СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 3, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 291–300

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

ГЛОБАЛЬНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ

© 2022 г. **А. А. Гринь, К. Р. Шнайдер**

Для системы Ван дер Поля аналитически построены две замкнутые алгебраические кривые, образующие кольцо Пуанкаре–Бендиксона для всех значений её параметра. Внутренняя граница кольца представляет собой замкнутую кривую нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса, поэтому это кольцо содержит не более одного предельного цикла. Внешняя граница кольца строится с помощью специальной процедуры.

DOI: 10.31857/S0374064122030013, **EDN:** BWZAUY

Введение. В качественной теории автономных систем на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

фундаментальную роль играет специальный класс ω-предельных множеств, называемых предельными циклами. Общий подход к доказательству существования хотя бы одного предельного цикла в системе (1) состоит в построении на фазовой плоскости такого кольца (кольцеобразной области) $\mathcal{A}$, которое не содержит состояний равновесия и границы которого представляют собой простые замкнутые кривые (называемые далее *овалами*), обладающие тем свойством, что любая траектория системы (1) сразу после попадания в некоторый момент времени на границу кольца $\mathcal{A}$ входит в него либо при увеличении, либо при уменьшении времени t (см., например, [1, с. 159]). Указанное кольцо называют *кольцом Пуанкаре–Бендиксона*, поскольку применение теоремы Пуанкаре–Бендиксона [2, с. 187; 3, с. 244] к этому кольцу гарантирует существование хотя бы одного лежащего в нём предельного цикла системы (1). Далее мы называем *трансверсальными овалами* системы (1) гладкие замкнутые кривые, которые не проходят через особые точки системы и такие, что в любой их точке касательный вектор и вектор поля системы не коллинеарны. Будем также предполагать, что границы кольца Пуанкаре–Бендиксона являются трансверсальными овалами.

Ключевая проблема в этом подходе заключается в построении трансверсальных векторному полю овалов. Общей процедуры их построения нет. Ранее кольца Пуанкаре–Бендиксона были найдены для систем типа Льенара; в них границы состоят из кусочно гладких кривых, построенных довольно сложным образом (см., например, [4; 5, с. 249; 3, с. 253; 1, с. 303; 6]. В недавних работах [7, 8] для полиномиальных систем (1) построены гладкие трансверсальные овалы, являющиеся границами кольца Пуанкаре–Бендиксона. Для обеих работ характерно, что каждый трансверсальный овал строится с помощью аппроксимации траекторий системы (1). В статье [7] для построения внутренней и внешней границ кольца $\mathcal{A}$ требуется аппроксимация двух разных траекторий, а в статье [8] – аппроксимация только одной траектории, но предполагается, что эта траектория является предельным циклом.

В данной работе для системы Ван дер Поля для построения её трансверсальных овалов, зависящих от параметра λ системы и образующих кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{A}(\lambda)$, предлагается чисто аналитический подход, который не требует аппроксимации какой-либо траектории. Особенности этого подхода заключаются в следующем.

(a) Овалы представляют собой алгебраические кривые и образуют кольцо Пуанкаре–Бендиксона при всех значениях параметра λ, при этом никаких ограничений на расположение содержащегося в нём предельного цикла не предполагается (кольцо Пуанкаре–Бендиксона, при построении которого не накладывается никаких ограничений на значения параметра и локализацию содержащегося в нём предельного цикла, будем называть *глобальным*, а поскольку его границы, как сказано, – алгебраические кривые, то *глобальным алгебраическим* кольцом Пуанкаре–Бендиксона).

(б) Внутренний трансверсальный овал состоит из овала, содержащегося в множестве нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса для системы Ван дер Поля. Это свойство означает, что система Ван дер Поля имеет не более одного предельного цикла $\Gamma(\lambda)$ и, если цикл $\Gamma(\lambda)$ существует, он является грубым.

(в) Способ построения внешнего трансверсального овала состоит в нахождении многочлена $O(x,y,\lambda)$ от x и y вида $\sum_{i=0}^{2N} p_i(x,\lambda)y^i$, где $N\in\mathbb{N}$ – некоторое число, такого, что его множество $\mathcal{O}$ нулевого уровня содержит овал, который можно использовать в качестве внешней границы. Полиномы $p_i(x,\lambda)$ от переменной x с коэффициентами, зависящими от λ, определяются с помощью решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

(г) Если $\mathcal{A}(\lambda)$ является кольцом Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля, то по нему можно построить кольцо Пуанкаре–Бендиксона для любой системы на плоскости, которая линейно топологически эквивалентна системе Ван дер Поля.

Структура работы следующая. В п. 1 содержатся нужные в дальнейшем сведения о функции Дюлака–Черкаса и доказывается инвариантность свойства трансверсальности для овала при линейном гомеоморфизме. В п. 2 вводятся три системы, которые линейно топологически эквивалентны уравнению Ван дер Поля при $\lambda>0$. Построению кольца Пуанкаре–Бендиксона, внутренняя граница которого представляет собой множество нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса, посвящён п. 3. В этом пункте подробно описывается новая процедура построения внешней границы в виде алгебраического овала. В п. 4 представлены глобальные алгебраические кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля и двух линейно топологически эквивалентных систем, включая сингулярно возмущённую систему.

1. Предварительные сведения. Начнём с определения линейной топологической эквивалентности планарных автономных систем. Далее предполагаем, что выполнено условие

(A). Множества $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_1$ – открытые подмножества плоскости $\mathbb{R}^2$, Λ – открытый интервал прямой $\mathbb{R}$, функции P и Q принадлежат классу $C^{1\ 0}_{(x,y)\lambda}(\mathcal{G}\times\Lambda,\mathbb{R})$, а функции P_1 и Q_1 – классу $C^{1\ 0}_{(x,y)\lambda}(\mathcal{G}_1\times\Lambda,\mathbb{R})$.

При $\lambda\in\Lambda$ рассмотрим планарную автономную параметрическую систему

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y,\lambda),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y,\lambda) \tag{2}$$

на множестве $\mathcal{G}$ и планарную автономную параметрическую систему

$$\frac{du}{d\tau}=P_1(u,v,\lambda),\quad \frac{dv}{d\tau}=Q_1(u,v,\lambda) \tag{3}$$

на множестве $\mathcal{G}_1$.

Определение 1. Пусть выполняется условие (A). Системы (2) и (3) называются (*линейно*) *топологически эквивалентными*, если для каждого $\lambda\in\Lambda$ существует (линейный) гомеоморфизм $h(\lambda)$, отображающий $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}_1$ и переводящий траектории системы (2) в траектории системы (3), а независимые переменные t и τ этих систем связаны равенством $\tau=g(\lambda)t$, где $g(\lambda)$ – возрастающий гомеоморфизм интервала Λ.

Согласно этому определению топологически эквивалентные планарные автономные системы имеют одинаковую топологическую структуру своих траекторий. Позже будет использована следующая

Лемма 1. *Пусть выполняется условие (A) и системы (2) и (3) линейно топологически эквивалентны при $\lambda\in\Lambda$, где соответствующий линейный гомеоморфизм представляется 2×2-матрицей $T(\lambda)$. Тогда если $\mathcal{O}(\lambda)$ – трансверсальный овал системы (2), то $T(\lambda)\mathcal{O}(\lambda)$ – трансверсальный овал системы (3).*

Доказательство. Пусть $p(\lambda)$ – точка на $\mathcal{O}(\lambda)$ такая, что вектор $t_a(\lambda)$ поля системы (2) в точке $p(\lambda)$ не коллинеарен касательному вектору $t_o(\lambda)$ к овалу $\mathcal{O}(\lambda)$ в точке $p(\lambda)$.

Если предположить, что вектор $T(\lambda)t_a(\lambda)$ векторного поля системы (3) в точке $T(\lambda)p(\lambda)$ коллинеарен касательному вектору $T(\lambda)t_o(\lambda)$ к овалу $T(\lambda)\mathcal{O}(\lambda)$ в точке $T(\lambda)p(\lambda)$, то из обратимости матрицы $T(\lambda)$ при $\lambda \in \Lambda$ следует, что вектор $t_a(\lambda)$ векторного поля системы (2) в точке $p(\lambda)$ коллинеарен касательному вектору $t_o(\lambda)$ к овалу $\mathcal{O}(\lambda)$ в $p(\lambda)$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Важным инструментом качественного исследования топологической структуры траекторий системы (2) является функция Дюлака (см., например, [3, с. 264]). Для её определения обозначим через $X(\lambda)$ векторное поле, задаваемое системой (2).

Определение 2. Пусть выполняется условие (A). Функция $B \in C^{1\ 0}_{(x,y)\lambda}(\mathcal{G}\times\Lambda,\mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака* для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ в области $\mathcal{G}$, если выражение

$$\operatorname{div}(BX) \equiv \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \equiv (\operatorname{grad} B, X) + B\operatorname{div} X$$

не изменяет знак в $\mathcal{G}$ и обращается в нуль только на множестве нулевой меры Лебега.

Из существования функции Дюлака вытекает следующая оценка числа предельных циклов системы (2) в области $\mathcal{G}$ [2, с. 189].

Предложение. *Пусть выполняется условие (A) и в p-связной $(p \geqslant 1)$ области $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ существует функция Дюлака B. Тогда система (2) имеет не более $p-1$ предельных циклов, целиком расположенных в $\mathcal{G}$.*

Метод функции Дюлака обобщён Л.А. Черкасом в 1997 г. (см. [9]). Соответствующая обобщённая функция Дюлака, называемая также функцией Дюлака–Черкаса (см. [10]), определяется следующим образом.

Определение 3. При выполнении условия (A) функция $\Psi \in C^{1\ 0}_{(x,y)\lambda}(\mathcal{G}\times\Lambda,\mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака–Черкаса* системы (2) в области $\mathcal{G}$, если существует действительное число $\kappa \neq 0$ такое, что

$$\Phi := (\operatorname{grad}\Psi, X) + \kappa\Psi\operatorname{div} X > 0 \quad (<0) \quad \text{в} \quad \mathcal{G}. \tag{4}$$

Замечание 1. В случае $\kappa = 1$ функция Ψ является функцией Дюлака.

Замечание 2. Условие (4) можно ослабить, допуская, что функция Φ может обращаться в нуль в $\mathcal{G}$ на множестве меры нуль и что ни один овал этого множества не является предельным циклом системы (2).

Аналитический подход к построению функций Дюлака–Черкаса для класса систем Льенара описан в [11].

Введём множество $\mathcal{W}(\lambda) := \{(x,y)\in\mathcal{G} : \Psi(x,y,\lambda) = 0\}$.

Из неравенства (4) и замечания 2 вытекает

Лемма 2. *Если подмножество $\mathcal{W}(\lambda)$ содержит овал, то он является трансверсальным овалом системы (2).*

Следующую теорему можно найти в [9].

Теорема 1. *Пусть при выполнении условия (A) функция Ψ является функцией Дюлака–Черкаса для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ в области $\mathcal{G}$. Тогда любой предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ этой системы, расположенный целиком в $\mathcal{G}$, обладает следующими свойствами:*

(i) $\Gamma(\lambda)$ не пересекается с множеством $\mathcal{W}(\lambda)$;

(ii) предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ является грубым;

(iii) устойчивость цикла $\Gamma(\lambda)$ определяется знаком выражения $\kappa\Phi\Psi$ на $\Gamma(\lambda)$.

Следствие. Из свойства (ii) следует, что существование функции Дюлака–Черкаса означает отсутствие у системы (2) кратного предельного цикла.

Следующий результат о верхней границе числа предельных циклов доказан в [10].

Теорема 2. *Пусть при выполнении условия (A) в p-связной области $\mathcal{G}$ для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ существует функция Дюлака–Черкаса Ψ такая, что множество $\mathcal{W}(\lambda)$ состоит из s овалов в $\mathcal{G}$. Тогда система (2) имеет для $\lambda \in \Lambda$ не более $p-1+s$ предельных циклов в $\mathcal{G}$ и все предельные циклы гиперболические.*

В случае $p = s = 1$ теорема 2 формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условия (A) в односвязной области $\mathcal{G}$ для системы (2) при $\lambda \in \Lambda$ существует функция Дюлака–Черкаса Ψ такая, что множество $\mathcal{W}(\lambda)$*

состоит из одного овала. Тогда система (2) имеет при $\lambda \in \Lambda$ *не более одного предельного цикла* $\Gamma(\lambda)$ *в* $\mathcal{G}$. *Если цикл* $\Gamma(\lambda)$ *существует, то он окружает множество* $\mathcal{W}(\lambda)$.

Отметим, что метод функций Дюлака–Черкаса использовался также в работах [12, 13].

2. Система Ван дер Поля и три линейно топологически эквивалентные ей системы. Скалярное автономное параметрическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{5}$$

где λ – вещественный параметр, введено Бальтазаром Ван дер Полем [14] в 1926 г. для описания автоколебаний в триодной схеме. Если заменить t на $-t$ и λ на $-\lambda$, то уравнение (5) не изменится. Таким образом, при изучении фазового портрета системы

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x - \lambda(x^2-1)y, \tag{6}$$

которая соответствует уравнению (5), можно ограничиться случаем $\lambda > 0$.

Хорошо известно (см., например, [3, с. 254]), что система (6) имеет для любого $\lambda \neq 0$ единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$, который рождается из периодического решения, когда параметр λ переходит через нулевое значение.

С помощью линейного преобразования

$$u = x, \quad \lambda v = y, \quad \tau = \lambda t \tag{7}$$

получаем из системы (6) при $\lambda > 0$ линейно топологически эквивалентную ей систему

$$\frac{du}{d\tau} = -v, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\lambda^2}u - (u^2-1)v. \tag{8}$$

Для системы (8) при достаточно больших λ в работе [6] построено кольцо Пуанкаре–Бендиксона такое, что внутренняя его граница при любом λ представляет собой трансверсальный овал системы (8) и определяется множеством нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса для этой системы, а для построения внешней границы кольца разработана специальная методика, основанная на теории поворота векторных полей.

Далее представлен новый подход к построению трансверсального алгебраического овала системы, который при любом $\lambda > 0$ можно использовать в качестве внешней границы $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ для глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{B}(\lambda)$ системы (8). Этот подход применён в работе к построению трансверсальных алгебраических овалов системы Ван дер Поля и получающихся из этой системы линейными преобразованиями вводимых ниже дифференциальных систем (10) и (12).

Используя линейное преобразование

$$u = \sqrt{\lambda}x, \quad v = \sqrt{\lambda}y, \tag{9}$$

получаем из системы (6) линейно топологически эквивалентную ей систему

$$\frac{du}{dt} = -v, \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v - u^2 v. \tag{10}$$

Понятно, что системы (6) и (10) имеют при $\lambda > 0$ единственный предельный цикл, но в отличие от системы (6) предельный цикл системы (10) порождается бифуркацией Андронова–Хопфа, когда параметр λ переходит через нулевое значение.

Наконец, применяя к системе (6) при $\lambda > 0$ линейное преобразование

$$u = x, \quad v = \lambda y, \quad \tau = t/\lambda, \quad \varepsilon = 1/\lambda^2, \tag{11}$$

получаем линейно топологически эквивалентную ей систему

$$\frac{du}{d\tau} = -v, \quad \varepsilon\frac{dv}{d\tau} = u - (u^2-1)v, \tag{12}$$

представляющую собой при больших значениях λ сингулярно возмущённую систему.

В следующем пункте строится глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы (8).

3. Построение глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (8). Система (8) имеет при всех λ в начале координат единственное состояние равновесия, являющееся фокусом или узлом. Таким образом, любой её предельный цикл должен окружать начало координат. Наша цель – построить два непересекающихся алгебраических трансверсальных овала $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ и $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ этой системы, окружающих начало координат, которые можно взять в качестве границ алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{B}(\lambda)$. Согласно лемме 2 одна из возможностей построения трансверсального овала автономной системы состоит в использовании множества нулевого уровня $\mathcal{W}(\lambda)$ функции Дюлака–Черкаса. В работе [6] доказан следующий результат.

Лемма 3. *Полином* $\Psi(u,v,\lambda) := u^2+\lambda^2v^2-1$ *представляет собой функцию Дюлака–Черкаса для системы (8) при* $\lambda>0$ *в* $\mathbb{R}^2$, *множество нулевого уровня* $\mathcal{W}(\lambda)$ *которой является эллипсом*

$$\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda) := \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u^2+\lambda^2v^2=1\}.$$

Производная функции Ψ *в силу системы (8) на* $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ *положительна за исключением точек* $(-1,0)$ *и* $(1,0)$, *в которых эта производная принимает нулевое значение.*

Согласно лемме 2 справедлива

Лемма 4. *Эллипс* $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ *может быть использован в качестве внутренней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (8) при любых* $\lambda>0$.

Опишем новый подход, о котором говорилось выше, к построению трансверсального алгебраического овала системы (8). Этот овал можно использовать в качестве внешней границы $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ для глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона.

Наша дальнейшая цель заключается в построении многочлена $O(u,v,\lambda)$ от u и v в одном из следующих видов:

$$O(u,v,\lambda) := \sum_{i+j=0}^{2N} a_{ij}(\lambda)u^iv^j, \quad O(u,v,\lambda) := \sum_{j=0}^{2N} p_j(u,\lambda)v^j \quad \text{или} \quad O(u,v,\lambda) := \sum_{i=0}^{2N} q_i(v,\lambda)u^i,$$

где N – натуральное число, которое необходимо выбрать, p_j – многочлены от u с коэффициентами, зависящими от λ, а q_i – многочлены от v с коэффициентами, зависящими от λ, такого, что:

1) множество $\mathcal{N}(\lambda)$, на котором производная функции O в силу системы (8) принимает нулевые значения и изменяет знак, состоит из овала $\mathcal{C}(\lambda)$, окружающего внутреннюю границу $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$;

2) множество нулевого уровня многочлена $O(u,v,\lambda)$ содержит при $\lambda>0$ овал $\mathcal{O}(\lambda)$, окружающий $\mathcal{C}(\lambda)$.

Тогда овал $\mathcal{O}(\lambda)$ представляет собой глобальный трансверсальный алгебраический овал системы (8).

Далее полагаем $N=1$ и используем представление

$$O(u,v,\lambda) := O_0(u,\lambda)+O_1(u,\lambda)v+O_2(u,\lambda)v^2,$$

где функции $O_i(u,\lambda)$, $i=0,1,2$, являются полиномами по u, которые нужно определить.

Дифференцируя функцию O в силу системы (8), получаем

$$\left.\frac{dO(u,v,\lambda)}{d\tau}\right|_{(8)} = O_1(u,\lambda)\frac{1}{\lambda^2}u+\left(-\frac{dO_0(u,\lambda)}{du}-O_1(u,\lambda)(u^2-1)+O_2(u,\lambda)\frac{2}{\lambda^2}u\right)v-$$
$$-\left(\frac{dO_1(u,\lambda)}{du}+O_2(u,\lambda)2(u^2-1)\right)v^2-\frac{dO_2(u,\lambda)}{du}v^3. \qquad (13)$$

Для того чтобы множество

$$\mathcal{N}(\lambda) := \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \left.\frac{dO(u,v,\lambda)}{d\tau}\right|_{(8)}=0\right\}$$

в фазовой плоскости содержало овал $\mathcal{C}(\lambda)$, на котором производная $dO(u,v,\lambda)/d\tau|_{(8)}$ изменяет знак, потребуем выполнения тождеств

$$\frac{dO_2(u,\lambda)}{du}\equiv 0,\quad -\frac{dO_0(u,\lambda)}{du}-O_1(u,\lambda)(u^2-1)+O_2(u,\lambda)\frac{2}{\lambda^2}u\equiv 0 \tag{14}$$

и будем предполагать, что функция $O_1(u,\lambda)u$ является чётной по u.

Функцию O_1 будем искать в виде

$$O_1(u,\lambda)\equiv c_1(\lambda)u+c_3(\lambda)u^3; \tag{15}$$

в силу (14) имеем

$$O_2(u,\lambda)\equiv c_2(\lambda). \tag{16}$$

С учётом тождеств (14)–(16) производная (13) принимает вид

$$\frac{dO(u,v,\lambda)}{d\tau}\bigg|_{(8)}=\frac{1}{\lambda^2}(c_1(\lambda)u^2+c_3(\lambda)u^4)+(-(c_1(\lambda)+3c_3(\lambda)u^2)-2c_2(\lambda)(u^2-1))v^2. \tag{17}$$

Далее мы хотим гарантировать, чтобы знак выражения в квадратных скобках из равенства (17) не зависел от u. Для этого полагаем

$$c_1(\lambda)=2c_2(\lambda) \tag{18}$$

и, таким образом, имеем

$$\frac{dO(u,v,\lambda)}{d\tau}\bigg|_{(8)}=u^2\bigg(\frac{1}{\lambda^2}c_3(\lambda)u^2+\frac{2}{\lambda^2}c_2(\lambda)-(3c_3(\lambda)+2c_2(\lambda))v^2\bigg).$$

Если потребовать выполнения неравенств $c_3(\lambda)<0$, $c_2(\lambda)>0$ и $3c_3(\lambda)+2c_2(\lambda)>0$, то множество $\mathcal{N}(\lambda)$ содержит эллипс

$$\mathcal{C}(\lambda):=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{\lambda^2}c_3(\lambda)u^2+\frac{2}{\lambda^2}c_2(\lambda)-(3c_3(\lambda)+2c_2(\lambda))v^2=0\},$$

на котором производная $dO(u,v,\lambda)/d\tau|_{(8)}$ изменяет знак. Затем, положив

$$c_2(\lambda)=-3c_3(\lambda), \tag{19}$$

получим

$$\frac{dO(u,v,\lambda)}{d\tau}\bigg|_{(8)}=6u^2c_3(\lambda)\bigg(\frac{1}{\lambda^2}\frac{u^2}{6}+\frac{v^2}{2}-\frac{1}{\lambda^2}\bigg). \tag{20}$$

В итоге пришли к следующему результату.

Лемма 5. *Производная $dO(u,v,\lambda)/d\tau|_{(8)}$ при $\lambda>0$ принимает нулевое значение при $u=0$ и положительна (отрицательна) во всех остальных точках области, расположенных внутри (вне) эллипса*

$$\mathcal{C}(\lambda):=\bigg\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\frac{u^2}{6}+\frac{\lambda^2v^2}{2}=1\bigg\}.$$

Очевидна

Лемма 6. *Эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$ окружает эллипс $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ при любом $\lambda>0$.*

На последнем шаге мы должны убедиться, что внешняя граница $\mathcal{O}(\lambda)$ окружает эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$. Из тождеств (15), (18) и (19) следуют равенства

$$O_1(u,\lambda)=c_3(\lambda)(-6u+u^3),\quad O_2(u,\lambda)=-3c_3(\lambda).$$

Подставляя эти выражения для функций O_1 и O_2 во второе тождество в (14), получаем для функции $O_0(u,\lambda)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dO_0(u,\lambda)}{du}=-c_3(\lambda)\bigg((u^2-1)(-6u+u^3)+\frac{6}{\lambda^2}u\bigg),$$

которое имеет первый интеграл

$$O_0(u,\lambda)=-3c_3(\lambda)\bigg(\frac{1}{18}u^6-\frac{7}{12}u^4+\bigg(1+\frac{1}{\lambda^2}\bigg)u^2+c_0(\lambda)\bigg);$$

здесь $c_0(\lambda)$ – произвольная непрерывная функция. Следовательно, имеем

$$O(u,v,\lambda)=-3c_3(\lambda)P(u,v,\lambda),$$

где

$$P(u,v,\lambda):=v^2+vu\bigg(2-\frac{u^2}{3}\bigg)+\bigg(1+\frac{1}{\lambda^2}\bigg)u^2-\frac{7}{12}u^4+\frac{1}{18}u^6+c_0(\lambda). \tag{21}$$

Поэтому множество нулевого уровня полинома $O(u,v,\lambda)$ совпадает с множеством нулевого уровня $\mathcal{P}(\lambda)$ полинома $P(u,v,\lambda)$.

Далее докажем, что справедлива

Лемма 7. *Для непрерывной функции $c_0:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^-$, заданной равенством*

$$c_0(\lambda):=-18-\frac{8}{\lambda^2}-\frac{3}{\lambda}, \tag{22}$$

множество $\mathcal{P}(\lambda)$ представляет собой овал, который является центрально симметричным и окружает эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$.

Доказательство. Заметим, что множество $\mathcal{P}(\lambda)$ инвариантно относительно преобразования $(u,v)\mapsto(-u,-v)$, т.е. центрально симметрично. Из равенств (21) и (22) следует, что $\mathcal{P}(\lambda)$ – овал, окружающий начало координат.

Очевидно, что эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$ пересекает ось u в точках $(-\sqrt{6},0)$ и $(\sqrt{6},0)$. Так как обе кривые $\mathcal{P}(\lambda)$ и $\mathcal{C}(\lambda)$ центрально симметричны, то чтобы доказать, что $\mathcal{P}(\lambda)$ окружает $\mathcal{C}(\lambda)$, достаточно установить неравенство

$$P\bigg(u,\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{3}(6-u^2)},\lambda\bigg)<0 \quad\text{при}\quad -\sqrt{6}\leqslant u\leqslant\sqrt{6}.$$

Имеем

$$P\bigg(u,\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{3}(6-u^2)},\lambda\bigg)=\frac{1}{3\lambda^2}(6-u^2)+\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{3}(6-u^2)}\bigg(2u-\frac{u^3}{3}\bigg)+\bigg(1+\frac{1}{\lambda^2}\bigg)u^2-\frac{7}{12}u^4+\frac{1}{18}u^6+c_0(\lambda).$$

Используя очевидную оценку

$$\max_{0\leqslant u\leqslant\sqrt{6}}\bigg(2u-\frac{u^3}{3}\bigg)\sqrt{\frac{6-u^2}{3}}<3,$$

получаем

$$P\bigg(u,\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{3}(6-u^2)},\lambda\bigg)<\frac{2}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda}+\bigg(1+\frac{1}{\lambda^2}\bigg)6+12+c_0(\lambda)<18+\frac{8}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda}+c_0(\lambda)=0.$$

Такое же неравенство справедливо и при $-\sqrt{6}\leqslant u<0$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Овал*

$$\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda) := \left\{(u,v)\in\mathbb{R} : v^2 + vu\left(2-\frac{u^2}{3}\right) + \left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)u^2 - \frac{7}{12}u^4 + \frac{1}{18}u^6 - 18 - \frac{8}{\lambda^2} - \frac{3}{\lambda} = 0\right\}$$

может использоваться как внешняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (8).

Доказательство. По лемме 7 овал $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ является алгебраической кривой, окружающей эллипс $\mathcal{C}(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Из леммы 5 вытекает, что производная $dO(u,v,\lambda)/dt|_{(8)}$ принимает на $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ отрицательные значения, за исключением двух точек на оси $u = 0$, в которых производная обращается в нуль. Это означает, что любая траектория системы (8), попавшая на овал $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$, пересекает его. Лемма доказана.

Из лемм 4 и 8 следует основной результат работы.

Теорема 4. *При всех $\lambda > 0$ кольцо $\mathcal{B}(\lambda)$, ограниченное овалами $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ и $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$, является глобальным алгебраическим кольцом Пуанкаре–Бендиксона, содержащим единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ системы (8).*

Кольцо $\mathcal{B}(\lambda)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (8) для случаев $\lambda^2 = 10$ и $\lambda^2 = 0.1$ представлено на рис. 1.

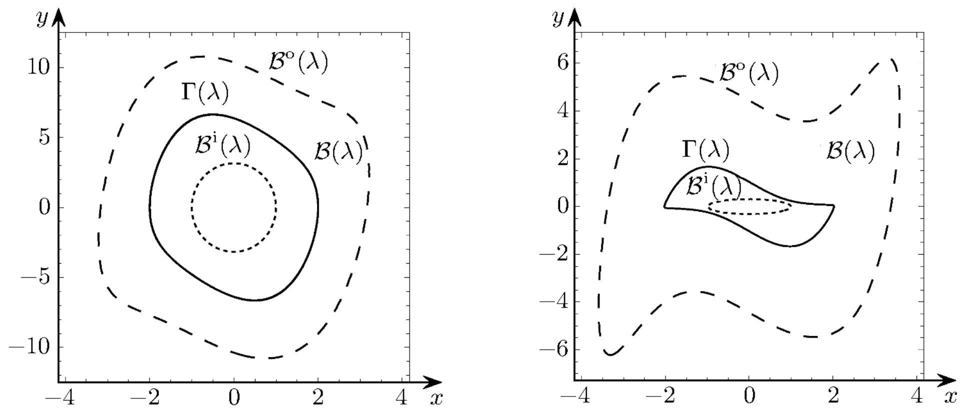

Рис. 1. Кольцо $\mathcal{B}(\lambda)$ с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (8) при $\lambda^2 = 10$ (слева) и $\lambda^2 = 0.1$ (справа).

4. Глобальные алгебраические кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля и линейно топологически эквивалентных ей систем. В п. 3 построено глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы (8). Те же рассуждения, что и для системы (8), можно применить к системе Ван дер Поля (6) и системам (10) и (12) и получить соответствующие результаты. Однако нужные утверждения тривиально вытекают из теоремы 4 и того, что системы (6), (10), (12) и (8) попарно линейно топологически эквивалентны друг другу.

Согласно лемме 1, применив преобразование (7) к трансверсальным овалам $\mathcal{B}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ и $\mathcal{B}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ системы (8), получим трансверсальные овалы $\mathcal{A}^{\mathrm{i}}(\lambda)$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{o}}(\lambda)$ системы Ван дер Поля (6), образующие кольцо $\mathcal{A}(\lambda)$, содержащее единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$. Далее, применяя преобразование (9) к трансверсальным овалам системы Ван дер Поля, получаем трансверсальные овалы для системы (10). Наконец, применяем преобразование (11) к трансверсальным овалам системы Ван дер Поля для получения трансверсальных овалов системы (12). В итоге приходим к следующим результатам.

Теорема 5. *При $\lambda > 0$ овалы $\mathcal{A}^{\mathrm{i}}(\lambda) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ и*

$$\mathcal{A}^{\mathrm{o}}(\lambda) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2 + \lambda yx\left(2-\frac{x^2}{3}\right) + (1+\lambda^2)x^2 - \frac{7\lambda^2}{12}x^4 + \frac{\lambda^2}{18}x^6 - 8 - 3\lambda - 18\lambda^2 = 0\right\}$$

являются трансверсальными овалами системы Ван дер Поля (6) и образуют её глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{A}(\lambda)$, содержащее единственный предельный цикл $\Gamma(\lambda)$ этой системы.

На рис. 2 показано кольцо $\mathcal{A}(\lambda)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ при значениях параметра $\lambda = 0.001$ и $\lambda = 3$.

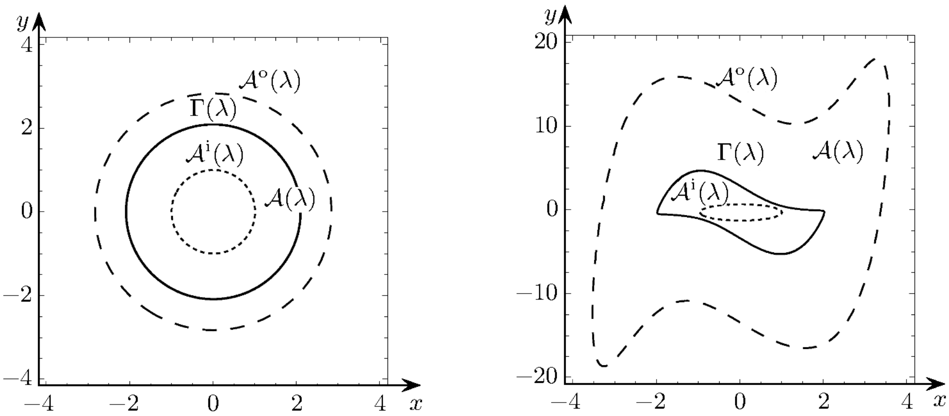

Рис. 2. Кольцо $\mathcal{A}(\lambda)$ с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (6) при $\lambda = 0.001$ (слева) и $\lambda = 3$ (справа).

Теорема 6. *При* $\lambda > 0$ *овалы* $\mathcal{H}^{\mathrm{i}}(\lambda) := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = \lambda\}$ *и*

$$\mathcal{H}^{\mathrm{o}}(\lambda) := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 + vu\left(2\lambda - \frac{u^2}{3}\right) + (1+\lambda^2)u^2 - \frac{7\lambda}{12}u^4 + \frac{u^6}{18} - 8\lambda - 3\lambda^2 - 18\lambda^3 = 0\right\}$$

являются трансверсальными овалами системы (10) и образуют её глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{H}(\lambda)$, *содержащее единственный предельный цикл* $\Gamma(\lambda)$ *этой системы.*

Замечание 3. Так как оба овала стягиваются к началу координат при стремлении λ к нулю, то кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{H}(\lambda)$ отражает бифуркацию предельного цикла $\Gamma(\lambda)$ из начала координат (бифуркация Андронова–Хопфа) при переходе параметра λ через нулевое значение.

На рис. 3 показано кольцо $\mathcal{H}(\lambda)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ при значениях параметра $\lambda = 0.01$ и $\lambda = 1$.

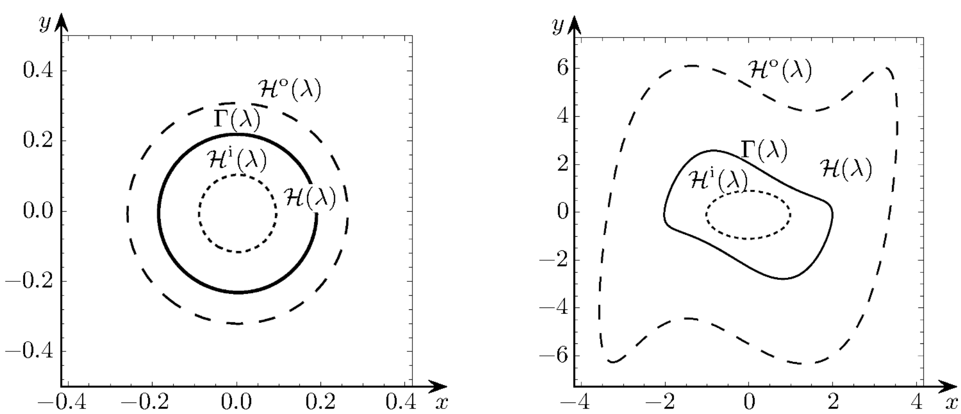

Рис. 3. Кольцо $\mathcal{H}(\lambda)$ с предельным циклом $\Gamma(\lambda)$ системы (10) при $\lambda = 0.01$ (слева) и $\lambda = 1$ (справа).

Теорема 7. *При* $\varepsilon > 0$ *овалы* $\mathcal{S}^{\mathrm{i}}(\varepsilon) := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \varepsilon v^2 = 1\}$ и

$$\mathcal{S}^{0}(\varepsilon) := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^2 v^2 + \varepsilon vu\left(2 - \frac{u^2}{3}\right) + (1+\varepsilon)u^2 - \frac{7}{12}u^4 + \frac{u^6}{18} - 8\varepsilon - 3\sqrt{\varepsilon} - 18 = 0\right\}$$

являются трансверсальными овалами системы (12) и образуют её глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $\mathcal{S}(\varepsilon)$, *содержащее единственный предельный цикл* $\Gamma(\varepsilon)$ *этой системы.*

Замечание 4. При малых ε предельный цикл $\Gamma(\varepsilon)$ представляет собой релаксационные колебания.

На рис. 4 показано кольцо $\mathcal{S}(\varepsilon)$ вместе с предельным циклом $\Gamma(\varepsilon)$ при значениях параметра $\varepsilon = 0.15$ и $\varepsilon = 10$.

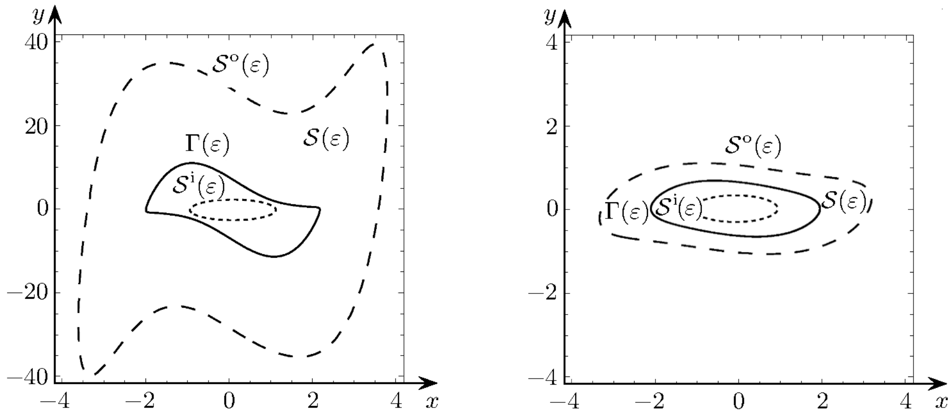

Рис. 4. Кольцо $\mathcal{S}(\varepsilon)$ с предельным циклом $\Gamma(\varepsilon)$ системы (12) при $\varepsilon = 0.15$ (слева) и $\varepsilon = 10$ (справа).

Гринь А.А. признателен Немецкой службе академических обменов (DAAD) за финансовую поддержку, а также за гостеприимство сотрудникам Берлинского технического университета и Института прикладного анализа и стохастики им. К. Вейерштрасса в Берлине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sansone G., Conti R.* Non-linear Differential Equations. V. 67. New York, 1964.
2. *Dumortier F., Llibre L., Artes J.C.* Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Berlin, 2006.
3. *Perko L.* Differential equations and dynamical systems. Texts Appl. Math. V. 7. New York, 2001.
4. *Flanders D.A., Stoker J.J.* The limit case of relaxation oscillations // Studies in Nonlin. Vibration Theory, Inst. Math. Mech. New York University, 1946. P. 51–64.
5. *Lynch S.* Dynamical Systems with Applications Using Mathematica. Birkhäuser, 2007.
6. *Schneider K.R.* New approach to study the van der Pol equation for large damping // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. 2018. № 8. P. 1–10.
7. *Giacomini H., Grau M.* Transversal conics and the existence of limit cycles // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 428. P. 563–586.
8. *Gasull A., Giacomini H., Grau M.* Effective construction of Poincaré–Bendixson regions // J. Appl. Anal. Comp. 2017. V. 7. P. 1549–1569.
9. *Черкас Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.
10. *Grin A.A, Schneider K.R.* On some classes of limit cycles of planar dynamical systems // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. 2007. V. 14. P. 641–656.
11. *Cherkas L.A., Grin A.A., Schneider K.R.* Dulac–Cherkas functions for generalized Liénard systems // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. 2011. № 35. P. 1–23.
12. *Gasull A., Giacomini H.* Upper bounds for the number of limit cycles through linear differential equations // Pacific J. Math. 2006. V. 226. № 2. P. 277–296.
13. *Gasull A., Giacomini H.* Some applications of the extended Bendixson–Dulac theorem // In Progress and challenges in dynamical systems. V. 54. Heidelberg, 2013. P. 233–252.
14. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci. 1926. V. 14. P. 978–992.

Гродненский государственный университет
им. Янки Купалы, Беларусь
Институт прикладного анализа и стохастики
им. К. Вейерштрасса, г. Берлин, Германия

Поступила в редакцию 03.01.2022 г.
После доработки 03.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 301–308

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938.5

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

 Н. А. Магницкий

Рассматривается сценарий перехода к хаотической динамике в гамильтоновой системе однородных полей Янга–Миллса с тремя степенями свободы при наличии механизма Хиггса. Показано, что в этой системе, как и в других гамильтоновых и консервативных системах уравнений, на начальной стадии перехода от регулярного движения к хаотическому ключевую роль играет нелокальный эффект размножения гиперболических и эллиптических циклов и торов вокруг эллиптических циклов в окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов. Численно обнаружено, что новые эллиптические и гиперболические циклы гамильтоновой системы рождаются не только в результате седло-узловых бифуркаций и бифуркаций типа вилки, но также в результате субгармонического каскада бифуркаций, характерного для универсального бифуркационного сценария перехода к хаосу в соответствии с теорией Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого (ФШМ).

DOI: 10.31857/S0374064122030025, **EDN:** BWZBWO

Введение. Анализ хаотической динамики классических неабелевых калибровочных полей Янга–Миллса считается чрезвычайно важным с точки зрения решения знаменитой проблемы конфайнмента (невылетания цветных объектов) в квантовой хромодинамике, что, в свою очередь, играет ключевую роль в построении Стандартной модели физики элементарных частиц [1, 2]. Поэтому неслучайно проблема решения уравнений Янга–Миллса вошла в число семи проблем тысячелетия, сформулированных Институтом математики Клэя [3]. Система уравнений Янга–Миллса чрезвычайно сложна, так как представляет собой в общем случае систему из восемнадцати нелинейных уравнений с частными производными. Рассмотрение однородных зависящих только от времени полей Янга–Миллса приводит к гамильтоновой системе уравнений с девятью степенями свободы, анализ решений которой также является чрезвычайно сложной задачей.

Автором настоящей работы в [4] рассмотрен переход к хаосу в наиболее простом случае гамильтоновой системы однородных полей Янга–Миллса–Хиггса с двумя степенями свободы, являющейся системой уравнений Янга–Миллса с учётом взаимодействия калибровочного поля с так называемым хиггсовским вакуумом. Гамильтониан такого взаимодействия имеет вид

$$H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + x^2y^2/2 + \nu(x^2 + y^2)/2, \tag{1}$$

где $\nu \geqslant 0$ – числовой параметр, а x и y – зависимые переменные. Соответствующая гамильтониану (1) система уравнений движения имеет вид

$$\ddot{x} + x(\nu + y^2) = 0, \quad \ddot{y} + y(\nu + x^2) = 0. \tag{2}$$

При фиксированных значениях полной энергии системы уравнений Янга–Миллса–Хиггса (2) и достаточно больших значениях параметра ν решения системы (2) ведут себя регулярно, так как в этом случае влияние члена $x^2y^2/2$ в гамильтониане (1) сколь угодно мало. При малых значениях параметра ν решения системы (2) ведут себя хаотически аналогично решениям системы уравнений Янга–Миллса, в гамильтониане которой хиггсовский член $\nu(x^2 + y^2)/2$ равен нулю.

В работе [4] показано, что структура решений гамильтоновой системы (1), (2) полностью определяется каскадами бифуркаций циклов расширенной диссипативной системы при стремлении параметра диссипации к нулю. Рождающиеся в результате каскадов бифуркаций устойчивые циклы диссипативной системы переходят в эллиптические циклы гамильтоновой системы, а их области устойчивости – в торы вокруг этих эллиптических циклов. Касание образовавшихся торов гамильтоновой системы происходит по гиперболическим циклам, в которые переходят соответствующие неустойчивые циклы диссипативной системы, рождающиеся в ней либо вместе с устойчивыми циклами в результате седло-узловых бифуркаций, либо при потере устойчивости циклов в результате бифуркаций типа вилки или бифуркаций удвоения периода. В окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов происходит образование новых более сложных гиперболических и эллиптических циклов в соответствии с нелокальным эффектом размножения циклов и торов в консервативных системах, открытым и проанализированным автором в работах [5–8]. Показано, что именно последний эффект играет ключевую роль в системе уравнений Янга–Миллса–Хиггса на начальной стадии перехода от регулярного движения к хаотическому. Однако существенную роль играют также субгармонические каскады бифуркаций в соответствии с порядком Шарковского, происходящие в расширенной диссипативной системе и частично сохраняющиеся в гамильтоновой системе при стремлении параметра диссипации к нулю [9].

В настоящей работе рассмотрен переход к хаосу в существенно более сложном случае гамильтоновой системы однородных полей Янга–Миллса–Хиггса с тремя степенями свободы, имеющей гамильтониан

$$H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)/2 + \nu(x^2 + y^2 + z^2)/2, \tag{3}$$

и соответствующую гамильтониану (3) систему уравнений

$$\ddot{x} + x(\nu + y^2 + z^2) = 0, \quad \ddot{y} + y(\nu + x^2 + z^2) = 0, \quad \ddot{z} + z(\nu + x^2 + y^2) = 0. \tag{4}$$

При $\nu = 0$ система уравнений (4) переходит в систему уравнений Янга–Миллса с тремя степенями свободы

$$\ddot{x} + x(y^2 + z^2) = 0, \quad \ddot{y} + y(x^2 + z^2) = 0, \quad \ddot{z} + z(x^2 + y^2) = 0. \tag{5}$$

Всюду далее считаем постоянной полную энергию системы уравнений Янга–Миллса–Хиггса $H = 1$, а динамику решений системы (4) рассматриваем при уменьшении значений параметра ν.

1. Аналитическое исследование. Нетрудно видеть, что система (4) уравнений Янга–Миллса–Хиггса имеет набор основных периодических решений, которым соответствует в фазовом пространстве набор основных замкнутых траекторий (циклов):

$$C_x : z = y = 0,\ (\dot{x})^2 + \nu x^2 = 2; \quad C_y : x = z = 0,\ (\dot{y})^2 + \nu y^2 = 2; \quad C_z : x = y = 0,\ (\dot{z})^2 + \nu z^2 = 2;$$

$$C^{\pm}_{xy} :\ z = 0,\ y = \pm x,\ (\dot{x})^2 + \nu x^2 + x^4/2 = 1; \quad C^{\pm}_{xz} :\ y = 0,\ z = \pm x,\ (\dot{x})^2 + \nu x^2 + x^4/2 = 1;$$

$$C^{\pm}_{yz} :\ x = 0,\ z = \pm y,\ (\dot{y})^2 + \nu y^2 + y^4/2 = 1; \quad C^{\pm}_{xyz} :\ y = \pm x,\ z = \pm x,\ (\dot{x})^2 + \nu x^2 + x^4 = 2/3.$$

Очевидно, что циклу C_x с начальным условием $x(0) = 0$ отвечает периодическое решение $x(t) = \sqrt{2/\nu}\sin(\sqrt{\nu}t)$. Аналогично, циклам C_y и C_z с таким же начальным условием отвечают периодические решения $y(t) = \sqrt{2/\nu}\sin(\sqrt{\nu}t)$ и $z(t) = \sqrt{2/\nu}\sin(\sqrt{\nu}t)$ соответственно.

Найдём аналитические выражения для периодических решений, соответствующих другим основным циклам системы (4). Решая уравнение

$$(\dot{x})^2 + \nu x^2 + \alpha^2 x^4 = \beta^2$$

с начальным условием $x(0) = 0$, получаем

$$\dot{x} = \sqrt{\beta^2 - \nu x^2 - \alpha^2 x^4}, \quad \int\limits_0^x \frac{du}{\sqrt{\beta^2 - \nu u^2 - \alpha^2 u^4}} = t.$$

Представляя интеграл в последнем выражении в виде

$$\int_0^x \frac{du}{\alpha\sqrt{(u^2+a^2)(b^2-u^2)}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{a^2+b^2}} \int_\varphi^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

где

$$a^2 = (\sqrt{\nu^2+4\beta^2\alpha^2}+\nu)/(2\alpha^2), \quad b^2 = (\sqrt{\nu^2+4\beta^2\alpha^2}-\nu)/(2\alpha^2), \quad k = b/\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = x/b,$$

получаем окончательно

$$x(t) = b\,\mathrm{cn}\,(K(k) - \alpha\sqrt{(a^2+b^2)}t), \tag{6}$$

где $\mathrm{cn}\,(\cdot)$ – эллиптический косинус Якоби, а $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Циклы $C^\pm$ задаются выражением (6) при $\alpha^2 = 1/2$, $\beta^2 = 1$ и $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 2/3$ соответственно.

Нетрудно убедиться в том, что функция (6) при $\nu \to \infty$ поточечно сходится к функции $x(t) = \beta\cos(\pi/2 - \sqrt{\nu}t)/\sqrt{\nu} = \beta\sin(\sqrt{\nu}t)/\sqrt{\nu}$. В другом предельном случае при $\nu = 0$ получим периодические решения, задающие циклы $C^\pm$ системы уравнений Янга–Миллса (5), в виде $x(t) = \sqrt{\beta/\alpha}\,\mathrm{cn}\,(K(1/\sqrt{2}) - \sqrt{2\beta\alpha}t)$. Следовательно, система уравнений Янга–Миллса (5) совершает периодические колебания вдоль осей симметрии $z = 0$, $y = \pm x$, $y = 0$, $z = \pm x$ и $y = \pm x$, $z = \pm x$ по закону эллиптического косинуса. Аналогичные колебания происходят вдоль осей $x = 0$, $z = \pm y$. Численные расчёты, проведённые в работах [1, 10], показали, что эти решения системы уравнений Янга–Миллса являются крайне неустойчивыми. Более того, численные расчёты показали полную хаотичность поведения решений этой системы.

Для выяснения природы динамического хаоса в системе уравнений Янга–Миллса (5) проанализируем численно сценарий перехода к хаосу в системе уравнений Янга–Миллса–Хиггса (4) при $\nu \to 0$.

2. Численное исследование сценария перехода к хаосу. Для численного исследования сценария перехода к хаосу в системе уравнений (4) применим подход, предложенный и развитый автором в работах [5–8]. Будем аппроксимировать эллиптические циклы гамильтоновой системы (4) устойчивыми циклами расширенной диссипативной системы, а двумерные торы вокруг эллиптических циклов системы (4) – областями устойчивости соответствующих устойчивых циклов расширенной диссипативной системы.

В качестве одной из возможных расширенных диссипативных систем рассмотрим систему

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -x(\nu+y^2+z^2) - \mu u, \quad \dot{y} = v + (1 - H(x,y,z))y,$$
$$\dot{v} = -y(\nu+x^2+z^2) - \mu v, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z(\nu+x^2+y^2), \tag{7}$$

где μ – числовой параметр.

Дивергенция правой части системы (7) на решениях системы (3), (4) равна $-2\mu - (\nu + x^2 + z^2)y^2$ и, следовательно, отрицательна при всех $\mu > 0$, а расширенная диссипативная двухпараметрическая система уравнений (7) удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 3.1 работы [5].

Нетрудно видеть, что решения гамильтоновой системы (4) с начальными условиями $z_0 = r_0 = 0$ являются решениями гамильтоновой системы уравнений Янга–Миллса–Хиггса с двумя степенями свободы

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -x(\nu+y^2), \quad \dot{y} = v, \quad \dot{v} = -y(\nu+x^2). \tag{8}$$

Система (8) рассматривалась в работе [4] при значениях параметра $\nu = 2,\ 1,\ 0.55$. Чтобы иметь возможность сравнить полученные результаты, проанализируем численно влияние величин параметров ν и μ на динамику системы (7) при фиксированном значении $H = 1$ и тех же значениях параметра $\nu = 2,\ 1,\ 0.55$. В работе [4] показано, что при больших значениях параметра $\nu = 2$ топология траекторий гамильтоновой системы (8) определяется основными торами вокруг четырёх основных эллиптических циклов C_x, C_y и $C_{xy}^{\pm}$ системы (рис. 1, а).

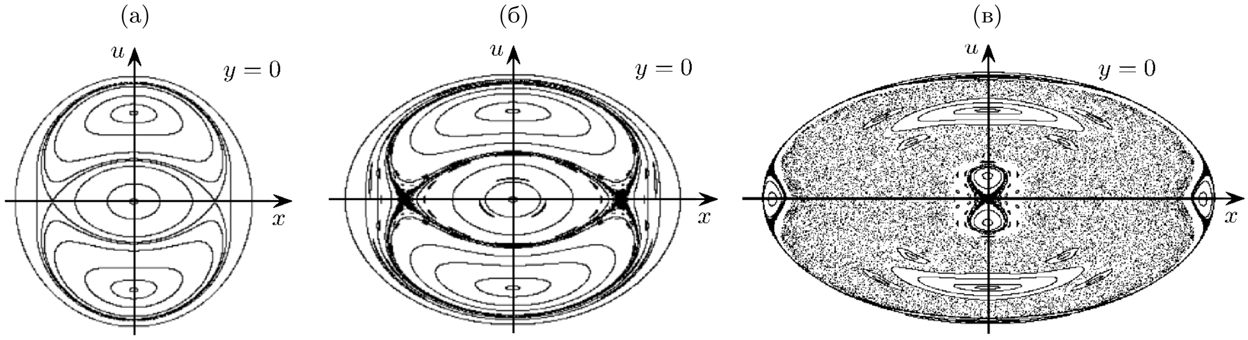

Рис. 1. Проекции сечения плоскостью $y = 0$ двумерных торов системы (8): вокруг её основных эллиптических циклов при $\nu = 2$, $x_0 = y_0 = 0$ и $u_0 = 1.4142$, 1.35, 1.33795, 1.33, 1.3, 1.2, 1.1, 1.02, 0.4, 0.2, 0.03 (а); вокруг основных и более сложных эллиптических циклов при $\nu = 1$, $x_0 = y_0 = 0$ и $u_0 = 1.4142$, 1.37, 1.3524, 1.335, 1.318, 1.313, 1.305, 1.25, 1.2, 1.02, 0.5499, 0.5384, 0.52, 0.508, 0.4, 0.2, 0.03 (б); вокруг основных, более сложных эллиптических циклов и циклов удвоенного периода при $\nu = 0.55$, $x_0 = y_0 = 0$ и $u_0 = 1.4142$, 1.41, 1.398, 1.35047, 1.349, ± 1.3396, 1.14, 1.09, 1.04, 1.015, 0.42, 0.395, 0.3665, ± 0.35, ± 0.3, ± 1.139 $(y_0 = 0.645942)$, ± 1.155 $(y_0 = 0.645942)$ (в).

Численно можно убедиться в том, что в расширенной диссипативной системе

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -x(\nu + y^2) - \mu u, \quad \dot{y} = v + (1 - H(x, y))y, \quad \dot{v} = -y(\nu + x^2) \tag{9}$$

при всех малых значениях параметра диссипации $\mu > 0$ имеются три устойчивых цикла, переходящих в эллиптические циклы C_y и $C_{xy}^{\pm}$ гамильтоновой системы (8) при $\mu = 0$, и один неустойчивый цикл, переходящий в эллиптический цикл C_x гамильтоновой системы (8) при $\mu = 0$. Области устойчивости (и неустойчивости) этих циклов переходят в двумерные торы гамильтоновой системы (8) вокруг её эллиптических циклов, а касание образовавшихся торов происходит по двум гиперболическим циклам $D^{\pm}$, которые являются пределами неустойчивых седловых циклов расширенной диссипативной системы при $\mu \to 0$, родившихся в диссипативной системе одновременно с устойчивыми циклами $C_{xy}^{\pm}$ в результате седло-узловой бифуркации при $\mu \approx 0.08$. Циклам $D^{\pm}$ гамильтоновой системы (8) соответствуют начальные условия $u(0) = y(0) = 0$, $x(0) \approx \pm 0.6864269$. Аналитические выражения для циклов $D^{\pm}$ получить не удалось.

На рис. 1, а представлены проекции на плоскость (x, u) сечений плоскостью $y = 0$ двумерных торов гамильтоновой системы (8) вокруг её четырёх основных эллиптических циклов C_x, C_y и $C_{xy}^{\pm}$. Циклу C_y соответствует в проекции точка $(0, 0)$, циклу C_x – внешний контур рисунка, циклам $C_{xy}^{\pm}$ – две эллиптические точки, лежащие на оси u, причём каждой из двух точек в проекции соответствуют две точки пересечения плоскостью $y = 0$ двух циклов $C_{xy}^{\pm}$. Гиперболическим циклам $D^{\pm}$ соответствуют на рис. 1, а лежащие на оси x две точки пересечения сепаратрис (проекций сечений сепаратрисных поверхностей, по которым происходит касание различных двумерных торов). При этом каждой из двух точек в проекции соответствуют две точки пересечения плоскостью $y = 0$ двух циклов $D^{\pm}$. Заметим, что циклы $C_{xy}^{\pm}$, определяющие, в основном, динамику системы (8), существуют в ней и являются отличными от циклов C_x, C_y при любых $\nu > 0$. Поэтому проведённый выше анализ динамики решений системы (8) при достаточно больших значениях параметра ν не может быть осуществлён методами теории возмущений, исходя из решений невозмущённой системы, получающейся из системы (8) удалением кубических членов.

При значении параметра возмущения $\nu = 1$ ситуация заметно усложняется. Теперь топология траекторий системы (8) определяется основными торами системы (т.е. торами вокруг четырёх основных эллиптических циклов C_x, C_y и $C_{xy}^{\pm}$) и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (9) при уменьшении значений параметра μ до нуля в результате седло-узловых бифуркаций. Причём вследствие нелокального эффекта размножения циклов и торов [6] более сложные многооборотные циклы и торы рождаются в окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов $D^{\pm}$, а менее сложные – вне этих окрестностей. Движение траектории по поверхностям таких сложных многооборотных торов, расположенных в окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов, создаёт иллюзию хаотического движения, хорошо наблюдаемого в различных сечениях Пуанкаре (рис. 1, б). Касание различных витков сложных торов происходит по гиперболическим циклам, родившимся в диссипативной системе совместно с устойчивыми циклами в результате седло-узловых бифуркаций. Так как в окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов системы расположены, переплетаясь и, по всей видимости, касаясь друг друга, различные системы многооборотных сложных торов (внутренние по отношению к сепаратрисному контуру, внешние и смешанные), то глобальная в смысле теории КАМ (Колмогорова–Арнольда–Мозера) устойчивость решений системы (8) сохраняться не может.

Таким образом, усложнение динамики решений в окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов $D^{\pm}$ системы (8) определяется наличием многочисленных сложных многооборотных двумерных торов вокруг эллиптических циклов системы. Касание торов происходит по гиперболическим циклам. Кроме того, поскольку в окрестностях гиперболических циклов движение траектории замедляется, то это ведёт к образованию в этих окрестностях новых ещё более сложных эллиптических и гиперболических циклов и соответствующих им двумерных торов. Следовательно, на начальном этапе перехода к хаосу рост области хаотического движения в системе (8) при уменьшении значений параметра ν объясняется, как и в других гамильтоновых и консервативных системах [4–9], нелокальным эффектом размножения гиперболических и эллиптических циклов, а также торов вокруг эллиптических циклов. Более простые циклы рождаются достаточно далеко от сепаратрисных поверхностей гиперболических периодических решений, а более сложные – вблизи этих поверхностей.

Вместе с тем пример системы (8) показывает, что гиперболические и эллиптические циклы гамильтоновой или консервативной системы могут являться предельным случаем устойчивых и седловых циклов расширенной диссипативной системы, родившихся не только в результате седло-узловых бифуркаций, но также и в результате бифуркаций типа вилки и удвоения периода. Так при $\nu \approx 0.594$ в диссипативной расширенной системе (9) при $\mu \to 0$ устойчивый цикл C_y теряет устойчивость в результате бифуркации типа вилки, становясь седловым, а в его окрестности рождаются два устойчивых цикла $C_y^{\pm}$, переходящие в эллиптические циклы гамильтоновой системы (8) при $\mu = 0$. Возникающие вокруг этих двух эллиптических циклов торы касаются по ставшему гиперболическим циклу C_y. То же самое происходит с циклом C_x при $\nu \approx 0.594$ в модифицированной расширенной диссипативной системе со слагаемым $(1-H(x,y))x$ в первом уравнении и вычитаемым $-\mu r$ – в четвёртом. Он также теряет устойчивость при $\mu \to 0$ в результате бифуркации типа вилки, становясь седловым, а в его окрестности рождаются два устойчивых цикла $C_x^{\pm}$, переходящие в эллиптические циклы гамильтоновой системы (8) при $\mu = 0$. Возникающие вокруг этих двух эллиптических циклов торы касаются по ставшему гиперболическим циклу C_x. В отличие от циклов C_y и C_x с циклами $C_{xy}^{\pm}$ происходят бифуркации удвоения периода при $\nu \approx 0.733$. Сами циклы становятся седловыми, а в их окрестностях рождаются устойчивые циклы удвоенного периода, переходящие при $\mu \to 0$ в эллиптические циклы гамильтоновой системы (8).

Всё это хорошо видно на рис. 1, в при $\nu = 0.55$. Гиперболическому циклу C_y соответствует в проекции точка $(0,0)$, гиперболическому циклу C_x – внешний контур рисунка, эллиптическим циклам $C_{xy}^{\pm}$ соответствуют две эллиптические точки, лежащие на оси u, причём каждой из двух точек в проекции соответствуют две точки пересечения плоскостью $y = 0$ двух циклов $C_{xy}^{\pm}$. Эллиптическим циклам $C_y^{\pm}$ соответствуют лежащие на оси u в окрестности нуля две эллиптические точки, а эллиптическим циклам $C_x^{\pm}$ – лежащие на оси x в окрестностях внешнего контура две эллиптические точки. При этом каждой из последних четырёх эллиптических точек в проекции на плоскость (x,u) соответствуют две точки пересечения плоскостью $y = 0$ каждого из четырёх эллиптических циклов $C_y^{\pm}$, $C_x^{\pm}$, а каждому замкнутому контуру вокруг каждой эллиптической точки – два контура в сечении двумерного тора вокруг соответствующего эллиптического цикла плоскостью $y = 0$. Чтобы наглядно увидеть это, достаточно взять проекцию сечения тора плоскостью, отличной от плоскости $y = 0$, например $y = 0.2$. Эллиптическим циклам удвоенного периода соответствуют на рис. 1, в восемь эллиптических точек, лежащих в окрестностях эллиптических точек циклов $C^{\pm}_{xy}$. Гиперболические циклы $D^{\pm}$ уже совсем скрыты на рис. 1, в хаотической динамикой, порождённой в их окрестностях эффектом размножения гиперболических и эллиптических циклов и торов вокруг эллиптических циклов. Этот же эффект, как видно из рис. 1, в, в полной мере уже работает и в окрестностях ставших гиперболическими циклов C_y и C_x.

При дальнейшем уменьшении значений параметра ν происходит субгармонический каскад бифуркаций циклов $C^{\pm}_{xy}$. Циклы $C^{\pm}_{xy}$ периодов четыре рождаются при $\nu \approx 0.54$, а циклы периодов шесть – при $\nu \approx 0.508$ (рис. 2). Бифуркационные значения параметра ν субгармонического каскада циклов для гамильтоновой системы (8) находились численно предельным переходом $\nu = \lim \nu(\mu)$, $\mu \to 0$, где $\nu(\mu)$ – значение параметра, при котором происходит рождение соответствующего цикла субгармонического каскада в расширенной диссипативной системе (9).

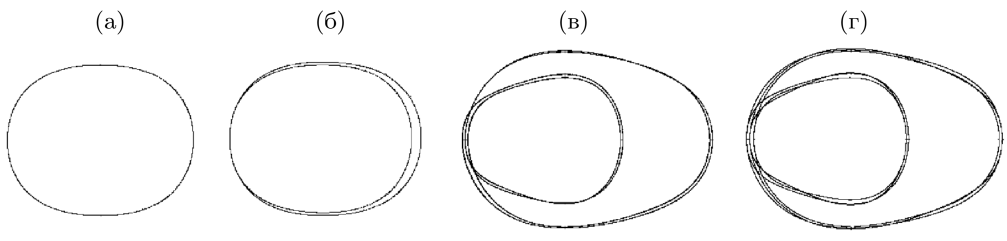

Рис. 2. Проекции на плоскость (x, u) циклов $C^{\pm}_{xy}$ периодов один, два, четыре и шесть при $\nu = 0.74$, 0.73, 0.54, 0.508.

Таким образом, численно установлено, что пятимерная энергетическая поверхность гамильтоновой системы (4) имеет четырёхмерное подпространство, в котором при $\nu = 2$ хаотическая динамика вообще отсутствует, а при $\nu = 1$ наблюдается исключительно локальный псевдохаос. Это, естественно, происходит в окрестности тех начальных условий $z_0 = r_0 = 0$, при которых решения лежат на поверхностях касающихся двумерных торов системы (8) или близки к ним (окрестность сепаратрисы на рис. 1, б). Топология траекторий системы (4) с начальными условиями $z_0 = r_0 = 0$ определяется основными торами системами (т.е. торами вокруг основных циклов системы) и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, появившихся в окрестности сепаратрисной поверхности гиперболического периодического решения в результате нелокального эффекта размножения циклов и торов. Псевдохаос, возникший в окрестности гиперболического цикла $D^{\pm}$, не является гомоклиническим хаосом, а всего лишь следствием ошибок вычислений из-за неустойчивости решаемой задачи. Эффект хаотичности создают точки, лежащие в сечении Пуанкаре на поверхностях тех торов, обмотки которых расположены, переплетаясь, вокруг различных сложных эллиптических циклов, образовавшихся вследствие эффекта размножения циклов и торов и имеющих тот же вид, что и сложные циклы системы, представленные на рис. 1, в и рис. 2, б, в работе [4].

Рассмотрим теперь, что происходит вне окрестностей касающихся двумерных торов системы (4) при $\nu = 2$ и $\nu = 1$. Численные расчёты показывают, что вне этих окрестностей траектории гамильтоновой системы (4) двигаются по поверхностям трёхмерных торов вокруг двумерных торов системы (4). Сечения некоторых из таких трёхмерных торов представлены на рис. 3, б, в.

Из рис. 3, б видно, что при $\nu = 2$ область существования трёхмерных торов окружена областью глобального хаотического поведения траекторий системы (4). Таким образом, численно установлено совместное сосуществование в гамильтоновой системе (4) при $\nu = 2$ областей регулярного движения по двумерным торам вокруг основных циклов системы, областей регулярного движения по трёхмерным торам вокруг упомянутых выше двумерных торов и областей глобального хаотического поведения траекторий системы в остальной части энергетической поверхности.

При значении $\nu = 1$, как видно из рис. 3, в, гамильтонова система (4) имеет области регулярного движения по двумерным торам вокруг основных циклов системы, области регулярного движения по трёхмерным торам вокруг упомянутых выше двумерных торов, области локального хаотического поведения траекторий системы в четырёхмерном подпространстве пятимерной энергетической поверхности и области глобального хаотического поведения траекторий системы в остальной части энергетической поверхности.

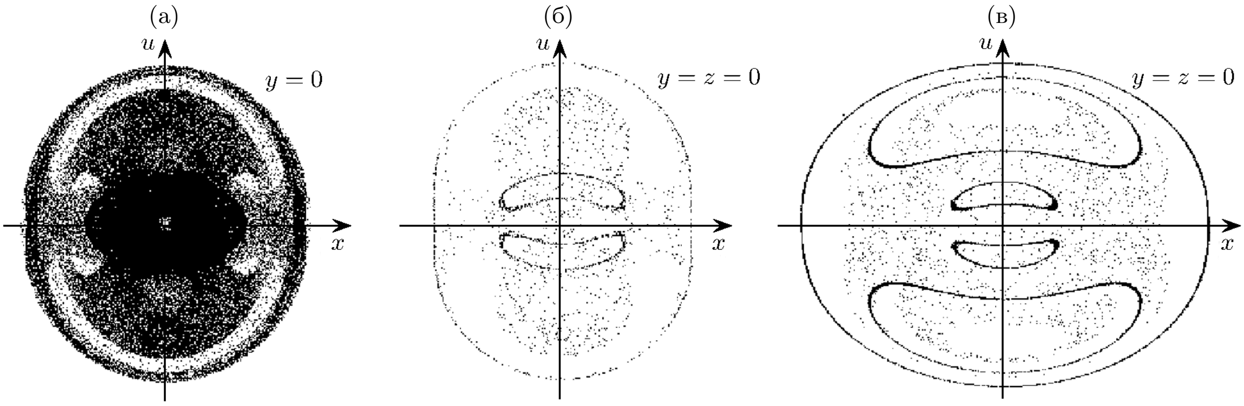

Рис. 3. Проекции сечений коразмерности 1 (а) и 2 (б) системы (4) при $\nu = 2$, $z_0 = 0.16$, $r_0 = -0.16$ и $u_0 = 1.33$, 1.05, 1.0, 0.44, 0.4273, 0.427, 0.423, 0.4; проекция сечения коразмерности 2 (в) системы (4) при $\nu = 1$, $z_0 = 0.16$, $r_0 = -0.16$ и $u_0 = 1.37$, 1.25, 1.15, 0.55, 0.35.

Таким образом, в гамильтоновой системе (4) с тремя степенями свободы даже при достаточно малых значениях параметра ν одновременно существуют области регулярного движения по двумерным торам вокруг основных циклов системы, области регулярного движения по трёхмерным торам вокруг упомянутых выше двумерных торов, области локального хаотического поведения траекторий системы в четырёхмерном подпространстве пятимерной энергетической поверхности и области глобального хаотического поведения траекторий системы, содержащей гетероклинические сепаратрисные многообразия, натянутые на гиперболические циклы системы, и все циклы и непериодические траектории, родившиеся изначально устойчивыми в диссипативной системе (7) при $\mu > 0$ и потерявшие устойчивость в результате субгармонических, гомоклинических или каких-либо более сложных каскадов бифуркаций в соответствии с теорией ФШМ. Все торы системы, кроме торов вокруг основных циклов, рождаются в результате различных бифуркаций. Заметим, что в системе (4), имеющей три степени свободы, переход к хаосу в соответствии с теорией ФШМ может происходить также и субгармоническим каскадом бифуркаций устойчивых двумерных торов в расширенной диссипативной системе, однако двумерных торов удвоенного периода обнаружить пока не удалось.

На основе проведённых численных расчётов для гамильтоновой системы уравнений Янга–Миллса–Хиггса с тремя степенями свободы показано, что при достаточно больших значениях параметра возмущения ν хаотическая динамика в системе отсутствует, а движение идёт по основным двумерным или трёхмерным торам вокруг основных циклов системы, причём эти торы не являются торами невозмущённой системы. При уменьшении значений параметра ν никакого разрушения торов невозмущённой системы и расщепления сепаратрисы не происходит; движение идёт по основным торам вокруг основных циклов системы и набору сложных многооборотных переплетающихся торов вокруг более сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в расширенной диссипативной системе при уменьшении значений параметра диссипации до нуля; видимость хаотичности создают точки, лежащие в сечениях Пуанкаре на поверхностях таких сложных многооборотных торов. При достаточно малых значениях параметра ν хаотическая динамика в возмущённой системе присутствует, но переход к хаосу происходит не через разрушение двумерных или трёхмерных торов невозмущённой системы, как это постулируется теорией КАМ, а, наоборот, через каскады бифуркаций рождения новых сложных двумерных и трёхмерных торов в соответствии с бифуркационной теорией ФШМ.

Заключение. В работе рассмотрен переход к хаосу в сложном случае гамильтоновой системы однородных полей Янга–Миллса–Хиггса с тремя степенями свободы. Показано, что в этой системе, как и во многих других гамильтоновых и консервативных системах уравнений, на начальной стадии перехода от регулярного движения к хаотическому ключевую роль играет нелокальный эффект размножения гиперболических и эллиптических циклов и торов вокруг эллиптических циклов в окрестностях сепаратрисных поверхностей гиперболических циклов. Обнаружено, что новые эллиптические и гиперболические циклы гамильтоновой системы рождаются не только в результате седло-узловой бифуркации и бифуркации типа вилки, но также и в результате субгармонического каскада бифуркаций, характерного для универсального бифуркационного сценария перехода к хаосу в соответствии с теорией Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого, справедливой как для диссипативных, так и для консервативных систем дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-029-10008mk и 20-07-00066a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матинян С.Г.* Динамический хаос неабелевых калибровочных полей // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1985. Т. 16. Вып. 3. С. 522–550.
2. *Goldfain E.* Bifurcations and pattern formation in particle physics: An introductory study // Eur. Phys. Lett. 2008. V. 82. P. 11001.
3. *Carlson J., Jaffe A., Wiles A.* The Millennium Prize Problems. Cambridge; Massachusetts, 2006.
4. *Магницкий Н.А.* Хаотическая динамика однородных полей Янга–Миллса с двумя степенями свободы // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1698–1703.
5. *Магницкий Н.А.* Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1618–1627.
6. *Магницкий Н.А.* О природе динамического хаоса в окрестности сепаратрисы консервативной системы // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 647–654.
7. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М., 2011.
8. *Magnitskii N.A.* Universality of transition to chaos in all kinds of nonlinear differential equations // Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. Rijeca, 2012. P. 133–174.
9. *Рябков О.И.* Об исследовании седло-узловых бифуркаций и бифуркации вилки методом стабилизации Н.А. Магницкого // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1657–1661.
10. *Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л.* Динамика некоторых однородных моделей классических полей Янга–Миллса // Ядерная физика. 1982. Т. 36. № 6 (12). С. 1563–1576.

Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 06.10.2021 г.
После доработки 09.03.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 309–318

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОВПАДАЮЩИМИ СО СТЕПЕННОЙ ИЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

© 2022 г. Л. В. Гаргянц

Для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока построены обобщённые энтропийные решения задач Коши с начальными условиями, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на минус бесконечности. В случае экспоненциально растущего начального условия установлена односторонняя периодичность по пространственной переменной найденного решения. Доказано несуществование положительных решений у рассматриваемых задач Коши.

DOI: 10.31857/S0374064122030037, **EDN:** BXLRJB

1. Введение и постановка задачи. Для заданных $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $u_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}, \quad 0 < T \leqslant \infty, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

В работах [1, 2] (см. также [3, с. 39–40 и 65]) дано

Определение 1. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным решением* задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$|u-k|_t + (\operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k)))_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T); \tag{3}$$

2) $\operatorname*{esslim}\limits_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0(\cdot)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, т.е. существует множество $\mathcal{E} \subset (0,T)$ полной меры Лебега такое, что $u(t,\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $t \in \mathcal{E}$, и $u(t,\cdot) \to u_0(\cdot)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ при $t \to 0+$, $t \in \mathcal{E}$.

Условие (3) означает, что для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi \geqslant 0$, выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Pi_T} (|u-k|\varphi_t + \operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x)\,dx\,dt \geqslant 0.$$

При $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ существование и единственность ограниченного обобщённого энтропийного решения $u \in L^\infty(\Pi_T)$ задачи (1), (2) установлены в работах С.Н. Кружкова [1, 2] в общем случае многих пространственных переменных. В этих работах также доказано свойство *монотонной зависимости* решения от начальных данных:

если $u, v \in L^\infty(\Pi_T)$ – обобщённые энтропийные решения задачи (1), (2) с начальными условиями $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ соответственно, причём $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п.в. на Π_T.

Из этого свойства вытекает *принцип максимума/минимума*: если $a \leqslant u_0 \leqslant b$ почти всюду на $\mathbb{R}$ и u – ограниченное обобщённое энтропийное решение задачи (1), (2), то $a \leqslant u \leqslant b$ почти всюду на Π_T. Из него, в частности, следует единственность постоянного решения при постоянных начальных условиях в классе ограниченных измеримых функций.

В работе Е.Ю. Панова [4] доказана теорема существования и единственности локально ограниченного обобщённого энтропийного решения задачи (1), (2) в общем случае многих пространственных переменных в классе функций, удовлетворяющих степенному ограничению на рост по пространственным переменным. Решения, рассматриваемые в данной статье, не входят в найденные Е.Ю. Пановым классы корректности.

Будем строить кусочно-гладкие обобщённые энтропийные решения задачи (1), (2), поэтому заменим определение 1 на свойство (см. [5, с. 74–77]), которое содержит

Предложение 1. *Пусть* $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ *– кусочно-гладкая в полосе* Π_T *функция с не более чем счётным числом линий разрыва* Γ_n, *являющихся графиками функций* $\gamma_n \in C^1(0,T)$, *где* $n \in \mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$; *пусть эти линии попарно не пересекаются и существуют односторонние пределы*

$$u_n^-(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)-0)} u(\tau,\xi), \quad u_n^+(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma_n(t)+0)} u(\tau,\xi)$$

функции $u(\cdot)$ *при подходе к каждой линии разрыва* Γ_n. *Тогда* $u(\cdot)$ *является обобщённым энтропийным решением уравнения (1) в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

1) функция $u(\cdot)$ *в области своей гладкости удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле;*

2) на каждой линии разрыва Γ_n *при любом* $t \in (0,T)$ *имеет место условие Ранкина–Гюгонио:*

$$\dot{\gamma}_n(t) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)}; \tag{4}$$

3) для любого $n \in \mathcal{N}$ *и всех* $t \in (0,T)$ *выполнено условие допустимости разрыва: при* $u_n^+(t) > u_n^-(t)$ $(u_n^+(t) < u_n^-(t))$ *график функции* f *лежит не ниже (соответственно, не выше) хорды, соединяющей точки этого графика с абсциссами* $u_n^-(t)$, $u_n^+(t)$.

Замечание 1. Первые два условия предложения 1 эквивалентны тому, что функция $u(\cdot)$ является обобщённым решением (в смысле распределений) уравнения (1), а последнее является условием возрастания энтропии для кусочно-гладких решений и эквивалентно E-условию О.А. Олейник [6].

Приведём основные результаты некоторых работ, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой в данной статье задаче.

В работах [4, 7, 8] рассматривалась задача Коши (1), (2) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и степенным начальным условием $u_0(x) = |x|^\beta$, $\beta(\alpha-1) > 1$. Оказалось, что у такой задачи Коши существует кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение, которое определено во всей полуплоскости $t > 0$, имеет счётное число линий разрыва и меняет знак при переходе через каждую ударную волну. Кроме того, рассматриваемая задача не имеет положительных решений ни в какой полосе Π_T.

В работах [9, 10] изучалась задача Коши (1), (2) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и экспоненциальным начальным условием $u_0(x) = \exp(-x/(\alpha-1))$. Оказалось, что у такой задачи Коши существует решение, обладающее теми же, что и выше, свойствами: оно определено во всей полуплоскости $t > 0$, имеет счётное число линий разрыва и меняет знак при переходе через каждую ударную волну (линию сильного разрыва). Однако более быстрый рост начального условия на бесконечности дал неожиданный эффект: построенное в этих работах решение оказалось ограниченным в области $t \geqslant \delta > 0$, в то время как в случае степенных начальных данных решение имеет рост порядка $|x|^{1/(\alpha-1)}$ при $x \to \pm\infty$ и не зависит от показателя степени β начального условия. Кроме того, решение является односторонне периодическим по пространственной переменной. Эта задача также не имеет положительного решения ни в какой полосе Π_T, что доказано в [11].

Решения, построенные в работах [4, 7–10], имеют одинаковую структуру. Полуплоскость $t > 0$ делится гладкими попарно непересекающимися кривыми Γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, являющимися графиками гладких функций $\gamma_n\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, на счётное число областей $(\mathbb{R}^+ = (0,+\infty))$. Функциональная последовательность $\gamma_n(t)$ является неограниченно монотонно убывающей.

В областях $D_n = \{(t,x) : \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\}$, $n \in \mathbb{N}$, между этими кривыми и в области $D_0 = \{(t,x) : x > \gamma_0(t)\}$ решение является классическим, а каждая из кривых Γ_n является линией сильного разрыва (ударной волной), причём со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. В работе [12] предложен единый способ описания таких решений, основанный на преобразовании Лежандра.

В настоящей работе в пп. 3 и 4 доказано, что у задач Коши для уравнения (1) с функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и положительными начальными условиями, совпадающими со степенной или экспоненциальной функцией на минус бесконечности, существуют знакочередующиеся энтропийные решения со счётным числом ударных волн. Причём в случае экспоненциального роста начального условия существует знакочередующееся односторонне периодическое по пространственной переменной энтропийное решение. Тем самым доказано, что для существования решений с теми же свойствами, что и у решений из работ [4, 7–10], достаточно наличия степенного или экспоненциального поведения начального условия на минус бесконечности. Все построенные в настоящей работе решения имеют структуру, описанную выше. Принципиальное отличие от ранее построенных примеров заключается в том, что ударная волна Γ_0 образована как огибающая семейства характеристик, идущих из начальной плоскости $t = 0$, лишь при $t \leqslant t_0 < +\infty$. Кроме того, в области D_0 решение является непрерывным, но, вообще говоря, не гладким. В п. 5 доказывается, что рассматриваемые задачи Коши не имеют положительных решений ни в какой полосе Π_T.

2. Вспомогательные утверждения. Предпошлём формулировке основных результатов ряд вспомогательных определений и утверждений.

Определение 2. *Преобразованием Лежандра* гладкой выпуклой вверх функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функция γ, задаваемая для каждого $t \in \mathbb{R}$ равенством

$$\gamma(t) = \mathcal{L}(g)(t) := \inf_{k\in\mathbb{R}} (kt - g(k)).$$

Преобразование Лежандра функции $g(k)$ легко записать параметрически, где роль параметра выполняет переменная k, а именно

$$t = g'(k), \quad \gamma(t) = kg'(k) - g(k). \tag{5}$$

Непосредственно из определения следует, что для всякого $C \in \mathbb{R}$ выполнены соотношения $\mathcal{L}(g + C) = \mathcal{L}(g) - C$ и $\mathcal{L}(Cg)(t) = C\mathcal{L}(g)(t/C)$.

Отметим, что огибающая семейства прямых на плоскости определяется преобразованием Лежандра (см. [13, с. 33]).

В дальнейшем будем рассматривать уравнение (1) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$.

Лемма. *Пусть функция $u\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям предложения 1, и для некоторого $n \in \mathcal{N}$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ справедливо равенство*

$$\dot\gamma_n(t) = f'(u_n^+(t)) \equiv |u_n^+(t)|^{\alpha-1}. \tag{6}$$

Тогда на линии разрыва Γ_n выполнено условие Ранкина–Гюгонио (4) в том и только том случае, когда для всех $t > 0$ справедливо соотношение $u_n^-(t) = -wu_n^+(t)$, где $-w$ – корень уравнения

$$|v|^{\alpha-1}v - \alpha v + \alpha - 1 = 0, \tag{7}$$

отличный от единицы.

Доказательство. В силу равенства (6) условие Ранкина–Гюгонио (4) на линии разрыва Γ_n имеет вид

$$f'(u_n^+(t)) = \frac{f(u_n^+(t)) - f(u_n^-(t))}{u_n^+(t) - u_n^-(t)}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим это равенство при фиксированном t как уравнение относительно $u_n^-(t)$. Так как функция потока является степенной, это уравнение является однородным. Сделав замену

$u_n^-(t) = u_n^+(t)v$, получим уравнение (7). Анализ функции $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(v) = |v|^{\alpha-1}v - \alpha v + \alpha - 1$, показывает, что это уравнение имеет единственный корень, отличный от единицы, причём он отрицателен и меньше -1. Лемма доказана.

В дальнейшем через $-w$, как и в формулировке леммы, обозначаем отличный от единицы корень уравнения (7).

3. Энтропийное решение задачи Коши с начальным условием, совпадающим со степенной функцией на бесконечности. Будем решать задачу Коши (1), (2) в полуплоскости $t > 0$ с $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, и кусочно-гладким начальным условием, совпадающим со степенной функцией на минус бесконечности, т.е.

$$u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} |x|^\beta, & \text{если} \quad x \in (-\infty, m), \\ \tilde{u}_0(x), & \text{если} \quad x \in [m, +\infty), \end{cases} \tag{9}$$

где $\beta(\alpha-1) > 1$, $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$, $\tilde{u}_0(x)$ – произвольная положительная нестрого возрастающая кусочно-гладкая функция, причём $\tilde{u}_0(m) \geqslant |m|^\beta$.

Теорема 1. *У задачи Коши (8), (9) существует кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение $u(\cdot)$, которое определено во всей полуплоскости $t > 0$, обладает счётным числом ударных волн Γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, являющихся графиками функций*

$$\gamma_n(t) = -C_n t^\eta, \quad \eta = \frac{1}{1 - \beta(\alpha-1)} < 0, \quad C_n = C_n(\alpha, \beta) > 0,$$

где C_n – строго возрастающая последовательность, при этом функция $u(\cdot)$ меняет знак при переходе через каждую ударную волну.

Доказательство. Построим в явном виде кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение задачи (8), (9), удовлетворяющее условиям теоремы. Это решение будет иметь следующую структуру: в областях гладкости $D_n = \{(t,x) : \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\}$, $n \in \mathbb{N}$, и в области $D_0 = \{(t,x) : x > \gamma_0(t)\}$ решение строится методом характеристик, причём со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. В каждой из областей D_n, $n \in \mathbb{N}_0$, проекции этих характеристик на плоскость (t,x) образуют семейство прямых

$$x = kt - g_n(k), \tag{10}$$

параметризованных своим наклоном k.

В окрестности любой точки прямой $t = 0$ классическое решение задачи (8), (9) существует и единственно. Для его построения следует продолжить начальное условие u_0 константой вдоль характеристик. Характеристическая система для уравнения (8) имеет вид

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f'(u), \quad \dot{u} = 0. \tag{11}$$

Характеристикой, выходящей из точки $(t_0, x_0, u_0(x_0)) = (0, s, u_0(s))$, где $s \in \mathbb{R}$ – параметр на графике начального условия u_0, является прямая

$$\{(t,x,u) \in \mathbb{R}^3 : u \equiv u_0(s), \ \ x = |u|^{\alpha-1}t + s\}. \tag{12}$$

Проекция на плоскость (t,x) этой прямой имеет вид

$$x = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}t + s, \ \ \text{если} \ \ s \geqslant m, \quad \text{и} \quad x = (-s)^{\beta(\alpha-1)}t + s, \ \ \text{если} \ \ s < m.$$

Сделав в последнем уравнении замену $k = (-s)^{\beta(\alpha-1)}$, $k > |m|^{1/(\beta(\alpha-1))}$, и обозначив $g_0(k) = k^{1/(\beta(\alpha-1))}$, получим семейство прямых

$$x = kt - g_0(k), \tag{13}$$

зависящих от параметра $k > |m|^{1/(\beta(\alpha-1))}$.

Доопределим функцию $g_0(k)$ той же формулой при всех $k > 0$. Тогда семейство прямых (13) будет иметь огибающую $\gamma_0(t) = \mathcal{L}(g_0)(t)$, определённую при всех $t \in \mathbb{R}^+$. После перехода от параметрического представления (5) к явному получим, что

$$\gamma_0(t) = -C_0 t^\eta, \quad \text{где} \quad C_0 = C_0(\alpha, \beta) > 0, \quad \eta = \frac{1}{1-\beta(\alpha-1)} < 0. \tag{14}$$

Определим решение в области D_0 следующим образом (рис. 1).

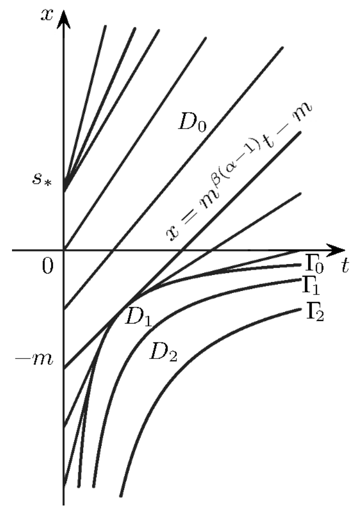

Рис. 1. Характеристики и линии разрыва для начального условия степенного вида.

1) Если $s \geqslant m$, то характеристики $x = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}t + s$ имеют наклон, равный $|\tilde{u}_0(s)|^{\beta(\alpha-1)}$. Так как функция $f'(\tilde{u}_0(s)) = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}$ не убывает, соответствующие характеристики не пересекаются. На каждой характеристике решение определяется соотношением $u \equiv \tilde{u}_0(s)$.

Если монотонная функция $\tilde{u}_0$ имеет разрыв (первого рода) в точке s_*, то внутри угла $f'(\tilde{u}_0(s_*-0)) < (x-s_*)/t < f'(\tilde{u}_0(s_*+0))$ решение представляет собой волну разрежения (см. [5, с. 83–87]), определяемую соотношением $f'(u(t,x)) = (x - s_*)/t$. Если $\tilde{u}_0(m) \neq |m|^\beta$, то такой же волной разрежения $f'(u(t,x)) = (x - m)/t$ заполняется и угол $|m|^{\beta(\alpha-1)} < (x-m)/t < f'(\tilde{u}_0(m))$. Построенное так решение $u(t,x)$ является непрерывным в области $s \geqslant m$ (см. [5, с. 83–87]).

2) Если $s < m$, то характеристики в соответствующей области $x < |m|^{\beta(\alpha-1)}t + m$ начинают пересекаться, образовывая огибающую $\gamma_0(t) = -C_0 t^\eta$, $0 < t \leqslant t_0$ (точка $t_0 = (|m|^{\beta(\alpha-1)} \times (-C_0\eta)^{-1})^{1/(\eta-1)}$ – это абсцисса точки касания графика функции γ_0 с характеристикой $x = |m|^{\beta(\alpha-1)}t + m$). До этой огибающей решение определяется стандартным образом. Определим предел решения $u_0^+(t)$ на огибающей из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$.

3) В область $\{(t,x) : t > t_0,\ \gamma_0(t) < x < |m|^{\beta(\alpha-1)}t + m\}$ характеристики не привносят никакой информации из начального условия. В точках кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, определим предел решения $u_0^+(t)$ из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$. Выпустим из каждой точки кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, касательную вправо. Продолжим решение с кривой $\gamma_0(t)$ вдоль всех таких касательных соответствующей константой.

Опишем рекуррентную процедуру построения классического решения в областях D_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Итак, пусть решение в области D_n уже построено, причём кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. Решение в области D_{n+1} строится следующим образом. В качестве "начального условия" выбирается условие

$$u|_{x=\gamma_n(t)} = u_n^-(t),$$

которое находится из соотношения $u_n^-(t) = -wu_n^+(t)$ (см. лемму). Далее решение продолжается константой вдоль характеристик, которые снова образуют огибающую.

Действительно, пусть $x = k_n^+ t - g_n(k_n^+)$, $(t,x) \in D_n$, и $x = k_n^- t - g_{n+1}(k_n^-)$, $(t,x) \in D_{n+1}$, – два семейства характеристик, параметризованные своим наклоном. В точке $(t, \gamma_n(t))$ кривой разрыва Γ_n имеем равенства

$$t = g_n'(k_n^+), \quad k_n^+ t - g_n(k_n^+) = k_n^- t - g_{n+1}(k_n^-), \quad k_n^- = w^{\alpha-1}k_n^+,$$

из которых следует, что

$$g_{n+1}(w^{\alpha-1}k_n^+) = g_n(k_n^+) + g_n'(k_n^+)(w^{\alpha-1}k_n^+ - k_n^+).$$

Переобозначив $k_n^+ = k$, получим следующую связь между соседними семействами характеристик:

$$g_{n+1}(w^{\alpha-1}k) = g_n(k) + g_n'(k)(w^{\alpha-1}k - k). \tag{15}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $g_{n+1}(k) = A_{n+1}g_0(k) = A_{n+1}k^{1/(\beta(\alpha-1))}$, где $A_{n+1} = A_{n+1}(\alpha,\beta)$, причём $A_{n+1} > A_n \geqslant 1$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$. Учитывая свойства преобразования Лежандра, а также формулу (14), получаем огибающую соответствующего семейства характеристик $\gamma_{n+1}(t) = \mathcal{L}(g_{n+1})(t) = -C_{n+1}t^{\eta}$, где $C_{n+1} = C_0(A_{n+1})^{1-\eta} > C_n$.

Вследствие доказанной леммы построенное решение удовлетворяет условию Ранкина–Гюгонио. Энтропийность решения следует из того, что функция потока является выпуклой вниз на положительной полуоси и выпуклой вверх на отрицательной полуоси. Теорема доказана.

4. Энтропийное решение задачи Коши с начальным условием, совпадающим с экспоненциальной функцией на бесконечности. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (8) с начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-x/(\alpha-1)\right), & \text{если} \quad x \in (-\infty, m), \\ \tilde{u}_0(x), & \text{если} \quad x \in [m, +\infty), \end{cases} \tag{16}$$

где $\tilde{u}_0(x)$ – произвольная положительная нестрого возрастающая кусочно-гладкая функция, причём $\tilde{u}_0(m) \geqslant \exp(-m/(\alpha-1))$, $m \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *У задачи Коши (8), (16) существует обобщённое энтропийное решение $u(\cdot)$, которое определено во всей полуплоскости $t > 0$, обладает счётным числом ударных волн Γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, являющихся графиками функций*

$$\gamma_n(t) = \ln t + 1 - nC, \quad C = C(\alpha) > 0;$$

при этом функция $u(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$$u(t,x) = (-1)^{n-1}U(t, x + (n-1)C), \quad (t,x) \in D_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где $D_n = \{(t,x) : \gamma_n(t) < x < \gamma_{n-1}(t)\}$ и $U = u|_{D_1}$.

Доказательство. Построим в явном виде кусочно-гладкое обобщённое энтропийное решение задачи (8), (16), удовлетворяющее условиям теоремы. Это решение будет иметь следующую структуру: в областях гладкости D_n, $n \in \mathbb{N}$, и в области $D_0 = \{(t,x) : x > \gamma_0(t)\}$ решение строится методом характеристик, причём со стороны $x > \gamma_n(t)$ кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области D_n. В каждой из областей D_n, $n \in \mathbb{N}_0$, проекции этих характеристик на плоскость (t,x) образуют семейство прямых (10), параметризованных своим наклоном.

В окрестности любой точки прямой $t = 0$ классическое решение задачи (8), (16) существует и единственно. Для его построения следует продолжить начальное условие u_0 константой вдоль характеристик. Характеристическая система для уравнения (8) имеет вид (11). Характеристикой, выходящей из точки $(t_0, x_0, u_0(x_0)) = (0, s, u_0(s))$, где $s \in \mathbb{R}$ – параметр на графике начального условия u_0, является прямая (12). Проекция на плоскость (t,x) этой прямой имеет вид

$$x = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}t + s, \quad \text{если} \quad s \geqslant m, \quad \text{и} \quad x = e^{-s}t + s, \quad \text{если} \quad s < m.$$

Сделав в последнем уравнении замену $k = e^{-s}$, $k > e^{-m}$, и обозначив $g_0(k) = \ln k$, получим семейство прямых (13), зависящих от параметра $k > e^{-m}$.

Доопределим функцию $g_0(k)$ той же формулой при всех $k > 0$. Тогда семейство прямых (13) будет иметь огибающую $\gamma_0(t) = \mathcal{L}(g_0)(t)$, определённую при всех $t \in \mathbb{R}^+$. После перехода от параметрического представления (5) к явному получим, что

$$\gamma_0(t) = 1 + \ln t. \tag{18}$$

Решение в области D_0 определяется аналогично тому, как это сделано в пп. 1)–3) доказательства теоремы 1. Именно, определим его следующим образом (рис. 2).

$1'$) Если $s \geqslant m$, то характеристики в соответствующей области имеют наклон, равный $|\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}$. Так как функция $f'(\tilde{u}_0(s)) = |\tilde{u}_0(s)|^{\alpha-1}$ не убывает, соответствующие характеристики не пересекаются. На каждой характеристике решение определяется соотношением $u \equiv \tilde{u}_0(s)$.

Если монотонная функция $\tilde{u}_0$ имеет разрыв (первого рода) в точке s_*, то внутри угла $f'(\tilde{u}_0(s_* - 0)) < (x - s_*)/t < f'(\tilde{u}_0(s_* + +0))$ решение представляет собой волну разрежения (см. [5, с. 83–87]), определяемую соотношением $f'(u(t,x)) = (x - s_*)/t$. Если $\tilde{u}_0(m) \neq e^{-m/(\alpha-1)}$, то такой же волной разрежения $f'(u(t,x)) = = (x - m)/t$ заполняется и угол $e^{-m} < (x - m)/t < f'(\tilde{u}_0(m))$. Построенное так решение $u(t,x)$ является непрерывным в области $s \geqslant m$ (см. [5, с. 83–87]).

$2'$) Если $s < m$, то характеристики в соответствующей области $x < e^{-m}t + m$ начинают пересекаться, образовывая огибающую $\gamma_0(t) = 1 + \ln t$, $0 < t \leqslant t_0$ (точка $t_0 = e^m$ – это абсцисса точки касания графика функции γ_0 с характеристикой $x = e^{-m}t + m$). До этой огибающей решение определяется стандартным образом. Определим предел решения $u_0^+(t)$ на огибающей из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$.

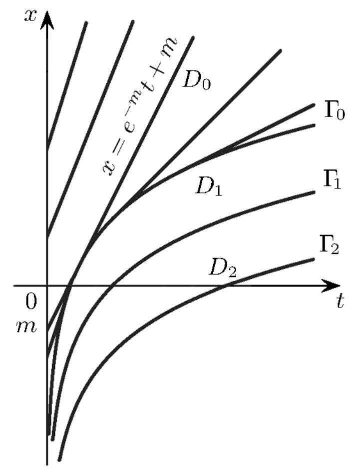

Рис. 2. Характеристики и линии разрыва для начального условия экспоненциального вида.

$3'$) В область $\{(t,x) : t > t_0,\ \gamma_0(t) < x < e^{-m}t + m\}$ характеристики не привносят никакой информации из начального условия. В точках кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, определим предел решения $u_0^+(t)$ из соотношения $\dot{\gamma}_0(t) = f'(u_0^+(t)) \equiv |u_0^+(t)|^{\alpha-1}$. Выпустим из каждой точки кривой $\gamma_0(t)$, $t > t_0$, касательную вправо. Продолжим решение с кривой $\gamma_0(t)$ вдоль всех таких касательных соответствующей константой.

Итак, построено решение задачи (8), (16) в области D_0. Процедура построения решения в областях D_n, $n \in \mathbb{N}$, такая же, как и в теореме 1. Связь между функциями g_n и g_{n+1}, которые задают семейства характеристик в областях D_n и D_{n+1}, описывается соотношением (15).

Непосредственные вычисления показывают, что $g_{n+1}(k) = g_n(k) + C = g_0(k) + (n+1)C$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$, где $C = C(\alpha) > 0$. Учитывая свойства преобразования Лежандра, а также представление (18), получаем огибающую соответствующего семейства характеристик $\gamma_{n+1}(t) = \mathcal{L}(g_{n+1})(t) = \ln t - (n+1)C$.

Докажем, что построенное решение удовлетворяет соотношению (17). Действительно, согласно доказанному выше, характеристики уравнения (8) имеют вид

$$x = kt - g_1(k), \quad (t,x) \in D_1,$$

$$x = kt - (g_1(k) + (n-1)C), \quad (t,x) \in D_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $\dot{x} = f'(u) = |u|^{\alpha-1}$, то в точках области D_n имеем $u(t,x) = |U(t, x + (n-1)C)|$. Поэтому, поскольку при переходе через линию разрыва решение меняет знак, получаем соотношение (17).

Вследствие доказанной леммы построенное решение удовлетворяет условию Ранкина–Гюгонио. Энтропийность решения следует из того, что функция потока является выпуклой вниз на положительной полуоси и выпуклой вверх на отрицательной полуоси. Теорема доказана.

5. Несуществование положительного энтропийного решения. Покажем, что задачи Коши для уравнения (8) с начальными условиями (9) и (16) не имеют положительных решений ни в какой полосе. Для доказательства этого утверждения нам потребуются понятия обобщённых энтропийных суб- и суперрешений этой задачи.

Обозначим $f^+ = \max(f, 0)$; $f^- = \max(-f, 0)$; $\operatorname{sign}^+(f) = \operatorname{sign}(f^+)$; $\operatorname{sign}^-(f) = -\operatorname{sign}^+(-f)$. Приводимые ниже определения даны в работах [14, 15] (см. также [3, с. 328–329]).

Определение 3. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным субрешением* задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$((u-k)^+)_t + (\operatorname{sign}^+(u-k)(f(u)-f(k)))_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}_{t\to 0+}((u(t,x)-u_0(x))^+ = 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Определение 4. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным суперрешением* задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$((u-k)^-)_t + (\operatorname{sign}^-(u-k)(f(u)-f(k)))_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}_{t\to 0+}((u(t,x)-u_0(x))^- = 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Замечание 2. Несложно видеть, что функция $u(\cdot)$ является обобщённым энтропийным решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда она является обобщённым энтропийным суб- и суперрешением одновременно.

В работах [14, 15] установлен следующий принцип сравнения для ограниченных обобщённых энтропийных суб- и суперрешений.

Предложение 2. *Если $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ и $v\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u, v \in L^\infty(\Pi_T)$, – обобщённое энтропийное субрешение и обобщённое энтропийное суперрешение задачи (1), (2) с начальными условиями u_0 и v_0 соответственно, $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, и $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п.в. на Π_T.*

В работе [16] доказано, что максимум (минимум) конечного множества обобщённых энтропийных субрешений (суперрешений) задачи (1), (2) также является обобщённым энтропийным субрешением (суперрешением) этой задачи, откуда вытекает доказанное в работе [8]

Предложение 3. *1. Пусть u – обобщённое энтропийное субрешение задачи (1), (2) и $c \in \mathbb{R}$. Тогда функция $v\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = \max(u(t,x), c)$ также является обобщённым энтропийным субрешением этой задачи с начальной функцией $v_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v_0(x) = \max(u_0(x), c)$.*

2. Пусть u – обобщённое энтропийное суперрешение задачи (1), (2) и $c \in \mathbb{R}$. Тогда функция $w\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $w(t,x) = \min(u(t,x), c)$ также является обобщённым энтропийным суперрешением этой задачи с начальной функцией $w_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w_0(x) = \min(u_0(x), c)$.

Теорема 3. *Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, функция $h(x) = (f(x) - f(0))/x$ возрастает при $x > 0$ и для некоторого $m \in \mathbb{R}$ кусочно-гладкая функция $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ убывает при $x < m$, причём $\lim_{x\to -\infty} u_0(x) = +\infty$. Пусть также выполнено соотношение*) $-u_0^{-1}(x) = o(h(x))$ при $x \to +\infty$. Тогда не существует неотрицательного обобщённого энтропийного решения задачи (1), (2) ни в какой полосе Π_T.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием (2), а также задачи Коши для этого же уравнения со следующими начальными условиями:

$$(u_N)_t + f(u_N)_x = 0, \quad u_N|_{t=0} = \begin{cases} N, & x < u_0^{-1}(N), \\ 0, & x \geqslant u_0^{-1}(N), \end{cases} \tag{19}$$

$$(U_N)_t + f(U_N)_x = 0, \quad U_N|_{t=0} = \min(N, u_0(x)) \tag{20}$$

при фиксированном $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant u_0(m)$.

Заметим, что справедливы неравенства $u_N|_{t=0} \leqslant U_N|_{t=0} \leqslant u|_{t=0}$.

Задача (19) представляет собой задачу Римана о распаде разрыва. Её единственным ограниченным обобщённым энтропийным (энтропийность следует из определения функции h) решением $u_N \in L^\infty(\Pi_T)$ является [5] функция

$$u_N(t,x) = \begin{cases} N, & x < u_0^{-1}(N) + h(N)t, \\ 0, & x \geqslant u_0^{-1}(N) + h(N)t. \end{cases}$$

*) Здесь и ниже в доказательстве под u_0^{-1} подразумевается обратная функция к ограничению функции u_0 на промежуток $(-\infty, m)$. На этом промежутке функция u_0 монотонна, а значит, имеет обратную.

Отметим, что для любой фиксированной точки $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ имеет место сходимость $u_N(t,x)\to+\infty$ при $N\to+\infty$, поскольку $-u_0^{-1}(x)=o(h(x))$ при $x\to+\infty$.

Пусть $u\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$ – неотрицательное обобщённое энтропийное решение (а значит, и обобщённое энтропийное суперрешение) задачи (1), (2). Тогда в силу предложения 3 функция $U_N\colon \Pi_T\to\mathbb{R}$, $U_N(t,x)=\min(u(t,x),N)$, также является обобщённым энтропийным суперрешением задачи (20), причём для всех $(t,x)\in\Pi_T$ выполнено неравенство $0\leqslant U_N(t,x)\leqslant N$ в силу неотрицательности функции u.

Таким образом, вследствие предложения 2 и определения функции U_N почти всюду в полосе Π_T справедливы неравенства $u_N(t,x)\leqslant U_N(t,x)\leqslant u(t,x)$, но это противоречит тому, что $u_N(t,x)\to+\infty$ при $N\to+\infty$.

Следствие 1. *Не существует неотрицательного обобщённого энтропийного решения задачи Коши (8), (9) ни в какой полосе* Π_T.

Доказательство. Заметим, что функции $f(u)=|u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $h(x)=|x|^{\alpha-1}/\alpha$, $\alpha>1$, и начальное условие u_0, определённое равенством (9), удовлетворяют всем условиям теоремы 3. Действительно, $f\in C^1(\mathbb{R})$, причём h – возрастающая при $x>0$ функция, а неотрицательная кусочно-гладкая функция u_0 убывает на интервале $(-\infty,m)$, причём $\lim\limits_{x\to-\infty}u_0(x)=+\infty$. Кроме того, $x^{1/\beta}=o(|x|^{\alpha-1}/\alpha)$ при $x\to+\infty$, поскольку $\beta(\alpha-1)>1$. Следовательно, $-u_0^{-1}(x)=o(h(x))$ при $x\to+\infty$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Не существует неотрицательного обобщённого энтропийного решения задачи Коши (8), (16) ни в какой полосе* Π_T.

Доказательство. Согласно доказательству следствия 1 определённые в нём функции f и h удовлетворяют условиям теоремы 3. Условиям этой теоремы удовлетворяет и начальное условие u_0, определённое равенством (16). Действительно, неотрицательная кусочно-гладкая функция u_0 убывает на интервале $(-\infty,m)$, причём $\lim\limits_{x\to-\infty}u_0(x)=+\infty$. Кроме того, имеет место соотношение $(\alpha-1)\ln x=o(|x|^{\alpha-1}/\alpha)$ при $x\to+\infty$, поэтому $-u_0^{-1}(x)=o(h(x))$ при $x\to+\infty$. Следствие доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-1204.2020.1), а также при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С.Н.* Обобщённые решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.
2. *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
3. Труды С.Н. Кружкова: сб. ст. / Под ред. С.Н. Бахвалова. М., 2000.
4. *Панов Е.Ю.* О классах корректности локально ограниченных обобщённых энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 5. С. 175–188.
5. *Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения с частными производными первого порядка. М., 1999.
6. *Олейник О.А.* О единственности и устойчивости обобщённого решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 165–170.
7. *Горицкий А.Ю.* Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счётнымм числом ударных волн // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 2. С. 3–6.
8. *Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю.* О локально ограниченных обобщённых энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2002. Т. 236. № 5. С. 120–133.
9. *Гаргянц Л.В.* Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 481–489.
10. *Гаргянц Л.В.* О локально ограниченных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 2. С. 191–199.

11. *Gargyants L.V.* Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data // Russian J. of Math. Phys. 2017. V. 24. № 3. P. 412–414.
12. *Гаргянц Л.В., Горицкий А.Ю., Панов Е.Ю.* Построение неограниченных разрывных решений скалярных законов сохранения при помощи преобразования Лежандра // Мат. сб. 2021. Т. 212. № 4. С. 29–44.
13. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 2012.
14. *Бенилан Ф., Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 151–154.
15. *Benilan Ph., Kruzhkov S.N.* Conservation laws with continuous flux functions // Nonlin. Differ. Equat. and Appl. 1996. V. 3. P. 395–419.
16. *Панов Е.Ю.* К теории обобщенных энтропийных суб- и суперрешений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 252–259.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 24.11.2020 г.
После доработки 24.11.2020 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 319–345

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.928.2

РАЗВИТИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛОМОВА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧИ КОШИ И КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С “ПРОСТОЙ” РАЦИОНАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

© 2022 г. А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Метод регуляризации Ломова развит для задачи Коши и смешанной задачи для сингулярно возмущённого параболического уравнения в случае “простой” рациональной точки поворота у предельного оператора. Для доказательства асимптотической сходимости возникающих рядов используется принцип максимума.

DOI: 10.31857/S0374064122030049, **EDN:** BXTCBM

Светлой памяти нашего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993),
выдающегося математика и прекрасного человека,
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящается эта работа

Введение. Сингулярно возмущённые уравнения, начиная с работ академика А.Н. Тихонова [1, 2], привлекают внимание многих исследователей. Это объясняется большой прикладной значимостью таких уравнений. С помощью сингулярно возмущённых уравнений описываются задачи, возникающие в квантовой механике, гидродинамике, химической кинетике. Особое место в этом перечне занимают задачи с нестабильным спектром предельного оператора (т.е. задачи с точками поворота или задачи со спектральными особенностями). В качестве примеров таких задач можно указать на уравнение Шрёдингера для туннельного перехода, задачу с классическим осциллятором, задачи механики сплошной среды и др.

Методам решения задач со спектральными особенностями посвящены монографии [3–5] и работа [6]. Настоящая статья развивает и дополняет исследования школы С.А. Ломова по методу регуляризации, который разработан основателем этой школы в середине шестидесятых годов прошлого столетия и схема которого в общих чертах состоит в следующем. Введением регуляризирующих функций, содержащих в себе все нерегулярности решения, возникающие из-за малого параметра, сингулярная задача сводится к регулярной в пространстве большей размерности. Используя схему классической теории возмущений, строится теория разрешимости соответствующих итерационных задач в пространстве большей размерности, а затем после построения асимптотического ряда по степеням малого параметра производится сужение на регуляризирующие функции, которое и приводит к построению асимптотического решения исходной сингулярно возмущённой задачи.

Одним из достоинств метода регуляризации Ломова является то, что он даёт возможность строить регуляризованное асимптотическое решение во всей области интегрирования, а при определённых условиях на коэффициенты даёт и точное решение задачи.

В работах С.А. Ломова и его учеников разработана, в частности, общая теория асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор $A(t)$ дискретно необратим, т.е. одна из точек его спектра при отдельных значениях $t_j \in [0,T]$ обращается в нуль (другие точки спектра в нуль не обращаются на всём отрезке $[0,T]$), причём сам оператор $A(t)$ является диагонализируемым при всех значениях $t \in [0,T]$ (включая и точки необратимости $t = t_j$). В этом случае точки t_j называются *“простыми” точками поворота.*

Случай “простой” точки поворота с натуральным показателем типа $t^n a(t)$, $n \in \mathbb{N}$, изучался в работе [7], а случай негладкого спектра предельного оператора – в [8]. Случай аналитических решений по параметру сингулярно возмущённого уравнения при наличии простейшей точки поворота у предельного оператора рассмотрен в работе [9].

В данной работе изучаются сингулярно возмущённые задача Коши и смешанная задача на полуоси для параболического уравнения в случае “простой” точки поворота с рациональным показателем типа $t^r a(t)$, $r \in \mathbb{Q}$.

Возникающие из-за наличия рациональной точки поворота трудности в процессе построения асимптотики решения сингулярно возмущённых задач ранее с точки зрения метода регуляризации не рассматривались. Исследование этих трудностей и разработка соответствующего алгоритма метода регуляризации существенно дополнят теорию сингулярных возмущений.

1. Задача Коши для сингулярно возмущённого параболического уравнения с простой рациональной точкой поворота. Рассматриваемая в работе задача возникла в результате выступления одного из авторов на научно-исследовательском семинаре “Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики”, руководимом академиком РАН Е.И. Моисеевым и профессором И.С. Ломовым.

На этом семинаре докладывалось о задаче Коши, у которой перед второй производной стояла вторая степень ε^2 малого параметра (модельное уравнение Шрёдингера) [10]. Естественно возник вопрос, как изменились бы ответ и рассуждения в этой задаче, если бы в ней перед второй производной стояла первая степень ε малого параметра, поскольку такое изменение усложняет построение регуляризованного асимптотического решения. Ответ на этот вопрос и даёт данная статья.

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\biggl(\frac{\partial u}{\partial t}-\biggl(\frac{\partial}{\partial x}\biggl(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\biggr)\biggr)\biggr)+t^{m/n}a(t)u=h(x,t),$$
$$u(x,0)=f(x),\quad -\infty<x<+\infty, \tag{1}$$

и пусть для неё выполнены следующие предположения:

1) $h(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, функция $h(x,t)$ и все её производные ограничены на $\mathbb{R}\times[0,T]$;

2) $k(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, существуют положительные постоянные k_0, M такие, что $k_0\leqslant k(x)< M(x^2+1)$, $|k'(x)|<M\sqrt{x^2+1}$ при всех $x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$, функция $f(x)$ и все её производные ограничены на $\mathbb{R}$;

4) $a(t)\in C^\infty([0,T])$, для всех $t\in[0,T]$ справедливы соотношения $a(t)\neq 0$ и $\operatorname{Re}a(t)\geqslant 0$;

5) $m,n\in\mathbb{N}$, $m/n=r\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ (m/n – несократимая дробь, $n\geqslant 2$).

Эти условия обеспечивают существование и единственность ограниченного решения и возможность построения асимптотического ряда для решения задачи (1).

Сингулярно возмущённые задачи возникают в том случае, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε, при $\varepsilon\neq 0$ не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon=0$.

При изучении задач с “простой” точкой поворота возникает ситуация, когда область значений исходного оператора не совпадает с областью значений предельного оператора.

Сингулярности задачи (1) имеют вид

$$e^{-\varphi(t)/\varepsilon},\quad \sigma_i(t,\varepsilon)=e^{-\varphi(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\varphi(s)/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds,$$

где $\varphi(t)=\int_0^t s^{m/n}a(s)\,ds$, $i=\overline{0,(p-1)}$, $p=m+n-1$. Обозначим $\sigma:=\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{p-1}\}$.

Введём, согласно методу регуляризации, расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\tau,\sigma)$ такую, что её сужение

$$\widetilde{u}(x,t,\tau,\sigma)\Big|_{\substack{\tau=\varphi(t)/\varepsilon\\ \sigma_i=\sigma_i(t,\varepsilon)}}=u(x,t)$$

даёт решение задачи (1). Используя формулу сложного дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \dot{\widetilde{u}} - \frac{q(t)}{\varepsilon}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1}(-q(t)\sigma_i + t^{-1+(i+1)/n})\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma_i}, \tag{2}$$

где $q(t) = t^{m/n}a(t)$. Подставив выражение (2) в уравнение (1), будем иметь

$$\varepsilon\dot{\widetilde{u}} - q(t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1}(-q(t)\sigma_i + \varepsilon t^{-1+(i+1)/n})\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma_i} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\right) - q(t)\widetilde{u} + h(x,t).$$

В результате приходим к задаче для расширенной функции $\widetilde{u}(x,t,\tau,\sigma,\varepsilon)$:

$$-q(t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1} -q(t)\left(\sigma_i\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma_i}\right) + q(t)\widetilde{u} = -\varepsilon\left(\dot{\widetilde{u}} + \sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma_i} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\right)\right) + h(x,t),$$

$$\widetilde{u}(x,0,0,0,\varepsilon) = f(x). \tag{3}$$

В дальнейшем знак тильды $\sim$ над u будем опускать.

Для решения задачи (3) введём пространство E безрезонансных решений, элементы которого имеют вид

$$u = X(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + W(x,t),$$

где $X(x,t), Z^i(x,t), W(x,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Зададим операторы, порождённые задачей (3):

$$\mathcal{L}_0 := -q(t)\frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1} -q(t)\left(\sigma_i\frac{\partial}{\partial \sigma_i}\right) + q(t)I,$$

$$\mathcal{L}_1 := -\sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n}\frac{\partial}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sigma_i\frac{\partial}{\partial \sigma_i}\right),$$

$$\Gamma u := u(x,0,0,0,\varepsilon) \tag{4}$$

(I – единичный оператор). Действия операторов системы (3) на элементы пространства E записываются в виде

$$\mathcal{L}_0 u = -q(t)X(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} -q(t)Z^i(x,t)\sigma_i + q(t)X(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} q(t)Z^i(x,t)\sigma_i + q(t)W(x,t),$$

$$\mathcal{L}_1 u = -\sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n}Z^i(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial X}{\partial x}\right)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z^i}{\partial x}\right)\sigma_i. \tag{5}$$

Используя операторы (4), (5), запишем задачу (3) в виде

$$\mathcal{L}_0 u = \varepsilon(-\dot{u} + \mathcal{L}_1 u) + h(x,t),$$

$$\Gamma u = f(x). \tag{6}$$

Её решение будем искать в виде ряда по ε:

$$u = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x,t,\tau,\sigma), \tag{7}$$

где

$$u_k(x,t,\tau,\sigma) = X_k(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + W_k(x,t).$$

Подставляя ряд (7) в уравнения задачи (6), получаем следующую серию задач:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_0 u_k = -\dot{u}_{k-1} + \mathcal{L}_1 u_{k-1} + \delta_0^k h(x,t),\\ \Gamma u_k = f(x)\delta_0^k, \quad k = \overline{-1,\infty}.\end{gathered} \tag{8}$$

Примем соглашение: если $k-1 \leqslant -2$, $k-2 \leqslant -2$, то слагаемые с такими k опускаем. Далее через $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначаем целую и дробную части числа.

Для того чтобы решить итерационные задачи (8), сформулируем и докажем теоремы 1 и 2 о разрешимости уравнения

$$\mathcal{L}_0 u = h(x,t) \tag{9}$$

в пространстве E. В теоремах 1 и 2 при выполнении разных исходных предположений (случаи I и II) получены необходимые и достаточные условия разрешимости этого уравнения.

Теорема 1 (разрешимость, случай I). *Пусть выполнены предположения 1)–5) задачи (1) и функция* $h(x,t) \in E$ *имеет вид*

$$h(x,t) = h_1(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} h_2^i(x,t)\sigma_i + h_3(x,t).$$

Тогда уравнение (9) разрешимо в пространстве E, *если и только если имеют место тождества* $h_1(x,t) \equiv h_2(x,t) \equiv 0$ *и*

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(h_3(x,0)) = 0 \quad \text{для любого} \quad k = \overline{0,[m/n]}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнены предположения теоремы и уравнение (9) имеет решение в E, т.е. существует $u \in E$ такое, что $\mathcal{L}_0 u = h(x,t)$. Так как ядро оператора $\mathcal{L}_0$ имеет вид

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_0) = \left\{u \in E : u = X(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i\right\},$$

то

$$\mathcal{L}_0 u = q(t)W(x,t) = h_1(x,t)e^{\tau} + \sum_{i=0}^{p-1} h_2^i(x,t)\sigma_i + h_3(x,t). \tag{10}$$

Отсюда следует, что $h_1(x,t) \equiv 0$, $h_2^i(x,t) \equiv 0$, $i = \overline{0,p-1}$, и $q(x,t)W(x,t) = h_3(x,t)$.

Разложим функцию $h_3(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$:

$$h_3(x,t) = h_3(x,0) + t\frac{\partial h_3(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]} h_3(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_3(x,t),$$

где $\overline{h}_3(x,0) \neq 0$. Тогда правая часть уравнения (10) принимает вид

$$t^{m/n}a(t)W(x,t) = h_3(x,0) + t\frac{\partial h_3(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]} h_3(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_3(x,t).$$

Так как уравнение имеет решение, то необходимо

$$h_3(x,0) = 0, \quad \frac{\partial h_3(x,0)}{\partial t} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{[m/n]} h_3(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$W(x,t) = t^{1-\{m/n\}} \frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{h}_3(x,t)/a(t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в пространстве E записывается в виде

$$u = X(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + t^{1-\{m/n\}} \frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

Достаточность. Если выполнены тождества из заключения теоремы, то функция $h(x,t)$ имеет вид $h(x,t) = t^{[m/n]+1}\overline{h}_3(x,t)$, а решение уравнения (9) в этом случае запишется в виде

$$u(x,t) = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}_0) + t^{1-\{m/n\}} \frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (разрешимость, случай II). *Пусть выполнены условия 2) и 3) задачи (1) и* $h_3(x,t) = t^{-s/n}f(x,t)$, *где* $f(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, $1\leqslant s\leqslant n-1$.

Тогда уравнение (9) разрешимо в пространстве E, *если и только если имеют место тождества*

$$h_1(x,t)\equiv 0, \quad h_2^i(x,t)\equiv 0, \quad i=\overline{0,p-1},$$

$$f_t^{(k)}(x,0) = 0 \quad \textit{для любого} \quad k\in\overline{0,[m/n]}, \quad \textit{если} \quad 0 < \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} \leqslant 1,$$

$$f_t^{(k)}(x,0) = 0 \quad \textit{для любого} \quad k\in\overline{0,[m/n]+1}, \quad \textit{если} \quad \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} > 1.$$

Доказательство. Необходимость. При решении уравнения (9) могут представиться только две возможности: а) или б).

а) Выполняется двойное неравенство $0 < s/n + \{m/n\} \leqslant 1$. Тогда возьмём $k=[m/n]$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$. Получим

$$t^{m/n}a(t)W(x,t) = t^{-s/n}\left(f(x,0) + t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{t^{[m/n]}}{[m/n]!}\frac{\partial^{[m/n]}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{f}(x,t)\right),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t) = t^{1-(s/n+\{m/n\})}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/a(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в E записывается в виде

$$u = X(x,t)e^\tau + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + t^{1-(s/n+\{m/n\})}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

б) Выполняется неравенство $s/n + \{m/n\} > 1$. Тогда возьмём $k=[m/n]+1$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]+1$. Получим

$$t^{m/n}a(t)W(x,t) = t^{-s/n}\left(f(x,0) + t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{t^{[m/n]+1}}{([m/n]+1)!}\frac{\partial^{[m/n]+1}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]+1}} + t^{[m/n]+2}\overline{f}(x,t)\right),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t)=t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/a(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в E записывается в виде

$$u=X(x,t)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i+t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

Замечание 1. Представления для функции $W(x,t)$ в случаях а) и б) условий теоремы 2 могут быть объединены, если записать их первый сомножитель в виде $t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}$. Действительно, если $s/n+\{m/n\}<1$, то $\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}=1-(s/n+\{m/n\})$, а если $s/n+\{m/n\}>1$, то выражение $\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}$ преобразовывать не будем. Если же $s/n+\{m/n\}=1$, то $\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}=0$. Отсюда и представлений функции $W(x,t)$ в случаях а) и б) вытекает, что

$$W(x,t)=t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/a(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Решение уравнения (9) в E записывается в виде

$$u=X(x,t)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i+t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{a(t)},$$

где $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$ – произвольные функции.

Достаточность. Если выполнены тождества из заключения теоремы, то функция $h(x,t)$ имеет вид $h(x,t)=t^{[m/n]+1-s/n}\overline{h}_3(x,t)$, если $s/n+\{m/n\}\leqslant 1$, и $h(x,t)=t^{[m/n]+2-s/n}\overline{h}_3(x,t)$, если $s/n+\{m/n\}>1$

Решение уравнения (9) в этом случае запишется в виде

$$u(x,t)=\operatorname{Ker}(\mathcal{L}_0)+t^{\{1-\{s/n+\{m/n\}\}\}}\frac{\overline{h}_3(x,t)}{a(t)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 (единственность). *Пусть в пространстве E дана система уравнений*

$$\mathcal{L}_0u=0,\quad \Gamma u=0 \tag{11}$$

и выполнены условия теоремы 1 или теоремы 2. Если, кроме этого, оператор $\mathcal{L}_1-\partial/\partial t$ удовлетворяет теореме о разрешимости, то система (11) имеет только нулевое решение.

Доказательство. На основании теоремы 1 или теоремы 2 запишем решение уравнения (9) в виде

$$u=u_1(x,t)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}u_2^i(x,t)\sigma_i,$$

где $u_1(x,t)$, $u_2^i(x,t)$, $i=\overline{0,p-1}$, – произвольные гладкие функции. Вычислим выражение

$$\mathcal{L}_1u-\frac{\partial u}{\partial t}=\biggl(-\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\biggl(k(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\biggr)\biggr)e^\tau+\sum_{i=0}^{p-1}\biggl(-\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\biggl(k(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\biggr)\biggr)\sigma_i-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}u_2^i.$$

Так как оператор $\mathcal{L}_1 - \partial/\partial t$ удовлетворяет теореме о разрешимости и решение $u(x,t)$ должно удовлетворять уравнению $Gu = 0,$ то отсюда следует, что

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right), \quad u_1(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u_2^i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u_2^i(x,t)}{\partial x}\right), \quad u_2^i(x,0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Как следствие решений задач Коши имеем тождества

$$u_1(x,t) \equiv 0, \quad u_2^i(x,t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, p-1}.$$

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $E.$ Теорема доказана.

1.2. Построение формального регуляризованного асимптотического ряда. Применим теоремы 1 и 2 для решения итерационных задач (8). Для удобства запишем эти задачи покомпонентно:

$$\frac{\partial X_k(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial X_k(x,t)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial Z_k^i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z_k^i(x,t)}{\partial x}\right), \quad i = \overline{0, (p-1)},$$

$$t^{m/n}a(t)W_k(x,t) = -\frac{\partial W_{k-1}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_{k-1}(x,t)}{\partial x}\right) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n} Z_{k-1}^i(x,t) + \delta_0^k h(x,t),$$

$$X_k(x,0) + W_k(x,0) = \delta_k^0 f(x), \quad k = \overline{-1, \infty};$$

$$\text{если индекс} \quad k-1 \leqslant -2, \quad \text{то слагаемые по определению равны нулю.} \tag{12}$$

Для решения итерационных задач используется теорема о разрешимости. Рассмотрим систему (12) при $k = -1$:

$$\varepsilon^{-1}: \begin{cases} \dfrac{\partial X_{-1}(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial X_{-1}(x,t)}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial Z_{-1}^i(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial Z_{-1}^i(x,t)}{\partial x}\right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n}a(t)W_{-1}(x,t) \equiv 0, \\ X_{-1}(x,0) + W_{-1}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Из начальных условий системы (13) следует, что

$$X_{-1}(x,t) \equiv 0,$$

$Z_{-1}^i(x,t)$ на данном шаге – произвольные решения уравнений теплопроводности, частное решение $W(x,t) \equiv 0.$

Функции $Z_{-1}^i(x)$ найдём из условия разрешимости системы (12) при $k = 0$:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \dfrac{\partial X_0(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial X_0(x,t)}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial_t Z_0^i(x)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial Z_{-1}^i(x,t)}{\partial x}\right), \quad i = \overline{0, (p-1)}, \\ t^{m/n}a(t)W_0(x,t) = h(x,t) - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n} Z_{-1}^i(x,t), \\ X_0(x,0) + W_0(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{14}$$

Разложим функцию $h(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$:

$$h(x,t)=h(x,0)+t\frac{\partial h(x,0)}{\partial t}+\ldots+\frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h(x,0)}{\partial t^{[m/n]}}+t^{[m/n]+1}h_0(x,t).$$

Из теоремы о разрешимости для $W_0(x,t)$ следует, что если $i=n(j+1)-1,\ \ j=\overline{0,[m/n]},$ то

$$Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,0)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j h(x,0)}{\partial t^j}.$$

Если $i\neq n(j+1)-1,\ \ i=\overline{0,(p-1)},$ то

$$Z_{-1}^{i}(x,0)=0.$$

Таким образом, функции $Z_{-1}(x,t)$ являются решениями задач Коши

$$\frac{\partial Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)}{\partial x}\right),\quad j=\overline{0,[m/n]},$$

$$Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,0)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j h(x,0)}{\partial t^j}.$$

Остальные функции $Z_{-1}^{i}(x,t)$ с индексами $i\neq n(j+1)-1,\ \ i=\overline{0,(p-1)}$ будут тождественно равны $Z_{-1}^{i}(x,t)\equiv 0,$ так как $Z_{-1}^{i}(x,0)=0.$

В результате после сужения на регуляризирующие функции получим решение на “-1”-м шаге

$$u_{-1}(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{[m/n]}Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon).$$

Система (14) имеет решения:

a) $X_0(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial X_0(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial X_0(x,t)}{\partial x}\right);$$

$$X_0(x,0)=f(x);$$

b) $Z_0^i(x,t)$ – на данном этапе произвольное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial x}\right),\quad i=\overline{0,p-1};$$

c) $W_0(x,t)=\dfrac{1}{t^{m/n}a(t)}\left(h(x,t)-\displaystyle\sum_{j=0}^{[m/n]}t^jZ_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\right)=t^{1-\{m/n\}}\overline{h}_0(x,t),$

где $\overline{h}_0(x,t)$ – гладкая функция.

Для определения начальных условий $Z_0^i(x,0)$ рассмотрим итерационную систему (12) на шаге “1”:

$$\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial x}\right),\quad i=\overline{0,(p-1)},$$

$$t^{m/n}a(t)W_1(x,t) = -\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right) - \sum_{i=0}^{p-1} t^{-1+(i+1)/n} Z_0^i(x,t),$$

$$X_1(x,0) + W_1(x,0) = 0.$$

Чтобы найти $Z_0^i(x,0)$, подчиним уравнение относительно $W_1(x,t)$ условию разрешимости. Для этого разложим $-\dfrac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$. Предварительно вычислим выражение

$$\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right) = (1-\{m/n\})t^{-\{m/n\}}\overline{h}_0(x,t) + t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial \overline{h}_0(x,t)}{\partial t} -$$

$$- t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \overline{h}_0(x,t)}{\partial x}\right) = -t^{-\{m/n\}}h_1(x,t).$$

Тогда получим

$$-\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x}\right) = t^{-\{m/n\}}h_1(x,0) + t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial h_1(x,0)}{\partial t} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t^{k-\{m/n\}}}{k!}\frac{\partial^k h_1(x,0)}{\partial t^k} + t^{k+1-\{m/n\}}\overline{h}_1(x,t),$$

где $k = [m/n + \{m/n\}]$, $\{m/n\} = s/n$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Если $m/n + \{m/n\}$ – целое, то $k = m/n + \{m/n\} - 1$.

Чтобы удовлетворить условиям разрешимости, нужно рассмотреть два случая:

а) если $j - \{m/n\} = (i+1)/n - 1$, т.е. $i = n(j+1) - n\{m/n\} - 1$, $j = \overline{0,k}$, то положим

$$Z_0^i(x,0) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j h_1(x,0)}{\partial t^j}.$$

Поэтому функции $Z_0^i(x,t)$ являются решениями задач Коши

$$\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial Z_0^i(x,t)}{\partial x}\right),$$

$$Z_0^i(x,0) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j h_1(x,0)}{\partial t^j};$$

б) если $i \neq n(j+1) - n\{m/n\} - 1$, $j = \overline{0,k}$, то положим $Z_0^i(x,0) = 0$. Следовательно, в этом случае $Z_0^i(x,t) \equiv 0$.

На данном шаге определено слагаемое $u_0(x,t)$, а значит, после сужения на регуляризирующие функции главный член асимптотики примет вид

$$u_0(x,t) = f(x)e^{-\varphi(t)/\varepsilon} + \sum_{j=0}^{k} Z_0^{n(j+1)-n\{m/n\}-1}(x,t)\sigma_{n(j+1)-n\{m/n\}-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{t^{m/n}a(t)}\left(h(x,t) - \sum_{j=0}^{[m/n]} t^j Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\right).$$

Главный член $u_{\text{гл}}$ асимптотики запишется в виде суммы

$$u_{\text{гл}}(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{[m/n]} Z_{-1}^{n(j+1)-1}(x,t)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k} Z_0^{n(j+1)-n\{m/n\}-1}\sigma_{n(j+1)-n\{m/n\}-1}(t,\varepsilon)+f(x)e^{-\varphi(t)/\varepsilon}+t^{1-\{m/n\}}\overline{h}_0(x,t).$$

Решение на “1”-м шаге примет вид

$$W_1(x,t)=\frac{1}{t^{m/n}a(t)}\bigg(t^{-\{m/n\}}h_1(x,t)-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z_0^i(x,t)\bigg)=t^{\{1-\{2\{m/n\}\}\}}h_1(x,t),$$

$Z_1^i(x,t)$ – общее решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_1^i(x,t)}{\partial x}\bigg),\quad i=\overline{0,(p-1)}.$$

Отсюда следует, что если:

1) $2\{m/n\}\neq 1$, то $W_1(x,0)=0$ и $X_1(x,0)=0$, следовательно, $X_1(x,t)\equiv 0$;

2) $2\{m/n\}=1$, то $W_1(x,0)=h_1(x,0)$ и $X_1(x,0)=-h_1(x,0)$, следовательно, $X_1(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial x}\bigg),$$

$$X_1(x,0)=-h_1(x,0).$$

Произвольные функции $Z_1^i(x,t)$ находятся из условия разрешимости системы (12) при $k=2$. Согласно приведённой схеме можно определить любой член асимптотического регуляризованного ряда.

1.3. Оценка остаточного члена асимптотического ряда. Пусть решены $N+1$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши после сужения на регуляризирующие функции представляется в виде

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{N}u_k(x,t,\varepsilon)\varepsilon^k+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \tag{15}$$

где

$$u_k(x,t,\varepsilon)=X_k(x,t)e^{-\varphi(t)/\varepsilon}+\sum_{i=0}^{p-1}Z^i(x,t)\sigma_i(t,\varepsilon)+W_k(x,t).$$

Подставляя представление (15) в уравнение (1) и учитывая, что $u_k(x,t,\varepsilon)$ являются решениями итерационных задач, получаем задачу Коши для определения остатка $R_N(x,t,\varepsilon)$:

$$\mathcal{L}(R)\equiv\varepsilon\bigg(\frac{\partial R_N(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial R_N(x,t)}{\partial x}\bigg)\bigg)+t^{m/n}a(t)R_N(x,t)=H(x,t,\varepsilon),$$

$$R_N(x,0,\varepsilon)=0,\quad -\infty<x<+\infty, \tag{16}$$

где $H(x,t,\varepsilon)=H_1(x,t)+\varepsilon H_2(x,t,\varepsilon)$, а

$$H_1(x,t)=-\frac{\partial W_N(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial W_N(x,t)}{\partial x}\bigg)-\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z_N^i(x,t)=-q(t)W_{N+1}(x,t).$$

$$H_2(x,t,\varepsilon)=-e^{-\varphi(t)/\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial X_n}{\partial x}\bigg)-\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial W_n}{\partial x}\bigg)-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial Z_n^i}{\partial x}\bigg)\sigma_i(t,\varepsilon).$$

Оценка остаточного члена опирается на принцип максимума, распространённый на сингулярно возмущённые параболические задачи [11]. Этот принцип используется в той общности, которая нам понадобится для оценки остаточного члена. Классическим решением задачи (16) называется функция $R_N(x,t,\varepsilon)$, непрерывная в $\overline{Q}_T=\mathbb{R}\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$, имеющая непрерывные производные $\partial R_N/\partial t$, $\partial R_N/\partial x$, $\partial^2 R_N/\partial x^2$ в Q_T и удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (16) и при $t=0$ начальным условиям.

Теорема 4 (оценка остаточного члена). *Пусть выполнены предположения 1)–5) задачи Коши (1) и существует постоянная M_0 такая, что при всех $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справедливо неравенство $|H(x,t,\varepsilon)|\leqslant M_0$.*

Тогда для некоторой постоянной C при всех $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$ и любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ имеет место неравенство $|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant C$.

Доказательство теоремы приведём в два этапа.

Этап 1. Пусть для функции $u(x,t,\varepsilon)$ в области $D_L=[-L,L]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$ выполнены неравенства

$$\mathcal{L}(u)\equiv\varepsilon\bigg(\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\bigg(k(x)\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\bigg)\bigg)+q(t)u(x,t,\varepsilon)\geqslant 0,$$

$$u(x,0,\varepsilon)\geqslant 0,\quad u(x,t,\varepsilon)>-m,\quad \text{где}\quad m>0.$$

Напомним, что $q(t):=t^{m/n}a(t)$. Введём функцию $w=u+e^{\alpha t/\varepsilon}mL^{-2}(x^2+pt)$. Тогда

$$\mathcal{L}(w)=\mathcal{L}(u)+\mathcal{L}\bigg(e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}(x^2+pt)\bigg)=$$

$$=[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-2\varepsilon xk'(x)-2\varepsilon k(x)]e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}\geqslant$$

$$\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-2\varepsilon Mx\sqrt{x^2+1}-2\varepsilon M(x^2+1)].$$

1) При $|x|\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(w)\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-\varepsilon 8Mx^2]\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[\alpha-\varepsilon 8M]x^2.$$

Возьмём $\alpha>\varepsilon_0 8M$, тогда $\mathcal{L}(w)\geqslant 0$.

2) При $|x|<1$ выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(w)\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[(\alpha+q(t))(x^2+pt)+\varepsilon p-\varepsilon 8M]\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}[p-8M]\varepsilon.$$

Возьмём $p>8M$, тогда $\mathcal{L}(w)\geqslant 0$.

Кроме того,

$$w|_{t=0}=u|_{t=0}+\frac{m}{L^2}x^2\geqslant 0,$$

$$w|_{\pm L}=u|_{\pm L}+e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}(L^2+pt)\geqslant -m+m=0.$$

Отсюда по принципу максимума в ограниченной области имеем $w\geqslant 0$ в D_L, т.е.

$$u+e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{m}{L^2}(x^2+pt)\geqslant 0.$$

Устремляя L к $+\infty$, получаем, что $u\geqslant 0$ в $D=\mathbb{R}\times[0,T]$.

Этап 2. Рассмотрим неоднородную задачу Коши

$$\mathcal{L}(R_N)=H(x,t,\varepsilon),\quad R_N(x,0,\varepsilon)=0.$$

Введём функцию $w_1=\pm R_N+M_0t/\varepsilon+m$. Тогда

$$\mathcal{L}(w_1)=\pm H+M_0+q(t)\bigg(\frac{M_0t}{\varepsilon}+m\bigg)\geqslant 0,\quad w|_{t=0}=m\geqslant 0.$$

Из результата этапа 1 следует, что $w_1 \geqslant 0$ в $D = \mathbb{R} \times [0,T]$ для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, т.е. $\pm R_N + \varepsilon^{-1}M_0 t + m \geqslant 0$. Следовательно, $|R_N| \leqslant \varepsilon^{-1}M_0 t + m \leqslant \varepsilon^{-1}M_1$, $M_1 = \mathrm{const} > 0$.

Запишем остаточный член в виде $R_N = u_N + \varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N| \leqslant |u_N| + \varepsilon M_2$, где $\varepsilon \leqslant M_3$, $M_2, M_3 = \mathrm{const} > 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Как показывает сравнение изложенных выше рассуждений с рассуждениями работы [10], задача Коши, у которой перед второй производной стоит вторая степень ε^2 малого параметра (модельное уравнение Шрёдингера), технически оказалась сложнее рассматриваемой в работе задачи.

2. Построение регуляризованной асимптотики решения смешанной задачи 1-го рода для параболического уравнения с “простой” рациональной точкой поворота на полуоси.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t)u = f(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geqslant 0,$$
$$u(0,t) = \psi(t), \tag{17}$$

и пусть для неё выполнены следующие предположения (ниже $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$):

1°) $f(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,T])$, $\psi(t) \in C^\infty([0,T])$, $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$;

2°) $p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и существует постоянная $p_0 > 0$ такая, что $p(x) \geqslant p_0$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$;

3°) $q(t) = t^{m/n}b(t)$, где $b(t) \in C^\infty([0,T])$ и $b(t) \neq 0$, $\operatorname{Re} b(t) \geqslant 0$ при любом $t \in [0,T]$, а $m, n \in \mathbb{N}$ и дробь m/n несократима, $m \geqslant 2$;

4°) $\varphi(0) = \psi(0)$;

5°) существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что при всех $x \in \mathbb{R}_+$ и любом $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ выполняются неравенства $|\varphi^{(k)}(x)| < C_1$ и $|\psi^{(k)}(x)| < C_2$;

6°) при всех $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T]$ и любом $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ верно неравенство $|f_x^{(k)}(x,t)| < C$, где $C > 0$ – некоторая постоянная;

7°) при всех $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо неравенство $p(x) < M_2(x^2+1)$, где $M_2 > 0$ – некоторая постоянная.

Для регуляризации задачи (17) введём дополнительную переменную Лиувилля

$$\tau(x,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}$$

и расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\tau)$, для сужения на τ которой выполняется тождество

$$\widetilde{u}(x,t,\tau)\bigg|_{\tau=\varepsilon^{-1/2}\int_0^x (p(s))^{-1/2}\,ds} \equiv u(x,t),$$

где функция $u(x,t)$ является решением задачи (17).

Вычислим производные для расширенной функции $\widetilde{u}(x,t,\tau(x))$:

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t} = \widetilde{u}_t, \quad \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x} = \widetilde{u}_x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon p(x)}}\widetilde{u}_\tau,$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2} = \widetilde{u}_{xx} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon p(x)}}\widetilde{u}_{x\tau} + \frac{1}{\varepsilon p(x)}\widetilde{u}_{\tau\tau} - \frac{p'(x)}{2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{p(x)})^3}\widetilde{u}_\tau.$$

В дальнейшем знак тильды $\sim$ над u будем опускать. Тогда задача (17) примет вид

$$\varepsilon(u_t - u_{\tau\tau}) = -q(t)u + \sqrt{\varepsilon}^3\left(2\sqrt{p(x)}u_{x\tau} - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}u_\tau\right) + \varepsilon^2 p(x)u_{xx} + f(x,t),$$

$$u(x,0,\tau)|_{\tau(x,\varepsilon)} = \varphi(x),$$
$$u(0,t,0) = \psi(t). \tag{18}$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по x, а точка – дифференцирование по t.

2.2. Формализм метода регуляризации в случае "простой" рациональной точки поворота. Для решения задачи (18), согласно методу регуляризации, кроме переменной $\tau(x,\varepsilon)$ введём регуляризирующие функции

$$\sigma(t,\varepsilon) = e^{Q_0^t/\varepsilon}, \quad \sigma_i(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t e^{-Q_s^t/\varepsilon} s^{-1+(i+1)/n}\, ds, \quad i = \overline{0,p-1}, \quad p = m+n-1,$$

где $Q_s^t = \int_s^t q(s_1)\, ds_1$. Дополнительные регуляризирующие функции $\sigma_i(t,\varepsilon)$ учитывают тот факт, что образ оператора $A(t)$, $u(x,t) \mapsto q(t)u(x,t)$, не совпадает со всем пространством $C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, а лежит в его подподпространстве, образованном функциями, обращающимися в нуль с порядком m/n при $t=0$.

Кроме того, параболический пограничный слой вблизи границы $x=0$ для краевой задачи на полуоси порождает дополнительный сингулярный по ε регуляризирующий оператор G, $a(x,t) \mapsto G(a(x,t))$, действующий по правилу

$$G(a(x,t)) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty} a\biggl(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\biggr) e^{-\xi^2}\, d\xi \equiv e^{-Q_0^t/\varepsilon} F(a(x,t)) \equiv \sigma F(a(x,t)).$$

Ранее в методе регуляризации такой оператор для описания пограничного слоя не встречался. Только с помощью этого оператора удалось адекватно описать параболический пограничный слой вблизи границы $x=0$. Отметим, что хотя указанный сингулярный оператор и каждая из введённых ранее регуляризирующих функций призваны выделять нерегулярную зависимость решения задачи (17) от малого параметра ε, главной в этом подходе остаётся идея метода регуляризации – описание нерегулярной зависимости от ε через спектр предельного оператора в виде функции $e^{-Q_0^t/\varepsilon}$.

Свойства оператора $F(a(x,t))$ описаны в приложении (см. п. 2.5). Оператор $F(\cdot)$ переводит любую гладкую функцию $a(x,t)$ в решение следующей задачи:

$$F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = 0,$$
$$F(a(x,t))|_{t=0} = 0, \quad F(a(x,t))|_{\tau=0} = a(x,t).$$

Заметим, что точка $\varepsilon = 0$ для функции $F(a(x,t))$ после сужения на её $\tau(x,\varepsilon)$ является существенно особой.

Решение задачи (18) будем искать в пространстве E безрезонансных решений. Элементы из E имеют вид

$$u(x,t,\sigma,\sigma_i) = X(x,t)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t)\sigma_i + \sigma F(a(x,t)) + W(x,t),$$

где функции $X(x,t)$, $Z^i(x,t)$, $a(x,t)$, $W(x,t)$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times$ $\times\,[0,T])$.

Учитывая распределение параметра ε в задаче (18), её решение будем искать в виде ряда по ε:

$$u(x,t,\sigma,\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \biggl(X_k(x,t)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z_k^i(x,t)\sigma_i + W_k(x,t)\biggr) + \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^{(k-1)/2} G(a_{(k-1)/2}(x,t)).$$

Подставив это представление в задачу (18) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях и степенях ε, получим серию итерационных задач относительно функций $X_k(x,t)$, $Z_k^i(x,t,)$, $a_k(x,t)$, $W_k(x,t)$ в виде систем:

$$\dot{X}_k = p(x)X''_{k-1}, \quad \dot{Z}_k^i = p(x)Z^{i''}_{k-1}, \quad i=\overline{0,p-1},$$

$$q(t)W_k = f(x,t)\delta_k^0 - \dot{W}_{k-1} - \sum_{i=0}^{p-1} Z_{k-1}^i t^{-1+(i+1)/n} + p(x)W''_{k-2},$$

$$F_t(a_{(k-1)/2}(x,t)) - F_{\tau\tau}(a_{(k-1)/2}(x,t)) =$$

$$= 2\sqrt{p(x)}F_\tau(a'_{(k-2)/2}(x,t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_\tau(a_{(k-2)/2}(x,t)) + p(x)F(a''_{(k-3)/2}(x,t)),$$

$$u_k(x,0,\tau)|_{\tau=\tau(x,\varepsilon)} = \varphi(x)\delta_k^0, \quad u_k(0,t,0) = \psi(t)\delta_k^0, \quad k=-1,0,1,\ldots \tag{19}$$

Если $k-1<-1$, $(k-i)/2<-1$, $i=2,3$, то член с этим индексом равен нулю.

Чтобы решить итерационные задачи (19), докажем теоремы 5 и 6 о нормальной разрешимости системы

$$X_t(x,t) = h_1(x,t),$$
$$Z_t^i = h_2^i(x,t), \quad i=\overline{0,p-1},$$
$$F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = F(h_3(x,t)),$$
$$q(t)W = h_4(x,t) \tag{20}$$

в пространстве E. В теоремах 5 и 6 при выполнении разных исходных предположений (случаи 1 и 2) получены необходимые и достаточные условия разрешимости системы (20).

Теорема 5 (разрешимость, случай 1). *Пусть у системы (20) функции $h_1(x,t)$, $h_2^i(x,t)$, $i=\overline{0,p-1}$, и $h_3(x,t)$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times[0,T])$, а функция $h_4(x,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.*

Тогда система (20) разрешима в пространстве E, если и только если имеют место тождества $h_3(x,t)\equiv 0$ и

$$\frac{\partial^k h_4(x,0)}{\partial t^k} = 0 \quad \textit{при всех} \quad k=\overline{0,[m/n]}. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Решения первых двух уравнений системы (20) запишутся в виде

$$X(x,t) = \int_0^t h_1(x,s)\,ds + X(x,0),$$

$$Z^i(x,t) = \int_0^t h_2^i(x,s)\,ds + Z^i(x,0), \quad i=\overline{0,p-1}.$$

Так как $TF(a(x,t)) = F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) \equiv 0$ для любой гладкой функции $a(x,t)$, то

$$F(h_3(x,t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty} h_3\biggl(x, t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\biggr)e^{-\xi^2}\,ds \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad \tau\in\mathbb{R}_+. \tag{22}$$

Положив $\tau=0$, по свойству оператора F получим, что $h_3(x,t)\equiv 0$.

Рассмотрим последнее уравнение

$$q(t)W(x,t) = h_4(x,t) \tag{23}$$

системы (20). Разложим функцию $h_4(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$:

$$h_4(x,t) = h_4(x,0) + t\frac{\partial h_4(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h_4(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_4(x,t),$$

где $\overline{h}_4(x,0) \neq 0$. Тогда уравнение (23) принимает вид

$$q(t)W(x,t) = h_4(x,0) + t\frac{\partial h_4(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{1}{[m/n]!}t^{[m/n]}\frac{\partial^{[m/n]}h_4(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} + t^{[m/n]+1}\overline{h}_4(x,t).$$

Так как оно имеет решение, то необходимо

$$h_4(x,0) = 0, \quad \frac{\partial h_4(x,0)}{\partial t} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{[m/n]}h_4(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$W(x,t) = t^{1-\{m/n\}}\frac{\overline{h}_4(x,t)}{b(t)},$$

здесь $\overline{h}_4(x,t)/b(t) \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Достаточность. Пусть выполнены тождества из заключения теоремы.

В силу первого из них уравнение $F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = 0$ имеет решение при любой гладкой функции $a(x,t)$ вследствие свойств оператора $F(\cdot)$.

Уравнение $q(t)W(x,t) = h_4(x,t)$ в силу тождеств (21) принимает вид

$$q(t)W(x,t) = t^{[m/n]+1}\overline{h}_4(x,t).$$

Отсюда $W(x,t) = t^{1-\{m/n\}}\overline{h}_4(x,t)/b(t)$.

Решение системы (20) в пространстве E запишется в виде

$$u(x,t) = \Bigl(\int\limits_0^t h_1(x,s)\,ds + X(x,0)\Bigr)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1}\Bigl(\int\limits_0^t h_2^i(x,s)\,ds + Z^i(x,0)\Bigr)\sigma_i +$$

$$+ G(a(x,t)) + t^{1-\{m/n\}}h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t) = \overline{h}_4(x,t)/b(t)$, а $a(x,t)$ – произвольная гладкая функция. Теорема доказана.

Теорема 6 (разрешимость, случай 2). *Пусть у системы (20) функции* $h_1(x,t)$, $h_2^i(x,t)$, $i=\overline{0,p-1}$, *и* $h_3(x,t)$ *принадлежат классу* $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,T])\bigcap C(\mathbb{R}\times[0,T])$ *и выполняется равенство* $h_4(x,t) = t^{-s/n}f(x,t)$, *где* $f(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$.

Тогда система (20) разрешима в пространстве E, *если и только если имеют место тождества* $h_3(x,t)\equiv 0$ *и*

$$\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} = 0 \quad \textit{для любого} \quad k = \overline{0,[m/n]}, \quad \textit{если} \quad 0 \leqslant \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} \leqslant 1,$$

$$\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} = 0 \quad \textit{для любого} \quad k = \overline{0,[m/n]+1}, \quad \textit{если} \quad \frac{s}{n} + \left\{\frac{m}{n}\right\} > 1.$$

Доказательство. Необходимость. Решения первых двух уравнений системы (20) запишутся в виде

$$X(x,t)=\int\limits_0^t h_1(x,s)\,ds+X(x,0),$$

$$Z^i(x,t)=\int\limits_0^t h_2^i(x,s)\,ds+Z^i(x,0),\quad i=\overline{0,p-1}.$$

По той же причине, что и в доказательстве теоремы 5, имеет место тождество (22). Положив в нём $\tau=0$, по свойству оператора F получим $h_3(x,t)\equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (23). При решении этого уравнения могут представиться только две возможности: а) и б).

а) Выполняется двойное неравенство $0<s/n+\{m/n\}\leqslant 1$. Тогда возьмём $k=[m/n]$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]$. Получим

$$t^{m/n}b(t)W(x,t)=t^{-s/n}\biggl(f(x,0)+t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}+\ldots+\frac{t^{[m/n]}}{[m/n]!}\frac{\partial^{[m/n]}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]}}+t^{[m/n]+1}\overline{f}(x,t)\biggr),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t)=t^{1-(s/n+\{m/n\})}\frac{\overline{f}(x,t)}{b(t)},$$

где $\overline{f}(x,t)/b(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

б) Выполняется неравенство $s/n+\{m/n\}>1$. Тогда возьмём $k=[m/n]+1$ и разложим функцию $f(x,t)$ по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]+1$. Получим

$$t^{m/n}b(t)W(x,t)=t^{-s/n}\biggl(f(x,0)+t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}+\ldots+\frac{t^{[m/n]+1}}{([m/n]+1)!}\frac{\partial^{[m/n]+1}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]+1}}+t^{[m/n]+2}\overline{f}(x,t)\biggr),$$

где $\overline{f}(x,0)\neq 0$. Отсюда следует, что

$$W(x,t)=t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}\frac{\overline{f}(x,t)}{b(t)},$$

здесь $\overline{f}(x,t)/b(t)\in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])$.

Достаточность. Решение системы (20) в пространстве E запишется в виде

$$u(x,t)=\biggl(\int\limits_0^t h_1(x,s)\,ds+X(x,0)\biggr)\sigma+\sum_{i=0}^{p-1}\biggl(\int\limits_0^t h_2^i(x,s)\,ds+Z^i(x,0)\biggr)\sigma_i+$$

$$+\,G(a(x,t))+t^{1-\{s/n+\{m/n\}\}}h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)=\overline{h}_4(x,t)/b(t)$, а $a(x,t)$ – произвольная гладкая функция. Теорема доказана.

Согласно приведённому выше замечанию представления для функции $W(x,t)$ в случаях а) и б) можно записать одной формулой, если воспользоваться приведённым там выражением для их первого сомножителя.

Теорема 7 (единственность). *Пусть выполнены условия теоремы 5 или теоремы 6. Тогда задача*

$$X_t(x,t)=0,$$

$$Z_t^i(x,t)=0,\quad i=\overline{0,p-1},$$

$$
\begin{gathered}
TF(a(x,t)) \equiv F_t(a(x,t)) - F_{\tau\tau}(a(x,t)) = 0, \\
q(t)W(x,t) = 0, \\
u(x,0,\tau)|_{\tau=\tau(x,\varepsilon)} = 0, \quad u(0,t,0) = 0
\end{gathered} \tag{24}
$$

имеет только нулевое решение, если выполнены условия

$$
2\sqrt{p(x)}F_\tau(a_x(x,t)) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_\tau(a(x,t)) = 0 \quad \text{и} \quad Z^i(0,t) = 0, \quad i = \overline{0,p-1}.
$$

Доказательство. Согласно теоремам 5 или 6 решение задачи (24) имеет вид

$$
u(x,t) = X(x)\sigma + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x)\sigma_i + G(a(x,t)).
$$

Подчиним его краевому и начальному условиям, предварительно произведя сужение на регуляризирующие функции

$$
\begin{gathered}
u(x,0) = X(x) \equiv 0, \\
u(0,t,0) = \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(0)\sigma_i(t,\varepsilon) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}a(0,t) = 0.
\end{gathered}
$$

Отсюда вытекает, что

$$
a(0,t) = -\sum_{i=0}^{p-1} Z^i(0)\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds. \tag{25}
$$

Используя представление оператора $F(\cdot)$ из условия теоремы, получаем уравнение относительно функции $a(x,t)$:

$$
\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left[2\sqrt{p(x)}a_x\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)\right]e^{-\xi^2}\,d\xi = 0.
$$

Отсюда следует, что

$$
\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left[2\sqrt{p(x)}a_x\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)\right]e^{-\xi^2}\,d\xi = C(x,t)
$$

для любых τ. Устремив τ к ∞, видим, что $C(x,t) \equiv 0$. Положив $\tau = 0$, получим уравнение

$$
2\sqrt{p(x)}a_x(x,t) - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a(x,t) = 0,
$$

из которого найдём

$$
a(x,t) = a(0,t)\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}.
$$

Учитывая равенство (25), будем иметь

$$
a(x,t) = -\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\sum_{i=0}^{p-1} Z^i(0)\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.
$$

Так как $Z^i(0) = 0$, $i = \overline{0,p-1}$, то $a(0,t) = 0$, а значит, $a(x,t) \equiv 0$. Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$. Теорема доказана.

2.3. Решение итерационных задач. Используя теоремы 5–7, решим итерационные задачи (19). Напомним, что функции $X(x,t,\varepsilon)$, $Z^i(x,t,\varepsilon)$, $W(x,t,\varepsilon)$ разлагаются по целым степеням ε^k, а $a(x,t,\varepsilon)$ – по степеням $(\sqrt{\varepsilon})^k$. Так как функция $f(x,t)$ не удовлетворяет теореме о точечной разрешимости уравнения $q(t)W(x,t)=f(x,t)$, то разложение решения начинается с ε^{-1}.

Система (19) в этом случае принимает вид

$$(\varepsilon^{-1}):\quad \begin{cases}\dot{X}_{-1}=0, \quad \dot{Z}^i_{-1}=0, \quad i=\overline{0,p-1},\\ q(t)W_{-1}=0,\\ \dot{F}(a_{-1}(x,t))-F_{\tau\tau}(a_{-1}(x,t))=0,\\ u_{-1}(x,0,\tau)=0, \quad u_{-1}(0,t,0)=0.\end{cases}$$

Следовательно, $X_{-1}(x,t)=X_{-1}(x)$, $W_{-1}(x,t)\equiv 0$, $Z^i_{-1}(x,t)=Z^i_{-1}(x)$, $a_{-1}(x,t)$ – произвольные функции.

В силу начальных и краевых условий находим

$$u_{-1}(x,0,\tau)\equiv X_{-1}(x)\equiv 0,$$

$$u_{-1}(0,t,0)=\sum_{i=0}^{p-1}Z^i_{-1}(0)\sigma_i(t,\varepsilon)+e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1}(0,t)=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$a_{-1}(0,t)=-\sum_{i=0}^{p-1}Z^i_{-1}(0)\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.$$

Чтобы определить неизвестные функции $Z^i_{-1}(x)$ и $a_{-1}(x,t)$, рассмотрим следующую итерационную задачу на шаге $k=-1/2$.

Система (19) в этом случае имеет вид

$$(\sqrt{\varepsilon}^{-1}):\quad T(F(a_{-1/2}(x,t)))=2\sqrt{p(x)}F_\tau(a'_{-1}(x,t))-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}F_\tau(a_{-1}(x,t)),$$

где $T=\partial/\partial t-\partial^2/\partial\tau^2$. Отсюда, так как $T(F(a_{-1/2}(x,t)))\equiv 0$, получаем уравнение относительно $a_{-1}(x,t)$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F\biggl(2\sqrt{p(x)}a'_{-1}(x,t)-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1}(x,t)\biggr)=0,$$

а значит,

$$F\biggl(2\sqrt{p(x)}a'_{-1}(x,t)-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1}(x,t)\biggr)=C(x,t),$$

где $C(x,t)$ – произвольная функция.

Из свойств оператора $F(\cdot)$ следует, что $F(\cdot)\to 0$ при $\tau\to\infty$. Поэтому $C(x,t)\equiv 0$. Положив $\tau=0$, получим уравнение

$$2\sqrt{p(x)}a'_{-1}(x,t)-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1}(x,t)=0,$$

из которого найдём, что

$$a_{-1}(x,t)=\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}a_{-1}(0,t).$$

Таким образом,

$$a_{-1}(x,t) = -\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\sum_{i=0}^{p-1} Z_{-1}^i(0)\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.$$

Функция $a_{-1/2}(x,t)$ на данном итерационном шаге произвольная. Для определения $Z_{-1}^i(0)$ рассмотрим систему (19) на нулевом шаге (ε^0). В этом случае система (19) имеет вид

$$(\varepsilon^0):\quad \begin{cases} \dot X_0 = 0, \quad \dot Z_0^i = p(x)(Z_{-1}^i)'', \quad i=\overline{0,p-1}, \\ q(t)W_0 = f(x,t) - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} Z_{-1}^i(x)t^{-1+(i+1)/n}, \\ T(F(a_0(x,t))) = F_\tau\biggl(2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}(x,t) - \dfrac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}(x,t)\biggr) + \\ \;+ p(x)F(a''_{-1}(x,t)), \\ u_0(x,0,\tau) = X_0(x) + W_0(x,0) = \varphi(x), \\ u_0(0,t,0) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}X_0(0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(0,t)\sigma_i(t,\varepsilon) + \\ \;+ W_0(0,t) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_0(0,t) = \psi(t). \end{cases} \tag{26}$$

Подчиним правую часть уравнения для $W_0(x,t)$ условиям теоремы о точечной разрешимости. Для этого разложим функцию $f(x,t)$ из его правой части по формуле Маклорена в точке $t=0$ до порядка $[m/n]+1$:

$$q(t)W_0(x,t) = f(x,0) + t\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} + \ldots + \frac{t^{[m/n]}}{[m/n]!}\frac{\partial^{[m/n]}f(x,0)}{\partial t^{[m/n]}} +$$

$$+ t^{[m/n]+1}f_0(x,t) - \sum_{i=0}^{p-1} Z_{-1}^i(x)t^{-1+(i+1)/n},$$

где $f_0(x,0)\ne 0$. Положим

$$Z_{-1}^i(x) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}, \quad \text{если} \quad i = n(j+1)-1, \quad j=\overline{0,[m/n]};$$

$$Z_{-1}^i(x) \equiv 0, \quad \text{если} \quad i \ne n(j+1)-1, \quad i=\overline{0,p-1}.$$

Тогда

$$W_0(x,t) = \frac{1}{q(t)}\biggl(f(x,t) - \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}t^j\biggr) = t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

После определения функций $Z_{-1}^i(x)$ решение $u_{-1}(x,t,\tau)$ находится на “-1”-м итерационном шаге и после сужения имеет вид

$$u_{-1}(x,t) = \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) + G(a_{-1}(x,t)),$$

или

$$u_{-1}(x,t) = \sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\biggl[\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) - \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}F\biggl(\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{n(j+1)-1}\,ds\biggr)\frac{\partial^j f(0,0)}{\partial t^j}\biggr].$$

Используя свойство оператора $F(\cdot)$, представим решение $u_{-1}(x,t)$ в виде

$$u_{-1}(x,t)=\sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j f(x,0)}{\partial t^j}-\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\frac{\partial^j f(0,0)}{\partial t^j}\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)\right]\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)+\underline{O}(\varepsilon^\infty),$$

где $\underline{O}(\varepsilon^\infty)$ – асимптотический нуль (функция, которая при $\varepsilon\to+0$ убывает быстрее, чем любая натуральная степень ε).

Решения уравнений системы (26) имеют вид

$$X_0(x,t)=X_0(x),$$

$$Z_0^i(x,t)=p(x)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t+Z_0^i(x,0),\quad i=n(j+1)-1,\quad j=\overline{0,[m/n]},$$

$$Z_0^i(x,t)=Z_0^i(x),\quad i\ne n(j+1)-1,\quad j=\overline{0,[m/n]},$$

$$W_0(x,t)=t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

Функции $Z_0^i(x,0)$, $i=n(j+1)-1$, $j=\overline{0,[m/n]}$, на данный момент не известны.

Решим уравнение относительно $a_{-1/2}(x,t)$. Так как $T(F(a_0(x,t)))\equiv 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left(2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}\right)\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi=$$

$$=-p(x)\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}a''_{-1}\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left(2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}\right)\left(x,t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi=$$

$$=2\sqrt{t}p(x)\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}e^{-\xi^2}\int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\xi}a''_{-1}\left(x,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi.$$

Положив $\tau=0$, получим уравнение

$$2\sqrt{p(x)}a'_{-1/2}(x,t)-\frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_{-1/2}(x,t)=2\sqrt{t}p(x)\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\int\limits_0^\xi a''_{-1}\left(x,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi,$$

решение которого имеет вид

$$a_{-1/2}(x,t)=\sqrt{t}\sqrt[4]{p(x)}\int\limits_0^x\sqrt[4]{p(s_1)}^3\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\int\limits_0^\xi a''_{-1}\left(s_1,t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi\,ds_1,$$

так как $G(a_{-1/2}(x,t))\Big|_{\substack{\tau=0\\x=0}}=e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1/2}(0,t)=0.$

Из начальных условий для $u_0(x,t,\tau)$ вытекают равенства

$$u_0(x,0,\tau) = X_0(x) = \varphi(x).$$

Таким образом, на шаге $k=0$ функция $u_{-1/2}(x,t,\tau)$ определена. С учётом свойств оператора $F(\cdot)$ решение $u_{-1/2}(x,t,\tau)$ после сужения может быть представлено в виде

$$u_{-1/2}(x,t,\tau(x,\varepsilon)) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}F(a_{-1/2}(x,t)) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1/2}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right) + \underline{O}(\varepsilon^\infty).$$

Функция $a_0(x,t)$ на данном итерационном шаге произвольная.

Для определения функций $Z_0^i(x,t)$ необходимо рассмотреть систему на итерационном шаге “ $k=1$ ”, а для определения функций $a_0(x,t)$ – систему на шаге “ $k=1/2$ ”.

На нулевом итерационном шаге решение $u_0(x,t,\tau)$ после сужения имеет вид

$$u_0(x,t,\tau(x,\varepsilon)) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(x) + \sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(x,t)\sigma_i(t,\varepsilon) + G(a_0(x,t)) + t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

Подчиним $u_0(x,t,\tau)$ краевому условию

$$u_0(0,t,0) = e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(0) + \sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(0,t)\sigma_i(t,\varepsilon) + t^{1-\{m/n\}}f_0(0,t) + e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_0(0,t) = \psi(t).$$

Отсюда следует, что

$$a_0(0,t) = e^{Q_0^t/\varepsilon}(\psi(t) - t^{1-\{m/n\}}f_0(0,t)) - \varphi(0) - \sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(0,t)\int_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{-1+(i+1)/n}\,ds.$$

На шаге “ $k=1/2$ ”, так как $T(F(a_{1/2}(x,t)))\equiv 0,$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty}\left(2\sqrt{p(x)}a_0' - \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}a_0\right)\left(x, t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi + p(x)\int_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty} a''_{-1/2}\left(x, t-\frac{\tau^2}{4\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi = 0,$$

решение которого имеет вид

$$a_0(x,t) = \sqrt{t}\sqrt[4]{p(x)}\int_0^x \sqrt[4]{p(s_1)}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\int_0^\xi a''_{-1/2}\left(s_1, t-\frac{s^2t}{\xi^2}\right)ds\,d\xi\,ds_1 + \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}a_0(0,t).$$

Чтобы найти функции $Z_0^i(x,t),$ рассмотрим уравнение для $W_1(x,t)$ на шаге “ $k=1$ ”:

$$q(t)W_1(x,t) = -t^{-\{m/n\}}\overline{f}_0(x,t) - \sum_{i=0}^{p-1} Z_0^i(x,t)t^{-1+(i+1)/n}, \tag{27}$$

где $\overline{f}_0(x,t)$ определяется из соотношения

$$\frac{\partial(t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t))}{\partial t} = t^{-\{m/n\}}f_0(x,t) + t^{1-\{m/n\}}\frac{\partial f_0(x,t)}{\partial t} = t^{-\{m/n\}}\overline{f}_0(x,t).$$

Регуляризируем правую часть уравнения (27). Для этого разложим функцию $\overline{f}_0(x,t)$ в точке $t=0$ по формуле Маклорена до порядка $k.$ Значение k зависит от того, какое из неравенств выполняется: $2\{m/n\}\leqslant 1$ или $2\{m/n\}>1$. Величину k можно выразить одной формулой $k=[m/n+\{m/n\}]=[[m/n]+2\{m/n\}]$. Тогда уравнение примет вид

$$q(t)W_1(x,t)=-t^{-\{m/n\}}\bigg(\overline{f}_0(x,0)+t\frac{\partial\overline{f}_0(x,0)}{\partial t}+\dots+\frac{t^k}{k!}\frac{\partial^k\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^k}+t^{k+1}f_1(x,t)\bigg)-$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}Z_0^i(x,t)t^{-1+(i+1)/n}.$$

Положим

$$Z_0^i(x,0)=-\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j},\quad i=n(j+1)-1-n\{m/n\},\quad j=\overline{1,[m/n+\{m/n\}]};$$

$$Z_0^i(x,0)=0,\quad i\neq n(j+1)-1-n\{m/n\},\quad i=\overline{0,p-1}.$$

Поэтому

$$W_1(x,t)=-\frac{1}{q(t)}\bigg(t^{-\{m/n\}}\overline{f}_0(x,t)+\sum_{i=0}^{p-1}Z_0^i(x,t)t^{-1+(i+1)/n}\bigg)=t^{\{1-\{2\{m/n\}\}\}}\overline{f}_1(x,t).$$

Таким образом, окончательно найдены слагаемые для решения на нулевом итерационном шаге:

$$Z_0^i(x,t)=p(x)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t,\quad i=(j+1)n-1,\quad j=\overline{0,[m/n]};$$

$$Z_0^i(x)=-\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j},\quad i=n(j+1)-1-n\{m/n\},\quad j=\overline{1,[m/n+\{m/n\}]};$$

$$Z_0^i(x)=0\quad\text{в остальных случаях.}$$

На этом шаге итерации после ограничения решения на $\tau(x,\varepsilon)$ получаем главный член регуляризованной асимптотики решения краевой задачи на полуоси для параболического уравнения

$$u_{\text{гл}}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{[m/n]}\bigg[\frac{1}{j!}\bigg(\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)-$$

$$-\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}F\bigg(\int\limits_0^t e^{Q_0^s/\varepsilon}s^{n(j+1)-1}\,ds\bigg)\frac{\partial^j f_{xx}(0,0)}{\partial t^j}\bigg)\bigg]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}F(a_{-1/2}(x,t))+e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(x)+\sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\bigg(p(x)\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t\bigg)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)-$$

$$-\sum_{j=0}^{[m/n+\{m/n\}]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1-n\{m/n\}}(t,\varepsilon)+e^{-Q_0^t/\varepsilon}F(a_0(x,t))+t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t).$$

Используя свойства оператора $F(\cdot)$ (см. лемму 3), главный член $u_{\text{гл}}$ регуляризованной асимптотики представим в виде

$$u_{\text{гл}}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{[m/n]}\bigg[\frac{1}{j!}\bigg(\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}-\sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}}\frac{\partial^j f_{xx}(0,0)}{\partial t^j}\operatorname{erfc}\bigg(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\bigg)\bigg)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)\bigg]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_{-1/2}(x,t)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)+e^{-Q_0^t/\varepsilon}\varphi(x)+$$

$$+\sum_{j=0}^{[m/n]}\frac{1}{j!}\left(p(x)\frac{\partial^j f_{xx}(x,0)}{\partial t^j}t\right)\sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon)-\sum_{j=0}^{[m/n+\{m/n\}]}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\overline{f}_0(x,0)}{\partial t^j}\sigma_{n(j+1)-1-n\{m/n\}}(t,\varepsilon)+$$

$$+e^{-Q_0^t/\varepsilon}a_0(x,t)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\tau(x,\varepsilon)}{2\sqrt{t}}\right)+t^{1-\{m/n\}}f_0(x,t)+\underline{O}(\varepsilon^\infty).$$

Здесь

$$\mathrm{erfc}\,(\tau(x,\varepsilon)/(2\sqrt{t}))=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\tau(x,\varepsilon)/(2\sqrt{t})}^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

По данной схеме можно определить любой член асимптотического регуляризованного ряда.

2.4. Оценка остаточного члена. Пусть

$$u(x,t,\varepsilon)=e^{-Q_0^t/\varepsilon}\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^kX_k(x,t)+\sum_{i=0}^{p-1}\sigma_i(t,\varepsilon)\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^kZ_k^i(x,t)+$$

$$+\sum_{k=-1}^{2N+1}\sqrt{\varepsilon}^{k-1}G(a_{(k-1)/2}(x,t))+\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^kW_k(x,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon). \tag{28}$$

Подставив представление (28) в задачу (18), получим задачу для остаточного члена:

$$\varepsilon\frac{\partial R_n(x,t)}{\partial t}-\varepsilon^2p(x)\frac{\partial^2R_N(x,t)}{\partial x^2}+q(t)R_N=H(x,t,\varepsilon),$$

$$R_N(x,0,\varepsilon)=0,\quad R_N(0,t,\varepsilon)=0, \tag{29}$$

здесь $H(x,t,\varepsilon)=-H_1(x,t)+\varepsilon H_2(x,t,\varepsilon)$, где

$$H_1(x,t,\varepsilon)=\dot{W}_N-p(x)W''_{N-1}+\sum_{i=0}^{p-1}t^{-1+(i+1)/n}Z_N^i=-q(t)W_{N+1}(x,t),$$

$$H_2(x,t,\varepsilon)=e^{-Q_0^t/\varepsilon}p(x)X''_N+p(x)\sum_{i=0}^{p-1}Z_N^{i}{}''\sigma_i(t,\varepsilon)+p(x)W''_N+p(x)G(a''_N).$$

В силу оценок сингулярных интегралов и условий задачи (17) для правой части уравнения (29) имеет место оценка

$$|H(x,t,\varepsilon)|=|-H_2(x,t)+\varepsilon H_1(x,t,\varepsilon)|<C=\mathrm{const}.$$

Оценка остатка основана на принципе максимума для параболических задач [11]. Этот принцип используется в той форме общности, которой нам будет достаточно для оценки остаточного члена. Классическое решение задачи (29) – это функция $R_N(x,t,\varepsilon)$, непрерывная в $Q_T=\mathbb{R}_+\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$, имеющая непрерывные производные $\partial R_N/\partial t$, $\partial R_N/\partial x$, $\partial^2R_n/\partial x^2$ во внутренних точках Q_T и удовлетворяющая уравнению (29) всюду в Q_T и при $t=0$ начальным условиям в $\mathbb{R}_+\times(0,\varepsilon_0]$.

Теорема 8. *Пусть для задачи (29) выполнены предположения 1°)–3°) и 7°) задачи (17), тождество $R_N(x,0,\varepsilon)=0$ и неравенство $|H(x,t,\varepsilon)|<C$ с некоторой постоянной C.*

Тогда существует постоянная M такая, что $|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant M$ при всех $(x,t,\varepsilon)\in\mathbb{R}_+\times\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$.

Доказательство проведём в два этапа.

Этап 1. Пусть для функции $u(x,t,\varepsilon)$ в области $D_L = [0,L]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$ выполнены неравенства

$$\mathcal{L}(u) \equiv \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(t)u \geqslant 0,$$
$$u(0,t,\varepsilon)\geqslant 0, \quad u(x,0,\varepsilon)\geqslant 0,$$
$$u(x,t,\varepsilon) > -\mu(x^r+1), \quad \mu>0.$$

Рассмотрим функцию $w = u + e^{\alpha t/\varepsilon}2\mu L^{r-2\beta}(x^2+kt)^\beta$, $2\beta > r$. Тогда

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(u) + \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta) = \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta).$$

Вычислим и оценим $\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta)$. Имеем

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^\beta) = e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-2}[(\alpha+q(t))(x^2+kt)^2 +$$
$$+\varepsilon\beta k(x^2+kt) - \varepsilon^2 p(x)(2\beta(x^2+kt)+4x^2\beta(\beta-1))] \geqslant$$
$$\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-2}[(\alpha+q(t))(x^2+kt)^2 + \varepsilon\beta k(x^2+kt) -$$
$$-\varepsilon^2 M_2(x^2+1)(2\beta(x^2+kt)+4x^2\beta(\beta-1))] \geqslant$$
$$\geqslant e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}[\alpha(x^2+kt)+\varepsilon\beta k - \varepsilon^2 M_2(x^2+1)2\beta(2\beta-1)],$$

где M_2 – постоянная из предположения $7^\circ)$ в постановке задачи (17).

i) При $|x|\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(w) \geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}[\alpha(x^2+kt)+\varepsilon\beta k - \varepsilon^2 M_2(x^2+1)2\beta(2\beta-1)] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta}[\alpha - \varepsilon^2 8M_2\beta^2] \geqslant 0,$$

если $\alpha > \varepsilon_0^2 8M_2\beta^2$.

ii) При $0<|x|<1$ выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(w) \geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}[\alpha(x^2+kt)+\varepsilon\beta k - \varepsilon^2 M_2(x^2+1)2\beta(2\beta-1)] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(x^2+kt)^{\beta-1}(\varepsilon\beta k - 8\varepsilon^2 M_2\beta^2) \geqslant 0,$$

если $k > \varepsilon_0 8M_2\beta$.

Оценим функцию $w(x,t,\varepsilon)$ на границе области D_L:

$$w(x,0,\varepsilon) = 2\mu\frac{x^{2\beta}}{L^{2\beta-r}} \geqslant 0,$$

$$w(0,t,\varepsilon) = \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(kt)^\beta \geqslant 0,$$

$$w(L,t,\varepsilon) = u + \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(L^2+kt)^\beta \geqslant -\mu(L^r+1) + \frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}e^{\alpha t/\varepsilon}(L^2+kt)^\beta \geqslant$$
$$\geqslant -\mu(L^r+1) + 2\mu L^r = \mu(L^r-1) \geqslant 0.$$

Следовательно, если $\mathcal{L}(w)\geqslant 0$, то $w\geqslant 0$ в D_L. Другими словами,

$$w = u + e^{\alpha t/\varepsilon}\frac{2\mu}{L^{2\beta-r}}(x^2+kt)^\beta \geqslant 0.$$

Устремляя L к бесконечности, получаем, что $u\geqslant 0$ для всех $x\in\mathbb{R}_+$.

Этап 2. Рассмотрим функцию $u = \pm R_N + Ct/\varepsilon$:

$$\mathcal{L}(u) = \pm H + C + \frac{q(t)Ct}{\varepsilon} \geqslant 0.$$

Отсюда получаем $u = \pm R_N + Ct/\varepsilon \geqslant 0$, а значит,

$$|R_N| \leqslant \frac{Ct}{\varepsilon}.$$

Запишем остаток в виде $R_N = u_{N+1} + \varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N| \leqslant |u_{N+1}| + \varepsilon Ct/\varepsilon \leqslant M$. Следовательно,

$$\left|u - \sum_{k=-1}^{N} u_k\right| \leqslant \varepsilon^{N+1} M.$$

Теорема доказана.

2.5. Приложение.

Лемма 1. *Для всех* $z > 0$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int\limits_z^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi < \sqrt{2} e^{-z^2/2}.$$

Действительно,

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_z^\infty e^{-\xi^2/2-\xi^2/2}\, d\xi \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2} \int\limits_z^\infty e^{-\xi^2/2}\, d\xi \leqslant e^{-z^2/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-s^2/2}\, ds = \sqrt{2} e^{-z^2/2}.$$

Лемма 2. *Для любой функции* $\psi(t) \in C[0,T]$ *верна оценка*

$$|F(\psi(t))| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \left|\psi\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right)\right| e^{-\xi^2}\, d\xi \leqslant M,$$

где $M = \|\psi\|_C$.

Если $x/(2\varepsilon\sqrt{t}) \leqslant \xi < +\infty$, то $t - x^2/(4\varepsilon^2\xi^2) \in [0,t] \subseteq [0,T]$. Так как функция $\psi(t)$ непрерывна по условию, то $|\psi(t)| \leqslant M = \|\psi\|_C$ при всех $t \in [0,T]$. Поэтому

$$|F(\psi(t))| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \left|\psi\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right)\right| e^{-\xi^2}\, d\xi \leqslant M \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi = M.$$

Лемма 3. *Для любой функции* $\psi(t) \in C[0,T]$ *верна оценка*

$$F(\psi(t)) = \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi + \underline{O}(\varepsilon^\infty)$$

при $\varepsilon \to 0$ *для всех* $x \in [\delta, +\infty)$, *где* $\delta > 0$.

Примем во внимание результаты лемм 1 и 2 и представление

$$F(\psi(t)) = \psi(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^\infty \left(\psi\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right) - \psi(t)\right) e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Оценим модуль второго слагаемого в правой части этого равенства:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Bigg|\int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^{\infty}\left(\psi\left(t-\frac{x^2}{4\varepsilon^2\xi^2}\right)-\psi(t)\right)e^{-\xi^2}\,d\xi\Bigg|\leqslant 2M\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/(2\varepsilon\sqrt{t})}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\,d\xi\leqslant 2\sqrt{2}Me^{-x^2/(8\varepsilon^2 t)},$$

где $M=\|\psi\|_C$. Отсюда при $\varepsilon\to 0$ следует нужная оценка для всех $x\in[\delta,+\infty)$, где $\delta>0$.

Лемма 4. *Пусть оператор $A(t)$ имеет собственное значение $\lambda(t)=t^r a(t)$, $\operatorname{Re}a(t)<0$. Тогда имеют место оценки*

$$\sigma_k(t,\varepsilon)=\underline{O}(\varepsilon)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad t\in[\delta,T],\quad\delta>0.$$

Так как $\operatorname{Re}a(t)<0$, то найдётся $\alpha>0$ такое, что $\operatorname{Re}a(t)\leqslant-\alpha<0$. Поэтому

$$\Bigg|\int\limits_0^t\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\lambda(s_1)\,ds_1\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds\Bigg|\leqslant\int\limits_0^t\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\alpha s_1^r\,ds_1\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1}-s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^t\exp\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^t\exp\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=$$

$$=\varepsilon^{(i+1)/(n(r+1))}\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^{t/\varepsilon^{1/(r+1)}}\exp\bigg(\frac{\alpha(\xi^{r+1})}{r+1}\bigg)\xi^{-1+(i+1)/n}\,d\xi.$$

Для асимптотической оценки получившегося выражения обозначим $\tau=t/\varepsilon^{1/(r+1)}$, и пусть $\tau\to\infty$. Для двух последних сомножителей оцениваемого выражения имеем

$$\exp\bigg(-\frac{\alpha(\tau^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^{\tau}\exp\bigg(\frac{\alpha(\xi^{r+1})}{r+1}\bigg)\xi^{-1+(i+1)/n}\,d\xi\sim$$

$$\sim\frac{1}{\alpha\tau^r}\exp\bigg(-\frac{\alpha(\tau^{r+1})}{r+1}\bigg)\exp\bigg(\frac{\alpha(\tau^{r+1})}{r+1}\bigg)\tau^{-1+(i+1)/n}=\frac{\tau^{-1+(i+1)/n}}{\alpha\tau^r}=\frac{1}{\alpha\tau^{(p-i)/n}}=\frac{\varepsilon^{(p-i)/(n(r+1))}}{\alpha t^{(p-i)/n}}.$$

Учитывая первый сомножитель $\varepsilon^{(i+1)/(n(r+1))}$, получаем $\varepsilon^{(i+1)/(n(r+1))}\varepsilon^{(p-i)/(n(r+1))}=\varepsilon$.

Отсюда следует, что

$$\exp\bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(t^{r+1})}{r+1}\bigg)\int\limits_0^t\exp\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha(s^{r+1})}{r+1}\bigg)s^{-1+(i+1)/n}\,ds=O(\varepsilon)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\quad t\in[\delta,T],\quad\delta>0.$$

Теоремы 1 и 2 получены Ратниковой Т.А. в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. 1948. Т. 22 (64). № 2. С. 193–204.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
3. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1965.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
5. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
6. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities // J. of Math. Sci. 2004. V. 121. № 1. P. 1973–2079.
7. *Елисеев А.Г., Ломов С.А.* Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. 1986. Т. 131. № 4. С. 544–557.
8. *Елисеев А.Г.* Теория сингулярных возмущений в случае негладкого спектра предельного оператора // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 7. С. 25–40.
9. *Елисеев А.Г.* Об аналитических решениях по параметру сингулярно возмущенного уравнения при наличии простейшей точки поворота у предельного оператора // Вестн. Моск. энерг. ин-та. 1995. № 6. С. 41–47.
10. *Ratnikova T.* Singularly perturbed Cauchy problem for a parabolic equation with a rational “simple” turning point // Axioms. 2020. V. 9. № 4. Art. 138.
11. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–116.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 03.08.2021 г.
После доработки 22.12.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 346–360

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956:533.2

О СВОЙСТВАХ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОМОГЕННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ С ОБЩЕЙ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

© 2022 г. А. А. Злотник, А. С. Федченко

Изучается квазигидродинамическая система уравнений гомогенной (с общими скоростью и температурой) многокомпонентной газовой смеси в отсутствие химических реакций с общей регуляризующей скоростью. Для неё выводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии компонент смеси. В отсутствие потоков диффузии новым способом строится линеаризованная на постоянном решении система уравнений, выполняется её приведение к симметричному виду и доказывается L^2-диссипативность её решений, а также устанавливается вырождение (по отношению к плотностям компонент смеси) свойства параболичности исходной системы. Фактически изучаемая система имеет составной тип. Полученные свойства математически строго отражают её физическую корректность и диссипативный характер квазигидродинамической регуляризации.

DOI: 10.31857/S0374064122030050, **EDN:** BXWSAS

Введение. Уравнения движения многокомпонентных смесей газов (или жидкостей) представляют большой теоретический и прикладной интерес (см., в частности, [1–4]). В однокомпонентном случае давно используются квазигазодинамическая (КГД) и более простая квазигидродинамическая (КГидД) системы уравнений как регуляризованные системы уравнений Эйлера и Навье–Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа [5–7]. Для них справедливо уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Дополнительными важными математическими свойствами этих систем являются их равномерная по Петровскому параболичность и устойчивость решений линеаризованных систем, доказанные в [8–11].

Обобщения КГД и КГидД систем на случай бинарных смесей газов с различными плотностями, скоростями и температурами в отсутствие потоков диффузии и химических реакций даны в [6, 12]. Недавно построены соответствующие обобщения на практически важный случай гомогенных (с общими скоростью и температурой) смесей с одной общей или несколькими регуляризующими скоростями, в том числе с учётом межфазного взаимодействия между собой компонент смеси [13, 14]. Применение разностных методов, основанных на КГидД и КГД системах для бинарных смесей с общей регуляризующей скоростью, хорошо зарекомендовало себя в ряде задач компьютерного моделирования (см. в том числе [14–18]).

В данной работе изучается КГидД система уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью при наличии потоков диффузии заданного типа и в отсутствие химических реакций. Для неё выводится уравнение баланса суммарной энтропии с неотрицательным производством энтропии (для КГидД систем при наличии потоков диффузии это реализуется впервые). В случае бинарной (двухкомпонентной) смеси потоки диффузии эквивалентны указанным в [1, гл. VI], но записаны изначально несколько иначе и полностью; вывод уравнения баланса энтропии также реализован более наглядно и подробно. Кроме того, новая форма записи потоков диффузии позволила дать обобщение на многокомпонентный случай.

В отсутствие потоков диффузии сначала указывается на то, что можно записать замкнутую систему уравнений относительно суммарных плотности, газовой “постоянной” и удельной теплоёмкости при постоянном объёме (для смесей две последние величины являются функциями), а также общих скорости и температуре. Это может быть полезно как при анализе свойств КГидД системы, так и при построении методов её численного решения.

Затем, и это главное, выводится линеаризованная на постоянном решении КГидД система уравнений, выполняется её приведение к симметричному виду и доказываются L^2-диссипативность решений соответствующей задачи Коши и их оценки. Строится также упрощённая симметричная система уравнений для меньшего количества искомых функций с лучшими свойствами и для неё доказываются L^2-диссипативность решений соответствующей начально-краевой задачи и их оценки. Устанавливается также вырождение (по отношению к плотностям компонент смеси) свойства параболичности исходной КГидД системы. Оба свойства тесно связаны и анализируются иным более компактным образом, чем это сделано в [8–10]. В этом анализе существенную роль играет использование редуцированной КГидД системы, уравнения которой разложены с точностью до квадрата модуля градиента решения, и новый способ нормировки плотностей компонент. Оба свойства строго математически выражают физическую диссипативность КГидД регуляризации, играющую принципиальную роль в успехе её применения.

Указанное вырождение свойства параболичности связано именно с использованием общей регуляризующей скорости (точнее, суммарного давления) в уравнениях баланса плотности компонент смеси. Более того, показывается, что фактически КГидД система уравнений в отсутствие потоков диффузии, подобно системе уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа, имеет составной тип (а не параболический тип, как в однокомпонентном случае). Это обстоятельство существенно для корректной постановки краевых условий для плотностей компонент в начально-краевых задачах, а также для выбора способа дискретизации уравнений баланса плотности компонент смеси.

1. Квазигидродинамическая система уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью и её следствия. Квазигидродинамическая система уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью состоит из уравнений баланса массы компоненты, суммарного импульса и суммарной полной энергии:

$$\partial_t\rho_\alpha+\operatorname{div}\left[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})+\mathbf{d}_\alpha\right]=0,\quad \alpha=\overline{1,K},\tag{1}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u})+\operatorname{div}\left[\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\bigotimes\mathbf{u}\right]+\nabla p=\operatorname{div}\Pi+\rho\mathbf{f},\tag{2}$$

$$\partial_t E+\operatorname{div}\left[(E+p)(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\right]=\operatorname{div}\left(-\mathbf{q}+\Pi\mathbf{u}\right)+\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\mathbf{f}+Q.\tag{3}$$

Здесь основные искомые функции $\rho_\alpha>0$, $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)$, $\theta>0$ – соответственно плотность компоненты α, общие скорость и абсолютная температура смеси; число компонент $K\geqslant 2$. Можно считать, что они зависят от $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, где $n=1,2,3$, и $t\geqslant 0$. Операторы div и $\nabla=(\partial_1,\ldots,\partial_n)$ берутся по x, а $\partial_t:=\partial/\partial t$, $\partial_i:=\partial/\partial x_i$. Символы $\bigotimes$ и $\cdot$ обозначают соответственно тензорное и скалярное произведения векторов, а дивергенция тензора берётся по его первому индексу.

Компоненты смеси предполагаются совершенными политропными газами с уравнениями состояния $p_\alpha=R_\alpha\rho_\alpha\theta$ и $\varepsilon_\alpha=c_{V\alpha}\theta$, где p_α и ε_α – давление и удельная внутренняя энергия компоненты α, с постоянными $R_\alpha>0$ и $c_{V\alpha}>0$, $\alpha=\overline{1,K}$. Суммарные плотность, давление, удельная внутренняя энергия и полная энергия смеси задаются соответственно формулами

$$\rho=\langle\rho_\alpha\rangle:=\sum_{\alpha=1}^{K}\rho_\alpha,\quad p=\langle p_\alpha\rangle=R\rho\theta,\quad \varepsilon=\left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}\varepsilon_\alpha\right\rangle=c_V\theta,\quad E=\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\rho\varepsilon\tag{4}$$

с коэффициентами

$$R:=\left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}R_\alpha\right\rangle,\quad c_V:=\left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}c_{V\alpha}\right\rangle.\tag{5}$$

Здесь введена часто используемая в дальнейшем операция $\langle\,\cdot\,\rangle$ суммирования по индексу $\alpha=\overline{1,K}$. Вторая из формул (4) – это закон Дальтона для смесей. Подчеркнём, что R и c_V являются функциями, а не постоянными, в отличие от однокомпонентного случая ($K=1$). Отметим, что здесь функции $C_\alpha:=\rho_\alpha/\rho$ – массовые концентрации компонент смеси, которые будут возникать и ниже.

Тензор вязкости имеет вид $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$, а поток тепла – вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d$. При этом тензор вязкости Навье–Стокса и поток тепла Фурье задаются стандартными формулами

$$\Pi^{NS} = \mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}\right] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}, \quad -\mathbf{q}^F = \varkappa\nabla\theta,$$

где $\nabla\mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор порядка n, а $\mu > 0$, $\lambda \geqslant 0$ – коэффициенты динамической и объёмной вязкости, $\varkappa > 0$ – коэффициент теплопроводности (которые могут зависеть от искомых функций). Общая регуляризующая скорость и регуляризующий тензор вязкости в КГидД случае имеют вид

$$\widehat{\mathbf{w}} = \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{f}\right], \quad \Pi^\tau = \rho\mathbf{u}\bigotimes\widehat{\mathbf{w}}, \tag{6}$$

где $\tau > 0$ – параметр регуляризации, который может зависеть от искомых функций. Плотность массовой силы $\mathbf{f}$ и мощность тепловых источников $Q \geqslant 0$ – заданные функции.

Представленная модель является регуляризованной системой уравнений Навье–Стокса смеси вязких теплопроводных сжимаемых газов. Случай регуляризованных уравнений Эйлера, когда физические коэффициенты вязкости и теплопроводности равны нулю, также допускается: тогда подразумевается использование искусственных коэффициентов μ, λ, $\varkappa$, пропорциональных τ (см. [5–7]). Ниже их конкретный вид несуществен.

В этой модели $\mathbf{d}_\alpha$ – поток диффузии между компонентой α и остальными компонентами, а $\mathbf{q}^d$ – соответствующий дополнительный поток тепла. В случае бинарной смеси $(K = 2)$ при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}^d = 0$ приведённые выше уравнения были записаны (среди прочих) в [16]. В данной работе зададим указанные потоки следующими формулами:

$$-\mathbf{d}_\alpha := a_0\left[\sum_{\beta:\beta\neq\alpha}\nabla(G_\alpha - G_\beta) + b_\alpha\nabla\theta\right] = a_0[\nabla(KG_\alpha - G) + b_\alpha\nabla\theta] \quad \text{с} \quad G := \langle G_\alpha\rangle, \tag{7}$$

$$\mathbf{q}^d = \langle (G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta)\mathbf{d}_\alpha\rangle, \tag{8}$$

$$G_\alpha := \varepsilon_\alpha - s_\alpha\theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\theta, \quad s_\alpha := \bar{s}_\alpha - R_\alpha\ln\frac{\rho_\alpha}{\bar{\rho}_\alpha} + c_{V\alpha}\ln\frac{\theta}{\bar{\theta}}, \tag{9}$$

где G_α и s_α – потенциал Гиббса и удельная энтропия (см., например, [19]), а $c_{V\alpha}$ и $c_{p\alpha} = R_\alpha + c_{V\alpha}$ – удельные теплоёмкости при постоянном объёме и давлении компоненты $\alpha = \overline{1,K}$. Величины $a_0 \geqslant 0$ и b_α не конкретизируются; они могут зависеть от искомых функций и предполагается, что $\langle b_\alpha\rangle = 0$, а $\bar{s}_\alpha$, $\bar{\rho}_\alpha > 0$, $\bar{\theta} > 0$ – постоянные (референсные значения s_α, ρ_α, θ). Величина $c_{p\alpha}\theta$ – удельная энтальпия компоненты α.

Важную роль играет свойство $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$, непосредственно вытекающее из (7) и сделанного предположения $\langle b_\alpha\rangle = 0$.

Так как имеют место равенства

$$\nabla G_\alpha = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\nabla\theta - \theta\nabla s_\alpha, \quad \nabla s_\alpha = -R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha + c_{V\alpha}\frac{1}{\theta}\nabla\theta,$$

то заменой $\tilde{b}_\alpha := b_\alpha - (Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle)$ введённые выражения для потоков можно сделать, как обычно, не зависящими явно от s_α:

$$-\mathbf{d}_\alpha = a_0\{[Kc_{p\alpha} - \langle c_{p\alpha}\rangle - (Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle - b_\alpha)]\nabla\theta - \theta\nabla(Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle)\} =$$

$$= a_0\left[\theta\left(KR_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha - \left\langle R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha\right\rangle\right) + (KR_\alpha - \langle R_\alpha\rangle + \tilde{b}_\alpha)\nabla\theta\right],$$

$$\mathbf{q}^d = \langle (G_\alpha + s_\alpha\theta - K^{-1}\langle s_\alpha\rangle\theta + K^{-1}\tilde{b}_\alpha\theta)\mathbf{d}_\alpha\rangle = \langle (c_{p\alpha} + K^{-1}\tilde{b}_\alpha)\theta\mathbf{d}_\alpha\rangle \tag{10}$$

с учётом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$. При этом $\langle \tilde{b}_\alpha \rangle = 0$. Кроме того, поскольку $\rho_\alpha = pC_\alpha/(R\theta)$, то $\ln \rho_\alpha = \ln C_\alpha - \ln R + \ln p - \ln \theta$, $R = \langle R_\alpha C_\alpha \rangle$, и верна также формула

$$-\mathbf{d}_\alpha = a_0 \bigg\{ \theta \bigg[KR_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha - \bigg\langle R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha \bigg\rangle - (KR_\alpha - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla C_\alpha \rangle \bigg] + \\ + (KR_\alpha - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_\alpha \nabla \theta \bigg\}. \tag{11}$$

В случае $K = 2$ формулы (7), (8) для потоков принимают вид, эквивалентный известному [1, гл. VI]:

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = a_0[\nabla(G_1 - G_2) + b_1 \nabla \theta], \quad \mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1\theta)\mathbf{d}_1.$$

Кроме того, поскольку $KR_1 - \langle R_\alpha \rangle = R_1 - R_2$ и

$$KR_1 \frac{1}{C_1} \nabla C_1 - \bigg\langle R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha \bigg\rangle - (KR_1 - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla C_\alpha \rangle = \bigg(\frac{R_1}{C_1} + \frac{R_2}{C_2} \bigg) \nabla C_1 - \frac{(R_1 - R_2)^2}{R} \nabla C_1,$$

то после несложных алгебраических преобразований формулы (11) и (10) приводят к формулам более стандартного вида для бинарных смесей

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = a_0 \bigg[\frac{R_1 R_2 \theta}{RC_1(1 - C_1)} \nabla C_1 - \frac{R_1 - R_2}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_1 \nabla \theta \bigg], \quad \mathbf{q}^d = (c_{p1} - c_{p2} + \tilde{b}_1)\theta \mathbf{d}_1.$$

В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. при отсутствии термодиффузии) их вид упрощается.

Выведем необходимый ниже набор следствий из уравнений (1)–(3), включая уравнения баланса суммарной массы, кинетической энергии, суммарной внутренней энергии, а также уравнения баланса скорости и температуры.

Применение операции $\langle \cdot \rangle$ к уравнению (1) (т.е. суммирование по $\alpha = \overline{1, K}$) с учётом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$ приводит к важному *уравнению баланса суммарной массы*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} [\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = 0. \tag{12}$$

Нередко уравнения (1) заменяют на уравнение (12) с добавлением уравнения для $K-1$ концентраций

$$\partial_t(\rho C_\alpha) + \operatorname{div} [\rho C_\alpha(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha] = 0, \quad \alpha = \overline{1, K-1};$$

в том числе так сделано в [15–17], но ниже это не используется. Последние уравнения в силу (12) можно также записать в недивергентном виде

$$\rho \partial_t C_\alpha + \rho \nabla C_\alpha \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div} \mathbf{d}_\alpha = 0. \tag{13}$$

Уравнение баланса импульса (2) скалярно умножим на $\mathbf{u}$ и воспользуемся однотипными формулами

$$[\partial_t(\rho \mathbf{u})] \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} (\partial_t \rho) |\mathbf{u}|^2,$$

$$\operatorname{div} [\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) \bigotimes \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \operatorname{div} [\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) |\mathbf{u}|^2] + \frac{1}{2} \{\operatorname{div} [\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})]\} |\mathbf{u}|^2$$

и уравнением баланса суммарной массы (12), в результате получим *уравнение баланса кинетической энергии*

$$\frac{1}{2} \partial_t(\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div} [\rho(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) |\mathbf{u}|^2] + (\nabla p) \cdot \mathbf{u} = (\operatorname{div} \Pi) \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

Вычитая его из уравнения баланса суммарной полной энергии (3) и пользуясь формулами

$$\operatorname{div} (p\mathbf{u}) = (\nabla p) \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} (\Pi \mathbf{u}) = (\operatorname{div} \Pi) \cdot \mathbf{u} + \Pi : \nabla \mathbf{u},$$

придём к *уравнению баланса суммарной внутренней энергии*

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}[\rho\varepsilon(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] + p\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q, \tag{14}$$

здесь и далее через $:$ обозначается скалярное произведение тензоров.

Уравнения типа (12)–(14) в несколько иных ситуациях хорошо известны; здесь их вывод приведён для полноты и замкнутости изложения.

Продифференцировав первые два слагаемые в левой части уравнения баланса импульса (2), получим

$$(\partial_t\rho)\mathbf{u} + \rho\partial_t\mathbf{u} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})]\mathbf{u} + \rho[(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \nabla p =$$
$$= \operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})\rho\widehat{\mathbf{w}} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) + \rho\mathbf{f}.$$

В силу уравнения баланса суммарной массы (12) после деления на ρ выведем уравнение баланса скорости

$$\partial_t\mathbf{u} + [(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{f}. \tag{15}$$

Обратимся к уравнению (14). Так как $\rho\varepsilon = \langle c_{V\alpha}\rho_\alpha\rangle\theta$, то верны однотипные формулы дифференцирования

$$\partial_t(\rho\varepsilon) = \langle c_{V\alpha}\partial_t\rho_\alpha\rangle\theta + \langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle\partial_t\theta,$$
$$\operatorname{div}[\rho\varepsilon(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] = \langle c_{V\alpha}\operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})]\rangle\theta + \langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla\theta.$$

Воспользуемся уравнением баланса массы компоненты (1) и после деления на $\langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle = c_V\rho$ придём к *уравнению баланса температуры*

$$\partial_t\theta + (\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1}{c_V\rho}[\langle c_{V\alpha}\operatorname{div}\mathbf{d}_\alpha\rangle\theta + \operatorname{div}(-\mathbf{q}+p\widehat{\mathbf{w}}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q]. \tag{16}$$

2. Уравнение баланса энтропии при наличии потоков диффузии. Введём суммарную удельную энтропию $s := \langle C_\alpha s_\alpha\rangle$ и выведем уравнение баланса суммарной энтропии ρs. Пусть $a_0 > 0$ в (7).

Теорема 1. *Для КГидД системы уравнений справедливо уравнение баланса суммарной энтропии с неотрицательным производством энтропии*

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left[\rho s(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) - \frac{1}{\theta}\varkappa\nabla\theta + \frac{1}{K}\langle b_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle\right] =$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\varkappa|\nabla\theta|^2 + \frac{1}{\theta}\left[\frac{\mu}{2}|\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] + \frac{1}{Ka_0\theta}\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\rangle + \frac{\rho}{\tau\theta}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + \frac{Q}{\theta} \geqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Преобразуем в силу уравнения баланса массы компоненты (1) и задания энтропии s_α (9) с последующей записью слагаемых в дивергентном виде следующую величину:

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}[\rho s(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \langle s_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle] = \langle\partial_t(\rho_\alpha s_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + s_\alpha\mathbf{d}_\alpha]\rangle =$$
$$= \langle\{\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha]\}s_\alpha\rangle + \langle\rho_\alpha[\partial_t s_\alpha + \nabla s_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] + \nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle =$$
$$= \left\langle - R_\alpha[\partial_t\rho_\alpha + \nabla\rho_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] + \frac{1}{\theta}[\rho_\alpha\partial_t\varepsilon_\alpha + \rho_\alpha\nabla\varepsilon_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})]\right\rangle + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle =$$
$$= \Bigg\langle - R_\alpha\{\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] - \rho_\alpha\operatorname{div}(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\} +$$
$$+ \frac{1}{\theta}\{[\partial_t(\rho_\alpha\varepsilon_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha\varepsilon_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] - \varepsilon_\alpha[\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})]]\}\Bigg\rangle + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Далее воспользуемся равенством $\rho\varepsilon = \langle \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \rangle$ и уравнениями баланса массы компоненты (1) и суммарной внутренней энергии (14), в результате получим

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}[\rho s(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \langle s_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle] = \langle (R_\alpha + c_{V\alpha}) \operatorname{div} \mathbf{d}_\alpha + R_\alpha \rho_\alpha \operatorname{div}(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) \rangle +$$

$$+ \frac{1}{\theta}[-p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi : \nabla \mathbf{u} - \rho \widehat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{f} + Q] + \langle \nabla s_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha \rangle.$$

Так как верны равенства

$$(R_\alpha + c_{V\alpha}) - s_\alpha = \frac{G_\alpha}{\theta}, \quad \langle R_\alpha \rho_\alpha \rangle = \frac{p}{\theta}, \quad \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = \nabla p \cdot \widehat{\mathbf{w}} + p \operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}}, \quad \Pi^\tau : \nabla \mathbf{u} = \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \widehat{\mathbf{w}},$$

$$\frac{1}{\theta} \operatorname{div}(-\mathbf{q}) = \operatorname{div}\left(-\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\right) + \frac{1}{\theta^2} \nabla\theta \cdot (-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^d), \quad \nabla s_\alpha = -\nabla\left(\frac{1}{\theta} G_\alpha\right),$$

то

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left[\rho s(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) - \frac{1}{\theta}\langle G_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle\right] = \frac{1}{\theta}[\nabla p + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \rho \mathbf{f}] \cdot \widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\theta}(\Pi^{NS} : \nabla \mathbf{u} + Q) -$$

$$- \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \nabla\theta \cdot \langle (G_\alpha + K^{-1} b_\alpha \theta) \mathbf{d}_\alpha \rangle + \frac{1}{\theta^2} \nabla\theta \cdot \langle G_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle - \frac{1}{\theta} \langle \nabla G_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha \rangle.$$

Последние три слагаемых правой части с учётом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$ можно записать в виде

$$-\frac{1}{K\theta}\langle [\nabla(KG_\alpha) + b_\alpha \nabla\theta] \cdot \mathbf{d}_\alpha \rangle = -\frac{1}{K\theta}\langle [\nabla(KG_\alpha - G) + b_\alpha \nabla\theta] \cdot \mathbf{d}_\alpha \rangle = \frac{1}{K a_0 \theta}\langle |\mathbf{d}_\alpha|^2 \rangle.$$

Кроме того, $\mathbf{q} - \langle G_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle = -\varkappa \nabla\theta + K^{-1}\theta \langle b_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle$. Уравнение (17) выведено.

Обратим внимание на то, что уравнение баланса энтропии (17) сохраняет силу, во-первых, при $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$ (если угодно, при $a_0 = 0$; при $K = 2$ такой результат указан в конце раздела 2 в [14]), во-вторых, при $\tau = 0$ – в этих более простых случаях нужно отбросить слагаемые соответственно с $\mathbf{d}_\alpha$ и $\widehat{\mathbf{w}}$ в его левой и правой частях.

3. Разложение КГидД системы уравнений относительно градиента искомых функций. Изучаемые ниже свойства связаны с диссипативными свойствами КГидД системы уравнений. При этом ограничимся упрощённым случаем $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$, который также оказывается достаточно нетривиальным.

Сначала обратим внимание на то, что в этом случае умножение уравнений баланса массы компоненты (1) на R_α и $c_{V\alpha}$ и суммирование по $\alpha = \overline{1, K}$ в силу (5) приводит к следующим одинаковым уравнениям для R и c_V:

$$\partial_t(\rho R) + \operatorname{div}[\rho R(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = 0, \quad \partial_t(\rho c_V) + \operatorname{div}[\rho c_V(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})] = 0. \tag{18}$$

Так как в выражения для $\widehat{\mathbf{w}}$, p, ε, а значит, и в уравнения баланса импульса (2) и полной энергии (3), входят именно суммарные величины ρ, R и c_V (а не сами ρ_α, см. (4)), то уравнения (12), (18) вместе с (2), (3) образуют замкнутую систему уравнений для искомых функций $\rho > 0$, $R > 0$, $c_V > 0$, $\mathbf{u}$, $\theta > 0$, количество которых не зависит от K (и при $K > 3$ меньше исходного). Это обстоятельство можно применить в том числе при построении численных методов решения исходной КГидД системы уравнений; ниже в данной статье оно не используется. Отметим также, что в силу уравнения баланса суммарной массы (12) уравнения для R и c_V можно записать в недивергентном виде

$$\partial_t R + \nabla R \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0, \quad \partial_t c_V + \nabla c_V \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0.$$

Пусть далее $\mathbf{f} = 0$, $Q = 0$. Введём вектор искомых функций $\mathbf{z} = (\rho_1, \ldots, \rho_K, \mathbf{u}, \theta)$ и выполним вспомогательную редукцию уравнений (1), (15) и (16) с точностью $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$.

Запишем уравнение баланса массы компоненты (1) в виде $\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho_\alpha \widehat{\mathbf{w}})$, $\alpha = \overline{1,K}$, и разложим его правую часть:

$$\operatorname{div}(\rho_\alpha \widehat{\mathbf{w}}) = \rho_\alpha \operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

$$\operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}} = \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\nabla(\langle R_\alpha\rho_\alpha\rangle\theta)\right] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2) =$$

$$= \tau\left[\frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha \Delta\rho_\alpha\rangle + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + R\Delta\theta\right] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2). \tag{19}$$

Разложим также слагаемые правой части уравнения (15):

$$\operatorname{div}\Pi^{NS} = \mu\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\text{т}}) + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2) =$$

$$= \mu\Delta\mathbf{u} + \left(\frac{1}{3}\mu + \lambda\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

$$\frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) = \tau(\mathbf{u}\cdot\nabla)\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\right] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2) =$$

$$= \tau\left[(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle + R(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla\theta\right] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

и слагаемые правой части уравнения (16):

$$\operatorname{div}(-\mathbf{q}) = \varkappa\Delta\theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \quad \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = p\operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

далее см. разложение в (19).

Подставляя все эти разложения в правые части соответствующих уравнений и учитывая, что

$$|\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla\mathbf{u}| + |(\operatorname{div}\mathbf{u})\rho\widehat{\mathbf{w}}| + |\widehat{\mathbf{w}}\cdot\nabla\theta| + |\Pi : \nabla\mathbf{u}| = O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$$

и $p = R\rho\theta$, выведем в итоге редуцированную систему уравнений с производной ∂_t отдельно для каждой из искомых функций:

$$\partial_t\rho_\alpha + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho_\alpha + \rho_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u} =$$

$$= \tau\left[\frac{\rho_\alpha\theta}{\rho}\langle R_\beta\Delta\rho_\beta\rangle + \rho_\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + R\rho_\alpha\Delta\theta\right] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \quad \alpha = \overline{1,K}, \tag{20}$$

$$\partial_t\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + R\nabla\theta = \tau\frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle +$$

$$+ \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \tau(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \tau R(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla\theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \tag{21}$$

$$\partial_t\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta =$$

$$= \tau\frac{R\theta^2}{c_V\rho}\langle R_\alpha\Delta\rho_\alpha\rangle + \tau\frac{R\theta}{c_V}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \left(\tau\frac{R^2\theta}{c_V} + \frac{\varkappa}{c_V\rho}\right)\Delta\theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \tag{22}$$

где $\chi := \mu/3 + \lambda$. Выражения типа $\langle R_\beta\Delta\rho_\beta\rangle$ подразумевают суммирование по $\beta = \overline{1,K}$.

Ниже полученная редуцированная система уравнений служит очень удобной основой как для линеаризации исходной КГидД системы, так и при анализе её параболичности.

4. Линеаризованная на постоянном решении КГидД система уравнений и её L^2-диссипативность. При $\mathbf{f}=0$ и $Q=0$ система уравнений (1)–(3) имеет постоянные решения $(\rho_1,\ldots,\rho_K,\mathbf{u},\theta)(x,t)\equiv\mathbf{z}_0$, где $\mathbf{z}_0=(\rho_{10},\ldots,\rho_{K0},\mathbf{u}_0,\theta_0)$ с $\rho_{10}>0,\ \ldots,\ \rho_{K0}>0$, $\theta_0>0$. Линеаризуем систему на этом фоновом решении. Для этого запишем решение в виде

$$\rho_\alpha=\rho_{\alpha0}+\rho_{\alpha*}\widetilde{\rho}_\alpha\quad(\alpha=\overline{1,K}),\quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_0+u_*\widetilde{\mathbf{u}},\quad \theta=\theta_0+\theta_*\widetilde{\theta},\tag{23}$$

где $\rho_{\alpha*}>0,\ u_*>0,\ \theta_*>0$ – нормировочные обезразмеривающие параметры, а $\widetilde{\mathbf{z}}:=(\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\theta})$ – вектор безразмерных возмущений с $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}:=(\widetilde{\rho}_1,\ldots,\widetilde{\rho}_K)$. В дальнейшем важно, что, в отличие от [8–10], множители $\rho_{\alpha*}$ могут быть выбраны не равными фоновым значениям $\rho_{\alpha0}$.

Введём нормированные фоновые плотности компонент и скорость, а также фоновые значения суммарной плотности и коэффициентов R и c_V:

$$\widehat{\rho}_{\alpha0}:=\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_{\alpha*}},\quad \widehat{\mathbf{u}}_0:=\frac{\mathbf{u}_0}{u_*},\quad \rho_0:=\langle\rho_{\alpha0}\rangle,\quad R_0:=\left\langle\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0}R_\alpha\right\rangle,\quad c_{V0}:=\left\langle\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0}c_{V\alpha}\right\rangle.$$

В отличие от работ [8–10] решение в виде (23) подставим не в исходную КГидД систему или в систему уравнений (1), (15), (16), а в редуцированную систему (20)–(22). Так как $\partial_k\mathbf{z}=(\rho_{1*}\partial_k\widetilde{\rho}_1,\ldots,\rho_{K*}\partial_k\widetilde{\rho}_K,u_*\partial_k\widetilde{\mathbf{u}},\theta_*\partial_k\widetilde{\theta})$, $k=\overline{1,n}$, и $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)=O(|\nabla\widetilde{\mathbf{z}}|^2)$, то после отбрасывания членов 2-го порядка малости относительно вектора $\widetilde{\mathbf{z}}$ и его производных 1-го и 2-го порядков и деления уравнений соответственно на $\rho_{\alpha*},\ u_*,\ \theta_*$, несложными преобразованиями получаем линеаризованную систему уравнений

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha+u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha+\widehat{\rho}_{\alpha0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}})=$$
$$=\tau_0u_*^2\left[\frac{\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_0}{\rho_0u_*^2}\langle R_\beta\rho_{\beta*}\Delta\widetilde{\rho}_\beta\rangle+\widehat{\rho}_{\alpha0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\frac{R_0\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2}\Delta\widetilde{\theta}\right],\quad \alpha=\overline{1,K},\tag{24}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}}+u_*\left(\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle+(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}}+\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\nabla\widetilde{\theta}\right)=u_*^2\left[\tau_0\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_0}{\rho_0u_*^2}\Delta\widetilde{\mathbf{u}}+\frac{\chi_0}{\rho_0u_*^2}\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}}+\tau_0\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}\right],\tag{25}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta}+u_*\left(\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}\right)=$$
$$=u_*^2\left[\tau_0\frac{R_0\theta_0^2}{c_{V0}\rho_0u_*^2\theta_*}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle+\tau_0\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}+\left(\tau_0\frac{R_0^2\theta_0}{c_{V0}u_*^2}+\frac{\varkappa_0}{c_{V0}\rho_0u_*^2}\right)\Delta\widetilde{\theta}\right].\tag{26}$$

Здесь $\tau_0,\ \mu_0,\ \chi_0,\ \varkappa_0$ – фоновые значения $\tau,\ \mu,\ \chi,\ \varkappa$, т.е. их значения на фоновом решении, и из конвективных слагаемых (т.е. с первыми производными по x) вынесен общий множитель u_*, а из диссипативных слагаемых (т.е. со вторыми производными) – множитель u_*^2.

Для упрощения анализа полученной системы уравнений существенна возможность одновременной симметризации как конвективных, так и диссипативных слагаемых. Симметричность конвективных слагаемых достигается наложением условий

$$\widehat{\rho}_{\alpha0}=\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}R_\alpha\rho_{\alpha*}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{u_*^2}{\rho_{\alpha*}^2}=\frac{R_\alpha\theta_0}{\rho_{\alpha0}\rho_0},\quad \alpha=\overline{1,K},\quad\text{и}\quad \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}=\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\theta_*^2}{u_*^2}=\frac{\theta_0}{c_{V0}}.\tag{27}$$

Симметричность диссипативных слагаемых имеет место при выполнении условий

$$\widehat{\rho}_{\alpha0}=\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}R_\alpha\rho_{\alpha*},\quad \frac{R_0\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2}=\frac{R_0\theta_0^2}{c_{V0}\rho_0u_*^2\theta_*}R_\alpha\rho_{\alpha*},\quad \alpha=\overline{1,K},\quad\text{и}\quad\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}=\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}.$$

Первое и третье из них совпадают с условиями (27), а второе следует из условий (27), что обеспечивает одновременную симметризацию конвективных и диссипативных слагаемых.

Отметим, что при $\rho_{\alpha*} = \rho_{\alpha 0}$ условиям (27) можно удовлетворить только в очень частном случае: когда $p_{\alpha 0} = R_\alpha \rho_{\alpha 0}\theta_0$ не зависит от α. С другой стороны, условия (27) фактически содержат свободный параметр (выбором которого будет удобно распорядиться ниже) – им удовлетворяет выбор

$$\rho_{\alpha*} = b\sqrt{\rho_{\alpha 0} c_{V0}\rho_0/R_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,K}, \quad u_* = b\sqrt{c_{V0}\theta_0}, \quad \theta_* = b\theta_0 \quad \text{при любом} \quad b > 0. \tag{28}$$

Пусть ниже условия (27) выполнены. Тогда вид коэффициентов линеаризованной системы уравнений (24)–(26) существенно упрощается:

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}) =$$

$$= \tau_0 u_*^2[\widehat{\rho}_{\alpha 0}\langle\widehat{\rho}_{\beta 0}\Delta\widetilde{\rho}_\beta\rangle + \widehat{\rho}_{\alpha 0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + a\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\widetilde{\theta}], \quad \alpha = \overline{1,K}, \tag{29}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*(\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}) =$$

$$= u_*^2[\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \bar{\mu}_0\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\chi}_0\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 a(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}], \tag{30}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*(a\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}) = u_*^2[\tau_0 a\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \tau_0 a(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + (\tau_0 a^2 + \bar{\varkappa}_0)\Delta\widetilde{\theta}], \tag{31}$$

где введены обозначения

$$a := \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}, \quad \bar{\mu}_0 := \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\chi}_0 := \frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\varkappa}_0 := \frac{\varkappa_0}{c_{V0}\rho_0 u_*^2}. \tag{32}$$

Вид правых частей уравнений (24)–(26) и (29)–(31) наводит на мысль о том, что можно вывести замкнутую симметричную систему уравнений для функций $\tilde{r} := \langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\widetilde{\rho}_\alpha\rangle/(R_0\rho_0)$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\theta}$. Чтобы реализовать это предположение, применим операцию $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}(\cdot)\rangle/(R_0\rho_0)$ к уравнению (24) и в силу равенств $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\widehat{\rho}_{\alpha 0}\rangle = \langle R_\alpha\rho_{\alpha 0}\rangle = R_0\rho_0$ получим уравнение

$$\partial_t\tilde{r} + u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{r} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}) = \tau_0 u_*^2\left[\frac{R_0\theta_0}{u_*^2}\Delta\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\Delta\widetilde{\theta}\right].$$

Симметризуем систему из этого уравнения и уравнений (25), (26) с $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle = R_0\rho_0\nabla\tilde{r}$ и $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle = R_0\rho_0\Delta\tilde{r}$. Симметричность конвективных слагаемых обеспечивается выполнением условий

$$1 = \frac{R_0\theta_0}{u_*^2} \ \Leftrightarrow\ u_* = \sqrt{R_0\theta_0} \quad \text{и} \quad \frac{R_0\theta_*}{u_*^2} = \frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*} \ \Leftrightarrow\ \theta_* = \sqrt{\frac{\theta_0}{c_{V0}}}u_*, \quad \text{т.е.} \quad \theta_* = \theta_0\sqrt{\frac{R_0}{c_{V0}}}. \tag{33}$$

Симметричность диссипативных слагаемых обеспечивается выполнением тех же условий и условия $R_0\theta_*/u_*^2 = R_0^2\theta_0^2/(c_{V0}u_*^2\theta_*)$, которое следует из предыдущих. Таким образом, при указанном в (33) выборе u_* и θ_* приходим к следующей упрощённой системе уравнений:

$$\partial_t\tilde{r} + u_*(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{r} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}) = \tau_0 u_*^2[\Delta\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\Delta\widetilde{\theta}], \tag{34}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*(\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\nabla\widetilde{\theta}) =$$

$$= u_*^2[\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\tilde{r} + \bar{\mu}_0\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\chi}_0\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0\bar{a}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}], \tag{35}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*(\bar{a}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}) = u_*^2[\tau_0\bar{a}\Delta\tilde{r} + \tau_0\bar{a}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + (\tau_0\bar{a}^2 + \bar{\varkappa}_0)\Delta\widetilde{\theta}], \tag{36}$$

где $\bar{a} := \sqrt{R_0/c_{V0}}$ и для $\bar{\mu}_0$, $\bar{\chi}_0$, $\bar{\varkappa}_0$ использованы прежние обозначения (32) с $u_* = \sqrt{R_0\theta_0}$.

Если функции $\tilde{r}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\theta}$ найдены, то в силу уравнения (29) для $\widetilde{\rho}_\alpha$ получается простейшее неоднородное уравнение переноса

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha = g_\alpha := -\widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 u_*^2[\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\tilde{r} + \widehat{\rho}_{\alpha 0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + a\widehat{\rho}_{\alpha 0}\Delta\widetilde{\theta}], \quad \alpha = \overline{1,K},$$

поскольку можно считать, что $u_* = \sqrt{R_0\theta_0}$ в (28). Оно допускает решение в явном виде.

Для анализа задачи Коши для системы (29)–(31) умножим её уравнения на соответствующие компоненты непрерывно дифференцируемой финитной вектор-функции

$$\mathbf{z} = (\rho_1, \ldots, \rho_n, \mathbf{u}, \theta)(x)$$

(её не следует путать с решением КГидД системы, которое выше обозначалось аналогично) и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$. Результаты сложим, проинтегрируем по частям и получим интегральное тождество

$$(\partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z})_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + u_* \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{z}) = 0, \quad t > 0. \tag{37}$$

В нём участвуют скалярное произведение в пространстве Лебега вектор-функций $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ и формы

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) := \langle(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, \rho_\alpha)\rangle + (\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}, \mathbf{u}) + (a \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\theta}, \theta),$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) := \bar{\mu}_0(\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u}) + \bar{\chi}_0(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div}\mathbf{u}) + \bar{\varkappa}_0(\nabla\widetilde{\theta}, \nabla\theta) + \tau_0[(\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle) +$$

$$+ ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}}, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle) + (a\nabla\widetilde{\theta}, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle) + (\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}) + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}) +$$

$$+ (a\nabla\widetilde{\theta}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}) + (\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle, a\nabla\theta) + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\widetilde{\mathbf{u}}, a\nabla\theta) + (a\nabla\widetilde{\theta}, a\nabla\theta)].$$

Здесь для краткости $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$ – пространстве Лебега скалярных функций (тензоры $\nabla\widetilde{\mathbf{u}}$ и $\nabla\mathbf{u}$ рассматриваем как векторы длины n^2). Эти формулы годятся для пространств как вещественных, так и комплекснозначных функций $\widetilde{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z}$; в первом случае обе формы являются билинейными, а во втором – полуторалинейными.

Ниже ограничимся вещественным случаем, в отличие от [8, 9]. Тогда с помощью интегрирования по частям приходим к равенству

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = (\widehat{\mathbf{u}}_0, \langle(\nabla\widetilde{\rho}_\alpha)\rho_\alpha\rangle + (\nabla\widetilde{\mathbf{u}})\mathbf{u} + (\nabla\widetilde{\theta})\theta) -$$

$$- (\widetilde{\mathbf{u}}, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle) + (\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle, \mathbf{u}) - a(\widetilde{\theta}, \operatorname{div}\mathbf{u}) + a(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}, \theta),$$

и, поскольку $(\nabla w)w = 0.5\nabla(w^2)$, $(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} = 0.5\nabla(|\mathbf{u}|^2)$ и $\widehat{\mathbf{u}}_0 = \mathrm{const}$, получаем

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0, \quad \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{z}, \widetilde{\mathbf{z}}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{z}, \widetilde{\mathbf{z}} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n), \tag{38}$$

где $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева вектор-функций $\mathbf{z} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$, имеющих обобщённые по Соболеву производные $\partial_i\mathbf{z} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,n}$. Далее, для любой вектор-функции $\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ непосредственно выводим

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2 + \tau_0[\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\|^2 + \|(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}\|^2 + \|a\nabla\theta\|^2 +$$

$$+ 2((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle) + 2(a\nabla\theta, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle) + 2(a\nabla\theta, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})] =$$

$$= \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2 + \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + a\nabla\theta\|^2 \geqslant 0. \tag{39}$$

Здесь для краткости $\|\cdot\|$ – норма в $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, билинейная форма $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$ – симметричная и неотрицательно определённая. Однако в отличие от однокомпонентного случая она не является положительно определённой, поскольку $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\|^2$ при $\mathbf{u} = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, а тождество $\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle \equiv 0$ означает только то, что $\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\rho_\alpha\rangle \equiv \mathrm{const}$. (Для $\mathbf{z} \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$ все три const равны нулю.) Это обстоятельство является прямым следствием использования общей регуляризующей скорости $\widehat{\mathbf{w}}$ (точнее, суммарного давления p) в уравнениях (1).

Пусть $\boldsymbol{V}(S_T)$ – гильбертово пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n))$, имеющих обобщённую производную $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}^n))$, где $S_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$ – слой и $\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) = (\boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n))^*$ (см. используемые здесь понятия, например, в [20]). Введём *слабое* *решение* $\widetilde{\mathbf{z}} \in \boldsymbol{V}(S_T)$ задачи Коши для системы уравнений (29)–(31), удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t),\mathbf{z}\rangle_{\mathbb{R}^n}\,dt + u_*\mathcal{B}_{S_T}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) + u_*^2\mathcal{A}_{S_T}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = 0 \quad \text{для любой} \quad \mathbf{z}\in \boldsymbol{L}^2((0,T);\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \qquad (40)$$

при всех $T>0$ и начальному условию $\widetilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)} \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{\mathbb{R}^n}$ – отношение двойственности на $\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)\times\boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}^n)$, а в используемых билинейных формах скалярные произведения берутся по S_T вместо $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Для решения* $\widetilde{\mathbf{z}} \in \boldsymbol{V}(S_T)$ $(T>0$ *– любое) линеаризованной системы уравнений (29)–(31) при всех* $t\geqslant 0$ *верно энергетическое равенство*

$$0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S_t)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(S_t)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S_t)} +$$
$$+ \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S_t)}] = 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (41)$$

Как следствие, функция $\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ *не возрастает при* $t\geqslant 0$ *(это свойство* $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$*-диссипативности), введённое решение единственно и верна энергетическая оценка*

$$\max\{\sup_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)},\ \sqrt{2}u_*[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(S)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S)} +$$
$$+ \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(S)}]^{1/2}\} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad (42)$$

где $S := \mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$.

Доказательство. Положив $\mathbf{z}=\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)$ в тождестве (40) и применив затем первое свойство в (38) и формулу в (39), приходим к указанному энергетическому равенству (с t вместо T). При этом свойство $\widetilde{\mathbf{z}}\in C([0,T];\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n))$ и формула

$$\int\limits_0^T \langle\partial_t\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t),\mathbf{z}\rangle_{\mathbb{R}^n}\,dt = 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,T)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} - 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $T>0$ вытекают из [20, гл. IV, теорема 1.17 и замечание 1.22]. Свойство $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)$-диссипативности очевидно (поскольку в (41) нормы по S_t не убывают по $t\geqslant 0$), а энергетическая оценка легко получается стандартным образом. Единственность решения следует из (41) или (42). Теорема доказана.

В силу энергетических равенства (41) и оценки (42) справедливо

Следствие. *Существует производная* $\partial_t(\|\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)})\in L^1(0,+\infty)$ *и верна другая форма энергетического равенства*

$$0.5\partial_t(\|\widetilde{\mathbf{z}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}) + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n)}] = 0$$

при почти всех $t>0$.

Равенство из формулировки следствия формально получается подстановкой в тождество (37) $\mathbf{z}=\widetilde{\mathbf{z}}(\,\cdot\,,t)$.

Замечание. Так как коэффициенты системы уравнений (29)–(31) постоянны, то производные $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}} = (\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\partial_t\widetilde{\mathbf{u}},\partial_t\widetilde{\theta})$ и $\partial_i\widetilde{\mathbf{z}} = (\partial_i\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\partial_i\widetilde{\mathbf{u}},\partial_i\widetilde{\theta})$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют той же системе уравнений. Поэтому априорная оценка (42) сохраняет силу при замене $\widetilde{\mathbf{z}}$ на $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}}$ и $\partial_i\widetilde{\mathbf{z}}$ (на самом деле, и на производную $\widetilde{\mathbf{z}}$ любого порядка по t, $x_1,\ \ldots,\ x_n$). Такие следствия из априорной оценки позволяют доказать существование введённого выше обобщённого решения системы при надлежащих условиях регулярности $\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}$. Его существование также следует из указанной выше связи данной системы уравнений с системой (34)–(36), анализ которой более стандартен (см. ниже). Здесь подробнее на этом останавливаться не будем.

5. $\boldsymbol{L}^2$-диссипативность упрощённой линеаризованной КГидД системы уравнений. Выполним анализ начально-краевой задачи для упрощённой системы уравнений (34)–(36). Для этого введём вектор-функции $\tilde{\mathbf{y}} := (\tilde{r}, \widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\theta})$ и $\mathbf{y} := (r, \mathbf{u}, \theta)$ и формы, аналогичные определённым выше:

$$\tilde{\mathcal{B}}_\Omega(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) := (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\tilde{r} + \widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, r)_\Omega + (\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, \mathbf{u})_\Omega + (\bar{a}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\widetilde{\theta}, \theta)_\Omega,$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) := \bar{\mu}_0(\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u})_\Omega + \bar{\chi}_0(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div}\mathbf{u})_\Omega + \bar{\varkappa}_0(\nabla\widetilde{\theta}, \nabla\theta)_\Omega + \tau_0[(\nabla\tilde{r}, \nabla r)_\Omega + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla r)_\Omega +$$
$$+ (\bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, \nabla r)_\Omega + (\nabla\tilde{r}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega + (\bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega +$$
$$+ (\nabla\tilde{r}, \bar{a}\nabla\theta)_\Omega + ((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \bar{a}\nabla\theta)_\Omega + (\bar{a}\nabla\widetilde{\theta}, \bar{a}\nabla\theta)_\Omega].$$

Здесь для краткости $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\Omega$ – скалярное произведение в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ или $L^2(\Omega)$, а Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Как и выше, эти формулы годятся для пространств как вещественных, так и комплекснозначных функций $\widetilde{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y}$; в первом случае обе формы являются билинейными, а во втором – полуторалинейными.

Ниже ограничимся вещественным случаем. Тогда снова имеем

$$\tilde{\mathcal{B}}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0, \quad \tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = \tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \tag{43}$$

где $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева вектор-функций $\mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ с $\partial_i\mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $i = \overline{1,n}$, и таких, что $\mathbf{y}|_{\partial\Omega} = 0$ (напомним, что для общей области Ω на самом деле это пространство строится как замыкание в норме $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ пространства бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций). Далее, для любой $\mathbf{y} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ непосредственно получаем

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|_\Omega^2 + \tau_0[\|\nabla r\|_\Omega^2 + \|(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \|\bar{a}\nabla\theta\|_\Omega^2 +$$
$$+ 2((\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \nabla r)_\Omega + 2(\bar{a}\nabla\theta, \nabla r)_\Omega + 2(\bar{a}\nabla\theta, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u})_\Omega] =$$
$$= \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|_\Omega^2 + \tau_0\|\nabla r + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \bar{a}\nabla\theta\|_\Omega^2 \geqslant 0, \tag{44}$$

где для краткости $\|\cdot\|_\Omega$ – норма в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ или в $L^2(\Omega)$. Так как справедливо неравенство

$$\|\nabla r\|_\Omega \leqslant |\widehat{\mathbf{u}}_0|\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega + \bar{a}\|\nabla\theta\|_\Omega + \|\nabla r + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u} + \bar{a}\nabla\theta\|_\Omega,$$

то билинейная форма $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ является уже не только симметричной, но и положительно определённой для $\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Пусть $\boldsymbol{V}(Q_T)$ – пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{y}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$, имеющих обобщённую производную $\partial_t\widetilde{\mathbf{y}} \in L^2((0,T); \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, где $Q_T = \Omega \times (0,T)$ – цилиндр и $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) = (\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))^*$. Введём *слабое решение* $\widetilde{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{V}(Q_T)$ начально-краевой задачи для системы уравнений (34)–(36) при краевом условии $\widetilde{\mathbf{y}}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \langle\partial_t\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t), \mathbf{y}\rangle_\Omega\,dt + u_*\tilde{\mathcal{B}}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) + u_*^2\tilde{\mathcal{A}}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{для любой} \quad \mathbf{y} \in \boldsymbol{L}^2((0,T); \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \tag{45}$$

при всех $T > 0$ и начальному условию $\widetilde{\mathbf{y}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{y}}^{(0)} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_\Omega$ – отношение двойственности на $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) \times \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, а в используемых билинейных формах скалярные произведения берутся по Q_T вместо Ω.

Следующая теорема аналогична теореме 2 (вместе с её доказательством на основе определения (45) и свойств (43), (44), включая свойство $\mathbf{y} \in C([0,T]; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$ при всех $T > 0$).

Теорема 3. *Введённое слабое решение $\widetilde{\mathbf{y}} \in \boldsymbol{V}(Q_T)$ ($T > 0$ – любое) линеаризованной системы уравнений (34)–(36) существует и единственно, и для него при всех $t \geqslant 0$ верно энергетическое равенство*

$$0.5\|\widetilde{\mathbf{y}}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^2 + u_*^2[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\boldsymbol{L}^2(Q_t)}^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(Q_t)}^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|_{\boldsymbol{L}^2(Q_t)}^2 +$$

$$+\,\tau_0\|\nabla\tilde r+(\widehat{\mathbf u}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf u}+a\nabla\widetilde\theta\|^2_{\boldsymbol L^2(Q_t)}]=0.5\|\widetilde{\mathbf y}^{(0)}\|^2_{\boldsymbol L^2(\Omega)}.$$

Как следствие, функция $\|\widetilde{\mathbf y}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol L^2(\Omega)}$ *не возрастает при* $t\geqslant 0$ *(свойство* $\boldsymbol L^2(\Omega)$*-диссипативности), и верна энергетическая оценка*

$$\max\Big\{\sup_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf y}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol L^2(\Omega)},\sqrt2u_*[\bar\mu_0\|\nabla\widetilde{\mathbf u}\|^2_{\boldsymbol L^2(Q)}+\bar\chi_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf u}\|^2_{L^2(Q)}+\bar\varkappa_0\|\nabla\widetilde\theta\|^2_{\boldsymbol L^2(Q)}+$$

$$+\,\tau_0\|\nabla\tilde r+(\widehat{\mathbf u}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf u}+a\nabla\widetilde\theta\|^2_{\boldsymbol L^2(Q)}]^{1/2}\Big\}\leqslant\|\widetilde{\mathbf y}^{(0)}\|_{\boldsymbol L^2(\Omega)},$$

где $Q:=\Omega\times(0,+\infty)$.

Справедлив также аналог следствия 1: верны свойство $\partial_t(\|\widetilde{\mathbf y}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\boldsymbol L^2(\Omega)})\in L^1(0,+\infty)$ и другая форма энергетического равенства

$$0.5\partial_t(\|\widetilde{\mathbf y}\|^2_{\boldsymbol L^2(\Omega)})+u_*^2[\bar\mu_0\|\nabla\widetilde{\mathbf u}\|^2_{\boldsymbol L^2(\Omega)}+\bar\chi_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf u}\|^2_{L^2(\Omega)}+\bar\varkappa_0\|\nabla\widetilde\theta\|^2_{\boldsymbol L^2(\Omega)}+$$

$$+\,\tau_0\|\nabla\tilde r+(\widehat{\mathbf u}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf u}+a\nabla\widetilde\theta\|^2_{\boldsymbol L^2(Q_t)}]=0$$

при почти всех $t>0$. Из этого равенства вытекает, что $\|\widetilde{\mathbf y}(\,\cdot\,,t)\|_{\boldsymbol L^2(\Omega)}$ экспоненциально быстро убывает по $t\geqslant 0$.

Отметим, что введённое слабое решение не только единственно, но и существует в соответствии с [20, гл. VI, теорема 1.1 и § 1.3]. Его регулярность можно изучить стандартными методами теории параболических уравнений [21]. Кроме того, последняя теорема переносится с начально-краевой задачи на задачу Коши.

6. Анализ параболичности исходной КГидД системы уравнений гомогенной газовой смеси. Анализ параболичности по Петровскому КГД и КГидД систем уравнений в однокомпонентном случае выполнен в работах [8–10]. Чтобы выполнить его для системы (1)–(3), в редуцированной системе (20)–(22) необходимо отбросить конвективные слагаемые в левых частях и остаточные члены $O(|\nabla\mathbf z|^2)$ в правых частях уравнений. В такой упрощённой однородной системе уравнений, содержащей только производные ∂_t и $\partial_i\partial_j$, следует “заморозить” зависящие от решения $\mathbf z$ коэффициенты перед $\partial_i\partial_j$ и выполнить преобразование Фурье по x:

$$\mathcal F\mathbf z(\zeta,t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb R^n}\mathbf z(x,t)e^{-\mathrm i x\cdot\zeta}\,dx,\quad \zeta\in\mathbb R^n,$$

где $\mathrm i$ – мнимая единица. “Замороженные” коэффициенты будем брать в некоторой точке $\mathbf z_0=(\rho_{10},\ldots,\rho_{K0},\mathbf u_0,\theta_0)$, уже использовавшейся выше в качестве фонового решения. Сказанное приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t\mathcal F\mathbf z(\zeta,t)+u_*^2|\zeta|^2A_0(\xi)\mathcal F\mathbf z(\zeta,t)=0,\quad t>0,\tag{46}$$

с параметром $\zeta\in\mathbb R^n\backslash\{\mathbf 0\}$ и вещественной матрицей $A_0(\xi)$ порядка $K+n+1$ с $\xi=\zeta/|\zeta|$.

Свойство параболичности определяется в терминах собственных значений $\lambda[A_0(\xi)]$ введённой матрицы. Как и в [8–10], под *неравномерной параболичностью* в некоторой подобласти $\mathcal D\subset(0,+\infty)^K\times\mathbb R^n\times(0,+\infty)$ области значений решения удобно понимать свойство

$$\inf_{|\xi|=1}u_*^2\mathrm{Re}\,\lambda[A_0(\xi)]>0\quad\text{для всех}\quad \mathbf z_0\in\mathcal D,\tag{47}$$

где $\mathrm{Re}\,\lambda$ – вещественная часть λ.

Выполним замену $\mathbf z=D\widetilde{\mathbf z}$ с диагональной матрицей $D:=\mathrm{diag}\,\{\rho_{1*},\ldots,\rho_{K*},u_*,\ldots,u_*,\theta_*\}$ порядка $K+n+1$ с элементами, удовлетворяющими условиям (27). Тогда $\mathcal F\mathbf z=D\mathcal F\widetilde{\mathbf z}$ и после умножения системы (46) слева на D^{-1} приходим к эквивалентной системе

$$\partial_t\mathcal F\widetilde{\mathbf z}(\zeta,t)+u_*^2|\zeta|^2\hat A_0(\xi)\mathcal F\widetilde{\mathbf z}(\zeta,t)=0,\quad t>0,$$

с матрицей $\hat A_0(\xi)=D^{-1}A_0(\xi)D$, подобной матрице $A_0(\xi)$.

Нетрудно видеть, что матрица $-u_*^2\hat{A}_0(\xi)$ непосредственно возникает в результате применения преобразования Фурье не к редуцированной системе (20)–(22), как выше, а к правой части симметризованной линеаризованной системы (29)–(31). Поэтому $\hat{A}_0(\xi)=[\hat{A}_0(\xi)]^{\mathrm{т}}$, а собственные значения $\lambda[\hat{A}_0(\xi)]=\lambda[A_0(\xi)]$ вещественны и (с учётом непрерывности $\hat{A}_0(\xi)$ по ξ) условие (47) принимает вид

$$\lambda[\hat{A}_0(\xi)]>0 \text{ для любых единичного } \xi \text{ и } \mathbf{z}_0\in\mathcal{D}. \tag{48}$$

Явный 3×3-блочный вид матрицы $\hat{A}_0(\xi)$ следующий:

$$\hat{A}_0(\xi)=\begin{pmatrix}\tau_0\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\bigotimes\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & \tau_0 s\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\bigotimes\xi & \tau_0 a\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\\ \tau_0 s\xi\bigotimes\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & (\bar{\mu}_0+\tau_0 s^2)I_n+\bar{\chi}_0\xi\xi^{\mathrm{т}} & \tau_0 as\xi\\ \tau_0 a\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0^T & \tau_0 as\xi^{\mathrm{т}} & \bar{\varkappa}_0+\tau_0 a^2\end{pmatrix},$$

где $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0:=(\widehat{\rho}_1,\ldots,\widehat{\rho}_K)^{\mathrm{т}}$, $s=s(\xi):=\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\xi$, вектор ξ считаем столбцом, I_n – единичная матрица порядка n. Очевидно, что у блока $\tau_0\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\bigotimes\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0$, имеющего порядок K, ранг равен 1. При этом квадратичная форма с матрицей $\hat{A}_0(\xi)$ имеет вид

$$\hat{A}_0(\xi)\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\tau_0(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})^2+2\tau_0 s(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})(\xi\cdot\mathbf{v})+2\tau_0 a(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})q+$$

$$+(\bar{\mu}_0+\tau_0 s^2)|\mathbf{v}|^2+\bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2+2\tau_0 as(\xi\cdot\mathbf{v})q+(\bar{\varkappa}_0+\tau_0 a^2)q^2=$$

$$=\bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2+\bar{\chi}_0(\xi\cdot\mathbf{v})^2+\bar{\varkappa}_0 q^2+\tau_0[s^2(|\mathbf{v}|^2-(\xi\cdot\mathbf{v})^2)+(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r}+s\xi\cdot\mathbf{v}+aq)^2]\geqslant 0 \tag{49}$$

для любого блочного вектора-столбца $\mathbf{b}:=(\mathbf{r},\mathbf{v},q)^{\mathrm{т}}$ с $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^K$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, $q\in\mathbb{R}$. Отметим, что выражение в квадратных скобках можно также записать в виде $|(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r})\xi+s\mathbf{v}+aq\xi|^2$.

Формула (49), особенно с указанной альтернативной записью выражения в квадратных скобках, является прямым матричным аналогом для (39). Из неё следует, что вместо неравенства (48) выполнено только более слабое свойство $\lambda[\hat{A}_0(\xi)]\geqslant 0$ для любых единичного ξ и $\mathbf{z}_0\in\mathcal{D}$, причём собственное значение $\lambda[\hat{A}_0(\xi)]=0$ имеет кратность $K-1$, поскольку равенство $\hat{A}_0(\xi)\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=0$ означает, что $\mathbf{v}=0$, $q=0$, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0\cdot\mathbf{r}=0$. Таким образом, происходит вырождение размерности $K-1$ свойства неравномерной параболичности в $\mathcal{D}$. Поэтому для исходной КГидД системы нельзя дать столь элементарное доказательство локальной классической корректности задачи Коши как в [8].

Уравнение баланса массы компонент (1) при $\mathbf{d}_\alpha=0$ после приведения к недивергентному виду и деления на ρ_α запишем в виде

$$\partial_t\ln\rho_\alpha+\nabla\ln\rho_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})+\operatorname{div}(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})=0. \tag{50}$$

Как следствие, при всех $\alpha,\beta=\overline{1,K}$ имеем

$$\partial_t\ln\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}+\nabla\ln\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})=0. \tag{51}$$

Это дифференциальные уравнения первого порядка (они вытекают также из (13)). Все K уравнений (1) можно эквивалентным образом заменить на одно из них (или одно из уравнений (50)) с фиксированным $\alpha=\beta$ и $K-1$ уравнений (51) с остальными $\alpha\neq\beta$. Отсюда очевидно, что КГидД система уравнений (1)–(3) (при $\mathbf{d}_\alpha=0$) является системой уравнений составного типа. Это существенно для корректной постановки краевых условий для плотностей компонент (или их концентраций) в начально-краевых задачах, а также для выбора способа дискретизации уравнений баланса плотности компонент смеси (или их концентраций).

Таким образом, КГидД система уравнений (1)–(3) гомогенной смеси в отсутствие потоков диффузии имеет составной тип, как и система уравнений Навье–Стокса сжимаемого однокомпонентного газа. В противоположность этому система уравнений Эйлера однокомпонентной газовой динамики имеет гиперболический тип, а КГидД система уравнений однокомпонентного газа – параболический по Петровскому тип. Вместе с тем для всех этих систем разных типов, включая КГидД систему (1)–(3) при наличии потоков диффузии, справедливы уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00262).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика М., 1986.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М., 1987.
3. *Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Динамика ионизированного излучающего газа. М., 1989.
4. *Giovangigli V.* Multicomponent Flow Modeling. Boston, 1999.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М., 2004.
6. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчёта вязких течений. М., 2007.
7. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.; Ижевск, 2009.
8. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
9. *Злотник А.А.* О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Мат. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.
10. *Злотник А.А.* Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Докл. РАН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605–609.
11. *Злотник А.А.* Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // Докл. РАН. 2010. Т. 433. № 6. С. 599–603.
12. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О квазигазо- и гидродинамических уравнениях бинарных смесей газов // Докл. РАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
13. *Балашов В.А., Савенков Е.В.* Многокомпонентная квазигидродинамическая модель для описания течений многофазной жидкости с учетом межфазного взаимодействия // Прикл. механика и техн. физика. 2018. Т. 59. № 3. С. 57–68.
14. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В.* Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений гомогенных бинарных смесей вязких сжимаемых газов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
15. *Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E.* Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358.
16. *Balashov V., Zlotnik A.* An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // J. Comput. Dynamics. 2020. V. 7. № 2. P. 291–312.
17. *Balashov V., Zlotnik A.* On a new spatial discretization for a regularized 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard system of equations with boundary conditions // J. Sci. Comput. 2021. V. 86. Art. 33.
18. *Елизарова Т.Г., Шильников Е.В.* Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 1. С. 124–135.
19. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 1. Теория равновесных систем. М., 2002.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
21. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.
После доработки 24.03.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 361–370

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226

ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫЕ И ε-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ

© 2022 г. В. И. Качалов

Для нелинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве, двояким образом зависящих от малого параметра – регулярно и сингулярно, построены ε-псевдорегулярные решения задачи Коши, т.е. формальные её решения, представимые в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, которые сингулярным образом от него зависят, и сходящиеся в некоторой окрестности нулевого значения параметра равномерно на заданном временно́м интервале. Получены достаточные условия, при выполнении которых сумма такого ряда является точным, а значит, псевдоголоморфным решением этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122030062, **EDN:** BXZAME

Светлой памяти моего учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
с признательностью и благодарностью
посвящаю эту работу

Введение. Формализм большинства методов решения сингулярно возмущённых задач заключается в построении решений таких задач в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, сингулярно от него зависящими. Как правило, такие ряды сходятся асимптотически к точному решению сингулярно возмущённой задачи [1–3].

Ряды, построенные по методу регуляризации Ломова, при определённых условиях на данные задачи могут сходиться к точному решению в обычном смысле, а само решение в этом случае называется *псевдоаналитическим* (*псевдоголоморфным*) [4, гл. I, § 4; 5].

Однако если уравнение является нелинейным и содержит неограниченные операторы, то помимо доказательства обычной сходимости формального (т.е. построенного в соответствии с методом малого параметра) решения нужно ещё обосновывать, что сумма такого ряда является точным решением. Задача такого обоснования исследуется в данной работе.

Отметим, что хотя метод малого параметра используется в математической физике достаточно давно [6, гл. XII, § 1–3; 7, гл. VII, § 1], систематического изучения характера сходимости построенных рядов практически не проводилось.

Рассмотрим в банаховом пространстве E эволюционную задачу

$$\varepsilon\partial_t u = F(u,\varepsilon), \quad t\in(0,T],$$

$$u|_{t=0} = u^0, \tag{1}$$

где $T>0$ – заданное число, а F – нелинейный неограниченный оператор, голоморфным образом зависящий от малого параметра ε, причём разложение оператора F в ряд по степеням ε имеет радиус сходимости, не зависящий от $u\in D_F$. Здесь D_F – область определения этого оператора.

Также будем предполагать, что выполняется следующее свойство: каждому степенному ряду $v_0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^n v_n+\ldots$ с коэффициентами из D_F соответствует такой степенной ряд $f_0+\varepsilon f_1+\ldots+\varepsilon^n f_n+\ldots$ с коэффициентами из D_F, что для любого целого неотрицательного n существует голоморфная в точке $\varepsilon=0$ функция $g_n(\varepsilon)$, при которой справедливо равенство

$$F(v_0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^n v_n,\varepsilon) = f_0+\varepsilon f_1+\ldots+\varepsilon^n f_n+\varepsilon^{n+1}g_n(\varepsilon).$$

Нетрудно показать, что любой оператор, представимый в виде суммы конечного числа линейных и полилинейных операторов, обладает указанным свойством.

Применим к задаче (1) метод малого параметра, т.е. будем искать её решение в виде формального ряда по степеням ε с коэффициентами, сингулярным образом зависящими от ε (как это будет следовать из дальнейшего):

$$u^{\mathrm{f}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)=u_0(t,1/\varepsilon)+\varepsilon u_1(t,1/\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^n u_n(t,1/\varepsilon)+\ldots \tag{2}$$

Если подставить ряд (2) в уравнение (1) и воспользоваться указанным выше свойством оператора F, то получится следующая серия начальных сингулярно возмущённых задач:

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u_0=f_0,\quad u_0|_{t=0}=u^0,\\ \varepsilon\partial_t u_1=f_1,\quad u_1|_{t=0}=0,\\ \ldots\\ \varepsilon\partial_t u_n=f_n,\quad u_n|_{t=0}=0,\\ \ldots\end{gathered} \tag{3}$$

решив которую, построим $u^{\mathrm{f}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$.

Замечание. Сингулярная зависимость коэффициентов ряда (2) от ε обусловлена тем, что задачи серии (3) являются сингулярно возмущёнными.

Определение. Если ряд (2) с коэффициентами, являющимися решениями серии задач (3), сходится в некоторой окрестности значения $\varepsilon=0$ равномерно на отрезке $[0,T]$, то его сумма $u^{\mathrm{pr}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ называется *ε-псевдорегулярным решением* задачи (1).

Далее в работе будет доказано существование ε-псевдорегулярных решений для некоторых классов сингулярно возмущённых задач и установлены условия совпадения таких решений с точными. Согласно [4, 8–11] точные решения, представимые в виде сходящихся в обычном смысле рядов вида (2), называются *псевдоголоморфными*.

Будем изучать при малых положительных ε сингулярно возмущённую задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u=Au+\varepsilon^2 B(u,Hu),\quad t\in(0,T],\\ u|_{t=0}=u^0,\end{gathered} \tag{4}$$

где A – замкнутый линейный неограниченный оператор с плотной в банаховом пространстве E областью определения D_A; $B(u,v)$ – ограниченный билинейный оператор, действующий из $E\times E$ в E; линейный оператор H может быть как ограниченным, так и неограниченным. Относительно оператора A будем предполагать выполненным следующее

Условие (А). Оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы [12, гл. I, § 1; 13, гл. VII, § 31].

Эту полугруппу обозначим через $\mathcal{U}_A(t)$.

1. Случай ограниченного оператора *H*. Пусть оператор H принадлежит векторному пространству линейных $\mathcal{L}(E)$ непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве E. Формальное решение $u^{\mathrm{f}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ задачи Коши (4) будем искать в виде ряда (2) с коэффициентами, определяемыми из серии начальных сингулярно возмущённых задач:

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u_0=Au_0,\quad u_0|_{t=0}=u^0,\\ \varepsilon\partial_t u_1=Au_1+\varepsilon B(u_0,Hu_0),\quad u_1|_{t=0}=0,\\ \ldots\\ \varepsilon\partial_t u_n=Au_n+\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}B(u_k,Hu_{n-k-1}),\quad u_n|_{t=0}=0,\\ \ldots\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь мы воспользовались билинейностью оператора B и правилом Коши произведения рядов:

$$B(u, Hu) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^{n} B(u_k, Hu_{n-k}).$$

В соответствии с условием (A) и формулой решения линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве [12, гл. I, § 6; 13, гл. VII, § 31] найдём решения задач серии (5):

$$u_0(t, 1/\varepsilon) = \mathcal{U}_A(t/\varepsilon)u^0,$$

$$u_1(t, 1/\varepsilon) = \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr) B(u_0(\tau, 1/\varepsilon), Hu_0(\tau, 1/\varepsilon))\, d\tau,$$

$$\ldots$$

$$u_n(t, 1/\varepsilon) = \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr) \biggl[\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k(\tau, 1/\varepsilon), Hu_{n-k-1}(\tau, 1/\varepsilon))\biggr]\, d\tau,$$

$$\ldots \tag{6}$$

Пусть $\|B(u,v)\| \leqslant b\|u\|\|v\|$ при некотором $b > 0$ и $\|H\| = h.$ Методом математической индукции докажем неравенство

$$\|u_n(t, 1/\varepsilon)\| \leqslant t^n b^n h^n \|u^0\|^{n+1}. \tag{7}$$

Как следует из второго равенства серии (6), неравенство (7) верно при $n = 1,$ поскольку полугруппа $\mathcal{U}_A(t)$ – сжимающая. Предположим его справедливость при всех $n = \overline{1,m}$ и выведем отсюда его истинность при $n = m+1.$ С учётом того, что $\|\mathcal{U}_A(t)\| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0,$ имеем

$$\|u_{m+1}(t, 1/\varepsilon)\| \leqslant \int\limits_0^t bh \sum_{k=0}^{m} (\tau^k b^k h^k \|u^0\|^{k+1} \tau^{m-k} b^{m-k} h^{m-k} \|u^0\|^{m-k+1})\, d\tau =$$

$$= b^{m+1} h^{m+1} \|u^0\|^{m+2} \int\limits_0^t (m+1)\tau^m\, d\tau = b^{m+1} h^{m+1} t^{m+1} \|u^0\|^{m+2},$$

что и требовалось доказать.

Из оценки (7) следует равномерная на отрезке $[0, T]$ сходимость ряда

$$u_0(t, 1/\varepsilon) + \varepsilon u_1(t, 1/\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t, 1/\varepsilon) + \ldots \tag{8}$$

при всех $0 < \varepsilon < (Tbh\|u^0\|)^{-1}.$ Обозначим его сумму через $u^{\mathrm{pr}}(t, 1/\varepsilon, \varepsilon).$ Таким образом, справедлива

Теорема 1. *При выполнении условия (A) и ограниченности операторов B и H задача Коши (4) имеет ε-псевдорегулярное решение.*

2. Точные решения эволюционных задач с ограниченным билинейным оператором. Как обычно, под *точным* решением задачи Коши (4) понимаем функцию $u(t, 1/\varepsilon, \varepsilon),$ принадлежащую классу $D_A \bigcap D_H$ при всех $t \in (0, T]$ и любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ($\varepsilon_0 > 0$ – некоторое фиксированное число), обращающую уравнение (4) в тождество по $t \in (0, T]$ и удовлетворяющую начальному условию $u(0, 1/\varepsilon, \varepsilon) = u^0.$ Производная $\partial_t u$ понимается в сильном смысле.

Как и выше, рассмотрим случай ограниченного оператора H (в частности, $D_H = E$).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 задача Коши (4) имеет при каждом достаточно малом положительном ε единственное точное решение.*

Доказательство. Так как A – инфинитезимальный генератор сжимающей полугруппы $\mathcal{U}_A(t)$, то при положительных ε задача (4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) = \mathcal{U}_A(t/\varepsilon)u^0 + \varepsilon \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big) B(u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon), Hu(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon))\, d\tau. \tag{9}$$

Из предыдущего следует, что $\mathcal{U}_A(t/\varepsilon)u^0 = u_0(t,1/\varepsilon)$. Через C_E обозначим банахово пространство $C([0,T];E)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в E и с нормой равномерной сходимости.

Пусть $S^1_\varepsilon = \{v(t) \in C_E : \|v(t) - u_0(t,1/\varepsilon)\|_{C_E} \leqslant 1\}$ – замкнутый единичный шар в C_E с центром в $u_0(t,1/\varepsilon)$, при этом $\varepsilon > 0$ мало и фиксировано (насколько мало, будет в дальнейшем указано). Рассмотрим оператор

$$\Phi[w(t)] = u_0(t,1/\varepsilon) + \varepsilon \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big) B(w(\tau), Hw(\tau))\, d\tau,$$

действующий в C_E. При достаточно малых ε он отображает шар S^1_ε в себя ввиду ограниченности операторов B и H.

Докажем, что при малых ε оператор Φ является сжатием (именно такие ε мы и будем иметь в виду далее). При $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|\Phi[w_1(t)] - \Phi[w_2(t)]\| = \varepsilon \bigg\| \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)[B(w_1(\tau), Hw_1(\tau)) - B(w_2(\tau), Hw_2(\tau))]\, d\tau \bigg\| =$$

$$= \varepsilon \bigg\| \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)[B(w_1(\tau), Hw_1(\tau)) - B(w_1(\tau), Hw_2(\tau)) +$$

$$+ B(w_1(\tau), Hw_2(\tau)) - B(w_2(\tau), Hw_2(\tau))]\, d\tau \bigg\| =$$

$$= \varepsilon \bigg\| \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big) B(w_1(\tau), H(w_1(\tau) - w_2(\tau)))\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big) B(w_1(\tau) - w_2(\tau), Hw_2(\tau))\, d\tau \bigg\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_0^t \bigg\|\mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\bigg\| \|B(w_1(\tau), H(w_1(\tau) - w_2(\tau)))\|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \bigg\|\mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\bigg\| \|B(w_1(\tau) - w_2(\tau), Hw_2(\tau))\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon T b h (\|w_1\|_{C_E} + \|w_2\|_{C_E}) \|w_2 - w_1\|_{C_E}.$$

Здесь учтено то, что $\mathcal{U}_A$ – сжимающая полугруппа.

Если $w_1, w_2 \in S^1_\varepsilon$, то $\|w_i\|_{C_E} \leqslant 1 + \|u_0\|_{C_E}$, $i = 1, 2$, и поэтому при

$$0 < \varepsilon < (2Tbh(1 + \|u_0\|_{C_E}))^{-1} \tag{10}$$

оператор Φ является сжатием, отображающим шар S^1_ε в себя. В соответствии с принципом сжимающих отображений [13, гл. VIII, § 33] в шаре S^1_ε существует и единственно решение интегрального уравнения (9), что ввиду его эквивалентности задаче (4) доказывает существование и единственность точного решения $u(t, 1/\varepsilon, \varepsilon)$ у этой начальной задачи. Теорема доказана.

Перейдём к изложению основного результата данного пункта работы.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 ε-псевдорегулярное решение задачи Коши (4) является её точным решением.*

Доказательство. Введём обозначение для частичной суммы ряда (8), представляющего ε-псевдорегулярное решение $u(t, 1/\varepsilon, \varepsilon)$ задачи (4):

$$u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(t, 1/\varepsilon) = u_0(t, 1/\varepsilon) + \varepsilon u_1(t, 1/\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t, 1/\varepsilon). \tag{11}$$

Также обозначим $\|u_0\|_{C_E} = a$ (см. неравенство (10)). Заметим, что в силу сжимаемости полугруппы $a \leqslant \|u^0\|$. Из свойства билинейности оператора B следует, что функция $u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(t, 1/\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial_t u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon} = Au^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon} + \varepsilon^2 B(u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}, Hu^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}) - \varepsilon^{n+2}\sum_{m=0}^{n} B(u_m, Hu_{n-m}) - \\ - \varepsilon^{n+3}\sum_{m=1}^{n} B(u_m, Hu_{n-m+1}) - \varepsilon^{n+4}\sum_{m=2}^{n} B(u_m, Hu_{n-m+2}) - \ldots \\ \ldots - \varepsilon^{2n+1}[B(u_n, Hu_{n-1}) + B(u_{n-1}, Hu_n)] - \varepsilon^{2n+2} B(u_n, Hu_n),\end{gathered} \tag{12}$$

в котором коэффициенты псевдомногочлена (11) по степеням ε записаны без аргументов.

Вычтя уравнение (12) из уравнения (4), получим

$$\begin{gathered}\partial_t(u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}) = A(u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}) + \varepsilon^2[B(u, Hu) - B(u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}, Hu^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon})] + \varepsilon^{n+2}\sum_{m=0}^{n} B(u_m, Hu_{n-m}) + \\ + \varepsilon^{n+3}\sum_{m=1}^{n} B(u_m, Hu_{n-m+1}) + \varepsilon^{n+4}\sum_{m=2}^{n} B(u_m, Hu_{n-m+2}) + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^{2n+1}[B(u_n, Hu_{n-1}) + B(u_{n-1}, Hu_n)] + \varepsilon^{2n+2} B(u_n, Hu_n).\end{gathered} \tag{13}$$

Поставим к уравнению (13) начальное условие

$$(u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon})|_{t=0} = 0.$$

Здесь $u = u(t, 1/\varepsilon, \varepsilon)$ – точное решение поставленной задачи (которое по теореме 2 существует и единственно).

Уравнение (13) эквивалентно интегральному уравнению

$$\begin{gathered}u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon} = \varepsilon\int_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)[B(u, H(u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon})) + B(u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}, Hu^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon})]\,d\tau + \\ + \varepsilon^{n+1}\int_0^t \mathcal{U}_A\Big(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)\Big[\sum_{m=0}^{n} B(u_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon\sum_{m=1}^{n} B(u_m, Hu_{n-m+1}) + \\ + \varepsilon^2\sum_{m=2}^{n} B(u_m, Hu_{n-m+2}) + \ldots + \varepsilon^{n-1}(B(u_n, Hu_{n-1}) + B(u_{n-1}, Hu_n)) + \varepsilon^n B(u_n, Hu_n)\Big]\,d\tau,\end{gathered} \tag{14}$$

причём в подынтегральные выражения входят функции переменной τ.

С учётом оценки (7) и сжимаемости полугруппы из уравнения (14) при $\varepsilon > 0$ вытекают неравенства (ниже аргумент τ не пишем):

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon\int\limits_0^t bh(\|u\| + \|u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}\|)\|u - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}\|\,d\tau +$$

$$+\varepsilon^{n+1}T\bigg[\sum_{m=0}^{n}\|B(u_m,Hu_{n-m})\|_{C_E} + \varepsilon\sum_{m=1}^{n}\|B(u_m,Hu_{n-m+1})\|_{C_E} + \varepsilon^2\sum_{m=2}^{n}\|B(u_m,Hu_{n-m+2})\|_{C_E} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{n-1}(\|B(u_n,Hu_{n-1})\|_{C_E} + \|B(u_{n-1},Hu_n)\|_{C_E}) + \varepsilon^n\|B(u_n,Hu_n)\|_{C_E}\bigg] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon^{n+1}Th[(n+1)a^2br^n + \varepsilon na^2br^{n+1} + \varepsilon^2(n-1)a^2br^{n+2} + \ldots + 2\varepsilon^{n-1}a^2br^{2n-1} + \varepsilon^n a^2br^{2n}], \quad (15)$$

где $r = Tbha$.

Если $0 < \varepsilon < (2Tbh(1+a))^{-1}$, то $\rho = \varepsilon r = a/(2(1+a)) < 1/2$, и из неравенства (15) следует, что

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon^{n+1}Tbha^2r^n[n+1+n\rho(1+\rho+\ldots+\rho^{n-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau + \varepsilon Tbha^2\rho^n\left(n+1+\frac{n\rho}{1-\rho}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon bh\int\limits_0^t(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|\,d\tau + \varepsilon Tbha^2\rho^n(2n+1), \quad (16)$$

так как $\rho(1-\rho)^{-1} < 1$ при $0 < \rho < 1/2$.

Пусть $\mathcal{K}(t,\tau,\varepsilon) = \varepsilon bh(\|u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)\| + \|u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)\|)$. Очевидно, что эта функция является ограниченной при $0 \leqslant t,\tau \leqslant T$ ввиду ограниченности при $\varepsilon \to +0$ функций $u(\tau,1/\varepsilon,\varepsilon)$ и $u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(\tau,1/\varepsilon)$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Согласно неравенству Гронуолла–Беллмана из неравенства (16) следует, что

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon\rho^nTbha^2(2n+1)e^{\int_0^t\mathcal{K}(t,\tau,\varepsilon)\,d\tau}, \quad (17)$$

а поскольку $(2n+1)\rho^n \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) - u^{\mathrm{pr}}_{n\varepsilon}(t,1/\varepsilon)\|_{C_E} \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $u(t,1/\varepsilon,\varepsilon) = u^{\mathrm{pr}}(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$. Теорема доказана.

3. Приближённые решения эволюционных уравнений в случае неограниченного оператора $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим задачу Коши (4) в случае, когда H – замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_A$.

Пусть также имеется начальная задача

$$\varepsilon\partial_t v = Av + \varepsilon^2B(v,Gv), \quad t \in (0,T],$$

$$v|_{t=0} = u^0, \quad (18)$$

где $G \in \mathcal{L}(E)$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (A) *и оператор* B *ограничен, а оператор* H *неограничен. Если* $u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)$ *– точное решение задачи Коши (4), ограниченное на отрезке* $[0,T]$ *при* $\varepsilon\to+0$, *то при некоторой константе* C_ε *такой, что* $C_\varepsilon\to 0$ *при* $\varepsilon\to+0$, *справедливо неравенство*

$$\|u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)-v(t,1/\varepsilon,\varepsilon)\|\leqslant C_\varepsilon\|(H-G)u(t,1/\varepsilon,\varepsilon)\|. \tag{19}$$

Доказательство. Представим уравнение (4) в виде

$$\varepsilon\partial_t u=Au+\varepsilon^2B(u,Gu)+\varepsilon^2B(u,(H-G)u)$$

и вычтем из него уравнение (18):

$$\varepsilon\partial_t(u-v)=A(u-v)+\varepsilon^2[B(u-v,Gu)+B(v,G(u-v))]+\varepsilon^2B(u,(H-G)u), \tag{20}$$

причём если u и v – решение задачи Коши (4), то

$$(u-v)|_{t=0}=0.$$

Пользуясь тем, что $\mathcal{U}_A(t)$ – сильно непрерывная полугруппа с генератором A, запишем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (20):

$$u-v=\varepsilon\int\limits_0^t\mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)[B(u-v,Gu)+B(v,G(u-v))]\,d\tau+\varepsilon\int\limits_0^t\mathcal{U}_A\biggl(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\biggr)B(u,(H-G)u)\,d\tau.$$

Здесь аргументы у функций u и v опущены. Так как полугруппа $\mathcal{U}_A(t)$ – сжимающая и $\varepsilon>0$, имеем оценку

$$\|u-v\|\leqslant\varepsilon b\int\limits_0^t(\|Gu\|+\|v\|\|G\|)\|u-v\|\,d\tau+\varepsilon Tb\|u\|\|(H-G)u\|,$$

откуда в соответствии с неравенством Гронуолла–Беллмана (см. также (17)) получаем оценку

$$\|u-v\|\leqslant\varepsilon Tb\|u\|\exp\{\varepsilon Tb(\|Gu\|_{C_E}+\|v\|_{C_E}\|G\|)\}\|(H-G)u\|, \tag{21}$$

совпадающую с неравенством (19), если

$$C_\varepsilon=\varepsilon Tb\|u\|_{C_E}\exp\{\varepsilon Tb(\|Gu\|_{C_E}+\|v\|_{C_E}\|G\|)\}.$$

Как следует из неравенства (21), для последовательности ограниченных операторов G_m, сильно сходящейся к H, можно указать такую последовательность $\varepsilon_m\to+0$, что для решения $V_m(t,1/\varepsilon_m,\varepsilon_m)$ начальных задач (18) будет иметь место равномерная по $t\in[0,T]$ сходимость

$$\lim_{m\to\infty}\|u(t,1/\varepsilon_m,\varepsilon_m)-V_m(t,1/\varepsilon_m,\varepsilon_m)\|=0. \tag{22}$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим начальную задачу

$$\varepsilon\partial_t u=\partial_x^2u-\varepsilon^2u(\partial_xu),\quad t\in(0,T],\quad x\in[0,1],$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x).$$

Здесь $E=C[0,1]$; $D(\partial_x^2)=\{w(x)\in C[0,1]:\partial_x^2w\in C[0,1],\ \ w(0)=w(1)=0\}$; $D^\mu(\partial_x)=$ $=\{w(x)\in C[0,1]:\partial_xw\in C[0,1],\ \ \mu w(0)-w(1)=0\}$, $\mu\in(0,1)$ и фиксирован билинейный оператор $B(u,v)=-uv$, очевидно, ограниченный как оператор, действующий из $C[0,1]\times$ $\times C[0,1]$ в $C[0,1]$; $\varphi(x)\in D(\partial_x^2)$.

Резольвента оператора $H = \partial_x$ с областью определения $D^\mu(\partial_x)$ задаётся формулой [14, с. 144]

$$R_H(\lambda) = \frac{1}{\mu - e^\lambda}\bigg(\mu\int\limits_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi + e^\lambda \int\limits_x^1 e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi)\,d\xi\bigg),$$

и при всех $\lambda > 0$ (и заданном $\mu \in (0,1)$) подчинена оценке $\|R_H(\lambda)\| \leqslant 1/\lambda$. Тогда, как известно [12, с. 66], последовательность ограниченных операторов

$$H_m = -mI - m^2 R_H(m),$$

где I – тождественный оператор, при $m \to \infty$ сильно сходится к оператору $H = \partial_x$.

Рассмотрим серию начальных задач

$$\varepsilon\partial_t v = \partial_x^2 v - \varepsilon^2 v(H_m v), \quad t \in (0,T], \quad x \in [0,1],$$
$$v|_{t=0} = \varphi(x). \tag{23}$$

С помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности [15, с. 187]

$$G(t/\varepsilon, x; s) = 2\sum_{k=1}^\infty \sin(\pi k s)\sin(\pi k x) e^{-\pi^2 k^2 t/\varepsilon}$$

строим ε-регулярные решения задач (23) (они являются псевдоголоморфными по теореме 3):

$$V_m(t, x, 1/\varepsilon, \varepsilon) = v_0(t, x, 1/\varepsilon) + \varepsilon v_1(t, x, 1/\varepsilon) + \ldots,$$

где

$$v_0(t, x, 1/\varepsilon) = \int\limits_0^1 G(t/\varepsilon, x; s)\varphi(s)\,ds;$$

$$v_1(t, x, 1/\varepsilon) = -\int\limits_0^t \bigg[\int\limits_0^1 G\bigg(\frac{t-\tau}{\varepsilon}, x; s\bigg)(v_0(\tau, s, 1/\varepsilon) H_m[v_0(\tau, s, 1/\varepsilon)])\,ds\bigg]\,d\tau;$$

и т.д. Как следует из выражения для C_ε, предел (22) будет иметь место, если $\varepsilon_m = m^{-2}$.

4. Существование ε-псевдорегулярных решений уравнений с неограниченным билинейным оператором. Дополнительно к условию (A) наложим на билинейный оператор $B(u, Hv)$ из уравнения (4) специальное условие.

Условие (B). *Для некоторого $a \geqslant 0$ существует неубывающая последовательность множеств $W_a^1 \subset W_a^2 \subset \ldots \subset W_a^k \subset \ldots \subset D_A$ такая, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого $w \in W_a^n$ выполняется оценка $\|w\| \leqslant e^{an}$, и если $u \in W_a^p$, $v \in W_a^q$, то $B(u, Hv) \in qW_a^{p+q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$. Кроме того, при каждом $n \in \mathbb{N}$ множество W_a^n инвариантно относительно действия полугруппы, т.е. $\mathcal{U}_A(t)W_a^n \subset W_a^n$ при всех $t \geqslant 0$.*

Введём следующее обозначение:

$$\exp_a E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_a^n.$$

Отметим, что множество $\exp_a E$ обобщает пространство целых функций экспоненциального типа [16, гл. VIII, § 2].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, условие (B) и включение $u^0 \in \exp_a E$. Тогда задача Коши (4) имеет единственное ε-псевдорегулярное решение.*

Доказательство. Обратимся к серии решений (6). Пусть для определённости $u^0 \in W_a^1$, тогда вследствие инвариантности множества W_a^n относительно действия полугруппы $\mathcal{U}_A(t)$ верно включение $u_0(t,1/\varepsilon) \in W_a^1$, а значит, $\|u_0(t,1/\varepsilon)\| \leqslant e^a$ при всех $t \geqslant 0$ и любом $\varepsilon > 0$.

С помощью метода математической индукции установим неравенство

$$\|u_n(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^n e^{a(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением [17].

Лемма. *При любом натуральном* n *справедливо равенство*

$$1 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} + 1 \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!} \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{4^2}{3!} \cdot \frac{(n-2)^{n-3}}{(n-3)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \cdot 1 = \frac{(n+2)^n}{n!}.$$

Учтём также тот факт, что из включения $B(u,Hv) \in qW_a^{p+q}$ $(u \in W_a^p,\ v \in W_a^q)$ следует, что $\|B(u,Hv)\| \leqslant qe^{a(p+q)}$.

Проверим справедливость неравенства (24) при $n=1$. С учётом сжимаемости полугруппы имеем

$$\|u_1(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \int\limits_0^t \|B(u_0(\tau,1/\varepsilon), Hu_0(\tau,1/\varepsilon))\|\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t e^{2a}\,d\tau = te^{2a}.$$

Пусть неравенство (24) верно при данном натуральном n, тогда

$$\|u_{n+1}(t,1/\varepsilon)\| \leqslant \int\limits_0^t \sum_{k=0}^n \|B(u_k(\tau,1/\varepsilon), Hu_{n-k}(\tau,1/\varepsilon))\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg[\int\limits_0^t \Big(1 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} + 1 \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{3^1}{2!} \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \cdot 1\Big)\tau^n\,d\tau\Bigg] e^{a(n+2)} =$$

$$= \frac{(n+2)^n}{n!(n+1)} t^{n+1} e^{a(n+2)} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)!} t^{n+1} e^{a(n+2)}.$$

Сходимость ряда

$$u_0(t,1/\varepsilon) + \varepsilon u_1(t,1/\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t,1/\varepsilon) + \ldots$$

равномерно по $t \in [0,T]$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ (ε^* находится с помощью признака Даламбера) таким образом установлена. Его сумма и будет ε-псевдорегулярным решением задачи (4).

Пример 2. Рассмотрим смешанную задачу

$$\varepsilon\partial_t u = \partial_x^2 u - \varepsilon^2 u(\partial_x u), \quad t \in (0,T], \quad x \in (0,\pi),$$

$$u(t,0,1/\varepsilon) = u(t,\pi,1/\varepsilon) = 0, \quad t \in (0,T],$$

$$u(0,x,1/\varepsilon) = \sin x, \quad x \in [0,\pi].$$

По формулам (6) строим её ε-псевдорегулярное решение:

$$u^{\rm pr}(t,x,1/\varepsilon,\varepsilon) = e^{-t/\varepsilon}\sin x - \frac{\varepsilon}{4}(e^{-2t/\varepsilon} - e^{-4t/\varepsilon})\sin 2x +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{32}[(2e^{-3t/\varepsilon} - 3e^{-5t/\varepsilon} + e^{-9t/\varepsilon})\sin 3x - (e^{-5t/\varepsilon} - 2e^{-3t/\varepsilon} + e^{-t/\varepsilon})\sin x] - \ldots$$

Здесь $E = C[0,\pi]$, $a = 0$, W_0^n состоит из тригонометрических многочленов вида $a_1 \sin x + {} + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, коэффициенты которых удовлетворяют неравенству $|a_1| + |a_2| + \ldots \ldots + |a_n| \leqslant 1$. Несложно доказать, что $\exp_0 E$ – мультипликативный моноид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М., 1973.
3. *Маслов В.П.* Асимптотические методы в теории возмущений. М., 1988.
4. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
5. *Качалов В.И., Ломов С.А.* Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // Докл. АН СССР. 1988. Т. 37. № 2. С. 465–467.
6. *Рид М., Саймон В.* Методы современной математической физики. Т. 4. М., 1982.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
8. *Качалов В.И., Ломов С.А.* Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Докл. АН СССР. 1982. Т. 334. № 8. С. 694–695.
9. *Kachalov V.I.* Poincare decomposition theorems and the Lomov regularization method // J. of Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1391. № 1. P. 012134.
10. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. doi:10.3390/axioms8010027.
11. *Качалов В.И.* О методе голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 52–59.
12. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
14. *Дезин А.А.* Воспоминания и избранные труды по математике. М., 2011.
15. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1976.
16. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1980.
17. *Бесова М.И., Качалов В.И.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении в банаховом пространстве // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18. № 1. С. 332–337.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 21.05.2021 г.
После доработки 21.12.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 371–384

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952+517.956.226

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С ОСОБЕННОСТЬЮ В КОЭФФИЦИЕНТЕ

© 2022 г. Ю. С. Федоров

Для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных типа Коши–Римана рассматривается задача Римана–Гильберта. С помощью метода регуляризации Ломова получены достаточные условия, при выполнении которых её асимптотические решения сходятся в обычном смысле.

DOI: 10.31857/S0374064122030074, **EDN:** BYBLNQ

Светлой памяти моего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящаю эту работу

1. Постановка задачи. Пусть область D содержит точку $z=0$ и ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Пусть контур Γ принадлежит классу Гёльдера $C^{1,\nu}$ и функция $\zeta=\alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta|<1$, согласно теореме Келлога [1, с. 411] функция ζ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$. Удобно обозначить $D_\delta = D\bigcap\{|z|>\delta\}$ с малым $\delta>0$.

В области D рассмотрим следующую сингулярно возмущённую систему уравнений Коши–Римана с сингулярными коэффициентами:

$$\varepsilon\biggl[x\biggl(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\biggr)+y\biggl(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\biggr)\biggr]-2a(u_1-u_2)=0,$$

$$\varepsilon\biggl[y\biggl(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\biggr)-x\biggl(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\biggr)\biggr]-2a(u_1+u_2)=0, \qquad (1.1_0)$$

где $\varepsilon\ll 1$ – малый параметр, a – действительная положительная постоянная, т.е. $a\in\mathbb{R}^+$.

Используя оператор Коши–Римана $2\partial_{\overline{z}}=\partial_x+i\partial_y$, с учётом того, что $u=u_1+iu_2$, запишем систему уравнений (1.1_0) в удобной для исследования комплексной форме

$$\varepsilon\bar{z}u_{\bar{z}}-au=0. \qquad (1.1)$$

На важность исследования системы (1.1) указал В.Ф. Сафонов [2, гл. 3], на необходимость её изучения обращали внимание также А.В. Бицадзе и А.Б. Васильева. Уравнения, аналогичные (1.1), рассматривались в работе [3] и монографии [4, с. 215] при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой

$$\varepsilon z^2y''(z)+zp(z)y'(z)+q(z)y(z)=0$$

(здесь $y=y(z)$ – функция комплексного переменного z). Некоторые сингулярно возмущённые системы уравнений в частных производных с регулярной особой точкой, отличные от систем вида (1.1_0), изучались И.С. Ломовым [5, 6]. В.Ф. Сафоновым предложено исследовать классы уравнений, когда точка $z=0$ является особой точкой множителя при производной искомой функции по $\bar{z}$. Первый естественный класс таких уравнений содержит сингулярно возмущённое уравнение Коши–Римана (1.1), эквивалентное системе (1.1_0).

Одной из основных граничных задач теории (обобщённых) аналитических функций является краевая задача Римана–Гильберта. Её постановка для аналитических функций принадлежит Б. Риману [7]. В 1857 г. он впервые сформулировал задачу следующим образом: найти аналитическую в области D функцию по известному соотношению между её действительной и мнимой частями на границе области. Сам он не указал способов решения этой задачи. Её полное решение дано Д. Гильбертом [8] в случае односвязной области, когда действительная u и мнимая v части искомой функции удовлетворяют на границе следующему условию:

$$\mathrm{Re}\,((\alpha+i\beta)(u+iv)) = \alpha u - \beta v = \gamma,$$

где α, β и γ – заданные действительные функции, причём $\alpha^2+\beta^2=1$. В связи с этим данную задачу стали называть *задачей Римана–Гильберта*. Дальнейшее развитие теория задач Римана–Гильберта получила в трудах Ф.Д. Гахова, Н.И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа, А.П. Солдатова и их учеников. При рассмотрении задачи Римана–Гильберта важную роль играет её индекс

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\arg\,(\alpha+i\beta)|_\Gamma.$$

Переходя к исследованию уравнения (1.1), уточним для него постановку соответствующей задачи.

Задача типа Римана–Гильберта: найти решение $u(z,\varepsilon)\in C(\overline{D})\bigcap C^\infty(D)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\mathrm{Re}\,((\alpha+i\beta)u)(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2}g(t), \quad t\in\Gamma, \tag{1.2}$$

и в области D равенствами

$$u(z_j)=0, \quad j=\overline{1,-2\varkappa+1}, \quad z_j\in D, \quad \varkappa\leqslant 0, \tag{1.3}$$

где $g(t)\in C(\Gamma)$ – заданная функция, c – положительная постоянная, z_j – фиксированные точки области D, а $\varkappa$ – индекс функции $\alpha+i\beta$ на Γ.

Отметим, что в случае круговой области задача типа Дирихле для уравнения (1.1) исследована в работе [9].

2. Классическая задача Римана–Гильберта. Предварительно напомним хорошо известные результаты относительно классической задачи Римана–Гильберта (подробное их изложение имеется в монографиях [10, 11]). Задача ставится следующим образом: найти аналитическую в области D функцию $\varphi(z)$, которая на границе $\Gamma=\partial D$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\,G\varphi|_\Gamma = g, \tag{2.1}$$

где функция $G=\alpha+i\beta\in C^\nu(\Gamma)$ всюду отлична от нуля (отметим, что здесь отсутствует условие (1.3)). Если $g(z)\equiv 0$, то задача Римана–Гильберта называется *однородной*; в противном случае – *неоднородной*. Воспользуемся компактным изложением [12] решения задачи Римана–Гильберта.

Рассмотрим эту задачу для односвязной области D, ограниченной простым контуром Γ. Пусть $D'=\mathbb{C}\setminus\overline{D}$. Через $C(\overline{D}\vee\overline{D'})$ обозначим класс функций $\phi(z)$, которые определены на $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, аналитичны в любой из открытых связных компонент областей $D_0\subseteq D$ и D', при этом их сужение $\phi|_{D_0}$ на D_0 продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{D_0}$, а сужение $\phi|_{D'}$ на D' – по непрерывности на замыкание $\overline{D'}$. Обозначение $\overline{D}\vee\overline{D'}$ можно трактовать как замыкание множества $D\vee D'$ с помощью односторонних окрестностей контура Γ, так что $D\vee D'=(D\bigcup\Gamma)\vee(D'\bigcup\Gamma)$ (здесь $\Gamma\vee\Gamma$ – дизъюнктное объединение двух экземпляров контура).

Из определения класса $C(\overline{D}\vee\overline{D'})$ вытекает, что в точках $t\in\Gamma$ существуют два граничных значения $\lim\phi(z)$ при стремлении z к t с каждой из двух сторон от Γ. Эти значения удобно обозначать с помощью заданной ориентацией контура, понимая под $\phi^+(t)$ $(\phi^-(t))$ предел $\lim \phi(z)$ для точек $z \in D$, которые в малой окрестности t лежат слева (справа) от Γ, т.е. находятся в соответствующих односторонних окрестностях точки t. В случае, когда область D является единичным кругом, задача (2.1) легко сводится к задаче линейного сопряжения и, следовательно, допускает эффективное решение. С этой целью функцию φ продолжим в область $D' = \{|z| > 1\}$, полагая

$$\varphi(z) = \overline{\varphi(1/\bar{z})}, \quad |z| > 1.$$

Очевидно, что так продолженная функция является аналитической в $\mathbb{C}\backslash\Gamma = D \bigcup D'$ и принадлежит классу $C_0^\mu(\overline{D} \vee \overline{D'})$. Она удовлетворяет условию $\varphi = \varphi_*$, где функция φ_* определяется с помощью инверсии

$$\varphi_*(z) = \overline{\varphi(1/\overline{z})}. \tag{2.2}$$

Операция $\varphi \mapsto \varphi_*$ является линейной над полем $\mathbb{R}$ и инволютивной, т.е. $(\varphi_*)_* = \varphi$. Из определения (2.2) следует, что

$$\varphi_*^\pm(t) = \overline{\varphi^\mp}, \quad t \in \Gamma. \tag{2.3}$$

В частности, краевое условие (2.1) для так продолженной функции φ запишется в виде

$$G\varphi^+ + \overline{G}\varphi^- = 2g. \tag{2.4}$$

Верно и обратное: если $\varphi \in C_0^\mu(\overline{D} \vee \overline{D'})$ – решение задачи (2.4) линейного сопряжения, подчинённое дополнительному требованию $\varphi = \varphi_*$, то сужение функции φ на область D служит решением задачи (2.1).

Очевидно, задачу (2.4) можно представить в форме (2.1) по отношению к коэффициенту $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$. Имеет место

Лемма 2.1. *Пусть* $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $a(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t$ *принадлежит классу* $C^\mu(\Gamma)$, *и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2\varkappa}, & |z| > 1, \end{cases} \quad H(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \frac{\pi - 2a(t)}{t - z}\, dt. \tag{2.5}$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z)e^{H(z) - H(0)/2}$$

является $\widetilde{G}$*-канонической [11, с. 102] и обладает свойством*

$$X_*(z) = X(z)z^{-2\varkappa}. \tag{2.6}$$

На линейном пространстве P_n многочленов степени не выше n введём операцию

$$p^\wedge(z) = z^n p_*(z), \tag{2.7}$$

которая действует по правилу $(c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n)^\wedge = \overline{c}_n + \overline{c}_{n-1}z + \ldots + \overline{c}_0 z^n$ и, очевидно, инволютивна: $(p^\wedge)^\wedge = p$.

Из тождества (2.6) и определения (2.7) непосредственно следует, что

$$(Xp)_* = Xp^\wedge, \quad p \in P_{-2\varkappa}.$$

Утверждается, что на единичной окружности имеет место соотношение

$$\overline{\left[\frac{tp(t)}{G(t)X^+(t)}\right]} = -\frac{tq^\wedge(t)}{G(t)X^+(t)}, \quad q \in P_{2\varkappa-2}, \quad t \in \Gamma.$$

Обратимся к исходной задаче (2.1) и рассмотрим класс $P_n^0 = \{p \in P_n\colon\ p^\wedge = p\}$. Очевидно, что любой элемент $p \in P_n$ единственным образом представим в виде $p = p^0 + ip^1$, где $p^1 \in P_n^0$, так что P_n^0 – линейное подпространство в P_n размерности $n+1$.

Теорема 2.1. *В условиях леммы 2.1 все решения задачи (2.1) в классе $C^\mu(\overline{D})$ описываются формулой*

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{dt}{t-z} + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\varkappa},$$

где функция f удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}q(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}.$$

Очевидно, что при $\varkappa \leqslant 0$ размерность пространства $P^0_{-2\varkappa}$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2\varkappa+1$. Аналогично, при $\varkappa \geqslant 0$ размерность пространства $P^0_{2\varkappa-2}$ на полем $\mathbb{R}$ равна $2\varkappa-1$. Во всех случаях задача (2.1) имеет индекс $-2\varkappa+1$, который, в частности, отличен от нуля.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг D_0 принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in C^\mu(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$, удовлетворяющую условию $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G$, так что функция $a(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t$ принадлежит классу $C^\mu(\Gamma)$, и пусть $X(z) = e^{A(z)}$, где функция $A \in C^\mu(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im} A^+ = \frac{\pi}{2} - a, \quad \operatorname{Re} A(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma a(t)|\omega'(t)|\,d_1 t.$$

Тогда все решения задачи (2.1) в классе $C^\mu(\overline{D})$ описываются формулой

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)-\omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2\varkappa},$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)}q[\omega(t)]\omega'(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}.$$

3. Построение формального решения уравнения (1.1) и основная теорема. В исследовании обобщённых систем Коши–Римана ключевую роль играет интегральный оператор Векуа–Помпейу [13, с. 31]:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.1}$$

здесь и всюду ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади.

Если $f \in L^p(D)$, $p > 2$, то функция $U = Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\bar z} = f$, причём оператор $T : L^p(D) \to W^{1,p}(D)$ ограничен. При этом имеет место следующее вложение [13, с. 39] в класс Гёльдера:

$$W^{1,p}(D) \subseteq C^\mu(\overline{D}), \quad \mu = 1 - 2/p.$$

В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $p > 2$. Если функция f принадлежит пространствам $L^p(D_\delta)$ при любом

$\delta > 0$, но, вообще говоря, не суммируема во всей области D, то под правой частью в (3.1) условимся понимать сингулярный интеграл

$$(Tf)(z) = -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{D_\delta}\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \neq 0,$$

конечно, в предположении, что указанный предел существует. Вводя обозначение

$$\Omega(z) = -\frac{a}{\pi}\int\limits_{D}\frac{d_2\zeta}{\bar\zeta(\zeta - z)}, \quad z \neq 0,$$

воспользуемся для определения функции Ω следующим утверждением.

Лемма 3.1. *Функция $\Omega(z)$ существует и представима в виде*

$$\Omega(z) = 2a\ln|z| - h(z), \quad z \neq 0,$$

где $h(z) \in H(\overline{D})$ определяется равенством

$$h(z) = \frac{a}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln|\zeta|\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Здесь H – пространство аналитических в области D функций, удовлетворяющих на границе $\Gamma = \partial D$ условию Гёльдера с показателем $\nu = (p-2)/p$, $p > 2$.

Подставляя значение $\Omega(z)$ в формальное решение для $u(z)$, решения уравнения (1.1) можем записать в виде $u(z) = \varphi(z)\exp\{\Omega(z)/\varepsilon\}$. Таким образом, получим следующую формулу:

$$u(z) = \varphi(z)|z|^{2a/\varepsilon}e^{h(z)/\varepsilon},$$

где φ – произвольная аналитическая в области D_0 функция.

Следуя работе [14], в которой описывается класс безрезонансных решений для итерационных задач, введём класс функций U_0, элементы которого (дополнительно к свойствам функций класса U) обладают ещё свойством ограниченности при $\varepsilon \to +0$ и $z \to 0$. Иначе говоря, под решением задачи типа Римана–Гильберта (1.1)–(1.3) будем понимать функцию u, принадлежащую классу

$$U_0 = \{u : u(z) = e^{\tau}((Ig) + XP_{-2\varkappa})(z) \text{ и } u = O(1) \text{ при } \varepsilon \to 0 \text{ и } z \to 0\}.$$

Заметим, что элементы $u \in U_0$, обладают свойством: $u \in C(\overline{D})\bigcap C^{\infty}(D_0)$.

Для наглядного и компактного изложения сформулируем основную теорему для области $D = \{z : |z| \leqslant R\}$. Эта теорема имеет место также для содержащей сингулярную точку $z = 0$ конечной области с границей $\Gamma \in C^{1,\alpha}$.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче (1.1)–(1.3) $a \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ и $g(t) \in C(\Gamma)$. Тогда эта задача в классе U_0 однозначно разрешима и $u(0) = 0$. Более точно, её решение представимо в виде*

$$\widetilde{u}(z,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k(z,\tau)\varepsilon^k = e^{\tau - c^2/\varepsilon^2}\times$$

$$\times\biggl\{[(Ig)(z) + X(z)P_{-2\varkappa}(z)] + \frac{\bar z}{a}\sum_{1}^{\infty}\biggl[\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr]\varepsilon^k\biggr\}, \tag{3.2}$$

где коэффициенты $u_k(\tau, z)$ определяются рекуррентной формулой

$$u_k(\tau,z) = e^{\tau - c^2/\varepsilon^2}\biggl[-\frac{\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr], \quad k \geqslant 1.$$

Коэффициенты u_k, $k \in \mathbb{N}$, *являются однородными функциями первой степени по* τ, *в частности,* $u_k(\tau, z) = 0$ *при* $z \in \Gamma$, *и решение (3.2) при* $z \in \Gamma$ *совпадает с точным решением задачи (1.1)–(1.3). При* $|z| < R$ *ряд в интегральном представлении (3.2) при достаточно малом* ε *сходится в обычном смысле абсолютно и равномерно по переменному* z *во всей области* $\overline{D}$ *к точному решению задачи (1.1)–(1.3).*

Доказательство. Для наглядности и упрощения изложения доказательство теоремы проводим в предположении, что граница Γ области D является окружностью, т.е. $\Gamma : |z| = R$ (отметим, что теорема 3 справедлива и для произвольной области с границей $\Gamma \in C^{1,\nu}$).

Тогда функция $h(z)$, приведённая в лемме 3.1, примет более простой вид:

$$h(z) = \frac{a}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln|\zeta|\, d\zeta}{\zeta - z} = 2a \ln R.$$

В этом случае решение уравнения (1.1) принимает вид

$$u(z) = \varphi(z) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} 2a \ln(|z| R^{-1})\right\}, \tag{3.3}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая в области D_0 функция. Чтобы получить решение исходной задачи (1.1)–(1.3), нужно подчинить функцию (3.3) условиям (1.2), (1.3). При этом функция $\varphi(z)$ будет сложным образом зависеть от z и ε, и её описание при стремлении $(z, \varepsilon) \to (0, +0)$ будет весьма затруднительным. Поэтому, вместо того чтобы использовать точное решение уравнения (1.1), попробуем построить разложение решения задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда по степеням параметра ε, применив метод регуляризации Ломова [4].

Согласно методу Ломова, исходя из представления (3.3), вводим новую дополнительную переменную

$$\tau(\varepsilon, z) = \frac{1}{\varepsilon} 2a \ln\frac{|z|}{R}, \quad |z| \leqslant R,$$

производная которой равна

$$\frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = \frac{a}{\varepsilon \bar{z}}.$$

Для расширенной неизвестной функции $\widetilde{u} = u(z, \tau, \varepsilon)$ (вместо исходного уравнения (1.1)) с учётом того, что

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{a}{\varepsilon \bar{z}}\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

получаем расширенное уравнение

$$\varepsilon \bar{z} \widetilde{u}_{\bar{z}} + a(\widetilde{u}_\tau - \widetilde{u}) = 0. \tag{3.4}$$

Сформулируем соответствующую задачу типа Римана–Гильберта: найти решение $\widetilde{u}$ уравнения (3.4) из класса $C(\overline{D}) \bigcap C^\infty(D_0)$, удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\mathrm{Re}\,((\alpha + i\beta)\tilde{u})(t) = e^{-c^2/\varepsilon^2} g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{3.5}$$

где $g(t) \in C(\Gamma)$, и в области D равенствам

$$\tilde{u}(z_j, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{1, -2\varkappa + 1}, \quad z_j \in D. \tag{3.6}$$

Согласно теории Пуанкаре решение расширенной задачи (3.4)–(3.6) будем искать в виде

$$\widetilde{u}(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z, \tau) \varepsilon^k. \tag{3.7}$$

Подставляя представление (3.7) в уравнение (3.4), получаем равенство

$$\bar{z}(\varepsilon u_{0\bar{z}}+\varepsilon^2 u_{1\bar{z}}+\ldots+\varepsilon^{k+1}u_{k\bar{z}}+\ldots)+a((u_{0\tau}-u_0)+\varepsilon(u_{1\tau}-u_1)+\ldots+\varepsilon^k(u_{k\tau}-u_k)+\ldots)=0.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, приходим к следующим итерационным задачам:

$$\varepsilon^0:\begin{cases}u_{0\tau}-u_0=0,\\ \operatorname{Re}(\alpha+i\beta)u_0(t)=e^{-c^2/\varepsilon^2}g(t), \quad t\in\Gamma,\\ u_0(z_j)=0, \quad j=\overline{1,-2\varkappa+1}, \quad z_j\in D,\end{cases} \tag{3.8$_0$}$$

$$\varepsilon:\begin{cases}u_{1\tau}-u_1=\dfrac{\bar{z}}{a}\dfrac{\partial u_0}{\partial\bar{z}},\\ \operatorname{Re}((\alpha+i\beta)u_1)(t)=0, \quad t\in\Gamma,\\ u_1(z_j)=0, \quad j=\overline{1,-2\varkappa+1}, \quad z_j\in D,\end{cases} \tag{3.8$_1$}$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon^k:\begin{cases}u_{k\tau}-u_k=\dfrac{\bar{z}}{a}d\dfrac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar{z}},\\ \operatorname{Re}((\alpha+i\beta)u_k)(t)=0, \quad t\in\Gamma,\\ u_k(z_j)=0, \quad j=\overline{1,-2\varkappa+1}, \quad z_j\in D,\end{cases} \tag{3.8$_k$}$$

$$\ldots$$

4. Решение итерационных задач. Рассмотрим первую итерационную задачу (3.8$_0$). Её уравнение

$$u_{0\tau}-u_0=0$$

можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение; его решение даётся формулой

$$u_0(\tau,z)=e^{\tau}\varphi_0(z), \tag{4.1}$$

где $\varphi_0(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного z.

Теперь, используя краевые условия задачи (3.8$_0$), для вычисления аналитической функции $\varphi(z)$ приходим к следующей задаче:

$$\operatorname{Re}(\alpha+i\beta)\varphi_0(t)=e^{-c^2/\varepsilon^2}g(t), \quad t\in\Gamma,$$

$$\varphi_0(z_j)=0, \quad j=\overline{1,-2\varkappa+1}, \quad z_j\in D. \tag{4.2}$$

Сначала рассмотрим первое краевое условие:

$$\operatorname{Re}(\alpha+i\beta)\varphi_0(t)=e^{-c^2/\varepsilon^2}g(t), \quad t\in\Gamma. \tag{4.3}$$

Согласно теореме 2.1 при $\varkappa\leqslant 0$ и $\Gamma\in C^{1,\nu}$, $G\in C^{\nu}(\Gamma)$ однородная задача Римана–Гильберта имеет ровно $-2\varkappa+1$ линейно независимых решений; совокупность всех решений даётся формулой

$$\varphi_0(z,\varepsilon)=X(z)(c_0z^{-2\varkappa}+c_1z^{-2\varkappa-1}+\ldots+c_{-2\varkappa}), \tag{4.4}$$

где c_0, c_1, $\ldots$, $c_{-2\varkappa}$ – произвольные постоянные. Неоднородная задача с граничным условием (4.3) безусловно разрешима, причём все её решения в классе $C^{\mu}(\overline{D})$ описываются формулой

$$\varphi_0(z)=e^{-c^2/\varepsilon^2}(Ig)(z)+X(z)p(z), \quad p\in P^0_{-2\varkappa}, \tag{4.5}$$

где

$$(Ig)(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{dt}{t-z}.$$

При $\varkappa \geqslant 0$ (см. теорему 2.1) однородная задача Римана–Гильберта не имеет решений, отличных от нуля, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t)\,dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}. \tag{4.6}$$

При этом единственное решение задачи Римана–Гильберта для уравнения $u_{0\tau} - u_0 = 0$ даётся формулой

$$\varphi_0(z) = e^{-c^2/\varepsilon^2}(Ig)(z). \tag{4.7}$$

Теперь подчиним решение (4.5) задачи (3.8_0) второму условию. При $\varkappa \leqslant 0$ равенства $\varphi_0(z_j) = 0$, $j = \overline{1, -2\varkappa+1}$, $z_j \in D$ (см. (4.4), (4.5)) приводят к следующей системе алгебраических уравнений:

$$P_{-2\varkappa}(z_j) = -\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{X(z_j)}(Ig)(z_j), \quad j = \overline{1, -2\varkappa+1}, \quad z_j \in D, \tag{4.8}$$

где $P_{-2\varkappa}(z_j) = c_0 z_j^{-2\varkappa} + c_1 z_j^{-2\varkappa-1} + \ldots + c_{-2\varkappa}$, а числа c_0, c_1, $\ldots$, $c_{-2\varkappa}$ пока не известны. Введя обозначения

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_{-2\varkappa})^{\mathrm{т}}, \quad f_j = -\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{X(z_j)}(Ig)(z_j), \quad F = (f_0, f_1, \ldots, f_{-2\varkappa})^{\mathrm{т}},$$

$$A^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_{-2\varkappa+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{-2\varkappa} & z_2^{-2\varkappa} & z_3^{-2\varkappa} & \ldots & z_{-2\varkappa+1}^{-2\varkappa} \end{pmatrix},$$

систему уравнений (4.8) запишем в матричной форме

$$AC = F. \tag{4.9}$$

Матрица $A^{\mathrm{т}}$ имеет определитель $\Delta = |A^{\mathrm{т}}| = |A| \neq 0$, так как он является определителем Вандермонда. Следовательно, система уравнений (4.8) или (4.9) имеет единственное решение

$$C = A^{-1}F.$$

Подставляя найденные значения чисел c_j в многочлен $P_{-2\varkappa}$, найдём окончательно функцию $\varphi_0(z)$ в (4.1) и, значит, построим однозначно решение первой итерационной задачи (3.8_0).

Лемма 4.1. *Пусть* $\varkappa = \operatorname{Ind}(\alpha(t) + i\beta(t))$ *и* $a \in \mathbb{R}^+$.

Если $\varkappa \leqslant 0$, *то первая итерационная задача* (3.8_0) *имеет единственное решение в классе* U_0, *это решение представляется в виде (4.1), где аналитическая функция* φ_0 *вычисляется по формуле (4.4), в которой постоянные* c_0, c_1, $\ldots$, $c_{-2\varkappa}$ *являются решениями алгебраической системы (4.9).*

Если $\varkappa \geqslant 0$, *то однородная итерационная задача* (3.8_0) *не имеет решений, отличных от нуля, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы имели место условия ортогональности (4.6); при этом единственное решение задачи* (3.8_0) *вычисляется по формуле (4.1), где аналитическая функция* φ_0 *имеет вид (4.7).*

Аналогичным образом находим решения следующих итерационных задач. Рассмотрим уравнение (3.8_k):

$$u_{k\tau} - u_k = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}\bar{z}}{a}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}.$$

Решение этого уравнения даётся формулой

$$u_k(\tau,z)=e^{\tau}\biggl[\varphi_k(z)-\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr].$$

Используя первое условие задачи (3.8_k), приходим к следующей задаче:

$$\operatorname{Re}(\alpha+i\beta)\varphi_k(t)=\widetilde{g_k(t)},\quad t\in\Gamma,$$

где

$$\widetilde{g_k(t)}=-\operatorname{Re}\frac{\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr|_{\Gamma}=0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}(\alpha+i\beta)\varphi_k(z)=0,\quad k\geqslant 1,\quad z\in D. \tag{4.10}$$

При $\varkappa>0$ (согласно теореме 2.1) однородная задача (4.10) Римана–Гильберта не имеет решений, отличных от нуля, и $\varphi_k(z)=0$, $k\geqslant 1$, $z\in D$.

В результате для коэффициентов $u_k(\tau,z)$ получим следующие выражения:

$$u_k(\tau,z)=e^{\tau-c^2/\varepsilon^2}\biggl[-\frac{\bar z}{a}\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr],\quad k\geqslant 1. \tag{4.11}$$

Тем самым, будут решены все итерационные задачи в классе U_0.

Подставляя найденные коэффициенты $u_0(\tau,z)$, $u_k(\tau,z)$, $k\geqslant 1$, в ряд (3.7), получаем единственное формальное решение задачи (3.4)–(3.6) в виде ряда

$$\widetilde u(z,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(z,\tau)\varepsilon^k=$$

$$=e^{\tau-c^2/\varepsilon^2}\biggl\{[(Ig)(z)+X(z)P_{-2\varkappa}(z)]+\frac{\bar z}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\biggl[\int\limits_0^{\tau}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar z}\,dt\biggr]\varepsilon^k\biggr\}, \tag{4.12}$$

где коэффициенты $u_k(\tau,z)$ определяются по рекуррентной формуле (4.11), функции $X(z)$ и $(Ig)(z)$ вычисляются по формулам (2.3) и (2.5), а $P_{\varkappa}(z)$ является полиномом степени $\varkappa$ с известными коэффициентами.

5. Обоснование обычной сходимости формальных решений к точному. Согласно формуле (4.1) коэффициент u_0 определяется равенством

$$u_0(\tau,z)=e^{\tau}e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0(z),\quad \varphi_0(z)=e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0^*(z),$$

где $a\in\mathbb R^+$, $\tau\to-\infty$ при $\varepsilon\to+0$, $z\neq 0$, аналитическая функция φ_0, являясь решением задачи типа Римана–Гильберта (4.2), вычисляется по формуле (4.4) или (4.7) в зависимости от значения индекса задачи $\varkappa$, а $\varphi_0^*(z)$ – аналитическая функция комплексного переменного z.

Для коэффициента $u_1(\tau,z)$ с учётом того, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial\bar z}=\frac{a}{\varepsilon\bar z}e^{\tau}e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0^*(z),$$

используя соотношение (4.11), приходим к формуле

$$u_1(\tau,z)=\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau.$$

Так как
$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar z} = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\frac{a}{\bar z}\varphi_0^*(z)e^{\tau}(\tau+1),$$
то для коэффициента $u_2(\tau,z)$ из соотношения (4.11) получим формулу
$$u_2(\tau,z) = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^2}{2}+\tau\right) = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{\tau}\right).$$

Аналогично находим формулы для коэффициентов $u_3(\tau,z)$ и $u_4(\tau,z)$:
$$u_3(\tau,z) = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^3}{6}+\tau^2+\tau\right) = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}\right).$$
$$u_4(\tau,z) = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^4}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^4}{24}+\frac{\tau^3}{6}+\frac{\tau^3}{3}+\frac{\tau^2}{2}+\tau^2+\tau\right) =$$
$$= \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^4}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^4\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{6\tau}+\frac{1}{2\tau^2}+\frac{1}{3\tau}+\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^3}\right).$$

Заметив закономерность образования этих формул, несложно методом математической индукции доказать для коэффициента $u_k(\tau,\varepsilon)$, $k \geqslant 0$, представления
$$u_k(\tau,z) = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^k}{k!}+m_{k-1}\tau^{k-1}+\ldots+m_1\tau\right) =$$
$$= \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\varphi_0^*(z)e^{\tau}\tau^k\left(\frac{1}{k!}+m_{k-1}\frac{1}{\tau}+\ldots+m_1\left(\frac{1}{\tau}\right)^{k-1}\right) =$$
$$= \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\varphi_0^*(z)\frac{e^{\tau}}{\theta^k}\left(\frac{1}{k!}+m_{k-1}\theta+\ldots+m_1\theta^{k-1}\right), \tag{5.1}$$
где m_j – некоторые положительные рациональные числа,
$$m_1 = 1, \quad m_j \leqslant \frac{k-1}{2}, \quad \theta = \frac{1}{\tau} = \frac{-\varepsilon}{2a\ln(R/|z|)}.$$

Заметим, что $\theta < 0$, $|\theta| \to +0$ при $\varepsilon \to +0$, если $0 < r_0 \leqslant |z| < R$. Введём обозначение
$$P_k = P_k(\theta) = \frac{1}{k!}+m_{k-1}\theta+\ldots+m_1\theta^{k-1}.$$

Тогда $u_k(\tau,z) = \varepsilon^{-k}e^{-c^2/\varepsilon^2}\varphi_0^*(z)\theta^{-k}e^{1/\theta}P_k(\theta)$. Имеем
$$|P_k| \leqslant \frac{1}{k!}+|\theta|(m_{k-1}+m_{k-2}|\theta|\ldots+m_1|\theta|^{k-2}) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\max\{m_1,m_2,\ldots,m_{k-1}\} = \frac{k-1}{2}\right] \leqslant \frac{1}{k!}+\frac{k-1}{2}|\theta|(1+|\theta|+\ldots+|\theta|^{k-2}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k!}+\frac{k-1}{2}|\theta|(1+|\theta|+\ldots+|\theta|^{k-2}+\ldots) = \frac{1}{k!}+\frac{k-1}{2}|\theta|\frac{1}{1-|\theta|} \leqslant 1+\frac{k-1}{2}|\theta|\frac{1}{1-|\theta|}. \tag{5.2}$$

Продолжая далее оценки сомножителей последнего выражения в (5.1), получаем
$$\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\frac{1}{\theta^k} = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^k}\frac{(2a\ln(R/|z|))^k}{\varepsilon^k} < \frac{\varepsilon^4(2a\ln(R/r_0))^k}{c^{2k+4}},$$

где $c = 2a\ln(R/r_0) > 1,$ при $0 < r_0 \leqslant |z| < R.$ Здесь мы воспользовались известным неравенством
$$\frac{n^k}{e^n} < \frac{1}{n^2}$$
при $n > N_0(k).$ Значение числа $c = 2a\ln(R/r_0)$ подобрано, исходя из неравенства $0 < r_0 \leqslant \leqslant |z| \leqslant R.$ Значит, для каждого фиксированного $r_0 \in (0, R)$ имеем

$$|u_k(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\tau(z,\varepsilon)}| < \frac{\varepsilon^4}{c^{k+4}}|\varphi_0^*(z)|e^{1/\theta}|P_k|, \quad 0 < r_0 \leqslant |z| < R. \tag{5.3}$$

Следовательно, учитывая, что $|\varphi_0(z)| \leqslant M_0 = \mathrm{const}$ (при всех $z,$ для которых $|z| \leqslant R$), и принимая во внимание неравенства $e^{1/\theta} < 1,$ $P_k < k+4,$ для сужения частичной суммы ряда (4.12) получаем оценку

$$|S_N(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k+4}\frac{M_0(k+4)}{c^{k+4}} < M_0\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k+4}\frac{k+4}{c^{k+4}} = \mathrm{const},$$

так как последний числовой ряд сходится, что легко проверяется согласно признаку Коши. Поэтому частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}|\varepsilon^k$ ограничены. Отсюда вытекает, что ряд (4.12) сходится абсолютно в указанной точке z для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$ где $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое число.

Аналогичными рассуждениями показывается, что ряд для производной

$$\varepsilon\bar z\sum_{k=1}^{\infty} u_{k\bar z}(\tau, z, \varepsilon)\bigg|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}$$

также сходится абсолютно в указанной точке $z.$ Следовательно, сумма ряда (4.12) является точным решением исходной задачи (1.1)–(1.3).

6. Обоснование асимптотической сходимости. Так как ряд (4.12) сходится абсолютно в указанной точке z для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$ где $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое число, то должна иметь место его асимптотическая сходимость.

Решения уравнения (3.4) представим в виде

$$u(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k u_k(z, \tau) + \varepsilon^{N+1}R_N(z, \tau, \varepsilon).$$

Подставим решения $u_0(z, \tau),\ \ldots,\ u_N(z, \tau)$ в системы $(3.8_0),\ \ldots,\ (3.8_k)$ $(k = N)$ соответственно. Полученные тождества умножим на $1,$ $\varepsilon,$ $\ldots,$ ε^N соответственно и просуммируем, в результате получим тождество

$$\varepsilon\bar z\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k u_{k\bar z}(z, \tau) - a\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k(u_{k\tau}(z, \tau) - u_k(z, \tau)) = -\bar z\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N}{\partial \bar z}.$$

Вводя обозначение $R_N = u - S_N,$ относительно остатка ряда $R_N(z, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\bar z R_{N\bar z}(z, \tau, \varepsilon) - a(R_{N\tau}(z, \tau, \varepsilon) - R_N(z, \tau, \varepsilon)) = -\bar z\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N}{\partial \bar z}. \tag{6.1}$$

Производя сужение в (6.1) при

$$\tau(\varepsilon, z) = \frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R} = \frac{\psi(z)}{\varepsilon},$$

получаем

$$\varepsilon\bar{z}R_{N\bar{z}} - aR_N = -\bar{z}\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N}{\partial\bar{z}} \equiv f(z,\varepsilon), \tag{6.2}$$

где правая часть уравнения (6.2) выражается формулой

$$-f(z,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{N+1}\bar{z}u_{N\bar{z}}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = a\varepsilon^N u_N + a\varepsilon^N\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\varphi_0^*(z)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right)^{N-1} + \frac{m_{N-1}}{(N-2)!}\left(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right)^{N-2} + \ldots + m_1\right] =$$

$$= a\varepsilon^N\left(u_N + \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\varphi_0^*(z)\frac{e^\tau}{\theta^{N-1}}P_N'\right), \tag{6.3}$$

в которой u_N, согласно (5.3), определятся равенством

$$u_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^N}\varphi_0^*(z)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right)^N + \frac{c_{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right)^{N-1} + \ldots + c_1\frac{1}{\varepsilon}2a\ln\frac{|z|}{R}\right] =$$

$$= \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^N}\varphi_0^*(z)e^\tau\left(\frac{\tau^N}{N!} + m_{N-1}\tau^{N-1} + \ldots + m_1\tau\right).$$

Таким образом, из формулы (6.3) вытекает, что функция $f(z,\varepsilon)$ представима в виде

$$-f(z,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{N+1}\bar{z}u_{N\bar{z}}(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = a\varepsilon^N\left(u_N + \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\varphi_0^*(z)\frac{e^\tau}{\theta^{N-1}}P_N'\right).$$

Вследствие уравнения (6.2) и условий задачи Римана–Гильберта для нахождения R_N получаем следующую задачу:

$$R_{N\bar{z}} - R_N = f(z,\varepsilon),$$
$$\operatorname{Re}((\alpha+i\beta)R_N)(z) = 0, \quad t\in\Gamma,$$
$$R_N(z_j) = 0, \quad j=\overline{1,\varkappa+1}, \quad z_j\in D. \tag{6.4}$$

Решение уравнения (6.2), т.е. первого уравнения в (6.4), даётся формулой

$$R_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = e^\tau\left[\varphi_0(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{e^{-\tau}f(\zeta,\varepsilon)\,d_2\zeta}{\zeta - z}\right]_{\tau=\tau(\varepsilon,z)},$$

$$R_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)} = (e^\tau\varphi_0(z) + e^\tau T(e^{-\tau}f)) \equiv R_{Na} + R_{Nb}.$$

Аналогично оценке (5.2) величины P_k для P_N' получаем, что

$$|P_N'| \leqslant 1 + \frac{(N-1)^2}{2}|\theta|\frac{1}{1-|\theta|}. \tag{6.5}$$

Далее имеем

$$\frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{N-1}}\frac{1}{\theta^{N-1}} = \frac{e^{-c^2/\varepsilon^2}}{\varepsilon^{2N-2}}\frac{(2a\ln(R/|z|))^{N-1}}{\varepsilon^{2N-2}} < \frac{\varepsilon^4c^{N-1}}{c^{2N-2}} < \frac{\varepsilon^4}{c^{N-1}},$$

где $c = 2a\ln(R/r_0) > 1$, при $0 < r_0 \leqslant |z| < R$.

Следовательно, для функции $f(z,\varepsilon)$ верна оценка

$$|f(z,\varepsilon)| \leqslant a\varepsilon^N\left[|u_N| + \frac{\varepsilon^4}{c^{N-1}}|\varphi_0^*(z)|e^\tau|P'_N|\right].$$

Тогда с учётом неравенств (5.2), (5.3) и (6.5) получаем

$$|f(z,\varepsilon)| \leqslant a\varepsilon^{N+1}M_0e^{1/\theta}\left[\frac{N+4}{c^{N+4}} + \frac{(N-1)^2}{c^{N-1}}\right] <$$

$$< a\varepsilon^{N+1}M_0e^{1/\theta}\left[\sum_{k=N+4}^{\infty}\frac{k}{c^k} + \sum_{k=N-1}^{\infty}\frac{k^2}{c^k}\right] < \varepsilon^{N+1}M_0e^{1/\theta}[s_1+s_2] < aC_1M_0e^{1/\theta}\varepsilon^{N+1},$$

т.е.

$$|f(z,\varepsilon)| \leqslant aC_1e^{1/\theta}\varepsilon^{N+1}.$$

Заметим, что согласно неравенству Гёльдера при $1/p+1/q=1$, $p>2$, справедливы неравенства

$$|Tf| = \left|-\frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{f(\zeta,\varepsilon)\,d_2\zeta}{\zeta-z}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\bigg(\int\limits_D|f(\zeta,\varepsilon)|^p\,d_2\zeta\bigg)^{1/p}\bigg(\int\limits_D|(\zeta-z)|^{-q}\,d_2\zeta\bigg)^{1/q}.$$

Оценим величину R_{Nb}:

$$|R_{Nb}| = e^\tau|T(e^{-\tau}f)| \leqslant \frac{1}{\pi}aC_1M_0e^{1/\theta}M_p\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{\pi}aC_1M_0M_p\varepsilon^{N+1},$$

где

$$M_p = \bigg(\int\limits_D|(\zeta-z)|^{-q}\,d_2\zeta\bigg)^{1/q} = \left(\frac{2\pi}{2-q}(R^{2-q}-r_0^{2-q})\right)^{1/q}, \quad D=\{z: r_0\leqslant|z|\leqslant R\}.$$

Аналогичным образом для R_{Na}, воспользовавшись решением задачи Римана–Гильберта (6.4), получаем оценку

$$|R_{Na}| < \frac{1}{\pi}aC_1M_1M_p\varepsilon^{N+1}.$$

Следовательно,

$$|R_N(\tau,z,\varepsilon)|_{\tau=\tau(\varepsilon,z)}| < |R_{Na}| + |R_{Nb}| = C_N\varepsilon^{N+1},$$

где $C_N = \pi^{-1}aC_1(M_0+M_1)M_p$, причём постоянная C_N не зависит от ε.

Автор выражает искреннюю благодарность А.П. Солдатову и В.Ф. Сафонову за ценные советы и обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
2. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Курс высшей математики. Сингулярно возмущённые задачи и метод регуляризации. М., 2012.
3. *Рабинович Ю.Л., Хапаев М.М.* Линейные уравнения с малым параметром в окрестности регулярной особой точки // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. № 2. С. 268–271.
4. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
5. *Ломов И.С.* Необходимые и достаточные условия существования целых аналитических решений сингулярно возмущенных уравнений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 811–815.
6. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.

7. *Риман Б.* Сочинения. М., 1948.
8. *Hilbert D.* Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig; Berlin, 1924.
9. *Расулов А.Б.,Федоров Ю.С.* Сингулярно возмущенное уравнение Коши–Римана с особенностью в младшем коэффициенте // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 10. С. 1757–1763.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М, 1977.
12. *Солдатов А.П.* Краевая задача линейного сопряжения теории функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43. № 1. С. 184–202.
13. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
14. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Обобщение метода регуляризации на сингулярно возмущённые интегродифференциальные уравнения в частных производных // Изв. вузов. 2018. № 3. С. 9–22.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 27.11.2021 г.
После доработки 27.11.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 385–394

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОБЩЕГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ

© 2022 г. А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов

Методом обратной задачи рассеяния выводится эволюция данных рассеяния несамосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля, потенциал которого является решением общего нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. Приведён пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

DOI: 10.31857/S0374064122030086, **EDN:** BYMARS

Введение. Метод обратной задачи рассеяния ведёт своё начало с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ сведением её к обратной задаче рассеяния для самосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля на всей прямой. Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в работе Л.Д. Фаддеева [2] (подробное изложение см. также в [3, гл. 3, § 5; 4, гл. 6, § 5]). Затем П. Лакс [5] заметил универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего уравнения КдФ. В современной научной литературе большое внимание привлекают интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованными источниками. Они имеют важные приложения в физике плазмы, гидродинамике, физике твёрдого тела и т.д. [6–11].

Нагруженными дифференциальными уравнениями принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части функционалы от решения, в частности, значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвящённых нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [12, 13] и А.И. Кожанова [14].

Отметим, что обратная задача рассеяния для несамосопряжённого оператора Штурма–Лувилля на всей оси изучалась в работах [15, 16]. Интегрирование уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций рассмотрено в работе [17]. Интегрирование нагруженного уравнения КдФ в классе периодических функций исследовалось в [18, 19].

Зададим оператор H равенством

$$H := -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u',$$

здесь и далее $u = u(x,t)$, а штрих обозначает частную производную по x, т.е. $u' = u_x$. Согласно [4, гл. 12, § 2] существует последовательность (P_k), $k \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, полиномов (от u и производных u по x), для которой справедливы равенства $HP_k = P'_{k+1}$. В частности, первые четыре элемента этой последовательности следующие:

$$P_0 = -\frac{1}{2}, \quad P_1 = -\frac{1}{2}u, \quad P_2 = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2, \quad P_3 = -\frac{1}{8}u_{xxxx} + \frac{5}{4}uu_{xx} + \frac{5}{8}(u_x)^2 - \frac{5}{4}u^3.$$

Положим

$$L(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + u. \tag{1}$$

Оператор

$$B_q := \sum_{k=0}^{q} \left(\frac{1}{2} P_k' - P_k \frac{d}{dx} \right) (2L)^{q-k}$$

удовлетворяет соотношению Лакса $[B_q, L] = B_q L - L B_q = -P_{q+1}'$.

Пусть $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p$ – произвольные действительные числа. Введём следующие обозначения:

$$X_q = -P_{q+1}', \quad Y_p = \sum_{q=0}^{p} c_q B_q, \quad Z_p = \sum_{q=0}^{p} c_q X_q.$$

Тогда справедливо равенство $[Y_p, L] = Z_p$. Уравнение

$$u_t = Z_p(u)$$

называется *общим уравнением КдФ*. В частности, при $p = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = 4$ и $p = 2,\ c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 8$ соответственно имеем

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u_t = u_{xxxxx} - 20u_x u_{xx} - 10uu_{xx} + 30u^2 u_x.$$

Рассмотрим общее нагруженное уравнение КдФ с источником, имеющим вид

$$u_t - Z_p(u) + \gamma(t) F(u(0,t)) u_x = 2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^{l} \frac{d}{dx} (\varphi_j^l \varphi_j^{m_j-1-l}), \tag{2}$$

$$L(t)\varphi_j^l = k_j^2 \varphi_j^l + l\varphi_j^{l-1} \quad (\operatorname{Im} k_j > 0), \quad j = \overline{1,N}, \quad l = \overline{0, m_j - 1}, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, оператор L задан равенством (1), C_m^l – биномиальные коэффициенты, $F(z)$ – некоторый полином от переменной z, а $\gamma(t)$ – заданная непрерывная функция. Функции $\varphi_j^l = \varphi_j^l(x,t)$ при каждом неотрицательном t принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R})$ квадратично суммируемых на оси функций, а $\varphi_j^0 = \varphi_j^0(x,t)$ – собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_j(t) = k_j^2(t)$ $(\operatorname{Im} k_j > 0)$ кратности $m_j(t)$, $l = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1,N}$.

Система уравнений (2), (3) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где начальная функция $u_0(x)$ задана, комплекснозначна и обладает свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| e^{\varepsilon |x|}\, dx < \infty; \tag{5}$$

2) несамосопряжённый оператор $L(0)$ имеет ровно N комплексных собственных значений $\lambda_1(0),\ \lambda_2(0),\ \ldots,\ \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0),\ m_2(0),\ \ldots,\ m_N(0)$ соответственно и не имеет спектральных особенностей.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_j - 1 - l)!} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^{m_j-1}(x,t) \varphi_j^{m_j-1-l}(x,t)\, dx = A_{m_j-1-l}^{j}(t), \quad l = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,N}, \tag{6}$$

где $A_{m_j-1-l}^{j}(t)$ – заданные непрерывные функции.

Пусть функция $u(x,t) = \operatorname{Re} u(x,t) + i \operatorname{Im} u(x,t)$ обладает необходимой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$ так, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(|u(x,t)| e^{\varepsilon |x|} + \sum_{j=1}^{2p+1} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty. \tag{7}$$

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j = \overline{1,N}$, $l = \overline{0, m_j - 1}$, задачи (2)–(7) с помощью метода обратной задачи рассеяния для несамосопряжённого оператора $L(t)$.

1. Необходимые сведения. Рассмотрим уравнение

$$L(0)y := -y'' + u_0(x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

потенциал $u_0(x)$ в котором предполагается комплекснозначным и удовлетворяющим условию (5). В этом пункте приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения о прямой и обратной задачах рассеяния для уравнения (8). Обозначим через $e_+(x,k)$ и $e_-(x,k)$ решения уравнения (8) с условиями на бесконечности при $\operatorname{Im} k > -\varepsilon/2$:

$$e_+(x,k) = e^{ikx} + o(1) \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad e_-(x,k) = e^{-ikx} + o(1) \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{9}$$

Эти решения называются *решениями Йоста*, при выполнении условия (5) они существуют, единственны и голоморфны по k в полуплоскости $\operatorname{Im} k > -\varepsilon/2$ и имеют следующие представления:

$$e_\pm(x,k) = e^{\pm ikx} \pm \int\limits_x^{\pm\infty} K_\pm(x,y) e^{\pm iky}\, dy, \tag{10}$$

где ядра $K_\pm(x,y)$ связаны с потенциалом $u_0(x)$ соотношением

$$u_0(x) = \mp 2 \frac{dK_\pm(x,x)}{dx}. \tag{11}$$

Отметим также, что пары функций $(e_\pm(x,k), e_\pm(x,-k))$ образуют в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon/2$ фундаментальные системы решений, вронскианы $W\{e_\pm(x,k), e_\pm(x,-k)\}$ которых равны $\mp 2ik$.

Обозначим через $\omega(k)$ и $v(k)$ вронскианы

$$\omega(k) := e_-(x,k)e'_+(x,k) - e'_-(x,k)e_+(x,k) \quad \text{и} \quad v(k) := e_+(x,-k)e'_-(x,k) - e_-(x,k)e'_+(x,-k).$$

Функция $\omega(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} k > -\varepsilon/2$ и обладает асимптотикой $\omega(k) = 2ik(1 + O(1/k))$ при $|k| \to \infty$, равномерной в каждой полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant \eta$, $\eta > -\varepsilon/2$. Отсюда следует, что в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ функция $\omega(k)$ имеет конечное число нулей (в общем случае кратных). Требование отсутствия спектральных особенностей оператора $L(0)$ означает отсутствие действительных нулей у функции $\omega(k)$, т.е. $\omega(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$. Обозначим через k_1, k_2, $\ldots$, k_N невещественные нули функции $\omega(k)$ $(\operatorname{Im} k_j > 0$, $j = \overline{1,N})$, тогда $\lambda_j = k_j^2$, $j = \overline{1,N}$, – собственные значения оператора $L(0)$. Кратность корня k_j уравнения $\omega(k) = 0$ обозначим через m_j, $j = \overline{1,N}$.

Функция $v(k)$ в отличие от $\omega(k)$ задана только в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon/2$. Функции $\omega(k)$ и $v(k)$ в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon/2$ связаны соотношением

$$\omega(k)\omega(-k) - v(k)v(-k) = 4k^2. \tag{12}$$

Кроме того, в полосе $|\operatorname{Im} k| < \varepsilon/2$ справедливо равенство

$$e_-(x,k) = \frac{v(k)}{2ik} e_+(x,k) + \frac{\omega(k)}{2ik} e_+(x,-k). \tag{13}$$

Существуют последовательности чисел $\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\}$ и $\{\theta_0^j, \theta_1^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\}$, $j = \overline{1, N}$, называемые *нормировочными цепочками*, такие, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s!}\bigg(\Big(\frac{d}{dk}\Big)^s e_-(x,k)\bigg)\bigg|_{k=k_j} = \sum_{\nu=0}^{s} \chi_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\bigg(\Big(\frac{d}{dk}\Big)^\nu e_+(x,k)\bigg)\bigg|_{k=k_j},$$

$$\frac{1}{s!}\bigg(\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^s e_-(x,\sqrt{\lambda})\bigg)\bigg|_{\lambda=k_j^2} = \sum_{\nu=0}^{s} \theta_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\bigg(\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^\nu e_+(x,\sqrt{\lambda})\bigg)\bigg|_{\lambda=k_j^2}, \tag{14}$$

где $s = \overline{0, m_j-1}$, $j = \overline{1, N}$, при этом $\chi_0^j \neq 0$, $\theta_0^j \neq 0$. Здесь и далее ветвь квадратного корня $k = \sqrt{\lambda}$ выбирается так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$. Цепочки нормировочных чисел $\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\}$ и $\{\theta_0^j, \theta_1^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\}$, $j = \overline{1, N}$, связаны между собой с помощью рекуррентных соотношений.

Известно (см. [15, 16]), что ядро $K_+(x,y)$ оператора преобразования (10) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K_+(x,y) + F_+(x+y) + \int_x^\infty K_+(x,s)F_+(s+y)\,ds = 0, \quad x \leqslant y,$$

где

$$F_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(k)e^{ikx}\,dk + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_j-1} \chi_{m_j-\nu-1}^j \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dk^\nu}\Big(\frac{2k(k-k_j)^{m_j}}{w(k)}e^{ikx}\Big), \tag{15}$$

$$S(k) := \frac{v(k)}{w(k)}, \tag{16}$$

при этом потенциал $u_0(x)$ находится по формуле (11).

Определение. Набор $\{S(k), \lambda_j, \chi_0^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\colon\ j = \overline{1, N}\}$ или $\{S(k), \lambda_j, \theta_0^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\colon\ j = \overline{1, N}\}$ называется *данными рассеяния* для оператора $L(0)$.

Нахождение комплекснозначного потенциала $u_0(x)$ по данным рассеяния называют *обратной задачей*.

Справедлива [15]

Теорема 1. *Данные рассеяния однозначно определяют оператор* L.

В дальнейшем часто будем пользоваться результатами следующих лемм, которые доказываются непосредственной проверкой.

Лемма 1. *Если функции* $y(x,\zeta)$ *и* $z(x,\eta)$ *являются решениями уравнений* $Ly = \zeta^2 y$ *и* $Lz = \eta^2 z$, *то справедливо соотношение*

$$\frac{d}{dx}W\{y,z\} = (\zeta^2 - \eta^2)yz.$$

Лемма 2. *Пусть функции* e_- *и* φ_j^l, $l = \overline{0, m_j-1}$, *являются решениями уравнений*

$$Le_- = \lambda e_- \quad \text{и} \quad L\varphi_j^l = \lambda_j\varphi_j^l + l\varphi_j^{l-1}, \quad l = \overline{0, m_j-1}, \quad \lambda = k^2, \tag{17}$$

соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{d}{dx}W\{\varphi_j^l, e_-\} = (\lambda_j - \lambda)\varphi_j^l e_- + l\varphi_j^{l-1}e_-.$$

Придавая в равенстве (17) l последовательно значения $0, 1, \ldots,$ получаем

Следствие 1. *При выполнении условий леммы 2 и* $\lambda \neq \lambda_j$ *справедливы соотношения*

$$\varphi_j^l e_- = \sum_{r=0}^{l} \frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^{r+1}} \frac{l!}{(l-r)!} \frac{d}{dx} W\{e_-, \varphi_j^{l-r}\},$$

$$\varphi_j^{m_j-1-l} e_- = \sum_{r=0}^{m_j-1-l} \frac{(m_j-1-l)!}{(\lambda-\lambda_j)^{m_j-r}(m_j-1-l-r)!} \frac{d}{dx} W\{e_-, \varphi_j^{m_j-1-l-r}\}. \tag{18}$$

Дифференцируя равенство (18) n раз по λ и полагая $\lambda=\lambda_j$, докажем

Следствие 2. *Справедливы соотношения*

$$\varphi_j^{l-1} e_-^{(n)}(x,k_j) = \frac{n}{l} \varphi_j^l e_-^{(n-1)}(x,k_j) - \frac{1}{l} \frac{d}{dx} W\{e_-^{(n)}(x,k_j), \varphi_j^l(x,k_j)\}, \quad l = \overline{1, m_j-1}.$$

2. Эволюция данных рассеяния. Введём обозначение

$$G(x,t) := -\gamma(t) F(u(0,t)) u_x + 2 \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^l \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_j^l \varphi_j^{m_j-1-l}) \tag{19}$$

и будем рассматривать более общую задачу, а именно, рассмотрим уравнение

$$u_t - Z_p(u) = G(x,t). \tag{20}$$

Будем искать пару Лакса для уравнения (20) в виде

$$-\frac{\partial^2 e_-(x,t)}{\partial x^2} + (u-\lambda) e_-(x,,t) = 0,$$

$$\frac{\partial e_-(x,t)}{\partial t} = Y_p e_-(x,t) + \frac{1}{2} i\sqrt{\lambda} \sum_{l=0}^{p} c_l (2\lambda)^l e_-(x,t) + \Phi(x,t), \tag{21}$$

где $e_-(x,t) = e_-(x,\sqrt{\lambda},t)$ – решение Йоста уравнения $L(t)y = \lambda y$ с асимптотикой (9). Используя тождество

$$\frac{\partial^3 e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^3 e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t \partial x^2},$$

на основании равенств (19)–(21) придём к уравнению

$$-\Phi_{xx} + (u-\lambda)\Phi = -G(x,t) e_-(x,\sqrt{\lambda},t).$$

Будем искать его решения в виде

$$\Phi(x,t) = C(x) e_-(x,\sqrt{\lambda},t) + B(x) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t).$$

Тогда для определения функций $C(x)$ и $B(x)$ выводим систему уравнений

$$C'(x) e_-(x,\sqrt{\lambda},t) + B'(x) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) = 0,$$

$$C'(x) e'_-(x,\sqrt{\lambda},t) + B'(x) e'_-(x,-\sqrt{\lambda},t) = G(x,t) e_-(x,\sqrt{\lambda},t),$$

решение которой имеет представление

$$C(x) = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e_-(x,\sqrt{\lambda},t) e_-(x,-\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx, \quad B(x) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t) G(x,t)\, dx.$$

Следовательно, в этом случае второе уравнение системы (21) примет следующий вид:

$$\frac{\partial e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = Y_p e_-(x,\sqrt{\lambda},t) + \frac{1}{2}i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p} c_l(2\lambda)^l e_-(x,\sqrt{\lambda},t) -$$

$$-\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\int\limits_{-\infty}^{x} e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)\int\limits_{-\infty}^{x} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx. \tag{22}$$

Переходя в равенстве (22) к пределу $x\to\infty$ и учитывая (5), (9), (12), (13), получаем

$$\frac{\partial \omega(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = -\frac{\omega(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx -$$

$$-\frac{v(-\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx, \tag{23}$$

$$\frac{\partial v(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p} c_l(2\lambda)^l v(\sqrt{\lambda},t) - \frac{v(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx -$$

$$-\frac{\omega(-\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx. \tag{24}$$

Умножая равенство (24) на $\omega(\sqrt{\lambda},t)$ и вычитая из него равенство (23), умноженное на $v(\sqrt{\lambda},t)$, а также используя (13) и (16), найдём, что

$$\frac{\partial S(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t} = i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p} c_l(2\lambda)^l S(\sqrt{\lambda},t) + \frac{2i\sqrt{\lambda}}{\omega^2(\sqrt{\lambda},t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)G(x,t)\,dx.$$

Лемма 3. *Справедливы тождества*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t)e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx = -\gamma(t)F(u(0,t))v(\sqrt{\lambda},t)\omega(\sqrt{\lambda},t), \tag{25}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t)e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)\,dx = \gamma(t)F(u(0,t))v(\sqrt{\lambda},t)v(-\sqrt{\lambda},t), \tag{26}$$

где функция $G(x,t)$ определена равенством (19).

Доказательство. Действительно, используя определение (19), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t)e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx = -\gamma(t)F(u(0,t))\int\limits_{-\infty}^{\infty} e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)u_x(x,t)\,dx +$$

$$+2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l})e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx=$$

$$=2\gamma(t)F(u(0,t))\int\limits_{-\infty}^{\infty}(e_-''(x,\sqrt{\lambda},t)+\lambda e_-(x,\sqrt{\lambda},t))e_-'(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\biggl(\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\biggl[\varphi_j^l e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j^{m_j-1-l}+$$

$$+\varphi_j^{m_j-1-l}e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j^{m_j-1-l}\varphi_j^l-2\varphi_j^l\varphi_j^{m_j-1-l}\frac{\partial}{\partial x}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\biggr]\biggr)\,dx=$$

$$=\gamma(t)F(u(0,t))\int\limits_{-\infty}^{\infty}[((e_-'(x,\sqrt{\lambda},t))^2)'+k^2(e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t))']\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\biggl(\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}[\varphi_j^l e_-W\{e_-,\varphi_j^{m_j-1-l}\}+\varphi_j^{m_j-1-l}e_-W\{e_-,\varphi_j^l\}]\biggr)\,dx.$$

Отсюда, воспользовавшись следствием 1, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,t)e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx=\gamma(t)F(u(0,t))\lim_{R\to\infty}[\lambda e_-^2(s,\sqrt{\lambda},t)+(e_-'(s,\sqrt{\lambda},t))^2]|_{-R}^{R}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\biggl[\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\sum_{r=0}^{l}\frac{l!}{(l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}(W\{e_-,\varphi_j^{l-r}\})+$$

$$+\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}W\{e_-,\varphi_j^l\}\frac{d}{dx}(W\{e_-,\varphi_j^{m_j-1-l-r}\})\biggr]\,dx=$$

$$=\gamma(t)F(u(0,t))\lim_{R\to\infty}\biggl[\lambda\biggl(\frac{v(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}e^{i\sqrt{\lambda}R}+\frac{w(\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}e^{-i\sqrt{\lambda}R}\biggr)^2-$$

$$-\lambda e^{2i\sqrt{\lambda}R}+\biggl(\frac{v(\sqrt{\lambda},t)}{2}e^{i\sqrt{\lambda}R}-\frac{w(\sqrt{\lambda},t)}{2}e^{-i\sqrt{\lambda}R}\biggr)^2+\lambda e^{2i\sqrt{\lambda}R}\biggr]=$$

$$=-\gamma(t)F(u(0,t))v(\sqrt{\lambda},t)\omega(\sqrt{\lambda},t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}(W\{e_-,\varphi_j^l\})W\{e_-,\varphi_j^{m_j-1-l-r}\}\,dx=$$

$$=-\gamma(t)F(u(0,t))v(\sqrt{\lambda},t)w(\sqrt{\lambda},t).$$

Аналогично доказывается равенство (26). Лемма доказана.

Согласно лемме 1 и равенствам (25) и (26) имеем $\omega_t(\sqrt{\lambda},t)=0$. Следовательно, учитывая определение (16), заключаем, что

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0,\tag{27}$$

$$\frac{\partial S(\sqrt{\lambda},t)}{\partial t}=\left(i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^l+2i\sqrt{\lambda}\gamma(t)F(u(0,t))\right)S(\sqrt{\lambda},t). \qquad (28)$$

Теперь перейдём к нахождению эволюции нормировочной цепочки $\{\theta_0^n,\theta_1^n,\ldots,\theta_{m_j-1}^n\}$, соответствующей собственному значению λ_n, $n=\overline{1,N}$. Для этого запишем равенство (22) в следующем виде:

$$\frac{\partial e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t}=Y_p e_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\frac{1}{2}i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^l e_-(x,\sqrt{\lambda},t)-$$

$$-\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\Biggl[e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\int\limits_{-\infty}^{x}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)G\,dx-e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)\int\limits_{-\infty}^{x}e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)Gdx\Biggr]=$$

$$=Y_p e_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\frac{1}{2}i\sqrt{\lambda}\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^l e_-(x,\sqrt{\lambda},t)+$$

$$+\frac{\gamma(t)F(u(0,t))e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\Biggl[e_-(x,\sqrt{\lambda},t)e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)u(x,t)-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{x}u(s,t)(e_-'(s,\sqrt{\lambda},t)e_-(s,-\sqrt{\lambda},t)+e_-(s,\sqrt{\lambda},t)e_-'(s,-\sqrt{\lambda},t))ds\Biggr]-$$

$$-\frac{\gamma(t)F(u(0,t))e_-(x,-\sqrt{\lambda},t)}{2i\sqrt{\lambda}}\Biggl[e_-^2(x,\sqrt{\lambda},t)u(x,t)-\int\limits_{-\infty}^{x}2e_-'(s,\sqrt{\lambda},t)e_-(s,\sqrt{\lambda},t)u(s,t)ds\Biggr]+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{x}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!}\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}(W\{e_-(x,\sqrt{\lambda},t),\varphi_j^{m_j-1-l-r}\})\,dx\,\varphi_j^l,$$

и, продолжив преобразования, окончательно получим

$$\frac{\partial e_-(x,\sqrt{\lambda},t)}{\partial t}=Y_p e_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\frac{1}{2}ik\sum_{l=0}^{p}c_l(2\lambda)^l e_-(x,\sqrt{\lambda},t)-\gamma(t)F(u(0,t))e_-'(x,k,t)-$$

$$-i\sqrt{\lambda}\gamma(t)F(u(0,t))e_-(x,\sqrt{\lambda},t)+\varphi_j^l\int\limits_{-\infty}^{x}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\varphi_j^{m_j-1-l}e_-(x,\sqrt{\lambda},t)\,dx.$$

Дифференцируя это равенство m_n-1 раз по λ, полагая $\lambda=\lambda_n$, устремляя x к бесконечности, используя следствие 2, равенства (14) и приравнивая коэффициенты при $(ix)^l e^{i\sqrt{\lambda_n}x}$, $l=\overline{m_n-1,0}$, найдём аналог уравнений Гарднера–Грина–Крускала–Миуры

$$\frac{d\theta_r^n}{dt}=\Biggl[\sum_{l=0}^{p}2^l ic_l\lambda_n^{l+1/2}+A_0^n(t)-2i\lambda_n^{1/2}\gamma(t)F(u(0,t))\Biggr]\theta_r^n+$$

$$+\Biggl[\sum_{l=0}^{p}2^l ic_l\left(l+\frac{1}{2}\right)\lambda_n^{l-1/2}+A_1^n(t)-i\left(\frac{1}{2}\lambda_n^{-1/2}+1\right)\gamma(t)F(u(0,t))\Biggr]\theta_{r-1}^n+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{r}\Biggl[\sum_{l=0}^{p}2^l c_l\frac{i}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\left(l+\frac{1}{2}-\mu\right)\lambda_n^{l-\nu+1/2}+A_\nu^n(t)+$$

$$+\frac{i(-1)^\nu(2\nu-3)!}{2^{2\nu-2}\nu!(\nu-2)!}\lambda_n^{-(2\nu-1)/2}\gamma(t)F(u(0,t))\Biggr]\theta_{r-\nu}^n,\quad r=\overline{0,m_n-1},\quad n=\overline{1,N}. \qquad (29)$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Если система функций* $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $l=\overline{0,m_j-1}$, $j=\overline{1,N}$, *является решением задачи (2)–(7), то данные рассеяния* $\{S(\sqrt{\lambda},t),\lambda_n(t),\theta_0^n(t),\theta_1^n(t),\ldots,\theta_{m_n-1}^n(t),\ n==\overline{1,N}\}$ *несамосопряжённого оператора* $L(t)$ *с потенциалом* $u(x,t)$ *удовлетворяют дифференциальным уравнениям (27)–(29).*

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым позволяют применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (2)–(7).

Пусть задана функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (5). Тогда решение задачи (2)–(7) находится по следующему алгоритму.

Шаг 1. Решая прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$, получаем данные рассеяния $\{S(k),\lambda_j,\theta_0^j,\theta_1^j,\ldots,\theta_{m_j-1}^j:\ \ j=\overline{1,N}\}$ для оператора $L(0)$.

Шаг 2. Находим, согласно теореме 2, данные рассеяния при $t>0$:

$$\{S(k,t),\lambda_j(t),\theta_0^j(t),\theta_1^j(t),\ldots,\theta_{m_j-1}^j(t):\ \ j=\overline{1,N}\}.$$

Шаг 3. Используя метод, основанный на интегральном уравнении Гельфанда–Левитана–Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. получаем единственную (согласно теореме 1) функцию $u(x,t)$ по данным рассеяния при $t>0$, найденным на предыдущем шаге.

Шаг 4. После этого решаем прямую задачу для несамосопряжённого оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ и находим функции $\varphi_j^l(x,t)$, $l=\overline{0,m_{j-1}}$, $j=\overline{1,N}$.

Пример. В заключение приведём пример, иллюстрирующий применение теоремы 2.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t+20u_xu_{xx}-30u^2u_x+10uu_{xx}-u_{xxxxx}=-\gamma(t)u(0,t)u_x+2\frac{\partial}{\partial x}(\varphi^2(x,t)), \tag{30}$$

$$L(0)\varphi:=-\varphi''+u_0(x)\varphi=k^2\varphi, \tag{31}$$

$$u(x,0)=u_0(x)=\frac{8a^2e^{2iax}}{(1+e^{2iax})^2},\quad \operatorname{Im}a>0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{32}$$

Здесь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x,t)\,dx=A(t)=\frac{i}{2a}e^{-2\operatorname{arcsh}t},\quad \gamma(t)=8a^2(t^2+1)+\frac{(t^2+1)e^{-2\operatorname{arcsh}t}}{8a^4}-\frac{\sqrt{t^2+1}}{2ia^3}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$: $\lambda(0)=k^2=a^2$, $v(k,0)=0$, $S(k,0)=0$, $\theta_0(0)=1$. В силу теоремы 2 имеем $\lambda(t)=\lambda(0)=a^2$, $S(k,t)=0$, $\theta_0(t)=e^{\beta(t)}$, где

$$\beta(t)=32ia^5t+\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau-2ia\int\limits_0^t\gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau.$$

Подставляя эти данные в формулу (15), найдём ядро $F_+(x,t)=-2iae^{iax+\beta(t)}$ интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко.

Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y;t)-2iae^{\beta(t)}e^{ia(x+y)}-2iae^{\beta(t)}e^{iay}\int\limits_x^\infty K_+(x,s;t)e^{ias}ds=0,$$

получаем

$$K_+(x,y;t)=\frac{2iae^{\beta(t)}e^{ia(x+y)}}{1+e^{\beta(t)}e^{2iax}}.$$

Отсюда находим решение задачи Коши (30)–(32)

$$u(x,t) = \frac{8a^2 e^{2iax+2\,\mathrm{arcsh}\,t}}{(1+e^{2iax+2\,\mathrm{arcsh}\,t})^2}, \quad \varphi(x,t) = \frac{e^{iax}}{1+e^{2iax+2\,\mathrm{arcsh}\,t}}.$$

Заключение. Разработана процедура построения решения задачи Коши для общего нагруженного уравнения КдФ с источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций с помощью метода обратной задачи рассеяния для несамосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля. Приведён пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
2. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
5. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. № 5. P. 467–490.
6. *Mel'nikov V.K.* A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x, y plane // Commun. Math. Phys. 1987. V. 112. P. 639–652.
7. *Mel'nikov V.K.* Integration method of the Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source // Phys. Lett. A. 1988. V. 133. № 9. P. 493–496.
8. *Mel'nikov V.K.* Integration of the Korteweg–de Vries equation with a source // Inv. Probl. 1990. V. 6. № 2. P. 233–246.
9. *Leon J., Latifi A.* Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 1385–1403.
10. *Claude C., Leon J., Latifi A.* Nonlinear resonant scattering and plasma instability: an integrable model // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 3321–3330.
11. *Shchesnovich S.V., Doktorov E.V.* Modified Manakov system with self-consistent source // Phys. Lett. A. 1996. V. 213. № 1-2. P. 23–31.
12. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
13. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
14. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 4. С. 694–716.
15. *Блащак В.А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряжённого оператора. I // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 8. С. 1519–1533.
16. *Блащак В.А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряжённого оператора. II // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 10. С. 1915–1924.
17. *Хасанов А.Б., Хоитметов У.А.* Об интегрировании уравнения Кортевега–де Фриза в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Изв. вузов. Математика. 2018. № 3. С. 79–90.
18. *Хасанов А.Б., Матякубов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом // Теор. и мат. физика. 2020. Т. 203. № 2. С. 192–204.
19. *Яхшимуратов А.Б., Матёкубов М.М.* Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций // Изв. вузов. Математика. 2016. № 2. С. 87–92.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан,
Хорезмское отделение института математики
им. В.И. Романовского, Узбекистан,
Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 28.08.2020 г.
После доработки 01.02.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 395–406

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74+517.928.4

АЛГОРИТМ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

© 2022 г. А. А. Бободжанов, Б. Т. Калимбетов, В. Ф. Сафонов

Метод регуляризации Ломова обобщён на нелинейные сингулярно возмущённые интегро-дифференциальные уравнения с быстро осциллирующей правой частью. Установлено влияние ядра интегрального оператора, нелинейности и быстро осциллирующей части на асимптотику решения начальной задачи для указанных уравнений. Ранее изучались сингулярно возмущённые линейные системы такого типа и нелинейные без осциллирующей неоднородности системы.

DOI: 10.31857/S0374064122030098, **EDN:** BYQXIU

Светлой памяти нашего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящается эта работа

Введение. Исследование различных прикладных задач, связанных со свойствами сред с периодической структурой, приводит к изучению дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими неоднородностями. Уравнения такого типа часто встречаются, например, в электрических системах, находящихся под воздействием высокочастотных внешних сил. Наличие указанных сил создаёт серьёзные проблемы при численном интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений. Поэтому к таким уравнениям обычно применяются асимптотические методы, из которых наиболее известными являются метод расщепления Фещенко–Шкиля–Николенко [1–3] и метод регуляризации Ломова [4–14]. Однако оба эти метода были разработаны в основном для сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений, не содержащих интегрального оператора. Переход от дифференциальных уравнений к интегро-дифференциальным требует существенной перестройки алгоритма метода регуляризации. Интегральный член порождает в решениях новые типы сингулярностей, отличающиеся от уже известных, что усложняет разработку алгоритма метода регуляризации. Ранее изучались в основном линейные задачи такого типа.

В настоящей работе рассматривается нелинейная задача вида

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon\frac{dy}{dt} - A(t)y - \int\limits_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds - \varepsilon f(y,t) =$$

$$= h_1(t) + h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

где $y=y(t,\varepsilon)$ – неизвестная функция, $A(t)$, $K(t,s)$ $h_j(t)$, $f(y,t)$, $j=1,2$, $\beta(t)$ – заданные скалярные функции ($\beta'(t)$ – частота быстро осциллирующей неоднородности), y^0 – постоянная, $\varepsilon>0$ – малый параметр, число T задано.

Задачу (1) будем рассматривать при выполнении следующих условий:

1) имеют место включения $A(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $h_1(t),h_2(t),\beta(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $K(t,s)\in$ $\in C^\infty(\{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\},\mathbb{R})$; функция $f(y,t)=\sum_{k=0}^N f_k(t)y^k$ – многочлен по переменной y с коэффициентами $f_k(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $k=\overline{0,N}$, $N\in\mathbb{N}$;

2) при всех $t\in[0,T]$ справедливы неравенства $A(t)<0$ и $\beta'(t)>0$.

Цель работы состоит в обобщении алгоритма метода регуляризации Ломова на задачи вида (1) и в анализе сингулярностей в решении $y(t,\varepsilon)$, вносимых нелинейностью $f(y,t)$ и быстро осциллирующей неоднородностью $h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}$. Ради упрощения изучается скалярный вариант этой задачи. Предполагается, что исследование её в многомерном случае будет предметом наших последующих работ.

1. Пространство решений и регуляризация задачи (1). Для удобства обозначим $\lambda_1(t)\equiv A(t)$, $\lambda_2(t)\equiv\beta'(t)$, $\sigma=\sigma(\varepsilon)=e^{i\beta(0)/\varepsilon}$, введём регуляризирующие переменные (см. [4])

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_j(\theta)\,d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\quad j=1,2,\tag{2}$$

и рассмотрим следующую расширенную задачу:

$$L_\varepsilon\tilde y(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde y}{\partial t}+\sum_{j=1}^2\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde y}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)\tilde y-\int\limits_0^t K(t,s)\tilde y(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)\,ds-$$

$$-\varepsilon f(y,t)=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\quad \tilde y(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=0\\ \tau=0\\ \sigma=e^{i\beta(0)/\varepsilon}}}=y^0\tag{3}$$

для функции $\tilde y=\tilde y(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$, где, согласно (2), $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, $\psi=(\psi_1,\psi_2)$. Очевидно, что если $\tilde y=\tilde y(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ – решение задачи (3), то функция $\tilde y=\tilde y(t,\psi(t)/\varepsilon,\sigma,\varepsilon)$ является точным решением задачи (1), поэтому задача (3) является расширенной по отношению к задаче (1). Однако её нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не проведена регуляризация интегрального члена

$$J\tilde y\equiv J\biggl(\tilde y(t,\tau,\sigma,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=s\\ \tau=\psi(s)/\varepsilon}}\biggr)=\int\limits_0^t K(t,s)\tilde y(s,\psi(s)/\varepsilon,\sigma,\varepsilon)\,ds.$$

Для его регуляризации введём класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно действия оператора J (см. [4, с. 62]).

Рассмотрим пространство U функций $y(t,\tau,\sigma)$, представимых суммами*)

$$y(t,\tau,\sigma)=y_0(t,\sigma)+\sum_{j=1}^2 y_j(t,\sigma)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_y}y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},$$

$$y_j(t,\sigma),y^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}),\quad j=\overline{0,2},\quad m=(m_1,m_2),\quad 2\leqslant|m|\equiv m_1+m_2\leqslant N_y.\tag{4}$$

Отметим, что в (4) элементы пространства U зависят от ограниченной по $\varepsilon>0$ постоянной $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, которая не влияет на разработку излагаемого ниже алгоритма, поэтому в дальнейшем в записи элемента (4) этого пространства, ради краткости зависимость от σ опускаем. Кроме того, подчеркнём, что степень многочлена по экспонентам в (4) зависит от элемента $y(t,\tau)\in U$.

Покажем, что класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ асимптотически инвариантен относительно действия оператора J. Образ оператора J на элементе (4) имеет вид

$$Jy(t,\tau)=\int\limits_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds+\sum_{j=1}^2\int\limits_0^t K(t,s)y_j(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}\,ds+$$

*) Здесь и далее верхний индекс m в скобках в $y^{(m)}$ означает $y^{(m_1,m_2)}$ и является номером коэффициента $y^{(m)}$. Не следует путать его с номером производной.

$$+\sum_{|m|=2}^{N_y}\int_0^t K(t,s)y^{(m)}(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}\,ds,\quad (m,\lambda(t))\equiv m_1\lambda_1(t)+m_2\lambda_2(t).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_0^t K(t,s)y_j(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}\,ds=\varepsilon\int_0^t\frac{K(t,s)y_j(s)}{\lambda_j(s)}\,de^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}=$$

$$=\varepsilon\bigg[\frac{K(t,t)y_j(t)}{\lambda_j(t)}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_j(\theta)\,d\theta}-\frac{K(t,0)y_j(0)}{\lambda_j(0)}\bigg]-\varepsilon\int_0^t\bigg(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)y_j(s)}{\lambda_j(s)}\bigg)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\lambda_j(\theta)\,d\theta}\,ds=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}[(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=t}e^{\tau_j}-(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=0}]|_{\tau=\psi_j(t)/\varepsilon},\tag{5}$$

где

$$I_j^0=\frac{1}{\lambda_j(s)},\quad I_j^\nu=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{\nu-1},\quad j=1,2,\quad \nu\geqslant 1.$$

И аналогично, учитывая, что $(m,\lambda(t))\neq 0$ для любого $t\in[0,T]$, $|m|\geqslant 2$, получаем

$$\int_0^t K(t,s)y^{(m)}(s)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}\,ds=\int_0^t\frac{K(t,s)y^{(m)}(s)}{(m,\lambda(s))}\,de^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}=$$

$$=\varepsilon\bigg[\frac{K(t,t)y^{(m)}(t)}{(m,\lambda(t))}e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t(m,\lambda(\theta))\,d\theta}-\frac{K(t,0)y^{(m)}(0)}{(m,\lambda(0))}\bigg]-\varepsilon\int_0^t\bigg(\frac{\partial}{\partial s}\frac{K(t,s)y^{(m)}(s)}{(m,\lambda(s))}\bigg)e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s(m,\lambda(\theta))\,d\theta}\,ds=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}[(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))|_{s=t}e^{(m,\tau)}-(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))_{s=0}]|_{\tau=\psi_j(t)/\varepsilon},\tag{6}$$

где введены операторы

$$I_m^0=\frac{1}{(m,\lambda(s))},\quad I_m^\nu=\frac{1}{(m,\lambda(s)))}\frac{\partial}{\partial s}I_m^{\nu-1},\quad |m|\geqslant 2,\quad \nu\geqslant 1.$$

Нетрудно показать (см., например, [15, с. 291–294]), что ряды (5) и (6) сходятся асимптотически при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $t\in[0,T]$). Это означает, что класс M_ε асимптотически инвариантен (при $\varepsilon\to+0$) относительно действия оператора J.

Введём операторы $R_\nu: U\to U$, действующие на каждый элемент $y(t,\tau)\in U$ вида (4) по правилу

$$R_0y(t,\tau)=\int_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds,\tag{7_0}$$

$$R_1y(t,\tau)=\sum_{j=1}^{2}\bigg[\frac{K(t,t)y_j(t)}{\lambda_j(t)}e^{\tau_j}-\frac{K(t,0)y_j(0)}{\lambda_j(0)}\bigg]+\sum_{|m|}^{N_y}\bigg[\frac{K(t,t)y^{(m)}(t)}{(m,\lambda(t))}e^{(m,\tau)}-\frac{K(t,0)y^{(m)}(0)}{(m,\lambda(0))}\bigg],\tag{7_1}$$

$$R_\nu y(t,\tau)=(-1)^{\nu+1}[(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=t}e^{\tau_j}-(I_j^\nu(K(t,s)y_j(s)))|_{s=0}]+$$

$$+(-1)^{\nu+1}\sum_{|m|=2}^{N_y}[(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))|_{s=t}e^{(m,\tau)}-(I_m^\nu(K(t,s)y^{(m)}(s)))|_{s=0}].\tag{7_ν}$$

Пусть $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ – произвольная непрерывная по $(t,\tau)\in[0,T]\times\{\tau:\operatorname{Re}\tau_j\leqslant 0,\ \ j=1,2\}$ функция, имеющая асимптотическое разложение

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau),\quad y_k(t,\tau)\in U, \tag{8}$$

сходящееся при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $(t,\tau)\in[0,T]\times\{\tau:\operatorname{Re}\tau_j\leqslant 0,\ \ j=1,2\}$). Тогда образ $J\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ этой функции разлагается в асимптотический ряд

$$J\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Jy_k(t,\tau)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}.$$

Это равенство является основанием для введения расширения $\tilde{J}$ оператора J на рядах вида (8), именно, положим:

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\tilde{J}\biggl(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau)\biggr)\overset{\text{def}}{=}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}y_s(t,\tau). \tag{9}$$

Хотя оператор $\tilde{J}$ определён формально, его полезность очевидна, так как на практике обычно строят N-е приближение асимптотического решения задачи (2), в котором участвуют лишь N-е частичные суммы ряда (8), имеющие не формальный, а содержательный смысл.

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной задаче (2):

$$L_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=$$

$$=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\quad \tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{\substack{t=0\\ \tau=0\\ \sigma=e^{i\beta(0)/\varepsilon}}}=y^0,\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

где оператор $\tilde{J}$ задаётся равенством (9).

2. Итерационные задачи и их разрешимость в $\boldsymbol{U}$. Подставляя ряд (8) в задачу (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие итерационные задачи:

$$Ly_0(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)y_0-R_0y_0=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\quad y_0(0,0)=y^0; \tag{11_0}$$

$$Ly_1(t,\tau)=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+f(y_0,t)+R_1y_0,\quad y_1(0,0)=0; \tag{11_1}$$

$$Ly_2(t,\tau)=-\frac{\partial y_1}{\partial t}+\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1+R_1y_1+R_2y_0,\quad y_2(0,0)=0; \tag{11_2}$$

$$\ldots$$

$$Ly_k(t,\tau)=-\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t}+P_k(y_0,\ldots,y_{k-1},t)+R_ky_0+\ldots+R_1y_{k-1},\quad y_k(0,0)=0,\quad k>2, \tag{11_k}$$

где $P_k(y_0,\ldots,y_{k-1},t)$ – некоторый многочлен от $y_0,\ \ldots,\ y_{k-1}$, линейный относительно y_{k-1}. Запишем каждую из итерационных задач (11_k) в виде

$$Ly(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial y}{\partial\tau_j}-\lambda_1(t)y-R_0y=H(t,\tau),\quad y(0,0)=y_*, \tag{12}$$

где $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum_{j=1}^{2}H_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}$ – известная функция из пространства U, $y_*\in\mathbb{C}$ – постоянная, а оператор R_0 задаётся равенством (7_0).

Введём скалярное (при каждом $t\in[0,T]$) произведение в пространстве U:

$$\langle z,w\rangle\equiv\left\langle z_0(t)+\sum_{j=1}^{2}z_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_z}z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},w_0(t)+\sum_{j=1}^{2}w_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_w}w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\right\rangle\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}(z_0(t),w_0(t))+\sum_{j=1}^{2}(z_j(t),w_j(t))+\sum_{|m|=2}^{\min(N_z,N_w)}(z^{(m)}(t),w^{(m)}(t)),$$

где через $(\cdot,\cdot)$ обозначено обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}$, т.е. $(u(t),v(t))=u(t)\cdot\bar{v}(t)$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1), 2) и правая часть $H(t,\tau)$ уравнения (12) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости этого уравнения в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество*

$$\langle H(t,\tau),e^{\tau_1}\rangle\equiv 0\quad\text{для всех}\quad t\in[0,T]. \tag{13}$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (10) в виде элемента (4) пространства U (зависимость элемента (4) от σ по причине, объяснённой выше, опускаем):

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\sum_{j=1}^{2}y_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}y^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}. \tag{14}$$

Подставляя представление (14) в уравнение (12), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t)I-\lambda_1(t)]y_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]e^{(m,\tau)}-\lambda_1(t)y_0(t)-$$

$$-\int\limits_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds=H_0(t)+\sum_{j=1}^{2}H_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_H}H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}.$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем следующие уравнения:

$$-\lambda_1(t)y_0(t)-\int\limits_0^t K(t,s)y_0(s)\,ds=H_0(t), \tag{14_0}$$

$$[\lambda_j(t)I-\lambda_1(t)]y_j(t)=H_j(t),\quad j=1,2, \tag{14_j}$$

$$[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]y^{(m)}(t)=H^{(m)}(t),\quad 2\leqslant|m|\leqslant N_H. \tag{14_m}$$

Уравнение (14_0) в силу того, что $\lambda_1(t)\neq 0$ для всех $t\in[0,T]$, и включения $K(t,s)\in$ $\in C^\infty(\{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\},\mathbb{R})$ имеет единственное решение $y_0(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$. Уравнение (14_1) имеет вид $0\cdot y_1(t)=H_1(t)$. Оно разрешимо в пространстве $C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $H_1(t)\equiv 0$, т.е. когда $\langle H(t,\tau),e^{\tau_1}\rangle\equiv 0$ для всех $t\in[0,T]$. Уравнение (14_2) имеет единственное решение $y_2(t)=[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]^{-1}H_2(t)$ в классе $C^\infty([0,T],\mathbb{C})$.

Рассмотрим уравнение (14_m) более подробно:

$$[(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)]y^{(m)}(t)=H^{(m)}(t),\quad 2\leqslant m_1+m_2\leqslant N_H.$$

Покажем, что коэффициент $(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)$ отличен от нуля для любого $t\in[0,T]$, $2\leqslant m_1+m_2\leqslant N_H$. Действительно, предположим противное, т.е. что $(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)=0$ при некотором t. Отделяя в этом равенстве мнимую и действительную части, получаем

$$(m_1-1)\lambda_1(t)=0,\quad m_2\beta'(t)=0.$$

Второе равенство этой системы возможно, лишь когда $m_2=0$. Но тогда $m_1\geqslant 2$, и первое равенство не выполняется, так как $\lambda_1(t)<0$. Значит, $(m_1-1)\lambda_1(t)+im_2\beta'(t)\neq 0$ для всех $t\in[0,T]$, $2\leqslant m_1+m_2\leqslant N_H$. Отсюда следует, что каждое уравнение (14_m) имеет единственное решение и это решение записывается в виде

$$y^{(m)}(t)=[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]^{-1}H^{(m)}(t),\quad 2\leqslant |m|\leqslant N_H.$$

Таким образом, для разрешимости уравнения (12) необходимо и достаточно выполнения тождества (13). Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий теоремы 1 и условия (13) уравнение (12) имеет следующее решение в пространстве U:

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\alpha_1(t)e^{\tau_1}+[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]^{-1}H_2(t)e^{\tau_2}+$$
$$+\sum_{|m|=2}^{N_H}[(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)]^{-1}H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},\tag{15}$$

где $\alpha_1(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ – произвольная функция.

3. Однозначная разрешимость общей итерационной задачи в пространстве *U*. Теорема об остаточном члене. Как видно из (15), решение уравнения (12) определяется неоднозначно. Однако если его подчинить дополнительным условиям:

$$y(0,0)=y_*,\quad \left\langle -\frac{\partial y}{\partial t}+R_1y+Q(t,\tau),e^{\tau_1}\right\rangle\equiv 0\quad \text{для всех}\quad t\in[0,T],\tag{16}$$

где $Q(t,\tau)=Q_0(t)+\sum_{j=1}^{2}Q_i(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_Q}Q^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}$ – известная функция пространства U, а y_* – постоянная из $\mathbb{C}$, то задача (12) будет однозначно разрешимой в пространстве U. Заметим, что условия (16) являются естественными для всей серии итерационных задач (11_k) и возникают как условия разрешимости (13) при переходе от задачи (11_k) к задаче (11_{k+1}). Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) и 2), правая часть $H(t,\tau)$ уравнения (12) принадлежит пространству U и удовлетворяет условию ортогональности (13). Тогда уравнение (12) при дополнительных условиях (16) однозначно разрешимо в U.*

Доказательство. При выполнении условия (13) уравнение (12) имеет решение (15) в пространстве U, где $\alpha_1(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ – пока произвольная функция. Подчиним решение (15) первому условию (16), т.е. потребуем, чтобы $y(0,0)=y_*$. Получим, что $\alpha_1(0)=y^*$, где обозначено

$$y^*=y_*+\lambda_1^{-1}(0)H_0(0)-[\lambda_2(0)-\lambda_1(0)]^{-1}H_2(0)-\sum_{|m|=2}^{N_H}[(m,\lambda(0))-\lambda_1(0)]^{-1}H^{(m)}(0).\tag{17}$$

Подчиним теперь решение (15) второму условию (16). Предварительно вычислим*) выражение

$$-\frac{\partial y_0}{\partial t}+R_1y_0+Q(t,\tau)=-\dot y_0(t)-\dot\alpha_1(t)e^{\tau_1}-\left(\frac{H_2(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\right)^{\bullet}e^{\tau_2}-$$

*) Здесь и далее жирная точка справа над скобкой означает дифференцирование по t выражения, стоящего в этих скобках.

$$-\sum_{|m|=2}^{N_H}\left(\frac{H^{(m)}(t)}{(m,\lambda(t))-\lambda_1(t)}\right)^{\bullet}e^{(m,\tau)}+\frac{K(t,t)\alpha_1(t)}{\lambda_1(t)}e^{\tau_1}-\frac{K(t,0)\alpha_1(0)}{\lambda_1(0)}+$$

$$+\frac{K(t,t)H_2(t)}{\lambda_1(t)[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]}e^{\tau_2}-\frac{K(t,0)H_2(0)}{\lambda_1(0)[\lambda_2(0)-\lambda_1(0)]}+Q_0(t)+\sum_{j=1}^{2}Q_i(t)e^{\tau_j}+\sum_{|m|=2}^{N_Q}Q^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}.$$

Поэтому второе условие (16) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-\dot{\alpha}_1(t)+\frac{K(t,t)\alpha_1(t)}{\lambda_1(t)}=Q_1(t).$$

Присоединяя к нему начальное условие (17), однозначно найдём функцию

$$\alpha_1(t)=\exp\biggl(\int_0^t\frac{K(s,s)}{\lambda_1(s)}\,ds\biggr)\biggl(y^*+\int_0^t\exp\biggl(-\int_0^x\frac{K(\theta,\theta)}{\lambda_1(\theta)}\,d\theta\biggr)Q_1(x)dx\biggr),$$

а значит, построим решение (15) задачи (12) в пространстве U однозначным образом. Теорема доказана.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (11_k), найдём однозначно их решения в пространстве U и построим ряд (8). Составим частичную сумму $S_n(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k y_k(t,\tau)$ этого ряда и обозначим её сужение при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$ через $y_{\varepsilon n}(t)$. Имеет место

Лемма. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда функция $y_{\varepsilon n}(t)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{n+1},* т.е.

$$\varepsilon\frac{dy_{\varepsilon n}(t)}{dt}-A(t)y_{\varepsilon n}(t)-\int_0^t K(t,s)y_{\varepsilon n}(s,\varepsilon)\,ds-\varepsilon f(y_{\varepsilon n},t)=$$

$$=h_1(t)+h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}+\varepsilon^{n+1}F(t,\varepsilon),\quad y_{\varepsilon n}(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],$$

где $\|F(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\leqslant\overline{F}$, $\overline{F}>0$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$ достаточно мало.

Доказательство. Обозначим через L_0 следующий оператор:

$$L_0\equiv\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial}{\partial\tau_j}-A(t).$$

Подставив $y_0(t,\tau)$, $\ldots$, $y_n(t,\tau)$ в первые n уравнений системы (11_k), получим тождества. Умножим их на 1, ε, $\ldots$, ε^n соответственно и сложим. В результате получим

$$L_0(y_0+\varepsilon y_1+\cdots+\varepsilon^n y_n)-R_0(y_0+\varepsilon y_1+\cdots+\varepsilon^n y_n)\equiv h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_2}\sigma-$$

$$-\varepsilon\biggl(\frac{\partial y_0}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial y_1}{\partial t}+\cdots+\varepsilon^{n-1}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial t}\biggr)+\varepsilon R_1y_0+\varepsilon^2(R_1y_1+R_2y_0)+$$

$$+\varepsilon^n(R_1y_{n-1}+\cdots+R_ny_0)+\biggl[\varepsilon f(y_0,t)+\varepsilon^2\biggl(\frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y}y_1\biggr)+\cdots+\varepsilon^N P_n(y_0,\ldots,y_{n-1},t)\biggr].$$

Произведём здесь сужение при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$; при этом учтём, что выполняются тождества

$$e^{\tau_2}\sigma|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\equiv e^{i\beta(t)/\varepsilon},\qquad\sum_{0\leqslant|m|\leqslant k}z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}\equiv\sum_{0\leqslant|m|\leqslant k}z^{(m)}(t)e^{(m,\psi(t)/\varepsilon)},$$

$$L_0 v(t,\tau,\varepsilon)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} \equiv \varepsilon \frac{dv(t,\psi(t)/\varepsilon,\varepsilon)}{dt} - A(t)v(t,\psi(t)/\varepsilon,\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial v(t,\psi(t)/\varepsilon,\varepsilon)}{\partial t}.$$

Будем иметь

$$\varepsilon \frac{dy_{\varepsilon n}}{dt} - A(t)y_{\varepsilon n}(t) = \varepsilon^{n+1}\frac{\partial y_n(t,\psi)}{\partial t} + h_1(t) + h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon} + \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} y_s(t,\psi) +$$

$$+ \varepsilon\biggl[f(y_0,t) + \varepsilon \frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y} y_1 + \ldots + \varepsilon^{n-1} P_n(y_0,\ldots,y_{n-1},t)\biggr],$$

или

$$\varepsilon \frac{dy_{\varepsilon n}}{dt} = A(t)y_{\varepsilon n}(t) + \int\limits_0^t K(t,s)y_{\varepsilon n}(s)\,ds + h_1(t) + h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon} + \varepsilon^{n+1}\frac{\partial y_n(t,\psi)}{\partial t} +$$

$$+ \varepsilon f(y_{\varepsilon n}(t),t) - \biggl[\int\limits_0^t K(t,s)y_{\varepsilon n}(s)\,ds - \sum_{r=0}^{n} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} y_s(t,\psi)\biggr] -$$

$$- \varepsilon\biggl[f(y_{\varepsilon n}(t),t) - f(y_0,t) - \frac{\partial f(y_0,t)}{\partial y} y_1 - \ldots - \varepsilon^{n-1} P_n(y_0,\ldots,y_{n-1},t)\biggr].$$

Согласно определению операторов R_k выражение в первой квадратной скобке последнего тождества представляется в виде $\varepsilon^{n+1}M_1(t,\varepsilon)$, а по построению задач (11_0), …, (11_n) выражение во второй квадратной скобке – в виде $\varepsilon^{n+1}M_2(t,\varepsilon)$, где $\|M_i\|_{C[0,T]} \leqslant \text{const}$ (для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0])$, $i=1,2$. Обозначая $F(t,\varepsilon) \equiv -M_1(t,\varepsilon) - M_2(t,\varepsilon) + \partial y_N(t,\psi)/\partial t$, получаем утверждение леммы.

При обосновании асимптотической сходимости формального решения $y_{\varepsilon n}(t)$ к точному $y(t,\varepsilon)$ используется следующее утверждение о разрешимости операторного уравнения $P_\varepsilon(u) = 0$ (см., например, [16, с. 187–188]).

Теорема (Срубщик–Юдович). *Пусть оператор P_ε действует из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 и имеет в некотором шаре $\{\|u-u_0\| \leqslant r\} \subset B_1$ первые две непрерывные производные. Пусть также существует оператор $\Gamma_\varepsilon \equiv [P'_\varepsilon(u_0)]^{-1}$ и выполнены условия*

$$1a)\ \|\Gamma_\varepsilon\| \leqslant c_1\varepsilon^{-k}; \quad 2a)\ \|P_\varepsilon(u_0)\| \leqslant c_2\varepsilon^m \quad (m>2k); \quad 3a)\ \|P''_\varepsilon(u)\| \leqslant c_3.$$

Тогда уравнение $P_\varepsilon(u)=0$ имеет при достаточно малых $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\in(0,\varepsilon_0])$ решение $u_* \in B_1$, удовлетворяющее неравенству $\|u_*-u_0\|_{B_1} \leqslant c\varepsilon^{m-k}$. Здесь c, c_1, c_2, c_3 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Применяя эту теорему к уравнению

$$P_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon\frac{du}{dt} - A(t)u - \int\limits_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)\,ds -$$

$$- \varepsilon f(u+y^0,\varepsilon) - A(t)y^0 - \int\limits_0^t K(t,s)y^0\,ds - h_1(t) - h_2(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon} = 0,$$

приходим к следующему результату (см. [16, с. 190–192]).

Теорема 3. *Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1) и 2). Тогда при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0>0$ достаточно мало) задача (1) имеет единственное решение $y(t,\varepsilon) \in C^1([0,T],\mathbb{C})$; при этом имеет место оценка*

$$\|y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon n}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant c_n\varepsilon^{n+1}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $y_{\varepsilon n}(t)$– *сужение (при* $\tau = \psi(t)/\varepsilon$) n*-й частичной суммы ряда (8) (с коэффициентами* $y_k(t,\tau) \in U$, *удовлетворяющими итерационным задачам* (11_k)), *а постоянная* $c_n > 0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

4. Построение решения первой итерационной задачи. Используя теорему 1, найдём решение первой итерационной задачи (11_0). Так как правая часть $h_1(t) + h_2(t)e^{\tau_2}\sigma$ уравнения (14_0) удовлетворяют условию (13), то это уравнение имеет (согласно (15)) решение в пространстве U вида

$$y_0(t,\tau) = y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + y_2(t)e^{\tau_2}, \tag{18}$$

где $\alpha_1^{(0)}(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$ – пока произвольная функция, $y_0^{(0)}(t)$ – решение интегрального уравнения $-\lambda_1(t)y_0^{(0)}(t) - \int_0^t K(t,s)y_0^{(0)}(s)\,ds = h_1(t)$, $y_2(t) = [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)]^{-1}h_2(t)\sigma$. Подчиняя семейство (18) начальному условию $y_0(0,0) = y^0$, будем иметь $y_0^{(0)}(0) + \alpha_1(0) + y_2^{(0)}(0) = y^0$, т.е.

$$\alpha_1(0) = y^0 + \lambda_1^{-1}(0)h_1(0) - [\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]^{-1}h_2(0)\sigma. \tag{19}$$

Для полного вычисления функции $\alpha_1^{(0)}(t)$ перейдём к следующей итерационной задаче (11_1). Подставляя в неё решение (18) уравнения (14_0), получаем следующее уравнение:

$$Ly_1(t,\tau) = -\frac{d}{dt}y_0^{(0)}(t) - \dot\alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} - \dot y_2(t)e^{\tau_2} +$$

$$+ f(y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + y_2(t)e^{\tau_2}, t) + R_1(y_0^{(0)}(t) + \alpha_1^{(0)}(t)e^{\tau_1} + y_2(t)e^{\tau_2}).$$

Выделяя в правой части этого уравнения члены с экспонентой e^{τ_1} и подчиняя их условию ортогональности (13), придём к уравнению

$$-\dot\alpha_1^{(0)}(t) + \left(\frac{\partial f(y_0^{(0)}(t),t)}{\partial y} + \frac{K(t,t)}{\lambda_1(t)}\right)\alpha_1^{(0)}(t) = 0,$$

присоединяя к которому начальное условие (19), найдём $\alpha_1^{(0)}(t)$:

$$\alpha_1^{(0)}(t) = (y^0 + \lambda_1^{-1}(0)h_1(0) - [\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]^{-1}h_2(0)\sigma)\exp\left(\int_0^t \frac{\partial f(y_0^{(0)}(\theta),\theta)}{\partial y} + \frac{K(\theta,\theta)}{\lambda_1(\theta)}\right)d\theta,$$

а значит, решение (18) задачи (11_0) в пространстве U находится однозначно. При этом главный член асимптотики имеет следующий вид:

$$y_{\varepsilon 0}(t) = y_0^{(0)}(t) + \left(y^0 + \lambda_1^{-1}(0)h_1(0) - [\lambda_2(0) - \lambda_1(0)]^{-1}h_2(0)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\beta(0)\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(\int_0^t \frac{\partial f(y_0^{(0)}(\theta),\theta)}{\partial y} + \frac{K(\theta,\theta)}{\lambda_1(\theta)}\right)d\theta \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_1(\theta)\,d\theta\right) +$$

$$+ [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)]^{-1}h_2(t)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\beta(t)\right). \tag{20}$$

Проанализируем его.

Из выражения (20) для $y_{\varepsilon 0}(t)$ видно, что на построение главного члена асимптотики решения задачи (1) существенно влияют быстро осциллирующая неоднородность $h_2(t)e^{i/\varepsilon\beta(t)}$, ядро $K(t,s)$ интегрального оператора и нелинейность $f(y,t)$. Точное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), выходя в момент $t=0$ из точки $y=y^0$, совершает при $t>0$ быстрые осцилляции около решения $y_0^{(0)}(t)$ интегрального уравнения

$$-\lambda_1(t)y_0^{(0)}(t)-\int_0^t K(t,s)y_0^{(0)}(s)\,ds=h_1(t),$$

не стремясь ни к какому пределу при $\varepsilon\to+0$. Нетрудно видеть, что это уравнение получено из вырожденного $(\varepsilon=0)$ по отношению к (1) уравнения после отбрасывания в (1) быстро осциллирующей неоднородности. Если $h_2(t)\equiv 0$, т.е. быстро осциллирующая неоднородность отсутствует, то решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), выходя в момент $t=0$ из точки $y=y^0$, быстро (с экспоненциальной скоростью) стремится при $\varepsilon\to+0$ к решению вырожденного уравнения $-A(t)\bar{\bar{y}}-\int_0^t K(t,s)\bar{\bar{y}}(s)\,ds=h_1(t)$.

5. Дополнение: краткий очерк развития метода регуляризации Ломова для сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений. В конце пятидесятых – начале шестидесятых годов прошлого столетия С.А. Ломов, изучая модельное уравнение Лайтхилла, приходит к идее регуляризации сингулярных возмущений с помощью перехода в пространство бо́льшей размерности. Эта идея глубоко развивается им в последующих работах и приводит к созданию *метода регуляризации сингулярных возмущений*, наиболее полно изложенному в его монографии [4]. Метод регуляризации позволяет строить асимптотические решения сингулярно возмущённых задач в виде рядов по степеням малого параметра, сумма которых при некоторых дополнительных ограничениях на исходные данные задачи *псевдоаналитична*. Последнее означает, что регуляризованные ряды сходятся не только асимптотически, но и в обычном смысле в некоторой кольцевой окрестности $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ точки $\varepsilon=0$. В теории дифференциальных уравнений сформировалось новое направление – аналитическая теория сингулярных возмущений. Результаты С.А. Ломова по псевдоаналитичности были обобщены на нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и уравнения в банаховом пространстве его учениками В.Ф. Сафоновым, В.И. Прохоренко, А.А. Бободжановым, В.И. Качаловым. В настоящее время аналитическая теория сингулярных возмущений благодаря исследованиям В.И. Качалова находится в весьма удовлетворительном состоянии.

Однако оставалась практически не изученной проблема регуляризации сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений. Первое применение метода регуляризации к таким уравнениям дано в работе С.А. Ломова (1970 г.) и подробно изложено в монографии [4, гл. 4]. В этой работе рассматривается сингулярно возмущённая система типа Вольтерры

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t),\quad y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],\tag{D.1}$$

в условиях *стабильности спектра* $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$:

$$\lambda_i(t)\neq 0,\quad \lambda_j(t)\neq\lambda_i(t),\quad i\neq j,\quad i,j=\overline{1,n},\quad \text{для всех}\quad t\in[0,T]\tag{D.2}$$

(в отличие от работ школы Васильевой–Бутузова–Иманалиева здесь предполагается, что выполняются неравенства $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\leqslant 0$, т.е., в частности, допускаются и чисто мнимые точки спектра). Основная трудность, которую необходимо преодолеть в уравнениях типа $(D.1)$, заключается в регуляризации интегрального оператора

$$Jy=\int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds.$$

Если дифференциальная часть задачи $(D.1)$ допускает довольно очевидное расширение

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde y}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde y}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde y$$

при введении регуляризирующих переменных

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_j(\theta)\,d\theta\equiv\frac{\psi(t)}{\varepsilon},\quad j=\overline{1,n}, \tag{$D.3$}$$

то интегральный оператор при указанных переменных принимает вид

$$J\tilde y=\int\limits_0^t K(t,s)\tilde y\biggl(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\biggr)\,ds,$$

и его расширение по независимым переменным τ_j становится проблематичным.

Решение этой проблемы дал сам С.А. Ломов. Для простейшего случая интегро-дифференциальных уравнений типа $(D.1)$ он предложил ввести пространство, инвариантное относительно действия интегрального оператора J, которое получается естественным образом из пространства безрезонасных решений интегрированием по частям его элементов (см. [4]). Эта идея принципиальной важности позволила сдвинуть с "мертвой точки" процесс обобщения на интегро-дифференциальные системы метода регуляризации. Тем не менее в течение десяти лет (1979–1989 гг.) не вышло ни одной работы, посвящённой этой тематике. И только в 1990 г. вследствие изучения связи методом регуляризации Ломова и методом эквивалентного дифференциального соответствия Ларионова [17] интерес к интегро-дифференциальным уравнениям возобновился. В методе Ларионова рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=Ay+\int\limits_0^t K\biggl(\frac{t}{\varepsilon}-\frac{s}{\varepsilon}\biggr)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t),\quad y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],$$

с постоянной матрицей A и с быстро изменяющимися ядрами типа $K(t/\varepsilon-s/\varepsilon)\equiv e^{-\nu(t/\varepsilon-s/\varepsilon)}$ $(\nu=\mathrm{const})$. Такие уравнения часто встречаются в приложениях (см., например, [17]). Однако для них метод регуляризации разработан не был.

При обобщении идеи С.А. Ломова на интегро-дифференциальные уравнения с быстро изменяющимися ядрами В.Ф. Сафонов предложил рассмотреть системы сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_s^t\mu(\theta)\,d\theta}K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds+h(t),$$

$$y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T],\quad \varepsilon>0, \tag{$D.4$}$$

с переменной матрицей $A(t)$ и со скалярной функцией $\mu(t)$, называемой спектральным значением ядра интегрального оператора. В работе [18] рассмотрен случай нестабильности спектрального значения $(\mu(t)=t^r l(t),\ \ l(t)<0)$ при условиях $(D.2)$ на спектр матрицы $A(t)$ и показано, что в регуляризации задачи $(D.4)$ участвуют не только регуляризирующие функции $(D.3)$, но и спецфункции

$$\sigma_k=e^{\varepsilon^{-1}\int_0^t\mu(\theta)\,d\theta}\int\limits_0^t e^{\varepsilon^{-1}\int_0^s\mu(\theta)\,d\theta}\frac{s^k}{k!}\,ds\quad (k=\overline{0,r-1}), \tag{$D.5$}$$

индуцируемые точкой $t = 0$ нестабильности спектрального значения $\mu(t)$ ядра интегрального оператора, а также сама функция $\mu(t)$. Отсюда вытекает, что если $\mu(t) < 0$ (для всех $t \in [0, T]$), то для регуляризации задачи $(D.4)$, кроме регуляризирующих функций $(D.3)$, нужно ввести регуляризирующие переменные $(D.5)$ и ещё одну дополнительную переменную $\tau_{n+1} = \varepsilon^{-1} \int_0^t \mu(\theta)\, d\theta$.

Перспектива дальнейших исследований связана с рассмотрением интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры и Фредгольма, а также нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и неоднородностями. К последнему типу уравнений относится уравнение в рассмотренной в работе задаче (1), а также уравнения задач в работах [10–12, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шкиль Н.И.* Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. Киев, 1971.
2. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, 1966.
3. *Далецкий Ю.Л.* Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 5. С. 1026–1029.
4. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
5. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
6. *Рыжих А.Д.* Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения с быстро осциллирующим коэффициентом // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Т. 357. С. 92–94.
7. *Kalimbetov B.T., Temirbekov M.A., Khabibullaev Zh.O.* Asymptotic solution of singular perturbed problems with an instable spectrum of the limiting operator// Abstr. and Appl. Analysis. 2012. Art. 120192.
8. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.* Asymptotic analysis of integro-differential systems with an unstable spectral value of the integral operator's kernel // Comput. Math. and Math. Phys. 2007. V. 47. № 1. P. 65–79.
9. *Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. doi:10.3390/axioms8010027.
10. *Kalimbetov B.T., Safonov V.F.* Integro-differentiated singularly perturbed equations with fast oscillating coefficients // Bull. of KarSU. Ser. Math. 2019. V. 94. № 2. P. 33–47.
11. *Bobodzhanov A.A., Kalimbetov B.T., Safonov V.F.* Integro-differential problem about parametric amplification and its asymptotical integration // Int. J. Appl. Math. 2020. V. 33. № 2. P. 331–353.
12. *Kalimbetov B.T., Safonov V.F.* Regularization method for singularly perturbed integro-differential equations with rapidly oscillating coefficients and with rapidly changing kernels // Axioms. 2020. V. 9. № 4 (131). https://doi.org/10.3390/axioms9040131.
13. *Kalimbetov B.T., Temirbekov A.N., Tulep A.S.* Asymptotic solutions of scalar integro-diferential equations with partial derivatives and with fast oscillating coefcients // European J. Pure Appl. Math. 2020. V. 13. № 2. P. 287–302.
14. *Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д.* Сингулярно возмущенные интегральные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 2068–2083.
15. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М., 2012.
16. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Сингулярно возмущенные интегральные и интегродифференциальные уравнения с быстро изменяющимися ядрами и уравнения с диагональным вырождением ядра. М., 2017.
17. *Ларионов Г.С.* Колебания осциллятора со слабо нелинейной упруго-наследственной характеристикой // Изв. АН УзССР. Механика твердого тела. 1972. Т. 1. С. 64–68.
18. *Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т.* Метод регуляризации для систем с нестабильным значением ядра интегрального оператора // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 696–706.

Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт",
Международный казахско-турецкий университет
им. Х.А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан

Поступила в редакцию 12.10.2021 г.
После доработки 23.12.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 407–415

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2+517.521

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В СИСТЕМАХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ: УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2022 г. А. О. Игнатьев

Для общей системы разностных (дискретных) уравнений с помощью метода функций Ляпунова получен ряд достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости относительно части переменных её решения.

DOI: 10.31857/S0374064122030104, **EDN:** BYTWWZ

Введение. Математическая теория устойчивости занимает важное место в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Начиная с середины двадцатого века, активно развивается теория устойчивости относительно части переменных. К настоящему времени опубликован ряд монографий [1–6] и сотни работ по этой тематике, из которых можно выделить [7–13]. В статьях [14–16] исследуется устойчивость относительно части переменных решений функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, а в [17–19] – устойчивость относительно части переменных в системах стохастических дифференциальных уравнений.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости решений разностных систем относительно части переменных. Это направление исследования представляется интересным по двум причинам: во-первых, ряд явлений и процессов в природе описываются разностными уравнениями; во-вторых, при использовании вычислительных методов решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений их сводят к разностным уравнениям. Отметим, что в работе [20] предлагается способ построения разностных схем для одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений, который обеспечивает согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости нулевого решения.

Важным направлением качественного анализа дискретных (разностных) уравнений является исследование устойчивости их решений. Это направление отражено во многих научных публикациях (см., например, [21–24]). Одним из наиболее эффективных методов изучения устойчивости дифференциальных и разностных уравнений является метод функций Ляпунова [25, 26]. Настоящая статья посвящена применению этого метода к изучению устойчивости решений систем разностных уравнений относительно части переменных.

1. Основные обозначения и определения. Следуя [27], обозначим: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_q=\{n\in\mathbb{N}_0: n\geqslant q\}$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^{k+m}$, $B_r=\{z\in\mathbb{R}^{k+m}:\|z\|\leqslant r\}$ – замкнутый шар радиуса r с центром в нуле в $\mathbb{R}^{k+m}$.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$z(n+1)=Z(n,z(n)),\quad Z(n,0)\equiv 0, \tag{1}$$

где $n\in\mathbb{N}_0$ и $z,Z\in\mathbb{R}^{k+m}$. Далее предполагаем, что при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}_0$ функция $Z(n,\cdot):\mathbb{R}^{k+m}\to\mathbb{R}^{k+m}$ является непрерывной. Для фиксированных $n\in\mathbb{N}_0$ и $z_0\in\in\mathbb{R}^{k+m}$ через $z(n,n_0,z_0)$ обозначим решение системы (1), совпадающее с вектором z_0 при $n=n_0$. Исследуем устойчивость нулевого решения

$$z(n)=0 \tag{2}$$

системы (1) относительно первых k его компонент. Примем обозначения $z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{k+m}$,

$$x=(x_1,\ldots,x_k)^{\mathrm{T}}=(z_1,\ldots,z_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^k,\quad y=(y_1,\ldots,y_m)^{\mathrm{T}}=(z_{k+1},\ldots,z_{k+m})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m.$$

В соответствии с принятым обозначением любое решение $z(n, n_0, z_0)$ системы (1) представляется в виде $z(n, n_0, z_0) = \begin{pmatrix} x(n, n_0, z_0) \\ y(n, n_0, z_0) \end{pmatrix}$. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями [28, гл. 1] введём следующие определения.

Определение 1. Решение (2) системы (1) называется *устойчивым относительно* x (или x*-устойчивым*), если для любых $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ такое, что для любого $z_0 \in B_\delta$ имеет место неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Определение 2. Решение (2) системы (1) называется *равномерно устойчивым относительно* x (или *равномерно* x*-устойчивым*), если в определении 1 для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon)$ не зависящим от n_0.

Следующее определение является вспомогательным для введения в определении 4 различных модификаций понятия устойчивости.

Определение 3. Решение (2) системы (1) называется:

притягивающим относительно x (x*-притягивающим*), если для каждого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\eta = \eta(n_0) > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $z_0 \in B_\eta$ найдётся $\sigma = \sigma(\varepsilon, n_0, z_0) \in \mathbb{N}$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0,)\| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0 + \sigma$;

эквипритягивающим относительно x (или x*-эквипритягивающим*), если для каждого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\eta = \eta(n_0) > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\sigma = \sigma(\varepsilon, n_0) \in \mathbb{N}$ такие, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ для всех $z_0 \in B_\eta$ и $n \geqslant n_0 + \sigma$;

равномерно x*-притягивающим*, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma = \sigma(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ для всех $z_0 \in B_\eta$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $n \geqslant n_0 + \sigma$;

равномерно глобально x*-притягивающим*, если для любых $\eta > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдётся $\sigma = \sigma(\varepsilon, \eta) \in \mathbb{N}$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ для всех $z_0 \in B_\eta$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $n \geqslant n_0 + \sigma$;

слабо x*-притягивающим*, если для каждого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\eta = \eta(n_0) > 0$ такое, что для любого $z_0 \in B_\eta$ найдётся возрастающая к $+\infty$ последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, своя, вообще говоря, для каждых n_0 и z_0, вдоль которой $\|x(n_i, n_0, z_0)\| \to 0$ при $i \to +\infty$;

l_p*-притягивающим* относительно x, где $p > 0$ – некоторое число, если для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ найдётся такое $\eta = \eta(n_0)$, что для всех $z_0 \in B_\eta$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \|x(j, n_0, z_0)\|^p < +\infty.$$

Иными словами, решение $z(n) = 0$ системы (1) является:

x-притягивающим, если

$$\lim_{n\to+\infty} x(n, n_0, z_0) = 0 \quad \text{при всех} \quad n_0 \in \mathbb{N}, \quad z_0 \in B_{\eta(n_0)}; \tag{3}$$

x-эквипритягивающим, если предельное соотношение (3) выполняется равномерно относительно z_0;

равномерно x-притягивающим, если предельное соотношение (3) выполняется равномерно относительно z_0 и n_0;

слабо x-притягивающим, если

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x(n, n_0, z_0)\| = 0 \quad \text{при всех} \quad n_0 \in \mathbb{N}, \quad z_0 \in B_{\eta(n_0)}.$$

Областью x*-притяжения* решения $z(n) = 0$ системы (1) в дискретный момент времени $n_0 \in \mathbb{N}$ называется множество

$$A(n_0) = \{z_0 \in \mathbb{R}^{k+m} : \|x(n, n_0, z_0)\| \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty\}.$$

Если множество $A(n_0)$ не зависит от n_0, то будем говорить, что область x-притяжения *равномерная*. Если для любого n_0 имеет место равенство $A(n_0) = \mathbb{R}^{k+m}$, то говорят, что начало *глобально притягивающее относительно* x. Если же для любых $\eta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $z_0 \in B_\eta$ предельное соотношение (3) выполняется равномерно по n_0 и z_0, то начало называется *равномерно глобально* x*-притягивающим*.

Определение 4. Решение (2) системы (1) называется:

асимптотически устойчивым относительно x (или *асимптотически* x*-устойчивым*), если оно x-устойчиво и x-притягивающее;

эквиасимптотически устойчивым относительно x (или *эквиасимптотически* x*-устойчивым*), если оно x-устойчиво и x-эквипритягивающее;

равномерно асимптотически устойчивым относительно x (или *равномерно асимптотически* x*-устойчивым*), если оно равномерно x-устойчиво и равномерно x-притягивающее;

равномерно глобально асимптотически устойчивым относительно x (или *равномерно глобально асимптотически* x*-устойчивым*), если оно равномерно x-устойчиво и равномерно глобально x-притягивающее;

слабо асимптотически x*-устойчивым*, если оно x-устойчиво и слабо x-притягивающее;

l_p*-устойчивым относительно* x, если оно x-устойчиво и l_p-притягивающее относительно x.

Определение 5. Будем говорить, что функция $a(r)$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}$ и записывать как $a \in \mathcal{K}$, если она определена на некотором отрезке $[0, H]$ или полуинтервале $[0, +\infty)$, является непрерывной и строго возрастающей и такой, что $a(0) = 0$.

Подкласс класса $\mathcal{K}$, состоящий из функций возрастающих к $+\infty$, обозначим через $\mathcal{K}_\infty$.

2. Исследование устойчивости относительно части переменных с помощью функций Ляпунова.

Определение 6. *Вариацией* ΔV функции $V(n, z)$ *в силу системы* разностных уравнений (1) назовём выражение
$$\Delta V(n, z) = V(n + 1, Z(n, z)) - V(n, z).$$

Теорема 1. *Если для системы разностных уравнений (1) существует функция* $V(n, z)$, *которая определена и непрерывна по* z *на множестве*
$$n \in \mathbb{N}_0, \quad \|x\| \leqslant H, \quad \|y\| < +\infty \tag{4}$$
и удовлетворяет условиям
$$V(n, 0) \equiv 0, \quad V(n, z) \geqslant a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \quad \Delta V = V(n + 1, Z(n, z)) - V(n, z) \leqslant 0$$
для значений n *и* $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *удовлетворяющих условиям (4), то решение (2) системы (1) устойчиво относительно* x.

Более того, если для некоторой функции $b \in \mathcal{K}$ *и любых* n, z *из области (4) справедливо условие*
$$V(n, z) \leqslant b(\|z\|), \tag{5}$$
то нулевое решение системы (1) равномерно устойчиво относительно x.

Доказательство. Пусть заданы $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\varepsilon > 0$. Так как функция V непрерывна по z и $V(n_0, 0) = 0$, то найдётся $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $V(n_0, z_0) < a(\varepsilon)$ при всех $z_0 \in B_\delta$. Для любых $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $z_0 \in B_\delta$ получаем
$$a(\|x(n, n_0, z_0)\|) \leqslant V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n - 1, z(n - 1, z(n - 1, n_0, z_0))) \leqslant \ldots \leqslant V(n_0, z_0) < a(\varepsilon).$$
Но так как $a \in \mathcal{K}$, то из полученных неравенств следует, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$. Устойчивость решения (2) относительно x доказана.

При выполнении условия (5) значение δ можно выбрать не зависящим от n_0. Действительно, полагая $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon))$, где b^{-1} – функция, обратная по отношению к функции b, при $z_0 \in B_\delta$ получаем
$$a(\|x(n, n_0, z_0)\|) \leqslant V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_o) \leqslant b(\|z_0\|) < b(b^{-1}(a(\varepsilon))) = a(\varepsilon),$$
откуда вытекает неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема представляет собой аналог теоремы Румянцева [7] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1) = y_1(n) - y_2(n), \quad y_1(n+1) = y_1(n)y_2(n)e^{nx(n)} + x(n), \quad y_2(n+1) = y_1(n)y_2(n)e^{nx(n)}.$$

Очевидно, что эта система имеет нулевое решение. В качестве функции V выберем $V = x^2 + (y_1 - y_2)^2$. Её вариация ΔV в силу рассматриваемой системы равна нулю. Учитывая, что $x^2 < V < 2(x^2 + y_1^2 + y_2^2)$, на основании теоремы 1 заключаем, что нулевое решение этой системы равномерно x-устойчиво.

Теорема 2. *Если для системы разностных уравнений (1) существует функция* $V(n,z)$, *которая определена и непрерывна по* z *на множестве (4) и удовлетворяет условиям*

$$V(n,z) \geqslant a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \quad V(n,0) = 0, \tag{6}$$

$$\Delta V(n,z) \leqslant -c(\|x\|), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{7}$$

то нулевое решение системы (1) слабо асимптотически x*-устойчиво.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $z = 0$ системы (1) x-устойчиво. Поэтому для $H > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\delta = \delta(n_0, H) > 0$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$, если $z_0 \in B_\delta$.

Для завершения доказательства достаточно установить, что для любых $\varepsilon \in (0, H)$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $N = N(\varepsilon, n_0) \in \mathbb{N}$ такое, что при всяком $z_0 \in B_\delta$ можно указать натуральное число n_1, расположенное между n_0 и $n_0 + N$ (включая эти числа), такое, что

$$\|x(n_1, n_0, z_0)\| \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Обозначим $\lambda(n_0) = \sup\limits_{z \in B_\delta} V(n_0, z)$, $\quad N(n_0, \varepsilon) = [\lambda(n_0)/c(\varepsilon)] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Предположим противное: n_1, для которого выполняется неравенство (8), не существует. Значит, $\varepsilon < \|x(n, n_0, z_0)\| < H$ при всех n из множества чисел $\{n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 + N\}$. Тогда из условий теоремы следует, что

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant V(n_0 + N, z(n_0 + N, z(n_0 + N, n_0, z_0))) \leqslant V(n_0, z_0) - c(\varepsilon)N \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 3. *Если для системы (1) существует непрерывная по* z *на множестве (4) функция* $V(n,z)$ *такая, что выполнены условия (6), (7) и*

$$V(n,z) \leqslant b(\|z\|), \quad b \in \mathcal{K}, \tag{9}$$

то нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически x*-устойчиво.*

Если дополнительно выполнены условия

$$a \in \mathcal{K}_\infty, \quad b \in \mathcal{K}_\infty, \quad c \in \mathcal{K}_\infty, \quad H = \infty, \quad \lim_{\|z\| \to \infty} V(n,z) = +\infty, \tag{10}$$

то нулевое решение системы (1) равномерно глобально асимптотически x*-устойчиво.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $z = 0$ системы (1) равномерно x-устойчиво. Поэтому для числа H найдётся такое δ, не зависящее от n_0, что для дискретной траектории $z(n, n_0, z_0)$ из включений $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $z_0 \in B_\delta$ следует неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$ для всех $n \geqslant n_0$. Выберем произвольно ε $(0 < \varepsilon < H)$. Покажем, что существует $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > n_0 + \sigma. \tag{11}$$

Выясним, при каких n может выполняться двойное неравенство

$$\varepsilon \leqslant \|x(n, n_0, z_0)\| < H. \tag{12}$$

Для этого рассмотрим дискретную траекторию $z(n, n_0, z_0)$ с вектором $z_0 \in B_\delta$. Из условий (6), (7), (9) и из предположения (12) следует, что

$$0 < a(\varepsilon) \leqslant V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_0) - (n - n_0)c(\varepsilon) \leqslant b(\delta) - (n - n_0)c(\varepsilon).$$

Таким образом, при $n > n_0 + \sigma(\varepsilon)$, где $\sigma(\varepsilon) = [b(\delta)/c(\varepsilon)] + 1$, предположение (12) перестаёт выполняться, т.е. справедливо неравенство (11). Это означает, что решение $z = 0$ системы (1) является равномерно притягивающим относительно x.

В случае, когда дополнительно выполнены условия (10), в приведённом доказательстве величины H и ε выбираются произвольно $(0 < \varepsilon < H)$, $\delta = \delta(H)$, $\sigma = \sigma(\varepsilon, H) = [\delta(H)/c(\varepsilon)]+1$. Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}y_1(n) + \frac{1}{2^n\sqrt{2}}y_2(n),$$

$$y_1(n+1) = 2^{-n}y_2(n), \quad y_2(n+1) = 2^n x(n) + 2^n y_1(n). \tag{13}$$

Эта система допускает нулевое решение. Покажем, что оно равномерно асимптотически x-устойчиво. Для этого рассмотрим функцию

$$V(n, x, y_1, y_2) = x^2 + (2^{-1/2}y_1 - 2^{-n}y_2)^2.$$

Её вариация в силу рассматриваемой системы имеет вид $\Delta V = -x^2/2$. Учитывая, что функция V является определённо-положительной относительно x и удовлетворяет неравенствам

$$x^2 \leqslant V(n, x, y_1, y_2) < 2(x^2 + y_1^2 + y_2^2),$$

а её вариация ΔV в силу системы (13) является определённо-отрицательной относительно x, на основании теоремы 3 заключаем, что нулевое решение системы (13) равномерно асимптотически устойчиво относительно x.

Теорема 4. *Если для системы разностных уравнений (1) существует непрерывная по z функция $V(n,z)$, удовлетворяющая условию (6), и для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ можно указать $\Theta = \Theta(n_0)$ такое, что при $z_0 \in B_\Theta$ функция $V(n, z(n, n_0, z_0))$ не возрастает и стремится к нулю при $n \to +\infty$, то нулевое решение системы (1) эквиасимптотически устойчиво относительно x.*

Доказательство. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Выберем произвольно $\delta = \delta(n_0) \in (0, \Theta(n_0))$. Для любого $z_0 \in B_\delta$ функция $V(n, z(n, n_0, z_0))$ не возрастает. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} V(n, z(n, n_0, z_0)) = 0 \tag{14}$$

равномерно по $z_0 \in B_\delta$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Для любых $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $z_0 \in B_\delta$ по условию теоремы найдётся $N = N(\varepsilon, n_0, z_0)$ такое, что $V(n_0{+}N, z(n_0{+}N, n_0, z_0)) < \varepsilon$. Это неравенство, поскольку функции V и Z непрерывны по z, выполняется в некоторой открытой окрестности $Q(z_0)$ точки z_0, т.е. $V(n_0 + N, z(n_0 + N, n_0, z_0')) < \varepsilon$ при $z_0' \in Q(z_0)$. Так как V монотонно не возрастает вдоль решений системы (1), то отсюда следует, что

$$V(n, z(n, n_0, z_0')) < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 + N(\varepsilon, n_0, z_0'), \quad z_0' \in Q(z_0).$$

Компактное множество $\|z_0\| \leqslant \delta$ оказалось покрытым системой открытых окрестностей $\{Q(z_0)\}$, из которой по теореме Гейне–Бореля можно выделить конечное подпокрытие Q_1, $\ldots$, Q_r с соответствующими числами N_1, $\ldots$, N_r. Обозначим $N(\varepsilon, n_0) = \max\{N_1, \ldots, N_r\}$. Тогда $V(n, z(n, n_0, z_0)) < \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}_{n_0+N(\varepsilon,n_0)}$ при $z_0 \in B_{\delta(n_0)}$. Таким образом, предельное соотношение (14) выполняется равномерно по z_0, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 5. *Пусть для системы (1) существует функция* $V(n,z)$, *непрерывная по* z, *удовлетворяющая в области (4) неравенству (6) и такая, что выполняются следующие условия:*

i) вариация функции V *в силу системы (1) неположительна;*

ii) существуют $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *и* $\eta_0 > 0$ *такие, что для любых* n *и* η, *удовлетворяющих неравенствам* $n \geqslant n_0$, $0 < \eta \leqslant \eta_0$, *множество* $L = \{(n,z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^{n+m} : V(n,z) \geqslant \eta, \|x\| \leqslant H\}$ *непусто;*

iii) найдутся неотрицательные числа $m_\eta(n)$, *для которых выполняются соотношения*

$$\Delta V(n,z) \leqslant -m_\eta(n) \quad \textit{при} \quad (n,z) \in L \tag{15}$$

и

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} m_\eta(n) = +\infty. \tag{16}$$

Тогда нулевое решение системы (1) эквиасимптотически x*-устойчиво.*

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1, то для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует такое $\delta = \delta(n_0) > 0$, что из включения $z_0 \in B_\delta$ вытекает неравенство $\|x(n,n_0,z_0)\| < H$ при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Обозначим $V_*(n_0) := \sup\limits_{\|z_0\|<\delta} V(n_0,z_0)$. Покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} V(n, z(n,n_0,z_0)) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z_0 \in B_\delta.$$

Предположим противное. Тогда вследствие неположительности вариации ΔV в силу системы (1) можно указать такие $\eta > 0$ и $z_0 \in B_\delta$, для которых при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ верно неравенство $V(n,z(n,n_0,z_0)) \geqslant \eta > 0$. Воспользовавшись условием (15), получаем

$$0 \leqslant V(n,z(n,n_0,z_0)) \leqslant V(n_0,z_0) - m_\eta(n_0+1) - m_\eta(n_0+2) - \ldots - m_\eta(n) \leqslant$$

$$\leqslant V_*(n_0) - m_\eta(n_0+1) - m_\eta(n_0+2) - \ldots - m_\eta(n),$$

что в силу условия (16) невозможно при достаточно больших значениях n. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Проиллюстрируем доказанную теорему следующим примером.

Пример 3. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(n+1) = d_{11}(n)x(n) + d_{12}(n)y(n), \quad y(n+1) = d_{21}(n)x(n) + d_{22}(n)y(n), \tag{17}$$

где

$$d_{11}(n) = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt[4]{n+16}}}, \quad d_{12}(n) = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{(n+15)(n+16)} - 1}{\sqrt[4]{n+16}(\sqrt[4]{n+16} - 1)}},$$

$$d_{21}(n) = \frac{1}{\sqrt[4]{n+16}}, \quad d_{22}(n) = -d_{11}(n)d_{12}(n).$$

Очевидно, что система (17) допускает нулевое решение. Для доказательства его эквиасимптотической x-устойчивости воспользуемся теоремой 5. В качестве функции Ляпунова выбираем $V(n,x,y) = x^2 + \sqrt[4]{n+15}\, y^2$. Несложно видеть, что она удовлетворяет условию (6) на множестве (4). Вариация этой функции в силу системы (1) имеет вид

$$\Delta V = -\frac{1}{\sqrt[4]{n+16}}(x^2+y^2).$$

Она неположительна. Выберем произвольно η, удовлетворяющее неравенствам $0 < \eta < H$, и оценим сверху вариацию ΔV в области $V(n,x,y) \geqslant \eta$. Геометрически эта область при любом

$n \in \mathbb{N}_0$ ограничена прямыми $|x| = -H$, $|x| = H$, эллипсом $x^2/\eta + \sqrt[4]{n+15}\, y^2/\eta = 1$ с центром в начале координат и полуосями $\sqrt{\eta}$ и $\sqrt{\eta}/\sqrt[8]{n+15}$. Любая точка (x, y) из множества

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant H, \ \ \frac{x^2}{\eta} + \frac{\sqrt[4]{n+15}\, y^2}{\eta} \geqslant 1\right\}$$

удовлетворяет хотя бы одному из условий $|x| > \sqrt{\eta}/2$ или $|y| > \sqrt{\eta}/(2\sqrt[8]{n+15})$, или, что то же самое, $x^2 > \eta/4$, $y^2 > \eta/(4\sqrt[4]{n+15})$. Подставляя эти значения в ΔV, получаем

$$\Delta V = -\frac{1}{\sqrt[4]{n+16}}(x^2+y^2) < -\frac{1}{\sqrt[4]{n+16}} \min\left\{\frac{1}{4}\eta, \frac{\eta}{4\sqrt[4]{n+15}}\right\} = -\frac{\eta}{4\sqrt[4]{(n+15)(n+16)}}.$$

Итак, если в качестве $m_\eta(n)$ взять $m_\eta(n) = \eta/(4\sqrt[4]{(n+15)(n+16)})$, то, как показано, выполняется условие (15). Нетрудно убедиться, что справедливо и условие (16).

Таким образом, все условия теоремы 5 выполнены; следовательно, нулевое решение системы разностных уравнений (17) эквиасимптотически x-устойчиво.

Теорема 6. *Если для системы (1) существует функция $V(n, z)$, непрерывная по z, удовлетворяющая в области (4) условию*

$$V(n,z) \geqslant \vartheta(n) a(\|x\|), \quad a \in \mathcal{K}, \tag{18}$$

с некоторой монотонно возрастающей к бесконечности последовательностью $\{\vartheta(n)\}$, $\vartheta(0) = 1$, а вариация ΔV в силу системы (1) неположительна, то нулевое решение системы (1) эквиасимптотически устойчиво относительно x.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1, то для любого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ можно указать $\delta(n_0)$ такое, что из включения $z_0 \in B_\delta$ следует неравенство $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$ при всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Обозначим $\mu(n_0) = \sup\limits_{z_0 \in B_\delta} V(n_0, z_0)$. Так как $\Delta V \leqslant 0$, то $V(n, z(n, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_0)$, и из оценки (18) следует, что

$$a(\|x(n,n_0,z_0)\|) \leqslant \frac{V(n, z(n,n_0,z_0))}{\vartheta(n)} \leqslant \frac{V(n_0,z_0)}{\vartheta(n)}. \tag{19}$$

Пусть $\theta(t)$ – монотонно возрастающая функция такая, что $\theta(n) = \vartheta(n)$, а ε – произвольное положительное число ($\varepsilon < H$; число H – из задания области (4)). Обозначим $N(\varepsilon, n_0) = \theta^{-1}(\mu(n_0)/a(\varepsilon))$, где θ^{-1} – функция, обратная к функции θ. Так как θ^{-1} монотонно возрастает, то при $n > N(\varepsilon, n_0)$ выполняется неравенство $\theta(n) \geqslant \mu(n_0)/a(\varepsilon)$, и в силу оценки (19) имеем

$$a(\|x(n,n_0,z_0)\|) \leqslant \frac{V(n_0,z_0)}{\mu(n_0)} a(\varepsilon) < a(\varepsilon).$$

Так как $a \in \mathcal{K}$, то отсюда следует, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$ при всех $z_0 \in B_\delta$, $n > n_0 + N(\varepsilon, n_0)$. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть для системы (1) существует функция $V(n, z)$, непрерывная по z, удовлетворяющая в области (4) условию (6), такая, что $\Delta V(n, z) \leqslant -c\|x\|^p$, где p и c – положительные константы. Тогда нулевое решение системы (1) l_p-устойчиво относительно x.*

Доказательство. Согласно теореме 2 решение (2) системы (1) слабо асимптотически устойчиво. В частности, из его устойчивости следует, что при любых $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < \varepsilon$, если $z_0 \in B_\delta$. Рассмотрим функцию

$$G(n) = \begin{cases} V(n, z(n)) + c\sum\limits_{j=n_0}^{n-1} \|x(j, n_0, z_0)\|^p & \text{при } \ n > n_0, \\ V(n_0, z_0) & \text{при } \ n = n_0, \end{cases}$$

где $z(n) = z(n, n_0, z_0)$. Тогда $\Delta G(n) = G(n+1) - G(n) = \Delta V(n, z(n)) + c\|x(n, n_0, z_0)\|^p \leqslant 0$. Следовательно, $G(n) \leqslant G(n_0) = V(n_0, z_0)$ и

$$0 \leqslant G(n) = V(n, z(n, n_0, z_0)) + c \sum_{j=n_0}^{n-1} \|x(j, n_0, z_0)\|^p \leqslant V(n_0, z_0),$$

откуда вытекает неравенство

$$\sum_{j=n_0}^{n-1} \|x(j, n_0, z_0)\|^p \leqslant \frac{1}{c} V(n_0, z_0),$$

и устремляя n к бесконечности, получаем

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \|x(j, n_0, z_0)\|^p < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 8. *Пусть для системы разностных уравнений (1) существуют две функции $V : \mathbb{N}_0 \times B_H \to \mathbb{R}$ и $W : \mathbb{N}_0 \times B_H \to \mathbb{R}$, непрерывные по второму аргументу, такие, что для некоторых функций $a, b, c \in \mathcal{K}$ и любых $(n, z) \in \mathbb{N}_0 \times B_H$ выполняются условия (6) и условия*

$$W(n, z) \geqslant b(\|x\|), \quad W(n, 0) = 0, \tag{20}$$

$$\Delta V \leqslant -c(W(n, z)). \tag{21}$$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически x-устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 1 нулевое решение системы (1) x-устойчиво. Следовательно, для $H > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_0$ существует $\delta = \delta(n_0, H) > 0$ такое, что $\|x(n, n_0, z_0)\| < H$, если $z_0 \in B_\delta$. Покажем, что нулевое решение системы (1) x-притягивающее. Для этого докажем, что $W(n, z(n, n_0, z_0)) \to 0$ при $n \to +\infty$. Предположим противное. Это возможно только в том случае, если существуют $\sigma > 0$ и последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$ такие, что $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = +\infty$ и $W(n_i, z(n_i, n_0, z_0)) \geqslant \sigma$. В силу оценки (21) это означает выполнение неравенств

$$\Delta V(n_i, z(n_i, n_0, z_0)) \leqslant -c(\sigma) < 0, \quad V(n_i + 1, z(n_i + 1, n_0, z_0)) \leqslant V(n_0, z_0) - ic(\sigma),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} V(n_i + 1, z(n_i + 1, n_0, z_0)) = -\infty$, что противоречит условию (6). Полученное противоречие доказывает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} W(n, z(n, n_0, z_0)) = 0$, откуда в силу оценки (20) имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x(n, n_0, z_0)\| = 0$. Это доказывает x-притяжение решения (2) системы (1).

Полагая в доказанной теореме $W(n, z) = \|x\|$, получаем

Следствие. *Если для системы разностных уравнений (1) существует такая функция $V : \mathbb{N}_0 \times B_H \to \mathbb{R}$, что для некоторых функций $a, c \in \mathcal{K}$ и любых $(n, z) \in \mathbb{N}_0 \times B_H$ выполняются условия (6) и неравенство $\Delta V(n, z) \leqslant -c(\|x\|)$, то её нулевое решение асимптотически x-устойчиво.*

Заключение. В работе для общей системы разностных (дискретных) уравнений получен ряд достаточных условий, при выполнении которых её нулевое решение обладает свойством устойчивости относительно части переменных или некоторыми модификациями этого свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., 1990.
2. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев, 1989.
3. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М., 1991.
4. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. New York, 1998.
5. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., 2001.
6. *Мартышенко Ю.Г., Воротников В.И.* Частичная устойчивость, детектируемость и управление: некоторые задачи. Нижний Тагил, 2016.
7. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. Т. 4. С. 9–16.
8. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35. № 1. С. 147–152.
9. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36. № 2. С. 364–384.
10. *Игнатьев А.О.* Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Математика. 1991. Т. 345. № 2. С. 55–60.
11. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3–59.
12. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. № 2. С. 253–259.
13. *Ignatyev O.A.* On the partial asymptotic stability in nonautonomous differential equations // Differ. and Integral Equat. 2006. V. 19. P. 831–839.
14. *Андреев А.С., Павликов С.В.* Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. № 1. С. 3–12.
15. *Bernfeld S.R, Corduneanu C., Ignatyev A.O.* On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlin. Anal. 2003. V. 55. P. 641–656.
16. *Corduneanu C., Ignatyev A.O.* Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlin. Funct. Anal. & Appl. 2005. V. 10. № 1. P. 11–24.
17. *Шаров В.Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 63–71.
18. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2000. V. 44. № 6. С. 75–79.
19. *Ignatyev O.A.* Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations // Statistics & Prob. Letters. 2009. V. 79. № 5. P. 597–601.
20. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. С. 1217–1225.
21. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. Springer, New York, 2005.
22. *Elaydi S., Sacker R.J.* Global stability of periodic orbits of non-autonomous difference equations and population biology // J. Differ. Equat. 2005. V. 208. P. 258–273.
23. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* On the stability in periodic and almost periodic difference systems // J. of Math. Anal. and Appl. 2006. V. 313. № 2. P. 678–688.
24. *Lakshmikantham V., Trigiante D.* Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. New York, 2002.
25. *Kalman R.E., Bertram J.E.* Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Lyapunov. II Discrete-Time Systems // Transact. of the ASME. Ser. D. J. Basic Engrg. 1960. V. 82. P. 394–400.
26. *Игнатьев А.О.* Об устойчивости нулевого решения почти периодической системы разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 98–103.
27. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* Quadratic forms as Lyapunov functions in the study of stability of solutions to difference equations // Electr. J. Differ. Equat. 2011. V. 19. P. 1–21.
28. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.

Институт прикладной математики и механики,
г. Донецк

Поступила в редакцию 06.08.2021 г.
После доработки 23.02.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 416–424

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.58

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

© 2022 г. М. С. Близорукова

Рассматривается задача динамического восстановления неизвестных входных воздействий системы нелинейных уравнений по неточным измерениям в дискретные моменты времени части фазовых состояний системы. Предполагается, что система функционирует на заданном конечном временно́м интервале. Эволюция её фазового состояния системы определяется неизвестным входом. Точное восстановление истинного, действующего на систему, входа, вообще говоря, невозможно в силу погрешности измерений. Приводится алгоритм приближённого восстановления входа, основанный на комбинации динамических вариантов метода сглаживающего функционала и метода невязки и представляющий собой специальный регуляризирующий алгоритм для одного из вариантов обратной задачи динамики.

DOI: 10.31857/S0374064122030116, **EDN:** BYWHZD

Введение. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), y(t)),$$
$$\dot{y}(t) = f_{21}(t, x(t), y(t)) + B(t, x(t), y(t))u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta] \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $0 < \vartheta < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in P$, $P \subset \mathbb{R}^r$, f_1 и f_{21} – липшицевы функции с константой Липшица L, u – возмущение, B – липшицева матрица соответствующей размерности, P – выпуклый компакт. Предполагается, что на систему (1) действует неизвестное возмущение $u(\cdot) \in P(\cdot) \equiv \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : u(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_{i,j} \in \Delta = \{\tau_{i,j}\}_{i\in[0:m],\ j\in[0:m^{(1)}]}$, где $\tau_{0,0} = 0$, $\tau_{m,m^{(1)}} = \vartheta$, $\tau_{i,j+1} = \tau_{i,j} + \delta_1$, $i \in [0 : m-1]$, $j \in [0 : m^{(1)} - 1]$, $\tau_{i,m^{(1)}} = \tau_{i+1,0}$, измеряется часть фазовых состояний системы (1), а именно состояния $x(\tau_{i,j}) = x(\tau_{i,j}; z_0, u(\cdot))$, где $z_0 = \{x_0, y_0\}$ – начальное состояние системы (1), $z(\cdot\,; z_0, u(\cdot)) = \{x(\cdot\,; z_0, u(\cdot)), y(\cdot\,; z_0, u(\cdot))\}$ – решение системы (1), отвечающее этому начальному состоянию и возмущению $u(\cdot)$. Результаты измерений – векторы $\xi^h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$, $i \in [0 : m-1]$, $j \in [0 : m^{(1)} - 1]$ – удовлетворяют неравенствам

$$|x(\tau_{i,j}) - \xi^h_{i,j}|_n \leqslant h. \qquad (2)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ – уровень погрешности измерений, через $|\cdot|_k$ обозначается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что начальное состояние системы (1) известно. Обсуждаемая задача состоит в построении алгоритма приближённого восстановления (реконструкции) неизвестного возмущения $u(\cdot)$ по результатам неточных измерений в дискретные моменты времени части $x(\cdot)$ состояний $z(\cdot)$.

Сформулированная задача является задачей динамического восстановления (реконструкции). Задачи такого типа в последние годы вызывают пристальное внимание исследователей (см., например, монографии [1–3]). Один из подходов к их решению развит в работах [4–12]. Этот подход основан на комбинации методов теории позиционного управления и теории некорректных задач. В работах [6–8, 10] приведены алгоритмы решения указанных задач, основанные на динамической модели метода сглаживающего функционала (метод Тихонова). При этом в работах [6, 10] изучалась линейная система и предполагалось отсутствие мгновенных ограничений на возмущения. Случай нелинейной системы рассматривался в работах [7, 8]. Алгоритмы решения задач динамической реконструкции при измерении части фазовых координат, основанные на других конструкциях, получены в [5, 9].

В настоящей работе найден алгоритм реконструкции, который основан на комбинации динамических вариантов метода сглаживающего функционала и метода невязки. В связи с неполнотой информации (а именно, с возможностью измерения в моменты $\tau_{i,j}$ не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_{i,j}), y(\tau_{i,j})\}$, а лишь его части – $x(\tau_{i,j})$), указанный алгоритм содержит два блока. Первый (вспомогательный) блок, основанный на методе сглаживающего функционала, используется для восстановления неизвестной координаты y. Второй блок, основанный на динамическом варианте метода невязки, применяется непосредственно к решению задачи восстановления неизвестного возмущения. При измерении всех координат аналогичный подход к решению задач реконструкции применялся в работах [4, 11, 12].

1. Метод решения задачи. Перейдём к описанию метода решения рассматриваемой задачи. Как было отмечено выше, алгоритм будет состоять из двух блоков.

Пусть для каждого $h \in (0,1)$ фиксированы два семейства разбиений отрезка T: семейство

$$\Delta_{m_h} = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h) \quad \text{с шагом} \quad \delta(h) = \vartheta/m_h, \tag{3}$$

а также семейство

$$\Delta_{m_h, m_h^{(1)}} = \{\tau_{i,j,h}\}_{i\in[0:m_h],\quad j\in[0:m_h^{(1)}]}, \quad \tau_{i,0,h} = \tau_{i,h}, \quad i \in [0:m_h],$$

$$\tau_{i,j+1,h} = \tau_{i,j,h} + \delta_1(h) \quad \text{с шагом} \quad \delta_1(h) = \delta(h)/m_h^{(1)}.$$

При этом для второго семейства выполняются равенства $\tau_{i,m_h^{(1)},h} = \tau_{i+1,0,h} = \tau_{i+1,h}$. Ниже используем обозначение $\xi_i^h = \xi_{i,0}^h$. Заметим, что

$$\xi_{i,0}^h = \xi_{i-1,m_h^{(1)}}^h.$$

Первый (вспомогательный) блок содержит управляемую систему и закон формирования управления $v^h(\cdot)$ для неё по принципу обратной связи V. Динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{w}_1^h(t) = v^h(t) \quad \text{при} \quad t \in T \quad (w_1^h, v^h \in \mathbb{R}^n) \tag{4}$$

с начальным условием $w_1^h(0) = x_0$. Здесь управление $v^h(\cdot)$ находится по формуле

$$v^h(t) = v_{i,j}^h = V(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, w_1^h(\tau_{i,j})) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}), \quad \tau_{ij} = \tau_{i,j,h}$$

$$(i \in [0:m_h - 1], \quad j \in [0:m_h^{(1)} - 1]), \tag{5}$$

$\xi_{i,j}^h$ – результат измерения компоненты $x(\tau_{i,j})$ (см. неравенство (2)). При $i = j = 0$ полагаем $\xi_{0,0}^h = x_0$. Закон $V(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании параметров h и $\delta_1(h)$ управление $v^h(\cdot)$, стоящее в правой части системы (4), позволяет с помощью некоторого отображения $U_1 : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ сконструировать функцию $u_1^h(\cdot)$, заданную правилом

$$u_1^h(t) = u_{1i,j}^h = U_1(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, v_{i,j}^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i+1,j}),$$

$$\tau_{ij} = \tau_{i,j,h} \quad (i \in [0:m_h - 1], \quad j \in [0:m_h^{(1)} - 1]), \tag{6}$$

являющуюся приближением (в метрике пространства непрерывных функций) неизмеряемой части $y(\cdot)$ фазовой траектории.

Второй (основной) блок – блок динамической реконструкции неизвестного возмущения – состоит из функции $u^h(\cdot)$ и закона $U(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^r$, который конструируется таким образом, что при соответствующем согласовании ряда параметров управление $u^h(\cdot)$ вида

$$u^h(t) = u_i^h = U(\tau_i, \xi_i^h, u_{1i,0}^h, u_{1i-1,0}^h, u_{1i-1,m_h^{(1)}-1}^h), \quad \tau_{i-1} = \tau_{i-1,h} \quad (i \in [0 : m_h - 1]),$$

$$\text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \tag{7}$$

аппроксимирует неизвестный вход.

Необходимо отметить, что одно и тоже решение системы (1) может порождаться не единственным возмущением. Пусть $U(z(\cdot))$ – множество всех возмущений, порождающих решение $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы (1), т.е.

$$U(z(\cdot)) = \{\tilde{u}(\cdot) \in P(\cdot) : \dot{y}(t) - f_{21}(t, x(t), y(t)) = B(t, x(t), y(t))\tilde{u}(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\}.$$

Через $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T; \mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $U(z(\cdot))$, порождающее решение $z(\cdot)$ системы (1), т.е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot) \in U(z(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу, будем восстанавливать возмущение $u_*(\cdot)$.

2. Алгоритм решения. Укажем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Возьмём некоторые семейства Δ_{m_h} и $\Delta_{m_h,m_h^{(1)}}$ вида (3), а также функцию $\alpha(h) : (0,1) \to (0.1)$.

Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $M_2 \subset \mathbb{R}^N$ – области, в которых остаются соответственно первые n и последние N фазовых координат (вместе с их единичными окрестностями) решения системы (1), порождённого неизвестным возмущением $u(\cdot)$, т.е.

$$S_1(x(t)) \in M_1, \quad S_1(y(t)) \in M_2 \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Здесь через $S_1(a)$ обозначен единичный шар с центром в точке a в соответствующем пространстве.

В дальнейшем полагаем, что выполнено следующее

Условие. В области $T \times M_1$ функция $y \to F = f_1(t, x, y)$ имеет обратную функцию $y = f_{1y}^{-1}(t, x, F)$, которая является липшицевой по совокупности переменных с постоянной Липшица L_y. Кроме того, функция f_1 имеет производные по каждому аргументу и для измеряемой части $x(\cdot)$ решения справедливо включение $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$.

Введём постоянные $c^0 > 0$, $d > 0$, $d_* > 0$, при которых выполняются неравенства

$$|f_{21}(t, x, y) + B(t, x, y)u|_N \leqslant c^0 \quad \text{для всех} \quad t \in T, \quad (x, y) \in M_1 \times M_2,$$

$$|\dot{y}(t)|_N \leqslant d_0, \quad |\ddot{x}(t)|_n \leqslant d_*, \quad |\dot{x}(t) - f_1(0, x_0, y_0)|_n \leqslant d \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{8}$$

Пусть $d(P) = \sup\limits_{u \in P} |u|_r$, c_1^0 – постоянная Липшица функции $B(t, x, y)$ в области $T \times M_1 \times M_2$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h \in (0, 1)$, число $\alpha = \alpha(h)$ и два семейства Δ_{m_h} и $\Delta_{m_h,m_h^{(1)}}$ разбиений интервала T.

Работу алгоритма разобьём на однотипные шаги. Управления в системе (4) будем корректировать в узлах разбиения $\Delta_{m_h,m_h^{(1)}}$. В течение j-го шага, осуществляемого на временно́м промежутке $\delta_{i,j} = [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}) \subset [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент $\tau_{i,j}$, вычисляются векторы $v_{i,j}^h$ и $u_{1i,j}^h$ по формулам (5) и (6), в которых

$$V(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, w_1^h(\tau_{i,j})) = -\alpha^{-1}[w_1^h(\tau_{i,j}) - \xi_{i,j}^h + \tau_{i,j} f_1(0, x_0, y_0)],$$

$$U_1(\tau_{i,j}, \xi^h_{i,j}, v^h_{i,j}) = f^{-1}_{1y}(\tau_{i,j}, \xi^h_{i,j}, v^h_{i,j} + f_1(0, x_0, y_0)). \tag{9}$$

Затем на вход системы (4) при всех $t \in \delta_{i,j}$, $j \in [0 : m^{(1)}_h - 1]$, подаётся управление $v^h(t)$ вида (5), (9). Под действием этого управления решение системы (4) переходит из состояния $w^h_1(\tau_{i,j})$ в состояние $w^h_1(\tau_{i+1,j})$. В моменты $\tau_i = \tau_{i-1,m^{(1)}_h}$ вычисляем управление u^h_i по формуле (7), полагая

$$U(\tau_i, \xi^h_i, u^h_{1i,0}, u^h_{1i-1,0}, u^h_{1i-1,m^{(1)}_h-1}) = \arg\min_{u\in P}\{|u|_r : u \in \Omega_{h,i}\}. \tag{10}$$

Здесь

$$\Omega_{h,i} = \{v \in P : |(u^h_{1i,0} - u^h_{1i-1,0})\delta^{-1} - [f_{21}(\tau_i, \xi^h_i, u^h_{1i-1,m^{(1)}_h-1}) + B(\tau_i, \xi^h_i, u^h_{1i-1,m^{(1)}_h-1})v]|_N \leqslant \sigma_h\},$$

$$\sigma_h = 2C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\delta^{-1}(h) +$$
$$+ (L + c^0_1 d(P))\{h + (1 + d + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h) + C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\}.$$

Оказывается, что при определённом согласовании величин h, $\delta(h)$, $\delta_1(h)$ и $\alpha(h)$ функция $u^h(\cdot)$ представляет собой аппроксимацию возмущения $u_*(\cdot)$. Именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $\alpha(h)m_h \to 0$, $h\alpha^{-1}(h)m_h \to 0$, $m^{(1)}_h\alpha(h) \to \infty$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Сначала покажем, что если $\alpha(h) \to 0$, $\delta_1(h) \to 0$, $(h + \delta_1(h))\alpha^{-1}(h) \to$ $\to 0$ при $h \to 0$, то существует такое число $h_0 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_0)$ верна оценка

$$\sup_{t\in T} |u^h_1(t) - y(t)|_N \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)), \tag{11}$$

здесь $\nu(h, \alpha, \delta_1) = \alpha + (h + \delta_1)\alpha^{-1}$, $C_0 = L_y(c_* + c_{**})$, где $c_* = \max\{15 + 24d + 2\max\{1, d\}; d_*\}$, $c_{**} = L_y\{1 + d + |f_1(0, x_0, y_0)|_n\}$. Действительно, пусть

$$\dot{X}(t) = \dot{x}(t) - f_1(0, x_0, y_0), \quad X(0) = x_0. \tag{12}$$

Функция, стоящая в правой части (12), является дифференцируемой, её производная суммируема с квадратом евклидовой нормы. В нуле эта функция обращается в нуль. Кроме того,

$$X(\tau_{i,j}) = x(\tau_{i,j}) - \tau_{i,j} f_1(0, x_0, y_0).$$

Согласно [13, теорема 5] найдётся $h^{(1)} \in (0, 1)$ такое, что при всех $h \in (0, h^{(1)})$ выполняется неравенство

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |v^h(t) - \dot{X}(t)|_n \leqslant c_*\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)).$$

В свою очередь в силу условия 1 имеем

$$y(t) = f^{-1}_{1y}(t, x(t), \dot{x}(t)), \tag{13}$$

$$|f^{-1}_{1y}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0)) - f^{-1}_{1y}(t, x(t), \dot{x}(t))|_N \leqslant L_y c_*\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)). \tag{14}$$

Заметим, что

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in T} |\dot{x}(t)|_n \leqslant d + |f_1(0, x_0, y_0)|_n. \tag{15}$$

В таком случае при п.в. $t \in [\tau_{i,j}, \tau_{i,j+1}]$ получаем

$$|f^{-1}_{1y}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0)) - u^h_1(t)|_N =$$

$$= |f_{1y}^{-1}(t, x(t), v^h(t) + f_1(0, x_0, y_0))| - f_{1y}^{-1}(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, v_{i,j}^h + f_1(0, x_0, y_0))|_N \leqslant$$

$$\leqslant L_y\bigg(|t - \tau_{i,j}| + |x(\tau_{i,j}) - \xi_{i,j}^h|_n + \int\limits_{\tau_{i,j}}^{\tau_{i,j+1}} |\dot{x}(t)|_n\,dt\bigg) \leqslant c_{**}(h + \delta_1(h)). \tag{16}$$

Из соотношений (13)–(16) вытекает, что

$$\sup_{t\in T} |u_1^h(t) - y(t)|_N \leqslant L_y\{c_*\nu(h, \alpha_1(h), \delta_1(h)) + c_{**}(h + \delta_1(h))\}. \tag{17}$$

В силу равенства $u_{1ij}^h = f_{1y}^{-1}(\tau_{i,j}, \xi_{i,j}^h, v_{i,j}^h + f_1(0, x_0, y_0))$ из (16), (17) следует оценка (11), справедливая при всех $h \in (0, h_0)$, $h_0 = h^{(1)}$.

Далее, имеет место оценка

$$J_1(t) \equiv |f_{21}(t, x(t), y(t)) - f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})| \leqslant L(|t - \tau_i| + I_1 + I_2), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \tag{18}$$

в которой $I_1 = |x(t) - \xi_i^h|_n$, $I_2 = |y(t) - u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}|_N$.

Вследствие неравенства (15) имеем

$$I_1 \leqslant h + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_n\,dt \leqslant h + (d + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h). \tag{19}$$

В свою очередь при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $h \in (0, h_0)$ в силу оценки (11) получаем

$$I_2 \leqslant |y(\tau_{i-1,m_h^{(1)}-1}) - u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}|_N + |y(\tau_{i-1,m_h^{(1)}-1}) - y(t)|_N \leqslant$$

$$\leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\dot{y}(t)|_N\,dt \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + \delta(h)d_0. \tag{20}$$

Из соотношений (18)–(20) вытекает справедливое при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ неравенство

$$J_1(t) \leqslant L\{C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + h + (d + 1 + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h)\}. \tag{21}$$

Кроме того, при этих же t для всех $u \in P$ имеет место неравенство

$$J_2(t) \equiv |B(t, x(t), y(t))u - B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)-1}})u|_N \leqslant c_1^0(|t - \tau_i| + I_1 + I_2)d(P).$$

Аналогично (21) при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ получаем

$$J_2(t) \leqslant c_1^0\{C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)) + h + (d + 1 + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h)\}d(P). \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) следует оценка

$$J_3(t) \equiv |[f_{21}(t, x(t), y(t)) + B(t, x(t), y(t))u] - [f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}) + B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})u]|_N \leqslant$$

$$\leqslant (L + c_1^0 d(P))\{h + (1 + d + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h) + C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\}, \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \tag{23}$$

из которой вытекает, что

$$\bigg|\delta^{-1} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_{21}(t, x(t), y(t)) + B(t, x(t), y(t))u_*(t)]\,dt -$$

$$- \delta^{-1}[f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}) + B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})] \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)\,dt\Big|_N \leqslant$$

$$\leqslant (L + c_1^0 d(P))\{h + (1 + d + d_0 + |f_1(0, x_0, y_0)|_n)\delta(h) + C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h))\}. \qquad (24)$$

Теперь учтём, что первое слагаемое в неравенстве (24) под знаком нормы $|\cdot|_N$, равное, очевидно, $(y(\tau_i) - y(\tau_{i-1}))\delta^{-1}$, отклоняется от величины $(u^h_{1i,0} - u^h_{1i-1,0})\delta^{-1}$ не более, чем на $2C_0(h, \alpha(h), \delta_1(h))\delta^{-1}(h)$. Отсюда в силу оценки (23) заключаем, что

$$\delta^{-1}(h) \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)\,dt \in \Omega_{h,i} \quad \text{при} \quad h \in (0, h_0), \quad i \in [1 : m_h]. \qquad (25)$$

Введём вспомогательную систему

$$\dot{w}_2^h(t) = f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}) + B(\tau_i, \xi_i^h, u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})u_i^h$$
$$\text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i \in [1 : m_h - 1]) \qquad (26)$$

с начальным состоянием

$$w_2^h(\tau_1) = y_0.$$

Проверим равномерную сходимость решений $w_2^h(\cdot)$ системы (26) к функции $y(\cdot)$ при выполнении условий (7), (10). Очевидно, что для этого достаточно установить оценку

$$|y(\tau_i) - w_2^h(\tau_i)|_N \leqslant \nu(h), \quad i \in [1 : m_h], \qquad (27)$$

где $\nu(h) \to 0$ при $h \to 0$.

При $i = 1$ с учётом соотношений (5) и (8) имеем

$$|y(\tau_1) - w_2^h(\tau_1)|_N = |y(\tau_1) - y_0|_N \leqslant d_0\delta. \qquad (28)$$

Пусть $i \in [2 : m_h - 1]$. Тогда справедливы неравенства

$$|y(\tau_i) - w_2^h(\tau_i)|_N \leqslant |y(\tau_1) - w_2^h(\tau_1)|_N +$$

$$+ \Big|\sum_{j=2}^{i}\{(y(\tau_j) - y(\tau_{j-1})) - (w_2^h(\tau_j) - w_2^h(\tau_{j-1}))\}\Big|_N \leqslant d_0 h + I_i^{(1)} + I_i^{(2)}, \qquad (29)$$

где

$$I_i^{(1)} = \Big|\sum_{j=2}^{i}\{(u^h_{1j,0} - u^h_{1j-1,0}) - (w_2^h(\tau_j) - w_2^h(\tau_{j-1}))\}\Big|_N,$$

$$I_i^{(2)} = \sum_{j=2}^{i}\{|u^h_{1j,0} - y(\tau_j)|_N + |u^h_{1j-1,0} - y(\tau_{j-1})|_N\}.$$

Вследствие условий (7), (10) имеет место неравенство

$$I_i^{(1)} \leqslant \sum_{j=2}^{i} \delta\sigma_h = \vartheta\sigma_h. \qquad (30)$$

В свою очередь в силу оценки (11) получаем

$$|u^h_{1j,0} - y(\tau_j)|_N \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)), \quad |u^h_{1j-1,0} - y(\tau_{j-1})|_N \leqslant C_0\nu(h, \alpha(h), \delta_1(h)).$$

Поэтому
$$I_i^{(2)} \leqslant 2\vartheta C_0 \delta^{-1}(h)\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)). \tag{31}$$

Из неравенств (28)–(31) следует, что
$$|y(\tau_i) - w_2^h(\tau_i)|_N \leqslant \nu(h) = d_0\delta(h) + \vartheta\sigma_h + 2\vartheta C_0\delta^{-1}(h)\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)). \tag{32}$$

Утверждение теоремы вытекает из включения (25) и неравенства (27) и проверяется аналогично [2, с. 34, 35]. Теорема доказана.

3. Оценка скорости сходимости алгоритма. При некоторых дополнительных условиях может быть записана оценка скорости сходимости алгоритма. Для этого нам понадобится следующая доказанная в [2, с. 29]

Лемма. *Пусть* $u(\cdot) \in L_\infty(T_*;\mathbb{R}^n)$, $v(\cdot) \in W(T_*;\mathbb{R}^n)$, $T_* = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,
$$\Big|\int\limits_a^t u(\tau)\,d\tau\Big|_n \leqslant \varepsilon, \quad |v(t)|_n \leqslant K \quad \text{для всех} \quad t \in T_*.$$

Тогда при любом $t \in T_*$ *верно неравенство*
$$\Big|\int\limits_a^t (u(\tau), v(\tau))\,d\tau\Big| \leqslant \varepsilon(K + \operatorname{var}(T_*; v(\cdot))).$$

Здесь $\varepsilon, K = \mathrm{const} \in (0,+\infty)$, через $\operatorname{var}(T_*; v(\cdot))$ обозначается вариация функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а через $W(T_*;\mathbb{R}^n)$ – множество функций $y(\cdot): T_* \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией.

Теорема 2. *Пусть* $u_*(\cdot)$ *– функция ограниченной вариации,* $B(t,x,y) = B$ *– постоянная матрица,* $N \geqslant r$, $\operatorname{rank} B = r$. *Пусть также выполнены условия теоремы 1. Тогда при всех* $h \in (0,h_0)$ *верно неравенство*
$$\int\limits_0^\vartheta |u^h(\tau) - u_*(\tau)|_r^2\,d\tau \leqslant C_*(h + \delta(h) + \nu(h)),$$

где C_* *– положительная постоянная, не зависящая от* h, m_h, $m_h^{(1)}$ *и* α. *Число* h_0 *таково, что при всех* $h \in (0,h_0)$ *выполнена оценка (11), величина* $\nu(h)$ *определена в (32).*

Доказательство. Учитывая липшицевость функции f_{21}, а также теорему 1, заключаем, что для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$, справедливо неравенство
$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t) - u_*(t)\}\,dt\Big|_N = \Big|\int\limits_{t_1}^{t_2}[\dot w_2^h(\tau) - \dot y(\tau) - f_{21}^*(\tau,\xi^h(\tau),u_1^h(\tau)) + f_{21}(\tau,x(\tau),y(\tau))]\,d\tau\Big|_N \leqslant$$
$$\leqslant |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + c_1\bigg\{\int\limits_{t_1}^{t_2}\{|\xi^h(\tau) - x(\tau)|_n + |\tilde u_1^h(\tau) - y(\tau)|_N\}\,d\tau + \delta(h)\bigg\}, \tag{33}$$

где $\mu_h(t) = w_2^h(t) - y(t)$, $f_{21}^*(\tau,\xi^h(\tau),\tilde u_1^h(\tau)) = f_{21}(\tau_i,\xi_i^h,u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1})$, $\xi^h(\tau) = \xi_i^h$, $\tilde u_1^h(\tau) = u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1}$ при п.в. $\tau \in [\tau_i,\tau_{i+1})$. При $t \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$ имеем
$$|\xi^h(t) - x(t)|_n = |\xi_i^h - x(t)|_n \leqslant |\xi_i^h - x(\tau_i)|_n + |x(\tau_i) - x(t)|_n \leqslant$$

$$\leqslant h + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} |\dot{x}(t)|_n\,dt \leqslant c_2(h+\delta(h)), \tag{34}$$

$$|\tilde{u}^h(t) - y(t)|_N \leqslant |u^h_{1i-1,m_h^{(1)}-1} - y(\tau_i - \delta_1(h))|_N + |y(\tau_i - \delta_1(h)) - y(t)|_N \leqslant$$
$$\leqslant C_0\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)) + c_3(\delta(h)+\delta_1(h)) \leqslant C_0\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h)) + c_4\delta(h). \tag{35}$$

Здесь и далее через c_1, c_2, $\ldots$ обозначаются постоянные, которые можно записать явно. Из неравенств (33)–(35) следует, что

$$\biggl|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t) - u_*(t)\}\,dt\biggr|_N \leqslant |\mu_h(t_2) - \mu_h(t_1)|_N + c_5(t_2-t_1)(h+\delta(h)+\nu(h,\alpha(h),\delta_1(h))). \tag{36}$$

Кроме того, в силу оценки (27) при всех $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$, $i\in[1:m_h-1]$, верно неравенство

$$|\mu_h(t)|_N \leqslant |\mu_h(\tau_i)|_N + c_6\delta(h) \leqslant \nu(h) + c_6\delta(h),$$

учитывая которое и неравенство (36), получаем, что

$$\biggl|\int\limits_{t_1}^{t_2} \{u^h(t) - u(t)\}\,dt\biggr|_r \leqslant c_7\biggl|\int\limits_{t_1}^{t_2} B\{u^h(t) - u(t)\}\,dt\biggr|_N \leqslant c_8(h+\nu(h)+\delta(h)). \tag{37}$$

Вследствие включения (25) имеем

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u^h(t)|_r^2\,dt = \delta(h)|u_i^h|_r^2 \leqslant \biggl|\delta^{-1}(h)\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)\,dt\biggr|_n^2 \delta(h) \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{-2}(h)\biggl(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r^2\,dt\biggr)\delta^2(h) = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u_*(t)|_r^2\,dt. \tag{38}$$

Тогда, учитывая (38), выводим оценку

$$\int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u_*(\tau)|_r^2\,d\tau = \int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau)|_r^2\,d\tau - 2\int\limits_0^{\vartheta} (u^h(\tau), u_*(\tau))\,d\tau + \int\limits_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\,d\tau - 2\int\limits_0^{\vartheta} (u^h(\tau), u(\tau))\,d\tau = 2\int\limits_0^{\vartheta} (u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau))\,d\tau, \quad t\in T.$$

В силу леммы 1 и оценки (37) получаем

$$\sup_{t\in T}\biggl|\int\limits_0^t (u_*(\tau) - u^h(\tau), u_*(\tau))\,d\tau\biggr| \leqslant c_9(h+\delta(h)+\nu(h)).$$

Таким образом, при всех $h\in(0,h_0)$ и $t\in T$ верно неравенство

$$\int\limits_0^{\vartheta} |u^h(\tau) - u(\tau)|_N^2\,d\tau \leqslant c_{10}(h+\delta(h)+\nu(h)),$$

из которого и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
2. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, 2011.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
4. *Близорукова М.С.* О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикл. математика и информатика. 2000. № 5. С. 105–115.
5. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* О одном алгоритме динамической реконструкции входных воздействий при измерении части координат // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 6. С. 1007–1017.
6. *Blizorukova M., Maksimov V.* On one algorithm for reconstruction of a disturbance in a linear system of ordinary differential equations // Arch. of Contr. Sci. 2020. V. 30. № 4. P. 757–773.
7. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Устойчивое решение обратных задач динамики управляемых систем. Оптимальное управление и дифференциальные игры // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1988. Т. 185. С. 126–146.
8. *Kryazimskii A.V., Osipov Yu.S.* On positional calculation of normal controls in dynamical systems // Probl. Control and Inform. Theory. 1984. V. 13. № 6. P. 425–436.
9. *Мартьянов А.С.* О реконструкции управлений по измерению части координат нелинейной динамической системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. Т. 4. С. 52–60.
10. *Maksimov V.I.* On dynamical reconstruction of an input in a linear system under measuring a part of coordinates // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2018. V. 26. № 3. P. 395–410.
11. *Maksimov V.I.* Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybernetics. 1996. V. 25. № 3. P. 465–481.
12. *Сурков П.Г.* Применение метода невязки в задаче восстановления правой части для системы дробного порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 11. С. 1846–1855.
13. *Максимов В.И.* О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243.

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.
После доработки 02.09.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 3, с. 425–432

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О ПРИВЕДЕНИИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ К ВИДУ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ

© 2022 г. В. В. Фомичев, Е. И. Атамась, А. И. Роговский

Рассматривается задача о приведении линейной дифференциальной управляемой системы с соизмеримыми запаздываниями с помощью невырожденной линейной замены выходов к системе, для которой определён вектор относительного порядка.

DOI: 10.31857/S0374064122030128, **EDN:** BZEAPQ

Обозначения. Далее будем придерживаться следующих обозначений:

если A – матрица, то через A_{i*} обозначается её i-я строка;

если $r\in\mathbb{N}^l$, то $\operatorname{ord}(r)$ – вектор, имеющий те же, что и r, компоненты, но упорядоченные по неубыванию;

если $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{N}^l$, то $|r|=r_1+r_2+\ldots+r_l$;

если $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_p$ – строки одинакового размера, то $G[v_1,v_2,\ldots,v_p]$ обозначает определитель Грама указанных строк, т.е. $G[v_1,v_2,\ldots,v_p]=\det(v_iv_j^{\mathrm{т}})_{i,j=1}^p$.

Введение. Рассматривается линейная система управления с соизмеримыми запаздываниями. Такая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot x=\sum\limits_{i=0}^k A_ix(t-i\tau)+\sum\limits_{i=0}^k B_iu(t-i\tau),\\ y=\sum\limits_{i=0}^k C_ix(t-i\tau), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $y(t),u(t)\in\mathbb{R}^l$, матрицы A_i, B_i, C_i, $i=\overline{0,k}$, постоянны и имеют соответствующие размеры, $\tau=\mathrm{const}>0$. Вводя оператор запаздывания $\delta: f(t)\to f(t-\tau)$ и заменяя его символом Δ (считаем, что $\delta^0\equiv\mathrm{id}$), запишем систему (1) в алгебраической форме

$$\begin{cases} \dot x=A(\Delta)x+B(\Delta)u,\\ y=C(\Delta)x. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$A(\Delta)=\sum_{i=0}^k A_i\Delta^i,\quad B(\Delta)=\sum_{i=0}^k B_i\Delta^i,\quad C(\Delta)=\sum_{i=0}^k C_i\Delta^i$$

– полиномиальные матрицы размеров $n\times n$, $n\times l$, $l\times n$ соответственно. Систему (2) для краткости будем иногда обозначать через $\{A(\Delta),B(\Delta),C(\Delta)\}$, поскольку она однозначно определяется своими матрицами. Далее символ Δ считаем комплексной переменной, $\Delta\in\mathbb{C}$. Исследованию систем с запаздываниями посвящено огромное число работ (см., например, [1–6] и приведённую в них библиографию). Важным понятием для таких систем является понятие относительного порядка (см. [7]):

Определение 1. Вектор $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{N}^l$ называется вектором *относительного порядка* системы (2), если выполнены следующие условия:

1) $C_{i*}(\Delta)A^{r_i-1}(\Delta)B(\Delta)\neq 0$ *) и если $r_i>1$, то $C_{i*}(\Delta)A^{j-1}(\Delta)B(\Delta)=0$, $j=\overline{1,r_i-1}$;

*) Т.е. указанная строка отлична от строки, целиком состоящей из нулевых полиномов.

2) определитель матрицы

$$H(\Delta)=\begin{pmatrix}C_{1*}(\Delta)A^{r_1-1}(\Delta)B(\Delta)\\ \cdots\\ C_{l*}(\Delta)A^{r_l-1}(\Delta)B(\Delta)\end{pmatrix}$$

является ненулевым полиномом. Если, кроме того, определитель $\det H(\Delta)$ обратим, т.е. является ненулевым числом, то относительный порядок называется *чистым*.

Сравним определение относительного порядка для систем с запаздыванием с аналогичным определением для линейных систем без запаздывания, т.е. систем вида

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases}\tag{3}$$

где, как и ранее, $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $y(t),u(t)\in\mathbb{R}^l$, а A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров. Системы без запаздывания также однозначно определяются своими матрицами, поэтому систему (3) иногда будем обозначать через $\langle A,B,C\rangle$.

Определение 1′. Вектор $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{N}^l$ называется *вектором относительного порядка* системы (3), если выполнены следующие условия:

1′) $C_{i*}A^{r_i-1}B\neq 0$ и если $r_i>1$, то $C_{i*}A^{j-1}B=0$, $j=\overline{1,r_i-1}$;

2′) определитель матрицы

$$H=\begin{pmatrix}C_{1*}A^{r_1-1}B\\ \cdots\\ C_{l*}A^{r_l-1}B\end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

Как видим, определения 1 и 1′ схожи между собой, однако между ними есть и отличия. Для систем с соизмеримыми запаздываниями элементы строки $C_{i*}A^{r_i-1}B$ являются полиномами и условие $C_{i*}A^{r_i-1}B\neq 0$ означает, что, как отмечено в определении 1, в указанной строке имеется хотя бы один ненулевой полином, в то время как в случае систем без запаздывания строка $C_{i*}A^{r_i-1}B$ – элемент $\mathbb{R}^{1\times l}$ и указанное условие означает, что эта строка ненулевая.

Условие 2) отличия от нуля определителя матрицы $H(\Delta)$ можно понимать двумя разными способами. Можно считать, что определитель – отличный от нуля полином от Δ, а можно считать его отличной от нуля константой. В последнем случае говорят о *чистом относительном порядке*, в этом случае матрица $H(\Delta)$ обратима над кольцом полиномов от Δ.

Понятие относительного порядка играет важную роль в теории линейных систем. Например, если для системы выполняются условия относительного порядка (чистого относительного порядка для систем с запаздыванием), то её можно преобразовать к так называемой форме с выделением нулевой динамики [7], которая эффективно используется при решении различных задач управления (например, при решении задачи обращения [8; 9, гл. 2, § 2], наблюдения [10, гл. 5, § 5], стабилизации (см. [11]) и др. [12; 13, гл. 5, § 5]). Однако условия относительного порядка являются ограничительными и поэтому даже для линейных систем без запаздывания выполняются не всегда (см. [9, с. 69]). При этом эти условия, что важно в дальнейшем, не инвариантны по отношению к замене выходов. Покажем это на примере.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему вида (1):

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2(t)+u_1(t)+u_2(t),\\ \dot{x}_2=x_3(t)+u_1(t-\tau)+u_2(t-\tau),\\ \dot{x}_3=u_2(t),\\ y_1=x_1,\\ y_2=x_2.\end{cases}\tag{4}$$

Матрицы системы следующие:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\ \Delta&\Delta\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.\tag{5}$$

Проверим, выполняются ли условия относительного порядка: $C_{1*}B = (1,\ 1)$, $C_{2*}B = (\Delta,\ \Delta)$, поэтому требованию 1) определения 1 удовлетворяет вектор $r = (1,1)^{\text{т}}$. При этом матрица $H(\Delta)$, составленная из указанных строк, имеет нулевой определитель, а значит, условия относительного порядка не выполняются.

Сделаем замену выходов, положив

$$\tilde{y}_1(t) = y_1(t), \quad \tilde{y}_2(t) = y_2(t) - y_1(t-\tau). \tag{6}$$

Отметим, что замена обратима: $y_1(t) = \tilde{y}_1(t)$, $y_2(t) = \tilde{y}_2(t) - \tilde{y}_1(t-\tau)$. После преобразования система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) + u_1(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_2 = x_3(t) + u_1(t-\tau) + u_2(t-\tau), \\ \dot{x}_3 = u_2(t), \\ y_1 = x_1(t), \\ y_2 = x_2(t) - x_1(t-\tau). \end{cases} \tag{7}$$

Матрицы A и B этой системы те же, что и в (5), а матрица C следующая:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Delta & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим для системы (7) условия относительного порядка: $C_{1*}B = (1,1)$ и $C_{2*}B = (0,0)$, $C_{2*}AB = (-\Delta^2, -\Delta^2+1)$. Поэтому условию 1) определения 1 удовлетворяет вектор $r = (1,2)^{\text{т}}$, а определитель матрицы $H(\Delta)$, как легко видеть, равен 1. Это означает, что преобразованная система имеет относительный порядок.

Таким образом, с помощью замены выходов нам удалось добиться выполнения условий относительного порядка. Это, однако, возможно не всегда, даже для линейных систем без запаздывания (см. [14]). Цель настоящей работы – выяснить, при каких условиях систему, не имеющую относительного порядка, можно с помощью замены выходов преобразовать к системе, для которой условия относительного порядка выполняются.

Сформулируем задачу формально. Заметим, что использованная в примере замена выходов (6) эквивалентна умножению матрицы C исходной системы на полиномиальную матрицу

$$T(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица является *унимодулярной* (т.е. её определитель равен ненулевой константе), что обеспечивает обратимость замены. Далее будем рассматривать только такие замены выходов (так как они являются обратимыми). Мы приходим к постановке задачи.

Задача. Дана система $\{A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)\}$, не имеющая относительного порядка. Требуется проверить, существует ли такая унимодулярная матрица $T(\Delta)$, что для системы $\{A(\Delta), B(\Delta), T(\Delta)C(\Delta)\}$ условия относительного порядка выполняются и, если существует, найти эту матрицу.

Обобщения относительного порядка. В работе [14] для решения аналогичной задачи для систем без запаздывания вводятся обобщения относительного порядка. Здесь мы распространим эти понятия на случай систем с запаздыванием. Для замкнутости изложения приведём определения обобщений относительного порядка для систем без запаздывания.

Так как условия относительного порядка являются ограничительными, ослабим их.

Определение 2′. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\text{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *неполного относительного порядка* (*НОП*) системы (3), если для него выполняется условие 1′) определения 1′, т.е. $C_{i*}A^{r_i-1}B \neq 0$ и если $r_i > 1$, то $C_{i*}A^{j-1}B = 0$, $j = \overline{1, r_i - 1}$.

Определение 3′. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l)^{\text{т}} \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *главного неполного относительного порядка* (*ГНОП*) системы (3), если он является вектором НОП и для любых попарно различных индексов $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_q$ таких, что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q}$ строки $\{C_{j*}A^{r_j-1}B\}_{j=1}^{q}$ линейно независимы.

Иначе говоря, в определении $3'$, в отличие от условия $2'$) определения $1'$, требуется линейная независимость не всех строк $C_{i*}A^{r_i-1}B$, а только тех, которые соответствуют одинаковым компонентам вектора НОП.

Распространим приведённые понятия на системы с запаздыванием.

Определение 2. Вектор $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{N}^l$ называется вектором *неполного относительного порядка* (*НОП*) системы (2), если для него выполнено условие 1) определения 1, т.е. $C_{i*}(\Delta)A^{r_i-1}(\Delta)B(\Delta)\neq 0$ и если $r_i>1$, то $C_{i*}(\Delta)A^{j-1}(\Delta)B(\Delta)=0$, $j=\overline{1,r_i-1}$.

В примере 1 система (4) не имеет относительного порядка, но для неё, как показано, определён вектор НОП $r=(1,1)^{\mathrm{т}}$.

Определение 3. Вектор $r=(r_1,\ldots,r_l)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{N}^l$ называется вектором *главного неполного относительного порядка* (*ГНОП*) системы (2), если он является вектором НОП и для любых попарно различных индексов i_1, i_2, $\ldots$, i_q таких, что $r_{i_1}=r_{i_2}=\ldots=r_{i_q}$, полином $G[C_{i_1*}A^{r_{i_1}-1}B,C_{i_2*}A^{r_{i_2}-1}B,\ldots,C_{i_q*}A^{r_{i_q}-1}B]$ ненулевой.

Замечание 1. В определении 3 требование к определителю Грама можно заменить требованием линейной независимости строк $\{C_{i_j*}(\Delta)A^{r_{i_j}-1}(\Delta)B(\Delta)\}_{j=1}^q$ (как элементов $\mathbb{R}^{1\times l}$) при всех Δ, за исключением, быть может, конечного числа значений.

Замечание 2. Определения 2 и 3 практически дословно повторяют соответственно определения $2'$ и $3'$ для систем без запаздывания. В частности, в определении 3, фактически, требуется линейная независимость строк $C_{i*}A^{r_i-1}B$, соответствующих равным компонентам вектора НОП, при этом допускается, чтобы эти строки были линейно зависимы при некоторых Δ, но таких значений должно быть лишь конечное число.

Замечание 3. Отметим, что если система (2) имеет вектор ГНОП r (т.е. условия определения 3 выполняются для полиномиальных матриц $A(\Delta)$, $B(\Delta)$, $C(\Delta)$), то это означает, что при каждом фиксированном Δ^*, кроме, быть может, конечного числа значений, линейная динамическая система без запаздывания $\langle A(\Delta^*),B(\Delta^*),C(\Delta^*)\rangle$ также имеет вектор ГНОП r (в смысле определения $3'$).

В примере 1 система (4) не имеет вектора ГНОП, поскольку при $i_1=1$, $i_2=2$ для вектора НОП r этой системы справедливо $r_{i_1}=r_{i_2}=1$, однако $G[C_{1*}B,C_{2*}B]=G[(1,1),(\Delta,\Delta)]=0$.

Так как мы рассматриваем задачу приведения системы к виду с относительным порядком с помощью замены выходов, выделим класс систем, для которых наличие вектора НОП инвариантно по отношению к замене выходов.

Далее, поскольку речь будет идти исключительно о системе (2), аргумент Δ в её матрицах A, B и C, а также в матрице T линейного преобразования будем, как правило, опускать.

Определение 4. Систему $\{A,B,C\}$ назовём *слабо приводимой*, если при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A,B,TC\}$ определён вектор НОП.

Сформулируем критерий слабой приводимости.

Лемма 1. *Система $\{A,B,C\}$ является слабо приводимой тогда и только тогда, когда матрица $V(\Delta)=[CB,CAB,\ldots,CA^{n-1}B]$ имеет полный ранг l при всех Δ за исключением, быть может, конечного числа значений.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система $\{A,B,C\}$ является слабо приводимой, но $\operatorname{rank}V(\Delta)<l$ для всех $\Delta\in D$, причём D – счётное множество. Найдётся такая унимодулярная матрица T, что матрица $\tilde V=TV$ имеет ступенчатую форму (см. [15, с. 140]). Заметим, что последняя строка $\tilde V_{l*}$ матрицы $\tilde V$ состоит из нулевых полиномов. В самом деле, согласно определению ступенчатой формы, матрица $V(\Delta)\in\mathbb{R}^{l\times nl}$ имеет полный ранг, если она не содержит нулевых строк. Если все строки матрицы V содержат хотя бы один ненулевой полином, то, поскольку такой полином может обращаться в нуль лишь для конечного числа значений Δ, эта матрица будет иметь полный ранг при всех Δ, за исключением конечного их числа. Однако по предположению $\operatorname{rank}V(\Delta)<l$ для всех $\Delta\in D$, где D – счётное множество. Таким образом,

$$V_{l*}(\Delta)=(T_{l*}CB,T_{l*}CAB,\ldots,T_{l*}CA^{n-1}B)=0\quad\text{для любого}\quad\Delta. \tag{8}$$

При этом, согласно теореме Гамильтона–Кели, из предыдущего равенства следует, что

$$T_{l*}CA^{j-1}B=0,\quad j\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

В самом деле, при произвольном фиксированном Δ^* все степени матрицы $A(\Delta^*)$ линейно выражаются через её первые n степеней (начиная с нулевой), поэтому

$$T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{j-1}(\Delta^*)B(\Delta^*) = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{q-1}(\Delta^*)B(\Delta^*).$$

При этом произведения $T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{q-1}(\Delta^*)B(\Delta^*)$, $q = \overline{1,n}$, являются нулевыми строками, согласно (8) (как элементы нулевой строки V_{l*}). Таким образом, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем равенство $T_{l*}(\Delta^*)C(\Delta^*)A^{j-1}(\Delta^*)B(\Delta^*) = 0$. В силу произвольности Δ^* получаем (9).

Рассмотрим систему $\{A, B, \tilde{C}\}$, где $\tilde{C} = TC$. Согласно предположению эта система имеет вектор НОП r. Заметим, что $\tilde{C}_{l*} = T_{l*}C$, поэтому, согласно (9), система $\{A, B, \tilde{C}\}$ не имеет вектора НОП. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть матрица V имеет полный ранг при всех Δ, за исключением, возможно, конечного числа значений. Тогда тем же свойством обладает и матрица $\tilde{V} = TV$, где T – произвольная унимодулярная матрица. Рассмотрим систему $\{A, B, \tilde{C}\}$, где $\tilde{C} = TC$. Согласно сказанному выше матрица $\tilde{V}$ не имеет строк, целиком состоящих из нулевых полиномов. Так как строка $\tilde{V}_{i*}$ этой матрицы состоит из строк $\tilde{C}_{i*}A^{j-1}B$, найдётся номер q, для которого $\tilde{C}_{i*}A^{q-1}B \neq 0$. Это означает, что система $\{A, B, C\}$ имеет вектор НОП. В силу произвольности матрицы T отсюда следует, что система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой. Достаточность, а вместе с нею и лемма, доказаны.

Отметим некоторые свойства вектора ГНОП.

Лемма 2. *Пусть система $\{A, B, C\}$ является слабо приводимой. Тогда найдётся такая унимодулярная матрица T, что система $\{A, B, TC\}$ имеет вектор ГНОП.*

Доказательство. Приведём алгоритм нахождения матрицы T.

Шаг 0. Положим $A^0 = A$, $B^0 = B$, $C^0 = C$ и перейдём к следующему шагу.

Шаг $p+1$. На предыдущем шаге получена система $\{A^p, B^p, C^p\}$. Если она имеет вектор ГНОП, то алгоритм останавливается. Предположим, что у неё нет вектора ГНОП. Тогда в силу слабой приводимости этой системы для неё определён вектор НОП r^p. При этом найдутся такие попарно различные индексы i_1, i_2, $\ldots$, i_q, что полином

$$G[C^p_{i_1*}(A^p)^{r^*-1}B^p, C^p_{i_2*}(A^p)^{r^*-1}B^p, \ldots, C^p_{i_q*}(A^p)^{r^*-1}B^p]$$

нулевой, причём $r^* = r^p_{i_1} = \ldots = r^p_{i_q}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $i_j = j$, $j = \overline{1,q}$ (этого всегда можно добиться, переставив строки матрицы C^p с помощью умножения её на соответствующую унимодулярную матрицу).

Рассмотрим матрицу

$$V = \begin{pmatrix} C^p_{1*}(A^p)^{r^*-1}B^p \\ C^p_{2*}(A^p)^{r^*-1}B^p \\ \ldots \\ C^p_{q*}(A^p)^{r^*-1}B^p \end{pmatrix}.$$

Известно (см., например, [15, с. 140]), что найдётся такая унимодулярная матрица $\tilde{T}^p$, что матрица $\tilde{T}^pV$ имеет ступенчатую форму. При этом последняя строка матрицы TV нулевая, иначе, согласно определению ступенчатой формы матрицы, ранг матрицы $\tilde{T}^pV$ равен q при почти всех Δ.

Определим матрицу T^p равенством

$$T^p = \begin{pmatrix} \tilde{T}^p & 0 \\ 0 & I_{l-q} \end{pmatrix}.$$

Положим $A^{p+1} = A^p$, $B^{p+1} = B^p$, $C^{p+1} = T^pC^p$ и рассмотрим систему $\{A^{p+1}, B^{p+1}, C^{p+1}\}$. Заметим, что для вектора НОП этой системы справедливо неравенство $|r^{p+1}| > |r^p|$. Действительно, учитывая вид матрицы T^p, заключаем, что последние $l-q$ строк матрицы C^p такие же, как и у матрицы C^{p+1}, поэтому $r_j^{p+1} = r_j^p$, $j = \overline{q+1, l}$. Покажем, что $r_j^{p+1} \geqslant r_j^p$, $j = \overline{1, q}$. В самом деле, учитывая вид матрицы T^p, получаем

$$C_{i*}^{p+1} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_{ij}^p C_{i*}^p, \quad i = \overline{1, q},$$

откуда

$$C_{i*}^{p+1} (A^{p+1})^{j-1} B^{p+1} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_{ij}^p C_{i*}^p (A^p)^{j-1} B^p. \tag{10}$$

В силу определения НОП и того, что $r* = r_1^p = \ldots = r_q^p$, верны равенства $C_{i*}^p (A^p)^{j-1} B^p = 0$, $j = \overline{1, r^* - 1}$, $i = \overline{1, q}$, из которых, согласно (10), вытекает, что $C_{i*}^{p+1} (A^{p+1})^{j-1} B^{p+1} = 0$, $j = \overline{1, r^* - 1}$, $i = \overline{1, q}$, т.е. $r_j^{p+1} \geqslant r_j^p$, $j = \overline{1, q}$.

Покажем теперь, что $r_q^{p+1} > r_q^p$. Вследствие сказанного выше строка q матрицы $T^p V$ является нулевой, т.е.

$$C_{q*}^{p+1} (A^{p+1})^{r^*-1} B^{p+1} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{T}_{ij}^p C_{i*}^p (A^p)^{r^*-1} B^p = 0.$$

Последнее равенство означает, что $r_q^{p+1} > r_q^p$. При этом имеет место покомпонентная “монотонность”, т.е. каждая компонента вектора не уменьшилась. Таким образом, получили систему $\{A^{p+1}, B^{p+1}, C^{p+1}\}$, для которой $|r^{p+1}| > |r^p|$. Перейдём к следующему шагу.

Покажем, что приведённый алгоритм обязательно остановится на каком-то шаге. Заметим, что для вектора НОП r любой системы (2) справедливы неравенства $r_i \leqslant n$, $i = \overline{1, l}$. В самом деле, если $r_i > n$, то $C_{i*} A^{j-1} B = 0$, $j = \overline{1, n}$, а это, согласно теореме Гамильтона–Кели, означает, что $C_{i*} A^{j-1} B = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, т.е. вектор НОП для системы не определён. Таким образом, $r_i \leqslant n$, $i = \overline{1, l}$, и $|r| \leqslant nl$.

Так как на каждом шаге алгоритма “длина” $|\cdot|$ вектора НОП построенной системы увеличивается, то на некотором шаге алгоритм остановится, а получившаяся система будет иметь вектор ГНОП. Лемма доказана.

Далее неравенства между векторами одинаковой размерности понимаем покомпонентно, а i-ю компоненту вектора v обозначаем через v_i.

Лемма 3. *Пусть r – вектор ГНОП слабо приводимой системы $\{A, B, C\}$. Тогда при любой унимодулярной матрице T для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор НОП $\tilde{r}$, причём выполняется неравенство* $\operatorname{ord}(r) \geqslant \operatorname{ord}(\tilde{r})$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. существует такая унимодулярная матрица T, что

$$(\operatorname{ord}(r))_i < (\operatorname{ord}(\tilde{r}))_i \tag{11}$$

для некоторого индекса i. Заметим, что при всех Δ, кроме, быть может, конечного числа значений, для системы без запаздывания $\langle A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)\rangle$ определён вектор ГНОП, совпадающий с r. Также при всех Δ, кроме, быть может, конечного числа значений, для системы без запаздывания $\langle A(\Delta), B(\Delta), T(\Delta)C(\Delta)\rangle$ определён вектор НОП, совпадающий с $\tilde{r}$ (см. Замечание 3). Таким образом, найдётся Δ^*, при котором для линейных систем без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ и $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$ определены векторы ГНОП r и НОП $\tilde{r}$ соответственно.

Известно (см. [14, 16]), что если r – вектор ГНОП линейной системы без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$, а $\tilde{r}$ – вектор НОП системы $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$, то справедливо неравенство $\operatorname{ord}(r) \geqslant \operatorname{ord}(\tilde{r})$. Но это неравенство противоречит (11). Лемма доказана.

Следствие. *Вектор ГНОП системы (2) определён однозначно с точностью до порядка его компонент.*

Основной результат. Приведённые выше свойства обобщений относительного порядка позволяют сформулировать и доказать основной результат работы.

Теорема. *Пусть для системы* $\{A, B, C\}$ *определён вектор ГНОП, причём для этой системы не выполняются условия определения 1. Тогда при любой унимодулярной матрице* T *для системы* $\{A, B, TC\}$ *условия определения 1 также не выполняются.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. r – вектор ГНОП системы $\{A, B, C\}$, и для этой системы не выполняются условия определения 1, однако существует такая унимодулярная матрица T, что для системы $\{A, B, TC\}$ определён вектор относительного порядка $\tilde{r}$. Не ограничивая общности, считаем, что векторы r и $\tilde{r}$ упорядочены по невозрастанию (этого всегда можно добиться перестановкой выходов). Тогда $r = \tilde{r}$ по следствию из леммы 3. При этом, согласно определению, найдётся такое число Δ^*, что для систем без запаздывания $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ и $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$ определены векторы ГНОП r и ОП $\tilde{r}$ соответственно. Однако, в силу известного свойства [17] линейных систем без запаздывания, если для одной системы $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), C(\Delta^*)\rangle$ не выполнены условия ОП, то и для любой другой системы $\langle A(\Delta^*), B(\Delta^*), T(\Delta^*)C(\Delta^*)\rangle$, вектор НОП которой совпадает с вектором НОП исходной, также не выполнены условия ОП. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 2. Рассмотрим систему $\{A, B, C\}$ с матрицами

$$A(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для этой системы не определён относительный порядок, так как $C_{1*}B = (\Delta, 0)$ и $C_{2*}B = (0, 0)$, $C_{2*}AB = (\Delta^2, 0)$, но определён вектор ГНОП $r = (1, 2)^{\mathrm{т}}$. Согласно доказанной теореме это означает, что с помощью замены выходов нельзя преобразовать систему к форме с относительным порядком. Установим это утверждение явно. Пусть в системе сделана замена выходов $\tilde{y} = T(\Delta)y$, где $T(\Delta) = T_{ij}(\Delta)_{i,j=1}^2$ – унимодулярная матрица. Рассмотрим систему $\{A(\Delta), B(\Delta), \tilde{C}(\Delta)\}$, где $\tilde{C} = TC$. Матрица выходов этой системы имеет вид

$$\tilde{C}(\Delta) = T(\Delta)C(\Delta) = \begin{pmatrix} T_{11}(\Delta) & T_{12}(\Delta) & 0 & 0 \\ T_{21}(\Delta) & T_{22}(\Delta) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1*}B &= (T_{11}(\Delta)\Delta, 0), \quad \tilde{C}_{1*}AB = (T_{12}(\Delta)\Delta^2, 0), \\ C_{2*}B &= (T_{21}(\Delta)\Delta, 0), \quad C_{2*}AB = (T_{22}(\Delta)\Delta^2, 0). \end{aligned} \tag{12}$$

Так как матрица $T(\Delta)$ унимодулярна, то хотя бы один из полиномов T_{11} или T_{12} отличен от нулевого, и то же самое справедливо и для полиномов T_{21}, T_{22}. Таким образом, матрица H из определения 1 будет составлена из каких-то строк (12). Это означает, что определитель этой матрицы будет нулевым полиномом при любой унимодулярной матрице T, т.е. исходную систему с помощью линейных невырожденных замен выходов нельзя преобразовать к системе с относительным порядком.

Лемма 3 и теорема работы получены авторами при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288). Остальные результаты, включая примеры, получены Атамасем Е.И. и Роговским А.И. при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных-кандидатов наук (МК-4905.2021.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В.* Обращение гипервыходных систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 5. С. 538–541.
2. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.
3. *Villasana M., Radunskaya A.* A delay differential equation model for tumor growth // J. of Math. Biology. 2003. V. 47. № 3. C. 270–294.

4. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. on Automatic Contr. 1986. V. 31. № 6. P. 543–550.
5. *Bodnar M., Forys U., Poleszczuk Jan.* Analysis of biochemical reactions models with delays // J. of Math. Anal. and Appl. 2011. V. 376. № 1. P. 74–83.
6. *Zhu Y., Krstic M.* Adaptive and robust predictors for multi-input linear systems with distributed delays // SIAM J. on Contr. and Optimization. 2020. V. 58. № 6. P. 3457–3485.
7. *Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В.* О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 11–15.
8. *Атамась Е.И.* Алгоритмы обращения динамических систем с запаздыванием: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2009.
9. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
10. *Фомичев В.В., Коровин С.К.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределённостью. М., 2007.
11. *Wang L., Isidori A., Su H.* Global stabilization of a class of invertible MIMO nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Contr. 2015. V. 60. № 3. P. 616–631.
12. *Isidori A.* The zero dynamics of a nonlinear system: from the origin to the latest progresses of a long successful story // Proceed. of the 30th Chinese Control Conf. 2011. P. 18–25.
13. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
14. *Краев А.В., Роговский А.И., Фомичев В.В.* К обобщению относительного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128–1132.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1966.
16. *Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И.* О приведении гипервыходных систем к форме с относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1503–1515.
17. *Краев А.В.* Некоторые свойства относительного порядка линейных стационарных динамических систем // Нелинейная динамика и управление: сб. ст. / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М., 2013. Т. 8. С. 105–112.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский центр
“Курчатовский институт”, г. Москва

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.
После доработки 02.03.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.