



Российская Академия Наук

А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

7

И Ю Л Ъ

Москва

2022

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2022 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),
П.В. ЛЫСЕНКО (pashlys@yandex.ru),
В.П. ЯХНО, канд. техн. наук (vic_iakhno@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДВЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА¹

Рассмотрена задача планирования траектории управляемого подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения, для случая, когда необходимые условия оптимальности траектории вырождены. Введены дополнительные ограничения и формализованы две оптимизационные задачи. В первой задаче требуется найти оптимальный скоростной режим объекта на заданной траектории, а во второй — оптимальную траекторию при движении на постоянной скорости. Предложены методы и алгоритмы построения оптимальных траекторий и нахождения скоростных режимов, для второй задачи найдена аналитическая область существования решения для произвольных параметров. Аналитические результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: планирование траекторий, необходимые условия экстремума, индикатриса излучения.

DOI: 10.31857/S0005231022070017, EDN: ADLKXD

1. Введение

Широкое применение беспилотных аппаратов, действующих в различных средах и решающих в автономном режиме задачи гражданской и военной направленности, приводит к необходимости осуществлять планирование их миссий и решать задачи траекторного управления, полагаясь на доступную информацию, поступающую по измерительным каналам и каналам связи [1–3]. Принятие решения на борту о последовательности действий или прокладке маршрута управляемого подвижного объекта (УПО) должно основываться на оптимизации некоторого критерия качества, связанного с конкретной прикладной задачей. Поскольку часто имеется недостаток измерительных и информационных каналов и данных, то приходится использовать математические модели, описывающие появление и эволюцию сигналов физических

¹ Работа П.В. Лысенко выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-38-90215).

полей в пространстве до момента формирования информационного признака, определяющего этот критерий. В частности, в задаче уклонения от обнаружения стационарной поисковой системой критерий формируется на основе вероятности необнаружения УПО [4–6]. Бортовое алгоритмическое и программное обеспечение должно учитывать специфику задачи планирования траектории, в том числе и неединственность ее решения в общем случае [7–9]. Поэтому планирование траекторий УПО является наукоемкой и актуальной задачей [10, 11].

Аналитические решения для опорных траекторий движения УПО в задаче уклонения от обнаружения получены для случая постоянной [12] и переменной скоростей движения [13]. Численный алгоритм был разработан для УПО с неоднородной индикатрисой рассеяния при уклонении от обнаружения радаром [14] и неоднородной индикатрисой излучения при уклонении от обнаружения сенсором [7, 15]. Постановкам, учитывающим наличие радара в области движения УПО, также посвящены публикации [14, 16].

Данная статья продолжает работы по планированию траекторий движения управляемых подвижных объектов (УПО), действующих в конфликтной среде и решающих задачу уклонения от поисковых систем [17–19], и рассматривает математические аспекты планирования. В [7] получены и исследованы условия вырождения необходимых и достаточных условий оптимальности траекторий УПО, обладающего неоднородной индикатрисой излучения и уклоняющегося на плоскости от неподвижного обнаружителя. В [7] был найден явный вид индикатрисы излучения, который приводит к вырождению условий оптимальности.

В настоящей статье будут рассмотрены две постановки и методы решения задач планирования траектории для случая вырожденной индикатрисы излучения. Это задача нахождения оптимального скоростного режима УПО при нулевом детерминанте матрицы Гессе и заданной траектории, а также задача нахождения оптимальной траектории УПО при нулевом детерминанте матрицы Гессе в случае постоянной скорости движения, значение которой должно быть определено в результате решения.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать задачу планирования траектории подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения, при уклонении на плоскости от одиночного стационарного обнаружителя. Будем полагать, что УПО движется в поле обнаружения поисковой системы, представляющей собой одиночный сенсор, расположенный в начале координат. Поэтому рассматривается задача планирования траектории УПО, которая доставляет минимум функционалу риска, приведенному в [7]. Задача подвижного объекта — перейти из начальной точки A в конечную точку B за заданное время с минимально возможным риском на траектории.

Задача 1. Требуется найти траекторию $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал

$$(2.1) \quad \begin{aligned} R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) &= \int_0^T S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}) dt = \\ &= \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} G\left(\arctg \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right) dt \rightarrow \min_{\rho(\cdot), \varphi(\cdot)}, \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \varphi(0) = \varphi_A, \quad \varphi(T) = \varphi_B.$$

Здесь введены координаты (ρ, φ) , определяющие положение УПО относительно сенсора, $\rho = \ln r$, где r — расстояния между сенсором и УПО, φ — полярный угол. Остановимся на случае $\mu = 2$ и ситуации вырождения, когда детерминант матрицы Гессе равен нулю [7]. Индикатриса излучения $G(\beta)$ связана с профилем излучения УПО. Для компактности записи здесь и далее зависимость в функциях от аргумента будет опущена, кроме случаев, когда потребуется уточнение этой зависимости.

Определение 1. Профилем $P(\alpha)$ называется функция зависимости мощности излучаемого сигнала от угла между выделенной осью, совпадающей в дальнейшем с направлением движения объекта, и направлением на наблюдателя.

В [7] показано, что нормированный профиль $P(\alpha)$, соответствующий гессиану, равному нулю, имеет вид

$$(2.2) \quad P(\alpha, \nu) = \cos^2(\alpha - \nu),$$

где ν — произвольная константа, определяющая различные возможные профили. Профиль объекта приведен на рис. 1 (а именно случай, когда $\nu = 15^\circ$).

Определение 2. Индикатриса излучения $G(\beta)$ — это мощность излучаемого сигнала в направлении сенсора при отклонении объекта на угол β от направления на положение объекта относительно сенсора.

Связь между профилем излучения и индикатрисой излучения поясняется на рис. 2.

На рис. 2 сенсор находится в начале координат. Скорость УПО направлена по отношению к отрезку, соединяющему сенсор и объект, под углом β . Величина индикатрисы излучения в сторону сенсора отмечена отрезком $G(\beta)$. Угол β , как видно из рисунка, определяется по формуле:

$$(2.3) \quad \beta = \arctg\left(\frac{\dot{\varphi} \cdot r}{\dot{r}}\right).$$

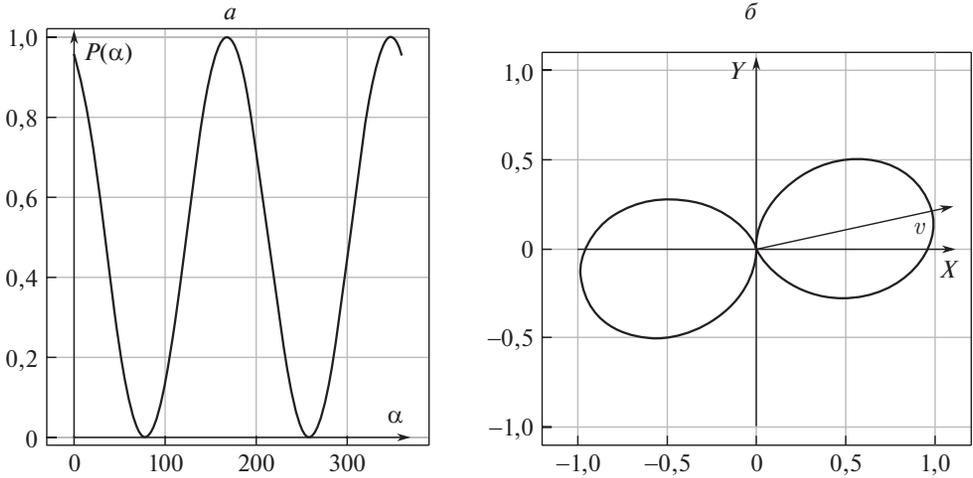


Рис. 1. Профиль излучения с детерминантом матрицы Гессе, равным нулю: *a* — развертка профиля излучения; *б* — профиль излучения на декартовой плоскости.

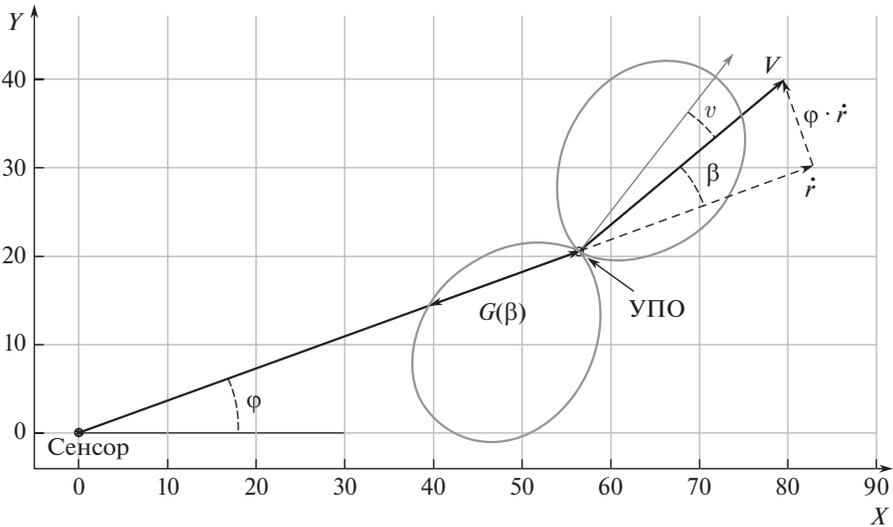


Рис. 2. Геометрия направления движения, расположения УПО и сенсора.

Углы α и β связаны соотношением $\alpha = -\beta$. Индикатриса излучения $G(\beta, \nu)$ в этом случае будет иметь вид

$$(2.4) \quad G(\beta, \nu) = P(-\beta, \nu) = \cos^2(-\beta - \nu) = \cos^2(\nu + \beta).$$

После замены $\rho = \ln r$ угол β принимает вид $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \right)$. Тогда подынтегральное выражение в (2.1) можно переписать в виде

$$(2.5) \quad S = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2) \cdot \cos^2(\nu + \beta) = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2) \cdot (\cos \nu \cdot \cos \beta - \sin \nu \cdot \sin \beta)^2.$$

С учетом равенств

$$(2.6) \quad \sin \beta = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2}}$$

выражение (2.5) принимает вид

$$(2.7) \quad S = (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu)^2 = \cos^2(\nu + \beta) \frac{V^2}{r^2},$$

где V — модуль скорости УПО.

Теперь задача 1 может быть переформулирована следующим образом.

Задача 2. Требуется найти траекторию (вектор временных зависимостей) $(\rho^(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал*

$$(2.8) \quad R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu)^2 dt,$$

с краевыми условиями

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \varphi(0) = \varphi_A, \quad \varphi(T) = \varphi_B.$$

Особенностью задачи 2 является то, что из-за специального вида индикатрисы излучения φ_B не определяется однозначно. Краевые условия для точки B могут отличаться на величину $2K\pi$. В простейшем случае можно двигаться, огибая сенсор с разных сторон. Более подробно этот случай рассмотрен при решении задачи нахождения оптимальной траектории с постоянной скоростью движения.

3. Особенности экстремальных траекторий, являющихся решением задачи 2

Уравнения Эйлера задачи 2 имеют вид

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \dot{\rho}} = 2 \cdot \cos \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) = \text{const}, \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = -2 \cdot \sin \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) = \text{const}. \end{cases}$$

Поскольку функция $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi})$ в уравнении (2.7) не зависит явным образом от t , то можно записать выражение для первого интеграла уравнений Эйлера задачи 2 в виде обобщенной функции Гамильтона, которая совпадает с S , а именно:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\rho} \cdot \frac{\partial S}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} - S &= 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \cos \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) - \\ &- 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) - S = S = \text{const}. \end{aligned}$$

Поскольку $S = \text{const}$ и значение функционала в оптимальном случае равно $S \cdot T$, где T — время движения, то выражение $\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu$ с точностью до знака совпадает с \sqrt{S} . Обозначим $C = \sqrt{S}$ и запишем это уравнение

$$(3.3) \quad \dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C,$$

где $\sigma = \{-1, 1\}$. Это уравнение вследствие (2.7) также можно записать в виде

$$(3.4) \quad \cos(\nu + \beta(t)) = \frac{\sigma \cdot C \cdot r(t)}{V(t)},$$

где V — скорость движения. Если уравнение (3.3) проинтегрировать, то получим:

$$(3.5) \quad (\rho(t) - \rho(0)) \cdot \cos \nu - (\varphi(t) - \varphi(0)) \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C \cdot t.$$

Подставляя в (3.5) время движения $t = T$, получим значение константы

$$(3.6) \quad C = \frac{(\rho(T) - \rho(0)) \cdot \cos \nu - (\varphi(T) - \varphi(0)) \cdot \sin \nu}{\sigma \cdot T}.$$

Уравнение (3.5) можно рассматривать как параметрическое задание времени движения по заданной параметрической траектории $(\rho(p), \varphi(p))$

$$(3.7) \quad (\rho(p) - \rho(0)) \cdot \cos \nu - (\varphi(p) - \varphi(0)) \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C \cdot t(p),$$

где $\rho(p)$, $\varphi(p)$, $t(p)$ — непрерывные функции, $p \in [0, 1]$, а значение C определяется в (3.6). “Простым” решением, удовлетворяющим (3.3), являются линейные зависимости $\dot{\rho} = \frac{\rho(T) - \rho(0)}{T}$ и $\dot{\varphi} = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{T}$, которые, во-первых, являются решением для всех значений угла ν , а во-вторых, индикатриса излучения постоянна на всей траектории, и траектория движения в координатах (ρ, φ) является отрезком прямой, соединяющей начальную и конечную точки. В этом случае в декартовой системе координат решением является логарифмическая спираль. Поэтому в дальнейшем получаемые решения для траекторий и скоростей движения будем часто сравнивать с этим базовым решением, а значение функционала риска — с его минимальным значением на спирали [7]. Поскольку имеется только одно независимое уравнение Эйлера для нахождения экстремали, то можно вводить дополнительные условия для однозначного решения вариационной задачи. Постановок дополнительной задачи может быть множество, но в текущей статье остановимся на двух следующих формулировках. Сначала исследуем для произвольной траектории возможность обеспечения движения по ней таким образом, чтобы значение функционала было минимальным. Если это возможно, то найдем оптимальный скоростной режим. Далее, во второй задаче, найдем траекторию, движение по которой с постоянной скоростью обеспечивает минимальное значение функционала риска.

4. Задача нахождения оптимального скоростного режима движения по заданной траектории

В данном разделе рассматривается задача 2 для случая заданной траектории УПО, а именно: задача нахождения оптимального скоростного режима движения по заданной траектории с минимальным риском для УПО с профилем излучения (2.2), соответствующим нулевому гессиану, и параметром ν . В общем случае можно считать, что траектория задана параметрически. Остановимся на классе гладких траекторий. Траектории задаются в декартовой системе координат $(x(p), y(p))$ или полярной системе $(r(p), \varphi(p))$ при $p \in [0, 1]$. Зафиксируем траекторию в декартовой системе координат, как показано на рис. 3.

Перейдем в систему координат (ρ, φ) с начальными координатами (ρ_A, φ_A) . Система координат удобна тем, что основные переменные, входящие в уравнения, являются координатными осями, а β является углом наклона касательной к траектории, построенной в этой системе координат.

Если углы определены параметрически, то вместо переменной t воспользуемся временноподобным параметром p . Траектория $(\rho(p), \varphi(p))$ и параметрическая зависимость $\beta(p)$ приведены на рис. 4.

Замечание 1. Из уравнения (3.4) следует, что значения суммы углов $\nu + \beta(t)$ вдоль всей траектории должны быть такими, чтобы знак функции $\cos(\nu + \beta(t))$ не изменялся.

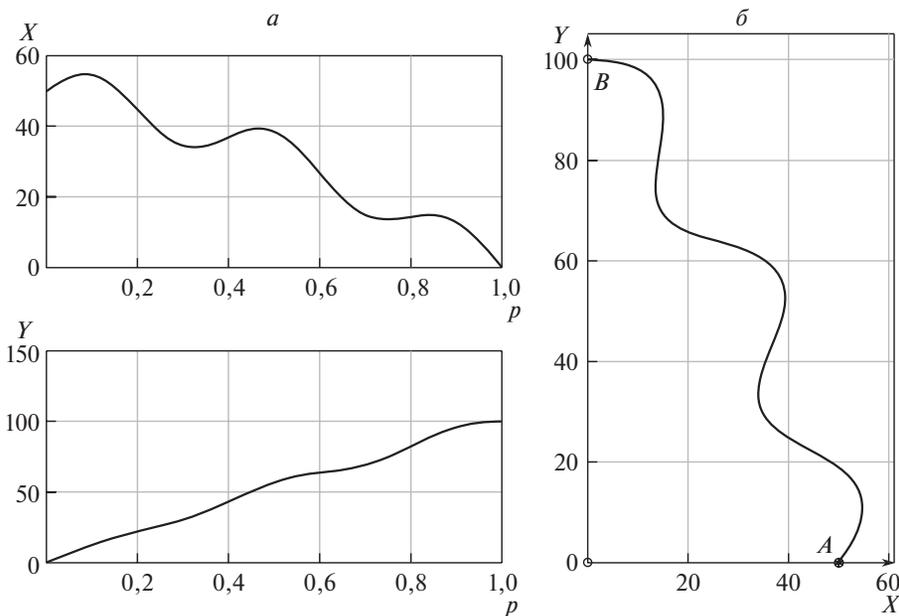


Рис. 3. Пример траектории: а — параметрическое задание координат; б — траектория в декартовых координатах.

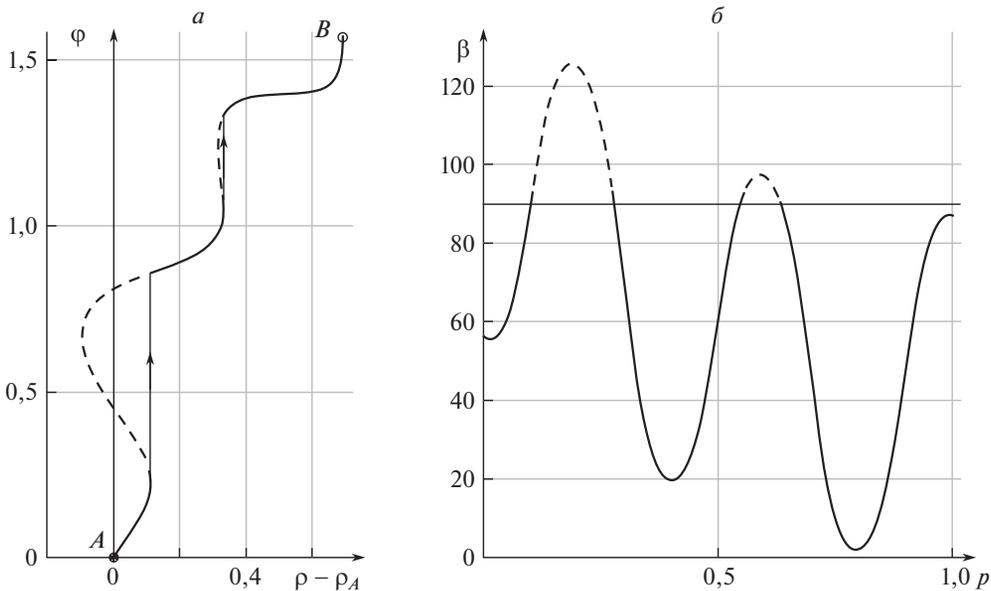


Рис. 4. Графики траектории и производной $\beta(p)$: *a* — траектория в координатах (ρ, φ) ; *б* — значения угла β на траектории.

Замечание 2. Пусть $(\rho(p), \varphi(p))$ — гладкая траектория. Тогда функция $t(p)$ из (3.7) тоже гладкая. Более того, если выполнено условие из замечания 1, то $t(p)$ — монотонно возрастающая функция. В частности, существует обратная к ней функция $p(t)$.

Определим значения β_{\max} и β_{\min} как максимальное и минимальное значения угла $\beta(p)$ на траектории, а $\Delta\beta = \beta_{\max} - \beta_{\min}$ — как диапазон изменения углов. Тогда очевидно выполняется следствие из замечания 1.

Следствие 1. Если $\Delta\beta > 180^\circ$, то движение по такой траектории с риском, равным риску на оптимальной логарифмической спирали, невозможно.

Траектории, удовлетворяющие следствию 1, в статье не рассматриваются.

В приведенном примере $\beta_{\min} = 1,938^\circ$, $\beta_{\max} = 125,43^\circ$ и угол β при движении по траектории пересекает значение 90° , как показано на рис. 4, где углы касательной к траектории становятся равными 90° . Зоны нарушения замечания 1 отмечены штриховой линией. Однако значение $\Delta\beta = 123,492^\circ < 180^\circ$, а значит, существует диапазон параметров ν , при котором движение с оптимальной скоростью возможно. Для этого находим значение максимального угла β_{kr} из набора углов $90^\circ + k \cdot 180^\circ \leq \beta_{\max}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда диапазон возможных значений параметра ν , для которых выполняется замечание 1, находится внутри интервала $(\beta_{kr} - \beta_{\min} + k \cdot 180^\circ, \beta_{kr} + 180^\circ - \beta_{\max} + k \cdot 180^\circ)$. Для траектории, представленной на рис. 4, $\beta_{kr} = 90^\circ$, и, значит, углы лежат в диапазоне $\nu \in (88,062^\circ; 144,57^\circ)$. Следующий интервал углов находит-

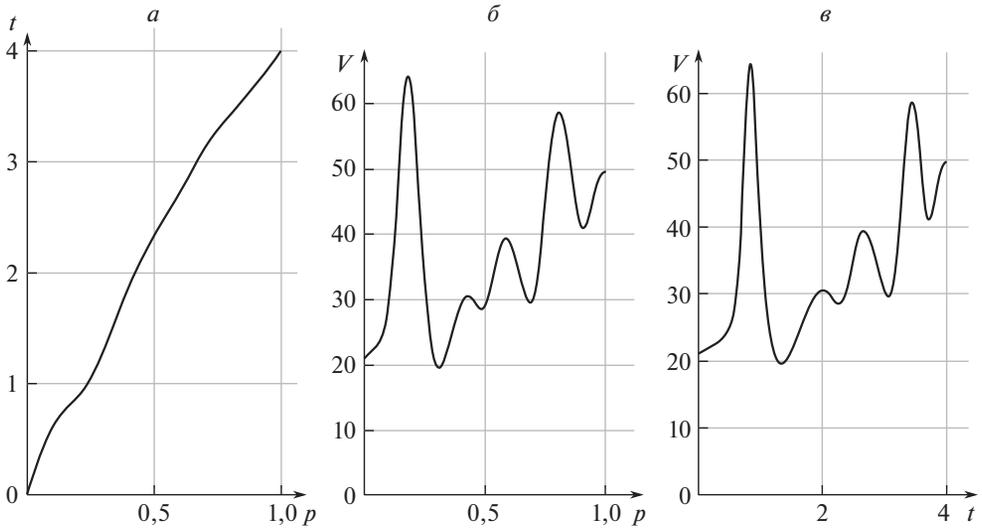


Рис. 5. Решение для угла ν , равного 125° : а — $t(p)$; б — $V(p)$; в — $V(t)$.

ся при $\nu \in (268,062^\circ; 324,57^\circ)$, однако этот диапазон соответствует тому же профилю.

Алгоритм решения исследуемой в разделе задачи имеет следующий вид.

Алгоритм 1 (Алгоритм нахождения $V(t)$).

1. Задание параметров ν , T и траектории $(\rho(p), \varphi(p))$.
2. Проверка замечания 1 для заданного значения ν и фиксированной траектории.
3. Если замечание 1 выполнено, то:
4. Расчет константы C из уравнения (3.6);
5. Расчет $t(p)$ из уравнения (3.7);
6. Расчет скорости по формуле $V(p) = \left| \frac{C \cdot r(p)}{\cos(\nu + \beta(p))} \right|$.
7. Проведение обратной замены времени и нахождение зависимости $V(t) = V(p(t))$.

Для иллюстрации возьмем значение угла $\nu = 125^\circ$, которое попадает в диапазон допустимых значений ν . Функции $t(p)$, $V(p)$ и $V(t)$, найденные согласно алгоритму 1, приведены на рис. 5.

5. Задача нахождения оптимальной траектории с постоянной скоростью движения

В разделе 4 для регуляризации задачи в качестве дополнительного второго уравнения использовались параметризованные траектории движения. В этом разделе в качестве дополнительного уравнения будем использовать условие

постоянства скорости. Тогда система уравнений имеет вид

$$(5.1) \quad \begin{cases} \dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C, \\ \dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot r^2 = V_0^2, \end{cases}$$

где $\rho = \ln r$, V_0 — постоянная скорость на траектории. Рассмотрим следующий пример. Пусть сенсор S расположен на декартовой плоскости в точке $(0, 0)$, а УПО требуется осуществить переход из точки $A(50, 0)$ в точку $B(-60, 180)$, как показано на рис. 6. Заданное время движения по траектории $T = 4$. Значение угла ν в профиле равно 12° .

На плоскости (x, y) заданы расстояния от сенсора до начальной точки $r_A = 50$ и до конечной точки $r_B = 189,737$, на плоскости (ρ, φ) эти расстояния равны $\rho_A = 3,912$, $\rho_B = 5,2456$. Точки A, B на плоскости (x, y) отображаются в точки $(0, 0)$ и $(\rho(T) - \rho(0), \varphi(T) - \varphi(0))$ на плоскости $(\rho - \rho(0), \varphi - \varphi(0))$, как показано на рис. 7. Точка A отображается единственным образом, а точка B может отображаться во множество точек, расположенных на вертикали с координатой $\rho(T) - \rho(0)$ с расстоянием между точками по оси φ , равным $2\pi k$, и с расстоянием между соседними точками по оси φ , равным 2π . На рис. 7 представлены четыре возможные точки, пронумерованные цифрами 1, 2, 3, 4. Значения угла φ для этих точек соответственно равны $(-4,3906; 1,8925; 8,1757; 14,4589)$ радиан.

Проекции векторов с началом в начале координат и концами в точках 1–4 на вектор $(\cos \nu, -\sin \nu)$, обозначенный штриховой линией, представлены на рис. 7 и равны соответственно 2,217, 0,911, 0,3954 и 1,7017. Проекция вектора с концом в точке 3 минимальна, далее по возрастанию идут проекции векторов с концами в точках 2, 4 и 1. Здесь представлена еще одна точка φ_0 , для которой значение произведения $C \cdot T = 0$, поскольку она расположена на перпендикуляре к оси $(\cos \nu, -\sin \nu)$, проведенном через точку $(0, 0)$. Для любой точки с координатами $(\rho(T) - \rho(0), \varphi)$, находящейся вне интервала $(\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$, найдется точка, находящаяся внутри интервала, которая в декартовой системе координат определяет конечную точку и имеет меньшее значение функционала. Назовем этот интервал “рабочей областью”. Максимальное значение произведения в рабочей области равно $C \cdot T = |\pi \cdot \sin \nu|$.

Траектории в виде логарифмических спиралей для всех вышеприведенных случаев представлены на рис. 6. Толщина линии соответствует величине проекции. Минимальная толщина соответствует траектории с наибольшей проекцией, а значит, с наибольшим значением функционала, максимальная толщина — траектории с наименьшей проекцией (наименьшим значением функционала). Минимальный риск достигается на переходе из начальной точки в точку с номером 3, которая находится в “рабочей области”. Те же четыре траектории для переходов представлены и на рис. 7. Поэтому для решения задачи сначала нужно выбрать значение угла $\varphi(T)$ и логарифмическую спираль, в окрестности которой будем строить искомую траекторию. Значение φ_B должно лежать внутри “рабочей области”. Теперь будем считать, что значение φ_B выбрано, и переходим к решению задачи.

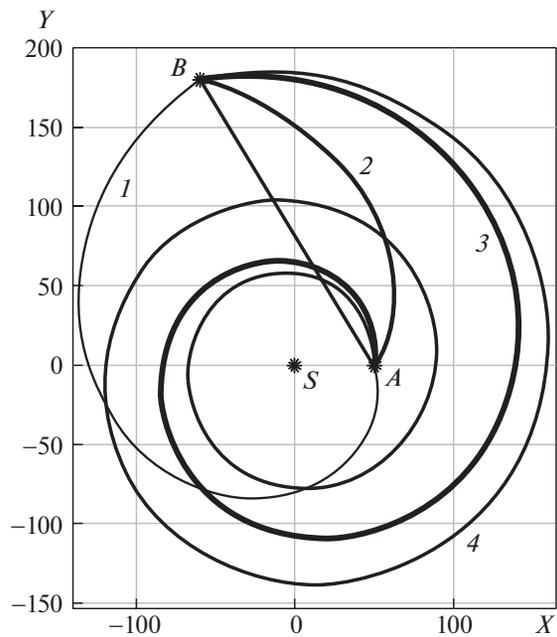


Рис. 6. Положения сенсора S , начальной точки A и конечной точки B .

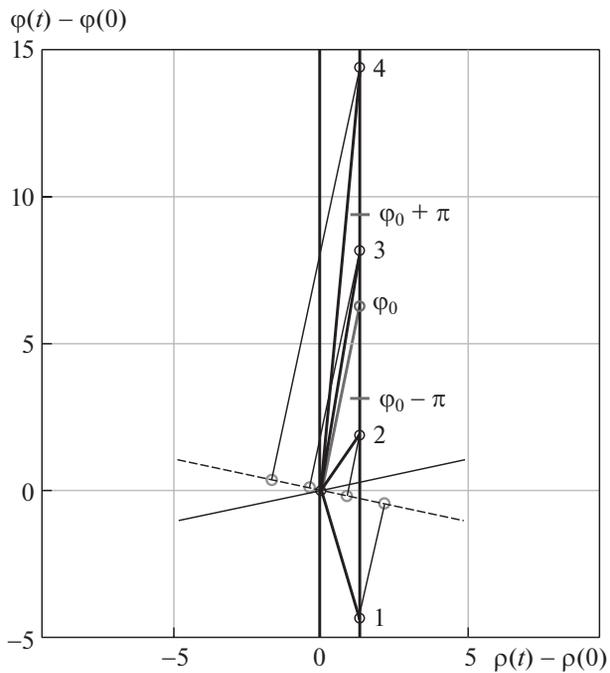


Рис. 7. Возможные положения объекта 1, 2, 3, 4.

5.1. Частные случаи $r_B = r_A$ и $C = 0$

Начнем решение задачи с рассмотрения частного случая, когда $r(T) = r(0) = r_A = r_B$. Тогда частным случаем движения по логарифмической спирали является движение по окружности с постоянной скоростью, что и является решением задачи, рассмотренной в [12],

$$(5.2) \quad \begin{cases} r(t) = \text{const}, \\ \varphi(t) = \varphi_A + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T} \cdot t. \end{cases}$$

Другим частным случаем является ситуация, когда $r_B \neq r_A$, а в выражении (3.5) $C = 0$. Угол ν в этом случае равен $\nu_0 = \arctg \frac{\rho_B - \rho_A}{\varphi_B - \varphi_A}$. Тогда в системе координат $(\rho - \rho(0), \varphi - \varphi(0))$ траектория является прямой, проходящей через начало координат, и соответственно в декартовой системе (x, y) — логарифмической спиралью. Поскольку значение индикатрисы излучения равно нулю, двигаться можно с любой скоростью и в том числе с постоянной. Модуль скорости в таком случае определяется длиной логарифмической спирали и временем движения. Значение функционала равно нулю. Решение уравнения $\dot{r} = \pm \sin(\nu_0) \cdot V_0$ определяет радиальную компоненту траектории

$$(5.3) \quad r(t) = \pm \sin(\nu_0) \cdot V_0 \cdot t + r_A,$$

где значение скорости $V_0 = \left| \frac{r_B - r_A}{T \cdot \sin(\nu_0)} \right|$. Из уравнения (3.5) получим угловую компоненту

$$(5.4) \quad \varphi(t) = \text{ctg}(\nu_0) \cdot \ln \left(\frac{t}{T} \cdot (\exp(\text{tg} \nu_0 \cdot (\varphi_B - \varphi_A) - 1) + 1) \right) + \varphi_A.$$

Выражения (5.3) и (5.4) определяют траекторию.

5.2. Общий случай

Перейдем к исследованию общего случая. Будем считать, что $C \neq 0$. Также предполагаем, что $\sin \nu \neq 0$ и $\cos \nu \neq 0$. Эти случаи рассмотрим далее. Справедлива лемма 1.

Лемма 1. Система (5.1) заменами $w = \arcsin \left(\frac{C \cdot r}{V_0} \right)$ и $\tau = C \cdot \cos \nu \cdot t$ сводится к дифференциальному уравнению

$$(5.5) \quad \frac{dw}{d\tau} = \sigma \cdot \text{tg} w \pm \text{tg} \nu.$$

Доказательство.

Из первого уравнения системы (5.1) выразим $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{r} \cdot \cos \nu - \sigma \cdot C \cdot r}{r \cdot \sin \nu}.$$

Подставим $\dot{\varphi}$ во второе уравнение. Решение квадратного уравнения относительно \dot{r} имеет вид

$$(5.6) \quad \dot{r} = \sigma \cdot C \cdot r \cdot \cos \nu \pm \sin \nu \cdot \sqrt{V_0^2 - (C \cdot r)^2}.$$

Разделим обе части уравнения (5.6) для \dot{r} на V_0 и получим уравнение

$$(5.7) \quad \frac{\dot{r}}{V_0} = \frac{\sigma \cdot C \cdot r}{V_0} \cdot \cos \nu \pm \sin \nu \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r}{V_0}\right)^2}.$$

Далее совершим замену $u = \frac{C \cdot r}{V_0}$ и подставим в (5.7)

$$(5.8) \quad \frac{\dot{u}}{C} = \sigma \cdot u \cdot \cos \nu \pm \sin \nu \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos \nu$, получим

$$(5.9) \quad \frac{\dot{u}}{C \cdot \cos \nu} = \sigma \cdot u \pm \operatorname{tg} \nu \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Сделаем замену времени $\tau = C \cdot \cos \nu \cdot t$:

$$(5.10) \quad \frac{du}{d\tau} = \sigma \cdot u \pm \operatorname{tg} \nu \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Заметим, что область определения уравнения $|u| \leq 1$ и, совершив заключительную замену $w = \operatorname{arcsin} u$, получим утверждение леммы 1, уравнение (5.5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Уравнение (5.5) может быть проинтегрировано в неявном виде

$$(5.11) \quad c_1 + \frac{2 \cdot \tau}{\cos^2 \nu} \mp 2 \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot w - \ln \left(((\operatorname{tg} w \pm \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu) \cdot \cos w)^2 \right) = 0.$$

Здесь c_1 — постоянная интегрирования.

Справедливость леммы 2 проверяется непосредственным дифференцированием выражения (5.11).

Сделаем обратную замену времени $\tau = C \cdot \cos \nu \cdot t$ и перепишем решение (5.11) в виде

$$(5.12) \quad c_1 + \frac{2 \cdot \sigma \cdot t}{\cos \nu} \mp 2 \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot w - \ln \left(((\operatorname{tg} w \pm \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu) \cdot \cos w)^2 \right) = 0.$$

Значение константы c_1 находится из начальных условий при $t = 0$, а именно:

$$(5.13) \quad c_1 = \pm 2 \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot w(0) + \ln \left(((\operatorname{tg} w(0) \pm \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu) \cdot \cos w(0))^2 \right),$$

где $w(0) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r(0)}{V_0}\right)$. Подставив (5.13) в (5.12) и преобразовав выражение, получим решение относительно функции $w(t)$ в неявном виде

$$(5.14) \quad \pm \sin \nu \cdot (w(t) - w(0)) + \sigma \cdot \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(t))}{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(0))} \right) = C \cdot t.$$

Далее, умножив обе части уравнения на σ , получим

$$(5.15) \quad \pm \sigma \cdot (w(t) - w(0)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(t))}{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(0))} \right) = \sigma \cdot C \cdot t.$$

Уравнения для нахождения скорости движения V_0 получаются при значении времени, равном времени движения $t = T$. Значение V_0 должно удовлетворять хотя бы одному из нижеприведенных уравнений:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} +\sigma \cdot (w(T) - w(0)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \sigma \cdot w(T))}{\sin(\nu + \sigma \cdot w(0))} \right) &= \sigma \cdot C \cdot T, \\ -\sigma \cdot (w(T) - w(0)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu - \sigma \cdot w(T))}{\sin(\nu - \sigma \cdot w(0))} \right) &= \sigma \cdot C \cdot T, \end{aligned}$$

где $w(0) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r_A}{V_0}\right)$, а $w(T) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r_B}{V_0}\right)$.

По существу, уравнения (5.16) — это две параметрические зависимости от V_0 , и для нахождения скоростного режима на всей траектории нужно найти корень хотя бы одной из приведенных функций. Заметим, что значения $w(0)$ и $w(T)$ связаны друг с другом. Например, если $r_B < r_A$, $w(T) = \arcsin\left(\frac{r_B}{r_A} \cdot \sin w(0)\right)$, иначе $w(0) = \arcsin\left(\frac{r_A}{r_B} \cdot \sin w(T)\right)$.

Определим $r_{\max} = \max\{r_A, r_B\}$, $r_{\min} = \min\{r_A, r_B\}$ и введем новую переменную

$$(5.17) \quad z = \sigma \arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\max}}{V_0}\right).$$

Через значения функции z определяются значения $w(0)$ и $w(T)$. Одно из этих значений равно z , а другое равняется $\arcsin\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \cdot \sin z\right)$. Эта функция удобна тем, что ее значения ограничены диапазоном $[-\pi/2, \pi/2]$ и оба уравнения для нахождения V_0 с участием $w(0)$, $w(T)$ записываются единообразно.

Если $\sigma = 1$, то первое уравнение (5.16) формально определяет поведение в диапазоне от $z \in [\nu, \pi/2 + \nu]$, второе уравнение (5.16) определяет поведение на интервале от $z \in [-\pi/2 + \nu, \nu]$. В общем случае получаемые решения должны быть приведены к диапазону $z \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Если $\sigma = -1$, то, наоборот, уравнения в (5.16) просто меняются местами и это никак не влияет на процедуру нахождения корня.

Лемма 3. Оптимальное значение V_0 модуля скорости на траектории определяется решением уравнения

$$(5.18) \quad F(z) = \sigma \cdot \sigma_r \cdot C \cdot T,$$

где функция $F(z)$ равна

$$(5.19) \quad F(z) = (z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right),$$

$$k_r = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}, \quad \sigma_r = \text{sign}(r_B - r_A).$$

Доказательство.

Определим $k_r = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}$, $\sigma_r = \text{sign}(r_B - r_A)$. Если $r_{\max} = r_B$, то уравнение (5.16) будет иметь вид

$$(z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right) = \sigma \cdot C \cdot T.$$

И, наоборот, если $r_{\max} = r_A$, то

$$(\arcsin(k_r \cdot \sin z) - z) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))}{\sin(\nu + z)} \right) = \sigma \cdot C \cdot T.$$

Умножив на (-1) и преобразовав, получим зависимость

$$(z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right) = -\sigma \cdot C \cdot T.$$

Поэтому с использованием константы σ_r уравнение (5.16) будет иметь вид

$$(z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right) = \sigma \cdot \sigma_r \cdot C \cdot T.$$

Теперь, определив функцию $F(z)$ посредством (5.19), получаем утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Найдем область определения функции $F(z)$. Еще раз заметим, что область определения находится внутри отрезка $z \in [-\pi/2, \pi/2]$. Для существования значения функции необходимо, чтобы под знаком логарифма функции $\sin(\nu + z)$ и $\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin(z)))$ имели один знак и не равнялись нулю. По исходным предположениям $\sin \nu \neq 0$, а на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$ имеется точка $z = \nu_0 = -\nu$, в которой $\sin(\nu + \nu_0) = 0$, и точка $z = z_{gr}$, в которой $\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin(z_{gr}))) = 0$.

Лемма 4. 1) Если z_{gr} существует и $z_{gr} \leq \nu_0$, то область определения функции $F(z)$ задается диапазоном $z \in [-\pi/2, z_{gr}] \cup (\nu_0, \pi/2]$, в противном случае $z \in (\nu_0, \pi/2]$.

2) Если z_{gr} существует и $z_{gr} \geq \nu_0$, то область определения функции $F(z)$ задается диапазоном $z \in [-\pi/2, \nu_0) \cup (z_{gr}, \pi/2]$, в противном случае $z \in [-\pi/2, \nu_0)$.

Доказательство.

Условия существования значения функции $F(z)$ записываются в виде $\arcsin(k_r \cdot \sin z) < \nu_0$ и $z < \nu_0$, либо $\arcsin(k_r \cdot \sin z) > \nu_0$ и $z > \nu_0$. Если точка z_{gr} находится слева от ν_0 , то при $\frac{\sin \nu_0}{k_r} < -1$ в этой области функция не определена, поскольку z_{gr} не существует, и, значит, $z \in (\nu_0, \pi/2]$. В противном случае $z_{gr} = \arcsin\left(\frac{\sin \nu_0}{k_r}\right)$ и область определения $z \in [-\pi/2, z_{gr}) \cup (\nu_0 - \nu, \pi/2]$.

Аналогично доказывается и второе утверждение леммы 4. Лемма 4 доказана.

Чтобы получить менее громоздкий вид функции $F(z)$, введем переменную

$$(5.20) \quad \hat{z} = \arcsin(k_r \cdot \sin(z)).$$

Находить значение V_0 будем в два этапа. Сначала из уравнения (5.19) найдем значение z , поскольку значение V_0 явно не входит в уравнение, а затем по нему определим значение V_0 . Функция $F(z)$ в новых обозначениях примет вид

$$(5.21) \quad F(z) = (z - \hat{z}) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \hat{z})} \right).$$

Лемма 5. Функция $F(z)$ при условии $\sin \nu \neq 0$ является монотонной функцией в каждой односвязной части области определения, задаваемой по лемме 4, за исключением точек $z = \pm \pi/2$.

Доказательство.

Найдем производную $\frac{dF(z)}{dz}$. Заметим, что $\frac{d\hat{z}}{dz} = k_r \cdot \frac{\cos z}{\cos \hat{z}}$. Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= \left(1 - k_r \cdot \frac{\cos z}{\cos \hat{z}}\right) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \frac{\sin(\nu + \hat{z})}{\sin(\nu + z)} \times \\ &\times \left(\frac{\cos(\nu + z)}{\sin(\nu + \hat{z})} - \frac{\sin(\nu + z) \cdot \cos(\nu + \hat{z}) \cdot k_r \cdot \cos z}{\sin^2(\nu + \hat{z}) \cdot \cos \hat{z}} \right) = \\ &= \sin \nu + \cos \nu \cdot \frac{\cos(\nu + z)}{\sin(\nu + z)} - \frac{k_r \cdot \cos z}{\cos \hat{z}} \cdot \left(\sin \nu + \frac{\cos \nu \cdot \cos(\nu + \hat{z})}{\sin(\nu + \hat{z})} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos z}{\sin(\nu + z)} - \frac{k_r \cdot \cos z}{\sin(\nu + \hat{z})} = \\
&= \frac{\cos z}{\sin(\nu + z) \cdot \sin(\nu + \hat{z})} \cdot (\sin \nu \cdot \cos \hat{z} + \cos \nu \cdot \sin \hat{z} - \\
&\quad - k_r \cdot \sin \nu \cdot \cos z - k_r \cdot \cos \nu \cdot \sin z) = \\
&= \frac{\cos z \cdot \sin \nu}{\sin(\nu + z) \cdot \sin(\nu + \hat{z})} \cdot (\cos \hat{z} - k_r \cdot \cos z).
\end{aligned}$$

Поскольку $\cos z > 0$ при $z \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\sin(\nu + z) \cdot \sin(\nu + \hat{z}) > 0$, так как $\sin(\nu + z) \sin(\nu + \hat{z})$ одного знака по условию леммы 4, $\cos(\hat{z}) - k_r \cdot \cos z = \sqrt{1 - (k_r \cdot \sin z)^2} - \sqrt{k_r^2 - (k_r \cdot \sin z)^2} > 0$ и $0 < k_r < 1$, знак производной определяется знаком $\sin \nu$. Если $\sin \nu > 0$, функция монотонно возрастает в каждой односвязной части области определения и, наоборот, если $\sin \nu < 0$, функция монотонно убывает в каждой односвязной части области определения. Лемма 5 доказана.

По лемме 5 легко определить наличие корня внутри области определения $F(z)$, поскольку на одной из границ области значение функции стремится к $+\infty$ или $-\infty$. Величина значения функции на другой границе области и поведение функции $F(z)$ позволяют определить, имеется ли решение, и найти его.

Теорема 1. Если уравнение (5.18) имеет решение и $k_r < 1$, то это решение является единственным.

Доказательство.

Покажем, что решение единственно. Когда область определения состоит из единственного полуинтервала, то по лемме 5 в силу того что функция $F(z)$ монотонно возрастает или убывает, а правая часть уравнения — константа, решение единственно. Пусть имеется два полуинтервала области определения. Тогда по лемме 4 $k_r > \sin \nu$ и каждый из полуинтервалов примыкает к одной из границ возможных значений z . Рассмотрим разность значений функции на границах $\Delta F = F(\pi/2) - F(-\pi/2)$. Заметим, что значение $\Delta F = 0$ для $k_r = 1$. Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
(5.22) \quad \Delta F &= (\pi/2 - \arcsin k_r) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \pi/2)}{\sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) - \\
&\quad - (-\pi/2 + \arcsin k_r) \cdot \sin \nu - \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu - \pi/2)}{\sin(\nu - \arcsin k_r)} \right) = \\
&= (\pi - 2 \arcsin k_r) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \pi/2) \cdot \sin(\nu - \arcsin k_r)}{\sin(\nu - \pi/2) \cdot \sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) = \\
&= (\pi - 2 \arcsin k_r) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\arcsin k_r - \nu)}{\sin(\arcsin k_r + \nu)} \right).
\end{aligned}$$

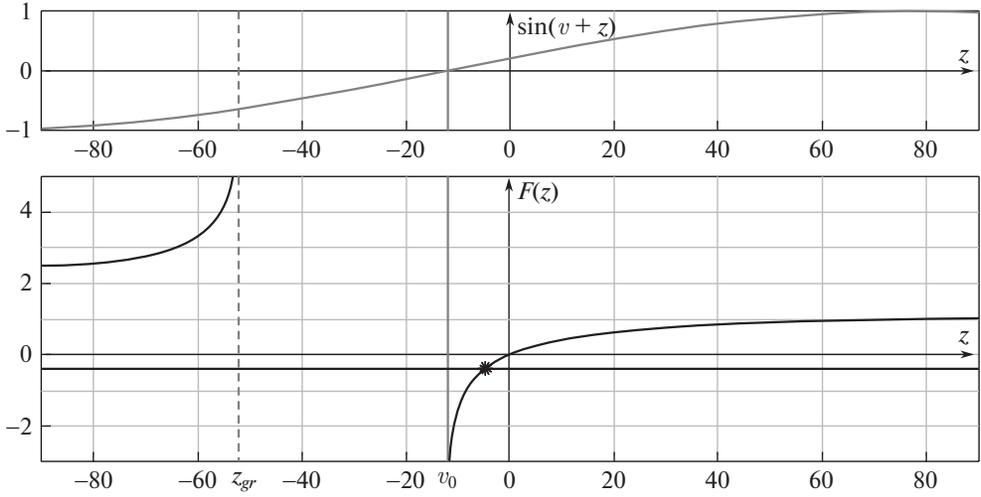


Рис. 8. Функции $\sin \nu + z$ и $F(z)$.

Теперь найдем производную $\frac{d\Delta F}{dk_r}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta F}{dk_r} &= -\frac{2 \sin \nu}{\sqrt{1 - k_r^2}} + \frac{\cos \nu \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)}{\sqrt{1 - k_r^2} \cdot \sin(\arcsin k_r - \nu)} \times \\
 &\times \frac{\cos(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu) - \cos(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)}{\sin^2(\arcsin k_r + \nu)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - k_r^2}} \cdot \left(-2 \sin \nu + \frac{\cos \nu \cdot \sin(2 \cdot \nu)}{\sin(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)} \right) = \\
 &= \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - k_r^2}} \cdot \left(\frac{\cos(2 \arcsin k_r) - \cos(2\nu) + 2 \cos^2 \nu}{\sin(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)} \right) = \\
 &= \frac{\sin \nu \cdot (1 + \cos(2 \arcsin k_r))}{\sin(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu) \cdot \sqrt{1 - k_r^2}} = \frac{2 \sin \nu \cdot \sqrt{1 - k_r^2}}{k_r^2 - \sin^2 \nu}.
 \end{aligned}$$

Знак производной $\frac{d\Delta F}{dk_r}$ совпадает со знаком $\sin \nu$, поскольку по лемме 4 $k_r > \sin \nu$. Если $\nu > 0$, то минимальное для левой области значение функции $F(z)$ соответствует $z_1 = -\pi/2$. Значение этой функции максимально для правой области при $z_2 = \pi/2$, а ΔF максимальна при $k_r = 1$ и равна нулю. Это значит, что значения функции в левой области больше значений функции в правой области. Аналогичная ситуация при $\nu < 0$, когда значения функции в левой области меньше значений в правой области. А значит, если решение существует, то оно единственно. Теорема доказана.

Для примера рассмотрим переход, представленный на рис. 6 по траектории 3. На верхней части рис. 8 представлено поведение функции $\sin(\nu + z)$.

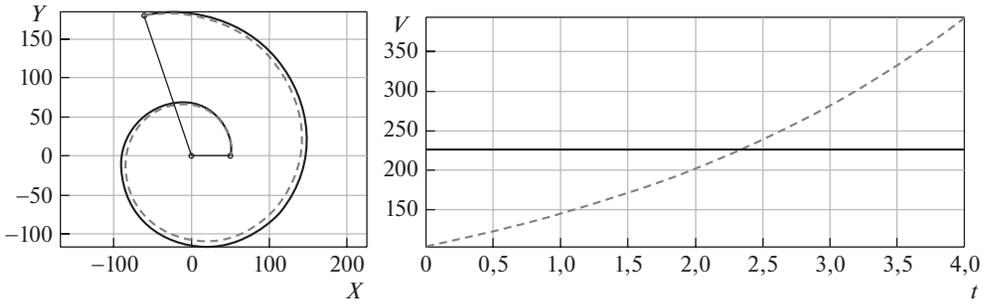


Рис. 9. Экстремальные траектории (слева) и скоростной режим на них (справа).

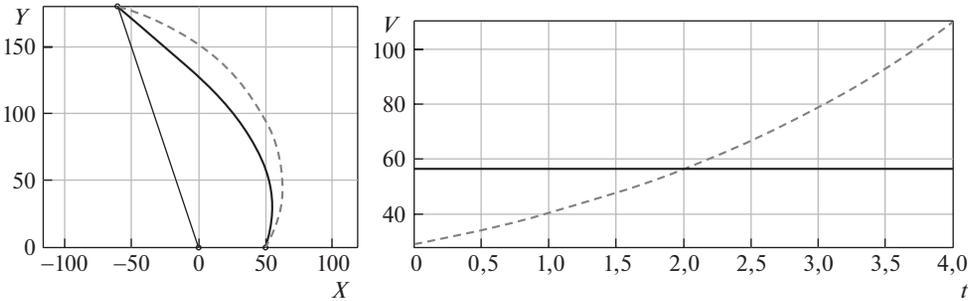


Рис. 10. Экстремальные траектории (слева) и скоростной режим на них (справа).

Точка пересечения этой функцией с нулем определяет положение значения угла ν_0 . Вертикальным отрезком отмечено положение значения $\nu_0 = -12^\circ$. График $F(z)$ расположен в нижней части рисунка. Значение z_{gr} отмечено вертикальной штриховой линией. Область определения $F(z)$ состоит из двух полуинтервалов $[-\pi/2, z_{gr}]$ и $(\nu_0, \pi/2]$. Для рассматриваемого примера $k_r = \frac{r_A}{r_B} = \frac{50}{189,737} = 0,2635$, а $z_{gr} = \arcsin\left(\frac{\sin \nu_0}{k_r}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin(-12^\circ)}{k_r}\right) = -52,089^\circ$. Эта точка отмечена вертикальной штриховой линией. На нижней части рисунка горизонтальной линией отмечено значение правой части уравнения (5.18), равное 0,3954, через которое при $T = 4$ определяется константа $C = 0,09885$. Тогда решением уравнения (5.18) являются точка пересечения соответствующих графиков функций и значение переменной $z = -4,755^\circ$. Оптимальное значение скорости находится по найденным значениям переменных $V_0 = \left| \frac{C \cdot r_{\max}}{\sin z} \right| = 226,25$.

На рис. 9 черным цветом представлены траектория движения и график скорости. Для сравнения штриховой линией представлены траектория в виде логарифмической спирали и оптимальный скоростной режим на этой траектории. Значение функционала $R = 0,039$ и совпадает со значением функционала на логарифмической спирали.

Для сравнения на рис. 10 приведем траектории и скорости для случая перехода в точку 2 на плоскости (ρ, φ) . Значение функционала $R = 0,2075$, что

значительно больше минимального его значения, но совпадает со значением функционала на логарифмической спирали 2.

Осталось рассмотреть несколько частных случаев значений ν . Приступим к их исследованию.

5.3. Частный случай: $\sin \nu = 0$

Рассмотрим случай $\sin \nu = 0$. Тогда справедливо равенство $\cos \nu = \pm 1$ и система уравнений (5.1) принимает вид

$$(5.23) \quad \begin{cases} \dot{r} = \pm \sigma \cdot C \cdot r, \\ \dot{r}^2 + (\dot{\varphi} \cdot r)^2 = V_0^2. \end{cases}$$

Лемма 6. Решение системы уравнений (5.23) имеет вид

$$(5.24) \quad r(t) = r_A \cdot \exp(\pm \sigma \cdot C \cdot t),$$

$$(5.25) \quad \varphi(t) - \varphi_A = \pm (\operatorname{ctg} w(t) + w(t) - \operatorname{ctg} w(0) - w(0)),$$

где $w(t) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right)$.

Доказательство.

Интегрируя первое уравнение (5.23), получим зависимость (5.24). Обозначим $\tilde{C} = \pm C \cdot \sigma$, тогда $r(t) = r_A \cdot \exp(\tilde{C} \cdot t)$. Подставляя \tilde{C} во второе уравнение системы (5.23), получим

$$\tilde{C}^2 \cdot r^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot r^2 = V_0^2.$$

Поскольку $\tilde{C}^2 = C^2$, то выпишем дифференциальное уравнение относительно $\dot{\varphi}(t)$ в виде

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{r^2(t)} - C^2} = \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{r_A^2} \cdot \exp(-2 \cdot \tilde{C} \cdot t) - C^2}.$$

Сделаем замену $\tau = \exp(\tilde{C} \cdot t)$ и получим

$$d\varphi = \pm \frac{1}{\tau^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{r_A \cdot C}\right)^2 - \tau^2} \cdot d\tau.$$

После интегрирования последнего уравнения зависимость $\varphi(\tau)$ с некоторой константой интегрирования C_2 принимает вид

$$\varphi(\tau) = \pm \left(-\frac{1}{\tau} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{r_A \cdot C}\right)^2 - \tau^2} - \arcsin\left(\frac{\tau \cdot r_A \cdot C}{V_0}\right) \right) + C_2.$$

Обратная замена времени дает зависимость $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \left(-\sqrt{\left(\frac{V_0}{r(t) \cdot C}\right)^2 - 1} - \arcsin\left(\frac{r(t) \cdot C}{V_0}\right) \right) + C_2.$$

Значение C_2 находится из начальных условий:

$$C_2 = \varphi_A \mp \left(-\sqrt{\left(\frac{V_0}{r_A \cdot C}\right)^2 - 1} - \arcsin\left(\frac{r_A \cdot C}{V_0}\right) \right).$$

Если перейти к переменным $w(t) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right)$, то получим зависимость $\varphi(t)$ в виде (5.25). Лемма 6 доказана.

По лемме 6 при подстановке граничного условия в соотношения (5.24)–(5.25) получаем уравнение для нахождения V_0 , которое имеет вид

$$(5.26) \quad |\varphi_B - \varphi_A| = |\operatorname{ctg}(w(T)) + w(T) - \operatorname{ctg}(w(0)) - w(0)|.$$

Функция $\operatorname{ctg}(w) + w$ монотонно убывает на интервале $(0, \pi/2)$ при увеличении w , поскольку

$$\frac{d(\operatorname{ctg} w + w)}{dw} = \frac{-\sin^2 w - \cos^2 w}{\sin^2 w} + 1 = -\operatorname{ctg}^2 w,$$

поэтому если $w(T) > w(0)$, то значение правой части уравнения (5.26) равно $\operatorname{ctg} w(0) + w(0) - \operatorname{ctg} w(T) - w(T)$, иначе $\operatorname{ctg} w(T) + w(T) - \operatorname{ctg} w(0) - w(0)$. Если ввести функции z из (5.17) и \hat{z} из (5.20), то уравнение (5.26) примет вид

$$(5.27) \quad |\varphi_B - \varphi_A| = \operatorname{ctg} \hat{z} + \hat{z} - \operatorname{ctg} z - z.$$

Лемма 7. Решение уравнения (5.27) существует и единственно, если

$$(5.28) \quad |\varphi_B - \varphi_A| \geq \operatorname{ctg}(\arcsin k_r) + \arcsin k_r - \pi/2.$$

Доказательство.

Переменная z , как функция V_0 , монотонна и принимает значения $z \in (0, \pi/2]$. Минимальное значение правой части уравнения (5.27) достигается при значении $z = \pi/2$ и соответственно $\hat{z} = \arcsin k_r$ и равно

$$\operatorname{ctg}(\arcsin k_r) + \arcsin k_r - \pi/2.$$

Поэтому решение существует и единственно, если выполнено (5.28). Лемма 7 доказана.

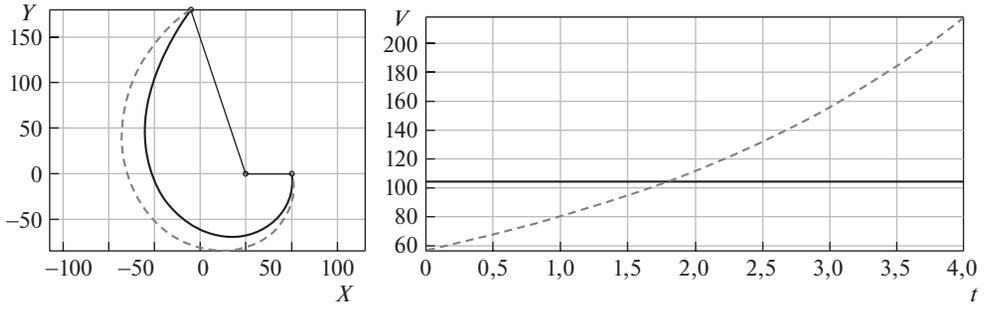


Рис. 11. Экстремальные траектории (слева) и скоростной режим на них (справа).

Рассмотрим пример траектории, изображенной на рис. 6, и обратимся к рис. 7. Поскольку $\nu = 0$, то проекция на горизонтальную ось для всех точек одинакова и это означает, что для всех переходов значение функционала одинаково. Однако скорости для этих случаев сильно отличаются. Естественно выбрать траекторию с минимальной скоростью движения. Рассмотрим сначала движение в окрестности траектории 2. Тогда $|\varphi_B - \varphi_A| = 1,8925$ радиан, значение $k_r = r_B/r_A = 50/189,737 = 0,2635$ и значение выражения (5.28) $\text{ctg}(\arcsin k_r) + \arcsin k_r - \pi/2 = 2,3565 > |\varphi_B - \varphi_A|$. Траектории, по которой УПО движется с постоянной скоростью и которая соответствует минимальному значению риска на траектории 2, не существует. Но если взять траекторию 1, для которой $|\varphi_B - \varphi_A| = 4,3906$ радиан, то движение с постоянной скоростью возможно.

Решение представлено на рис. 11. Для данного случая $V_0 = 104,65$ и значение функционала $R = 0,44463$. Таким образом, в случае $\sin \nu = 0$ и $r_A \neq r_B$, всегда можно подобрать сдвиг, равный $2k\pi$, так, что значение $|\varphi_B - \varphi_A|$ будет удовлетворять лемме 7.

5.4. Частный случай $\cos \nu = 0$

Рассмотрим второй частный случай, когда $\cos \nu = 0$. Тогда $\sin \nu = \pm 1$ и система уравнений (5.1) принимает вид

$$(5.29) \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \mp \sigma \cdot C, \\ \dot{r}^2 + (\dot{\varphi} \cdot r)^2 = V_0^2. \end{cases}$$

Лемма 8. Решение системы (5.29) имеет вид

$$(5.30) \quad \varphi(t) - \varphi_A = \mp \sigma \cdot C \cdot t,$$

$$(5.31) \quad r(t) = \frac{V_0}{C} \sin \left(\arcsin \left(\frac{C \cdot r_A}{V_0} \right) \pm C \cdot t \right).$$

Доказательство.

Интегрируя первое уравнение системы (5.29), получим (5.30). Разрешаем второе уравнение из (5.29) относительно \dot{r}

$$(5.32) \quad \dot{r} = \pm V_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right)^2}.$$

Замена $u = \frac{C \cdot r(t)}{V_0}$ приводит уравнение (5.32) к виду $\frac{\dot{u}}{C} = \pm \sqrt{1 - u^2}$, интегрируя которое получаем, что $\arcsin u = \pm C \cdot t + C_3$, где C_3 — константа интегрирования. Обратная замена дает $\arcsin \left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right) = \pm C \cdot t + C_3$. Значение C_3 находится из начальных условий и равно:

$$C_3 = \arcsin \left(\frac{C \cdot r_A}{V_0}\right).$$

Откуда следует (5.31). Лемма 8 доказана.

Подстановка краевых условий в (5.31) дает уравнение для нахождения скорости

$$(5.33) \quad \left| \arcsin \left(\frac{C \cdot r_B}{V_0}\right) - \arcsin \left(\frac{C \cdot r_A}{V_0}\right) \right| = C \cdot T.$$

В переменных z из (5.17) и \hat{z} из (5.20) уравнение (5.33) примет вид

$$(5.34) \quad z - \hat{z} = C \cdot T.$$

Лемма 9. Уравнение (5.34) имеет решение и оно единственно, если для краевых условий выполнено неравенство

$$(5.35) \quad |\varphi_B - \varphi_A| \leq \pi/2 - \arcsin k_r.$$

Доказательство.

Поскольку $\cos \nu = 0$, то $F(z) = z - \hat{z}$, которая по лемме 5 является монотонной функцией. Минимальное значение левой части уравнения (5.34) равно нулю, а максимальное — $(\pi/2 - \arcsin k_r)$. Поэтому уравнение (5.34) имеет решение при значении $C \cdot T$, которое в свою очередь находится из (5.30) и равняется $|\varphi_B - \varphi_A|$. Тогда для существования решения должно быть выполнено условие (5.35), которое является единственным из монотонности $F(z)$. Лемма 9 доказана.

Следствие 2. Если условие (5.35) выполнено, то значение скорости равно

$$(5.36) \quad V_0 = \frac{1}{T} \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\sin(\varphi_B - \varphi_A)} \cdot \sqrt{r_A^2 - 2 \cdot r_A \cdot r_B \cdot \cos |\varphi_B - \varphi_A| + r_B^2}.$$

Доказательство.

Цепочка преобразований приводит к определению V_0 и нахождению такой траектории:

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\max}}{V_0}\right) &= \arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right) + C \cdot T, \\ \sin\left(\arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\max}}{V_0}\right)\right) &= \sin\left(\arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right) + C \cdot T\right), \\ \frac{C \cdot r_{\max}}{V_0} &= \frac{C \cdot r_{\min}}{V_0} \cdot \cos(C \cdot T) + \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right)^2} \cdot \sin(C \cdot T), \\ \frac{C \cdot r_{\max}}{V_0} - \frac{C \cdot r_{\min}}{V_0} \cdot \cos(C \cdot T) &= \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right)^2} \cdot \sin(C \cdot T), \\ \frac{C^2 \cdot (r_{\max}^2 - 2 \cdot r_{\min} \cdot r_{\max} \cdot \cos(C \cdot T) + r_{\min}^2 \cdot \cos^2(C \cdot T))}{V_0^2} &= \\ &= \sin^2(C \cdot T) - \left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right)^2 \cdot \sin^2(C \cdot T). \end{aligned}$$

Из последних выражений получаем, что

$$V_0 = \frac{C}{\sin(C \cdot T)} \cdot \sqrt{r_{\max}^2 - 2 \cdot \cos(C \cdot T) \cdot r_{\max} \cdot r_{\min} + r_{\min}^2}$$

или можно представить в виде (5.36). Если $C = 0$, то движение происходит по радиус-вектору и

$$V_0 = \frac{1}{T} \cdot |r_B - r_A|.$$

В качестве примера рассмотрим переход, изображенный на рис. 6. Получаем, что $\pi/2 - \arcsin k_r = \pi/2 - \arcsin 0,2635 = 1,304 < \varphi_B - \varphi_A = 1,8925$, поэтому решения в этом случае нет.

5.5. Область существования решения

Выше было рассмотрено решение задачи о нахождении возможности построения траектории движения на постоянной скорости и о нахождении такого значения скорости. Теперь исследуем множество точек на плоскости, для которого существует решение этой задачи. Сделаем несколько уточняющих замечаний.

Замечание 3. Для удобства описания будем рассматривать область существования решения в системе координат с начальным положением объекта на оси X . Тогда $\varphi_A = 0$.

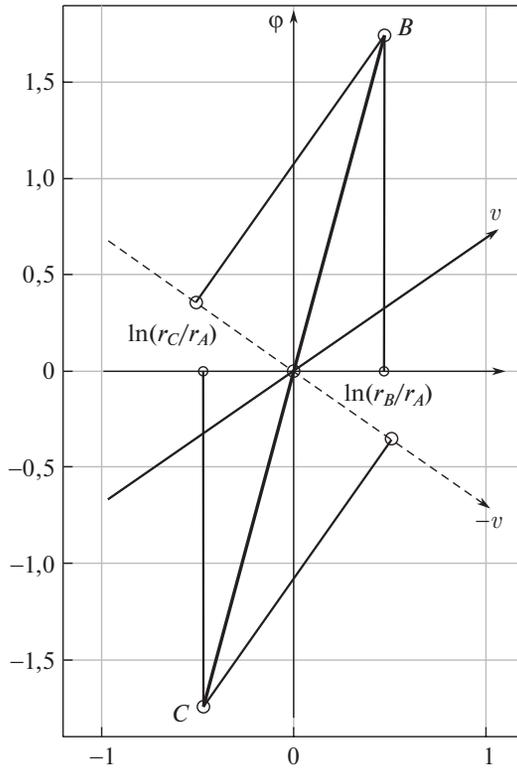


Рис. 12. Симметрия решения в плоскости (ρ, φ) .

Замечание 4. Индикатриса $G(\beta, \nu)$ симметрична, поскольку $G(\beta, \nu \pm \pi) = G(\nu, \beta)$. Следовательно, любой параметр ν можно заменить его значением $\nu \in [0, \pi]$.

Замечание 5. Кроме того, когда $\nu_1 = \pi - \nu$, задача перехода из начальной точки в конечную точку с краевыми условиями $\rho(T) = \rho_B, \varphi(T) = \varphi_B$ с углом ν_1 совпадает с задачей перехода в точку с краевыми условиями $\rho(T) = \rho_B, \varphi(T) = -\varphi_B$ с углом ν . Значит, для всех значений ν можно использовать только значения $\nu \in [0, \pi/2]$. Тогда при $\nu \in [0, \pi/2]$ функция $F(z)$ всегда будет возрастающей, поскольку $\sin \nu > 0$.

Кроме того имеется еще одна симметрия.

Замечание 6. Для построения области существования решения достаточно построить ее внутри круга $r \leq r_A$.

Проиллюстрируем замечание 6 примером.

Пусть точка A имеет координаты $r_A = 50, \varphi_A = 0^\circ, r_B = 80, \varphi_B = 100^\circ$, а $\nu = 35^\circ$. Рассмотрим на одном графике еще один переход из точки A в точку C с координатами $r_C = 31,25, \varphi_C = -100^\circ$. Точки B и C приведены на рис. 12 в системе координат $(\rho(t) - \rho_A, \varphi(t) - \varphi_A)$. Из рисунка видно, что точки B и C расположены симметрично, проекции на ось $(\cos \nu, -\sin \nu)$ имеют

одинаковые абсолютные значения, но разные знаки, т.е. правая часть (5.18) имеет разные знаки для переходов в эти точки. Поскольку $r_C < r_A$, а $r_B > r_A$, то значения k_r для этих точек одинаковы, $k_r = \frac{r_A}{r_B} = \frac{r_C}{r_A}$, а значит, одинаковы и решения. Таким образом, информация обо всей области существования решения содержится внутри круга радиуса r_A .

Существование решения опирается на определение разрешимости уравнения (5.18), где главную роль играют значения $F(-\pi/2)$ и $F(\pi/2)$. Справедлива лемма 10.

Лемма 10. В круге $r < r_A$ множество точек (r_B, φ_B) или (k_r, φ_B) , где $k_r = r_B/r_A$, в которых существует решение задачи 2 определяется двумя системами неравенств:

$$(5.37) \quad \begin{cases} \ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu - \pi \leq \varphi_B, \\ \frac{\pi}{2} - \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{\cos \nu}{\sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) \geq -\ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu + \varphi_B; \end{cases}$$

$$(5.38) \quad \begin{cases} \varphi_B \leq \ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu + \pi, \\ k_r > \sin \nu, \\ -\frac{\pi}{2} + \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{-\cos \nu}{\sin(\nu - \arcsin k_r)} \right) \leq -\ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu + \varphi_B. \end{cases}$$

Доказательство.

Как упоминалось ранее, задачу о поиске границы области существования можно свести к задаче, для которой $\nu > 0$ и $\nu < 90^\circ$ ($\sin \nu > 0$) и $r_B < r_A$. На основании лемм 3, 4 и выбранного интервала значений ν перепишем условия нахождения решения:

$$(5.39) \quad F(\pi/2) \geq -\sigma \cdot C \cdot T,$$

$$(5.40) \quad F(-\pi/2) \leq -\sigma \cdot C \cdot T, \text{ если } k_r > \sin \nu.$$

Для выбранного диапазона значений из уравнения (3.5), считая $\varphi_A = 0$, получим, что

$$\sigma \cdot C \cdot T = \ln k_r \cdot \cos \nu - \varphi_B \cdot \sin \nu.$$

Этот диапазон углов находится в рабочей области, что дает первые неравенства из (5.37), (5.38). Разделив уравнения (5.39), (5.40) на $\sin \nu$, получим второе неравенство (5.37) и третье неравенство (5.38), каждое из которых связано со своей областью значений, задаваемой первыми неравенствами в этих системах. Лемма 10 доказана.

Полярный угол φ_0 , при котором значение $C \cdot T = 0$, определяется как

$$(5.41) \quad \varphi_0 = \ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu.$$

Значения границ области должны попадать в рабочий диапазон $(\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$, как показано на рис. 13. Эти уравнения определяют для заданных

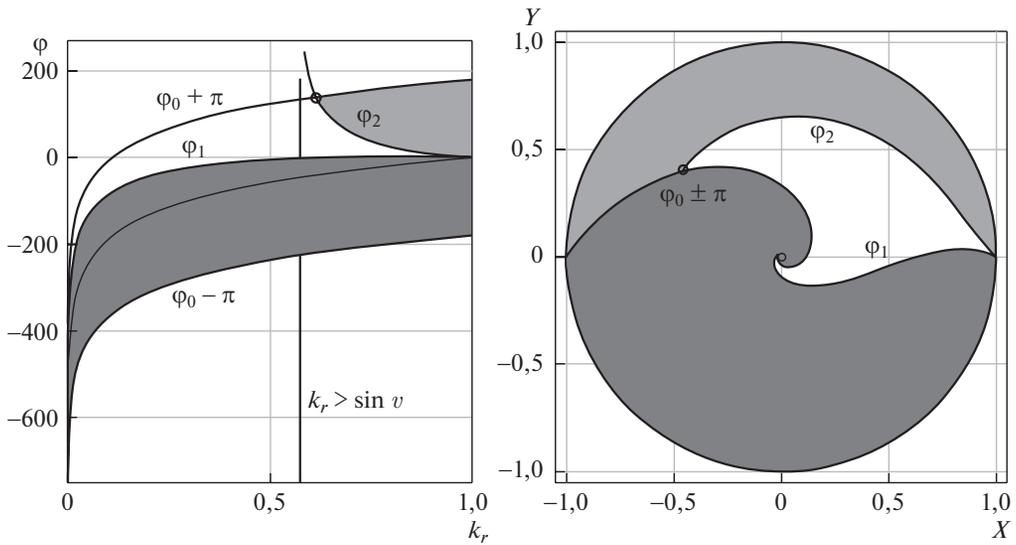


Рис. 13. Границы области существования решения в нормированных на начальную дистанцию полярных (слева) и декартовых (справа) координатах.

значений ν и k_r границы области существования решения:

$$\varphi_1 = \pi/2 - \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{\cos \nu}{\sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) + \varphi_0(k_r, \nu),$$

$$\varphi_2 = -\pi/2 + \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{-\cos \nu}{\sin(\nu - \arcsin k_r)} \right) + \varphi_0(k_r, \nu).$$

Эти кривые попарно пересекаются с кривыми $\varphi_0 \pm \pi = 0$. Одна точка пересечения φ_{g1} определяется совместным решением уравнения $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi$, другая точка φ_{g2} находится из совместного решения $\varphi_2 = \varphi_0 + \pi$.

Пример расчета области существования решения для максимальной дистанции от сенсора, равного 300 единиц, рассматривается на рис. 14,а. Напомним, что сенсор расположен в точке с координатами $(0, 0)$, начальная точка $A = (50, 0)$. Серым цветом обозначена область существования решения, а черные линии соответствуют частным случаям $r_A = r_B$ и $C = 0$.

На рис. 14,б приведена область существования решения для внутренней части области $r_B < r_A$ при условии, что координаты нормированы. Дистанция определяется в относительных единицах $k_r = r_B/r_A$. Начальная точка A имеет координаты $(1, 0)$. Форма области на рис. 14,б естественно совпадает с формой области внутри круга радиуса r_A для рис. 14,а. Поясним на примере, как по области рис. 14,б определяется существование точки для дистанции большей r_A . Например, возьмем точку D_1 , расположенную на дистанции 210 и углом направления (-60°) (точка D_1 указана на рис. 14,а). Для нее отношение $k_r = 50/210 = 0,2381$. Данные о возможности решения для этой точки можно получить, отложив дистанцию,

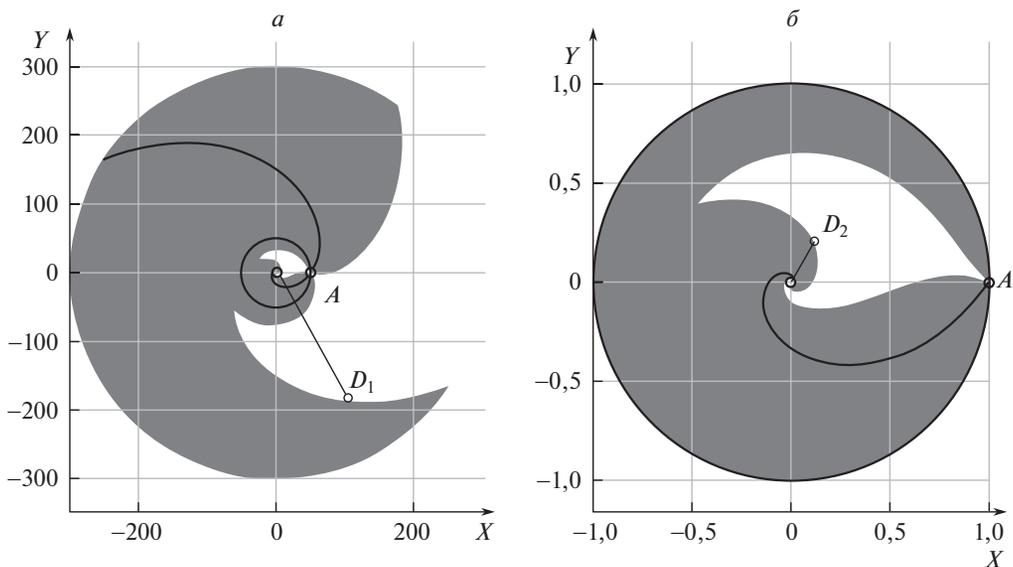


Рис. 14. Область существования решения для $\nu = 35^\circ$: $a - r_B \in [0; 300]$; $b - r_B < r_A$.

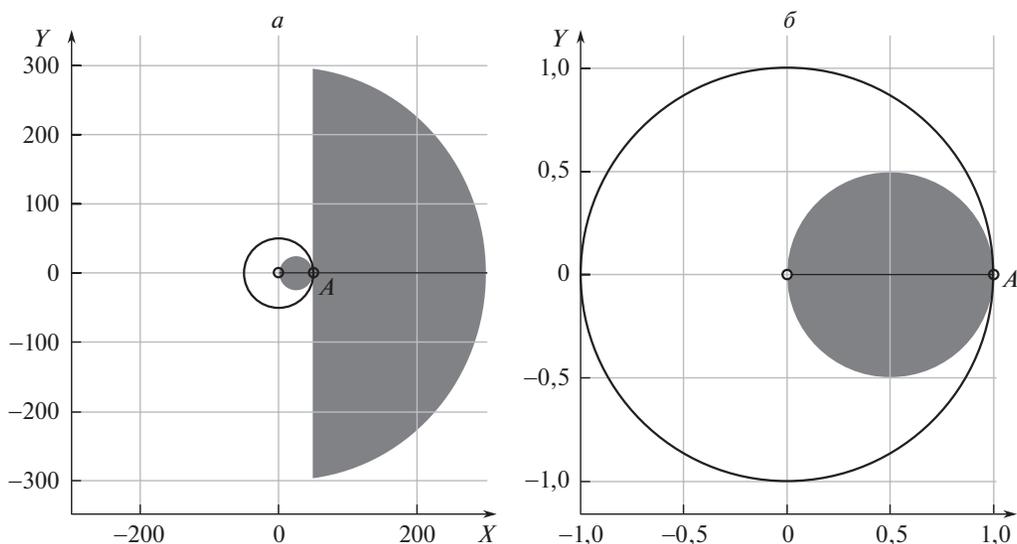


Рис. 15. Область существования решения для $\nu = 90^\circ$: $a - r_B \in [0; 300]$; $b - r_B < r_A$.

равную k_r , под углом 60° (точка D_2 указана на рис. 14,б). И, наконец, рассмотрим частный случай $\cos \nu = 0$. Поскольку условием достижимости является выполнение уравнения (5.35), то граница области легко вычисляется. Для случая $r_B \geq r_A$ значение $k_r = r_A/r_B$, граничная координата $x = r_B \cdot \cos(\pi/2 - \arcsin k_r) = r_B \cdot k_r = r_A$. Вся полуплоскость отображается в область круга с центром и радиусом $r_A/2$. Эта область представлена на рис. 15.

6. Заключение

Две рассмотренные в статье задачи планирования траекторий автономных и пилотируемых УПО указали на общие черты, характерные этому классу задач. Оказывается, что оптимизационные критерии, естественным образом введенные в формализации задач планирования траектории, позволяют получать решение не для всех краевых условий. Для задачи движения по заданной траектории были предложены условия существования оптимального скоростного режима и разработан алгоритм его нахождения. Для задачи нахождения оптимальной траектории движения с постоянной скоростью были найдены области существования решения со значением функционала риска, равным минимальному значению на траектории, соответствующей логарифмической спирали с оптимальным законом изменения скорости на ней, а также предложен метод построения этой области и найден аналитический вид оптимальной траектории.

Дальнейшая работа может быть направлена на решение задачи планирования траектории для случая нескольких скоростных режимов УПО с индикатрисой излучения, при которой вырождаются необходимые условия оптимальности функционала риска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miller A.B., Miller B.M.* On AUV Navigation Based on Acoustic Sensing of the Seabed Profile // J. Communications Technology and Electronics. 2018. V. 63. No. 12. P. 1502–1505. <https://doi.org/10.1134/S106422691812015X>.
 2. *Попов А.К., Миллер А.Б., Степанян К.В., Миллер Б.М.* Моделирование процесса навигации беспилотного летательного аппарата с использованием двух бортовых камер, смещенных по высоте // Сенсорные системы. 2018. № 1. С. 19–25. <https://doi.org/10.7868/S0235009218010043>.
 3. *Zhi-Wen W., Kun L.M., Li-jing W.* Path Planning for UUV in Dynamic Environment // 9th Int. Sympos. on Computational Intelligence and Design (ISCID). 2016. V. 1. P. 211–215. <https://doi.org/10.1109/ISCID.2016.1055>.
 4. *Shaikin M.E.* On statistical risk functional in a control problem for an object moving in a conflict environment // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2011. V. 50. No. 1. P. 20–29. <https://doi.org/10.1134/S1064230711010175>.
 5. *Добровидов А.В., Кулида Е.Л., Рудько И.М.* Оптимизация траектории движения объекта по вероятностному критерию в режиме пассивной гидролокации в анизотропной среде // Пробл. управл. 2014. № 4. С. 31–37.
 6. *Sysoev L.P.* Detection probability criterion on the path for mobile object control problem in conflict environment // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1766–1775. <https://doi.org/10.1134/S0005117911080157>.
- Сысоев Л.П.* Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Пробл. управл. 2010. № 6. С. 64–70.
7. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P.* 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // Sensors. 2021. V. 21. No. 2. P. 396. <https://doi.org/10.3390/s21020396>.

8. *Barrios S., Lopez-Franco M., Rios J.D., Arana-Daniel N., Lopez-Franco C., Alanis A.Y.* An Autonomous Path Controller in a System on Chip for Shrimp Robot // *Electronics*. 2020. V. 9. No. 3. P. 441. <https://doi.org/10.3390/electronics9030441>.
9. *Cui J., Wei R., Liu Z., Zhou K.* UAV Motion Strategies in Uncertain Dynamic Environments: A Path Planning Method Based on Q-Learning Strategy // *Applied Sciences*. 2018. V. 8. No. 11. P. 2169. <https://doi.org/10.3390/app8112169>.
10. *Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Костенко В.В., Матвиенко Ю.В., Павин А.М., Щербатюк А.Ф.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. М.: Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения РАН.
11. *Киселев Л.В., Инзарцев А.В., Костенко В.В., Павин А.М.* Модели, системы и технологии подводных роботов и их применение для решения поисково-обследовательских задач 2020. М.: ВСПУ, 2019. <https://doi.org/10.25728/VSPU.2019.3271>.
12. *Галляев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2009. № 4. С. 130–136.
13. *Галляев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // *АиТ*. 2012. № 6. С. 83–94.
Galyaev A.A., Maslov E.P. Optimization of the law of moving object evasion from detection under constraints // *Autom. Remote Control*. 2012 V. 73. No. 6. P. 992–1004. <https://doi.org/10.1134/s0005117912060057>
14. *Kabamba P.T., Meerkov S.M., Zeitz F.H.* Optimal Path Planning for Unmanned Combat Aerial Vehicles to Defeat Radar Tracking // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2006. V. 29. No. 2. P. 279–288. <https://doi.org/10.2514/1.14303>.
15. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P.* Algorithm for Optimal Two-Link Trajectory Planning in Evasion from Detection Problem of Mobile Vehicle with Non-Uniform Radiation Pattern // *Advances in Syst. Appl.* 2021. V. 2. P. 7182. <https://doi.org/10.25728/ASSA.2021.21.2.1061>.
16. *Pachter L., Pachter M.* Optimal paths for avoiding a radiating source // *Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*. Orlando, FL, USA: IEEE, 2001. P. 3581–3586. <https://doi.org/10.1109/CDC.2001.980415>.
17. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // *Cooperative Control and Optimization*. V. 66 Boston, MA: Springer US, 2002. P. 273–298. <https://doi.org/10.1007/0-306-47536-7-13>.
18. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft Routing Under the Risk of Detection // *Naval Research Logistics*. 2006. V. 53. No. 8. P. 728–747. <https://doi.org/10.1002/nav.20165>.
19. *Галляев А.А., Маслов Е.П., Яхно В.П., Абрамянц Т.Г.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения в конфликтной среде // *Управление большими системами*. Сб. тр. 2019. № 79. <https://doi.org/10.25728/UBS.2019.79.5>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 07.02.2022

После доработки 17.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Стохастические системы

© 2022 г. А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук (nazarov.tsu@gmail.com),
Е.А. ПАВЛОВА (pavlovakatyа_2010@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный
университет)

ИССЛЕДОВАНИЕ СМО ВИДА $MMPP|M|N$ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА

Представлены результаты исследования N -линейной системы массового обслуживания с обратной связью. Входящий поток является марковским модулированным пуассоновским (ММРР). Методом асимптотически диффузионного анализа находится распределение вероятностей числа заявок на орбите и занятых приборов в системе. Приведены результаты имитационного моделирования, а также численное сравнение предложенного метода с методом асимптотического анализа.

Ключевые слова: многоканальная система массового обслуживания, орбита, мгновенная обратная связь, отсроченная обратная связь, метод асимптотически диффузионного анализа.

DOI: 10.31857/S0005231022070029, EDN: ADTPEA

1. Введение

Когда говорят о системах массового обслуживания, под обратной связью понимают повторное обращение заявки к обслуживающему прибору. В некотором смысле качество предоставленного обслуживания определяется интенсивностью повторного обращения заявок в систему. Считается, что клиент возвращается на повторное обслуживание в случае удовлетворительного качества первичного обслуживания, но не исключаются и ситуации, когда он возвращается в связи с неудовлетворительным обслуживанием, в частности в телекоммуникационных системах при искажении передаваемых сообщений.

В системах массового обслуживания различают два вида обратной связи, их называют мгновенная и отсроченная обратная связь. После завершения обслуживания заявка может покинуть систему или мгновенно обратиться за повторным обслуживанием (мгновенная обратная связь). Отсроченная обратная связь осуществляется посредством задержки заявки на орбите, где она ожидает повторного обслуживания в течение случайного времени.

Первые публикации, посвященные результатам исследований систем с обратной связью, принадлежат Такачу [1, 2] и Коэну [3]. В этих публикациях

представлены результаты исследования одноканальных систем с неограниченными очередью и орбитой методом производящих функций. Численные алгоритмы точных и приближенных расчетов характеристик СМО с обратной связью были предложены для довольно общих математических моделей [4].

После исследований описанных систем Такача долгое время ученых не привлекала данная область, поэтому новые публикации появились не скоро. Последние три десятилетия модели с обратной связью активно исследуются учеными. Таким образом, в [1, 5–12] представлены результаты исследований СМО с мгновенной обратной связью, а в [2, 13–23] изучены СМО с отсроченной или отложенной обратной связью. Также ряд публикаций [24–27] посвящен исследованию систем с обоими типами обратной связи (в [24] есть обзор публикаций до 2015 г.).

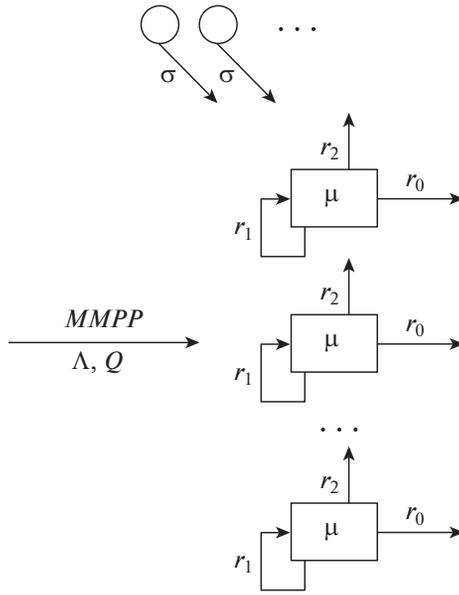
Ключевой задачей исследования систем массового обслуживания с обратной связью является получение распределения вероятностей для многомерных цепей Маркова, представляющих математические модели этих систем. Для изучения моделей умеренной размерности с этой задачей помогают программные средства, основанные на решении балансовых уравнений [28, 29]. Также, применяя различные подходы в решении основной задачи, ученые применяют матрично-геометрический метод [30] и спектральный метод [31], а также различные их модификации. Следует отметить, что в использовании выше указанных методов встречаются и достаточно серьезные вычислительные проблемы, что значительно повышает сложность решения. В [32] представлены исследования авторами марковской системы массового обслуживания с обратной связью методом асимптотического анализа, а также результаты численных экспериментов.

Таким образом, в настоящей статье при изучении СМО с обратной связью мгновенной и отложенной использован метод асимптотически диффузионного анализа.

2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с N обслуживающими устройствами и обратной связью (см. рисунок). На вход системы поступает ММРР-поток заявок, заданный диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_k]$, $k = 1, 2, \dots, K$, матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, K$, управляющей потоком цепи Маркова $k(t) = 1, 2, \dots, K$.

Заявка, поступая в систему, занимает один из свободных приборов и обслуживается в течение случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром μ . Если при поступлении в систему заявка обнаружит все приборы занятыми, она мгновенно отправляется на орбиту, где осуществляет задержку в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром σ .



Система вида $MMPP|M|N$ с обратной связью.

В момент завершения обслуживания заявка может покинуть систему с вероятностью r_0 ; осуществляя мгновенную обратную связь, отправиться на повторное обслуживание с вероятностью r_1 ; осуществляя отсроченную обратную связь, отправиться на орбиту с вероятностью r_2 , где она осуществляет случайную задержку в течение времени, экспоненциально распределенного с параметром σ , после чего повторно обращается к приборам. Если в момент поступления заявки с орбиты один из приборов оказывается свободным, то она занимает его в течение случайного времени, которое имеет экспоненциальное распределение с тем же параметром μ . Другими словами, заявки, поступающие в систему извне, и заявки, которые поступают с орбиты, являются идентичными по времени их обслуживания, т.е. первичные и повторные заявки на приборах не различаются. Если в момент поступления повторной заявки с орбиты все приборы заняты, то она остается на орбите для повторения своего запроса. Предполагается, что возможны многократные повторения запросов для обслуживания, т.е. нет ограничений на число повторных обращений.

Обозначим $k(t) = k$ — состояние цепи Маркова, управляющей $MMPP$ -поток в момент времени t , $k = 1, 2, \dots, K$, $n(t)$ — число занятых приборов в системе в момент времени t , $n = 0, 1, \dots, N$, $i(t)$ — число заявок на орбите в момент времени t .

Ставится задача получения двумерного стационарного распределения вероятностей

$$P(n, i) = P\{n(t) = n, i(t) = i\}.$$

3. Система уравнений Колмогорова

Рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{k(t), n(t), i(t)\}$, для его нестационарного распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i, t)$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, n, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda_k + (1 - r_1)n\mu + i\sigma)P(k, n, i, t) + \lambda_k P(k, n - 1, i, t) + \\ &+ (i + 1)\sigma P(k, n - 1, i + 1, t) + (n + 1)r_0\mu P(k, n + 1, i, t) + \\ &+ (n + 1)r_2\mu P(k, n + 1, i - 1, t) + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu, n, i, t), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \\ \frac{\partial P(k, N, i, t)}{\partial t} &= -(\lambda_k + (1 - r_1)N\mu)P(k, N, i, t) + \lambda_k P(k, N - 1, i, t) + \\ (1) \quad &+ \lambda_k P(k, N, i - 1, t) + (i + 1)\sigma P(k, N - 1, i + 1, t) + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu, N, i, t). \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k, n, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} P(k, n, i, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Тогда можем записать систему (1) для характеристических функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, n, u, t)}{\partial t} &= -(\lambda_k + n\mu(1 - r_1))H(k, n, u, t) + \lambda_k H(k, n - 1, u, t) + \\ &+ j\sigma \frac{\partial H(k, n, u, t)}{\partial u} + (n + 1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})H(k, n + 1, u, t) - \\ &- j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k, n - 1, u, t)}{\partial u} + \sum_{\nu} q_{\nu k} H(\nu, n, u, t), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \\ \frac{\partial H(k, N, u, t)}{\partial t} &= (\lambda_k(e^{ju} - 1) - N\mu(1 - r_1)) H(k, N, u, t) + \\ (2) \quad &+ \lambda_k H(k, N - 1, u, t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k, N - 1, u, t)}{\partial u} + \sum_{\nu} q_{\nu k} H(\nu, N, u, t). \end{aligned}$$

Обозначим вектор-строки

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(n, u, t) &= \{H(1, n, u, t), \dots, H(K, n, u, t)\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(n, u, t)}{\partial u} &= \left\{ \frac{\partial H(1, n, u, t)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial H(K, N, u, t)}{\partial u} \right\} \end{aligned}$$

и перепишем (2) в матричном виде с учетом введенных обозначений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(n, u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(n, u, t)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - n\mu(1 - r_1)\mathbf{I}) + \mathbf{H}(n - 1, u, t)\mathbf{\Lambda} + \\ &+ j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(n, u, t)}{\partial u} + (n + 1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})\mathbf{H}(n + 1, u, t) - \\ &- j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(n - 1, u, t)}{\partial u}, \quad 0 \leq n \leq N - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(N, u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(N, u, t)(\mathbf{Q} - (1 - e^{ju})\mathbf{\Lambda} - N\mu(1 - r_1)\mathbf{I}) + \mathbf{H}(n - 1, u, t)\mathbf{\Lambda} - \\ (3) \quad &- j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(N - 1, u, t)}{\partial u}, \end{aligned}$$

здесь \mathbf{I} — единичная матрица размерности $K \times K$.

Введем векторное обозначение

$$\mathbf{H}(u, t) = \{\mathbf{H}(0, u, t), \mathbf{H}(1, u, t), \dots, \mathbf{H}(N, u, t)\}$$

и перепишем уравнения (3) в новой матричной форме. Домножая матричное уравнение (4) на единичный вектор-столбец \mathbf{e} , принимая во внимание $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e} = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\mathbf{e} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — вектор из нулевых компонент, запишем скалярное уравнение (5). Получим систему уравнений

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1),$$

$$(5) \quad \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} = \left[\mathbf{H}(u, t)\mathbf{B}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right] (e^{ju} - 1),$$

здесь блочные матрицы размерности $K \cdot (N + 1) \times K \cdot (N + 1)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & 0 & \dots & 0 \\ \mu r_0 \mathbf{I} & \mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \mu \mathbf{I}(r_0 + r_2) & \mathbf{\Lambda} & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu \mathbf{I} r_0 & \mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - 2\mu \mathbf{I}(r_0 + r_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - N\mu \mathbf{I}(r_0 + r_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu \mathbf{I} r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu \mathbf{I} r_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & N\mu \mathbf{I} r_2 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем искать решение полученной системы уравнений (4)–(5) методом асимптотически диффузионного анализа в условии большой задержки заявки на орбите, т.е. $\sigma \rightarrow 0$.

4. Первый этап асимптотического анализа

Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и выполним замены в (4)–(5)

$$(6) \quad u = \varepsilon w, \quad \tau = t\varepsilon, \quad \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon).$$

С учетом замен (6) перепишем систему (4)–(5)

$$(7) \quad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1),$$

$$(8) \quad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} = \left[\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{B} \mathbf{e} + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right] (e^{j\tau w} - 1).$$

Для решения системы (7)–(8) в условии $\varepsilon \rightarrow 0$ докажем утверждение теоремы 1.

Теорема 1. В системе массового обслуживания с обратной связью в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ предельная характеристическая функция нормированного числа $i(t)$ заявок на орбите имеет вид

$$(9) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} M \left\{ e^{jw\sigma i(t)} \right\} = e^{jwx(\tau)},$$

где функция $x(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$(10) \quad x'(\tau) = a(x),$$

а функция $a(x)$ определяется равенством

$$(11) \quad a(x) = \mathbf{r}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e},$$

здесь вектор-строка $\mathbf{r} = \{r(0), r(1), \dots, r(N)\}$ является решением системы

$$(12) \quad \mathbf{r} \left\{ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \right\} = 0, \\ \mathbf{r} \mathbf{e} = 1.$$

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2 и 3 приведены в Приложении.

Процесс $i(t)$, домноженный на величину σ , называем нормированным.

Обозначим через κ положительный корень уравнения $a(x) = 0$. Подставляя $x = \kappa$ в решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$ системы (12), получаем двумерное стационарное распределение вероятностей \mathbf{r} того, что ММРР-поток находится в состоянии κ и в системе занято n приборов.

От полученного распределения вероятностей

$$\mathbf{r} = \{r(1, 0), \dots, r(K, 0), \dots, r(1, N), \dots, r(K, N)\}$$

можем перейти к распределению вероятностей числа n занятых приборов, просуммировав компоненты вектора \mathbf{r} по k , $r(n) = \sum_{k=1}^K r(k, n)$.

Далее будет показано, что функция $a(x)$ является коэффициентом переноса диффузионного процесса, который определяет число заявок на орбите.

5. Второй этап асимптотического анализа

Для рассмотрения центрированного процесса $i(t)$ в (4)–(5) выполним замену

$$\mathbf{H}(u, t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} \mathbf{H}^{(2)}(u, t),$$

получим систему

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{H}^{(2)}(u, t) (\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B}) + \\ & + j\sigma \left[\frac{j}{\sigma} x(\sigma t) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \right] (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1), \\ & \left[\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \right] \mathbf{e} = \\ & = (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{B} \mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \left[\frac{j}{\sigma} x(\sigma t) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \right] \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right\}. \end{aligned}$$

Перепишем последнюю систему с учетом (11) и (12)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jua(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{H}^{(2)}(u, t) (\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1)) + \\ & + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1), \\ & \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} + jua(x) \mathbf{H}^{(2)}(u, t) \mathbf{e} = \\ (13) \quad & = (e^{ju} - 1) \left(\mathbf{H}^{(2)}(u, t) [\mathbf{B} \mathbf{e} - e^{-ju} x \mathbf{I}_0] + e^{-ju} j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \right) \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и выполним в (13) замены

$$u = \varepsilon w, \quad \tau = t\varepsilon^2, \quad \mathbf{H}^{(2)}(u, t) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon),$$

получим

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \\
& = \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1)) + \\
& \quad + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} + j\varepsilon w a \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{e} = \\
(14) \quad & = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left(\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) [\mathbf{B}\mathbf{e} - e^{-j\varepsilon w} x \mathbf{I}_0] + e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \right) \mathbf{e}.
\end{aligned}$$

Продолжая исследование, докажем утверждение теоремы 2.

Теорема 2. В системе массового обслуживания с обратной связью в предельном условии $\sigma \rightarrow 0$ асимптотическая характеристическая функция

$$\Phi(w, \tau) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \left\{ jw\sqrt{\sigma} \left(i \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) - \frac{x(\tau)}{\sigma} \right) \right\}$$

является решением уравнения

$$(15) \quad \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} a'(x) + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau),$$

здесь скалярная функция $b(x)$ определяется выражением

$$(16) \quad b(x) = a(x) + 2\mathbf{g}[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} + 2\mathbf{r}x\mathbf{I}_0\mathbf{e},$$

где вектор \mathbf{g} является решением системы уравнений

$$(17) \quad \begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) &= \mathbf{a}\mathbf{r} + \mathbf{r}(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}), \\
\mathbf{g}\mathbf{e} &= 0.
\end{aligned}$$

Процесс $i \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) - \frac{x(\tau)}{\sigma}$ называем центрированным, его математическое ожидание равно нулю.

6. Асимптотически диффузионный анализ

Продолжая исследование, докажем теорему 3.

Теорема 3. Предельная плотность распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите в рассматриваемой системе с обратной связью имеет вид

$$(18) \quad \pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

здесь C — нормирующая константа, а функции $a(x)$ и $b(x)$ определяются выражениями (11) и (16) соответственно.

7. Дискретное распределение вероятностей

Рассмотрим выражение (18), подставляя в него набор аргументов $k\sigma$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, получим набор чисел

$$\pi(k\sigma) = \frac{C}{b(k\sigma)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^{k\sigma} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

применяя условие нормировки к которому, получим дискретное распределение вероятностей

$$(19) \quad P(k) = \frac{\pi(k\sigma)}{\sum_{k=0}^{\infty} \pi(k\sigma)}.$$

Таким образом, получена аппроксимация $P(k)$ дискретного распределения числа заявок на орбите в рассматриваемой системе с обратной связью.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима в рассматриваемой системе является неравенство

$$\lambda < r_0 \mu N,$$

которое запишем в виде (20)

$$(20) \quad \lambda = \rho r_0 \mu N,$$

где $0 < \rho < 1$.

Для любой аппроксимации, включая (19), важно определить точность и область ее применения, т.е. диапазон всех значений параметра загрузки системы ρ , а также параметра σ , значения которого в теоретических вычислениях бесконечно малы ($\sigma \rightarrow 0$).

Точность аппроксимации будем определять расстоянием Колмогорова

$$(21) \quad \Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P(n) - P_1(n)) \right|,$$

где $P_1(n)$ — достаточно точное распределение, полученное в допредельной ситуации в результате имитационного моделирования.

В качестве примера рассмотрим систему ММРР|M|N при $N = 5$, где матрицы \mathbf{Q} и $\mathbf{\Lambda}_1 = \rho \mathbf{\Lambda}$, определяющие входящий ММРР-поток, заданы в виде

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & -0,8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 2,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1. Расстояние Колмогорова, метод асимптотически диффузионного анализа

| | $\sigma = 0,5$ | $\sigma = 0,2$ | $\sigma = 0,1$ | $\sigma = 0,05$ |
|--------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\rho = 0,6$ | 0,049 | 0,023 | $9,9 \times 10^{-3}$ | 0,011 |
| $\rho = 0,7$ | 0,040 | 0,016 | $9,9 \times 10^{-3}$ | $5,2 \times 10^{-3}$ |
| $\rho = 0,8$ | 0,026 | 0,010 | $6,1 \times 10^{-3}$ | $3,2 \times 10^{-3}$ |
| $\rho = 0,9$ | 0,015 | $7,1 \times 10^{-3}$ | $3,3 \times 10^{-3}$ | $2,4 \times 10^{-3}$ |

Таблица 2. Расстояние Колмогорова, метод асимптотического анализа

| | $\sigma = 0,5$ | $\sigma = 0,2$ | $\sigma = 0,1$ | $\sigma = 0,05$ |
|--------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $\rho = 0,6$ | 0,083 | 0,047 | 0,038 | 0,030 |
| $\rho = 0,7$ | 0,098 | 0,069 | 0,049 | 0,038 |
| $\rho = 0,8$ | 0,114 | 0,094 | 0,079 | 0,056 |
| $\rho = 0,9$ | 0,179 | 0,123 | 0,100 | 0,074 |

Для $\mu = 1$, $r_0 = 0,5$, $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,3$, в табл. 1 представлены значения Δ из (21) и указанные значения параметров ρ и σ . В табл. 2 представлены значения, полученные в результате аналогичных [30] исследований системы $MMPP|M|N$ методом асимптотического анализа.

Предполагая, что приближение $P_1(n)$ приемлемо, если его точность составляет $\Delta < 0,05$, можно сделать вывод: предложенное диффузионное приближение $P_1(n)$ приемлемо для рассматриваемого примера при указанных в табл. 1 и 2 значениях параметров ρ и σ . Точность аппроксимации возрастает (Δ уменьшается) с уменьшением значения параметра σ . Это довольно естественно из-за ограничивающего условия $\sigma \rightarrow 0$. Сравнивая результаты работы метода асимптотически диффузионного анализа и метода асимптотического анализа, отметим, что по мере увеличения нагрузки при $\rho \geq 0,6$ точность приближения $P_1(n)$ также увеличивается для метода асимптотически диффузионного анализа, что делает метод предпочтительным. В то же время Δ достигает значений менее 0,01, что свидетельствует об очень высокой точности предлагаемого метода.

8. Заключение

В данной статье предложена математическая модель системы вида $MMPP|M|N$ с мгновенной и отложенной обратной связью. В предельном условии большой задержки ($\sigma \rightarrow 0$) заявок на орбите с возможностью осуществить отложенную обратную связь получено асимптотическое распределение вероятностей нормированного числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Проведен численный эксперимент, в ходе которого были построены имитационные модели для частного случая рассматриваемой системы. Сравнительный анализ полученных результатов показал, что метод асимптотически диффузионного анализа позволяет повысить точность аппроксимации по сравнению с методом асимптотического анализа кратно или даже на порядок, что отражено в табл. 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим (7) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначим $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau)$, получим

$$(II.1) \quad \mathbf{F}(w, \tau)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Будем искать решение $\mathbf{F}(w, \tau)$ системы (II.1) в виде $\mathbf{F}(w, \tau) = \mathbf{r}e^{jw\tau}$, тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \left\{ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \right\} &= 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} &= 1, \end{aligned}$$

что совпадает с (12) формулировки теоремы 1.

Рассмотрим теперь (8) в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{e} = jw \left[\mathbf{F}(w, \tau) \mathbf{B}\mathbf{e} + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right]$$

и подставим решение в виде $\mathbf{F}(w) = \mathbf{r}e^{jw\tau}$, тогда

$$x'(\tau) = \mathbf{r}(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I}_0)\mathbf{e} \equiv a(x),$$

что совпадает с (11).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Запишем первое уравнение системы (14) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} j\varepsilon w a \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w \mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде

$$(II.2) \quad \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi(w) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} + O(\varepsilon^2),$$

здесь $\Phi(w)$ — некоторая скалярная функция, которую определим далее.

Получаем

$$\begin{aligned} &j\varepsilon w a \Phi(w, \tau) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} = \\ &= \Phi(w, \tau) \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} (\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w \mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \{ \mathbf{r} + j\varepsilon w \mathbf{f} \} + \Phi(w, \tau) j\varepsilon \mathbf{f} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

тогда, принимая во внимание (12), имеем

$$j\varepsilon w a \Phi(w, \tau) \mathbf{r} = \Phi(w, \tau) \{j\varepsilon w [\mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{r}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1)]\} + \\ + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{r}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2).$$

Разделим последнее уравнение на $j\varepsilon w \Phi(w, \tau)$ и, устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = a\mathbf{r} - \mathbf{r}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1) + \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)} \mathbf{r}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0).$$

Решение \mathbf{f} последней системы можем записать в виде

$$(II.3) \quad \mathbf{f} = C\mathbf{r} + \mathbf{g} - \varphi \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)}.$$

Подставив это разложение в (17), для векторов \mathbf{g} и φ получим системы

$$(II.4) \quad \varphi(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{r}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1),$$

$$(II.5) \quad \mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = a\mathbf{r} + \mathbf{r}(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}).$$

Рассмотрим первое уравнение системы (12), продифференцируем его по x , получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \{(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1))\} - \mathbf{r}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Принимая во внимание (II.4), запишем равенство

$$(II.6) \quad \varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x},$$

где $\varphi \mathbf{e} = 0$.

Векторы φ и \mathbf{g} являются частными решениями неоднородных систем (II.4) и (II.5), поэтому они удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые выберем в виде $\varphi \mathbf{e} = 0$ (следует из (II.6)) и аналогично $\mathbf{g} \mathbf{e} = 0$, тогда решения φ и \mathbf{g} систем (II.4) и (II.5), удовлетворяющие этим условиям, определяются однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение (14) и подставим в него разложение (II.2), принимая во внимание (12) и (II.1), можем записать

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = \frac{(jw)^2}{2} \{2(\mathbf{f}[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0] + \mathbf{r}x\mathbf{I}_0 - a\mathbf{f})\mathbf{e} + a\} - \\ - w \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{\Phi(w, \tau)} \mathbf{r}\mathbf{I}_0 \mathbf{e}.$$

Далее подставим в последнее уравнение выражение (П.3)

$$(П.7) \quad \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = \frac{(jw)^2}{2} \{2g[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} + 2rx\mathbf{I}_0\mathbf{e} + a\} + w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \{\varphi[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} - \mathbf{rI}_0\mathbf{e}\}.$$

Обозначим

$$b(x) = a + 2g[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} + 2rx\mathbf{I}_0\mathbf{e}$$

и перепишем (П.7) с учетом этого обозначения

$$(П.8) \quad \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \{\varphi[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} - \mathbf{rI}_0\mathbf{e}\} + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau).$$

Рассмотрим теперь выражение

$$(П.9) \quad \varphi[\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} - \mathbf{rI}_0\mathbf{e},$$

применим к нему (П.6), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} - \mathbf{rI}_0\mathbf{e}.$$

Рассмотрим также $a(x)$ из (11), продифференцируем эту функцию по x , получим

$$a'(x) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} [\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0]\mathbf{e} - \mathbf{rI}_0\mathbf{e}.$$

Сравнивая полученное равенство с выражением (П.9), перепишем (П.8) в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} a'(x) + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau),$$

что совпадает с (15).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим уравнение (15) из теоремы 2, выполним здесь обратное преобразование Фурье по переменной w для плотности распределения $P(y, \tau)$ нормированного и центрированного случайного процесса

$$y(\tau) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sqrt{\sigma} \left\{ i \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) - \frac{x(\tau)}{\sigma} \right\},$$

получим

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a'(x)yP(y, \tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(x)P(y, \tau)\}$$

— уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения $P(y, \tau)$ числа заявок на орбите. $y(\tau)$ — диффузионный процесс с коэффициентом переноса $a'(x)y$ и с коэффициентом диффузии $b(x)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = a'(x)y d\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau).$$

Составим систему обыкновенного и стохастического дифференциальных уравнений, используя (10),

$$(П.10) \quad \begin{aligned} dx(\tau) &= a(x)d\tau, \\ dy(\tau) &= a'(x)y d\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau) \end{aligned}$$

и введем случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau)$, где $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$.

Запишем $dz(\tau) = dx(\tau) + \varepsilon dy(\tau)$, куда подставим правые части из системы дифференциальных уравнений (П.10), выполнив несложные преобразования, имеем

$$dz(\tau) = (a(x) + \varepsilon y a'(x))d\tau + \varepsilon \sqrt{b(x)}dw(\tau).$$

Запишем коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} a(x) + \varepsilon y a'(x) &= a(x + \varepsilon y) + O(\varepsilon^2) = a(z) + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon \sqrt{b(x)} &= \sqrt{\varepsilon^2 b(x + \varepsilon y) + O(\varepsilon^3)} = \varepsilon \sqrt{b(z) + O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(z)} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Теперь с точностью до $O(\varepsilon^2)$ можем записать стохастическое дифференциальное уравнение для случайного процесса $z(\tau)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau).$$

Поскольку $z(\tau)$ является решением этого стохастического дифференциального уравнения, $z(\tau)$ — диффузионный процесс с коэффициентом переноса $a(z)$ и коэффициентом диффузии $\sigma b(z)$. Запишем уравнение Фоккера–Планка для стационарной плотности $\pi(z)$ этого диффузионного процесса

$$-\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z)\} = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение второго порядка, получим

$$-a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial z}\{b(z)\pi(z)\} = 0.$$

Принимая во внимание условие нормировки, а также, что $\pi(\infty) = 0$, получим стационарную плотность распределения вероятностей числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

что совпадает с (18).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takacs L.* A Single-Server Queue with Feedback // *Bell Syst. Technical J.* 1963. V. 42. P. 505–519.
2. *Takacs L.* A Queuing Model with Feedback // *Oper. Res.* 1977. V. 11. P. 345–354.
3. *Cohen J.W.* Basic Problems of Telephone Traffic Theory and the Influence of Repeated Calls // *Phillips Telecomm. Rev.* 1957. V. 18. No. 2. P. 49–100.
4. *Степанов С.Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами // М.: Наука, 1983.
5. *Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С.* Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // *Вычисл. технологии.* 2008. Т. 13. Вып. 5. С. 88–92.
6. *Моисеева С.П., Захорольная И.А.* Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // *Автометрия.* 2011. Т. 47. Вып. 6. С. 51–58.
7. *Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U.* The Queuing Model MAP/PH/1/N with Feedback Operating in a Markovian Random Environment // *Austrian J. Statistics.* 2005. V. 34. Iss. 2. P. 101–110.
8. *Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C.* The M/GI/1 Bernoulli Feedback Queue with Vacations // *Queueing Syst.* 1991. V. 9. Iss. 4. P. 353–363.
9. *D'Avignon G.R., Disney R.L.* Queues with Instantaneous Feedback // *Management Sci.* 1997. V. 24. Iss. 2. P. 168–180.
10. *Berg J.L., Borra O.J.* The M/G/1 Queue with Processor Sharing and Its Relation to Feedback Queue // *Queueing Syst.* 1991. V. 9. Iss. 4. P. 365–402.
11. *Hunter J.J.* Sojourn Time Problems in Feedback Queue // *Queueing Syst.* 1989. V. 5. Iss. 1–3. P. 55–76.
12. *Melikov A.Z., Zadiranova A., Moiseev A.* Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback // *Communications in Comput. and Inform. Sci.* 2016. V. 678. P. 231–240.
13. *Pekoz E.A., Joglekar N.* Poisson Traffic Flow in a General Feedback // *J. Appl. Probability.* 2002. V. 39. Iss. 3. P. 630–636.
14. *Lee H.W., Seo D.W.* Design of a Production System with Feedback Buffer // *Queueing Syst.* 1997. V. 26. Iss. 1. P. 187–198.
15. *Lee H.W., Ahn B.Y.* Analysis of a Production System with Feedback Buffer and General Dispatching Time // *Math. Problems in Engineering.* 2000. V. 5. P. 421–439.
16. *Foley R.D., Disney R.L.* Queues with Delayed Feedback // *Advances in Appl. Probability.* 1983. V. 15. Iss. 1. P. 162–182.
17. *Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G.* M/M/1 Retrial Queuing System with Loss and Feedback under Non-Pre-Emptive Priority Service by Matrix Geometric Method // *Appl. Math. Sci.* 2010. V. 4. P. 2379–2389.
18. *Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G.* M/M/1 Retrial Queuing System with Loss and Feedback under Pre-Emptive Priority Service // *Int. J. Comput. Appl.* 2010. V. 2. P. 27–34.
19. *Bouchentouf A.A., Belarbi F.* Performance Evaluation of Two Markovian Retrial Queuing Model with Balking and Feedback // *Acta Univ. Sapientiae. Mathematica.* 2013. V. 5. P. 132–146.

20. *Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W.* The M/M/c Retrial Queue with Geometric Loss and Feedback // *Comput. and Math. with Appl.* 1998. V. 36. P. 41–52.
21. *Krishna Kumar B., Rukmani R., Thangaraj V.* On Multiserver Feedback Retrial Queue with Finite Buffer // *Appl. Math. Modeling.* 2009. V. 33. P. 2062–2083.
22. *Do T.V.* An Efficient Computation Algorithm for a Multiserver Feedback Retrial Queue with a Large Queuing Capacity // *Appl. Math. Modeling.* 2010. V. 34. P. 2272–2278.
23. *Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M.* A Feedback Retrial Queuing System with Starting Failures and Single Vacation // *Tamkang J. Sci. and Engineering.* 2007. V. 10. P. 183–192.
24. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Methods for Analysis of Queuing Models with Instantaneous and Delayed Feedbacks // *Communications in Comput. and Inform. Sci.* 2015. V. 564. P. 185–199.
25. *Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Methods for Analysis of Multi-Channel Queuing Models with Instantaneous and Delayed Feedbacks // *Cybern. Syst. Anal.* 2016. V. 52. Iss. 1. P. 58–70.
26. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Hierarchical Space Merging Algorithm to Analysis of Open Tandem Queuing Networks // *Cybern. Syst. Anal.* 2016. V. 52. Iss. 6. P. 867–877.
27. *Melikov A.Z., Aliyeva S.H.* Refined Approximate Algorithm for Steady-State Probabilities of the Large Scale Queuing Systems with Instantaneous and Delayed Feedbacks // *Communications in Comput. and Inform. Sci.* 2019. V. 1109. P. 188–201.
28. *Штрик Я., Ефросинин Д.В.* Анализ надежности систем массового обслуживания с повторными заявками и конечным числом требований при помощи инструментальных программных систем // *АиТ.* 2010. № 7. С. 119–125.
Sztrik J., Efrosinin D. Tool Supported Reliability Analysis of Finite-Source Retrial Queues // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 7. P. 1388–1393.
29. *Berczes T., Sztrik J., Toth A., Nazarov A.A.* Performance Modeling of Finite-Source Retrial Queueing Systems with Collisions and Non-Reliable Server Using MOSEL // *Communications in Comput. and Inform. Sci.* 2017. V. 700. P. 248–258.
30. *Neuts M.F.* *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach.* Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.
31. *Mitrani I., Chakka R.* Spectral Expansion Solution for a Class of Markov Models: Application and Comparison with the Matrix-Geometric Method // *Performance Evaluation.* 1995. V. 23. P. 241–260.
32. *Nazarov A., Melikov A., Pavlova E., et al.* Analyzing an M|M|N Queueing System with Feedback by the Method of Asymptotic Analysis // *Cybern. Syst. Anal.* 2021. V. 57. No. 1. P. 57–65. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00329-x>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 02.11.2021

После доработки 02.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. Л.Т. АЩЕПКОВ, д-р физ.-мат. наук (ashchepkov@yahoo.com)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА С АМПЛИТУДНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Рассматривается стационарная задача оптимального управления нового линейно-квадратичного типа на полуоси времени с амплитудным ограничением на управление. С помощью достаточных условий оптимальности находится оптимальное позиционное управление с разрывом на подпространстве фазового пространства. Исследуется движение доопределенной системы по подпространству в скользящем режиме. Показана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы. Приведены примеры.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача линейно-квадратичного типа, оптимальный синтез, скользящий режим, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231022070030, EDN: ADTRWW

1. Введение

Задача аналитического построения регулятора с момента появления первых публикаций [1, 2] стала предметом многочисленных исследований благодаря широкому применению в технических приложениях. Обзор опубликованных работ служит предметом отдельного серьезного исследования и не входит в цели настоящей статьи. Отметим лишь, что аналитическое и численное решение задачи при дополнительных ограничениях на управление значительно усложняется (см., например, [3–7]). Причины усложнения состоят в нелинейности и разрывности управлений типа обратной связи и трудности описания скользящих режимов на различных пересечениях поверхностей разрыва управлений.

Исследованию одной из таких задач посвящена настоящая статья. Рассматривается задача оптимального управления линейно-квадратичного типа на полуоси времени с ограниченной евклидовой нормой управления. Новым элементом в постановке задачи служит целевой функционал, который наряду с традиционным квадратичным отклонением траектории от начала координат учитывает ее отклонение от подпространства R разрыва оптимального управления. Это подпространство естественно появляется при аналитическом решении задачи с помощью достаточных условий оптимальности [8]. Анализ показывает, что подпространство R состоит из двух взаимно дополняющих

друг друга множеств. Первое из них прошивается траекториями замкнутой системы без односторонних касаний. Второе множество заполняется траекториями скольжения, ведущими в начало координат. В целом замкнутая система с дополнительными уравнениями скольжения экспоненциально устойчива.

В теории систем с переменной структурой разрывные позиционные управления специально вводятся в систему для создания устойчивых и мало чувствительных к возмущениям скользящих движений [9]. Вопросы оптимальности управлений при этом обычно не рассматриваются или отодвигаются на второй план. В данном случае новизна предлагаемого подхода состоит в том, что требования существования и устойчивости скользящих движений формулируются на уровне постановки задачи и непосредственно закладываются в ее условия. При минимизации функционала из множества возможных позиционных управлений выделяется единственное оптимальное управление с нужными свойствами. Тем самым исключается произвол в выборе управления.

Остановимся еще на одном моменте, связанном с постановкой задачи. Выбор в качестве области управления U шара не случаен и обусловлен тем, что оптимальное управление в этом случае определено и непрерывно на всем фазовом пространстве, исключая подпространство R . Это значительно упрощает описание и анализ скользящих движений. Технически шар U легко заменить эллипсоидом, чтобы учесть разномасштабные координаты управления. Вместе с тем обобщение результатов на области управления с негладкими границами, например многогранники, нетривиально из-за сложности описания скользящих режимов на различных пересечениях плоскостей разрыва управления.

2. Постановка задачи

Объектом нашего внимания будет задача оптимального управления

$$(1) \quad J = \int_0^{\infty} (x(t)'Cx(t) + 2 \|B'Lx(t)\|) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0, \quad \|u\| \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Здесь $A, C, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянные матрицы с уточненными далее свойствами; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — постоянная матрица ранга $m \leq n$; $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ — переменный и фиксированный фазовые векторы, $x_0 \neq 0$; $\dot{x} = dx/dt$; $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления со значениями в шаре U , заданном неравенством $\|u\| \leq 1$. Во всех операциях используются векторы-столбцы; штрих — знак транспонирования; $\|u\| = (u'u)^{1/2}$ — евклидова норма вектора u . Равенство $x(\infty) = 0$ понимается в предельном смысле: $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Примем дополнительные предположения: матрица L удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Ляпунова

$$(2) \quad A'L + LA + C = 0;$$

все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части; матрица C симметричная и положительно определенная. Последние два условия необходимы и достаточны [10] для существования, единственности, симметричности и положительной определенности матрицы L .

Непрерывную кусочно-гладкую *траекторию* $x(t)$, $t \geq 0$, и кусочно-непрерывное *управление* $u(t)$, $t \geq 0$, назовем *процессом*, если пара $x(t)$, $u(t)$ отвечает условиям (1), исключая, возможно, первое требование, и соответствующее значение функционала J конечно. Задача состоит в отыскании среди всех процессов *оптимального процесса* с наименьшим значением целевого функционала.

Отметим, что квадратичная форма $x' L x$ является функцией Ляпунова экспоненциально устойчивой однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$.

3. Синтез оптимальной системы

Для решения задачи воспользуемся достаточными условиями оптимальности [8]. С использованием формулы Лейбница–Ньютона представим целевой функционал на произвольном фиксированном процессе $x(t)$, $u(t)$ в виде

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)' C x(t) + 2 \|B' L x(t)\|) dt + \int_0^{\infty} (x(t)' L x(t))' dt - x(t)' L x(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Выполним во втором интеграле дифференцирование по t . Учитывая краевые условия (1), равенство (2) и соотношения

$$L' = L, \quad x' L A x = (x' L A x)' = x' A' L x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x(t)' C x(t) + 2 \|B' L x(t)\|) dt + \int_0^{\infty} 2x(t)' L (A x(t) + B u(t)) dt + x_0' L x_0 = \\ &= x_0' L x_0 + \int_0^{\infty} x(t)' (A' L + L A + C) x(t) dt + 2 \int_0^{\infty} (\|B' L x(t)\| + x(t)' L B u(t)) dt = \\ &= x_0' L x_0 + 2 \int_0^{\infty} (\|B' L x(t)\| + (B' L x(t))' u(t)) dt. \end{aligned}$$

Найдем нижнюю оценку целевого функционала. Имеем

$$\begin{aligned} J &= x_0' L x_0 + 2 \int_0^{\infty} (\|B' L x(t)\| + (B' L x(t))' u(t)) dt \geq \\ &\geq x_0' L x_0 + 2 \int_0^{\infty} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{\|u\| \leq 1} (\|B' L x\| + (B' L x)' u) dt. \end{aligned}$$

В силу известного неравенства Коши–Буняковского минимизируемая по u функция под знаком интеграла на шаре $\|u\| \leq 1$ неотрицательна и равна нулю при

$$(3) \quad u(x) = -\frac{B'Lx}{\|B'Lx\|}, \quad B'Lx \neq 0.$$

В результате нижняя оценка функционала примет вид

$$(4) \quad J = x_0' Lx_0 + 2 \int_0^{\infty} \left(\|B'Lx(t)\| + (B'Lx(t))' u(t) \right) dt \geq x_0' Lx_0.$$

Как видно, позиционное управление (3) определено и непрерывно на всем фазовом пространстве, за исключением точек x подпространства R , заданного уравнением $B'Lx = 0$.

Прежде чем установить точность нижней оценки (4), введем в рассмотрение замкнутую управлением (3) систему уравнений

$$(5) \quad \dot{x} = Ax + Bu(x)$$

и выясним поведение ее траекторий в малой окрестности подпространства R . Обозначим через

$$\dot{s}(x, u) = B'L(Ax + Bu)$$

производную векторной функции $s(x) = B'Lx$ в силу системы дифференциальных уравнений (1). Определим в подпространстве R два множества S и P :

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow (0 \in \dot{s}(x, U), B'Lx = 0), \\ x \in P &\Leftrightarrow (0 \notin \dot{s}(x, U), B'Lx = 0). \end{aligned}$$

Здесь символом $\dot{s}(x, U)$ обозначена область значений функции $\dot{s}(x, u)$ на шаре U при фиксированном x . Согласно первому определению точка x принадлежит S в том и только в том случае, если $B'Lx = 0$ и найдется вектор $v(x) \in U$ со свойством $B'L(Ax + Bv(x)) = 0$. С учетом невырожденности матрицы $B'LB$ представим включение $x \in S$ в равносильной форме

$$(6) \quad v(x) = -(B'LB)^{-1} B'LAx, \quad \|v(x)\| \leq 1, \quad B'Lx = 0.$$

Отсюда следуют очевидные свойства множества S — выпуклость, замкнутость и симметричность относительно начала координат. Эти свойства проверяются непосредственно. Например, чтобы убедиться в выпуклости S , достаточно показать, что из включений $x, y \in S$ вытекает $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in S$ при $\lambda \in [0, 1]$. Действительно, в силу выполнения соотношений (6) для x, y , свойств нормы и условия $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} v(z) &= v((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)v(x) + \lambda v(y) = -(B'LB)^{-1} B'LAz, \\ \|v(z)\| &= \|(1 - \lambda)v(x) + \lambda v(y)\| \leq (1 - \lambda)\|v(x)\| + \lambda\|v(y)\| \leq 1, \\ B'Lz &= B'L((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)B'Lx + \lambda B'Ly = 0, \end{aligned}$$

т.е. $z \in S$. Соответствующие управлению (6) траектории замкнутой системы уравнений

$$(7) \quad \dot{x} = Ax + Bv(x), \quad B'Lx = 0,$$

исходящие из точек множества S , лежат в S . В связи с этим назовем S *областью скольжения* и (7) — *уравнениями скольжения*.

Рассмотрим подробнее множество P . Пусть x — произвольная фиксированная точка P , в которой $B'Lx = 0$ и $0 \notin \dot{s}(x, U)$. По определению множество $\dot{s}(x, U)$ выпуклое, замкнутое и ограниченное. Применим к множествам $\dot{s}(x, U)$ и 0 теорему об отделимости [11]. Согласно этой теореме найдется зависящий от x ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий неравенству $c'\dot{s}(x, U) < 0$, или в подробной записи

$$(8) \quad c'B'L(Ax + Bu) < 0, \quad u \in U.$$

В геометрической трактовке неравенство (8) означает, что в точке $x \in P$ все векторы скорости $\dot{x} = Ax + Bu$, $u \in U$, имеют отрицательные проекции на вектор $c'B'L \neq 0$. В частности, если при малом $\varepsilon > 0$ непрерывное решение $x(t)$, $|t - \tau| \leq \varepsilon$ замкнутой системы (5) имеет в точке $x(\tau) = x$ односторонние производные

$$\dot{x}(\tau \pm 0) = Ax(\tau) + Bu(x(\tau \pm 0)),$$

то проекции векторов $\dot{x}(\tau \pm 0)$ на вектор $c'B'L$ тоже отрицательны. Тогда из соображений непрерывности, условия $x(\tau) = x \in P$ и достаточной малости $\varepsilon > 0$ следует, что

$$c'B'Lx(\tau - \varepsilon) = c'B'L(x(\tau - \varepsilon) - x(\tau)) = -\varepsilon c'B'L\dot{x}(\tau - 0) + o(\varepsilon) > 0,$$

$$c'B'Lx(\tau + \varepsilon) = c'B'L(x(\tau + \varepsilon) - x(\tau)) = \varepsilon c'B'L\dot{x}(\tau + 0) + o(\varepsilon) < 0,$$

где $o(\varepsilon)$ — малая порядка выше ε . Значит, траектория $x(t)$ пересекает плоскость $c'B'Lx = 0$ в точке $x(\tau)$ без односторонних касаний. Так как плоскость $c'B'Lx = 0$ содержит P и $x \in P$, то траектория $x(t)$ одновременно пересекает множество P в точке $x(\tau) = x$. В силу произвольности x последний вывод верен для любой точки P .

Множество P назовем *областью прошивания*. Как видно из сказанного, условие $x \in P$ достаточно для того, чтобы проходящая через точку x траектория замкнутой системы (5) прошивала подпространство R разрыва управления (3).

Итак, в зависимости от положения начальной точки x_0 непрерывная траектория замкнутой системы (5) может пересекать область прошивания $P \subset R$ без односторонних касаний и частично лежать в области скольжения $S \subset R$. Движение в скользящем режиме описывается уравнениями скольжения (7).

Вернемся к проверке точности оценки (4). Обозначим через $x(t)$ непрерывную траекторию, определенную на полуоси $t \geq 0$ уравнениями замкнутой системы (5), (7) и начальным условием $x(0) = x_0$. Выделим на полуоси времени множества T_1, T_2, T_3 , полагая

$$t \in T_1 \Leftrightarrow x(t) \notin R; \quad t \in T_2 \Leftrightarrow x(t) \in S; \quad t \in T_3 \Leftrightarrow x(t) \in P.$$

Если $t \in T_1$, то на основании (2), (3), (5) получим

$$\begin{aligned} (x(t)'Lx(t))^\bullet &= 2x(t)'L(Ax(t) + Bu(x(t))) = \\ &= x(t)'(A'L + LA)x(t) - 2\|B'Lx(t)\| \leq -x(t)'Cx(t). \end{aligned}$$

Если $t \in T_2$, то в силу (2), (6), (7) точно так же находим

$$\begin{aligned} (x(t)'Lx(t))^\bullet &= 2x(t)'L(Ax(t) + Bv(x(t))) = \\ &= x(t)'(A'L + LA)x(t) + 2(B'Lx(t))'v(x(t)) = -x(t)'Cx(t). \end{aligned}$$

Приведенные выкладки показывают, что неравенство

$$(9) \quad (x(t)'Lx(t))^\bullet \leq -x(t)'Cx(t)$$

имеет место во всех точках гладкости траектории $x(t)$, $t \geq 0$, за возможным исключением моментов $t \in T_3$ и момента первого попадания траектории в область S . Из неравенства (9) с учетом положительной определенности матрицы L и теоремы Вейерштрасса получим

$$\frac{(x(t)'Lx(t))^\bullet}{x(t)'Lx(t)} \leq -\frac{x(t)'Cx(t)}{x(t)'Lx(t)} \leq -\min_{\|x\|=1} \frac{x'Cx}{x'Lx} = -\alpha < 0, \quad t \geq 0.$$

Отсюда путем интегрирования неравенства по t в пределах от нуля до t находим

$$\ln x(t)'Lx(t) - \ln x_0'Lx_0 \leq -\alpha t.$$

Следовательно,

$$(10) \quad x(t)'Lx(t) \leq x_0'Lx_0 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Оценка (10) свидетельствует об экспоненциальной устойчивости замкнутой системы (5), (7) при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и влечет выполнение предельного соотношения $x(\infty) = 0$.

На процессе $x(t)$, $u(t)$ с управлением

$$\begin{aligned} u(t) &= -B'Lx(t)/\|B'Lx(t)\|, \quad t \in T_1; \\ u(t) &= -(B'LB)^{-1}B'LAx(t), \quad t \in T_2, \end{aligned}$$

нижняя оценка (4) целевого функционала достигается. Действительно, в этом случае при $t \in T_1$ подынтегральная функция в неравенстве (4) равна нулю на основании определения управления $u(t)$ и при $t \in T_2 \cup T_3$ — вследствие выполнения равенства $B'Lx(t) = 0$. По построению множества T_1, T_2, T_3 не пересекаются, и их объединение совпадает с полуосью $t \geq 0$, поэтому интеграл в неравенстве (4) равен нулю. Значит, процесс $x(t), u(t)$ — оптимальный.

Подведем итоги. Если условия задачи (1) отвечают перечисленным в разделе 2 предположениям, то при любом x_0 решение задачи существует. Оптимальное позиционное управление (3) кусочно-непрерывное с разрывом на подпространстве R . В дополняющих друг друга областях P, S подпространства R выполнены соответствующие достаточные условия прошивания и скольжения. В области скольжения управление $v(x)$ непрерывное и допустимое по амплитудному ограничению (1). Уравнения скольжения (7) линейны и линейно зависимы. Замкнутая система (5), (7) экспоненциально устойчива. Минимум целевого функционала равен $x'_0 L x_0$.

Приведенные выводы и точная нижняя оценка (4) целевого функционала дают ответ на вопрос, в каком случае пробный процесс $y(t), u(t) \equiv 0$, соответствующий задаче Коши $\dot{y} = Ay$ с начальными значениями $y = x_0, t = 0$ оптимален в задаче (1). Для этого процесса на основании оценки (4) имеем

$$(11) \quad J = x'_0 L x_0 + 2 \int_0^{\infty} \|B'Ly(t)\| dt \geq x'_0 L x_0.$$

В силу неотрицательности и непрерывности подынтегральной функции $\|B'Ly(t)\|$ равенство в оценке (11) возможно в том и только в том случае, если $B'Ly(t) \equiv 0, t \geq 0$. При нарушении данного условия, хотя бы в один момент $t \geq 0$, пробный процесс удовлетворяет строгому неравенству (11), т.е. не оптимален. Другими словами, по функционалу (1) пробный процесс оптимален в том и только в том случае, если его траектория полностью лежит в области скольжения.

4. Примеры

В зависимости от матрицы B оптимальное управление (3) имеет разные аналитические свойства. Если B — квадратная невырожденная матрица, то оптимальное управление непрерывно на всем фазовом пространстве, за исключением начала координат. Режим скольжения отсутствует.

Если матрица B состоит из единственного столбца $b \neq 0$, то оптимальное управление

$$u(x) = -b'Lx / |b'Lx| = -\text{sign } b'Lx$$

— релейное с разрывом на плоскости $b'Lx = 0$. Области скольжения S и прошивания P заданы соответствующими условиями

$$(12) \quad |b'Lx| \leq b'Lb, \quad b'Lx = 0; \quad |b'Lx| > b'Lb, \quad b'Lx = 0.$$

Если векторы $b'L$ и $b'LA$ линейно независимы, то геометрически область скольжения представляет собой замкнутую полосу на плоскости $b'Lx = 0$, заключенную между двумя параллельными плоскостями $b'LAx = \pm b'Lb$. Уравнения скольжения имеют вид

$$\dot{x} = Ax + bv(x), \quad v(x) = -b'LAx/b'Lb, \quad b'Lx = 0.$$

Описания (12) областей скольжения и прошивания равносильны известным достаточным условиям существования скользящих режимов и прошивания [9] в терминах функции $s(x) = b'Lx$ и ее односторонних производных в силу замкнутой системы $\dot{x} = Ax + bu(x)$.

Поясним сказанное иллюстративным примером, в котором

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием приведенных выше формул находим оптимальное релейное управление $u(x_1, x_2) = -\text{sign}(x_1 - x_2)$ с разрывом на прямой $x_1 - x_2 = 0$, области скольжения $x_1 - x_2 = 0$, $|x_2| \leq 2$, прошивания $x_1 - x_2 = 0$, $|x_2| > 2$, и уравнения скольжения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + v(x_1, x_2), & \dot{x}_2 &= -2x_2 - v(x_1, x_2), \\ v(x_1, x_2) &= (x_1 - 2x_2)/2, & x_1 - x_2 &= 0, \quad |x_2| \leq 2. \end{aligned}$$

Эти уравнения приводятся к удобному для интегрирования виду

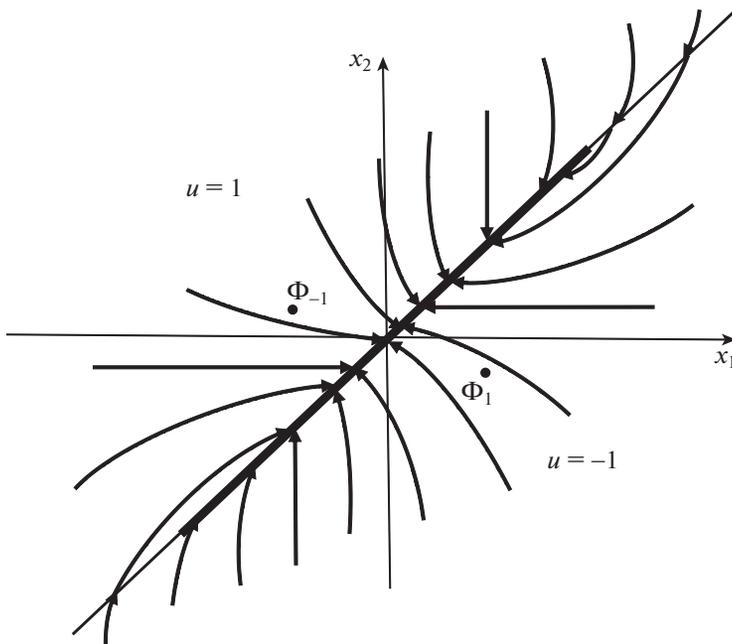
$$(13) \quad \dot{x}_1 = -3x_1/2, \quad \dot{x}_2 = -3x_2/2, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad |x_2| \leq 2$$

с помощью эквивалентных представлений $v(x_1, x_1) = -x_1/2$; $v(x_2, x_2) = -x_2/2$ управления $v(x_1, x_2)$ в области скольжения. При постоянном управлении $u = -1$ или $u = +1$ фазовая точка исходной системы дифференциальных уравнений с возрастанием времени движется к устойчивому фокусу $\Phi_{-1} = (-1, 1/2)$ или $\Phi_{+1} = (1, -1/2)$ по соответствующей параболе

$$x_2 = 1/2 + c_1(x_1 + 1)^2 \quad (u = -1); \quad x_2 = -1/2 + c_2(x_1 - 1)^2 \quad (u = +1).$$

Постоянные c_1 , c_2 определяются начальными значениями. Картина расположения оптимальных траекторий представлена на рисунке. Как видно из рисунка, на заключительном этапе оптимальное движение к началу координат происходит преимущественно в режиме скольжения.

Сравним по переходным периодам оптимальную траекторию $x(t) = (\xi e^{-3t/2}, \xi e^{-3t/2})$, $t \geq 0$, системы (13), исходящую в момент $t = 0$ из произвольной фиксированной точки $x = (\xi, \xi)$, $|\xi| \leq 2$, области скольжения с пробной траекторией $y(t) = (\xi e^{-t}, \xi e^{-2t})$, $t \geq 0$, описываемой при $u = 0$ исходными дифференциальными уравнениями с теми же начальными значениями. Переходными периодами считаем моменты времени t_1, t_2 первого попадания этих



Фазовый портрет оптимальной системы в примере. Жирной линией выделена область скольжения, по которой происходит движение в начало координат. Остальная часть прямой разрыва оптимального управления состоит из точек прошивания.

траекторий на границу квадрата $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ при малом положительном $\varepsilon < |\xi|$. Используя координатное представление траекторий $x(t)$, $y(t)$, после очевидных вычислений находим

$$t_1 = (2/3) \ln (|\xi| / \varepsilon); \quad t_2 = \ln (|\xi| / \varepsilon).$$

Очевидно, переходный период t_1 оптимальной траектории составляет $2/3$ переходного периода t_2 пробной траектории для любой начальной точки области скольжения. Так как пробная траектория не лежит в области скольжения, то в силу неравенства (11) она уступает оптимальной траектории еще и по целевому функционалу. Таким образом, в примере оптимальная траектория на участке скольжения лучше пробной траектории по переходному периоду и значению целевого функционала.

5. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления нового линейно-квадратичного типа на полуоси времени при ограничении на управление. С использованием матричного алгебраического уравнения Ляпунова и достаточных условий оптимальности получены простые аналитические выражения для разрывного оптимального позиционного управления и допол-

нительных уравнений скольжения в подпространстве разрыва управления. Установлена экспоненциальная устойчивость замкнутой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I // *АиТ.* 1960. № 4. С. 436–441.
2. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // *Тр. 1 Межд. конгресса ИФАК.* М.: АН СССР, 1961. Т. 1. С. 521–547.
3. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. Дальнейшее развитие проблемы. V // *АиТ.* 1962. № 11. С. 1405–1413.
4. *Фуллер А.Т.* Оптимизация линейных систем регулирования по различным критериям качества // *Тр. 1 Межд. конгресса ИФАК.* М.: АН СССР, 1961. Т. 1. С. 584–605.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С.* Построение программного и позиционного решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2008. Т. 48. № 10. С. 1748–1779.
6. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
7. *Антипин А.С., Хорошилова Е.В.* О краевой задаче терминального управления с квадратичным критерием качества // *Изв. Иркутского гос. ун-та.* 2014. Т. 8. С. 7–28.
8. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969.
9. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой: состояние, проблемы, перспективы // *АиТ.* 1983. № 9. С. 5–25.
10. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск: Томский ун-т, 1989.
11. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 21.10.2021

После доработки 15.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. П.В. ПРИСТУПА (pristupa@gmail.com),
С.П. СУЩЕНКО, д-р техн. наук (ssp.inf.tsu@gmail.com),
П.А. МИХЕЕВ, канд. техн. наук (doka.patrick@gmail.com),
А.Н. МОИСЕЕВ, д-р физ.-мат. наук (moiseev.tsu@gmail.com)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЯМОЙ КОРРЕКЦИИ ОШИБОК НА УРОВНЕ ТРАНСПОРТНОГО ПРОТОКОЛА¹

Предложена модель виртуального соединения, управляемого транспортным протоколом с механизмом прямого (опережающего) исправления ошибок в режиме селективного и группового повторов в виде цепи Маркова с дискретным временем. Проведен анализ влияния протокольных параметров размера окна и длительности тайм-аута ожидания подтверждений, достоверности передачи сегментов в транспортном соединении (тракте передачи данных), длительности круговой задержки и параметров механизма восстановления искаженных сегментов (без повторной передачи) на пропускную способность транспортного соединения. В признаковом пространстве протокольных параметров, характеристик тракта передачи и параметров механизма опережающего восстановления протокольных блоков данных найдены области превосходства управления процедурой транспортного протокола с опережающим исправлением ошибок перед классической процедурой с решающей обратной связью по критерию пропускной способности транспортного соединения.

Ключевые слова: транспортный протокол, тракт передачи данных, прямая коррекция ошибок, цепь Маркова, пропускная способность транспортного соединения, размер окна, длительность тайм-аута, круговая задержка, достоверность передачи.

DOI: 10.31857/S0005231022070042, EDN: AEGMVA

1. Введение

Важнейшим показателем качества взаимодействия сетевых приложений и используемого программно-технического обеспечения компьютерных сетей является пропускная способность транспортных соединений между взаимодействующими абонентами. Данная операционная характеристика в значительной мере определяется транспортным протоколом, его параметрами —

¹ Данное научное исследование выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ (НИР № 8.1.24.2019).

шириной окна и длительностью тайм-аута [1], а также дополнительными механизмами повышения быстродействия за счет снижения числа повторных передач искаженных данных [2–9]. Современные транспортные протоколы содержат широкое разнообразие механизмов поддержки высокого быстродействия транспортных соединений и обеспечения качества обслуживания за счет распределения информационного потока взаимодействующих абонентов по различным маршрутам [9, 11–14], предупреждения и обхода перегрузок на отдельных участках сетевой инфраструктуры [15] и применения методов прямой коррекции ошибок на стороне получателя [2–9].

В настоящее время получают распространение технологии прямой коррекции ошибок на различных уровнях сетевой архитектуры [6], применяемые как дополнительный сервис в транспортных протоколах наряду с методом решающей обратной связи для снижения объема повторно передаваемого трафика. Вопросы адаптивного встраивания технологии прямой коррекции ошибок в логику транспортного протокола TCP и согласования протокольных параметров с параметрами коррекции ошибок рассматриваются в [2]. На основе имитационного моделирования исследовано несколько сценариев работы TCP с механизмом прямой коррекции ошибок, основанным на простейшем коде четности. В [3] предложена модель транспортного соединения, управляемого транспортным протоколом TCP, через беспроводную среду передачи данных с коррелированными и некоррелированными потерями. Анализируется зависимость выигрыша в пропускной способности от относительных накладных расходов механизма прямой коррекции ошибок с помощью предложенной математической модели процесса передачи данных и имитационного моделирования. В [4] обсуждаются вопросы подключения логики механизма прямой коррекции ошибок с простейшей схемой поразрядного сложения на стороне отправителя и получателя для передачи мультимедийных файлов. На примере натуральных экспериментов показана целесообразность использования прямой коррекции ошибок. Преимущества применения сверточных турбо-кодов в приеме-передающей аппаратуре со схемным решением логики прямой коррекции ошибок и возможные ограничения их использования рассматриваются в [5]. Особенности применения методов прямой коррекции ошибок в протоколах реального времени для передачи мультимедийных потоков поверх IP обсуждаются в [7, 8] с коммуникацией по одному и нескольким [9] маршрутам. Оцениваются накладные расходы, трудоемкость восстановления утерянных данных, требования к быстродействию соединений и возможные ограничения использования различных кодеков и кодов коррекции. Приводятся результаты стендовых и экспериментальных испытаний. Дается рекомендация об использовании корректирующих кодов только в сценариях, где невозможны повторные передачи. В [10] анализируется эффективность различных схем обхода перегрузок на уровне транспортного протокола при взаимодействии с сетевыми ресурсами через беспроводные сети с высокой вариативностью длительности круговой задержки и уровня потерь протокольных блоков данных. Потенциально в таких сетях может быть полезным применение методов прямой коррекции ошибок.

Известные технологии прямой коррекции ошибок используются транспортным протоколом обычно как дополнительный сервис канального [3] либо транспортного уровней сетевой архитектуры [2, 4, 6]. Примером одной из модификаций транспортного протокола является подключаемый к транспортному протоколу дополнительный протокольный механизм QUIC (Quick UDP Internet Connections) [6]. Разработчики экспериментального протокола QUIC использовали операцию поразрядного паритета для реализации прямой коррекции ошибок и анализировали его эффективность только в натурных тестовых экспериментах [6]. Всесторонний анализ преимуществ и эффективности методов опережающего исправления ошибок [2–9] проводился только на качественном уровне, а также численно и в стендовых испытаниях для ряда частных сценариев и не позволил выделить области возможного применения методов в пространстве протокольных параметров и характеристик транспортного соединения. Таким образом, потенциальные возможности транспортного протокола с применением методов прямой коррекции ошибок все еще не изучены. Отсутствуют аналитические исследования зависимости комплексного влияния протокольных параметров, характеристик тракта передачи данных и параметров метода коррекции на результирующие операционные характеристики транспортного соединения. Не исследовано влияние соотношений между длительностью круговой задержки и протокольными параметрами на пропускную способность тракта передачи данных, управляемого транспортным протоколом с логикой прямой коррекции ошибок.

В статье предложена математическая модель процесса передачи данных транспортным протоколом с прямой коррекцией ошибок в фазе информационного переноса в виде цепи Маркова с дискретным временем, в аналитическом виде найдены стационарные распределения вероятностей состояний для режима группового и селективного отказов, получены аналитические соотношения для пропускной способности, на основе которых выполнен анализ потенциальных возможностей увеличения быстродействия транспортного соединения с помощью технологии прямой коррекции ошибок.

2. Модель транспортного соединения с логикой прямой коррекции ошибок

Рассмотрим процесс информационного переноса протокольных блоков данных транспортного уровня (сегментов) между абонентами надежного транспортного протокола, основанного на алгоритме с решающей обратной связью и функционирующего в режиме селективного либо группового отказа [1]. Примером семейства таких надежных протоколов является доминирующий в современных компьютерных сетях протокол TCP [1]. Полагаем, что взаимодействующие абоненты имеют неограниченный поток данных для передачи, а обмен выполняется сегментами одинаковой длины. Считаем, что участки переприема вдоль тракта передачи данных имеют одинаковое быстродействие в обоих направлениях, а длительность цикла передачи сегмента в отдельном звене составляет t . В общем случае длина пути от ис-

точника до адресата, переносящего информационный поток, и длина обратного пути, по которому передаются подтверждения на принятые сегменты, могут быть различными. Полагаем, что длина тракта передачи данных, выраженная в количестве участков переприема, в прямом направлении равна $D_f \geq 1$. Обратный тракт, по которому доставляются подтверждения отправителю о корректности приема последовательности блоков сегментов, имеет длину $D_r \geq 1$. Заданы вероятности искажения сегмента в каналах связи для прямого $R_f(d)$, $d = \overline{1, D_f}$, и обратного $R_r(d)$, $d = \overline{1, D_r}$, направлений передачи каждого участка переприема. Тогда достоверность передачи сегментов вдоль тракта от источника до адресата и обратно составят $F_f = \prod_{d=1}^{D_f} (1 - R_f(d))$ и $F_r = \prod_{d=1}^{D_r} (1 - R_r(d))$ соответственно.

Считаем, что потерь сегментов из-за отсутствия буферной памяти в узлах тракта не происходит. Полагаем, что классический транспортный протокол дополнен логикой межсегментной прямой коррекции ошибок. При этом передача данных отправителем реализуется блоками, содержащими B сегментов, из которых A являются информационными ($1 \leq A \leq B$), а $(B - A)$ — дополнительными (избыточными) той же длины. Потеря (искажение) до $B - A$ произвольных сегментов в блоке позволяет обнаружить ошибки и восстановить все сегменты блока (например, передачей дублей при $A = 1$, $B \geq 2$ или $B = 2A$, $A \geq 1$ отправкой избыточного сегмента с поразрядной четностью всех информационных сегментов по технологии RAID-массивов [16] при $A > 1$, $B = A + 1$ и др.). Поскольку для успешного восстановления информационных сегментов блока при получении необходимо, чтобы из B сегментов блока были успешно доставлены не менее A любых сегментов блока, а вероятность успешной доставки одиночного сегмента в прямом направлении F_f одинакова для всех сегментов, то вероятность успешной доставки блока выражается соотношением $\Psi = \sum_{i=A}^B \binom{B}{i} F_f^i (1 - F_f)^{B-i}$, задающим математическую модель широкого спектра механизмов прямой коррекции ошибок между сегментами блока.

Управление потоком данных реализуется механизмом скользящего окна [1] с протокольным параметром ширины окна $\omega \geq 1$, выраженным в количестве блоков. Полагаем, что подтверждения о корректности полученных адресатом блоков сегментов переносятся в каждом сегменте встречного потока. При невозможности прямого восстановления переданных сегментов блока (при искажении более $B - A$ сегментов в блоке) весь блок передается повторно. Тогда процесс информационного переноса в виртуальном соединении, управляемом транспортным протоколом, может быть описан марковским процессом с конечным числом состояний и дискретным временем (с длительностью такта t) в силу того, что время между получениями подтверждений имеет геометрическое распределение с параметром F_r . Данная модель является обобщением формализации процесса передачи данных классическим транспортным протоколом с решающей обратной связью, предложенного в [17], на случай транспортного соединения произвольной длины и применения в логике протокола механизма прямой коррекции ошибок. Цель

Маркова описывает активность абонента-отправителя и динамику очереди переданных, но неподтвержденных блоков сегментов в источнике (отправителе).

Область возможных состояний цепи Маркова определяется длительностью тайм-аута ожидания подтверждения S , выраженной в количестве циклов продолжительности t . Очевидно, что сумму длин прямого и обратного трактов можно интерпретировать как круговую задержку одиночного сегмента в детерминированном тракте $D = D_f + D_r$, выраженную в длительностях t . Круговая задержка блока сегментов определится конвейерной зависимостью [18] $D + B - 1$. Размер тайм-аута S связан с длиной тракта D , шириной окна ω и размером блока B неравенствами

$$S \geq B\omega + 1, \quad S \geq D + B - 1.$$

Исчерпывающее описание процесса передачи информационного потока с технологией прямой коррекции ошибок в режиме группового отказа задают переходные вероятности цепи Маркова π_{ij} из исходного состояния i в результирующее состояние j :

$$\pi_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1, i = \overline{0, D + B - 3}, j = i + 1, \\ 1 - F_r, i = \overline{D + B - 2, S - 2}, j = i + 1, \\ F_r \Psi^k, i = \overline{D + Bk - 2, D + B(k + 1) - 3}, \\ \quad k = \overline{1, \omega - K - 2}, j = i - Bk + 1, \omega \geq K + 2, \\ F_r \Psi^{\omega - K - 1}, i = \overline{D + B(\omega - K - 1) - 2, B\omega - 1}, \\ \quad j = i - B(\omega - K - 1) + 1, \omega \geq K + 2, \\ F_r \Psi^{\omega - K - 1}, i = \overline{B\omega, D + B(\omega - K) - 3}, j = B(K + 1), \omega \geq K + 2, \\ F_r \Psi^{\omega - k}, i = \overline{D + B(\omega - k) - 2, D + B(\omega - k + 1) - 3}, \\ \quad j = Bk, k = \overline{1, K}, \omega \geq K + 2, \\ F_r(1 - \Psi^k), i = \overline{D + Bk - 2, D + B(k + 1) - 3}, \\ \quad k = \overline{1, \omega - 1}, j = 0, \omega \geq K + 2, \\ F_r \Psi^k, i = \overline{D + Bk - 2, D + B(k + 1) - 3}, \\ \quad k = \overline{1, \omega - 1}, j = B(\omega - k), \omega \leq K + 1, \\ F_r(1 - \Psi^k), i = \overline{D + Bk - 2, D + B(k + 1) - 3}, \\ \quad k = \overline{1, \omega - 1}, j = 0, \omega \leq K + 1, \\ F_r, i = \overline{D + B\omega - 2, S - 2}, j = 0, \\ 1, i = S - 1, j = 0. \end{array} \right.$$

Здесь

$$K = \lfloor \frac{D-2}{B} \rfloor,$$

где $\lfloor \dots \rfloor$ — означает “целая часть” дроби. При селективном режиме повтора переходные вероятности цепи Маркова инвариантны к вероятности корректной доставки сегментов получателю. Тогда, положив $F_f = 1$, отсюда нетрудно получить вероятности переходов для селективного режима отказа.

Состояниям цепи Маркова $i = \overline{0, B\omega}$ соответствует размер очереди переданных, но неподтвержденных сегментов в источнике потока, а состояниям $i = \overline{B\omega + 1, S - 1}$ — время, в течение которого отправитель не активен и ожидает получения подтверждения о корректности приема переданной последовательности из ω блоков сегментов. Из нулевого состояния в состояние $D + B - 2$ источник продвигается с каждым тактом t с вероятностью детерминированного события. В состояниях $i \geq D + B - 2$ после истечения очередного дискретного цикла t к отправителю начинают прибывать подтверждения и, в зависимости от результатов доставки блоков сегментов с учетом технологии прямой коррекции ошибок, отправитель передает новые блоки сегментов (при положительном подтверждении) либо повторно — искаженные (не поддающиеся прямому восстановлению). Завершение цикла пребывания в состоянии $D + B - 2$ соответствует времени доведения первого блока сегментов до адресата и получения на него подтверждения. Дальнейший рост номера состояния происходит с вероятностью искажения подтверждения $1 - F_r$ в обратном тракте. В состояниях $i \geq D + B - 2$ в режиме селективного отказа получение подтверждения (с вероятностью F_r) порождает возврат из состояний $i = \overline{D + Bk - 2, D + B(k + 1) - 3, k = \overline{1, \omega - K - 2}}$, в состояния $j = i - Bk + 1$ при $\omega \geq K + 2$ или в состояние $B(\omega - k), k = \overline{1, \omega - 1}$ при $\omega \leq K + 1$.

В режиме группового повтора данные переходы выполняются при дополнительном условии корректного приема блоков сегментов, достигших адресата к данному моменту, в противном случае следует переход в нулевое состояние. В силу того что в состояниях $i \geq B\omega$ источник приостанавливает отправку блоков сегментов, получение подтверждений при $\omega \geq K + 2$ в состояниях $i = \overline{D + B(\omega - k) - 2, D + B(\omega - k + 1) - 3, B\omega, D + B(\omega - K) - 3, k = \overline{1, K}}$, приводит к сокращению очереди отправленных, но неподтвержденных сегментов, и переходу в состояния Bk и $B(K + 1)$. При $\omega \leq K + 1$ из состояний $i = \overline{D + Bk - 2, D + B(k + 1) - 3, k = \overline{1, \omega - 1}}$, происходит переход в состояния $B(\omega - k)$. В состояниях $i = \overline{D + B\omega - 2, S - 2}$ при получении подтверждения выполняется переход в нулевое состояние, поскольку размер очереди переданных, но неподтвержденных сегментов при этом обнуляется. В состоянии $S - 1$ истекает тайм-аут ожидания подтверждения от получателя о корректности принятых блоков сегментов и происходит безусловный переход в нулевое состояние.

Основной операционной характеристикой транспортного соединения, обсуждаемой далее, является пропускная способность, определяемая значе-

ниями протокольных параметров, характеристик тракта передачи, параметров механизма прямой коррекции ошибок и вероятностями состояний цепи Маркова.

3. Вероятностные характеристики процесса передачи

Разнообразие вида решения системы уравнений равновесия для вероятностей состояний цепи Маркова определяется соотношениями между протокольными параметрами w , S , параметром размера блока B и общей длиной тракта D . Так как длительность тайм-аута должна превышать ширину окна ($S > B\omega$) и быть не короче круговой задержки блока сегментов ($S \geq D + B - 1$), то выделяются различные варианты систем уравнений равновесия и решений для различных областей изменения значений протокольных параметров. Для ширины окна и длительности тайм-аута, связанных с общей длиной тракта неравенствами вида

$$(1) \quad \omega \geq K + 2, \quad S \geq D + B\omega - 1,$$

система уравнений локального равновесия записывается так:

$$(2) \quad P_0 = P_{S-1} + F_r \left(\sum_{k=1}^{\omega-1} (1 - \Psi^k) \sum_{i=D+Bk-2}^{D+B(k+1)-3} P_i + \sum_{i=D+B\omega-2}^{S-2} P_i \right),$$

$$(3) \quad P_i = P_{i-1}, \quad i = \overline{B(k-1) + 1, Bk - 1}, \overline{BK + 1, D - 2}, \quad k = \overline{1, K},$$

$$(4) \quad P_{Bk} = P_{Bk-1} + F_r \Psi^{\omega-k} \sum_{i=D+B(\omega-k)-2}^{D+B(\omega-k+1)-3} P_i, \quad k = \overline{1, K},$$

$$(5) \quad P_i = P_{i-1} + F_r \sum_{k=1}^{\omega-K-1} \Psi^k P_{i+Bk-1}, \quad i = \overline{D - 1, B(K + 1) - 1},$$

$$P_{B(K+1)} = P_{B(K+1)-1} +$$

$$(6) \quad + F_r \left(\sum_{k=1}^{\omega-K-1} \Psi^k P_{B(K+k+1)-1} + \Psi^{\omega-K-1} \sum_{i=B\omega}^{D+B(\omega-K)-3} P_i \right),$$

$$(7) \quad P_i = P_{i-1} + F_r \sum_{k=1}^{\omega-K-2} \Psi^k P_{i+Bk-1}, \quad i = \overline{B(K + 1) + 1, D + B - 2},$$

$$(8) \quad P_i = P_{i-1}(1 - F_r), \quad i = \overline{D + B - 1, S - 1}.$$

С учетом условия нормировки решение данной системы определяется соотношениями:

$$(9) \quad P_i = \begin{cases} P_0 \frac{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-k}}{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}}, & i = \overline{B(k-1), Bk-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ P_0 \frac{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-K-1}}{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}}, & i = \overline{BK, D-2}; \\ P_0 \frac{1 - \Phi^{\omega-K} - \Psi(1 - \Phi^{\omega-K-1})(1 - F_r)^{i-D+2}}{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}}, & i = \overline{D-1, B(K+1)-1}; \\ P_0 \frac{1 - \Phi^{\omega-K-1} - \Psi(1 - \Phi^{\omega-K-2})(1 - F_r)^{i-D+2}}{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}}, & i = \overline{B(K+1), D+B-2}; \\ P_0 \frac{(1 - \Phi)(1 - F_r)^{i-D-B+2}}{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}}, & i = \overline{D+B-1, S-1}; \\ F_r(1 - \Phi)(1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}) / \left[\left((1 - \Phi)[B + (D-1)(1 - \Psi)] - \right. \right. \\ \left. \left. - B\Phi^{\omega-K}[1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^K] - \right. \right. \\ \left. \left. - (D - BK - 1)(1 - \Phi)(1 - \Psi)\Phi^{\omega-K-1} \right) F_r + \right. \\ \left. + (1 - F_r)(1 - \Phi)(1 - \Psi)(1 - \Phi^{\omega-K-1}) + \right. \\ \left. (1 - \Phi)^2 \left(\Phi^{\omega-K-1}(1 - F_r)^{BK-D+2} - (1 - F_r)^{S-D-B+2} \right) \right], & i = 0, \end{cases}$$

где $\Phi = \Psi(1 - F_r)^B$.

Если ширина окна w превалирует над длительностью круговой задержки, выраженной в интервалах передачи блока сегментов (Bt) , а область значений длительности тайм-аута S имеет интервальные ограничения

$$(10) \quad \omega \geq K + 2, \quad D + B(\omega - K) - 1 \leq S \leq D + B\omega - 1,$$

то уравнение равновесия (2) исходной системы (2)–(8) преобразуется к

$$P_0 = P_{S-1} + F_r \left(\sum_{k=1}^M (1 - \Psi^k) \sum_{i=D+Bk-2}^{D+B(k+1)-3} P_i + (1 - \Psi^{M+1}) \sum_{i=D+B(M+1)-2}^{S-2} P_i \right).$$

Здесь $M = \lfloor (S - D + 1)/B \rfloor - 1$ — расстояние между последним условно возвратным состоянием цепи Маркова $S - 2$ и состоянием $D + B - 2$, в котором отправителю начинают поступать подтверждения. Уравнение (3) справедливо для значений индексов $i = \overline{1, B(\omega - M - 1) - 1, B(k - 1) + 1, Bk - 1, BK + 1, D - 2}$, $k = \overline{\omega - M, K}$, а (4) принимает вид

$$P_{B(\omega-M-1)} = P_{B(\omega-M-1)-1} + F_r \Psi^{M+1} \sum_{i=D+B(M+1)-2}^{S-2} P_i,$$

$$P_{Bk} = P_{Bk-1} + F_r \Psi^{\omega-k} \sum_{i=D+B(\omega-k)-2}^{D+B(\omega-k+1)-3} P_i, \quad k = \overline{\omega - M, K}.$$

Решение результирующей системы уравнений равновесия определяется соотношениями

$$(11) \quad P_i = \left\{ \begin{array}{l} P_0, \quad i = \overline{1, (\omega - M - 1) - 1}; \\ P_0 \frac{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-k}}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1} + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1})}, \\ \quad i = \overline{B(k-1), Bk-1}, \quad k = \overline{\omega - M, K}; \\ P_0 \frac{1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-K-1}}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1} + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1})}, \\ \quad i = \overline{BK, D-2}; \\ P_0 \frac{1 - \Phi^{\omega-K} - \Phi(1 - \Phi^{\omega-K-1})F_r^{i-D-B+2}}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1} + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1})}, \\ \quad i = \overline{D-1, B(K+1)-1}; \\ P_0 \frac{1 - \Phi^{\omega-K} - \Phi(1 - \Phi^{\omega-K-2})F_r^{i-D-B+2}}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1} + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1})}, \\ \quad i = \overline{B(K+1), D+B-2}; \\ P_0 \frac{(1 - \Phi)F_r^{i-D-B+2}}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1} + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1})}, \\ \quad i = \overline{D+B-1, S-1}; \\ F_r(1 - \Phi)((1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1}) / \\ \quad / \left\{ BF_r \left[(1 - \Phi)(1 + (K + M - \omega + 1)(1 - \Psi)) - \right. \right. \\ \quad \left. \left. - (1 - \Psi)\Phi^{\omega-K} - (\Psi - \Phi)\Phi^{M+1} + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + (\omega - M - 1)(1 - \Phi) \left[\Psi^{M+1}(1 - \Phi)(1 - F_r)^{S-D-B+1} + \right. \right. \right. \\ \quad \left. \left. \left. + (1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) \right] \right] + (1 - \Psi)(1 - \Phi)(1 - \Phi^{\omega-K-1}) \times \right. \\ \quad \left. \times [1 + (D - BK - 2)F_r] - (1 - \Phi)^2 \left[(1 - F_r)^{S-D-B+2} - \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \Phi^{\omega-K-1}(1 - F_r)^{BK-D+2} \right] \right\}, \quad i = 0. \end{array} \right.$$

При ограничениях на протокольные параметры вида

$$(12) \quad 1 \leq \omega \leq K + 1, \quad S \geq D + B\omega - 1$$

динамика очереди переданных, но неподтвержденных блоков сегментов данных описывается уравнениями равновесия (2), (8), уравнением (3) для набора значений индексов $i = \overline{Bk + 1, B(k + 1) - 1, B(\omega - 1) + 1, D + B - 2}$, $k = \overline{0, \omega - 2}$ и уравнением (4) для значений индекса $k = \overline{1, \omega - 1}$. Вероятности состояний цепи Маркова при этом имеют подмножество $i = \overline{B(\omega - 1), D + B - 2}$ значений, инвариантных к номеру состояния:

$$(13) \quad P_i = \begin{cases} P_0 \frac{1 - \Psi + \Phi^{\omega-k-1}(\Psi - \Phi)}{1 - \Psi + \Phi^{\omega-1}(\Psi - \Phi)}, & i = \overline{Bk, B(k + 1) - 1, k = \overline{0, \omega - 2}}; \\ P_0 \frac{1 - \Phi}{1 - \Psi + \Phi^{\omega-1}(\Psi - \Phi)}, & i = \overline{B(\omega - 1), D + B - 2}; \\ P_0 \frac{(1 - \Phi)(1 - F_r)^{i-D-B+2}}{1 - \Psi + \Phi^{\omega-1}(\Psi - \Phi)}, & i = \overline{D + B - 1, S - 1}; \\ F_r(1 - \Psi + \Phi^{\omega-1}(\Psi - \Phi)) / \left\{ (B\omega - 1)(1 - \Psi)F_r - F_r(\Psi - \Phi) \times \right. \\ \quad \times \left(1 - B \frac{1 - \Phi^\omega}{1 - \Phi} \right) + (1 - \Phi) \left[1 + (D - B(\omega - 1) - 1)F_r - \right. \\ \quad \left. \left. - (1 - F_r)^{S-D-B+2} \right] \right\}, & i = 0. \end{cases}$$

В случае интервальных ограничений на оба протокольных параметра

$$(14) \quad 1 \leq \omega \leq K + 1, \quad D + B - 1 \leq S \leq D + B\omega - 1$$

уравнения (2)–(7) исходной системы уравнений равновесия (2)–(8) принимают вид:

$$P_0 = P_{S-1} + F_r \left(\sum_{k=1}^M (1 - \Psi^k) \sum_{i=D+Bk-2}^{D+B(k+1)-3} P_i + (1 - \Psi^{M+1}) \sum_{i=D+B(M+1)-2}^{S-2} P_i \right),$$

$$P_i = P_{i-1}, \quad i = \overline{1, B(\omega - M - 1) - 1},$$

$$P_{B(\omega-M-1)} = P_{B(\omega-M-1)-1} + F_r \Psi^{M+1} \sum_{i=D+B(M+1)-2}^{S-2} P_i,$$

$$P_i = P_{i-1}, \quad i = \overline{B(\omega - k) + 1, B(\omega - k + 1) - 1},$$

$$\overline{B(\omega - 1) + 1, D + B - 2}, \quad k = \overline{2, M + 1}.$$

Решение системы уравнений локального равновесия определится зависимостями с двумя подмножествами ($i = \overline{0, B(\omega - M - 1) - 1, B(\omega - 1), D + B - 2}$)

значений вероятностей состояний, не зависящих от номера состояния:

$$(15) \quad P_i = \left\{ \begin{array}{l} P_0, \quad i = \overline{1, B(\omega - M - 1) - 1}; \\ P_0 \frac{1 - \Psi + \Phi^{k-1}(\Psi - \Phi)}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + (1 - \Phi)(1 - F_r)^{S-D-B+1}}, \\ \quad i = \overline{Bk, B(k+1) - 1}, \quad k = \overline{\omega - M - 1, \omega - 2}; \\ P_0 \frac{1 - \Phi}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + (1 - \Phi)(1 - F_r)^{S-D-B+1}}, \\ \quad i = \overline{B(\omega - 1), D + B - 2}; \\ P_0 \frac{(1 - \Phi)(1 - F_r)^{i-D-B+2}}{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + (1 - \Phi)(1 - F_r)^{S-D-B+1}}, \\ \quad i = \overline{D + B - 1, S - 1}; \\ F_r(1 - \Phi) \left[(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + (1 - \Phi)(1 - F_r)^{S-D-B+1} \right] / \\ \left(B(\omega - M - 1)F_r(1 - \Phi) \left[(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \Phi)(1 - F_r)^{S-D-B+1} \right] + \right. \\ \left. + BF_r \left[(M + 1)(1 - \Psi)(1 - \Phi) + (\Psi - \Phi)(1 - \Phi^{M+1}) \right] + \right. \\ \left. + (1 - \Phi)^2 \left[1 + (D - B(\omega - 1) - 2)F_r - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - F_r)^{S-D-B+2} \right] \right), \quad i = 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова для различных значений ширины окна ω , длительности тайм-аута S , общей длины тракта передачи данных D и размера блока B (1), (10), (12), (14) определяется соотношениями (9), (11), (13) и (15) соответственно.

При $F_f = 1$ из данных соотношений получаем вероятности состояний цепи Маркова для селективного режима повтора. Нетрудно убедиться, что при $A = B = 1$ из (9), (11), (13) и (15) получаем известные распределения [17]. Для абсолютно надежного обратного тракта передачи данных ($F_r = 1$) распределение принимает вид двух равновероятных под-

$$\text{множеств } P_i = \frac{1 - \Psi}{B + (D - 1)(1 - \Psi)}, \quad i = \overline{0, D - 2}, \quad P_i = \frac{1}{B + (D - 1)(1 - \Psi)}, \\ i = \overline{D - 1, D + B - 2}, \quad \text{при } \omega \geq K + 2 \quad \text{и} \quad P_i = \frac{1 - \Psi}{D - 1 + B(1 - \Psi(\omega - 1))},$$

$i = \overline{0, B(\omega - 1) - 1}$, $P_i = \frac{1}{D - 1 + B(1 - \Psi(\omega - 1))}$, $i = \overline{B(\omega - 1), D + B - 2}$,
при $1 \leq \omega \leq K + 1$.

Неограниченный рост размера окна ($\omega \rightarrow \infty$) приводит к распределению вида

$$P_i = \begin{cases} \frac{F_r(1 - \Psi)}{F_r[B + (D - 1)(1 - \Psi)] + (1 - F_r)(1 - \Psi)}, & i = \overline{0, D - 2}, \\ \frac{F_r(1 - \Psi(1 - F_r)^{i-D+2})}{F_r[B + (D - 1)(1 - \Psi)] + (1 - F_r)(1 - \Psi)}, & i = \overline{D - 1, D + B - 2}, \\ \frac{F_r(1 - \Phi)(1 - F_r)^{i-D-B+2}}{F_r[B + (D - 1)(1 - \Psi)] + (1 - F_r)(1 - \Psi)}, & i \geq D + B - 1. \end{cases}$$

Минимальный размер окна ($\omega = 1$) дает распределение с равновероятным участком $P_i = \frac{F_r}{1 + F_r(D + B - 2) + (1 - F_r)^{S-D-B+2}}$, $i = \overline{0, D + B - 2}$ и вероятностями $P_i = \frac{F_r(1 - F_r)^{i-D-B+2}}{1 + F_r(D + B - 2) + (1 - F_r)^{S-D-B+2}}$, $i = \overline{D + B - 1, S - 1}$. При $1 \leq \omega \leq K + 1$ и минимальной длительности тайм-аута $S = D + B - 1$ распределение принимает равномерный вид: $P_i = \frac{1}{D + B - 1}$, $i = \overline{0, D + B - 2}$. Такое же распределение имеет место для набора параметров $\omega = 1$ и $F_r = 1$.

4. Анализ пропускной способности транспортного соединения

Важнейшей операционной характеристикой протокола является его пропускная способность, определяемая параметрами протокола и механизма прямой коррекции ошибок, накладными расходами, характеристиками тракта передачи данных, а также особенностями протокольных процедур управления передачей [1]. Нормированное быстродействие транспортного соединения определяется средним числом доставленных получателю неискаженных информационных сегментов (с учетом селективного или группового режимов повтора [1] и механизма прямого восстановления искаженных сегментов) за среднее время между двумя последовательными поступлениями подтверждений на переданные блоки сегментов [17]. В силу того что подтверждения на отправленные блоки переносятся в каждом сегменте встречного потока, время между приходами подтверждений на блоки сегментов распределено по геометрическому закону с параметром $1 - (1 - F_r)^B$ и длительностью дискретного цикла, равной Bt . Среднее время между приходами подтверждений в длительностях цикла t составит $\bar{T} = B / (1 - (1 - F_r)^B)$. Тогда пропускная способность для селективной и групповой процедур повтора соответственно

определяется зависимостями:

$$Z_s(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B) = \\ = A\Psi \frac{1 - (1 - F_r)^B}{B} \left\{ \sum_{k=1}^{\omega} k \sum_{i=D+Bk-2}^{D+B(k+1)-3} P_i + \omega \sum_{i=D+B(\omega+1)-2}^{S-1} P_i \right\},$$

$$Z_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B) = \\ = A\Psi \frac{1 - (1 - F_r)^B}{B} \left\{ \sum_{k=1}^{\omega} \frac{1 - \Psi^k}{1 - \Psi} \sum_{i=D+Bk-2}^{D+B(k+1)-3} P_i + \frac{1 - \Psi^\omega}{1 - \Psi} \sum_{i=D+B(\omega+1)-2}^{S-1} P_i \right\}.$$

Отсюда с учетом вариативности выражений для вероятностей состояний цепи Маркова при различных связях между протокольными параметрами и круговой задержкой получаем функциональные зависимости данного показателя с точностью до сомножителя P_0 :

$$Z_s(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B) = \\ = \begin{cases} P_0 \frac{A\Psi \{1 - (1 - F_r)^{B\omega} - \omega [1 - (1 - F_r)^B] (1 - F_r)^{S-D-B+2}\}}{BF_r(1 - F_r)^{B(\omega-1)}}, & S \geq D + B\omega - 1, \\ P_0 \frac{A\Psi \{1 - (1 - F_r)^{B(M+1)} - (M+1)[1 - (1 - F_r)^B](1 - F_r)^{S-D-B+2}\}}{BF_r(1 - F_r)^{S-D-B+1}}, & \max\{D + B - 1, D + B(\omega - K) - 1\} \leq S \leq D + B\omega - 1. \end{cases}$$

$$Z_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B) = \\ = \begin{cases} P_0 \frac{A\Psi(1 - (1 - F_r)^B) \{(1 - \Psi)(1 - \Phi^\omega) - (1 - \Phi)(1 - \Psi^\omega)(1 - F_r)^{S-D-B+2}\}}{BF_r(1 - \Psi) [1 - \Psi + (\Psi - \Phi)\Phi^{\omega-1}]}, & S \geq D + B\omega - 1, \\ P_0 \frac{A\Psi(1 - (1 - F_r)^B) \{(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) - (1 - \Phi)(1 - \Psi^{M+1})(1 - F_r)^{S-D-B+2}\}}{BF_r(1 - \Psi) [(1 - \Psi)(1 - \Phi^{M+1}) + (1 - \Phi)\Psi^{M+1}(1 - F_r)^{S-D-B+1}]}, & \max\{D + B - 1, D + B(\omega - K) - 1\} \leq S \leq D + B\omega - 1. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно видеть, что при $A = B = 1$ получаем известный результат [17].

Для абсолютно надежного обратного тракта передачи данных ($F_r = 1$) пропускная способность в селективном режиме повтора определяется соотношением $Z_s(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = A\Psi/B^2$ при $\omega \geq K + 2$ (эта же за-

висимость имеет место и в случае неограниченного роста размера окна $\omega \rightarrow \infty$) и зависимостью $Z_s(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = \frac{A\Psi}{B[D - 1 - B(\omega - 2)]}$ при $1 \leq \omega \leq K + 1$.

Режим группового отказа для детерминированного обратного тракта передачи данных ($F_r = 1$) обеспечивает пропускную способность

$$Z_g(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = \frac{A\Psi}{B[B + (D - 1)(1 - \Psi)]} \text{ при } \omega \geq K + 2$$

и

$$Z_g(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = \frac{A\Psi}{B[D - 1 + B(1 - (\omega - 1)\Psi)]} \text{ при } 1 \leq \omega \leq K + 1.$$

Неограниченный рост размера окна ($\omega \rightarrow \infty$) приводит к зависимости

$$Z_g(\infty, \infty, D, F_f, F_r, A, B) = \frac{A\Psi(1 - (1 - F_r)^B)}{B[1 - \Psi + F_r[B + (D - 2)(1 - \Psi)]]}.$$

Для $\omega \leq K + 1$ и тайм-аута минимальной длительности $S = D + B - 1$, соответствующего времени круговой задержки блока сегментов, быстродействие транспортного соединения инвариантно размеру окна, режиму отказа и принимает наименьшее значение при прочих равных условиях

$$Z(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B) = \frac{A\Psi(1 - (1 - F_r)^B)}{B(D + B - 1)}.$$

Численные расчеты показывают, что зависимость быстродействия транспортного соединения (пропускной способности) от размера окна при недогруженном транспортном соединении ($1 \leq \omega < K + 1$) имеет незначительный рост, в окрестности $\omega = K + 1$ — резкое увеличение и далее при $\omega \geq K + 2$ — насыщение до предельных значений (см. рис. 1).

От длительности круговой задержки D пропускная способность имеет обратную (симметричную) зависимость. Согласно функциональным зависимостям пропускной способности транспортного соединения, приводимым на рис. 2 для равных интенсивностей отправляемых абонентских потоков ($A\omega = \text{const}$), с ростом длительности круговой задержки пропускная способность транспортного соединения незначительно снижается, существенно деградируя после того как круговая задержка превысит размер окна ($\omega < K + 2$) и далее асимптотически приближается к оси абсцисс. Быстродействие транспортного соединения с ростом длительности тайм-аута быстро насыщается до предельной величины, соответствующей неограниченному значению S . Из зависимостей, приводимых на рис. 1 и 2, нетрудно видеть, что существуют области значений параметров математической модели, для которых целесообразно подключение процедур прямой коррекции ошибок к классическому транспортному протоколу с решающей обратной связью.

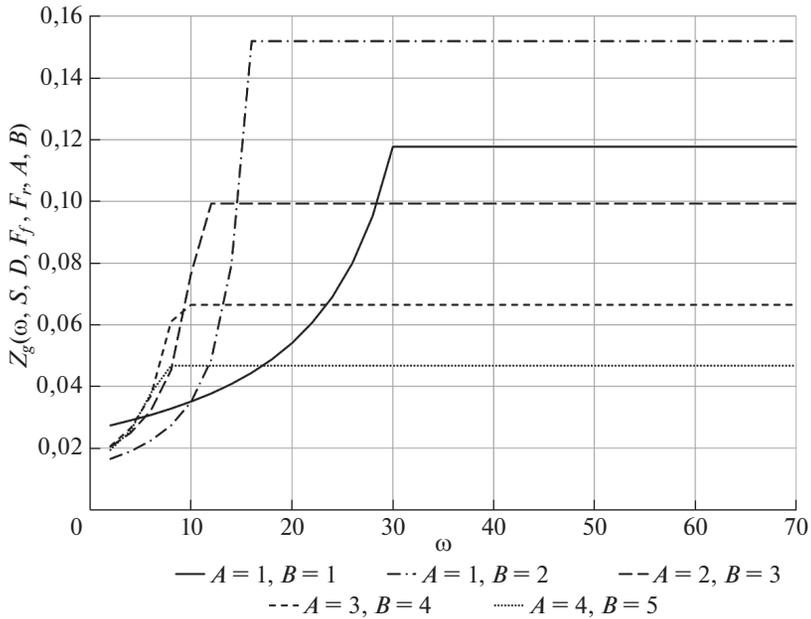


Рис. 1. Зависимость пропускной способности $Z_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B)$ транспортного соединения от размера окна ω при групповом режиме повтора, $D = 30$, $F_f = 0,8$, $F_r = 1$.

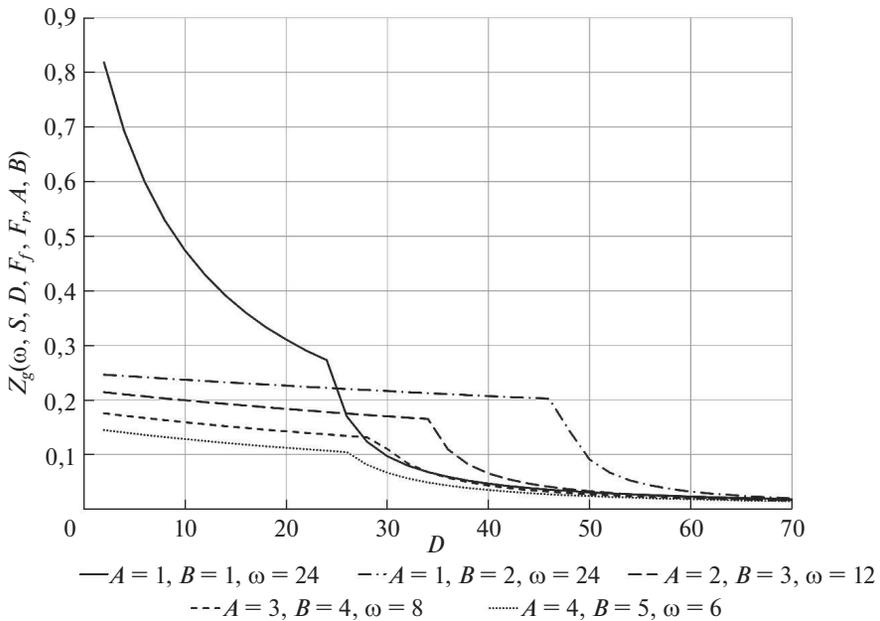


Рис. 2. Зависимость пропускной способности $Z_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B)$ транспортного соединения от длительности круговой задержки D при групповом режиме повтора, $S = 75$, $F_f = 0,9$, $F_r = 1$.

5. Оптимизация пропускной способности транспортного соединения

Важнейшей задачей эффективного применения технологии прямой коррекции ошибок является выбор параметров длины блоковой последовательности сегментов B и числа избыточных сегментов $B - A$ в блоке для коррекции ошибок, обеспечивающих максимальное быстродействие транспортного соединения с заданными характеристиками тракта передачи данных и протокольными параметрами. Очевидно, что наличие избыточных сегментов в передаваемой последовательности увеличивает вероятность доставки получателю информационных сегментов в группе, однако это достигается за счет роста накладных расходов в виде времени переноса избыточных данных. В связи с этим возникает задача поиска в многомерном признаковом пространстве области значений характеристик транспортного соединения (D, F_r, F_f) , параметров транспортного протокола (ω, S) и механизма прямой коррекции ошибок (A, B) , обеспечивающих превосходство управляющей процедуры с прямой коррекцией ошибок перед классической протокольной процедурой с решающей обратной связью без механизма коррекции. Проведем сравнительный анализ протокольной процедуры с применением и без использования механизма прямой коррекции ошибок. Сопоставление управляющих процедур выполним в условиях равных интенсивностей абонентских информационных потоков, предлагаемых к передаче $\lambda = A\omega$. Определим выигрыш в быстродействии от применения механизма прямой коррекции ошибок по сравнению с классической протокольной процедурой с решающей обратной связью в виде:

$$(16) \quad \Delta(\omega, S, D, A, B) = Z(\omega, S, D, A, B) - Z(A\omega, S, D, 1, 1).$$

В общем случае необходимо решить оптимизационную задачу поиска параметров прямой коррекции ошибок, обеспечивающих достижение максимума прироста пропускной способности транспортного соединения при заданных значениях протокольных параметров (ω, S) и характеристик тракта передачи данных (D, F_f, F_r) :

$$\Delta(\omega, S, D, A, B) \xrightarrow[A \geq 1, B \geq A]{\max} .$$

Поскольку в аналитическом виде данная задача оптимизации неразрешима, проанализируем зависимость выигрыша от ключевых характеристик тракта передачи данных (F_f, D) .

В режиме селективного повтора функция выигрыша (16) при размерах окна $\omega \geq K + 2$ не имеет положительных значений, однако для неполной загрузки абонентом транспортного соединения ($1 \leq \omega \leq K + 1$) механизм прямой коррекции ошибок имеет области превосходства над классической управляющей процедурой. За счет снижения размерности признакового пространства области положительных значений выигрыша в ряде случаев выражаются аналитически.

Полагая абсолютно надежным обратный тракт передачи данных ($F_r = 1$), выигрыш принимает простой аналитический вид

$$\Delta(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = \frac{A\Psi}{B[D - 1 - B(\omega - 2)]} - \frac{F_f}{D - A\omega + 1}.$$

Для параметров механизма прямой коррекции ошибок $A = 1$, $B = 2$ функция выигрыша преобразуется к виду

$$\Delta(\omega, S, D, F_r, 1, 1, 2) = \frac{F_f(2 - F_f)}{2D - 4\omega + 6} - \frac{F_f}{D - \omega + 1}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что область положительных значений выигрыша по параметру $F_f \in [0, 1]$ существует при $\omega \geq 3$, выполнении ограничений на длину транспортного соединения и длительность тайм-аута ожидания квитанции

$$(17) \quad D \geq B(\omega - 1) + 2, \quad S > D + B - 1$$

и соответствует интервалу $F_f \in \left(0, \frac{2\omega - 4}{D - \omega + 1}\right)$. Максимум выигрыша достигается в середине интервала между нулями функции выигрыша: $F_f = \frac{\omega - 2}{D - \omega + 1}$. Для набора параметров механизма прямой коррекции ошибок $A = 2$, $B = 3$ функция выигрыша

$$\Delta(\omega, S, D, F_f, 1, 2, 3) = \frac{2F_f^2(3 - 2F_f)}{3[D - 3\omega + 5]} - \frac{F_f}{D - 2\omega + 1}$$

положительна на интервале

$$F_f \in \left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3(D - 3\omega + 5)}{4(D - 2\omega + 1)}}, \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3(D - 3\omega + 5)}{4(D - 2\omega + 1)}}\right)$$

при $\omega \geq 6$ и выполнении (17). Выигрыш принимает максимальное значение в точке $F_f = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\omega - 4}{D - 2\omega + 1}}\right)$.

Набор параметров прямой коррекции ошибок $A = 1$, $B = 3$ обеспечивает положительный выигрыш

$$\Delta(\omega, S, D, F_f, 1, 1, 3) = \frac{F_f(3 - 3F_f + F_f^2)}{3(D - 9\omega + 15)} - \frac{F_f}{D - \omega + 1}$$

при $\omega \geq 3$ и выполнении (17) на интервале $F_f \in \left(0, \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{6\omega - 12}{D - \omega + 1}}\right)$,

а достигает максимума, когда достоверность доставки сегмента в прямом тракте передачи данных составляет $F_f = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3\omega - 6}{D - \omega + 1}}$.

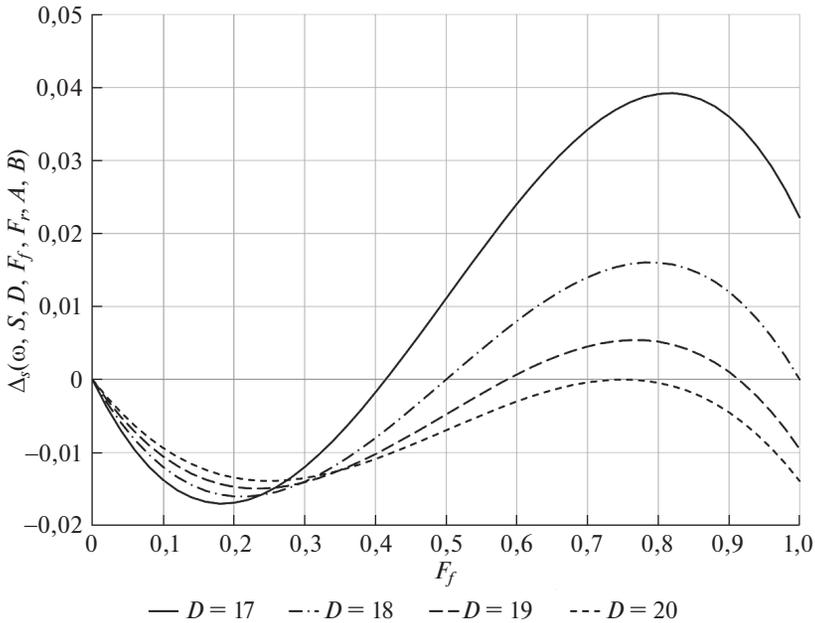


Рис. 3. Зависимость выигрыша $\Delta_s(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B)$ в селективном режиме повтора от достоверности передачи сегмента F_f в прямом направлении при $\omega = 6, A = 2, B = 3, F_r = 1$.

В целом при заданной ширине окна с ростом длины транспортного соединения (круговой задержки) от значения

$$(18) \quad D = B(\omega - 1) + 2$$

абсолютный выигрыш снижается и область его положительных значений по координате F_f быстро сжимается до нулевого размера (см. рис. 3). Следует отметить, что наибольший выигрыш достигается при выполнении (18) и с увеличением D и ω , удовлетворяющих (18), значения выигрыша растут согласно кривой с насыщением. При произвольных значениях достоверности передачи сегментов в обратном канале $F_r \leq 1$ указанные выше зависимости размеров областей положительных значений выигрыша и его максимума от протокольных и прочих параметров сохраняются.

При $F_r = 1$ и $\omega \geq K + 2$ выигрыш в режиме группового отказа приобретает аналитическую зависимость, инвариантную к размеру окна и длительности тайм-аута:

$$\Delta(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = \frac{A\Psi}{B[B + (D - 1)(1 - \Psi)]} - \frac{F_f}{1 + (D - 1)(1 - F_f)}.$$

Отсюда для набора параметров прямой коррекции ошибок $A = 1, B = 2$ нетрудно видеть, что область положительных значений выигрыша существу-

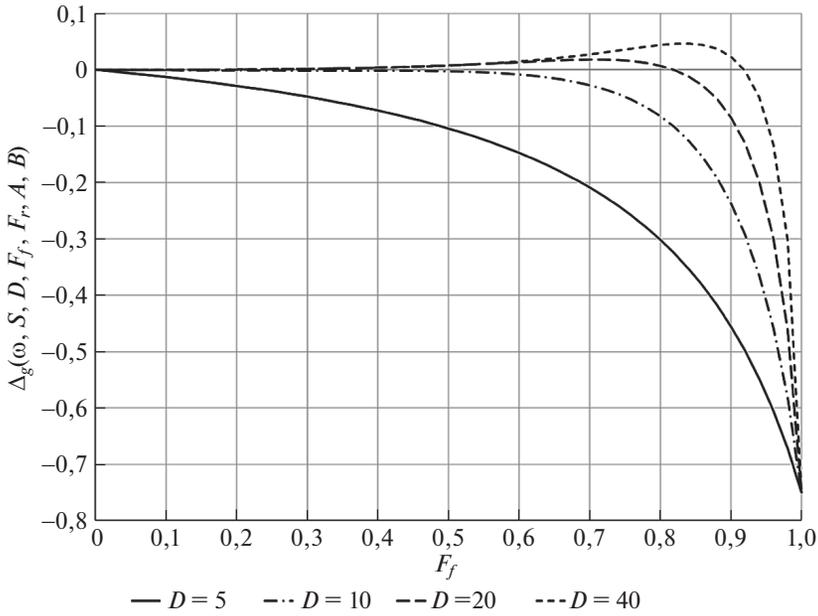


Рис. 4. Зависимость выигрыша $\Delta_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B)$ в групповом режиме повтора от достоверности передачи сегмента F_f в прямом направлении при $\omega = 40$, $S = 125$, $A = 1$, $B = 2$, $F_r = 1$.

ет при $D \geq 11$ на интервале значений достоверности доставки сегмента в прямом тракте передачи данных

$$F_f \in \left(\frac{D - 2 - \sqrt{D^2 - 12(D - 1)}}{2(D - 1)}, \frac{D - 2 + \sqrt{D^2 + 12(D - 1)}}{2(D - 1)} \right)$$

и с ростом круговой задержки одиночного сегмента D расширяется до $F_f \in (0, 1)$. Численный анализ показывает, что при связи параметров A и B механизма прямой коррекции ошибок в виде $B = A + 1$ рост информационной емкости блока сегментов A приводит к сужению области положительных значений выигрыша по параметру F_f . С ростом длительности круговой задержки D максимальный выигрыш смещается вправо и увеличивается, а область положительных значений выигрыша расширяется (рис. 4). Аналогичные качественные зависимости имеют место и при других соотношениях между параметрами A и B .

При $F_r = 1$ и $1 \leq \omega \leq K + 1$ выигрыш в режиме группового отказа принимает вид

$$(19) \quad \begin{aligned} & \Delta(\omega, S, D, F_f, 1, A, B) = \\ & = \frac{A\Psi}{B[D - 1 + B[1 - \Psi(\omega - 1)]]} - \frac{F_f}{D - F_f(A\omega - 1)}. \end{aligned}$$

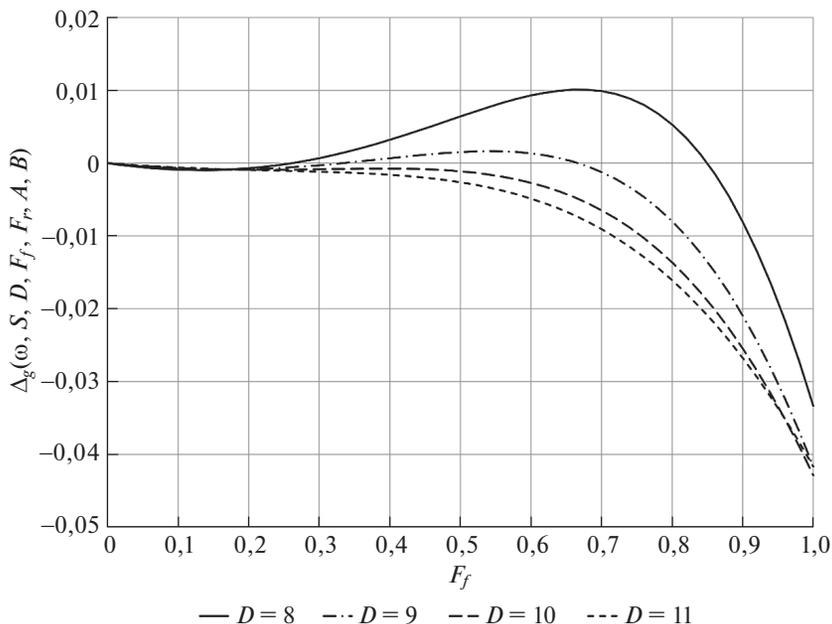


Рис. 5. Зависимость выигрыша $\Delta_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B)$ в групповом режиме повтора от достоверности передачи сегмента F_f в прямом направлении при $\omega = 4$, $S = 125$, $A = 1$, $B = 2$, $F_r = 1$.

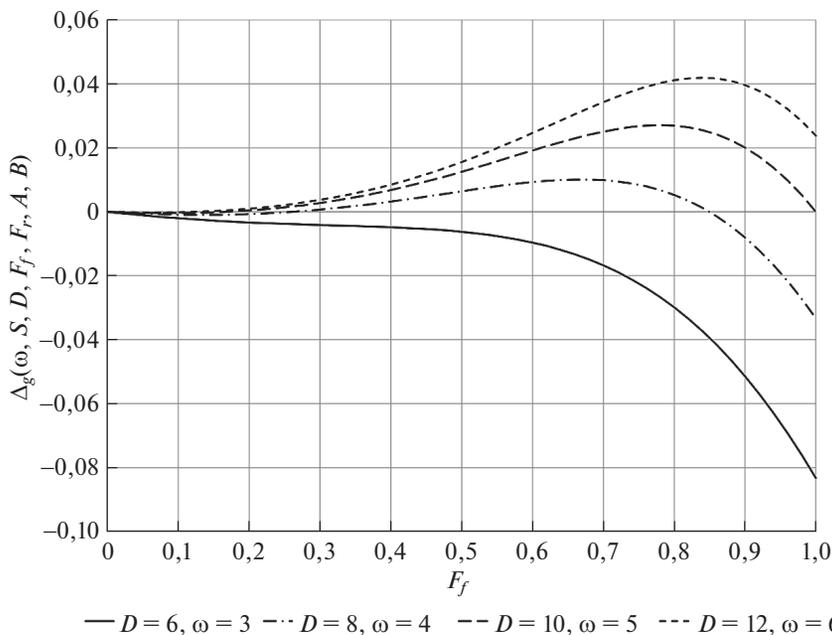


Рис. 6. Зависимость выигрыша $\Delta_g(\omega, S, D, F_f, F_r, A, B)$ в групповом режиме повтора от достоверности передачи сегмента F_f в прямом направлении при $S = 125$, $A = 1$, $B = 2$, $F_r = 1$.

Для прямой коррекции методом дублирования ($A = 1$, $B = 2$) область положительных значений выигрыша достигается при $D \geq 8$ и

$$F_f \in \left(\frac{6(\omega - 1) - D - \sqrt{36(\omega - 1)^2 - 12(\omega - 1)(D + 2) + D^2}}{6(\omega - 1)}, \frac{6(\omega - 1) - D + \sqrt{36(\omega - 1)^2 - 12(\omega - 1)(D + 2) + D^2}}{6(\omega - 1)} \right).$$

При фиксированном размере окна ω увеличение длительности круговой задержки D приводит к снижению выигрыша и сужению области положительных значений выигрыша (рис. 5). Максимальные значения выигрыша (19) достигаются, как и в случае селективного повтора, при условии (18) и насыщаются с ростом параметров D и ω , связанных равенством (18) (рис. 6). Наиболее значимо выигрыш определяется соотношением между шириной окна, размером блока B и длительностью круговой задержки транспортного соединения D . Для каждого набора значений параметров механизма прямой коррекции ошибок A и B имеется нижняя граница длительности круговой задержки одиночного сегмента D , за которой существуют области значений размера окна и достоверности передачи сегмента в прямом и обратном трактах транспортного соединения, обеспечивающие положительный выигрыш. При этом для области $1 \leq \omega \leq K + 1$ абонентский поток выигрышнее формировать с шириной окна, удовлетворяющей ограничению (18). Это обусловлено тем, что в периоды простоя отправителя в ожидании подтверждений источник может догрузить тракт передачи данных оправкой избыточных сегментов и снизить тем самым вероятность повторных передач практически без увеличения накладных расходов. Очевидно, что в результате мониторинга уровня ошибок в отдельных звеньях прямого R_f и обратного R_r тракта передачи данных можно определить достоверность доставки сегментов в прямом F_f и обратном F_r направлениях соединительного пути. При установлении транспортного соединения между взаимодействующими абонентами определяется длительность круговой задержки D . И далее в зависимости от режима повтора и уровня трафика численными расчетами из (16) можно подобрать оптимальные параметры прямой коррекции ошибок A и B , а также значения протокольных параметров ω и S .

6. Заключение

В статье предложена модель процесса переноса сегментов данных в транспортном соединении, управляемом надежным транспортным протоколом с механизмом прямой коррекции ошибок и подтверждением данных, принятым получателем после процедуры прямой коррекции. Математическая модель основана на описании очереди переданных, но неподтвержденных сегментов данных цепью Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем. Получены стационарные распределения состояний Марковской цепи при различных ограничениях на значения размера окна и длительности

тайм-аута. Найдены аналитические выражения для пропускной способности транспортного соединения.

В целом пропускная способность существенно зависит от соотношений между протокольными параметрами и характеристиками тракта передачи данных. Пропускная способность в режиме группового отказа в значительной мере определяется длительностью круговой задержки D в силу того, что при невозможности восстановления хотя бы одного блока сегментов в отправленной последовательности необходима перезагрузка транспортного соединения. Показано, что для селективного режима повтора применение механизма прямой коррекции ошибок целесообразно на не полностью загруженных транспортных соединениях ($\omega \leq K + 1$) с большой круговой задержкой (D). В режиме группового отказа технология прямой коррекции ошибок эффективна при различных режимах загрузки.

В качестве направлений дальнейшего развития исследований следует выделить задачу анализа пропускной способности транспортных соединений абонентов в условиях соперничества за доступную полосу пропускания разделяемых участков переприема сетевого маршрута и обобщение полученных в данной статье результатов на случай конкурентного использования пропускной способности соединительного пути. Дополнительно к этому актуальным является исследование эффективности применения технологии прямой коррекции ошибок на внутрисегментном уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fall K., Stevens R.* TCP/IP Illustrated, Volume 1: The Protocols (2nd Edition). Addison-Wesley Professional Computing Series, 2012.
2. *Lundqvist H., Karlsson G.* TCP with End-to-End FEC / International Zurich Seminar on Communications, 2004 // IEEE. 2004. P. 152–156.
3. *Barakat Ch., Altman E.* Bandwidth Tradeoff between TCP and Link-Level FEC // Computer Networks. 2002. No. 39. P. 133–150.
4. *Shalin R., Kesavaraaja D.* Multimedia Data Transmission through TCP/IP Using Hash Based FEC with AUTO-XOR Scheme // ICTACT J. Communicat. Technology. 2012. V. 03. No. 03. P. 604–609.
5. *Вдовин С.* Алгоритмы прямой коррекции ошибок и особенности их применения. Турбокод // Компоненты и технологии. 2016. № 11 (184). С. 76–79.
6. *Langley A., et. al.* The QUIC Transport Protocol: Design and Internet-Scale Deployment // SIGCOMM '17, Los Angeles, CA, USA. August, 2017. P. 183–196.
7. *Ribadeneir A.F.* An Analysis of the MOS under Condition of Delay, Jitter and Packet Loss and an Analysis of the Impact of Introducing Piggybacking and Reed Solomon FEC for VOIP. Master's Thesis, Georgia State University, 2007.
8. *Matsuzono K., Detchart J., Cunche M., Roca V., Asaeda H.* Performance Analysis of a High-Performance Real-Time Application with Several AL-FEC schemes / Proc. of the IEEE 35th Conf. on Local Computer Networks, LCN'10. 2010. P. 1–7.
9. *Herrero R.* Modeling and Comparative Analysis of Forward Error Correction in the Context of Multipath Redundancy. Telecommunication Systems // Modelling, Analysis, Design, and Management. 2017. V. 65 (4). P. 783–794.

10. *Zhang Menglei, Polese Michele, Mezzavilla Marco, Zhu Jing, Rangan Sundeep, Panwar Shivendra, Zorzi Michele* Will TCP Work in mmWave 5G Cellular Networks? // IEEE Commun. Mag., January 2019. P. 65–71.
11. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Оптимизация выбора каналов связи при передаче потока данных с учетом потерь // *АиТ*. 2018. № 1. С. 84–99.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Optimal Channel Choice for Lossy Data Flow Transmission // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. P. 66–77.
12. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003.
13. *Мухеев П.А., Сущенко С.П.* Математические модели сетей уровня доступа. Новосибирск: Наука, 2015.
14. *Kravets O.Ya.* Mathematical Modeling of Parameterized TCP Protocol // *Autom. Remote Control*. 2013. V. 74. No. 7. P. 1218–1224.
15. *Callegari C., Giordano S., Pagano M., Pepe T.* A Survey of Congestion Control Mechanisms in Linux TCP // *Communicat. Comput. Inform. Sci.* 2014. V. 279. P. 28–42.
16. *Олифер В.Г., Олифер Н.А.* Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. Уч. для ВУЗов. 5-е изд. СПб.: Питер, 2016.
17. *Kokshenev V.V., Mikheev P.A., Sushchenko S.P.* Comparative Analysis of the Performance of Selective and Group Repeat Transmission Models in a Transport Protocol // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 2. P. 247–261.
Кокшениев В.В., Мухеев П.А., Сущенко С.П. Сравнительный анализ быстродействия селективного и группового режимов повторной передачи транспортного протокола // *АиТ*. 2017. № 2. С. 65–81.
18. *Сущенко С.П.* Математические модели компьютерных сетей. Томск: Издат. Дом Томского гос. ун-та, 2017.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Н. Соболевским.

Поступила в редакцию 19.10.2019

После доработки 27.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. П.Ф. ПРЯШНИКОВА, канд. техн. наук (ppf99999@rambler.ru)
(Филиал Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Севастополь)

РОБАСТНОЕ D-РАЗБИЕНИЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА ОТ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

Предлагается метод построения множества интервальной устойчивости многочлена, коэффициенты которого являются интервальными и полиномиальным образом зависят от двух параметров. Метод основан на аппроксимации с заданной точностью множества интервальной устойчивости объединением прямоугольников и не требует исследования и построения границ D-разбиения. Доказана сходимости метода. Эффективность метода проиллюстрирована примерами.

Ключевые слова: многочлен, устойчивость, D-разбиение, робастность, полиномиальная зависимость.

DOI: 10.31857/S0005231022070054, EDN: AEIHWG

1. Введение

В современной теории управления наблюдается значительный интерес к проблемам робастности. Обзор различных типов неопределенностей в задачах исследования робастности и методы решения этих задач приведены в [1–24]. Одним из средств исследования робастности является робастное D-разбиение [25], которое разработано на основе объединения классического D-разбиения [26, 27] и современной теории робастной устойчивости, основанной на теореме Харитоновой [28] или частотном подходе [29].

Классическое D-разбиение по двум параметрам разработано для случая линейной зависимости от параметров коэффициентов характеристического многочлена и использует традиционную методику, заключающуюся в аппроксимации границ областей D-разбиения конечным множеством точек и указанием правила, определяющего расположение областей устойчивости по отношению к границе. В [30] рассмотрен случай полиномиальной зависимости от параметров коэффициентов характеристического многочлена и предложена альтернативная методика D-разбиения, не требующая построения граничных точек. Методика заключается в аппроксимации областей D-разбиения объединением прямоугольников. Процесс построения прямоугольников позволяет аппроксимировать области устойчивости с любой заданной точностью.

В данной работе методика, предложенная в [30], распространена на построение областей робастной устойчивости. Кроме того, по сравнению с [30], предложен метод повышения скорости сходимости процесса аппроксимации.

2. Постановка задачи

Обозначим:

$$p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'') = \left\{ (\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in [\alpha'; \alpha''] \times [\beta'; \beta'']; \alpha', \alpha'', \beta', \beta'' \in \mathbb{R}; \alpha' < \alpha''; \beta' < \beta'' \right\}$$

— прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

Рассматривается многочлен

$$(1) \quad a(s, \alpha, \beta) = q(s, \alpha, \beta) + r(s),$$

где $q(s, \alpha, \beta) = q_0(\alpha, \beta) + q_1(\alpha, \beta)s + \dots + q_n(\alpha, \beta)s^n$ — многочлен, коэффициенты которого определены на прямоугольнике $\Lambda = p(\alpha_{\min}; \alpha_{\max}; \beta_{\min}; \beta_{\max}) \subset \mathbb{R}^2$ и полиномиальным образом зависят от параметров α и β

$$(2) \quad q_k(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{n_{\alpha,k}} \sum_{\nu=0}^{n_{\beta,k}} q_{k\mu\nu} \alpha^\mu \beta^\nu \quad (k = 0, \dots, n);$$

$r(s)$ — интервальный многочлен из множества $R = \left\{ r(s) = r_0 + r_1 s + \dots + r_m s^m \mid r_k \in [r'_k; r''_k] \subset \mathbb{R}; r'_k \leq r''_k \ (k = 0, \dots, m); m \neq n \right\}$.

Решается задача построения множества Λ_s робастной устойчивости многочлена, такого что $\Lambda_s \subseteq \Lambda$ и $((\alpha, \beta) \in \Lambda_s) \Leftrightarrow$ многочлен (1) устойчив для всех $r(s) \in R$ (робастно устойчив).

Решение задачи ищется в виде объединения прямоугольников

$$(3) \quad \Lambda_r = \bigcup_{p \in P_r} p$$

из множества $P_r = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_r}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) $(\alpha, \beta) \in p_i \Rightarrow$ многочлен (1) робастно устойчив ($i, j = 1, \dots, N_r$). Множество P_r строится путем последовательного добавления прямоугольников до тех пор, пока значение критерия близости множеств Λ_r и Λ_s не станет меньше заданной точности $\rho > 0$.

3. Теоретическая часть

Для построения множества P_r будем рассматривать еще три множества прямоугольников:

а) множество $P_u = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_u}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) $(\alpha, \beta) \in p_i \Rightarrow$ многочлен (1) робастно неустойчив ($i, j = 1, \dots, N_u$);

б) множество $P_t = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_t}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) робастная устойчивость многочлена (1) на прямоугольнике p_i требует дополнительного анализа ($i, j = 1, \dots, N_t$);

с) множество $P_x = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_x}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) $\max(\alpha''_i - \alpha'_i, \beta''_i - \beta'_i) \leq d_{\max}$, где $d_{\max} > 0$ есть заданное положительное число, при уменьшении которого увеличивается близость множеств Λ_r и Λ_s ($i, j = 1, \dots, N_x$).

Алгоритм 1 построения множества P_r при заданном d_{\max} заключается в следующем:

1. Полагаем $P_t := \Lambda$; $P_r := \emptyset$; $P_u := \emptyset$; $P_x := \emptyset$.
2. Если $P_t = \emptyset$, заканчиваем выполнение алгоритма, в противном случае переходим к выполнению п. 3.
3. Извлекаем из множества P_t прямоугольник p , добавленный последним.
4. Полагаем $P_t := P_t \setminus \{p\}$.
5. Если для прямоугольника p выполняется приведенное ниже достаточное условие робастной устойчивости (теорема 2), то полагаем $P_r := P_r \cup \{p\}$ и переходим к выполнению п. 2. В противном случае переходим к выполнению п. 6.
6. Если для прямоугольника p выполняется приведенное ниже достаточное условие робастной неустойчивости (теорема 2), то полагаем $P_u := P_u \cup \{p\}$ и переходим к выполнению п. 2. В противном случае переходим к выполнению п. 7.
7. Если для прямоугольника p выполняется условие $\max(\alpha''_i - \alpha'_i, \beta''_i - \beta'_i) \leq d_{\max}$, то полагаем $P_x := P_x \cup \{p\}$ и переходим к выполнению п. 2. В противном случае переходим к выполнению п. 8.
8. Прямоугольник p делим по стороне с наибольшей длиной (если длины всех сторон равны, то делим по стороне $[\alpha'_i, \alpha''_i]$) на два равновеликих прямоугольника \tilde{p} и $\tilde{\tilde{p}}$. Полагаем $P_t := P_t \cup \{\tilde{p}, \tilde{\tilde{p}}\}$ и переходим к выполнению п. 3.

Выполнение цикла алгоритма 1 (п. 2, ..., п. 8) согласно теореме 1 закончится за конечное число шагов.

Теорема 1. Равенство $P_t = \emptyset$ в алгоритме 1 выполнится не более чем за $n = \left(\left[\max \left(0; \log_2 \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{d_{\max}} \right) \right] + 1 \right) \left(\left[\max \left(0; \log_2 \frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{d_{\max}} \right) \right] + 1 \right)$ повторений п. 2, ..., п. 8, где [...] означает целую часть числа.

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Основная проблема при применении алгоритма 1 заключается в проверке условий п. 5 и п. 6. Ниже предложено решение этой проблемы.

Для построения достаточных условий робастной устойчивости и неустойчивости многочлена (1) рассмотрим на множестве Λ множество много-

членов Харитонова [28, с. 2087–2088] $K(\alpha, \beta) = \{K^{(1)}(s, \alpha, \beta); K^{(2)}(s, \alpha, \beta); K^{(3)}(s, \alpha, \beta); K^{(4)}(s, \alpha, \beta)\}$, $(\alpha, \beta) \in \Lambda$. Каждый элемент множества $K(\alpha, \beta)$ согласно формуле (1) равен сумме многочлена $q(s, \alpha, \beta)$ и соответствующего многочлена Харитонова для интервального многочлена $r(s)$.

Может быть сформулирована очевидная теорема 2, используемая для проверки условий п. 5 и п. 6 алгоритма 1.

Теорема 2. Если все многочлены множества $K(\alpha, \beta)$ устойчивы на прямоугольнике p , то многочлен (1) робастно устойчив на прямоугольнике p . Если для всех $(\alpha, \beta) \in p$ хотя бы один многочлен множества $K(\alpha, \beta)$ неустойчив, то многочлен (1) робастно неустойчив на прямоугольнике p .

Таким образом, проверка условий п. 5 и п. 6 алгоритма 1 сводится к определению устойчивости или неустойчивости на прямоугольнике p многочленов $b(s, \alpha, \beta) = b_0(\alpha, \beta) + b_1(\alpha, \beta)s + \dots + b_n(\alpha, \beta)s^n \in K(\alpha, \beta)$, коэффициенты которых полиномиальным образом зависят от параметров α и β . По теоремам 4, 1, 2 [30] вещественные части $\text{Re}S(\alpha, \beta)$ всех нулей многочлена $b(s, \alpha, \beta)$ сохраняют знак на прямоугольнике p , если на этом прямоугольнике не имеет решения совокупность

$$(4) \quad \begin{cases} b_n(\alpha, \beta) = 0; \\ b_0(\alpha, \beta) = 0; \\ \Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = 0, \end{cases}$$

где $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$ есть $(n-1)$ -й определитель Гурвица многочлена $b(s, \alpha, \beta)$. Поэтому для проверки условий теоремы 2 достаточно установить, что совокупность (4) не имеет решений на прямоугольнике p , и проверить устойчивость многочлена в любой выбранной точке $(\alpha^*, \beta^*) \in p$. Устойчивость многочлена во всех точках прямоугольника p совпадает с устойчивостью в точке (α^*, β^*) .

Левая часть каждого из уравнений совокупности (4) есть многочлен вида

$$(5) \quad \begin{cases} d(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta); \\ d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = d_{\mu\nu} \alpha^\mu \beta^\nu \quad (d_{\mu\nu} \in \mathbb{R}; \mu = 0, \dots, m_\alpha; \nu = 0, \dots, m_\beta). \end{cases}$$

Достаточные условия отсутствия нулей многочлена (5) на прямоугольнике p дает

Теорема 3. Многочлен (5) не имеет нулей на прямоугольнике

$$p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta''),$$

если существуют функции $\varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$, $\psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ ($\mu = 0, \dots, m_\alpha; \nu = 0, \dots, m_\beta$) такие, что для всех $(\alpha, \beta) \in p$ выполняются неравенства

$$(6) \quad \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \leq d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \leq \psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi(\alpha, \beta) > 0; \quad \varphi(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta); \\ \max_{(\alpha, \beta) \in p} \psi(\alpha, \beta) < 0; \quad \psi(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta). \end{array} \right.$$

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

В [30] предложено выбирать $\varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \text{const} = \min_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ и $\psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \text{const} = \max_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ ($\mu = 0, \dots, m_\alpha; \nu = 0, \dots, m_\beta$). Такой выбор имеет алгоритмическую и вычислительную простоту. Однако в силу грубости приближения функций $d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ ($\mu = 0, \dots, m_\alpha; \nu = 0, \dots, m_\beta$) константами, приближение множества Λ_s множеством Λ_r происходит достаточно медленно (большое число прямоугольников попадает во множество P_x). Для повышения скорости приближения предлагается выбирать функции $\varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$, $\psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ ($\mu = 0, \dots, m_\alpha; \nu = 0, \dots, m_\beta$) в соответствии с теоремой 4.

Теорема 4. В теореме 3 могут быть выбраны функции

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \varphi_{\alpha\beta}\alpha\beta + \varphi_\alpha\alpha + \varphi_\beta\beta + \varphi_0; \\ \psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \psi_{\alpha\beta}\alpha\beta + \psi_\alpha\alpha + \psi_\beta\beta + \psi_0, \end{cases}$$

коэффициенты которых определены в доказательстве теоремы 4. Индексы $\mu = 0, \dots, m_\alpha; \nu = 0, \dots, m_\beta$ в правых частях равенств (8) опущены для сокращения обозначений.

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении.

Функции $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\psi(\alpha, \beta)$, определяемые формулами (7) и (8), есть многочлены двух переменных вида $\chi(\alpha, \beta) = \chi_{\alpha\beta}\alpha\beta + \chi_\alpha\alpha + \chi_\beta\beta + \chi_0$. Для определения $\min_{(\alpha, \beta) \in p} \chi(\alpha, \beta)$ и $\max_{(\alpha, \beta) \in p} \chi(\alpha, \beta)$ необходимо сравнить значения функции $\chi(\alpha, \beta)$ в вершинах прямоугольника p , и если $\chi_{\alpha\beta} \neq 0$ и точка $\left(-\frac{\chi_\alpha}{\chi_{\alpha\beta}}, -\frac{\chi_\beta}{\chi_{\alpha\beta}}\right) \in p$, то и в этой точке.

Формулы, приведенные в доказательстве теоремы 4, позволяют выполнить проверку условий п. 5 и п. 6 алгоритма 1 для случая, когда исходное множество Λ , для которого строится робастное D-разбиение, принадлежит первому квадранту. Если множество Λ принадлежит второму квадранту, то путем замены переменной $\alpha := -\alpha$ в многочлене (1) задача сводится к случаю, удовлетворяющему условию теоремы 4. Если множество Λ принадлежит третьему квадранту, то путем замены $\alpha := -\alpha; \beta := -\beta$ в многочлене (1) задача сводится к случаю, удовлетворяющему условию теоремы 4. Если множество Λ принадлежит четвертому квадранту, то путем замены переменной $\beta := -\beta$ в многочлене (1) задача сводится к случаю, удовлетворяющему условию теоремы 4. Если множество Λ одновременно пересекает несколько квадрантов,

то множество Λ делится не более чем на четыре прямоугольника, каждый из которых принадлежит одному из квадрантов, и робастное D-разбиение строится для каждого из прямоугольников.

Сходимость метода робастного D-разбиения определим как существование для всех $\varepsilon > 0$ такого d_{\max} , что $|S_{\Lambda_s} - S_{\Lambda_r}| < \varepsilon$, где S — площадь соответствующих множеств. Сходимость метода доказывает

Теорема 5. Для любой точки $(\alpha, \beta) \in \Lambda_s$ существует d_{\max} такое, что существует прямоугольник $p \in P_r$, содержащий точку (α, β) .

Доказательство теоремы 5 дано в Приложении.

Имеет место включение $\Lambda_s \subseteq \Lambda_r \cup \Lambda_x$, и точность приближения множества Λ_s множеством Λ_r можно характеризовать величиной

$$(9) \quad \rho = \begin{cases} \frac{S_{\Lambda_x}}{S_{\Lambda_r}}, & \text{если } \Lambda_r \neq \emptyset; \\ S_{\Lambda_x}, & \text{если } \Lambda_r = \emptyset. \end{cases}$$

Площади S_{Λ_x} и S_{Λ_r} вычисляются как суммы площадей прямоугольников, составляющих эти множества.

По построению зависимость $\rho(d_{\max})$ есть неубывающая функция. Площадь аппроксимирующего множества Λ_r отличается (в относительных единицах при $\Lambda_r \neq \emptyset$) от площади множества робастной устойчивости не более чем на ρ . Для уменьшения ρ следует уменьшить d_{\max} и (при сохранении ранее построенных прямоугольников множества Λ_r) применить алгоритм 1 к множеству прямоугольников Λ_x . По теореме 5, уменьшая d_{\max} и многократно применяя алгоритм 1 к множествам Λ_x , можно достичь любой наперед заданной точности ρ .

В [30] проведен анализ объема вычислений, необходимых для аппроксимации множества устойчивости многочлена. При аппроксимации множества робастной устойчивости объем вычислений будет примерно в четыре раза больше, так как множество Λ_r строится с использованием четырех многочленов Харитонова. Примеры 1, 2 иллюстрируют возможности предложенного метода для решения задач, названных в [25, с. 43] характерными. Пример 3 иллюстрирует возможности предложенного метода для решения задач, для которых, как отмечается в [25, с. 51], “техника описания робастного D-разбиения не разработана”. Пример 4 иллюстрирует возможность применения предложенного метода с использованием персонального компьютера при достаточно высоких степенях многочленов $q(s, \alpha, \beta)$, $r(s)$, $q_k(\alpha, \beta)$ ($k = 0, \dots, n$).

Алгоритм 1 допускает параллельные вычисления, что может быть использовано для уменьшения времени построения множества робастной устойчивости.

4. Результаты численного эксперимента

Алгоритм 1 реализован в виде прикладной компьютерной программы в среде разработки Embarcadero RAD Studio. С помощью разработанной про-

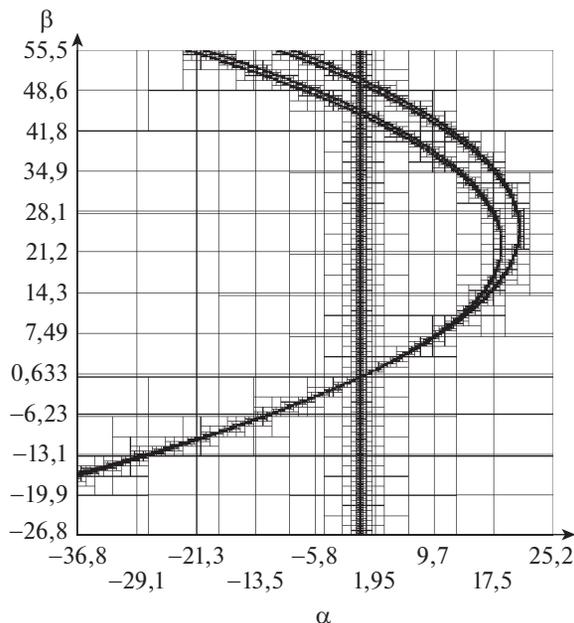


Рис. 1. Множество P примера 1.

граммы на персональном компьютере с процессором AMD FX-8350 построены аппроксимации множеств робастной устойчивости для многочленов различного уровня сложности. На рис. 2, 4, 6, 8 множество Λ_r изображено светло-серым цветом, множество Λ_u — белым цветом, множество Λ_x — черным цветом. Площадь множества Λ_x мала, и изображение множества Λ_x выглядит как пунктирная линия.

В [25] применение традиционного D-разбиения для случая непрерывных систем и двух параметров иллюстрируется на характерных примерах. Покажем решение этих примеров методом аппроксимации множества Λ_s множеством Λ_r . В примере 1 приведены все многочлены, используемые в алгоритме 1, в остальных примерах приведены только конечные результаты.

В *примере 1* (пример 1 из [25, с. 43–44]):

$$q(s, \alpha, \beta) = \alpha + \beta s; \quad r(s) = [3,93; 3,97] s^2 + [2,38; 2,42] s^3 + [0,19; 0,21] s^4;$$

$$\alpha_{\min} = -36,8; \quad \alpha_{\max} = 25,2; \quad \beta_{\min} = -26,8; \quad \beta_{\max} = 55,5.$$

Многочлены Харитонова:

$$K^{(1)}(s, \alpha, \beta) = \alpha + \beta s + 3,97s^2 + 2,42s^3 + 0,19s^4;$$

$$K^{(2)}(s, \alpha, \beta) = \alpha + \beta s + 3,97s^2 + 2,38s^3 + 0,19s^4;$$

$$K^{(3)}(s, \alpha, \beta) = \alpha + \beta s + 3,93s^2 + 2,38s^3 + 0,21s^4;$$

$$K^{(4)}(s, \alpha, \beta) = \alpha + \beta s + 3,93s^2 + 2,42s^3 + 0,21s^4.$$

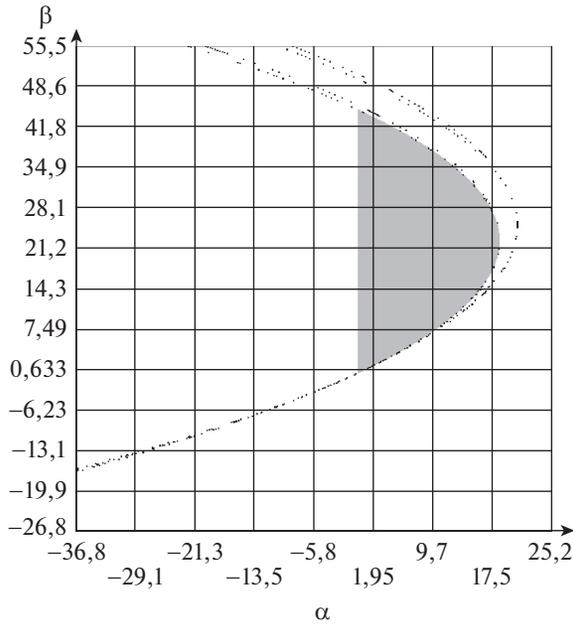


Рис. 2. Робастное D-разбиение примера 1.

Многочлены совокупности (4):

- 1) для $K^{(1)}(s, \alpha, \beta)$: $b_4(\alpha, \beta) = 0,19$; $b_0(\alpha, \beta) = \alpha$;
 $\Delta_3(\alpha, \beta) = 9,6074\beta - 0,19\beta^2 - 5,8564\alpha$;
- 2) для $K^{(2)}(s, \alpha, \beta)$: $b_4(\alpha, \beta) = 0,19$; $b_0(\alpha, \beta) = \alpha$;
 $\Delta_3(\alpha, \beta) = 9,4486\beta - 0,19\beta^2 - 5,6644\alpha$;
- 3) для $K^{(3)}(s, \alpha, \beta)$: $b_4(\alpha, \beta) = 0,21$; $b_0(\alpha, \beta) = \alpha$;
 $\Delta_3(\alpha, \beta) = 9,3534\beta - 0,21\beta^2 - 5,6644\alpha$;
- 4) для $K^{(4)}(s, \alpha, \beta)$: $b_4(\alpha, \beta) = 0,21$; $b_0(\alpha, \beta) = \alpha$;
 $\Delta_3(\alpha, \beta) = 9,5106\beta - 0,21\beta^2 - 5,8564\alpha$.

Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0,01$ приведено на рис. 1, изображение робастного D-разбиения — на рис. 2.

В *примере 2* (пример 2 из [25, с. 44–45]):

$$q(s, \alpha, \beta) = \alpha + 6s + \beta s^2 + 20s^3 + 6s^5; \quad r(s) = [13,5; 16,5]s^4 + [0,9; 1,1]s^6;$$

$$\alpha_{\min} = -10; \quad \alpha_{\max} = 30; \quad \beta_{\min} = -10; \quad \beta_{\max} = 60.$$

Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0,01$ приведено на рис. 3, изображение робастного D-разбиения — на рис. 4.

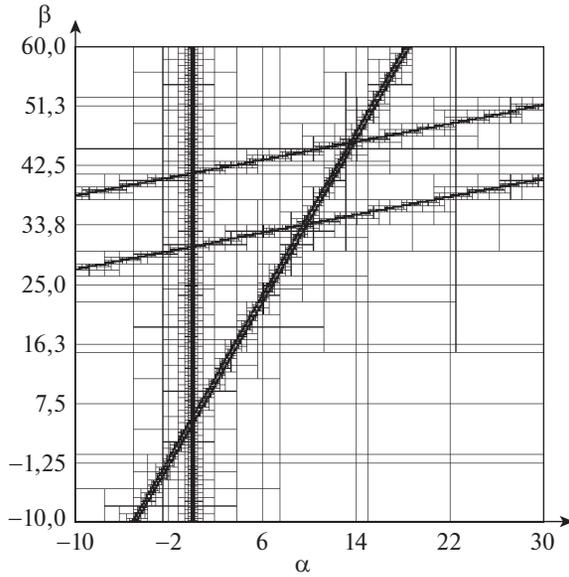


Рис. 3. Множество P примера 2.

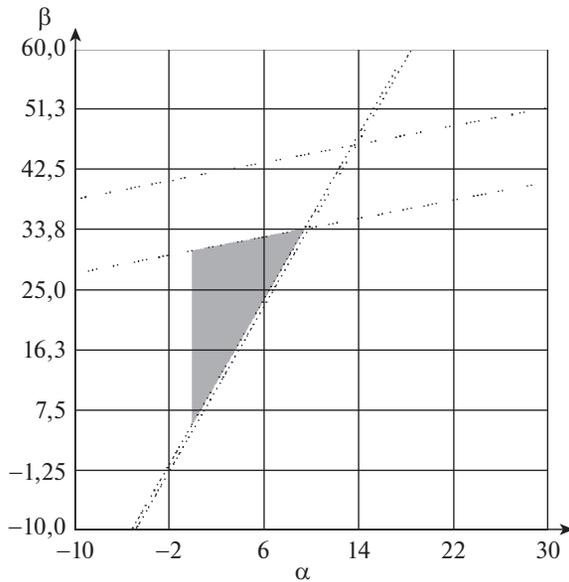


Рис. 4. Робастное D-разбиение примера 2.

В *примере 3* (пример из [25, с. 51–52]):

$$\begin{aligned}
 q(s, \alpha, \beta) &= 1 + 0,2s + \beta s + \alpha s + 0,01s^2 + 0,2\beta s^2 + 0,2\alpha s^2 + \alpha\beta s^2 + \\
 &+ 0,01\beta s^3 + 0,01\alpha s^3 + 0,2\alpha\beta s^3 + 0,01\alpha\beta s^4; \quad r(s) = [27; 33]; \\
 \alpha_{\min} &= -4,5; \quad \alpha_{\max} = 6,54; \quad \beta_{\min} = -3,13; \quad \beta_{\max} = 4,64.
 \end{aligned}$$

Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0,001$ приведено на рис. 5, изображение робастного D-разбиения — на рис. 6.

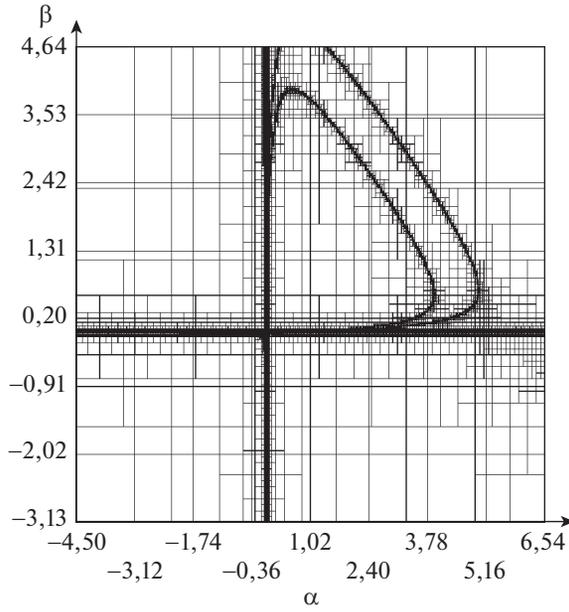


Рис. 5. Множество P примера 3.

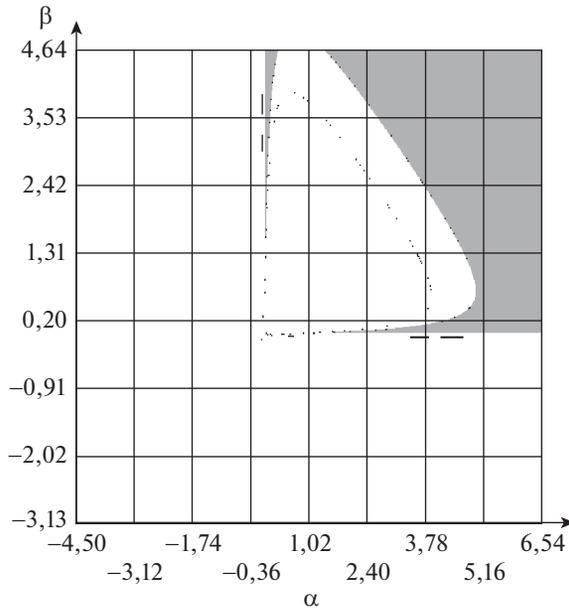


Рис. 6. Робастное D-разбиение примера 3.

В *примере 4* (робастная версия примера 1 из [30, с. 39–40]):

$$\begin{aligned}
 q(s, \alpha, \beta) = & 10(1 + 3\alpha - 10\alpha\beta + 2\alpha^2 + 16\alpha^2\beta^2 - 40\alpha^4 - 16\beta^4) + \\
 & + 10s + 14s^2 + 11s^3 + 5,3s^4 + 1,6s^5 + 0,32s^6 + 0,039s^7 + \\
 & + 10^{-4}(27 - \alpha^4 + \beta^2 + \alpha^5\beta^7) s^8 + 10^{-5}(8 + 1,5\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta^2) s^9;
 \end{aligned}$$

$$r(s) = [-0,7; 0,3] + [-0,1; 0,2] s^5 + [-0,001; 0,002] s^7;$$

$$\alpha_{\min} = -1; \quad \alpha_{\max} = 1; \quad \beta_{\min} = -1; \quad \beta_{\max} = 1.$$

Миноры $\Delta_8(\alpha, \beta)$ для многочленов Харитонова есть многочлены 48-й степени, включающий 454 монома. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0,001$ приведено на рис. 7, изображение робастного D-разбиения — на рис. 8.

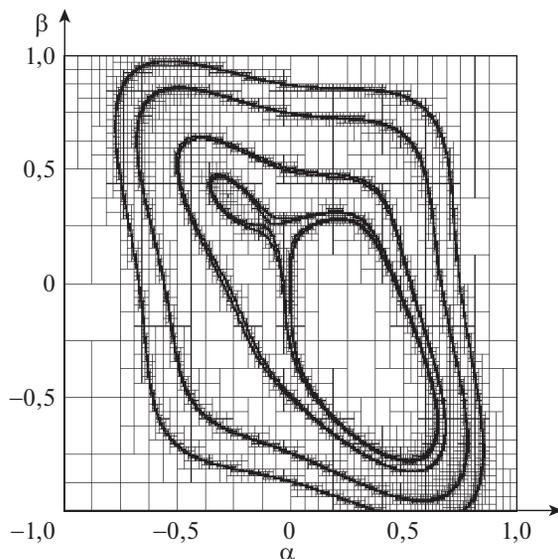


Рис. 7. Множество P примера 4.

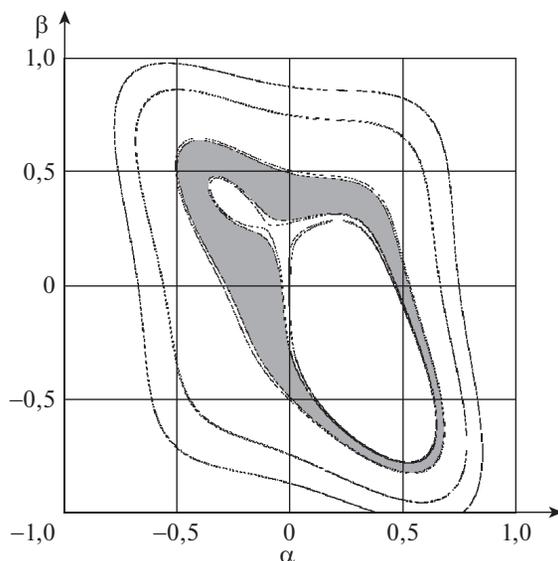


Рис. 8. Робастное D-разбиение примера 4.

Таблица 1. Численные характеристики робастного D-разбиения

| d_{\max} | | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|------------|--------|----------|----------|----------------|-----------------|
| Пример 1 | N | 22 262 | 273 140 | 2 727 898 | 31 051 682 |
| | ρ | 0,098098 | 0,010264 | 0,001131 | 0,00010661 |
| | t | 1,814 с | 19,802 с | 3 мин 14,047 с | 35 мин 4,854 с |
| Пример 2 | N | 15 671 | 130 047 | 1 222 201 | 16 748 097 |
| | ρ | 0,23724 | 0,029056 | 0,0030431 | 0,00022637 |
| | t | 1,557 с | 11,541 с | 1 мин 37,292 с | 21 мин 22,703 с |
| Пример 3 | N | 2362 | 29 022 | 351 635 | 2 953 418 |
| | ρ | 0,36141 | 0,046215 | 0,0045418 | 0,00056646 |
| | t | 0,353 с | 3,169 с | 37,157 с | 4 мин 55,033 с |
| Пример 4 | N | 760 | 10 458 | 115 998 | 2 109 903 |
| | ρ | 16,125 | 0,80623 | 0,12702 | 0,0079101 |
| | t | 1,656 с | 14,09 с | 2 мин 39,652 с | 48 мин 24,646 с |

Таблица 1 для примеров 1–4 характеризует зависимость числа прямоугольников N , точность ρ и время построения t робастного D-разбиения от значения d_{\max} .

Приемлемое в большинстве научных и инженерных приложений значение $\rho < 0,05$ для примеров 1–3 достигается при $d_{\max} < 0,01$, для примера 4 значение $\rho < 0,13$ достигается при $d_{\max} < 0,001$.

5. Заключение

В статье предложен новый метод построения множества интервальной устойчивости многочлена в пространстве двух параметров, от которых коэффициенты многочлена зависят полиномиальным образом. Метод не требует исследования и построения границ множества робастной устойчивости, а основан на аппроксимации множества робастной устойчивости множеством вписанных прямоугольников. Предложенный метод и разработанное программное обеспечение могут быть использованы при решении научных и инженерных задач параметрического анализа и синтеза систем управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Наибольшее число повторений цикла алгоритма 1 соответствует случаю, когда прямоугольник p извлекается из множества P_t без возвращения только при выполнении условия п. 7: $\max(\alpha_i'' - \alpha_i', \beta_i'' - \beta_i') \leq d_{\max}$ (условия п. 5 и п. 6 не выполняются для всех построенных прямоугольников). Из множества P_t обязательно будут извлечены все прямоугольники без возвращения, если у всех прямоугольников каждая из длин сторон будет не больше d_{\max} . Для этого требуется не более \tilde{n} делений вдоль параметра α так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2^{\tilde{n}}} \leq d_{\max} \Leftrightarrow \tilde{n} \geq \log_2 \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{d_{\max}}$, и не более \tilde{n} делений

вдоль параметра β так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\beta_{\max}-\beta_{\min}}{2^{\tilde{n}}} \leq d_{\max} \Leftrightarrow \tilde{n} \geq \log_2 \frac{\beta_{\max}-\beta_{\min}}{d_{\max}}$. Так как $\tilde{n}, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ и значения логарифмов могут быть отрицательными, то можно принять $\tilde{n} \geq \left[\max \left(0; \log_2 \frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{d_{\max}} \right) \right] + 1$, $\tilde{n} \geq \left[\max \left(0; \log_2 \frac{\beta_{\max}-\beta_{\min}}{d_{\max}} \right) \right] + 1$. Всего потребуется не более $n = \tilde{n}\tilde{n}$ делений. На каждом шаге цикла алгоритма 1 из множества P_t либо извлекается без возвращения последний добавленный прямоугольник, либо этот прямоугольник делится на два прямоугольника по стороне с наибольшей длиной. Поэтому необходимое число делений будет осуществлено не более чем за n повторений цикла. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Суммируя неравенства (6) по $\mu = 0, \dots, m_\alpha$ и $\nu = 0, \dots, m_\beta$, получим для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ неравенства

$$(П.1) \quad \begin{cases} d(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta) \geq \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi(\alpha, \beta); \\ d(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \leq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \psi(\alpha, \beta) \leq \max_{(\alpha, \beta) \in p} \psi(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Если выполняется первое из неравенств совокупности (7), то из первого неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha, \beta) > 0$ для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha, \beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p . Если выполняется второе из неравенств совокупности (7), то из второго неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha, \beta) < 0$ для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha, \beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p . Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию $g(\alpha, \beta) = \alpha^\mu \beta^\nu$ ($\mu, \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$), определенную на прямоугольнике $p \subset [0; +\infty)^2$, принадлежащем первому квадранту. Функция $g_\alpha(\alpha) = \alpha^\mu$ выпукла вниз, и все ее значения не меньше значений касательной $g'_\alpha(\alpha)$, проведенной в точке $(\alpha', (\alpha')^\mu)$, и не больше значений хорды $g''_\alpha(\alpha)$, проведенной через точки $(\alpha', (\alpha')^\mu)$ и $(\alpha'', (\alpha'')^\mu)$. То есть для всех $\alpha \in [\alpha'; \alpha'']$ имеет место неравенство

$$(П.2) \quad g'_\alpha(\alpha) \leq \alpha^\mu \leq g''_\alpha(\alpha).$$

Уравнение касательной:

$$(П.3) \quad \begin{cases} g'_\alpha(\alpha) = a'_\alpha \alpha + b'_\alpha; \\ a'_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = 0; \\ \mu(\alpha')^{\mu-1}, & \text{если } \mu \geq 1; \end{cases} \\ b'_\alpha = (\alpha')^\mu - a'_\alpha \alpha'. \end{cases}$$

Уравнение хорды:

$$(II.4) \quad \begin{cases} g''_{\alpha}(\alpha) = a''_{\alpha}\alpha + b''_{\alpha}; \\ a''_{\alpha} = \frac{(\alpha'')^{\mu} - (\alpha')^{\mu}}{\alpha'' - \alpha'}; \\ b''_{\alpha} = (\alpha')^{\mu} - a''_{\alpha}\alpha'. \end{cases}$$

Аналогично формулам (II.2)–(II.4) для всех $\beta \in [\beta'; \beta'']$ имеют место формулы:

$$(II.5) \quad g'_{\beta}(\beta) \leq \beta^{\nu} \leq g''_{\beta}(\beta);$$

$$(II.6) \quad \begin{cases} g'_{\beta}(\beta) = a'_{\beta}\beta + b'_{\beta}; \\ a'_{\beta} = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu = 0; \\ \nu(\beta')^{\nu-1}, & \text{если } \nu \geq 1; \end{cases} \\ b'_{\beta} = (\beta')^{\nu} - a'_{\beta}\beta'; \end{cases}$$

$$(II.7) \quad \begin{cases} g''_{\beta}(\beta) = a''_{\beta}\beta + b''_{\beta}; \\ a''_{\beta} = \frac{(\beta'')^{\nu} - (\beta')^{\nu}}{\beta'' - \beta'}; \\ b''_{\beta} = (\beta')^{\nu} - a''_{\beta}\beta'. \end{cases}$$

Так как прямоугольник p принадлежит первому квадранту, то значения всех функций неравенств (II.2) и (II.5) неотрицательны. Перемножая эти неравенства, получим, что для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ выполняется:

$$(II.8) \quad \begin{cases} g'(\alpha, \beta) \leq \alpha^{\mu}\beta^{\nu} \leq g''(\alpha, \beta); \\ g'(\alpha, \beta) = g'_{\alpha}(\alpha)g'_{\beta}(\beta) = g'_{\alpha\beta}\alpha\beta + g'_{\alpha}\alpha + g'_{\beta}\beta + g'_0; \\ g''(\alpha, \beta) = g''_{\alpha}(\alpha)g''_{\beta}(\beta) = g''_{\alpha\beta}\alpha\beta + g''_{\alpha}\alpha + g''_{\beta}\beta + g''_0; \\ g'_{\alpha\beta} = a'_{\alpha}a'_{\beta}; \quad g'_{\alpha} = a'_{\alpha}b'_{\beta}; \quad g'_{\beta} = a'_{\beta}b'_{\alpha}; \quad g'_0 = b'_{\alpha}b'_{\beta}; \\ g''_{\alpha\beta} = a''_{\alpha}a''_{\beta}; \quad g''_{\alpha} = a''_{\alpha}b''_{\beta}; \quad g''_{\beta} = a''_{\beta}b''_{\alpha}; \quad g''_0 = b''_{\alpha}b''_{\beta}. \end{cases}$$

Если $d_{\mu\nu} > 0$ ($\mu = 0, \dots, m_{\alpha}; \nu = 0, \dots, m_{\beta}$), то, умножая первое неравенство (II.8) на $d_{\mu\nu}$, получим для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ неравенство $d_{\mu\nu}g'(\alpha, \beta) \leq d_{\mu\nu}\alpha^{\mu}\beta^{\nu} \leq d_{\mu\nu}g''(\alpha, \beta)$ и положим

$$(II.9) \quad \begin{cases} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = d_{\mu\nu}g'(\alpha, \beta); \\ \psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = d_{\mu\nu}g''(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Если $d_{\mu\nu} < 0$ ($\mu = 0, \dots, m_{\alpha}; \nu = 0, \dots, m_{\beta}$), то, умножая первое неравенство (II.8) на $d_{\mu\nu}$, получим для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ неравенство $d_{\mu\nu}g''(\alpha, \beta) \leq d_{\mu\nu}\alpha^{\mu}\beta^{\nu} \leq d_{\mu\nu}g'(\alpha, \beta)$ и положим

$$(II.10) \quad \begin{cases} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = d_{\mu\nu}g''(\alpha, \beta); \\ \psi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = d_{\mu\nu}g'(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть (α_0, β_0) есть произвольная точка из множества робастной устойчивости Λ_s . Тогда для каждого многочлена Харитонова, соответствующего этой точке, совокупность (4) не имеет решения. Это означает, что для каждого из многочленов вида (5) имеет место неравенство

$$(П.11) \quad d(\alpha_0, \beta_0) \neq 0.$$

Для доказательства теоремы укажем способ выбора d_{\max} , при котором существует прямоугольник p , содержащий точку (α_0, β_0) , и для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ справедлива совокупность неравенств (7), выполнение которых по теореме 3 обеспечивает робастную устойчивость на прямоугольнике p .

По теореме 6 [30] для любой точки $(\alpha_0, \beta_0) \in \Lambda_s$ существует d_{\max} такое, что существует прямоугольник p , содержащий точку (α_0, β_0) , и для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ справедлива совокупность неравенств

$$(П.12) \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu, \min} > 0; \quad d_{\mu\nu, \min} = \min_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta); \\ \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu, \max} < 0; \quad d_{\mu\nu, \max} = \max_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta). \end{array} \right.$$

Покажем, что из первого неравенства совокупности (П.12) следует первое неравенство совокупности (7) и из второго неравенства совокупности (П.12) следует второе неравенство совокупности (7). Тем самым докажем теорему 5.

Из неравенства $\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ следует

$$(П.13) \quad \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi(\alpha, \beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta).$$

При $d_{\mu\nu} > 0$:

$$\min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \min_{(\alpha, \beta) \in p} (d_{\mu\nu} g'_\alpha(\alpha) g'_\beta(\beta)) = \min_{(\alpha, \beta) \in p} (d_{\mu\nu} g'_\alpha(\alpha) g'_\beta(\beta)).$$

Касательные $g'_\alpha(\alpha)$, $g'_\beta(\beta)$ есть неубывающие, неотрицательные функции, поэтому под знаком последнего минимума стоит непрерывная функция, не убывающая вдоль каждой координаты и достигающая наименьшего значения при наименьших значениях аргументов:

$$(П.14) \quad \begin{aligned} \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) &= d_{\mu\nu} g'_\alpha(\alpha') g'_\beta(\beta') = d_{\mu\nu} (\alpha')^\mu (\beta')^\nu = \\ &= d_{\mu\nu}(\alpha', \beta') = \min_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $\min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ из (П.14) в (П.13), получим, что при $d_{\mu\nu} > 0$ имеет место неравенство

$$(П.15) \quad \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi(\alpha, \beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} \min_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta).$$

При $d_{\mu\nu} < 0$:

$$\min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \min_{(\alpha, \beta) \in p} (d_{\mu\nu} g''(\alpha, \beta)) = \min_{(\alpha, \beta) \in p} (d_{\mu\nu} g''_\alpha(\alpha) g''_\beta(\beta)).$$

Хорды $g''_\alpha(\alpha)$, $g''_\beta(\beta)$ есть неубывающие, неотрицательные функции, поэтому под знаком последнего минимума стоит непрерывная функция, не возрастающая вдоль каждой координаты и достигающая наименьшего значения при наибольших значениях аргументов:

$$(П.16) \quad \begin{aligned} \min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta) &= d_{\mu\nu} g''_\alpha(\alpha'') g''_\beta(\beta'') = d_{\mu\nu} (\alpha'')^\mu (\beta'')^\nu = \\ &= d_{\mu\nu} (\alpha'', \beta'') = \min_{(\alpha, \beta) \in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $\min_{(\alpha, \beta) \in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ из (П.16) в (П.13), получим, что при $d_{\mu\nu} > 0$ имеет место неравенство (П.15).

Таким образом, из первого неравенства совокупности (П.12) с учетом доказанного неравенства (П.15) следует первое неравенство совокупности (7).

Аналогично доказывается, что из второго неравенства совокупности (П.12) следует второе неравенство совокупности (7).

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Пупков К.А. (ред.). Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
3. Яковлев В.Б. (ред.). Теория автоматического управления. М.: Высшая школа, 2005.
4. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. М.: МЭИ, 2008.
5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: URSS, 2019.
6. Оморев Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364–370.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Линейные системы. М.: Юрайт, 2021.

8. *Gu Da-Wei, Petko Hr.P., Konstantinov M.M.* Robust Control Design with Matlab. London, UK: Springer, 2005.
9. *Lin F.* Robust Control Design. An Optimal Control Approach. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2007.
10. *Sinha A.K.* Linear Systems. Optimal and Robust Control. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2007.
11. *Belmiloudi A.* Stabilization, Optimal and Robust Control: Theory and Applications in Biological and Physical Sciences. London, UK: Springer, 2008.
12. *Bartoszewicz A.* Robust Control, Theory and Applications. Rijeka, Croatia: InTech, 2011.
13. *Levine W.S.* The Control Systems Handbook. Control System Advanced Methods. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2011.
14. *Yedavalli R.K.* Robust Control of Uncertain Dynamic Systems. A Linear State Space Approach. New York, U.S.: Springer, 2014.
15. *Dodds S.J.* Feedback Control. Linear, Nonlinear and Robust Techniques and Design with Industrial Applications. London, UK: Springer, 2015.
16. *Liu K.-Z., Yao Y.* Robust Control. Theory and Applications. Singapore: John Wiley & Sons, 2016.
17. *Feng Y., Yagoubi M.* Robust Control of Linear Descriptor Systems. Singapore: Springer, 2017.
18. *Garcia-Sanz M.* Robust Control Engineering. Practical QFT solutions. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2017.
19. *Golnarachi F., Kuo B.* Automatic Control Systems. New York, U.S.: McGraw Hill, 2017.
20. *Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A.* Feedback Control of Dynamic Systems. London, UK: Pearson Education Limited, 2020.
21. *Astrom K.J., Murray R.M.* Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton. U.S.: Princeton university press, 2021.
22. *Baillieul J., Samad T.* Encyclopedia of Systems and Control. London, UK: Springer, 2021.
23. *Dorf R., Bishop R.* Modern Control Systems. London, UK: Pearson Education Limited, 2022.
24. *Fortuna L., Frasca M., Buscarino A.* Optimal and Robust Control Advanced Topics with MATLAB. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2022.
25. *Петров Н.П., Поляк В.Т.* Робастное D -разбиение // АИТ. 1991. № 11. С. 41–53.
Petrov N.P., Polyak V.T. Robust D -decomposition // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 11. P. 1513–1523.
26. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
27. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
28. *Харитонов В.Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Том 14. № 11. С. 2086–2088.

29. *Поляк В.Т., Цыпкин Я.З.* Частотные критерии робастной устойчивости и аперриодичности линейных систем // *АиТ.* 1990. № 9. С. 45–54.
Polyak V.T., Tsytkin Ya.Z. Frequency Domain Criteria for Robust Stability and Aperiodicity of Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 1990. V. 51. No. 9. P. 1192–1201.
30. *Пряшников П.Ф.* D-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров // *АиТ.* 2021. № 3. С. 32–46.
Pryashnikova P.F. D-Decomposition in the Case of Polynomial Dependence of the Coefficients of a Polynomial on Two Parameters // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 3. P. 398–409.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 15.08.2021

После доработки 29.01.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. Е.М. СКАРЖИНСКАЯ, д-р экон. наук
(yelena.skarzhinsky@gmail.com)

(Костромской государственной университет),
В.И. ЦУРИКОВ, д-р экон. наук, канд. физ.-мат. наук
(tsurikov@inbox.ru)

(Костромская государственная сельскохозяйственная академия)

КООРДИНАЦИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДЕЙСТВИЙ С ПОМОЩЬЮ СТРАТЕГИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Статья посвящена теоретическому исследованию координации действий членов самоуправляемого коллектива с помощью стратегии Штакельберга, направленной на повышение их индивидуальных выигрышей. Предполагается, что коллектив создает совокупный доход, возрастающий с ростом усилий, прилагаемых каждым агентом, и подчиняющийся закону убывающей отдачи. Существующее в условиях полной автономии всех агентов единственное равновесие по Нэшу является неэффективным по Парето. Показано, что для перехода к Парето-предпочтительному исходу достаточно образования в коллективе малой группы (коалиции), члены которой доверяют друг другу и не склонны к оппортунистическому поведению. Следуя коалиционной стратегии, направленной на достижение максимума коалиционного выигрыша, члены коалиции увеличивают размеры своих усилий, что приводит к росту совокупного дохода. Найдены условия, при которых коалиция может использовать стратегию лидера по Штакельбергу. Показано, что равновесный по Штакельбергу исход доминирует по Парето над равновесными исходами Нэша как в бескоалиционной игре, так и в коалиционной.

Ключевые слова: коллективные действия, координация, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, эффективность по Парето, коалиция.

DOI: 10.31857/S0005231022070066, EDN: AEMECW

1. Введение

В статье исследуется деятельность самоуправляемого коллектива, создающего общий доход в результате приложения его членами индивидуальных усилий. Цель каждого агента состоит в максимизации собственного индивидуального выигрыша.

Главный источник проблем коллективных действий коренится в эгоистических устремлениях агентов, которые в условиях действия закона убываю-

щей отдачи приводят к несовпадению индивидуальных оптимумов с коллективным. Следствием независимого выбора агентами объемов прилагаемых ими усилий является равновесие Нэша, которое достигается в неэффективном по Парето исходе, что наглядно иллюстрируется моделью, известной под названием «Дилемма заключенных» [1, 2]. Те же факторы создают проблему морального риска, описанную в модели Бенгта Хольмстрёма [3], а также в моделях неполного контракта Гроссмана–Харта–Мура [4, 5] и Тироля–Фуруботна–Рихтера [6, т. 1, с. 50–54; 7, с. 293–301]. Отметим, что в моделях неполного контракта рассматривается, как правило, взаимодействие только двух агентов, и поэтому многие проблемы коллективных действий в них просто не отражаются.

Предполагаем, что в коллективе как в большой группе агентов может сформироваться малая группа — коалиция, способная координировать усилия ее участников. Цель статьи заключается в исследовании возможности образования коалиции, использующей стратегию лидера по Штакельбергу, для повышения эффективности коллективной деятельности.

Напомним, что первоначально модели Курно [8] и Штакельберга [9] были разработаны для описания дуополии, но впоследствии они получили распространение на произвольное количество фирм [10, 11] и на многопродуктовые рынки [12]. Как известно, модель Штакельберга основана на отказе от симметрии, положенной в основу модели Курно. В модели Штакельберга предполагается, что одна из конкурирующих фирм играет роль лидера (leader), который делает первый шаг, а другая — роль последователя (follower). Последователь выбирает свою стратегию с учетом известной ему стратегии лидера, считая ее заданной. Предварительно лидер инкорпорирует известную ему кривую реагирования конкурента в свою функцию прибыли, в результате чего его прибыль становится функцией только им выбираемой стратегии, и ему остается только найти ту стратегию, при которой его прибыль достигает максимума.

Следует отметить работы [13, 14], в которых анализируются возможности достижения олигополией равновесия по Штакельбергу в случаях, когда агенты не располагают достоверной информацией относительно размеров предельных издержек конкурентов или их выбора. В модели олигополии М.И. Гераськина [15] исследуется зависимость выигрышей агентов в равновесии Штакельберга от вида функций издержек. В работах Ю.Б. Гермейера [16], М.А. Горелова [17], М.В. Губко и Д.А. Новикова [18] стратегия Штакельберга анализируется в рамках моделей иерархической системы типа Центр-агент. Система представляется двумя игроками, один из которых играет роль Центра, ограничивающего своим первым ходом множество возможных действий второго (пассивного) игрока. Задача решается, как правило, в общем виде, и в качестве одного из возможных вариантов анализируется стратегия Штакельберга. При этом выигрыш пассивного агента явно зависит только от его собственного выбора.

При распространении разработанной для олигополистического рынка модели Штакельберга на коллективные действия следует учитывать принципиальное различие между коллективом, целью деятельности которого является производство общего блага, и олигополией. В частности, для коллективных действий характерны отношения сотрудничества, а для олигополии — отношения конкуренции. Соответственно, каждый член коллектива заинтересован в высокой активности своих партнеров, в то время как любой фирме в условиях олигополии, напротив, выгодна низкая активность конкурентов.

В работе Д.А. Новикова [19] рассматривается класс задач о минимизации издержек коллектива, выполняющего работы в заданном объеме, при различных предположениях относительно иерархии представлений агентов о типах друг друга, объемах выполняемых работ, наличия или отсутствия управляющего центра и др. Задача данной статьи наряду с определенным сходством с задачами этого класса имеет и существенные отличия. В частности, здесь ищется не то оптимальное распределение объемов работ между членами коллектива, при котором минимизируются суммарные издержки, а стимулы для каждого агента повысить уровень своих усилий (а значит, и издержек) относительно объемов усилий, отвечающих равновесному по Нэшу исходу.

В рассматриваемой модели предполагается отсутствие какой-либо асимметрии в распределении информации, причем функции совокупного дохода и индивидуальных выигрышей, как и состав коалиции и стремление ее членов к максимуму коалиционного выигрыша, а каждого некооперированного агента к максимуму своего индивидуального выигрыша, являются общим знанием. Технология влияния одних агентов на выбор других вполне конкретна, лишена всяких элементов директивного (административного) управления и основывается исключительно на свойстве комплементарности усилий и общем знании агентов. Выигрыш любого агента явным образом зависит от выбора каждого члена коллектива.

В ранее вышедших работах авторов данной статьи показано, что в случае образования в коллективе коалиции, которая реализует стратегию, направленную на максимизацию коалиционного выигрыша, *достигается исход, доминирующий по Парето неэффективное равновесие Нэша, достигаемое в бескоалиционной игре* [20, 21]. Если функция дохода обеспечивает комплементарность усилий членов коллектива, т.е. свойство предельного дохода по усилиям агента увеличиваться с ростом усилий, прилагаемых другим агентом, то данный положительный эффект образуется не только за счет повышения равновесных значений усилий членов коалиции, но и благодаря увеличению усилий остальных агентов, не входящих в коалицию.

Указанная возможность, порождаемая положительной зависимостью между усилиями членов коллектива, уже подвергалась теоретическому исследованию. Например, в модели команды, состоящей из двух агентов, которую предложили S. Huck и P. Rey-Biel [22], полезность последователя растет по мере сокращения разрыва между осуществляемыми им и лидером объемами усилий. В работе Жерве и Гольдштейна [23] улучшение по Парето свя-

зывается с неадекватной оценкой одним из агентов собственных усилий, т.е. фактически с нерациональным поведением. В этих работах равновесие по Штакельбергу не достигается. В полной мере стратегия Штакельберга реализуется в модели коллектива, которую предложил J. Kim [24]. В его работе, в отличие от модели данной статьи, лидера фактически назначает принципал, который условиями контракта способен оказывать влияние на стимулы агента.

Важно подчеркнуть, что члены коалиции могут оказывать стимулирующее воздействие на размеры усилий некооперированных агентов только размерами своих собственных усилий и только тогда, когда некооперированные агенты выбирают размеры своих усилий на основе достоверной информации о значениях усилий членов коалиции [25]. В последовательной двухпериодной игре некооперированные агенты осуществляют свои усилия только после членов коалиции, и поэтому получают эту информацию непосредственно, наблюдая усилия членов коалиции. Следует заметить, что описание коллективных действий в рамках последовательной игры не всегда может быть адекватным. Например, если деятельность коллектива связана с технологическим процессом, требующим одновременного приложения усилий со стороны всех членов коллектива.

В случае одновременной игры некооперированные агенты могут получить информацию об усилиях, которые приложат члены коалиции, только на основе сообщения от самой коалиции или определенных предварительных действий коалиции, не оставляющих места для сомнений в ее намерениях. Общее знание относительно размеров усилий, которые члены коалиции осуществляют в одновременной игре, является необходимым и достаточным для рациональных агентов условием успешной координации усилий [26]. При его выполнении коалиция может оптимизировать значения усилий своих членов, определяя их методом обратной индукции, т.е. применяя стратегию Штакельберга, с доведением до начала игры этой информации до некооперированных агентов.

Однако для достижения в одновременной игре того же исхода, который отвечает в двухпериодной игре равновесию по Штакельбергу, простой декларации коалиции о своих намерениях может оказаться недостаточно. Дело в том, что в одновременной игре, как будет показано дальше, коалиционный выигрыш достигает свой максимум при более низком значении усилий членов коалиции, чем в двухпериодной игре при одном и том же уровне усилий некооперированных агентов. Поэтому если хотя бы один из некооперированных агентов усомнится в намерении членов коалиции осуществить свои усилия в обещанном размере, то он осуществит свои усилия в размере, недостаточном для достижения равновесия по Штакельбергу. В результате не будет достигнуто максимум не только коалиционного выигрыша, но и тех некооперированных агентов, которые поверят обещаниям коалиции и осуществят свои усилия в объемах, отвечающих равновесию по Штакельбергу. Так как этим знанием обладает каждый член коллектива, то тот исход, который отвечает

в двухпериодной игре равновесию по Штакельбергу, в одновременной игре может оказаться недостижимым.

Избежать такого рода неопределенности коалиция может путем внесения залога или заключения соответствующего контракта, или же инвестирования в соответствующий специфический ресурс, лучшее альтернативное использование которого менее выгодно, чем осуществление усилий в обещанных объемах. В одновременной игре именно в этом действии фактически и состоит первый шаг коалиции, который необходим для надежного достижения исхода, совпадающего с равновесием по Штакельбергу в двухпериодной игре. Этот первый шаг в виде выполнения одного из перечисленных действий равносителен непосредственному наблюдению усилий членов коалиции.

В настоящей работе рассматривается общий случай несепарабельной функции дохода и линейной функции издержек. Будет показано, что положительная зависимость оптимальной стратегии каждого автономного агента от вкладов членов коалиции создает предпосылки для использования коалицией стратегии лидера по Штакельбергу. Для успешного осуществления этой стратегии члены коалиции должны быть уверены в том, что все остальные агенты следуют стратегии последователей, т.е. определяют свои оптимальные усилия как функции усилий членов коалиции. Результатом является равновесие Штакельберга, достигаемое в исходе, который доминирует не только над неэффективным равновесием Нэша в бескоалиционной игре, но и над равновесным исходом в игре, в которой коалиция выступает единым игроком, но не использует стратегию Штакельберга, а следует стратегии Курно.

2. Базовая модель

Обозначим через n число индивидов, составляющих коллектив, в котором путем осуществления индивидуальных усилий, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — их денежные эквиваленты, создается совокупный доход $D = D(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Считаем, что при всех $\sigma_i \in (0, \infty)$, где $i = 1, \dots, n$, выполняются следующие условия.

1. Величина дохода возрастает с ростом прилагаемых усилий:

$$(1) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} > 0.$$

2. Для того чтобы функции выигрышей имели единственный максимум, функция дохода строго выпукла вверх. Из этого условия следует, что функция дохода удовлетворяет закону убывающей отдачи:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i^2} < 0.$$

3. Чтобы решение не уходило в нуль или бесконечность, выполняются условия:

$$(3) \quad \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \infty, \quad \lim_{\sigma_i \rightarrow \infty} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 0.$$

4. Усилия каждого агента оказывают положительное влияние на величину предельного дохода по усилиям любого другого члена коллектива:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} > 0 \quad \text{при} \quad i \neq k.$$

Будем считать, что функции дохода и выигрышей являются общим знанием для всех членов коллектива, а размеры приложенных усилий являются наблюдаемыми для них после их полного осуществления. На этапе *ex ante* в коллективе устанавливается правило распределения будущего ожидаемого совокупного дохода D , согласно которому агенту i принадлежит относительная доля α_i ; $0 < \alpha_i < 1$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. В неструктурированном коллективе каждый индивид автономно выбирает объем прилагаемых им усилий, преследуя цель максимизации своего выигрыша

$$(5) \quad U_k = \alpha_k D(\sigma_k, \sigma_{-k}) - \sigma_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

где σ_{-k} — значения усилий всех членов коллектива за исключением индивида k .

В [27] доказано, что в бескоалиционной игре, где выигрыши агентов задаются формулами (5), для любого набора α_k существует и притом единственное равновесие Нэша N , определяемое из условий максимума первого порядка для функций U_k , т.е. системой уравнений

$$(6) \quad \alpha_k \frac{\partial D}{\partial \sigma_k} = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Используем следующие обозначения: σ_k^N с $k = 1, \dots, n$ — решение системы (6); D^N — величина совокупного дохода; U^N — суммарный выигрыш всех членов коллектива, U_k^N — индивидуальный выигрыш агента k . В [27] показано, что этот равновесный исход не является эффективным по Парето, так как справа от него, т.е. при $\sigma_i > \sigma_i^N$ (если доинвестирование осуществляют не менее двух агентов), находятся Парето-предпочтительные состояния.

Каждому агенту выгодно, чтобы все остальные члены коллектива увеличили прилагаемые ими усилия сверх равновесного уровня, определяемого системой (6), но при этом *ему самому невыгодно* (в силу закона убывающей отдачи) подобное повышение объема собственных усилий. Поэтому рациональный агент увеличит свои усилия только в случае, когда он уверен, что хотя бы один из его партнеров поступит так же. Иными словами, для достижения любого Парето-предпочтительного исхода необходима координация усилий хотя бы двух членов коллектива. Следовательно, при условии автономности всех членов коллектива переход от равновесия Нэша к любому доминирующему над ним исходу противоречит принципу индивидуальной рациональности. Таким образом, неструктурированный коллектив, состоящий из автономных эгоистических агентов, обречен находиться в ловушке неэффективного равновесия Нэша¹.

¹ Этот вывод полностью совпадает с выводом, полученным в работе Хольмстрема [3], в модели «дилемма заключенных», в моделях неполного контракта [4–7].

Важной характеристикой коллективных действий является существование исхода, соответствующего общественному оптимуму. Здесь, как и в экономической теории контрактов, общественный оптимум определяется как исход, в котором максимальное значение достигается совокупным выигрышем всего коллектива, равным разности общего дохода и суммы издержек всех членов коллектива:

$$(7) \quad U = \sum_{i=1}^n U_i = D - \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Условия максимума первого порядка для функции U имеют вид системы уравнений

$$(8) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Используем следующие обозначения: σ_k^P с $k = 1, \dots, n$ — решение системы (8); D^P — величина соответствующего совокупного дохода; U^P — величина суммарного выигрыша всех членов коллектива; U_k^P — величина индивидуального выигрыша агента k .

Данный исход игры, который обозначим через P , будет Парето-оптимальным² при осуществлении в коллективе распределения совокупного дохода, отвечающего следующим условиям:

$$(9) \quad U_k^P \geq U_k^N, \quad \text{где } k = 1, \dots, n.$$

Так как согласно условиям (1)–(2) $U^P = \sum_{k=1}^n U_k^P > \sum_{k=1}^n U_k^N = U^N$, то существует такое распределение дохода между членами коллектива, при котором общественно оптимальный исход будет Парето-оптимальным.

3. Стимулирующее воздействие коалиционной стратегии

Теперь покажем, что образование в коллективе коалиции и осуществление коалиционной стратегии, дает возможность для преодоления равновесия Нэша. Предположим, что в коллективе образовалась коалиция, члены которой способны координировать значения своих усилий в целях достижения максимума коалиционного выигрыша. Вопросы образования и устойчивости коалиции представляют отдельную проблему, частично рассмотренную авторами в [28], и поэтому здесь не затрагиваются. Здесь будем предполагать, что координация между членами коалиции основана на отношениях доверия, так как именно в этом случае минимальны транзакционные издержки

² Чтобы убедиться, что в исходе P суммарный выигрыш U выше, чем в исходе N , достаточно обратиться к градиенту функции U . В точке равновесия Нэша N каждая координата $\text{grad}U$ больше нуля, откуда следует, что функция U достигает более высоких значений при уровнях усилий, превышающих равновесные.

координации. Кроме того, полагаем, что стремление коалиции к максимуму коалиционного выигрыша является общим знанием.

Обозначим коалицию через C . Некооперированные агенты (не вошедшие в коалицию) образуют множество NC . Используем следующие обозначения: $[\sigma_i]$ с $i \in C$ — кортеж значений усилий членов коалиции; $[\sigma_j]$ с $j \in NC$ — кортеж значений усилий некооперированных агентов; $\alpha_C = \sum_{i \in C} \alpha_i$ — относительная доля коалиции в общем доходе D . Выражение для коалиционного выигрыша запишем в виде

$$(10) \quad U_C = \alpha_C D([\sigma_i], [\sigma_j]) - \sum_{i \in C} \sigma_i, \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Значения усилий членов коалиции, при которых их совокупный выигрыш достигает максимума, определяется системой уравнений

$$(11) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{\alpha_C}, \quad i \in C.$$

Некооперированные агенты выбирают объемы своих усилий из условий максимума собственных индивидуальных выигрышей, т.е. из уравнений, аналогичных (6):

$$(12) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{\alpha_j}, \quad j \in NC.$$

Игра, сложившаяся в результате образования коалиции C , отличается от первоначальной бескоалиционной игры тем, что в ней наряду с автономными (некооперированными) игроками $j \in NC$ участвует один агрегированный игрок в лице коалиции C . Совокупность систем уравнений (11) и (12) имеет единственное решение и, соответственно, новая игра имеет единственный равновесный исход, который обозначим через \hat{C} . Значения усилий агентов в этом исходе обозначим как $\sigma_i^{\hat{C}}$ и $\sigma_j^{\hat{C}}$, $i \in C$, $j \in NC$, величину совокупного дохода — как $D^{\hat{C}}$, значения выигрыша коалиции — как $U_C^{\hat{C}}$, агентов — как $U_i^{\hat{C}}$ и $U_j^{\hat{C}}$.

Покажем, что исход \hat{C} доминирует по Парето над исходом N и в нем справедливы следующие неравенства:

$$(13) \quad \sigma_i^{\hat{C}} > \sigma_i^N, \quad i \in C; \quad \sigma_j^{\hat{C}} > \sigma_j^N, \quad j \in NC;$$

$$(14) \quad U_j^{\hat{C}} > U_j^N, \quad j \in NC; \quad U_C^{\hat{C}} > U_C^N = \sum_{i \in C} U_i^N.$$

Сравним совместное решение систем (11) и (12), определяющее исход \hat{C} , с решением системы (6), определяющим исход N . Можно считать, что система (11)–(12) образована из системы (6) путем замены в правых частях уравнений с $i \in C$ величин α_i на превышающую их величину $\alpha_C = \sum_{i \in C} \alpha_i$. Так как

решение системы (6) согласно (2) положительно зависит от значений α_k , то эта замена приводит к более высоким значениям σ_i , отвечающим решению систем (11)–(12)³.

Левые части уравнений (12) являются функциями усилий σ_j некооперированных агентов и усилий σ_i членов коалиции. При любых фиксированных значениях σ_i система (12) имеет единственное решение относительно переменных σ_j с $j \in NC$, определяющее значения этих величин в виде функций переменных σ_i с $i \in C$. Обозначим эти решения как

$$(15) \quad \sigma_j = R_j([\sigma_i]), \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Функции (15) представляют собой *функции реагирования* некооперированных агентов на известные им значения усилий членов коалиции. В силу неравенств (4) левые части уравнений (12) являются возрастающими функциями переменных σ_i с $i \in C$. Следовательно, решения этих уравнений, т.е. функции реагирования $\sigma_j = R_j([\sigma_i])$, также возрастают по всем переменным σ_i с $i \in C$.

Из неравенств (13) согласно условию (1) следует, что $D^{\hat{C}} > D^N$. Так как каждая функция выигрыша (и U_j , и U_C) имеет единственный максимум, то их максимумы в исходе \hat{C} превышают соответствующие максимумы, достигаемые в исходе N , т.е. неравенства (14) справедливы. Можно полагать, что отношения взаимного доверия, связывающие членов коалиции, способны обеспечить бесконфликтное распределение между ними коалиционного выигрыша в целях обеспечения условий индивидуальной рациональности для всех членов коалиции, и поэтому неравенство $U_C^{\hat{C}} > U_C^N$ совместимо с неравенствами

$$(16) \quad U_i^{\hat{C}} > U_i^N, \quad i \in C.$$

Таким образом, *реализация коалиционной стратегии приводит к исходу, доминирующему по Парето над равновесием Нэша, достигаемому в бескоалиционной игре.*

4. Стратегия Штакельберга

В модели олигополистического рынка Штакельберга предполагается, что лидер осуществляет первый ход: он либо первым осуществляет свою стратегию (например, выпускает продукцию в определенном объеме), либо демонстративно производит безвозвратные инвестиции, убеждающие конкурентов в том, что лидер выбрал определенную стратегию. Только при этом условии конкуренты поверят в его выбор и будут учитывать его при выборе своих оптимальных стратегий.

³ Строгое доказательство теоремы о возрастании всех переменных, образующих решение системы (6), при уменьшении значения хотя бы одного из параметров, представляющих собой ее правые части, приводится в [25].

В модели данной статьи предполагается, что коалиция, как уже было сказано выше, своим первым ходом убедила некооперированных агентов в том, что члены коалиции произведут усилия в объемах $[\sigma_i]$, $i \in C$. До начала игры коалиция находит из уравнений (12) функции реагирования $\sigma_j = R_j([\sigma_i])$. Совокупность этих функций определяет в пространстве значений σ_k ($k = 1, \dots, n$) поверхность реагирования, в каждой точке которой выполняются условия максимума выигрышей некооперированных агентов (12). На поверхности реагирования величина совокупного дохода является функцией соответствующих усилий членов коалиции:

$$(17) \quad D([\sigma_i], R_j([\sigma_i])), \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Таким образом, коалиция как лидер по Штакельбергу инкорпорирует функции реагирования некооперированных агентов в свою функцию чистого дохода, которая принимает следующий вид:

$$(18) \quad U_C = \alpha_C D([\sigma_i], R_j([\sigma_i])) - \sum_{i \in C} \sigma_i$$

с условиями максимума в виде

$$(19) \quad \alpha_C D'_{\sigma_i} - 1 = 0, \quad i \in C,$$

где D'_{σ_i} — полная производная по σ_i от функции (18), взятая на поверхности реагирования:

$$(20) \quad D'_{\sigma_i} = \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{j \in NC} \frac{\partial D}{\partial \sigma_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i}, \quad i \in C.$$

С учетом (12) выражения для производных (20) принимают вид

$$(21) \quad D'_{\sigma_i} = \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{j \in NC} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i}.$$

С учетом (21) уравнения (19) преобразуются к виду

$$(22) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{j \in NC} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{\alpha_C}, \quad i \in C.$$

Обозначим исход игры, соответствующий решению Штакельберга, как \hat{S} , значения усилий членов коалиции в этом исходе как $-\sigma_i^{\hat{S}}$ с $i \in C$ и $\sigma_j^{\hat{S}}$ с $j \in NC$, величину совокупного дохода — как $D^{\hat{S}}$, значения выигрышей коалиции — как $U_C^{\hat{S}}$, агентов — как $U_i^{\hat{S}}$ и $U_j^{\hat{S}}$. Сравним результаты исходов \hat{S} и \hat{C} .

В силу уравнений (12) исход \hat{C} так же, как исход \hat{S} , соответствует точке на поверхности реагирования. Следовательно, и доход D , и предельные

доходы $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}$ являются функциями переменных σ_i , $i \in C$. Обозначим значение предельного дохода $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}$ в точке $[\sigma_i^{\hat{S}}]$ как $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{S})$, а в точке $[\sigma_i^{\hat{C}}]$ как $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{C})$. Тогда согласно уравнениям (11) уравнения (22) можно записать в виде

$$(23) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{S}) + \sum_{j \in NC} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{C}), \quad i \in C.$$

Так как функции $R_j([\sigma_i])$ возрастают по всем переменным, то из (23) следуют неравенства

$$(24) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{S}) < \frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{C}), \quad i \in C,$$

откуда согласно условиям (2) вытекают неравенства

$$(25) \quad \sigma_i^{\hat{S}} > \sigma_i^{\hat{C}}.$$

Из (25) и возрастания $R_j([\sigma_i])$ следуют неравенства

$$(26) \quad \sigma_j^{\hat{S}} > \sigma_j^{\hat{C}}, \quad j \in NC.$$

Таким образом, можно сформулировать 1-й вывод. При переходе от исхода \hat{C} — единственного равновесия Нэша в игре, в которой коалиция C и некооперированные агенты максимизируют свои чистые доходы исходя из симметричных ожиданий в отношении всех остальных игроков, к исходу \hat{S} , достигаемому в случае, когда коалиция C применяет стратегию лидера по Штакельбергу, возрастают значения усилий всех игроков — как членов коалиции, так и некооперированных агентов.

Сравним значения чистого дохода коалиции в исходах \hat{S} и \hat{C} . Если коалиция применяет стратегию Штакельберга, то это означает, что она максимизирует свой выигрыш U_C на поверхности реагирования, заданной уравнениями (15). Значит, уравнения (22) определяют точку максимума чистого дохода коалиции на поверхности реагирования, соответствующую исходу \hat{S} . Точка, соответствующая исходу \hat{C} , также лежит на поверхности реагирования, но ее координаты согласно неравенствам (25) и (26) не совпадают с координатами максимума функции U_C на поверхности реагирования. Следовательно, в силу единственности максимума справедливо неравенство

$$(27) \quad U_C^{\hat{S}} > U_C^{\hat{C}}.$$

Так как согласно введенному ранее предположению члены коалиции способны произвести между собой пропорциональный дележ общего выигрыша коалиции, то из (27) следуют неравенства

$$(28) \quad U_i^{\hat{S}} > U_i^{\hat{C}}, \quad i \in C.$$

Сравним выигрыши некооперированных агентов в исходах \hat{S} и \hat{C} . На поверхности реагирования функции чистого дохода некооперированных агентов имеют вид:

$$(29) \quad U_j = \alpha_j D([\sigma_i], R_j([\sigma_i])) - R_j([\sigma_i]), \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Обратимся к производной $(U_j)'_{\sigma_i} = \alpha_j D'_{\sigma_i} - (R_j)'_{\sigma_i}$, которая с учетом (21) принимает вид

$$(30) \quad (U_j)'_{\sigma_i} = \alpha_j \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{\substack{k \in NC, \\ k \neq j}} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \frac{\partial R_k}{\partial \sigma_i}, \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Все слагаемые в правой части (30) положительны для любого $j \in NC$, следовательно, $(U_j)'_{\sigma_i} > 0$.

Таким образом, приходим ко 2-му выводу. Если коалиция C занимает позицию лидера по Штакельбергу, а все некооперированные агенты занимают позиции последователей, то выигрыши всех некооперированных агентов возрастают на поверхности реагирования по всем независимым переменным σ_i . Соответственно, из (25) следует

$$(31) \quad U_j^{\hat{S}} > U_j^{\hat{C}}, \quad j \in NC.$$

Неравенства (28) и (31) позволяют сделать 3-й вывод. Исход \hat{S} — равновесие в игре, в которой коалиция C занимает позицию лидера по Штакельбергу, а все некооперированные агенты занимают позиции последователей, доминирует по Парето над исходом \hat{C} — равновесием Нэша в игре, в которой коалиция C и некооперированные агенты максимизируют свои выигрыши исходя из симметричных ожиданий в отношении всех остальных игроков.

Теперь обратимся к рассмотрению причины, в силу которой коалиции в одновременной игре необходимо послать предварительный информационный сигнал, способный полностью убедить некооперированных агентов в том, что все члены коалиции осуществляют свои усилия в объемах $\sigma_i^{\hat{S}}$, $i \in C$. Если коллективу предстоит последовательная игра, в которой некооперированные агенты прилагают свои усилия только после членов коалиции, то коалиция находит объемы усилий своих членов в результате решения задачи на отыскание *условного максимума* своей функции выигрыша (18) при условии (19). Соответствующая система уравнений принимает вид (22) с решением: $\sigma_i = \sigma_i^{\hat{S}}$ и $\sigma_j = \sigma_j^{\hat{S}}$, $i \in C$, $j \in NC$. И в этом случае никому из агентов невыгодно отклоняться в своем выборе от этого решения.

В одновременной игре коалиция выбирает уровень усилий своих членов исходя из предположения, что все некооперированные агенты непременно осуществят свои усилия в объемах $\sigma_j^{\hat{S}}$. В этом случае она решает задачу отыскания *безусловного максимума* и находит уровень усилий своих членов из уравнений (11) при $\sigma_j = \sigma_j^{\hat{S}}$, $j \in NC$. Из сравнения (22) и (11) видно, что значения

частных производных $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}$ в уравнениях (22) ниже, чем в уравнениях (11). Это означает, что значения $\sigma_i^{\hat{S}}$, являющиеся решениями уравнений (22), превышают значения σ_i , являющиеся решениями уравнений (11), хотя в решениях обеих систем размеры усилий некооперированных агентов совпадают. Именно поэтому в одновременной игре всем членам коалиции, если они уверены в том, что все некооперированные агенты непременно осуществят свои усилия в размере $\sigma_j = \sigma_j^{\hat{S}}$, выгодно осуществить свои усилия в объемах ниже, чем в первом периоде последовательной игры. Соответственно, для достижения в одновременной игре того же исхода, который достигается в последовательной игре в результате стратегии Штакельберга, коалиция и вынуждена сделать соответствующий первый шаг, убеждающий всех некооперированных агентов, что ее члены осуществят усилия в объемах $\sigma_i^{\hat{S}}$.

5. Заключение

На основе представленных выше моделей приходим к следующим выводам.

1. Если в коллективе образуется малая группа (коалиция), члены которой стремятся к увеличению коалиционного выигрыша, то коллектив способен выбраться из ловушки неэффективного равновесия Нэша, в которую попадает неструктурированный коллектив. Следствием коалиционной стратегии является повышение индивидуальных выигрышей всех членов коллектива относительно их значений в равновесии Нэша, достигаемого в бескоалиционной игре.

2. Если размеры предельных доходов некооперированных членов коллектива возрастают с увеличением усилий членов коалиции, то коалиционная стратегия оказывает стимулирующее воздействие на некооперированных агентов, в результате которого объем прилагаемых ими усилий также увеличивается. Существование такой зависимости составляет необходимую предпосылку для реализации стратегии, разработанной Штакельбергом в модели дуополии.

3. Инкорпорирование коалицией функций реагирования некооперированных агентов в свою функцию чистого дохода создает возможность для достижения коллективом нового равновесия \hat{S} , доминирующего по Парето над равновесием \hat{C} , достигаемым в той коалиционной игре, в которой коалиция и некооперативные агенты независимо друг от друга максимизируют свои выигрыши.

4. Достижение равновесного по Штакельбергу исхода \hat{S} возможно только при условии существования определенных взаимных ожиданий со стороны как членов коалиции, так и некооперированных агентов. Эти ожидания должны исходить из общего знания о функциях выигрыша, наличии коалиции, ее составе и объемах усилий, которые обязуются осуществить ее члены.

5. При выполнении принятых в данной модели предположений иерархическая структура коллектива, в которой коалиция занимает положение лидера

по Штакельбергу, оказывается более эффективной, чем неиерархическая коалиционная структура.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим демонстрационный пример полученных выше результатов. Пусть функция совокупного дохода имеет вид

$$(П.1) \quad D = \lambda \prod_{i=1}^n \sigma_i^a,$$

где $\lambda > 0$, $0 < a < 1/n$. Функция (П.1) удовлетворяет всем условиям (1)–(4). Считаем, что все члены коллектива имеют равные доли в доходе: $\alpha_i = 1/n$.

1. Сначала рассмотрим бескоалиционную игру, в которой каждый член коллектива стремится к максимуму своего индивидуального выигрыша:

$$(П.2) \quad U_i = \lambda/n \prod_{j=1}^n \sigma_j^a - \sigma_i \rightarrow \max_{\sigma_i > 0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как функция дохода (П.1) удовлетворяет условиям постоянной эластичности

$$(П.3) \quad \frac{\sigma_i}{D} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = a,$$

то условия максимума (8) индивидуального выигрыша (П.2) можно записать в виде:

$$(П.4) \quad \sigma_i = \frac{aD}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Подставив выражения для усилий (П.4) в (П.1), получим уравнение относительно D , из которого найдем величину совокупного дохода в равновесии Нэша:

$$(П.5) \quad D^N = (\lambda(a/n)^{an})^{1/(1-an)}.$$

Используя (П.5), (П.4) и (П.2), найдем значения усилий и выигрышей:

$$(П.6) \quad \sigma_i^N = aD^N/n; \quad U_i^N = D^N(1-a)/n; \quad i = 1, \dots, n.$$

Для $\lambda = 12 \cdot 10^3$, $n = 100$, $a = 1/120$ получим:

$$(П.7) \quad D^N = \left(12 \cdot 10^3 \left(\frac{0,01}{120} \right)^{5/6} \right)^6 = 12 \cdot 10^3;$$

$$\sigma_i^N = 1,0; \quad U_i^N = 119; \quad i = 1, \dots, 100.$$

2. Обратимся к рассмотрению коалиционной игры. Пусть коалиция состоит из первых m членов коллектива. Уравнение (10) для усилий члена коалиции можно записать в виде

$$(II.8) \quad \sigma_i = \frac{am}{n}D, \quad i = 1, \dots, m,$$

а уравнение (11) для усилий некооперированных агентов — в виде

$$(II.9) \quad \sigma_j = \frac{aD}{n}, \quad j = m + 1, \dots, n.$$

Подставив выражения для усилий из (II.8) и (II.9) в функцию дохода $D = \lambda \prod_{i=1}^m \sigma_i^a \prod_{j=m+1}^n \sigma_j^a$, получим уравнение относительно D :

$$D = \lambda(a/n)^{an} m^{am} (D)^{an},$$

из которого найдем выражение для значения совокупного дохода в равновесном исходе \hat{C} :

$$(II.10) \quad D^{\hat{C}} = (\lambda(a/n)^{an} m^{am})^{\frac{1}{1-an}}.$$

Используя (II.8), (II.9) и (II.10), получим выражения для размеров усилий:

$$(II.11) \quad \begin{aligned} \sigma_i^{\hat{C}} &= (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-an}} m^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}}, \quad i \in 1, \dots, m; \\ \sigma_j^{\hat{C}} &= (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-an}} m^{\frac{am}{1-an}}, \quad j = m + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Используя (II.2), (II.10) и (II.11), получим выражения для значений индивидуальных выигрышей:

$$(II.12) \quad U_i^{\hat{C}} = D^{\hat{C}}(1 - am)/n; \quad U_j^{\hat{C}} = D^{\hat{C}}(1 - a)/n.$$

Для $n = 100$, $a = 1/120$, $m = 10$ найдем отношения значений параметров в исходах \hat{C} и N .

$$(II.13) \quad \begin{aligned} \frac{D^{\hat{C}}}{D^N} &= m^{\frac{am}{1-an}} = \sqrt{10}; \\ \frac{\sigma_i^{\hat{C}}}{\sigma_i^N} &= m^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}} = 10 \cdot \sqrt{10}; \\ \frac{\sigma_j^{\hat{C}}}{\sigma_j^N} &= m^{\frac{am}{1-an}} = \sqrt{10}; \end{aligned}$$

$$(II.14) \quad \frac{U_i^{\hat{C}}}{U_i^N} = \frac{D^{\hat{C}}(1 - am)}{D^N(1 - a)} = \sqrt{10} \cdot \frac{110}{119} \approx 2,9;$$

$$\frac{U_j^{\hat{C}}}{U_j^N} = \frac{D^{\hat{C}}}{D^N} = \sqrt{10} \approx 3,2; \quad i \in 1, \dots, m, \quad j = m + 1, \dots, n.$$

Как видим, переход от равновесия N к равновесию \hat{C} приводит к возрастанию индивидуальных выигрышей всех членов коллектива.

3. Предположим, что коалиция C заняла позицию лидера по Штакельбергу, а некооперированные агенты — позиции последователей. Из (П.9) следует $aD = n\sigma_j$ с $j \in NC$. Подставив в (П.1) вытекающее отсюда выражение для D , получим уравнение относительно σ_j , решив которое найдем значения усилий некооперированных агентов как функции усилий членов коалиции, т.е. получим функции реагирования

$$(П.15) \quad \sigma_j = R_j([\sigma_i]) = (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \prod_{k=1}^m \sigma_k^{\frac{a}{1-a(n-m)}}, \quad j \in NC.$$

Частные производные от этих функций с учетом идентичности агентов можно записать в виде

$$(П.16) \quad \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i} = \frac{a}{1-a(n-m)} (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \sigma_k^{\frac{an-1}{1-a(n-m)}}, \quad j \in NC, \quad k, i \in C.$$

Частные производные от функции дохода по переменным σ_i найдем из уравнений (П.3) и (П.1):

$$(П.17) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{aD}{\sigma_i} = a\lambda \sigma_i^{am-1} \sigma_j^{a(n-m)}, \quad j \in NC, \quad i \in C.$$

Подставив в (П.17) выражения для σ_j из (П.15), с учетом идентичности агентов получим

$$(П.18) \quad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} n \sigma_i^{\frac{an-1}{1-a(n-m)}}, \quad i \in C.$$

Выражения для производных из (П.16) и (П.18) подставим в уравнения (22). В результате преобразования соответствующего уравнения получим

$$(П.19) \quad \frac{1}{\alpha_C} = \frac{1}{1-a(n-m)} \cdot (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \cdot n \cdot \sigma_i^{\frac{an-1}{1-a(n-m)}}, \quad i \in C.$$

Разрешив уравнение (П.19) относительно σ_i , найдем выражения для объемов усилий членов коалиции в исходе \hat{S} :

$$(П.20) \quad \sigma_i^{\hat{S}} = \left(\frac{\lambda a}{n} \right)^{\frac{1}{1-an}} \left(\frac{m}{1-a(n-m)} \right)^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}}.$$

Используя (П.20) и (П.11), получим выражение для отношения размеров усилий членов коалиции в исходах \hat{S} и \hat{C} :

$$(П.21) \quad \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_i^{\hat{C}}} = \left(\frac{1}{1-a(n-m)} \right)^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}}, \quad i \in C.$$

Из уравнения (12), свойства (П.3) и вида функции (П.1) следует:

$$(П.22) \quad \sigma_j^{\hat{S}} = \frac{aD^S}{n} = \frac{\lambda a}{n} \left(\sigma_i^{\hat{S}}\right)^{am} \left(\sigma_j^{\hat{S}}\right)^{a(n-m)}, \quad j \in NC.$$

Подставив в правую часть (П.22) выражение для $\sigma_i^{\hat{S}}$ из (П.20), получим уравнение относительно $\sigma_j^{\hat{S}}$, решив которое найдем:

$$(П.23) \quad \sigma_j^{\hat{S}} = \left(\frac{\lambda a}{n}\right)^{\frac{1}{1-am}} \left(\frac{m}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{am}{1-am}}.$$

Из (П.20) и (П.23) следует выражение для отношения усилий члена коалиции и некооперированного агента:

$$(П.24) \quad \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{S}}} = \frac{m}{1-a(n-m)}, \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Для случая, когда $n = 100$, $a = 1/120$, $m = 10$, из (П.21) и (П.24) следует: $\sigma_i^{\hat{S}}/\sigma_i^{\hat{C}} = 4^{1,5} = 8$, $\sigma_i^{\hat{S}}/\sigma_j^{\hat{S}} = 40$. Так как $U_j = \frac{1}{n}D - \sigma_j = \frac{\sigma_i}{a} - \sigma_j = \sigma_j \frac{1-a}{a}$, то с учетом (П.9) и (П.22) получим:

$$\frac{D^{\hat{S}}}{D^{\hat{C}}} = \frac{U_j^{\hat{S}}}{U_j^{\hat{C}}} = \frac{\sigma_j^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{C}}} = \left(\frac{1}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{am}{1-am}} = \left(\frac{120}{30}\right)^{\frac{1}{2}} = 2, \quad j \in NC.$$

Так как $U_i^{\hat{S}} = U_j^{\hat{S}} + \sigma_j^{\hat{S}} - \sigma_i^{\hat{S}} = \sigma_j^{\hat{S}} \left(\frac{1-a}{a} + 1\right) - \sigma_i^{\hat{S}} = \sigma_j^{\hat{S}} \left(\frac{1}{a} - \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{S}}}\right)$, то с учетом (П.12) и (П.9), получим $\frac{U_i^{\hat{S}}}{U_i^{\hat{C}}} = \frac{a\sigma_j^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{C}}(1-am)} \left(\frac{1}{a} - \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{S}}}\right) = \frac{16}{11} \approx 1,45$.

Таким образом, в результате перехода от исхода \hat{C} к равновесному по Штакельбергу исходу \hat{S} некооперированные агенты увеличивают свои усилия в 2 раза, члены коалиции — в 8 раз. Выигрыши некооперированных агентов увеличиваются в 2 раза, а выигрыши членов коалиции возрастает на 45%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Остром Э.* Управляя общим: эволюция институтов коллективной деятельности. М.: ИРИСЭН, 2011.
2. *Капелюшников Р.И.* Множественность институциональных миров: Нобелевская премия по экономике-2009: Препринт WP3/2010/02 (Часть 1). М.: ГУ-ВШЭ, 2010.
3. *Holmstrom B.* Moral Hazard in Teams // The Bell J. Econom. 1982. V. 13. No. 2. P. 324–340.
4. *Grossman S., Hart O.* The Cost and Benefits of Ownership: A Theory of Vertical and Lateral Integration // J. Polit. Econom. 1986. V. 94. No. 4. P. 691–719.

5. *Hart O.D., Moore J.* Incomplete Contracts and Renegotiation // *Econometrica*. 1988. V. 56. No. 4. P. 755–785.
6. *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. В 2-х т, т. 1. СПб.: Экономическая школа, 2000.
7. *Фуруботи Э.Г., Рихтер Р.* Институты и экономическая теория: Достижения новой институциональной экономической теории. СПб.: Издательский Дом СПбГУ, 2005.
8. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
9. *Stackelberg H.* Marktform und Gleichgewicht. 1934. Wien; placeStateBerlin: J. Springer.
10. *Anderson S., Engers M.* Stacelberg Versus Cournot Oligopoly Equilibrium // *Int. J. Indust. Organizat.* 1992. V. 10. No. 1. P. 127–135.
11. *Julien L.* Stakcelberg Games. In *Handbook of Game Theory and Industial Organization*. 2018. V. 1. Chap. 10. P. 261–311.
12. *Nocke V., Shutz N.* (2018). Multiproduct-Firm Oligopoly: An Aggregative Games Approach // *Econometrica*. V. 86. No. 2. P. 523–557.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *АиТ*. 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // *АиТ*. 2017. № 7. С. 91–105.
Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.
15. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // *АиТ*. 2020. № 9. С. 120–143.
Geraskin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: a Linearization Based Approach // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 9. P. 1659–1678.
16. *Гермейер Ю.Б.* Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
17. *Горелов М.А.* Модель управления ограничениями деятельности // *Проблемы управления*. 2019. № 4. С. 43–49.
18. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2005.
19. *Новиков Д.А.* Математические модели формирования и функционирования команд. М.: Издательство физико-математической литературы, 2008.
20. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Модель коллективных действий. Часть 1. Равновесие, справедливость, эффективность // *Экономика и математические методы*. 2017. № 2. С. 118–133.
21. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Модель коллективных действий. Часть 2. Лидирующая коалиция // *Экономика и математические методы*. 2017. № 4. С. 89–104.
22. *Huck S., Rey-Biel P.* Endogenous Leadership in Teams // *J. Institut. Theoret. Econom.* 2006. V. 162. No. 2. P. 253–261.

23. *Gervais S., Goldstein I.* The Positive Effects of Biased Self-Perceptions in Firms // *Review of Finance*. 2007. V. 11. No. 3. P. 453–496.
24. *Kim J.* Endogenous Leadership in incentive Contracts // *J. Econom. Behavior Organizat.* 2012. V. 82. No. 1. P. 256–266.
25. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // *Экономика и математические методы*. 2020. № 4. С. 103–115.
26. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Эндогенное формирование в команде лидерства по Штакельбергу. Эффект образования коалиции // *Журн. Новой экономической ассоциации*. 2021. № 1 (49). С. 53–79.
27. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Экономико-математический анализ эффективности принципа «От каждого – по способностям, каждому – по труду» // *Журн. экономической теории*. 2017. № 2. С. 110–122.
28. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Моделирование коллективных действий: значимость кооперативных соглашений // *Российский журнал менеджмента*. 2019. № 3. С. 337–366.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 14.11.2021

После доработки 04.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. А.П. НЕЛЮБИН, канд. физ.-мат. наук (nelubin@gmail.com)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва),
В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук (podinovski@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва)

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ПО ВАЖНОСТИ ГРУППАМИ КРИТЕРИЕВ¹

Разработана постановка задачи принятия решений при наличии информации о важности групп критериев: введены определения отношения важности групп критериев и коэффициентов важности, введены отношения предпочтения на основе такой информации. Указаны способы проверки непротиворечивости информации о важности, указаны пути построения введенных отношений предпочтения. Раскрыта взаимосвязь качественной важности и качественной вероятности.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, упорядочение критериев по важности, теория важности критериев.

DOI: 10.31857/S0005231022070078, EDN: AETZTG

1. Введение

Принципиальным недостатком известных методов анализа многокритериальных задач принятия решений, использующих оценки важности критериев, является то, что само понятие важности критериев формально не определяется и полагается, что человек будет исходить из своего интуитивного понимания, что такое важность [1, 2]. Поэтому для оценивания коэффициентов важности человеку предлагается отвечать на “лобовые” вопросы типа “Во сколько раз один из критериев важнее другого?” или “Какая доля общей важности всех критериев приходится на рассматриваемый критерий?”. Проблема состоит в том, что невозможно установить точный смысл, вкладываемый конкретным человеком в ответы на указанные вопросы [3], а потому и нельзя корректно использовать такую информацию о важности для анализа решений и выработки обоснованных рекомендаций.

В России была создана и продолжает активно развиваться математическая теория важности критериев — ТВК (историю и библиографию см. в [4]). Она

¹ Исследования финансировались в рамках Государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”.

опирается на строгие определения понятий равенства критериев в важности и превосходства в важности одного критерия над другим (качественная важность) и превосходства в важности одного критерия над другим в h раз (количественная важность). В этой теории созданы корректные методы получения информации о важности критериев и разработаны решающие правила, задающие отношения предпочтения на основе качественной или же количественной информации о важности критериев с учетом информации об изменении предпочтений вдоль их шкалы.

Хотя определения равенства и превосходства в важности для групп, или (под)множеств критериев, были даны еще в [5], почти во всех работах по ТВК рассматривались только такие многокритериальные задачи, в которых информация о важности касалась лишь отдельных критериев. Исключение составляют несколько публикаций, однако в них изучались только отдельные частные случаи специфических групп критериев. Так, в [6] рассматривались задачи с несколькими упорядоченными по важности, но попарно непересекающимися группами критериев. В [7] рассматривались равноважные группы, состоящие из равноважных критериев. В публикации [8], продолжающей [7], введено определение понятия степени превосходства в важности одной из групп критериев над другой. Публикации [9, 10] посвящены задачам с иерархической критериальной структурой, в которой в роли групп критериев выступают критерии более высоких уровней иерархии по отношению к критериям нижнего уровня. Другие работы, помимо перечисленных выше, которые выполнены в рамках теории важности критериев, авторам неизвестны. Сложившееся состояние ТВК можно объяснить сложностью анализа задач, в которых имеются упорядоченные по важности группы критериев, хотя актуальность исследований таких задач, часто встречающихся на практике, несомненна.

В настоящей статье рассмотрены вопросы анализа непротиворечивости качественной информации о важности групп критериев, получения и обработки такой информации и построения на ее основе решающих правил, позволяющих сравнивать варианты решений по предпочтительности. При этом используется аналогия с качественной вероятностью.

2. Математическая модель и сведения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия индивидуального решения в условиях определенности, принятую в ТВК: $\langle X, \tau, f, Z_0, R \rangle$, где X — множество вариантов (альтернатив, планов, стратегий, ...); τ — тип постановки задачи (выбрать один наилучший или несколько лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности и т.д.); $f = (f_1, \dots, f_m)$ — векторный критерий, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i ; $Z_0 \subseteq \text{Re} = (-\infty, +\infty)$ — область значений критериев, или множество шкальных оценок (шкала критериев), $q \geq 2$; R — отношение нестрогого предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Под *критерием*

рием f_i понимается функция, определенная на X и принимающая значения из Z_0 . Каждый вариант x из множества X характеризуется своей *векторной*, или *критериальной*, оценкой $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их критериальных оценок. Множество всех критериальных оценок есть $Z = Z_0^m$. Далее полагается, что шкала критериев порядковая и известно лишь, что предпочтения вдоль их шкалы возрастают: чем больше оценка $z \in Z_0$, тем она предпочтительнее.

Предпочтения ЛПР моделируются на Z при помощи отношения нестрогого предпочтения R , так что yRz означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z . Отношение R является (частичным) квазипорядком, т.е. оно рефлексивно и транзитивно, и порождает отношение безразличия I и (строгого) предпочтения P следующим образом: $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$; $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRy$ (т.е. zRy неверно). Отношение R неизвестно и подлежит восстановлению на основе информации о предпочтениях ЛПР, состоящей из сведений об относительной важности критериев и характере изменения предпочтений на Z_0 . При отсутствии такой информации на множестве векторных оценок Z можно задать лишь отношение строгого предпочтения P^\emptyset (отношение Парето): $yP^\emptyset z \Leftrightarrow (y_i \geq z_i, i = 1, \dots, m, y \neq z)$. Пусть R^\emptyset есть объединение P^\emptyset и отношения равенства векторов.

Для расширения отношения P^\emptyset требуется дополнительная информация Ω о предпочтениях ЛПР, в роли которой будут выступать сведения о важности критериев, например сообщение типа “Одна группа критериев важнее другой”. Приведем базовые определения равенства и превосходства в важности для непересекающихся групп критериев. Далее для простоты записи критерии f_i будем обозначать также и их номерами i , так что, например, под i будем понимать критерий f_i , а под $A = \{i_1, \dots, i_q\}$ будем понимать группу (множество) критериев с номерами i_1, \dots, i_q .

Пусть A и B — непересекающиеся непустые множества номеров, или группы критериев, в векторной оценке y все компоненты y_i с номерами из A равны между собой и все компоненты y_i с номерами из B равны между собой (т.е. $y_i = y_j$ при $i, j \in A$ и при $i, j \in B$). Векторные оценки такой структуры будем обозначать y^{AB} . Обозначим через $y^{A \leftrightarrow B}$ векторную оценку, полученную из векторной оценки y с указанной структурой путем замены каждой компоненты y_j , $j \in B$, на (любую) компоненту y_i , $i \in A$, и замены каждой компоненты y_i , $i \in A$, на (любую) компоненту y_j , $j \in B$.

Определение 1. Группы критериев A и B равноважны, или одинаково важны (такое сообщение обозначается $A \sim B$), когда всякая векторная оценка y^{AB} и векторная оценка $y^{A \leftrightarrow B}$ одинаковы по предпочтительности (безразличны).

Определение 2. Группа критериев A важнее группы критериев B (такое сообщение обозначается $A \succ B$), когда всякая векторная оценка y^{AB} , в которой $y_i > y_j$ при $i \in A$ и $j \in B$, предпочтительнее векторной оценки $y^{A \leftrightarrow B}$.

Согласно этим определениям сообщения $A \sim B$ и $A \succ B$ задают на множестве Z соответственно отношения безразличия $I^{A \sim B}$ и предпочтения $P^{A \succ B}$:

$$(1) \quad \begin{aligned} yI^{A \sim B}z &\Leftrightarrow y = y^{AB}, \quad z = y^{A \leftrightarrow B}; \\ yP^{A \succ B}z &\Leftrightarrow y = y^{AB}, \quad z = y^{A \leftrightarrow B}, \quad y_i > y_j, \quad i \in A, \quad j \in B. \end{aligned}$$

Каждое сообщение ω из накопленной информации Ω о важности задает на множестве векторных оценок Z согласно (1) соответствующее отношение R^ω , а именно: отношение предпочтения P^ω или безразличия I^ω . В соответствии с фрагментарным подходом, разработанным в ТВК (см. также [11]), на основе этой информации на множестве векторных оценок Z определяется отношение нестрогого предпочтения R^Ω (рефлексивное и транзитивное отношение) как транзитивное замыкание объединения всех отношений R^ω и отношения R^\emptyset :

$$(2) \quad R^\Omega = \text{T} \left[\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} R^\omega \right) \cup R^\emptyset \right],$$

где T — символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения. Согласно (2) соотношение $yR^\Omega z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$(3) \quad yR^{\omega_1}u^1, u^1R^{\omega_2}u^2, \dots, u^{r-1}R^{\omega_r}z,$$

где u^k — векторные оценки, а ω_k — сообщения из Ω (так что R^{ω_k} есть P^{ω_k} или I^{ω_k} в зависимости от смысла ω_k) или же символ \emptyset . Отношение нестрогого предпочтения R^Ω порождает указанным выше образом отношения предпочтения P^Ω и безразличия I^Ω .

Отношение R^Ω индуцирует аналогичное по смыслу отношение R_Ω на множестве вариантов: $x'R_\Omega x'' \Leftrightarrow f(x')R^\Omega f(x'')$. Отношение R_Ω непосредственно используется для формирования решения поставленной задачи требуемого типа.

3. Отношения важности критериев

Информация Ω задает на множестве 2^M подмножеств множества (номеров) критериев $M = \{1, \dots, m\}$ (бинарные) отношения *равноважности*, или одинаковой важности \sim^Ω и *превосходства в важности*, или большей важности \succ^Ω : $A \sim^\Omega B$, когда $A \sim B \in \Omega$ или $B \sim A \in \Omega$; $A \succ^\Omega B$, когда $A \succ B \in \Omega$.

Определение 3. Информация Ω слабо непротиворечива, если соответствующие отношения \sim^Ω и \succ^Ω не пересекаются, а отношение \succ^Ω иррефлексивно и асимметрично.

Далее полагаем, что Ω слабо непротиворечива, так что не может быть одновременно $A \sim^\Omega B$ и $A \succ^\Omega B$, а также $A \succ^\Omega A$ и одновременно $A \succ^\Omega B$ и $B \succ^\Omega A$. Для случая сравнения по важности только отдельных критериев расширение

отношения \sim^Ω по транзитивности не расширяет отношения R^Ω , так как когда $i \sim j \in \Omega$ и $j \sim k \in \Omega$, то, как легко проверить, если $yI^{i \sim j}z$ и $zI^{j \sim k}u$, то и $yI^{i \sim k}u$. Для групп критериев аналогичное утверждение неверно.

Однако для случая сравнения по важности только отдельных критериев расширение отношения \succ^Ω по транзитивности расширяет отношение R^Ω , что было отмечено еще в [12].

Пусть \succsim^Ω — объединение отношений \sim^Ω и \succ^Ω . Если принять естественное допущение, что отношения важности должны быть транзитивными, то тогда целесообразно ввести в рассмотрение транзитивное замыкание объединения отношений \succsim^Ω и отношения равенства множеств $=$. Однако для эффективного использования качественной информации о важности этого недостаточно. Сначала обобщим определения 1 и 2 на случай пересекающихся групп критериев. Пусть группы критериев A и B непусты ($A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$) и находятся в общем положении: $C = A \setminus B \neq \emptyset$ и $D = B \setminus A \neq \emptyset$. Тогда будем полагать, что $A \sim B$ или же что $A \succ B$, если выполнены условия из определения 1 или же 2 соответственно, т.е. (см. (1)):

$$(4) \quad \begin{aligned} yI^{A \sim B}z &\Leftrightarrow y = y^{CD}, \quad z = y^{C \leftrightarrow D}; \\ yP^{A \succ B}z &\Leftrightarrow y = y^{CD}, \quad z = y^{C \leftrightarrow D}, \quad y_i > y_j, \quad i \in C, \quad j \in D, \end{aligned}$$

где $C = A \setminus B$ и $D = B \setminus A$.

Пусть группы критериев A, B и C непусты, причем A и B не пересекаются с C , т.е. $A \cap C = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$. Естественно полагать, что если $A \sim B$ или же $A \succ B$, то и в соответствии с расширенными определениями 1 и 2 верно также $A \cup C \sim B \cup C$ или же $A \cup C \succ B \cup C$ соответственно; и наоборот: если верно $A \cup C \sim B \cup C$ или же $A \cup C \succ B \cup C$, то верно также и $A \sim B$ или же $A \succ B$ соответственно. Указанное свойство называется аддитивностью. Наконец, если $A \supset B$, то разумно принять, что $A \succ B$, причем и в том случае, когда $B = \emptyset$ (в частности, верно $M \succ \emptyset$). Отметим, что соотношению $A \succ \emptyset$ соответствует отношение $P^{A \succ \emptyset}$, определяемое для векторных оценок y^A и z^A , каждая из которых имеет равные компоненты с номерами из A , следующим образом: $y^A P^{A \succ \emptyset} z^A \Leftrightarrow y_i^A > z_i^A, i \in A$.

Расширим упомянутое выше отношение \succsim^Ω путем внесения всевозможных соотношений между группами критериев за счет использования свойств транзитивности и аддитивности, а также всех соотношений $i \succ \emptyset$ и отношения равенства множеств до отношения $\succsim^{\text{at}\Omega}$, называемого его аддитивно-транзитивным замыканием. По построению отношение $\succsim^{\text{at}\Omega}$ обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность: $A \succsim^{\text{at}\Omega} A$ для любого $A \in M$;
2. Транзитивность: если $A \succsim^{\text{at}\Omega} B$ и $B \succsim^{\text{at}\Omega} C$, то $A \succsim^{\text{at}\Omega} C$ для любых $A, B, C \in M$;
3. Аддитивность: если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succsim^{\text{at}\Omega} B$ и $A \cup C \succsim^{\text{at}\Omega} B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно для любых $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$;

4. Существенность: для любого $A \in M$ выполнено $A \succcurlyeq^{\text{at}\Omega} \emptyset$.

Отметим, что отношение, обладающее свойствами 1, 2 и 3, называется частичным аддитивным квазипорядком, который можно назвать *частичной качественной важностью*. Если для любых групп критериев A и B верно $A \succcurlyeq^{\text{at}\Omega} B$ или $B \succcurlyeq^{\text{at}\Omega} A$, то имеем полный аддитивный квазипорядок, или *полную качественную важность*. Свойства 1–4 показывают, что качественная важность формально близка к качественной вероятности.

4. Качественная вероятность

В интересах дальнейшего изложения приведем сведения о качественной вероятности [13, 14]. Пусть $\Lambda = \{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ — конечное множество произвольной природы. Его элементы λ^j называются элементарными событиями, а его подмножества A, B, C — событиями.

Определение 4. Бинарное отношение \succsim на множестве 2^Λ называется (полной) качественной вероятностью, если оно обладает следующими свойствами:

A1. *Сравнимость:* для любых A и B выполнено по крайней мере одно из соотношений $A \succsim B$ или $B \succsim A$;

A2. *Транзитивность:* из соотношений $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$;

A3. *Существенность:* $\Lambda \succ \emptyset$ и для любого A выполнено $A \succsim \emptyset$;

A4. *Аддитивность:* если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Из аксиом A1 и A2 следует, что качественная вероятность рефлексивна и потому является связным квазипорядком. Поэтому его асимметричная часть \succ есть (частичный) порядок, а симметричная часть \sim есть эквивалентность.

Пусть задана количественная вероятность Pr рядом распределения: $\text{Pr}(\lambda^1) = p_1, \dots, \text{Pr}(\lambda^n) = p_n$, так что вероятность события A равна: $\text{Pr} A = \sum_{j:\lambda^j \in A} p_j$. Говорят, что количественная вероятность (численно) представляет (полную) качественную вероятность \succsim или что количественная вероятность согласована с качественной, если выполнено условие:

$$(5) \quad A \succsim B \Leftrightarrow \text{Pr} A \geq \text{Pr} B \quad \text{для любых } A, B.$$

Из (5) следует, что

$$(6) \quad \text{для любых } A, B: A \succ B \Leftrightarrow \text{Pr} A > \text{Pr} B, \quad A \sim B \Leftrightarrow \text{Pr} A = \text{Pr} B.$$

Если задана количественная вероятность Pr , то порождаемое ею согласно (5) отношение \succsim удовлетворяет всем аксиомам A1–A4, т.е. является (полной) качественной вероятностью.

Еще де Финетти в 1949 г. предположил, что всякую качественную вероятность можно представить некоторой количественной. Однако в 1959 г.

был опубликован [15] контрпример для $n = 5$. В итоге оказалось, что лишь при $n \leq 4$ для всякой качественной вероятности существует согласованная с ней количественная вероятность. Далее приводится этот контрпример в иных обозначениях.

Пример 1. Для простоты будем представлять события с использованием мультипликативной записи из номеров составляющих их элементарных событий; например, вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\}$ будем писать 124 и вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\} \succ \{\lambda^3\}$ — соответственно $124 \succ 3$. Пусть $n = 5$. Рассмотрим отношение \succsim , заданное в виде единой цепочки:

$$\begin{aligned} 12345 \succ 2345 \succ 1345 \succ 1245 \succ 345 \succ 245 \succ 1235 \succ 235 \succ 145 \succ 1234 \succ 45 \succ \\ \succ 135 \succ 125 \succ 234 \succ 35 \succ 134 \succ 25 \succ 124 \succ 15 \succ 34 \succ 24 \succ 123 \succ 5 \succ \\ \succ 23 \succ 14 \succ 4 \succ 13 \succ 12 \succ 3 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

Для этого отношения выполнены все аксиомы А1–А4, так что оно есть полная качественная вероятность. Но представить ее при помощи количественных вероятностей нельзя. Действительно, запишем, используя приведенную выше цепочку, соотношения: $4 \succ 13$, $23 \succ 14$, $15 \succ 34$, $134 \succ 25$. Несложно убедиться, что система строгих неравенств

$$p_4 > p_1 + p_3, \quad p_2 + p_3 > p_1 + p_4, \quad p_1 + p_5 > p_3 + p_4, \quad p_1 + p_3 + p_4 > p_2 + p_5$$

несовместна (для этого достаточно сложить их правые и левые части).

Определение 5. Бинарное отношение \succsim на множестве 2^Λ называется частичной качественной вероятностью, если оно удовлетворяет аксиомам А2–А4 и аксиоме

А5. *Рефлексивность:* для любого A выполнено $A \succsim A$.

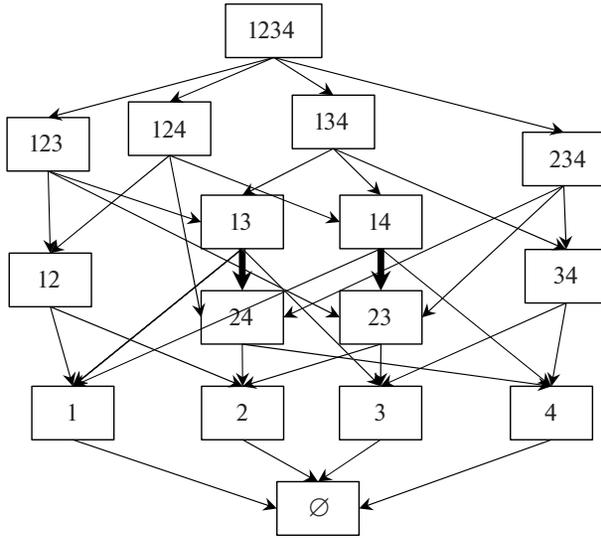
Отметим следующие свойства частичной качественной вероятности:

1. Если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то оба соотношения $A \sim B$ и $A \cup C \sim B \cup C$, а также оба соотношения $A \succ B$ и $A \cup C \succ B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно;
2. Если $A \supset B$, то $A \succsim B$ и $A \succ B \Leftrightarrow A \setminus B \succ \emptyset$;
3. Если $A \succsim B \cup C$, то $A \succsim B$. Если при этом $A \succ B \cup C$, то $A \succ B$.

Оказывается, что частичная качественная вероятность обладает также рядом неочевидных и своеобразных свойств, в том числе таких:

1. При $n \geq 5$ не всякая частичная качественная вероятность может быть продолжена до полной [16, 17];

2. Если для частичной качественной вероятности события A и B не сравнимы, т.е. неверно ни $A \succsim B$, ни $B \succsim A$, и она может быть продолжена до полной неединственным образом, то не все из трех возможностей $A \succ B$, $B \succ A$, $A \sim B$ могут быть реализованы хотя бы для одного из продолжений, т.е., например, если A и B не сравнимы, то для одних продолжений может оказаться, что имеет место $A \succ B$, для других — что справедливо $A \sim B$, но ни для



Граф транзитивного остова частичной качественной вероятности из примера 2.

одного продолжения не будет верно $B \succ A$. Соответствующие контрпримеры были построены в [17]. Один из них подробно представлен далее.

Пример 2. Частичная качественная вероятность \succsim для $n = 4$ в обозначениях из примера 2 представлена графом ее транзитивного остова на рисунке (отношение \sim есть отношение равенства). Это отношение основано на двух базовых соотношениях: $13 \succ 24$ и $14 \succ 23$ (см. полужирные стрелки на рисунке). Выполнение аксиом частичной вероятности здесь несложно проверить непосредственно с использованием рисунка. Рассматриваемое отношение частичной вероятности может быть продолжено до полной, например, соответствующей количественным вероятностям $p_1 = \frac{8}{15}$, $p_2 = \frac{4}{15}$, $p_3 = \frac{2}{15}$, $p_4 = \frac{1}{15}$. Для этой полной вероятности верно $1 \succ 2$. Оказывается, что такое соотношение будет выполняться для любой полной качественной вероятности \succsim' , продолжающей заданную частичную. Действительно, допустим, что для некоторой полной качественной вероятности \succsim' оказалось $2 \succsim' 1$. Тогда в силу аксиомы аддитивности A4 будет верно и $24 \succsim' 14$. Отсюда с учетом аксиомы транзитивности A2 и имеющихся соотношений $13 \succ 24$ и $14 \succ 23$, остающихся верными и для \succsim' , вытекает, что должно выполняться и $13' \succ 23$ и по аксиоме A4 получаем $1' \succ 2$. А это противоречит исходному допущению, что $2 \succsim' 1$.

5. Качественная важность и качественная вероятность

Одно из свойств качественной вероятности — существенность — состоит в требовании выполнения соотношения $A \succsim \emptyset$ для любого A , так что допускается $A \sim \emptyset$ при $A \neq \emptyset$, в частности $i \sim \emptyset$, что аналогично возможности рассмотрению событий с нулевой вероятностью.

Для качественной важности выполнение $i \sim^{\text{at}\Omega} \emptyset$ означает учет критерия, не имеющего вообще никакой важности. Но если набор критериев сформирован с выполнением известных требований к его формированию [18], то такой результат нужно рассматривать как следствие нарушения указанных требований. Если же дальнейший анализ покажет, что указанный результат следует признать верным, то это будет означать, что нужно скорректировать математическую модель проблемной ситуации, удалив соответствующий критерий из состава векторного критерия. Поэтому для качественной важности естественно принять требование, что $i \succ^{\text{at}\Omega} \emptyset$ для каждого критерия.

6. Непротиворечивость информации о важности

Отметим сначала, что если $A \sim^\Omega B$, т.е. $A \sim B \in \Omega$, то $A \sim^{\text{at}\Omega} B$.

Определение 6. Информация Ω непротиворечива, если $\succ^\Omega \subseteq \succ^{\text{at}\Omega}$ и для каждого критерия i верно $i \succ^{\text{at}\Omega} \emptyset$. В противном случае она противоречива.

Согласно этому определению непротиворечивость информации Ω означает, в частности, что если $A \succ^\Omega B$, т.е. $A \succ B \in \Omega$, то должно быть верным и $A \succ^{\text{at}\Omega} B$.

Теорема 1. Информация Ω непротиворечива тогда и только тогда, когда невозможно составить цикл вида $A \succ^\Omega B$, $B \succ^{\text{at}\Omega} A$ или $i \succ \emptyset$, $\emptyset \succ^{\text{at}\Omega} i$.

Доказательства теорем вынесены в Приложение. В теореме 1 вместо $B \succ^{\text{at}\Omega} A$ и $\emptyset \succ^{\text{at}\Omega} i$ можно записать соответственно $B \sim^{\text{at}\Omega} A$ и $\emptyset \sim^{\text{at}\Omega} i$.

Пример 3. В трехкритериальной задаче $\Omega = \{1 \succ 2, 23 \succ 13\}$. Имеем $1 \succ^{\text{at}\Omega} 2$ и $23 \succ^{\text{at}\Omega} 13$, так что верно $2 \sim^{\text{at}\Omega} 1$, а не $1 \succ^{\text{at}\Omega} 2$. Информация Ω противоречива. Имеем цикл: $1 \succ^{\Omega} 2$, $2 \sim^{\text{at}\Omega} 1$.

Пример 4. В пятикритериальной задаче $\Omega = \{15 \succ 235, 23 \succ 134\}$. Здесь $15 \succ^{\text{at}\Omega} 235 \Rightarrow 15^{\text{at}\Omega} 25 \Rightarrow 1 \succ^{\text{at}\Omega} 2$, а также $23 \succ^{\text{at}\Omega} 134 \Rightarrow 2 \succ^{\text{at}\Omega} 14 \Rightarrow 2 \succ^{\text{at}\Omega} 1$, так что $1 \sim^{\text{at}\Omega} 2$. Далее $15 \succ^{\text{at}\Omega} 235 \Rightarrow 1 \succ^{\text{at}\Omega} 23$, откуда с учетом $23 \succ^{\text{at}\Omega} 134$ получаем $1 \succ^{\text{at}\Omega} 134$. Из $1 \succ^{\text{at}\Omega} 134$ по аддитивности $\emptyset \succ^{\text{at}\Omega} 34$, $\emptyset \succ^{\text{at}\Omega} 3$, $\emptyset \succ^{\text{at}\Omega} 4$. В итоге имеем: $1 \sim^{\text{at}\Omega} 2$, $3 \sim^{\text{at}\Omega} \emptyset$, $4 \sim^{\text{at}\Omega} \emptyset$ (критерий 5 не сравним по $\succ^{\text{at}\Omega}$ с первыми четырьмя критериями). Информация Ω противоречива. Имеется цикл: $15 \succ^\Omega 235$, $235 \succ^{\text{at}\Omega} 15$, так как $235 \succ^{\text{at}\Omega} 25 \sim^{\text{at}\Omega} 15$.

7. Коэффициенты важности критериев

Аналогом вероятностей элементарных событий p_i являются *коэффициенты важности* (отдельных) критериев α_i — положительные в сумме равные единице числа, обладающие для полной качественной важности $\succ^{\text{at}\Omega}$ следующим свойством:

(7) для любых групп критериев A и B :

$$A \succ^{\text{at}\Omega} B \Leftrightarrow \sum_{i:i \in A} \alpha_i \geq \sum_{i:i \in B} \alpha_i.$$

Коэффициенты важности для полной качественной важности могут и не существовать (см. пример 1). Для частичной качественной важности $\succsim^{\text{at}\Omega}$ коэффициентами важности называются положительные в сумме равные единице числа, обладающие свойством (7), в котором знак \Leftrightarrow заменен на \Rightarrow , а также таким свойством: для любых групп критериев A и B :

$$A \succ^{\text{at}\Omega} B \Rightarrow \sum_{i:i \in A} \alpha_i > \sum_{i:i \in B} \alpha_i.$$

Из (7) следует, что если для любых групп критериев A и B выполнено $A \sim^{\text{at}\Omega} B$, то справедливо равенство

$$\sum_{i:i \in A} \alpha_i = \sum_{i:i \in B} \alpha_i.$$

Понятно, что коэффициенты важности для частичной качественной важности могут и не существовать.

Так, в примерах 3 и 4 коэффициенты важности не существуют и информация Ω противоречива. С другой стороны, существование коэффициентов важности для частичной качественной важности не гарантирует возможность ее продолжения до полной и тем более существование для нее коэффициентов важности.

8. Отношения предпочтения

При сравнении векторных оценок по предпочтительности нужно учитывать не только те соотношения из \succsim^{Ω} , которые прямо следуют из Ω , но и те, которые получаются в результате аддитивно-транзитивного замыкания, т.е. учитывать отношение $\succsim^{\text{at}\Omega}$.

Пример 5. Пусть в четырехкритериальной задаче $\Omega = \{1 \succ 2, 24 \succ 34\}$. Эта информация непротиворечива. При такой информации о важности $y = (2, 1, 1)$ и $z = (1, 1, 2)$, не сравнимыми по предпочтительности, даже если попытаться расширить Ω за счет транзитивного замыкания отношения $\succsim^{\emptyset} = \{(1, 2), (24, 34)\}$. Однако с учетом аддитивности верно $2 \succ^{\text{at}\Omega} 3$, а по транзитивности с учетом $1 \succ^{\text{at}\Omega} 2$ получаем $1 \succ^{\text{at}\Omega} 3$. Следовательно, нужно считать, что y предпочтительнее, чем z .

Пополним множество Ω , добавив для него соответственно сообщение $A \succ B$, если $A \succ^{\text{at}\Omega} B$, и $A \sim B$, если $A \sim^{\text{at}\Omega} B$. Обозначим его $\bar{\Omega}$. Это множество порождает на Z отношение $R^{\bar{\Omega}}$ согласно (2), где вместо Ω стоит $\bar{\Omega}$. По построению $R^{\Omega} \subseteq R^{\bar{\Omega}}$. Отметим, что $I^{\Omega} \subseteq I^{\bar{\Omega}}$.

Теорема 2. *Информация Ω непротиворечива тогда и только тогда, когда $R^{\Omega} \subseteq R^{\bar{\Omega}}$.*

Согласно теореме 1 информация Ω противоречива тогда и только тогда, когда можно построить цикл вида (3), где $z = y$ и каждое ω_k есть соотношение

вида $A \succ B$ или $A \sim B$ из $\overline{\Omega}$ или же символ \emptyset , причем хотя бы раз встречается $P^{A \succ B}$ или P^\emptyset . Теорема 2 показывает, что определение непротиворечивости информации о важности полностью согласовано с определениями непротиворечивости, принятыми в теории важности критериев [4, 5, 11].

Теперь пополним множество Ω так: добавим в него соответственно сообщение $A \succ B$, если $A \succ^{\text{at}\Omega} B$ и множества A и B непусты и не пересекаются, и $A \sim B$, если $A \sim^{\text{at}\Omega} B$ и множества A и B непусты и не пересекаются. Обозначим его через $\widehat{\Omega}$. Это множество порождает на Z отношение $R^{\widehat{\Omega}}$ согласно (2), где вместо Ω стоит $\widehat{\Omega}$.

Теорема 3. Справедливо равенство $R^{\overline{\Omega}} = R^{\widehat{\Omega}}$.

Построение отношений R^Ω , $\succ^{\text{at}\Omega}$, $R^{\overline{\Omega}}$ и $R^{\widehat{\Omega}}$ основано на операции транзитивного или аддитивно-транзитивного замыкания бинарных отношений. Если размерность задачи “не очень велика”, то указанные отношения можно построить, если использовать матричное представление бинарных отношений.

Бинарное отношение ρ на конечном множестве $H = \{h^1, \dots, h^q\}$ можно задать квадратной булевой матрицей смежности $B(\rho) = \|b_{ij}(\rho)\|$ порядка q , где

$$b_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } (h^i, h^j) \in \rho, \\ 0 & \text{при } (h^i, h^j) \notin \rho. \end{cases}$$

Для булевых матриц определены операции: транспонирование T , сложение $+$, поэлементное умножение $*$, умножение \times , образование асимметричной разности \setminus :

$$\|a_{ij}\| \setminus \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \text{ где } c_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_{ij} = 1 \text{ и } b_{ij} = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Операциям над бинарными отношениями — взятия обратного отношения $^{-1}$, пересечения отношений \cap , объединения отношений \cup , разности отношений \setminus , умножения отношений \circ и построения транзитивного замыкания $\widehat{\rho}$ соответствуют операции над их матрицами смежности [19]:

$$\begin{aligned} B(\rho^{-1}) &= B(\rho)^T, \quad B(\rho^1 \cap \rho^2) = B(\rho^1) \circ B(\rho^2), \quad B(\rho^1 \cup \rho^2) = B(\rho^1) + B(\rho^2), \\ B(\rho^1 \setminus \rho^2) &= B(\rho^1) \setminus B(\rho^2), \quad B(\rho^1 \circ \rho^2) = B(\rho^1) \times B(\rho^2), \\ B(\widehat{\rho}) &= B(\rho) + B^2(\rho) + \dots + B^n(\rho). \end{aligned}$$

Поэтому $B(\text{Sym } \rho) = B(\rho) \circ B(\rho)^T$, $B(\text{As } \rho) = B(\rho) \setminus B(\text{Sym } \rho)$, где Sym и As — символы операций выделения симметричной и асимметричной частей бинарного отношения ρ соответственно: $\text{Sym } \rho = \rho \cap \rho^{-1}$, $\text{As } \rho = \rho \setminus \text{Sym } \rho$. Для

построения транзитивного замыкания существуют эффективные алгоритмы [20]. Заметим еще, что

$$\rho^1 \subseteq \rho^2 \Leftrightarrow B(\rho^1) \leq B(\rho^2), \quad \rho^1 \subset \rho^2 \Leftrightarrow B(\rho^1) \leq B(\rho^2),$$

где знак матричного неравенства \leq для двух матриц означает, что каждый элемент первой матрицы не больше соответствующего элемента второй матрицы, а знак \leq показывает, что верно указанное условие, но матрицы не равны: в первой матрице найдется элемент, который меньше соответственного элемента второй матрицы.

Пример 6. Полную качественную вероятность \succsim из примера 1 можно интерпретировать как отношение важности \succsim^Ω на множестве групп критериев, причем $\succsim^\Omega = \succsim^{\text{at}\Omega}$. Информация Ω непротиворечива. При помощи специальной компьютерной программы для этого отношения важности для случая, когда $Z_0 = \{1, 2\}$, было построено отношение $R^{\overline{\Omega}}$. Оно оказалось полным (аддитивным) квазипорядком. Но уже для $Z_0 = \{1, 2, 3\}$ квазипорядок $R^{\overline{\Omega}}$ оказывается лишь частичным (см. пример 7).

Пример 7. Частичную качественную вероятность \succsim из примера 2 можно интерпретировать как отношение важности, полученное путем аддитивно-транзитивного замыкания для информации $\Omega = \{13 \succ 24, 14 \succ 23\}$. Информация Ω непротиворечива. Здесь $\overline{\Omega} = \Omega$. При помощи специальной компьютерной программы для случая, когда $Z_0 = \{1, 2\}$, было построено отношение $R^{\overline{\Omega}}$. Оно оказалось частичным (аддитивным) квазипорядком.

9. Об одном претенденте на аналитическое решающее правило

Пусть y и z — две произвольные векторные оценки. Пусть $W(y, z)$ — множество, состоящее из попарно различных компонент этих векторов, элементы которого перенумерованы в порядке возрастания:

$$W(y, z) = \{y_1\} \cup \dots \cup \{y_m\} \cup \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_m\} = \{w_1, \dots, w_q\},$$

где $q \leq m$ и зависит от y и z , $w_1 < \dots < w_q$. Пусть далее

$$M_k(y) = \{i \in M | y_i \geq w_k\}, \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

Под $\succsim^{\overline{\Omega}}$ будем понимать \succ или \sim из соотношений между группами критериев в $\overline{\Omega}$.

Теорема 4. Справедливо утверждение: $yR^{\overline{\Omega}}z \Rightarrow M_k(y) \succsim^{\text{at}\Omega} M_k(z)$, $k = 2, 3, \dots, q$.

Отметим, что если множество Z_0 конечно: $Z_0 = \{1, \dots, q\}$, где $q \geq 2$, то его можно использовать в качестве $W(y, z)$.

Утверждение в теореме 4 напоминает решающее правило для количественной важности, когда имеются коэффициенты важности для всех отдельных критериев [4]). Однако в отличие от случая отдельных критериев при $q > 2$

теорема 4 дает только лишь необходимые, но не достаточные условия для справедливости соотношения $yR^{\bar{\Omega}}z$. (При $q = 2$ векторная оценка z получается перестановкой $y^{A \leftrightarrow B}$, где $A = M_2(y)$ и $B = M_2(z)$. Из условия $A \succ^{at\Omega} B$ следует $A^{\bar{\Omega}}B$ или $A \sim^{\bar{\Omega}}B$. И тогда согласно (1) верно $yR^{\bar{\Omega}}z$.) Это доказывает следующий контрпример.

Пример 8. Пусть в четырехкритериальной задаче $Z_0 = \{1, 2, 3\}$ и $\Omega = \{1 \succ 3, 12 \succ 34\}$. Эта информация непротиворечива. Так как в сообщениях из Ω критерии 1 и 2 находятся слева, а 3 и 4 — справа, то с помощью аддитивно-транзитивного замыкания в $\bar{\Omega}$ не удастся ввести никаких новых сообщений вида $A \succ B$ с непересекающимися A и B . Сравним векторные оценки $y = (3, 2, 1, 1)$ и $z = (1, 1, 3, 2)$. Все соотношения между $M_k(y)$ и $M_k(z)$ из теоремы 4 выполняются:

$$\text{при } k = 2: M_2(y) = \{1, 2\}, M_2(z) = \{3, 4\}, 12 \succ^{\bar{\Omega}} 34;$$

$$\text{при } k = 3: M_3(y) = \{1\}, M_3(z) = \{3\}, 1 \succ^{\bar{\Omega}} 3.$$

Однако, как показали расчеты, выполненные при помощи компьютерной программы с использованием матричного представления бинарных отношений, векторные оценки y и z несравнимы по $R^{\bar{\Omega}}$.

10. Заключение

В статье в рамках ТВК проведен анализ многокритериальных моделей принятия решений при наличии информации о важности групп критериев, основанный на ранее введенных определениях равенства и превосходства в важности одних групп критериев над другими: введены определения отношений важности групп критериев и порождаемых этими отношениями коэффициентов важности критериев, введены отношения предпочтения на основе такой информации. Указаны способы проверки непротиворечивости информации о важности, указаны пути построения введенных отношений предпочтения. Раскрыта взаимосвязь качественной важности и качественной вероятности.

Представленные в статье результаты позволяют анализировать прикладные многокритериальные задачи, когда имеется информация об относительной важности не только отдельных критериев, но и групп критериев с порядковой шкалой. Результаты являются базой для дальнейшего развития теории важности критериев для задач с упорядоченными по важности группами критериев, имеющих более совершенные шкалы, чем порядковая.

Актуальной остается проблема разработки достаточно простого аналитического правила, которое позволило бы эффективно сравнивать по предпочтительности варианты с учетом информации о важности в задачах с большим числом критериев и вариантов.

Авторы благодарны рецензентам за полезные конструктивные замечания.

Доказательство теоремы 1. Удобнее доказывать равносильное утверждение:

Информация Ω противоречива тогда и только тогда, когда существует цикл вида $A \succ^{\Omega} B, B \not\geq^{\text{at}\Omega} A$ или $i \succ \emptyset, \emptyset \not\geq^{\text{at}\Omega} i$.

Необходимость. Пусть информация Ω противоречива. Тогда по определению 6 возможны две ситуации:

1. Не выполняется $\succ^{\Omega} \subseteq \succ^{\text{at}\Omega}$, т.е. существует $A \succ B \in \Omega$ и при этом не верно $A \succ^{\text{at}\Omega} B$. Но поскольку из $A \succ B \in \Omega$ следует $A \not\geq^{\text{at}\Omega} B$, то должно выполняться $B \not\geq^{\text{at}\Omega} A$, т.е. $A \sim^{\text{at}\Omega} B$. Получаем цикл $A \succ^{\Omega} B, B \sim^{\text{at}\Omega} A$;

2. Существует критерий i , для которого не верно $i \succ^{\text{at}\Omega} \emptyset$. Но поскольку $i \not\geq^{\text{at}\Omega} \emptyset$, то должно выполняться $i \sim^{\text{at}\Omega} \emptyset$. Получаем цикл $i \succ \emptyset, \emptyset \sim^{\text{at}\Omega} i$.

Достаточность. Пусть существует цикл $A \succ^{\Omega} B, B \not\geq^{\text{at}\Omega} A$. Так как из $A \succ B \in \Omega$ следует $A \not\geq^{\text{at}\Omega} B$, то должно выполняться $A \sim^{\text{at}\Omega} B$. Так как одновременно выполняется $A \succ^{\Omega} B$ и $A \sim^{\text{at}\Omega} B$, то $\succ^{\Omega} \subseteq \succ^{\text{at}\Omega}$ не верно, и по определению 6 информация Ω противоречива.

Пусть существует цикл $i \succ \emptyset, \emptyset \not\geq^{\text{at}\Omega} i$. Поскольку $i \not\geq^{\text{at}\Omega} \emptyset$, то должно выполняться $i \sim^{\text{at}\Omega} \emptyset$. Тогда по определению 6 информация Ω противоречива. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Удобнее доказывать равносильное утверждение: информация Ω противоречива тогда и только тогда, когда неверно $P^{\Omega} \subseteq P^{\bar{\Omega}}$.

Необходимость. Пусть информация Ω противоречива, тогда по теореме 1 существует цикл $A \succ^{\Omega} B, B \not\geq^{\text{at}\Omega} A$ или $i \succ \emptyset, \emptyset \not\geq^{\text{at}\Omega} i$.

Рассмотрим случай цикла $A \succ^{\Omega} B, B \not\geq^{\text{at}\Omega} A$. Будем использовать две оценки из Z_0 ; для простоты обозначим их 1 и 2. Построим векторную оценку y следующим образом: $y_i = 2, i \in A, y_j = 1, j \notin A$, а векторную оценку z так: $z_i = 2, i \in B, z_j = 1, j \notin B$. Получаем $y = y^{CD}, z = y^{C \leftrightarrow D}$, где $C = A \setminus B$ и $D = B \setminus A$. Так как $A \succ B \in \Omega$, то по правилам (4) на основе информации Ω должно выполняться $yP^{A \succ B}z$, т.е. $yP^{\Omega}z$.

С другой стороны, в цикл входит также $B \not\geq^{\text{at}\Omega} A$. При доказательстве теоремы 1 было выяснено, что в данном случае верно $A \sim^{\text{at}\Omega} B$. Поэтому множество сообщений $\bar{\Omega}$, получаемое пополнением множества Ω , должно содержать сообщение $A \sim B$. Тогда по правилам (4) на основе информации $\bar{\Omega}$ должно выполняться $yI^{A \sim B}z$, поэтому $yP^{\bar{\Omega}}z$ неверно. Это доказывает, что включение $P^{\Omega} \subseteq P^{\bar{\Omega}}$ неверно.

Рассмотрим теперь случай цикла $i \succ \emptyset, \emptyset \not\geq^{\text{at}\Omega} i$. Построим векторную оценку y следующим образом: $y_i = 2, y_j = 1, j \neq i$. А в векторной оценке z пусть все компоненты равны единице. Получаем $yP^{\emptyset}z$, а значит, и $yP^{\Omega}z$.

С другой стороны, в цикл входит также $\emptyset \not\geq^{\text{at}\Omega} i$. При доказательстве теоремы 1 было выяснено, что в данном случае верно $i \sim^{\text{at}\Omega} \emptyset$. Поэтому на основе

информации $\bar{\Omega}$ должно выполняться $yI^{i \sim \varnothing}z$, поэтому $yP^{\bar{\Omega}}z$ неверно. Следовательно, включение $P^{\Omega} \subseteq P^{\bar{\Omega}}$ неверно.

Достаточность. Пусть для каких-то векторных оценок y и z выполняется $yP^{\Omega}z$, но не выполняется $yP^{\bar{\Omega}}z$. Поскольку $R^{\Omega} \subseteq R^{\bar{\Omega}}$, то из $yP^{\Omega}z$ следует $yR^{\bar{\Omega}}z$. Тогда для того чтобы $yP^{\bar{\Omega}}z$ было неверно, необходимо $zR^{\bar{\Omega}}y$, а значит, $zI^{\bar{\Omega}}y$.

Отношению безразличия $zI^{\bar{\Omega}}y$ соответствует цепочка (3), состоящая только из отношений безразличия $I^{A \sim B}$. Отношению строгого предпочтения $yP^{\Omega}z$ соответствует цепочка (3), в которой хотя бы раз встречается $P^{A \succ B}$ или P^{\varnothing} . Обе эти цепочки (3) образуют цикл

$$(П.1) \quad yR^{\omega_1}u^2, u^2R^{\omega_2}u^3, \dots, u^rR^{\omega_r}y,$$

где u^k — векторные оценки, а ω_k — сообщения из $\bar{\Omega}$ (помним, что $\Omega \subseteq \bar{\Omega}$) или же символ \varnothing , причем хотя бы раз встречается $P^{A \succ B}$ или P^{\varnothing} . Далее для удобства будем считать $y = u^1$.

Поскольку все строгие отношения $P^{A \succ B}$ или P^{\varnothing} , встречающиеся в цикле (П.1), могут принадлежать только цепочке $yP^{\Omega}z$, но не $zI^{\bar{\Omega}}y$, то для каждого отношения $P^{A \succ B}$ в цикле (П.1) должно выполняться $A \succ B \in \Omega$.

Из множества Z_0 значений компонент векторных оценок выберем максимальное значение g , для которого в цикле (П.1) найдется звено $u^kR^{\omega_k}u^{k+1}$ со строгим отношением $P^{A \succ B}$ или P^{\varnothing} , в котором при переходе от u^k к u^{k+1} меняется состав компонент, равных g . В (П.1) существует хотя бы одно звено со строгим отношением и в нем $u^k \neq u^{k+1}$. Поэтому значение g , удовлетворяющее описанным условиям, существует. Обозначим через G^k множество номеров компонент векторной оценки u^k , равных g .

Из всего цикла (П.1) рассмотрим только $s \leq r$ звеньев, в которых $G^k \neq G^{k+1}$:

$$(П.2) \quad u^{i_1}P^{\omega_{i_1}}u^{i_1+1}, u^{i_2}R^{\omega_{i_2}}u^{i_2+1}, \dots, u^{i_s}R^{\omega_{i_s}}u^{i_s+1}.$$

Поскольку состав компонент, равных g , меняется только в звеньях (П.2) цикла (П.1), то для смежных векторных оценок u^{i_k+1} и $u^{i_{k+1}}$ из соседних звеньев (П.2) с номерами k и $k+1$ должно выполняться $G^{i_k+1} = G^{i_{k+1}}$. В частности, $G^{i_s+1} = G^{i_1} = G^1$. Опираясь на (П.2), построим цикл

$$(П.3) \quad C^1 \succ_{\text{at}\Omega} C^2, C^2 \succ_{\text{at}\Omega} C^3, \dots, C^s \succ_{\text{at}\Omega} C^1.$$

В цикле (П.3) положим каждое C^k равным группе критериев с номерами из G^{i_k} . Поскольку $G^{i_s+1} = G^{i_1} = G^1$, то, очевидно, $C^{s+1} = C^1$. Покажем, что для построенных таким образом групп критериев должно выполняться $C^k \succ_{\text{at}\Omega} C^{k+1}$, $k = 1, \dots, s$. Для этого рассмотрим все возможные варианты отношения $R^{\omega_{i_k}}$ в k -м звене (П.3), а именно $P^{A \succ B}$, $I^{A \sim B}$ и P^{\varnothing} :

1. Если выполняется $u^{i_k}P^{A \succ B}u^{i_k+1}$, то по определению (4) в этом звене осуществляется перестановка значений компонент векторной оценки u^{i_k} с

номерах из C и D , где $C = A \setminus B$ и $D = B \setminus A$. Причем в векторной оценке u^{ik} значения компонент с номерами из C должны быть больше значений компонент с номерами из D . Кроме того, одно из переставляемых значений должно быть равно g , а второе должно быть меньше g , иначе это противоречило бы условиям выбора значения g . Следовательно, в векторной оценке u^{ik} равными g являются компоненты с номерами из C и, возможно, еще из F , такого что $C \cap F = \emptyset$. А в векторной оценке $u^{i_{k+1}}$ (а также и в $u^{i_{k+1}}$) равными g являются компоненты с номерами из D и, возможно, еще из F , такого что $D \cap F = \emptyset$. Поэтому $G^{ik} = C \cup F$, а $G^{i_{k+1}} = D \cup F$. Тогда по построению групп критериев C^k в (П.3) $C^k = C \cup F$, а $C^{k+1} = D \cup F$. Из $A \succ^{\Omega} B$ следует $A \succ^{at\Omega} B$. По аддитивности из $A \succ^{at\Omega} B$ следует $C \succ^{at\Omega} D$, а из $C \succ^{at\Omega} D$ следует $C^k \succ^{at\Omega} C^{k+1}$;

2. Если выполняется $u^{ik} I^{A \sim B} u^{i_{k+1}}$, то по определению (4) в этом звене осуществляется перестановка значений компонент векторной оценки u^{ik} с номерами из C и D , где $C = A \setminus B$ и $D = B \setminus A$. Причем одно из этих значений должно быть g , а второе может быть любым, не равным g , в том числе и бóльшим g . Поскольку в этом звене не используется строгое отношение, то это не противоречит условиям выбора g . Возможны две ситуации:

2а. В векторной оценке u^{ik} равными g являются компоненты с номерами из C и, возможно, еще из F , такого что $C \cap F = \emptyset$. А в векторной оценке $u^{i_{k+1}}$ (а также и в $u^{i_{k+1}}$) равными g являются компоненты с номерами из D и, возможно, еще из F , такого что $D \cap F = \emptyset$. Поэтому $G^{ik} = C \cup F$, а $G^{i_{k+1}} = D \cup F$. Тогда $C^k = C \cup F$, а $C^{k+1} = D \cup F$. Из $A \sim^{\bar{\Omega}} B$ следует $A \sim^{at\Omega} B$. По аддитивности из $A \sim^{at\Omega} B$ следует $C \sim^{at\Omega} D$, а $C \sim^{at\Omega} D$ влечет $C^k \sim^{at\Omega} C^{k+1}$;

2б. В векторной оценке u^{ik} равными g являются компоненты с номерами из D и, возможно, еще из F , такого что $D \cap F = \emptyset$. А в векторной оценке $u^{i_{k+1}}$ (а также и в $u^{i_{k+1}}$) равными g являются компоненты с номерами из C и, возможно, еще из F , такого что $C \cap F = \emptyset$. Поэтому $G^{ik} = D \cup F$, а $G^{i_{k+1}} = C \cup F$. Тогда $C^k = D \cup F$, а $C^{k+1} = C \cup F$. Из $A \sim^{\bar{\Omega}} B$ следует $A \sim^{at\Omega} B$. По аддитивности из $A \sim^{at\Omega} B$ следует $C \sim^{at\Omega} D$, а $C \sim^{at\Omega} D$ влечет $C^k \sim^{at\Omega} C^{k+1}$.

3. Если выполняется $u^{ik} P^{\emptyset} u^{i_{k+1}}$, то в этом звене возможно только уменьшение числа компонент, равных g , т.е. $G^{ik} \supset G^{i_{k+1}}$. Иначе в этом звене уменьшалось бы число компонент со значением, бóльшим g . Но это невозможно по условиям выбора g . Следовательно, в этом случае $C^k \supset C^{k+1}$, т.е. $C^k \succ^{at\Omega} C^{k+1}$.

Таким образом, доказано, что в каждом звене цикла (П.3) выполняется $C^k \succ^{at\Omega} C^{k+1}$, $k = 1, \dots, s$. Следовательно по транзитивности $C^1 \sim^{at\Omega} C^2$, $C^2 \sim^{at\Omega} C^3, \dots, C^s \sim^{at\Omega} C^1$.

Теперь вспомним, что в цикле (П.2) хотя бы раз встречается строгое отношение $P^{A \succ B}$ или P^{\emptyset} . Причем для каждого такого отношения $P^{A \succ B}$ должно выполняться $A \succ B \in \Omega$. Рассмотрим сначала случай, когда в цикле (П.2) есть строгое отношение $P^{A \succ B}$, такое что $A \succ B \in \Omega$. Как было показано выше, этому отношению в цикле (П.3) соответствуют группы критериев $C^k = C \cup F$ и

$C^{k+1} = D \cup F$, где $C = A \setminus B$, $D = B \setminus A$, $C \cap F = \emptyset$, $D \cap F = \emptyset$. Тогда по аддитивности из $C^k \sim_{\text{at}\Omega} C^{k+1}$ следует $C \sim_{\text{at}\Omega} D$, а из $C \sim_{\text{at}\Omega} D$ следует $A \sim_{\text{at}\Omega} B$. Получаем цикл $A \succ^{\Omega} B$, $B \sim_{\text{at}\Omega} A$. Значит, по теореме 1 информация Ω противоречива.

Рассмотрим теперь случай, когда в цикле (П.2) есть строгое отношение P^{\emptyset} . Как было показано выше, этому отношению в цикле (П.3) соответствуют группы критериев $C^k \supset C^{k+1}$. Тогда по аддитивности, из $C^k \sim_{\text{at}\Omega} C^{k+1}$ следует $C^k \setminus C^{k+1} \sim_{\text{at}\Omega} \emptyset$. Следовательно, для каждого критерия i из непустой группы $C^k \setminus C^{k+1}$ справедливо $i \sim_{\text{at}\Omega} \emptyset$. Получаем цикл $i \succ^{\Omega} \emptyset$, $\emptyset \sim_{\text{at}\Omega} i$. Значит, по теореме 1 информация Ω противоречива. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Поскольку $\bar{\Omega} \supseteq \hat{\Omega}$, то с учетом (2), где вместо Ω стоит $\hat{\Omega}$, имеем $R^{\bar{\Omega}} \supseteq R^{\hat{\Omega}}$. Справедливость обратного включения $R^{\bar{\Omega}} \subseteq R^{\hat{\Omega}}$ следует из того, что если для звена цепочки (3) верно $uR^{A \setminus B} v$, то согласно определению (4) верно и $uR^{C \setminus D} v$, где $C = A \setminus B$, $D = B \setminus A$, если $C \neq \emptyset$ и $D \neq \emptyset$, и $uR^{\emptyset} v$, если $D = \emptyset$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства достаточно убедиться в том, что соответствующие соотношения между $M_k(y)$ и $M_k(z)$ выполняются для каждого звена цепочки (3), существующей при справедливости соотношения $uR^{\bar{\Omega}} v$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Trends in multiple criteria decision analysis / М. Ehrgott, J. Figueira, S. Greco (Eds.). N.Y.: Springer, 2010.
2. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys / J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (Eds.). V. 1. Second edition. N.Y.: Springer, 2016. P. 467–496.
3. Roy B., Mousseau V. A Theoretical Framework for Analyzing the Notion of Relative Importance of Criteria // J. of Multi-criteria Decision Analysis. 1996. V. 5. P. 145–159.
4. Подиновский В.В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Наука, 2019.
5. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. С. 117–145.
6. Яшина Н.П. Упорядочение множества векторных оценок при наличии информации о сравнительной важности критериев // Депонированная рукопись № 2903-B86. М.: ВИНТИ, 1986.
7. Подиновская О.В., Подиновский В.В. Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. I. Качественная информация. Равноважные группы критериев равной важности // Информационные технологии моделирования и управления. 2014. № 1 (85). С. 58–67.
8. Подиновская О.В., Подиновский В.В. Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. II. Количественная важность // Информационные технологии моделирования и управления. 2014. № 3 (87). С. 238–247.

9. *Подиновская О.В., Подиновский В.В.* Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев // Проблемы управления. 2014. № 6. С. 2–8.
10. *Podinovskaya O.V., Podinovski V.V.* Criteria Importance Theory for Multicriterial Decision Making Problems with a Hierarchical Structure // Eur. J. Oper. Res. 2017. V. 258. P. 983–992.
11. *Гафт М.Г., Подиновский В.В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // АиТ. 1981. № 6. С. 128–138.
Gaft M.G., Podinovskii V.V. On Design of Decision Rules in Decision Making Problems // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 6. P. 806–815.
12. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // АиТ. 1976. № 11. С. 118–127.
Podinovskii V.V. Multi-criterion Problems with Importance Ordered Homogeneous Criteria // Autom. Remote Control. 1976. V. 37. No. 11. P. 1728–1736.
13. Foundation of measurement / Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tverski A. V. 1. N.Y.: Academic Press, 1971.
14. *Наумов Г.Е., Подиновский В.В., Подиновский Вик.В.* Субъективная вероятность: способы представления и методы получения // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1991. № 1. С. 94–109.
15. *Kraft C.H., Pratt J.W., Seidenberg A.* Intuitive Probability on Finite Sets // Annals of Math. Statist. 1959. V. 30. P. 408–419.
16. *Fishburn P.C.* Linear Extensions of Additive Partial Orders // Order. 1997–1998. V. 14. P. 153–169.
17. *Подиновский Вик.В.* К вопросу о продолжении частичных бинарных отношений в моделях принятия решений // Вычислительные системы и вопросы принятия решений: сборник / под. ред. Л.Н. Королева, П.С. Краснощекова. М.: МГУ, 1991. С. 166–168.
18. *Кини Р., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981.
19. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.
20. *Warshall S.* A Theorem on Boolean Matrices // J. Association for Computing Machinery. 1962. V. 9. P. 11–12.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 24.10.2021

После доработки 05.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. А.А. БОБЦОВ, д-р техн. наук (bobtsov@mail.ru)
(Ханчжоу Дяньцзы университет, Ханчжоу, Китай;
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет ИТМО”,
Санкт-Петербург),
Н.А. НИКОЛАЕВ, канд. техн. наук (nikona@yandex.ru),
О.В. ОСЬКИНА (olga.oskina1996@gmail.com)
(Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет ИТМО”,
Санкт-Петербург),
С.И. НИЗОВЦЕВ (nizovtsev.si@gmail.com)
(ООО “ИСП “Геореконструкция”)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПАРАМЕТРА НЕЗАШУМЛЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА

Рассматривается новый алгоритм оценивания нестационарного параметра $\omega(t)$ незашумленного синусоидального сигнала $\alpha(t) \sin(\omega(t) + \varphi)$. Предполагается, что неизвестные параметры $\alpha(t)$ и $\omega(t)$ синусоидального сигнала представляют собой функции времени, являющиеся решениями линейных стационарных дифференциальных уравнений с известными коэффициентами, но не начальными условиями. Поставленная задача решается с использованием градиентных алгоритмов настройки на базе линейного регрессионного уравнения, полученного путем параметризации исходного нелинейного по параметрам синусоидального сигнала. Пример и результаты компьютерного моделирования иллюстрируют работоспособность предлагаемого алгоритма, а также поясняют процедуру его синтеза.

Ключевые слова: идентификация параметров, нестационарные системы, синусоидальные сигналы.

DOI: 10.31857/S000523102207008X, EDN: AFIWXK

1. Введение

В статье рассматривается задача идентификации неизвестного нестационарного параметра $\omega(t)$ незашумленного синусоидального сигнала вида

$$(1.1) \quad y(t) = \alpha(t) \sin(\omega(t) + \varphi),$$

где $y(t)$ — сигнал, доступный прямому измерению, $\alpha(t)$ — неизвестная амплитуда, $\omega(t)$ — неизвестный нестационарный параметр и φ — неизвестный постоянный фазовый сдвиг.

В случае стационарной амплитуды α и $\omega(t) = \omega_0 t$ (где ω_0 является константой) задача оценивания по измерению сигнала $y(t)$ хорошо изучена, и ей посвящено большое число публикаций (см., например, [1–9]). Однако такое допущение может не выполняться при решении реальных инженерных задач. Если источником возмущения является работа электрического привода, то частота пропорциональна скорости вращения электрической машины, а следовательно, изменяется при разгоне или торможении. Для парирования данного эффекта были предложены методы, опубликованные в [10–12], где функция $\omega(t)$ описывается полиномом времени произвольного порядка. Тем не менее в [10–12] допускалось, что амплитуда α является неизвестным числом. В [13–15] ограничения на стационарность амплитуды были сняты, но в качестве функции $\omega(t)$ было выбрано $\omega(t) = \omega_0 t$, где ω_0 является константой. Таким образом, на сколько известно авторам, тематика идентификации функции $\omega(t)$ при условии нестационарной амплитуды является открытой, что в свою очередь мотивирует проведение новых исследований.

2. Постановка задачи

По измерению сигнала (1.1) ставится задача синтеза алгоритма идентификации параметра ω при следующих предположениях.

Предположение 1. Функция $\omega(t)$ является выходом линейного генератора

$$(2.1) \quad \omega = h^T \xi,$$

$$(2.2) \quad \dot{\xi} = \Gamma \xi,$$

где параметры вектора h и матрицы Γ являются известными числами, но начальные условия вектора ξ неизвестны.

Предположение 2. Функция $\alpha(t)$ является выходом линейного генератора

$$(2.3) \quad \alpha = r^T \eta,$$

$$(2.4) \quad \dot{\eta} = G \eta,$$

где параметры вектора r и матрицы G являются известными числами, но начальные условия вектора η неизвестны.

3. Основной результат

Для синтеза алгоритма оценивания неизвестной нестационарной функции $\omega(t)$ синусоидального сигнала (1.1) будем использовать обобщенный подход

к синтезу наблюдателей, основанный на оценке параметров (GREBO — Generalized parameter estimation-based observers) [16]. Первым шагом является преобразование исходной нелинейной модели вида (1.1) к линейной регрессии, параметры которой могут быть оценены с использованием, например, стандартного градиентного подхода (см., например, [17]) или метода динамического расширения регрессора и смешивания (DREM — Dynamic regressor extension and mixing) [18].

Для преобразования исходной нелинейной по параметру ω модели (1.1) продифференцируем сигнал $y(t) = \alpha(t) \sin(\omega(t) + \varphi)$ два раза. Для первой производной (1.1) имеем

$$\dot{y} = \dot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + \alpha \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega}$$

или в более удобном виде

$$(3.1) \quad \dot{y} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} y + \alpha \dot{\omega} \cos(\omega + \varphi).$$

Для второй производной получаем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + \dot{\alpha} \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega} + \dot{\alpha} \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega} - \\ &\quad - \alpha \sin(\omega + \varphi) \dot{\omega}^2 + \alpha \cos(\omega + \varphi) \ddot{\omega} = \\ &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + 2\dot{\alpha} \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega} - \underbrace{\alpha \sin(\omega + \varphi)}_y \dot{\omega}^2 + \alpha \cos(\omega + \varphi) \ddot{\omega} = \\ &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + 2\dot{\alpha} \dot{\omega} \cos(\omega + \varphi) - \dot{\omega}^2 y + \alpha \ddot{\omega} \cos(\omega + \varphi). \end{aligned}$$

Подставим в (3.2) выражение для $\cos(\omega + \varphi) = \frac{\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y}{\alpha^2 \dot{\omega}}$, которое можно получить из (3.1),

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + 2\dot{\alpha} \phi \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha^2 \dot{\omega}} - \dot{\omega}^2 y + \dot{\omega} \ddot{\omega} \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha^2 \dot{\omega}} = \\ &= \ddot{\alpha} \underbrace{\sin(\omega + \varphi)}_{\frac{y}{\alpha}} + 2\dot{\alpha} \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha^2} - \dot{\omega}^2 y + \ddot{\omega} \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha \dot{\omega}} = \\ &= \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} y + \frac{2\dot{\alpha} \phi}{\alpha^2} \dot{y} - \frac{2\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} y - \dot{\omega}^2 y + \frac{\ddot{\omega} \phi}{\phi \dot{\omega}} \dot{y} - \frac{\ddot{\omega} \dot{\alpha}}{\alpha \dot{\omega}} y = \\ &= \left(\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{2\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \dot{\omega}^2 - \frac{\dot{\alpha} \ddot{\omega}}{\alpha \dot{\omega}} \right) y + \left(\frac{2\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\ddot{\omega}}{\dot{\omega}} \right) \dot{y}. \end{aligned}$$

После выполнения простейших математических преобразований имеем

$$(3.4) \quad \alpha^2 \dot{\omega} \ddot{y} = (\alpha \ddot{\alpha} \dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2 \dot{\omega} - \alpha^2 \dot{\omega}^3 - \alpha \dot{\alpha} \ddot{\omega}) y + (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \dot{y}.$$

Для вывода линейной регрессионной модели дважды профильтруем левую и правую части выражения (3.4) с использованием аperiodического звена первого порядка $\frac{1}{(p+1)}$. При выполнении математических преобразований будем использовать лемму о перестановке (“swapping lemma” [17]).

Шаг 1. Пропустим левую часть (3.4) через фильтр $\frac{1}{(p+1)}$ и получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p+1} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \dot{y}] &= (\alpha^2 \dot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{y}] - \frac{1}{p+1} \left[p (\alpha^2 \dot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{y}] \right] = \\
 &= (\alpha^2 \dot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [\dot{y}]}_{\dot{q}_1} - \frac{1}{p+1} \left[(2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [\dot{y}]}_{\dot{q}_1} \right] = \\
 &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \frac{1}{p+1} [(2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \dot{q}_1] = \\
 &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \left((2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{q}_1] - \frac{1}{p+1} \left[p (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{q}_1] \right] \right) = \\
 &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \left((2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [q_1]}_{q_2} - \frac{1}{p+1} \left[p (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [q_1]}_{q_2} \right] \right) = \\
 &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \left((2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2 - \frac{1}{p+1} [(p (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega}) + p (\alpha^2 \ddot{\omega})) q_2] \right) = \\
 &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2 + \frac{1}{p+1} [(2\dot{\alpha}^2 \dot{\omega} + 2\alpha \ddot{\alpha} \dot{\omega} + 4\alpha \dot{\alpha} \ddot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2],
 \end{aligned}$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, а функции q_1 и q_2 имеют вид

$$(3.5) \quad \begin{cases} q_1 = \frac{p}{p+1} y, \\ q_2 = \frac{p}{p+1} q_1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned}
 \frac{1}{p+1} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \ddot{y}] &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2 + \\
 &+ \frac{1}{p+1} [(2\dot{\alpha}^2 \dot{\omega} + 2\alpha \ddot{\alpha} \dot{\omega} + 4\alpha \dot{\alpha} \ddot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2].
 \end{aligned}$$

Шаг 2. Пропустим (3.6) через фильтр $\frac{1}{(p+1)}$:

$$\frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \ddot{y}] = \frac{1}{(p+1)} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \dot{q}_1] - \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] = \\
& = (\alpha^2\dot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{(p+1)} [q_1]}_{q_2} - \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] - \\
& \quad - \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] = \\
& \quad = \alpha^2\dot{\omega}q_2 - \frac{2}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& \quad + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2].
\end{aligned}$$

Таким образом, для дважды профильтрованной левой части (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad & \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha^2\dot{\omega}) \dot{y}] = \alpha^2\dot{\omega}q_2 - \frac{2}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& \quad + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2].
\end{aligned}$$

Шаг 3. Пропустим дважды правую часть (3.4) через фильтр $\frac{1}{(p+1)}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y + (2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \dot{y}] = \\
& = \frac{1}{(p+1)} \left[\frac{1}{(p+1)} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y + (2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \dot{y}] \right] = \\
& \quad = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \frac{1}{(p+1)} [\dot{y}] - \frac{1}{(p+1)} \left[p(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{y}] \right] \right] = \\
& \quad = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{(p+1)} [y]}_{q_1} - \frac{1}{(p+1)} \left[p(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{(p+1)} [y]}_{q_1} \right] \right] = \\
& \quad = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1 - \frac{1}{(p+1)} [p(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] \right] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1 - \frac{1}{(p+1)} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] \right] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] - \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1].
\end{aligned}$$

Таким образом, после выполнения преобразований, имеем

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad & \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y + (2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \dot{y}] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] - \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1].
\end{aligned}$$

После объединения (3.7) и (3.8) для дважды профильтрованного уравнения (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad & \alpha^2\dot{\omega}q_2 - \frac{2}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] - \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1].
\end{aligned}$$

Хорошо известно, что в силу предположений 1 и 2 функции $\alpha(t)$ и $\omega(t)$ могут быть записаны в виде

$$(3.10) \quad \omega = h^T e^{\Gamma t} \xi_0,$$

$$(3.11) \quad \alpha = r^T e^{Gt} \eta_0,$$

где ξ_0 и η_0 — векторы неизвестных постоянных параметров.

Из (3.10) и (3.11) легко получить

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= h^T \Gamma e^{\Gamma t} \xi_0, \quad \ddot{\omega} = h^T \Gamma^2 e^{\Gamma t} \xi_0, \quad \ddot{\omega} = h^T \Gamma^3 e^{\Gamma t} \xi_0, \\
\dot{\alpha} &= r^T G e^{Gt} \eta_0 \quad \text{и} \quad \ddot{\alpha} = r^T G^2 e^{Gt} \eta_0,
\end{aligned}$$

откуда для уравнения (3.9) получаем линейную регрессионную модель относительно векторов неизвестных постоянных параметров ξ_0 и η_0 .

Для более наглядного понимания процедуры синтеза алгоритма оценивания функции $\omega(t)$ рассмотрим пример.

4. Пример

Прежде всего предположим, что α — неизвестный постоянный параметр. Также будем допускать, что функция $\omega(t)$ изменяется по гармоническому закону, т.е. формируется с помощью автономного генератора вида

$$(4.1) \quad \omega = h^T \xi,$$

$$(4.2) \quad \dot{\xi} = \Gamma \xi,$$

где $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$, $h^T = [1 \ 0]$.

В соответствии с принятым предположением относительно неизвестных параметров выражение (3.9) можно упростить и записать в виде

$$(4.3) \quad \dot{\omega} q_2 = \frac{1}{(p+1)} [\ddot{\omega}(2q_2 + q_1)] - \frac{1}{(p+1)^2} [\ddot{\omega}(q_2 + q_1) + \dot{\omega}^3 y].$$

Введем вспомогательную систему вида (см. [16])

$$(4.4) \quad \hat{\omega} = h^T \xi_\omega,$$

$$(4.5) \quad \dot{\xi}_\omega = \Gamma \xi_\omega.$$

Рассмотрим уравнение ошибки вида

$$(4.6) \quad \varepsilon = \xi_\omega - \xi,$$

тогда для производной от (4.6) имеем

$$(4.7) \quad \dot{\varepsilon} = \Gamma \varepsilon.$$

Решение дифференциального уравнения (4.2) имеет вид (см., например, [19])

$$\varepsilon = e^{\Gamma t} \varepsilon(0) = \Phi \varepsilon(0) = \Phi \Theta,$$

где Φ — фундаментальная матрица, $\dot{\Phi} = \Gamma \Phi$, $\Phi = I_{2 \times 2}$, $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ — неизвестные постоянные параметры, которые необходимо найти.

Если начальные условия системы (4.4), (4.5) нулевые, то неизвестный вектор Θ является вектором начальных условий системы (4.1), (4.2):

$$\varepsilon(0) = \xi_\omega(0) - \xi_0 = -\xi_0.$$

Найдем производные сигнала (4.4)

$$(4.8) \quad \hat{\omega} = h^T \Phi \Theta,$$

$$(4.9) \quad \dot{\hat{\omega}} = h^T \dot{\Phi} \Theta = h^T \Gamma \Phi \Theta = \Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2,$$

$$(4.10) \quad \ddot{\hat{\omega}} = h^T \Gamma^2 \Phi \Theta = -\gamma h^T \Phi \Theta = \gamma(\Phi_{11} \theta_1 + \Phi_{12} \theta_2),$$

$$(4.11) \quad \dddot{\hat{\omega}} = h^T \Gamma^3 \Phi \Theta = -\gamma h^T \Gamma \Phi \Theta = \gamma(\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2).$$

Подставляя выражения (4.8)–(4.10) в (4.3), получаем

$$(4.12) \quad (\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2) q_2 = \frac{-\gamma}{(p+1)} [(\Phi_{11} \theta_1 + \Phi_{12} \theta_2)(2q_2 + q_1)] + \\ + \frac{1}{(p+1)^2} \left[\gamma(\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2)(q_2 + q_1) - (\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2)^3 y \right].$$

Таким образом, регрессионная модель принимает вид

$$(4.13) \quad z = m^T \Theta,$$

$$\text{где } z = \Phi_{21} q_2 + \frac{\gamma}{(p+1)} \Phi_{11} (2q_2 + q_1) - \frac{1}{(p+1)^2} \gamma \Phi_{21} (q_2 + q_1),$$

$$m = \begin{bmatrix} -\Phi_{22} q_2 - \frac{1}{(p+1)} \gamma \Phi_{12} (2q_2 + q_1) + \frac{1}{(p+1)^2} \gamma \Phi_{22} (q_2 + q_1) \\ -\frac{1}{(p+1)^2} \Phi_{21}^3 y \\ -\frac{1}{(p+1)^2} 3\Phi_{21}^2 \Phi_{22} y \\ -\frac{1}{(p+1)^2} 3\Phi_{21} \Phi_{22}^2 y \\ -\frac{1}{(p+1)^2} \Phi_{22}^3 y \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\theta_2}{\theta_1} \\ \theta_1^2 \\ \theta_1 \theta_2 \\ \theta_2^2 \\ \frac{\theta_2^3}{\theta_1} \end{bmatrix}.$$

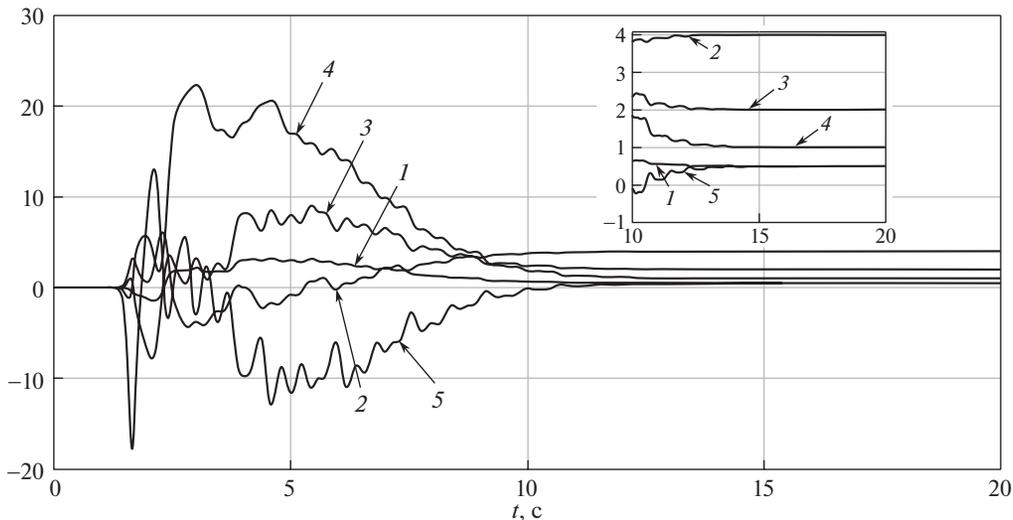


Рис. 1. Графики оценок неизвестных параметров регрессионной модели (4.13): 1 – параметр $\frac{\theta_2}{\theta_1}$, 2 – параметр θ_1^2 , 3 – параметр $\theta_1\theta_2$, 4 – параметр θ_2^2 , 5 – параметр $\frac{\theta_2^3}{\theta_1}$.

Для идентификации постоянных неизвестных параметром модели (4.13) применим метод DREM. Для этого умножим левую и правую части (4.13) слева на m :

$$(4.14) \quad mz = mm^T \Theta.$$

Применим к (4.14) вспомогательный линейный фильтр $\frac{\lambda}{p+\lambda}$, тогда регрессионная модель (4.14) в новом базисе примет вид

$$(4.15) \quad Y = \Omega \Theta,$$

где Y и Ω являются решением дифференциальных уравнений

$$(4.16) \quad \dot{Y} = -\lambda Y + \lambda mz,$$

$$(4.17) \quad \dot{\Omega} = -\lambda \Omega + \lambda mm^T.$$

Преобразуем регрессионную модель (4.15) к виду

$$(4.18) \quad \Upsilon = \Delta \Theta,$$

где $\Upsilon = adj \Omega Y$, $adj \Omega$ – присоединенная матрица для Ω , $\Delta = \det \Omega$.

Оценку параметров регрессионной модели (4.18) выполним с помощью стандартного градиентного алгоритма идентификации вида

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\beta \Delta (\Delta \hat{\Theta} - \Upsilon).$$

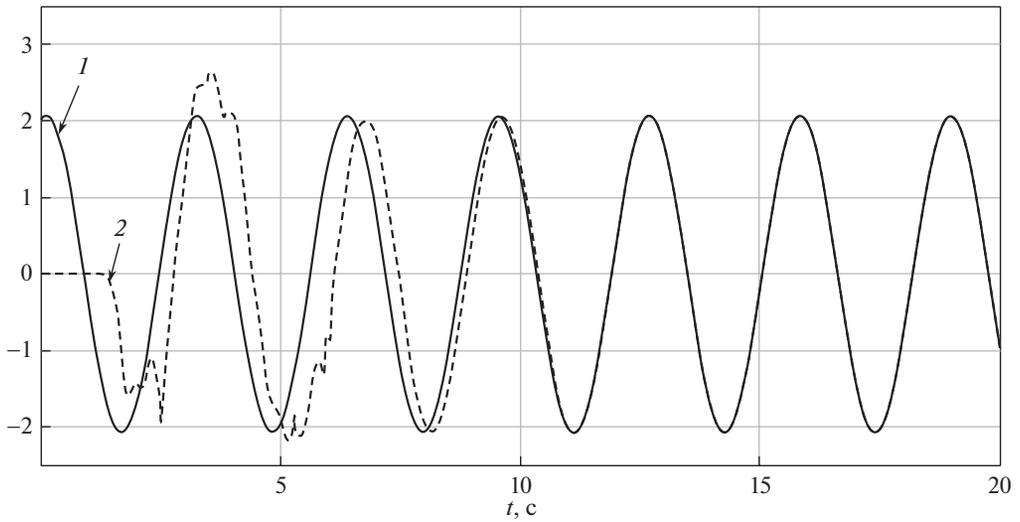


Рис. 2. Графики 1 – неизвестного параметра $\omega(t)$ и 2 – оценки неизвестного параметра $\hat{\omega}(t)$ для начальных условий $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \hat{\theta}_1 = 0, \hat{\theta}_2 = 0$.

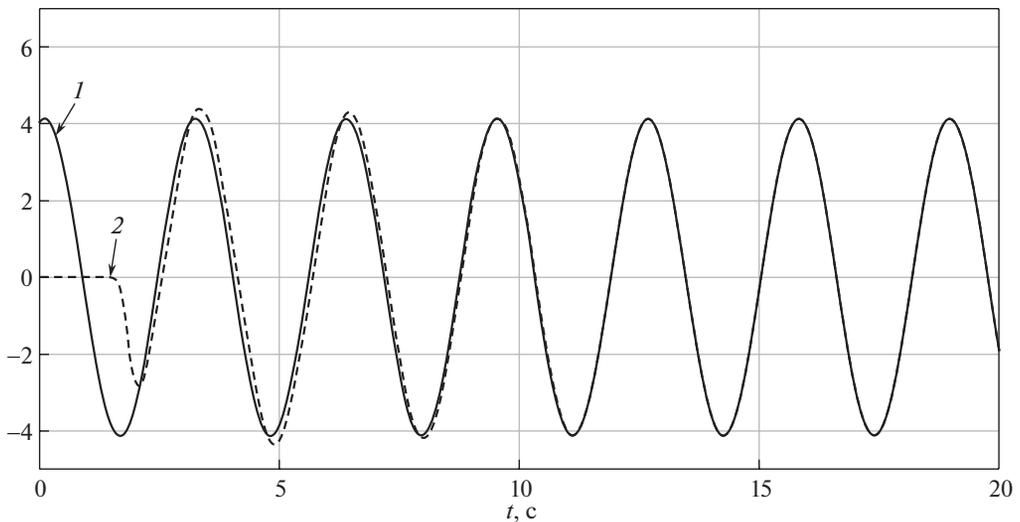


Рис. 3. Графики 1 – неизвестного параметра $\omega(t)$ и 2 – оценки неизвестного параметра $\hat{\omega}(t)$ для начальных условий $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2, \hat{\theta}_1 = 0, \hat{\theta}_2 = 0$.

Проведем компьютерное моделирование для разных начальных значений ξ_0 и γ . Моделирование проводилось для функции $\omega(t)$, являющейся выходом генератора вида (4.1) и (4.2) с начальными условиями θ_1 и θ_2 . Моделирование выполнено для разных значений неизвестной функции $\omega(t)$, а также при различных значениях начальных условий θ_1 и θ_2 . На рис. 1 приведены результаты моделирования для случая $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$. На рис. 2 приведены результаты моделирования $\omega(t)$ и $\hat{\omega}(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$,

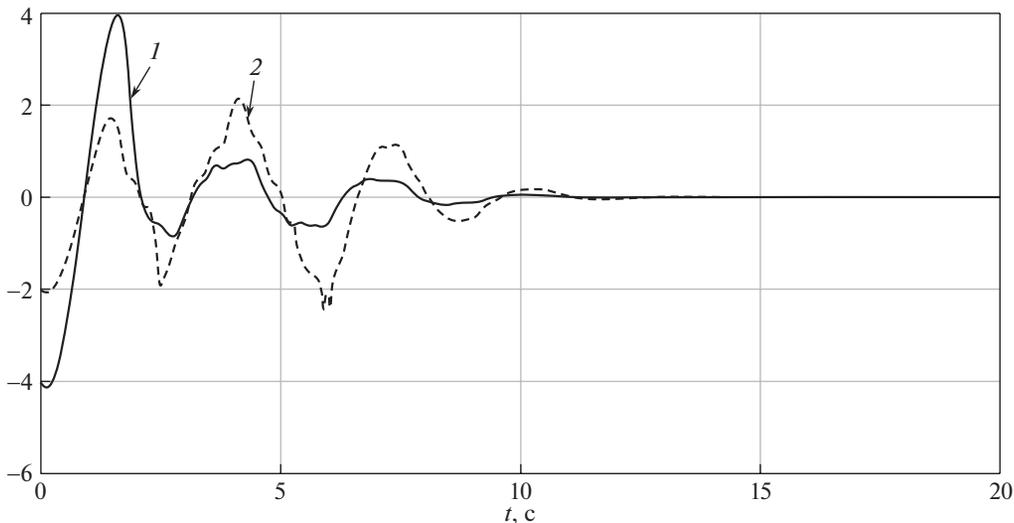


Рис. 4. Графики ошибки $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при различных начальных условиях: 1 – при $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2$, 2 – при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$.

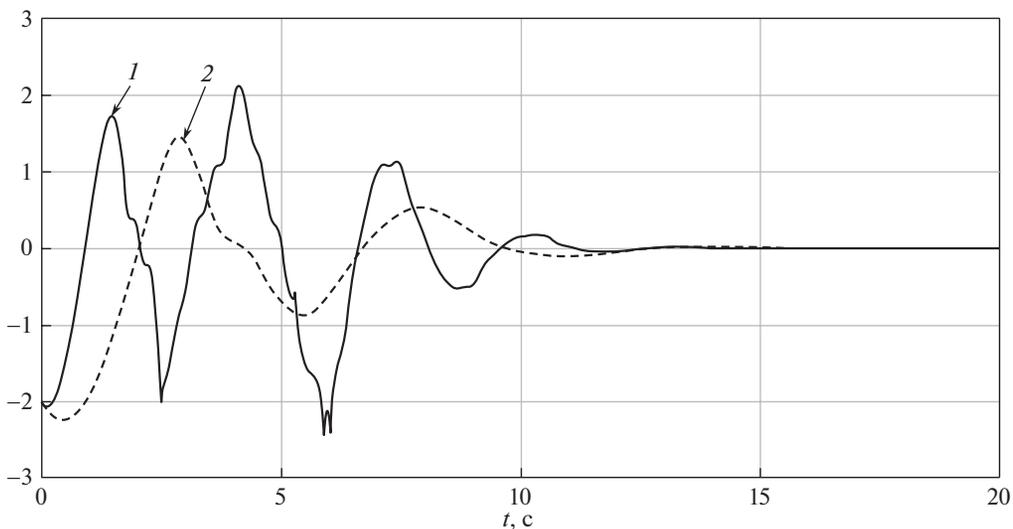


Рис. 5. Графики ошибки $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при различных частотах параметра γ : 1 – при $\gamma = 4$, 2 – при $\gamma = 1$.

$\lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$. На рис. 3 приведены результаты моделирования $\omega(t)$ и $\hat{\omega}(t)$ при $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2, \lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$. На рис. 4 приведены графики ошибок $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при $\lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$ для случаев $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$ и $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2$. На рис. 5 приведены графики ошибок $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2, \lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$ для случаев $\gamma = 1$ и $\gamma = 4$. На рис. 6 и 7 приведен график доступного прямым измерениям сигнала $y(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$, для $\gamma = 1$ и $\gamma = 4$ соответственно.

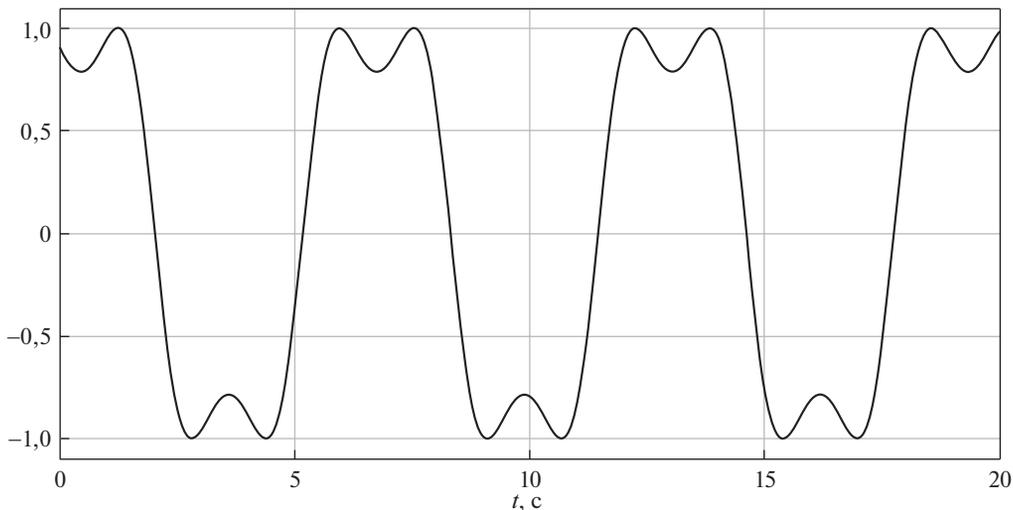


Рис. 6. График сигнала $y(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \gamma = 1$.

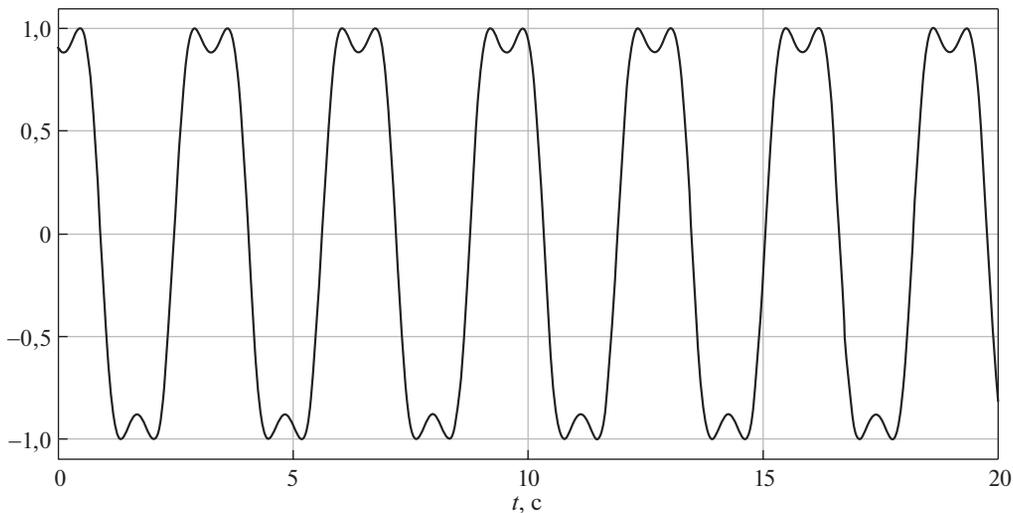


Рис. 7. График сигнала $y(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \gamma = 4$.

Как видно из результатов моделирования, приведенных на рис. 1, оценки неизвестных параметров регрессионной модели сходятся к истинным значениям. Результаты моделирования, приведенные на рис. 2 и 3, демонстрируют сходимость оценки неизвестного сигнала $\hat{\omega}(t)$, полученного на основе оценки неизвестных параметров и истинной функции $\omega(t)$ при различных начальных условиях функции $\omega(t)$. Результаты моделирования, приведенные на рис. 4 и 5, иллюстрируют сходимость ошибки оценки неизвестной функции $e(t) = \hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при различных начальных условиях на генераторе функции $\omega(t)$ (рис. 4) и различных значениях коэффициентов γ модели генерации

параметра $\omega(t)$ (рис. 5). Таким образом, можно сделать вывод, что алгоритм оценки, предложенный в статье, успешно решает поставленную задачу.

Из результатов компьютерного моделирования следует сходимость оценки $\hat{\omega}(t)$ к $\omega(t)$ для различных значений ξ_0 и γ .

Замечание. В рамках данного примера была наглядно продемонстрирована процедура синтеза алгоритма идентификации нестационарного параметра $\omega(t)$, которая может показаться сложной и достаточно громоздкой. В этом смысле представляется важным обсудить еще один возможный подход к идентификации $\omega(t)$, базирующийся на фиксации $2n + 1$ различных моментов времени t_k ($k = 1, 2, \dots, 2n + 1$) измеряемого сигнала $y(t)$ и, как следствие, генерации системы $2n + 1$ уравнений с $2n + 1$ неизвестными параметрами. Далее на базе системы $2n + 1$ уравнений с $2n + 1$ неизвестными можно составить квадратичную функцию и составить программу, ее минимизирующую. Действительно, такой подход имеет место быть, но остается открытым вопрос о выборе различных моментов времени t_k . На базе представленного примера покажем, что выбор t_k является не тривиальной задачей.

Для простоты примем $\alpha = \gamma = 1$. Тогда уравнение (1.1) с учетом динамики (2.1), (2.2) примет вид

$$(4.19) \quad y(t) = \sin(h^T e^{\Gamma t} \xi_0 + \varphi),$$

где $e^{\Gamma t} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$.

Тогда для (4.19) имеем

$$(4.20) \quad y(t) = \sin(\xi_{10} \cos(t) + \xi_{20} \sin(t) + \varphi),$$

где ξ_{10} и ξ_{20} неизвестные начальные условия вектора ξ_0 .

Подставляя в (4.20) значения t_k , получаем

$$(4.21) \quad y_k = \sin(\xi_{10} \cos(t_k) + \xi_{20} \sin(t_k) + \varphi) = \sin(\xi_{10} r_{1k} + \xi_{20} r_{2k} + \varphi),$$

где $r_{1k} = \cos(t_k)$ и $r_{2k} = \sin(t_k)$.

Из уравнения (4.21) видно, что в случае неизвестных чисел ξ_{10} , ξ_{20} и φ выбор $2n + 1$ значений y_k , обеспечивающий $2n + 1$ линейно независимых уравнений с $2n + 1$ неизвестными параметрами, является нетривиальной задачей. Остается открытым вопрос о выборе t_k так, чтобы сигнал y_k , например, не был равен нулю. Выберем для примера $t_k = \frac{k\pi}{2}$, тогда

$$y_k = \sin(h^T e^{\Gamma t_k} \xi + \varphi) = \sin\left(\xi_{10} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \xi_{20} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \varphi\right).$$

Предположим, что $\xi_{20} = -\varphi$, $\xi_{10} = \varphi$ и $\varphi = \pi$. Тогда для всех значений t_k сигнал y_k будет иметь нулевые значения и оценка ξ_{10} , ξ_{20} и φ не представляется возможной. Таким образом, данный подход представляет несомненный интерес, но основную сложность вызывает процедура выбора момента времени t_k .

5. Заключение

В статье предложен новый подход к решению задачи оценивания нестационарного параметра синусоидального сигнала (1.1) при условии, что амплитуда также является переменной функцией времени. Данная задача была решена при выполнении предположений вида (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4).

В статье представлен пример, разъясняющий на конкретном случае процедуру синтеза алгоритма оценивания, а также приведены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие достижение заданной цели для различных параметров модели изменения параметра.

В качестве дальнейшего развития предложенного результата видится его расширение на случай неизвестных матриц уравнений (2.2) и (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобцов А.А., Колубин С.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // *АиТ.* 2010. № 11. С. 136–148.
Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Multi-harmonic Disturbances in Nonlinear Plants with Delayed Control // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 11. P. 2383–2394.
2. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *АиТ.* 2009. № 3. С. 114–122.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Sinusoidal Disturbances in Linear Plants of Arbitrary Relative Degree // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
3. *Пыркин А.А., Бобцов А.А., Ведяков А.А., Колубин С.А.* Оценивание параметров полигармонического сигнала // *АиТ.* 2015. № 8. С. 94–114.
Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A., Kolyubin S.A. Estimation of Polyharmonic Signal Parameters // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 8. P. 1400–1416.
4. *Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально не определенного нелинейного объекта // *АиТ.* 2011. № 1. С. 121–129.
Bobtsov A.A., Kremlev A.S., Pyrkin A.A. Compensation of Harmonic Disturbances in Nonlinear Plants with Parametric and Functional Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 1. P. 111–118.
5. *Chen B., Pin G., Ng W.M., Lee C.K., Hui S.Y.R., Parisini T.* An Adaptive Observer-based Switched Methodology for the Identification of a Perturbed Sinusoidal Signal: Theory and Experiments // *IEEE Trans. Signal Process.* 2014. V. 62. P. 6355–6365.
6. *Fedele G., Ferrise A., D'Aquila G.* A Global Frequency Estimator Based on a Frequency-locked-loop Filter // *Proc. Amer. Control Conf., 2016–July.* 2016. art. no. 7526776. P. 7001–7006.
7. *Marino R., Tomei P.* Frequency Estimation of Periodic Signals // *Eur. Control Conf., ECC 2014.* 2014. art. no. 6862212. P. 7–12.

8. *Hsu L., Ortega R., Damm G.* A Globally Convergent Frequency Estimator // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 4. P. 698–713.
9. *Pin G., Chen B., Parisini T.* Robust Finite-time Estimation of Biased Sinusoidal Signals: A Volterra Operators Approach // Automatica. 2017. V. 77. P. 120–132.
10. *Низовцев С.И., Шаветов С.В., Пыркин А.А.* Алгоритм оценивания переменной частоты синусоидального сигнала // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64. № 9. С. 789–793.
11. *Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Идентификация линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала // Научн.-технич. вестн. информационных технологий, механики и оптики. 2012. Т. 77. № 1. С. 28–32.
12. *Коротина М.М., Арановский С.В., Бобцов А.А.* Оценивание параметров синусоидального сигнала со степенной функцией частоты // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 6. С. 507–514.
13. *Liu D.-Y., Gibaru O., Perruquetti W.* Parameters Estimation of a Noisy Sinusoidal Signal with Time-varying Amplitude // 19th Mediterranean Conf. on Control and Automation, MED 2011. 2011. art. no. 5983186. P. 570–575.
14. *Kudoh N., Takeuchi Y., Tadokoro Y.* A New LMS Based Fourier Analyzer for Sinusoidal Signals with Time-varying Amplitude // IEEE Region 10 Annual Int. Conf. Proc./TENCON, 2. 2002. P. 913–916.
15. *Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Aranovskiy S.V.* A Globally Convergent Frequency Estimator of a Sinusoidal Signal with a Time-varying Amplitude // Eur. J. of Control. 2017. V. 38. P. 32–38.
16. *Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D.* Generalized Parameter Estimation-based Observers: Application to Power Systems and Chemical-Biological Reactors // Automatica. 2021. V. 129. P. 109635.
17. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive control: stability, convergence and robustness. Courier Dover Publications, 2011.
18. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Parameters Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing // Amer. Control Conf. 2016.
19. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 12.10.2021

После доработки 09.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. В.Е. КРИВОНОЖКО, д-р физ.-мат. наук
(KrivonozhkoVE@mail.ru)
(Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС», Москва),
А.П. АФАНАСЬЕВ, д-р физ.-мат. наук (apa@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича РАН, Москва,
Российский университет дружбы народов, Москва),
Ф.Р. ФОРСУНД, д-р экон. наук (Finn.Forsund@econ.uio.no)
(Университет Осло, Норвегия),
А.В. ЛЫЧЕВ, канд. физ.-мат. наук (Lychhev@misis.ru)
(Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС», Москва)

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТА МАСШТАБА В НЕРАДИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ¹

Подход анализа среды функционирования (АСФ) в последние годы активно развивается и используется для анализа деятельности сложных объектов (регионов, финансовых институтов, производственных объектов и т.д.). Важную роль при таком анализе играет вычисление различных показателей деятельности объектов: эффекта масштаба, меры эффективности, предельных коэффициентов замещения, трансформации и т.д. В явном виде зависимости между переменными в моделях АСФ не заданы, поэтому для вычисления этих показателей используют специальные оптимизационные модели. Большое внимание в научной литературе уделяется вычислению эффекта масштаба. В данной работе даются описание и сравнение нескольких наиболее известных методов для вычисления эффекта масштаба. Вычислительные эксперименты показывают, что подход, предложенный авторами, при определенных условиях имеет преимущества перед другими методами.

Ключевые слова: анализ среды функционирования, эффект масштаба, нерадиальная модель, мера эффективности.

DOI: 10.31857/S0005231022070091, EDN: AFMFXJ

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01353).

1. Введение

Подход анализа среды функционирования (АСФ) (на английском языке этот термин звучит как Data Envelopment Analysis — DEA) появился в семидесятых годах прошлого столетия [1, 2] для анализа эффективности сложных социально-экономических (производственных) объектов. На практике такой подход сводится к решению большого семейства оптимизационных задач, по крайней мере одной задачи для каждого наблюдаемого производственного объекта. В настоящее время данный подход активно развивается во всем мире, каждый год проводятся две-три международных конференции на данную тему. Ведущие международные журналы посвящают данной теме специальные выпуски. Модели АСФ дают возможность находить многие важные характеристики поведения производственных объектов. В частности, можно находить эталонные множества объектов и вычислять на их основе эффект масштаба. Эти величины определяются на основе функции трансформации (обобщение производственной функции), которая отображает множество входных (затратных) показателей во множество выходных показателей, причем такая функция предполагается дифференцируемой по всем переменным (см., например, [3–5]).

Рассмотрим производственную функцию $y = f(x)$, определяющую максимальный выпуск продукта y при заданных затратах x , причем в данном случае x и y считаются скалярными величинами.

На рис. 1 показан простейший вариант производственной функции для двумерного случая. В реальности вид этой функции гораздо сложнее. В частности, в подходе АСФ функция многомерна, вектор затрат отображается в вектор выпуска, функция многозначна, т.е. одному вектору соответствует целое множество возможных векторов выпуска. Граница множества производственных возможностей негладкая, поэтому потребуются специальные построения и алгоритмы для того, чтобы вычислять и использовать производственную функцию в подходе АСФ.

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема и монотонна, см. рис. 1.

Рассмотрим величину

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

которая называется эластичностью масштаба или просто эластичностью. Величина (1) позволяет определить, на каком участке своего развития находится производственный объект.

Если в некоторой точке выполняется соотношение $\varepsilon > 1$ (точка A на рис. 1), то говорят, что в данной точке наблюдается увеличение эффекта масштаба. При этом в точке относительный прирост выпуска продукции больше относительного прироста затрат ресурсов на этот выпуск, т.е. производство развивается интенсивно.

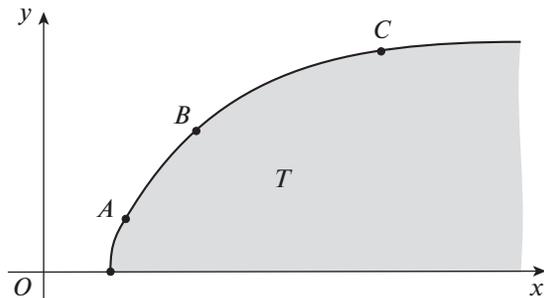


Рис. 1. Производственная функция.

Если $\varepsilon < 1$ (точка C на рис. 1), то говорят, что в данной точке наблюдается убывание эффекта масштаба, или относительный прирост выпуска продукции меньше относительного прироста затрат на этот выпуск, другими словами, производство находится на экстенсивном участке своего развития.

Наконец, если выполняется условие $\varepsilon = 1$ (точка B на рис. 1), то говорят, что наблюдается постоянный эффект масштаба. При этом относительный прирост выпуска продукта равняется относительному увеличению затрат на этот выпуск.

В экономике понятие эффект масштаба распространяется естественным образом на модели со многими затратными (входными) параметрами и одним выходным параметром. В данном случае рассматривается зависимость выпуска продукции от пропорционального изменения всех затратных параметров

$$(2) \quad y = f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_m).$$

Тогда эластичность находится, как в двумерной модели:

$$(3) \quad \varepsilon(\alpha) = \frac{\alpha}{y} \cdot \frac{dy}{d\alpha}.$$

Отсюда определяется эффект масштаба. Говорят, что наблюдается увеличение эффекта масштаба, если $\varepsilon(\alpha) > 1$, убывание эффекта масштаба, если $\varepsilon(\alpha) < 1$, и постоянный эффект масштаба, если $\varepsilon(\alpha) = 1$.

Подход АСФ расширяет понятие производственной функции на модели со многими входными и выходными показателями [3, 5]. Таким образом, производственная функция трансформируется в производственную гиперповерхность, в этом случае принято говорить о производственном соответствии [6]. С целью изучения и анализа этой гиперповерхности строятся различные сечения [7].

Формально зависимость между входными и выходными показателями можно записать как

$$(4) \quad F(X, Y) = 0,$$

здесь $X \in E^m$, $Y \in E^r$, функция $F(X, Y)$ предполагается дифференцируемой по всем своим переменным. Соотношение (4) описывает в многомерном пространстве E^{m+r} гиперповерхность, на которой находятся эффективные точки.

В таких моделях эластичность масштаба определяется как маргинальный коэффициент, показывающий относительное пропорциональное изменение всех выходных параметров при малых относительных пропорциональных изменениях входных параметров в силу соотношения (4). Пропорциональное изменение входных и выходных параметров в окрестности точки (X, Y) запишется как

$$(5) \quad F(\alpha X, \beta(\alpha)Y) = 0.$$

Тогда эластичность масштаба определяется как

$$(6) \quad \varepsilon(X, Y) = \frac{\partial \beta(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отметим, что величина β в соотношениях (5) и (6) зависит также от точки (X, Y) , но чтобы не загромождать обозначения, писать этого не будем.

Продифференцируем по α соотношение (5):

$$(7) \quad \frac{\partial F(\alpha X, \beta(\alpha)Y)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\alpha X, \beta(\alpha)Y)}{\partial \alpha x_i} x_i + \sum_{j=1}^r \frac{\partial F(\alpha X, \beta(\alpha)Y)}{\partial \beta y_j} y_j \frac{\partial \beta(\alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Отсюда, полагая без ограничения общности $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, получим эластичность масштаба в точке (X, Y)

$$(8) \quad \varepsilon(X, Y) = \frac{\partial \beta(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\partial F(X, Y)}{\partial x_i} x_i}{\sum_{j=1}^r \frac{\partial F(X, Y)}{\partial y_j} y_j}.$$

В подходе АСФ множество производственных возможностей строится по реальным наблюдаемым данным в соответствии с определенными постулатами, при этом эффективная гиперповерхность этого множества будет непрерывна, но не везде дифференцируема. Более того, эта зависимость в явном виде не задается. В силу указанных причин эффект масштаба и эластичность вычисляются в АСФ косвенным образом. Для этого был предложен ряд методов на основе свойств модели АСФ [8, 9].

Далее, в теории АСФ была сделана попытка [10, 11] определять эффект масштаба сразу на целой грани на основе информации об эффекте масштаба

в вершинах грани. Дело в том, что современный оптимизатор выдает решение для моделей АСФ для неэффективного объекта в виде некоторого набора (базисных) эффективных объектов. Поэтому такой подход казался вполне обоснованным, тем более что грань определяется своими вершинами.

Однако, как оказывается, такой подход не всегда дает верный результат, так как используемое для решения задач оптимизации программное обеспечение может генерировать различные эталонные множества для одного объекта. В [12] был предложен двухэтапный метод для нахождения эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ. Тем не менее существуют модели, для которых этот метод может выдавать некорректные результаты. В [13, 14] был предложен метод для вычисления эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ, основанный на использовании сильных условий дополняющей нежесткости (СУДН) из теории оптимизации. Этот метод является вполне корректным с теоретической точки зрения, однако он может выдавать противоречивые результаты на практических задачах. Размер модели [13, 14] значительно увеличивается по сравнению со стандартной нерадиальной моделью АСФ из-за добавления ограничений в форме СУДН. Кроме того, некоторые ограничения в СУДН-моделях не имеют смысла с экономической точки зрения, так как в этих моделях складываются величины, измеренные в разных единицах. Все это негативно сказывается на вычислительных возможностях метода и приводит к появлению плохо обусловленных матриц в процессе решения.

В [15] был предложен метод, который преодолевает эти трудности. В этом методе решается несколько вспомогательных задач для того, чтобы найти все вершины минимальной грани, содержащей множество решений.

Нахождение минимальной грани играет важную роль в анализе поведения производственных объектов, в частности для измерения эффекта масштаба. В [16] был предложен другой метод для нахождения экстремальных точек минимальной грани. Этот метод основан на интересном результате из теории оптимизации, который дает возможность находить максимальное число положительных переменных в оптимальном решении задачи линейного программирования. В [16] утверждается, что их метод более эффективный, чем другие существующие методы по нахождению объектов, формирующих минимальную грань. Этот метод действительно представляет большой интерес, однако в [16] работа алгоритма иллюстрируется на примере с небольшим числом объектов, что не дает возможности судить о его эффективности. Поэтому авторы данной статьи ставят целью провести сравнение различных методов вычисления эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ.

2. Постановка задачи

Рассмотрим множество из n наблюдаемых производственных объектов (ПО), деятельность которых необходимо оценить. Каждый ПО потребляет m входных продуктов и производит r выходных продуктов. Таким образом, $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$ является вектором входных параметров (затрат),

а $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj}) \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, — вектором выходных параметров (выпуска). Предполагается, что каждый ПО имеет, по крайней мере, один положительный вход и один положительный выход.

Множество производственных возможностей T определяется как множество таких векторов (X, Y) , что вектор выпуска Y может быть произведен при векторе затрат X , т.е. $T = \{(X, Y) \mid \text{выходной вектор } Y \geq 0 \text{ может быть получен при входном векторе } X \geq 0\}$.

На основе наблюдаемых векторов (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$, множество производственных возможностей T эмпирически задается следующими постулатами.

Постулат 1 (выпуклость). Если $(X, Y) \in T$ и $(X', Y') \in T$, то $(\lambda X + (1 - \lambda)X', \lambda Y + (1 - \lambda)Y') \in T$ для всех $\lambda \in [0, 1]$.

Постулат 2 (монотонность). Если $(X, Y) \in T$ и $X' \geq X, Y' \leq Y$, то $(X', Y') \in T$.

Постулат 3 (минимальная экстраполяция). Множество T является пересечением всех множеств T' , удовлетворяющих постулатам 1 и 2, при условии, что $(X_j, Y_j) \in T'$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Таким образом, множество T строится как расширение по наблюдаемым производственным векторам (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$, и определяет возможные, экономически допустимые векторы выпуска Y по векторам затрат X .

В алгебраическом виде множество производственных возможностей T запишется так:

$$(9) \quad T = \left\{ (X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Нерадиальная модель АСФ может быть записана в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} \max h &= C^{+T} S^+ + C^{-T} S^-, \\ \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + S^- &= X_o, \\ \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - S^+ &= Y_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ S^- &= (s_1^-, \dots, s_m^-)^T \geq 0, \\ S^+ &= (s_1^+, \dots, s_r^+)^T \geq 0, \end{aligned}$$

где векторы $S^- = (s_1^-, \dots, s_m^-)^T$ и $S^+ = (s_1^+, \dots, s_r^+)^T$ являются векторами дополнительных переменных. Компоненты векторов целевой функции C^+ и C^- определяются следующим образом:

$$c_i^- = \frac{1}{(m+r)R_i^-}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$c_k^+ = \frac{1}{(m+r)R_k^+}, \quad k = 1, \dots, r.$$

$$R_i^- = \max_{1 \leq j \leq n} x_{ij} - \min_{1 \leq j \leq n} x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$R_k^+ = \max_{1 \leq j \leq n} y_{kj} - \min_{1 \leq j \leq n} y_{kj}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Коэффициенты определены таким образом, чтобы оптимальное решение было безразмерной величиной.

В модели (10) объект (X_o, Y_o) является любым объектом из множества (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$. Мера эффективности определяется с помощью оптимального решения задачи (10) по следующей формуле [12]:

$$\Gamma = 1 - h^* = 1 - (C^{+T} S^{+*} + C^{-T} S^{-*}).$$

Если оптимальное значение h^* в модели (10) равняется нулю, то объект (X_o, Y_o) считается эффективным, если $h^* > 0$, тогда объект неэффективный.

Задача, двойственная к (10), записывается следующим образом:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \min \{v^T X_o - u^T Y_o + u_0\}, \\ & v^T X_j - u^T Y_j + u_0 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & v \geq C^-, \quad u \geq C^+, \end{aligned}$$

где $v = (v_1, \dots, v_m)^T$ и $u = (u_1, \dots, u_r)^T$ представляют собой векторы двойственных переменных, соответствующих первой и второй группе ограничений в модели (10), u_0 является свободной переменной, соответствующей ограничению выпуклости.

В [12] был предложен метод для определения эффекта масштаба в нерадиальной модели (10). Сначала определяются решения $(\lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ и (v^*, u^*, u_0^*) пары взаимно двойственных задач (10) и (11) соответственно. Здесь $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)^T$. Далее, если $u_0^* < 0$, то решается следующая задача:

$$(12) \quad \begin{aligned} & \max u_0, \\ & v^T X_j - u^T Y_j - u_0 \geq 0, \quad j \neq o, \\ & v^T (X_o - S^{-*}) - u^T (Y_o + S^{+*}) - u_0 = 0, \\ & v \geq C^-, \\ & u \geq C^+, \\ & u_0 \leq 0. \end{aligned}$$

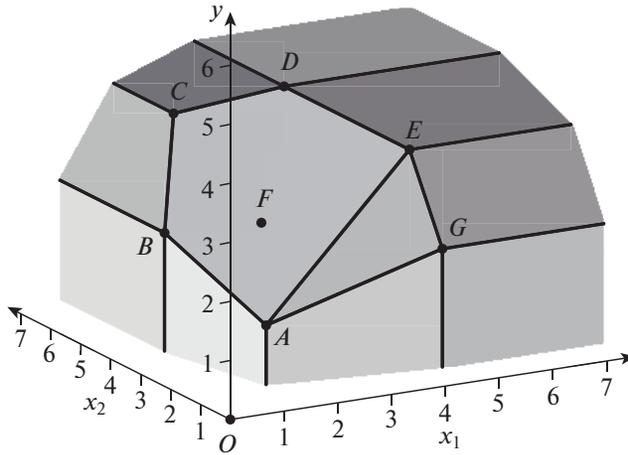


Рис. 2. Внутренняя точка F может быть представлена несколькими эталонными множествами.

Если в оптимальном решении двойственной задачи (11) переменная $u_0^* > 0$, тогда необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
 & \min u_0, \\
 & v^T X_j - u^T Y_j + u_0 \geq 0, \quad j \neq o, \\
 & v^T (X_o - S^{-*}) - u^T (Y_o + S^{+*}) + u_0 = 0, \\
 & v \geq C^-, \\
 & u \geq C^+, \\
 & u_0 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

В этих задачах оптимальные дополнительные переменные S^{-*} , S^{+*} берутся из решения задачи (10).

Пусть $(\hat{v}^*, \hat{u}^*, \hat{u}_0^*)$ является оптимальным решением задачи (12) или (13). Тогда эффект масштаба в точке $(X_o - S^{-*}, Y_o + S^{+*})$ определяется исходя из следующих условий:

- а) если $\hat{u}_0^* = 0$, тогда наблюдается постоянный эффект масштаба;
- б) если $u_0^* < 0$ и $\hat{u}_0^* < 0$, тогда наблюдается возрастающий эффект масштаба;
- в) если $u_0^* > 0$ и $\hat{u}_0^* > 0$, тогда наблюдается убывающий эффект масштаба.

В [13, 14] было показано, что этот подход может генерировать некорректные результаты в некоторых случаях. Дело в том, что нерадиальные модели АСФ имеют ряд специфических свойств: а) для одного объекта может существовать несколько эталонных множеств; б) для эффективного объекта может существовать несколько опорных гиперплоскостей; в) для неэффективного объекта может существовать несколько проекций на эффективный

фронт. Все эти причины могут вызвать определенные трудности при измерении эффекта масштаба производственных объектов.

Напомним, что эталонным множеством объекта (X_o, Y_o) называется множество [10]

$$(14) \quad E_o = \{j \mid \lambda_j^* > 0, j = 1, \dots, n\},$$

где λ_j^* — оптимальные переменные задачи (10).

На рис. 2 показано, что внутренняя точка F грани может определяться несколькими вершинами грани и принадлежит нескольким эталонным множествам. Например, точка F на рис. 2 может принадлежать эталонному множеству или (A, E, C) , или (A, B, D) , или (A, B, E) .

3. Методы решения

В [15] был предложен двухэтапный подход для измерения эффекта масштаба в нерадиальных моделях. На первом этапе находится относительно внутренняя точка на оптимальной грани. Для этого используется специально разработанный метод. В [17] было доказано, что любая относительная внутренняя точка грани имеет такой же эффект масштаба, как и любая другая внутренняя точка этой же грани. На втором этапе предлагается находить эффект масштаба в относительно внутренней точке грани, найденной на первом этапе, используя при этом прямой метод [18, 19].

Множество оптимальных точек Λ^* в модели (10) (т.е. множество проекций объекта (X_o, Y_o) на эффективный фронт) расположено на границе множества производственных возможностей T . Множество Λ^* для модели (10) может быть записано в виде

$$(15) \quad \Lambda^* = \{(X, Y) \mid X = X_o - S^{-*}, Y = Y_o + S^{+*}\},$$

где $(\lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$ — оптимальное решение задачи (10).

Множество оптимальных решений Λ^* может принадлежать только пересечению некоторых граней множества T . Можно доказать, что существует единственная минимальная грань Γ_{\min} , которая содержит множество Λ^* [15].

Пусть задачи (10) и (11) решены симплекс методом и получены оптимальные переменные прямой $\{\lambda_j^*, j = 1, \dots, n; S_i^{-*}, i = 1, \dots, m; S_k^{+*}, k = 1, \dots, r\}$ и двойственной задачи $\{v_i^*, i = 1, \dots, m; u_k^*, k = 1, \dots, r; u_o^*\}$.

Определим индексные множества, соответствующие двойственным переменным:

$$(16) \quad \begin{aligned} J^* &= \{j \mid v^{*T} X_j - u^{*T} Y_j + u_o^* = 0, j = 1, \dots, n\}, \\ J_v &= \{i \mid v_i^* = C_i^-, i = 1, \dots, m\}, \\ J_u &= \{k \mid u_k^* = C_k^+, k = 1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Введем индексное множество для прямого решения

$$(17) \quad I^* = \{j \mid \lambda_j^* > 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Переменные λ_j^* , $j \in I^*$ определяют только одну точку минимальной грани. Для нахождения всех точек, принадлежащих грани Γ_{\min} , необходимо решить дополнительные задачи $l \in J^*$:

$$(18) \quad \begin{aligned} \max f_l &= \lambda_l, \\ \sum_{j \in J^*} X_j \lambda_j + \sum_{i \in I_x^- \cup J_v} e_i s_i^- &= X_o, \\ \sum_{j \in J^*} Y_j \lambda_j - \sum_{k \in I_y^+ \cup J_u} e_k s_k^+ &= Y_o, \\ \sum_{j \in J^*} \lambda_j &= 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in J^*, \\ s_i^- &\geq 0, \quad i \in I_x^- \cup J_v, \\ s_k^+ &\geq 0, \quad k \in I_y^+ \cup J_u, \end{aligned}$$

где $e_k^- \in E^m$ и $e_i^+ \in E^r$ являются единичными векторами, связанными с переменными s_k^- и s_i^+ соответственно.

Согласно теоремам двойственности линейного программирования оптимальные переменные задачи (18) будут оптимальными переменными задачи (10).

Опишем теперь процедуру для нахождения всех производственных объектов, принадлежащих грани Γ_{\min} и множеству Λ^* .

Пусть $JH = J^*$, $J_0 = \emptyset$, $J_1 = \emptyset$. Пока число объектов в JH больше 0: выбираем произвольный индекс l из множества JH ; решаем задачу (18); если $f_l^* > 0$, тогда $J_0 = J_0 \cup l$; если $f_l^* = 1$, тогда $J_1 = J_1 \cup l$; удаляем индекс l из множества JH .

Множество J_0 в результате выполнения алгоритма определяет множество объектов, принадлежащих минимальной грани Γ_{\min} . Множество J_1 содержит объекты из множества Λ^* .

После выполнения вышеописанной процедуры минимальная грань Γ_{\min} записывается в виде

$$(19) \quad \Gamma_{\min} = \left\{ (X, Y) \left| \begin{aligned} X &= \sum_{j \in J_o} X_j \lambda_j, \quad Y = \sum_{j \in J_o} Y_j \lambda_j, \\ \sum_{j \in J_o} \lambda_j &= 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in J_o \end{aligned} \right. \right\}.$$

В [17] было доказано, что внутренние точки грани (19) имеют одинаковый эффект масштаба, таким образом, достаточно определить эффект масштаба в любой внутренней точке грани. Внутренняя точка (\bar{X}, \bar{Y}) грани Γ_{\min} может быть выбрана как строгая выпуклая комбинация объектов из множества J_0 , т.е.

$$\bar{X} = \sum_{j \in J_0} X_j \lambda_j, \quad \bar{Y} = \sum_{j \in J_0} Y_j \lambda_j, \quad \sum_{j \in J_0} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j > 0, \quad j \in J_0.$$

В прямом методе [20] строится пересечение множества T и двумерной плоскости, затем в любой точке полученного двумерного графика определяется эффект масштаба с использованием производных.

Вычисление эффекта масштаба и масштабной эластичности может быть выполнено также для любой внутренней точки множества Γ_{\min} или Λ^* для любого объекта (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$.

В методе [15], описанном в этой статье, достаточно решить несколько задач вида (18), назовем это алгоритмом 1, однако такие задачи имеют значительно меньше переменных, чем задача (10).

В [16] было предложено решать задачу вида

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in J_E} \mu_j + \mu_{j_{t+1}}, \\ & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} + s_i^- - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) x_{i0} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) y_{kj} - s_k^+ - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) y_{k0} = 0, \quad k = 1, \dots, r, \\ (20) \quad & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{k=1}^r \frac{s_k^+}{R_k^+} - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) (m+r) (1-\rho_0) = 0, \\ & 0 \leq \mu_{j_k} \leq 1, \quad \lambda_{j_k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, t+1, \\ & s_i^- \geq 0, \quad s_k^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

где $J_E = \{j_1, \dots, j_t\}$ — множество эффективных объектов в модели (10), а ρ_0 — оптимальное значение целевой функции задачи (10).

Задача (20) получена в результате применения интересного результата из линейного программирования [21, с. 136]: как найти допустимое решение однородной системы уравнений такое, что число положительных компонент достигает максимума.

Более того, в [16] утверждается, что их метод, назовем его алгоритм 2, более эффективен с вычислительной точки зрения, чем другие существующие методы. Проверим это утверждение.

4. Вычислительные эксперименты

Для проведения расчетов несколько наборов данных были сгенерированы случайным образом. Каждый набор данных содержит около 30% эффективных объектов. Для всех производственных объектов максимальные значения каждого входного и выходного показателя больше, чем минимальное значение этого показателя, не более чем в 10 раз.

Для того чтобы измерить зависимость времени вычислений каждого алгоритма от числа производственных объектов, было необходимо сгенерировать наборы данных с различным числом производственных объектов. Эти наборы данных формируются из набора данных большого размера с помощью выбора заданного числа объектов случайным образом, затем выполняются расчеты и определяется время вычислений. Для того чтобы увеличить надежность измерений, подобные операции проводятся 10 раз и время вычислений усредняется.

На рис. 3 показаны зависимости времени вычислений от числа производственных объектов в моделях 2, 3, 4, соответственно, где цифра соответствует числу входных показателей, причем число выходных показателей равняется числу входных. Из этих рисунков можно видеть, что кривые почти совпадают в модели 2 вплоть до числа 140 объектов, в модели 3 вплоть до числа 100 объектов, в модели 4 вплоть до числа 60 объектов. После этих точек кривые монотонно расходятся. Однако время вычислений алгоритма 1 растет медленно: в модели 2 от 2,2 мс до 44,4 мс, в модели 3 от 4,2 мс до 76,2 мс, в модели 4 от 5,3 мс до 103,6 мс. Ситуация совсем другая для алгоритма 2. Время вычислений алгоритма 2 растет очень быстро: в модели 2 от 1,2 мс до 482,2 мс, в модели 3 от 2,0 мс до 590,4 мс, в модели 4 от 2,9 мс до 978,5 мс. Таким образом, можно видеть, что время вычислений алгоритма 2 увеличивается значительно с ростом числа производственных объектов.

Для того чтобы выявить причины расхождения времени вычисления алгоритмов 1 и 2, вычислим коэффициенты обусловленности для этих алгоритмов. На рис. 4 показаны графики значений коэффициентов обусловленности для моделей 2 и 3. Интересно отметить, что коэффициенты обусловленности алгоритма 2 всегда больше, чем для алгоритма 1. Подобные результаты наблюдаются для других моделей. Это значит, что преобразование нерадиальной модели (10) в модель (20) ухудшает обусловленность этой модели. В результате время вычислений алгоритма 2 значительно увеличивается. Подобный результат наблюдается и для нерадиальной СУДН модели.

Подход АСФ в последние годы активно развивается и используется для анализа деятельности сложных объектов (регионов, финансовых институтов, производственных объектов и т.д.). Важную роль при таком анализе игра-

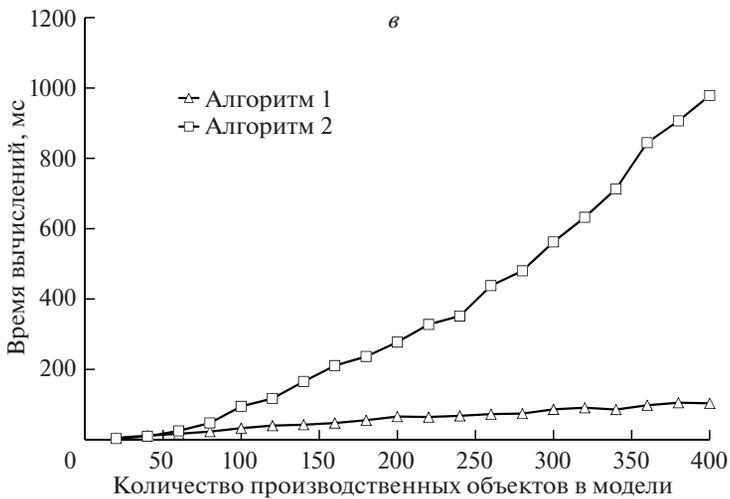
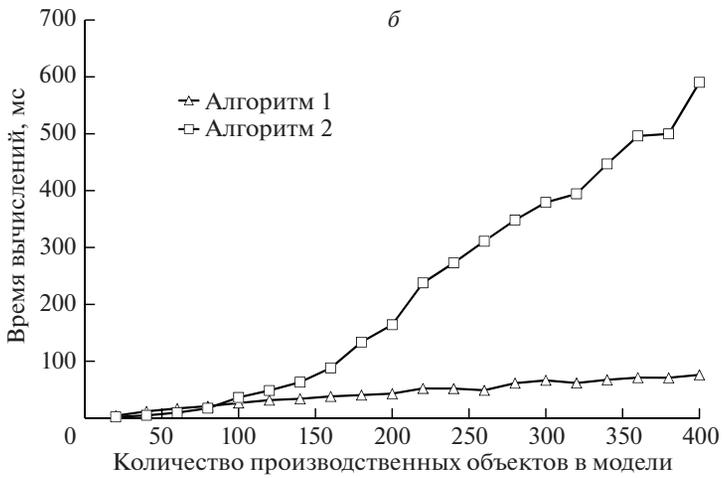
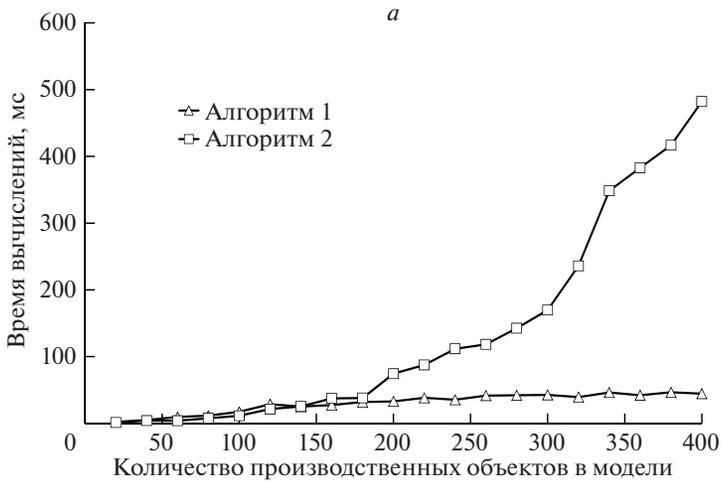


Рис. 3. Зависимость времени вычислений от числа производственных объектов: *a* — для модели 2; *б* — для модели 3; *в* — для модели 4.

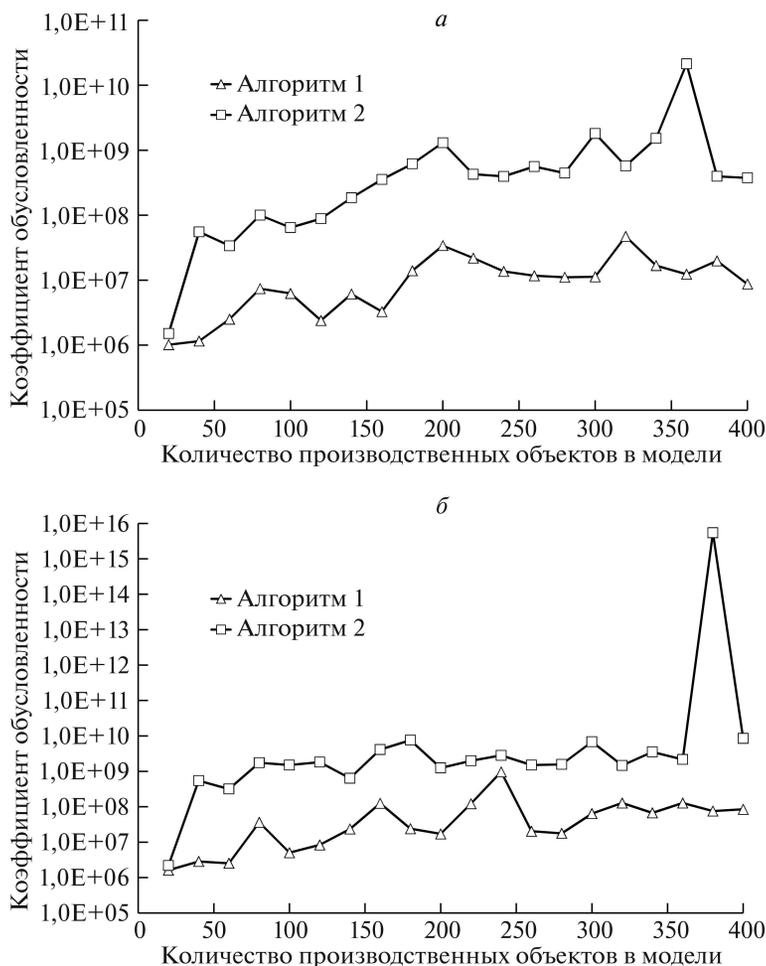


Рис. 4. Максимальный коэффициент обусловленности: *а* — для модели 2; *б* — для модели 3.

ет вычисление различных показателей: эффекта масштаба, меры эффективности, предельных коэффициентов замещения, предельных коэффициентов трансформации и др. Так как в явном виде зависимости между переменными не заданы, то для вычисления этих показателей используют различные оптимизационные модели [22, 23].

Следует отметить, что в развитии оптимизационных методов и соответствующего программного обеспечения за последние шестьдесят лет достигнут большой прогресс. Поэтому их стали широко использовать в различных прикладных задачах. Но проблема состоит в том, что ограничения оптимизационной задачи можно записать в двух эквивалентных форматах: в виде пересечения полупространств и как выпуклую сумму вершин и направляющих векторов неограниченных ребер множества ограничений. Оптимизационные методы развивались в основном для первого вида ограничений, моде-

ли АСФ записываются с помощью второго представления. С теоретической точки зрения здесь никакого противоречия не существует. Но при решении больших задач могут появляться существенные расхождения. В принципе, можно было бы перейти от одной формы представления к другой, но это требует большого количества вычислительных операций, так как даже для средних моделей число ограничивающих гиперплоскостей значительно больше, чем число вершин в модели. Поэтому имеет смысл разрабатывать методы решения сразу для второго вида ограничений, это было проверено на многих задачах.

5. Заключение

Большое внимание в научной литературе уделяется вычислению эффекта масштаба. В данной работе проведено описание и сравнение нескольких наиболее известных методов для вычисления эффекта масштаба. Вычислительные эксперименты показывают, что подход [15] имеет определенные преимущества перед другими методами. Предложенный авторами подход для вычисления эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ позволяет использовать параллельные вычисления. Действительно, исходная большая задача разбивается на ряд подзадач меньшей размерности, эти подзадачи решаются независимо, а затем эти решения объединяются для получения решения всей исходной задачи. При этом существенным образом используется подход, предложенный в [7]. Предложенный авторами подход представляет собой новое направление в решении задач большой размерности, он позволяет существенным образом повысить скорость вычислений и устойчивость решений в нерадиальных моделях АСФ. Более того, подход, изложенный в данной работе, позволяет активно использовать декомпозицию и распределенную вычислительную среду, что существенно сокращает память и увеличивает скорость вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // *Eur. J. Operat. Res.* 1978. V. 2. No. 6. P. 429–444.
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
2. *Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.* Some models for estimating technical and scale efficiency in data envelopment analysis // *Management Science.* 1984. V. 30. No. 9. P. 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
3. *Hanoch G.* Homotheticity in joint production // *J. Econom. Theor.* 1970. V. 2. No. 4. P. 432–426. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(70\)90024-4](https://doi.org/10.1016/0022-0531(70)90024-4)
4. *Panzar J.C., Willig R.D.* Economies of scale in multi-output production // *Quart. J. Econom.* 1977. V. 91. No. 3. P. 481–493. <https://doi.org/10.2307/1885979>
5. *Starrett D.A.* Measuring returns to scale in the aggregate, and scale effect of public goods // *Econometrica.* 1977. V. 45. No. 6. P. 1439–1455.
<https://doi.org/10.2307/1912310>

6. *Shepard R.W.* Theory of cost and production functions. New Jersey: Princeton University Press, 1970.
7. *Afanasiev A.P., Krivonozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V.* Multidimensional frontier visualization based on optimization methods using parallel computations // *J. Global. Optim.* 2020. V. 76. P. 563–574.
<https://doi.org/10.1007/s10898-019-00812-y>
8. *Banker R.D., Thrall R.M.* Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis // *Eur. J. Operat. Res.* 1992. V. 62. No. 1. P. 74–84.
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(92\)90178-C](https://doi.org/10.1016/0377-2217(92)90178-C)
9. *Førsund F.R.* On the calculation of the scale elasticity in DEA models // *J. Product. Anal.* 1996. V. 7. No. 2-3. P. 283–302. <https://doi.org/10.1007/BF00157045>
10. *Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.* Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2nd Ed. New York: Springer Science and Business Media, 2007.
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-45283-8>
11. *Tone K.* A simple characterization of returns to scale in DEA // *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1996. V. 39. No. 4. P. 604–613.
12. *Banker R.D., Cooper W.W., Seiford L.M. et al.* Returns to scale in different DEA models // *Eur. J. Operat. Res.* 2004. V. 154. P. 345–362.
[https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(03\)00174-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00174-7)
13. *Sueyoshi T., Sekitani K.* Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach // *Eur. J. Operat. Res.* 2007. V. 176. P. 1918–1946. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.043>
14. *Sueyoshi T., Sekitani K.* An occurrence of multiple projections in DEA-based measurement of technical efficiency: theoretical comparison among DEA models from desirable properties // *Eur. J. Operat. Res.* 2009. V. 196. P. 764–794.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.01.045>
15. *Krivonozhko V.E., Førsund F.R., Lychev A.V.* Measurement of returns to scale using non-radial DEA models // *Eur. J. Operat. Res.* 2014. V. 232. No. 3. P. 664–670. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.046>
16. *Mehdiloozad M., Mirdehghan S.M., Sahoo B.K. et al.* On the identification of the global reference set in data envelopment analysis // *Eur. J. Operat. Res.* 2015. V. 245. No. 3. P. 779–788. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.03.029>
17. *Krivonozhko V.E., Førsund F.R., Lychev A.V.* Returns-to-scale properties in DEA models: the fundamental role of interior points // *J. Product. Anal.* 2012. V. 38. P. 121–130. <https://doi.org/10.1007/s11123-011-0253-z>
18. *Кривонозжко В.Е., Форсунд Ф.Р., Лычев А.В.* Методы нахождения всех решений для эталонного множества в методологии АСФ // *ДАН.* 2012. Т. 442. № 1. С. 28–32.
19. *Кривонозжко В.Е., Лычев А.В., Форсунд Ф.Р.* Измерение эффекта масштаба в радиальных моделях методологии анализа среды функционирования // *ЖВМиМФ.* 2017. Т. 51. № 1. С. 69–80.
20. *Førsund F.R., Hjalmarsson L., Krivonozhko V.E. et al.* Calculation of scale elasticities in DEA models: direct and indirect approaches // *J. Product. Anal.* 2007. V. 28. P. 45–56. <https://doi.org/10.1007/s11123-007-0047-5>

21. *Bertsimas D., Tsitsiklis J.N.* Introduction to linear optimization. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1997.
22. *Mehdiloozad M., Sahoo B.K.* Identifying the Global Reference Set in DEA: An Application to the Determination of Returns to Scale. In: S.-N. Hwang, H.-S. Lee, J. Zhu (Eds.), Handbook of Operations Analytics Using Data Envelopment Analysis, Springer US, Boston, MA, 2016. P. 299–330.
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7705-2_12
23. *Mehdiloozad M.* Identifying the global reference set in DEA: a mixed 0-1 LP formulation with an equivalent LP relaxation // Oper. Res. Int. J. 2017. V. 17. P. 205–211.
<https://doi.org/10.1007/s12351-015-0222-9>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 19.07.2021

После доработки 22.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

- Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Две задачи планирования оптимальных траекторий подвижного объекта в случае вырождения необходимых условий экстремума..... 3

Стохастические системы

- Назаров А.А., Павлова Е.А. Исследование СМО вида $MMPP|M|N$ с обратной связью методом асимптотически диффузионного анализа..... 33

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Ащепков Л.Т. Аналитическое конструирование регулятора с амплитудным ограничением..... 49
- Приступа П.В., Суценко С.П., Михеев П.А., Моисеев А.Н. Анализ эффективности прямой коррекции ошибок на уровне транспортного протокола..... 59
- Пряшников П.Ф. Робастное D-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров..... 82

Управление в социально-экономических системах

- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. Координация коллективных действий с помощью стратегии Штакельберга..... 100

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

- Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности группами критериев..... 119

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Бобцов А.А., Николаев Н.А., Оськина О.В., Низовцев С.И. Идентификация нестационарного параметра незашумленного синусоидального сигнала..... 137
- Кривоножко В.Е., Афанасьев А.П., Форсунд Ф.Р., Лычев А.В. Сравнение различных методов нахождения эффекта масштаба в нерадиальных моделях анализа среды функционирования..... 152

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

- Galyaev A.A., Lysenko P.V., Iakhno V.P.** Two Problems of Optimal Trajectory Planning of Mobile Vehicle in Case of Necessary Extremum Conditions Degeneration 3

Stochastic Systems

- Nazarov A.A., Pavlova E.A.** Method of Asymptotic Diffusion Analysis of Queueing System $MMPP|M|N$ with Feedback 33

Robust, Adaptive and Network Control

- Ashchepkov L.T.** Analytical Design of the Amplitude-Limited Regulator 49
- Pristupa P.V., Suschenko S.P., Mikheev P.A., Moiseev A.N.** Performance of Forward Error Correction in Transport Protocol 59
- Pryashnikova P.F.** Robust D-Decomposition at the Polynomial Dependence of the Polynomial Coefficients on Two Parameters 82

Control in Social Economic Systems

- Skarzhinskaya E.M., Tzurikov V.I.** Coordination of Collective Action with the Stackelberg Strategy 100

Intellectual Control Systems, Data Analysis

- Nelyubin A.P., Podinovski V.V.** Multicriteria Problems with Importance Ordered Groups of Criteria 119

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Bobtsov A.A., Nikolaev N.A., Oskina O.V., Nizovtsev S.I.** Identification of Time-Varying Parameter of Noiseless Sinusoidal Signal 137
- Krivonozhko V.E., Afanasiev A.P., Førsund F.R., Lychev A.V.** Comparison of Different Methods for Estimation of Returns to Scale in Non-Radial Data Envelopment Analysis Models 152