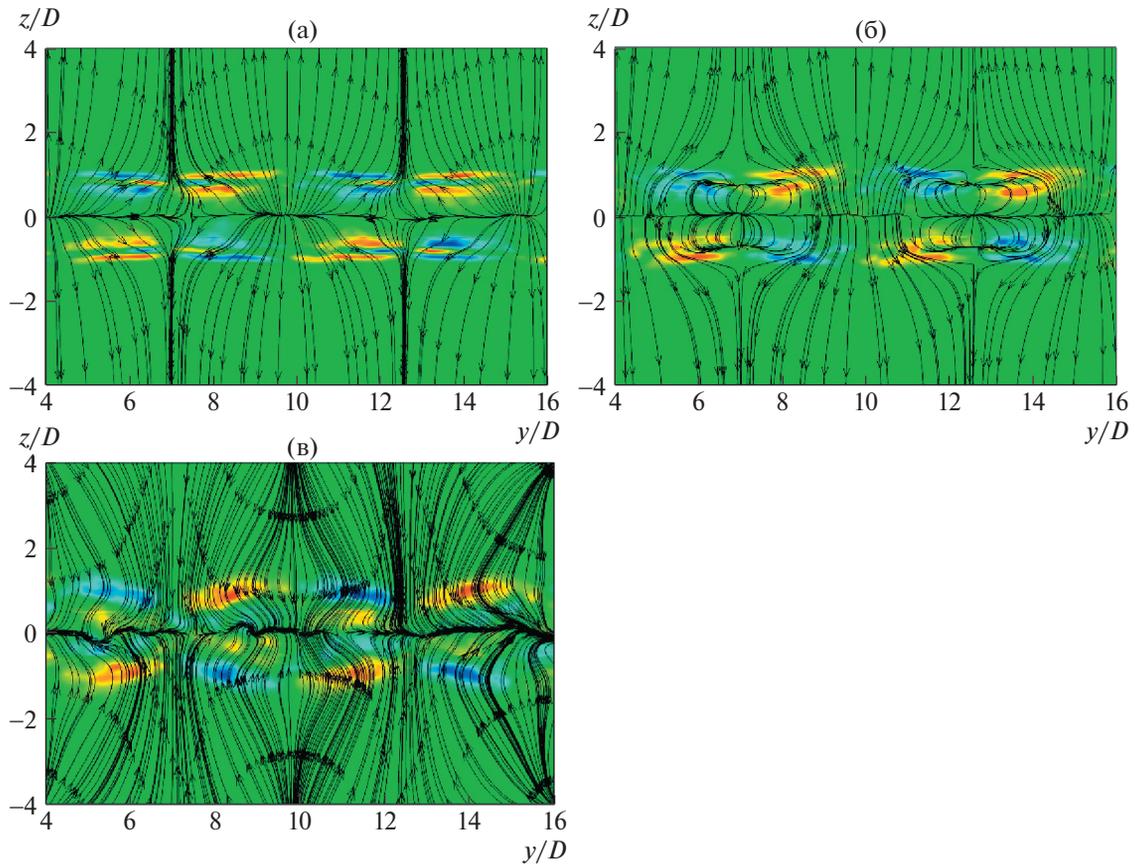


Рис. 13. Двумерные, осредненные по времени картины линий тока и изолинии продольной завихренности для волнистого квадратного цилиндра в поперечных плоскостях $x/D = 1$ (а), $x/D = 2$ (б), $x/D = 3$ (в).

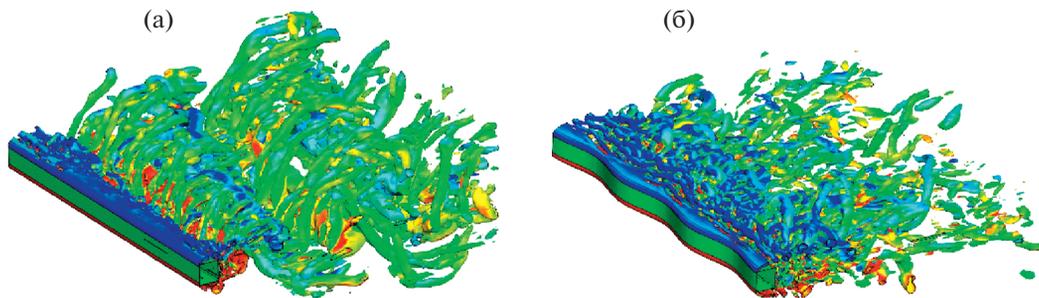


Рис. 14. Типичные трехмерные вихревые структуры для гладкого (а) и волнистого (б) квадратных цилиндров, определенные по Q-критерию.

нистого квадратного цилиндра. Далее стоит заметить, что процессы срыва в след не синхронны в плоскостях узлов и седел, что указывает на смещение вихревой структуры.

Для исследования картины срыва вихрей за гладким и волнистым цилиндрами также использовалось непрерывное вейвлет-преобразование (CWT) с материнским вейвлетом типа “сомбре-ро”. Этот метод позволяет получить временную и спектральную информацию в характерных точках в продольных плоскостях. Результаты представлены в виде вейвлет-коэффициентов в плоскостях “время–частота”. На рис. 16 эти коэффициенты представлены в точках $x/D = 0.8$, $z/D = 4.3$ для гладкого цилиндра; $x/D = 1.1$, $z/D = 4.4$ в плоскости узла; $x/D = 2.0$, $z/D = 4.5$ в средней плоскости и $x/D = 2.5$, $z/D = 4.7$ в плоскости седла; эти точки расположены приблизительно на пути вихря. В нижней части каждого рисунка приведена зависимость пульсирующей

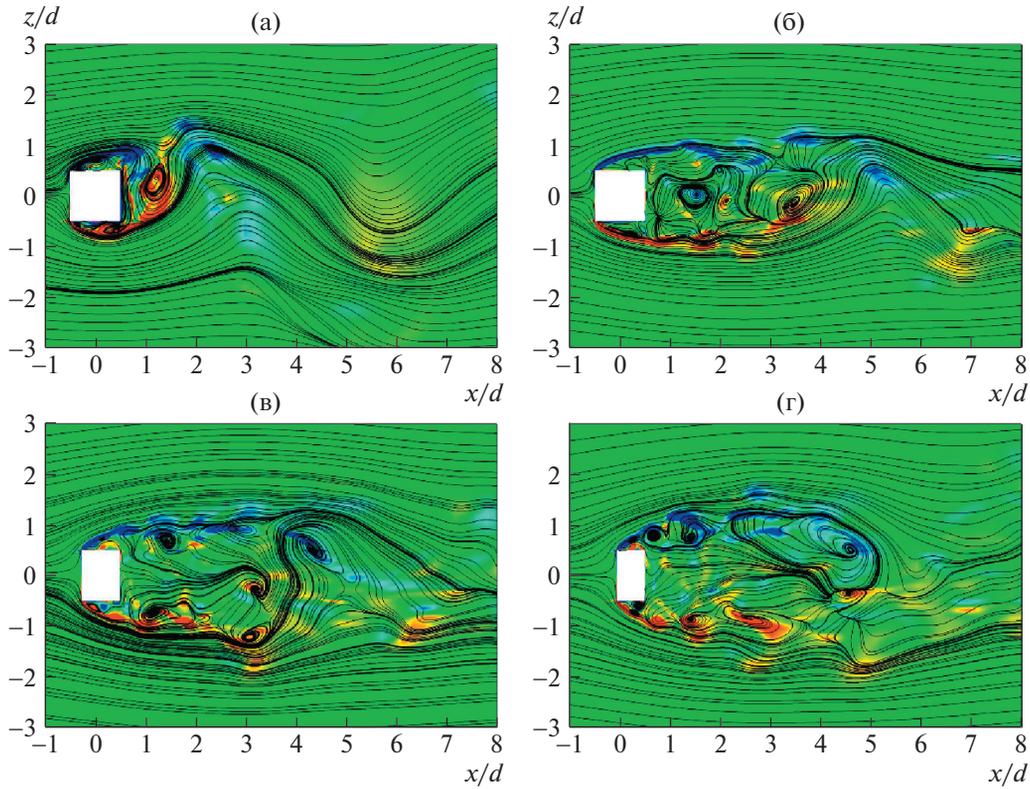


Рис. 15. Мгновенные распределения завихренности и картины линий тока для гладкого и волнистого квадратных цилиндров в продольных плоскостях; гладкий цилиндр (а), плоскость узла (б), срединная плоскость (в), плоскость седла (г).

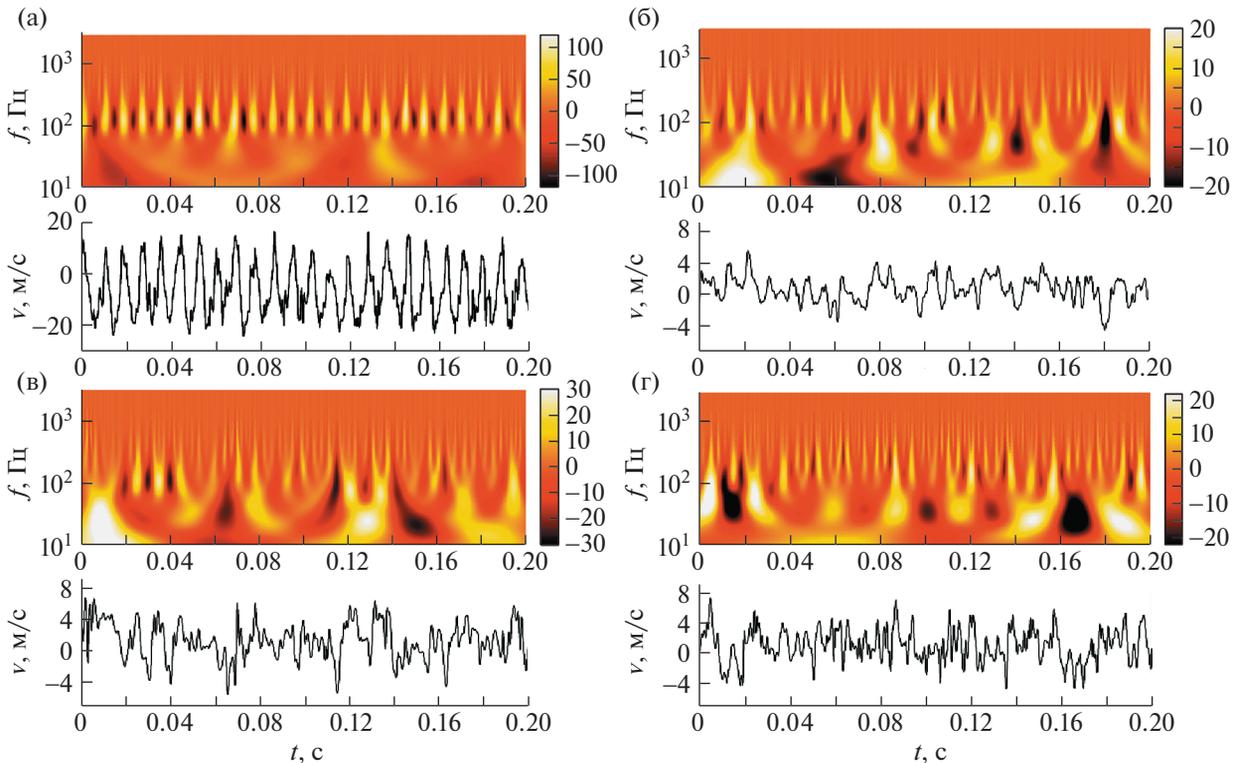


Рис. 16. Частотно-временные распределения для гладкого и волнистого квадратных цилиндров в характерных точках: (а) $x/D = 0.8, z/D = 4.3$, гладкий цилиндр; (б) $x/D = 1.1, z/D = 4.4$, плоскость узла; (в) $x/D = 2.0, z/D = 4.5$, срединная плоскость; (г) $x/D = 2.5, z/D = 4.7$, плоскость седла.

скорости от времени для соответствующей точки. Как видно из рис. 16а, альтернативные положительные и отрицательные пики, соответствующие квазипериодическому изменению пульсирующей скорости, появляются на частоте около 120 Гц, что согласуется с результатами для функции спектральной плотности мощности, представленными на рис. 3. Очевидно, эта частота связана со срывом крупномасштабного вихря с гладкого цилиндра. В диапазоне относительно высоких частот ($f > 200$ Гц) между положительными и отрицательными пиками наблюдаются небольшие полоски, указывающие на существование мелкомасштабных структур течения. По сравнению со случаем гладкого цилиндра зависимости от времени (рис. 16б–г) не проявляют ярко выраженной периодичности, что говорит об ослаблении регулярных пульсаций течения под действием волнистой передней кромки. Что касается частотно-временного распределения, в случае волнистого цилиндра можно отметить уменьшение пиковой частоты, что указывает на относительно стационарное течение в следе. Это можно объяснить смещением вихря за волнистым цилиндром. В диапазоне относительно высоких частот небольшие полоски появляются чаще, чем в случае гладкого цилиндра, указывая, что мелкомасштабные пульсации усиливаются волнистой передней кромкой. Это может быть обусловлено симметричным вихрем в ближнем следе, способствующим разрушению крупномасштабного вихря и его превращению в мелкомасштабные вихревые структуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом крупных вихрей (LES) исследованы трехмерные структуры течения при обтекании и гладкого, и волнистого квадратных цилиндров при числе Рейнольдса 23 500. Валидация результатов осуществлена путем сравнения с известными литературными данными и с результатами измерений методом трассерной визуализации (PIV). Сравнения между результатами для гладкого и волнистого тел проводились по сопротивлению тел, средним и мгновенным полям течения, а также посредством частотно-временного анализа. Численные результаты показывают, что возмущение с длиной волны $5.6D$ существенно изменяет структуру течения в следе и может рассматриваться как фундаментальный параметр в процессе управления течением в турбулентном режиме. Основные результаты могут быть обобщены следующим образом.

1. Волнистая передняя кромка приводит к существенному уменьшению силы сопротивления и подъемной силы, действующих на квадратный цилиндр. Достигнуты уменьшения среднего сопротивления и пульсаций подъемной силы до 27 и 98% соответственно.

2. За волнистым квадратным цилиндром образуется трехмерная овальная область отрыва, значительно изменяющаяся в поперечном (вдоль размаха тела) направлении. Это говорит о трехмерном характере структуры течения в следе. Отрыв потока в окрестности узла происходит позже, чем в окрестности седла, что может быть обусловлено антисимметричным распределением поперечной скорости в окрестности узла, посредством которой импульс течения, примыкающего к поверхности, передается внутрь плоскости узла.

3. Продольные и поперечные вихревые пары, вращающиеся в противоположных направлениях, наблюдаются в поперечных и продольных плоскостях соответственно. Эти вихревые пары приводят к изменениям в ширине и длине области отрыва.

4. Мгновенные трехмерные вихревые структуры за волнистым квадратным цилиндром более устойчивы и способствуют смещению крупномасштабного вихря, препятствуя сворачиванию сдвигового слоя в вихревую дорожку. Двумерные картины течения за волнистым квадратным цилиндром свидетельствуют о симметричном характере срыва в ближний след. Эта симметричная вихревая структура ближнего следа является фактором, предотвращающим взаимодействие между верхним и нижним сдвиговыми слоями в области ближнего следа.

5. В диапазоне низких частот в случае волнистого цилиндра наблюдается снижение доминирующей частоты срыва вихрей, что указывает на относительно стационарное течение в следе. Причиной этому может быть смещение вихря за волнистым квадратным цилиндром. В диапазоне высоких частот небольшие полоски, указывающие на мелкомасштабные пульсации, усиливаются волнистой передней кромкой. Это может быть связано с симметричным вихрем в ближнем следе, способствующим разрушению крупномасштабного вихря и его превращению в мелкомасштабные вихревые структуры.

Янь Чжэн благодарит за финансовую поддержку работы Национальный фонд естественных наук Китая (грант № 11802108), Фундаментальный исследовательский проект Фонда естественных наук Института высшего образования провинции Цзяньсу, Китай (грант № 19KJA510002), Научно-технический проект округа Чанчжоу (грант № CE20205036) и Исследовательский фонд

Головной лаборатории нестационарной аэродинамики и управления течениями Университета аэронавтики и астронавтики Nanjing (грант № KLUAFC-E-202102).

Акира Риносика благодарит за финансовую поддержку работы Национальный фонд естественных наук Китая (гранты № 11721202 и № 11772035).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Y.J., Shao C.P.* Suppression of vortex shedding from a rectangular cylinder at low Reynolds numbers // *J. Fluids Structures*. 2013. V. 43. № 7. P. 15–27.
2. *Chauhan M.K., Dutta S., Gandhi B.K.* Wake flow modification behind a square cylinder using control rods // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 2019. V. 184. P. 342–361.
3. *Kim J., Choi H.* Distributed forcing of flow over a circular cylinder // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. № 3. 033103.
4. *Rathakrishnan E.* Effect of splitter plate on bluff body drag // *AIAA J.* 1999. V. 37. № 9. P. 1125–1126.
5. *Lam K., Lin Y.F.* Effect of wavelength and amplitude of a wavy cylinder in cross flow at low Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 620. P. 195–220.
6. *Williamson C.H.K.* Vortex dynamics in cylinder wake // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1996. V. 28. P. 477–539.
7. *Robichaux J., Balachandar S., Vanka S.P.* Three-dimensional floquet instability of the wake of square cylinder // *Phys. Fluids*. 1999. V. 11. № 3. P. 560–578.
8. *Naghib-Lahouti A., Lavoie P., Hangan H.* Wake instabilities of a blunt trailing edge profiled body at intermediate Reynolds numbers // *Exp. Fluids*. 2014. V. 55. № 7. 1779.
9. *Luo S.C., Tong X.H., Khoo B.C.* Transition phenomena in the wake of a square cylinder // *J. Fluids Structures*. 2007. V. 23. P. 227–248.
10. *Ryan K., Thompson M.C., Hourigan K.* Three-dimensional transition in the wake of elongated bluff bodies // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 538. P. 1–29.
11. *El-Gammal M., Hangan H.* Three-dimensional wake dynamics of a blunt and divergent trailing edge airfoil // *Exp. Fluids*. 2008. V. 44. № 5. P. 705–717.
12. *Lam K., Lin Y.F., Zou L., Liu Y.* Investigation of turbulent flow past a yawed wavy cylinder // *J. Fluids Structures*. 2010. V. 26. № 7–8. P. 1078–1097.
13. *Zhang W., Daichin, Sang J.L.* PIV measurements of the near-wake behind a sinusoidal cylinder // *Exp. Fluids*. 2005. V. 38. № 6. P. 824–832.
14. *New T.H., Shi S., Liu Y.* On the flow behaviour of confined finite-length wavy cylinders // *J. Fluids Structures*. 2015. V. 54. P. 281–296.
15. *Naghib-Lahouti A., Doddipatla L.S., Hangan H.* Secondary wake instabilities of a blunt trailing edge profiled body as a basis for flow control // *Exp. Fluids*. 2012. V. 52. № 6. P. 1547–1566.
16. *Antiohos A.A., Thorpe G.R.* Effect of aspect ratio of a spanwise sinusoidal profile on the control of turbulent flows around bluff bodies // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 2015. V. 145. P. 237–251.
17. *Lam K., Lin Y.F., Zou L., Liu Y.* Numerical study of flow patterns and force characteristics for square and rectangular cylinders with wavy surfaces // *J. Fluids Structures*. 2012. V. 28. P. 359–377.
18. *Choi H., Jeon W.P., Kim J.* Control of flow over a bluff body // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2008. V. 40. P. 113–139.
19. *Darekar R.M., Sherwin S.J.* Flow past a square-section cylinder with wavy stagnation face // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 426. P. 263–295.
20. *Sheard G.J., Fitzgerald M.J., Ryan K.* Cylinders with square cross-section: wake instabilities with incidence angle variation // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 630. P. 43–69.
21. *Tong X.H., Luo S.C., Khoo B.C.* Transition phenomena in the wake of an inclined square cylinder // *J. Fluids Structures*. 2008. V. 24. P. 994–1005.
22. *Dobre A., Hangan H., Vickery B.J.* Wake control based on spanwise sinusoidal perturbation // *AIAA J.* 2006. V. 44. № 3. P. 485–492.
23. *Dobre A., Hangan H.* Investigation of the three-dimensional intermediate wake topology for a square cylinder at high Reynolds number // *Exp. Fluids*. 2004. V. 37. № 4. P. 518–530.
24. *Bearman P.W., Owen J.C.* Reduction of bluff body drag and suppression of vortex shedding by the introduction of wavy separation lines // *J. Fluids Structures*. 1998. V. 12. P. 123–130.
25. *Oka S., Ishihara T.* Numerical study of aerodynamic characteristics of a square prism in a uniform flow // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 2009. V. 97. P. 548–559.

26. *Mankbadi M.R., Georgiadis N.J.* Examination of parameters affecting large-eddy simulations of flow past a square cylinder // *AIAA J.* 2015. V. 53. № 6. P. 1706–1712.
27. *Lyn D.A., Einar S., Rodi W., Park J.H.* A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 304. P. 285–319.
28. *Murakami S., Mochida A.* On turbulent vortex shedding flow past 2d square cylinder predicted by CFD // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 1995. V. 54–55. P. 192–211.
29. *Lin Y.F., Bai H.L., Alam M.M., Zhang W.G., Lam K.* Effects of large spanwise wavelength on the wake of a sinusoidal wavy cylinder // *J. Fluids Structures.* 2016. V. 61. P. 392.
30. *Zheng Y., Rinoshika H., Zhang D., Rinoshika A.* Analyses on flow structures behind a wavy square cylinder based on continuous wavelet transform and dynamic mode decomposition // *Ocean Eng.* 2020. V. 206. P. 108117.
31. *Lin Y.F., Bai H.L., Alam M.M.* The turbulent wake of a square prism with wavy faces // *Wind. Struct. An Intern. J.* 2016. V. 23. № 2. P. 127–142.
32. *Norberg C.* Flow around rectangular cylinders: Pressure forces and wake frequencies // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 1993. V. 49. № 1–3. P. 187–196.

Перевод с английского М.Г. Лебедева

УДК 533.6.011

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИЙ: ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕЙ С ВОЗДУШНЫМ ЯДРОМ

© 2022 г. М. Prabhu^{a,*}, R. A. Kumar^{a,**}, R. Warriar^{a,***},
B. S. N. V. Mouli^{a,****}, S. Kiran^{a,*****}

^a Department of Mechanical Engineering, Amrita Vishwa Vidyapeetham, Amritapuri, India

*E-mail: prabhumahadev1729@gmail.com

**E-mail: amritanjali.ajith@gmail.com

***E-mail: rajwar31497@gmail.com

****E-mail: vinaymouli1997@gmail.com

*****E-mail: kiransanthosh11@gmail.com

Поступила в редакцию 11.07.2020 г.

После доработки 20.12.2020 г.

Принята к публикации 25.12.2020 г.

Явление возникновения закрученных вихрей с воздушным ядром (воронок) в жидкости, протекающей через цилиндрические баки, может иметь серьезные побочные эффекты во многих инженерных системах. Следовательно, подавление таких вихрей является насущной необходимостью для этих приложений. В настоящей работе исследуется влияние начального вращения на формирования вихрей с различными конфигурациями расположений сливных отверстий, имеющих одинаковый диаметр ($d = 10$ мм), в случае использования многочисленных отверстий. Во всех рассмотренных конфигурациях имеется соосное (центровое) отверстие с круглым поперечным сечением, в общем случае окруженное другими отверстиями (с круглыми сечениями), которые располагаются на одном и том же расстоянии от центра. В настоящей работе явление формирования вихревых воронок изучается при изменении числа окружающих отверстий и эксцентricности их расположения. Истечение может происходить одновременно через одно и большее число окружающих отверстий. Перед началом истечения с помощью закручивания жидкости (40–240 об./мин) столбу жидкости сообщается циркуляционное движение, создаваемое механической мешалкой с электродвигателем, число оборотов которой можно было регулировать. Результаты проведенного исследования показали, что для всех конфигураций расположения сливных отверстий вихрь подавляется при увеличении степени эксцентricности (нецентральности) расположения отверстий и, таким образом, время истечения уменьшается. Результаты исследования также показывают, что центральное отверстие является ключевым фактором для процесса вихреобразования и при меньших значениях эксцентricности расположения отверстий вихрь последовательно подавляется по мере увеличения числа отверстий, окружающих центральное. Все ранее проведенные исследования формирования вихревых воронок, результаты которых доступны в литературе, были выполнены либо с одним или с двумя сливными отверстиями. Исследования истечения жидкости из нескольких отверстий (число сливных отверстий больше двух) до сих пор отсутствовали. Таким образом, текущее исследование, результаты которого представлены в данной работе, является первым исследованием истечения жидкости из нескольких сливных отверстий.

Ключевые слова: вихреобразование, многочисленные отверстия, критическая высота, потеря напора

DOI: 10.31857/S056852812105011X

Истечение вращающегося столба жидкости из сосуда через сливное отверстие, расположенное на дне сосуда, может привести к образованию поверхностной впадины или “кинка” (точки излома) на свободной поверхности. Так, сформированная поверхностная впадина вскоре проникает вертикально вниз сквозь столб жидкости и трансформируется в конусообразный стебель, подобный структуре, достигающей сливного отверстия, которая называется “вихрем с воздушным ядром” (“воздушной вихревой воронкой”) и изображена на рис. 1. Высота столба жидкости, при которой вихревая воздушная сердцевина только-только соприкасается со сливным отвер-

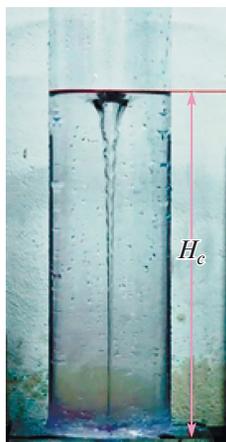


Рис. 1. Фотография типичного вихревого воздушного ядра (воронки).

стием, называется критической высотой или критическим погружением (H_c). Образование такого вихря с воздушным ядром в жидкости, протекающей через цилиндрический резервуар, имеет широкие и первостепенные приложения в аэрокосмической области, литье металлов и при проектировании гидротехнических сооружений. Воздушное ядро, образовавшееся в баках жидкого топлива ракет, загораживает перепускное отверстие и уменьшает расчетный расход топлива, что может отрицательно сказываться на эксплуатационных характеристиках ракетных двигателей. Это воздушное ядро также способно инициировать кавитацию в насосах питания, используемых для перекачки топлива к ракетным двигателям. Подобное развитие кавитации может также происходить в гидравлических приложениях. Образование воздушного ядра во время истечения расплавленного металла может приводить к дефектам в металлических отливках. Из-за столь неприемлемых последствий подавление воздушного ядра в вихре привлекло значительное внимание к исследованию рассматриваемого явления в вышеупомянутых областях инженерных разработок.

Ранее явление образования воздушного ядра в вихре во время истечения жидкости было изучено и изложено в литературе. Экспериментальное исследование [1] было выполнено для жидкости, истекающей из цилиндрического бака, и было найдено, что критическая высота может быть эмпирически связана с отношением плотностей жидкостей и расходом жидкости для истечения двух или большего числа несмешивающихся жидкостей. Для подавления вихревых явлений в [2] было предложено использовать выходное отверстие специальной формы. Было найдено, что ступенчатые сливные отверстия очень эффективны в подавлении образования вихрей по сравнению с колоколообразным раструбом или общепринятым круговым отверстием. В [3] было проведено численное исследование откачки слоистой жидкости из открытого резервуара через отверстие в центре дна бака без закрутки жидкости, полученные результаты согласуются с экспериментом [1]. В [4] была предпринята попытка вывести выражение для скорости вихрей с воздушным ядром в гидравлических водозаборниках. В этой работе были выведены уравнения для касательной, радиальной и осевой скоростей в водозаборниках. В [5] было изучено влияние наклона основания бака на критическое погружение во время образования вихря и было обнаружено, что вихрь полностью подавляется, когда наклон основания превышает некоторое предельное значение, которое зависит от размера сливного отверстия. В [6] было проанализировано образование вихря Рэнкина во время истечения жидкостей из баков квадратного и прямоугольного сечений. Было найдено, что вихреобразование можно подавить за счет использования квадратных и прямоугольных баков вместо общепринятых круглых баков. Было также установлено, что присутствие острых углов на прямоугольных и квадратных сечениях приводит к подавлению вихрей. В [7] было предложено использовать эксцентричное сливное отверстие, чтобы предотвратить явление вихреобразования, когда жидкость истекает из цилиндрических баков. Было найдено, что для полного подавления отношения эксцентricности расположения отверстия к радиусу бака должно быть не менее 0.4. Образование вихря с воздушным ядром было экспериментально исследовано в [8]. Было найдено, что отношение диаметра отверстия к диаметру бака меньше 0.3, поэтому вихреобразование может быть полностью подавлено для концентрических отверстий. В [9] было предложено использовать эксцентричное сливное отвер-

стие, чтобы предотвратить явление вихреобразования, когда жидкость истекает из цилиндрических баков. Было найдено, что отношение диаметров отверстия и бака, необходимое для подавления вихреобразования, является сильно нелинейной функцией эксцентricности расположения отверстия. Влияние многоугольных отверстий на формирование вихря с воздушным ядром было исследовано в [10] и было найдено, что восьмиугольная геометрия является наилучшей для эффективного подавления вихря по сравнению с другими многоугольными отверстиями. Недавно было проведено исследование явления вихреобразования, происходящего, когда жидкость истекает через два отверстия, расположенные на одном и том же расстоянии от центра бака [11]. Было найдено, что процессом вихреобразования можно эффективно управлять и полностью подавить, если взять оба сливных отверстия с равными диаметрами.

Во всех предыдущих исследованиях вихреобразования, за исключением [11], для слива жидкости использовалось только одно отверстие. В экспериментальном исследовании [11] было обнаружено, что два сливных отверстия, расположенные на одинаковых расстояниях от центра бака, могут эффективно управлять процессом образования вихрей. Был сделан вывод, что лучшее подавление вихря может быть достигнуто при использовании двух сливных отверстий по сравнению с эквивалентным одиночным отверстием при одинаковых условиях. В вышеупомянутом исследовании [11] был проигнорирован интересный вопрос: как изменится процесс образования вихрей, если допустить истечение жидкости более чем через два отверстия? Собираясь рассмотреть этот вопрос в настоящем исследовании, были введены многочисленные сливные отверстия (более двух) для исследования истечения вращающегося столба жидкости со следующими целями: 1) изобрести альтернативные конфигурации расположения сливных отверстий, пригодные для эффективного подавления вихрей; 2) оценить, может ли только критическая высота правильно описать и дать количественные характеристики явления вихреобразования. В этой связи в экспериментальной установке были добавлены сливные отверстия вокруг основного соосного (центрального) сливного отверстия.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальная установка и принятая методика эксперимента такие же, как в [9]. Установка состоит из цилиндрического сосуда с внутренним диаметром $D = 96$ мм и высотой 410 мм, изображенного на рис. 2а. Диаметр как центрального соосного, так и окружающих сливных отверстий был выбран равным 10 мм и все эти отверстия были просверлены в акриловом основании, как показано на рис. 3. Акриловое основание было соединено с цилиндрическим стеклянным сосудом с помощью силикагеля. Цилиндрический сосуд был заполнен водой до начальной высоты $H_i = 300$ мм. Мешалка с электродвигателем с переменной скоростью использовалась для сообщения вращения столбу жидкости. В настоящей работе, во все рассмотренных случаях начальная скорость вращения N изменялась от 40 до 240 об./мин. Чтобы обеспечить равномерную угловую скорость у всех жидких частиц, вращение поддерживалось в течение двух минут. После двух минут вращение мешалки останавливалось и мешалка осторожно извлекалась из столба жидкости. Затычки отверстий слива вытаскивались вниз из сосуда одновременно из всех отверстий, чтобы сделать возможным истечение. На рис. 2,б изображен механизм, использованный для одновременного открытия двух отверстий из нескольких возможных при заданной величине эксцентricности ($e/D = 0.438$). Две резиновые пробки присоединялись поводками к металлической рамке, как показано на рис. 2б. Они были вставлены в отверстия слива перед сообщением начального вращения жидкости в сосуде. Для других значений эксцентricности были сделаны подобные открыватели сливных отверстий. После двух минут вращения жидкости нужно приложить некоторую вертикальную силу к рукоятке, чтобы открыть сливное отверстие. Для каждого значения эксцентricности, чтобы открыть одновременно больше отверстий (больше двух), были изготовлены подобные открыватели отверстий с большим числом поводков.

В начальные мгновения истечения впадина, образовавшаяся на поверхности жидкости, проникала внутрь столба жидкости и формировала целиком растущий вихрь с воздушным ядром (воронку с воздушным сердечником) и в тот момент, когда воздушное ядро только-только соприкасалось с отверстием слива, отмечалась *критическая высота* (H_c), как высота свободной поверхности жидкости. Критическая высота измерялась с помощью вертикальной градуированной шкалы, наложенной на внешнюю поверхность цилиндра. Как упоминалось выше, на рис. 1 приведена фотография типичного вихря с воздушным ядром, который образуется в цилиндрическом сосуде во время истечения жидкости, где H_c отмечено как критическая высота. Предыдущие исследователи [8, 9, 11] упоминали, что сильная закрутка (вихреобразование) соответствует

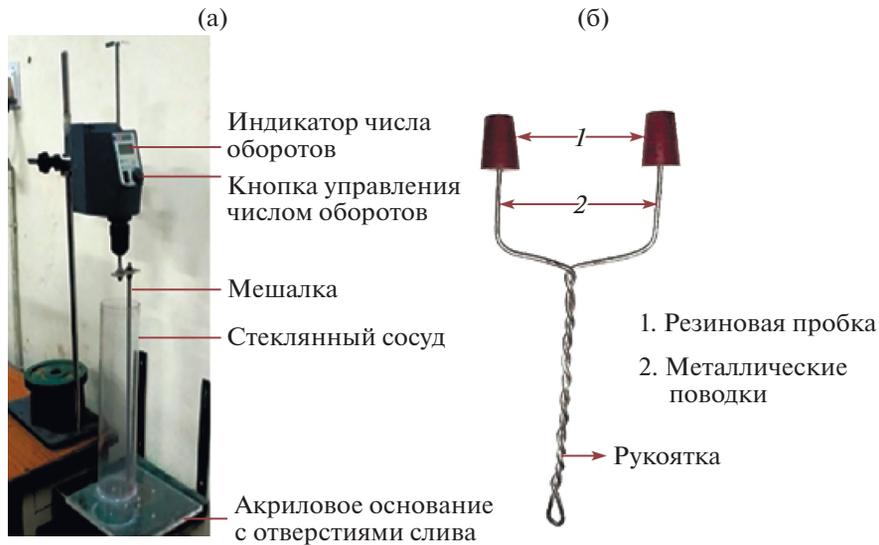


Рис. 2. Экспериментальная установка с механизмом открытия отверстий.

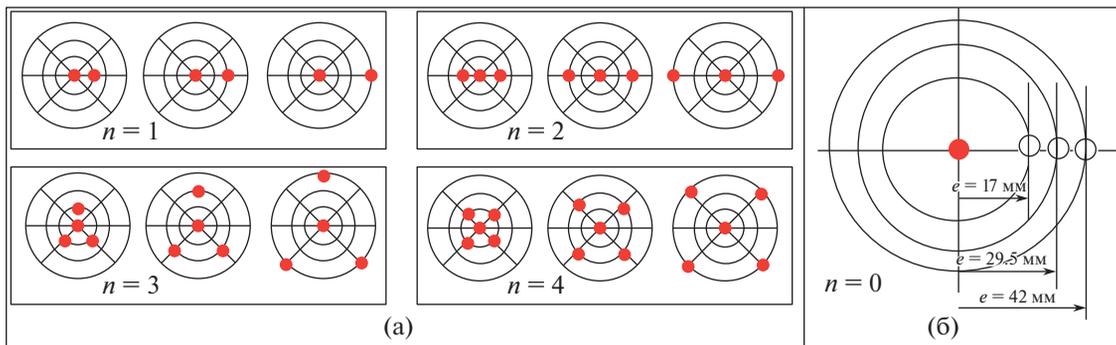
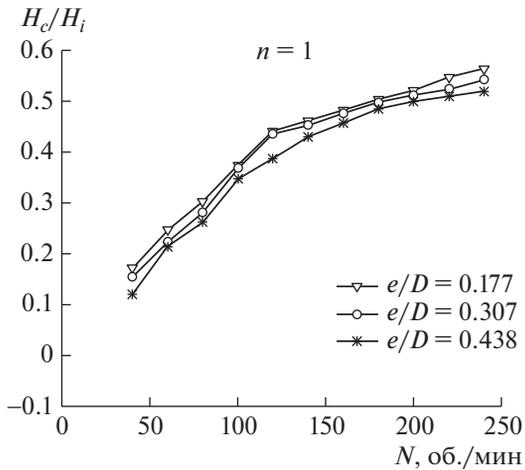
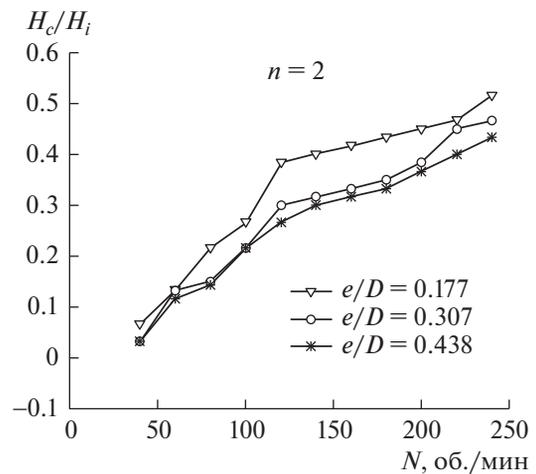
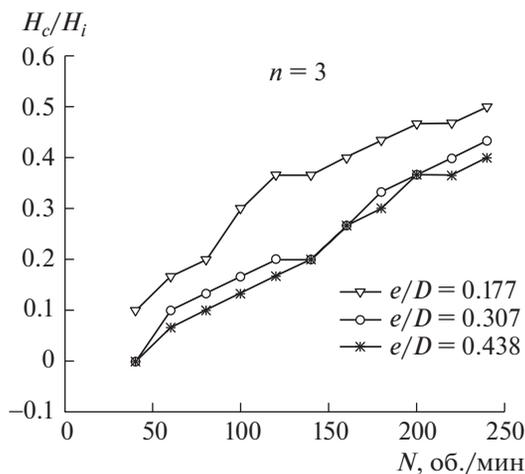
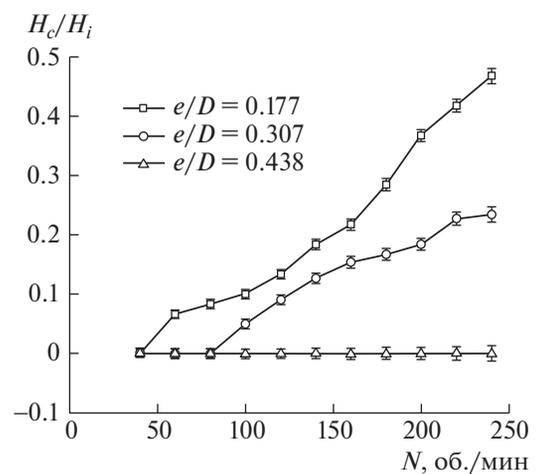


Рис. 3. Изученные конфигурации многочисленных сливных отверстий; красные точки изображают сливные отверстия.

большим значениям критической высоты. В предыдущих исследованиях критическая высота рассматривалась в качестве основного параметра для исследования явления вихреобразования. Время опустошения бака было также измерено с помощью секундомера.

Каждый из экспериментов был повторен 10 раз для обеспечения повторяемости измерений. Для каждой серии экспериментов выполнялись оценки величины стандартного отклонения критической высоты и времени опорожнения сосуда. Согласно проведенным оценкам, разброс измерений этих параметров, а именно, критической высоты и времени опорожнения, составлял 11 и 7% соответственно. Все рассмотренные конфигурации многих отверстий состояли из центрального отверстия слива, окруженного одним или большим числом отверстий. Число окружающих отверстий слива 'n' вокруг центрального отверстия изменяется от 0 до 4 и эти отверстия располагаются на специальных геометрических позициях в основании цилиндрического сосуда (диаметр $D = 96$ мм), как показано на рис. 3. Красные пятна на рис. 3 показывают положения отверстий слива. На рис. 3б изображено эксцентрическое положение окружающих отверстий слива. Расположение окружающих отверстий слива задается величиной эксцентricности, а именно, $e = 17, 29.5$ и 42 мм соответствуют безразмерным значениям эксцентricности $e/D = 0.177, 0.307, 0.438$ соответственно. Случаи группировались по пяти конфигурациям расположения отверстий слива (n), а именно, $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ и $n = 4$, как показано на рис. 3. Конфигурация $n = 0$ соответствует случаю единственного центрального отверстия слива. Эксперименты были проведены с водой при комнатной температуре (28°C).

Рис. 4. H_c/H_i как функция N при $n = 1$.Рис. 5. H_c/H_i как функция N при $n = 2$.Рис. 6. H_c/H_i как функция N при $n = 3$.Рис. 7. H_c/H_i как функция N при $n = 4$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Экспериментальное исследование процесса вихреобразования во время истечения жидкости через многочисленные отверстия при одной и той же эксцентricности ($e/D = 0.177, 0.307$ и 0.438 соответственно) и одинаковом диаметре отверстий ($d = 10$ мм) было проведено на конфигурациях расположения отверстий, изображенных на рис. 3. Полученные результаты приведены на рис. 4–14. Как отмечено выше, предыдущие исследователи рассматривали критическую высоту в качестве основного параметра, чтобы охарактеризовать процесс вихреобразования.

На рис. 4–7 показано изменение безразмерной критической высоты H_c/H_i в зависимости от начальной скорости вращения жидкости в баке (N об./мин). Как можно видеть, в общем случае H_c/H_i возрастает при увеличении начальной скорости вращения; в то же время H_c/H_i становится меньше при росте эксцентricности. На рис. 8–11 построены зависимости безразмерного времени истечения жидкости T_d/T_o от скорости вращения мешалки; здесь T_d – время опорожнения бака при наличии начального вращения жидкости и T_o – время опорожнения бака без такого вращения. Можно видеть, что чем выше скорость вращения, сообщенного жидкости, тем выше значение H_c , что означает более длительное время опорожнения бака (большее значение T_d/T_o). При больших значениях T_d/T_o средняя скорость истечения уменьшается из-за образования вихря. Более того, при заданном значении N , H_c/H_i уменьшается при увеличении e/D , что особенно очевидно для $n = 4$ при больших значениях N (рис. 7). Этот эффект эксцентricности расположения

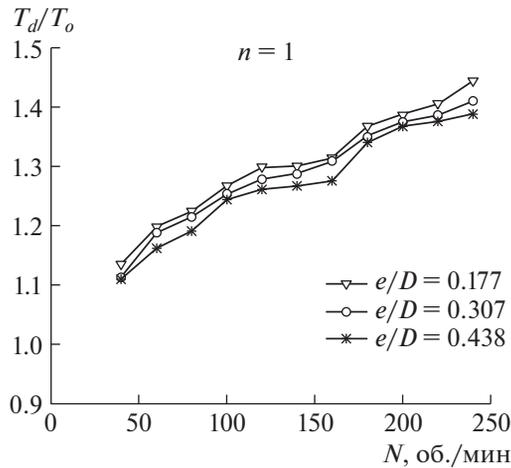


Рис. 8. T_d/T_o как функция N при $n = 1$.

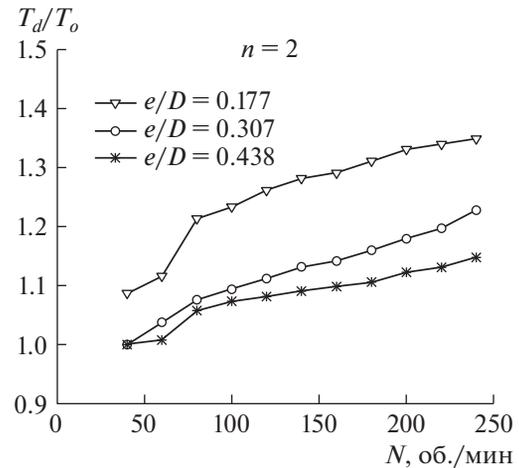


Рис. 9. T_d/T_o как функция N при $n = 2$.

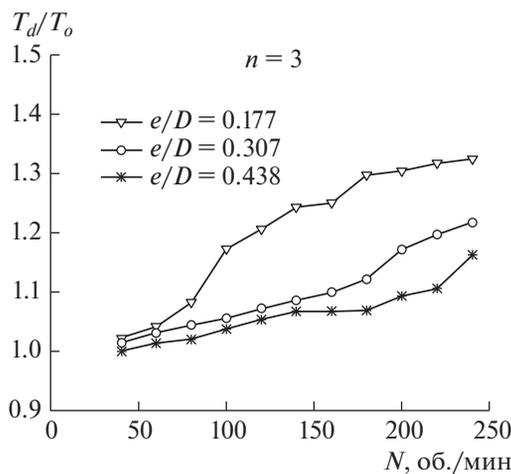


Рис. 10. T_d/T_o как функция N при $n = 3$.

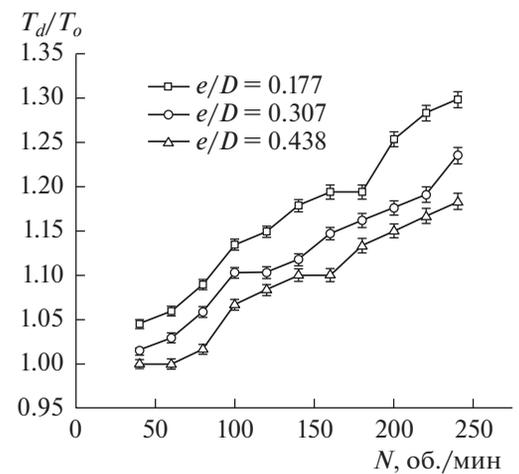


Рис. 11. T_d/T_o как функция N при $n = 4$.

отверстий стока качественно согласуется с результатами предыдущих исследователей [7, 9]. Соответственно, как можно видеть на рис. 8–11, T_d/T_o также уменьшается. Влияние e/D наиболее отчетливо видно на рис. 7 для конфигурации с $n = 4$ при $e/D = 0.438$. Для этой частной конфигурации можно видеть, что критическая высота равна нулю для всех значений начального вращения. Стандартные отклонения измеренных величин, а именно, критической высоты и времени опорожнения, показаны как интервалы ошибок на рис. 7 и 11 соответственно.

Среди всех рассмотренных конфигураций, случай $n = 4$ обеспечил наивысший процент уменьшения (100%) безразмерной критической высоты (рис. 7), за которым следует $n = 3$ (20%, см. рис. 6), $n = 2$ (16.13%, см. рис. 5) и $n = 1$ (7.6%, см. рис. 4), когда e/D изменяется от 0.177 до 0.438 при 240 об./мин. Из этих результатов можно сделать вывод, что более низкие значения критической высоты могут быть достигнуты не только путем увеличения эксцентricности расположения отверстий, но также за счет увеличения числа окружающих сливных отверстий, что очевидно из рис. 12. Рисунок 12 изображает изменение H_c/H_i как функции n для разных значений e/D при $H_i = 300$ мм и $N = 240$ об./мин. При $e/D = 0.177$, когда число сливных отверстий увеличивается от $n = 0$ до $n = 4$, можно получить приблизительно 30% уменьшения критической высоты. Когда нецентральность расположения отверстий возрастает до 0.307 и 0.438, процент уменьшения критической высоты возрастает до 61 и 100% соответственно. На рис. 13а и 13б приведены фотографии вихрей с воздушным ядром как раз в то мгновение, когда они достигли критической

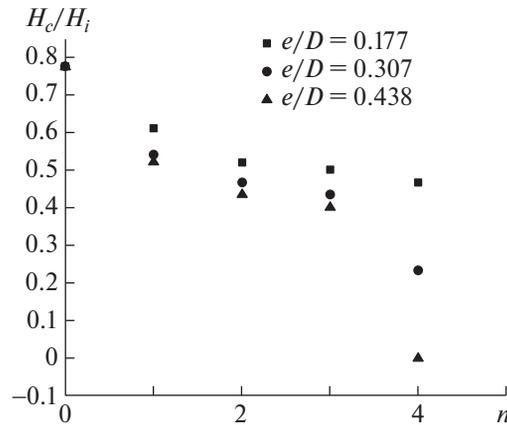


Рис. 12. Изменение H_c/H_i в зависимости от числа сливных отверстий (n).

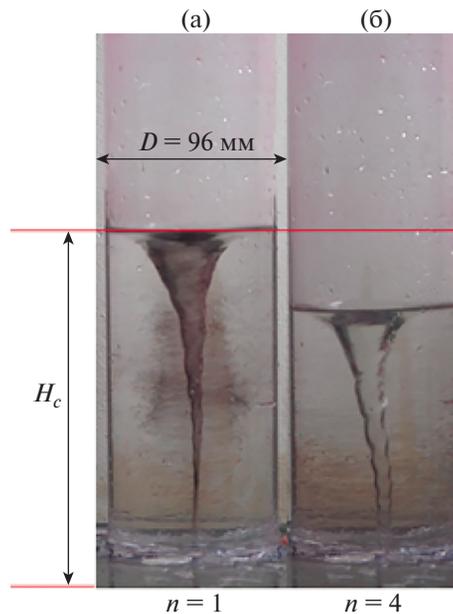


Рис. 13. Формирование критической высоты для конфигураций с $n = 1$ и $n = 4$.

высоты при $n = 1$ и $n = 4$ соответственно при $N = 200$ об./мин и $e/D = 0.177$. Из рис. 13 очевидно, что критическая высота убывает при увеличении числа окружающих отверстий.

Кроме того, из рис. 12 можно видеть, что при $n = 0$ (есть только центральное отверстие) H_c/H_i имеет наибольшее значение и далее, при росте значения n , критическая высота убывает для всех значений e/D . К этому можно добавить, что, согласно экстраполяции, тенденции изменения критической высоты, изображенного на рис. 12, указывают на то, что есть минимальное число окружающих отверстий (n), которые необходимы для уменьшения значения безразмерной критической высоты при заданном отношении e/D . Чтобы прояснить это утверждение, можно указать, что отношение H_c/H_i остается более или менее постоянным (~ 0.55) при $e/D = 0.177$ для $n > 2$, что свидетельствует, о том, что значение критической высоты не может быть доведено до нуля за счет конечного увеличения числа окружающих отверстий. Другими словами, в этом случае для возможного уменьшения критической высоты, ' n ' стремится к бесконечности, что может также означать, что результирующая геометрия отверстий слива асимптотически приближается к некоторому "кольцевому зазору." В то же время при $e/D = 0.307$ графический тренд указывает на то, что критическая высота могла бы быть доведена до нуля, возможно, при $n = 5$. При $e/D = 0.438$,

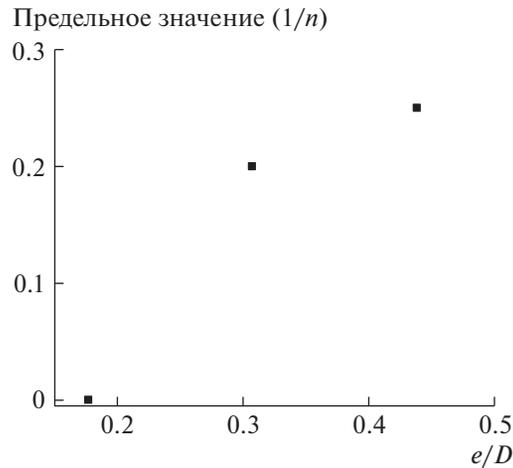


Рис. 14. Изменение предельного значения $(1/n)$ в зависимости от e/D .

как ясно демонстрирует рис. 12 в случае $n = 4$, нет никаких признаков образования вихря с воздушным ядром. На рис. 14 представлены предельные значения величины $1/n$, необходимые, чтобы достичь нулевой критической высоты для каждого отношения e/D . Как показывает данный рисунок, предельное значение $1/n$ возрастает при росте e/D .

Для обсуждения физических аспектов течения в рассматриваемой задаче был проведен анализ потерь гидравлического напора, произошедших во время истечения жидкости, для всех значений начального вращения, эксцентricности расположения и числа отверстий. Скорость жидкости на выходе из сливного отверстия (скорость истечения) в самом начале истечения может быть выражена следующими соотношениями:

$$V_o = \sqrt{2g(H_i - h_o)} = \epsilon_o \sqrt{2gH_i}, \tag{2.1}$$

$$V_d = \sqrt{2g(H_i - h_d)} = \epsilon_d \sqrt{2gH_i}, \tag{2.2}$$

в которых h_i обозначает потерю напора и ϵ – коэффициент потерь, определенный в настоящей работе с нижними индексами o и d , указывающими на отсутствие и наличие вращения жидкости соответственно. Потеря напора, происходящая во время процесса истечения, изменяется при изменении высоты жидкости и включает в себя: *a*) потери напора на входе и выходе из сливного отверстия; *б*) потери напора из-за трения в сливном отверстии; *в*) другие гидравлические потери, которые могут происходить в закрученном потоке (при вращении жидкости). Коэффициенты ϵ_o и ϵ_d отвечают за потери напора, упомянутых выше в пунктах *a*), *б*) и *в*). Говоря более конкретно, в самом начале истечения потери ограничиваются только пунктами *a*) и *б*). По мере развития течения, другие гидравлические потери включаются в картину течения, которая, возможно, видоизменяется во время истечения. Следовательно, коэффициенты ϵ_o и ϵ_d изменяются со временем (в процессе истечения). Таким образом, значения, предписанные для этих коэффициентов потерь, представляют собой усредненные по времени значения в соотношениях (2.3) и (2.4):

$$T_o = \frac{1}{\epsilon_o} \left(\sqrt{\frac{2H_i}{g}} \right) \left(\frac{D^2}{d^2} \right), \tag{2.3}$$

$$T_d = \frac{1}{\epsilon_d} \left(\sqrt{\frac{2H_i}{g}} \right) \left(\frac{D^2}{d^2} \right). \tag{2.4}$$

Эти наборы уравнений были использованы, чтобы найти коэффициенты потерь. Используемые здесь уравнения могут быть выведены из уравнения неразрывности и уравнения Бернулли, которые совпадают с теми, что были использованы в [11].

Когда общее время T_o , которое требуется, чтобы жидкость полностью вытекла из бака в отсутствие начального вращения, и T_d (при наличии начального вращения), измеряется в экспериментах, соответствующие коэффициенты потерь (ϵ_o и ϵ_d) могут быть найдены из соотношений (2.3) и (2.4). Как было указано выше, скорость истечения жидкости из сливного отверстия

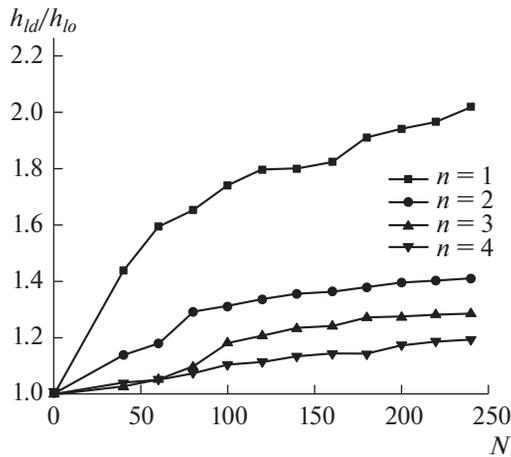


Рис. 15. Изменение h_{id}/h_{lo} в зависимости от N для различных значений n .

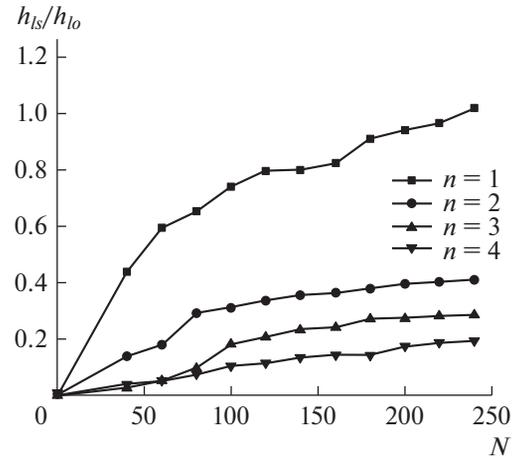


Рис. 16. Изменение h_{ls}/h_{lo} в зависимости от N для различных значений n .

при отсутствии и наличии вращения задается выражениями (2.1) и (2.2) соответственно. Используя соотношения (2.1) и (2.2), из значений коэффициентов потерь можно определить потери напора (h_{lo} и h_{ld}).

Следующее соотношение

$$h_{ld} = h_{lo} + h_{ls} \quad (2.5)$$

определяет связь между h_{lo} и h_{ld} и, следовательно, из (2.5) могут быть найдены потери напора из-за закрутки потока h_{ls} . Все потери обезразмерены делением на h_{lo} . На рис. 15 и 16 приведены графики безразмерных параметров, а именно, h_{ld} и h_{ls} соответственно, как функций N , и на рис. 17 изображена зависимость безразмерной скорости истечения V_d/V_o от N при различных значениях n . Все эти графики построены при $e/D = 0.177$. Для всех других значений эксцентricности расположения отверстий слива подобные тренды не наблюдаются. Для больших значений эксцентricности время опорожнения возрастает с увеличением числа окружающих отверстий, хотя критическая высота уменьшается. Это происходит потому, что при больших значениях e/D ($e/D = 0.307$ и $e/D = 0.438$) гидродинамические потери становятся больше, когда число окружающих отверстий увеличивается.

Из рис. 15 видно, что h_{ld}/h_{lo} возрастает при увеличении N и становится меньше при росте числа отверстий; при $N = 240$ об./мин, для единственного окружающего отверстия ($n = 1$), имеем $h_{ld}/h_{lo} \sim 2.0$. Это показывает, что потери из-за закрутки h_{ls} почти равны h_{lo} . Вследствие соотношения (2.5), это указывает на то, что потери на закрутку возрастают при увеличении N и становятся меньше при росте числа отверстий, как изображено на рис. 16. Чтобы подчеркнуть важный факт для дальнейшего, отметим, что коль скоро жидкость вращается, общие потери (h_{ld}) по большей части определяются потерями на закрутку жидкости. Рисунок 17 изображает изменение безразмерной скорости истечения V_d/V_o в зависимости от N , которое обнаруживает, что уменьшение потерь будет усиливать скорость вытекания. Для некоторого специфического значения n скорость вытекания будет максимальной при самом маленьком начальном вращении. При усилении начального вращения интенсивность вихреобразования увеличивается, что приводит к закупорке сливного отверстия. В свете настоящих результатов можно было бы сделать предположение, что потери на закрутку жидкости, которые проявляются только при наличии начального вращения, являются мерой закупорки сливного отверстия завихренным воздушным ядром.

Рисунок 18 представляет собой график безразмерного времени опорожнения в зависимости от числа окружающих отверстий для различных отношений e/D преимущественно при $N = 240$ об./мин. За исключением случая $e/D = 0.177$, для всех остальных значений e/D время опорожнения увеличивается после $n = 2$. Как указывалось выше, когда число окружающих отверстий возрастает, вихреобразование подавляется при $e/D = 0.177$, на что указывают уменьшение критической высоты (см. рис. 12) и уменьшение времени опорожнения (см. рис. 18). Причина подавления может быть объяснена следующим образом. Следует также отметить, что для этого зна-

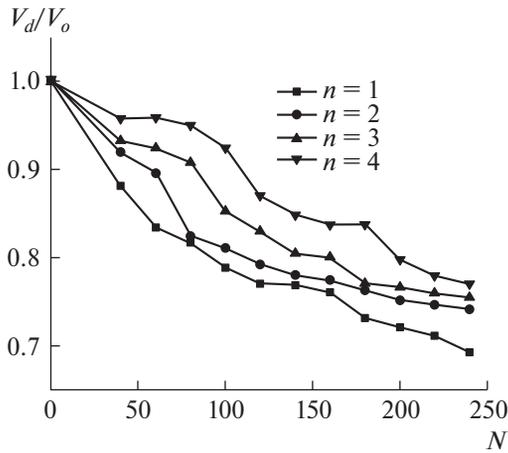


Рис. 17. Изменение V_d/V_o в зависимости от N для различных значений n .

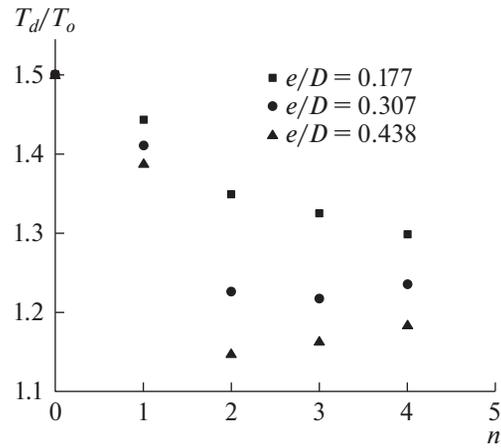


Рис. 18. Изменение T_d/T_o в зависимости от числа сливных отверстий (n) при $N = 240$ об./мин.

чения отношения e/D (равного 0.177) скорость вытекания становится больше при увеличении числа окружающих отверстий (см. рис. 17). Численное исследование, проведенное в [12], позволяет утверждать, что в связи с образованием и подавлением воздушного вихря есть два вида движения жидкости. Первый вид движения связан с приложенным начальным вращением, которое пытается передвинуть жидкость на периферию от оси цилиндра посредством центробежной силы. Это движение будет пытаться усилить образование вихря. Второй вид движения связан с движением жидкости к центру цилиндра, которое пытается подавить образование вихря. Скорость вытекания, заданная соотношением (2.2), непосредственно зависит от радиальной компоненты скорости в силу двумерного уравнения неразрывности (2.6):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial (u_z)}{\partial z} = 0. \tag{2.6}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, t представляет собой временной масштаб течения, \mathbf{u} есть вектор скорости, а нижние индексы r и z обозначают радиальное и осевое направления соответственно.

Из уравнения (2.6) можно заключить, что когда осевая компонента скорости (скорость вытекания) возрастает, радиальная компонента скорости к центру также возрастает. Увеличение радиальной компоненты скорости к центру цилиндра результируется в подавлении воздушного ядра, что отражено на рис. 12 и 18. Для других значений e/D , т.е. $e/D = 0.307$ и 0.438 , время опорожнения увеличивается для значений $n > 2$, как видно на рис. 18 преимущественно при $N = 240$ об./мин, что означает, что средний расход уменьшается, поскольку вихреобразование не подавлено. Большее время опорожнения указывает на более интенсивное образование вихря, что должно обычно соответствовать большей критической высоте. В противоречии с этими ожиданиями критическая высота уменьшается (указывая на подавление вихря) для случая большей эксцентricности при $n > 2$ (рис. 12). Таким образом, тенденции поведения критической высоты и времени опорожнения указывают на противоположные особенности вихреобразования в упомянутых случаях ($n > 2$).

На рис. 19–21 представлено изменение h_{id} , h_b и V_d/V_o в зависимости от N для различных значений e/D . Преимущественно графики построены для $n = 1$. Для других значений n наблюдалась похожая тенденция, и по этой причине в данной работе графики не строились.

В [13] было найдено, что при наличии единственного сливного отверстия, если степень нецентральности расположения отверстий возрастает, критическая высота убывает и достигает минимума при максимальном значении нецентральности отверстий. Причина этого факта может быть следующая. В самом начале истечения ось вращения жидкости совпадает с осью цилиндра, но позже ось вращения жидкости перемещается до тех пор, пока она не совпадет с осью отверстия. В этот момент завихренность резко усиливается градиентом продольного течения, и свободная поверхность жидкости опускается вниз. В настоящем исследовании также отмечается уменьшение критической высоты при увеличении нецентральности расположения отверстий.

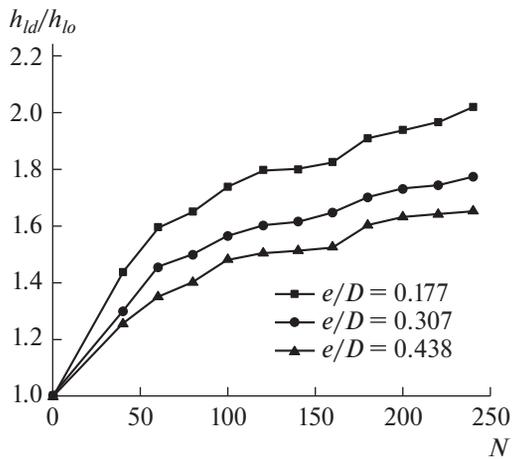


Рис. 19. Изменение h_{id}/h_{lo} в зависимости от N для различных значений e/D .

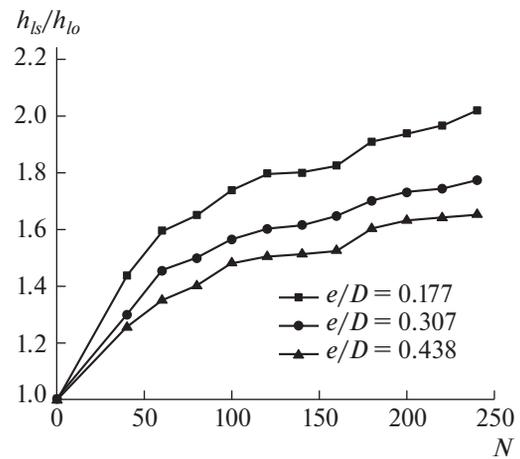


Рис. 20. Изменение h_{ls}/h_{lo} в зависимости от N для различных значений e/D .

На рис. 22а–22в представлены фотографии изменения во времени вихревого воздушного ядра (воронки), которые соответствуют временам истечения 3, 5 и 9 с соответственно во время истечения сквозь многочисленные отверстия с $n = 2$ при $N = 220$ об./мин. В начале истечения чайная труба была добавлена к столбу жидкости, чтобы проследить движение жидких частиц и такое движение можно ясно видеть на рис. 22а. Вихревое воздушное ядро, видимое на рис. 22, показывает, что концентрация завихренности происходит только вдоль центральной оси и оно никогда не смещается в какую-либо сторону (к эксцентричным отверстиям) в течение всего процесса истечения. Было найдено, что это свойство справедливо во всех исследованных случаях присутствия нескольких отверстий. Как продемонстрировано результатами настоящего исследования, без некоторого сдвига оси воздушного ядра критическая высота и время опорожнения уменьшаются с ростом эксцентricности расположения отверстий. Другими словами, настоящие результаты ясно показывают, что при наличии эксцентричных отверстий причиной подавления вихря не является смещение оси вихря, а какая-то более фундаментальная причина, например, меньшие гидравлические потери, связанные с наличием эксцентричных отверстий во время истечения жидкости. При заданном начальном вращении (значении числа оборотов N), как показывают рис. 19 и 20, безразмерные величины h_{id} и h_{ls} убывают с ростом эксцентricности, что результируется в резком подъеме безразмерной скорости вытекания (рис. 21). Следуя аргументам, изложенным выше на основе уравнения (2.6), можно заключить, что увеличение скорости вытекания, вызванное ростом эксцентricности расположения отверстий, инициирует второй вид

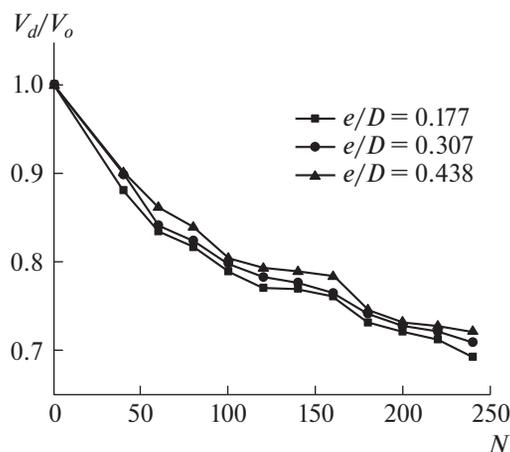


Рис. 21. Изменение V_d/V_o в зависимости от N для различных значений e/D .

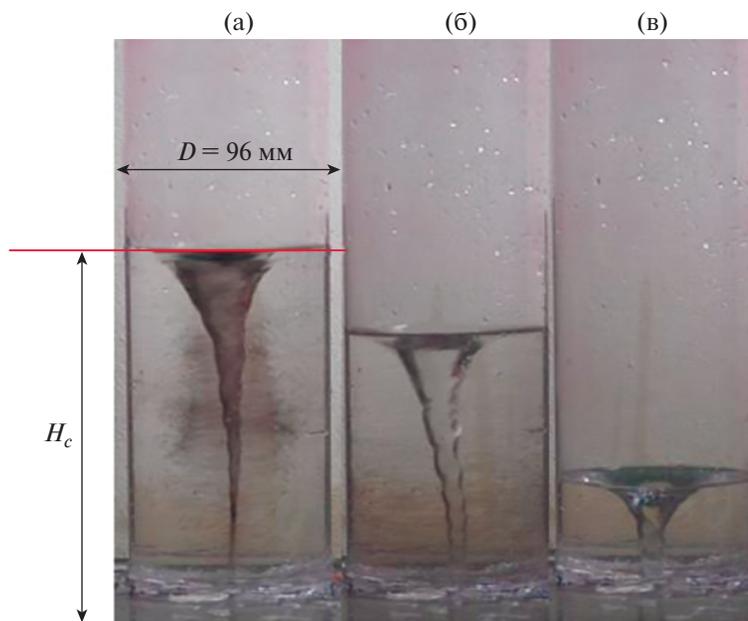


Рис. 22. Временное изменение вихря с воздушным ядром (воронки) при $n = 2$ и $N = 220$ об./мин.

движения жидкости, а именно, рост радиальной скорости к центру, который приводит к подавлению вихря.

2.1. Может ли критическая высота правильно характеризовать явление вихреобразования?

Как уже упоминалось, авторы и предыдущие исследователи использовали критическую высоту в качестве главного параметра, чтобы охарактеризовать явление вихреобразования. Это обусловлено тем, что, как было найдено, для жидкости, вытекающей из одиночных отверстий, в случае задания более интенсивного начального вращения жидкости (циркуляции), критическая высота возрастает и, следовательно, время, необходимое для вытекания жидкости из бака (время опорожнения) также возрастает, поскольку образующееся вихревое воздушное ядро закупоривает зону истечения. Подчеркнем для дальнейшего, что большая критическая высота (интенсивное вихреобразование) всегда приводит к большему времени опорожнения в случаях, когда жидкость вытекает через одиночное отверстие, как указывалось в предыдущих исследованиях. Результаты настоящего исследования, представленные на рис. 4–11, показывают, что как критическая высота, так и время опорожнения возрастают с ростом N для конфигураций с многими отверстиями, и эти результаты не противоречат этому аргументу. Более того, рис. 12 обнаруживает тот факт, что критическая высота уменьшается при увеличении числа сливных отверстий n при всех значениях эксцентricности. Соответственно, как и в случае одиночных сливных отверстий, можно ожидать, что время опорожнения жидкости также будет убывать. Однако прямо противоположно этим ожиданиям, при $n > 2$ время опорожнения возрастает, как можно видеть из рис. 18. В общем случае, теперь можно сделать вывод, что при всех больших значениях эксцентricности ($e/D > 0.177$) число окружающих отверстий слива, требуемых для подавления вихреобразования, должно быть ограничено двумя.

В практических приложениях, таких как аэрокосмическая область, литье металлов и строительство гидротехнических сооружений требуется поддерживать адекватное условие расхода во время истечения жидкости из резервуаров или баков. Другими словами, жидкость должна вытекать без ненужной задержки. Однако образование воздушного ядра закупоривает зону истечения, последовательно затягивая процесс вытекания жидкости и таким образом увеличивая время опорожнения. В качестве соответствующего примера упомянем временное запаздывание при истечении жидкого топлива, используемого в ракетных двигателях, которое негативно сказывается на характеристиках двигателя [14]. По этой причине не только критическая высота, но также время опорожнения жидкости являются очень важными параметрами, которые определяют явление вихреобразования. В свете текущего исследования предлагается, чтобы при оценке размеров влияния явления вихреобразования обязательно рассматривались оба эти параметра, а

именно, критическая высота и, как более важное, время опорожнения жидкости. Одной критической высоты недостаточно, чтобы охарактеризовать образование вихря.

ВЫВОДЫ

Экспериментальное исследование вихреобразования во время истечения из цилиндрического бака через многочисленные отверстия было предпринято для пяти конфигураций с числом отверстий $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ и $n = 4$ при $H_i = 300$ мм для широкого диапазона начальной скорости вращения жидкости от 40 до 240 оборотов в минуту и были сделаны следующие выводы.

Для всех значений n явление вихреобразования интенсифицируется (возрастают критическая высота и время опорожнения) при увеличении начального вращения и ослабляется при росте нецентральности расположения отверстий. То есть воздушное ядро может быть подавлено путем увеличения эксцентricности расположения отверстий. Как критическая высота, так и время стекания обнаруживают нелинейные изменения по отношению к скорости вращения жидкости во всех изученных случаях. При увеличении числа отверстий, окружающих центральное отверстие, вихрь подавляется все сильнее и сильнее при меньших значениях эксцентricности расположения отверстий ($e/D = 0.177$). Также найдено, что при больших значениях эксцентricности расположения отверстий время опорожнения увеличивается при превышении числа окружающих отверстий значения $n = 2$. Поэтому для всех больших значений эксцентricности (случаи с $e/D > 0.177$) число окружающих отверстий должно быть ограничено величиной $n = 2$. Данное исследование также обнаружило, что время опорожнения, вместе с критической высотой, являются главными параметрами для описания явления вихреобразования, в частности с практической точки зрения. Найдено, что гидравлические потери, связанные с многочисленными отверстиями, меньше по сравнению с одиночными концентрическими отверстиями, что результируется в подавлении вихря. Более того, сдвиг оси вихря не является единственной возможной причиной подавления вихря при больших значениях нецентральности расположения отверстий, но ослабление вихря может также происходить из-за уменьшенных потерь при закрутке потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lubin B.T., Springer G.S.* The formation of a dip on the surface of a liquid draining from a tank // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. V. 29. № 2. P. 385–390.
2. *Ramamurthi K., Tharakan T.J.* Shaped discharge ports for draining liquids // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1992. I. 30. № 6. P. 786–788.
3. *Zhoq Q.N., Graebel W.P.* Axisymmetric draining of cylindrical tank with a free surface // *Journal of Fluid Mechanics*. 1990. V. 221. № 6. P. 511–532.
4. *Hite J.E., Mih W.C.* Velocity of air-core vortices at hydraulic intakes // *Journal of Hydraulic Engineering*. 1994. V. 120. № 3. P. 284–297.
5. *Gowda B.H.L., Akhuli S., Anudeep B.R., Ipe K.R., Kishore K.* Influence of base inclination on vortex formation during draining from cylindrical tanks // *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*. 2013. V. 20. № 5. P. 361–366.
6. *Gowda B.H.L.* Draining of liquids from tanks of square or rectangular cross sections // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1996. V. 33. № 2. P. 311–312.
7. *Sohn C.H., Gowda B.H.L., Ju M.G.* Eccentric drain port to prevent vortexing during draining from cylindrical tanks // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2008. V. 45. № 3. P. 638–340.
8. *Kumar R.A., Josy J., Shaji R.K., Srikrishnan A.R.* Vortex suppression through drain port sizing // *Journal of Aerospace Engineering*. 2016. V. 29. № 4. P. 06016002.
9. *Kumar R.A., Nair R.R., Prabhu M., Srikrishnan A.R.* Vortex formation during draining from cylindrical tanks: Effect of drain port eccentricity // *Journal of Aerospace Engineering*. 2017. V. 30. № 5. P. 06017001.
10. *Prabhu M., Kumar R.A., Nair R.R., Anith T.A.* Liquid draining through polygonal ports: An investigation on gas entraining vortices // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2019. V. 56. № 5. P. 1651–1657.
11. *Prabhu M., Kumar R.A., Gopikrishnan T.H., Deshpande P.J., Anandhakrishnan U., Kiran A.S., Govindu R.P.* Rankine vortex formation during draining: A new twin port suppression strategy // *Journal of Applied Fluid Mechanics*. 2020. V. 13. № 1. P. 147–160.
12. *Nazir K., Sohn C.H.* Study of air core phenomenon and influence of water height during liquid draining // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2017. V. 31. № 8. P. 3831–3837.
13. *Piva M., Iglesias M., Bissio P., Calvo A.* Experiments on vortex funnel formation during drainage // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2003. V. 329. № 1. P. 1–6.
14. *Son J.H., Park S.* Prevention of air entrainment during liquid draining using disc-type vortex suppressor // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2018. V. 32. № 10. P. 4675–4682.

Перевод с английского Е.А. Пушкаря

УДК 533.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ОБЛАСТИ ЛОКАЛЬНОГО ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА НА СЕЧЕНИИ ПРЯМОГО КРЫЛА

© 2022 г. А. Roy^{a,*}, R. Mukherjee^{a,**}

^a Department of Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Madras, India

*E-mail: aritrasroy73@gmail.com

**E-mail: rinku@iitm.ac.in

Поступила в редакцию 13.08.2020 г.

После доработки 15.05.2021 г.

Принята к публикации 22.06.2021 г.

Области локального отрыва ламинарного потока в корневом или направленном по размаху среднем сечении прямого крыла выявляются с помощью прямых измерений давления на поверхности крыла в аэродинамической трубе и проводится анализ их поведения при разных числах Рейнольдса и углах атаки. Положения точек отрыва, ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения потока находятся в зависимости от углов атаки и числа Рейнольдса. Характеристики турбулентности и структура ламинарно-турбулентного перехода в оторвавшемся сдвиговом слое изучаются с помощью лазерного доплеровского измерителя скорости (термоанемометра). Данные о поверхностном давлении и одновременно полученные результаты измерений скорости сопоставляются для того, чтобы выявить области растущих возмущений в сдвиговом слое. Визуализация течения масляной пленкой на поверхности крыла позволила прояснить детали взаимодействия концевой части крыла и области отрыва потока вблизи передней кромки крыла при больших углах атаки. Из распределений продольной скорости вычислены статистические характеристики турбулентности, в пристеночной области наблюдается заметное отклонение значений коэффициентов асимметрии и эксцесса от нормального распределения. Изучено и описано влияние локальной области отрыва потока на аэродинамические коэффициенты трехмерного корневого сечения прямоугольного крыла.

Ключевые слова: длина ламинарного пузыря, поведение отрыва потока, характеристики ламинарно-турбулентного перехода, статистические характеристики турбулентности, визуализация течения масляной пленкой

DOI: 10.31857/S056852812106013X

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

C_L, C_M, C_P	Коэффициент подъемной силы, коэффициент момента тангажа, коэффициент давления крыла
α	Угол атаки
x/C	Осевое расстояние осевой хорды до сечения крылового профиля
S, T, R	Расположение области отрыва (S), ламинарно-турбулентного перехода (T), повторного присоединения потока (R)
LSB	Область отрыва ламинарного потока
Re, Re_{L1}	Числа Рейнольдса, определенные по длине хорды и ламинарной части области отрыва
$Re_{\delta_s}, Re_{\delta_s^*}, Re_{\theta_s}$	Числа Рейнольдса, определенные по толщине пограничного слоя, толщине вытеснения, и по толщине потери импульса в точке отрыва
AR	Относительное удлинение крыла
σ	Коэффициент восстановления давления
U_e, U_∞	Скорость на границе области отрыва, скорость набегающего потока
p_{rms}, u_{rms}	Среднеквадратические значения давления и скорости

Изучение отрыва потока и областей ламинарного отрыва (локальных пузырей отрыва) имеет важное значение из-за наличия нескольких практических приложений и влияния на характеристики и коэффициент полезного действия ветроэнергетических установок с горизонтальной осью (HAWT), лопаток турбин и компрессоров, планеров, высотных самолетов большой дальности (HALE) и т.д., которые работают в режимах низких чисел Рейнольдса. Таким образом, аэродинамические характеристики профилей и крыльев, эксплуатирующихся при низких числах Рейнольдса (т.е. при $10^4 < Re < 10^5$), являются весьма существенными при проектировании беспилотных летательных аппаратов (UAVs) и беспилотных микролетательных аппаратов.

Режим локальной области ламинарного отрыва (пузырька отрыва) может быть определен как повторное присоединение оторвавшегося сдвигового слоя. Если пренебречь влиянием шероховатости поверхности и турбулентностью набегающего потока, то повторное присоединение потока обуславливает формирование области с медленно рециркулирующей жидкостью между точками отрыва и присоединения потока. Такая область в [1] была названа срывной зоной ламинарного потока, несмотря на наличие турбулентного течения за кормой этой области. После повторного присоединения сдвигового слоя турбулентный пограничный слой с относительно узким следом развивается заново. Однако, когда оторвавшийся переходный сдвиговой слой не успевает присоединиться, за ним тянется более широкий след, который может вызывать существенное снижение аэродинамического качества.

Эти два типа режимов течения, описанные выше, были охарактеризованы в [2] как короткие и длинные пузыри. Был введен критерий отличия двух типов пузырей, базирующийся на толщине вытеснения, определенной по числу Рейнольдса: число Рейнольдса больше 500 для коротких пузырей и меньше 500 для длинных.

В [3] такой же критерий был использован, чтобы определить длинные пузыри, но был сделан вывод, что короткие пузыри не могут сформироваться, если не выполнено условие: число Рейнольдса, определенное по длине хорды, больше 10^5 . Следовательно, пузыри, вначале образовавшиеся как длинные, становятся короткими при увеличении угла атаки.

В [4] режимы ламинарного отрывного поля течения были классифицированы с помощью измерений поверхностного давления. Измерения поверхностного давления и отщепленной горячей пленки были выполнены на модели профиля NACA0012 с целью изучения характера поведения пузырей отрыва потока на передней кромке, когда пузыри были индуцированы обледенением [5]. Как показали наблюдения, поведение таких пузырей было практически аналогично поведению обычных отрывных зон ламинарного потока.

Поведение отрывных зон ламинарного потока чувствительно к значению параметров, таких как угол атаки, число Рейнольдса, интенсивность турбулентности в набегающем потоке и шероховатость поверхности крыла. Достаточное увеличение угла атаки или изменения чисел Рейнольдса могут привести к возникновению свободного турбулентного сдвигового слоя, который не может присоединиться. В этом случае говорят, что имеет место разрыв короткого пузыря, который может быть причиной скачкообразного срыва потока.

Как показано в [6], увеличение интенсивности турбулентности в набегающем потоке приводит к росту максимального коэффициента подъемной силы и снижению минимального сопротивления. Более быстрый ламинарно-турбулентный переход оторвавшегося сдвигового слоя приводит к смещению места повторного присоединения дальше вверх по потоку [7]. Кроме того, увеличение интенсивности турбулентности в набегающем потоке имеет своим результатом смещение точки отрыва вниз по потоку, тем самым приводя к уменьшению средних значений ширины и высоты пузыря [8, 9].

Исследование профиля NACA66₃-018 [10] было проведено для чисел Рейнольдса по длине хорды в диапазоне $50\,000 < Re < 200\,000$ и угле атаки $8^\circ < \alpha < 12^\circ$. Было отмечено, что подъем уровня турбулентности вызывает уменьшение длины пузыря при значительном росте пика разрежения. Было также найдено, что изменение угла атаки имеет более выраженный эффект на длину турбулентной части пузыря.

В [11] было продемонстрировано, что отрыв, ламинарно-турбулентный переход и повторное присоединение более сильно зависят от углов атаки, чем от числа Рейнольдса по длине хорды и некоторое увеличение числа Рейнольдса и угла атаки вынуждает отрывной пузырь сдвигаться вверх по потоку и укорачивает его длину.

Ранее [12] существование двух пузырей отрыва как на верхней, так и на нижней поверхностях профиля NACA4415 было обнаружено в некоторых специфических диапазонах угла атаки α .

Однако при определенном наклоне, зависящем от числа Рейнольдса, пузырь на нижней стороне поверхности исчезал.

Большинство исследований, упомянутых ранее, были основаны на изучении двумерного поведения отрывных течений. В большинстве случаев заложенный в природе трехмерный характер течения оставался без внимания. В этой связи в [13] была обсуждена трехмерная структура отрывного течения над крыльями с разными относительными удлинениями и обнаружено существование сложного трехмерного поведения внутри вихревых структур как для осредненных по времени, так и мгновенных характеристик течения. В [14] вихревая структура отрывных течений на модельных крыльях была исследована экспериментально при малых скоростях набегающего потока. Для идентификации крупномасштабных вихрей в плоскости крыла без скольжения были использованы поверхностные линии тока, полученные при визуализации структуры потока масляной пленкой, и было объяснено формирование двух вихревых пар для крыльев с большим относительным удлинением. Более фундаментальное исследование роста возмущений в пограничном слое было проведено при малых числах Рейнольдса [15]. Картины визуализации течения масляной пленкой были проанализированы для выделения пограничного слоя на верхней поверхности классических и волнистых крыльев. Было описано поведение локальных возмущений в ламинарной части пузыря отрыва потока. В другом исследовании [16] были обсуждены эффекты таких локальных возмущений потока на управление отрывом на крыле при малых числах Рейнольдса.

В [17] пульсации давления и скорости с большой разрешающей способностью по времени были исследованы для объяснения сдвигового слоя с турбулентным переходом над профилем НАСА0018 при малых числах Рейнольдса потока. С помощью статистического анализа измерения давления в многих точках были сопоставлены, чтобы получить неустойчивость, растущую в пространстве, подобно конвективной скорости. В другом исследовании [18] была проанализирована статистика пристеночной турбулентности для течения с нулевым градиентом давления над плоской пластинкой для того, чтобы сравнить влияние чисел Рейнольдса на различные режимы течения в пограничном слое при ламинарном отрыве потока.

Для предсказания появления областей ламинарного отрыва несколько теорий и критериев получения характеристик уже установлены. Однако экспериментальное исследование влияния расположения места отрыва и ламинарно-турбулентного перехода, а также параметров пограничного слоя в пределах оторвавшегося сдвигового слоя, не является исчерпывающим. Это является одной из главных мотиваций настоящего исследования. В экспериментальном исследовании, описанном в данной работе, предпринята попытка изучить характеристики локальных областей ламинарного отрыва на прямом крыле с относительным удлинением ≈ 6.4 и сечением профиля НАСА4415 с помощью измерения статического поверхностного давления и лазерной термоанемометрии на корневом сечении крыла в некотором диапазоне чисел Рейнольдса и углов атаки. Представлено описание влияния пузырька отрыва на аэродинамические характеристики прямого крыла при различных числах Рейнольдса.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Эксперименты проводились в Лаборатории по управлению течениями и переходными процессами Факультета аэрокосмических технологий Индийского института технологии в Мадрасе. Испытания были выполнены в дозвуковой открытой закольцованной аэродинамической трубе с сечением рабочей секции $0.5 \text{ м} \times 0.5 \text{ м} \times 1 \text{ м}$, изображенной на рис. 1а. Все испытанные крылья устанавливались на четверти хорды, начало координат располагалось на передней кромке крыла. Углы атаки модели крыла задавались с помощью поворотной площадки. Согласно данным изготовителя аэродинамической трубы, уровень турбулентности набегающего потока составлял приблизительно 0.50%. Скорость набегающего потока отслеживалась статической трубкой Пито с расчетной ошибкой 2%.

Для измерений давления использовалась модель прямого крыла конечного размаха с сечением НАСА4415, хордой $C = 63 \text{ мм}$ и относительным удлинением ≈ 6.4 , которая имела в сумме 22 отверстия для отбора давления в корневом сечении, изображенном на рис. 1в. Для отождествления положения точек измерений использовались продольная и вертикальная координаты x и y . Начало продольной координаты располагалось на передней кромке крыла и ось x была направлена по хорде крыла.

Нулевой угол атаки крыльев тестировался путем выравнивания хордовой координатной линии крыла вдоль центральной линии трубы. Кроме того, модельная доля размаха крыла в экспе-

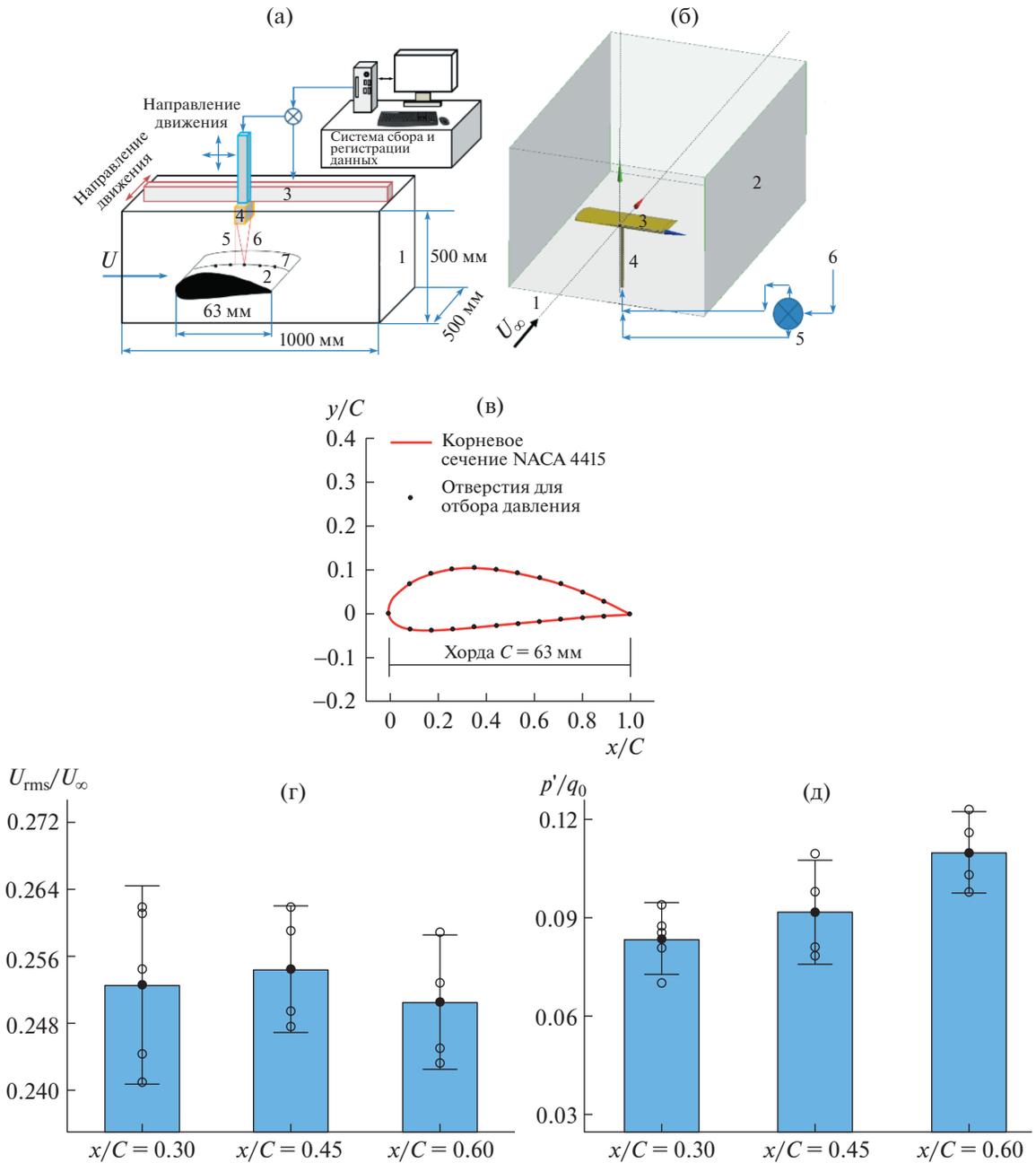


Рис. 1. Оборудование аэродинамической трубы: (а) Рабочая часть: 1. Рабочая часть аэродинамической трубы, 2. Трехмерное крыло NASA 4415, 3. Автоматическая система перемещения, 4. Лазерный термоанемометрический измеритель скорости, 5. Опорный лазерный пучок, 6. Пересекающий лазерный пучок, 7. Точки измерения в корневого сечении; (б) Монтрование и ориентирование трехмерного крыла: 1. Центральная линия аэродинамической трубы, 2. Боковые стенки трубы walls, 3. Трехмерное крыло NASA 4415, 4. Державка с обтекаемой обшивкой, 5. Шаговый электродвигатель, 6. Входной сигнал; (в) Расположение точек отбора давления; (г) среднеквадратические пульсации скорости, (д) среднеквадратические пульсации давления.

риментах была меньше 0.8. Модельная доля размаха крыла равняется отношению размаха крыла к ширине испытуемой секции. Обычно максимальный размах модели должен быть равен или составлять менее 0.8 ширины трубы для полной модели, чтобы применить стандартные поправки, принятые в аэродинамических трубах [19]. Помимо этого, коэффициент загромождения рабочего сечения представляет собой другой важный фактор, который следует рассмотреть перед проведением аэродинамического изучения эффектов больших углов атаки. В настоящем исследовании расчетная относительная площадь загромождения рабочего сечения составляла менее

3% поперечной площади сечения аэродинамической трубы, например, при угле атаки $\alpha = 15^\circ$ коэффициент загромождения рабочего сечения был приближенно равен 2.60%. В общем случае предпочтительно иметь коэффициент загромождения рабочего сечения менее 4–5% в стандартной аэродинамической трубе с замкнутыми стенками.

Данные по давлению были получены посредством датчика давления Scanivalve (модель № DSA3217/16Px), который имеет разрешение порядка $\pm 0.05\%$ полной шкалы. Детали спецификаций сканера давления даны ниже. Датчик давления калибровался с помощью калибратора давления YOKOGAWA, CA700. Каждый порт датчика принимал входное давление через виниловую трубку, подсоединенную к порту на модели, и затем выводил соответствующую величину, конвертированную пользователем в нужную систему единиц. Значения среднего поверхностного давления вычислялись из этих данных и выводились на печать как функции положения портов x/C . Считанные значения давления собирались в матрицу размером 50×350 с использованием пользовательского интерфейса Labview после установки нужной скорости в аэродинамической трубе. Ошибки экспериментальных результатов оценивались с помощью точного метода, предложенного в [20, 21]. Коэффициент давления рассчитывался по измерениям поверхностного давления и динамического давления с ошибкой, приблизительно равной 1.22%.

Аэродинамические характеристики C_L , C_D и C_M на поверхности крыла могут быть рассчитаны путем численного интегрирования распределения измеренного давления с использованием пакета MATLAB.

Лазерная мини термоанемометрическая система измерения скорости использовала неинтрузивную методику точечных измерений для получения распределения скорости с высоким разрешением во времени. Детали спецификации даны ниже. Лазерный мини термоанемометрический датчик скорости состоит из лазера, миниатюрной оптической системы, формирующей пучок излучения лазера, принимающей оптической системы и одномерной системы процессорной обработки всплесков излучения. Диапазон измерений составляет 50–600 м/с с ошибкой воспроизводимости порядка $\pm 0.1\%$.

Эта лазерная мини термоанемометрическая система измерения скорости также имеет характерную черту в виде смещения частоты (движущиеся интерференционные полосы), чтобы иметь возможность измерять не только скорость, но и направление движения. Оптические настройки включают в себя длину волны, равную 658×10^{-9} м, эффективность пропускания, равную 43%, расстояние объемов датчиков, равное 100 мм, и мощность в объеме датчика, равная 56×10^{-3} Вт.

Все измерения были выполнены в одной плоскости в середине размаха модели или корневом сечении крыла. Расположение точек измерения было отрегулировано по направлению координаты, нормальной к стенке, так, чтобы расположить больше точек ближе к стенке. Передающая ось датчика была ориентирована вертикально, чтобы получать измерения скорости в плоскости $x-y$. Управляемая компьютером система перемещения использовалась для расположения датчика в нужных точках с точностью 100 μ . Течение было засеяно пропорциональной смесью глицерина потребительского уровня и воды, которая была распылена с помощью дымогенератора. Конечный размер образца 10000 частиц был использован при каждом измерении локации и затем проводилось осреднение с использованием статистики для вычисления средних и среднеквадратичных скоростей, в то время как мгновенные данные с высоким временным разрешением были использованы для анализа временных рядов. Широкий диапазон измерений скорости может быть достигнут за счет выбора правильного фильтра, пропускающего некоторую полосу частот с повторяемостью 99.9%. Пороговое электрическое напряжение выбиралось так, чтобы обеспечить хорошую скорость передачи данных и не добавляло шума к этим данным. Отношение уровня сигнала к уровню шума поддерживалось в среднем на значениях, минимизирующих потери данных.

Рисунки 1г и 1д демонстрируют повторяемость среднеквадратичных пульсаций скорости и давления с использованием лазерной мини термоанемометрической системы в качестве датчиков скорости и давления. Показаны интервалы ошибок индивидуальных среднеквадратичных отклонений, использованных для вычисления 95%-ных доверительных интервалов для средних значений.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В описанном экспериментальном исследовании делается попытка изучить пузырьки ламинарного отрыва потока и их характеристики в корневом сечении (в середине размаха) на прямом крыле с относительным удлинением 6.4 и профилем сечения NACA4415 с помощью измерений давления на поверхности крыла и пульсаций скорости с использованием лазерной термоанемометрической системы измерения скорости в некотором диапазоне чисел Рейнольдса и углов атаки.

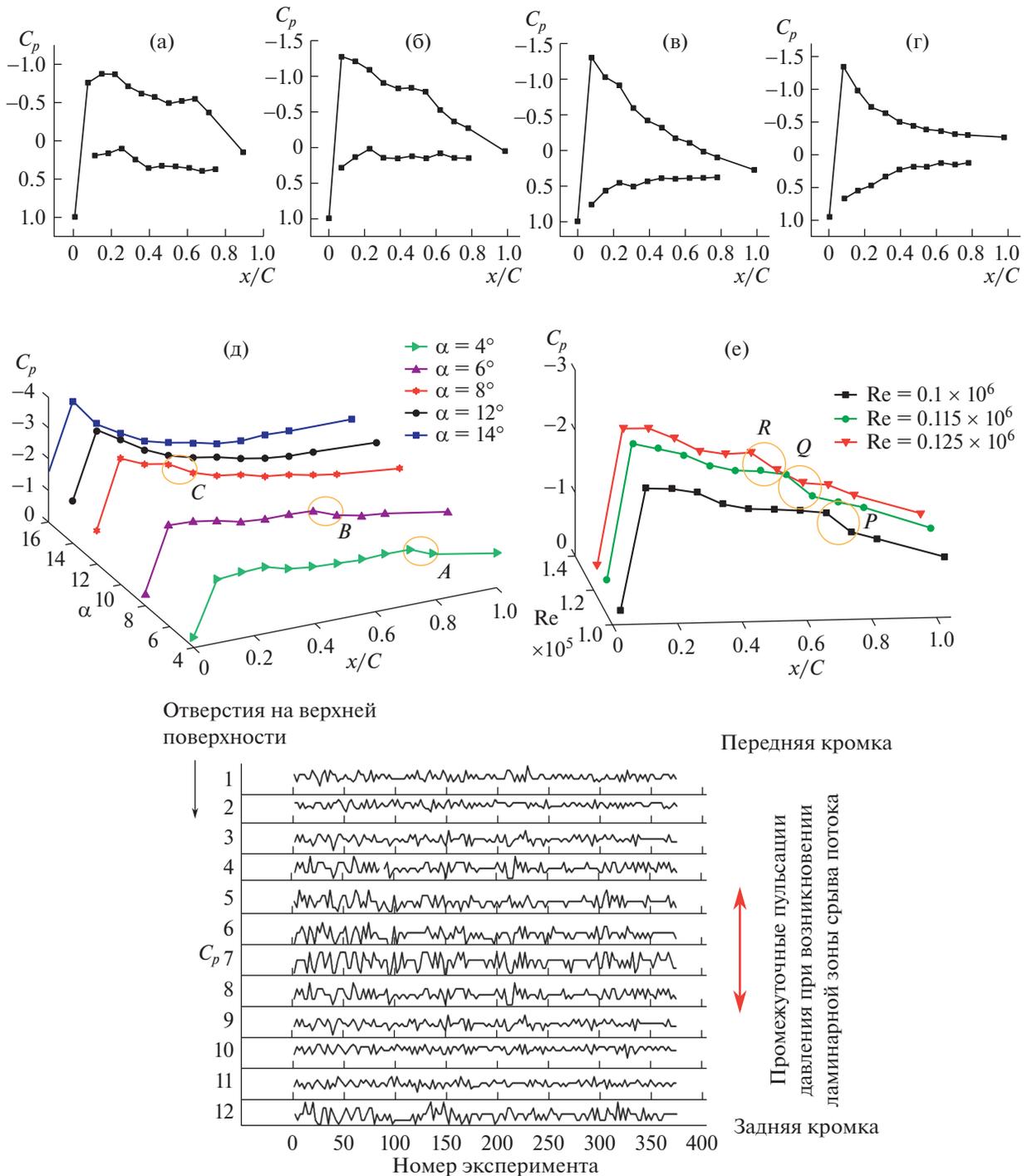


Рис. 2. Коэффициент давления в корневом сечении: (а) $\alpha = 4^\circ$, (б) $\alpha = 6^\circ$, (в) $\alpha = 12^\circ$, (г) $\alpha = 15^\circ$; C_p на верхней поверхности при числе Рейнольдса 0.1×10^6 (д) и $\alpha = 7^\circ$ (е); временные последовательности пульсирующих данных для C_p при $\alpha = 6^\circ$.

2.1. Измерение поверхностного давления на поверхности крыла

На рис. 2 показан экспериментально найденный коэффициент распределения давления в корневом сечении прямого крыла при разных углах атаки.

Крыло, использованное в данных исследованиях, это прямое крыло с сечением в виде профиля NASA4415 и имеет 22 отверстия для отбора давления в корневом сечении. Ожидается, что отрыв течения начинается вокруг корневого сечения. Следовательно, основная цель исследования

коэффициента распределения давления в корневом сечении прямого крыла состоит в том, чтобы пролить свет на процесс начала отрыва потока над поверхностью крыла. Интересно отметить, что коэффициент давления на напорной стороне сечения крыла не меняется значительным образом при увеличении угла атаки в области перед срывом. На рис. 2д изображен коэффициент распределения давления на стороне разрежения или верхней поверхности крыла, который значительно меняется при увеличении угла атаки. После скачкообразного срыва течения при $\alpha = 15^\circ$ наблюдается потеря пика разрежения, что может объясняться образованием большого следа за крылом, что вносит дальнейший вклад в быстрый рост сопротивления в областях после срыва потока.

Следует отметить, что для прямого крыла отрыв потока начинается около корневого сечения и в исследуемом случае это происходит при $\alpha \approx 12^\circ$ (потеря скорости при срыве потока). Локальная область (пузырек) ламинарного срыва потока начинает формироваться примерно при $\alpha = 3^\circ$, тогда как данные эксперименты проводились при $\alpha = 6^\circ$. Ожидается, что локальный угол атаки в корневом сечении должен быть немного больше, чем 6° , но не настолько большим, чтобы произошел скачкообразный срыв потока без повторного присоединения. На рис. 2д изображены: распределение коэффициента давления и коэффициент давления в корневом сечении на поверхности подсоса (разрежения) крыла при числе Рейнольдса, равном 0.1×10^6 в случае переменного угла атаки.

Области восстановления давления, которые представляют собой локализованные области роста давления подсосывания на крыле, могут наблюдаться около задней кромки при $\alpha = 4^\circ$, и область, маркированная *A* на рис. 2д. С ростом α последняя область сдвигается в сторону передней кромки и находится в положениях *B* при $\alpha = 6^\circ$ и *C* при $\alpha = 8^\circ$.

Крыло, использованное в настоящих экспериментах, теряет скорость при срыве потока, когда $\alpha \approx 12^\circ$. Таким образом, восстановление давления минимально при $\alpha = 12^\circ$ и отсутствует при углах атаки после срыва, $\alpha = 15^\circ$. Пик давления всасывания также растет при росте α .

На рис. 2е изображено распределение коэффициента давления по поверхности подсоса крыла для $\alpha = 6^\circ$ в случае переменных чисел Рейнольдса. Области восстановления давления обозначены буквами *P*, *Q* и *R*. Они наблюдаются вблизи задней кромки при $Re = 0.1 \times 10^6$ и сдвигаются в направлении передней кромки при увеличении числа Рейнольдса. Пики давления всасывания также растут при увеличении числа Рейнольдса.

На рис. 2ж изображены временные зависимости сигналов коэффициента давления на верхней поверхности крыла при $\alpha = 6^\circ$. Появляющиеся возмущения усиливаются на верхней стороне и возникающее явление наступает на пятки появлению пузырька отрыва.

2.2. Идентификация пузырьков ламинарного отрыва (LSB)

Схематическая иллюстрация пузырька ламинарного отрыва изображена на рис. 3а и описана в [4]. Авторы настоящего исследования используют эту идею, чтобы отметить различные части пузырька ламинарного отрыва, состоящие из ламинарной и турбулентной частей.

Начальная точка области плато для давления, обозначенная *S*, представляет собой положение отрыва ламинарного пограничного слоя от поверхности крыла, тогда как точка повторного присоединения оторвавшегося пограничного слоя к поверхности крыла обозначена *R*. В пределах пузырька отрыва, расположенного между *S* и *R*, имеется четко выраженный подъем давления по сравнению с невязким случаем на некотором расстоянии вниз по потоку от *S*, положение которого обозначено буквой *T*, после которого наблюдается быстрое падение давления пока не достигается *R*, где фактическое и невязкое давления равны между собой. Положение, обозначенное буквой *T*, отмечает появление перехода оторвавшегося течения к турбулентности и область, расположенная непосредственно перед этой точкой, представляет собой зону рециркуляции, как это показано на поверхности сечения крыла.

На рис. 3б изображены зависимости для коэффициента давления, вычисленного по показаниям давления, измеренного в аэродинамической трубе в корневом сечении поверхности крыла при $\alpha = 6^\circ$ и $Re = 0.1 \times 10^6$ в качестве части настоящего исследования. Точки расположения отрыва потока, перехода к турбулентности и повторного присоединения также указаны на этом графике, как это было проиллюстрировано на рис. 3а.

Распределение поверхностного давления на нижней поверхности крыла не изменяется заметным образом при увеличении α . Для разных значений α найдено типичное внезапное увеличение коэффициента давления, характеризующее исследуемое течение, которое происходит в об-

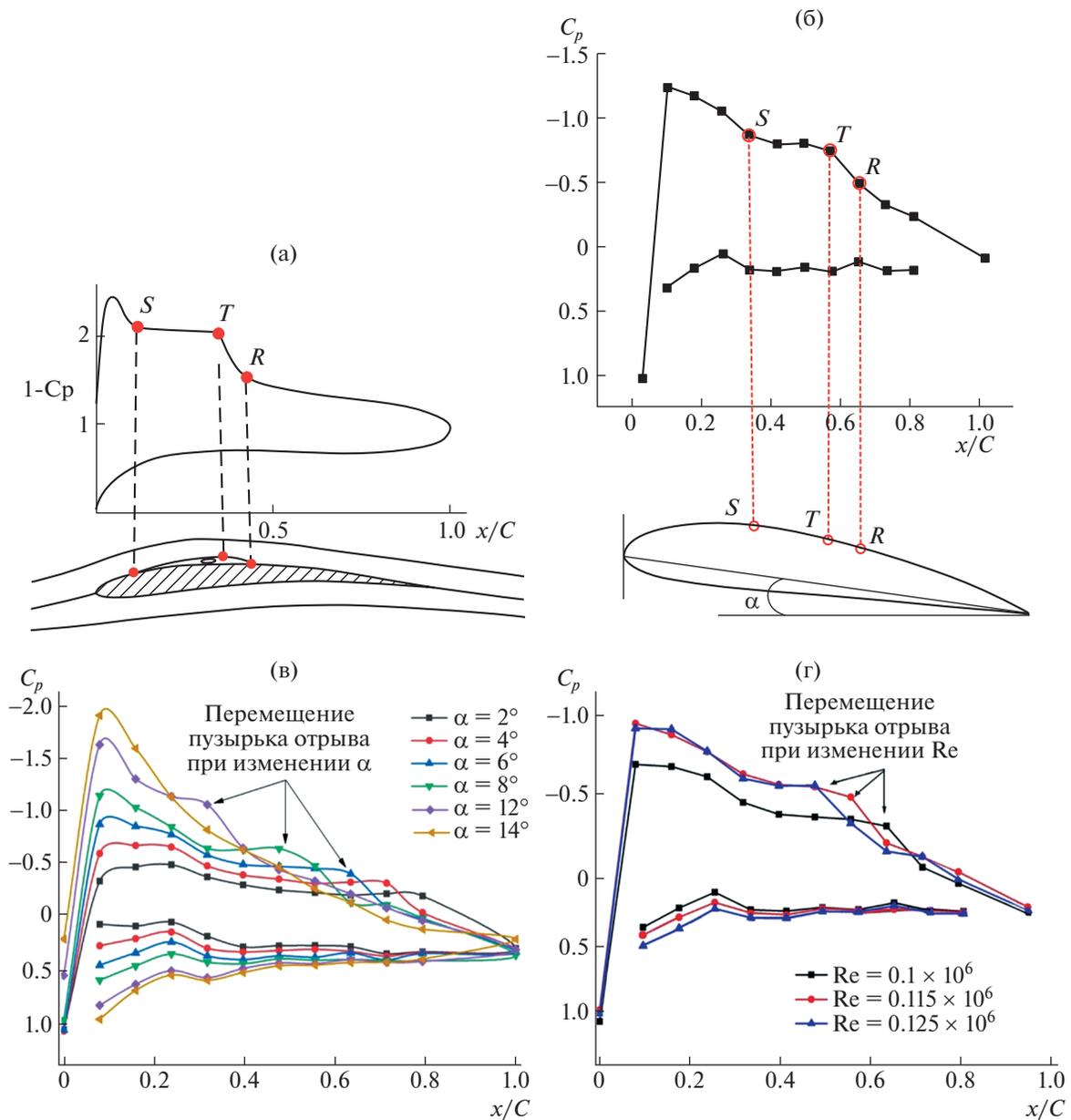


Рис. 3. Описание пузырька ламинарного отрыва: (а) двумерное распределение поверхностного давления с пузырьком отрыва, воспроизведенным из [4], (S обозначает отрыв, T – ламинарно-турбулентный переход и R – повторное присоединение); (б) идентификация пузырька ламинарного отрыва при $\alpha = 6^\circ$ в корневом сечении крыла; (в) перемещение пузырька отрыва при изменении α ; (г) перемещение пузырька отрыва при изменении числа Рейнольдса.

ласти вниз по потоку за плато давления. Такие профили поверхностного давления тесно связаны с пузырьками ламинарного отрыва [4]. На рис. 3в и 3г можно также видеть смещение точек отрыва ламинарного потока к передней кромке при увеличении угла атаки α и числа Рейнольдса.

На рис. 4а воспроизведена картина масляной визуализации течения на верхней поверхности прямого крыла при $\alpha = 6^\circ$ и $Re = 0.1 \times 10^6$. На поверхность модели крыла щеткой был нанесен однородный тонкий слой пропорциональной смеси масла для вакуумного насоса, диоксида титана и олеиновой кислоты. Концептуальное описание различных характеристик течения приведено здесь для подтверждения результатов измерений поверхностного давления. Как можно видеть на рис. 4а, зона пузырька ламинарного отрыва может быть идентифицирована как область, лежащая между точкой ламинарного отрыва и турбулентного повторного присоединения тече-

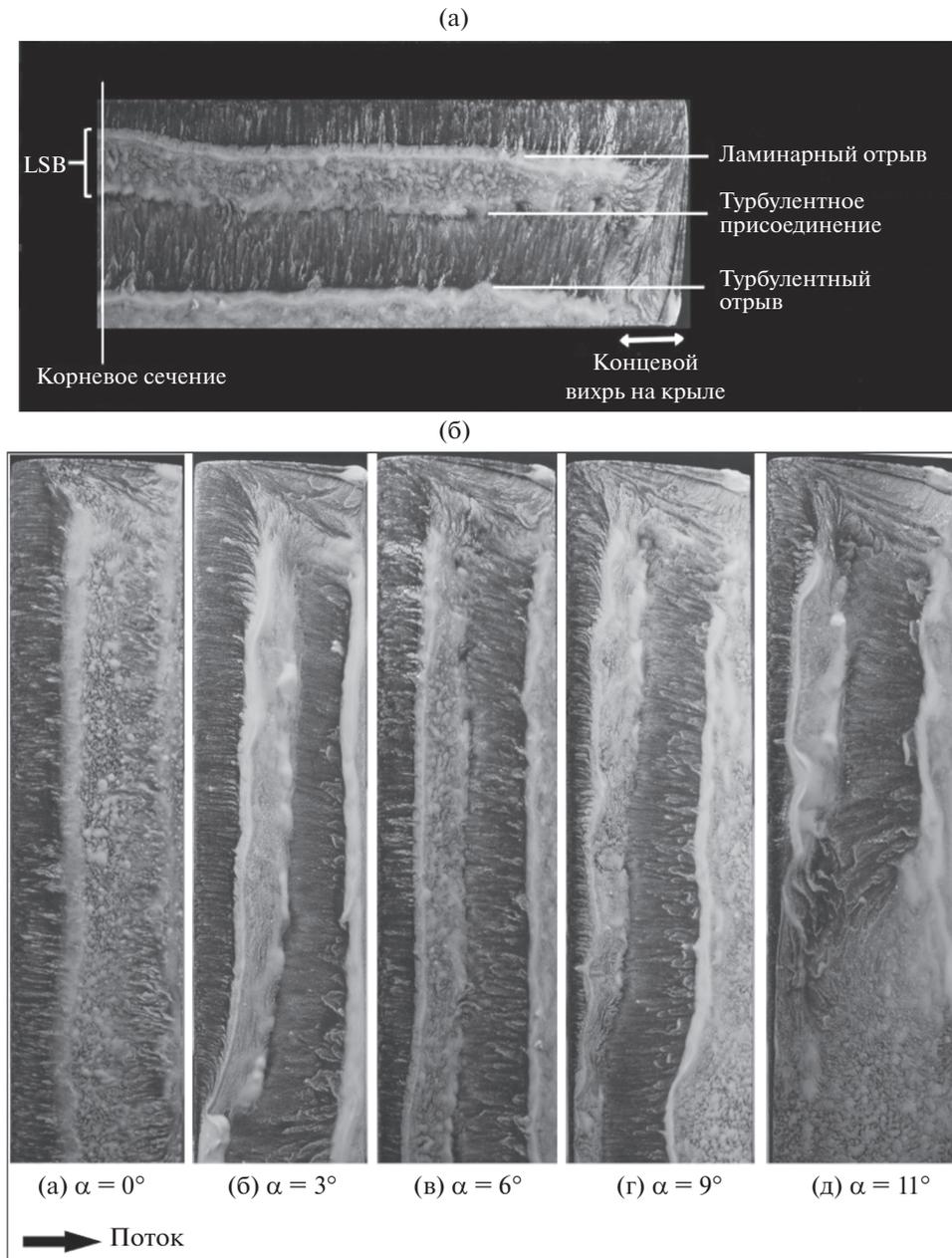


Рис. 4. Результаты масляной визуализации потока: (а) идентификация пузырька ламинарного отрыва при $\alpha = 6^\circ$, (б) масляная визуализация потока при разных углах атаки.

ния. Предлагаемая методика помогает отождествить и выделить различные особенности течения в пограничном слое.

На рис. 4б изображены картины поверхностного течения и взаимодействие концевых вихрей с пузырьком ламинарного отрыва на поверхности крыла (вплоть до корневого сечения) при разных α для $Re \approx 0.1 \times 10^6$. На рисунке хорошо видно уменьшение длины пузырька ламинарного отрыва по размаху крыла и вдоль хорды при увеличении угла атаки α , что может быть подтверждено сравнением с данными измерений поверхностного давления. Более того, можно видеть, что концевой вихрь на крыле увеличивает эффективность при росте α и сильнее воздействует на формирование пузыря ламинарного отрыва вблизи кончика крыла. Это уменьшение размера пузыря ламинарного отрыва вблизи кончика крыла можно объяснить за счет эффектов трехмерного вторичного течения около передней кромки крыла. При $\alpha = 11^\circ$ наблюдается значимое взаи-

модействие конца крыла и пузыря ламинарного отрыва, когда вторичное течение пытается присоединить поток вблизи области конца крыла. Это может служить причиной улучшения аэродинамического качества при больших углах атаки, когда течение начинает отрываться вблизи корневой области. Однако взаимодействие области около кончика крыла и пузыря ламинарного отрыва вызывает присоединение течения вблизи конца крыла и таким образом срыв потока и потеря скорости откладываются на какое-то время. Следы поверхностного трения при больших углах атаки обнаруживают смещение пузыря отрыва к передней кромке крыла и соответствующее смещение точек отрыва и турбулентного присоединения при увеличении α . Некоторая зона вторичного турбулентного отрыва также наблюдается вблизи задней кромки крыла и эта зона перемещается к передней кромке при увеличении α . Как можно видеть из рис. 4б, при больших углах атаки такое поведение турбулентного отрыва доминирует в наибольшей степени около среднего по размаху сечения крыла. При возникновении скачкообразного срыва потока и падении скорости эта зона турбулентного отрыва взаимодействует с первичным пузырем отрыва в среднем по размаху сечения и сдвигается в сторону кончика крыла (рис. 4б). Эти данные исследования подобны тем, которые были изложены в [22].

2.3. Описание характеристических особенностей пузыря ламинарного отрыва

Различные важные характеристики, которые влияют на поведение пузыря ламинарного отрыва в корневом сечении прямого крыла, могут быть описаны следующим образом.

2.3.1. Средние оценки расположения точек отрыва потока, ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения. Как изображено на рис. 3б, среднее расположение точек S , T и R было рассчитано с помощью линейной аппроксимации данных измерения поверхностного давления с ошибкой в 4% длины хорды в соответствии с методикой, предложенной в [4]. Однако, как описано в [23], использование линейной аппроксимации данных о давлении нежелательно для определения положения точки ламинарно-турбулентного перехода.

Таким образом, положение точки ламинарно-турбулентного перехода может быть рассчитано точно при использовании второй производной интерполированных данных для поверхностного давления. Максимальное значение второй производной данных для коэффициента давления соответствует максимальной кривизне графика в плоскости (C_p, x) , которая ассоциируется с началом перехода [24]. Таким образом, положение точки ламинарно-турбулентного перехода определяется при интерполяции данных для коэффициента давления с использованием методов, подобных SPLINE и PCPIP (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial – Кусочно-кубический интерполяционный многочлен Эрмита), сравнение которых проведено в [24], где затем был предложен последний из упомянутых методов для достижения более или менее высокой точности. Хотя пространственное разрешение на поверхности крыла ограничивается измерениями в отверстиях для забора давления из-за небольшого размера рабочей секции аэродинамической трубы и самого крыла, этот метод может обеспечить более или менее точные результаты, полученные для расположения сечений ламинарно-турбулентного перехода вдоль поверхности крыла.

Результаты применения вышеупомянутого интерполяционного метода PCPIP к данным измерения коэффициента давления при $\alpha = 6^\circ$ и $\alpha = 8^\circ$ изображены на рис. 5а и 5б соответственно. Наблюдается постепенное смещение точки перехода вверх по потоку при изменении угла атаки от $\alpha = 6^\circ$ до $\alpha = 8^\circ$, что также показано для пузыря отрыва на рис. 5в. Найдено, что смещение положений точек отрыва при изменении углов атаки, так же как и числа Рейнольдса происходит наиболее постепенным образом по сравнению со смещением положений точек ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения, как показано на рис. 5г. Это можно также видеть в [11, 25]. Как показано на рис. 5г, средние значения положений, оцениваемых по результатам измерений поверхностного давления, демонстрируют хорошее согласие с картиной поверхностного течения, полученной посредством масляной визуализации.

2.3.2. Длина пузыря отрыва. Расстояние между точками отрыва и повторного присоединения может рассматриваться как длина пузыря отрыва. Длина ламинарной части пузыря отрыва может быть определена как расстояние между точками отрыва и ламинарно-турбулентного перехода, а длина турбулентной части – как расстояние между точками ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения [23]. На рис. 5д изображена длина пузырька как функция α при различных значениях числа Рейнольдса. Видно, что размер ламинарной части убывает, тогда как размер турбулентной части возрастает с ростом числа Рейнольдса.

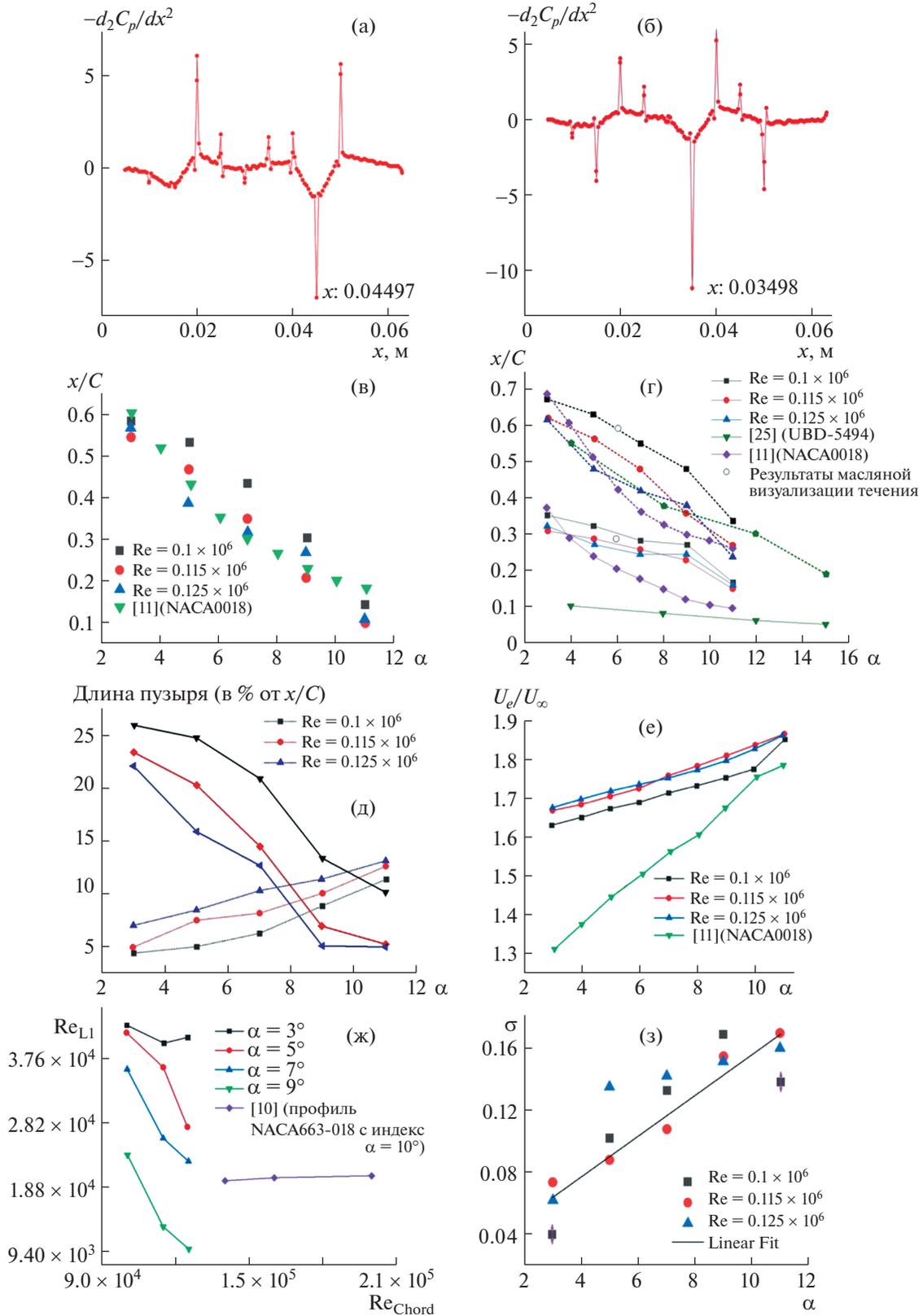


Рис. 5. Характеристики пузырька ламинарного отрыва потока на трехмерном прямом крыле: точки ламинарно-турбулентного перехода, полученные с помощью метода РСНПР и экспериментов при (а) $\alpha = 6^\circ$, (б) $\alpha = 8^\circ$ и (в) смещение вдоль хорды; (г) оценки для средних положений точек отрыва [сплошные линии] и присоединения [пунктирные линии] для пузыря отрыва, (д) длина пузыря при разных числах Рейнольдса [ламинарный отрыв (сплошные линии), турбулентный отрыв (пунктирные линии)], (е) влияние α на скорость на внешней кромке, (ж) влияние локального Re , и (з) влияние α на коэффициент восстановления давления.

2.3.3. Скорость на внешней границе. Для пузыря отрыва скорость на внешней границе оторвавшегося ламинарного слоя также является важнейшим параметром. Ее можно вычислить, основываясь на измерениях среднего поверхностного давления в соответствии с методикой, описанной в [11]. Скорость на внешней границе может быть определена вверх по потоку от точки ламинарно-турбулентного перехода как скорость внешнего потока над ламинарной частью пузырька, аппроксимированной некоторой постоянной величиной [23], хотя при использовании критериев, сформулированных в [23, 26], было получено, что при разных числах Рейнольдса скорость внешнего потока линейно уменьшается между точками ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения.

На рис. 5е изображена зависимость скорости на внешней границе от угла атаки при разных числах Рейнольдса. Скорость на внешней границе растет вместе с углом атаки α , тогда как $(U_e/U_\infty)_{\max}$ почти одинаково при всех числах Рейнольдса. Наклон кривой для зависимости отношения скорости на внешней границе к скорости набегающего потока U_e/U_∞ как функция угла атаки практически одинаков при $Re = 0.115 \times 10^6$ и 0.125×10^6 . Аналогичные результаты были также получены в [11] в двумерном случае.

2.3.4. Локальное число Рейнольдса пузырька отрыва потока. Одним из наиболее важных параметров, влияющих на изменения в пузырьке отрыва, является локальное число Рейнольдса, обозначенное как Re_{L1} , которое вычисляется исходя из скорости на внешней границе U_e и длине ламинарной части пузырька L_1 . Используя аппроксимацию, описанную в [23], будем предполагать, что скорость на внешней границе постоянна в пределах L_1 . На рис. 5ж изображено число Рейнольдса Re_{L1} , рассчитанное из представленных экспериментальных данных, и его поведение при изменении углов атаки и варьировании числа Рейнольдса, вычисленного по длине хорды (Re_C).

Видно, что в диапазоне значений Re_C в интервале $1 \times 10^5 < Re_C < 1.25 \times 10^5$ значения Re_{L1} убывают при увеличении как числа Рейнольдса, вычисленного по длине хорды, так и угла атаки. Двумерные результаты в [10], представленные в диапазоне больших значений Re_C , т.е. для $1.3 \times 10^5 < Re_C < 2 \times 10^5$, где Re_{L1} не изменяется существенно при изменении Re_C при $\alpha = 10^\circ$.

2.3.5. Короткие и длинные пузыри. До сих пор изучались пузыри ламинарного отрыва потока с использованием данных измерения давления в корневом сечении трехмерного прямого крыла. На трехмерном крыле, однако, пузыри, возникающие при ламинарном отрыве, могут быть одного из двух отличительных типов, а именно, короткие пузыри и длинные пузыри. Предпочтительно характеризовать пузырь, базируясь на его влиянии скорее на распределение давления, чем на его длину. С этой целью, в [2] предложили рассмотреть толщину пограничного слоя δ_1 , рассчитанную по числу Рейнольдса в качестве критерия появления отрыва $Re_{(\delta_1)s}$, так что для короткого пузырька $Re_{(\delta_1)s} > 500$, а для длинного пузырька $Re_{(\delta_1)s} < 500$. Однако в [27] было объяснено, почему этот критерий не может быть полезен для предсказания скачкообразного распада короткого пузырька. Позже в [28], чтобы определить размер пузырька, был введен коэффициент восстановления давления σ .

Вследствие этого в настоящей работе безразмерный коэффициент восстановления давления, изображенный на рис. 5з, вычислялся по значениям коэффициента давления в положениях при отрыве (C_{ps}) и повторном присоединении (C_{pr}) с использованием следующей формулы:

$$\sigma = \frac{(C_{pr} - C_{ps})}{(1 - C_{ps})}.$$

Теоретически при $\sigma \approx 1.0$ это означает, что существование оторвавшегося ламинарного потока было бы виртуально невозможным, но экспериментально было найдено, что короткие пузыри могут поддерживать себя вплоть до $\sigma = 0.35$, а после этого значения область течения в пузыре мало чем отличается от длинного пузырька. В настоящем исследовании наблюдалось, что $\sigma_{\max} \approx 0.15$ и, следовательно, пузырь остается коротким при всех трех разных рассмотренных числах Рейнольдса и значения σ возрастают с увеличением углов атаки, подобно тому, что было изложено в [29].

Поэтому в режиме коротких пузырей σ определяет неперенное восстановление давления, требуемое для повторного присоединения турбулентного пограничного слоя после распада течения. С другой стороны, увеличение σ говорит об уменьшении протяженности режима с оторвавшимся ламинарным потоком, где отрыв тормозится.

2.3.6. Влияние пузырька ламинарного отрыва на аэродинамические коэффициенты сечения прямого крыла. На рис. 6 представлены кривые, показывающие влияние пузырька отрыва на типич-

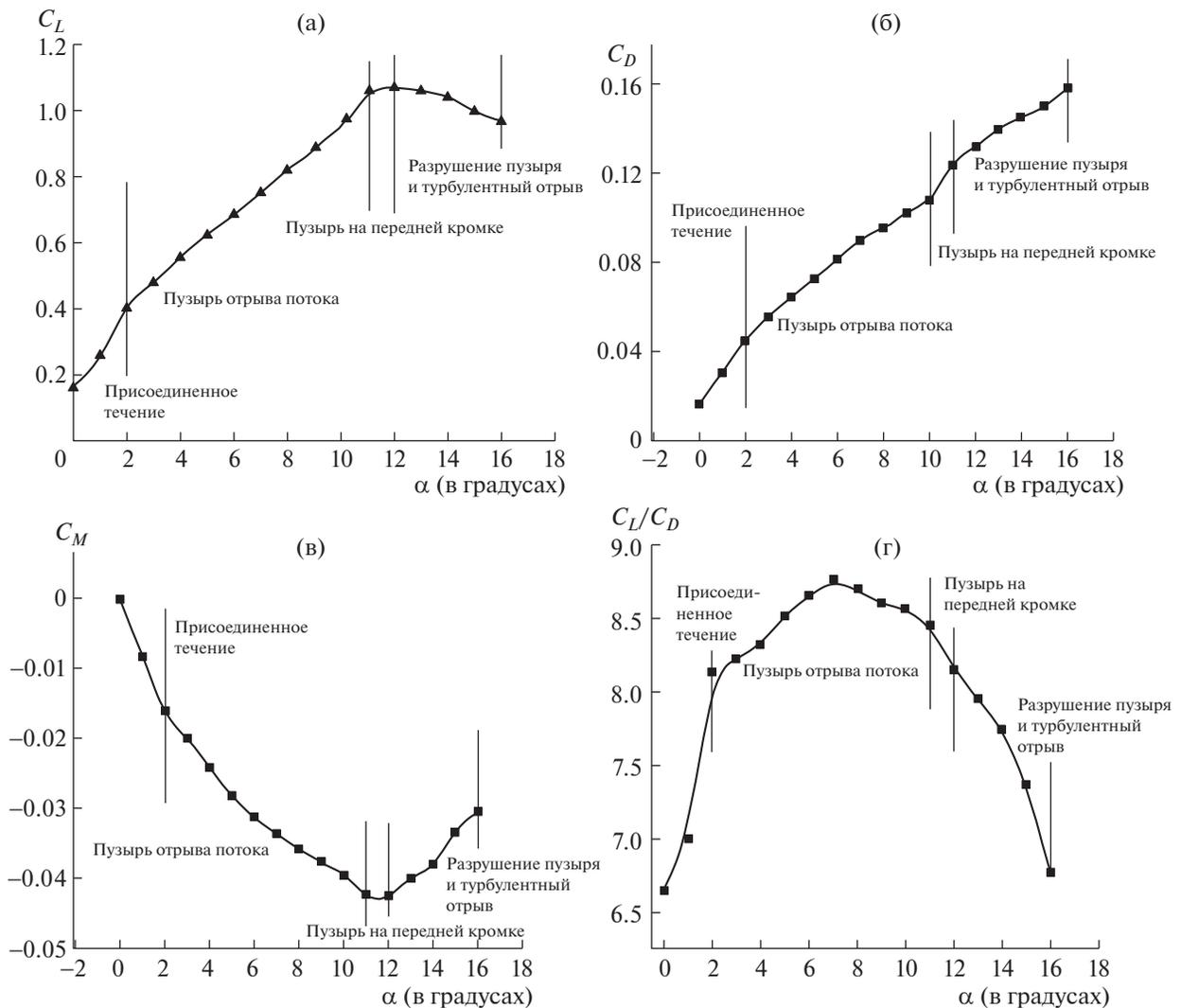


Рис. 6. Аэродинамическое качество корневого сечения трехмерного прямого крыла с пузырьком отрыва.

ные зависимости коэффициентов аэродинамического качества C_L , C_D , C_M и C_L/C_D как функций угла атаки α при $Re = 0.1 \times 10^6$. Все аэродинамические коэффициенты рассчитаны путем интегрирования давления в аэродинамической трубе, измеренного в корневом сечении крыла.

Существование и движение пузырька ламинарного отрыва при изменении угла атаки показано на графике коэффициента давления на рис. 2д, а его возникновение и расположение отмечены на графиках аэродинамических коэффициентов на рис. 6.

Рисунок 6а показывает, что течение полностью безотрывное до $\alpha \approx 3^\circ$, когда пузырек отрыва возникает и продолжает существовать, перемещаясь к передней кромке. Рисунок показывает, что $C_L = C_L(\alpha)$ монотонно растет с увеличением угла атаки вплоть до зоны ламинарного отрыва при небольшом уменьшении наклона кривой.

Как показывает рис. 5д, с ростом угла атаки, вместе с перемещением пузырька ламинарного отрыва в сторону передней кромки крыла, длина его ламинарной части убывает. Соответствующая скорость увеличения наклона кривой, изображенной на рис. 6а, составляет $\Delta C_L/\Delta\alpha = 1.09\pi/\text{рад}$ и $C_{L\text{max}} \approx 1.07$ при $\alpha_{\text{stall}} \approx 12^\circ$, когда пузырек отрыва находится на передней кромке и его ламинарная часть имеет минимальную длину. Отсюда следует, что резкий пик на кривой $C_L = C_L(\alpha)$ в этом месте может быть атрибутирован с пузырьком отрыва, который по большей части является турбулентным. Таким образом, возможность прикрепления ламинарного пузырька отрыва на передней кромке для дальнейшего увеличения C_L также интересна с точки зрения практического применения.

После того, как пузырек отрыва сошел с передней кромки, он лопаётся, поскольку пограничный слой сталкивается с полностью развитым турбулентным отрывом, как это описано в [30]. Это приводит к соответствующей потере в величине C_L , так что $C_{L\min} \approx 0.96$ при $\alpha = 16^\circ$.

Рисунок 6б показывает, что наклон кривой $C_D = C_D(\alpha)$ растёт повсюду, однако рост наклона происходит быстрее в областях после срыва потока и падения скорости за турбулентным отрывом из-за значительного роста сопротивления формы крыла, как показано на рис. 6б. Также интересно отметить, что $C_D = C_D(\alpha)$ изменяется не очень существенно внутри пузырька отрыва в режиме присоединённого течения.

Как показано на рис. 6в, отрицательный коэффициент продольного момента тангажа C_M возрастает по мере того, как пузырек отрыва смещается к передней кромке. Это является ожидаемым, так как C_L возрастает в этих режимах, как показано на рис. 6а. Также имеется резкое увеличение наклона кривой $C_L = C_L(\alpha)$ при $\alpha \approx 10^\circ$ и, как следствие, резкое падение наклона отрицательной кривой $C_M = C_M(\alpha)$ до достижения $C_{M\min}$ примерно при этом же значении α . Однако при значениях α после срыва потока и падения скорости, в режиме распада пузырька увеличение α вызывает рост отрицательных значений C_M по мере того, как C_L падает.

На рис. 6г изображено изменение C_L/C_D как функции α . Эти изменения важны, поскольку они имеют технические приложения на практике. Хорошо видно резкое увеличение значений C_L/C_D вплоть до $\alpha = 3^\circ$ и $(C_L/C_D)_{\max} \approx 8.75$ при $\alpha \approx 7^\circ$ в режиме пузырька отрыва. Это очень существенный результат, скажем, для приложений в виде ветряных электродвигателей как точка максимальной выделения энергии из набегающего потока.

2.4. Расчет параметров пограничного слоя

Очень важно критически оценить параметры пограничного слоя в точке отрыва S , поскольку многие из них влияют на аэродинамическое качество крыльев и профилей.

Рост ламинарного пограничного слоя рассчитывается с использованием квадратурной формулы, обычно называемой формулой Твайтса, которая задается следующим выражением:

$$\left(\frac{\delta}{C}\right)^2 \text{Re} = 0.470 \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^{s/C} \int_0^{s/C} \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^5 d(s/C), \quad (2.1)$$

где $\sqrt{1 - C_p} = \left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)$, известное распределение скорости на поверхности рассчитывается с помощью распределения коэффициента давления, рассматривая зависимость потенциала течения на внешней границе потока как функцию длины дуги (s/C).

Приближенное решение для пограничного слоя может быть получено в предположении, что распределение скорости внутри ламинарного пограничного слоя является многочленом четвертой степени, как это описано в [31].

Соответственно, Параметр Полхаузена Λ имеет следующий вид:

$$\Lambda = \left(\frac{\delta}{C}\right)^2 \text{Re} \frac{d\left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)}{d\left(\frac{s}{C}\right)}. \quad (2.2)$$

Таким образом, толщина вытеснения пограничного слоя δ^* и толщина потери импульса θ , выраженные через толщину пограничного слоя (δ), задаются следующими выражениями:

$$[H] = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}; \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda}{144} \right), \quad (2.3)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}; \quad k = \left(\frac{\theta}{C}\right) \text{Re} \frac{d\left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)}{d\left(\frac{s}{C}\right)}, \quad (2.4)$$

$$\frac{l_1}{\theta_s} = \frac{k}{\text{Re}_{\theta_s}}. \quad (2.5)$$

Таким образом, первый форм-параметр H и второй форм-параметр k могут быть определены из уравнения (2.4).

В точке отрыва S , как найдено для следующих значений параметров, имеют место $\Lambda = -12$, $H = 3.5$ и $k = -0.1567$ [32]. Таким образом, параметры пограничного слоя теперь могут быть вычислены из разных экспериментальных данных с использованием этих значений в уравнениях (2.3) и (2.4).

На рис. 7а и 7б показано влияние локального числа Рейнольдса в точке отрыва, т.е. числа Re , вычисленного по толщине пограничного слоя Re_{δ_s} , по толщине вытеснения $Re_{\delta_s^*}$ и по толщине потери импульса Re_{θ_s} в зависимости от угла атаки для двух разных значений Re , рассчитанных по длине хорды. Нижний индекс s обозначает точку отрыва. В этом случае наблюдается значение $Re_{\delta_s^*} > 500$, что опять означает, что пузырек отрыва может быть отнесен к категории коротких пузырьков, как описано в [2]. Это другой критерий, чтобы охарактеризовать ламинарный пузырек отрыва, отличный от критерия, предложенного в [28]. Интересно, что локальное число Рейнольдса пограничного слоя в точке отрыва почти постоянно для диапазонов зоны ламинарного пузыря отрыва при разных α . Это продвигает устойчивость сдвигового слоя внутри зоны ламинарного отрыва при изменении α , что неизбежно уменьшает шансы на появление резкого срыва потока на передней кромке.

Из рис. 7в можно видеть значительную численную корреляцию между безразмерной длиной пузырька и толщиной потери импульса, вычисленную по числу Рейнольдса в точке отрыва Re_{θ_s} (см. уравнение (2.5)), как предложено в [23].

Для настоящих экспериментальных результатов значение k определялось из средних значений коэффициента давления и было найдено равным $\approx 2.11 \times 10^4$, что меньше предсказанного в [1, 10], где оно было найдено равным $\approx 4 \times 10^4$.

2.5. Характеристики турбулентности в оторвавшемся сдвиговом слое

Вместе с измерениями поверхностного давления производился сравнительный анализ измерений скорости для того, чтобы получить сведения об оторвавшемся сдвиговом слое с помощью лазерного термоанемометрического измерения скорости при $Re = 0.1 \times 10^6$. Чтобы изучить природу отрыва и характеристики ламинарно-турбулентного перехода в режиме оторвавшегося сдвигового слоя, существенно знать продольные изменения параметров турбулентного потока вдоль по поверхности крыла.

На рис. 7г изображены профили среднеквадратичной скорости в продольном направлении при $\alpha = 6^\circ$ и $Re = 0.1 \times 10^6$ над корневым сечением поверхности крыла. Видно, что интенсивность турбулентности (TI) возрастает вниз по потоку от поверхности крыла, что показывает рост возмущений потока в пределах оторвавшегося сдвигового слоя.

Интенсивность турбулентности имеет максимум при $x/C = 0.45$, что является свидетельством положения точки перехода в пузыре отрыва. Это аналогично тому, что было получено из измерений среднего поверхностного давления, показанных на рис. 3б, и также близко напоминает переходные характеристики пузырька отрыва, описанные в [33]. Вниз по потоку от точки перехода также наблюдались широкие единичные пики, общие для турбулентных пограничных слоев [17].

На рис. 7е показаны продольные изменения максимальной интенсивности турбулентности и пульсации среднеквадратичного давления при $\alpha = 6^\circ$. Как и ранее, оценки положения ламинарно-турбулентного перехода, рассчитанные из измерений среднего давления на поверхности, обозначены символом T .

Можно видеть, что максимальная интенсивность турбулентности TI_{\max} начинает расти вниз по потоку от точки перехода и достигает экстремума в точке ламинарно-турбулентного перехода ($x/C = 0.45$) и затем убывает. Увеличение магнитуды пульсаций давления также повторяет рост возмущений непосредственно перед присоединением сдвигового слоя. Магнитуда пульсаций среднеквадратичного значения пульсаций поверхностного давления существенно меньше TI_{\max} , возможно, из-за значительного расстояния между ядром оторвавшегося сдвигового слоя и поверхностью крыла в точке перехода [17].

Был проведен статистический анализ продольной скорости, результаты которого показаны на рис. 7д. На этом рисунке приведена экспериментальная статистика распределений продольной скорости для четырех разных положений x/C над корневым сечением крыла при $Re = 0.1 \times 10^6$.

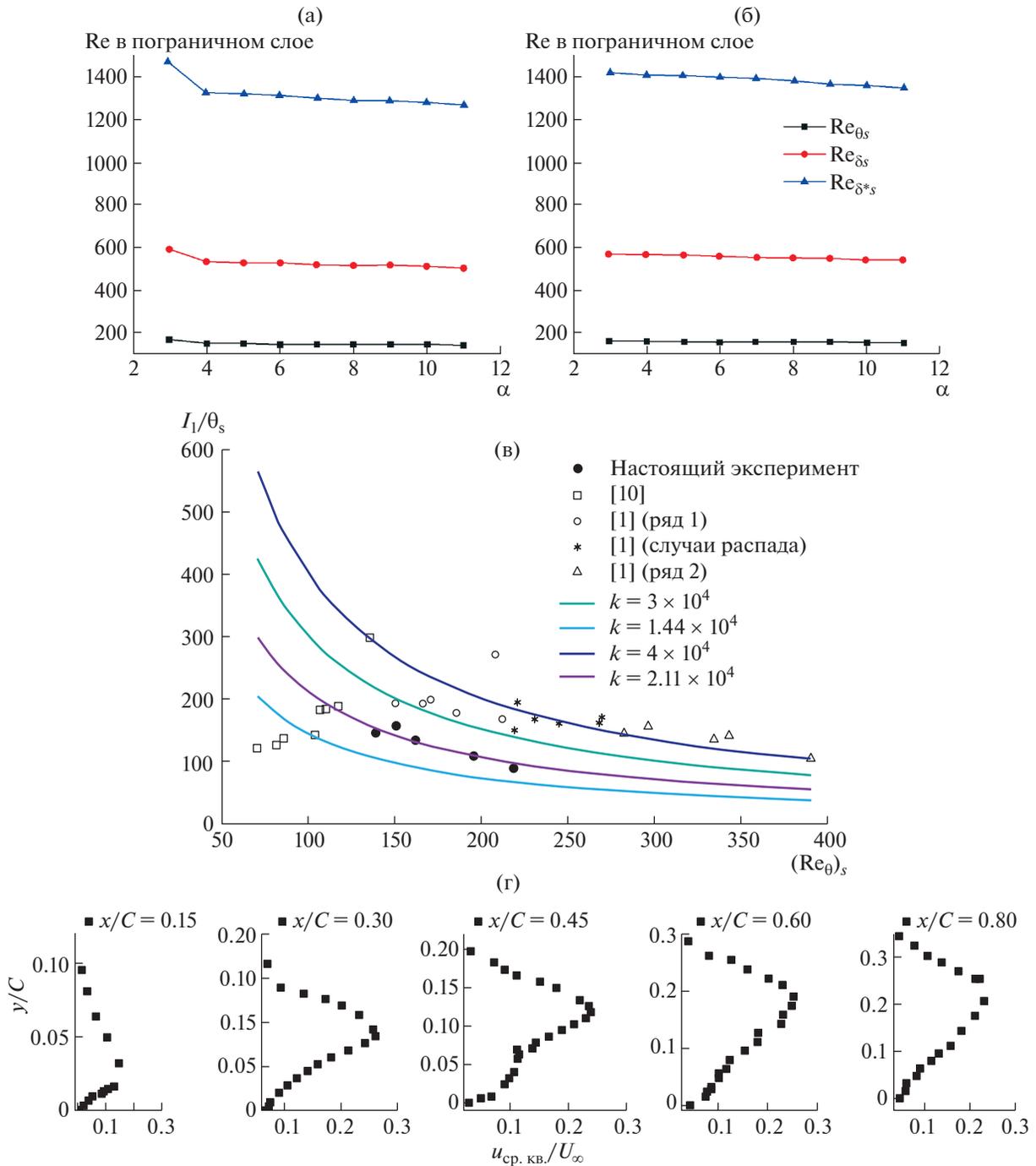


Рис. 7. Анализ поведения пограничного слоя: влияние числа Рейнольдса пограничного слоя при отрыве для чисел Рейнольдса 0.1×10^6 (а) и 0.115×10^6 (б), влияние Re_{θ} на ламинарный пузырек при отрыве (в), профили продольной скорости (г), продольные распределения коэффициентов асимметрии и эксцесса (д), интенсивность турбулентности и среднеквадратичная скорость при разных положениях x/C (е), и эксцесс как функция асимметрии на основе компонент продольной скорости при отрыве (ж).

Коэффициенты асимметрии $S(u)$ и эксцесса (четвертый центральный момент) $F(u)$ были рассчитаны по распределениям продольной скорости. В данном случае течение показывает схожее распределение при всех разных положениях x/C . Вначале коэффициент асимметрии уменьшается, а после этого наконец становится постоянным в большей части внешней области потока, где формируется плато. Аналогичное согласие также справедливо для распределения коэффициентов эксцесса в четырех положениях вдоль хорды. Из изменения коэффициента эксцесса можно

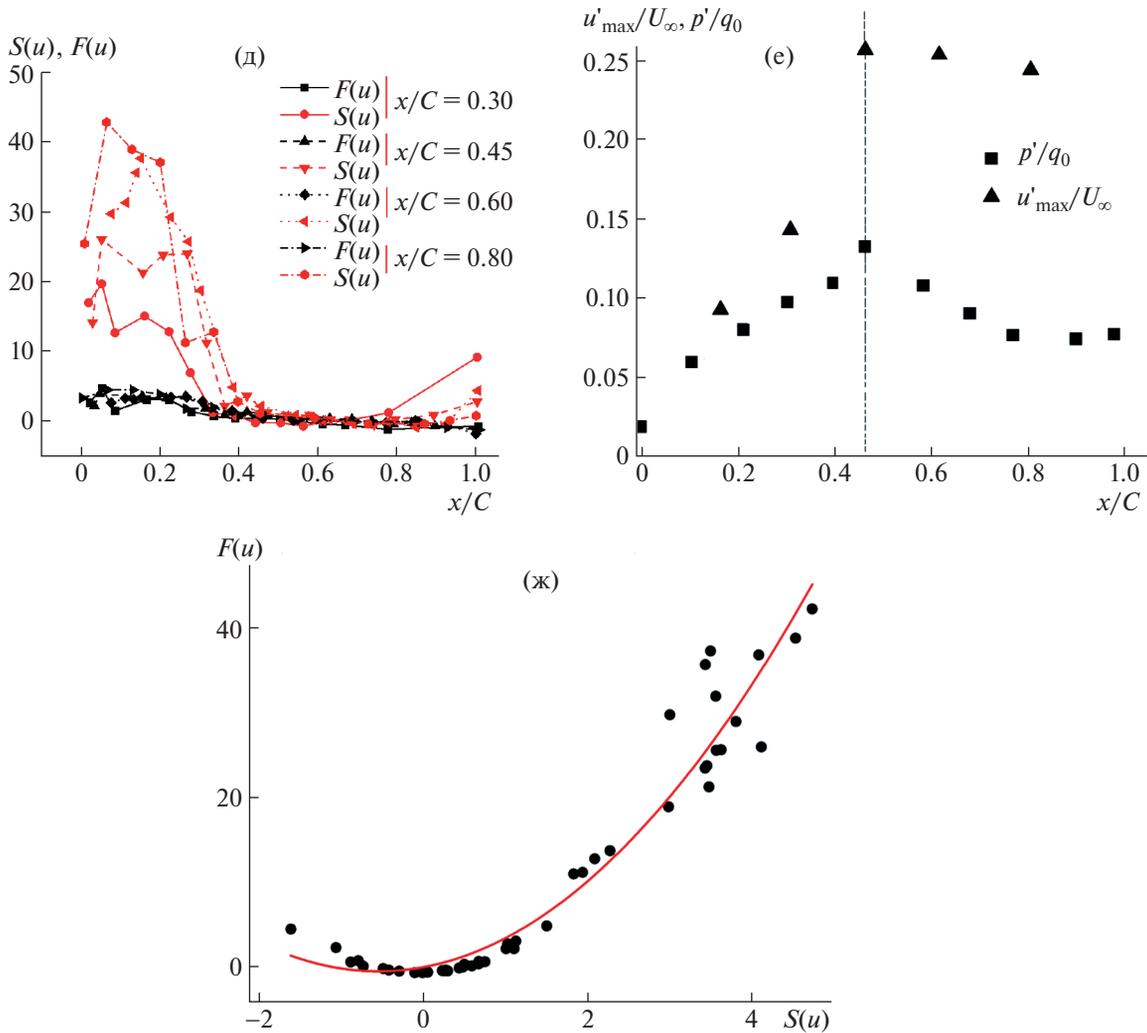


Рис. 7. Окончание.

также видеть, что распределения продольной скорости больше, чем средняя величина скорости около стенки. В нормальном распределении коэффициент асимметрии равен нулю, а эксцесс равен 3. Таким образом, ни коэффициент асимметрии, ни эксцесс не приближаются к их значениям в нормальном распределении при приближении к стенке.

В [18, 34] похожее поведение было описано для различных более простых геометрий. Эти распределения, отличные от нормального, могут быть отнесены к трехмерным когерентным петлеобразным структурам, возникающим при движении жидкости [35]. Найдено, что в когерентном движении жидкости существуют эжекция, движение жидкости с небольшой скоростью, направленное от стенки вовне и снос, движение жидкости с большой скоростью, направленное к стенке. Распределение продольной скорости с положительной асимметрией в пристеночной области обусловлено сносами высокоскоростных потоков при $u' > 0$ и эжекциями низкоскоростных течений, вызванных распределением с отрицательной асимметрией при $u' < 0$ [36]. Интересно также отметить, что $S(u)_{\max}$ и $F(u)_{\max}$ возрастают вдоль хорды вниз по потоку, также как вместе с этим продолжает возрастать интенсивность турбулентности.

На рис. 7ж продемонстрирована внутренняя взаимосвязь между статистическими характеристиками $S(u)$ и $F(u)$ для распределений продольной скорости при различных положениях x/C в пределах пузырька отрыва. В [37] была показана корреляция между статистическими моментами высших порядков при графической обработке и построения графиков многочисленных данных для различных измерений в виде $F(u) = f(S_u)^2$. В настоящем исследовании, используя метод наименьших квадратов, найдена глобальная корреляция положений точек (S, T, R) для разных зна-

чений x/C в пределах пузыря ламинарного отрыва при $Re \approx 0.1 \times 10^6$: $F(u) = 1.63S(u)^2 + 1.80S(u) + 0.1388$ с скорректированным значением R^2 , равным 0.93621. Минимальное значение коэффициента эксцесса, найденное из экспериментально полученных данных, несколько меньше эксцесса для нормального распределения вероятностей ($S(u) = 3$). Аналогичные данные были описаны в [34] для турбулентного пульсирующего течения, в котором F и S были связаны корреляционной зависимостью $F(u) = 1.56 S(u)^2 + 0.15S(u) + 2$.

ВЫВОДЫ

Чтобы изучить характеристики ламинарного пузырька отрыва на основании измерений поверхностного давления на крыле и лазерной термоанемометрии скорости потока, проведены экспериментальные исследования в корневом сечении трехмерного прямого крыла. Для исследований, выполненных в рассмотренном случае на пузырьке ламинарного отрыва, перечислены умозаключения, касающиеся его движения и поведения, чтобы проиллюстрировать трехмерные характеристики пузырька отрыва. Кроме того, для обоснования этих умозаключений использован статистический анализ данных, полученных в аэродинамической трубе.

Для диапазона чисел Рейнольдса, использованных в настоящей работе, ламинарная часть пузырька уменьшается с ростом Re . Однако изменение числа Рейнольдса не уничтожает полностью ламинарную часть пузырька и, как найдено, наименьшее значение числа Рейнольдса, вычисленное по длине пузырька, равно $Re_{L1} \approx 10000$ при $\alpha = 9^\circ$. Таким образом, отрыв ламинарного потока не полностью является следствием изменения числа Рейнольдса и дополнительное изменение угла атаки α является существенным для появления отрыва и перемещения точки отрыва. С другой стороны, как угол атаки α , так и число Рейнольдса, оказывают значительное воздействие на смещение точек ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения потока. Как следствие, найдено, что смещение точки отрыва вверх по потоку является более сглаженным, чем перемещение точек ламинарно-турбулентного перехода и повторного присоединения потока.

Эти выводы далее покреплены в настоящей работе доказательствами, использующими статистический анализ. В частном случае, описанном в литературе для диапазона больших значений чисел Рейнольдса, длина ламинарной части пузырька остается почти постоянной. В этом случае влияние угла атаки α или диапазона меньших значений числа Рейнольдса, близких к тем, что были использованы в настоящей работе, не были ранее описаны в литературе.

Как обнаружили результаты масляной визуализации течения на поверхности крыла, пузырек ламинарного отрыва и вихри на кончике крыла существенно взаимодействуют друг с другом вблизи передней кромки крыла. При увеличении угла атаки вихрь на кончике крыла действует более сильно на формирование пузырька ламинарного отрыва вблизи кончика крыла из-за развития двумерного вторичного течения. Это может вынудить течение присоединиться ближе к области кончика крыла при низких значениях числа Рейнольдса потока даже при больших значениях угла атаки, что неизбежно затягивает явление срыва потока и падение скорости.

Анализ коэффициента восстановления давления по поверхности крыла дает возможность предположить, что текущий пузырек отрыва может быть отнесен к категории коротких пузырьков в рассмотренном диапазоне α и чисел Рейнольдса. Из регрессионного анализа также найдено, что угол атаки является доминирующим фактором, определяющим длину пузырька, по сравнению с воздействием числа Рейнольдса.

При увеличении угла атаки пузырек отрыва на корневом сечении крыла смещается в сторону передней кромки, а длина ламинарной части пузырька уменьшается для исследованного диапазона чисел Рейнольдса Re , рассчитанных по длине хорды, а именно $1.0 \times 10^6 < Re_{chord} < 1.25 \times 10^6$. Пузырек ламинарного отрыва находится на передней кромке крыла только в точке срыва потока и падения скорости, по большей части в турбулентном случае, вызывая резкий рост значений C_L . Если этот пузырек ламинарного отрыва может быть закреплен и срыв потока предотвращен на какое-то время, в этом случае добавочное увеличение C_L из-за присутствия пузырька на передней кромке крыла может иметь практическую важность.

Используя методы лазерной термоанемометрии скорости течения, изучены статистические характеристики турбулентности в оторвавшемся сдвиговом слое при различном положении x/C точек (S , T , R). Значения как асимметрии, так и эксцесса отклоняются от значений этих величин для нормального распределения при приближении ближе к стенке. Ближе к поверхности крыла

также наблюдается бóльшая асимметрия пульсаций скорости, что происходит из-за наличия когерентных структур, вызванных локальными пульсациями скорости в потоке жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaster M.* The Structure and Behaviour of Laminar Separation Bubbles. TIL. 1967.
2. *Owen P., Klanfer L.* On the Laminar Boundary Layer Separation from the Leading Edge of a Thin Aerofoil. Citeseer. 1955.
3. *Lissaman P.* Low-Reynolds-number airfoils // Annual Review of Fluid Mechanics. 1983. V. 15. № 1. P. 223–239.
4. *Russell J.* Length and bursting of separation bubbles: A physical interpretation // Science and Technology of Low Speed and Motorless Flight. 1979. CP2085. Part 1. NASA Langley Research Center. Hampton. VA. P. 177–202.
5. *Bragg M., Khodadoust A., Spring S.* Measurements in a leading-edge separation bubble due to a simulated airfoil ice accretion // AIAA Journal. 1992. V. 30. № 6. P. 1462–1467.
6. *Muelle T.J., Pohlen L.J., Conigliaro P.E., Jansen B.J.* The influence of free-stream disturbances on low Reynolds number airfoil experiments // Experiments in Fluids. 1983. V. 1. № 1. P. 3–14.
7. *Mueller T.J., DeLaurier J.D.*, Aerodynamics of small vehicles // Annual Review of Fluid Mechanics. 2003. V. 35. № 1. P. 89–111.
8. *Burgmann S., Schroder W.* Investigation of the vortex induced unsteadiness of a separation bubble via time-resolved and scanning piv measurements // Experiments in Fluids. 2008. V. 45. № 4. P. 675.
9. *Zhang W., Hain R., Kahler C.J.* Scanning PIV investigation of the laminar separation bubble on a sd7003 airfoil // Experiments in Fluids. 2008. V. 45. № 4. P. 725–743.
10. *O'Meara M., Mueller T.* Laminar separation bubble characteristics on an airfoil at low Reynolds numbers // AIAA Journal. 1987. V. 25. № 8. P. 1033–1041.
11. *Boutilier M.S., Yarusevych S.* Parametric study of separation and transition characteristics over an airfoil at low Reynolds numbers // Experiments in Fluids. 2012. V. 52. № 6. P. 1491–1506.
12. *Saliveros E.* The aerodynamic performance of the NACA-4415 aerofoil section at low Reynolds numbers. 1988. PhD thesis. University of Glasgow.
13. *Boiko A., Dovgal A., Zanin B.Y., Kozlov V.* Three-dimensional structure of separated flows on wings // Thermophysics and Aeromechanics. 1996. V. 3. № 1. P. 1–13.
14. *Занин Б.Ю., Зверков И.Д., Козлов В.В., Павленко А.М.* Вихревая структура отрывных течений на моделях крыльев при малых скоростях потока // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 113–120.
15. *Zverkov I., Zanin B., Kozlov V.* Disturbances growth in boundary layers on classical and wavy surface wings // AIAA Journal. 2008. V. 46. № 12. P. 3149–3158.
16. *Dovgal A., Zanin B.Y., Kozlov V.V.* Global response of laminar flow separation to local flow perturbations // Thermophysics and Aeromechanics. 2012. V. 19. № 1. P. 1–8.
17. *Gerakopoulos R., Yarusevich S.* Novel time-resolved pressure measurements on an airfoil at a low Reynolds number // AIAA Journal. 2012. V. 50. № 5. P. 1189–1200.
18. *Vallikivi M., Hultmark M., Smits A.J.* Turbulent boundary layer statistics at very high Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 779. P. 371–389.
19. *Ananda G.P., Sukumar P.P., Selig M.* Measured aerodynamic characteristics of wings at low Reynolds numbers // Aerospace Science and Technology. 2015. V. 42. P. 392–406.
20. *Kline S.J., McClintock F.A.* Describing uncertainties in single-sample experiments // Experimental Thermal and Fluid Science. 1953. V. 75. P. 3–8.
21. *Moffat R.J.* Using uncertainty analysis in the planning of an experiment // Journal of Fluids Engineering. 1985. V. 107. № 2. P. 173–178.
22. *Gence M.S., Ozkan G., Ozden M., Kirics M.S., Yildiz R.* Interaction of tip vortex and laminar separation bubble over wings with different aspect ratios under low Reynolds numbers // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2018. V. 232. № 22. P. 4019–4037.
23. *Horton H.P.* Laminar separation bubbles in two and three dimensional incompressible flow. PhD thesis, Queen Mary College, 1968.
24. *Popov A.V., Botez R.M., Labib M.* Transition point detection from the surface pressure distribution for controller design // Journal of Aircraft. 2008. V. 45. № 1. P. 23–28.
25. *Shah M.S., Haseeb Jasir, Kitaba Ming L.C.* Experimental flow visualization over a two-dimensional airfoil at low Reynolds number // 5th Brunei International Conference on Engineering and Technology (BICET). 2014. IET.
26. *Truckenbrodt E.* An approximate method for the calculation of the laminar and turbulent boundary layer by simple quadrature for two-dimensional and axially symmetric flow // Journal of the Aeronautical Sciences. 1952. V. 19. № 6. P. 428–429.

27. *Schubauer G.B., Klebanoff P.S.* Contributions on the mechanics of boundary-layer transition // NASA Technical Note 3489. 1955.
28. *Gault D.E.* An experimental investigation of regions of separated laminar flow // NASA Technical Note, 1955. 3505.
29. *Crabtree L.* The formation of regions of separated flow on wing surfaces. HM Stationery Office, 1959.
30. *Yen S.C., Huang L.C.* Flow patterns and aerodynamic performance of unswept and swept-back wings // Journal of Fluids Engineering, 2009. V. 131. № 11. P. 111101.
31. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory, New York: McGraw-Hill, 1979.
32. *Sharma D.M., Poddar K.* Experimental investigations of laminar separation bubble for a flow past an airfoil // ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea, and Air. P. 1167–1173.
33. *Brendel M., Mueller T.J.* Boundary-layer measurements on an airfoil at low Reynolds numbers // Journal of Aircraft. 1988. V. 25. № 7. P. 612–617.
34. *Van der A.D., Scandura P., O'Donoghue T.* Turbulence statistics in smooth wall oscillatory boundary layer flow // Journal of Fluid Mechanics. 2018. V. 849. P. 192–230.
35. *Lelouvetel J., Bigillon F., Doppler D., Vinkovic I., Champagne J.Y.* Experimental investigation of ejections and sweeps involved in particle suspension // Water Resources Research. 2009. V. 45. № 2.
36. *Zhou J.F., Zhang Q., Li J.C.* Probability distribution function of near-wall turbulent velocity fluctuations // Applied Mathematics and Mechanics. 2005. V. 26. № 10. P. 1245–1254.
37. *Jovanovic J., Durst F., Johansson T.* Statistical analysis of the dynamic equations for higher-order moments in turbulent wall bounded flows // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1993. V. 5. № 11. P. 2886–2900.

Перевод с англ. Е.А. Пушкаря