

СОДЕРЖАНИЕ

О влиянии дилатансии на характеристики формоизменения и объемной упругости разнослопротивляющихся сред <i>К. Ф. Комков</i>	3
Реализация заданных относительных сферических и винтовых движений двух твердых тел двуруким роботом <i>Е. И. Воробьев</i>	18
Учет нелинейности колебаний резонаторов при идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов разных типов <i>А. А. Маслов, Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев</i>	28
Самовозбуждающиеся колебания маловязкой жидкости и их влияние на ротор с малым числом радиальных перегородок <i>А. Н. Никифоров</i>	41
Об одной возможности ориентации околоземного космического аппарата по магнитному полю Земли <i>И. Н. Абезяев</i>	54
Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки под действием наружного давления, создаваемого катушкой гибких нитей <i>В. В. Васильев, В. А. Салов, А. А. Склезнев</i>	63
Об одной механической модели самоорганизации наночастиц <i>В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко, В. С. Евдокимов</i>	72
Влияние кристаллической структуры и типа межатомной связи на упругие свойства одноатомных и двухатомных кубических кристаллов <i>А. И. Епишин, Д. С. Лисовенко</i>	79
Изотропные тензор-функции с квазиполиномиальным скалярным потенциалом в нелинейной теории упругости <i>Д. В. Георгиевский</i>	97
К теории ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей <i>Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев</i>	104
Уточненная модель изгиба балки применительно к методу залипшего кантилевера <i>И. А. Солдатенков, А. А. Яковенко, В. Б. Световой</i>	114
Линейные и нелинейные плоские продольные волны в среде Слепяна–Пальмова <i>В. И. Ерофеев, М. И. Корсаков, А. В. Леонтьева</i>	127
Некоторые спектральные задачи для циклических механических систем <i>Н. В. Баничук</i>	140
Геомеханический анализ образования вывалов на стенках скважин <i>Ю. Ф. Коваленко, К. Б. Устинов, В. И. Карев</i>	148
К 70-летию со дня рождения Владимира Анатольевича Левина	164



УДК 539.374.376

**О ВЛИЯНИИ ДИЛАТАНСИИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ И ОБЪЕМНОЙ УПРУГОСТИ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ СРЕД**© 2022 г. К. Ф. Комков<sup>а,\*</sup><sup>а</sup> Военно-технический университет, Балашиха, Россия

\*e-mail: 06kfk38@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2020 г.

После доработки 03.11.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

Данная работа является продолжением исследований автора по практическому использованию математических моделей на основе тензорно-нелинейных уравнений, с помощью которых показано, что количественную меру тензорной нелинейности в них выполняет отношение материальных функций при тензорных аргументах, названное параметром тензорной нелинейности. Являясь независимой величиной от угла вида напряженного состояния, параметр определяет изменение фазы подобия девиаторов, способствуя формулированию соотношений для описания деформаций: формоизменения, объемной деформации и дополнительной деформации – дилатансии, а также показывает, что деформации, как формоизменения, так и объемные можно представить в виде двух частей. Первую часть связать с деформацией жестких элементов структуры, а вторую часть, включающую в себя этот параметр, отнести к утрате упругости межструктурных связей при пропорциональном росте напряжений. Поведение разносопротивляющихся сред существенно зависит не только от уровня деформаций, но и их знака, которые способствуют или препятствуют росту дилатансии. В направлении большей положительной деформации дилатансия дополняет ее, создает коэффициенты поперечных деформаций со значениями, меньшими начального их значения, а, являясь поперечной для других направлений, может вызывать коэффициенты, которые растут, превышая иногда число 0.5, существенно влияя на другие характеристики. Допущение дилатансии к упругим деформациям является неизбежным шагом, необходимым для объяснения поведения всех коэффициентов и характеристик упругости по трем направлениям. Исследования этих деформаций в разных квадрантах позволили установить, что утрата связей и рост дилатансии является основной причиной деформационной анизотропии теоретических коэффициентов поперечных деформаций, помогающей выявить эффект влияния дилатансии на характеристики объемной упругости при пропорциональном росте напряжений. Для точной оценки возникающей анизотропии в направлении главных напряжений предлагается использовать параметр изменяющейся упругости, значения которого при двухосном сжатии становятся отрицательными с отрицательным значением параметра разрыхления и отрицательной дилатансией.

*Ключевые слова:* дилатансия, формоизменение, объемная деформация, параметр тензорной нелинейности, фаза подобия девиаторов, деформационная анизотропия, параметр изменяющейся упругости

DOI: 10.31857/S0572329922050087

**1. Введение.** В настоящее время в нелинейной теории упругости разносопротивляющихся сложных сред, в группу которых входят зернистые композиты, чугуны, гра-

фиты, строительные материалы, в том числе и грунты, для описания их свойств наиболее распространенным направлением являются теории, основанные на выборе потенциала деформаций. Они позволяют установить определяющие уравнения и характеристики упругости для решения краевых задач, к которым следует отнести работы [1, 2] и другие, где о разрушении связей часто не упоминается. Подробный анализ исследований по данному направлению проведен в работах Трещева А.А. [2], где можно найти обзор литературы, как по персоналиям, так и по хронологии. Поскольку число публикаций по данному вопросу нелинейной теории упругости достаточно велико, в том числе и обзорных, например, работа Трещева А.А. [2], поэтому нет веских причин останавливаться на этом вопросе более подробно. С нашей точки зрения перспективным направлением для решения проблем механики разносопротивляющихся материалов, является разработка моделей, использующих позабытый математический аппарат уравнений, вывод которых был дан В.В. Новожиловым [3]. В отечественной и зарубежной литературе еще весьма мало работ, в которых применялись бы тензорно-нелинейные уравнения для решения практических задач. Одной из причин такого отношения к ним следует назвать отсутствие более глубокого анализа и исследований их свойств и, в частности, материальных функций, которые отвечали бы реальным свойствам отмеченных сред. Используя концепцию тензорно-нелинейных уравнений, в работе [6, с. 189] разработана методика определения дилатансии и характеристик объемной упругости, показано существенное различие значений модулей: высокие при растяжении, но низкие при сжатии, зависящих от уровня нагрузки и от вида напряженного состояния. Методика, включающая в себя процедуры наложения теоретических кривых для коэффициентов поперечных деформаций с кривыми, полученными при испытаниях на растяжение и сжатие, позволила определять значения теоретических модулей объемной упругости и параметры разрыхления для напряженных состояний второго квадранта. Она раскрыла механизм изменения дополнительной объемной деформации — дилатансии, состоящей в том, что положительные деформации, как формоизменения, так и объемные, сопровождаются потерей упругости и утраты связей, создавая заметную деформационную анизотропию коэффициентов поперечных деформаций и характеристик объемной упругости.

Целью данной работы является вывод соотношений для описания деформаций формоизменения и объемных деформаций при использовании общего выражения для фазы подобия девиаторов, как законов связи инвариантов тензора деформаций с инвариантами тензора напряжений, учитывающих дилатансию, в результате последовательного накопления изменений упругости межструктурных связей, — основной причины взаимосвязи упомянутых деформаций. Провести исследования по изучению влияния дилатансии на характеристики упругости в трех квадрантах плоских напряженных состояний, чтобы показать, что концепция на основе тензорно-нелинейных уравнений способна более наглядно и точнее описывать деформации и нелинейные эффекты разносопротивляющихся сред.

**2. Метод решения.** После замены вторых инвариантов на интенсивности напряжений и деформаций, уравнения [3, 4] связи девиатора деформаций с девиатором напряжений Новожилова В.В. можно привести к виду:

$$e_{ij} = \Phi_m S_{ij} / 2 + \Phi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2S_0^2 / 9 \delta_{ij}) / S_0 \quad (2.1)$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$  компоненты девиатора деформаций;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  компоненты девиатора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  тензоры второго ранга деформаций и напряжений, соответственно;  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3$  — средняя деформация;  $e_0 = (2/3 \varepsilon_{ij} e_{ij})^{1/2}$  — интенсивность деформаций;  $\sigma_0 = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$  — среднее напряжение,  $S_0 = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}$  — интенсивность

напряжений; материальные функции в уравнениях работ [3, 5] можно представить в виде, который использовался в работе [6, с. 189]:

$$\Phi_m = \Phi_\xi \sin(3\xi - \omega) / \sin 3\xi = \varphi_i / 3 \quad (2.2)$$

$$\Phi_d = 3\Phi_\xi \sin(\omega) / (2 \sin 3\xi) = \{3/8[(\Phi_m - \varphi_i)^2]\}^{1/2} \quad (2.3)$$

где  $\xi = (1/3)\arccos[27\varepsilon_{ij\alpha}S_{ij}S_{j\alpha}S_{\alpha i}/(2S_0^3)]$  – угол вида напряженного состояния и  $\psi = (1/3)\arccos[4\varepsilon_{ij\alpha}e_{ij}e_{j\alpha}e_{\alpha i}/(3e_0^3)]$  – угол вида деформированного состояния;  $\omega = \xi - \psi$  – фаза подобия девиаторов;  $\varepsilon_{ij\alpha}$  – символ Леви-Чивиты;  $\Phi_\xi = 3e_0/S_0$  – обобщенная податливость [3];  $i, j, \alpha = 1, 2, 3; i \neq j \neq \alpha$ . Здесь, как и в работе [7], принята последовательность напряжений:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ; при этом углы вида состояний имеют значения:  $0 \leq \xi$  и  $\psi \leq \pi/3$ . Материальным функциям можно придать другой вид, если воспользоваться иными функциями, а именно,  $\varphi_i = \gamma_i/\tau_i$ , которые являются сдвиговыми податливостями в направлении  $\tau_i = (S_i - S_\alpha)/2$  – главных касательных напряжений и  $\gamma_i = e_j - e_\alpha$  – главных сдвигов. Анализ, выполненный в работе [7] показал, что функция  $\Phi_m$  есть средняя податливость формоизменению, а функция  $\Phi_d$  является их среднеквадратическим отклонением. Именно такими они представлены вторыми равенствами в соотношениях (2.2) и (2.3), которые показывают их статистическими характеристиками. Отношение материальных функций представляется величиной:

$$p = \Phi_d/\Phi_m = 3\sin\omega/2\sin(3\xi - \omega) \quad (2.4)$$

называемой далее параметром тензорной нелинейности, который представляет собой меру этой нелинейности со значениями  $p < 1$ , найденный по результатам испытаний.

**3. О фазе подобия девиаторов.** Определение параметра и анализ тригонометрического выражения (2.4), дают общее выражение для фазы подобия девиаторов:

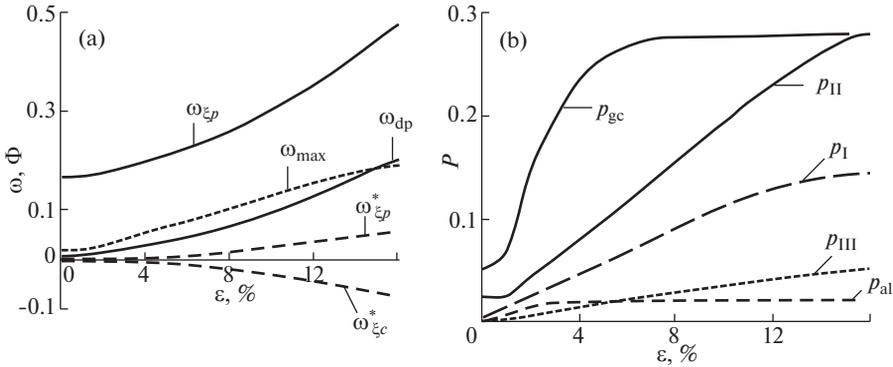
$$\omega = \arctg[2p\sin 3\xi/(3 + 2p \cos 3\xi)] \quad (3.1)$$

а для частного случая,  $\omega = \text{const}$ , впервые предложенного в работе Новожилова В.В. [4, с. 712], в качестве характеристики упругости, как связь между третьими инвариантами. Исследование параметра на экстремум выявило, что производная тригонометрического выражения (2.4) по углу  $\xi$  равна нулю, а, следовательно, его независимость от вида напряженного состояния. Этот вывод утверждает, что функции (2.2) и (2.3) подобны при постоянном уровне напряжений для всех состояний:

$$\Phi_d = p\Phi_m \quad (3.2)$$

Именно эта связь функций позволяет рассматривать деформации, как формоизменения, так и объемные деформации в виде двух частей. Первую часть связывать с деформацией жестких элементов структуры, а вторую часть деформации, включающей в себя параметр тензорной нелинейности, отнести к утрате упругости структурных связей [7, 8]. Эти деформации, несмотря на их физическое отличие, в математическую модель входят как упругие.

Графики для фазы подобия девиаторов, исходя из (3.1), незначительно отличаются от полуволны синусоиды с изменением угла  $\xi$  от нуля до  $\pi/3$ , а нулевые ее значения соответствуют состояниям растяжения и сжатия. При значениях фазы, отличной от нуля, отношения компонент девиаторов, принадлежащих одному и тому же напряженному состоянию не равны:  $e_1/S_1 \neq e_2/S_2 \neq e_3/S_3$ , что соответствует условию их непропорциональности. Тем не менее, для состояний обобщенного растяжения и сжатия неравенства становятся равенствами:  $S_1/S_2 = e_1/e_2 = 1$ , так как для них реализуются условия подобия, поскольку  $S_2 = S_3$  и  $e_2 = e_3$ , а фаза равна нулю независимо от свойств материала, что согласуется с соотношением (3.1). Его анализ дает значения уг-



**Рис. 1.** (а) Кривая (мелкий штрих) для фазы  $\omega_{\max}$ , как функции деформации  $\varepsilon$ ; также показаны кривые для функций с символами  $\Phi_{\xi p}^*$  и  $\Phi_{\xi c}^*$  для состояний растяжения и сжатия, которые относятся ко второму квадранту. (б) Графики для параметров трех разных квадрантов и других материалов: серого чугуна  $p_{gc}$  и алюминиевого сплава  $p_{al}$ .

ла  $\xi$ , при котором достигается максимум фазы  $\omega_{\max}$ . Структура практически всех упомянутых выше сред, ярким примером которых являются зернистые композиты [8, с. 15], содержит множество равномерно распределенных межструктурных связей. Рост параметра  $p$  указывает на последовательную утрату упругости связей возрастающей прочности.

Значение характеристики упругости  $\omega = \text{const}$ , как это принято в работе [4] вместо (3.1), при сохранении вида функции  $\Phi_m$  приводит к тому, что параметр становится величиной со снижающимися значениями, что расходится с неравенством  $p < 1$ . К тому же при растяжении и сжатии нарушается условие нулевого значения фазы  $\omega$ , как функции угла  $\xi$ . На рис. 1,а показана кривая (мелкий штрих) для фазы подобия девиаторов  $\omega_{\max}$ , как функции деформации  $\varepsilon$ . Графики для параметров  $p$  трех разных квадрантов и других материалов, представлены на рис. 1,б.

**4. О деформациях формоизменения.** Отказ от постоянства фазы приводит к отказу и от постоянства модулей упругости. Уравнения (2.3) для главных деформаций и общее выражение для интенсивности деформаций приводят к закону формоизменения:

$$e_0 = \Phi_{\xi} S_0 / 3 \quad (4.1)$$

где основной характеристикой становится обобщенная податливость, как обратная величина обобщенного модуля сдвига [6, с. 709]:

$$\Phi_{\xi} = \Phi_m [1 + (4/3)p \cos 3\xi + (4/9)p^2]^{1/2} \quad (4.2)$$

которая зависит, как от уровня напряжений, так и от угла  $\xi$ . Тогда как функция  $\Phi_m$ , судя по определению (2.2), зависит и от фазы подобия девиаторов  $\omega$ , а, следовательно, и от угла  $\psi$ . Математической моделью они, как и материальные функции, представляются в дискретном (цифровом) виде. Наличие в соотношении (4.2) параметра тензорной нелинейности указывает на то, что интенсивность деформаций можно разделить на две части. Если соотношение (4.2) упростить, освободившись от квадратного корня, то эту часть обобщенного модуля с параметром можно представить в виде:

$$\Phi_{\xi}^* \approx p \Phi_m [(\cos 3\xi + (1/3)p)] \quad (4.3)$$

Первую часть деформации с функцией  $\Phi_m$ , а вторую часть, вызванную утратой связей, найти с помощью алгоритма:  $e_0^* = \Phi_\xi^* S_0/3$ . Отношение этой части, принятой за “дилатансию при формоизменении”, к найденной деформации по (4.1) показывает, что она имеет малые значения – это иллюстрируется графиками на рис. 1,а.

Анализ соотношения (4.2) для частных случаев растяжения и сжатия при известных функциях  $\Phi_m$  и параметра  $p$ , приводит к виду:

$$\Phi_{\xi i} = \Phi_{mi}(1 \pm 2/3p) \quad (4.4)$$

где  $i = p, c$ ; ( $p$  – растяжение,  $c$  – сжатие). Эти выражения показывают, что материальная функция  $\Phi_d$  не принимает нулевого значения при состояниях, соответствующих углам  $\xi = 0$  и  $\xi = \pi/3$  даже при отсутствии разномодульности, поэтому и параметр тензорной нелинейности имеет здесь ненулевые значения. Для определения функций  $\Phi_{mi}$  и  $\Phi_{di}$ , как характеристик формоизменения, для этих состояний, используется первый признак Коши [14]. По этому признаку их значения следуют из соотношений (2.2) и (2.3), если сместиться на  $\Delta\xi \approx \pm 0.1^\circ$  от исходных углов. Выражения (4.4) дают второй вариант определения параметра тензорной нелинейности:

$$p = 3(\kappa - \kappa_m)/2(\kappa + \kappa_m) \quad (4.5)$$

где  $\kappa = \Phi_{\xi p}/\Phi_{\xi c}$  – отношение обобщенных и  $\kappa_m = \Phi_{mp}/\Phi_{mc}$  – средних податливостей. На рис. 1,а верхняя кривая (сплошная линия) иллюстрирует обобщенную податливость для растяжения, а для последующих состояний кривизна графиков постепенно снижается. Третья кривая тоже (сплошная линия) для функции  $\Phi_{dp}$  показана с ординатами, увеличенными вдвое.

**5. О постулатах и исходных данных.** Трудности использования тензорно-нелинейных уравнений начинались вследствие отсутствия простых формул для определения функций  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$  и фазы  $\omega$ . Расчет материальных функций по функциям  $\varphi_i = \gamma_i/\tau_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ , входящим в соотношения (2.2) и (2.3) невозможно выполнить, вследствие отсутствия о них исходной информации. Это препятствие можно преодолеть, если воспользоваться следующими постулатами: первый утверждает, что значениями функций  $\varphi_i$  можно считать значения податливостей  $Y_i = 3e_0/S_0 = \Phi_{\xi i}$  для трех напряженных состояний: растяжения, чистого сдвига и сжатия. Согласно второму постулату: – функции  $\varphi_i$  и  $Y_i$  равны, то есть  $\varphi_i \equiv Y_i$ , что подтверждают расчеты по формулам (2.4) и (4.5) при сравнении их результатов. Расчет параметра тензорной нелинейности вначале проводится по формуле (2.4), используя опытные данные и для чистого сдвига. Недостаток исходных данных при чистом сдвиге, которые, как правило, получают испытаниями на другом оборудовании и другими средствами измерения деформаций, можно восполнить алгоритмами, которые выводятся из преобразованных уравнений, описанных в работах [6, 7].

Результаты расчетов по двум вариантам: – по (2.4) и (4.5), показали, что они отличаются только пятой значащей цифрой после запятой для любой ступени нагружения. Это указывает на то, что введенные постулаты вполне приемлемы для практического использования.

Далее выполняется расчет функций для любых состояний в следующей последовательности: сначала определяется функция  $\Phi_m$ , а затем функция  $\Phi_d = p\Phi_m$  для состояний каждого квадранта. Значения параметра тензорной нелинейности, возрастаая с ростом интенсивности напряжений до предельного значения, представляют диаграмму связующей матрицы в виде кривой с символом  $p_{II}$  на рис 1,б. Также показаны графики для параметров с символами  $p_I$  и  $p_{III}$  для первого и третьего квадрантов, а символами  $p_{гс}$  – для серого чугуна, по данным работы [9] и  $p_{ал}$  – для алюминиевого сплава, по ре-

зультатам испытаний работы [12]. Все графики отчетливо показывают интенсивность процессов утраты внутренних связей. А графики для зернистого композита дают представление о влиянии условий нагружения на этот процесс в разных квадрантах. Сравнение нижних двух графиков показывает, что при двухосном сжатии зернистый композит по интенсивности утраты связей сближается с алюминиевым сплавом. А интенсивность потери связей серого чугуна протекает весьма неравномерно: – после небольшого сопротивления происходит резкий подъем, занимающий примерно треть его диаграммы, после которого интенсивность принимает постоянное значение на участке, занимающем больше половине диаграммы.

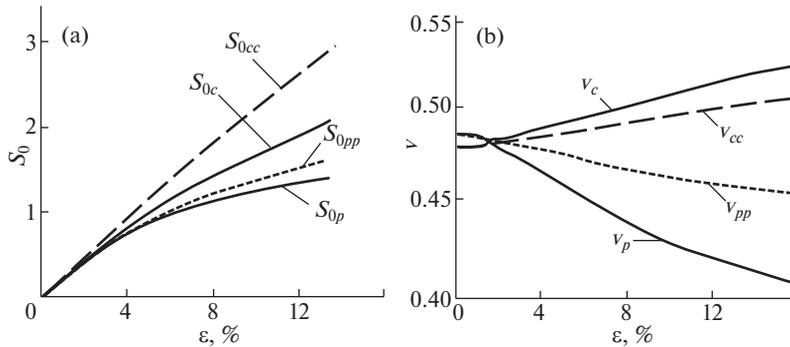
Опытные данные, полученные испытаниями на растяжение и сжатие квазиизотропного композита, имеющего предельную деформацию при сжатии  $\varepsilon_c = 16\%$  в виде первичных диаграмм  $\sigma_i - \varepsilon$  и графиков для коэффициентов поперечных деформаций,  $\nu_i - \varepsilon$ ,  $\nu_i = -\varepsilon_n/\varepsilon$ , необходимо уточнять. Это выполняется для напряжений и деформаций по формулам работы [4], которым можно придать следующий вид:

$$\sigma^* = \sigma[(1 + 2\varepsilon_n^*)^2 / (1 + 2\varepsilon^*)]^{1/2} \quad (5.1)$$

где  $\varepsilon^* = \varepsilon(1 + \varepsilon/2)$ ;  $\varepsilon_n^* = \varepsilon_n(1 + \varepsilon_n/2)$ ;  $\nu_i^* = -\varepsilon_n^*/\varepsilon^*$   $\nu_i$  – коэффициенты поперечных деформаций;  $i = p, c$ ; индекс  $n$  – указывает на поперечную деформацию. Напряжения  $\sigma^*$  и деформации  $\varepsilon^*$  называются приведенными [6]. Далее звездочка над приведенными напряжениями и деформациями снимается.

Для исследования свойств конкретных разносопротивляющихся материалов, обладающих особенностями по-разному сопротивляться приобретению и развитию дополнительной деформации – дилатансии, как предвестника потери прочности, требуются опытные данные. В их качестве были приняты четыре диаграммы и четыре графика зависимости коэффициентов поперечных деформаций. На рис. 2,а показаны графики (диаграммы), полученные по испытаниям зернистого композита на растяжение и сжатие для работ [7, 11]. После приведения по алгоритму (5.1) они используются, как для квадранта II, так и квадрантов I и III. Кривые с символами  $S_{0p}$  – для растяжения и  $S_{0c}$  – для сжатия, ограничивают квадрант II. Кривые с символом –  $S_{0pp}$  – для двухосного растяжения вместе с кривой  $S_{0p}$  ограничивают квадрант I; а диаграмма с символом  $S_{0cc}$  – для двухосного сжатия вместе с диаграммой для сжатия  $S_{0c}$  ограничивают квадрант III. Значения напряжений по оси ординат на рис. 2,а в МПа. Некоторые сведения о диаграммах для двухосного растяжения и двухосного сжатия получены с учетом результатов испытаний аналогичных материалов, например, работы [8, 10] и других работ [12] путем их сравнения с результатами испытаний серого чугуна [9] и грунтов [13].

Графики для коэффициента поперечной деформации при растяжении и сжатии получены по результатам испытаний, изложенных в [7, 11]. Отсутствующие опытные данные для двухосного растяжения и двухосного сжатия были получены, используя идею [7] о связи “зазора” между прямой  $E_0 = \text{const}$  и реальной диаграммой с “зазором” между прямой  $\nu_0 = \text{const}$  и реальной кривой для соответствующего коэффициента поперечной деформации, принимая во внимание исходные данные о растяжении и сжатии. В данной работе уравнение для объемной деформации учитывает среднее напряжение  $\sigma_0$ , связанное с параметром  $\zeta = \sigma_0/S_0$ . Его значения при пропорциональном изменении напряжений определяются зависимостью:  $\zeta = -(2/3)\cos\Theta$ , где  $\Theta$  – угловая координата, изменяющаяся в пределах  $0 \leq \Theta \leq \pi$ , значения которой изменяются от  $-2/3$  при двухосном сжатии до  $+2/3$  при двухосном растяжении. Значения в первом квадранте в пределах  $1/3 \leq \zeta \leq 2/3$ ; во втором  $-1/3 \leq \zeta \leq 1/3$ ; в третьем,



**Рис. 2.** Исходные данные; (а) графики (диаграммы испытаний), полученные после отмеченного выше приведения по алгоритму (5.1), по испытаниям зернистого композита на растяжение и сжатия не только для состояний второго квадранта, но и для первого и третьего квадрантов. (б) Показаны графики зависимости коэффициентов поперечных деформаций с аналогичными символами и такими же линиями, что и для диаграмм.

$-2/3 \leq \xi \leq -1/3$ . Термин “квадрант” [15] еще редко встречается в теории упругости, но здесь возникла такая необходимость.

**6. Об уравнении для объемной деформации.** Вывод равенства (4.3), как дополнительной части деформации формоизменения, и высказанная ранее мысль, что параметр  $p$  делит деформации разносопротивляющихся сред на две части, явились основанием того, чтобы объемную деформацию представить в виде:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_y + \varepsilon_g \quad (6.1)$$

Первая часть, линейно зависящая от среднего напряжения, унаследована от линейной теории упругости, относится к деформации жестких элементов структуры:

$$\varepsilon_y = \sigma_0 / 3K_\xi \quad (6.2)$$

Величина  $K_\xi$  является теоретическим модулем объемной упругости, которая определяется методикой совмещения теоретических кривых коэффициентов поперечных деформаций с кривыми, полученными опытами. А вторая часть, включающая в себя параметр тензорной нелинейности, относится к утрате упругости связей:

$$\varepsilon_g = 2p\Phi_m \varepsilon \sigma_0 (1 + k\xi) / 9 \quad (6.3)$$

то есть является дилатансией, включающей  $\varepsilon$  – параметр разрыхления, определяемый вместе с теоретическим модулем объемной упругости. Функция  $\Phi_m$  отражает взаимосвязь объемной деформации с формоизменением. Коэффициент  $k$  в формулу (6.3) введен для учета влияния среднего напряжения на процесс образования дилатансии, а так же для удобства проверки предлагаемого соотношения. Так при  $k = 0$  формула для дилатансии принимает тот вид, который использовался уже в работах автора, например, в [6, 7], поскольку при  $k = 0.3$  кривые для объемных деформаций при растяжении и сжатии лучше накладываются на опытные кривые. Процесс преобразования тензорно-нелинейных уравнений, о котором упоминалось выше, достаточно подробно освещен в работе [6, с. 60], и, возможно, впервые реализован в [11]. Уравнения связи девиатора деформаций с девиатором напряжений (2.1) вместе с уравнением для средней деформации с инвариантами тензора напряжений (6.1), приводят к уравнениям связи тензора деформаций с тензором напряжений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(3\Phi_k + 2\alpha\Phi_d k)\sigma_0\delta_{ij}}{9} + \frac{\Phi_m S_{ij}}{2} + \frac{\Phi_d}{S_0} \left[ S_{i\alpha} S_{\alpha j} - \frac{2(1-\alpha)S_0^2\delta_{ij}}{9} \right] \quad (6.4)$$

Эти уравнения, приведенные к главным деформациям, используются для матричного преобразования:  $\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j$ , которые затем можно привести к виду уравнений, характерному для анизотропных сред:

$$\varepsilon_i = \sigma_i/E_i - \nu_{ji}\sigma_j/E_j - \nu_{\alpha i}\sigma_\alpha/E_\alpha \quad (6.5)$$

с техническими характеристиками для диагональных компонент:

$$a_{ii} = [3\Phi_m + \phi_A + \Phi_d c_{ii}] = E_i^{-1}$$

и не диагональных компонент:

$$a_{ij} = \left[ \frac{3\Phi_m}{2} - \phi_A - \Phi_d c_{ij} \right] = -\nu_{ij} E_j^{-1}$$

где  $\phi_A = (\phi_k + a\Phi_d)/3$ ;  $\phi_k = 1/K_\xi a = 2k\alpha/3$ . Свертка уравнений (6.5) приводит к уравнению связи средней деформации с главными напряжениями:

$$\varepsilon_0 = (\sigma_1\phi_{k1} + \sigma_2\phi_{k2} + \sigma_3\phi_{k3})/3 \quad (6.6)$$

где

$$\phi_{ki} = \phi_k + (a + c_i\alpha)\Phi_d = 3(1 - \nu_i)/E_i \quad (6.7)$$

$c_i = 3S_i/S_0$  или  $c_1 = 2 \cos \xi$ ,  $c_2 = \sqrt{3} \sin \xi - \cos \xi$ ,  $c_3 = -(\sqrt{3} \sin \xi + \cos \xi)$  – тригонометрические величины, связывающие главные напряжения с интенсивностями напряжений и аналогичные  $d_i$  с интенсивностями деформаций. Технические характеристики, то есть  $E_i$  – модули продольной упругости и  $\nu_{ij}$  – коэффициенты поперечных деформаций, формулируются из компонент матриц, как и в работе [6, с. 57]. Пары коэффициентов  $\nu_i = (\nu_{ij} + \nu_{i\alpha})/2$  определяют поперечные деформации по трем направлениям главных напряжений;  $i, j, \alpha = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j \neq \alpha$ . Для определения дилатансии устанавливается параметр разрыхления  $\alpha$  вместе с теоретическим модулем объемной упругости  $K_\xi = 1/\phi_k$ , с помощью которого проводится расчет линейной части объемной деформации. Эта задача возлагается на процедуру совмещения теоретических кривых для коэффициентов поперечных деформаций с опытными кривыми, решение которой можно найти в [6, 7].

Высокие значения теоретического модуля объемной упругости при растяжении, но низкие при сжатии, можно объяснить путем простого преобразования уравнения (6.1). Если из него выделить линейную объемную деформацию,  $\varepsilon_{yi} = \varepsilon_{0i} - \varepsilon_{gi} = \sigma_0\phi_{ki}/3$ , то можно найти податливости  $\phi_{ki}$  для растяжения и сжатия. Объемные деформации  $\varepsilon_{0i}$  связаны с модулями  $K_i = E_i/3(1 - 2\nu_i)$  и устанавливаются с этими значениями с помощью упомянутой процедуры совмещения. Принимая:  $\xi_c = -\xi_p$ ,  $1/\xi_i \cong \pm 3$ ;  $1/\xi = 3.0009$ ;  $i = p, c$ ; ( $p$  – растяжение,  $c$  – сжатие), действия с выражением (6.1) приводят к формулам:

$$\phi_{kp} = \frac{1}{K_p} - 2\alpha_p\Phi_{dp}(1/\xi + k) \cong \frac{1}{K_p} - 6.6\alpha_p\Phi_{dp} \quad (6.8)$$

$$\phi_{kc} = \frac{1}{K_c} + 2\alpha_c\Phi_{dc}(1/\xi - k) \cong \frac{1}{K_c} + 5.4\alpha_c\Phi_{dc} \quad (6.9)$$

Из соотношения (6.8) следует, что второе слагаемое понижает податливость для растяжения, а значение теоретического модуля, наоборот, повышает. Во второй формуле

(6.9) второе слагаемое повышает податливость для сжатия. Вторые слагаемые в этих соотношениях позволяют количественно оценивать его влияние на значения теоретической податливости. Среднее напряжение при чистом сдвиге равно нулю, но, учитывая, что  $\zeta_p + \zeta_c = 0$ , как и для значения параметра  $\zeta_\tau$ , то подсказывается алгоритм, как ответ на вопрос о значении теоретического модуля и для этого состояния:

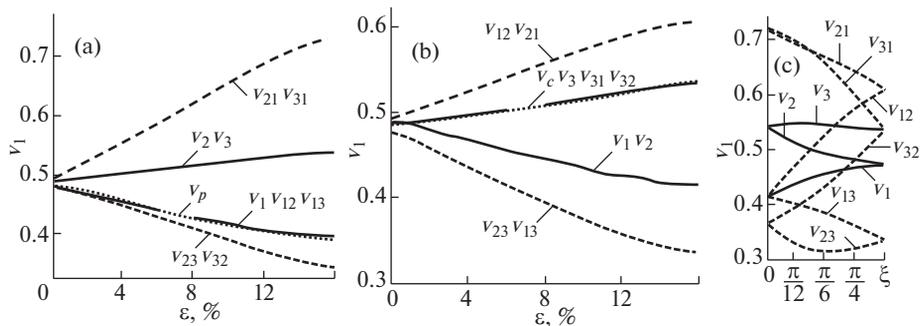
$$\phi_{k\tau} = \frac{1}{K_\tau} + \alpha_\tau \Phi_{d\tau} \approx K_{\xi i} / 2. \text{ Формулы (6.8) и (6.9) содержат ответ на причины большого}$$

различия значений теоретического модуля. Рассмотренная методика позволила найти такие значения теоретических модулей упругости, которые приводят к более точным значениям не только линейно–упругой объемной деформации, но и коэффициентов поперечных деформаций.

**7. О деформационной анизотропии коэффициентов поперечных деформаций.** Линейная теория упругости обходится тремя модулями и одним коэффициентом поперечных деформаций, взаимосвязанных между собой. Нелинейная теория упругости разносопротивляющихся материалов не может себе этого позволить, поскольку эти материалы не только проявляют нелинейность с уровнем нагрузки, но и проявляют тензорную нелинейность, с накоплением дилатансии, сопровождающейся деформационной анизотропией. Об этом явлении, для описания которого может быть использован математический аппарат тензорно–нелинейных уравнений, В.В. Новожилов в своей [3] высказал свое мнение, как о “важном явлении”. При отсутствии экспериментальных исследований не акцентировал, на каких характеристиках она проявляется, учитывая только тот факт, что материальные функции его уравнений содержат тригонометрические коэффициенты. Расчеты, по приведенным выше соотношениям, показывают незначительное влияние дилатансии на модули продольной упругости  $E_j$ . Расхождение значений этих модулей с разными индексами составляет менее 5%, но ведет к заметной деформационной анизотропии коэффициентов поперечных деформаций.

В истории механики материалов, описанной в [14], много места уделено исследованиям его начального значения, то есть коэффициента Пуассона, однако значениям при разрушающих напряжениях, не уделено должного внимания, тем более по другим направлениям главных напряжений. В данной работе, возможно, впервые, даны графики теоретических коэффициентов поперечных деформаций. Их легче описать не формулами, а графиками. Линия, представленная точками на рис. 3,а повторяет теоретические кривые для  $\nu_{12} = \nu_{13}$ , которые совмещаются со значениями коэффициента  $\nu_p$ . Отклонение кривой для коэффициента  $\nu_p$  от начального ее значения следует считать основной причиной роста дилатансии и положения кривых для всех других коэффициентов. Если бы значения этой кривой для коэффициента  $\nu_p$  совпадали бы с коэффициентом Пуассона, то все кривые, представленные на рис. 3,а, слились бы в одну прямую, а дилатансия отсутствовала бы. Чем ниже опускаются точки кривой  $\nu_p$  от начального значения, тем больше дилатансия, выше поднимаются значения коэффициентов  $\nu_{21}$  и  $\nu_{31}$ , так как дилатансия, как дополнение к основной деформации  $\epsilon_1$ , по направлению  $\sigma_1$ , для деформаций других направлений 2 и 3, является поперечной в соответствии с индексами. И тем больше поведение материала отличается от линейной теории упругости. Значения кривой для коэффициента  $\nu_{23}$  опускаются, так как по направлению 3 дилатансия отсутствует, но значения двух пар,  $\nu_2$  и  $\nu_3$ , накладывающиеся друг на друга, снижаются. Коэффициенты первой пары имеют одинаковые значения,  $\nu_{12} = \nu_{13}$ , отличаясь от значений двух других пар,  $\nu_2$  и  $\nu_3$ , которые на большей части оси абсцисс превышают число 0.5.

На рис. 3,б приводятся подобные же графики для коэффициентов поперечных деформаций при сжатии. Линия, показанная точками, относится к коэффициентам с



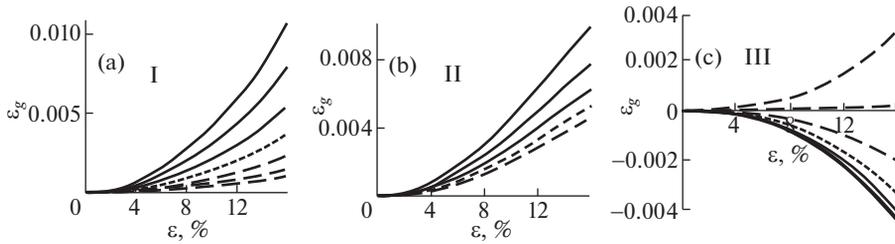
**Рис. 3.** Изменение коэффициентов поперечных деформаций: *a* – при растяжении; *b* – при сжатии; *c* – изменение последних значений коэффициентов при растяжении для всех состояний II квадранта от растяжения до сжатия.

символами  $v_c$ ,  $v_{31}$  и  $v_{32}$ . Значения дилатансии в этом направлении наименьшие или полностью отсутствуют. Рост значений коэффициента  $v_c$  согласуется с показаниями результатов испытаний и связан с дилатансией по осям 1 и 2. Вместе с ним растут значения коэффициента пары  $v_3$  и ее составляющих  $v_{31}$  и  $v_{32}$ , что выполняет методика. Рост коэффициента  $v_c$  следует считать основной причиной роста дилатансии по направлениям 1 и 2, имеющих положительные деформации, относительно которых отклоняются вниз пары  $v_1$  и  $v_2$ , а еще ниже  $v_{13}$  и  $v_{23}$ , поскольку деформация по оси 3 является поперечной, а по осям 1 и 2 деформация с дилатансией, продольной.

И чем выше поднимаются значения последних точек кривой для коэффициента  $v_c$ , тем больше дилатансии на осях 1 и 2, тем выше поднимаются значения коэффициентов  $v_{21}$  и  $v_{12}$ , как равноправные, имеющие одинаковые дилатансии. Хотя по направлению 3 дилатансия отсутствует, но значения двух пар  $v_2$  и  $v_3$ , совпадая друг с другом, снижаются. Расстановка кривых для состояния сжатия сложнее, чем для состояния растяжения, но необходимо обязательно принимать во внимание положение дилатансии. Если при растяжении кривая с коэффициентом  $v_p$ , опускаясь, отталкивается от себя другие кривые, то при сжатии кривая с коэффициентом  $v_c$  сама притягивается к кривым с коэффициентами  $v_{21}$  и  $v_{12}$ , “содержащими” дилатансию.

На рис. 3,с приводятся кривые для всех перечисленных выше коэффициентов по оси  $\xi$  для предельной деформации  $\varepsilon = 16\%$ . С изменением этого угла значения коэффициентов:  $v_{21}$ ,  $v_{31}$ ,  $v_{13}$ ,  $v_2$  уменьшаются. А значения коэффициентов:  $v_{32}$ ,  $v_{12}$ ,  $v_1$  увеличиваются, только значение коэффициента  $v_3$  остается почти неизменным. Значения  $v_{23}$ , снижаясь до состояния чистого сдвига, затем почти восстанавливаются. Все эти изменения объясняются значениями дилатансии на соответствующих осях. Началом всех кривых на рис. 3,с являются последние значения кривых рис. 3,а, которые заканчиваются последними значениями кривых рис. 3,б для всех состояний II квадранта от растяжения до сжатия.

**8. О дилатансии.** Наличие параметра тензорной нелинейности  $p$ , параметра разрыхления  $\alpha$  и функции  $\Phi_m$  – дает возможность определить дилатансию по формуле (6.3) при всех напряженных состояниях. На рис. 4 представлены кривые для дилатансии, чтобы оценить ее влияние на коэффициенты поперечных деформаций в других квадрантах. Каждому состоянию, характеризующемуся значением угла  $\xi$ , соответствует своя кривая. В квадранте II, рис. 4,б, шесть кривых, которые охватывают состояния от



**Рис. 4.** Семейства кривых дилатансии при напряженных состояниях трех квадрантов; в каждом квадранте I рис. 4,a; II рис. 4,b и III рис. 4,c семь кривых. Кривая, показанная линией с мелкими штрихами, соответствует чистому сдвигу, то есть состоянию  $\xi = \pi/6$ ; сплошные линии относятся к состояниям  $0 \leq \pi/6$ , штриховые линии к состояниям от  $\pi/6 \geq \pi/3$ .

простого растяжения,  $\xi = 0$ , до простого сжатия,  $\xi = \pi/3$ . Шестая кривая совпадает с пятой. В каждом подрисунке кривая, показанная линиями с мелкими штрихами, соответствует чистому сдвигу, то есть углу  $\xi = \pi/6$ , (во втором квадранте она совпадает с осью абсцисс). Верхняя кривая рис. 4,b с самым большим значением дилатансии, относится к состоянию простого растяжения,  $\xi = 0$ , а нижняя к простому сжатию,  $\xi = \pi/3$ . Как показал анализ, резкого изменения положений кривых для коэффициентов не происходит, но при сжатии, согласно результатам на рис. 3,c, дилатансия в виде нижней кривой (большой штрих) на рис. 4,b, привела к тому, что все коэффициенты уже существенно изменили свое положение. Этот факт говорит о том, что положение коэффициентов зависит не от значений дилатансии, а больше от осей, в которых она реализуется. В квадранте I – состояния от простого растяжения до двухосного растяжения, верхние три кривых 4,a практически повторяют кривые рис. 4,b и относятся они к простому растяжению, следовательно, графики рис. 3,a будут для них повторяться. А нижняя кривая (большой штрих) к двухосному растяжению,  $\xi = \pi/3$ , подсказывающему, что вторая ось с индексом 2 и с положительной деформацией, содержит эту дилатансию, должна сохранить положение коэффициентов, как на рис. 3,b. В квадранте III – от простого сжатия до двухосного сжатия, отличаясь между собой приращением  $\Delta\xi = \pi/9$ . Верхняя кривая рис. 4,c с самым большим значением дилатансии, относится к оси с индексом 1 с нулевым напряжением, но при отрицательных значениях напряжений по осям 3 и 2 имеет положительную деформацию, которая содержит эту дилатансию. Следует ожидать, что положение коэффициентов повторит рис. 3,a при их значениях, незначительно отличающихся от коэффициента Пуассона.

Графики, иллюстрирующие дилатансию, можно разделить на две части. Начальную криволинейную часть, отображающую постепенное накопление повреждений вследствие утраты связей, соответствующую деформации  $\varepsilon \approx 8 \div 10\%$ . Вторая часть, близкая по форме к прямой линии, представляет наиболее интенсивный заключительный процесс ее возрастания перед разрушением. Проведенные исследования дилатансии дают возможность высказать следующие выводы: эта деформация возникает при всех состояниях, при которых происходит формоизменение элементарного объема, то есть отклонение от трехосного сжатия или растяжения равными по трем осям напряжениями. Чем большее значение имеет положительная деформация по одной оси с присутствием отрицательных напряжений по двум другим осям, тем больших значений может достигать дилатансия разносопротивляющихся материалов. При двухосном сжатии наблюдается уплотнение объема, то есть “дилатансия” с отрицательным знаком. Дилатансия снижает значения коэффициентов поперечных деформаций на оси наибольшей положительной деформацией, но повышает ее на взаимно перпендикуляр-

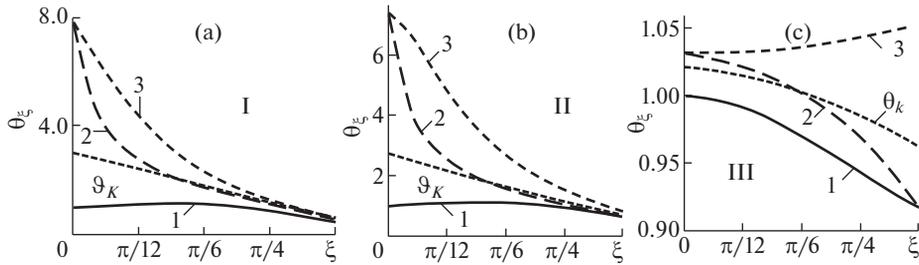
ных осях с нулевыми или отрицательными напряжениями. Последовательным изменением значения  $k > 0$  установлено, что при  $k = 0.3$  достигается наилучшее согласие теоретических значений полной объемной деформации со значениями, найденными по данным о коэффициентах поперечных деформаций при растяжении и сжатии. Вывод — учет среднего напряжения повышает точность расчета дилатансии. Модули сдвига  $G_{\xi j}$  и их податливости формоизменения  $\Phi_{\xi j}$  не приобретают таких особенностей, как коэффициенты поперечных деформаций и характеристики объемной деформации, поэтому отношения интенсивностей деформаций, найденных, как по начальным данным, связанным с опытными результатами, к интенсивностям деформаций, найденных после матричного преобразования уравнений (6.5), равны единице. Причем это значение (единица с тремя нулями после запятой) практически сохраняется, как с ростом напряжений до предельных значений, так и при смене состояний от  $\xi = 0$  до  $\xi = \pi/3$ . Высокие значения коэффициентов  $\nu_2$  и  $\nu_3$  не оказывают заметного влияния на это значение.

**9. О деформационной анизотропии податливостей (модулей) объемной упругости.** Деформационная анизотропия коэффициентов поперечных деформаций проявляет себя весьма заметно и по всем направлениям, а поскольку с их значениями связаны значения всех модулей или податливостей упругости, то полезно иметь представление и об их изменениях. Более наглядно деформационная анизотропия проявляется на графиках для податливостей объемной упругости в направлении главных напряжений, которая определяется по формуле (6.6). Податливости или (коэффициенты) объемной упругости, определяются по первому равенству (6.7), а второе равенство, повторяя эти результаты, предназначено для расчета средней деформации по трем направлениям. Податливости, как величины обратные модулю, являются плавными неразрывными функциями, не одинаково изменяющиеся с ростом напряжений. В линейной теории упругости находит применение только один модуль объемной упругости — “классический” или податливость  $\phi = 1/K$ , которые определяются по начальным данным о модуле продольной упругости и коэффициенте Пуассона, в нелинейной теории упругости тоже можно ограничиться начальными значениями податливостей  $\phi_{ki}$ . Они позволяют для любого состояния найти значения трех параметров изменяющейся упругости:

$$\vartheta_{\xi i} = \frac{\phi}{\phi_{ki}} = \frac{K_{\xi i}}{K} \quad (9.1)$$

Представляя их, как степень отклонения классической податливости от податливости, присущей конкретному направлению, как функции главных напряжений, по которым вычисляются начальные (при  $\sigma_i = 0$ ) значения модулей объемной упругости  $K_{\xi i} = 1/\phi_{ki}$ . На рис. 5 кривые 1, 2 и 3 представляют графики  $\vartheta_{\xi i}$  этих параметров для трех квадрантов. Значения параметра  $\vartheta_{\xi 1}$  квадранта II на кривой 1 начинаются с единицы, что означает равенство модулей,  $K_{\xi 1} = K$ , с небольшим возрастанием, приближаясь к состоянию  $\xi = \pi/6$ , а затем к состоянию сжатия со снижением параметра к значению  $K_{\xi 1}/K$ . В этом главном направлении наблюдаются модули объемной упругости, значения которых почти равны “классическому” и при  $\xi > 0$ . Судя по форме кривых, наибольшую деформационную анизотропию приобретает элементарный объем материала по направлениям с индексами 2 и 3 квадранта II, имея высокие значения параметра  $\vartheta_{\xi i}$ .

Эти параметры, имея вначале значения большие числа 6, быстро снижаются, что вызвано существенным изменением значения дилатансии на оси 1 и снижением коэффициента поперечных деформаций  $\nu_2$  и  $\nu_3$  с изменением угла  $\xi$ , рис. 3, с. Быстрое уменьшение ординат между кривыми 1 и 3, а также между кривыми 1 и 2, свидетель-



**Рис. 5.** Графики изменения значений параметров  $\vartheta_{\xi_i}$  с изменением напряженных состояний от 0 до  $\pi/3$  в каждом квадранте I, II и III; четыре кривые, линии 1, 2 и 3 – их начальные значения при  $\sigma_i = 0$ ; кривая для параметра  $\vartheta_K$  в каждом квадранте представляет отношение “классической” податливости к теоретической, то есть  $\phi/\phi_{ki}$ .

существует о снижении дилатансии, а их различие указывает на то, что напряжение  $\sigma_3 > 0$ , как “поджатие” усиливает процесс накопления дилатансии.

Значения параметров  $\vartheta_{\xi_i}$  квадранта I отличаются от параметров квадранта II, если судить о них по оси ординат, принимая во внимание три первые кривые для дилатансии рис. 4,а, тогда как по форме они почти повторяются, так же как по снижению дилатансии от простого растяжения до двухосного растяжения. Значения параметров  $\vartheta_{\xi_i}$  квадранта III существенно отличаются от параметров соседних квадрантов, как по форме кривых, так и по их начальным и конечным значениям. Если при двухосном сжатии ( $\xi = 0$ ), начальные значения всех кривых, отличаются в пределах 3%, то в конце их расхождение достигает более 10%. Кривая 1, представляющая значения параметров  $\vartheta_{k1}$  (не напряженного направления), с приближением к простому сжатию, снижается примерно на 8%. Следовательно, при простом сжатии модуль меньше, чем при двухосном сжатии. Все по той же причине, – изменения дилатансии в этом направлении. Расхождение кривых для параметров  $\vartheta_{ki}$  можно связывать с поведением межструктурных связей, участвующих в создании дилатансии для каждого состояния. Числовые значения параметров могут быть полезными для сравнения поведения разных материалов, что является важной процедурой при их анализе и практическом выборе материалов, отличающихся, например, связующей матрицей. Материал при этом более наглядно оказывает деформационную анизотропию [8, с. 58].

Кривые для параметра  $\vartheta_K = \vartheta_{\xi_i}/3$  в каждом квадранте имеют среднее значение трех параметров. Это значение параметра указывает на связь теоретической податливости  $\phi_k$  с податливостями в направлениях главных напряжений  $\phi_{ki}$ , хотя приемы и алгоритмы их определения существенно отличаются. С изменением внешних условий, например, значительное охлаждение материала, – дилатансия может снизиться до нулевого значения. При сохранении нелинейности по напряжениям, параметр разрыхления примет нулевое значение, кривые с номерами сольются в одну кривую с символом  $\vartheta_K$ . Если нелинейность по напряжениям тоже исчезнет, то все кривые примут значение  $\phi/\phi_{ki} = 1$ , а все модули примут значение  $K$ , и среда станет линейно-упругой.

**10. Заключение.** Заканчивая свою работу, Новожилов В.В. предусмотрительно высказался о деформационной анизотропии, что изложенная им “теория является подходящим математическим аппаратом для описания таких деформаций, при которых в теле происходят структурные изменения, различные в разных направлениях”, способные привести к упомянутой анизотропии. В настоящее время эти тела выделились в

отдельную группу, названную разносопротивляющимися средами. В развитие его теории упругости в данной работе предлагается использовать новые свойства материальных функций тензорно-нелинейных уравнений, которые проявляют себя характеристиками, способствующими найти соотношения связи между тремя инвариантами. Последние помогают сформулировать законы формоизменения и объемной деформации, включающей в себя дилатансию, точное определение которой позволяет выявить особенности поведения материалов, содержащих равномерно распределенную систему внутренних связей со свойствами по-разному сопротивляться положительным и отрицательным деформациям.

Исследования с привлечением разработанной методики определения теоретического модуля, дали возможность изучить эффект влияния дилатансии на значения коэффициентов поперечных деформаций и на параметры изменяющейся упругости, представляющих собой отношение классической податливости к податливостям по направлениям главных напряжений. Отказ от второй материальной функции ведет не только к потере точности расчетов, но и к потере эффектов, связанных со структурными изменениями, которые не следует считать эффектами второго порядка малости. Допущение дилатансии к упругим деформациям является неизбежным шагом, чтобы проследить за поведением всех деформаций по трем направлениям. Точное совпадение полной объемной деформации, как суммы ее составляющих в направлении главных напряжений, или, как сумму линейно-упругой деформации и дилатансии, указывают на то, что аппарат предлагаемых уравнений может явиться основным направлением в нелинейной теории упругости.

Каких бы концепций другие теории упругости не придерживались, точный учет реальных значений коэффициентов поперечных деформаций при растяжении и сжатии требует учета дилатансии, а, следовательно, и различия значений характеристик объемной упругости. Приступая к изучению свойств новых материалов, исследователь должен обратить внимание на поведение коэффициента поперечных деформаций при растяжении. Чем ниже опускаются значения последующих точек кривой от начального (коэффициента Пуассона), тем больше поведение материала отличается от линейной теории упругости и тем в большей мере происходит процесс накопления дилатансии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мясников В.П., Олейников А.И.* Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 171 с.
2. *Трещев А.А.* О дилатации и разносопротивляемости изотропных материалов // Эксперт: теория и практика 2021. № 3 (12). С. 53–58.
3. *Новожилов В.В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 2. С. 183–194.
4. *Новожилов В.В.* О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 709–722.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Комков К.Ф.* О методике определения модуля объемной упругости и параметров, учитывающих разрыхление и изменение упругости композитов, основанной на тензорно-нелинейных уравнениях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 50–62. <https://doi.org/10.1134/S0572329919010057>
7. *Комков К.Ф.* О тензорной нелинейности сред, проявляющих существенное различие в сопротивлении растяжению и сжатию // Электронный журн. № 10, октябрь 2013. <https://doi.org/10.7463/0513.0571202>
8. *Мошев В.В.* Структурная механика зернистых композитов на эластомерной основе. М.: Наука, 1992. 79 с.
9. *Леонов М.Я., Поняев В.А., Русинко К.Н.* Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инж. журнал. МТТ. 1967. № 6. С. 26–32.

10. *Schwarzs F.R.* On mechanical properties of unfilled and filled elastomers. Mechanics and chemistry of solid propellants // Proc. of the fourth symposium of naval structural mechanics. Held at Purdue University: Lafayette, Indiana, 1965. P. 19–21.
11. *Комков К.Ф.* Описание анизотропии изотропных материалов, вызванной пластической деформацией // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 147–153.
12. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1969. 863 с.
13. *Роу П.* Теоретический смысл и наблюдаемые величины деформационных параметров грунта // Новое в зарубежной науке. Механика. Вып. 2. Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 76–143.
14. *Бел Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1984. Часть I. 596 с.; Часть II. 431 с.
15. *Корн Г.* Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831 с.

---

---

УДК 531.534

## РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ И ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ДВУРУКИМ РОБОТОМ

© 2022 г. Е. И. Воробьев<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: evgeniv36@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.08.2020 г.

После доработки 03.02.2021 г.

Принята к публикации 26.04.2021 г.

В работе решается задача реализации заданного относительного движения двух твердых тел двуруким роботом, содержащим два манипулятора с вращательными и поступательными приводами. Тела считаются жестко связанными с рабочими звеньями манипуляторов. Движение этих тел по отношению друг к другу соответствует общему случаю движения твердого тела и также разделяется на переносное и относительное. Движение этих тел по отношению друг к другу задается двумя способами. В первом случае за переносное движение принимается движение некоторой точки тела, а за относительное – движение тела вокруг этой точки. Во втором случае за переносное движение принимается движение некоторой прямой тела, а за относительное – движение тела вдоль этой прямой. На основе использования уравнений связей между параметрами, задающими движение тел относительно друг друга и обобщенными координатами манипуляторов робота, получены выражения для обобщенных координат, которые принимаются за управляющие воздействия. Показано применение данного метода к построению движений двурукого робота при сборке цилиндрических соединений. Приводится циклограмма движений робота при осуществлениях сборки.

*Ключевые слова:* двурукий робот, твердое тело, относительное движение, управляющие функции, сборка, алгоритм управления

DOI: 10.31857/S0572329922050142

**Введение.** Двуруким роботом будем называть совокупность манипуляторов, работающих в одной рабочей зоне и имеющих единую систему управления. Манипуляторы могут размещаться на одной подвижной платформе или на неподвижном основании. Исполнительная система двуруких роботов состоит из двух рук-манипуляторов, которые при совместном выполнении операций оказываются связанными программными связями между рабочими звеньями. При этом образуется единый механизм с несколькими степенями свободы. Такие механизмы известны под названием “механизмов относительного манипулирования” [1]. Функционирование таких механизмов подобно функционированию двух рук человека, так как основной задачей движения, необходимого для выполнения сложных операций, является реализация заданного относительного движения рабочих звеньев. Важным свойством этих механизмов является также возможность получения в относительном движении рабочих звеньев числа степеней свободы, равной сумме числа степеней свобод, взаимодействующих манипуляторов. Это приводит к повышению точности относительного манипулирования при выполнении операций по сравнению с однорукими роботами.

В [2, 3] отмечены особенности устройств относительного манипулирования и решены отдельные вопросы их структуры и кинематики. В [3] показана возможность создания таких систем на основе механизмов с параллельной структурой и решена задача о положениях одного из таких механизмов. В [4] решена задача реализации заданного относительного движения двух твердых тел двуруким роботом, у которых один из манипуляторов имеет только поступательные кинематические пары.

Ниже рассматриваются задачи реализации заданного сферического и винтового относительного движения двух твердых тел двуруким роботом с шестью степенями свободы, и построение алгоритмов управления движениями двуруких роботов на операциях сборки цилиндрических соединений.

**1. Реализация относительного движения двух твердых тел двуруким роботом.** При решении различных технологических и научных задач необходимо рассматривать движение твердого тела относительно неподвижной или подвижной системы координат. Наиболее распространенным методом является метод рассмотрения движения общего вида твердого тела как суммы двух движений, переносного движения тела со скоростью некоторой точки тела-полюса и относительного движения тела вокруг полюса [5]. При решении задач сборки и монтажа конструкций с цилиндрическими и винтовыми соединениями одним из основных требований является обеспечение совпадения некоторых осей, прямых линий, принадлежащих соединяемым объектам. В этом случае целесообразно целевое относительное положение объектов задавать в виде заданного относительного положения некоторой прямой и перемещения объекта вдоль этой прямой. Такой метод определения положения прямых и тел используется в винтовом исчислении и линейчатой геометрии [6]. Сборочные операции цилиндрических соединений широко распространены в машиностроении. Для осуществления таких операций в производстве применяются автоматические сборочные центры, содержащие роботы и специальные сборочные устройства [7, 8]. Некоторые задачи управления двурукими роботами с учетом динамики рассматривались в [9–11].

*1.1. Винтовой способ задания движения твердого тела.* Известно, что движение твердого тела в любой момент времени является винтовым, то есть имеет место мгновенная ось вращения и вращение тела относительно этой оси. При конечных перемещениях твердого тела аналогично существует ось конечного поворота и угол поворота, переводящий тело из начального положения в конечное. Рассмотрим вопрос об определении положения твердого тела и прямой линии при совершении трех винтовых движений относительно перпендикулярных осей. Положение прямой относительно декартовой системы координат будем определять четырьмя независимыми параметрами  $a, \alpha, b, \beta$ . (рис. 1).

Среди которых  $a, \alpha$  – соответственно линейное перемещение прямой вдоль некоторой оси системы координат (например, оси  $Oz$ ) и угол поворота вокруг этой оси и  $b, \beta$  – перемещение прямой по линии кратчайшего расстояния между прямой и осью  $Oz$  и угол поворота вокруг этой линии. Перемещение тела, относительно прямой будем определять перемещением “ $c$ ” и поворотом “ $\gamma$ ” тела вдоль этой прямой. Перемещение тела, связанного с этой прямой, является винтовым, состоящим из перемещения прямой и перемещения тела вдоль этой прямой. Для задания относительного движения двух твердых тел, с каждым из них свяжем декартову систему координат, причем одну из них  $O_1x_1y_1z_1$  можно считать неподвижной, а положение второй относительно первой будем определять шестью параметрами:  $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ .

*1.2. Матрица относительного положения двух твердых тел.* В соответствии с введенными параметрами, определяющими винтовое движение твердого тела, можно составить матрицу, определяющую относительное положение двух твердых тел, в виде матрицы четвертого порядка как произведение матриц трех винтовых перемещений.

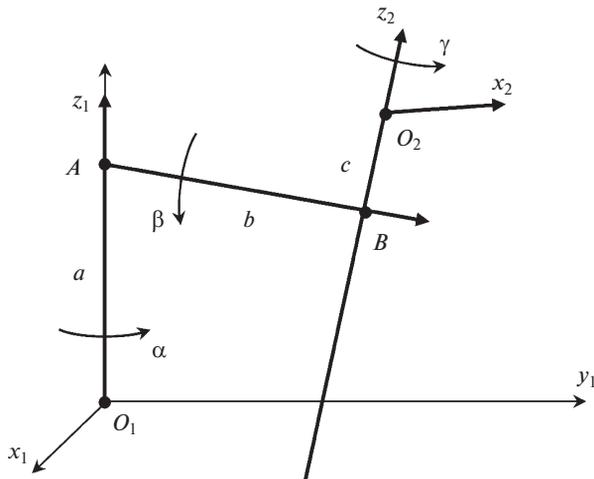


Рис. 1. Винтовой способ задания положения твердого тела.

$$M_{12} = M_{\alpha} M_{\beta} M_{\gamma} \quad (1.1)$$

где  $M_{12}$  – матрица определяющая относительное положение систем координат связанных с телами;  $M_{\alpha}$   $M_{\beta}$   $M_{\gamma}$  – соответственно матрицы винтовых перемещений. Эти матрицы имеют вид:

$$M_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$M_{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перемножением матриц в (1.1) с учетом (1.2) получим матрицу относительного положения двух тел в виде определяющую положение твердого тела после трех винтовых поворотов.

$$M_{12} = \begin{bmatrix} [L_z] & [x] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & a_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & b_1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

где  $[L_z]$  – матрица третьего порядка направляющих косинусов осей координат, связанных с телами,  $[x]$  – матрица координат начала одной системы в другой

Произведя перемножение матриц, получим

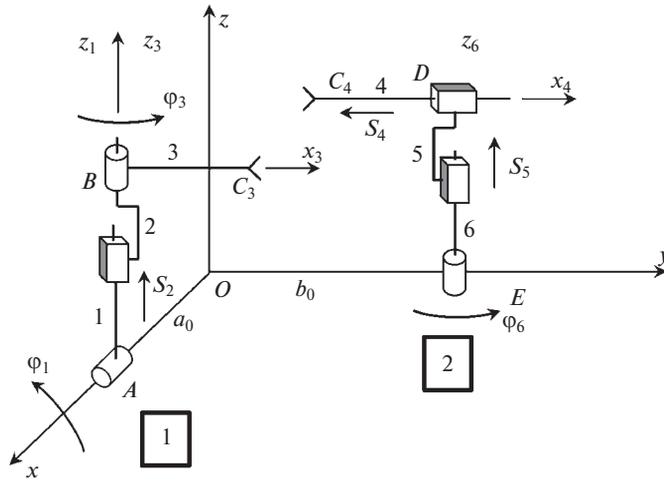


Рис. 2. Схема двурукого робота ВРВ – ВРП.

$$[L_z] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - & -\cos \alpha \sin \gamma - & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \\ \sin \alpha \cos \gamma + & -\sin \alpha \sin \gamma + & -\cos \alpha \sin \beta \\ +\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & +\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$[x] = \begin{bmatrix} c \sin \beta \sin \alpha + b \cos \alpha \\ -c \sin \beta \cos \alpha + b \sin \alpha \\ c \cos \beta + a \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.3. Реализация переносного и сферического относительного движения двух твердых тел двуруким роботом. Будем считать, что манипуляционная система двурукого робота содержит два манипулятора, каждый с тремя степенями свободы (рис. 2). Общее число степеней свободы манипуляционной системы равно шести.

Манипуляторы содержат вращательные (В) и поступательные (П) кинематические пары. Положения манипуляторов определяется шестью обобщенными координатами  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Определению подлежат обобщенные координаты манипуляторов:  $S_i$  ( $i = 2, 4, 5$ );  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 6$ ), которые являются управляющими функциями. Эти перемещения реализуются системой управления робота. Рабочими звеньями манипуляторов является звенья 3 и 4. В этом случае положение звена 3 по отношению к звену 4 определяется матрицей ориентации. Матрицу ориентации относительного положения рабочих звеньев 3 и 4 используем для определения положения звена 3 в неподвижной системе координат.

Переходя к системе  $C_3x_3y_3z_3$  от системы  $Oxyz$  через звенья манипулятора “1” получим матрицу ориентации

$$L_{03}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_6 & -\sin \varphi_6 & 0 \\ \sin \varphi_6 & \cos \varphi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} \cos \varphi_6 - \alpha_{21} \sin \varphi_6 & \alpha_{12} \cos \varphi_6 - \alpha_{22} \sin \varphi_6 & \alpha_{13} \cos \varphi_6 - \alpha_{23} \sin \varphi_6 \\ \alpha_{11} \sin \varphi_6 + \alpha_{21} \cos \varphi_6 & \alpha_{12} \sin \varphi_6 + \alpha_{22} \cos \varphi_6 & \alpha_{13} \sin \varphi_6 + \alpha_{23} \cos \varphi_6 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Переходя к системе  $C_3x_3y_3z_3$  от системы  $Oxuz$  через звенья манипулятора “2” получим

$$L_{03}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Из условия  $L_{03}^{(1)} = L_{03}^{(2)}$  имеем

$$\varphi_1 = \arccos \alpha_{33}$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{32}}$$

$$\varphi_6 = \arctg \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}}$$

Приравнивая координаты  $C_3$  в неподвижной системе координат при переходе через звено манипулятора 1 и 2 получим

$$l_3 \cos \varphi_3 + a_0 = (a_1 + S_4) \cos \varphi_6 - b_1 \sin \varphi_6 + b_0$$

$$l_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 - S_2 \sin \varphi_1 = (a_1 + S_4) \sin \varphi_6 - b_1 \cos \varphi_6 \quad (1.8)$$

$$l_3 \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 - S_2 \sin \varphi_1 = C_1 + S_5$$

Из последних уравнений линейные перемещения  $S_2$ ,  $S_4$  и  $S_5$  найдем, решая линейную систему уравнений (1.8).

*1.4. Реализация относительного винтового движения двух твердых тел.* Для реализации заданного относительного винтового движения двух твердых тел используем двурукий робот, состоящий из двух манипуляторов с четырьмя и двумя степенями свободы (рис. 3).

Первый манипулятор содержит две поступательные и две вращательные кинематические пары, а второй манипулятор содержит одну вращательную и одну поступательную кинематическую пары. Управляющими функциями манипулятора 1 являются углы поворота звеньев 2 и 4 относительно предыдущих  $\varphi_2$ ,  $\varphi_4$  и относительные линейные перемещения звеньев 1 и 3 относительно предыдущих  $S_1$  и  $S_3$ . Управляющими функциями у манипулятора 2 являются поворот звена 6 –  $\varphi_6$  и линейное перемещение звена 6 –  $S_5$ . Эти функции подлежат определению. Заданными будем считать относительные положения звеньев 4 и 5. Это относительное положение задается положением прямой звена 4 в системе звена 5, определяемое параметрами  $a$ ,  $\alpha$ ,  $b$ , и перемещением звена 5 вдоль этой прямой, определяемое параметрами  $c$ ,  $\gamma$ . За прямую линию звена 4 примем прямую  $C_3C_4$ . Эта прямая должна совпасть с прямой  $C_5D$ , принадлежащей

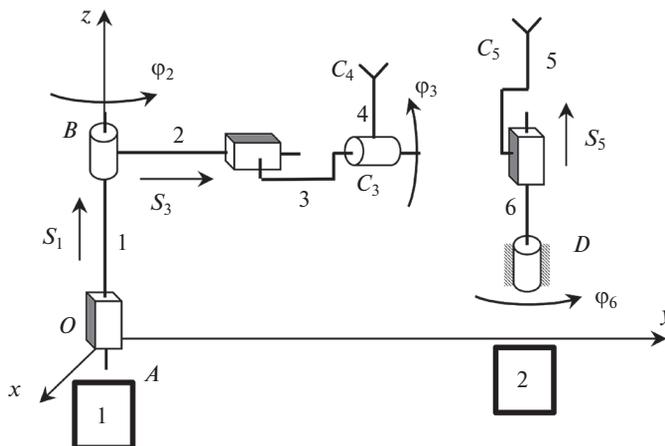


Рис. 3. Схема двурукого робота ПВПВ – ВП.

звену 5. Для совпадения этих прямых должны совпасть также координаты точки  $C_3$  прямой  $C_3C_4$  и точки  $D$  прямой  $C_5D$ , а также направляющие косинусы прямых. Условие совпадения точек можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_3 \cos \varphi_2 &= x_d \\ S_3 \sin \varphi_2 &= y_d \\ S_1 &= z_d \end{aligned} \tag{1.9}$$

где  $x_d, y_d, z_d$  – координаты точки  $D$  в неподвижной системе координат  $Oxyz$ , считаем заданными. Условие совпадения направляющих косинусов прямых имеет вид

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 \sin \varphi_4 &= l_6 \\ -\cos \varphi_2 \sin \varphi_4 &= m_6 \\ \cos \varphi_4 &= n_6 \end{aligned} \tag{1.10}$$

где  $l_6, m_6, n_6$  – направляющие косинусы оси  $C_5D$ , считаем заданными. Из уравнения (1.10) найдем

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \operatorname{arctg} \left( -\frac{l_6}{m_6} \right) \\ \varphi_4 &= \arccos n_6 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.9) найдем

$$\begin{aligned} S_1 &= z_d \\ S_3 &= \pm \sqrt{x_d^2 + y_d^2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

При выполнении условий (1.11) и (1.12) прямые  $C_3C_4$  и  $C_5D$  совпадают.

После этого перемещения  $S_5$  и  $\varphi_6$  равны соответственно

$$\begin{aligned} S_5 &= c \\ \varphi_6 &= \gamma \end{aligned} \tag{1.13}$$

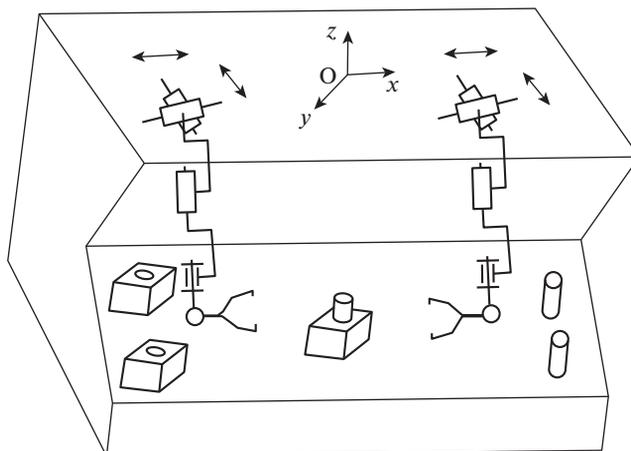


Рис. 4. Система сборки цилиндрических соединений.

1.5. *Определение относительных положений звеньев манипуляторов сборочной системы* (рис. 5). Для построения программных движений манипуляторов в сборочной системе решим вначале задачу об определении относительных положений звеньев манипулятора с пятью степенями свободы при захвате цилиндрической детали.

Манипулятор содержит три поступательных и две вращательных кинематические пары (рис. 5).

Со звеньями манипулятора свяжем системы координат следующим образом: оси системы координат звеньев 1, 2, 3 параллельны осям неподвижной системы координат  $OXYZ$ , со звеном 4 свяжем систему координат  $O_4X_4Y_4Z_4$ , направив ось  $Z_4$  параллельно оси  $OZ$ , а ось  $X_4$  параллельна оси пары  $O_5$ , со звеном 5 свяжем систему координат  $O_5X_5Y_5Z_5$ , направив ось  $X_5$  по оси пары  $O_5$ , а ось  $Z_5$  по оси звена 5 – схвата манипулятора. Положение цилиндрической детали будем задавать координатами точки, расположенной на оси детали и направляющими косинусами оси детали в неподвижной системе координат. При решении обратной задачи о положениях манипулятора будем иметь в виду, что захват цилиндрической детали может производиться схватом робота двумя разными способами, с торца и сбоку. Будем считать, что цилиндрические детали для сборки, втулка и цилиндрический штифт в загрузочном устройстве подаются в положение, когда ось детали параллельна оси  $OZ$ , неподвижной системы координат. Координаты контролируемой точки схвата робота  $O_5$  могут быть найдены по формуле:

$$[x_5] = L_{03} + L_{34}l_4 + L_{45}l_5 \quad (1.14)$$

где  $l_4, l_5$  – длины звеньев 4 и 5,  $L_{34}, L_{45}$  – матрица перехода от системы  $i$  к системе  $i-1$  ( $i = 3, 4$ ),  $L_{03}$  – единичная матрица перехода от системы  $X_3Y_3Z_3$  к системе  $OXYZ$ .

Причем,

$$L_{45} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_5 & -\sin \varphi_5 \\ 0 & \sin \varphi_5 & \cos \varphi_5 \end{bmatrix}; \quad L_{34} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_4 & -\sin \varphi_4 & 0 \\ \sin \varphi_4 & \cos \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

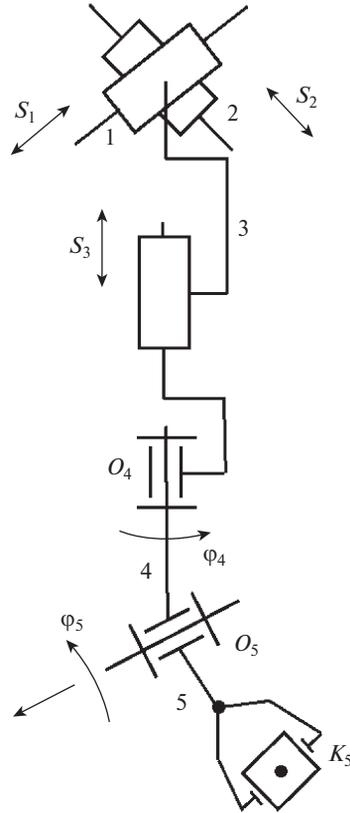


Рис. 5. Манипулятор.

Произведя перемножение матриц в выражении (1.12) с учетом (1.11) получим координаты точки \$K\_5\$ схвата в неподвижной системе координат.

$$\begin{aligned} X_5 &= S_1 + l_5 \sin \varphi_4 \sin \varphi_5 \\ Y_5 &= S_2 - l_5 \cos \varphi_4 \sin \varphi_5 \\ Z_5 &= S_3 + l_5 \cos \varphi_5 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ориентация схвата определяется матрицей ориентации, связанной с ним системы координат \$K\_5 X\_5 Y\_5 Z\_5\$.

$$L_{05} = L_{04} L_{05} \tag{1.17}$$

Используя выражения матриц (1.15) и, произведя перемножение, получим:

$$L_{05} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_4 & -\sin \varphi_4 \cos \varphi_5 & \sin \varphi_4 \sin \varphi_5 \\ \sin \varphi_4 & \cos \varphi_4 \cos \varphi_5 & -\cos \varphi_4 \sin \varphi_5 \\ 0 & \sin \varphi_5 & \cos \varphi_5 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

При захвате детали с торца, ось  $Z_5$  схвата становится направленной по оси  $OZ$ , т.е. элементы третьего столбца матрицы (1.15) соответственно равны:

$$\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{33} = 1$$

откуда  $\cos \varphi_5 = 1$ ,  $\varphi_5 = 0$ ,  $\sin \varphi_4 = 0$ ,  $\varphi_4 = 0$ . При захвате детали сбоку ось  $Z_5$  перпендикулярна оси  $OZ$ ,  $\alpha_{33} = 0$ . Следовательно,  $\cos \varphi_5 = 0$ ,  $\varphi_5 = \pi/2$ . Значение  $S_1, S_2, S_3$  определяются из линейной системы уравнений (1.16).

*1.6. Циклограммы движения манипуляторов.* Циклограмма движения манипулятора 1:

- Переход из начального положения в опорную точку  $A_1$  на оси втулки.
- Движение в точку  $A_2$  захвата втулки.
- Зажим втулки.
- Возврат схвата со втулкой в точку  $A_1$ .
- Перенос втулки в положение сборки, в точку  $A_3$ .

Циклограмма движения манипулятора 2:

- Переход из начального положения в опорную точку  $A_4$ , на линию оси штифта.
- Движение по оси штифта в точку  $A_5$ , захвата штифта.
- Захват штифта.
- Перенос штифта в точку  $A_4$  на оси штифта.
- Перенос штифта в точку  $A_6$ , на линию сборки, на оси втулки.
- Перемещение штифта по линии сборки до соединения со втулкой.
- Освобождение штифта манипулятором.
- Перенос схвата манипулятора в точку  $A_4$ .

Перемещение собранного изделия манипулятором 1 на конвейер.

Перемещение втулки манипулятором 1 в точки  $A_1, A_2, A_3$  и перемещение штифта в точки  $A_4, A_5, A_6$  может быть осуществлено одновременно, при этом сокращается общее время цикла и повышается производительность сборочного комплекса. Однако, при этом следует обеспечить отсутствие пересечения звеньев манипуляторов.

**Заключение.** Предложен метод реализации относительного движения общего вида двух твердых тел двуруким роботом с шестью степенями свободы. Особенностью метода является разделение в уравнениях связи линейных и угловых перемещений. Получены в явном виде выражения для управляющих функций при реализации относительного движения общего вида двух твердых тел двуруким роботом, с вращательными и поступательными приводами. Показано применение предложенного метода построения движений двуруких роботов к выполнению операций сборки цилиндрических соединений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крайнев Ф.Ф., Глазунов В.А.* Новые механизмы относительного манипулирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 5. С. 106–117.
2. *Глазунов В.А., Ласточкин А.Б., Терехова Ф.Н., Ву Нгок Бик* Об особенностях устройств относительного манипулирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. № 2. С. 77–85.
3. *Глазунов В.А., Ласточкин А.Б., Шалюхин К.А., Данилин П.О.* К анализу и классификации устройств относительного манипулирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 4. С. 81–85.

4. *Воробьев Е.И.* Осуществление заданного относительного движения двух твердых тел двуручным роботом // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 122–128.
5. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
6. *Дименберге Ф.М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
7. *Козырев Ю.Г.* Установка захватных устройств и инструментов на конечном звене манипулятора при сборке изделий // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2016. № 12. С. 19–21.
8. *Козырев Ю.Г.* Применение промышленных роботов. М.: КноРус, 2011, 488 с.
9. *Chiacchio P., Chiaverini S., Siciliano B.* Direct and inverse kinematics for coordinated motion tasks of a two-manipulator system // J. Dyn. Syst. Meas. Control. 1996. V. 118. № 4. P. 691–697. <https://doi.org/10.1115/1.2802344>
10. *Caccavale F., Chiacchio P., Chiaverini S.* Task-Space regulation of cooperative manipulators // Automatica. 2000. V. 36. № 6. P. 879–887. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00215-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00215-0)
11. *Luh J.Y.S., Zheng Y.F.* Constrained relations between two coordinated industrial robots for motion control // Int. J. Robot. Res. 1987. V. 6. № 3. P. 60–70. <https://doi.org/10.1177/027836498700600304>

УДК 531.383

## УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ РАЗНЫХ ТИПОВ

© 2022 г. А. А. Маслов<sup>а,\*</sup>, Д. А. Маслов<sup>а,\*\*</sup>, И. В. Меркурьев<sup>а,\*\*\*</sup><sup>а</sup>Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Москва, Россия

\*e-mail: MaslovAlA@mpei.ru

\*\*e-mail: MaslovDmA@mpei.ru

\*\*\*e-mail: MerkurjevIV@mpei.ru

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.

После доработки 26.12.2021 г.

Принята к публикации 27.12.2021 г.

Рассматривается учет нелинейности колебаний резонаторов в методиках идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов. Определяемыми являются параметры, характеризующие демпфирование, анизотропию демпфирования, разноточастотность, а также коэффициенты нелинейности математических моделей динамики резонаторов волновых твердотельных гироскопов. В зависимости от типа резонаторов и датчиков управления предлагаются методики идентификации параметров в режимах свободного выбега и вынужденных колебаний с учетом разных типов нелинейностей: нелинейностей третьей, пятой степени, нелинейности, влияющей на управление. Даны алгоритмы определения оценок параметров и их доверительных интервалов при случайных погрешностях измерений. По результатам обработки данных показано, что учет нелинейности колебаний резонаторов существенно повышает точность определения параметров волновых твердотельных гироскопов. Приведены уравнения, показывающие влияние коэффициентов нелинейности и параметров, характеризующих разноточастотность и анизотропию демпфирования, на угловую скорость дрейфа гироскопа.

*Ключевые слова:* волновой твердотельный гироскоп, идентификация параметров, нелинейные колебания, дрейф гироскопа

DOI: 10.31857/S0572329922050099

**1. Введение.** В настоящее время волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) находят широкое применение в качестве датчиков инерциальной информации навигационных систем, причем масштаб исследований и разработок ВТГ в ближайшее время будет расширяться, способствуя повышению точности гироскопов [1, 2]. Задача идентификации параметров резонатора ВТГ является одной из задач, решение которой направленно на повышение точности ВТГ.

Основы теории ВТГ заложены в работах Д.М. Климова и В.Ф. Журавлева [3–7]. В [4, 7] показано, что погрешность, вызванная нелинейными свойствами колебательной системы, присуща всем ВТГ, а исследование динамики может проводиться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. Вопросы идентификации погрешностей изготовления резонаторов ВТГ рассмотрены в [4, 7–13]. В указанных работах при определении параметров гироскопа использовались линейные уравнения малых колебаний резонатора. В [14–16] отмече-

но, что при экспериментальных исследованиях динамики вибрационных гироскопов были обнаружены явления, характерные для нелинейных систем, например, срыв колебаний в режиме вынужденных колебаний. Пренебрежение нелинейностью возможно лишь при малых амплитудах колебаний, при которых отношение сигнала к шуму недостаточно высокое. Для его повышения следует увеличивать амплитуду колебаний, однако при этом возрастают погрешности, вызванные нелинейностью. В [17–22] предложены методики определения параметров ВТГ с кольцевым и цилиндрическим резонаторами при учете нелинейности. Идентификация может выполняться в режиме свободного выбега, в режиме вынужденных колебаний и в режиме управляемой прецессии [23]. У кварцевых полусферических и цилиндрических резонаторов, обладающих высокой добротностью, ширина резонанса мала для снятия данных при регулировании частотной настройки, а время затухания колебаний велико и достаточно для снятия данных в режиме свободного выбега. Для резонаторов с меньшей добротностью, например, кольцевых резонаторов микромеханических ВТГ, время затухания мало, но есть возможность снимать данные при разных значениях частотной настройки в режиме вынужденных колебаний.

В данной статье уточняются и обобщаются результаты предшествующих работ по учету нелинейности в методиках идентификации параметров ВТГ путем введения коэффициентов нелинейности в определяемые параметры [17–22]. Ставятся задачи обобщить учет нелинейностей третьей и пятой степени на методику идентификации параметров в режиме свободного выбега, определить классы гироскопов и типы нелинейностей для применения методик идентификации параметров, показать влияние определяемых параметров на угловую скорость дрейфа ВТГ.

Найденные при идентификации параметры, включая технологические погрешности изготовления резонатора и коэффициенты нелинейности, могут использоваться для повышения точности определения угловой скорости в методиках компенсации погрешностей [24] или для повышения точности балансировки резонаторов [25, 26].

**2. Определение параметров ВТГ в режиме свободного выбега.** Рассматривается ВТГ с кварцевым резонатором, представленным упругой осесимметричной оболочкой вращения. Обычно подобные резонаторы изготавливаются в виде полусферы или цилиндра и обладают малыми потерями на внутреннее трение, соответственно, имеют высокую добротность. Поэтому для ВТГ с кварцевым резонатором в виде оболочки вращения рассмотрим идентификацию параметров в режиме свободного выбега.

В [27] выведены уравнения динамики цилиндрического резонатора ВТГ с учетом нелинейных свойств электростатических датчиков управления, которые представляют собой конденсаторы, образованные металлизированной поверхностью резонатора и электродами, расположенными вблизи свободной кромки резонатора,

$$\begin{aligned}
 \ddot{f} + \omega^2 f &= -\gamma \dot{f} + v \dot{g} + \\
 &+ \eta \left( 3(f^2 + g^2)f + \frac{15}{4}(f^2 + g^2)^2 f + (1 + 3f^2)(-u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t) \right) - \\
 &\quad - \frac{\eta}{2} ((u_1^2 - u_2^2) \cos 2\omega_0 t + 2u_1 u_2 \sin 2\omega_0 t) f \\
 \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma \dot{g} - v \dot{f} + \\
 &+ \eta \left( 3(f^2 + g^2)g + \frac{15}{4}(f^2 + g^2)^2 g + (1 + 3g^2)(-u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t) \right) - \\
 &\quad - \frac{\eta}{2} ((u_3^2 - u_4^2) \cos 2\omega_0 t + 2u_3 u_4 \sin 2\omega_0 t) g
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $f, g$  – обобщенные координаты второй основной формы колебаний резонатора;  $\omega$  – характерная частота собственных колебаний;  $\gamma$  – коэффициент демпфирования;  $v$  – параметр, характеризующий угловую скорость основания гироскопа;  $\eta$  – коэффи-

циент, характеризующий нелинейность, вызванную электростатическими датчиками управления [27];  $u_1, u_2, u_3, u_4$  – нормализованные управляющие напряжения,  $\omega_0$  – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора. Заметим, что слагаемые с кубической нелинейностью свойственны уравнениям динамики резонаторов гироскопов класса обобщенного маятника Фуко [7] и были получены в [7] для классического маятника Фуко, а в [13] в предположении о том, что для материала резонатора справедлив нелинейный закон упругости. Поэтому введем единые коэффициенты  $\xi$  и  $\kappa$  при, соответственно, нелинейностях третьей и пятой степени, обусловленных различными факторами. Так как рассматривается режим свободного выбега, положим в (2.1) нулевое управление. Получим уравнения

$$\begin{aligned}\dot{f} + \omega^2 f &= -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \xi(f^2 + g^2)f + \kappa(f^2 + g^2)^2 f \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \xi(f^2 + g^2)g + \kappa(f^2 + g^2)^2 g\end{aligned}\quad (2.2)$$

В [4, 7, 8] проведен анализ сил, являющихся следствием разнообразных дефектов резонатора, и вызываемой этими силами эволюции формы колебаний резонатора. С учетом наиболее общего [4] представления действующих на резонатор возмущений, нелинейные уравнения динамики (2.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{f} + \omega^2 f &= -(\gamma + b_c)\dot{f} - (-v + b_s)\dot{g} - (c_m + h_c)f - (n + h_s)g + \\ &\quad + \xi(f^2 + g^2)f + \kappa(f^2 + g^2)^2 f \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -(\gamma - b_c)\dot{g} - (v + b_s)\dot{f} - (c_m - h_c)g - (-n + h_s)f + \\ &\quad + \xi(f^2 + g^2)g + \kappa(f^2 + g^2)^2 g\end{aligned}\quad (2.3)$$

где  $c_m$  и  $n$  – параметры позиционных сил;  $h_s = h_m \sin 4\alpha$ ,  $h_c = h_m \cos 4\alpha$  и  $b_s = b_m \sin 4\beta$ ,  $b_c = b_m \cos 4\beta$  – параметры, характеризующие разночастотность и анизотропию демпфирования соответственно,  $h_m, b_m$  – модули разночастотности и анизотропии демпфирования,  $\alpha$  и  $\beta$  – углы ориентации главных осей жесткости и диссипации относительно отсчетных осей.

Используя метод осреднения Крылова–Боголюбова [28] и переменные Ван-дер-Поля, с помощью замены

$$\begin{aligned}f &= p_1 \sin \omega t + q_1 \cos \omega t, & \dot{f} &= \omega(p_1 \cos \omega t - q_1 \sin \omega t) \\ g &= p_2 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t, & \dot{g} &= \omega(p_2 \cos \omega t - q_2 \sin \omega t)\end{aligned}\quad (2.4)$$

можно получить из (2.3), осредненную систему дифференциальных уравнений в медленных переменных:

$$\begin{aligned}2\dot{q}_1 &= -\gamma q_1 - b_c q_1 + v q_2 - b_s q_2 + \tilde{c}_m p_1 + \tilde{h}_c p_1 + \tilde{n} p_2 + \tilde{h}_s p_2 + \tilde{\xi} k_1 + \tilde{\kappa} k_5 \\ 2\dot{p}_1 &= -\gamma p_1 - b_c p_1 + v p_2 - b_s p_2 - \tilde{c}_m q_1 - \tilde{h}_c q_1 - \tilde{n} q_2 - \tilde{h}_s q_2 + \tilde{\xi} k_2 + \tilde{\kappa} k_6 \\ 2\dot{q}_2 &= -\gamma q_2 + b_c q_2 - v q_1 - b_s q_1 + \tilde{c}_m p_2 - \tilde{h}_c p_2 - \tilde{n} p_1 + \tilde{h}_s p_1 + \tilde{\xi} k_3 + \tilde{\kappa} k_7 \\ 2\dot{p}_2 &= -\gamma p_2 + b_c p_2 - v p_1 - b_s p_1 - \tilde{c}_m q_2 + \tilde{h}_c q_2 + \tilde{n} q_1 - \tilde{h}_s q_1 + \tilde{\xi} k_4 + \tilde{\kappa} k_8\end{aligned}\quad (2.5)$$

где  $\tilde{\xi} = \xi/\omega$ ,  $\tilde{\kappa} = \kappa/\omega$ ,  $\tilde{h}_c = h_c/\omega$ ,  $\tilde{h}_s = h_s/\omega$ ,  $\tilde{c}_m = c_m/\omega$ ,  $\tilde{n} = n/\omega$ , осредненные нелинейные выражения  $k_1 - k_8$  заданы формулами:

$$\begin{aligned}k_1 &= -p_1 E - q_2 X, & k_2 &= q_1 E - p_2 X, & k_3 &= -p_2 E + q_1 X, & k_4 &= q_2 E + p_1 X \\ E &= 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4, & X &= (p_2 q_1 - p_1 q_2)/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_5 &= -\frac{1}{16}(5p_1^5 + 12p_1^2 p_2 q_1 q_2 + 4p_2 q_1 q_2 (p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + 2p_1^3 (5(p_2^2 + q_1^2) + q_2^2) + \\
 &\quad + p_1 (5p_2^4 + 6p_2^2 q_1^2 + 5q_1^4 + 6(p_2^2 + q_1^2) q_2^2 + q_2^4)) \\
 k_6 &= \frac{1}{16}(5p_1^4 q_1 + 4p_1^3 p_2 q_2 + 4p_1 p_2 q_2 (p_2^2 + 3q_1^2 + q_2^2) + \\
 &\quad + 2p_1^2 q_1 (3p_2^2 + 5q_1^2 + 3q_2^2) + q_1) (p_2^4 + 5(q_1^2 + q_2^2)^2 + 2p_2^2 (q_1^2 + 3q_2^2)) \\
 k_7 &= -\frac{1}{16}(p_2 (5(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2(3p_1^2 + p_2^2) q_1^2 + q_1^4) + 4p_1 q_1 (p_1^2 + 3p_2^2 + q_1^2) q_2 + \\
 &\quad + 2p_2 (3p_1^2 + 5p_2^2 + 3q_1^2) q_2^2 + 4p_1 q_1 q_2^3 + 5p_2 q_2^4) \\
 k_8 &= \frac{1}{16}(4p_1^3 p_2 q_1 + p_1^4 q_2 + 2p_1^2 q_2 (3(p_2^2 + q_1^2) + q_2^2) + 4p_1 p_2 q_1 (p_2^2 + q_1^2 + 3q_2^2) + \\
 &\quad + q_2 (5p_2^4 + 5(q_1^2 + q_2^2)^2 + 2p_2^2 (3q_1^2 + 5q_2^2)))
 \end{aligned}$$

Заметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения [13]: с помощью емкостной системы электродов измеряются высокочастотные функции времени  $f(t)$ ,  $g(t)$  и с помощью контуров обработки сигналов выделяются огибающие  $q_1(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $p_2(t)$ . Таким образом, медленные переменные  $q_1(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $p_2(t)$  системы (2.5) являются измеряемыми.

Запишем систему (2.5) в векторно-матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{z} \quad (2.6)$$

где вектор медленных переменных

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), p_1(t), q_2(t), p_2(t))^T$$

матрицу  $\mathbf{D}$  и вектор определяемых параметров  $\mathbf{z}$  задаем в блочной форме:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= (\mathbf{D}_\gamma | \mathbf{D}_\xi | \mathbf{D}_\kappa) \\
 \mathbf{D}_\gamma &= \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 \\ -q_2 & -q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 \\ -p_2 & -p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\xi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\kappa = \begin{pmatrix} k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{z} &= (\mathbf{z}_\gamma^T \ \xi \ \tilde{\kappa})^T, \quad \mathbf{z}_\gamma = (\gamma, \nu, b_c, b_s, \tilde{c}_m, \tilde{n}, \tilde{h}_c, \tilde{h}_s)^T
 \end{aligned}$$

С помощью данной записи, в зависимости от количества блоков, мы можем записать как линейную математическую модель, так и обе нелинейные математические модели: с кубической нелинейностью (коэффициент нелинейности  $\xi$ ,  $k = 9$  параметров) и с нелинейностью пятой степени (два коэффициента нелинейности  $\xi$  и  $\tilde{\kappa}$ ,  $k = 10$  параметров).

Начальным моментом съема данных является момент отключения управляющего напряжения в режиме стационарных колебаний. Для обработки данных, берется массив значений затухающих медленных переменных так, чтобы в конце процесса была достаточная амплитуда колебаний для отличия их от случайных помех. Лучше брать начальный участок процесса затухания колебаний, на котором наибольшим образом изменяются медленные переменные. Обозначим отрезок времени наблюдений  $[0, T]$  и разобьем его на  $N$  равных частей:  $t_i = i \cdot h_t$ ,  $h_t = T/N$  – шаг по времени,  $i = 0 \dots N$ . Определяемые параметры считаем постоянными на  $[0, T]$ .

Интегрируем левую и правую часть (2.6) на отрезках  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ :

$$\mathbf{q}(t_{i+1}) - \mathbf{q}(t_{i-1}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{z}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.7)$$

где интегралы, обозначенные как

$$\mathbf{D}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \mathbf{D}(\mathbf{q}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

вычисляются от элементов матриц численно, например по формуле Симпсона. Таким образом, систему (2.6), дискретизированную на отрезке  $[0, T]$  и представленную системами (2.7), записываем в виде переопределенной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (2.8)$$

где введены составные матрица  $\bar{\mathbf{D}}$  и вектор  $\mathbf{y}$ :

$$\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_{N-1}^T)^T, \quad \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_{N-1}^T)^T$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{q}(t_{i+1}) - \mathbf{q}(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{E})$  – вектор некоррелированных случайных ошибок измерений, подчиняющихся нормальному закону распределения с нулевым средним и одинаковыми дисперсиями.

Рассмотрим сначала оценку вектора параметров  $\mathbf{z}$  по методу наименьших квадратов. Тогда для линейной регрессии (2.8) получим оценку:

$$\hat{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}})^{-1} \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{y} \quad (2.9)$$

при условии, что матрица  $\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}}$  не является вырожденной.

Оценка (2.9) минимизирует сумму квадратов отклонений  $S = (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{z}})^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{z}})$ . Оценка среднеквадратического отклонения:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S}{n - k}} \quad (2.10)$$

где  $n = 4(N - 2)$  – размерность вектора измерений  $\mathbf{y}$ ,  $k$  – число определяемых параметров.

Доверительные интервалы для определяемых параметров оцениваем по формуле [29]:

$$\hat{z}_j - s_p \hat{\sigma} \sqrt{c_{jj}} \leq z_j \leq \hat{z}_j + s_p \hat{\sigma} \sqrt{c_{jj}}, \quad j = 1 \dots k \quad (2.11)$$

где  $c_{jj}$  – диагональные элементы матрицы  $\mathbf{C} = (\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}})^{-1}$ ,  $s_p$  – квантиль порядка  $p = (1 + P_0)/2$  распределения Стьюдента с  $n - k$  степенями свободы,  $P_0$  – доверительная вероятность. Если число  $n - k$  мало, то  $s_p$  выбирают по таблице распределения Стьюдента, если  $n - k > 30$ , то  $s_p$  можно выбирать из таблицы функций Лапласа.

Получаемые в результате измерений данные поступают последовательно, поэтому целесообразно рассмотреть для данной методики применение рекуррентного метода наименьших квадратов.

Пусть на некотором начальном этапе измерений выбран отрезок времени  $[0, t_m]$ , где  $m$  много меньше  $N$ . Для инициализации рекуррентного метода наименьших квадратов определяем оценку параметров по методу наименьших квадратов (2.10):

$$\hat{\mathbf{z}}_{(m)} = \mathbf{P}_{(m)} \mathbf{D}_{(m)}^T \mathbf{y}$$

где введены  $\mathbf{P}_{(m)} = (\mathbf{D}_{(m)}^T \mathbf{D}_{(m)})^{-1}$  – матрица размера  $k \cdot k$ ,  $\mathbf{D}_{(m)} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_m^T)^T$  – матрица размера  $4m \cdot k$ ,  $\mathbf{y}_{(m)} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_m^T)^T$  – вектор размерности  $4m$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_{(m)}$  – вектор размерности  $k$ . После инициализации первого приближения к решению и ковариационной матрице, определяем последующие приближения итерационным алгоритмом:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i+1} &= \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i)^{-1} \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{z}}_i + \mathbf{S}_{i+1} \cdot (\mathbf{y}_{i+1} - \hat{\mathbf{y}}_{i+1}) \\ \mathbf{P}_{i+1} &= \mathbf{P}_i - \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \\ i &= m, m+1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица размера  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{D}_i^T$  – матрица размера  $k \cdot 4$ ,  $\mathbf{P}_i$  – матрица размера  $k \cdot k$ ,  $\mathbf{S}_{i+1}$  – матрица размера  $k \cdot 4$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_{i+1} = \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{z}}_i$  – вектор размерности 4. Данный алгоритм, в котором на каждой итерации  $\mathbf{r}_i$  является матрицей, а не вектором, обусловлен использованием на каждом шаге измерений четырех медленных переменных.

Поэтому в данном случае результат произведения  $\mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i$  является матрицей, а не скаляром и оценку среднеквадратичного отклонения вычисляем по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_e^2 \cdot \left(1 + \max_{1 \leq j \leq k} \sqrt{\lambda_j(\tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{P}})}\right)$$

где  $\sigma_e$  – среднеквадратическое отклонение случайных погрешностей измерений медленных переменных,  $\lambda_j(\tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{P}})$  – собственные значения произведения матриц  $\tilde{\mathbf{P}}^T$  и  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $j = 1 \dots k$ , обозначаем  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i$ . Для расчета доверительных интервалов параметров могут использоваться формулы (2.11), с матрицей  $\mathbf{C} = \mathbf{P}$ .

**3. Определение параметров ВТГ в режиме вынужденных колебаний.** Значения добротности у кольцевых резонаторов микромеханических ВТГ значительно ниже, чем у рассмотренных ранее полусферических и цилиндрических резонаторов прецизионных ВТГ. Поэтому продолжительность свободного выбега микромеханического ВТГ недостаточна для проведения идентификации параметров, и нужно рассматривать данные, полученные в режиме вынужденных колебаний при разных значениях частотной настройки вблизи резонанса. Волновые твердотельные гироскопы в микромеханическом исполнении обычно имеют кольцевой резонатор с магнитоэлектрическими датчиками управления, реже – с электростатическими датчиками управления [13]. Предлагаемая методика может использоваться для определения параметров ВТГ и с другими типами резонаторов в случае, если есть возможность провести достаточное количество измерений медленных переменных на резонансном пике при изменении частотной настройки.

При использовании в ВТГ электростатических датчиков управления, уравнения вынужденных колебаний имеют вид аналогичный (2.1), запишем их с коэффициентами, учитывающими разные типы нелинейностей:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \omega^2 f &= -\gamma \dot{f} + \nu \dot{g} + \xi(f^2 + g^2)f + \\ &+ \kappa(f^2 + g^2)^2 f + \eta(1 + 3\mu f^2)(-u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t) \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma \dot{g} - \nu \dot{f} + \xi(f^2 + g^2)g + \\ &+ \kappa(f^2 + g^2)^2 g + \eta(1 + 3\mu g^2)(-u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

При использовании магнитоэлектрических датчиков управления введенный параметр  $\mu = 0$ , коэффициенты  $\xi$ ,  $\kappa$ ,  $\eta$  определяются не нелинейностью, вызванной электроста-

тическими датчиками управления, а другими факторами [13]. Поэтому предложим методику идентификации с возможностью учитывать разные типы нелинейностей.

Аналогично (2.3) вводя в (3.1) возмущения, вызванные дефектами резонатора, и усредняя полученные уравнения, выведем уравнения в медленных переменных:

$$\begin{aligned}
2\dot{q}_1 &= -\gamma q_1 - b_c q_1 + \nu q_2 - b_s q_2 + \tilde{c}_m p_1 + \tilde{h}_c p_1 + \tilde{n} p_2 + \tilde{h}_s p_2 - \\
&\quad - 2\lambda p_1 + \xi k_1 + \tilde{\kappa} k_5 + \tilde{u}_1(1 + \mu k_{11}) + \mu \tilde{u}_2 k_9 \\
2\dot{p}_1 &= -\gamma p_1 - b_c p_1 + \nu p_2 - b_s p_2 - \tilde{c}_m q_1 - \tilde{h}_c q_1 - \tilde{n} q_2 - \tilde{h}_s q_2 + \\
&\quad + 2\lambda q_1 + \xi k_2 + \tilde{\kappa} k_6 + \tilde{u}_2(1 + \mu k_{12}) + \mu \tilde{u}_1 k_9 \\
2\dot{q}_2 &= -\gamma q_2 + b_c q_2 - \nu q_1 - b_s q_1 + \tilde{c}_m p_2 - \tilde{h}_c p_2 - \tilde{n} p_1 + \tilde{h}_s p_1 - \\
&\quad - 2\lambda p_2 + \xi k_3 + \tilde{\kappa} k_7 + \tilde{u}_3(1 + \mu k_{13}) + \mu \tilde{u}_4 k_{10} \\
2\dot{p}_2 &= -\gamma p_2 + b_c p_2 - \nu p_1 - b_s p_1 - \tilde{c}_m q_2 + \tilde{h}_c q_2 + \tilde{n} q_1 - \tilde{h}_s q_1 + \\
&\quad + 2\lambda q_2 + \xi k_4 + \tilde{\kappa} k_8 + \tilde{u}_4(1 + \mu k_{14}) + \mu \tilde{u}_3 k_{10}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $\lambda = \omega_0 - \omega$  – частотная настройка,  $\tilde{u}_i = \eta u_i / \omega$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $k_9 = -3q_1 p_1 / 2$ ,  $k_{10} = -3q_2 p_2 / 2$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 3(3p_1^2 + q_1^2)/4, & k_{12} &= 3(p_1^2 + 3q_1^2)/4 \\
k_{13} &= 3(3p_2^2 + q_2^2)/4, & k_{14} &= 3(p_2^2 + 3q_2^2)/4
\end{aligned}$$

Остальные обозначения в (3.2) аналогичны введенным после уравнений (2.5) и (2.6). Запишем (3.2) в векторно-матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y}) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), p_1(t), q_2(t), p_2(t))^T$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_\gamma^T \ \mathbf{z}_u^T \ \xi^T \ \tilde{\kappa}^T)^T, \quad \mathbf{z}_\gamma = (\gamma, \nu, b_c, b_s, \tilde{c}_m, \tilde{n}, \tilde{h}_c, \tilde{h}_s)^T, \quad \mathbf{z}_u = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)^T$$

$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_\gamma \mid \mathbf{D}_u \mid \mathbf{D}_\xi \mid \mathbf{D}_\kappa)$ ,  $\mathbf{D}_u = \mathbf{E} + \alpha \cdot \mathbf{D}_n$ ,  $\mathbf{E} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$  – единичная матрица

$$\mathbf{D}_\gamma = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 \\ -q_2 & -q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 \\ -p_2 & -p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} k_{11} & k_9 & 0 & 0 \\ k_9 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{13} & k_{10} \\ 0 & 0 & k_{10} & k_{14} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\xi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\kappa = \begin{pmatrix} k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = 2\lambda \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ -q_1 \\ p_2 \\ -q_2 \end{pmatrix}$$

Для идентификации параметров рассмотрим стационарные режимы вынужденных колебаний резонатора,  $\dot{q}_1 = \dot{p}_1 = \dot{q}_2 = \dot{p}_2 = 0$ . Стационарные значения медленных переменных  $q_1(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $p_2(t)$  являются измеряемыми и соответствуют разным значениям частотной настройки  $\lambda = \lambda_j$ , где  $j = 1, \dots, N$ ,  $N$  – число стационарных режимов колебаний резонатора. Соответствующие  $\lambda_j$  стационарные системы уравнений (3.3) являются алгебраическими и имеют вид

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, N \tag{3.4}$$

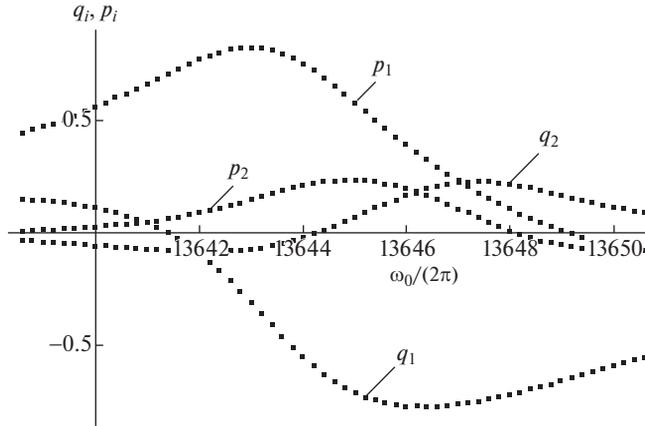


Рис. 1. Зависимости медленных переменных  $p_1, q_1, p_2, q_2$  от частоты колебаний  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  [Гц].

где  $\mathbf{e}_j \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{E})$ .

Далее составим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений из  $N$  блоков (3.4), соответствующих заданным частотным настройкам

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (3.5)$$

$\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_N^T)^T, \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_N^T)^T, \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_N^T)^T$ . Размерность векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{e}$  равняется числу уравнений переопределенной системы  $n = 4N$ , размерность вектора  $\mathbf{z}$  равняется числу идентифицируемых параметров  $k$ . Минимальное число измерений, необходимое для определения возможного числа  $k < 15$  параметров,  $N = 4$  задает 16 уравнений в системе (3.5). Оценка вектора параметров  $\mathbf{z}$  может быть найдена по методу наименьших квадратов (2.9), оценки доверительных интервалов для параметров – по формуле (2.11).

**4. Обработка экспериментальных данных.** Рассматривались вынужденные колебания кольцевого резонатора микромеханического ВТГ с магнитоэлектрическими датчиками управления. Считаем, что динамика резонатора описывается уравнениями, имеющими вид (3.1) при  $\mu = 0$ . В результате экспериментального наблюдения вынужденных колебаний резонатора [18, 30] получены стационарные значения медленных переменных  $q_i = q_i(\omega_{0j}), p_i = p_i(\omega_{0j}), i = 1, 2$ , соответствующие частотам вынужденных колебаний  $\omega_0 = \omega_{0j}, j = 1 \dots N, N = 61$  (рис. 1). Для нормализации величин  $q_i, p_i, i = 1, 2$ , использовалось максимальное значение амплитуды колебаний резонатора. Характерная частота собственных колебаний резонатора  $\omega = 85732 \text{ с}^{-1}$  (13645 Гц).

Определяем оценку вектора параметров по математической модели, содержащей только кубическую нелинейность ( $\xi \neq 0, \kappa = 0, \mu = 0$ ). Получен результат:

$$\hat{\mathbf{z}} = (43.029; 2.029; 1.332; -1.389; 24.358; 1.173; -12.797; 11.588; \\ 32.159; 30.597; 1.415; -0.605; 18.217)^T$$

По полученной оценке вектора запишем параметры ВТГ. Коэффициент демпфирования  $\gamma = 43.029 \text{ с}^{-1}$ , добротность  $Q = \omega/\gamma = 1992$ . Для кольцевого резонатора масштабный коэффициент  $K = 0.4$ , поэтому абсолютное значение нулевого сигнала

$\Omega = 1.268 \text{ с}^{-1}$ . Погрешность характерной частоты собственных колебаний  $\Delta\omega = \tilde{c}_m/2 = 12.179 \text{ с}^{-1}$  (1.94 Гц). Расщепление частот  $\omega_{\max} - \omega_{\min} = \sqrt{(\tilde{h}_c)^2 + (\tilde{h}_s)^2} = 17.264 \text{ с}^{-1}$  (2.748 Гц). Анизотропия демпфирования  $\gamma_{\max} - \gamma_{\min} = 2\sqrt{b_s^2 + b_c^2} = 3.848 \text{ с}^{-1}$ . Углы главных осей жесткости и диссипации равны соответственно  $\alpha = 0.601 \text{ рад}$  (34.4°) и  $\beta = -0.201 \text{ рад}$  (-11.5°). Полученные результаты для невакуумированного несбалансированного кольцевого резонатора соответствуют известным данным [31].

При идентификации параметров по предложенной методике оценка среднеквадратического отклонения составила  $\hat{\sigma} = 0.0926$ . В случае идентификации параметров по линейной математической модели [30] получаем  $\hat{\sigma} = 0.295$ . Таким образом, учет коэффициента нелинейности  $\xi$  позволил уменьшить среднеквадратическое отклонение в 3.2 раза, что указывает на значительное повышение точности определения параметров ВТГ при учете нелинейности колебаний. Учет обоих коэффициентов нелинейности  $\xi$  и  $\kappa$  позволил уменьшить среднеквадратическое отклонение в 1.4 раза по сравнению с результатами, полученными при учете только кубической нелинейности,  $\hat{\sigma} = 0.0656$ .

По найденным параметрам математической модели были рассчитаны невязки между модельными значениями и экспериментальными измерениями. На рисунках 2 и 3 представлено сравнение экспериментальных и расчетных амплитудно-фазочастотных характеристик (АФЧХ). Модули радиус-векторов равны амплитудам  $A = \sqrt{q_1^2 + p_1^2}$  и  $B = \sqrt{q_2^2 + p_2^2}$ , а фазы колебаний  $\varphi$  и  $\psi$  определяются положением этих векторов на плоскости. В первом случае (рис. 2) оценка параметров ВТГ проводилась по линейной математической модели,  $\xi = 0$ ,  $\kappa = 0$ . Во втором случае (рис. 3) оценка параметров ВТГ проводилась по нелинейной математической модели с учетом кубической нелинейности  $\xi \neq 0$ ,  $\kappa = 0$ . Из сравнения (рис. 2) экспериментальных и расчетных данных, полученных по результатам идентификации параметров линейной математической модели ВТГ, следует, что имеется систематическая погрешность. На рис. 3 экспериментальная и расчетная АФЧХ, полученная по результатам идентификации параметров по нелинейной математической модели ВТГ, практически совпадают. Учет нелинейности пятой степени,  $\xi \neq 0$ ,  $\kappa \neq 0$ , на АФЧХ визуально неотличим от рис. 3. Поэтому существенным является учет кубической нелинейности при идентификации параметров ВТГ, учет нелинейности пятой степени дает дополнительное повышение точности.

**5. Зависимость угловой скорости дрейфа ВТГ от параметров резонатора и коэффициентов нелинейности.** Исследование угловой скорости дрейфа ВТГ будем проводить при нулевых управляющих напряжениях  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ , то есть, рассмотрим уравнения (2.3). Перейдем к переменным, называемым элементами орбиты [7]:  $r(t)$  и  $k(t)$  – амплитуды основной и квадратурной волн колебаний,  $\theta(t)$  – угол прецессии,  $\chi(t)$  – временная фаза,

$$\begin{aligned} f &= r \cos(\omega t + \chi) \cos 2\theta - k \sin(\omega t + \chi) \sin 2\theta \\ g &= r \cos(\omega t + \chi) \sin 2\theta + k \sin(\omega t + \chi) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5.1)$$

Чтобы перейти от переменных  $q_1(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $p_2(t)$  в осредненных уравнениях (2.5) к  $r(t)$ ,  $k(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\chi(t)$ , будем использовать замену переменных:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos 2\theta \cos \chi - k \sin 2\theta \sin \chi, & p_1 &= -r \cos 2\theta \sin \chi - k \sin 2\theta \cos \chi \\ q_2 &= r \sin 2\theta \cos \chi + k \cos 2\theta \sin \chi, & p_2 &= -r \sin 2\theta \sin \chi + k \cos 2\theta \cos \chi \end{aligned} \quad (5.2)$$

В результате преобразований получаем систему

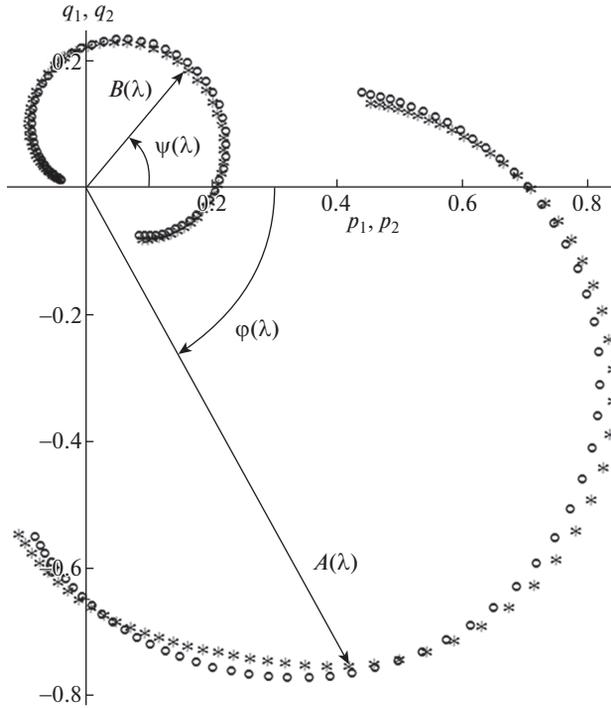


Рис. 2. АФЧХ, о – экспериментальные данные; \* – значения, рассчитанные по линейной модели.

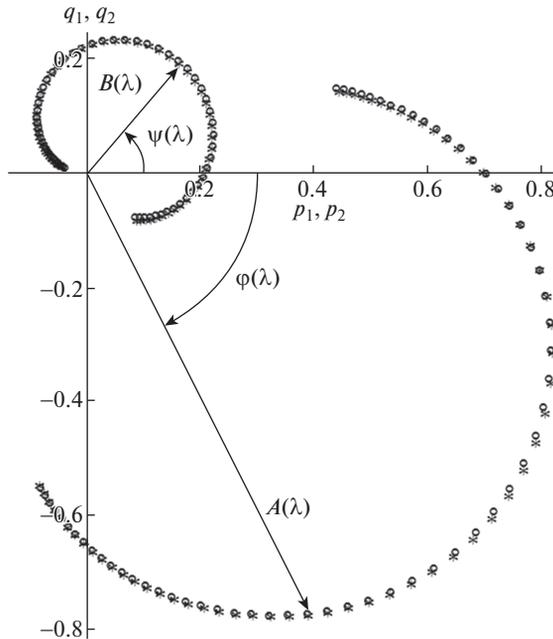


Рис. 3. АФЧХ, о – экспериментальные данные; \* – значения, рассчитанные по нелинейной модели.

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(-\gamma r + \tilde{n}k + (\tilde{h}_s k - b_c r) \cos 4\theta - (\tilde{h}_c k + b_s r) \sin 4\theta) \quad (5.3)$$

$$\dot{k} = \frac{1}{2}(-\gamma k + \tilde{n}r - (\tilde{h}_s r - b_c k) \cos 4\theta + (\tilde{h}_c r + b_s k) \sin 4\theta) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\frac{1}{4}v + \frac{\xi}{8}rk + \frac{\tilde{\kappa}}{8}rk(r^2 + k^2) - \\ & - \frac{rk}{2(r^2 - k^2)}(\tilde{h}_c \cos 4\theta + \tilde{h}_s \sin 4\theta) - \frac{r^2 + k^2}{4(r^2 - k^2)}(b_s \cos 4\theta - b_c \sin 4\theta) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{1}{2}\tilde{c} - \frac{3\xi}{8}(k^2 + r^2) - \frac{\tilde{\kappa}}{16}(5k^4 + 6k^2r^2 + 5r^4) + \\ & + \frac{r^2 + k^2}{2(r^2 - k^2)}(\tilde{h}_c \cos 4\theta + \tilde{h}_s \sin 4\theta) + \frac{rk}{r^2 - k^2}(b_s \cos 4\theta - b_c \sin 4\theta) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя обозначения  $\tilde{h}_s = \tilde{h}_m \sin 4\alpha$ ,  $\tilde{h}_c = \tilde{h}_m \cos 4\alpha$ ,  $b_s = b_m \sin 4\beta$ ,  $b_c = b_m \cos 4\beta$  и используя тригонометрические формулы, преобразуем (5.3)–(5.6) к виду

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(-\gamma r + \tilde{n}k - \tilde{h}_m k \sin 4(\theta - \alpha) - b_m r \cos 4(\theta - \alpha)) \quad (5.7)$$

$$\dot{k} = \frac{1}{2}(-\gamma k + \tilde{n}r + \tilde{h}_m r \sin 4(\theta - \alpha) + b_m k \cos 4(\theta - \alpha)) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\frac{1}{4}v + \frac{\xi}{8}rk + \frac{\tilde{\kappa}}{8}rk(r^2 + k^2) - \\ & - \frac{rk}{2(r^2 - k^2)}\tilde{h}_m \cos 4(\theta - \alpha) + \frac{r^2 + k^2}{4(r^2 - k^2)}b_m \sin 4(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{1}{2}\tilde{c} - \frac{3\xi}{8}(k^2 + r^2) - \frac{\tilde{\kappa}}{16}(5k^4 + 6k^2r^2 + 5r^4) + \\ & + \frac{r^2 + k^2}{2(r^2 - k^2)}\tilde{h}_m \cos 4(\theta - \alpha) - \frac{rk}{r^2 - k^2}b_m \sin 4(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнения (5.7)–(5.10) соответствуют теории эволюций траектории резонатора ВТГ под воздействием возмущений, вызванных дефектами резонатора [7], но при этом учитывают влияние нелинейности колебаний. Из уравнения (5.9) следует, что угловая скорость дрейфа ВТГ зависит от коэффициентов  $\tilde{h}_m$ ,  $b_m$ , характеризующих разностотность и анизотропию демпфирования, а также от параметров  $\xi$  и  $\tilde{\kappa}$ , характеризующих нелинейность колебаний резонатора.

**6. Заключение.** Разработаны методики идентификации параметров ВТГ с учетом разных типов нелинейности колебаний в двух режимах: свободного выбега и вынужденных колебаний. В режиме свободного выбега проводится идентификация параметров прецизионных ВТГ с кварцевыми резонаторами, обладающими высокой добротностью. Так как отключено управление, то для них учитывается только кубическая нелинейность и нелинейность пятой степени. В режиме вынужденных колебаний проводится идентификация параметров ВТГ с меньшей добротностью, позволяющей снимать данные в области резонансного пика при изменении частотной настройки. Проведена обработка экспериментальных данных, полученных для микромеханического ВТГ с кольцевым резонатором и магнитоэлектрическими датчиками управления. Показано, что учет кубической нелинейности существенно повышает точность определения параметров, учет нелинейности пятой степени дополнительно повышает

точность определения параметров. Сделан вывод о необходимости учета кубической нелинейности путем введения коэффициента нелинейности в определяемые параметры ВТГ. Показано влияние определяемых параметров, включая коэффициенты нелинейностей, на угловую скорость дрейфа ВТГ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перельев С.Е.* Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // *Новости навигации.* 2018. № 2. С. 21–27.
2. *Пешехонов В.Г.* Перспективы развития гироскопии // *Гироскопия и навигация.* Т. 28. № 2 (109), 2020. С. 3–10.  
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.0028>
3. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
4. *Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2017. 194 с.
5. *Журавлев В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 3. С. 6–19.
6. *Журавлев В.Ф.* О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 6. С. 5–11.
7. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // *Изв. РАН. МТТ.* 1997. № 6. С. 27–35.
8. *Журавлев В.Ф.* Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 5. С. 5–9.
9. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О балансировке волнового твердотельного гироскопа // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 4. С. 4–16.
10. *Жбанов Ю.К.* Контур управления амплитудой в волновом твердотельном гироскопе с автоматической компенсацией разнодобротности // *Изв. РАН. МТТ.* 2008. № 3. С. 17–22.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654408030035>
11. *Каленова Н.В.* Определение параметров поверхностного дебаланса резонатора волнового твердотельного гироскопа по его реакции на угловую вибрацию основания // *Изв. РАН. МТТ.* 2004. № 2. С. 3–7.
12. *Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.* Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 167 с.
13. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
14. *Астахов С.В.* Нелинейные эффекты в динамике волнового твердотельного и микромеханического гироскопов в условиях медленно меняющихся параметров. Дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 2012. 157 с.
15. *Sudipto K.De., Aluru N.R.* Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures // *J. Microelectromech. Sys.* 2005. V. 15. № 2. P. 355–369.  
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2006.872227>
16. *Rhoads J., Shaw S., Tunner K., Moehlis J., DeMartini B., Zhang W.* Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators // *J. Sound Vibr.* 2006. V. 296. P. 797–829.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.009>
17. *Маслов Д.А.* Влияние нелинейных свойств электростатических и электромагнитных датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа. Дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 2019. 127 с.
18. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика.* 2014. № 5. С. 18–23.
19. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа // *Патент RU 2544308 С9.* 2015. Бюл. № 14.

20. *Маслов Д.А.* Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду вынуждающего воздействия // *Машиностроение и инженерное образование*. 2017. № 1 (50). С. 24–31.
21. *Maslov D.A., Merkurjev I.V.* Increase in the Accuracy of the Parameters Identification for a Vibrating Ring Microgyroscope Operating in the Forced Oscillation Mode with Nonlinearity Taken into Account // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14. № 3. P. 377–386.  
<https://doi.org/10.20537/nd180308>
22. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Разработка методов идентификации параметров нелинейной математической модели волнового твердотельного гироскопа // XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. IEEE, 2020. С. 244–248.  
<https://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133967>
23. *Журавлев В.Ф.* Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // *Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент*. 2011. № 2 (33). Т. 16. С. 118–123.
24. *Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Компенсация погрешностей и учет нелинейности колебаний вибрационного кольцевого микрогироскопа в режиме датчика угловой скорости // *Нелинейная динамика*. 2017. Т. 13. № 2. С. 227–241.  
<https://doi.org/10.20537/nd1702006>
25. *Лунин Б.С., Басараб М.А., Юрин А.В., Чуманкин Е.А.* Цилиндрический резонатор из кварцевого стекла для недорогих вибрационных гироскопов // *Сборник материалов юбилейной XXV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам*. IEEE, 2018. С. 204–207.  
<https://doi.org/10.23919/ICINS.2018.8405896>
26. *Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А.* Балансировка полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов методом химического травления // *Гироскопия и навигация*. 2015. № 1. С. 61–70.  
[doi.org/10.1134/S2075108715030025](https://doi.org/10.1134/S2075108715030025)
27. *Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // *Изв. РАН. МТТ*. 2021. № 6. С. 88–110.  
<https://doi.org/10.3103/S002565442106011X>
28. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
29. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010. 600 с.
30. *Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С.* Динамика микромеханических систем. М.: Издательство МЭИ, 2016. 60 с.
31. *Тимошенков С.П., Симонов Б.М., Бритков О.М., Анчутин С.А., Тимошенков А.С.* Балансировка кремниевых датчиков угловой скорости в процессе изготовления // *Изв. вузов. Электроника*. 2015. Том 20. № 1. С. 58–67.

---

---

УДК 62-185.7

## САМОВОЗБУЖДАЮЩИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА РОТОР С МАЛЫМ ЧИСЛОМ РАДИАЛЬНЫХ ПЕРЕГОРОДОК

© 2022 г. А. Н. Никифоров<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: n.andre@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.

После доработки 19.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Предложена теория (математическая модель) прецессии гибкого ротора с полостью, равномерно радиальными перегородками и частично заполненной маловязкой жидкостью. Самовозбуждающиеся во вращающемся и прецессирующем роторе с малым числом перегородок (от 1 до 3) колебания жидкости приводят к специфическим частотам системы и динамической неустойчивости в диапазоне, не связанном с обычной синхронной критической скоростью.

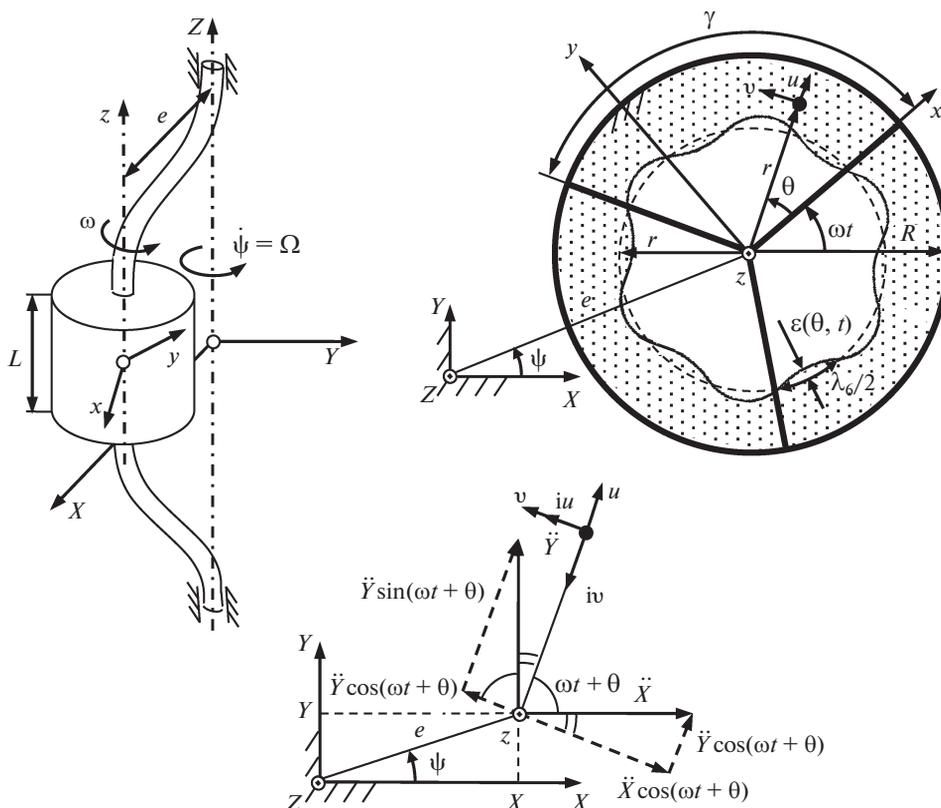
*Ключевые слова:* вал, жидкость, перегородки, динамика, вибрация

**DOI:** 10.31857/S0572329922050105

**1. Введение.** Известно, что вибрации центрифуг, сепараторов, охлаждаемых изнутри газовых турбин, поплавок гидроскопов, вращающихся ракет и автобалансирующих устройств с частичным жидкостным наполнением, а также иных роторов, внутри которых случайно проникла жидкость, могут быть значительными на некоторых скоростях вращения вследствие волнообразования [1–4]. Между тем, говорить о том, что тема построения для самовозбуждающихся колебаний ротора, частично заполненного маловязкой жидкостью, аналитических моделей и решений [5–8] закрыта, преждевременно. Так, для гашения колебаний жидкости применяются радиальные перегородки, и поскольку соответствующие системы описать математически и в общем виде затруднительно, ограничиваются численным (как правило конечно-элементным) модальным анализом. На практике на основе накопленного опыта эксплуатации распространен тривиальный подход к подавлению волн — чем больше радиальных перегородок, тем лучше, т.е. фактически не занимаются поиском/оптимизацией относительно малого и достаточного числа перегородок под конкретную роторную машину.

Пусть простейший симметричный полый ротор в виде двухлопастного гибкого вала с цилиндрической полостью посередине в отличие от предшественников [9–13] имеет внутри несколько радиальных перегородок, причем образованные ими отсеки одинаковы, частично и равно заполнены несжимаемой маловязкой жидкостью, и вся эта роторная система вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

**2. Задача движения ротора с маловязкой жидкостью и радиальными перегородками.** В случае вертикальной ориентировки, уравновешенности и невозмущенного (чистого) вращения такой системы ротор движется вместе с жидкостью как одно твердое тело вне зависимости от вязкости. Пусть относительно этого динамического равновесия колебания ротора и жидкости малы, т.е. возмущенным движением ротора является



**Рис. 1.** Динамическая модель симметричного гибкого ротора с полостью, разделенной сплошными радиальными перегородками, частично и равно заполненной маловязкой жидкостью, а также плоских распространяющихся в окружном направлении волн, например как показано 2-го порядка ( $\kappa = 2$ ,  $n = 3$ ,  $k = n\kappa$ ,  $\lambda_k = 2\pi r/k$ ).

прецессия его геометрического центра с отличной от  $\omega$  угловой скоростью  $\Omega$  и малым радиусом  $e$ , а возмущенным движением жидкости являются малые перемещения ее некоторых частиц с линейными скоростями  $u$ ,  $v$  относительно ротора (рис. 1), в т.ч. с малым отклонением  $\varepsilon$  свободной ее поверхности от внутреннего радиуса  $r$  гипотетической жидкости, затвердевшей при чистом вращении системы (пунктирная окружность на рис. 1).

Здесь и далее приняты допущения, что числа Рейнольдса, Фруда и Бонда достаточно велики, т.е. что эффекты вязкости, поверхностного натяжения и гравитации пренебрежимо слабо отражаются на поведении пограничных слоев жидкости. Таким образом, жидкость рассматривается как идеальная, однослойная и невесомая. Условия, при которых это возможно:  $\omega r^2 \gg \nu$ ,  $\rho r^3 \omega^2 \gg \sigma$  и  $\rho \omega^2 \gg g$  (когда ось роторной системы сориентирована вертикально) или  $r^2 \omega^2 \gg gL$  (когда — горизонтально), где  $\nu$ ,  $\rho$  и  $\sigma$  — кинематическая вязкость, плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $g$  — гравитационное ускорение,  $L$  — размер полости вдоль собственной оси.

Асинхронную прецессию ротора удобно анализировать в неподвижной цилиндрической системе координат  $e\psi Z$  с началом в геометрическом центре полости при неде-

формированном вале ротора, так что ось  $Z$  есть линия центров подшипников. Колебания вращающейся жидкости удобно исследовать в жестко связанной с ротором цилиндрической системе координат  $r\theta z$ , начало которой находится в центре полости деформированного ротора, а также с осью  $z$ , параллельной оси  $Z$ .

Со введением неподвижных декартовой  $XYZ$  и цилиндрической  $e\psi Z$ , а также движущихся вместе с ротором прямоугольной  $xuz$  и цилиндрической  $r\theta z$  систем отсчета динамическая модель полого секторированного ротора с жидкостью принимает вид (рис. 1).

В рассматриваемой системе пустой ротор имеет массу  $m$ . Подшипники являются жесткими по сравнению с валом, обладающим изгибной жесткостью  $k$ . Внутреннее и внешнее демпфирование ротора, включая трение в подшипниках, характеризуются коэффициентами  $b$  и  $d$  соответственно. В такой формулировке как известно [14], уравнения движения гибкого симметричного ротора имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} + (b + d)\dot{X} + kX + b\omega Y &= F_X \\ m\ddot{Y} + (b + d)\dot{Y} + kY - b\omega X &= F_Y \end{aligned}$$

где  $X, Y$  — отклонения геометрического центра ротора (полости) от положения равновесия вдоль осей неподвижной прямоугольной системы координат,  $F_X$  и  $F_Y$  — составляющие некоторой силы  $F$ , действующей со стороны жидкости на ротор, вследствие его отклонений  $X$  и  $Y$ .

То же самое, вводя удобное комплексное представление отклонений  $Z = X + iY$ :

$$m\ddot{Z} + (b + d)\dot{Z} + kZ - ib\omega Z = F, \text{ где } F = F_X + iF_Y$$

Путем подстановки  $Z = e e^{i\psi}$  можно выразить уравнение прецессии заданного ротора в полярных координатах  $e, \psi$ :

$$m(\ddot{e} + ie\ddot{\psi} + i2\dot{e}\dot{\psi} - e\dot{\psi}^2) + (b + d)\dot{e} + ke + ide\dot{\psi} + ibe(\dot{\psi} - \omega) = Fe^{-i\psi} \quad (2.1)$$

Составляющие гидродинамической силы  $F$  есть интегральные величины (суммы) проекций на неподвижные оси  $X$  и  $Y$  давлений жидкости на всей поверхности  $S$  боковой стенки полости:

$$F_X = \int_S p_{r=R} \cos(\omega t + \theta) dS, \quad F_Y = \int_S p_{r=R} \sin(\omega t + \theta) dS, \quad \text{где } dS = RLd\theta \quad (2.2)$$

Соответственно, гидродинамические составляющие в направлениях подвижных осей  $x$  и  $y$ :

$$F_x = RL \int_0^{2\pi} p_{r=R} \cos \theta d\theta, \quad F_y = RL \int_0^{2\pi} p_{r=R} \sin \theta d\theta$$

Очевидно, анализ движения ротора, содержащего жидкость, требует решения совместной задачи теории колебаний и гидродинамики. Гидродинамическая сторона задачи сводится к отысканию поля давлений в наиболее общем случае с помощью уравнений Навье—Стокса и неразрывности. Согласно им, течение вязкой жидкости, свободной от массовых и поверхностных сил, вращающейся со скоростью ротора  $\omega$  и в то же время прецессирующей вместе с ним со скоростью  $\psi$  (рис. 1) будут определять уравнения [15, 16]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - 2 \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right) + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \\
& - \frac{v^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega v = - \frac{\partial p}{\rho \partial r} - \ddot{X} \cos(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \sin(\omega t + \theta) \\
& \frac{\partial v}{\partial t} - v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + 2 \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \right) + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \\
& + \frac{uv}{r} + 2\omega u = - \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} + \ddot{X} \sin(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \cos(\omega t + \theta) \\
& r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $u$  и  $v$  – радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы жидкости в связанной с ротором (подвижной) цилиндрической системе отсчета,  $r$  и  $\theta$  – координаты жидкостной частицы в этой полярной системе,  $p$  – давление в любой точке жидкости,  $\rho$  и  $\nu$  – ее плотность и кинематическая вязкость.

Члены с множителем  $\omega^2$  и  $2\omega$  учитывают влияние нормального ускорения и ускорения Кориолиса от вращения ротора, а члены с множителем  $\ddot{X}$  и  $\ddot{Y}$  характеризуют эффект переносного ускорения начала отсчета жестко связанной с ротором системы координат за счет его прецессии.

Заданная система уравнений (2.3) не включает компоненты и отдельное уравнение по  $z$ -координате жидкостной частицы. Обоснование для их отсутствия видится в конфигурации жидкости при синхронной прецессии полости ( $\dot{\psi} = \Omega = \omega$ ), и наиболее четко на примере с двумя герметичными перегородками, коллинеарными и перпендикулярными направлению роторного смещения  $e$ . На рис. 2, а кружение перегородок вокруг оси  $Z$  не препятствует образованию общей округлой свободной поверхности жидкости, как при отсутствии перегородок. На рис. 2, б “лунное” движение перегородок максимально препятствует этому, порождая две различные примерно полуэллиптические жидкостные поверхности. Здесь также малое роторное отклонение  $e$  вызывает малое отклонение  $\varepsilon$  свободной поверхности жидкости от внутреннего радиуса  $r$  гипотетической, затвердевшей при чистом вращении системы. В случае несинхронного (с вращением) прецессионного движения инициируется непрерывное переливание и видоизменение между первой и второй отмеченными плоскими конфигурациями. Как следствие, возмущение асинхронной прецессией не сопровождается появлением относительных скоростей частиц жидкости (относительно стенок полости) в  $z$ -направлении.

Возмущенные скорости  $u$ ,  $v$  сопряжены с возмущенным давлением  $p$ , увеличивающим стационарное  $p_0$ , которое пропорционально квадрату скорости вращения  $\omega^2$ . По аналогии с гидростатическим давлением столба жидкости, в заданной системе ускорение  $= \omega^2(r + r)/2$ , а высота  $= r - r$ . Таким образом, без потери общности, давление в жидкости:

$$p = p_0 + p(r, \theta, t), \quad \text{где} \quad p_0 = \rho \omega^2 (r^2 - r^2) / 2 \tag{2.4}$$

Похожим образом определяется свободная поверхность жидкости:

$$r + \varepsilon(\theta, t) \tag{2.5}$$

где  $\varepsilon$  – ее возмущенное смещение.

Граничные условия, дополняющие (2.3), т.е. задающие поведение уравнений (2.3) на поверхностях жидкости:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на боковой стенке полости}),$$

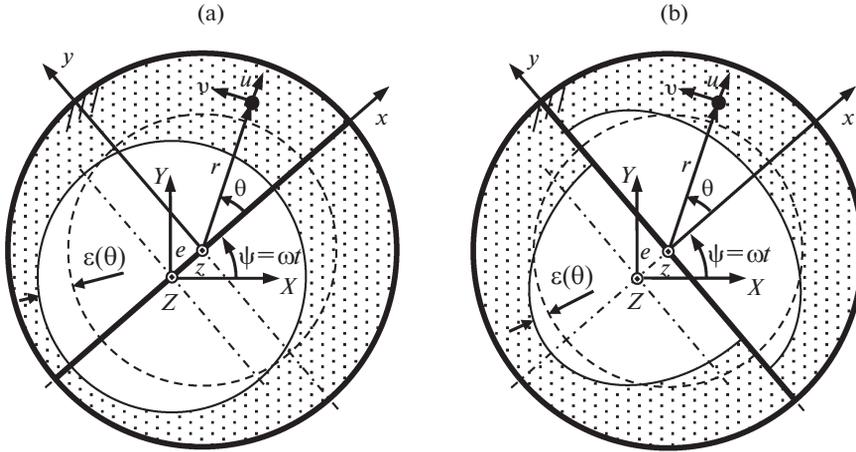


Рис. 2. Возможные фиксированные конфигурации вращающейся жидкости в синхронно прецессирующем роторе.

$$v = 0 \quad \text{при} \quad \theta = M\gamma,$$

где  $M$  – целое число от 0 до  $n$ ,  $\gamma = 2\pi/n$  – (на  $n$  перегородках),

$$u = \partial\varepsilon/\partial t, \quad p = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на свободной поверхности жидкости}).$$

При этом, если подставить (2.5) в (2.4), а именно в  $p_0$  вместо  $r$ , и отбросить квадрат малого, т.е. величину  $\varepsilon^2$ , то  $p = \rho\omega^2 r\varepsilon + p(r, \theta, t)$  и  $p_{r=R} = -\rho\omega^2 r\varepsilon$ , а ключевые кинематические и динамические граничные условия могут быть преобразованы к виду:

$$u_{r=R} = 0, \quad \partial p_{r=R}/\partial t = -\rho\omega^2 r u_{r=R} \quad (2.6)$$

Задача состоит в отыскании решений (законов) таких движений, которые представляют собой малое незатухающее периодическое+переносное отклонение жидкости в окружном направлении от ее установившегося состояния вращения как твердого тела. В этом случае можно пренебречь в уравнениях (2.3) вязкими компонентами и скоростными членами второго порядка малости, а также с учетом (2.4) в первом приближении получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} - \ddot{X} \cos(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \sin(\omega t + \theta) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} + \ddot{X} \sin(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \cos(\omega t + \theta) \\ r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

где  $p$  – переменная часть давления в любой точке жидкости.

При умножении второго уравнения на мнимую единицу и сложении первых двух уравнений, а затем при умножении первого уравнения на мнимую единицу и вычитании из него второго уравнения, они преобразуются в:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v + i \frac{\partial v}{v t} + i 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} - i \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} - \ddot{Z} e^{-i(\omega t + \theta)} \\ i \frac{\partial u}{\partial t} - i 2\omega v - \frac{\partial v}{\partial t} - 2\omega u &= -i \frac{\partial p}{\rho \partial r} + \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} - i \ddot{Z} e^{-i(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

**3. Решение уравнений стационарного движения системы “ротатор–жидкость”.** В случае установившейся прецессии  $\psi = \Omega t$ ,  $e = \text{const}$ ,  $\ddot{Z} = -e\Omega^2 e^{i\Omega t}$ , т.е. системные уравнения (2.1) и (2.7) принимают вид:

$$ke - me\Omega^2 + ibe(\Omega - \omega) + ide\Omega = Fe^{-i\Omega t} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} + e\Omega^2 e^{i(\Omega_0 t - \theta)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} - ie\Omega^2 e^{i(\Omega_0 t - \theta)} \\ r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0, \quad \text{где } \Omega_0 = \Omega - \omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если предположить, что:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, t) &= \varepsilon(\theta) e^{i\Omega_0 t} \\ p(r, \theta, t) &= P(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} \\ u(r, \theta, t) &= U(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} \\ v(r, \theta, t) &= V(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

то подстановка функций (3.3) в уравнения вынужденного движения жидкости (3.2) приводит к:

$$\begin{aligned} i\Omega_0 U - 2\omega V &= -\frac{\partial P}{\rho \partial r} + e\Omega^2 e^{-i\theta} \\ i\Omega_0 V + 2\omega U &= -\frac{\partial P}{\rho r \partial \theta} - ie\Omega^2 e^{-i\theta} \\ r \frac{\partial U}{\partial r} + U + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Решения первых двух из этих уравнений следующие:

$$\begin{aligned} U &= i \frac{\Omega_0}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2\omega}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial \theta} - ie\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{-i\theta} \\ V &= -\frac{2\omega}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial r} + i \frac{\Omega_0}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial \theta} - e\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

С этими выражениями третье уравнение (неразрывности) дает:

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0$$

Если предположить, что решением этого уравнения является

$$P(r, \theta) = P(r) e^{-in\theta}$$

где  $n$  – число радиальных перегородок, то получится простейшая форма уравнения Бесселя:

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r \frac{\partial P}{\partial r} - n^2 P(r) = 0$$

общее решение которого:

$$P(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \quad (3.5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы, определяющиеся исходными (2.6) или в силу равенств:

$$\begin{aligned} p_{r=r} &= P(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} = P(r) e^{-in\theta} e^{i\Omega_0 t} \\ u_{r=r} &= U(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} = U(r) e^{-in\theta} e^{i\Omega_0 t} \\ u_{r=R} &= U(R, \theta) e^{i\Omega_0 t} = U(R) e^{-in\theta} e^{i\Omega_0 t} \end{aligned}$$

граничными условиями вида:

$$U(R) = 0, \quad i\Omega_0 P(r) = -\rho\omega^2 r U(r)$$

Чтобы найти  $C_1$  и  $C_2$ , следует перейти от  $U$  к  $U(r)$ , производя в (3.4) замены  $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P(r)}{\partial r} e^{-in\theta}$  и  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = -inP(r) e^{-in\theta}$ , т.е.:

$$\begin{aligned} U(r) &= i \frac{\Omega_0}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} - i \frac{2\omega n}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} P(r) - ie\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{i(n-1)\theta} \\ V(r) &= -\frac{2\omega}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} + \frac{n\Omega_0}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} P(r) - e\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{i(n-1)\theta} \end{aligned}$$

Раскрытие здесь  $P(r)$  и  $\partial P(r)/\partial r$  через равенство (3.5) приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} U(r) &= i \frac{n}{\rho} \left( \frac{C_1 r^{n-1}}{\Omega_0 + 2\omega} - \frac{C_2 r^{-n-1}}{\Omega_0 - 2\omega} \right) - i \frac{e\Omega^2}{\Omega_0 + 2\omega} e^{i(n-1)\theta} \\ V(r) &= \frac{n}{\rho} \left( \frac{C_1 r^{n-1}}{\Omega_0 + 2\omega} + \frac{C_2 r^{-n-1}}{\Omega_0 - 2\omega} \right) - \frac{e\Omega^2}{\Omega_0 + 2\omega} e^{i(n-1)\theta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условие  $U(R) = 0$  и (3.6) определяют, что

$$C_2 = C_1 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} R^{2n} - \frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} R^{n+1} e^{i(n-1)\theta} \quad (3.7)$$

На основании соотношений  $i\Omega_0(C_1 r^n + C_2 r^{-n}) = -\rho\omega^2 r U(r)$ , (3.6) и (3.7) получается, что

$$C_1 = \frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2}{\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2} \frac{R^{n+1}}{R^{2n} + r^{2n}} e^{i(n-1)\theta} \quad (3.8)$$

где  $\bar{\sigma} = \frac{R^{2n} - r^{2n}}{R^{2n} + r^{2n}}$ ,  $\bar{\bar{\sigma}} = 1 - \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}$ .

Константа (3.7) при подстановке (3.8) преобразуется в:

$$C_2 = -\frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} \frac{\Omega_0 (\Omega_0 + 2\omega) r^{2n} + \bar{\sigma}n\omega^2}{\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2} \frac{R^{n+1}}{R^{2n} + r^{2n}} e^{i(n-1)\theta} \quad (3.9)$$

где  $\bar{\bar{\sigma}} = r^{2n} - R^{2n} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}$

Выражение (3.5) с заменами (3.8) и (3.9) принимает вид:

$$P(r) = \frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{R^{n+1}}{R^{2n} + r^{2n}} \frac{(\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2)r^n - (\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0)r^{2n}r^{-n} - \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} \bar{\sigma}n\omega^2 r^{-n}}{\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2} e^{i(n-1)\theta}$$

Соответственно

$$p(R, \theta, t) = \frac{\rho e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) R e^{i(\Omega_0 t - \theta)}$$

$$f(R, r, n, \Omega_0, \omega) = \frac{(\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2)R^{2n} - (\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0)r^{2n} - \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} \bar{\sigma}n\omega^2}{(\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2)(R^{2n} + r^{2n})}$$

и при отбрасывании мнимой части  $e^{i(\Omega_0 t - \theta)}$  выражение суммарной реакции жидкости на боковую стенку ротора:

$$P_{r=R} = \frac{\rho\omega^2}{2} (R^2 - r^2) + \frac{\rho e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) R \cos(\Omega_0 t - \theta)$$

Таким образом, составляющие искомой гидродинамической силы согласно (2.2):

$$F_X = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) \cos(\Omega_0 + \omega)t,$$

$$F_Y = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) \sin(\Omega_0 + \omega)t$$

где  $m_F = \rho\pi R^2 L$  – масса жидкости, необходимая для полного заполнения полости ротора.

Для завершения формулировки, учитывая равенство  $\Omega_0 = \Omega - \omega$ , остается лишь подставить выражение  $F = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega, \omega) e^{i\Omega t}$  в (3.1):

$$ke - me\Omega^2 + ibe(\Omega - \omega) + ide\Omega = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega, \omega)$$

$$f(R, r, n, \Omega, \omega) = \frac{\bar{\sigma}(\Omega^2 - 4\omega\Omega + 3\omega^2) - \left( \frac{1 - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} + \frac{\chi^{2n} - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} \frac{\Omega - 3\omega}{\Omega + \omega} \right) n\omega^2}{\Omega^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n)\omega^2} \quad (3.10)$$

где  $\chi = \frac{r}{R}$ ,  $\bar{\sigma} = \frac{1 - \chi^{2n}}{1 + \chi^{2n}}$ , а также развернуты члены, содержащие  $\bar{\sigma} = 1 - \chi^{n+1}$  и  $\underline{\sigma} = R^{2n}(\chi^{2n} - \chi^{n+1})$ .

**4. Анализ движения и устойчивости системы “ротор–жидкость”.** Любая роторная система динамически устойчива, если  $\text{Re}\Omega > 0$  и  $\text{Im}\Omega > 0$  или  $\text{Re}\Omega < 0$  и  $\text{Im}\Omega < 0$ . Принимая во внимание, что на границе динамической устойчивости, а также без учета диссипативных и неконсервативных сил  $\text{Re}\Omega = \Omega$  и  $\text{Im}\Omega = 0$ , т.е. записывая порознь мнимую и вещественную части уравнения (3.10), можно получить два уравнения:

$$b(\Omega - \omega) + d\Omega = 0$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \frac{\mu \Omega^2}{n} \frac{\bar{\sigma}(\Omega^2 - 4\omega\Omega + 3\omega^2) - \left( \frac{1 - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} + \frac{\chi^{2n} - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} \frac{\Omega - 3\omega}{\Omega + \omega} \right) n\omega^2}{\Omega^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n)\omega^2} \quad (4.1)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\mu = m_F/m$ .

Первое уравнение определяет границу динамической устойчивости, т.е. критическое соотношение между скоростями  $\omega$  и  $\Omega$ , под действием учитываемых сил вязкого внутреннего и внешнего трения:

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 + \frac{d}{b}$$

В более типичном для практики невязком случае гистерезисного внутреннего и внешнего трения [17]:

$$b = \frac{\eta k}{|\Omega - \omega|}, \quad d = \frac{\eta_e k}{|\Omega|}, \quad \eta \frac{\Omega - \omega}{|\Omega - \omega|} + \eta_e \frac{\Omega}{|\Omega|} = 0$$

где  $\eta$  и  $\eta_e$  – коэффициенты потерь в материалах ротора и подшипников.

Отсюда в зависимости от скоростей прецессии и вращения могут быть три ситуации. В двух из них: при прямой прецессии  $\Omega/|\Omega| = 1$  и скорости вращения меньше скорости прецессии  $(\Omega - \omega)/|\Omega - \omega| = 1$ , а также при обратной прецессии  $\Omega/|\Omega| = -1$  и любой скорости вращения  $(\Omega - \omega)/|\Omega - \omega| = -1$ , система устойчива, так как  $\eta + \eta_e \neq 0$ . Однако в третьей: при прямой прецессии  $\Omega/|\Omega| = 1$  и скорости вращения больше скорости прецессии  $(\Omega - \omega)/|\Omega - \omega| = -1$ , система не всегда устойчива, а именно при  $\eta_e \leq \eta$ .

Второе уравнение определяет частоты самовозбуждающихся колебаний неконсервативной роторной системы вблизи границы динамической устойчивости или собственные частоты консервативной роторной системы в зависимости от скорости вращения.

В частности, при синхронном движении из (4.1):

$$\omega = \Omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu/n}} \omega_0 \quad (4.2)$$

В общем асинхронном случае уравнение (4.1) сводится к многочлену вида:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \mu \frac{\bar{\sigma}}{n}\right) \bar{\Omega}^5 - \left(1 + 2\bar{\sigma} + 3\mu \frac{\bar{\sigma}}{n}\right) \bar{\omega} \bar{\Omega}^4 - \\ & - \left[1 + \left(1 + \bar{\sigma}n + \mu \frac{\bar{\sigma}}{n} + \mu \frac{1 + \chi^{2n} - 2\chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}}\right) \bar{\omega}^2\right] \bar{\Omega}^3 + \\ & + \left[1 + 2\bar{\sigma} + \left(1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n + 3\mu \frac{\bar{\sigma}}{n} - \mu \frac{1 - 3\chi^{2n} + 2\chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}}\right) \bar{\omega}^2\right] \bar{\omega} \bar{\Omega}^2 + \\ & + (1 + \bar{\sigma}n) \bar{\omega}^2 \bar{\Omega} - (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n) \bar{\omega}^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$ ,  $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ .

В еще одном частном случае, либо при наличии в полости одной радиальной перегородки, либо при отсутствии перегородок, т.е. при  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} & (1 + \mu \bar{\sigma}) \bar{\Omega}^5 - (1 + 2\bar{\sigma} + 3\mu \bar{\sigma}) \bar{\omega} \bar{\Omega}^4 - [1 + (1 + \bar{\sigma} + 2\mu \bar{\sigma}) \bar{\omega}^2] \bar{\Omega}^3 + \\ & + [1 + 2\bar{\sigma} + (1 + \bar{\sigma} + 2\mu \bar{\sigma}) \bar{\omega}^2] \bar{\omega} \bar{\Omega}^2 + (1 + \bar{\sigma}) \bar{\omega}^2 \bar{\Omega} - (1 + \bar{\sigma}) \bar{\omega}^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

В действительности, без перегородок уравнение (4.1) принимает особую форму:

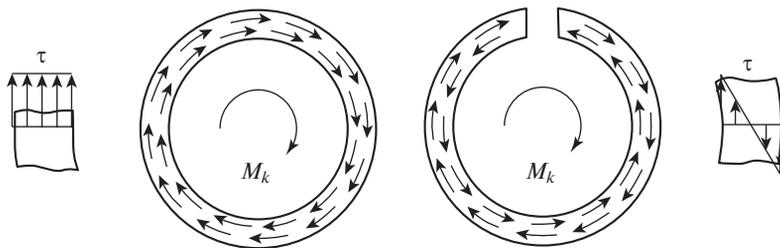


Рис. 3. Схема потоков касательных напряжений в замкнутом и открытом профиле трубы или жидкости в неравномерно вращающейся неразделенной и один раз перегородженной полости.

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \mu \bar{\sigma} \bar{\Omega}^2 \frac{\Omega^2 - 4\omega\Omega + 2\omega^2}{\Omega^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma})\omega^2}$$

и получается полином меньшего порядка:

$$(1 + \mu\bar{\sigma})\bar{\Omega}^4 - 2(1 + 2\mu\bar{\sigma} + \bar{\sigma})\bar{\omega}\bar{\Omega}^3 - [1 - (1 + 2\mu\bar{\sigma} + \bar{\sigma})\bar{\omega}^2]\bar{\Omega}^2 + 2(1 + \bar{\sigma})\bar{\omega}\bar{\Omega} - (1 + \bar{\sigma})\bar{\omega}^2 = 0 \quad (4.5)$$

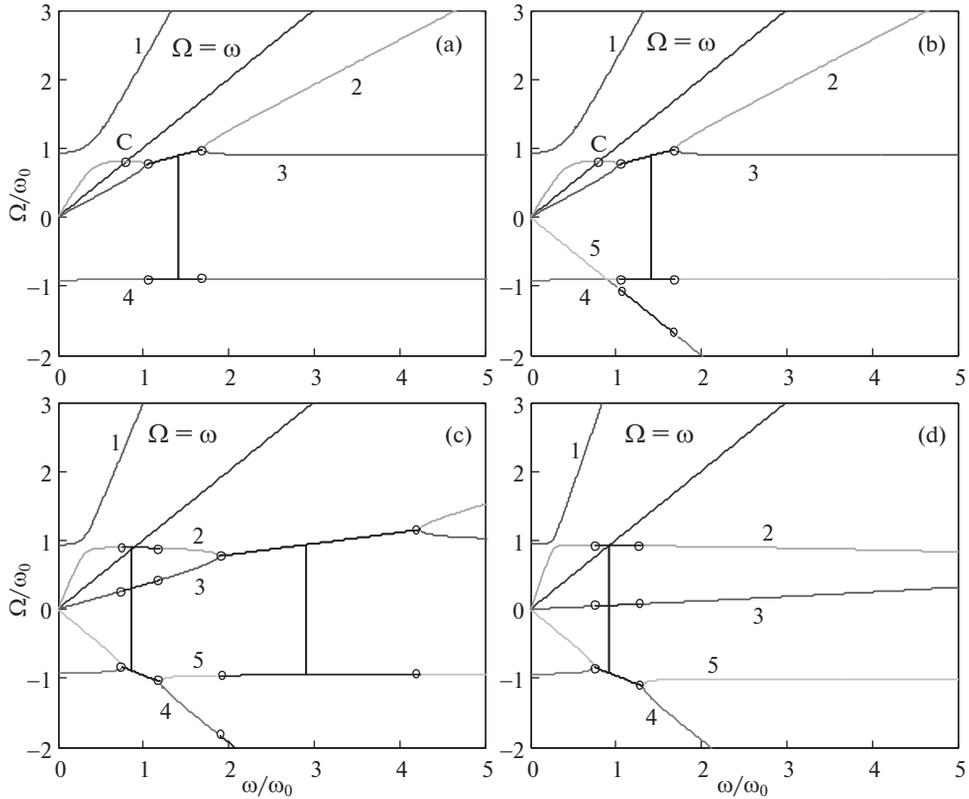
Математическое снижение размерности на единицу физически означает удаление из системы одной частоты собственных колебаний, а именно связанной с жидкостью. Ее возмущенное окружное течение при пульсирующе неравномерном вращении в неразделенной и даже однажды перегородженной полости принципиально различно. Это понятно из механической аналогии, если представить скорости циркулирующей внутри полости жидкости как касательные напряжения, распределяющиеся при кручении в трубе замкнутого и незамкнутого сечения (рис. 3). В замкнутом тонкостенном профиле касательные напряжения распределяются по толщине почти равномерно; в открытом (незамкнутом) профиле распределение происходит по линейному закону, причем на средней линии сечения касательные напряжения обращаются в нуль.

Полином 4-й степени имеет необозримо громоздкое общее решение, а полином 5-й степени уже даже не поддается аналитическому решению. Численно рассчитанные результаты удобнее всего представить в виде графика зависимости возможных скоростей прецессии от скорости вращения ротора.

На рис. 4 приведены результаты по (4.5) и (4.4) для реальной системы “ротор–жидкость” (табл. 1) без перегородок (рис. 4, а) и с одной радиальной перегородкой (рис. 4, б) в роторной полости ( $n = 1$ ,  $\bar{\sigma} = 0.34$ ). Для этой же системы также показаны результаты по (4.3) в случаях с двумя ( $n = 2$ ,  $\bar{\sigma} = 0.61$ , рис. 4, с) и тремя ( $n = 3$ ,  $\bar{\sigma} = 0.79$ , рис. 4, д) радиальными перегородками в роторе.

Как видно, все диаграммы частот значительно отличаются друг от друга. На первой из представленных диаграмм для каждого значения скорости вращения  $\bar{\omega}$  существуют четыре значения  $\bar{\Omega}$ , на остальных – для каждой  $\bar{\omega}$  – пять прецессионных скоростей  $\bar{\Omega}$ . На рис. 4 присутствует известное пересечение линии  $\Omega = \omega$  с графиком одной из частот (т. С), которая определяет критическую скорость роторной системы. Легко может быть проверено, что точка С равна значению, следующему из формулы (4.2), т.е. совпадает с критической скоростью полного (жидкостью) ротора.

Число значений  $\bar{\Omega}$  сохраняется и в интервалах скоростей ротора, отмеченных пунктиром. Вне таких интервалов решения (полиномов) содержат только положительные и отрицательные вещественные корни, однако внутри них решения дают также комплексно-сопряженные корни, и, конечно, некоторые из них имеют мнимую часть с противоположным знаком к действительной. Если такие корни подставить в экспо-



**Рис. 4.** Диаграмма частот системы “ротор-жидкость” без перегородок (а), с одной (б), двумя (с) и тремя (д) радиальными перегородками.

ненциальную функцию  $e^{i\Omega t}$ , то получится нарастание амплитуды или неустойчивое прецессионное движение. Другими словами, определены диапазоны самовозбуждаю-

**Таблица 1.** Исходные характеристики реальной роторной системы

Параметр	Обозначение	Значение	Размерность
Масса пустого ротора	$m$	0.24	кг
Критическая частота пустого ротора	$\omega_0/(2\pi)$	50	Гц
Критическая частота полного (жидкостью) ротора	$1/(2\pi)\omega_0/\sqrt{1+\mu}$	41	Гц
Радиус роторной полости	$R$	31.5	мм
Длина роторной полости	$L$	34	мм
Отношение массы жидкости (заполняющей всю роторную полость) к массе пустого ротора	$\mu = m_F/m$	$\approx 0.5$	—
Отношение радиуса свободной поверхности вращающейся жидкости к радиусу роторной полости	$\chi = \frac{r}{R}$	$\approx 0.7^*$	—

\* Значение соответствует половинному заполнению.

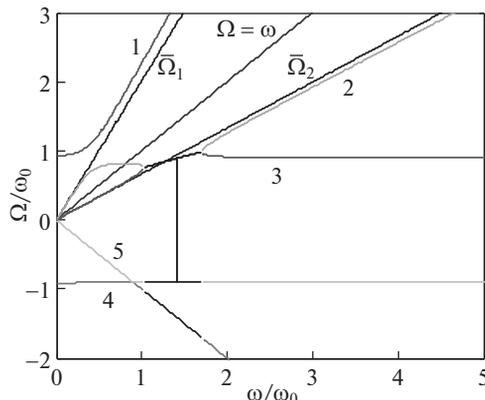


Рис. 5. Диаграмма волновых частот  $\Omega_{1,2}$  вращающейся жидкости и собственных частот системы “ротор–жидкость” при  $n = 1$ .

щихся неустойчивых прецессий, совершающихся с той или иной собственной частотой системы. Здесь следует подчеркнуть, что вычисленные  $\bar{\Omega}$  – это круговые собственные частоты системы “колеблющийся ротор–колеблющаяся в нем жидкость”.

Частоты собственных колебаний жидкости, вращающейся в жестком роторе на жестких подшипниках, определяются уравнением, также содержащимся в (4.1); а именно в знаменателе (4.1). В безразмерном случае оно имеет следующие вид и корни:

$$\bar{\Omega}^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\bar{\omega}\bar{\Omega} + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n)\bar{\omega}^2 = 0 \quad (4.6)$$

$$\bar{\Omega}_{1,2} = (1 + \bar{\sigma} \pm \sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}n})\bar{\omega}$$

Здесь нижним знаком характеризуется волна, распространяющаяся против вращения, а верхним – прямая волна, поскольку уравнение (4.6) не что иное как частный случай известного уравнения физических частот  $\Omega_k$  свободных плоских волн на поверхности вращающейся жидкости [18]:

$$\Omega_k^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega_k + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}k)\omega^2 = 0$$

где  $k = nk$  – волновое число,  $k$  – число гребней/подов в волне в окружном направлении в каждом из  $n$  отсеков (рис. 1), образованных  $n$  радиальными перегородками (в случае отсутствия перегородок  $k = \kappa$ ).

Для сравнения графики зависимости соответствующих частот  $\bar{\Omega}_{1,2}$  от  $\bar{\omega}$  при  $n = 1$  наложены на частотную диаграмму системы “колеблющийся ротор – колеблющаяся в его полости с одной перегородкой жидкость” (рис. 5).

Очевидно, в системе две собственные частоты из пяти вызваны прямым и обратным волновым движением жидкости  $\Omega_{1,2} \approx \pm\Omega_k$ , еще две другие обусловлены прямым и обратным прецессионным движением ротора  $\Omega_{3,4} \approx \pm E\omega_0$ , где  $E \in [1/\sqrt{1 + \mu/n} \dots 1]$ . Что касается пятой собственной частоты, по-видимому,  $\Omega_5$  связана с  $-\omega$  или с обратным и в то же время синхронизированным с вращением течением жидкости в перегороденной полости по типу отмеченной выше механической аналогии (рис. 3).

**5. Заключение.** Таким образом, определены диапазоны динамической неустойчивости ротора при неполном налив жидкости и равномерной постановке малого количества радиальных перегородок внутрь него. Дестабилизирующее влияние жидкости проявляется на закритических оборотах и оказывается неожиданно большим в случае

двух радиальных перегородок, несмотря на то, что делят роторную полость пополам и образуют геометрически уравновешенную конфигурацию системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Selmi M., Herbert T.* Resonance phenomena in viscous fluids inside partially filled spinning and nutating cylinders // *Phys. Fluids*. 1995. V. 7. № 108. P. 108–120.  
<https://doi.org/10.1063/1.868731>
2. *Ulbrich H., Cyllik A., Ahaus G.* Stabilization of centrifuges with instabilities due to fluid – structure interactions: Various control approaches // *Int. J. Rotat. Mach.* 2001. V. 7. № 5. P. 323–333,  
<https://doi.org/10.1155/S1023621X01000276>
3. *Soto-Urbiola L., Lopez-Parra M.* Liquid self-balancing device effects on flexible rotor stability // *Shock Vibr.* 2013. V. 20. P. 109–121,  
<https://doi.org/10.3233/SAV-2012-0731>
4. *Marques F., Lopez J.M.* Precession of a rapidly rotating cylinder flow: traverse through resonance // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 782. P. 63–98,  
<https://doi.org/10.1017/jfm.2015.524>
5. *Preussner C., Kollmann F.G.* On the stability of a spinning, fluid filled and sectored rotor // *Comp. Struct.* 1988. V. 30. № 1–2. P. 131–141,  
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90221-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90221-0)
6. *Tao M., Zhang W.* Dynamic stability of a rotor partially filled with a viscous liquid // *J. Appl. Mech., Trans. ASME*. 2002. V. 69. № 5. P. 705–707,  
<https://doi.org/10.1115/1.1458553>
7. *Дерендяев Н.В.* Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 154 с.
8. *Ishida Y., Liu J.* Elimination of unstable ranges of rotors utilizing discontinuous spring characteristics: an asymmetrical shaft system, an asymmetrical rotor system, and a rotor system with liquid // *ASME J. Vib. Acoust.* 2010. V. 132. № 1. P. 011011,  
<https://doi.org/10.1115/1.4000842>
9. *Firouz-Abadi R.D., Permoon M.R., Haddadpour H.* On the instability of spinning cylindrical shells partially filled with liquid // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2012. V. 12. № 3. P. 1250018,  
<https://doi.org/10.1142/S0219455412500186>
10. *Kern D., Jehle G.* Dynamics of a rotor partially filled with viscous incompressible fluid // *Proc. Appl. Math. Mech.* 2016. V. 16. P. 279–280,  
<https://doi.org/10.1002/pamm.201610128>
11. *Dyakova V., Kozlov V., Polezhaev D.* Oscillation-induced sand dunes in a liquid-filled rotating cylinder // *Phys. Rev. E*. 2016. V. 94. P. 063109,  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.063109>
12. *Wang G., Yuan H.* An analysis of dynamic stability for a flexible rotor filled with liquid // *Phys. Fluids*. 2018. V. 30. P. 037101,  
<https://doi.org/10.1063/1.5017582>
13. *Wang H., Chen G., Jiang G.* Stability analysis of an anisotropic rotor partially filled with viscous incompressible fluid based on Andronov-Hopf bifurcation // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33. P. 064111,  
<https://doi.org/10.1063/5.0055675>
14. *Хронин Д.В.* Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 412 с.
15. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука (сибирское отделение), 1989. 336 с.
16. *Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H.* The flexural instability of spinning flexible cylinder partially filled with viscous liquid // *J. Appl. Mech.* 2010. V. 77. № 1. P. 011001,  
<https://doi.org/10.1115/1.3172143>
17. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания механических систем. Киев: Наукова думка, 1966. 336 с.
18. *Nikiforov A.* Natural surface oscillations of rotating fluid along radial baffles of rotor // *ASME J. Fluids Eng.* 2016. V. 138. № 6. P. 061202,  
<https://doi.org/10.1115/1.4032300>

УДК 62-503

## ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ОРИЕНТАЦИИ ОКОЛОЗЕМНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО МАГНИТНОМУ ПОЛЮ ЗЕМЛИ

© 2022 г. И. Н. Абезяев<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Акционерное общество “Военно-промышленная корпорация  
“Научно-производственное объединение машиностроения” Московская область, г. Реутов, Россия

\*e-mail: iabezyaev@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.11.2021 г.

После доработки 20.01.2022 г.

Принята к публикации 26.01.2022 г.

Рассматривается активная система ориентации (СО) орбитального околоземного космического аппарата (КА), содержащая бортовой вычислитель, блок гироскопических датчиков угловых скоростей (БИУС) и исполнительные органы (маховики, гиродины, реактивные двигатели). В качестве датчика внешней информации предложено применить магнитометры (МГМ), установленные по связанным осям КА. Такую систему назовем магнитно-гироскопической системой ориентации (МГСО). Показано, что применение МГМ в качестве датчика ориентации не нарушает функциональных возможностей ориентации современных КА и позволяет выполнять такие полетные режимы как восстановление ориентации (ВО) и программное ориентирование КА относительно орбитальной системы координат (ОСК). Изложен принцип построения МГСО, приведены рабочие алгоритмы, дана оценка точности ориентации, приведены результаты моделирования.

*Ключевые слова:* система, ориентация, датчик внешней информации, магнитометр, восстановление, программные повороты

DOI: 10.31857/S0572329922050026

**Введение.** Вопросам ориентации околоземных КА с использованием магнитного поля Земли (МПЗ) посвящено значительное количество публикаций как отечественных, так и зарубежных специалистов [1–17]. В большинстве случаев исследования направлены на решение задач управления небольшими нано- и микроспутниками с помощью электромагнитных или магнитных исполнительных органов. Этот класс задач подробно исследован, в ряде случаев имеет прикладное значение. Однако интересно решение другой задачи – использование свойств МПЗ для создания активной МГСО, применимой для любых типов КА.

Разработка МГСО привлекательна тем, что применение МГМ в качестве датчика внешней информации существенно экономит компоновочное пространство КА, снижает массу и энергопотребление в десятки раз, на порядок уменьшает затраты на закупку совместимых датчиков (датчики звезд, горизонта и др.). Интересна возможность применения МГМ из состава системы сброса кинетического момента, что еще больше упрощает и удешевляет разработку МГСО. Вместе с тем, МГСО из-за недостаточной точности рассматривается как функциональный резерв основной прецизионной системы ориентации, которая либо полностью ее замещает, либо резервирует работу основного датчика ориентации.

Для функционирования МГСО, кроме МГМ, БВ, БИУС и исполнительных органов, требуется навигационно-баллистическое обеспечение и связь с наземным пунктом управления полетом КА.

**1. Восстановление ориентации КА относительно ОСК.** Определим системы координат. Начало ОСК находится в центре масс КА, ось  $Y_0$  совпадает с направлением радиус-вектора, проходящего из центра масс Земли к центру масс КА, ось  $X_0$  лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону движения КА, ось  $Z_0$  дополняет систему до правой. Связанная система координат (ССК)  $XYZ$  совпадает с главными центральными осями инерции КА, в номинальном положении совпадает с осями ОСК. Начало инерциальной системы координат (ИСК)  $X_{r0}Y_{r0}Z_{r0}$  совпадает с центром масс Земли, ось  $X_{r0}$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $Z_{r0}$  совпадает с осью вращения Земли и направлена в сторону ее севера, ось  $Y_{r0}$  дополняет систему до правой.

В начальный момент времени принимаем, что КА, после начального демпфирования, неподвижен относительно звезд и находится в некотором произвольном положении относительно ОСК. В текущий момент времени МГМ, расположенные по связанным осям, измеряют проекции вектора  $\mathbf{A}$  магнитной индукции МПЗ на собственные оси. Для тех же моментов времени мы можем, используя математическую модель аналитического геомагнитного поля Земли [18, 19] и данные баллистики, рассчитать вектор  $\mathbf{B}$  магнитной индукции МПЗ в проекциях на оси ОСК –  $\mathbf{B}_0$ . Таким образом, мы имеем один и тот же вектор в разных системах координат, причем  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}_0|$ .

Задача заключается в требовании построить алгоритм перевода КА из произвольного начального положения  $\psi_0, \vartheta_0, \gamma_0$  (курс, тангаж, крен) относительно ОСК в ориентированное положение  $\psi = \vartheta = \gamma = 0$  за конечное время  $t_k$  и сохранить ориентированное положение на интервале времени  $t_k \leq t < t_n, n > k$ .

Алгоритм восстановления ориентации КА относительно ОСК основан на свойстве обратимого отображения – изоморфизме линейного преобразования координат вектора при ортогональном повороте 3-мерного базиса  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{B}_0$ .

В соответствии с этим свойством [20] в результате поворота вектора в исходной системе координат его преобразованные координаты будут находиться так же в исходной системе координат и будут в точности соответствовать его же координатам в повернутой относительно исходной системы координат.

Выполним нормирование векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}_0$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z), \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|} = (b_{x0}, b_{y0}, b_{z0})$$

и рассчитаем кватернион их взаимной ориентации в ОСК [17]

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{|\tilde{\mathbf{q}}|} = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}_0| + (\mathbf{a}, \mathbf{b}_0) + [\mathbf{a}, \mathbf{b}_0]}{\| |\mathbf{a}||\mathbf{b}_0| + (\mathbf{a}, \mathbf{b}_0) + [\mathbf{a}, \mathbf{b}_0] \|} = \theta_0 + \mathbf{i}\theta_{x0} + \mathbf{j}\theta_{y0} + \mathbf{k}\theta_{z0} \quad (1.1)$$

Найдем угловые скорости КА (ССК) относительно ОСК

$$\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0\mathbf{C}^T \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_r(\omega_{xr}, \omega_{yr}, \omega_{zr})$  – искомые проекции вектора угловой скорости КА на собственные оси;  $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  – кососимметричная матрица, составленная из показаний БИУС;  $\boldsymbol{\omega}_0(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$  – кососимметричная матрица орбитальной угловой скорости ОСК от-

носителем ИСК, полученная из баллистических данных;  $\mathbf{C}$  – матрица, составленная из элементов кватерниона (1.1).

Стабилизацию КА будем выполнять относительно вектора  $(i\theta_{x_0}, j\theta_{y_0}, k\theta_{z_0})$ , для чего вычислим соответствующие скорости:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r \boldsymbol{\theta} \quad (1.3)$$

Работа алгоритма заключается в создании управляющих моментов и поворота КА до совмещения векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}_0$ , при котором для  $t \rightarrow \infty$  выполняются условия  $\theta = 1$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\psi = \dot{\psi} = 0$ ,  $\vartheta = \dot{\vartheta} = 0$ ,  $\gamma = \dot{\gamma} = 0$ . При этом моменты управления являются функциями фазовых координат  $\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}$  (1.1) и (1.3) и могут быть реализованы наиболее оптимальным для конкретного КА образом:

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.4)$$

Для определенности, назовем полученный алгоритм (1.1)–(1.4) – алгоритмом ROM (пространство, ориентация, магнетизм).

На рис. 1,а показано восстановление орбитальной ориентации КА из начального положения относительно ОСК по курсу  $\psi_0 = 110^\circ$ , по тангажу  $\vartheta_0 = -130^\circ$  и по крену  $\gamma_0 = 170^\circ$ . Моделирование проводилось для КА массой 350 кг, орбита околокруговая, высота 500 км, наклонение орбиты  $62^\circ$ , магнитное поле МПЗ – прямой диполь, исполнительные органы – маховики с кинетическим моментом 5 нмс (максимальный момент 0.05 нм), закон управления  $\mathbf{L}$  – пропорциональный.

ROM восстановил ориентацию КА за время  $\sim 3000$  с (рис. 1,а). На рис. 1,б показаны проекции вектора магнитной индукции МПЗ на оси ОСК – пунктирная линия и на оси ССК (показания МГМ) – сплошная линия. Векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}_0$  совмещаются по мере затухания переходных процессов.

**2. Программные повороты.** ROM, наряду со свойством восстановления ориентации, позволяет ориентировать КА относительно ОСК по заданной программе углового движения.

Введем программную систему координат (ПСК) в которую требуется перевести космический аппарат. Положение ПСК относительно ОСК зададим текущими значениями программных углов  $\psi_p, \vartheta_p, \gamma_p$  и программных угловых скоростей  $\dot{\psi}_p, \dot{\vartheta}_p, \dot{\gamma}_p$  в каналах курса, тангажа и крена – оси  $Y, Z, X$ .

Перепроектируем вектор  $\mathbf{B}$  магнитной индукции МПЗ на оси ПСК

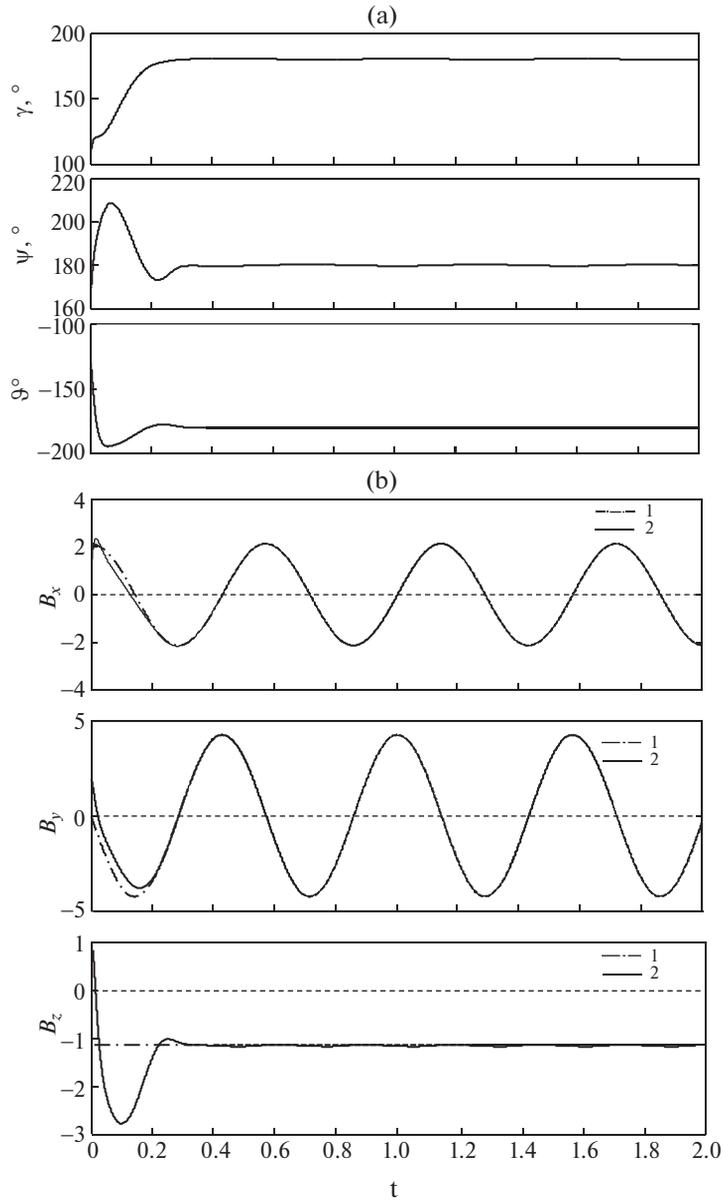
$$\mathbf{B}_p = \mathbf{P}\mathbf{B}$$

где  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\vartheta \mathbf{P}_\psi$  – матрица программного поворота КА на углы  $\psi_p, \vartheta_p, \gamma_p$  ( $\mathbf{P}_\gamma, \mathbf{P}_\vartheta, \mathbf{P}_\psi$  – матрицы соответствующих плоских поворотов) и найдем по аналогии с (1.1) кватернион взаимной ориентации между векторами

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b}_p = \frac{\mathbf{B}_p}{|\mathbf{B}_p|} = (b_{xp}, b_{yp}, b_{zp}) \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_0 + \mathbf{i}' \varphi_{xp} + \mathbf{j}' \varphi_{yp} + \mathbf{k}' \varphi_{zp} \quad (2.2)$$

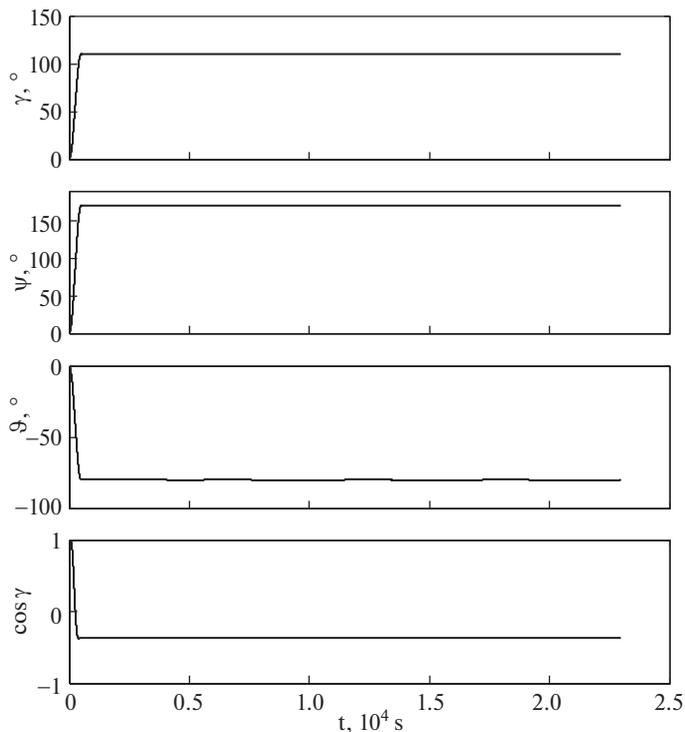
Определим скорость КА (ССК) относительно ПСК



**Рис. 1.** Восстановление ориентации КА и соответствующий процесс совмещения векторов магнитной индукции. Величины магнитной индукции даны в теслах в масштабе  $10 \times 10^{-5}$ , время по оси абсцисс – в секундах в масштабе  $1 \times 10^4$  (1 – в ССК, 2 – в ОСК).

$$\omega_{rp} = \omega - S\omega_0 S^T - SP\omega_p(SP)^T$$

где  $S$  матрица, составленная из элементов кватерниона  $\phi$ ,  $\omega_p$  – кососимметрическая матрица, составленная из элементов программной скорости ПСК относительно ОСК



**Рис. 2.** Переходные процессы в каналах крена, курса и тангажа при выполнении программного поворота КА. Время по оси абсцисс – в секундах в масштабе  $1 \times 10^4$ .

$$\boldsymbol{\omega}_p = \begin{pmatrix} \omega_{xp} \\ \omega_{yp} \\ \omega_{zp} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P}_\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta}_p \end{pmatrix} + \mathbf{E} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Стабилизацию КА будем выполнять относительно вектора  $(\mathbf{i}' \varphi_{xp}, \mathbf{j}' \varphi_{yp}, \mathbf{k}' \varphi_{zp})$ , для чего вычислим соответствующие скорости:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{rp} \boldsymbol{\phi} \quad (2.4)$$

Фазовые координаты  $\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}$  служат для формирования управляющих моментов, прилагаемых к корпусу КА по аналогии с (1.4)

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}) \quad (2.5)$$

На рис. 2 показан программный поворот КА на углы  $\gamma_p = 110^\circ$ ,  $\psi_p = 170^\circ$ ,  $\vartheta_p = 80^\circ$  для угла наклона орбиты  $i = 62^\circ$ . КА выполняет качественный программный поворот одновременно по всем каналам ориентации,  $\cos \varphi$  характеризует программный поворот КА относительно вектора конечного поворота, вычисленный из матрицы  $\mathbf{M}(\psi, \vartheta, \gamma)$ , где  $\psi, \vartheta, \gamma$  – углы ориентации КА относительно ОСК по курсу, тангажу и крену.

Таким образом, ROM в форме (2.1)–(2.5) позволяет выполнять обе функции – восстановление ориентации КА из произвольного неориентированного положения и

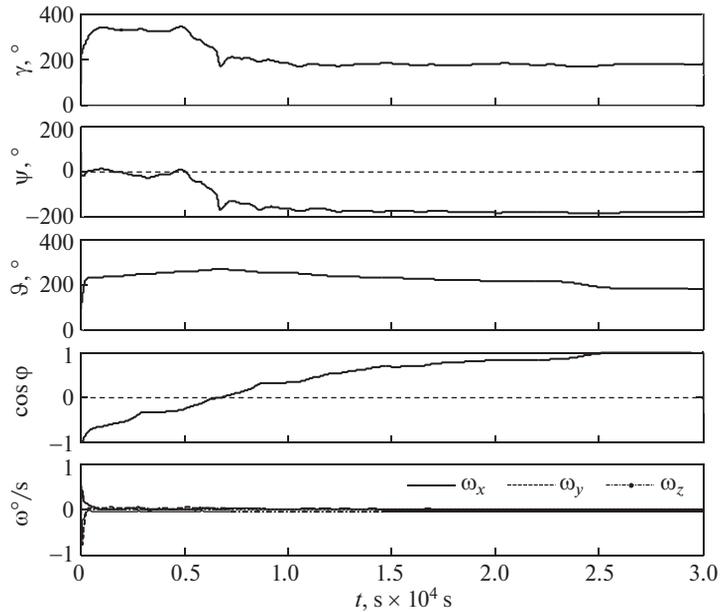


Рис. 3. Восстановление ориентации КА относительно ОСК для экваториального положения плоскости орбиты  $i = 0^\circ$ . Время по оси абсцисс – в секундах в масштабе  $1 \times 10^4$ .

программные повороты КА относительно ОСК в любое требуемое программное угловое положение –  $\Psi_p, \vartheta_p, \gamma_p$ .

**3. Особый случай.** Применение ROM имеет некоторые ограничения, связанные с вырождением векторной составляющей кватерниона (1.1). Прежде заметим, что для работы алгоритма достаточно иметь две компоненты вектора магнитной индукции МПЗ, т.к. в этом случае существуют все три проекции векторов (1.1) и (2.2), в чем можно убедиться простым перебором. Если рассматривать упрощенную модель МПЗ в форме прямого диполя, то появляются два предельных случая для положения орбит  $i = 0^\circ$  и  $i = 90^\circ$ . В первом случае “исчезают” две компоненты МПЗ и теоретически ВО выполнить нельзя, во втором случае – одна компонента МПЗ и теоретически ВО возможно. Однако для первого случая математическое моделирование процесса ВО с реальным МПЗ [18, 19] дает положительный результат (рис. 3), что объясняется присутствием небольших составляющих МПЗ по осям  $X_0$  и  $Y_0$  ОСК в реальном МПЗ.

Во втором случае для  $i = 90^\circ$  “неудобные” начальные положения КА имеют место на широтах положения КА  $u = 0^\circ, u = 180^\circ$  и  $u = \pm 90^\circ$  и для начальных положений КА относительно ОСК:  $\psi(0) = \vartheta(0) = \gamma(0) = \pm 90^\circ$ . В этих положениях кватернион (1.1) может иметь только одну компоненту, что затрудняет процесс ВО. В реальном МПЗ таких проблем практически не будет, так как, даже при небольшом отклонении КА из этих положений, процесс ВО выполняется. Однако можно рекомендовать перед включением алгоритма ВО проверять состояние кватерниона (1.1).

**4. Точность ориентации.** Собственную точность МГСО можно оценить, приняв во внимание инструментальную погрешность, которую вносит магнитометр и методическую погрешность, обусловленную неточным знанием МПЗ. Не рассматриваются ошибки ориентации вследствие несовершенства гироскопов и исполнительных органов, так как они являются общими для систем угловой ориентации КА, так же прене-

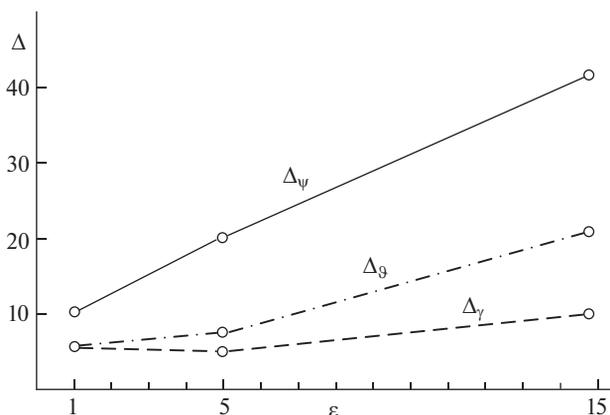


Рис. 4. Зависимость ошибок ориентации КА от неортогональности осей чувствительности МГМ, в угловых минутах.

брежем погрешностями интегрирования уравнений алгоритма. Кроме того, будем полагать, что чувствительные элементы МГМ (зонды) достаточно удалены от магнитных масс КА, например, на выносных штангах, и измеряют только составляющие МПЗ.

Математическую модель выходных сигналов МГМ представим в виде:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{M}_{\psi, \vartheta, \gamma} (\mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\mu})(1 + \alpha) + \mathbf{0}_1 \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{A}_1$  — вектор выходных сигналов МГМ;  $\mathbf{B}_0$  — вектор магнитной индукции МПЗ в проекциях на оси ОСК;  $\mathbf{M}_\varepsilon$  — матрица неортогональности измерительных осей МГМ с малыми погрешностями  $\varepsilon_{x,y,z}$ ;  $\mathbf{M}_{\psi, \vartheta, \gamma}$  — матрица ориентации КА относительно ОСК по курсу, тангажу и крену;  $\boldsymbol{\mu}$  — вектор погрешности математической модели МПЗ по IGRF — для МГСО это методическая погрешность;  $\alpha$  — погрешность масштабирования сигнала МГМ на его выходе;  $\mathbf{0}_1$  — вектор смещение “нуля” выходной характеристики.

Для современных МГМ примем  $0_{1,x,y,z} \leq 20$  нТл,  $\alpha = 0.5\%$ ,  $\varepsilon_{x,y,z} = 1-15'$ . Погрешность  $\boldsymbol{\mu}$  математической модели МПЗ по IGRF по разным данным [18, 21] находится на уровне  $|\boldsymbol{\mu}| \leq 10-200$  нТл, носит случайный характер.

Исследования показали, что наибольшее влияние на погрешность МГСО оказывает неортогональность измерительных осей МГМ. На рис. 4 показана суммарная максимальная погрешность МГСО в установившемся режиме ориентации КА относительно ОСК в зависимости от параметра  $\varepsilon$  после восстановления ориентации из начального положения  $\psi(0) = \vartheta(0) = \gamma(0) = 10^\circ$  и  $p = q = r = 0$ .

Из графика видно, что погрешность МГСО существенно зависит от неортогональности измерительных осей МГМ. Лучшая точность, полученная для условий эксперимента, составила  $5-10'$  в точке неортогональности осей  $\sim 1'$ . Погрешность МГСО по скорости во всех случаях не превысила значений  $|\omega| \leq 0.001^\circ/\text{с}$ .

Множественные моделирования показали, что потенциал повышения точности МГСО находится, главным образом, в улучшении динамических свойств КА и проведении прецизионных настроек МГМ в лабораторных условиях.

**Выводы.** Рассмотрена МГСО околоземного орбитального космического аппарата, в состав которой введен трехкомпонентный магнитометр в качестве датчика угловой ориентации. Получен алгоритм, названный ROM, позволяющий в исходной структу-

ре МГСО восстанавливать орбитальную ориентацию КА из начального неориентированного положения, а также задавать программный базис ориентации КА относительно ОСК без ограничений на величину программных углов. Показан особый случай работы алгоритма ROM, где его применение испытывает осложнения. Дана оценка точности ориентации КА, приведены результаты моделирования.

Предложенный принцип построения МГСО с алгоритмом ROM может быть одинаково успешно реализован как на тяжелых КА, так и на небольших спутниках микро- и наноразмеров.

Следует отметить низкое энергопотребление МГМ, а также низкую стоимость МГСО в силу небольшой стоимости магнитометра или вследствие применения магнитометра из состава “штатной” системы сброса накопленного кинетического момента.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич С.А., Костюков А.С.* Обзор и сравнение систем ориентации наноспутников класса CubeSAT // Решетневские чтения. 2014. Т. 1. № 18. С. 495–497.
2. *Ефименко Н.В., Луценко Н.В.* Синтез управления для магнитной системы ориентации и стабилизации космического аппарата // Радиоэлектроника, информатика, управління. 2000. № 2 (4). С. 121–124.
3. *Ивлев Н.А., Карпенко С.О., Сивков А.С., Иванов Д.С., Ткачѳв С.С., Ролдугин Д.С.* Разработка системы ориентации и стабилизации микроспутников // Механика, управление и информатика. 2014. Т. 6. № 1. С. 43–60.
4. *Коваленко А.П.* Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 247 с.
5. *Козаков А.В.* Магнитогироскопическая система—достойный соперник гравитационной системы ориентации на малых спутниках // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2001. Т. 100. С. 156–176.
6. *Крамлнх А.В., Мельник М.Е.* Бортовой алгоритм для системы ориентации и стабилизации наноспутника SamSat-218Д // Вестн. Самарского ун-та. Аэрокосм. техн. технол. машиностр. 2016. Т. 15. № 2. С. 50–56.  
<https://doi.org/10.18287/2412-7329-2016-15-2-50-56>
7. *Лебедев Д.В., Ткаченко А.И., Штена Ю.Н.* Магнитная система управления угловым движением микроспутника // Космічна наука і технологія. 1996. Т. 2. № 5–6. С. 17–25.  
<https://doi.org/10.15407/knit1996.05.017>
8. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Косм. иссл. 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207.  
<https://doi.org/10.31857/S0023420620030048>
9. *Abezyaev I.N., Velichko P.E., Karpunin A.A., Potselovkin A.I., Tytkov I.P.* Development of the algorithm of the spacecraft programmed yaw turns with the use of orbital gyrocompass // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2171. № 1. P. 060009.  
<https://doi.org/10.1063/1.5133207>
10. *Abdelrahman M., Park S.-Y.* Simultaneous spacecraft attitude and orbit estimation using magnetic field vector measurements // Aerosp. Sci. Technol. 2011. V. 15. № 8. P. 653–669.  
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.01.006>
11. *Gulmammadov F., Kahraman O., Yavuzylmaz C., Tufekci C.S., Subasi Y.* Magnetorquers only attitude maintaining using dynamic attitude simulator environment // AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference. Toronto. 2010. AIAA, 2010. P. 8106.  
<https://doi.org/10.2514/6.2010-8106>
12. *Lovera M., Astolfi A.* Global magnetic attitude control of inertially pointing spacecraft // J. Guid. Contr. Dyn. 2005. V. 28. № 5. P. 1065–1072.  
<https://doi.org/10.2514/1.11844>
13. *Della Rossa F., Bergamasco M., Lovera M.* Bifurcation analysis of the attitude dynamics for a magnetically controlled spacecraft // 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2012. P. 1154–1159.  
<https://doi.org/10.1109/CDC.2012.6426150>

14. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results // *Contr. Eng. Pract.* 2005. V. 13. № 3. P. 357–371.  
<https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2003.12.017>
15. *Wang P., Shtessel Y., Wang Y.-Q.* Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory. IEEE*, 1998. P. 500–504.  
<https://doi.org/10.1109/SSST.1998.660124>
16. *Абезяев И.Н.* Гибридная система ориентации для орбитальных космических аппаратов // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 4. С. 36–43.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921030028>
17. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1972. № 4. С. 24–31.
18. International Geomagnetic Reference Field (IGRF) – международное геомагнитное аналитической поле. 2020. <https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>
19. ГОСТ 25645.126-85 Поле геомагнитное. Модель поля внутри земных источников. М.: Госстандарт СССР, 1987. 23 с.
20. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
21. *Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В.* Оценка точности показаний магнитометра, установленного на Служебном модуле Международной космической станции // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2012. № 54. 32 с.

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАРУЖНОГО ДАВЛЕНИЯ, СОЗДАВАЕМОГО НАМОТКОЙ ГИБКИХ НИТЕЙ

© 2022 г. В. В. Васильев<sup>a,\*</sup>, В. А. Салов<sup>b</sup>, А. А. Склезнев<sup>b</sup><sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия<sup>b</sup> АО Центральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

\*e-mail: vvvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.

После доработки 16.03.2022 г.

Принята к публикации 17.03.2022 г.

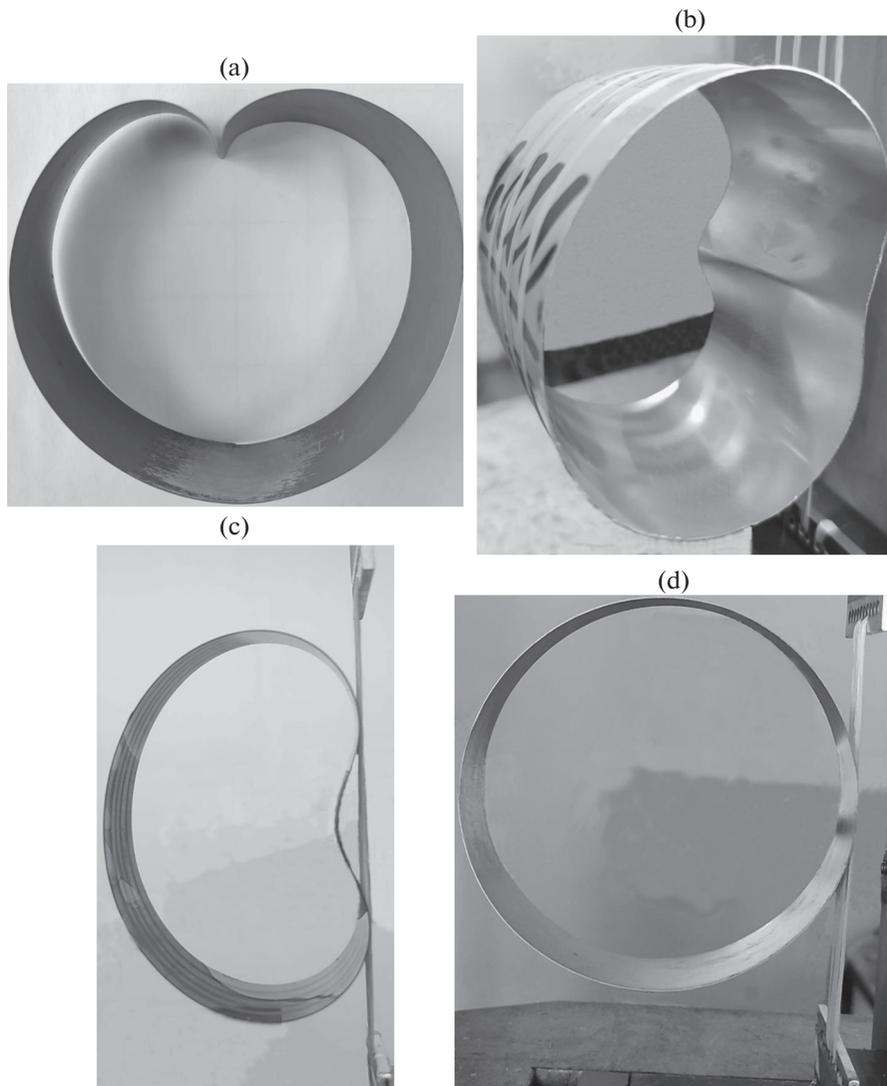
В статье рассматривается задача устойчивости бесконечно длинной цилиндрической оболочки, на которую наматываются с натяжением абсолютно гибкие нити, сжимающие оболочку так, что она может потерять устойчивость. С помощью уравнений нелинейной теории оболочек, получено точное решение, определяющее критическое натяжение нитей. Установлено, что критическое натяжение определяется универсальной формулой, которая включает радиус и изгибную жесткость оболочки. С помощью концепции продолжающегося нагружения полученное решение обобщается на случай упруго-пластического материала оболочки. Рассмотрена задача о давлении на упругую оболочку слоями из упругих нитей, наматываемых с натяжением. Решение сопоставляется с результатами эксперимента, проведенного на оболочках из стали, алюминия и термопласта.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка, устойчивость оболочки при внешнем давлении, устойчивость оболочки при натяжении наматываемых на нее нитей

DOI: 10.31857/S0572329922060174

**1. Введение.** Задача, рассматриваемая в статье, представляет прикладной интерес в связи широким распространением композитных баллонов давления и емкостей различного назначения. Герметичность таких конструкций обеспечивается внутренней металлической или полимерной оболочкой (лейнером), на которую осуществляется намотка несущего композитного слоя [1]. При намотке с предварительным натяжением на оболочку передается наружное давление, которое может привести к потере устойчивости. На рис. 1 показаны формы потери устойчивости оболочек из стали, алюминия и термопласта. Задача устойчивости была сформулирована в нелинейной постановке В.И. Феодосьевым [2] однако ее решение не было найдено. Приближенные решения, основанные на энергетическом подходе и аппроксимации формы потери устойчивости, представлены в работах [3, 4]. Заметим, что рассматриваемая задача отличается от аналогичной задачи устойчивости оболочки в жесткой обойме [5], в которой оболочка остается круговой вне участка, на котором она потеряла устойчивость. При потере устойчивости от натяжения нитей оболочка деформируется по всей поверхности (рис. 1).

**2. Исходные уравнения.** Рассмотрим деформированное сечение оболочки, показанное на рис. 2 сплошной линией (штриховая линия показывает положение нити). Система нелинейных уравнений, описывающих деформацию оболочки, имеет вид [6]



**Рис. 1.** Формы потери устойчивости оболочек из стали (а), алюминия (б), термопласта (с) и исходная форма оболочки (д) в начале нагружения.

$$N' + Q(1 + \omega') = 0, \quad Q' - N(1 + \omega') = q_T, \quad M' - RQ = 0. \quad (2.1)$$

$$N = B\varepsilon_\alpha, \quad M = \frac{D}{R}\omega', \quad B = \bar{E}h, \quad D = \frac{1}{12}\bar{E}h^3, \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R}(u' + w) + \frac{1}{2}\omega^2, \quad \omega = \frac{1}{R}(u - w'), \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\alpha}, \quad (2.3)$$

Здесь  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  – кольцевое усилие, поперечное усилие и изгибающий момент, положительные направления которых показаны на рис. 2,  $u$ ,  $w$  – кольцевое перемещение и

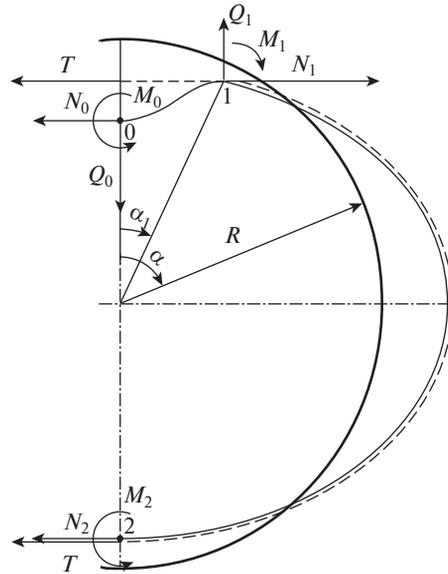


Рис. 2. Условия нагружения и деформированное состояние оболочки.

прогиб, направленный по наружной нормали,  $\omega$  – угол поворота нормали к поверхности оболочки. Уравнения (2.2) соответствуют бесконечно длинной цилиндрической оболочке. Для кольца в них следует принять  $\nu = 0$ . Во второе уравнение (2.1) входит давление, создаваемое натяжением нитей  $T$ , которое изменяется по углу  $\alpha$  следующим образом:

$$q_T = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \quad \text{и} \quad q_T = T(1 + \omega') \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \pi \quad (2.4)$$

**3. Решение для участка 0-1.** Рассмотрим участок оболочки 0-1 (рис. 2). В точке 0 в силу симметрии имеем  $Q_0 = 0$ . Тогда из условия равновесия участка 0-1 в вертикальном направлении в точке 1 получим  $Q_1 = 0$ . Из условия равновесия в горизонтальном направлении найдем  $N_1 = N_0$ . Таким образом, участок 0-1 находится в условиях чистого изгиба и осевого нагружения. Введем безразмерные величины

$$\bar{N} = \frac{N}{T}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{T}, \quad \bar{M} = \frac{M}{TR}, \quad \bar{u} = \frac{u}{R}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R} \quad (3.1)$$

При  $q_T = 0$  уравнения (2.1) принимают вид

$$N' + \bar{Q}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{M}' - \bar{Q} = 0 \quad (3.2)$$

Складывая первые два уравнения, получим  $\bar{N}'\bar{N} + \bar{Q}'\bar{Q} = 0$ . Интегрируя с учетом граничных условий в точке 0 ( $\bar{N} = \bar{N}_0, \bar{Q} = 0$ ), имеем

$$\bar{N}^2 + \bar{Q}^2 = \bar{N}_0^2 \quad (3.3)$$

Выражая отсюда  $\bar{Q}$  и подставляя в первое уравнение (3.2), получим

$$\bar{N}' + \sqrt{\bar{N}_0^2 - \bar{N}^2}(1 + \omega') = 0$$

Интегрируя с учетом граничных условий  $\bar{N}(\alpha = 0) = \bar{N}_0, \omega(\alpha = 0) = 0$  (рис. 2), найдем

$$\arcsin \frac{\bar{N}}{\bar{N}_0} = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)$$

Отсюда с учетом равенства (3.3)

$$\bar{N} = \bar{N}_0 \cos(\alpha + \omega), \quad \bar{Q} = \bar{N}_0 \sin(\alpha + \omega) \quad (3.4)$$

Поскольку  $\bar{N}(\alpha = \alpha_1) = \bar{N}_1 = \bar{N}_0$  и  $\bar{Q}(\alpha = \alpha_1) = \bar{Q}_1 = 0$  (рис. 2) имеем

$$\omega(\alpha = \alpha_1) = -\alpha_1 \quad (3.5)$$

Из уравнений (2.2) с учетом обозначений (3.1) получим следующее выражение для изгибающего момента:

$$M = \frac{\omega'}{\lambda^2}, \quad \lambda^2 = \frac{TR^2}{D} \quad (3.6)$$

Дифференцируя, выражая  $\bar{M}'$  через  $\bar{Q}$  с помощью последнего уравнения (3.2) и подставляя  $\bar{Q}$  из второго равенства (3.4), запишем следующее уравнение для  $\omega$ :

$$\omega'' - \lambda^2 \bar{N}_0 \sin(\alpha + \omega) = 0 \quad (3.7)$$

Оценим функцию  $\varphi = \alpha + \omega$ . Согласно граничным условиям в точках 0 и 1 (рис. 2) имеем  $\varphi(\alpha = 0) = 0$  и  $\varphi(\alpha = \alpha_1) = 0$ . Таким образом, функция  $\varphi$  обращается в ноль на границах интервала интегрирования уравнения (3.7). Считая ее малой внутри этого интервала примем  $\sin \varphi \approx \varphi$  и упростим соответствующим образом уравнение (3.7).

Учтем также, что  $\lambda^2 \bar{N}_0 < 0$  так как усилие  $N_0$  (рис. 2) по условиям задачи является сжимающим. В результате, уравнение (3.7) принимает вид

$$\omega'' + k_1^2(\omega + \alpha) = 0, \quad k_1^2 = -\lambda^2 \bar{N}_0 \quad (3.8)$$

Общее решение этого уравнения

$$\omega = C_1 \sin k_1 \alpha + C_2 \cos k_1 \alpha - \alpha$$

Условия  $\omega(\alpha = 0) = 0$  дает  $C_2 = 0$ , а из условия (3.5) следует  $\sin k \alpha_1 = 0$ . Таким образом,

$$k_1 = \frac{\pi}{\alpha_1}, \quad \bar{N}_0 = -\frac{\pi^2}{\alpha_1^2 \lambda^2} \quad \text{и} \quad \omega = C_1 \sin \frac{\pi \alpha}{\alpha_1} - \alpha \quad (3.9)$$

Преобразуем этот результат. Используя равенство (3.6), запишем изгибающий момент, действующий в точке 0 (рис. 2)

$$\bar{M}_0 = \frac{1}{\lambda^2} \omega'(\alpha = 0) = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\pi}{\alpha_1} C_1 - 1 \right)$$

Выражая отсюда  $C_1$  и подставляя в решение (3.9), получим следующее окончательное выражение для угла поворота на участке 0-1:

$$\omega_{01} = \frac{\alpha_1}{\pi} (1 + \lambda^2 \bar{M}_0) \sin \frac{\pi \alpha}{\alpha_1} - \alpha \quad (3.10)$$

Найдем прогиб оболочки на участке 0-1. Предположим, что оболочка является недеформируемой в кольцевом направлении и примем в равенствах (2.2)  $B \rightarrow \infty$ . Тогда  $\varepsilon_\alpha = 0$  и из уравнений (2.3) при учете обозначений (3.1) следует

$$\bar{u}' = -\bar{w} - \frac{\omega^2}{2}, \quad \omega' = \bar{u}' - \bar{w}'' \quad (3.11)$$

Исключая  $u'$ , придем к уравнению для прогиба

$$\bar{w}'' + \bar{w} = -f(\alpha), \quad f(\alpha) = \omega' + \frac{\omega^2}{2} \quad (3.12)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию симметрии  $\bar{w}'(\alpha = 0) = 0$  (рис. 2), определяет прогиб оболочки на участке 0-1

$$\begin{aligned} \bar{w}_{01} &= C_{01} \cos \alpha - \sin \alpha \int_0^\alpha f_{01}(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos \alpha \int_0^\alpha f_{01}(\alpha) \sin \alpha d\alpha \\ f_{01}(\alpha) &= \omega'_{01} + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Постоянная  $C_{01}$  соответствует смещению оболочки как твердого тела. Кольцевое перемещение следует из первого уравнения (3.11). Интегрируя его с учетом условия симметрии  $\bar{u}(\alpha = 0) = 0$ , получим

$$\bar{u}_{01} = -\int_0^\alpha \left( \bar{w}_{01} + \frac{\omega_{01}^2}{2} \right) d\alpha \quad (3.14)$$

**4. Решение для участка 1-2.** Для участка 1-2 (рис. 2) уравнения равновесия (2.1) с учетом равенств (2.4) и (3.1) записываются следующим образом:

$$\bar{N}' + \bar{Q}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}(1 + \omega') = 1 + \omega', \quad \bar{M}' - \bar{Q} = 0 \quad (4.1)$$

Обозначим  $\bar{N} + 1 = \bar{N}_r$ . Учитывая, что  $\bar{N}' = \bar{N}_r'$ , представим первые два уравнения (4.1) в виде

$$\bar{N}_r' + \bar{Q}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}_r(1 + \omega') = 0 \quad (4.2)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (3.2) и имеют решение аналогичное равенству (3.3), то есть  $\bar{N}_r^2 + \bar{Q}^2 = C^2$ . При  $\alpha = \alpha_1$  (рис. 2) имеем  $\bar{N}_1 = \bar{N}_0$ ,  $\bar{N}_r = 1 + \bar{N}_0$ ,  $\bar{Q}_1 = 0$ . Таким образом,  $C = \bar{N}_r(\alpha = \alpha_1) = 1 + \bar{N}_0$  и

$$(1 + \bar{N})^2 + \bar{Q}^2 = (1 + \bar{N}_0)^2 \quad (4.3)$$

Выражая отсюда  $\bar{Q}$  и подставляя в первое уравнение (4.1), получим

$$\bar{N}' + \sqrt{(1 + \bar{N}_0)^2 - (1 + \bar{N})^2} (1 + \omega') = 0$$

Общее решение этого уравнения

$$\arcsin \frac{1 + \bar{N}}{1 + \bar{N}_0} + \alpha + \omega = C$$

В точке 1 (рис. 2) имеем  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\bar{N} = \bar{N}_0$  и  $\omega = -\alpha_1$ . Тогда  $C = \pi / 2$  и решение принимает вид

$$\bar{N} = (1 + \bar{N}_0) \cos(\alpha + \omega) - 1, \quad \bar{Q} = (1 + \bar{N}_0) \sin(\alpha + \omega) \quad (4.4)$$

В точке 2 (рис. 2) имеем  $\alpha = \pi$ ,  $\omega = 0$  и  $\bar{N}_2 = -2 - \bar{N}_0$ ,  $\bar{Q}_2 = 0$ . Уравнение равновесия половины оболочки, показанной на рис. 2 ( $N_0 + N_2 + 2T = 0$ ), удовлетворяется при этом тождественно. Дальнейшие преобразования приводят к уравнению аналогичному уравнениям (3.7) и (3.8). Окончательно получим

$$\omega'' + k_2^2 \sin(\alpha + \omega) = 0, \quad k_2^2 = -\lambda^2(1 + \bar{N}_0) \quad (4.5)$$

Предполагается и подтверждается дальнейшим расчетом, что при  $\bar{N}_0 < 0$  абсолютная величина  $|\bar{N}_0| > 1$ . В отличие от уравнения (3.7) это уравнение нельзя упростить и при-

вести к форме (3.8). Для решения уравнения (4.5) введем новую переменную [7]  $y(\alpha) = \alpha + \omega(\alpha)$  и приведем уравнение (4.5) к виду  $y'' + k_2^2 \sin y = 0$ . В этом уравнении проведем замену  $(y')^2 = z(y)$ , в результате которой придем к уравнению первого порядка  $z' = -2k_2^2 y' \sin y = 2k_2^2 (\cos y)'$ . Решение этого уравнения в исходных переменных имеет вид

$$(1 + \omega')^2 = 2k_2^2 \cos(\alpha + \omega) + C_\omega \quad (4.6)$$

Используя формулы (3.9) для  $\bar{N}_0$  и (4.5) для  $k_2^2$ , найдем  $k_2^2 = (\pi^2/\alpha_1^2) - \lambda^2$ . Постоянная  $C_\omega$  определяется из условия непрерывности угла поворота в точке  $\alpha = \alpha_1$  (рис. 2). Функция  $\omega(\alpha_1)$ , определяемая уравнением (4.6), должна быть равна функции  $\omega_{01}(\alpha_1)$  (3.10). Окончательно, получим следующее уравнение для угла поворота на участке 1-2:

$$\omega'_{12} = \sqrt{(1 + \lambda^2 \bar{M}_0)^2 - 2 \left( \frac{\pi^2}{\alpha_1^2} - \lambda^2 \right) [1 - \cos(\alpha + \omega_{12})]} - 1 \quad (4.7)$$

Решение этого уравнения выражается через эллиптические интегралы. Однако при этом получается достаточно сложная неявная функция  $\alpha(\omega_{12})$ , неудобная для расчета. В связи с этим уравнение (4.7) интегрируется численно при граничном условии  $\omega_{12}(\alpha = \pi) = 0$  (рис. 2).

Прогиб оболочки на участке 1-2 определяется равенством аналогичным выражению (3.13), то есть

$$\begin{aligned} \bar{w}_{12} &= C_{12} \cos \alpha - \sin \alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha} f_{12}(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos \alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha} f_{12}(\alpha) \sin \alpha d\alpha \\ f_{12}(\alpha) &= \omega'_{12} + \frac{1}{2} \omega_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Постоянная  $C_{12}$  выражается через постоянную  $C_{01}$  в равенстве (3.13) из условия непрерывности прогиба в точке  $\alpha = \alpha_1$  (рис. 2). Из этого условия получим  $C_{12} = \bar{w}_{01}(\alpha_1, C_{01})/\cos \alpha_1$ . Постоянная  $C_{01}$  соответствует, как уже отмечалось, смещению оболочки как твердого тела.

Кольцевое перемещение оболочки на участке 1-2 определяется выражением аналогичным равенству (3.14). Учитывая условие непрерывности перемещения в точке  $\alpha = \alpha_1$  (рис. 2), получим

$$\bar{u}_{12} = -\int_0^{\alpha_1} \left( \bar{w}_{01} + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 \right) d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left( \bar{w}_{12} + \frac{1}{2} \omega_{12}^2 \right) d\alpha \quad (4.9)$$

При этом должно выполняться условие симметрии  $\bar{u}_{12}(\alpha = \pi) = 0$  (рис. 2).

**5. Определение критического натяжения.** Критическое натяжение нитей, при котором оболочка теряет устойчивость, определяется в результате расчета, состоящего из нескольких этапов. На первом этапе задается параметр  $\lambda^2$  (3.6), в который входит неизвестное усилие натяжения  $T$ . На втором этапе задается угол  $\alpha_1$ . Тогда для определения угла поворота  $\omega(\alpha)$  с помощью уравнений (3.10) и (4.7) необходимо знать момент  $\bar{M}_0$ . Этот момент находится в результате численного интегрирования уравнения (3.7) – он определяется методом пристрелки так, чтобы выполнялось граничное условие  $\omega_{12}(\alpha = \pi) = 0$  (рис. 2). На третьем этапе при найденном значении  $\bar{M}_0$  и заданной величине  $\lambda^2$  определяется соответствующий этим параметрам угол  $\alpha_1$ . Для этого используется условие симметрии осевого перемещения (4.9) –  $\bar{u}_{12}(\alpha = \pi) = 0$ . В результате такой довольно

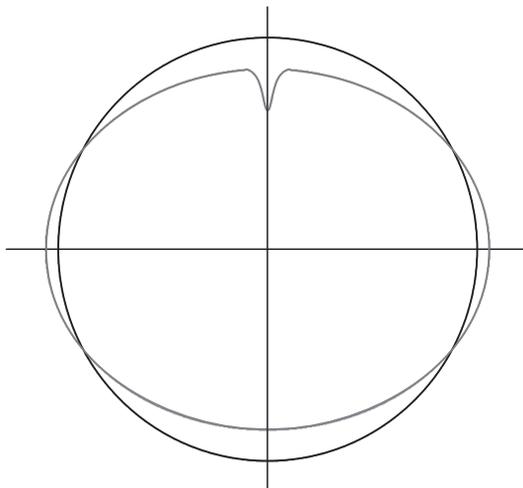


Рис. 3. Прогиб оболочки, построенный по результатам параметрического анализа.

сложной процедуры получается угол поворота  $\omega(\alpha)$ , соответствующий заданному параметру  $\lambda^2$ . На заключительном этапе расчета с помощью уравнений (3.13) и (4.8) определяется прогиб оболочки. При этом оказывается, что существует некоторое критическое значение параметра  $\lambda_{cr}^2$  такое, что при  $\lambda^2 < \lambda_{cr}^2$  существует только тривиальное решение  $w \equiv 0$ , соответствующее докритическому состоянию оболочки. В результате трудоемкого параметрического анализа получено  $\lambda_{cr}^2 = 732$ . Прогиб оболочки при этом значении параметра и  $\alpha_1 = 6.39^\circ$ ,  $C_{01} = \bar{w}(\alpha = 0) = 0.2$  показан на рис. 3.

Таким образом, результатом приведенного выше достаточно сложного анализа является универсальная и простая формула для критического натяжения

$$T_{cr} = \frac{\lambda_{cr}^2 D}{R^2}, \quad \lambda_{cr}^2 = 732 \quad (5.1)$$

Для проверки полученного результата были испытаны оболочки из алюминия, стали и термопласта (ПЭТФ), нагружавшиеся натянутыми нитями. Результаты эксперимента представлены в таблице. Среднее экспериментальное значение  $\lambda_{cr}^2$  составляет 741, что отличается от расчетного результата на 1.2%. Критическое напряжение в оболочке определяется по формуле  $\sigma_{cr} = q_{cr} R/h$ , где  $q_{cr} = T_{cr}/R$  – контактное давление на оболочку, создаваемое нитями. С учетом равенства (5.1) получим

$$\sigma_{cr} = \frac{\lambda_{cr}^2 D}{R^2 h} \quad (5.2)$$

Как известно, при действии равномерного давления жидкости или газа на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку критическое напряжение имеет вид  $\sigma_{cr} = 3D/R^2 h$ . Это напряжение в 244 раза меньше напряжения (5.2).

Полученный результат справедлив для упругой оболочки при  $\sigma_{cr} \leq \sigma_t$ , где  $\sigma_t$  – предел текучести материала. Величина  $\sigma_{cr}$  для экспериментальных оболочек приведена в таблице 1. Она значительно меньше предела текучести, который для алюминия, стали и термопласта составляет соответственно 267, 486 и 63 МПа. Если  $\sigma_{cr} > \sigma_t$ , оболочка те-

**Таблица 1.** Результаты экспериментальных исследований устойчивости кольцевых образцов

Материал оболочки	$R$ , мм	$h$ , мм	$T_{cr}$ , Н/мм	$\sigma_{cr}$ , МПа	$E$ , ГПа	$\nu$	$\lambda_{cr}^2$
Алюминий	42.00	0.165	12.50	75.8	72.1	0.3	753
Алюминий	31.50	0.096	4.44	46.3	72.3	0.3	741
Сталь	50.02	0.183	37.33	204	222	0.3	736
Термопласт	40.10	0.242	3.13	12.9	5.22	0.4	739
Термопласт	40.14	0.232	2.57	11.1	5.10	0.4	739
Термопласт	40.40	0.260	3.94	15.2	5.26	0.4	737

ряет устойчивость за пределом упругости. Согласно концепции продолжающегося нагружения [8], в этом случае в выражении (2.2) для изгибной жесткости принимается  $\nu = 1/2$  и  $E = E_t$ , где  $E_t$  – касательный модуль. Таким образом, в равенстве (5.1) принимается  $D = E_t h^3/9$ .

**6. Напряжения в оболочке, вызванные многослойной намоткой с натяжением.** Рассмотрим металлическую цилиндрическую оболочку с толщиной  $h$ , на которую наматывается система композитных слоев. Предположим, что элементарный слой имеет толщину  $\delta$  и предварительное напряжение  $s$ . Эффект от намотки такого слоя на оболочку моделируется приложением к оболочке наружного давления  $q = s\delta/R$ . В результате намотки одного слоя в оболочке возникнет напряжение  $\sigma_1 = -qR/h = -s\delta/h$ . Если оболочка является абсолютно жесткой, то после намотки  $n$  слоев в ней будет действовать напряжение  $\sigma_n = -s\delta n/h$ . Однако оболочка является податливой и при намотке каждого следующего слоя натяжение ранее уложенных слоев снижается [9].

Итак, после намотки первого слоя в нем действует напряжение  $s$ , а в металлической оболочке – напряжение  $\sigma_1 = -s\delta/h$ . В результате намотки второго слоя в первом слое и в оболочке возникают дополнительные напряжения  $s_{12}$  и  $\sigma_{12}$ , которые связаны уравнением равновесия и условием совместности деформаций

$$s_{12}\delta + \sigma_{12}h = -q = -\frac{s\delta}{R}, \quad \frac{s_{12}}{E_c} = \frac{\sigma_{12}}{E}$$

где  $E_c$  – модуль упругости слоя композитного слоя. Выражая отсюда  $\sigma_{12}$ , найдем напряжение в оболочке после намотки второго слоя

$$\sigma_2 = -\frac{s\delta}{h} \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right), \quad \eta = \frac{E_c \delta}{Eh}$$

Аналогичным способом получим напряжение в оболочке после намотки третьего слоя

$$\sigma_3 = -\frac{s\delta}{h} \left( 1 + \frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{1+2\eta} \right)$$

В общем случае после намотки слоя с номером  $n$  найдем

$$\sigma_n = -\frac{s\delta}{h} \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+\eta i} \right)$$

**Заключение.** В рамках нелинейной теории оболочек получено решение, определяющее критическую величину натяжения нитей, наматываемых на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. Установлено универсальное выражение для критического натяжения, зависящего от радиуса и изгибной жесткости оболочки. Полученное ре-

шение подтверждено экспериментально на модельных оболочках из алюминия, стали и термопласта. Исследован процесс намотки композита на упругую оболочку.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В., Мороз Н.Г.* Композитные баллоны давления. Проектирование, расчет, изготовление и испытания. М.: Машиностроение, 2015. 372 с.
2. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1996. 368 с.
3. *Langhaar H., Boresi A., Marcus L., Love G.* Buckling of a long fiber-wound cylindrical shell due to stresses caused by winding // *J. Appl. Mech.* 1965. V. 32. Ser. E. № 1. P. 81–86.  
<https://doi.org/10.1115/1.3625789>
4. *Постоев В.С.* К теории устойчивости предварительно напряженной цилиндрической оболочки / Прочность гидротурбин. Труды ЦКТИ. Вып. 72. Л.: ЦКТИ, 1966. С. 3–12.
5. *Васильев В.В., Салов В.А.* Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной наружным давлением, создаваемым жесткой внешней средой // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 4. С. 134–144.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921040127>
6. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961, 703 с.
8. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 984 с.
9. *Васильев В.В.* Упруго-пластические деформации металлических баллонов давления, усиленных однонаправленным стеклопластиком // *Механика полимеров.* 1969. № 6. С. 1069–1074.

УДК 539.3

## ОБ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САМООРГАНИЗАЦИИ НАНОЧАСТИЦ

© 2022 г. В. А. Бабешко<sup>a,b,\*</sup>, О. В. Евдокимова<sup>a</sup>, О. М. Бабешко<sup>b</sup>, В. С. Евдокимов<sup>a</sup><sup>a</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия<sup>b</sup>Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

\*e-mail: babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.

После доработки 03.04.2022 г.

Принята к публикации 04.04.2022 г.

Опираясь на свойства блочных элементов, имитирующих наночастицы, контактирующие с многослойным основанием, строится модель самоорганизации таких объектов. Предполагается, что наночастицы контактируют без трения с находящимся в состоянии вибрации деформируемым основанием. Для построения модели в статье впервые построены аналитические соотношения, позволяющие получать параметры возникновения высокочастотного резонанса для такой механической структуры, или, что тоже самое, ловушечных мод. Благодаря этим соотношениям, на основе свойств поведения механических объектов, расположенных на поверхности деформируемого основания в условиях вибрации, строится модель их самоорганизации. Самоорганизация состоит в стремлении, при определенных механических и геометрических параметрах механической системы, к объединению поверхностных объектов. Построенная модель допускает ее перенос на наночастицы из многокомпонентных материалов.

*Ключевые слова:* граничные задачи, наночастицы, интегральные уравнения, высокочастотный резонанс, факторизация, самосборка

DOI: 10.31857/S0572329922060034

**Введение.** В основе исследования лежит явление высокочастотного резонанса, свойственного слоистым структурам при наличии плоских неоднородностей, параллельных границе [1, 2]. Возможность создания такой модели продиктована полученными новыми результатами по использованию в роли наночастиц математических объектов – упакованных блочных элементов. Их применение позволяет описывать в качестве наночастиц элементы из материалов различных многокомпонентных сред. Исследования с привлечением многокомпонентных материалов для моделей наночастиц важны, поскольку до конца не ясны физико-механические свойства наночастиц. Модель строится при предположении, что деформируемое основание колеблется с частотой, при которой в среде образуется волна, уходящая от поверхностного объекта на бесконечность. Механические объекты представляют жесткие или деформируемые штампы, описываемые упакованными блочными элементами, которые без трения контактируют с основанием. Также предполагается, что самоорганизация начинается с момента, когда совокупность поверхностных объектов достигнет состояния, при котором в зоне расположения поверхностных объектов возникнет стоячая волна. В этом состоянии излучение волн на бесконечность прекратится. Система будет обладать минимальной энергией, а поверхностные объекты будут стремиться к гребню стоячей волны, при наличии внешних гармонических воздействий.

С учетом известных и достаточно детально описанных в литературе свойств наночастиц, таких как самоорганизация и самосборка, приняв во внимание возможности современной математики и механики, представлены исследования по моделированию этих явлений. В качестве моделей наночастиц принимаются математические объекты — упакованные блочные элементы граничных задач для уравнений механики и физики.

Исследование проводится на основе использования новейшего математического аппарата-метода блочного элемента [3]. Наночастицы рассматриваются как многокомпонентные физико-механические объекты, наделенные богатым набором механических и физических свойств, объединяемых между собой некоторым взаимным притяжением, в частности, вызванным высокочастотным резонансом. Построенную модель, представленную в данной статье, следует рассматривать как первое приближение при математическом описании таких наночастиц. В дальнейшем, математическое описание наночастиц может допускать различные усложнения.

В настоящее время исследования в области наноматериалов и нанотехнологии отличаются огромным разнообразием, охватывающим, как частные задачи, так и общие проблемы. Так, в работах [4–7] охватывается большой комплекс вопросов, связанных со свойствами наночастиц, производство и технологии наноматериалов, огромный объем экспериментальных данных. В том числе обсуждаются вопросы самоорганизации и самосборки наноматериалов. В [8] изучаются вопросы колебания однослойных углеродных нанотрубок. В [9–11] выполняется моделирование молекулярной динамики по сравнению резонансных частот перестраиваемых резонаторов из углеродных нанотрубок, с учетом нелинейной динамики резонаторов. В [12, 13] исследуется молекулярно-динамическое моделирование одностенного резонатора из углеродных нанотрубок, с учетом конечности наночастиц. В [14, 15] изучается вопрос производства электричества путем перемещения капли ионной жидкости вдоль графена и исследуется волновой его потенциал. В [16–18] обсуждается изготовление субнанометровых полупроводниковых нанолент из молибдена сверху вниз листы дисульфида, а также наномеханического датчика массы. В [19–21] исследуется средствами механики сплошной среды дефекты решетки в углеродных нанотрубках, дислокации, а также вопросы контакта с основаниями. В [22–24] исследуются вопросы влияния поверхностных нанослоев на усталостную долговечность материалов. Можно видеть огромное многообразие исследований, однако ни одно из них не связано исследованиями, выдвинутому в настоящей статье.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоская задача теории упругости для многослойной среды, на поверхности которой находится  $N$  объектов, контактирующих без трения с основанием. Объекты рассматриваются в двух вариантах: абсолютно твердые штампы и деформируемые объекты, представляющие упакованные блочные элементы, описываемые уравнением Гельмгольца. Предполагается, что в дальнейшем, учет многокомпонентных материалов будет рассматриваться с использованием нового универсального метода моделирования [25]. Он представляет решения векторных граничных задач для многокомпонентных сред посредством разложения по скалярным, используемым в настоящей работе. Предполагается, что система находится в условиях установившейся вибрации в результате гармонического вертикального воздействия на объекты зависящей от времени функцией  $e^{-i\omega t}$ . Считаем, что объекты, находящиеся на поверхности, имеют носители  $[b_{2n-1}, b_{2n}]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , а контактные напряжения описываются функциями  $q_{2n-1}(\xi)$ . Расстояния между носителями имеют не нулевые отрезки  $[b_{2n}, b_{2n+1}]$ .

Следуя [26] запишем систему интегральных уравнений в виде

$$\sum_{n=1}^N \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} k(x - \xi) q_{2n-1}(\xi) d\xi = f_{2m-1}(x), \quad b_{2m-1} \leq x \leq b_{2m} \quad (1.1)$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad K(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{i\alpha x} dx \equiv \mathbf{F}(\alpha)k(x)$$

Здесь  $f_{2m-1}$  – заданные перемещения подошвы объекта в зоне контакта;  $K(u)$  – преобразование Фурье ядра системы интегральных уравнений,  $\mathbf{F}(\alpha)$  – оператор преобразования Фурье. Будем считать, что многослойная среда описывается изотропной линейной упругостью, а в результате вибрации механической системы с частотой  $\omega$  четную мероморфную функцию  $K(\alpha)$  можно представить в виде [1, 2]

$$K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha), \quad \Pi(\alpha) = (\alpha^2 - \xi^2)^{-1}(\alpha^2 - z^2), \quad K_0(\alpha) > 0, \quad -\infty < \alpha < \infty$$

Здесь параметры  $\pm\xi$ ,  $\pm z$  – вещественные полюсы и нули мероморфной функции  $K(\alpha)$ . Таким образом, функция  $K_0(\alpha)$  имеет только комплексные нули и полюсы. Считаем, что имеет место свойственное контактным задачам для слоистой среды асимптотическое поведение вида [26]

$$K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})], \quad |\alpha| \rightarrow \infty$$

Контур  $\sigma$  обходит полюсы  $\pm\xi$  в соответствии с требованием принципа излучения волн на бесконечность [26].

Запишем систему уравнений в операторном виде в форме

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{q}(\xi) = \{q_n(\xi)\}, \quad \mathbf{f} = \{p_m(x)f_m(x)\}$$

$$\mathbf{p} = \|p_m(x)p_n(\xi)\|, \quad \mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) \mathbf{p} e^{-i\alpha(x-\xi)} q(\xi) d\xi d\alpha$$

Здесь  $p_m(x)$ ,  $p_n(\xi)$  проекторы на отрезки  $[b_{2m-1}, b_{2m}]$ ,  $[b_{2n-1}, b_{2n}]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Аналогично введем систему интегральных уравнений, в которой  $K(\alpha)$  заменено на  $K_0(\alpha)$  вида

$$\mathbf{K}_0\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (1.2)$$

Для интегральных уравнений (1.2) справедлива теорема единственности и разрешимости в пространствах суммируемых функций для любых дважды непрерывно дифференцируемых правых частей [27]. Используя результаты работ [1, 2], представим соотношение для определения параметров высокочастотного резонанса. Справедлива для уравнения (1.1).

*Теорема.* Процесс, описываемый интегральным уравнением (1.1) будет являться высокочастотным резонансом тогда и только тогда, когда параметры задачи, найденные из соотношений

$$\mathbf{F}(\alpha)p_n(x)\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{f} = 0, \quad \alpha = \pm z, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

являются физически оправданными.

Здесь под физически оправданными параметрами понимаются вещественные значения, если исходные параметры были вещественными, например, параметры  $b_n$ . Они определяют носители частиц и расстояния между ними. Из соотношений (1.3) легко видеть, что они представляют целые функции, которые должны обращаться в ноль в двух точка  $a = \pm z$ , а в случае четной задачи – в одной. Очевидно, чем больше частиц, тем больше возникает вариантов для организации высокочастотного резонанса для всей совокупности частиц. В случае высокочастотного резонанса в зоне, охватывающей все частицы, формируется стоячая волна резонанса. При наличии внешнего гар-

монического воздействия, частицы будут стремиться достичь гребня стоячей волны, демонстрируя самоорганизацию. Множество решений с физически оправданными параметрами не пусто. Действительно, в случае одного объекта,  $N = 1$ , решение приведено в [1, 2], а также в цитированиях в этих работах. При этом, рассматривался абсолютно твердый штамп с плоским основанием, то есть в правой части уравнений (1.1) принималась функция  $f(x)$  равная постоянной. Поэтому физическими параметрами высокочастотного резонанса оказались параметры носителя штампа. В случае совокупности объектов количество свободных параметров возрастает, наряду с параметрами носителей добавляются параметры расстояния между объектами. Другой вариант задачи состоит в том, что вместо абсолютно твердых штампов рассматриваются более приближенные к моделям наночастиц объекты, моделируемые упакованными блочными элементами. При составлении интегральных уравнений вида (1.1), в этом случае вместо постоянных функций  $f_n(x)$  справа будут переменные по координате  $x$  функции. В этом случае количество степеней свободы в уравнении (1.3) еще больше возрастает, поскольку принимают участие параметры переменных функций  $f_n(x)$ .

Приняв в качестве упакованных блочных элементов решения, порождаемые граничной задачей для уравнений Гельмгольца, затем будем иметь возможность перенести эти результаты на наночастицы из многокомпонентных материалов [25].

Для применения теоремы остается открытой проблема построения обратного оператора  $\mathbf{K}_0^{-1}$ . Ниже приводится метод, основанный на факторизационном подходе, позволяющий получать  $\mathbf{K}_0^{-1}$ , а для достаточно протяженных носителей объектов – строить точные решения.

**2. Факторизационный подход.** Он заимствован из метода Винера–Хопфа [26]. Система интегральных уравнений (1.2), записанная в форме (1.1) продолжается на всю ось, введением новых неизвестных функций  $\varphi_-(x)$ ,  $x < b_1$ ;  $\varphi_+(x)$ ,  $x > b_{2N}$ , а также в промежутках  $\varphi_{2k}(x)$ ,  $b_{2k} < x < b_{2k+1}$ . Применим к продолженному на всю ось интегральному уравнению (1.2) преобразование Фурье. В результате получим соотношение вида

$$-e^{i\alpha b_1} \Phi_-(\alpha) - e^{i\alpha b_{2N}} \Phi_+(\alpha) + K_0(\alpha) \sum_{k=1}^N Q_{2k-1}(\alpha) - \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_{2k}(\alpha) = \sum_{m=1}^N F_{2m-1}(\alpha) \quad (2.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(\alpha) &= \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} f_{2n-1}(x) e^{i\alpha x} dx, & Q_{2n-1}(\alpha) &= \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} q_{2n-1}(x) e^{i\alpha x} dx \\ \Phi_{2n}(\alpha) &= \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} \varphi_{2n}(x) e^{i\alpha x} dx, & \Phi_-(\alpha) &= \int_{-\infty}^{b_1} \varphi_-(x) e^{i\alpha(x-b_1)} dx \\ \Phi_+(\alpha) &= \int_{b_N}^{\infty} \varphi_+(x) e^{i\alpha(x-b_{2N})} dx \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_{2n-1}^{\pm}(\alpha) &= F_{2n-1}(\alpha) \exp(-i\alpha b_{2n-0.5 \mp 0.5}), & Q_{2n-1}^{\pm}(\alpha) &= Q_{2n-1}(\alpha) \exp(-i\alpha b_{2n-0.5 \mp 0.5}) \\ \Phi_{2n}^{\pm}(\alpha) &= \Phi_{2n}(\alpha) \exp(-i\alpha b_{2n+0.5 \mp 0.5}) \end{aligned}$$

Для исследования и решения функционального уравнения (2.1), следуя [26], введем обозначения системы операторов факторизации вида

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) &= \{\Psi(\alpha)\}^+ + \{\Psi(\alpha)\}^- \\ \{\Psi(\alpha)\}^\pm &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\eta)}{(\eta - \alpha)} d\eta, \quad \alpha \in C^\pm \\ K_0(\alpha) &= K_{0+}(\alpha)K_{0-}(\alpha) \\ K_{0\pm}(\alpha) &= \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K_0(\eta)}{(\eta - \alpha)} d\eta \right], \quad \alpha \in C^\pm\end{aligned}$$

Здесь  $C^+$  и  $C^-$  обозначают верхнюю и нижнюю комплексные полуплоскости соответственно. Функции  $\{\Psi(\alpha)\}^\pm$ , и  $K_{0\pm}(\alpha)$  регулярны в областях  $C^\pm$  и, кроме того, последние не имеют там нулей. Условия, налагаемые на функции для выполнения факторизаций, оговорены в [26] и в данном случае выполняются. Применяя метод факторизации в варианте работ [26], интегральное уравнение сводим к решению системы одномерных интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором в пространстве непрерывных с весом функций на всей оси

$$\begin{aligned}X_{2p-1}^+(\alpha) &= -\{R(\alpha)X_{2p-3}^-(\alpha)e^{-i\alpha(b_{2p-1}-b_{2p-2})}\}^+ - \\ &- \{R(\alpha)X_{2p}^+(\alpha)e^{i\alpha(b_{2p}-b_{2p-1})}\}^+ + \{K_-^{-1}(\alpha)\Psi_{2p-1}^+(\alpha)\}^+ \\ X_{2p-1}^-(\alpha) &= -\{R^{-1}(\alpha)X_{2p+1}^+(\alpha)e^{i\alpha(b_{2p+1}-b_{2p})}\}^- - \\ &- \{R^{-1}(\alpha)X_{2(p-1)}^-(\alpha)e^{-i\alpha(b_{2p}-b_{2p-1})}\}^- + \{K_+^{-1}(\alpha)\Psi_{2p-1}^-(\alpha)\}^- \\ X_{2p}^+(\alpha) &= -\{R^{-1}(\alpha)X_{2p+1}^+(\alpha)e^{i\alpha(b_{2p+1}-b_{2p})}\}^+ - \\ &- \{R^{-1}X_{2(p-1)}^-(\alpha)e^{-i\alpha(b_{2p}-b_{2p-1})}\}^+ + \{K_{0+}^{-1}(\alpha)\Psi_{2p-1}^+(\alpha)\}^+ + \\ &+ K_{0+}^{-1}(\alpha)\Psi_{2p+1}^+(\alpha)e^{i\alpha(b_{2p+1}-b_{2p})}, \quad p = 1, 2, \dots, N \\ X_{2(p-1)}^-(\alpha) &= -\{R(\alpha)X_{2p}^+(\alpha)e^{i\alpha(b_{2p}-b_{2p-1})}\}^- - \\ &- \{R(\alpha)X_{2p-3}^-(\alpha)e^{-i\alpha(b_{2p-1}-b_{2p-2})}\}^- + \{K_{0-}^{-1}(\alpha)\Psi_{2p-1}^+(\alpha)\}^- + \\ &+ K_{0-}^{-1}(\alpha)\Psi_{2p-3}^-(\alpha)e^{i\alpha(b_{2p-1}-b_{2p-2})} \\ X_{2N+1}^+(\alpha) &= X_{-1}^-(\alpha) = \Psi_{2N+1}^+(\alpha) = \Psi_{-1}^-(\alpha) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, N \\ R(\alpha) &= K_{0+}(\alpha)K_{0-}^{-1}(\alpha)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}X_{-1}^- &= -K_{0-}^{-1}(\alpha)\Phi_-, \quad X_{2N}^+ = -K_{0+}^{-1}(\alpha)\Phi_+, \quad p = 1, 2, \dots, N \\ X_{2p-1}^+ &= K_{0+} \sum_{k=p}^N Q_{2k-1}^+ e^{i\alpha(b_{2k-1}-b_{2p-1})}, \quad X_{2p-1}^- = K_{0-} \sum_{k=1}^p Q_{2k-1}^- e^{-i\alpha(b_{2p}-b_{2k})} \\ X_{2p}^+ &= -K_{0+}^{-1} \sum_{k=p}^N \Phi_{2k}^+ e^{i\alpha(b_{2k}-b_{2p})}, \quad X_{2(p-1)}^- = -K_{0-}^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} \Phi_{2k}^- e^{-i\alpha(b_{2p-1}-b_{2k+1})} \\ \Psi_{2p-1}^+ &= K_{0+} \sum_{k=p}^N F_{2k-1}^+ e^{i\alpha(b_{2k-1}-b_{2p-1})}, \quad \Psi_{2p-1}^- = K_{0-} \sum_{k=1}^p F_{2k-1}^- e^{-i\alpha(b_{2p}-b_{2k})}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Особенностью системы интегральных уравнений (2.2) для случая, когда мероморфная функция  $K_0(\alpha)$  не имеет вещественных нулей и полюсов, являются следующие ее свойства. Система (2.2) является замкнутой, то есть число неизвестных совпадает с числом уравнений. Другой особенностью является непрерывность операторов в правой части системы уравнений в пространстве непрерывных на вещественной оси с не-

которым весом функций. Норма оператора правой части системы интегральных уравнений стремится к нулю при  $b_{2p+1} - b_{2p} \rightarrow \infty, b_{2p} - b_{2p-1} \rightarrow \infty, p = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, при достаточно больших значениях этих параметров, систему можно решать методом последовательных приближений. Построив решения интегральных уравнений (2.2), по формулам (2.3) последовательно можно найти все неизвестные и затем составить соотношения (1.3). Эти соотношения дают возможность найти условия возникновения высокочастотного резонанса, который даст возможность самоорганизоваться наночастицам.

Построив решение системы интегральных уравнений (1.2), можно оставить носители  $b_{2p+1} - b_{2p}$  объектов неизменными и вычислить на избранной частоте  $\omega$  по формуле (1.3) только параметры расстояний между объектами  $b_{2p} - b_{2p-1}$ . Внося эти входные параметры в левую часть соотношения (1.1) и вычислив его значение на вещественной оси, получим в зоне, содержащей все объекты стоячую волну, колеблющуюся с частотой  $\omega$ , вовлекая на свой гребень имеющие массу поверхностные объекты.

**Вывод.** Свойство самоорганизации присуще наночастицам материалов самых разных физико-химических свойств. Поэтому имеется гипотеза, что в основе этого процесса находится явление, независимое от физико-химических свойств и присущее всем им. К числу такого явления, естественно, отнести обычное механическое поведение этих объектов, которое также богато различными особенностями. К ним относится явление высокочастотного резонанса в средах с неоднородностями, в рамках которого доступно данное в настоящей статье объяснение самоорганизации. В том случае, если на самоорганизацию влияют какие-нибудь физико-химические свойства, то это можно будет выявить, применяя новый универсальный метод моделирования [25], позволяющий представлять решения векторных многокомпонентных сред посредством разложения по скалярным, используемым в настоящей работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00128.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А.* Некоторые соотношения для решения динамических смешанных задач на всей частотной оси // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 2. С. 312–316.
2. *Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуграниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 74–83.
3. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–186  
<https://doi.org/10.1134/S1028335809070064>
4. *Гуткин М.Ю., Овидько И.А.* Физическая механика деформируемых наноструктур. Т. 1. СПб.: Янус, 2003. 194 с.
5. *Гусев А.И.* Наноматериалы, структуры, технологии. М.: Физматлит, 2007. 416 с.
6. *Рамбиди Н.Г.* Нанотехнологии и молекулярные компьютеры. М.: Физматлит, 2007, 416 с.
7. *Кобаяси Н.* Введение в нанотехнологию. М.: Бином, 2007. 136 с.
8. *Arghavan S., Singh A.V.* On the vibrations of single-walled carbon nanotubes // J. Sound Vibr. 2011. V. 330. No. 13. P. 3102–3122.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.01.032>
9. *Kang J.W., Kwon O.K.* A molecular dynamics simulation study on resonance frequencies comparison of tunable carbon-nanotube resonators // Appl. Surf. Sci. 2012. V. 258. No. 6. P. 2014–2016.  
<https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2011.05.026>
10. *Ouakad H.M., Younis M.I.* Nonlinear dynamics of electrically actuated carbon nanotube resonators // J. Computat. Nonlin. Dyn. 2009. V. 5. P. 011009.  
<https://doi.org/10.1115/1.4000319>

11. *Poot M., Witkamp B., Otte M.A., van der Zant H.S.J.* Modelling suspended carbon nanotube resonators // *Phys. Status Solidi B*. 2007. V. 244. No. 11. P. 4252–4256.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.200776130>
12. *Sapmaz S., Blanter Y.M., Gurevich L., van der Zant H.S.J.* Carbon nanotubes as nanoelectromechanical systems // *Phys. Rev. B*. 2003. V. 67. No. 23. P. 235414.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.67.235414>
13. *Yoon J.W., Hwang H.J.* Molecular dynamics modeling and simulations of a single-walled carbon-nanotube-resonator encapsulating a finite nanoparticle // *Computat. Mater. Sci.* 2011. V. 50. No. 9. P. 2741–2744.  
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.04.033>
14. *Yin J., Zhang Z., Li X. et al.* Waving potential in graphene // *Nature Commun.* 2014. V. 5. P. 3582.  
<https://doi.org/10.1038/ncomms4582>
15. *Yin J., Li X., Yu J., Zhang Z., Zhou J., Guo W.* Generating electricity by moving a droplet of ionic liquid along graphene // *Nature Nanotech.* 2014. V. 9. P. 378–383.  
<https://doi.org/10.1038/nnano.2014.56>
16. *Liu X., Xu T., Wu X., Zhang Z., Yu J., Qiu H., Hong J., Jin C., Li J., Wang X., Sun L., Guo W.* Top-down fabrication of sub-nanometre semiconducting nanoribbons derived from molybdenum disulfide sheets // *Nat. Commun.* 2013. V. 4. P. 1776.  
<https://doi.org/10.1038/ncomms2803>
17. *Guo W., Liu X.* 2D materials: Metallic when narrow // *Nature Nanotech.* 2014. V. 9. P. 413–414.  
<https://doi.org/10.1038/nnano.2014.106>
18. *Lei X.W., Natsuki T., Shi J.X., Ni Q.Q.* An atomic-resolution nanomechanical mass sensor based on circular monolayer graphene sheet: Theoretical analysis of vibrational properties // *J. Appl. Phys.* 2013. V. 113. P. 154313.  
<https://doi.org/10.1063/1.4802438>
19. *Lei X.W., Nakatani A.* A continuum mechanics analysis of lattice defects in carbon nanotube // 9th European Solid Mechanics Conference (ESMC). Madrid, 2015.
20. *Ding F., Jiao K., Wu M., Yakobson B.I.* Pseudoclimb and dislocation dynamics in superplastic nanotubes // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. P.075503.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.075503>
21. *Lengiewicz J., Korelc J., Stupkiewicz S.* Automation of finite element formulations for large deformation contact problems // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2011. V. 85. P. 1252–1279.  
<https://doi.org/10.1002/nme.3009>
22. *Roland T., Reirant D., Lu K., Lu J.* Fatigue life improvement through surface nanostructuring of stainless steel by means of surface mechanical attrition treatment // *Scripta Mater.* 2006. V. 54. P. 1949–1954.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2006.01.049>
23. *Tian J., Villegas J., Yuan W., Fielden D., Shaw L., Liaw P., Klarstrom D.* A study of the effect of nanostructured surface layers on the fatigue behaviors of a C-2000 superalloy // *Mater. Sci. Eng. A*. 2007. V. 468–470. P. 164–170.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.10.150>
24. *Lu K., Lu J.* Surface nanocrystallization (SNC) of metallic materials—presentation of the concept behind a new approach // *J. Mater. Sci. Technol.* 1999. V. 15. P. 193–197.
25. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // *ДАН*. 2021. Т. 499. С. 21–26.  
<https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>
26. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

УДК 539.22, 539.32

**ВЛИЯНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ И ТИПА МЕЖАТОМНОЙ СВЯЗИ НА УПРУГИЕ СВОЙСТВА ОДНОАТОМНЫХ И ДВУХАТОМНЫХ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ**© 2022 г. А. И. Епишин<sup>а,\*</sup>, Д. С. Лисовенко<sup>б,\*\*</sup><sup>а</sup>*Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения им. А.Г. Мерджанова РАН, Черноголовка, Россия*<sup>б</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*\**e-mail: a.epishin2021@gmail.com*\*\**e-mail: lisovenk@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принята к публикации 27.06.2022 г.

Проанализирована зависимость упругих свойств одноатомных (простых веществ) и двухатомных (соединений типа АВ) кристаллов кубической сингонии от типов их кристаллической структуры и межатомной связи. Показано, что упругие свойства этих кристаллов следуют одному из двух трендов – ковалентному или ионному. Продемонстрировано, что ауксетики (материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона) выявляются среди одноатомных кристаллов со структурой А1 (ГЦК), относящимся к щелочноземельным, переходным и постпереходным металлам, актиноидам и лантаноидам, и одноатомных кристаллов со структурой А2 (ОЦК), относящимся к щелочным металлам. Среди бинарных двухатомных соединений наибольшее число ауксетики выявляется среди алмазоподобных кристаллов со структурой цинковой обманки В3, имеющих стехиометрию  $A^N B^{8-N}$ .

*Ключевые слова:* кубические кристаллы, ауксетики, коэффициент Пуассона, анизотропия упругих свойств

DOI: 10.31857/S0572329922060058

**1. Введение.** Изучение упругих свойств материалов является постоянно актуальной задачей, так как величины упругих характеристик требуются во множестве инженерных и научных расчетов. Значительная часть твердых тел имеет кубическую кристаллическую структуру, в том числе кристаллы многих простых веществ и двухатомных бинарных соединений со стехиометрией АВ. Кубические кристаллы многих металлов имеют гранецентрированную структуру А1 (ГЦК структура меди) или объемно-центрированную структуру А2 (ОЦК структура вольфрама), элементы подгруппы IVA (С, Si, Ge,  $\alpha$ -Sn) имеют структуру алмаза А4, а Po и U – примитивную кубическую структуру А<sub>1</sub>. Бинарные соединения АВ образуют следующие кубические структуры: В1 – структуру каменной соли NaCl, состоящую из двух ГЦК подрешеток элементов А и В, с расположением атомов в единой решетке как в примитивной решетке; В2 – структуру хлорида цезия CsCl, состоящую из двух примитивных подрешеток А и В, с расположением атомов в единой решетке как в ОЦК; или В3 – структуру цинковой обманки  $\beta$ -ZnS, также состоящей из двух ГЦК – подрешеток, в которой, однако, А- и В-подрешетки расположены относительно друг друга иначе, чем в структуре NaCl – ближай-

шими соседями каждого атома являются четыре атома противоположного типа, расположенные в вершинах правильного тетраэдра, т.е. также как в структуре алмаза.

Упругие свойства кристаллов с кубической структурой исследовали во многих работах [1–21]. В [1–3] анализировались стационарные и экстремальные значения модуля Юнга. В этих работах было продемонстрировано, что кристаллы с кубической структурой имеют три стационарных значения модуля Юнга. Два из трех значений могут являться экстремальными значениями. В [4] были проанализированы кристаллографические направления, в которых могут наблюдаться экстремальные значения модуля сдвига кубических кристаллов. Авторами работы [5] была продемонстрирована связь между экстремальными значениями модуля Юнга и модуля сдвига. В [6–21] был проведен анализ изменчивости коэффициента Пуассона для кристаллов с кубической структурой. В теории упругости анизотропного тела положительная определенность энергии деформации не накладывает каких-либо общих ограничений на коэффициенты Пуассона упругих материалов как в случае кристаллов с кубической структурой, так и кристаллов с триклинной, моноклинной, орторомбической, тетрагональной, тригональной (ромбоэдрической) и гексагональной структурой [6]. В [7–21] было продемонстрировано, что кубические кристаллы могут принимать не только положительные значения коэффициента Пуассона, но и отрицательные значения. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона стали называть ауксетиками. Термин “ауксетики” был предложен профессором Кеном Эвансом [22] для материалов, которые расширяются в поперечном направлении при приложении к ним растягивающей продольной нагрузки. Все кристаллические материалы делятся на неауксетики (материалы, у которых коэффициент Пуассона принимает положительные значения при любой ориентации кристаллической решетки относительно направления растяжения), частичные ауксетики (материалы, у которых коэффициент Пуассона принимает как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от ориентации кристаллической решетки относительно направления растяжения) и полные ауксетики (материалы, у которых коэффициент Пуассона принимает отрицательные значения при любой ориентации кристаллической решетки относительно направления растяжения) [14, 15, 18]. В [15, 18] показано, что более чем для 300 кристаллов коэффициент Пуассона может принимать отрицательные значения. Частичными ауксетиками являются кристаллы таких металлов как железо, никель, золото, серебро, литий, натрий, калий, кальций и т.д. В [12, 16] проанализированы экстремальные значения коэффициента Пуассона для кристаллов с кубической структурой. В этих работах показано, что кроме четырех основных стационарных значений, могут наблюдаться экстремально высокие значения коэффициента при растяжении в направлении близком к [111]. Такие значения коэффициента Пуассона свойственны метастабильным кристаллам, таким как кристаллы с эффектом памяти формы [16]. В [10] для ОЦК-кристаллов была предложена структурная модель, поясняющая ауксетическое поведение кристаллов. В [18] представлен обзор ауксетических материалов с кубической структурой, таких как кубические кристаллы, слоистые композиты и нано/микротрубки.

В настоящей работе будут рассматриваться одноатомные (простые вещества) и двухатомные (соединений типа АВ) кристаллы вышеуказанных структур кубической сингонии с металлической, ионной и ковалентной связью. Задачей данного исследования является установление зависимостей упругих свойств кристаллов от типа их структуры и характера межатомной связи. При анализе будет использоваться характеристическая диаграмма упругих свойств, предложенная авторами ранее [16]. Особое внимание в исследовании будет уделено структурным и физическим факторам, обуславливающим ауксетические упругие свойства кристаллов. В последнее время этим материалам уделяется большое внимание [8, 18, 23–26] потому, что это свойство материалов-ауксетиков интересно с практической точки зрения, так как оно может быть использовано при конструировании специальных устройств, а также представляет

теоретический интерес, так как исходя из такого аномального упругого поведения твердых тел можно судить о природе межатомного взаимодействия.

**2. Характеристические диаграммы упругих свойств кубических кристаллов.** Перед тем как перейти к рассмотрению диаграмм упругих свойств кубических кристаллов определимся с обозначением используемых переменных. Упругие свойства кубических кристаллов могут быть охарактеризованы либо тремя компонентами упругих жесткостей  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  либо тремя компонентами упругих податливостей  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{44}$ , которые связаны между собой соотношениями

$$c_{11} = (s_{11} + s_{12})/s^* \quad (2.1)$$

$$c_{12} = -s_{12}/s^* \quad (2.2)$$

$$c_{44} = 1/s_{44} \quad (2.3)$$

где  $s^* = s_{11}^2 + s_{11}s_{12} - 2s_{12}^2 = (s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12})$ . На компоненты жесткости накладываются следующие термодинамические ограничения:  $c_{11} > 0$ ,  $-0.5 < c_{12}/c_{11} < 1$  и  $c_{44} > 0$ . При этом соотношения (2.1), (2.2) и (2.3) инвариантны относительно взаимной замены переменных  $c_{ij} \leftrightarrow s_{ij}$ .

Упругую анизотропию кубических кристаллов будем описывать коэффициентом анизотропии  $A$ , равного комбинации упругих податливостей  $s = s_{11} - s_{12} - s_{44}/2$ , нормализованной на  $s_{11}$

$$A = s/s_{11} \quad (2.4)$$

Для кубических кристаллов преобразование компонент тензора упругих податливостей  $s_{ijkl}$  при изменении системы координат имеет следующий вид

$$s_{i'j'k'l'} = s_{ijkl} + s \cdot \Phi_{i'j'k'l'} \quad (2.5)$$

где  $s_{ijkl}$  и  $s_{i'j'k'l'}$  — соответственно компоненты тензора упругих податливостей в базовой системе координат  $\langle 001 \rangle$  и произвольной новой системе координат,  $\Phi_{i'j'k'l'} = \sum_{m=1}^3 l_{mi} l_{mj} l_{mk} l_{ml}$  — ориентационный фактор, и  $l_{mi}$  — направляющие косинусы между  $m$ -й и  $i$ '-й осями старой и новой систем координат. Из (2.5) видно, что кубические кристаллы упруго изотропны, т.е.  $s_{i'j'k'l'}$  не зависит от ориентационного фактора  $\Phi_{i'j'k'l'}$ , если  $s = 0$ . Из соотношения (2.5) следуют соотношения для модулей нормальной упругости  $E_{[hkl]}$

$$E_{[001]}/E_{[111]} = 1 - 2A/3 \quad (2.6)$$

$$E_{[001]}/E_{[011]} = 1 - A/2 \quad (2.7)$$

Индексы в обозначениях модуля Юнга указывают направления растяжения. В случае положительной анизотропии ( $A > 0$ ) выполняется неравенство  $E_{[111]} > E_{[011]} > E_{[001]}$ , тогда как при отрицательной анизотропии ( $A < 0$ ) имеет место обратная закономерность  $E_{[111]} < E_{[011]} < E_{[001]}$ . Следует отметить, что характеристика упругой анизотропии коэффициентом  $A$  подобна характеристике известным коэффициентом Зенера  $A^Z = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12}) = 2(s_{11} - s_{12})/s_{44}$ , поскольку они связаны между собой соотношением  $A = (s_{44}/2s_{11})(A^Z - 1)$ , где  $s_{44}/2s_{11} > 0$ . Поэтому случаи отрицательной, нулевой или положительной анизотропии, характеризуемые коэффициентом  $A$ , т.е. случаи  $A > 0$ ,  $A = 0$ ,  $A < 0$ , соответствуют случаям  $A^Z > 1$ ,  $A^Z = 1$ ,  $A^Z < 1$ .

Вторым параметром упругой анизотропии, который будет анализироваться в настоящей работе, является коэффициент Пуассона в базовой системе координат  $\langle 001 \rangle$

$$\nu_0 \equiv \nu_{[001][010]} = -s_{12}/s_{11} \quad (2.8)$$

Здесь и далее индексы во второй квадратной скобке указывают направления растяжения, а индексы в первой квадратной скобке – направление поперечной деформации. Использование параметров  $A$  и  $\nu_0$  в данной работе объясняется тем, что экстремальные значения коэффициента Пуассона могут быть описаны ими через простые соотношения

$$\nu_{[01\bar{1}][011]} = (\nu_0 - A/2) / (1 - A/2) \quad (2.9)$$

$$\nu_{[100][011]} = \nu_0 / (1 - A/2) \quad (2.10)$$

$$\nu_{[001][010]} = \nu_0 \quad (2.11)$$

где  $\nu_{[01\bar{1}][011]}$ ,  $\nu_{[100][011]}$  и  $\nu_{[001][010]}$  – разные экстремальные значения, принимаемые коэффициентом Пуассона в зависимости от знаков  $A$  и  $\nu_0$ . Подробный анализ экстремальных значений коэффициента Пуассона кубических кристаллов представлен в [16].

На рис. 1 представлены двумерные диаграммы упругих свойств кубических кристаллов. Первая (рис. 1,а), с координатными осями  $c_{44}/c_{11}$  и  $c_{12}/c_{11}$ , была предложена Блэкманом в [27], вторая (рис. 1,б), с осями  $A$  и  $\nu_0$ , – Епишиным и Лисовенко в [16]. Жирные черные линии на диаграммах – границы термодинамически допустимых значений упругих констант. Штриховые линии – границы характеристических областей коэффициента Пуассона: 1-я область – “Неауксетики” (Nonauxetics), 2-я и 3-я области – “Частичные ауксетики” (Partial auxetics) и 4-я – “Полные ауксетики” (Complete auxetics). Видно, что на обеих диаграммах нижние и верхние характеристические области разделены горизонтальными прямыми линиями, но негоризонтальные границы имеют разный вид. На диаграмме  $A - \nu_0$ -негоризонтальная граница представляет собой прямую линию, описываемую простым уравнением:

$$\nu_0 = A/2 \quad (2.12)$$

Эта линия начинается на нижней границе допустимых значений  $\nu_0$ , с точки с координатами ( $A = -2$ ;  $\nu_0 = -1$ ), проходит через начало координат ( $A = 0$ ;  $\nu_0 = 0$ ) и заканчивается на верхней границе допустимых значений  $\nu_0$  в точке ( $A = 1$ ;  $\nu_0 = 0.5$ ).

На диаграмме  $c_{44}/c_{11} - c_{12}/c_{11}$  негоризонтальная граница описывается квадратичным уравнением

$$\frac{c_{44}}{c_{11}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} - 2 \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

и имеет параболический вид.

Цветные линии на диаграммах имеют следующий смысл.

Линии Коши (красные линии) соответствуют соотношению Коши. Если все атомы расположены в узлах кристаллической решетки, а межатомные силы являются центральными силами и могут быть описаны гармоническим потенциалом, то для упругих констант должны выполняться соотношения Коши  $c_{ijk} = c_{jik}$  ( $i \neq j, k$ ) [28]. Для кубических кристаллов соотношения Коши сводятся к одному соотношению:

$$c_{12} = c_{44} \quad (2.14)$$

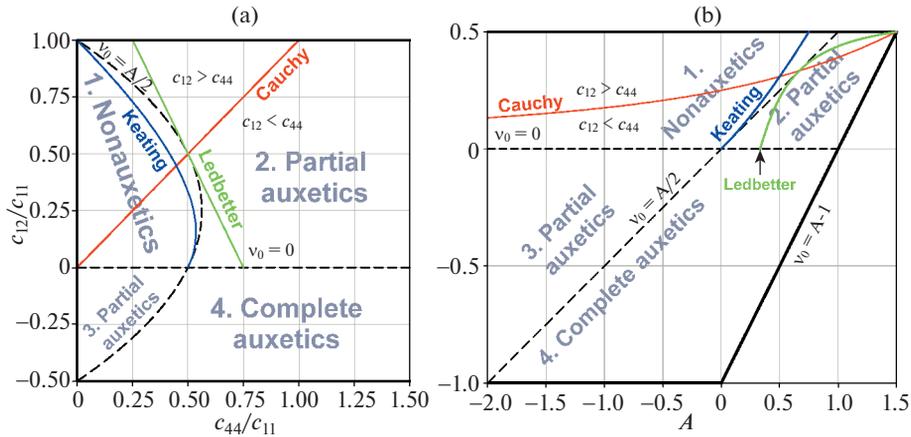


Рис. 1. Диаграммы упругих свойств кубических кристаллов. (а) Блэкмана  $c_{44}/c_{11} - c_{12}/c_{11}$ , (б) Епишина и Лисовенко  $A - v_0$ .

На диаграмме  $c_{44}/c_{11} - c_{12}/c_{11}$  соотношение (2.14) выполняется на исходящей из центра координат биссектрисе угла между осями  $c_{44}/c_{11}$  и  $c_{12}/c_{11}$ . Согласно литературе, например [29], многие из кубических кристаллов следуют именно этому тренду.

На диаграмме  $A - v_0$  зависимость (2.14) имеет нелинейный вид

$$v_0 = \frac{2A - 3 + \sqrt{(3 - 2A)^2 + 16}}{8} \quad (2.15)$$

Отсюда и далее будем называть кривую, описываемую уравнением (2.15), кривой или линией Коши. На диаграмме  $A - v_0$  кривая Коши начинается в правом верхнем углу ( $A = 1.5; v_0 = 0.5$ ) и асимптотически приближается к  $v_0 = 0$  при  $A \rightarrow -\infty$ .

Следует отметить, что разность  $p_c = c_{12} - c_{44}$  называют давлением Коши. Поэтому линия, соответствующая соотношению Коши, разделяет диаграммы на две части: верхнюю, где давление Коши положительно ( $c_{12} > c_{44}$ ), и нижнюю, где давление Коши отрицательно ( $c_{12} < c_{44}$ ).

Линии Китинга (синие линии) теоретически предсказаны Китингом [30, 31] для алмазоподобных кристаллов с ковалентными связями методом наложения необходимых условий инвариантности на энергию деформации кристалла. В величинах упругих жесткостей  $c_{ij}$  оно имеет вид:

$$2c_{44}(c_{11} + c_{12}) = (c_{11} - c_{12})(c_{11} + 3c_{12}) \quad (2.16)$$

а в координатах  $A$  и  $v_0$ :

$$v_0 = \frac{1}{2}(A - 1 + \sqrt{A^2 + 1}) \quad (2.17)$$

Поэтому как на диаграмме  $c_{44}/c_{11} - c_{12}/c_{11}$  так и на диаграмме  $A - v_0$  зависимость Китинга имеет нелинейный вид.

Линии Ледбеттера (зеленые линии) имеют значение подобное кривым Китинга, но эта зависимость получена эмпирически Ледбеттером и соавторами [29] путем линейной аппроксимации экспериментальных точек на диаграмме  $c_{44}/c_{11} - c_{12}/c_{11}$ , соответ-

ствующих одноатомным и двухатомным ковалентным кубическим кристаллам. В величинах упругих жесткостей  $c_{ij}$  уравнение этой линии имеет вид:

$$c_{11} = \frac{2}{3}(c_{12} + 2c_{44}) \quad (2.18)$$

В координатах  $A - \nu_0$  зависимость Ледбеттера нелинейна:

$$\nu_0 = \frac{5A - \sqrt{25A^2 + 4(1 - 3A)}}{2} \quad (2.19)$$

Поэтому на диаграмме  $A - \nu_0$  зеленая линия искривлена. Краткий вывод формул (2.13), (2.15), (2.17), (2.19) представлен в пункте 4.

Примечательно, что прямолинейная граница, разделяющая 1-ую и 2-ую характеристические области коэффициента Пуассона, и описываемая уравнением (2.12), расположена между кривыми Китинга и Ледбеттера, см. рис. 1, b. С уменьшением  $\nu_0$  кривая Китинга плавно примыкает к этой границе в начале координат ( $A = 0$ ;  $\nu_0 = 0$ ), т.е. для обеих линий производная  $d\nu_0/dA(A = 0) = 1/2$ , а кривая Ледбеттера плавно приближается к данной границе при увеличении  $\nu_0$  и касается ее в точке ( $A = 2/3$ ;  $\nu_0 = 1/3$ ) с идентичным же наклоном  $d\nu_0/dA(A = 2/3) = 1/2$ .

Достоинством широко известной диаграммы  $c_{44}/c_{11} - c_{12}/c_{11}$  является ее простота. В то же время эта диаграмма неудобна для анализа величин коэффициента упругой анизотропии  $A$  и коэффициента Пуассона  $\nu_0$ . Поскольку именно эти характеристики упругости рассматриваются в настоящей работе, ниже будет использоваться диаграмма  $A - \nu_0$ , где переменными координатных осей являются  $A$  и  $\nu_0$ . Преимуществом последней диаграммы является также линейность границ, разделяющих характеристические области ауксетичности, что упрощает анализ и идентификацию типа ауксети-ков.

**3. Анализ зависимости упругих свойств от типа структуры и межатомной связи.** На рис. 2 представлена диаграмма  $A - \nu_0$  для кубических металлов с A1 структурой меди (ГЦК) и A2 структурой вольфрама (ОЦК). Каждая точка на диаграмме имеет координаты  $(A, \nu_0)$ , определяемые упругими свойствами металла, название которого указано рядом. Красные символы  $\blacktriangledown$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacklozenge$ ,  $\blacklozenge$  соответствуют ГЦК металлам, синие символы  $\blacktriangle$ ,  $\bullet$  – ОЦК металлам. Разные обозначения точек соответствуют разным типам металлов: щелочным (Li, K, Na, Cs), редкоземельным (Ca, Sr), переходным (V, Cr, Fe, Ni, Cu, Nb, Mo, Rh, Pd, Ag, Ta, W, Ir, Pt, Au), постпереходным (Al, Pb), актиноидам (Ce, Yb) и лантаноидам (Th). Как видно из рис. 2 все ГЦК металлы положительно анизотропны ( $A > 0$ ), тогда как часть ОЦК металлов, V, Cr, Nb и Mo, показывает отрицательную анизотропию ( $A < 0$ ). ОЦК металл W практически изотропен ( $A \approx 0$ ). Точки большинства металлов сконцентрированы в верхней правой части диаграммы, при этом их плотность особенно высока вблизи угла диаграммы ( $A = 1.5$ ;  $\nu_0 = 0.5$ ) в окрестности треугольной области, ограниченной кривой Коши и прямой  $\nu_0 = A/2$ . Эти металлы являются частичными ауксетиками, так как их точки  $(A, \nu_0)$  лежат правее граничной прямой  $\nu_0 = A/2$ , т.е. в зоне ауксетичности 2. Наиболее приближены к углу диаграммы точки щелочных ОЦК металлов Li, K, Na и щелочноземельный ГЦК металл Sr. Эти металлы имеют наименьшее значение коэффициента Пуассона среди кубических кристаллов, представленных на рис. 2:  $\nu_{\min} = -0.54$  у Li,  $\nu_{\min} = -0.44$  у Na,  $\nu_{\min} = -0.42$  у K,  $\nu_{\min} = -0.26$  у Sr [15, 18]. Их коэффициент анизотропии  $A$  и коэффициент  $\nu_0$  близки к максимально возможным значениям и соответственно находятся в интервалах 1.22–1.29 и 0.432–0.457. Несколько далее от угла диаграммы отстоят щелочноземельный ГЦК металл Ca и щелочной ОЦК металл Cs, которые имеют большие по аб-



ком “?””. Причиной смещения Ta, Al, V и Nb в область положительных “давлений Коши” является низкое значение их сдвиговой константы  $c_{44}$  по сравнению с константой  $c_{12}$ . Для этих металлов отношения  $c_{44}/c_{12}$  соответственно равны:  $\approx 0.53$ ,  $\approx 0.48$ ,  $\approx 0.39$  и  $\approx 0.23$ .

На рис. 3 сравниваются  $A$  и  $v_0$  кристаллов, в которых атомы имеют ОЦК пространственное расположение в общей кристаллической решетке, но имеют разный тип межатомной связи: ОЦК-металлы – металлическая, В2 интерметаллиды – преимущественно металлическая, частично ионно-ковалентная и В2 ионные кристаллы – преимущественно ионная, частично ковалентная. Видно, что все точки, независимо от типа межатомной связи в кристаллах, имеют тенденцию располагаться вблизи кривой Коши, однако имеет место также общая закономерность смещения их вверх, где  $c_{12} > c_{44}$ . Это особенно явно выражено для металлов V и Nb, как отмечалось выше, а также для интерметаллида CoZr. Сильное смещение вверх одной из точек интерметаллида TiFe, помеченной знаком “?”, очевидно ошибочно, так как это не согласуется с двумя другими точками TiFe, расположенными вблизи кривой Коши, построенными по данным из двух независимых источников [32, 42]. Характерно, что В2 интерметаллиды, также как и ОЦК-металлы, могут быть положительно или отрицательно анизотропны. Большинство положительно анизотропны ( $A > 0$ ), но некоторые, YCu и TiFe, отрицательно анизотропны ( $A < 0$ ), а интерметаллид CoZr – изотропен ( $A \approx 0$ ). Все представленные на рис. 3 В2 ионные кристаллы отрицательно анизотропны и являются неауксетиками, однако из этого видимо не следует делать вывод о том, что это свойство является общим для ионных кристаллов с В2 структурой, так как число представленных точек мало. Следует отметить, что число известных В2 ионных кристаллов (структура типа CsCl) весьма ограничено, например, CsCl, CsBr, TlCl, TlBr (представлены на рис. 3) и под высоким давлением RbCl, RbBr и RbI. Кристаллы со структурой типа CsCl являются соединениями одновалентных атомов металла и галогена. При этом ОЦК-расположение атомов возможно если атом металла достаточно большой, как, например, атом Cs. В противном случае отрицательные ионы галогенных атомов сойдутся на расстояние, при котором начнется их отталкивание.

На рис. 4 сравниваются  $A$  и  $v_0$  ионных кристаллов со структурой В1 и В2. В обоих случаях межатомная связь ионная, но разное пространственное расположение атомов. В случае В1 (структурный тип NaCl) атомы расположены в общей примитивной кристаллической решетке, в случае В2 (структурный тип CsCl) – в общей ОЦК-решетке. Видно, что точки, соответствующие большинству кристаллов, лежат вблизи кривой Коши, хотя и несколько смещены вверх, где  $c_{12} > c_{44}$ . Из общей тенденции несколько выпадают точки TlCl и TlBr, однако в отличие от остальных представленных на рис. 4 ионных соединений, в данных соединениях положительный ион  $Tl^+$  является не щелочным металлом, а полуметаллом. Также видно, что группа LiAM (AM = F, Cl, Br или I) имеет тенденцию быть выстроенной вдоль участка локального совпадения кривой Ледберга и прямой  $v_0 = A/2$ , где должны располагаться точки ковалентных кристаллов. Причина этого, видимо, заключается в том, что у соединений LiX имеется небольшая доля ковалентной связи. Отметим, что в группе LiAM (AM = F, Cl, Br или I) ауксетические свойства проявляет только LiF ( $v_{\min} = -0.02$ ), т.к. фтор F располагается во 2-м периоде таблицы Д.И. Менделеева, тогда как Cl, Br и I соответственно в 3-м, 4-м и 5-м.

На рис. 5 представлена диаграмма  $A - v_0$  отдельно для кубических кристаллов со структурой типа NaCl (В1). Такую структуру образуют бинарные соединения AIBVII т.е. галогениды (фториды, хлориды, бромиды и иодиды) таких щелочных элементов как литий (LiF, LiCl, LiBr, LiI), натрий (NaF, NaCl, NaBr, NaI), калий (KF, KCl, KBr, KI) и рубидий (RbF, RbCl, RbBr, RbI), а также хлорид и бромид серебра (AgCl, AgBr). Кроме того, структуру типа NaCl имеют некоторые окислы металлов, например, MgO

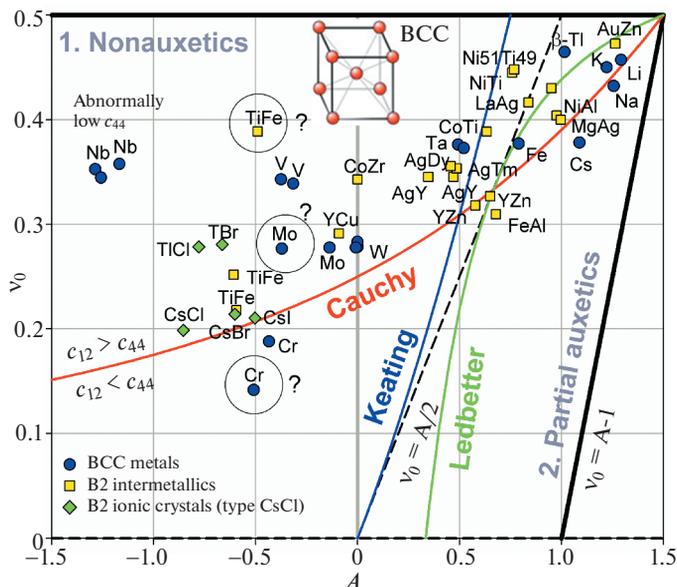


Рис. 3. Сравнение  $A$  и  $\nu_0$  кубических кристаллов с ОЦК расположением атомов в общей кристаллической решетке: A1 металлов (ОЦК (BCC)), B2 интерметаллидов и B2 ионных кристаллов (структурный тип CsCl). Диаграмма построена с использованием упругих констант из [32, 38–43].

и CaO (бинарные соединения типа A1BVI). Для каждой точки на рис. 5 приведена доля ионной связи  $f_i$ , характеризующая степень поляризации межатомной связи. Данные значения  $f_i$  были рассчитаны Филиппсом [45] с использованием спектроскопической теории межатомной связи. Проведенное Филиппсом сравнение с результатами предыдущих термодинамических расчетов  $f_i$ , проведенных Полингом [49], и расчетов Кулсона с соавторами [50], основанных на концепции валентных связей, показало в целом удовлетворительное совпадение. На рис. 5 видна тенденция: при смещении вверх по кривой Коши доля ионной связи  $f_i$  уменьшается. Например, RbI с  $f_i = 0.951$  находится в нижней части кривой Коши, а LiF с  $f_i = 0.89$  в верхней.

Точки  $(A, \nu_0)$ , соответствующие соединениям с  $f_i > 0.9$  довольно хорошо ложатся на кривую Коши, тогда как для соединений с  $f_i \approx 0.85$ , MgO, AgCl и AgBr имеется отклонение от этой кривой. В особенности оно велико для хлорида и бромида серебра, коэффициент Пуассона которых  $\nu_0 \approx 0.37$ , значительно выше, чем у других ионных кристаллов, а также низкая величина сдвиговой константа  $c_{44}$ . Достоверность приведенных на рис. 5 значений для AgCl и AgBr подтверждается сравнением данных из различных источников [32, 46, 47], см. двойные точки.

Из рис. 5 видно, что наибольшая отрицательная анизотропия,  $-3.3 < A < -1.5$ , и, соответственно, наименьший коэффициент Пуассона,  $0.13 < \nu_0 < 0.2$ , наблюдаются для галогенидов рубидия. Для этих соединений также типична высокая поляризация ионной связи,  $f_i \approx 0.95$ . Для галогенидов лития наблюдается положительная анизотропия,  $A \approx +0.6$ , и, соответственно, наибольший коэффициент Пуассона,  $\nu_0 \approx 0.29-0.33$ . Для этих соединений также типична более низкая доля ионной связи,  $f_i \approx 0.9$ . Точки для галогенидов калия и натрия занимают промежуточные значения как по величинам  $A$  и

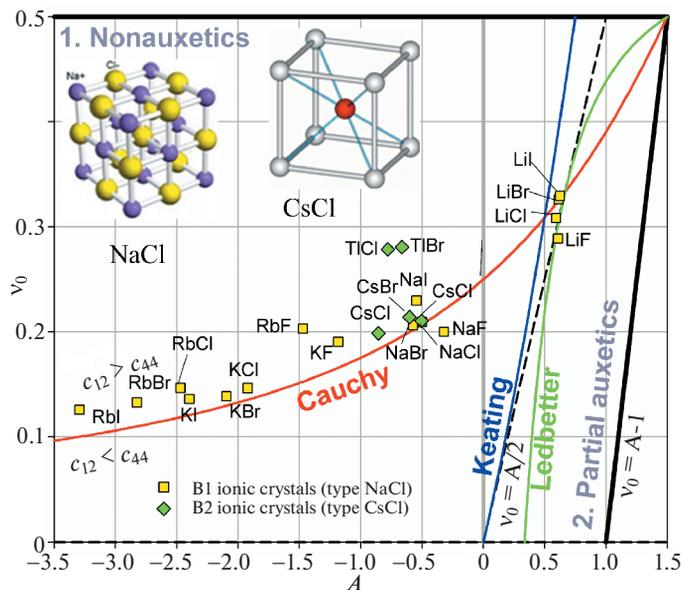


Рис. 4. Сравнение  $A$  и  $v_0$  кубических B1 и B2 ионных кристаллов, соответственно структурные типы NaCl и CsCl. Диаграмма построена с использованием упругих констант из [32].

$v_0$ , так и по величине  $f_i$ . В целом имеется следующая общая тенденция: при смещении щелочно-металлического компонента вниз в подгруппе AI периодической таблицы элементов  $\text{Li} \rightarrow \text{Na} \rightarrow \text{K} \rightarrow \text{Rb}$ , т.е. с увеличением номера периода, точки  $(A, v_0)$  смещаются вниз по кривой Коши. Зависимость от типа элемента-галогена не столь явная, но в первом приближении для них наблюдается обратная тенденция, с увеличением номера периода  $\text{F} \rightarrow \text{Cl} \rightarrow \text{Br} \rightarrow \text{I}$  точки  $(A, v_0)$  смещаются вверх по кривой Коши.

На рис. 6 представлена диаграмма  $A - v_0$  для кристаллов со структурой алмаза A4, это элементы AIV группы периодической системы, C, Si, Ge и  $\alpha\text{-Sn}$ , и кристаллов с алмазоподобной структурой цинковой обманки B3, в основном – бинарные соединения типа  $\text{A}^N\text{B}^{8-N}$ . Из представленных кристаллов на рис. 6 это:

–  $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$  – борид фосфора BP, фосфиды, арсениды и антимониды алюминия, галлия и индия, соответственно AlSb, GaP, GaAs, GaSb, и InP, InAs, InSb. Представленные материалы являются неауксетиками.

–  $\text{A}^{\text{II}}\text{B}^{\text{VI}}$  – сульфиды, селениды и теллуриды цинка, кадмия и ртути, соответственно ZnS, ZnSe, ZnTe; CdS, CdSe, CdTe и HgS, HgSe, HgTe. Частичными ауксетиками являются ZnSe, ZnTe, CdTe и HgS, HgSe, HgTe [15, 18].

–  $\text{A}^{\text{I}}\text{B}^{\text{VII}}$  – хлориды, бориды и иодиды меди, соответственно CuCl, CuBr и CuI. Данные кристаллы являются частичными ауксетиками.

Также структуру цинковой обманки имеют кристаллы карбида кремния SiC. Кристалл SiC является частичным ауксетиком ( $v_{\min} = -0.10$ ).

На рис. 6 видно, что все алмазоподобные кристаллы положительно анизотропны ( $A > 0$ ) и для них наблюдается зависимость: с повышением доли ионной связи  $f_i$  упругая анизотропия, характеризуемая коэффициентом  $A$ , возрастает, и соответственно повышается значение  $v_0$ . Так для алмаза с  $f_i = 0$ , расположенного вблизи

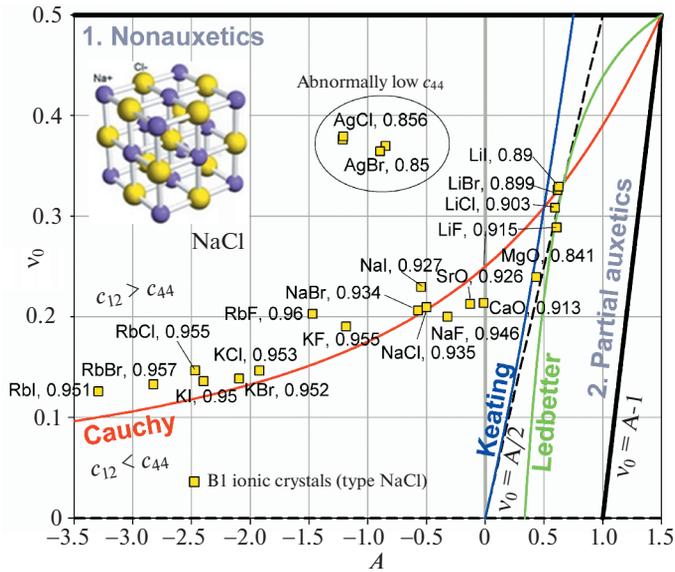


Рис. 5. Зависимость  $A$  и  $\nu_0$  B1 кристаллов (структурный тип NaCl) от доли ионной связи  $f_i$  по Филлипу [45], указана рядом с обозначением кристалла. Диаграмма построена с использованием упругих констант из [32, 46–48].

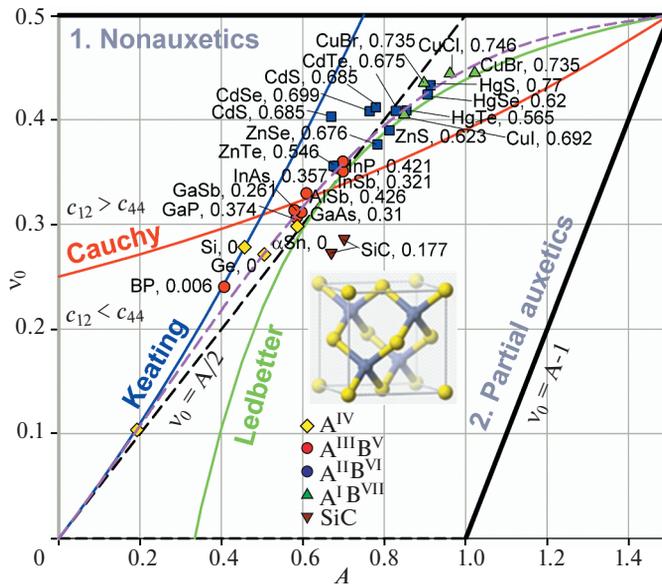


Рис. 6. Зависимость  $A$  и  $\nu_0$  A4 и A3 кристаллов, соответственно структурные типы алмаза и цинковой обманки ZnS, от доли ионной связи  $f_i$  по Филлипу, указана рядом с обозначением кристалла. Диаграмма построена с использованием упругих констант из [32], упругие константы для  $\alpha$ -Sn взяты из [51, 52].

нижнего левого угла диаграммы,  $A \approx 0.19$  и  $v_0 \approx 0.10$ , для арсенида галлия GaAs с  $f_i = 0.31$ , расположенного центральной части диаграммы,  $A \approx 0.60$  и  $v_0 \approx 0.31$ , а для бромида меди CuBr с  $f_i = 0.735$ , расположенного вблизи верхнего правого угла диаграммы,  $A \approx 1.02$  и  $v_0 \approx 0.44$ .

Из рис. 6 видно, что точки, соответствующие полностью ковалентным алмазу C и кремнию Si, а также почти полностью ковалентному бориду фосфора BP ( $f_i = 0.006$ ) хорошо ложатся на теоретическую кривую Китинга. Однако для двух других полностью ковалентных кристаллов, германия Ge и олова  $\alpha$ -Sn имеется заметное отклонение от этой зависимости в сторону больших значений коэффициента упругой анизотропии  $A$ . По мере увеличения  $f_i$  это отклонение  $\Delta A$  возрастает. Так для  $A^{III}B^V$  соединений, группы GaP, GaAs, GaSb, и InP, InAs, InSb, с  $f_i \approx 0.3$ – $0.4$  отклонение  $\Delta A$  составляет около  $0.1$ – $0.12$ , тогда как для  $A^I B^{VII}$  соединений, CuCl и CuBr, с  $f_i \approx 0.75$  отклонение  $\Delta A$  достигает  $\approx 0.3$ . Соединения  $A^{II}B^{VI}$ , ZnS, ZnSe, ZnTe; CdS, CdSe, CdTe и HgS, HgSe, HgTe, с  $f_i \approx 0.55$ – $0.7$  занимают промежуточное положение, для них  $\Delta A \approx 0.2$ .

Примечательным является тот факт, что точки большинства A4 и B3 кристаллов расположены вблизи прямой линии  $v_0 = A/2$  являющейся границей, разделяющей характеристические области “1. Неауксетика” / “2. Частичные ауксетика”. Однако с повышением  $f_i$  наблюдается отклонение и от этой граничной линии, т.е. кристаллы становятся частичными ауксетиками, как, например, HgTe ( $v_{\min} = -0.03$ ), HgSe ( $v_{\min} = -0.05$ ), HgS ( $v_{\min} = -0.04$ ) и CuI ( $v_{\min} = -0.03$ ), CuCl ( $v_{\min} = -0.07$ ) и CuBr ( $v_{\min} = -0.03$ ). Эмпирическая зависимость Ледбеттера удовлетворительно описывает отклонение точек от прямой  $v_0 = A/2$  в верхней правой части диаграммы, но дает большую ошибку в нижней левой ее части для таких полностью ковалентных кристаллов как алмаз C, борид фосфора BP и кремний Si. Поэтому для описания положения точек A4 и B3 кристаллов в настоящей работе предлагается зависимость:

$$v_0 = 0.5A + 0.2796A^2 - 0.4747A^3 + 0.1428A^4 \quad (3.1)$$

Данная зависимость была получена при следующих ограничениях: исход из начала координат ( $A = 0$ ,  $v_0 = 0$ ), также как теоретическая кривая Китинга и граничная прямая  $v_0 = A/2$ , с таким же наклоном  $-dv_0/dA (A = 0) = 0.5$ . Окончание – в углу диаграммы ( $A = 1.5$ ,  $v_0 = 0.5$ ), также как и у кривой Ледбеттера. Последнее ограничение накладывает на подгоночные коэффициенты при  $A^2$ ,  $A^3$  и  $A^4$ , поэтому только два из них являются независимыми и определяют форму кривой  $v_0 = f(A)$ . На рис. 6 зависимость (3.1) показана штриховой фиолетовой линией. Видно, что данная кривая правильно отражает характер зависимости  $v_0 = f(A)$  и удовлетворительно описывает положение большинства точек.

На рис. 7 представлены графики зависимостей коэффициента упругой анизотропии  $A$  и коэффициента Пуассона  $v_0$  кристаллов со структурой B1 и B3 от доли ионной связи  $f_i$ . На графиках видно, что с повышением доли ионной связи  $f_i$  коэффициенты  $A$  и  $v_0$  сначала повышаются достигая максимальных значений  $A_{\max}$  и  $v_{0,\max}$  при критическом значении  $f_i = f_{i,c}$ , а затем резко понижаются. Исходя из графика на рис. 5 логично предположить, что  $A$  и  $v_0$  стремятся соответственно к  $-\infty$  и  $0$  при  $f_i \rightarrow 1$ . На основании наблюдаемых на рис. 6 экспериментальных трендов и формы кривых Коши и Ледбеттера можно также предположить, что  $A_{\max} = 1.5$  и  $v_{0,\max} = 0.5$ , т.е. их значения совпадают с координатами предельной точки ( $A, v_0$ ) в верхнем правом углу диаграммы  $A - v_0$ . Наиболее близка к этим значениям красная точка B3 кристалла йодистого се-

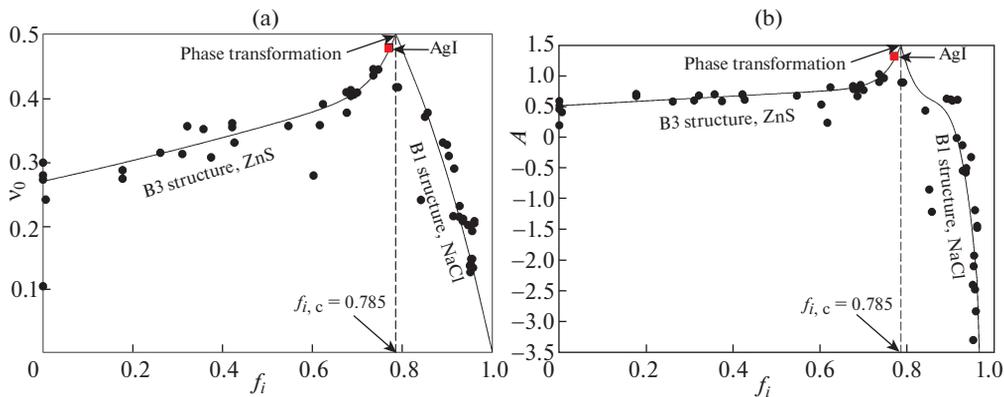


Рис. 7. Зависимости  $A$  и  $v_0$  ВЗ и В1 кристаллов от доли ионной связи  $f_i$  по Филлипсу, соответственно (b) и (a). Графики построены с использованием упругих констант из [32, 46–49].

ребра AgI с  $A \approx 1.3$  и  $v_0 \approx 0.48$ . Данные величины получены используя константы  $c_{ij}$ , рассчитанные для ВЗ структуры AgI модифицированным методом Мартина в [44]. Показательно, что все точки слева от максимума соответствуют ВЗ-кристаллам (структура ZnS), тогда как все точки справа – В1-кристаллам (структура NaCl). Из этого следует, что при достижении критической доли ионной связи  $f_i = f_{i,c}$  происходит изменение кристаллической структуры В1  $\rightarrow$  ВЗ. Согласно Филлипсу [45] это ковалентно-ионное превращение происходит при  $f_{i,c} = 0.785$ , что соответствует положению максимумов на графиках, представленных на рис. 7. Характерно, что кристаллы с  $f_i$  близким к 0.785, например, AgI, MgS и MgSe структурно нестабильны, см. [46, 47].

На рис. 8 представлена диаграмма  $A-v_0$ , обобщающая приведенные выше результаты для разных типов одноатомных и двухатомных кубических кристаллов. На диаграмме показаны два тренда – ковалентный (синяя линия, аппроксимация (3.1)) и ионный (красная линия, зависимость Коши (2.14, 2.15)). Исключая из рассмотрения особые точки (выделены цветом), можно сделать вывод о том, что все остальные точки (серые) в первом приближении следуют этим трендам. При этом для точек, прилегающих к линии Коши, имеется систематическое смещение вверх от этой линии, т.е. для них выполняются неравенство  $c_{12} > c_{44}$ . Для некоторых кристаллов, например, Ta, Al, CoZr, V, AgBr, AgCl, Nb (см. цветные точки, заключенных в овал) это смещение особенно велико потому, что величина их сдвиговой константы  $c_{44}$  аномально низка. Замечательным свойством диаграммы  $A-v_0$  является то, что в отличие от диаграммы Блекмана (рис. 1,а) на ней оба тренда образуют единую непрерывную линию  $v_0 = f(A)$ , которая исходит из начала координат ( $A = 0, v_0 = 0$ ), далее идет вверх вправо и приходит в экстремальную угловую точку диаграммы ( $A = 1.5, v_0 = 0.5$ ), а затем изгибается и идет вниз влево стремясь в пределе к ( $A = -\infty, v_0 = 0$ ). Причиной этого различия в представлении кривых является то, что вся верхняя горизонтальная граница диаграммы Блекмана ( $c_{12}/c_{11} = 1$ ), где заканчиваются линии Коши и Ледбеттера, сводится на диаграмме  $A-v_0$  в одну точку ( $A = 1.5, v_0 = 0.5$ ). Положение точек  $(A, v_0)$  ионно-ковалентных кристаллов на единой кривой  $v_0 = f(A)$  определяется величиной доли ионной связи  $f_i$ . При увеличении  $f_i$  от нуля до критического значения

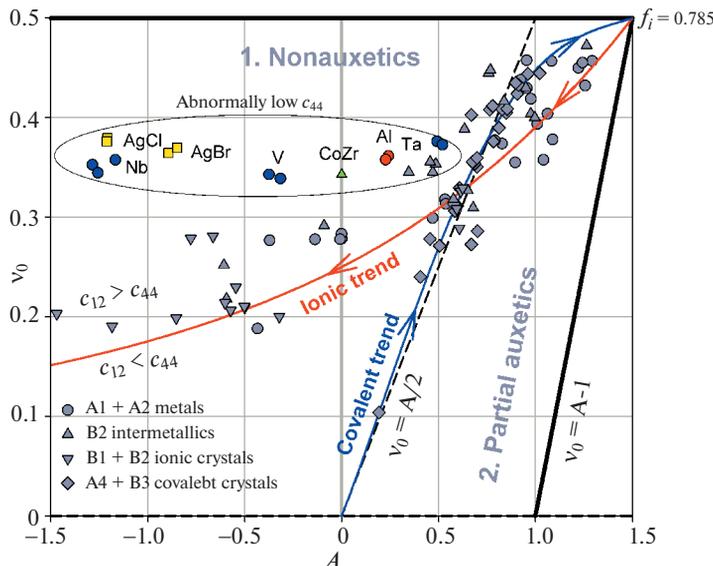


Рис. 8. Обобщенная диаграмма  $A-v_0$  для разных типов одноатомных и двухатомных кубических кристаллов.

0.785 происходит смещение точек  $(A, v_0)$  вдоль ковалентного тренда от начала координат к угловой точке  $(A = 1.5, v_0 = 0.5)$ . При дальнейшем увеличении  $f_i$  точки переходят на ионный тренд и смещаются в направлении предела  $(A = -\infty, v_0 = 0)$ . Следует отметить, что перегиб единой кривой  $v_0 = f(A)$  в точке  $(A = 1.5, v_0 = 0.5)$  согласуется с выводами работы [44], согласно которой ковалентно-ионный переход (изменение структуры) происходит вследствие нестабильности кристаллической решетки при приближении эффективного модуля сдвига  $c_s = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$  к нулю, что соответствует стремлению коэффициента Пуассона к пределу  $v_0 \rightarrow 0.5$ .

**4. Вывод формул (2.13), (2.15), (2.17) и (2.19).** Уравнение негоризонтальной границы характеристических областей коэффициента Пуассона

$$v_0 = A/2 \quad (4.1)$$

Подставляя  $A$  и  $v_0$  соответственно из (2.4) и (2.8), и используя (2.1), (2.2) и (2.3) с заменой  $s_{ij} \rightarrow c_{ij}$ , получаем

$$\frac{c_{44}}{c_{11}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{c_{12}}{c_{11}} - 2 \left( \frac{c_{12}}{c_{11}} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

Соотношение Коши

$$\frac{c_{12}}{c_{44}} = 1 \quad (4.3)$$

Поставляя  $c_{12}$  и  $c_{44}$  соответственно из (2.2) и (2.3), и учитывая (2.4) и (2.8) получаем квадратное уравнение относительно  $v_0$

$$4v_0^2 + (3 - 2A)v_0 - 1 = 0 \quad (4.4)$$

Его физически корректное решение

$$v_0 = \frac{2A - 3 + \sqrt{(3 - 2A)^2 + 16}}{8} \quad (4.5)$$

Соотношение Китинга

$$2c_{44}(c_{11} + c_{12}) = (c_{11} - c_{12})(c_{11} + 3c_{12}) \quad (4.6)$$

Поставляя  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  и  $c_{44}$  соответственно из (2.1), (2.2) и (2.3), а также учитывая (2.4) и (2.8) получаем квадратное уравнение

$$v_0^2 + (1 - A)v_0 - A/2 = 0 \quad (4.7)$$

Его физически корректное решение

$$v_0 = \frac{1}{2}(A - 1 + \sqrt{A^2 + 1}) \quad (4.8)$$

Соотношение Ледбеттера

$$c_{11} = \frac{2}{3}(c_{12} + 2c_{44}) \quad (4.9)$$

Проводя аналогичные подстановки как в предыдущем случае, получаем квадратное уравнение

$$v_0^2 - 5v_0A + 3A - 1 = 0 \quad (4.10)$$

Его физически корректное решение

$$v_0 = \frac{5A - \sqrt{25A^2 + 4(1 - 3A)}}{2} \quad (4.11)$$

**5. Заключение.** С использованием диаграммы  $A-v_0$  проанализирована зависимость упругих свойств одноатомных и двухатомных кубических кристаллов от типов их кристаллической структуры и межатомной связи. Показано, что упругие свойства этих кристаллов следуют одному из двух трендов – ковалентному или ионному, которые на диаграмме  $A-v_0$  образуют единую непрерывную линию  $v_0 = f(A)$ , исходящую из начала координат ( $A = 0, v_0 = 0$ ), приходящую в угловую точку диаграммы ( $A = 1.5, v_0 = 0.5$ ) и далее изгибаясь стремящуюся к ( $A = -\infty, v_0 = 0$ ). Смещение точек ( $A, v_0$ ) ионно-ковалентных кристаллов вдоль этой линии определяется величиной доли ионной связи  $f_i$ . При  $0 \leq f_i < 0.785$  точки ( $A, v_0$ ) располагаются на ковалентном тренде, а при  $f_i > 0.785$  – на ионном.

Проведенный анализ показал, что ауксетики выявляются среди одноатомных кристаллов со структурой A1 (ГЦК), относящимся к щелочноземельным (Ca, Sr), переходным (Ni, Cu, Ag, Au) и постпереходным (Pb) металлам, актиноидам (Ce, Yb) и лантаноидам (Th), и одноатомных кристаллов со структурой A2 (ОЦК), относящимся к щелочным металлам (Li, K, Na, Cs). Наибольшие отрицательные значения коэффициента Пуассона наблюдаются у щелочных металлов ( $v_{\min} = -0.54$  у Li,  $v_{\min} = -0.44$  у Na,  $v_{\min} = -0.42$  у K,  $v_{\min} = -0.26$  у Sr). Большие отрицательные значения коэффициента Пуассона выявляются у щелочноземельных металлов ( $v_{\min} = -0.27$  у Ca и  $v_{\min} = -0.36$  у Cs), постпереходного металла Pb ( $v_{\min} = -0.20$ ), актиноидов Ce ( $v_{\min} = -0.17$ ), Yb ( $v_{\min} = -0.34$ ) и лантаноида Th ( $v_{\min} = -0.22$ ).

Среди проанализированных в этой работе бинарных двухатомных соединений наибольшее количество ауксетиков выявляется среди алмазоподобных кристаллов со структурой цинковой обманки B3, имеющих стехиометрию типа  $A^N B^{8-N}$  ( $A^{IV} B^{VI}$ : ZnSe,

ZnTe, CdTe и HgS, HgSe, HgTe;  $A^{II}B^{VI}$ : CuCl, CuBr и CuI). Кристаллы соединений типа  $A^{III}B^V$ , являются неауксетиками. Среди кубических B1 и B2 ионных кристаллов, структурных типов NaCl и CsCl, только один LiF, по-видимому, является ауксетиком с небольшим по абсолютной величине  $\nu_{\min} = -0.02$ .

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-29-01200).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Мир, 1967. 385 с.
2. *Cazzani A., Rovati M.* Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. № 7. P. 1713–1744.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00668-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00668-6)
3. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Модуль Юнга кубических ауксетиков // Письма о материалах. 2011. Т. 1. Вып. 3. С. 127–132.  
<https://doi.org/10.22226/2410-3535-2011-3-127-132f>
4. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Модуль сдвига кубических кристаллов. Письма о материалах. 2012. Т. 2. Вып. 1. С. 21–24.  
<https://doi.org/10.22226/2410-3535-2012-1-21-24>
5. *Hayes M., Shuvalov A.* On the extreme values of Young's modulus, the shear modulus, and Poisson's ratio for cubic materials // J. Appl. Mech. 1998. V. 65. № 3. P. 786–787.  
<https://doi.org/10.1115/1.2789130>
6. *Ting T.C.T., Chen T.* Poisson's ratio for anisotropic elastic materials can have no bounds // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2005. V. 58. № 1. P. 73–82.  
<https://doi.org/10.1093/qjmamj/hbh021>
7. *Milstein F., Huang K.* Existence of a negative Poisson ratio in fcc crystals // Phys. Rev. B. 1979. V. 19. № 4. P. 2030–2033.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.19.2030>
8. *Светлов И.Л., Епишин А.И., Кривко А.И., Самойлов А.И., Одинцев И.Н., Андреев А.П.* Анизотропия коэффициента Пуассона монокристаллов никелевого сплава // ДАН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 1372–1375.
9. *Ballato A.* Poisson's ratio for tetragonal, hexagonal, and cubic crystals // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectrics Frequency Contr. 1996. V. 43. № 1. P. 56–62.  
<https://doi.org/10.1109/58.484463>
10. *Baughman R.H., Shacklette J.M., Zakhidov A.A., Stafström S.* Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals // Nature. 1998. V. 392. № 6674. P. 362–365.  
<https://doi.org/10.1038/32842>
11. *Ting T.C.T., Barnett D.M.* Negative Poisson's ratios in anisotropic linear elastic media // J. Appl. Mech. 2005. V. 72. № 6. P. 929–931.  
<https://doi.org/10.1115/1.2042483>
12. *Norris A.N.* Poisson's ratio in cubic materials // Proc. Roy. Soc. A. 2006. V. 462. № 2075. P. 3385–3405.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1726>
13. *Lethbridge Z.A.D., Walton R.I., Marmier A.S.H. et al.* Elastic anisotropy and extreme Poisson's ratios in single crystals // Acta Mater. 2010. V. 58. № 19. P. 6444–6451.  
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.08.006>
14. *Branka A.C., Heyes D.M., Wojciechowski K.W.* Auxeticity of cubic materials // Phys. Status Solidi B. 2009. V. 246. № 9. P. 2063–2071.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.200982037>
15. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Classification of cubic auxetics // Phys. Status Solidi B. 2013. V. 250. № 10. P. 2038–2043.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.201384233>
16. *Епишин А.И., Лисовенко Д.С.* Экстремальные значения коэффициента Пуассона кубических кристаллов // ЖТФ. 2016. Т. 16. № 10. С. 1516–1524.  
<https://doi.org/10.1134/S106378421610012>

17. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетическая механика кристаллических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 43–62.
18. Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 7–24.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>
19. Paszkiewicz T., Wolski S. Anisotropic properties of mechanical characteristics and auxeticity of cubic crystalline media // Phys. Status Solidi B. 2007. V. 244. № 3. P. 966–977.  
<https://doi.org/10.1002/pssb.200572715>
20. Paszkiewicz T., Wolski S. Elastic properties of cubic crystals: Every's versus Blackman's diagram // J. Phys. Conf. Ser. 2008. V. 104. P. 012038.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/104/1/012038>
21. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Связь среднего коэффициента Пуассона с модулем Юнга для кубических кристаллов. Ауксетики в среднем // ДАН. 2012. Т. 443. № 6. С. 677–681.
22. Evans K., Nkansah M., Hutchinson I., Rogers S.C. Molecular network design // Nature. 1991. V. 353. № 6340. P. 124.  
<https://doi.org/10.1038/353124a0>
23. Lim T.C. Auxetic Materials and Structures. Singapore: Springer Singapore, 2015. 588 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
24. Kadic M., Milton G.W., van Hecke M., Wegener M. 3D metamaterials // Nature Rev. Phys. 2019. V. 1. P. 198–210.  
<https://doi.org/10.1038/s42254-018-0018-y>
25. Kelkar P.U., Kim H.S., Cho K.-H. et al. Cellular auxetic structures for mechanical metamaterials: A review // Sensors. 2020. V. 20. P. 3132.  
<https://doi.org/10.3390/s20113132>
26. Luo C., Han C.Z., Zhang X.Y. et al. Design, manufacturing and applications of auxetic tubular structures: A review // Thin-Walled Struct. 2021. V. 163. P. 107682.  
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107682>
27. Blackman M. On anomalous vibrational spectra // Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 164. P. 62–79.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0005>
28. Haussühl S. Kristallphysik. Weinheim: Physik-Verlag, 1983. p.
29. Ledbetter H. Blackman diagrams and elastic-constant systematics / Handbook of Elastic properties of solids, liquids, and gases. Ed. by M. Levy, H. Bass, and R. Stern. San Diego: Academic Press, 2000. Vol. II. P. 57–64.  
<https://doi.org/10.1016/B978-012445760-7/50029-0>
30. Keating P.N. Effect of invariance requirements on the elastic strain energy of crystals with application to the diamond structure // Phys. Rev. 1966. V. 145. № 2. P. 637–645.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.145.637>
31. Keating P.N. Theory of the third-order elastic constants of diamond-like crystals // Phys. Rev. 1966. V. 149. P. 674–678.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.149.674>
32. Second and Higher Order Elastic Constants / Ed. by D. F. Nelson. Springer, 1992.  
<https://doi.org/10.1007/b44185>
33. Vallin J., Mongy M., Salama K., Beckman O. Elastic constants of aluminum // J. Appl. Phys. 1964. V. 35. № 6. P. 1825–1826.  
<https://doi.org/10.1063/1.1713749>
34. Carroll K.J. Elastic constants of niobium from 4.2° to 300°K // J. Appl. Phys. 1965. V. 36. P. 3689–3690.  
<https://doi.org/10.1063/1.1703072>
35. Greiner J.D., Carlson O.N., Smith J.F. Single-crystal elastic constants of vanadium and vanadium with oxygen additions // J. Appl. Phys. 1979. V. 50. P. 4394–4398.  
<https://doi.org/10.1063/1.326428>
36. Palmer S.B., Lee E.W. The elastic constants of chromium // Philos. Mag. 1971. V. 24. № 188. P. 311–318.  
<https://doi.org/10.1080/14786437108227390>

37. Zheng S., Wang S. First-principles design of refractory high entropy alloy VMoNbTaW // *Entropy*. 2018. V. 20. P. 965.  
<https://doi.org/10.1080/14786437108227390>
38. Sekkal A., Benzair A., Ouahrani T. et al. Mechanical properties and bonding feature of the YAg, CeAg, HoCu, LaAg, LaZn, and LaMg rare-earth intermetallic compounds: An ab initio study // *Intermetallics*. 2014. V. 45. P. 65–70.  
<https://doi.org/10.1016/j.intermet.2013.10.007>
39. Liu L., Wu X., Li W. et al. High temperature and pressure effects on the elastic properties of B2 intermetallics AgRE // *Open Phys.* 2015. V. 13. № 1. P. 142–150.  
<https://doi.org/10.1515/phys-2015-0019>
40. Lu W., Li C., Yi J., Li K. Stability and elastic properties of B2 CoX (X = Ti, Zr and Hf) intermetallic compounds as a function of pressure // *Philos. Mag.* 2018. V. 98. № 3. P. 203–218.  
<https://doi.org/10.1080/14786435.2017.1400701>
41. Chen Y., Yao Z.J., Zhang P.Z. et al. Elastic constants and properties of B2-type FeAl and Fe–Cr–Al alloys from first-principles calculations // *AER*. 2016. V. 85. P. 380–386.  
<https://doi.org/10.2991/ame-16.2016.63>
42. Muslov S.A., Lotkov A.I. Extremes of the elasticity characteristics of TiFe and TiNi single crystals // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 2051. P. 020207.  
<https://doi.org/10.1063/1.5083450>
43. Morris J.R., Ye Y.Y. Phase stability, elastic constants, and defect energetics in ductile ordered b2 compounds / *Ductile Rare Earth Intermetallic Compounds*. 2005. P. 133–134. <https://corpora.tika.apache.org/base/docs/govdocs1/230/230790.pdf>
44. Morris J.R., Ye Y.Y., Lee Y.-B. et al. Ab initio calculation of bulk and defect properties of ductile rare-earth intermetallic compounds // *Acta Mater.* 2004. V. 52. № 16. P. 4849–4857.  
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.06.050>
45. Phillips J.C. Ionicity of the chemical bonds in crystals // *Rev. Modern Phys.* 1970. V. 42. № 3. P. 317–356.  
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.42.317>
46. Hidshaw W., Lewis J.T., Briscoe C.V. Elastic constants of silver chloride from 4.2 to 300°K // *Phys. Rev.* 1967. V. 163. № 3. P. 876–881.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.163.876>
47. Materials Data Silver Bromide (AgBr) – Crystran. <https://www.crystran.co.uk/optical-materials/silver-bromide-agbr>
48. Fjeldly T.A., Hanson R.C. Elastic and piezoelectric constants of silver-iodide: Study of a material at the covalent-ionic phase transition // *Phys. Rev. B*. 1974. V. 10. № 8. P. 3569–3577.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.10.3569>
49. Pauling L. The nature of the chemical bond and the structure of molecules and crystals. Ithaca, N.Y.: Cornell Univ. Press, 1940. 450 p.
50. Coulson C.A., Redei L.B., Stocker D. The electronic properties of tetrahedral intermetallic compounds I. Charge distribution // *Proc. Roy. Soc. A*. 1972. V. 270. P. 357–372.  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0229>
51. Souadkia M., Bennecer B., Kalarasse F. Elastic, vibrational and thermodynamic properties of  $\alpha$ -Sn based group IV semiconductors and GeC under pressure // *J. Phys. Chem. Solids*. 2013. V. 74. P. 1615–1625.  
<https://doi.org/10.1016/j.jpcs.2013.06.005>
52. Adachi S. Properties of group-IV, III–V and II–VI semiconductors. John Wiley & Sons, 2005. 385 p.  
<https://doi.org/10.1002/0470090340>
53. Phillips J.C. Covalent-ionic and covalent-metallic transitions of tetrahedrally coordinated  $A^N B^{N-8}$  crystals under pressure // *Phys. Rev. Lett.* 1971. V. 27. P. 1197–1200.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.27.1197>
54. Vukić M.R., Veselinović D.S., Marković V.G. Crystalline forms of silver iodide II. Determination of phase transformations // *J. Serb. Chem. Soc.* 2007. V. 72. № 8–9. P. 857–868.  
<https://doi.org/10.2298/JSC0709857V>
55. Tairi L., Touam S., Boumaza A. et al. Phase stability and electronic behavior of MgS, MgSe and MgTe compounds // *Phase Transitions*. 2017. V. 90. № 10. P. 1–13.  
<https://doi.org/10.1080/01411594.2017.1302085>

УДК 539.3

**ИЗОТРОПНЫЕ ТЕНЗОР-ФУНКЦИИ С КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫМ  
СКАЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**© 2022 г. Д. В. Георгиевский<sup>a,b,c,\*</sup><sup>a</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*<sup>b</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*<sup>c</sup> *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

\*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.

После доработки 04.02.2022 г.

Принята к публикации 07.02.2022 г.

На базе аппарата тензор-функций от одного тензорного аргумента предложено многоуровневое семейство скалярных потенциалов напряжений по деформациям изотропных упругих сред, в котором элементы каждого уровня включают в себя элементы всех предыдущих уровней. Данный потенциал порождает многоуровневое семейство тензорно нелинейных определяющих соотношений, в которых каждое слагаемое, вне зависимости от уровня, имеет первый порядок малости по базе стремления нормы деформации к нулю. Найдено число материальных постоянных, входящих в многоуровневые определяющие соотношения. Предложена система установочных экспериментов для нахождения четырех материальных постоянных в прямых и обратных соотношениях второго уровня. Обсуждены вопросы взаимобратности тензорных функций и положительной определенности потенциала второго уровня, приводящего к тензорно линейной зависимости напряжений от деформаций.

*Ключевые слова:* многоуровневый упругий потенциал, тензор напряжений, тензор деформаций, определяющее соотношение, квазиполином, изотропная тензор-функция

DOI: 10.31857/S0572329922060071

**Введение.** Математический аппарат нелинейных тензор-функций от одного или нескольких тензорных аргументов [1], а также теория инвариантов [2] находят значительное применение в построении и анализе новых классов определяющих соотношений нелинейной механики сплошной среды [3–8] и, в частности, нелинейной теории упругости. Потенциальность налагает определенные дифференциальные связи на материальные функции, называемые условиями потенциальности среды, а само существование скалярных потенциалов напряжений по деформациям и наоборот интерпретируется и наделяется физическим смыслом энергии деформирования.

**1. Квазиполиномиальные  $N$ -уровневые упругие потенциалы в анизотропной и изотропной средах.** В рамках определяющих соотношений нелинейной упругости рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве потенциальную связь двух симметричных тензоров второго ранга – тензора напряжений Коши  $\sigma$  и тензора малых деформаций  $\varepsilon$  с декартовыми компонентами  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  соответственно:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W = W(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}, I_{\varepsilon 3}) \quad (1.1)$$

Упругий потенциал напряжений по деформациям  $W$  зависит от трех инвариантов тензора деформаций, в качестве которых удобно выбрать следы трех первых степеней  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon 1} &= \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii}, & I_{\varepsilon 2} &= \sqrt{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)} = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \\ I_{\varepsilon 3} &= \sqrt[3]{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^3)} = \sqrt[3]{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}}, & \|\boldsymbol{\varepsilon}\| &= I_{\varepsilon 2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение также аналогичные инварианты напряжений, имеющие одинаковую физическую размерность:

$$\begin{aligned} I_{\sigma 1} &= \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii}, & I_{\sigma 2} &= \sqrt{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)} = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}} \\ I_{\sigma 3} &= \sqrt[3]{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3)} = \sqrt[3]{\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}}, & \|\boldsymbol{\sigma}\| &= I_{\sigma 2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выберем в данной работе для анализа следующий вид упругого потенциала уровня  $N$  в случае произвольной анизотропии:

$$W^{(N)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} C_{i_1 i_2 \dots i_{4N-1} i_{4N}} \varepsilon_{i_1 i_2} \dots \varepsilon_{i_{4N-1} i_{4N}}, \quad N \geq 1 \quad (1.4)$$

где  $C_{i_1 i_2 \dots i_{4N-1} i_{4N}}$  – компоненты материального тензора модулей упругости ранга  $4N$  с симметриями, обусловленными свертками по индексам в (1.4). Данные компоненты симметричны по перестановкам внутри каждой из  $2N$  пар индексов  $(i_1, i_2), \dots, (i_{4N-1}, i_{4N})$ , а также по всем возможным перестановкам самих этих  $2N$  пар. С учетом отмеченных симметрий число независимых компонент  $C_{i_1 i_2 \dots i_{4N-1} i_{4N}}$  равно числу монотонно невозрастающих последовательностей длины  $2N$ , каждый элемент которых может быть любым натуральным числом от единицы до шести. С помощью метода индукции нетрудно установить, что число таких последовательностей равно числу сочетаний  $C_{2N+5}^{2N}$ . Так, при  $N = 1$  их 21 (как и должно быть для линейной анизотропной упругой среды), при  $N = 2$  – 126 и т.д.

Представление (1.4) естественно назвать квазиполиномиальным, поскольку с точностью до нормирующего знаменателя  $I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)} = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^{2(N-1)}$  потенциал  $W^{(N)}$  – полином по деформациям степени  $2N$ , причем при любом  $N \geq 1$  каждое слагаемое этого полинома имеет порядок малости  $O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)$ ,  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \rightarrow 0$ . Для  $N = 1$  выражение  $W^{(1)}$  – классическая в линейной анизотропной теории упругости квадратичная форма с компонентами  $C_{i_1 i_2 i_3 i_4}$  тензора модулей упругости четвертого ранга. Как видно из (1.1) и (1.4), уровень  $N = 1$  соответствует единственному среди всех  $N$  варианту физически линейных определяющих соотношений, связывающих тензоры  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Остановимся подробнее на случае изотропного нелинейно-упругого материала. Как известно, тензорный базис изотропных функций состоит лишь из единичного тензора второго ранга  $\mathbf{I}$  с компонентами  $\delta_{ij}$ , поэтому все модули  $C_{i_1 i_2 \dots i_{4N-1} i_{4N}}$  в (1.4) должны быть суммами всевозможных произведений  $2N$  символов Кронекера. Свертки (1.4) по всем индексам таких компонент  $C_{i_1 i_2 \dots i_{4N-1} i_{4N}}$  с деформациями приведут к следующему виду изотропного упругого потенциала уровня  $N$ :

$$W^{(N)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} c_{klm}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^k I_{\varepsilon 2}^{2l} I_{\varepsilon 3}^{3m}, \quad N \geq 1 \quad (1.5)$$

где  $c_{klm}^{(N)}$  – материальные константы (функции координат для неоднородного материала), определенным образом связанные с  $C_{i_1 i_2 \dots i_{4N-1} i_{4N}}$ . Знак  $\oplus$  в нижнем пределе суммы здесь и далее означает совокупность условий:  $k, l, m \geq 0$ ,  $k + 2l + 3m = 2N$ .

Следы  $I_{\epsilon n}^n = \text{tr}(\epsilon^n)$  более высоких степеней  $\epsilon$  с помощью формулы Гамильтона–Келли выражаются через  $I_{\epsilon 1}, I_{\epsilon 2}^2, I_{\epsilon 3}^3$ . Например, для  $n = 4, 5, 6$  справедливы выражения [9]

$$\begin{aligned} 6I_{\epsilon 4}^4 &= I_{\epsilon 1}^4 - 6I_{\epsilon 1}^2 I_{\epsilon 2}^2 + 8I_{\epsilon 1} I_{\epsilon 3}^3 + 3I_{\epsilon 2}^4 \\ 6I_{\epsilon 5}^5 &= I_{\epsilon 1}^5 - 5I_{\epsilon 1}^3 I_{\epsilon 2}^2 + 5I_{\epsilon 1}^2 I_{\epsilon 3}^3 + 5I_{\epsilon 2}^2 I_{\epsilon 3}^3 \\ 12I_{\epsilon 6}^6 &= I_{\epsilon 1}^6 - 3I_{\epsilon 1}^4 I_{\epsilon 2}^2 + 4I_{\epsilon 1}^3 I_{\epsilon 3}^3 - 9I_{\epsilon 1}^2 I_{\epsilon 2}^4 + 12I_{\epsilon 1} I_{\epsilon 2}^2 I_{\epsilon 3}^3 + 3I_{\epsilon 2}^6 + 4I_{\epsilon 3}^6 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Число независимых констант  $c_{klm}^{(N)}$  в (1.5) равно количеству троек  $(k, l, m)$  неотрицательных целых чисел  $k, l$  и  $m$  таких, что  $k + 2l + 3m = 2N$ . Для  $N = 1$  троек две:  $(2, 0, 0)$  и  $(0, 1, 0)$ , что соответствует гуковскому потенциалу

$$W^{(1)} = c_{200}^{(1)} I_{\epsilon 1}^2 + c_{010}^{(1)} I_{\epsilon 2}^2 \quad (1.7)$$

с постоянными Ламе  $\lambda = 2c_{200}^{(1)}$  и  $\mu = c_{010}^{(1)}$ . Для  $N = 2$  имеем четыре тройки:  $(4, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  и  $(0, 2, 0)$ , т. е.

$$W^{(2)} = c_{400}^{(2)} \frac{I_{\epsilon 1}^4}{I_{\epsilon 2}^2} + c_{210}^{(2)} I_{\epsilon 1}^2 + c_{101}^{(2)} \frac{I_{\epsilon 1} I_{\epsilon 3}^3}{I_{\epsilon 2}^2} + c_{020}^{(2)} I_{\epsilon 2}^2 \quad (1.8)$$

В силу очевидной из (1.5) связи констант соседних уровней

$$c_{klm}^{(N)} = c_{k,l-1,m}^{(N-1)}, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (1.9)$$

можно утверждать, что потенциал  $W^{(N)}$  содержит все слагаемые, входящие в  $W^{(N-1)}$ , а кроме того новые слагаемые, соответствующие тройкам  $(k, 0, m)$ . Число таких новых слагаемых на  $N$ -м шаге ( $N \geq 2$ ) равно количеству чисел, делящихся на три, включая нуль, и не превышающих  $2N$ , т. е.  $[2N/3] + 1$ . Таким образом, число  $F^{(N)}$  независимых констант  $c_{klm}^{(N)}$  в (1.5) вычисляется рекуррентно:

$$F^{(1)} = 2, \quad F^{(N)} = F^{(N-1)} + \left[ \frac{2N}{3} \right] + 1, \quad N \geq 2 \quad (1.10)$$

т. е.  $F^{(2)} = 4$ ,  $F^{(3)} = 7$ ,  $F^{(4)} = 10$  и т. д.

**2. Определяющие соотношения уровня  $N$ .** Перейдем к нахождению напряжений (1.1) на основе изотропного потенциала (1.5). Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial I_{\epsilon 1}}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_{\epsilon 2}^2}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\epsilon_{ij}}{I_{\epsilon 2}}, \quad \frac{\partial I_{\epsilon 3}^3}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\epsilon_{ip} \epsilon_{pj}}{I_{\epsilon 3}^2} \quad (2.1)$$

получим

$$\sigma_{ij}^{(N)} = A_0^{(N)} \delta_{ij} + A_1^{(N)} \epsilon_{ij} + A_2^{(N)} \epsilon_{ip} \epsilon_{pj} \quad (2.2)$$

где коэффициенты  $A_0^{(N)}$ ,  $A_1^{(N)}$  и  $A_2^{(N)}$  – материальные функции инвариантов

$$\begin{aligned} A_0^{(N)} &= \frac{1}{I_{\epsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} k c_{klm}^{(N)} I_{\epsilon 1}^{k-1} I_{\epsilon 2}^{2l} I_{\epsilon 3}^{3m} \\ A_1^{(N)} &= \frac{2}{I_{\epsilon 2}^{2N}} \sum_{\oplus} (l+1-N) c_{klm}^{(N)} I_{\epsilon 1}^k I_{\epsilon 2}^{2l} I_{\epsilon 3}^{3m} \\ A_2^{(N)} &= \frac{3}{I_{\epsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} m c_{klm}^{(N)} I_{\epsilon 1}^k I_{\epsilon 2}^{2l} I_{\epsilon 3}^{3(m-1)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

разумеется, удовлетворяющие трем перекрестным условиям потенциальности

$$\frac{\partial A_0^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 2}} = I_{\varepsilon 2} \frac{\partial A_1^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 1}}, \quad \frac{\partial A_0^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 3}} = I_{\varepsilon 3}^2 \frac{\partial A_2^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 1}}, \quad I_{\varepsilon 2} \frac{\partial A_1^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 3}} = I_{\varepsilon 3}^2 \frac{\partial A_2^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 2}}$$

Отметим некоторые важные свойства тензорно нелинейной изотропной функции  $\sigma(\varepsilon)$  (2.2) с коэффициентами (2.3).

- а) Норма каждого из слагаемых в (2.2) имеет порядок малости  $O(\|\varepsilon\|)$ ,  $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$ .  
 б) Из предыдущего пункта, в частности, следуют равенства

$$\sigma_{ij}^{(N)} \varepsilon_{ij} = I_{\varepsilon 1} A_0^{(N)} + I_{\varepsilon 2}^2 A_1^{(N)} + I_{\varepsilon 3}^3 A_2^{(N)} = 2W^{(N)} \quad (2.4)$$

что говорит о традиционном физическом смысле потенциала (1.5) (и в общем случае (1.4)) как энергии упругой деформации.

с) Функция (2.2) тензорно линейна, или квазилинейна тогда и только тогда, когда  $A_2^{(N)} \equiv 0$ , т. е. потенциал (1.5) не зависит от кубического инварианта деформаций  $I_{\varepsilon 3}$ . В этом случае в (1.5) и (2.3) следует положить  $m = 0$  и отбирать только тройки  $(k, l, 0)$ :

$$W^{(N)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} c_{k/l0}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^k I_{\varepsilon 2}^{2l}, \quad N \geq 1 \quad (2.5)$$

Число независимых материальных констант  $c_{k/l0}^{(N)}$  равно  $N + 1$ . Тензорная линейность функции  $\varepsilon(\sigma)$  эквивалентна [10] пропорциональности девиаторов

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - I_{\sigma 1} \mathbf{I}/3, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - I_{\varepsilon 1} \mathbf{I}/3 \quad (2.6)$$

**3. Квазиполиномиальные  $N$ -уровневые потенциалы деформаций по напряжениям.** Для обратной тензор-функции  $\varepsilon(\sigma)$  подобно (1.1) введем потенциал  $w$  деформаций по напряжениям, зависящий от инвариантов (1.3):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}}, \quad w = w(I_{\sigma 1}, I_{\sigma 2}, I_{\sigma 3}) \quad (3.1)$$

Если функция  $W^{(N)}$  изотропна и имеет квазиполиномиальный вид (1.5), то  $w$  записывается аналогичным образом:

$$w^{(N)} = \frac{1}{I_{\sigma 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} d_{klm}^{(N)} I_{\sigma 1}^k I_{\sigma 2}^{2l} I_{\sigma 3}^{3m}, \quad N \geq 1 \quad (3.2)$$

где  $d_{klm}^{(N)}$  – материальные константы, алгебраически выражающиеся (вообще говоря, при больших  $N$  довольно сложно) через  $c_{klm}^{(N)}$ . Для  $N = 1$  получим гуковский потенциал

$$w^{(1)} = d_{200}^{(1)} I_{\sigma 1}^2 + d_{010}^{(1)} I_{\sigma 2}^2, \quad d_{200}^{(1)} = -\frac{\nu}{2E}, \quad d_{010}^{(1)} = \frac{1+\nu}{2E} \quad (3.3)$$

с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Для  $N = 2$  имеем

$$w^{(2)} = d_{400}^{(2)} \frac{I_{\sigma 1}^4}{I_{\sigma 2}^2} + d_{210}^{(2)} I_{\sigma 1}^2 + d_{101}^{(2)} \frac{I_{\sigma 1} I_{\sigma 3}^3}{I_{\sigma 2}^2} + d_{020}^{(2)} I_{\sigma 2}^2 \quad (3.4)$$

Вычисленные на основе изотропного потенциала (3.2) деформации  $\varepsilon_{ij}$  имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^{(N)} = B_0^{(N)} \delta_{ij} + B_1^{(N)} \sigma_{ij} + B_2^{(N)} \sigma_{ip} \sigma_{pj} \quad (3.5)$$

где  $B_0^{(N)}$ ,  $B_1^{(N)}$  и  $B_2^{(N)}$  – материальные функции инвариантов (1.3):

$$\begin{aligned}
 B_0^{(N)} &= \frac{1}{I_{\sigma_2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} k d_{klm}^{(N)} I_{\sigma_1}^{k-1} I_{\sigma_2}^{2l} I_{\sigma_3}^{3m} \\
 B_1^{(N)} &= \frac{2}{I_{\sigma_2}^{2N}} \sum_{\oplus} (l+1-N) d_{klm}^{(N)} I_{\sigma_1}^k I_{\sigma_2}^{2l} I_{\sigma_3}^{3m} \\
 B_2^{(N)} &= \frac{3}{I_{\sigma_2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} m d_{klm}^{(N)} I_{\sigma_1}^k I_{\sigma_2}^{2l} I_{\sigma_3}^{3(m-1)}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Взаимная обратность функций (2.2) и (3.5) обусловлена тем, что

$$2w^{(N)}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ij} \frac{\partial w^{(N)}}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{(N)} = \sigma_{ij}^{(N)} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \frac{\partial W^{(N)}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2W^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{3.7}$$

Аналитические зависимости троек материальных функций  $A_0^{(N)}$ ,  $A_1^{(N)}$ ,  $A_2^{(N)}$  и  $B_0^{(N)}$ ,  $B_1^{(N)}$ ,  $B_2^{(N)}$  можно найти в работе [9].

**4. Потенциалы и определяющие соотношения второго уровня. Установочные эксперименты.** Остановимся подробнее на следующем по сложности после физически линейного уровне  $N = 2$  с упругими потенциалами (1.8) и (3.4). Для краткости переобозначая  $a_1 = c_{400}^{(2)}$ ,  $a_2 = c_{210}^{(2)}$ ,  $a_3 = c_{101}^{(2)}$ ,  $a_4 = c_{020}^{(2)}$ ,  $b_1 = d_{400}^{(2)}$ ,  $b_2 = d_{210}^{(2)}$ ,  $b_3 = d_{101}^{(2)}$ ,  $b_4 = d_{020}^{(2)}$ , из (2.2) и (3.5) получим

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \left( 2a_2 I_{\varepsilon_1} + \frac{4a_1 I_{\varepsilon_1}^3}{I_{\varepsilon_2}^2} + \frac{a_3 I_{\varepsilon_3}^3}{I_{\varepsilon_2}^2} \right) \delta_{ij} + 2 \left( a_4 - \frac{a_1 I_{\varepsilon_1}^4}{I_{\varepsilon_2}^4} - \frac{a_3 I_{\varepsilon_1} I_{\varepsilon_3}^3}{I_{\varepsilon_2}^4} \right) \varepsilon_{ij} + \frac{3a_3 I_{\varepsilon_1}}{I_{\varepsilon_2}^2} \varepsilon_{ip} \varepsilon_{pj} \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \left( 2b_2 I_{\sigma_1} + \frac{4b_1 I_{\sigma_1}^3}{I_{\sigma_2}^2} + \frac{b_3 I_{\sigma_3}^3}{I_{\sigma_2}^2} \right) \delta_{ij} + 2 \left( b_4 - \frac{b_1 I_{\sigma_1}^4}{I_{\sigma_2}^4} - \frac{b_3 I_{\sigma_1} I_{\sigma_3}^3}{I_{\sigma_2}^4} \right) \sigma_{ij} + \frac{3b_3 I_{\sigma_1}}{I_{\sigma_2}^2} \sigma_{ip} \sigma_{pj} \tag{4.2}$$

Опишем набор установочных экспериментов для вычисления податливостей  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  и  $b_4$ .

*Растяжение стержня.* В одноосном напряженном состоянии с единственной ненулевой компонентой  $\sigma_{11} = \sigma_0$  инварианты (1.3) таковы:  $I_{\sigma_1} = \sigma_0$ ,  $I_{\sigma_2}^2 = \sigma_0^2$ ,  $I_{\sigma_3}^3 = \sigma_0^3$ . На основании (4.2) ненулевыми будут продольная  $\varepsilon_{11}^{(2)}$  и две поперечные  $\varepsilon_{22}^{(2)}$ ,  $\varepsilon_{33}^{(2)}$  компоненты деформаций:

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\sigma_0, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(2)} = (4b_1 + 2b_2 + b_3)\sigma_0 \tag{4.3}$$

*Равномерное давление.* При сжатии тела равномерным давлением  $p_0 = -\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\sigma_{33}$  имеем  $I_{\sigma_1} = -3p_0$ ,  $I_{\sigma_2}^2 = 3p_0^2$ ,  $I_{\sigma_3}^3 = -3p_0^3$ . Дилатация  $\varepsilon_{kk}^{(2)}$ , являющаяся относительным изменением объема тела, подлежит измерению и, с другой стороны, находится из обратных определяющих соотношений (4.2):

$$\varepsilon_{kk}^{(2)} = -6(9b_1 + 3b_2 + b_3 + b_4)p_0 \tag{4.4}$$

*Сдвиг плоского слоя.* При одномерном сдвиге плоского слоя  $\sigma_{12} = \sigma_0$ ,  $I_{\sigma_1} = I_{\sigma_3} = 0$ ,  $I_{\sigma_2}^2 = 2\sigma_0^2$ . Сдвиговая деформация  $\varepsilon_{12}^{(2)}$  согласно (4.2) имеет вид

$$\varepsilon_{12}^{(2)} = 2b_4 \sigma_0 \tag{4.5}$$

Итак, по результатам четырех измерений деформаций в трех установочных экспериментах предъявлена неоднородная система четырех линейных уравнений (4.3)–(4.5) относительно податливостей  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  и  $b_4$ . Нетрудно показать, что ее ранг равен четырем. Если в результате решения этой системы окажется, что  $b_1 = b_3 = 0$ , то доста-

точно ограничиться моделью уровня  $N = 1$ , т.е. физически линейной моделью упругости, в которой определяющие соотношения (4.1) и (4.2) превращаются в прямой и обратный законы Гука.

Аналогично предыдущему можно предъявить набор установочных экспериментов для нахождения упругих констант  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$ .

*Одноосное деформирование плоского слоя.* В одноосном деформированном состоянии с единственной ненулевой компонентой деформаций  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_0$  инварианты (1.2) следующие:  $I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_0, I_{\varepsilon 2}^2 = \varepsilon_0^2, I_{\varepsilon 3}^3 = \varepsilon_0^3$ . Тогда из (4.1) следует, что диагональные компоненты напряжений имеют вид

$$\sigma_{11}^{(2)} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\varepsilon_0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{33}^{(2)} = (4a_1 + 2a_2 + a_3)\varepsilon_0 \quad (4.6)$$

*Равномерное сжатие.* Тензор деформаций в этом случае шаровой:  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij}$ ,  $I_{\varepsilon 1} = 3\varepsilon_0, I_{\varepsilon 2}^2 = 3\varepsilon_0^2, I_{\varepsilon 3}^3 = 3\varepsilon_0^3$ . Измеримый в эксперименте след напряжений  $\sigma_{kk}^{(2)}$ , равный утроенному давлению с противоположным знаком, вычисляется на основании (4.1):

$$\sigma_{kk}^{(2)} = 6(9a_1 + 3a_2 + a_3 + a_4)\varepsilon_0 \quad (4.7)$$

*Сдвиг плоского слоя.* Имеем  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_0, I_{\varepsilon 1} = I_{\varepsilon 3} = 0, I_{\varepsilon 2}^2 = 2\varepsilon_0^2$ . Касательное напряжение  $\sigma_{12}^{(2)}$  согласно (4.1) равно

$$\sigma_{12}^{(2)} = 2a_4\varepsilon_0 \quad (4.8)$$

Система четырех линейных уравнений (4.6)–(4.8) относительно  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$  разрешима. Четверки констант  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  и  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ , разумеется, можно алгебраически выразить друг через друга, используя взаимнообратность соотношений (4.1) и (4.2).

**5. Тензорно линейные определяющие соотношения второго уровня.** Связи напряжений и деформаций (4.1) и (4.2) становятся тензорно линейными, если в них положить  $a_3 = 0$  и  $b_3 = 0$ . Потенциалы (1.8) и (3.4) примут вид

$$W^{(2)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^2} (a_1 I_{\varepsilon 1}^4 + a_2 I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 2}^2 + a_4 I_{\varepsilon 2}^4), \quad w^{(2)} = \frac{1}{I_{\sigma 2}^2} (b_1 I_{\sigma 1}^4 + b_2 I_{\sigma 1}^2 I_{\sigma 2}^2 + b_4 I_{\sigma 2}^4) \quad (5.1)$$

Переходя от квадратичных инвариантов  $I_{\varepsilon 2}^2$  и  $I_{\sigma 2}^2$  тензоров  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  к квадратичным инвариантам  $I_{e_2}^2 = \text{tr}(\mathbf{e}^2) = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$  и  $I_{s_2}^2 = \text{tr}(\mathbf{s}^2) = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$  их девиаторов (2.6):

$$I_{e_2}^2 = I_{\varepsilon 2}^2 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^2, \quad I_{s_2}^2 = I_{\sigma 2}^2 + \frac{1}{3}I_{\sigma 1}^2 \quad (5.2)$$

преобразуем выражения для потенциалов:

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon 2}^2 W^{(2)} &= \left( a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{9} \right) I_{\varepsilon 1}^4 + \left( a_2 + \frac{2a_4}{3} \right) I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 2}^2 + a_4 I_{\varepsilon 2}^4 \\ I_{\sigma 2}^2 w^{(2)} &= \left( b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_4}{9} \right) I_{\sigma 1}^4 + \left( b_2 + \frac{2b_4}{3} \right) I_{\sigma 1}^2 I_{\sigma 2}^2 + b_4 I_{\sigma 2}^4 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Исследуем вопрос о положительной определенности правых частей (5.3) как квадратичных форм, построенных на парах  $(I_{\varepsilon 1}^2, I_{\varepsilon 2}^2)$  и  $(I_{\sigma 1}^2, I_{\sigma 2}^2)$ . Дискриминанты этих форм равны  $D_a = a_2^2 - 4a_1a_4$  и  $D_b = b_2^2 - 4b_1b_4$  соответственно. Поскольку элементы в каждой из указанных пар неотрицательны, имеют место следующие наборы условий, являющиеся критериями положительной определенности:

$$\left( a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{9} > 0 \right) \wedge (a_4 > 0) \wedge \left( (D_a < 0) \vee \left( (D_a \geq 0) \wedge \left( a_2 + \frac{2a_4}{3} > 0 \right) \right) \right)$$

$$\left( b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_4}{9} > 0 \right) \wedge (b_4 > 0) \wedge \left( (D_b < 0) \vee \left( (D_b \geq 0) \wedge \left( b_2 + \frac{2b_4}{3} > 0 \right) \right) \right)$$

В частном (физически линейном) случае  $a_1 = 0$  дискриминанты  $D_a$  и  $D_b$  неотрицательны и эти два набора условий сводятся к следующим:

$$\frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{9} > 0, \quad a_4 > 0; \quad \frac{b_2}{3} + \frac{b_4}{9} > 0, \quad b_4 > 0 \quad (5.4)$$

В использующихся в теории упругости обозначениях  $a_2 = \lambda/2$ ,  $a_4 = \mu$ ,  $b_2 = -\nu/(2E)$ ,  $b_4 = (1 + \nu)/(2E)$  системы (5.4) эквивалентны известным требованиям

$$\lambda + \frac{2\mu}{3} > 0, \quad \mu > 0; \quad \frac{1-2\nu}{E} > 0, \quad \frac{1+\nu}{E} > 0$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00077).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.
2. Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с. = *Spencer A.J. M. Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.Y.–London, 1971.*
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
4. Аннин Б.Д. Формула Лагранжа–Сильвестра для тензорной функции, зависящей от двух тензоров // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 4. С. 743–744.
5. Победра Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
6. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
7. Георгиевский Д.В. Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые “ортогональные эффекты” напряженно-деформированного состояния // Известия РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 21–26.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040042>
8. Бровка Г.Л. Объективные тензоры и их отображения в классической механике сплошной среды // Известия РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 83–105.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920060045>
9. Георгиевский Д.В. Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
10. Георгиевский Д.В. Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.  
<https://doi.org/10.31857/S057232990000794-3>

УДК 539.4

**К ТЕОРИИ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ  
ДВУХТОЧЕЧНЫХ ПСЕВДОТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ**© 2022 г. Е. В. Мурашкин<sup>а,\*</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>а,\*\*</sup><sup>а</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*<sup>\*</sup>*e-mail: evmurashkin@gmail.com*<sup>\*\*</sup>*e-mail: radayev@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 09.06.2022 г.

После доработки 10.07.2022 г.

Принята к публикации 11.08.2022 г.

В настоящей работе обсуждаются вопросы ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей произвольных рангов и весов. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене систем координат. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю. Вводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров. Получены формулы для ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля. Отмечаются важные примеры двухточечных псевдотензорных полей из нелинейной механики деформируемого твердого тела.

*Ключевые слова:* двухточечный псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, ковариантная производная, полный оператор Гамильтона

**DOI:** 10.31857/S0572329922060149

**Вводные замечания и предварительные сведения.** Двухточечные тензоры играют исключительно важную роль в нелинейной механике континуума [1–4]. К таким тензорам относятся градиент деформации,<sup>1</sup> тензор конечного поворота, тензор силовых напряжений Пиола–Кирхгофа и т.д. Некоторые из таких полей имеют псевдотензорную природу.<sup>2</sup> Без последовательного использования псевдотензорного формализма двухточечных полей невозможно корректное построение моделей гемитропных микрополярированных упругих континуумов [6–8]. Поиск сведений о правилах ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей представляет довольно сложную задачу. Цель настоящего исследования восполнить этот пробел.

В настоящей работе вначале приводятся минимально необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене систем координат. Приводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров. Получены формулы для ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля. Более глубокое и полное

<sup>1</sup> Транспонированный градиент деформации называется дисторсией.

<sup>2</sup> Как можно увидеть при прочтении монографии [5, р. 142] даже тензор силовых напряжений Коши с самого начала можно считать аффинорной плотностью веса +1, которую по стандартному алгоритму всегда можно свести к абсолютному тензору.

изложение подходов псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [1, 5, 9–12]. Основы алгебры и анализа абсолютных двухточечных тензорных полей (two-point (double) tensor fields) можно найти в дополнении к работе [1], написанном Эриксоном. В работах [6–8, 13, 14] рассматривались правила ковариантного дифференцирования одноточечных псевдотензорных полей, используемых к механике микрополярных континуумов и механике растущих тел.

Содержание статьи можно охарактеризовать следующим образом. В первом разделе работы приводятся основные сведения о псевдотензорах. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. Даются определения обобщенной дельты Кронекера и символов перестановок. Приводится формула преобразования псевдотензора произвольного веса и ранга к абсолютному тензору того же самого ранга.

Второй раздел статьи посвящен понятию двухточечного псевдотензорного поля. Дается формальное определение двухточечного псевдотензорного поля, основанное на формуле его преобразования при замене обеих систем координат. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю.

В третьем разделе статьи обсуждаются вопросы частного и ковариантного дифференцирований двухточечных псевдотензорных полей. Вводятся определения полных и неполных операторов Гамильтона, операторов частного и ковариантного дифференцирований двухточечных псевдотензоров. Обсуждаются формулы, связывающие полные и неполные ковариантные производные двухточечного псевдотензорного поля.

**1. Необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовом пространстве.** Рассмотрим  $N$ -мерное евклидово пространство. Его единственной ориентационной характеристикой является фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр  $e$  [6–8], который в  $N$ -мерном пространстве можно определить как косое произведение [15, с. 63–65] абсолютных векторов ковариантного базиса

$$[t_1, t_2, \dots, t_N] = e \tag{1.1}$$

Ясно, что  $e > 0$  для правоориентированной системы координат, а  $e < 0$  – для левоориентированной, т.е.  $\text{sgn} e$  является единственным признаком, ориентирующим евклидово пространство.

Несложно показать, что в евклидовом пространстве справедливо соотношение

$$e^2 = g \tag{1.2}$$

где  $g$  – детерминант, составленный из компонент метрического тензора.

Одним из фундаментальных объектов многомерной геометрии является абсолютный тензор  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$ , называемый обобщенной дельтой Кронекера.  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$  можно определить в  $N$ -мерном пространстве для  $M \leq N$  согласно правилу

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M} = \begin{cases} +1, & \text{если } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ различные натуральные числа} \\ & 1, 2, \dots, N \text{ и если } i_1, i_2, \dots, i_M \text{ есть четная} \\ & \text{перестановка } j_1, j_2, \dots, j_M \\ -1, & \text{если } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ различные натуральные числа} \\ & 1, 2, \dots, N \text{ и если } i_1, i_2, \dots, i_M \text{ есть нечетная} \\ & \text{перестановка } j_1, j_2, \dots, j_M \\ -0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{1.3}$$

С помощью тензора  $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$  можно легко вычислить символы перестановок:

1. относительный ковариантный  $N$ -вектор  $\mathbf{\varepsilon}_{i_1 i_2 \dots i_N}$  веса  $-1$

$$\mathbf{\varepsilon}_{i_1 i_2 \dots i_N} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{12 \dots N} \quad (1.4)$$

2. относительный контравариантный  $N$ -вектор  $\mathbf{\varepsilon}^{i_1 i_2 \dots i_N}$  веса  $+1$

$$\mathbf{\varepsilon}^{i_1 i_2 \dots i_N} = \delta_{12 \dots N}^{i_1 i_2 \dots i_N} \quad (1.5)$$

В трехмерном пространстве справедливо

$$e = e_{123}^{[+1]} = \left[ \begin{matrix} l & l & l \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right] = \left( \begin{matrix} l \times l \\ 1 & 2 \end{matrix} \right) \cdot l_3 \quad (1.6)$$

Псевдотензоры произвольного веса легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$  (см. [6–8]). Для произвольного псевдотензора целого веса  $w$  и ранга  $n$  имеем

$$T_{(n) \dots ij \dots l}^{pqr \dots s} = e^{-w} T_{(n) \dots ij \dots l}^{[w] pqr \dots s} \quad (1.7)$$

Здесь и далее в квадратных скобках сверху корневого символа будем указывать вес псевдотензорного поля, а в круглых скобках снизу – ранг.

Отметим, что равенство (1.7) позволяет обобщить алгебраическую теорему Гамильтона–Кэли, что было продемонстрировано в [14].

Заметим также, что (1.7) отнюдь не единственная схема приведения псевдотензора к абсолютному тензору см. например [9, с. 174].

**2. Определение двухточечных псевдотензорных полей.** Введем в евклидовом пространстве две системы координат  $X^\alpha$  и  $x^s$ . Обе системы координат считаются равноправными, однако, в дальнейшем, следуя терминологии нелинейной механики континуума, будем называть одну из них  $X^\alpha$  отсчетной (лагранжевой), а вторую  $x^s$  – пространственной (эйлеровой). Греческие и латинские индексы будут ассоциироваться с отсчетными  $X^\alpha$  и пространственными  $x^s$  координатами.<sup>3</sup> Обозначим через  ${}'_l$  и  ${}_s l$  векторы ковариантных базисов, а через  $'e$  и  $e$  – фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры. Будем считать заданными метрические тензоры  $'g_{\alpha\gamma} = {}'_l \cdot {}'_l$  и  $g_{sk} = {}_s l \cdot {}_s l$  соответственно введенным системам координат.

Двухточечный псевдотензор с корневым символом  $T$  рангов  $'n$  и  $n$  с весами  $'w$  и  $w$  будет зависеть от пары переменных  $X^\alpha$  и  $x^s$  и его компоненты будут содержать как латинские, так и греческие индексы (см. рис. 1):

$$T_{(n,n) \dots ij \dots k \dots \lambda \mu \dots \nu}^{[w,w] lm \dots \alpha \beta \dots \gamma}$$

Для одноточечного псевдотензорного поля используется упрощенная запись

$$T_{(n) \dots ij \dots l}^{[w] pqr \dots s} \quad (2.1)$$

При переходе к другим системам координат  $x^s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) и  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) компоненты двухточечного псевдотензора преобразуются согласно правилу

<sup>3</sup> Для обозначения индексов отсчетных координат в ранних работах школы рациональной механики [1] использовались прописные латинские буквы  $K, L, M$  вместо греческих. Впоследствии Труселл [2] перешел к использованию букв греческого алфавита.



Рис. 1. Визуализация двухточечного псевдотензора.

$$\begin{aligned}
 & T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \ \alpha\beta\dots\gamma} = [\det(\partial_\beta X^\gamma)]^w [\det(\partial_\rho x^q)]^w \times \\
 & \times (\partial_l x^l) (\partial_m x^m) \dots (\partial_s x^s) (\partial_i x^i) (\partial_{\underline{h}} x^{\underline{h}}) \dots (\partial_{\underline{k}} x^{\underline{k}}) \times \\
 & \times (\partial_\alpha x^\alpha) (\partial_\sigma x^\sigma) \dots (\partial_\tau x^\tau) (\partial_{\underline{\lambda}} x^{\underline{\lambda}}) (\partial_{\underline{k}} x^{\underline{k}}) \dots (\partial_{\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}}) T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \ \alpha\beta\dots\gamma}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\partial_{\underline{h}} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{h}}}, \quad \partial_{\underline{h}} = \frac{\partial}{\partial x^{\underline{h}}}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \quad \partial_{\underline{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial X^{\underline{\alpha}}}$$

а веса 'w и w – целые числа.

Двухточечные псевдотензоры преобразуются в абсолютные при помощи фундаментальных ориентирующих псевдоскаляров 'e и e согласно правилу

$$T_{(n,n)}^{lm\dots s \ \alpha\beta\dots\gamma} = 'e^{-w} e^{-w} T_{(n,n)}^{[w,w]lm\dots s \ \alpha\beta\dots\gamma} \tag{2.3}$$

**3. Дифференцирование двухточечных псевдотензорных полей.** Введем следующие обозначения для частных (неполных) производных по явному вхождению переменных  $X^\alpha$  и  $x^k$ :

$$\partial_\alpha^{\text{expl}}, \quad \partial_k^{\text{expl}}$$

С этого момента будем считать, что рассматриваемые системы координат связаны между собой с помощью преобразования деформации

$$X^\alpha \rightleftharpoons x^i$$

Прямое описание деформации континуума соответствует преобразованию

$$X^\alpha \rightarrow x^i$$

а обратное описание<sup>4</sup> задается преобразованием

$$X^\alpha \leftarrow x^i$$

Равноправие способов описания деформации мы будем отражать с помощью обозначения

<sup>4</sup> В современной механике континуума наряду с прямым описанием  $X^\alpha \rightarrow x^i$ , используется обратное описание  $x^i \rightarrow X^\alpha$  (inversed motion description) [3]. Отметим, что обратное описание деформации было введено в механику Пиола (G. Piola).

$$X^\alpha \rightleftharpoons x^i$$

Полное (total) дифференцирование подразумевает вычисление производных не только по явным (explicit) вхождениям переменных, но и по неявным, определяемым преобразованием деформации. Полные производные по переменным  $X^\alpha$  и  $x^k$  обозначим через

$$\partial_\alpha^{\text{total}}, \quad \partial_k^{\text{total}}$$

Отметим, что в теориях поля [16, 17] для сокращения записи уравнений поля для полных производных используют обычные обозначения

$$\partial_\alpha \equiv \partial_\alpha^{\text{total}}, \quad \partial_k \equiv \partial_k^{\text{total}}$$

В частности для дивергенции одноточечного псевдотензорного поля заданного веса (например для тензора силовых напряжений Коши ( $w = +1$ ) [5, p. 142]) справедливо равенство:

$$\partial_k \overset{[+1]}{T}_{(2)}^{ki} = \partial_k^{\text{total}} \overset{[+1]}{T}_{(2)}^{ki}$$

Полные и неполные производные связаны соотношениями

$$\partial_\alpha^{\text{total}} = \partial_\alpha^{\text{expl}} + (\partial_\alpha x^k) \partial_k^{\text{expl}} \quad (3.1)$$

$$\partial_k^{\text{total}} = \partial_k^{\text{expl}} + (\partial_k X^\alpha) \partial_\alpha^{\text{expl}} \quad (3.2)$$

Неполные операторы Гамильтона определяются согласно

$$\overset{\cdot}{\nabla}^{\text{expl}} = \overset{\cdot}{t} \partial_\alpha^{\text{expl}} \quad (3.3)$$

$$\nabla^{\text{expl}} = t \partial_k^{\text{expl}} \quad (3.4)$$

Определим неполные отсчетный и пространственный градиенты двухточечного псевдотензорного поля произвольных рангов и весов  $w$ ,  $w$  с помощью соотношений [13]:

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{e} \overset{\cdot}{w} \overset{\cdot}{\nabla}^{\text{expl}} \otimes \overset{\cdot}{e} \overset{-w}{\mathbf{T}}_{(n,n)}^{[w,w]} &= \overset{\cdot}{e} \overset{\cdot}{t} \overset{\cdot}{\partial}_\sigma^{\text{expl}} (e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} \times \\ &\quad \times \overset{i}{t} \otimes \dots \otimes \overset{k}{t} \otimes \overset{\lambda}{t} \otimes \dots \otimes \overset{v}{t}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} e^w \nabla^{\text{expl}} \otimes e^{-w} \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w]} &= e^w t \otimes \partial_p^{\text{expl}} (e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} \times \\ &\quad \times \overset{i}{t} \otimes \dots \otimes \overset{k}{t} \otimes \overset{\lambda}{t} \otimes \dots \otimes \overset{v}{t}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуем формулы (3.5) и (3.6) с учетом хорошо известных зависимостей

$$\partial_\nu^{\text{expl}} \overset{\mu}{t} = -\overset{\cdot}{\Gamma}_{\alpha\nu}^\mu \overset{\alpha}{t}, \quad \partial_\nu^{\text{expl}} \overset{\alpha}{t} = \overset{\cdot}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \overset{\mu}{t}, \quad \frac{\partial_\alpha^{\text{expl}} e}{e} = \overset{\cdot}{\Gamma}_{\alpha\nu}^\nu \quad (3.7)$$

$$\partial_p^{\text{expl}} \overset{m}{t} = -\overset{\cdot}{\Gamma}_{sp}^m \overset{s}{t}, \quad \partial_p^{\text{expl}} \overset{s}{t} = \overset{\cdot}{\Gamma}_{mp}^s \overset{m}{t}, \quad \frac{\partial_p^{\text{expl}} e}{e} = \overset{\cdot}{\Gamma}_{ps}^s \quad (3.8)$$

В результате несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 e^w \nabla^{\text{expl}} \otimes e^{-w} \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w]} &= e^w \mathbf{l}^p \otimes \partial_p^{\text{expl}} (e^{-w} \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \times \\
 &\times \mathbf{l}_l^i \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_s^i \otimes \mathbf{l} \otimes \dots \otimes \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}'_{\alpha} \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'_{\gamma} \otimes \mathbf{l}' \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'^v) = \\
 &= (\partial_p^{\text{expl}} \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} - w \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{pq}^q) \times \\
 &\times \mathbf{l}^p \otimes \mathbf{l}_l^i \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_s^i \otimes \mathbf{l} \otimes \dots \otimes \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}'_{\alpha} \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'_{\gamma} \otimes \mathbf{l}' \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'^v + \\
 &\quad + \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{lp}^q \times \\
 &\times \mathbf{l}^p \otimes \mathbf{l}_q^i \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_s^i \otimes \mathbf{l} \otimes \dots \otimes \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}'_{\alpha} \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'_{\gamma} \otimes \mathbf{l}' \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'^v + \dots + \\
 &\quad + \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{sp}^q \times \\
 &\times \mathbf{l}^p \otimes \mathbf{l}_l^i \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_q^i \otimes \mathbf{l} \otimes \dots \otimes \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}'_{\alpha} \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'_{\gamma} \otimes \mathbf{l}' \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'^v - \\
 &\quad - \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{pq}^i \times \\
 &\times \mathbf{l}^p \otimes \mathbf{l}_l^i \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_s^q \otimes \mathbf{l} \otimes \dots \otimes \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}'_{\alpha} \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'_{\gamma} \otimes \mathbf{l}' \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'^v - \dots - \\
 &\quad - \mathbf{T}_{(n,n)}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{pq}^k \times \\
 &\times \mathbf{l}^p \otimes \mathbf{l}_l^i \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_s^i \otimes \mathbf{l} \otimes \dots \otimes \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}'_{\alpha} \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'_{\gamma} \otimes \mathbf{l}' \otimes \dots \otimes \mathbf{l}'^v
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

На основании (3.9) заключаем, что неполная ковариантная производная по координатам  $x^p$  определяется согласно

$$\begin{aligned}
 \nabla_p^{\text{expl}} \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} &= \partial_p^{\text{expl}} \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} + \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } qm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{qp}^l + \dots + \\
 &+ \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{qp}^s - \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{ip}^q - \dots - \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{kp}^q - \\
 &\quad - w \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...s \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{qp}^q
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Аналогично, вычисляется неполная ковариантная производная по координатам  $X^\sigma$

$$\begin{aligned}
 \nabla_\sigma^{\text{expl}} \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\gamma} &= \partial_\sigma^{\text{expl}} \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\gamma} + \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \zeta\beta...\gamma} \Gamma_{\zeta\sigma}^\alpha + \dots + \\
 &+ \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\zeta} \Gamma_{\zeta\sigma}^\gamma - \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{\lambda\sigma}^\zeta - \dots - \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{\nu\sigma}^\zeta - \\
 &\quad - w \mathbf{T}_{[n,n]}^{[w,w] \text{ } lm...q \text{ } \alpha\beta...\gamma} \Gamma_{\zeta\sigma}^\zeta
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Полные операторы Гамильтона определяются соотношениями

$${}^w \nabla^{\text{total}} = {}^w \partial_{\alpha}^{\alpha \text{total}}, \quad \nabla^{\text{total}} = \partial_k^k \text{total} \quad (3.12)$$

Заметим, например, что для дивергенции одноточечного псевдотензорного поля (например, псевдотензора веса +1 силовых напряжений Коши) справедливы равенства

$$\nabla_k \overset{[+1]}{T}_{(2)}^{ki} = \nabla_k^{\text{total}} \overset{[+1]}{T}_{(2)}^{ki}$$

играющие особенно важную роль в теориях поля [16, 17].

Полные отсчетный и пространственный градиенты двухточечного псевдотензорного поля произвольных рангов  $n, n$  и весов  $w, w$  определяются с помощью соотношений [13]:

$$\begin{aligned} {}^w e^w {}^w \nabla^{\text{total}} \otimes {}^w e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{\mathbf{T}}_{(n,n)}^{\sigma} &= {}^w e^w e^w {}^w \partial_{\sigma}^{\sigma \text{total}} (e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} \times \\ &\times \underset{l}{I} \otimes \dots \otimes \underset{s}{I} \otimes \overset{i}{I} \otimes \dots \otimes \overset{k}{I} \otimes \underset{\alpha}{I} \otimes \dots \otimes \underset{\gamma}{I} \otimes \overset{\lambda}{I} \otimes \dots \otimes \underset{v}{I}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} {}^w e^w e^w \nabla^{\text{total}} \otimes {}^w e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{\mathbf{T}}_{(n,n)}^p &= {}^w e^w e^w {}^w \partial_p^p \text{total} (e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} \times \\ &\times \underset{l}{I} \otimes \dots \otimes \underset{s}{I} \otimes \overset{i}{I} \otimes \dots \otimes \overset{k}{I} \otimes \underset{\alpha}{I} \otimes \dots \otimes \underset{\gamma}{I} \otimes \overset{\lambda}{I} \otimes \dots \otimes \underset{v}{I}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

В случае двухвалентного псевдотензора  $\overset{[w,w]}{\mathbf{S}}_{(1,1)}$  можно получить:

$$\begin{aligned} {}^w e^w e^w {}^w \nabla^{\text{total}} \otimes {}^w e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{\mathbf{S}}_{(1,1)}^{\sigma} &= {}^w e^w {}^w \partial_{\sigma}^{\sigma \text{expl}} (e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{S}_{(1,1)}^{\alpha m} \underset{l}{I} \otimes \underset{m}{I}) + \\ + \partial_{\sigma} x^p e^w {}^w \partial_p^p \text{expl} (e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{S}_{(1,1)}^{\alpha m} \underset{l}{I} \otimes \underset{m}{I}) &= (\nabla_{\sigma}^{\text{expl}} \overset{[w,w]}{S}_{(1,1)}^{\alpha m})^{\sigma} \underset{l}{I} \otimes \underset{m}{I} + \\ + (\partial_{\sigma} x^p \nabla_p^{\text{expl}} \overset{[w,w]}{S}_{(1,1)}^{\alpha m})^{\sigma} \underset{l}{I} \otimes \underset{m}{I} &= (\nabla_{\sigma}^{\text{total}} \overset{[w,w]}{S}_{(1,1)}^{\alpha m})^{\sigma} \underset{l}{I} \otimes \underset{m}{I} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим, что дивергентные слагаемые  $\nabla_{\alpha}^{\text{total}} S^{\alpha m}$  возникают в записи уравнений баланса импульса в отсчетной конфигурации, где  $S^{\alpha m}$  – первый тензор силовых напряжений Пиола–Кирхгофа.

Подставив выражение (3.1) в формулу (3.13) и найдем

$$\begin{aligned} {}^w e^w e^w {}^w \nabla^{\text{total}} \otimes {}^w e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{\mathbf{T}}_{(n,n)}^{\sigma} &= {}^w e^w e^w {}^w \partial_{\sigma}^{\sigma \text{expl}} (e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} \times \\ &\times \underset{l}{I} \otimes \dots \otimes \underset{s}{I} \otimes \overset{i}{I} \otimes \dots \otimes \overset{k}{I} \otimes \underset{\alpha}{I} \otimes \dots \otimes \underset{\gamma}{I} \otimes \overset{\lambda}{I} \otimes \dots \otimes \underset{v}{I}) + \\ &+ \partial_{\sigma} x^p e^w {}^w \partial_p^p \text{expl} (e^{-w} e^{-w} \overset{[w,w]}{T}_{(n,n)}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} \times \\ &\times \underset{l}{I} \otimes \dots \otimes \underset{s}{I} \otimes \overset{i}{I} \otimes \dots \otimes \overset{k}{I} \otimes \underset{\alpha}{I} \otimes \dots \otimes \underset{\gamma}{I} \otimes \overset{\lambda}{I} \otimes \dots \otimes \underset{v}{I}) = \\ &= (\nabla_{\sigma}^{\text{expl}} \overset{[w,w]}{T}_{[n,n]}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma} + \partial_{\sigma} x^p \nabla_p^{\text{expl}} \overset{[w,w]}{T}_{[n,n]}^{lm\dots s \alpha\beta\dots\gamma}) \times \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 & \times {}^{\sigma} \iota \otimes \iota \otimes \dots \otimes \iota = \\
 & = (\nabla_{\sigma}^{\text{total}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma) \iota \otimes \iota \otimes \dots \otimes \iota
 \end{aligned}$$

Вычисляя (3.13) и (3.14) с учетом (3.1) и (3.2) получим выражения для полных ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\sigma}^{\text{total}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma & = \partial_{\sigma}^{\text{expl}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \zeta \beta \dots \gamma \Gamma_{\zeta \sigma}^{\alpha} + \dots + \\
 & + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \zeta \Gamma_{\zeta \sigma}^{\gamma} - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{\lambda \sigma}^{\zeta} - \dots - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{\nu \sigma}^{\zeta} - \\
 & - w T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{\zeta \sigma}^{\zeta} + (\partial_{\sigma} X^p) [\partial_p^{\text{expl}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma + \\
 & + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{qp}^l + \dots + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{qp}^s - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{ip}^q - \\
 & - \dots - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{kp}^q - w T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{qp}^q]
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_p^{\text{total}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma & = \partial_p^{\text{expl}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{qp}^l + \dots + \\
 & + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{qp}^s - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{ip}^q - \dots - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{kp}^q - \\
 & - w T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{qp}^q + (\partial_p X^{\sigma}) [\partial_{\sigma}^{\text{expl}} T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma + \\
 & + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \zeta \beta \dots \gamma \Gamma_{\zeta \sigma}^{\alpha} + \dots + T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \zeta \Gamma_{\zeta \sigma}^{\gamma} - \\
 & - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{\lambda \sigma}^{\zeta} - \dots - T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{\nu \sigma}^{\zeta} - w T_{[n,n]}^{[w,w]} \dots \alpha \beta \dots \gamma \Gamma_{\zeta \sigma}^{\zeta}]
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отметим, что выражения (3.17) и (3.18), можно записать в компактной форме, принимая во внимание (3.10) и (3.11):

$$\nabla_{\sigma}^{\text{total}} = \nabla_{\sigma}^{\text{expl}} + (\partial_{\sigma} X^p) \nabla_p^{\text{expl}} \quad (3.19)$$

$$\nabla_p^{\text{total}} = \nabla_p^{\text{expl}} + (\partial_p X^{\sigma}) \nabla_{\sigma}^{\text{expl}} \quad (3.20)$$

**Заключение и выводы.** В настоящей работе обсуждаются вопросы ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров произвольных рангов и весов.

1. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в ориентированном евклидовом пространстве.

2. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене обеих систем координат.

3. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю.

4. Вводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров.

<sup>5</sup> Опустим детали вычислений, поскольку они имеют очевидный характер.

**Таблица 1.** Операции частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров

	отсчетные координаты $X^\alpha$	пространственные координаты $x^k$
базисные векторы	$'l_\alpha$	$l_s$
частное (неполное) дифференцирование по явному вхождению переменной	$\partial_\alpha^{\text{expl}}$	$\partial_s^{\text{expl}}$
полное дифференцирование	$\partial_\alpha^{\text{total}}$	$\partial_s^{\text{total}}$
неполный оператор Гамильтона	$'\nabla^{\text{expl}} = 'l_\alpha \partial_\alpha^{\text{expl}}$	$\nabla^{\text{expl}} = l_s^s \partial_s^{\text{expl}}$
полный оператор Гамильтона	$'\nabla^{\text{total}} = 'l_\alpha \partial_\alpha^{\text{total}}$	$\nabla^{\text{total}} = l_s^s \partial_s^{\text{total}}$
цепное правило (chain rule)	$\partial_\alpha^{\text{total}} = (\partial_\alpha x^s) \partial_s^{\text{total}}$	$\partial_s^{\text{total}} = (\partial_s X^\alpha) \partial_\alpha^{\text{total}}$
цепное правило (chain rule)	$'\nabla_\alpha^{\text{total}} = (\partial_\alpha x^s) \nabla_s^{\text{total}}$	$\nabla_s^{\text{total}} = (\partial_s X^\alpha) ' \nabla_\alpha^{\text{total}}$
полное дифференцирование	$\partial_\alpha^{\text{total}} = \partial_\alpha^{\text{expl}} + (\partial_\alpha x^s) \partial_s^{\text{expl}}$	$\partial_s^{\text{total}} = \partial_s^{\text{expl}} + (\partial_s X^\alpha) \partial_\alpha^{\text{expl}}$
полное ковариантное дифференцирование	$'\nabla_\alpha^{\text{total}} = ' \nabla_\alpha^{\text{expl}} + (\partial_\alpha x^s) \nabla_s^{\text{expl}}$	$\nabla_s^{\text{total}} = \nabla_s^{\text{expl}} + (\partial_s X^\alpha) ' \nabla_\alpha^{\text{expl}}$

5. Обсуждаются формулы, связывающие полные и неполные ковариантные производные двухточечного псевдотензорного поля (см. таблицу).

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 20-01-00666.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 1960. P. 226–858. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2).
2. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer. 2004. 579 p. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3_1)
3. Maugin G. Material inhomogeneities in elasticity. New York: Chapman and Hall/CRC. 2020. 292 p. <https://doi.org/10.1201/9781003059882>
4. Весоловский З. Динамические задачи нелинейной теории упругости. Пер. с польского Киев: Наукова думка. 1981. 216 p.
5. Schouten J.A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press. 1965. 434 p. [Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
6. Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
7. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
8. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. V. 24.

- № 4. P. 752–761.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
9. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТД. 1948. 408 с. [Gurevich G.B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
  10. *Sokolnikoff I.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc. 1964. 361 p. [Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
  11. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press. 1949. V. 5. 334 p.
  12. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии механике в физике. М.: Физматгиз. 1963. 411 с.
  13. *Radayev Y.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K.* On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. V. 26. № 1. P. 36–47.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>
  14. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060106>
  15. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука. 1966.
  16. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 156 с.
  17. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2010. 328 с.

УДК 539.3

**УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБА БАЛКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО  
К МЕТОДУ ЗАЛИПШЕГО КАНТИЛЕВЕРА**© 2022 г. И. А. Солдатенков<sup>a,\*</sup>, А. А. Яковенко<sup>a</sup>, В. Б. Световой<sup>b</sup><sup>a</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия<sup>b</sup> Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН, Москва, Россия

\*e-mail: iasoldat@hotmail.com

Поступила в редакцию 14.02.2022 г.

После доработки 20.03.2022 г.

Принята к публикации 21.03.2022 г.

Предложена математическая модель, описывающая изгиб кантилевера и с учетом факторов его неидеальности (исходный прогиб, изменение толщины), а также податливости подложки применительно к методу залипшего кантилевера. На основе предложенной модели выполнен численный анализ изгиба кантилевера и даны оценки энергии адгезии. Полученные результаты свидетельствуют о важности учета факторов неидеальности кантилевера, а также податливости подложки.

*Ключевые слова:* контактная задача, упругая балка, дисперсионные силы, адгезия

DOI: 10.31857/S0572329922060162

**Введение.** В последние десятилетия значительно повысился интерес к изучению адгезионного взаимодействия твердых тел, что обусловлено, в частности, широким применением микроэлектромеханических систем (MEMS) [1, 2]. Адгезионное взаимодействие тел обуславливается силами различной природы (электростатической, капиллярной, химической и др.), среди которых выделяются дисперсионные силы (ДС). Эти силы действуют между незаряженными телами и их существование связано с флуктуациями электромагнитного поля [3]. На расстояниях между телами  $h \sim 1$  нм ДС носят название ван-дер-ваальсовых сил, при больших расстояниях (свыше 10 нм), когда существенным становится запаздывание электромагнитных волн, они называются силами Казимира. Общая макроскопическая теория ДС была построена Лифшицем с коллегами [4].

С увеличением расстояния  $h$  между телами ДС быстро убывают ( $\sim h^{-\alpha}$ ,  $\alpha = 3-4$ ). Однако, несмотря на это, ДС играют важную роль в производстве и функционировании различных микромеханических устройств, т.к. они являются причиной крайне нежелательного явления – адгезионного залипания подвижных элементов подобных устройств [5]. В отличие от других сил (например, электростатических или капиллярных), ДС не могут быть устранены выбором материалов, модификацией поверхности и т.п., поскольку природа ДС связана с фундаментальными свойствами электромагнитного поля.

Указанные обстоятельства обуславливают актуальность задачи измерения ДС. Использование для этого традиционных систем с упругим подвесом представляется проблематичным из-за потери устойчивости и спонтанного залипания. Особенно остро такая проблема стоит для диапазона расстояний  $3 \text{ нм} < h < 30 \text{ нм}$ , характерного для многих микромеханических устройств. Предложенный ранее метод залипшего канти-

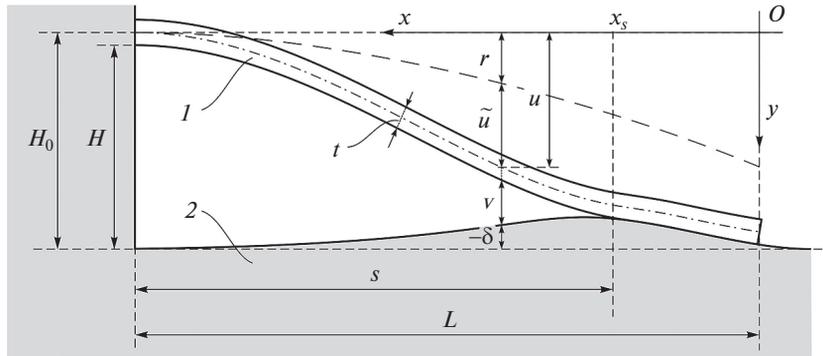


Рис. 1. Схема взаимодействия кантилевера 1 с подложкой 2 в МЗК.

левера (МЗК) лишен подобного недостатка, при этом МЗК позволяет измерять также и энергию адгезии исследуемых поверхностей [6–9].

МЗК предполагает использование упругой балки (кантилевера), один конец которой консольно закреплен на высоте  $H$  над подложкой. Характерная длина и толщина кантилевера составляют  $L \sim 10$  мм и  $t \sim 10$  мкм, высота крепления кантилевера  $H \sim 10$  мкм. Свободный конец кантилевера приводится в контакт с подложкой, в результате чего происходит адгезионное залипание части кантилевера (рис. 1). Остальная (свободная) часть кантилевера находится под действием ДС, которые вызывают изменение прогиба кантилевера относительно его классической формы. Как показывают оценки, подобное изменение составляет  $\sim 100$  нм. Оно может быть измерено при помощи сканирующего интерферометра с точностью  $\sim 1$  нм и служит в качестве исходных данных для оценки ДС с привлечением теории изгиба балок [10, 11].

Для экспериментальных исследований обычно используется кремниевый кантилевер, а на подложку наносится покрытие. Это обусловлено тем, что стандартная технология производства микромеханических устройств предполагает использование кремния, как базового материала, и тонких покрытий, для нанесения которых применяются известные способы – магнетронное напыление, термическое осаждение и др. [12]. Как показывают эксперименты [13, 14], получаемая в результате шероховатость покрытия часто описывается негауссовым распределением и характеризуется значительным числом неровностей (пиков), которые имеют высоту  $\sim 10$  нм, существенно превышающую среднеквадратичное отклонение шероховатости  $\sim 1$  нм. Такое избыточное количество высоких пиков приводит к ощутимой податливости подложки, что, в свою очередь, оказывает влияние на измеряемый прогиб кантилевера.

Вследствие погрешностей технологии изготовления, форма кантилевера не является идеальной. Это проявляется в существовании исходного (остаточного) прогиба кантилевера и отклонения его толщины от постоянного значения [15]. Указанные факторы неидеальности кантилевера также влияют на его прогиб и требуют учета.

Следует отметить существование и других факторов, влияющих на изгиб кантилевера. Примерами тому служат факторы капиллярных явлений и растяжения кантилевера [16] или податливости консольного закрепления кантилевера, которая исследовалась применительно к атомно-силовому микроскопу [17].

В данной работе предлагается модель изгиба кантилевера, учитывающая исходный прогиб и изменение толщины кантилевера, а также податливость подложки применительно к МЗК. Предложенная модель позволяет производить уточненный расчет прогиба кантилевера и энергии адгезии кантилевера к подложке. Целью работы является анализ влияния факторов неидеальности кантилевера (исходный прогиб, изменение

толщины) и податливости подложки на результирующий прогиб кантилевера и оценку энергии адгезии применительно к МЗК.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим изгиб балки (кантилевера) длины  $L$  и ширины  $w$  в поле ДС при ее консольном закреплении на расстоянии  $H_0$  от подложки и наличии участка  $[0, x_s]$  адгезионного сцепления с подложкой (участок залипания) (рис. 1). Здесь и далее  $x_s = L - s$ , причем длина  $s$  свободного (незалипшего) участка считается заданной. Рассмотрение проводится на макромасштабе, что позволяет пренебречь шероховатостью кантилевера и подложки на микро- и наноуровне. На свободном участке  $(x_s, L]$  кантилевер и подложка разделены положительным зазором  $v$ . Прогиб кантилевера задается ординатой  $u$  его оси в системе координат  $Oxu$ . Допускаются существование исходного (до залипания) прогиба  $r$  кантилевера и изменение толщины  $t$  кантилевера по его длине. Подложка считается податливой (деформируемой), что обуславливает существование перемещения  $\delta$  ее границы. Между указанными величинами имеет место соотношение (рис. 1):

$$v(x) = H_0 - u(x) - t(x)/2 + \delta(x), \quad x \in [0, L] \quad (1.1)$$

Используя положения теории изгиба балок со слабоизменяющейся толщиной, можно вывести следующее соотношение между прогибом  $u$  балки и внешней нагрузкой  $q$ , распределенной по длине балки [10, 11]:

$$[EJ(x)u''(x)]'' = q(x) \quad (1.2)$$

где  $J(x) = wt^3(x)/12$  – момент инерции сечения балки,  $E$  – модуль упругости, штрих у символа функции означает производную по координате  $x$ . Для слабоискривленной в исходном состоянии балки величину  $u$  в равенстве (1.2) следует заменить разностью  $\tilde{u} = u - r$  [10, 11].

Принимая во внимание вышесказанное, можно прийти к следующему дифференциальному уравнению, описывающему прогиб кантилевера:

$$\mathcal{H}(\tilde{u})(x) \equiv [D(x)\tilde{u}''(x)]'' = \beta(x), \quad x \in [0, L] \quad (1.3)$$

в котором  $\beta = q/w$  – внешнее изгибающее напряжение,  $D(x) = Et^3(x)/12$ .

Для описания деформационного поведения подложки будет использоваться модель Винклера [18, 19]:

$$\delta(x) = -A\sigma_y(x), \quad x \in [0, L] \quad (1.4)$$

где  $\sigma_y(x)$  – граничное напряжение,  $0 < A$  – коэффициент податливости, который определяется деформационными свойствами шероховатого контакта кантилевера и подложки [15, 20].

Присутствующее в уравнении (1.3) изгибающее напряжение  $\beta$  обусловлено реакцией подложки (участок залипания) или действием ДС (свободный участок), однако в любом случае справедливо равенство

$$\beta(x) = \sigma_y(x), \quad x \in [0, L] \quad (1.5)$$

Исключив из этого равенства напряжение  $\sigma_y$  с помощью равенств (1.1) и (1.4), можно получить следующее выражение:

$$\beta(x) = A^{-1} [H_0 - u(x) - t(x)/2 - v(x)], \quad x \in [0, L] \quad (1.6)$$

На участке залипания имеем  $v(x) = 0$ , поэтому из выражения (1.6) следует, что

$$\beta(x) = \beta_1 (u(x) + t(x)/2), \quad x \in [0, x_s] \quad (1.7)$$

причем

$$\beta_1(X) = A^{-1}(H_0 - X) \quad (1.8)$$

На свободном участке зазор  $v$  отличен от нуля, поэтому справедливо равенство

$$\beta(x) = \Pi(v(x)), \quad x \in (x_s, L] \quad (1.9)$$

в котором функция  $\Pi$  – удельная сила притяжения друг к другу поверхностей кантилевера и подложки, обусловленная наличием ДС. Для рассматриваемого случая можно использовать выражение

$$\Pi(v) = \Pi_0 (h_0/(h_0 + v))^\alpha \quad (1.10)$$

в котором параметр  $\Pi_0$  задает силу притяжения при  $v = 0$ , а величина  $h_0$  характеризует равновесный зазор шероховатого контакта кантилевера и подложки на наноуровне [20, 21].

Если, с помощью цепочки равенств (1.4), (1.5), выразить в правой части соотношения (1.1) величину  $\delta$  через  $\beta$  и подставить полученное выражение для зазора  $v$  в правую часть равенства (1.9), то можно получить алгебраическое уравнение для изгибающего напряжения на свободном участке:

$$\beta(x) = \Pi(H_0 - u(x) - t(x)/2 - A\beta(x)), \quad x \in (x_s, L] \quad (1.11)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\beta(x) = \beta_2(u(x) + t(x)/2), \quad x \in (x_s, L] \quad (1.12)$$

при условии, что функция  $\beta_2(X)$  удовлетворяет уравнению

$$\beta_2(X) = \Pi(H_0 - X - A\beta_2(X)) \quad (1.13)$$

Отметим, что уравнение (1.11) отвечает самосогласованному по Дерягину подходу к постановке контактной задачи для деформируемых тел при наличии межмолекулярного взаимодействия [22]. Действительно, это уравнение предполагает существование зазора  $v$  между телами (кантилевер и подложка), величина которого обеспечивает равенство ДС и сил деформации подложки.

Подставим полученные выражения (1.7), (1.12) в правую часть уравнения (1.3) и заменим в нем перемещение  $\tilde{u}$  разностью  $u - r$ . В результате придем к следующему дифференциальному уравнению для прогиба  $u$  рассматриваемого кантилевера:

$$\mathcal{H}(u)(x) = \beta_r(x) + \begin{cases} \beta_1(u(x) + t(x)/2), & x \in [0, x_s] \\ \beta_2(u(x) + t(x)/2), & x \in (x_s, L] \end{cases} \quad (1.14)$$

причем  $\beta_r(x) = \mathcal{H}(r)(x)$ , оператор  $\mathcal{H}$  имеет вид (1.3), а функции  $\beta_1(X)$  и  $\beta_2(X)$  определяются равенствами (1.8) и (1.13). Отметим, что комплекс  $u(x) + t(x)/2$  в правой части уравнения (1.14) задает прогиб нижней грани кантилевера.

Граничные условия для уравнения (1.14) имеют вид

$$u''(0) = r''(0), \quad u'''(0) = r'''(0), \quad u(L) = 0, \quad u'(L) = r'(L) \quad (1.15)$$

из которых первые два отвечают отсутствию изгибающего момента и поперечной силы на свободном конце кантилевера ( $\tilde{u}''(0) = \tilde{u}'''(0) = 0$ ), а два последних – консольному закреплению кантилевера.

*Замечание 1.* В работе [15] использовалось дополнительное условие относительно способа консольного закрепления кантилевера (рис. 1). А именно, считалось, что его нижняя грань при  $x > L$  сцеплена с горизонтальной плоскостью ступеньки высотой  $H$ . В этом случае имеет место равенство  $r'(L) = -t'(L)/2$  и, поэтому, последнее граничное условие (1.15) принимает вид [15]:  $u'(L) = -t'(L)/2$ .

Прогиб кантилевера  $u(x)$ , полученный в результате решения краевой задачи (1.14), (1.15), позволяет с помощью цепочки равенств (1.4), (1.5), (1.7), (1.12) найти граничные напряжения  $\sigma_y(x)$  и перемещение  $\delta(x)$  на отрезке  $[0, L]$ . После этого, воспользовавшись соотношением (1.1), можно определить зазор  $v(x)$ .

Конкретизируем краевую задачу (1.14), (1.15) для двух частных случаев рассмотренной выше постановки задачи об изгибе кантилевера.

1. Случай абсолютно жесткой подложки описывается представленными выше формулами, если в них выполнить предельный переход  $A \rightarrow 0$  и положить  $\delta(x) \equiv 0$ .

На участке залипания прогиб  $u$  кантилевера известен и определяется по формуле

$$u(x) = H_0 - t(x)/2, \quad x \in [0, x_s] \quad (1.16)$$

вытекающей из соотношения (1.1) при  $v(x) = \delta(x) = 0$ .

На свободном участке прогиб кантилевера описывается уравнением

$$\mathcal{K}(u)(x) = \beta_r(x) + \Pi(H_0 - u(x) - t(x)/2), \quad x \in (x_s, L] \quad (1.17)$$

которое получается из уравнения (1.14), если учесть, что при  $A = 0$ :  $\beta_2(X) = \Pi(H_0 - X)$ .

Граничные условия для уравнения (1.17) имеют вид

$$u(x_s) = H_0 - t(x_s)/2, \quad u'(x_s) = -t'(x_s)/2, \quad u(L) = 0, \quad u'(L) = r'(L) \quad (1.18)$$

причем первые два равенства являются следствием равенства (1.16) для гладкой функции  $u(x)$ , а два последних повторяют прежние условия (1.15).

*Пример.* Допустим, что ДС пренебрежимо малы ( $\Pi(v) = 0$ ), а кантилевер имеет постоянную толщину ( $t(x) = \text{const}$ ). Тогда решение краевой задачи (1.17), (1.18) представляется выражением

$$u(x) = H + a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 - r'(x_s) s \xi + r(x) - r(x_s) \quad (1.19)$$

в котором

$$a_3 = 2H - 2r(x_s) - r'(x_s)s, \quad a_2 = -3H + 3r(x_s) + 2r'(x_s)s, \quad \xi = x'/s$$

$x' = x - x_s$  – координата, отсчитываемая от точки  $x_s$  разъединения кантилевера и подложки (рис. 1). При отсутствии исходного прогиба ( $r(x) = 0$ ) решение (1.19) принимает известный вид [8]

$$u(x) = H[1 + 2\xi^3 - 3\xi^2] \quad (1.20)$$

Отметим, что решение (1.20) остается в силе и при наличии исходного прогиба, описываемого степенными функциями

$$r(x) = k_2(L - x)^2, \quad r(x) = k_3(L - x)^3 \quad (1.21)$$

– в этом нетрудно убедиться прямой подстановкой выражений (1.21) в решение (1.19).

2. Случай деформируемой подложки и идеального кантилевера описывается приведенными выше общими формулами, если в них положить  $r(x) = 0$ ,  $t(x) = \text{const}$ . В этом случае имеет место соотношение  $H = H_0 - t/2$  (рис. 1), поэтому уравнению (1.14) и граничным условиям (1.15) можно придать следующий вид:

$$Du^{(IV)}(x) = \begin{cases} b_1(u(x)), & x \in [0, x_s] \\ b_2(u(x)), & x \in (x_s, L] \end{cases} \quad (1.22)$$

$$u''(0) = u'''(0) = 0, \quad u(L) = u'(L) = 0 \quad (1.23)$$

при этом функции  $b_1(X)$  и  $b_2(X)$  определяются равенствами (ср. с (1.8) и (1.13)):

$$b_1(X) = A^{-1}(H - X), \quad b_2(X) = \Pi(H - X - Ab_2(X))$$

На участке  $[0, x_s]$  решение уравнения (1.22), удовлетворяющее первой паре граничных условий (1.23), находится в аналитическом виде [11]

$$u(x) = H + e^{kx} (a \cos kx + b \sin kx) + e^{-kx} ((a - 2b) \cos kx + b \sin kx), \quad (1.24)$$

$$x \in [0, x_s]$$

где  $k = (4AD)^{-1/4}$ ,  $a$  и  $b$  – произвольные параметры.

На участке  $[x_s, L]$  решение уравнения (1.22) строится численно с начальными условиями (задача Коши)

$$u^{(n)}(x_s) = u^{(n)}(x_s - 0), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

в которых значения  $u^{(n)}(x_s - 0)$  определяются с помощью выражения (1.24), при этом параметры  $a$  и  $b$  подбираются таким образом, чтобы удовлетворить второй паре граничных условий (1.23).

**2. Энергетические аспекты МЗК.** Данный раздел посвящен выводу формулы, связывающей энергию адгезии  $\Gamma$  с состоянием рассматриваемой системы кантилевер–подложка. Для этого введем в рассмотрение полную энергию  $\mathcal{E}$  этой системы, которая складывается из потенциальных энергий  $U_1$  и  $U_2$  изогнутого кантилевера и деформированной подложки, а также из энергии  $U_3$  межмолекулярного взаимодействия кантилевера и подложки:

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 + U_3 \quad (2.1)$$

Определим вклады  $U_1, U_2, U_3$  в полную энергию  $\mathcal{E}$ .

Согласно теории изгиба балок [10, 11]

$$U_1 = \int_0^L \frac{M^2(x) dx}{2EJ(x)} = \frac{w}{2} \int_0^L D(x) [u''(x) - r''(x)]^2 dx \quad (2.2)$$

причем последнее равенство получается с учетом известного соотношения  $(EJ)^{-1}M = u'' - r''$  и данных выше определений величин  $J$  и  $D$ .

Энергия  $U_2$  определяется работой напряжения  $\sigma_y$  при перемещении границы подложки на величину  $\delta$ . С учетом соотношения (1.4), это позволяет установить, что

$$U_2 = \frac{w}{2A} \int_0^L \delta^2(x) dx \quad (2.3)$$

Энергия  $U_3$  определяется работой, которую надо совершить для разведения записанных поверхностей кантилевера и подложки на расстояние  $v(x)$ ,  $x \in [x_s, L]$  (рис. 1). При подсчете этой работы необходимо учитывать, что, наряду с ДС вида (1.10), между кантилевером и подложкой могут действовать короткодействующие силы, обусловленные, например, перекрытием электронных облаков или капиллярными эффектами. Короткодействующий характер таких сил позволяет представить работу по их преодолению при разведении кантилевера и подложки на расстояние  $v(x)$  в виде произведения  $w s \Gamma_{sf}$ , где  $\Gamma_{sf}$  – энергия адгезии короткодействующих сил. Учитывая указанные обстоятельства, для энергии  $U_3$  можно получить выражение:

$$U_3 = U_{df}^+ + C_0 s + w \Gamma_{sf} s \quad (2.4)$$

в котором первые два слагаемых представляют энергию ДС, последнее слагаемое – энергию короткодействующих сил,

$$U_{df}^+ = -C_0 \int_{x_s}^L \left( \frac{h_0}{h_0 + v(x)} \right)^{\alpha-1} dx, \quad C_0 = \frac{wh_0\Pi_0}{\alpha - 1} \quad (2.5)$$

Нетрудно убедиться, что присутствующий в равенствах (2.4) и (2.5) коэффициент  $C_0$  связан с энергией адгезии  $\Gamma_{df}$  ДС:  $C_0 = w\Gamma_{df}$ . Если принять это во внимание и учесть равенство

$$\Gamma = \Gamma_{df} + \Gamma_{sf}$$

то выражению (2.4) можно придать следующий вид:

$$U_3 = U_{df}^+ + w\Gamma s \quad (2.6)$$

Замена в соотношении (2.1) энергии  $U_3$  правой частью равенства (2.6) приводит к выражению

$$\mathcal{E} = U^* + w\Gamma s \quad (2.7)$$

в котором

$$U^* = U_1 + U_2 + U_{df}^+ \quad (2.8)$$

К выражению (2.7) применима известная процедура определения величины  $\Gamma$  путем минимизации полной энергии  $\mathcal{E}$  по параметру  $s$  [7, 16]. В результате можно получить искомую формулу

$$\Gamma = -\frac{1}{w} \frac{dU^*}{ds} \quad (2.9)$$

Формула (2.9) используется для оценки энергии адгезии  $\Gamma$  в МЗК. Величина  $U^*$  в этой формуле определяется равенством (2.8), правая часть которого рассчитывается на основе формул (2.2), (2.3) и (2.5). Присутствующие в этих формулах функции  $u(x)$ ,  $v(x)$  и  $\delta(x)$ , как указывалось выше, известны из решения краевой задачи (1.14), (1.15). Отметим также, что правая часть равенства (2.9) не зависит от ширины  $w$  кантилевера – это непосредственно следует из определения (2.8) величины  $U^*$  и формул (2.2), (2.3) и (2.5).

В случае, когда ДС и податливость подложки пренебрежимо малы ( $\Pi(v) = 0$ ,  $A = 0$ ), а кантилевер является идеальным ( $r(x) = 0$ ,  $t(x) = \text{const}$ ), формула (2.9) приводит к известному выражению для энергии адгезии [7, 15]

$$\Gamma = 18DH^2/s^4 \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) остается справедливым, если допустить существование исходного прогиба  $r(x) = k_2(L - x)^2$ . Несмотря на то, что в этом случае исходный прогиб не влияет на оценку энергии адгезии  $\Gamma$ , потенциальная энергия  $U_1$  изогнутого кантилевера зависит от исходного прогиба – в силу равенств (1.20) и (2.2):

$$U_1 = wD[6H^2/s^3 + 2k_2^2L]$$

**3. Расчеты.** Выполним численный анализ поведения системы кантилевер – подложка на основе решения краевой задачи (1.14), (1.15). Это решение находилось при помощи метода стрельбы, предполагающего построение численного решения дифференциального уравнения (1.14) известными методами (Рунге–Кутты, Эйлера–Коши) [23].

**Таблица 1.** Оценки энергии адгезии  $\Gamma$  в мкДж/м<sup>2</sup> при разных значениях параметров  $C_R$  и  $C_T$ .

$C_T$ $C_R$	-0.05	0	0.05
-0.05	111.8	262.8	482.9
0	142.7	$\Gamma^\circ = 297.2$	511.7
0.05	167.0	317.6	516.1

Энергия адгезии  $\Gamma$  рассчитывалась по формуле (2.9) с использованием найденного решения краевой задачи (1.14), (1.15).

Целью численного анализа является демонстрация возможного влияния неидеальной формы кантилевера (исходный прогиб, изменяющаяся толщина) и податливости подложки на результирующий прогиб кантилевера и оценку энергии адгезии. Для этого результаты расчетов сравниваются с референсными прогибом  $u^\circ(x)$  и энергией адгезии  $\Gamma^\circ$ , отвечающих случаю идеального кантилевера (отсутствие исходного прогиба, постоянная толщина) и абсолютно жесткой подложки при наличии ДС.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $L = 10$  мм,  $s = 0.3L$ ,  $H_0 = 15$  мкм,  $E = 160$  ГПа,  $\Pi_0 = 1.5577 \times 10^4$  Па,  $h_0 = 10$  нм,  $\alpha = 3.5$ . Значения остальных параметров указываются ниже для каждого конкретного примера. Отметим, что среди указанных значений отсутствует значение ширины  $w$  кантилевера, т.к. этот параметр не влияет на решение краевой задачи (1.14), (1.15) и на величину энергии адгезии  $\Gamma$ , определяемой по формуле (2.9).

1. Случай абсолютно жесткой подложки, как указывалось выше (раздел 1), реализуется путем предельного перехода  $A \rightarrow 0$  в уравнениях задачи. Для такого случая был рассмотрен неидеальный кантилевер, исходный прогиб и толщина которого имеют волнистую форму:

$$\begin{aligned} r(x) &= R_a \sin \omega_R(L - x), \quad t(x) = T_0 + T_a \sin \omega_T(L - x) \\ \omega_R &= 2\pi/L_R, \quad \omega_T = 2\pi/L_T \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $T_0$  – толщина кантилевера в точке его консольного закрепления (рис. 1), смысл остальных параметров очевиден из выражений (3.1).

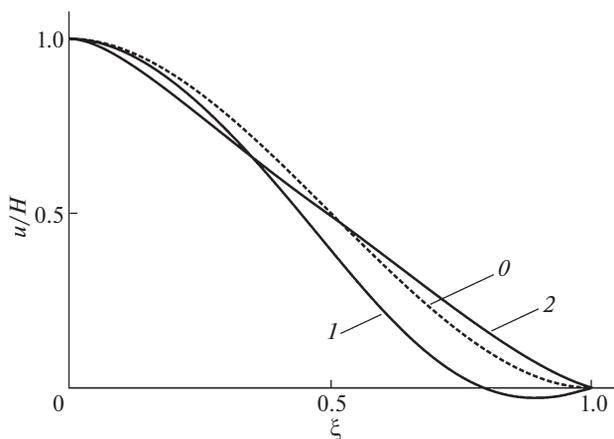
Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $T_0 = 10$  мкм,  $R_a = C_R H_0$ ,  $T_a = C_T T_0$ ,  $L_R = L_T = s = 0.3L$ , причем значения коэффициентов  $C_R$ ,  $C_T$  приводятся ниже для каждого примера. Для удобства представления результатов используется введенная ранее безразмерная координата  $\xi = x'/s$ ,  $x' = x - x_s$ .

На рис. 2 изображен прогиб  $u$  кантилевера на свободном участке при разных значениях параметров  $C_R$  и  $C_T$ : 0 и 0 (0), -0.05 и -0.05 (1), 0.05 и -0.05 (2). Отметим, что нулевые значения параметров  $C_R$  и  $C_T$  (кривая 0) отвечают случаю идеального кантилевера, имеющего референсный прогиб  $u^\circ$ . Как видно, имеет место существенное отличие прогиба  $u$  неидеального кантилевера (кривые 1 и 2) от прогиба  $u^\circ$ .

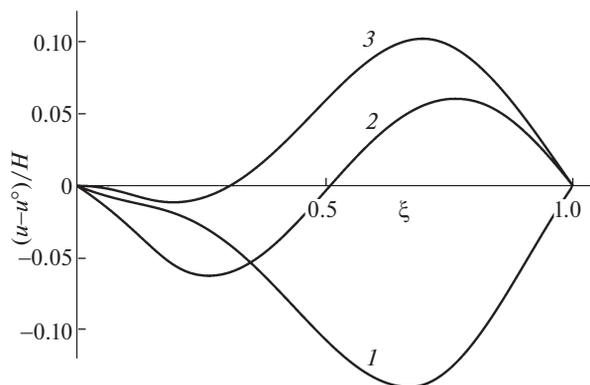
Более наглядно эффекты неидеальности кантилевера демонстрирует рис. 3, на котором показано, как меняется разность  $u - u^\circ$  на свободном участке при разных значениях параметров  $C_R$  и  $C_T$ : -0.05 и -0.05 (1), 0.05 и -0.05 (2), 0.05 и 0 (3).

Оценки энергии адгезии  $\Gamma$  при разных значениях параметров  $C_R$ ,  $C_T$  представлены в табл. 1.

2. Случай деформируемой подложки и идеального кантилевера, рассмотренный в разделе 1, отвечает ненулевым значениям коэффициента податливости  $A$  и  $r(x) = 0$ ,  $t(x) = \text{const}$ . В этом случае полагалось  $t = 10$  мкм, а значение коэффициента  $A$  опреде-



**Рис. 2.** Прогиб  $u$  кантилевера как функция координаты  $\xi$  при разных значениях параметров  $C_R$  и  $C_T$ : 0 и 0 (0),  $-0.05$  и  $-0.05$  (1),  $0.05$  и  $-0.05$  (2). Кривая 0 отвечает референсному прогибу  $u^0$ .



**Рис. 3.** Разность  $u - u^0$  прогибов кантилевера как функция координаты  $\xi$  при разных значениях параметров  $C_R$  и  $C_T$ :  $-0.05$  и  $-0.05$  (1),  $0.05$  и  $-0.05$  (2),  $0.05$  и 0 (3).

лялось на основе известной модели шероховатого контакта при наличии межмолекулярного взаимодействия [15, 20]. Для примера был взят контакт Si (кантилевер) – Au (покрытие подложки) с двумя вариантами распределения высот шероховатости покрытия: нормальное (гауссово) распределение и негауссово распределение, которое имеет место в реальном эксперименте и характеризуется значительным числом высоких неровностей [13]. Для этих вариантов расчетные значения коэффициента  $A$  составили 15.2 мкм/ГПа и 113 мкм/ГПа, соответственно.

Как видно, учет высоких неровностей шероховатости подложки (негауссово распределение) значительно увеличивает коэффициент податливости  $A$ , что, в свою очередь, приводит к существенному изменению прогиба  $u$  кантилевера (рис. 4 и 5).

Оценки энергии адгезии  $\Gamma$  при разных значениях коэффициента податливости  $A$  представлены в табл. 2.

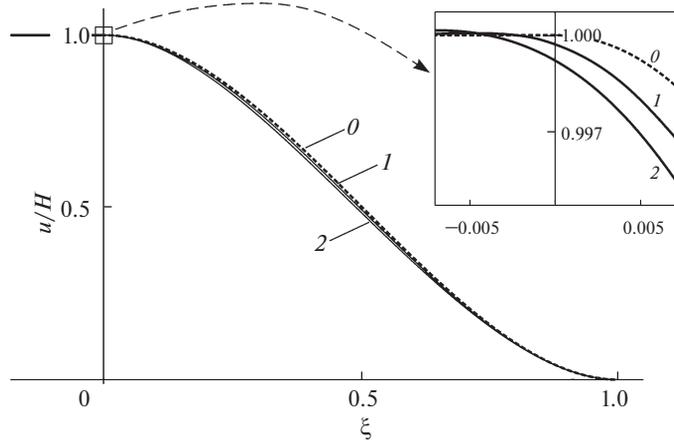


Рис. 4. Прогиб  $u$  кантилевера как функция координаты  $\xi$  при разных значениях параметра  $A$ , ГПа: 0 (0), 15.2 (1), 113 (2). Кривая 0 отвечает референсному прогибу  $u^\circ$ .

**4. Обсуждение результатов.** Показанные на рис. 2 и 3 графики свидетельствуют о том, что форма изогнутого кантилевера может претерпевать существенные количественные и качественные изменения при учете факторов неидеальности кантилевера (исходный прогиб, изменение толщины). Обращает на себя внимание то, что влияние факторов неидеальности кантилевера на его прогиб носит неоднозначный характер – это выражается в изменении знака разности  $u - u^\circ$  по длине кантилевера (рис. 3, кривые 2 и 3). Как и следовало ожидать, отрицательные значения параметра  $C_R$  приводят к появлению отрицательного прогиба кантилевера вблизи места его закрепления (рис. 2, кривая 1). Сравнение кривых 2 и 3 на рис. 3 позволяет установить, что при одинаковом исходном прогибе наличие фактора изменения толщины кантилевера приводит к росту величины  $|u - u^\circ|$  при относительно малых значениях координаты  $\xi$  ( $\sim 0.25$ ), но уменьшает эту величину при больших  $\xi$  ( $\sim 0.75$ ).

Согласно рис. 4 и 5, учет податливости подложки приводит к изменению прогиба  $u$  кантилевера по всей его длине  $L$ , причем на свободном участке ( $0 < \xi \leq 1$ ) прогиб уменьшается с увеличением коэффициента податливости  $A$ . Максимальное значение величина  $|u - u^\circ|$  достигает в области значений  $\xi \sim 0.3$ .

Как показывают расчеты, отклонение прогиба  $u$  кантилевера от референсного прогиба  $u^\circ$  может достигать величины  $0.14 H = 1.4$  мкм при изменении амплитуд исходного прогиба и толщины кантилевера в пределах всего 5% от значений  $H_0$  и  $T_0$ , соответственно (рис. 3, кривая 1). Даже незначительная податливость подложки ( $A = 15.2$  мкм/ГПа) приводит к разности прогибов  $u$  и  $u^\circ$  в  $0.009 H = 0.09$  мкм (рис. 5, кривая 1). Указанные величины (1.4 мкм и 0.09 мкм) отклонений измеряемого прогиба кантилевера за счет факторов его неидеальности и податливости подложки сравнимы с отклонением

Таблица 2. Оценки энергии адгезии  $\Gamma$  в мкДж/м<sup>2</sup> при разных значениях параметра  $A$

$A = 0$	$A = 15.2$ мкм/ГПа	$A = 113$ мкм/ГПа
$\Gamma^\circ = 297.2$	285.3	277.9

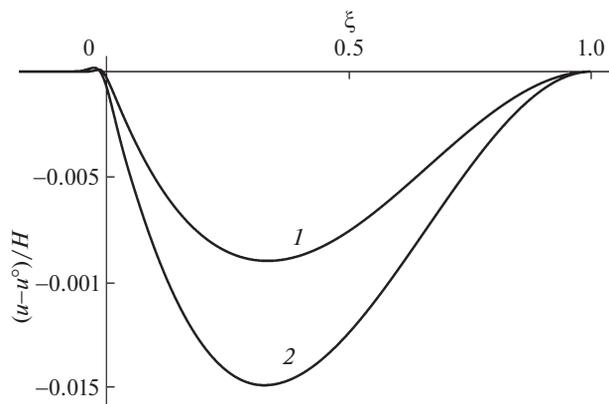


Рис. 5. Разность  $u - u^0$  прогибов кантилевера как функция координаты  $\xi$  при разных значениях параметра  $A$ , ГПа: 15.2 (1), 113 (2).

$\sim 0.1$  мкм кантилевера за счет ДС, поэтому эти факторы требуют учета при обработке экспериментальных данных в МЗК [9].

Согласно данным табл. 1 и 2, учет факторов неидеальности кантилевера и податливости подложки может приводить к существенному изменению оценки энергии адгезии  $\Gamma$  по сравнению с референсным значением  $\Gamma^0$ . Особенно чувствительна эта оценка оказывается к фактору исходного прогиба кантилевера волнистой формы (3.1) – изменение амплитуды функции  $r(x)$  в пределах всего 5% от значения  $H_0$  может приводить к многократному изменению оценки энергии адгезии (табл. 1). Учет податливости подложки приводит к снижению оценки энергии адгезии (табл. 2).

*Замечание 2.* При реализации МЗК длина  $s$  свободного участка подлежит измерению, будучи зависимой от факторов исходного прогиба и изменения толщины кантилевера, а также от податливости подложки. Напротив, энергия адгезии  $\Gamma$  является свойством контактирующих поверхностей кантилевера и подложки и, поэтому, не зависит от указанных факторов. Тем не менее, полученные выше результаты представляют интерес для МЗК, т.к. они свидетельствуют о необходимости учета неидеальности формы кантилевера (исходный прогиб, изменяющаяся толщина) и податливости подложки при обработке экспериментальных данных в МЗК.

**Выводы.** 1. Предложена математическая модель, описывающая изгиб кантилевера и энергию адгезии при наличии ДС с учетом факторов неидеальности кантилевера (исходный прогиб, изменение толщины), а также податливости подложки применительно к МЗК.

2. На основе предложенной модели выполнен численный анализ изгиба кантилевера и даны оценки энергии адгезии. Полученные результаты свидетельствуют о важности учета реальной формы кантилевера, обладающей в общем случае исходным прогибом и изменяющейся толщиной, а также учета податливости подложки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 20-19-00214.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhao Y.-P., Wang L.S., Yu T.X. Mechanics of adhesion in MEMS – a review // J. Adhesion Sci. Technol. 2003. V. 17. № 4. P. 519–546.  
<https://doi.org/10.1163/15685610360554393>

2. *Mishra M.K., Dubey V., Mishra P.M., Khan I.* MEMS technology: a review // *J. Eng. Res. Rep.* 2019. V. 4. № 1. P. 1–24.  
<https://doi.org/10.9734/jerr/2019/v4i116891>
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Часть 2. М.: Наука, 1978. 447 с.
4. *Дзялошинский И.Е., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Общая теория ван-дер-Ваальсовых сил // *УФН.* 1961. Т. 73. № 3. С. 381–422.  
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0073.196103b.0381>
5. *Tas N., Sonnenberg T., Jansen H., Legtenberg R., Elwenspoek M.* Stiction in surface micromachining // *J. Micromech. Microeng.* 1996. V. 6. P. 385–397.  
<https://doi.org/10.1088/0960-1317/6/4/005>
6. *Maboudian R., Howe R.T.* Critical review: Adhesion in surface micromechanical structures // *J. Vacuum Sci. Technol. B.* 1997. V. 15. № 1. P. 1–20.  
<https://doi.org/10.1116/1.589247>
7. *de Boer M.P., Michalske T. A.* Accurate method for determining adhesion of cantilever beams // *J. Appl. Phys.* 1999. V. 86. № 2. P. 817–827.  
<https://doi.org/10.1063/1.370809>
8. *Svetovoy V.B., Melenev A.E., Lokhanin M.V., Palasantzas G.* Global consequences of a local Casimir force: Adhered cantilever // *Appl. Phys. Lett.* 2017. V. 111. P. 011603.  
<https://doi.org/10.1063/1.4991968>
9. *Svetovoy V.B., Postnikov A.V., Uvarov I.V., Stepanov F.I., Palasantzas G.* Measuring the dispersion forces near the van der Waals–Casimir transition // *Phys. Rev. Appl.* 2020. V. 13. P. 064057.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.13.064057>
10. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 506 с.
11. *Феодосьев В.И.* Сопроотивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
12. *Gudmundsson J.T.* Physics and technology of magnetron sputtering discharges // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2020. V. 29. P. 113001.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6595/abb7bd>
13. *van Zwol P.J., Svetovoy V.B., Palasantzas G.* Distance upon contact: Determination from roughness profile // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 80. P. 235401.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.235401>
14. *Muravyeva T.I., Uvarov I.V., Naumov V.V., Palasantzas G., Svetovoy V.B.* Excessive number of high asperities for sputtered rough films // *Phys. Rev. B.* 2021. V.104. P. 035415.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.104.035415>
15. *Soldatenkov I.A., Yakovenko A.A., Svetovoy V.B.* Measuring the Casimir forces with an adhered cantilever: analysis of roughness and background effects // *Universe.* 2021. V. 7. № 3. P. 64.  
<https://doi.org/10.3390/universe7030064>
16. *Mastrangelo C.H., Hsu C.H.* Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces. I. Basic theory // *J. Microelectromech. Syst.* 1993. V. 2. P. 33–43.  
<https://doi.org/10.1109/84.232593>
17. *Устинов К.Б.* Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // *Изв. РАН. МТТ.* 2008. № 3. С. 182–188.
18. *Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова.* М.: Физматлит, 2001. 670 с.
19. *Dillard D.A., Mukherjee B., Karnal P., Batra R.C., Frechette J.* A review of Winkler’s foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications // *Soft Matter.* 2018. V. 14. № 19. P. 3669–3683.  
<https://doi.org/10.1039/C7SM02062G>
20. *Soldatenkov I.A., Stepanov F.I., Svetovoy V.B.* Dispersion forces and equilibrium distance between deposited rough films in contact // *Phys. Rev. B.* 2022. V. 105. № 7. P. 075401.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.075401>
21. *Palasantzas G., Svetovoy V.B., van Zwol P.J.* Optical properties and kinetic roughening influence on dispersive Casimir and van der Waals forces // *Int. J. Modern Phys. B.* 2010. V. 24. № 31. P. 6013–6042.  
<https://doi.org/10.1142/S0217979210057456>

- 
22. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Colloid Interface Sci.* 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.  
[https://doi.org/10.1016/0021-9797\(80\)90419-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(80)90419-1)
23. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

УДК 539.3

## ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЛОСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ СЛЕПЯНА–ПАЛЬМОВА

© 2022 г. В. И. Ерофеев<sup>a,\*</sup>, М. И. Корсаков<sup>a,\*\*</sup>, А. В. Леонтьева<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук”, Нижний Новгород, Россия

\*e-mail: [erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

\*\*e-mail: [martyknight52@gmail.com](mailto:martyknight52@gmail.com)

\*\*\*e-mail: [aleonav@mail.ru](mailto:aleonav@mail.ru)

Поступила в редакцию 07.02.2022 г.

После доработки 17.02.2022 г.

Принята к публикации 21.07.2022 г.

Рассматриваются плоские продольные волны, распространяющиеся в среде Слепяна–Пальмова, состоящей из несущей среды и ансамбля нелинейных осцилляторов. Система уравнений динамики сводится к одному уравнению относительно продольного перемещения несущей среды. Проанализировано распространение гармонических волн в зависимости от изменения параметров системы, характеризующих относительную плотность и диссипацию в среде. Показано, что среди нелинейных стационарных волн могут существовать только периодические волны. Исследовано влияние параметров нелинейности и относительной плотности материала на пределы максимально возможной деформации, форму и длину волны.

*Ключевые слова:* модель Слепяна–Пальмова, продольная волна, гармоническая волна, дисперсия, диссипация, нелинейная периодическая волна

DOI: 10.31857/S057232992206006X

**1. Введение.** Известно, что одной из основных гипотез классической механики сплошных сред является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы. Для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью, волокнистостью или ячеистостью строения реальных материалов.

Таким образом, сегодня в механике деформируемого твердого тела широко применяются как модель классического континуума, так и модели обобщенных континуумов [1–22].

Кроме моделей сред с внутренними ротационными степенями свободы (континуум Коссера [23]). На русском языке эта теория опубликована в [24]. Комментарии можно найти в [25, 26]) и градиентных моделей (континуумы Леру [27, 28], Джеремилло [29], Тупина [30] и др.), известны модели сред с осцилляторными степенями свободы. Их появление связано, в первую очередь, с работами Л.И. Слепяна (одномерная система) [31] и В.А. Пальмова [32–34] (трехмерная система).

Модель Слепяна–Пальмова представляет собой линейно-упругую несущую среду и подвешенные в каждой точке невзаимодействующие осцилляторы (упругие или вязкоупругие). При формулировке этой модели постулируется, что динамическое поведение несущей среды описывается уравнениями Ламе, а собственные частоты, связанных с ней осцилляторов непрерывно распределены.

Динамика среды Слепяна–Пальмова описывается системой уравнений:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \int_0^{\infty} m(q) \ddot{\mathbf{v}}_q \, dq + \mathbf{K} + \mathbf{Q} = 0 \quad (1.1)$$

$$m(q) \ddot{\mathbf{v}}_q + c(q) \left[ 1 + \tilde{R} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (\mathbf{v}_q - \mathbf{u}) = \mathbf{Q}_q \quad (1.2)$$

где  $\rho$  – массовая плотность;  $\lambda$  и  $\mu$  – модули упругости Ламе;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещения точек несущей среды;  $\mathbf{K}$  – интенсивность внешней массовой силы;  $\mathbf{v}_q$  – вектор абсолютного перемещения массы осциллятора;  $\mathbf{Q}_q$  – внешняя сила, приложенная к массе осциллятора; величина  $m(q) \, dq$  равна массе всех осцилляторов, имеющих собственные частоты, лежащие в интервале  $(q, q + dq)$ , умноженной на единицу объема;  $m = \int_0^{\infty} m(q) \, dq$  – полная массовая плотность всех осцилляторов, присоединенных к несущей среде;  $c(q) = q^2 m(q)$  – статическая жесткость подвески осцилляторов; величина  $\tilde{R}(\partial/\partial t)$  характеризует диссипацию энергии в подвесе осциллятора.

Даже при малом демпфировании осцилляторов, пространственное затухание вибраций в такой среде оказывается конечным [34]. Эта модель эффективно используется при расчетах вибрации летательных аппаратов, объектов ракетно-космической техники и подводного флота.

**2. Нелинейная одномерная математическая модель.** Предположим, что среда изолирована, то есть  $\mathbf{K} = 0$ ,  $\mathbf{Q}_q = 0$ . Будем рассматривать одномерный вариант системы (1.1), (1.2). Также внесем нелинейность в данную систему, считая, что она связана с нелинейностью несущей среды. Полученная система имеет вид:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ E \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \int_0^{\infty} m(q) \frac{\partial^2 v_{qx}(x, t)}{\partial t^2} \, dq = 0 \quad (2.1)$$

$$m(q) \frac{\partial^2 v_{qx}}{\partial t^2} + c(q) \left[ 1 + \tilde{R} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (v_{qx} - u_x) = 0 \quad (2.2)$$

где  $E$  – коэффициент, характеризующий нелинейность несущей среды.

Будем считать, что абсолютное перемещение осциллятора не зависит от его собственной частоты ( $v_{qx} = v_x$ ), то есть

$$\int_0^{\infty} m(q) \frac{\partial^2 v_{qx}}{\partial t^2} \, dq = \frac{\partial^2 v_x(x, t)}{\partial t^2} \int_0^{\infty} m(q) \, dq$$

Система (2.1), (2.2) сводится к одному уравнению относительно продольного перемещения несущей среды  $u_x$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{c_1^2}{q^2} \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{a^2 q^2} \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} + \tilde{R} \frac{\partial^3 u_x}{\partial t^3} - \tilde{R} c_1^2 \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial t} - \\ & - \frac{c_2^2}{q^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] - c_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] - \tilde{R} c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\rho} = \rho + \int_0^\infty m(q) dq, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\tilde{\rho}}, \quad c_2^2 = \frac{E}{\tilde{\rho}}, \quad a^2 = \frac{\tilde{\rho}}{\rho}$$

Переход к безразмерным переменным

$$U = \frac{u_x}{u_0}, \quad z = \frac{aq}{c_1} x, \quad \tau = aqt$$

( $u_0$  – максимальное перемещение, при котором деформация несущей среды еще является упругой) преобразует уравнение (2.3) к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \tilde{R} a q \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \\ & - \tilde{N} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - \tilde{N} a^2 \frac{\partial^3}{\partial \tau^2 \partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - \tilde{R} \tilde{N} a q \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

где  $\tilde{N} = c_2^2 a q u_0 / c_1^3$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + R \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \\ & - N_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - R N_1 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] - N_2 \frac{\partial^3}{\partial \tau^2 \partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $N_2/N_1 = a^2 > 1$ .

**3. Дисперсионные свойства системы.** Отбросив нелинейные слагаемые уравнения (2.4)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + R \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.1)$$

исследуем дисперсионные свойства системы.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда диссипация отсутствует. Уравнение (3.1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - a^2 \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2 \partial z^2} = 0$$

Распространение гармонической волны

$$U(z, \tau) = U_0 e^{i(\omega\tau - kz)} + \text{к.с.}$$

где  $U_0$  – комплексная амплитуда волны,  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число, *к.с.* – комплексно-сопряженная величина, описывается следующим дисперсионным уравнением

$$\omega^4 - (1 + a^2 k^2) \omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.2)$$

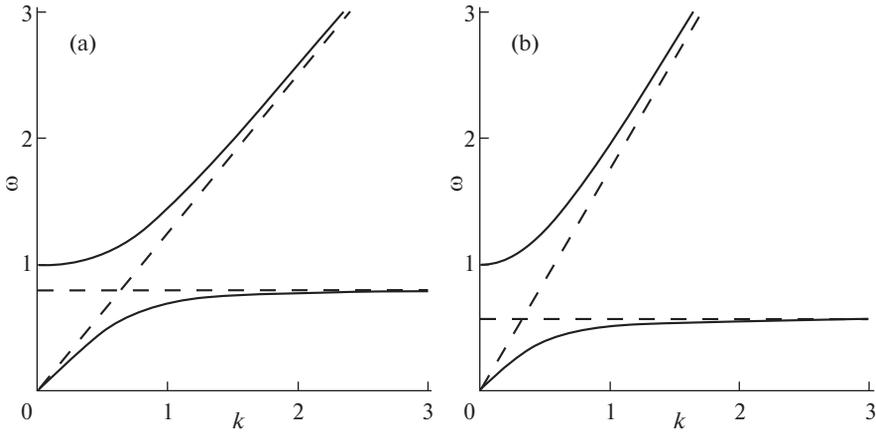


Рис. 1. Зависимости  $\omega(k)$  при изменении параметра  $a$ ,  $a = a_1$  (а),  $a = a_2$  (б),  $1 < a_1 < a_2$ .

Две дисперсионные ветви

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\omega^2 - 1}{a^2 \omega^2 - 1}}$$

в первой четверти изображены на рис. 1. Пунктиром отмечены асимптоты. При  $a = 1$  дисперсионная кривая (3.2) вырождается в прямые  $\omega = \pm 1$ ,  $\omega = \pm k$ .

Верхняя ветвь дисперсионной кривой имеет частоту отсечки  $\omega = 1$ , нижняя ветвь исходит из нуля и ограничена сверху по частоте постоянной величиной  $\omega = 1/a$ .

Дисперсия отсутствует на низких частотах  $\omega = k$  у низкочастотной ветви и на высоких частотах у высокочастотной ветви  $\omega = ak$ . Каждая из двух волн распространяется

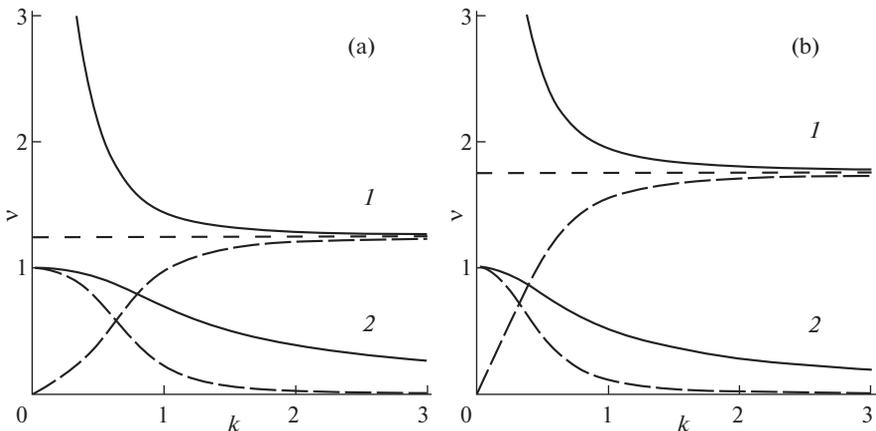
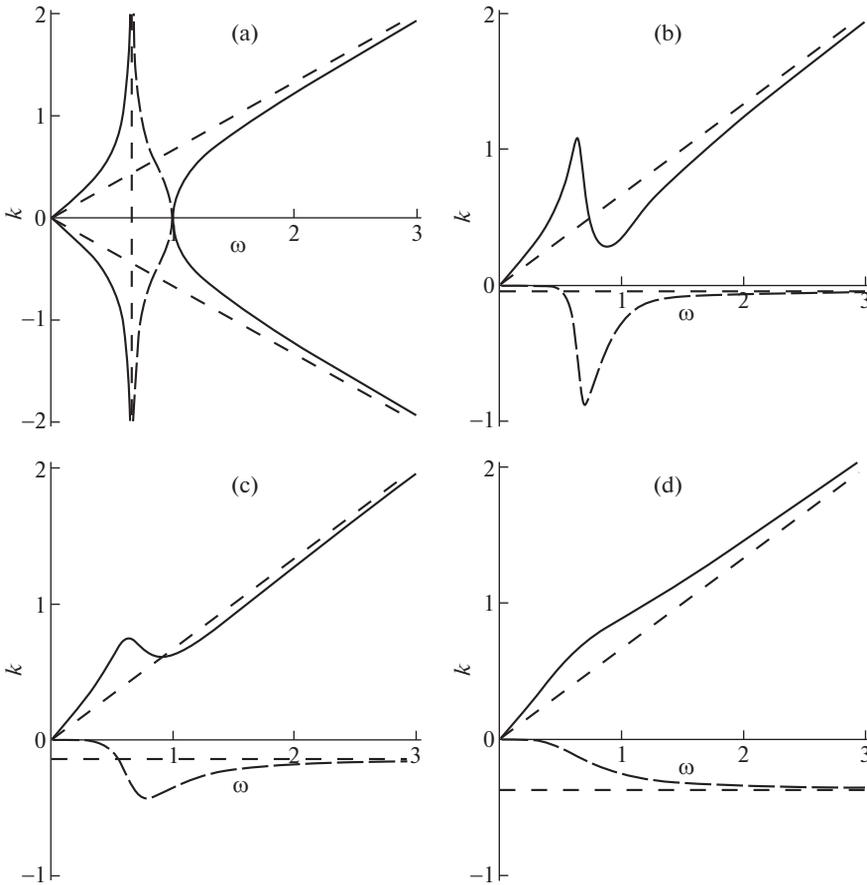


Рис. 2. Зависимости  $v_{ph}(k)$  (сплошная линия) и  $v_{gr}(k)$  (длинный штриховой пунктир) при изменении параметра  $a$ ,  $a = a_1$  (а),  $a = a_2$  (б),  $1 < a_1 < a_2$ .



**Рис. 3.** Зависимости  $k_1(\omega)$  (сплошная линия) и  $k_2(\omega)$  (длинный штриховой пунктир) при изменении параметра  $R$ ,  $R = 0$  (a),  $R = R_1$  (b),  $R = R_2$  (c),  $R = R_3$  (d),  $0 < R_1 < R_2 < R^{(1)} < R^{(2)} < R_3$ .

в своем частотном диапазоне, которые не пересекаются. Существует область непропускания по частоте, которая увеличивается при увеличении значения параметра  $a$ .

Динамика кривых фазовой скорости  $v_{ph} = \omega/k$  определяется уравнением:

$$v_{ph}^4 k^4 - (1 + a^2 k^2) v_{ph}^2 k^2 + k^2 = 0$$

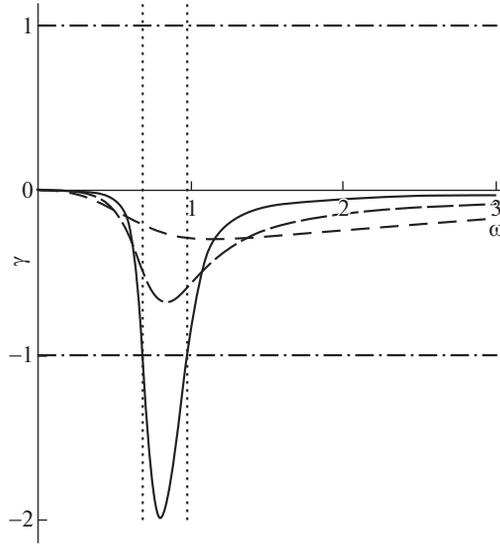
Из последнего уравнения находим зависимость фазовой скорости от волнового числа

$$v_{ph} = \frac{\sqrt{2}}{2k} \sqrt{1 + a^2 k^2 \pm \sqrt{(1 + a^2 k^2)^2 - 4k^2}} \quad (3.3)$$

На основании формулы Рэлея [35]

$$v_{gr} = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk}$$

и (3.3) получим явные зависимости групповой скорости от волнового числа



**Рис. 4.** Зависимости  $\gamma(\omega)$  при изменении параметра  $R$ ,  $R = R_1$  (сплошная линия),  $R = R_2$  (длинный штриховой пунктир),  $R = R_3$  (короткий штриховой пунктир),  $0 < R_1 < R^{(3)} < R_2 < R^{(1)} < R^{(2)} < R_3$ .

$$v_{gr} = \frac{a^2 k \pm \frac{a^2 k + a^4 k^3 - 2k}{\sqrt{(1 + a^2 k^2)^2 - 4k^2}}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + a^2 k^2} \pm \sqrt{(1 + a^2 k^2)^2 - 4k^2}} \quad (3.4)$$

Графическое изображение зависимостей фазовой (3.3) и групповой (3.4) скоростей от волнового числа представлено на рис. 2. Кривые скоростей, отмеченные “1” и “2”, соответствуют верхней и нижней ветвям дисперсионной кривой  $\omega(k)$ .

Во всем интервале частот и волновых чисел кривые фазовой скорости лежат выше соответствующих кривых групповой скорости.

При увеличении значения параметра  $a$ : значения фазовой и групповой скоростей, соответствующие высокочастотной ветви, — увеличиваются; значения скоростей, соответствующие низкочастотной ветви, — уменьшаются (для фиксированного значения волнового числа).

Дисперсионное уравнение, если диссипация присутствует

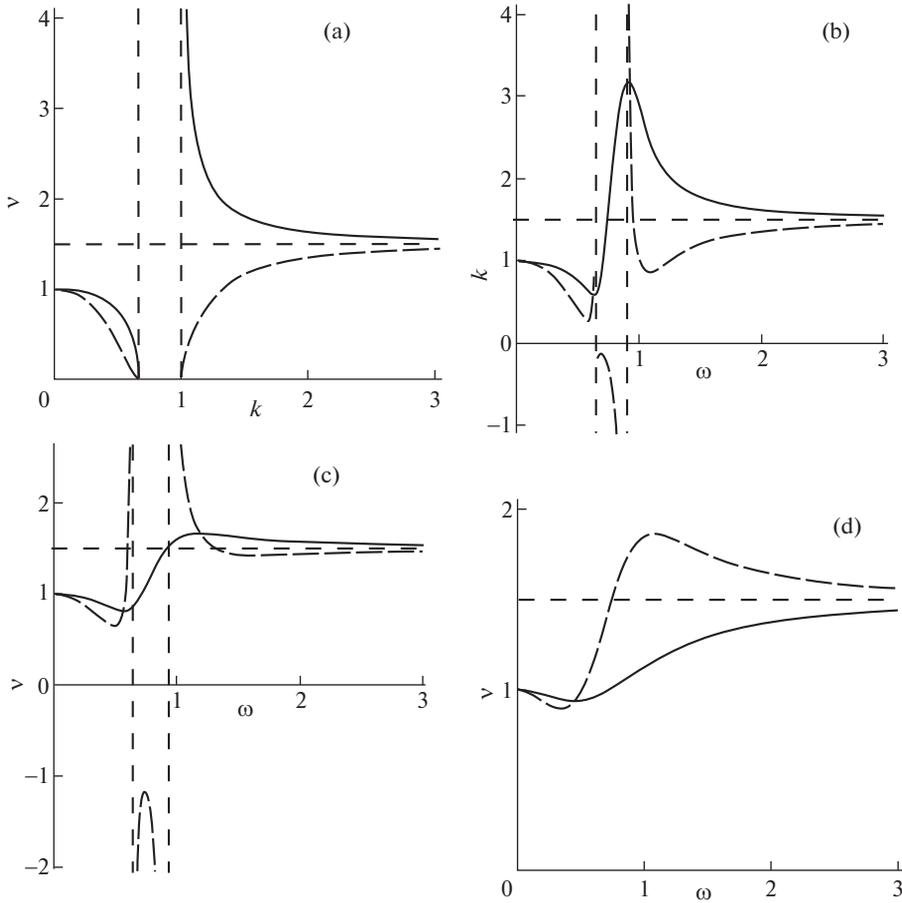
$$\omega(\omega^2 - k^2)iR + \omega^2 - k^2 - \omega^4 + a^2\omega^2 k^2 = 0 \quad (3.5)$$

где волновое число является комплексной величиной  $k = k_1 + ik_2$ . Разделяя действительную и мнимую части в дисперсионном уравнении (3.5), получаем

$$\begin{aligned} 2R\omega k_1 k_2 + \omega^2 - k_1^2 + k_2^2 - \omega^4 + a^2\omega^2 k_1^2 - a^2\omega^2 k_2^2 &= 0 \\ R\omega^3 - R\omega k_1^2 + R\omega k_2^2 - 2k_1 k_2 + 2a^2\omega^2 k_1 k_2 &= 0 \end{aligned}$$

Зависимости действительной  $k_1$ , мнимой  $k_2$  частей волнового числа, их отношения и скоростей от частоты приведены на рис. 3–5.

На рис. 3,а дисперсионная кривая изображена в двух четвертях. В полосе непротекания волновое число является чисто мнимым. Коротким штриховым пунктиром на



**Рис. 5.** Зависимости  $v_{ph}(\omega)$  (сплошная линия) и  $v_{gr}(\omega)$  (длинный штриховой пунктир) при изменении параметра  $R$ ,  $R = 0$  (а),  $R = R_1$  (б),  $R = R_2$  (с),  $R = R_3$  (д),  $0 < R_1 < R^{(3)} < R_2 < R^{(1)} < R^{(2)} < R_3$ .

рис. 3 показаны асимптоты  $k_1 = \pm \omega/a$ ,  $\omega = 1/a$  ( $R = 0$ ) и  $k_1 = \omega/a$ ,  $k_2 = -R(a^2 - 1)/2a^3$  ( $R \neq 0$ ). Значения  $k_1, k_2$  имеют разные знаки. Считаем, что  $k_1 > 0$ .

При увеличении параметра  $R$  кривые  $k_1(\omega)$ ,  $k_2(\omega)$  приобретают монотонность и меняют свое расположение относительно асимптот. Так действительная и мнимая ветви стремятся к асимптотам сверху, соответственно, при  $R > R^{(1)}$ ,  $R^{(1)} \approx 2a/\sqrt{a^2 + 3}$  и при  $R > R^{(2)}$ ,  $R^{(2)} \approx 2a\sqrt{(a^2 + 3)/(a^4 + 2a^2 + 5)}$ , причем первая из них монотонно возрастает, а вторая – монотонно убывает.

На рис. 4 показано отношение мнимой части волнового числа к его действительной части  $\gamma = k_2/k_1$ . Штрихпунктирной линией отмечены границы отрезка  $|\gamma| \leq 1$ . При  $R < R^{(3)}$ ,  $R^{(3)} = a - 1$  зависимость  $\gamma(\omega)$  имеет интервал частот  $(\omega_-; \omega_+)$ ,  $\omega = (\sqrt{2}/2a)\sqrt{1 + a^2 - R^2 \pm \sqrt{(R^2 - a^2 - 1)^2 - 4a^2}}$  (точечный пунктир, рис. 4), где абсолютные

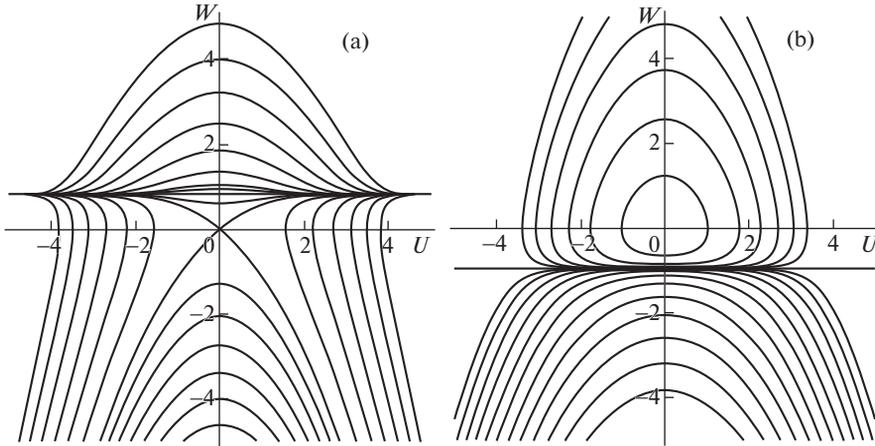


Рис. 6. Фазовые траектории волны на фазовой плоскости  $(U, W)$  при  $1 < v < a$  (a),  $v > a$  (b).

значения коэффициента затухания больше единицы ( $|\gamma| > 1$ ). На промежутке  $(\omega_-; \omega_+)$  затухание преобладает над распространением волны.

На рис. 5 изображены зависимости фазовой  $v_{ph} = \omega/k_1$  и групповой скоростей (вычисляется по формуле Рэлея) от частоты. При  $0 < R < R^{(1)}$  график групповой скорости имеет разрывы. Здесь на небольшом участке частот фазовая и групповая скорости разных знаков. При  $R > R^{(1)}$  график групповой скорости является непрерывным.

При  $R = 0$ , как было отмечено ранее, для любых допустимых значений частоты  $\omega$  значения фазовой скорости больше значений групповой скорости  $v_{ph} > v_{gr}$ . При  $R > 0$  появились промежутки частот, где значения фазовой скорости меньше абсолютных значений групповой скорости  $v_{ph} < |v_{gr}|$ .

При значении параметра  $R = R^{(1)}$  кривые фазовой и групповой скоростей меняют свое расположение относительно асимптоты, но имеют пересечение в точке  $\omega = \omega^*$ . При этом для значений частот из интервалов  $0 < \omega < \omega^*$  и  $\omega > \omega^*$  выполняются, соответственно, неравенства  $v_{ph} > v_{gr}$  и  $v_{ph} < v_{gr}$ .

**4. Нелинейные стационарные волны.** Учтем нелинейность среды в отсутствие диссипации ( $R = 0, N_1 = 0$ ), тогда уравнение (2.3) примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - N_2 \frac{\partial^3}{\partial \tau^2 \partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) сводится к уравнению нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + m_1 m_2 U \frac{dU}{d\xi} + m_1 U = 0 \quad (4.2)$$

где коэффициенты равны

$$m_1 = \frac{1 - v^2}{v^2(a^2 - v^2)}, \quad m_2 = -\frac{2N_2}{a^2 - v^2}$$

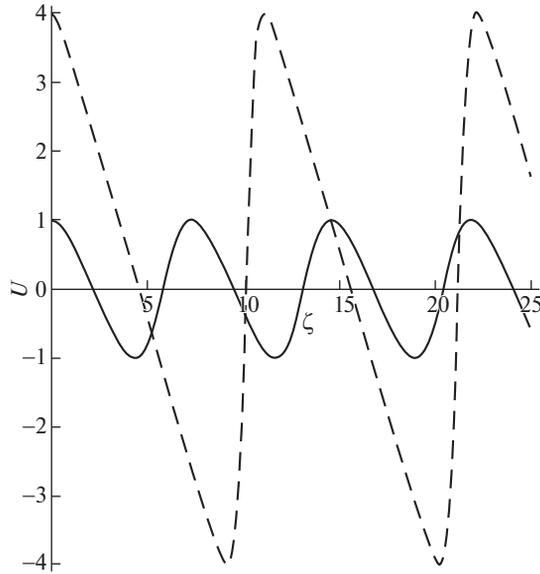


Рис. 7. Профиль волны при различных значениях  $\epsilon$ ,  $\epsilon \ll \epsilon^*$  (сплошная линия),  $\epsilon \rightarrow \epsilon^*$  (штриховая линия).

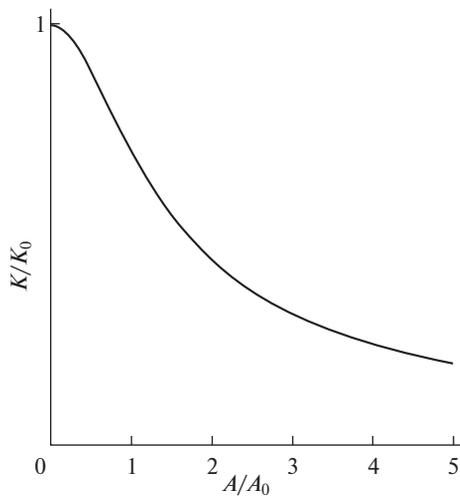
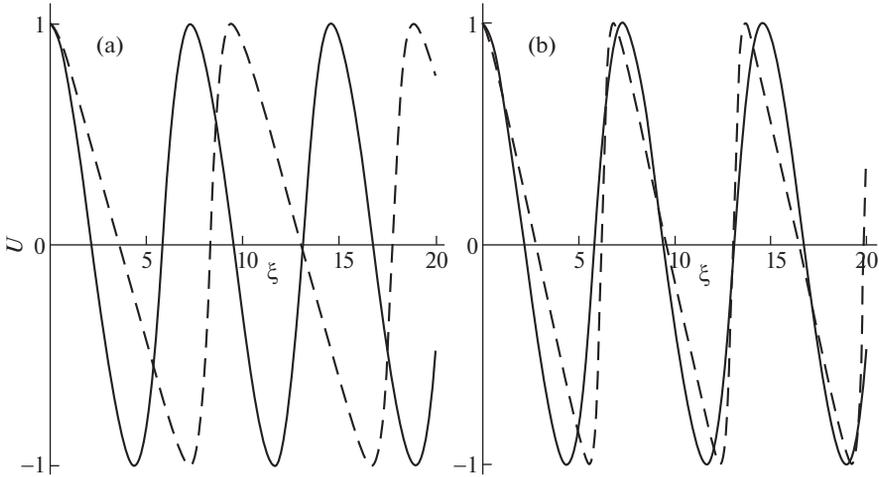


Рис. 8. Зависимость амплитуды нелинейной волны от волнового числа.

$\xi = z - v\tau$  – бегущая координата,  $v$  – скорость стационарной волны. Фазовые портреты уравнения (4.2) при различных значениях скорости представлены на рис. 6,  $W = dU/d\xi$ .

При скоростях  $0 < v < 1$  фазовый портрет, изображенный на второй части рисунка (рис. 6,b) отображается симметрично относительно горизонтальной оси. В двух случаях, когда скорость принадлежит интервалам  $0 < v < 1$  или  $v > a$ , фазовый портрет



**Рис. 9.** Зависимости  $U(\xi)$  при изменении параметров, соответственно,  $N_2$  (а) и  $a$  (б):  $N_2^{(1)}$ ,  $a_1$  (сплошная линия),  $N_2^{(2)}$ ,  $a_2$  (штриховой пунктир),  $N_2^{(1)} < N_2^{(2)}$ ,  $a_1 < a_2$ .

имеет замкнутые траектории. Если  $1 < v < a$  фазовый портрет замкнутых фазовых траекторий не содержит (рис. 6,а), следовательно, стационарных волн не существует.

Рассмотрим случай  $v > a$ , константы  $m_1$  и  $m_2$  в уравнении (4.2) принимают положительные значения. Анализ уравнения (4.2) на фазовой плоскости  $(U, W)$  показывает, что в начале координат имеется особая точка равновесия типа “центр”. Прямая  $W = \epsilon^*$  определяет границу, разделяющую устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории) и неустойчивые движения (незамкнутые фазовые траектории). Эта величина характеризует максимально возможную (в пределах упругости) деформацию:

$$\epsilon^* = -\frac{1}{m_2} = \frac{a^2 - v^2}{2N_2}$$

Профиль стационарной волны вблизи центра и при относительных деформациях, близких к  $\epsilon^*$  показан на рис. 7. При значениях деформации близких к максимально возможным  $\epsilon \rightarrow \epsilon^*$  зависимость имеет пилообразный вид, а при значениях деформации далеких от максимально возможных  $\epsilon \ll \epsilon^*$  зависимость имеет почти синусоидальный профиль.

Зависимость между амплитудой нелинейной волны  $A$  и ее волновым числом  $K$

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi\epsilon^*} \frac{A}{A_0}\right)^2}}$$

где  $K_0$  и  $A_0$  – волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны, показана на рис. 8. Видно, что с ростом амплитуды волны относительное значение волнового числа уменьшается, длина волны растет.

На рис. 9 изображены профили нелинейных волн фиксированных амплитуд и скоростей при различных значениях параметров среды  $N_2$  и  $a$ .

Увеличение значения параметра  $N_2$  уменьшает числовые значения максимально возможной деформации и увеличивает длину волны. Чем больше значение параметра

$a$  ( $1 < a < v$ ), тем меньше длина волны и абсолютные значения максимальной деформации.

Влияние параметра  $a$  на волны, распространяющиеся со скоростями  $0 < v < 1$ , отличается. При увеличении значения параметра, увеличивается интервал допустимых деформаций и длина нелинейной волны.

**5. Заключение.** В отсутствие диссипации в среде распространяются быстрая и медленная волны, причем исключается их одновременное распространение. Дисперсия наблюдается вблизи двух частот дисперсионной кривой: частоты отсечки высокочастотной ветви и частоты, ограничивающей частотный интервал низкочастотной ветви. Во всем частотном диапазоне проявляется нормальная дисперсия.

Уменьшение значения параметра, характеризующего относительную плотность среды Слепяна–Пальмова, приводит к увеличению скоростей (фазовой, групповой) медленной волны, уменьшению скоростей быстрой волны и сокращению частотной зоны непропускания.

Наличие диссипации приводит к слиянию ветвей дисперсионной кривой, что обеспечивает непрерывный частотный диапазон распространения гармонических волн, а также способствует появлению аномальной дисперсии и эффекта обратной волны.

При превышении некоторого порогового значения параметра, характеризующего диссипацию в среде, аномальная дисперсия проявляется в высокочастотной области, в области низких частот сохраняется нормальная дисперсия.

Для нелинейных стационарных волн периодического типа показано, что чем больше амплитуда, тем больше длина волны при фиксированных параметрах системы. Для нелинейных стационарных волн равных амплитуд и скоростей установлено: при увеличении параметра нелинейности среды Слепяна–Пальмова, уменьшается значение максимально допустимой деформации и увеличивается длина волны; при увеличении значения параметра относительной плотности среды, область допустимой деформации сужается, длина волны уменьшается.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (Грант № 21-19-00813).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mechanics of Generalized Continua: On Hundred Years After the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics. V. 21 / Ed. by G. Maugin, A.V. Metrikine. Berlin: Springer, 2010. 338 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8>
2. Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials. V. 7 / Ed. by H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 350 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-19219-7>
3. Generalized Continua as Models with Multi-Scale Effects or Under Multi-Field Actions. Advanced Structured Materials. V. 22 / Ed. by H. Altenbach, S. Forest, A. Krivtsov. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. 332 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-36394-8>
4. Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications / Ed. by H. Altenbach, V.A. Eremeyev. Wien: Springer, 2013. 388 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1371-4>
5. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Wave Dynamics of Generalized Continua. Advanced Structured Materials. Vol. 24. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. 274 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-37267-4>
6. Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Advanced Structured Materials. V. 42 / Ed. by H. Altenbach, S. Forest. Switzerland: Springer-Verlag, 2016. 458 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2>
7. Maugin G.A. Non-Classical Continuum Mechanics. Advanced Structured Materials. V. 51. Singapore: Springer, 2017. 260 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-2434-4>

8. Advanced in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Advanced Structured Matherials. V. 87 / Ed. by *F. dell'Isola, V.A. Eremeyev, A. Porubov*. Cham: Springer, 2018. 370 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-73694-5>
9. Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials 1. Advanced Structured Matherials. V. 89 / Ed. by *H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Colle, T. Michelitsch*. Cham: Springer, 2018. 760 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-72440-9>
10. Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials 2. Advanced Structured Matherials. V. 90 / Ed. by *H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, T. Michelitsch*. Cham: Springer, 2018. 306 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-77504-3>
11. Erofeev V., Porubov A., Sargsyan S. (Editors). Nonlinear Wave Dynamics of Generalized Continua // Materials Physics and Mechanics. 2018. V. 35. № 1 (Spesial Issue dedicated to the memory E.L. Aero and G. Maugin). 190 p.
12. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Advanced Structured Matherials. V. 103 / Ed. by *H. Altenbach, A. Belyaev, V. Eremeyev, A. Krivtsov, A.V. Porubov*. Cham: Springer, 2019. 525 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1>
13. Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Matherials. V. 109 / Ed. by *M.A. Sumbatyan*. Cham: Springer, 2019. 254 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5>
14. Higher Gradient Materials and Related Generalized Continua. Advanced Structured Matherials. V. 120 / Ed. by *H. Altenbach, W.H. Muller, B.E. Abali*. Cham: Springer, 2019. 231 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-30406-5>
15. *Erofeev V.I., Pavlov I.S.* Structural Modeling of Metamaterials. Advanced Structured Matherials. V. 144. Cham: Springer, 2021. 208 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-60330-4>
16. *Лурье С.А.* О парадоксе аномальной относительной изгибной жесткости сверхтонких балок в градиентной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 48–57.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920030095>
17. *Еремеев В.А., Лебедев Л.П.* О разрешимости краевых задач теории упругих микрополярных оболочек с жесткими включениями // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 111–115.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920050050>
18. *Радаев Ю.Н.* О факторизации основного гиперболического дифференциального оператора микрополярной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 24–32.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920060136>
19. *Тарлаковский Д.В., Неуен Ван Лам.* Оценка учета моментных свойств среды на примере нестационарной осесимметричной задачи // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 149–155.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060143>
20. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060106>
21. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Новое решение задачи о трещине в растягиваемой ортотропной пластине // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 23–32.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329921060167>
22. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 3–13.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922020155>
23. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des Corps Deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.  
<https://doi.org/10.1038/081067a0>
24. *Коссера Э., Коссера Ф.* Заметка о теории евклидовского действия / *Апель П.* Руководство теоретической (рациональной) механики. Курс механики Парижского факультета наук. Том третий: равновесие и движение сплошных сред. М.: Изд-во “Кушнерев И.Н. и Ко”,

1911. С. 612–682 (Репринт: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С. 5–76).
25. *Ерофеев В.И.* Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 4. С. 5–10.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.4.28>
26. *Ерофеев В.И., Герасимов С.И.* Континуум Коссера сто лет спустя // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С. 3–4.
27. *Le Roux J.* Etude geometrique de la torsion de la flexion, dans les deformations infinitesimales d'un milieu continu // Ann. Ecole Norm. Super. 1911. V. 28. P. 523–579.  
<https://doi.org/10.24033/ASENS.643>
28. *Le Roux J.* Recherches sur la geometrie des deformations finies // Ann. Ecole Norm. Super. 1913. V. 30. P. 193–245.  
<https://doi.org/10.24033/asens.659>
29. *Jaramillo T.J.* A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory. Dissertation. Department of Mathematics. University of Chicago, 1929.
30. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // Механика. Сборник переводов. 1965. № 3. С. 113–140.
31. *Слепян Л.И.* Волна деформации в стержне с амортизирующими массами // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1967. № 5. С. 34–40.
32. *Пальмов В.А.* Об одной модели среды со сложной структурой // ПММ. 1969. Т. 33. № 4. С. 768–773.
33. *Пальмов В.А.* Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
34. *Пальмов В.А.* Приложение теории обобщенного континуума к проблеме пространственного затухания в сложных механических системах // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 4. С. 105–110.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.4.35>
35. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 560 с.

УДК 539.3

**НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**© 2022 г. Н. В. Баничук<sup>a,\*</sup><sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: banichuk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.

После доработки 03.04.2022 г.

Принята к публикации 04.04.2022 г.

Рассматриваются задачи и методы спектрального анализа упругих систем. Внимание фокусируется на циклических спектральных формулировках. Выведены некоторые общие представления циклических решений рассматриваемых задач и представлен метод декомпозиции. В контексте анализа циклических систем в качестве примера рассмотрена спектральная задача об устойчивости сжимаемого неразрезного упругого кольца, решение которой приводится в аналитической форме.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, спектральный анализ, циклические системы, упругая устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329922060046

**1. Введение.** Рассмотрение трансляционно-инвариантных и циклических систем основывается на фундаментальных свойствах линейных дифференциальных операторов и краевых задач для систем дифференциальных уравнений [1–3]. Развитый аппарат линейных алгебраических систем и теории функций комплексного переменного [4–7] позволяют применять при решении периодических систем эффективные представления искомым решений. Особую роль при этом играют разрабатываемые методы декомпозиции [8–10]. Широкий класс задач [11, 12], исследуемых с применением данных методов, составляют проблемы механики деформируемого твердого тела, возникающие при изучении устойчивости сжатых циклических конструкций.

Данная работа содержит решение задач о спектре циклических систем, описываемых в операторной форме, в виде краевых задач на собственные значения. Получены представления для собственных функций в случае простого и кратного собственных значений. Разработана декомпозиция спектральных задач, упрощающая анализ поведения рассматриваемой механической системы. При этом решение описанной проблемы сводится к решению спектральных задач на элементарной ячейке. Метод декомпозиции применен также для вариационного анализа возникающих задач на собственные значения. В качестве примера приводится решение задачи устойчивости циклически сжимаемого неразрезного упругого кольца.

**2. Основные соотношения задачи.** Рассматриваются задачи о спектре циклических систем, поведение которых описывается краевыми задачами на собственные значения, записываемыми в операторной форме [1–3]

$$Aw(q; \theta) = \lambda Bw(q; \theta) \quad (2.1)$$

где  $A$  и  $B$  – симметричные вещественные операторы, включающие граничные условия,  $\lambda$  – собственное значение,  $w(q; \theta)$  – собственная функция, описывающая состояние системы и отвечающая собственному значению. Через  $q$  в аргументах функции  $w$  и операторов  $A$ ,  $B$  обозначен набор всех отличных от  $\theta$  независимых переменных. Предполагается, что операторы в уравнении (2.1) инвариантны относительно операции поворота на углы, кратные периоду  $\theta_n = 2\pi/n$ , то есть операторы  $A$ ,  $B$  и собственная функция  $w$  не меняют своего вида при замене аргумента

$$\theta \rightarrow \theta + j\theta_n \tag{2.2}$$

Величина угла поворота  $\theta$  меняется в пределах  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , и, следовательно, можно считать, что в (2.2) целая величина  $j$  удовлетворяет условию  $j \in [1, n]$ , где  $n$  – заданное значение. Заметим также, что в постановку спектральной краевой задачи (2.1) включено требование ограниченности решения  $w(q; \theta)$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{w}(q; \theta) \equiv w(q; \theta + \theta_n), \quad \theta_n = \frac{2\pi}{n} \tag{2.3}$$

Непосредственная подстановка функции  $\tilde{w}(q; \theta)$  из (2.3) в уравнение (2.1) с последующей заменой (2.2) с  $j = 1$  и учетом свойства циклической инвариантности рассматриваемой системы показывает, что функция  $\tilde{w}(q; \theta)$  также является собственной функцией краевой спектральной задачи (2.1), соответствующей собственному значению  $\lambda$ .

Рассмотрим сначала случай некратного (простого) собственного значения  $\lambda$  и соответствующей ему с точностью до произвольной постоянной  $C$  единственной собственной функции  $Cw(q; \theta)$  [4, 5]. Для функции  $\tilde{w}(q; \theta) = Cw(q; \theta)$  согласно (2.3) имеем

$$w(q; \theta + \theta_n) = Cw(q; \theta) \tag{2.4}$$

Свойство (2.4) собственных функций циклических задач показывает, что при определении собственных функций, отвечающих простым собственным значениям, достаточно ограничиться интервалом изменения  $\theta \in [0, \theta_n]$ . При этом значения функции в интервале  $[\theta_n, 2\pi]$  получаются продолжением функций из интервала  $[0, \theta_n]$  с использованием соотношения (2.4). В частности,

$$w(q; 2\theta_n) \equiv Cw(q; \theta + \theta_n) \equiv C^2w(q; \theta)$$

а при произвольном  $j \in [1, n]$  выполняется соотношение

$$w(q; \theta + j\theta_n) \equiv C^jw(q; \theta)$$

С учетом равенства  $n\theta_n = 2\pi$  будем иметь

$$w(q; \theta + n\theta_n) \equiv C^n w(q; \theta) \equiv w(q; \theta)$$

Таким образом, входящая в равенство (2.4) постоянная  $C$  удовлетворяет уравнению

$$C^n = 1 \tag{2.5}$$

С использованием выражений [6, 7] для корней уравнения (2.5)

$$\exp\left[i\frac{2\pi}{n}(k-1)\right], \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

получим представление для собственных функций в случае простого собственного значения

$$w_k(q; \theta + \theta_n) \equiv \exp\left[i \frac{2\pi}{n}(k-1)\right] w_k(q; \theta), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь случай  $r$ -кратного собственного значения  $\lambda$  и соответствующей ему системы собственных функций

$$w_1(q; \theta), w_2(q; \theta), \dots, w_r(q; \theta) \quad (2.7)$$

Предполагается, что система линейно независимых функций (2.7) удовлетворяет условиям ортонормированности [4, 5]

$$(w_s(q; \theta), w_l(q; \theta)) = \delta_{sl}, \quad s, l = 1, 2, \dots, r \quad (2.8)$$

где  $(q; \theta)$  – символ Кронекера, а выражение в левой части равенства (2.8) – скалярное произведение. При этом функции  $\tilde{w}_j(q; \theta) \equiv w_j(q; \theta + \theta_n)$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) могут быть представлены в форме разложений по системе собственных функций (2.7)

$$\tilde{w}_j(q; \theta) = \sum_{l=1}^r K_{jl} w_l(q; \theta) \quad (2.9)$$

причем в силу условий ортонормированности (2.8), записанных для функций, приведенных в (2.9), коэффициенты разложений  $K_{jl}$  удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{s=1}^r K_{js}^* K_{ls} = \delta_{jl} \quad (2.10)$$

Матрица  $K$ , составленная из коэффициентов разложений  $K_{jl}$ , является унитарной, т.е.  $\tilde{K}^* K = E$  – единичная матрица. Заметим, что матрица  $K$  может быть приведена к диагональному виду [4, 5]

$$U^* K U = \Lambda \quad (2.11)$$

с диагональной матрицей  $\Lambda$ . Для этого используется преобразование  $U$  базиса собственных функций  $w_j(q; \theta)$ , сохраняющее условие ортонормированности. Таким образом, собственные функции, принадлежащие кратному собственному значению, инвариантны относительно преобразования сдвига  $\theta \rightarrow \theta + \theta_n$  краевой задачи (2.1) и могут быть выбраны в виде, удовлетворяющем условию (2.4), т.е.

$$w_l(q; \theta + \theta_n) \equiv C_l w_l(q; \theta), \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (2.12)$$

Аналогично тому, как это делалось в случае некрратных собственных значений, приходим к общему свойству собственных функций инвариантной относительно свойств спектральной краевой задачи (безотносительно кратности  $r$ )

$$w_{\alpha_k}(q; \theta + \theta_n) \equiv \exp[i\alpha_k] w_{\alpha_k}(q; \theta), \quad \alpha_k = \frac{2\pi}{n}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

Предположим, что собственная функция  $w_{\alpha_k}(q; \theta)$  обладает свойством (2.13). Введем в рассмотрение вспомогательную функцию  $w_{\alpha_k}^0(q; \theta)$ , определяемую формулой

$$w_{\alpha_k}^0(q; \theta) \equiv \exp\left[-i \frac{\alpha_k \theta}{\theta_n}\right] w_{\alpha_k}(q; \theta) = \exp[-i(k-1)\theta] w_{\alpha_k}(q; \theta) \quad (2.14)$$

и рассмотрим эту функцию при  $\theta \rightarrow \theta + \theta_n$ . Будем иметь

$$w_{\alpha_k}^0(q; \theta + \theta_n) \equiv \exp\left[-i \frac{\alpha_k \theta}{\theta_n}\right] \exp[-i\alpha_k] w_{\alpha_k}(q; \theta + \theta_n) = w_{\alpha_k}^0(q; \theta) \quad (2.15)$$

Следовательно,  $w_{\alpha_k}^0(q; \theta)$  является периодической функцией с периодом  $\theta_n$ . В итоге проведенного анализа приходим к общему представлению для собственных функций циклических систем, инвариантных относительно конечных вращений  $\theta \rightarrow \theta + k\theta_n$  при рассмотрении проблемы (2.1):

$$\begin{aligned} w_{\alpha_k}(q; \theta) &\equiv \exp\left[i\frac{\alpha_k\theta}{\theta_n}\right] w_{\alpha_k}^0(q; \theta) = \exp[-i(k-1)\theta] w_{\alpha_k}^0(q; \theta) \\ w_{\alpha_k}^0(q; \theta) &= \exp\left[-i\frac{\alpha_k\theta}{\theta_n}\right] w_{\alpha_k}(q; \theta) = \exp[-i(k-1)\theta] w_{\alpha_k}(q; \theta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Значение  $\alpha_k$  является характеристикой собственных функций периодических задач, и в связи с этим значение этого параметра указывается в обозначениях собственных функций. Соответственно этому, собственные значения краевой задачи (2.1) также представляют собой некоторые зависимости от параметра  $\alpha_k$ , т.е.  $\lambda = \lambda(\alpha_k)$ . Отметим, что  $\lambda(\alpha_k)$  – периодическая функция параметра  $\alpha_k$ , т.е.  $\lambda(\alpha_k) = \lambda(\alpha_k + 2\pi k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , так как сдвигу параметра  $\alpha_k$  на величины, кратные  $2\pi$ , отвечают целочисленные повороты механической системы вокруг ее оси симметрии.

**3. Декомпозиция.** Представление собственных функций периодической краевой задачи в форме (2.16) позволяет существенно упростить анализ поведения рассматриваемой механической системы, сводя решение исходной задачи к ее решению в секторе  $\Omega_0 : 0 \leq \theta \leq \theta_n$ , где  $\Omega_0$  – элементарная ячейка исходной области  $\Omega : 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Значения собственных функций  $w_{\alpha_k}(q; \theta)$  на границах элементарной ячейки  $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_n$  генерируются условиями периодичности (2.13) и в случае дифференцируемости решений (2.1) по угловой переменной  $\theta$  принимают вид

$$w_{\alpha_k}^{(s)}(q; \theta_n) = \exp[i\alpha_k] w_{\alpha_k}^{(s)}(q; 0), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Порядок производных по переменной  $\theta$  отмечается верхним индексом  $(s)$ , записываемым в круглых скобках, причем максимальный порядок производной согласуется с операторами  $A$  и  $B$ .

В результате используемой декомпозиции [8] решение исходной задачи (2.1), определенной в области  $\Omega$ , заменяется серией  $n$  краевых задач, определенных в элементарной ячейке  $\Omega_0$

$$\begin{aligned} Aw_{\alpha_k}(q; \theta) &= \lambda Bw_{\alpha_k}(q; \theta), \quad k = 1, 2, \dots, n \\ w_{\alpha_k}^{(s)}(q; \theta_n) &= \exp[i\alpha_k] w_{\alpha_k}^{(s)}(q; 0), \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что краевая задача о собственных значениях (3.2) является однопараметрической с параметром  $\alpha_k$ , входящим в граничные условия и принимающим  $n$  дискретных значений. Собственные значения краевой задачи (3.2) можно интерпретировать как некоторые функции этого параметра. Относительно взаимного поведения этих функций можно высказать общее утверждение (см. [9, 10]), что для систем общего положения пересечение графиков этих функций невозможно при любых значениях  $\alpha_k$ .

С использованием метода декомпозиции приведем также вариационную формулировку спектральных краевых задач (3.2). Будем исходить из вариационной формулировки первоначальной задачи на собственные значения (2.1)

$$\lambda = \min_w \frac{(w, Aw)_{\Omega}}{(w, Bw)_{\Omega}} \quad (3.3)$$

где  $w$ , удовлетворяет заданным условиям на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Нижний индекс  $\Omega$  указывает, что обозначаемое круглыми скобками в (3.3) скалярное произведение вы-

числяется в области  $\Omega$ . Минимум отношения Рэля в (3.3) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих общему свойству (2.13) решений периодических задач. С учетом этого, числитель и знаменатель в (3.3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (w(q; \theta), Aw(q; \theta))_{\Omega} &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} (w(q; \theta + k\theta_n), Aw(q; \theta + k\theta_n)) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (w(q; \theta), Aw(q; \theta))_{\Omega_0} = n(w(q; \theta), Aw(q; \theta))_{\Omega_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(w(q; \theta), Bw(q; \theta))_{\Omega} = n(w(q; \theta), Bw(q; \theta))_{\Omega_0} \quad (3.5)$$

где индексом  $\Omega_0$  отмечено, что выражение в скобках определяется в области  $\Omega_0: 0 \leq \theta \leq \theta_n$  (“элементарной ячейке”). С использованием равенств (3.4) и (3.5) в (3.3) приходим к декомпозированному выражению для собственного значения

$$\lambda = \min_w \frac{(w, Aw)_{\Omega_0}}{(w, Bw)_{\Omega_0}} \quad (3.6)$$

При этом на границах области  $\Omega_0: \theta = 0, \theta = \theta_n$  значения искомой функции удовлетворяют условиям (3.2).

**4. Устойчивость сжимаемого упругого кольца.** В качестве примера применения развитых представлений и декомпозиции циклических систем рассмотрим задачу о сжатии и потере устойчивости кругового неразрезного упругого кольца, находящегося под равномерным давлением  $P$  и шарнирно закрепленного в точках  $\theta_j = j\theta_n$ ,  $\theta_n = 2\pi/n$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$  (рис. 1). Для описания упругого выпучивания кольца радиуса  $R$  (в недеформированном состоянии) и жесткости на изгиб  $EI$  воспользуемся уравнением и граничными условиями [11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \mu^2 \frac{d^2 w}{d\theta^2} = 0, \quad \mu^2 = 1 + \frac{PR^2}{EI}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ w(j\theta_n) = 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \theta_n = \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \quad (4.1)$$

С использованием переменной  $\theta = \theta_n \tilde{\theta}$  (тильда в дальнейшем опускается) будем иметь

$$\frac{d^4 w}{d\theta^4} + \lambda \frac{d^2 w}{d\theta^2} = 0, \quad \lambda = \mu^2 \theta_n^2, \quad 0 < \theta < 1 \quad (4.2)$$

Граничные условия для используемой элементарной ячейки запишутся в виде

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w(1) = 0 \\ \frac{dw}{d\theta}(1) = e^{i\alpha} \frac{dw}{d\theta}(0), \quad \frac{d^2 w}{d\theta^2}(1) = e^{i\alpha} \frac{d^2 w}{d\theta^2}(0), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned} \quad (4.3)$$

Удовлетворяя общее решение дифференциального уравнения (4.2)

$$w(\theta) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\theta) + C_3 \theta + C_4 \quad (4.4)$$

граничным условиям краевой задачи (4.3), стандартным образом приходим к уравнению для определения критических сил потери устойчивости

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}} \equiv f(\lambda) \quad (4.5)$$

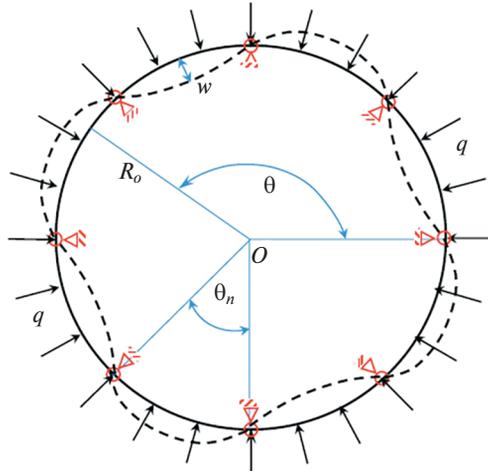


Рис. 1. Потеря устойчивости неразрезного кольца.

Так как  $|\cos \alpha| \leq 1$ , то критические силы потери устойчивости удовлетворяют условию  $|f(\lambda)| \leq 1$ .

Непосредственные вычисления приводят к уравнениям для определения границ спектральных полос

$$f(\lambda) = -1 : \sqrt{\lambda}(1 + \cos \sqrt{\lambda}) = 2 \sin \sqrt{\lambda} \tag{4.6}$$

$$f(\lambda) = 1 : \sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1) = 0 \tag{4.7}$$

Уравнению (4.6) удовлетворяют корни уравнений

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0, \quad \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$$

а уравнение (4.7) имеет решение

$$\sqrt{\lambda_k} = 2k\pi, \quad k \neq 0$$

Решение  $\lambda = 0$  исключается из рассмотрения.

Таким образом, спектр критических сил потери устойчивости неразрезного упругого кольца, сжатого равномерным давлением и шарнирно закрепленного в равноотстоящих точках, состоит из полос с непрерывным спектром. Нижние границы полос описываются выражением

$$\sqrt{\lambda_k} = (2k + 1)\pi, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.8}$$

а верхние границы полос определяются корнями уравнения  $\tan(\sqrt{\lambda}/2) = \sqrt{\lambda}/2$  с асимптотическим представлением

$$\sqrt{\lambda_k} = (2k + 1)\pi - 2\varepsilon_k \tag{4.9}$$

где  $\varepsilon_k \approx 2/(2k + 1)\pi$  при  $k \gg 1$ . Расстояние между границами соседних полос  $\Delta\lambda_k = 2\varepsilon_k$  с ростом  $k$  стремится к нулю.

**5. Заключение и некоторые замечания.** В работе представлены результаты исследования задач о спектре циклических систем, описываемых краевыми задачами на соб-

ственные значения. В предположении об инвариантности определяющих соотношений относительно поворота на углы, кратные периоду аргумента, и ограниченности решения спектральной задачи получены представления для собственных функций в случае простого и кратного собственных значений.

Представлена декомпозиция собственных функций, упрощающая анализ поведения рассматриваемой механической системы за счет сведения решения исходной задачи к ее решению на элементарной ячейке. С использованием метода декомпозиции дана также вариационная формулировка рассматриваемой задачи на собственные значения.

На примере рассмотрения задачи об устойчивости сжимаемого упругого кольца показана эффективность применения развитых представлений и декомпозиции циклических систем. Приведем некоторые замечания.

*Замечание 1.* Континуальные механические системы характеризуются наличием оси симметрии  $n$ -го порядка, при вращении вокруг которой на углы, кратные углу  $2\pi/n$ , эти системы совмещаются сами с собой. При  $n \rightarrow \infty$  циклические системы трансформируются в системы с круговой симметрией.

*Замечание 2.* Данная работа посвящена циклическим механическим системам. Другим видом периодических систем служат трансляционно-инвариантные системы, являющиеся бесконечно протяженными и используемыми в качестве асимптотических моделей реальных механических объектов, находящихся в условиях свободных колебаний или в состоянии потери устойчивости при сжатии. Общие представления для трансляционно-инвариантных систем, включая собственные функции и собственные значения, получаются из представленных в работе для циклических систем заменой угла  $\theta$  на осевую координату  $x$  и периода  $\theta_n$  на параметр периодичности  $a$ , фигурирующий в операции сдвига системы:  $x \rightarrow x + a$ .

*Замечание 3.* Помимо трансляционно-инвариантных и циклических систем к инвариантным относятся также случаи, когда операторы  $A$  и  $B$ , а также и решение спектральной задачи  $w$  характеризуются инверсией относительно операции  $x \rightarrow a - x$  (инверсионный случай). В частности, условия инверсии выполняются, когда операторы  $A$  и  $B$  содержат только четные производные по  $x$ , а варьируемые коэффициенты задачи являются четными функциями аргумента  $a/2 - x$ . При наличии данной инверсии вводится функция  $\hat{w}(q; x) \equiv w(q; a - x)$ , удовлетворяющая уравнению

$$A\hat{w}(q; x) = \lambda B\hat{w}(q; x)$$

и учитываются граничные условия. При этом

$$\hat{w}(q; a) = w(q; 0) = \exp[-i\alpha_k] w(q; a) = \exp[-i\alpha_k] \hat{w}(q; x)$$

и в результате имеем представление для уравнения и производных

$$A\hat{w}_{\alpha_k}(q; x) = \lambda B\hat{w}_{\alpha_k}(q; x), \quad \alpha_k = \alpha a$$

$$\hat{w}_{\alpha_k}^{(s)}(q; x) = \exp[-i\alpha_k] \hat{w}_{\alpha_k}^{(s)}(q; 0)$$

Опуская проведенные дальнейшие элементарные операции (включая операции комплексного сопряжения), приходим к представлениям

$$w_{\alpha}(q; x) = u_{\alpha}(q; x) + iv_{\alpha}(q; x)$$

$$u_{\alpha}(q; x) = \operatorname{Re} w_{\alpha}(q; x), \quad v_{\alpha}(q; x) = \operatorname{Im} w_{\alpha}(q; x)$$

$$u_{\alpha}(q; a - x) \equiv u_{\alpha}(q; x), \quad v_{\alpha}(q; a - x) = -v_{\alpha}(q; x)$$

где вещественная часть функции  $w_{\alpha}(q; x)$  является четной, а мнимая часть — нечетной по отношению к  $x = a/2$ . Это позволяет уменьшить число операций, используя переходы к интервалам  $x \in [0, a/2]$  или  $x \in [a/2, a]$ .

Автор благодарит А.А. Барсука и С.Ю. Иванову за полезные обсуждения и помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
2. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1984. 488 с.
3. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1984. 381 с.
4. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971. 272 с.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
7. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 472 с.
8. *Баничук Н.В., Барсук А.А.* Применение декомпозиции спектра собственных значений в задачах оптимизации / Проблемы устойчивости предельной несущей способности конструкций. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 17–24.
9. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 2. С. 12–20.
10. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
11. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: Госиздат, 1955. 568 с.
12. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.

УДК 539.42

## ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБРАЗОВАНИЯ ВЫВАЛОВ НА СТЕНКАХ СКВАЖИН

© 2022 г. Ю. Ф. Коваленко<sup>а,\*</sup>, К. Б. Устинов<sup>а</sup>, В. И. Карев<sup>а</sup><sup>а</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.06.2022 г.

После доработки 20.06.2022 г.

Принята к публикации 22.06.2022 г.

Проведено физическое моделирование образования вывалов в скважину на образцах горных пород с отверстиями, просверленными перпендикулярно плоскости залегания. Моделирование продемонстрировало появление ярко выраженных ориентированных вывалов при равномерных боковых напряжениях. Для объяснения наблюдаемых явлений предлагаются некоторые гипотезы. Согласно первой гипотезе, предполагается, что причина кроется в комбинированном влиянии анизотропии прочности и анизотропии упругости определенного типа, определяемой параметром, отличным от отношения модулей упругости вдоль и по нормали к слоистости. Согласно второй гипотезе, причиной может быть подавление роста вторичных вывалов после инициации первичного вывала. Согласно третьей гипотезе, причина может быть связана исключительно с анизотропией прочности определенного типа. Результаты представляются полезными при проектировании и разработке углеводородных месторождений и подземных хранилищ газа и при интерпретировании данных скважинных исследований для определения напряженного состояния в Земной коре.

*Ключевые слова:* измерения напряжений в массиве пород, вывалы в скважинах, интерпретация данных исследования скважин, анизотропия прочности, упругая анизотропия

DOI: 10.31857/S0572329922060125

**1. Введение.** Оценка состояния призабойной зоны пласта при эксплуатации месторождений углеводородов и, особенно, подземных хранилищ газа (ПХГ) и выявление причин выноса песка в скважину (пескопроявления) при дренировании слабоустойчивых пород является важнейшей задачей научных и практических исследований, направленных на создание новых технологий.

Несмотря на многолетний опыт эксплуатации пескопроявляющих скважин до настоящего времени отсутствует достаточно обоснованная модель разрушения коллектора и математическое описание процессов, протекающих в системе пласт–скважина [1–5].

В литературе за основную причину интенсивного выноса песка в скважину принимают разрушение призабойной зоны пласта, связанного с возникновением напряжений в породе, превышающих ее предел прочности. В результате происходит нарушение целостности горных пород в призабойной части пласта, приводящее к образованию вывалов пород на стенках скважин и кавернообразованию. Именно с образованием вывалов породы на стенках скважин, пробуренных в слабосцементированных песчаниках, связан интенсивный вынос песка в скважину. Поэтому, чтобы минимизировать

риск пескопроявлений и их интенсивность, необходимо разобраться в механизме появления вывалов в скважинах и понять, какие условия залегания и деформационно-прочностные свойства горных пород оказывают основное влияние на их возникновение.

Измерения вывалов скважин считаются надежным инструментом для определения начальных напряжений в пласте на глубине (в частности, комбинаций величин главных напряжений в плоскости, перпендикулярной оси скважины, и их азимутов), например, [6–8], (и цитируемой там литературы). Это явно подразумевает, что неравномерность напряжений, действующих в плоскости, перпендикулярной оси скважины, является основным и практически чуть ли не единственным источником вывалов, наблюдаемых в скважинах. В монографии М. Зобак [6] рассмотрел влияние на инициирование вывалов других факторов, таких как анизотропия прочности и структура, рассмотрел несколько случаев из практики и подчеркнул, что анизотропия прочности горных пород (в основном вызванная наличием слоистой структуры) часто затрудняет интерпретацию измерений восстановления деформаций. Однако чаще всего такие факторы, в лучшем случае, только упоминаются. В то же время объяснение наблюдаемых вывалов в скважинах исключительно неравномерностью напряжений в настоящее время стало основной парадигмой для интерпретации геофизического исследования скважин.

При отсутствии анизотропии действующих напряжений ожидается, что из-за изотропии прочностных и упругих свойств вывалы будут происходить по контуру скважины по окружности вследствие осевой симметрии; предполагается, что такая картина возникает в вертикальных скважинах, пробуренных в массивах с горизонтальным напластованием, находящихся под действием равных горизонтальных напряжений [6, 7]. Обычно речь идет о вертикальности скважины и равенстве горизонтальных напряжений, хотя более точной формулировкой является перпендикулярность скважины к напластованию и равенство напряжений в плоскости напластования, хотя это всего лишь вопрос ригоризма.

Нарушение равенства горизонтальных напряжений приводит к возникновению вывалов в точках на контуре скважины и дальнейшему их распространению вдоль ее диаметра по направлению минимального горизонтального напряжения (перпендикулярно максимальному напряжению) вследствие концентрации сжимающих напряжений в этих точках [9]. Обычно различают три характерные формы вывалов по контурам вертикальных скважин [7]:

- чешуйчатые отслоения, проявляющиеся в виде систем криволинейных трещин, распространяющихся приблизительно параллельно контуру скважины в зонах, прилегающих к стволу скважины в направлении минимального напряжения; наблюдаются в низкопористых твердых породах, таких как базальт или гранит;
- в песчаниках наблюдаются вывалы в виде “собачьих ушей”, то есть вывалы в виде широких зон;
- “червоточины”, то есть вывалы в виде узких разрезов; наблюдаются в высокопористых породах.

Во всех трех вышеперечисленных случаях вывалы могут быть отнесены к однолопастным, в отличие от двухлопастных вывалов [6], характерных для скважин, ориентированных параллельно напластованию в слоистых породах. Двухлопастные вывалы образуются из-за анизотропии прочности, вызванной ослаблением вдоль плоскостей напластования [6, 10, 11]. Термины одно- и двухлопастные вывалы были введены, по видимому, Зобаком [6], при этом количество “лопастей”-вывалов относится к половине контура скважины.

Среди исследований, в которых рассматривалось влияние структуры и анизотропии на формы вывалов, следует отметить работу Кайзера и др. [12]. Работа посвящена исследованию разрушения вблизи круглого отверстия в угле. В образце с отверстием

вдоль слоистости, нагружаемом почти равными напряжениями (разница напряжений была в пределах 8%), прикладываемыми в плоскости, перпендикулярной оси отверстия, и в условиях плоской деформации сохраняемых вдоль оси отверстия, авторы наблюдали вывалы в направлениях, перпендикулярных слоистости. Отметим, что уголь обладает четко выраженной слоистой структурой с системой трещин, параллельной слоистости, и, как следствие, выраженной упругой и прочностной анизотропией. В [13] Бэбкок предложил интерпретировать данные исследования скважин, рассматривая естественные трещины как источник вывалов, но позже эти идеи были подвергнуты критике, и в качестве объяснения было выдвинуто влияние разницы напряжений [14].

Настоящее исследование посвящено прямому физическому моделированию вывалов скважин для пород-коллекторов (песчаники и известняки) из четырех нефтяных и газоконденсатных месторождений. Моделирование проводилось на образцах с отверстиями, выполненными как перпендикулярно, так и параллельно плоскости залегания (один образец). Слоистая структура всех изученных пород была слабо выражена, а упругая анизотропия (как статическая, так и измеренная с помощью акустических волн) по общепринятому параметру (отношение модулей Юнга вдоль и по нормали к плоскости залегания) либо отсутствовала, либо была слабо выраженной. Однако все рассматриваемые породы проявляли анизотропию прочности. В нескольких опытах при равнокомпонентном боковом нагружении наблюдались ярко выраженные ориентированные вывалы однолопастной формы, обычно приписываемые неравнокомпонентному нагружению, а не двухлопастной формы, характерной для пород, обладающих анизотропией прочности [6]. Такое поведение представляется достаточно удивительным, хотя для его объяснения можно выдвинуть несколько гипотез. Наблюдаемые формы вывалов могут быть вызваны: комбинированным влиянием прочности и упругой анизотропии горных пород (i); подавлением образования всех четырех зон за счет снижения концентрации напряжений в потенциально опасных точках после появления первых двух зон (ii); анизотропией прочности определенного типа (iii).

Цель статьи – привлечь внимание исследователей и инженеров к тому факту, что анизотропия напряжений не обязательно является основной или единственной причиной наблюдаемых вывалов в скважинах, особенно в не слишком прочных породах, таких как песчаники, часто образующих коллектора месторождений углеводородов.

**2. Эксперименты: приборы, материалы, измерения.** Эксперименты проводились на Испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН), созданной в Институте проблем механики Российской академии наук и предназначенной для изучения деформационных, прочностных и фильтрационных характеристик горных пород [15, 16] в условиях истинно трехосного нагружения. Образцы представляли собой кубики с ребром 40 мм. Конструкция узла нагружения, благодаря примененной кинематике с перекрывающимися нажимными плитами, установленными на прецизионных роликовых подшипниках, позволяет прикладывать напряжения по всей поверхности граней образцов. Для уменьшения трения между гранями образца и нагружающими нажимными плитами вставлялись тонкие фторопластовые прокладки. В прокладках, закрывающих грани с отверстиями, были вырезаны центральные отверстия диаметром 10 мм.

Для моделирования вывалов использовалась модифицированная схема “полого цилиндра”. С этой целью для испытаний были специально изготовлены наконечники противоположных нажимных плит с центральными каналами для входа и выхода воздуха (рис. 1).

Испытания проводились на кубических образцах  $40 \times 40 \times 40$  мм с центральными отверстиями диаметром 10 мм. Во время экспериментов поток воздуха с избыточным давлением 0.01–0.02 МПа подавался в отверстие в образце через коаксиальный канал диаметром 9 мм в нагружающей плите и выводился через аналогичный канал в проти-

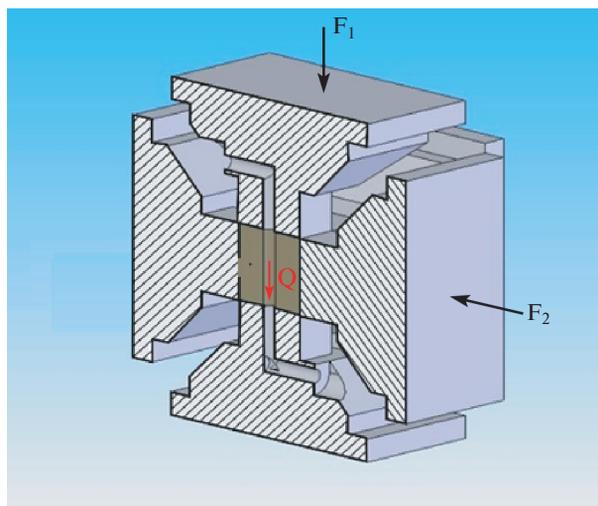


Рис. 1. Схема нагружающего узла для испытаний по схеме “полый цилиндр”.

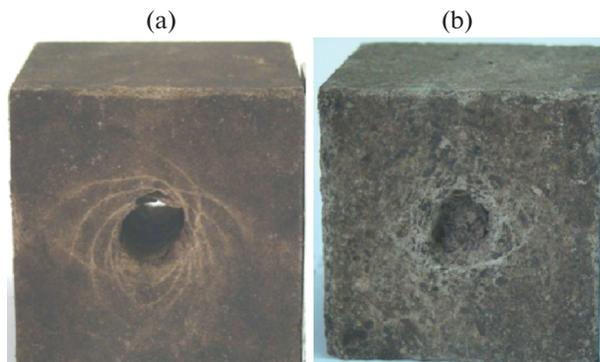
воположной нагружающей плите на электронные весы для взвешивания вынесенного песка.

Образцы были изготовлены из кернового материала, извлеченного из коллекторов четырех нефтегазовых и газоконденсатных месторождений шельфов Арктики, Каспийского моря и Сахалина. Образцы были вырезаны параллельно оси керна с использованием камнерезных и шлифовальных станков с высокой точностью, непараллельность граней составляла не более 20 мкм. Образцы помечались так, чтобы ось 1 совпала с осью керна, оси 2 и 3 были выбраны произвольно.

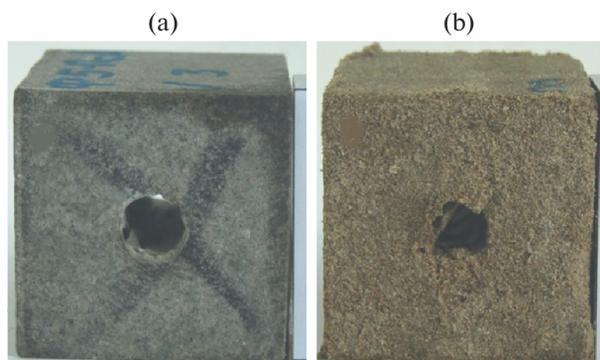
Образцы нагружались равными напряжениями, приложенными по каждой из осей, в режиме управления по нагрузке с постоянной скоростью 31.25 КПа/с. Разгрузка всех образцов осуществлялась равномерно по всем осям (во избежание возникновения касательных напряжений, способных изменить конфигурацию вывалов). Перед испытанием в каждом образце были измерены скорости продольных упругих волн в трех направлениях. В общей сложности было испытано 30 образцов.

**3. Экспериментальные результаты.** Серия опытов была проведена на 9 образцах кернового материала (известняка из нижнепермских отложений) из коллектора нефтяного месторождения Приразломное, расположенного на арктическом шельфе [17]. Все образцы были вырезаны соосно оси керна, с отверстиями также соосными оси керна. Материал вел себя как изотропный, видимых трещин не наблюдалось. На рис. 2 представлены фотографии двух типичных образцов с отверстиями и вывалами. Во всех случаях трещины вокруг отверстий формировались практически осесимметрично.

Серия испытаний из 3 образцов была проведена на образцах породы из коллектора нефтегазоконденсатного месторождения им. В. Филановского, расположенного на шельфе Каспийского моря. Образцы были вырезаны соосно оси керна, отверстие также было соосно оси керна. Образцы (песчаники неокамского подъяруса) не проявляли упругой анизотропии, хотя продемонстрировали меньшую прочность на сжатие перпендикулярно оси керна по сравнению с прочностью на сжатие при нагружении вдоль оси керна. В плоскости, перпендикулярной оси керна, образцы не проявляли анизотропии прочности [16]; ни слоистой структуры, ни начальной трещиноватости не наблюдалось. Фотографии двух образцов с отверстиями и вывалами представлены на рис. 3,а,в. Появление выраженных трещин наблюдалось в образцах на рис. 3,б, в то



**Рис. 2.** Отверстия с вывалами после испытания образцов из коллектора Приразломного нефтяного месторождения.



**Рис. 3.** Отверстия с вывалами после испытания образцов из нефтегазоконденсатного месторождения им. В. Филановского.

время как в образце, представленном на рис. 3,а, наблюдалось появление очень небольшого количества трещин вдоль окружности.

Серия испытаний была проведена на образцах из коллектора Штокмановского газоконденсатного месторождения, расположенного на шельфе Арктики [18] (13 образцов из юрско-меловых отложений были вырезаны соосно оси керна, отверстия также были соосны оси керна). Различие скоростей продольных акустических волн в перпендикулярных направлениях не превышало 8% для всех образцов. Видимой слоистой структуры не наблюдалось (рис. 4). Фотографии трех образцов с отверстиями и типичными картинками вывалов представлены на рис. 4,а–с.

В большинстве опытов (кроме двух из тринадцати, в которых вывалы были небольшими и имели форму, близкую к осесимметричной) вывалы имели выраженную удлиненную форму. Типы вывалов (чешуйчатое отслоение, “собачье ухо” или “червоточина” [7]) не всегда четко различались, за исключением случаев, подобных (с), имеющих вид гипертрофированных “червоточин”. В последнем случае наблюдаемая форма, возможно, вызвана некоей вторичной причиной, например, “вымыванием” частиц потоком воздуха. Необходимо подчеркнуть, что во всей серии экспериментов отверстия были сделаны вдоль оси керна, перпендикулярно плоскости залегания, т.е. пер-

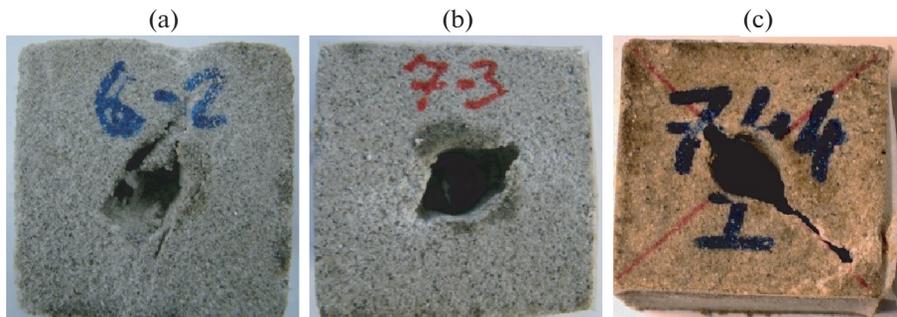


Рис. 4. Отверстия с вывалами после испытания образцов из Штокмановского месторождения.

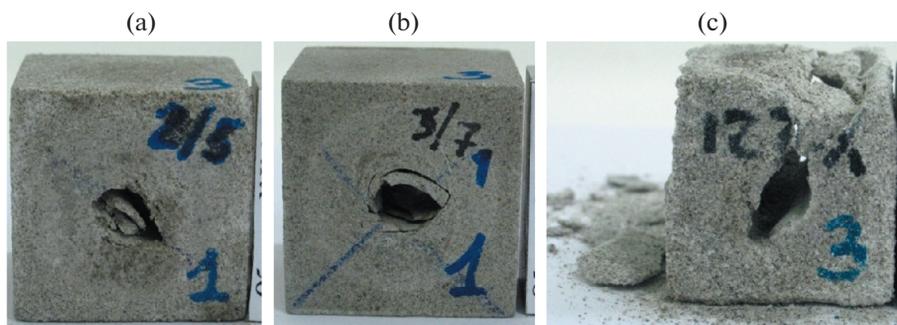


Рис. 5. Отверстия с вывалами после испытания образцов из Киринского месторождения; отверстие соосно оси керна, а), б); отверстие перпендикулярно оси керна (здесь вертикальной), с).

пендикулярно плоскостям, в которых не ожидалось проявления ни упругой, ни прочностной анизотропии.

Серия опытов (4 образца из песчаника неогеновых отложений) была проведена на образцах из коллектора Киринского газоконденсатного месторождения, расположенного на шельфе Сахалина. Все образцы были вырезаны соосно оси керна, в трех образцах отверстия были просверлены соосно оси керна, а в одном — перпендикулярно ему. Различие продольных акустических скоростей в перпендикулярных направлениях не превышало 1% для первых двух образцов и 6% для последних двух образцов. Видимой слоистой структуры не наблюдалось (рис. 5,а–д). Фотографии двух образцов с отверстиями вдоль оси керна и одного образца с отверстием перпендикулярно оси керна представлены на рис. 5,а–с.

Из фотографий видно, что во всех случаях вывалы имели вытянутую форму, особенно выраженную в образце (с) с отверстием, просверленным перпендикулярно оси керна.

**4. Обсуждение.** Согласно общепринятым представлениям [6], в условиях гидростатического сжатия осесимметричные вывалы формируются вокруг скважин в изотропных породах и вокруг скважин, пробуренных нормально к напластованию в трансверсально-изотропных породах, в то время как на контурах скважин, пробуренных в плоскости напластования в трансверсально-изотропных породах, следует ожидать формирование двухлопастных вывалов. Подобные двухлопастные вывалы были не только предсказаны теоретически [10, 11], но и наблюдались экспериментально [6] (и

цитируемая там литература). Напротив, однолопастные вывалы традиционно объясняются анизотропией действующих напряжений [7, 6]. Однако в проведенных экспериментах однолопастные вывалы наблюдались для двух из четырех испытанных пород в гидростатически нагруженных образцах с отверстиями, нормальными к плоскости залегания: во всех 4 случаях для Киринского месторождения (включая случай, когда отверстие располагалось в плоскости залегания, где ожидалась двухлопастная форма) и, по крайней мере, в 10 из 13 образцов для Штокмановского месторождения.

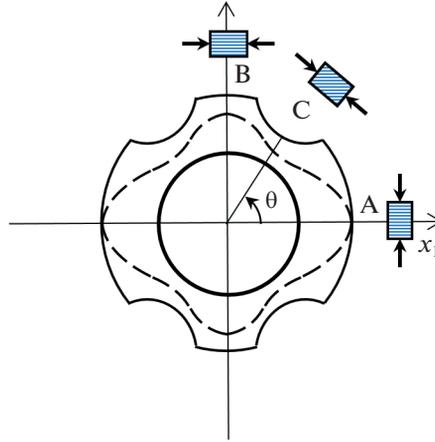
Далее приведен анализ возможных факторов, которые могли привести к появлению однолопастных вывалов вокруг отверстий, где ожидалось осесимметричные или двухлопастные вывалы.

*4.1. Анизотропия прочности.* В качестве основной причины отклонения форм вывалов от окружных в условиях гидростатического нагружения полагают анизотропию прочности, обусловленную наличием ослабленных плоскостей, совпадающих с плоскостями напластования в горных породах [6, 10, 11]. Согласно данной модели [19–21], разрушение может происходить либо из-за скольжения по плоскостям напластования, либо при достижении критических условий в плоскостях, где действуют напряжения, комбинация которых превышает предел прочности среды в целом. По этой причине испытания образцов с ориентацией сжимающего напряжения под разными углами к плоскостям ослабления показывают либо примерно постоянную прочность (для образцов с напряжениями, приложенными в направлениях, близких к направлению напластования или перпендикулярных к нему), либо пониженную прочность при разрушении, вызванном скольжением вдоль слоев (для образцов с плоскостями напластования, наклоненными к направлению нагрузки). Данную картину можно также представить как набор виртуальных образцов, расположенных по контуру отверстия, вырезанного в трансверсально-изотропной породе вдоль плоскости напластования, с постоянными окружными сжимающими напряжениями, действующими вдоль данного контура, рис. 6 (сплошная линия). На рис.6 для каждого угла расстояние от центра до точек соответствующей кривой пропорционально напряжению разрушения.

Однако данная модель не учитывает особенность, наблюдаемую в опытах на осадочных породах – меньшую прочность в случае нагрузки, приложенной параллельно напластованию, по сравнению с прочностью при приложении нагрузки по нормали к напластованию [22–24, 16]. Кроме того, в упомянутых экспериментах зависимость прочности от угла не имели резких точек перехода, соответствующих переключению между механизмами разрушения. Для учета этих особенностей можно использовать эмпирические зависимости, описывающие изменение прочности в зависимости от угла наклона к напластованию [22], или полуэмпирические критерии, основанные на модифицированной модели Хилла [25], [26, 27, 23, 16]. Тем не менее, учет всех вышеупомянутых факторов, связанных с анизотропией прочности, предполагает разрушение в точках С, приводящее к двухлопастным вывалам.

*4.2. Универсальная анизотропия.* Закон Гука для трансверсальной анизотропии, характерной для большинства осадочных пород, имеет вид [28]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + s_{13}\sigma_{33} \\
 \varepsilon_{22} &= s_{12}\sigma_{11} + s_{11}\sigma_{22} + s_{13}\sigma_{33} \\
 \varepsilon_{33} &= s_{13}\sigma_{11} + s_{13}\sigma_{22} + s_{33}\sigma_{33} \\
 2\varepsilon_{12} &= s_{66}\sigma_{12} \\
 2\varepsilon_{13} &= s_{44}\sigma_{13} \\
 2\varepsilon_{23} &= s_{44}\sigma_{23}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$



**Рис. 6.** Изменение прочности трансверсально-изотропной породы в окрестности отверстия, ориентированного вдоль плоскости изотропии. Сплошная линия – согласно критерию разрушения, учитывающему ослабление вдоль напластования; пунктирная линия – согласно эмпирическому критерию. Точки А, В и С соответствуют сжимающим напряжениям, приложенным перпендикулярно, параллельно и под углом к напластованию, соответственно.

Здесь  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений в системе координат с осью  $x_3$ , направленной перпендикулярно плоскости изотропии;  $s_{ij}$  – компоненты матрицы податливости, и  $s_{66} = s_{11} + s_{22} - 2s_{12}$ . Общепринятыми безразмерными параметрами, характеризующими анизотропию [29], являются

$$\lambda = s_{11}/s_{33}; \quad \rho = \frac{s_{44} + 2s_{13}}{2\sqrt{s_{11}s_{33}}} \quad (4.2)$$

На практике именно первый параметр используется для характеристики степени анизотропии. Хотя обычно считается, что упругая анизотропия не оказывает значительного влияния на состояние вокруг скважины [6], согласно решению [28] напряженное состояние вблизи круглого отверстия в трансверсально анизотропном теле отличается от напряженного состояния, соответствующего изотропному случаю. На основе этого решения было показано [30] (также см. [16]), что отклонение концентрации напряжений в окрестности отверстия, лежащего в плоскости изотропии, в теле, подверженном гидростатическому сжатию, от концентраций напряжений по контуру отверстия в изотропном теле определяется следующим параметром

$$k_A = \frac{\beta_{11} + \beta_{33} - 2\beta_{13}}{\beta_{44}} \quad (4.3)$$

и очень незначительно зависит от обычного параметра  $\lambda$ . Здесь коэффициенты  $\beta_{ij}$  представляют собой коэффициенты податливости, модифицированные для плоской деформации

$$\beta_{11} = s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{11}}, \quad \beta_{33} = s_{33} - \frac{s_{13}^2}{s_{11}}, \quad \beta_{13} = s_{13} - \frac{s_{13}s_{12}}{s_{11}}, \quad \beta_{44} = s_{44} \quad (4.4)$$

и для большинства материалов не сильно отличаются от коэффициентов  $s_{ij}$ . Для  $k_A = 1$  концентрация напряжений равна 2 по всему контуру, как в случае изотропии;  $k_A < 1$  и

$k_A > 1$  соответствуют концентрациям напряжений вдоль контура в форме закругленной четырехконечной звезды, с лучами, вытянутыми вдоль главных осей упругой симметрии или наклоненных к ним, соответственно (рис. 7). Важность параметра  $k_A$  подчеркивалась в работах [32, 33]. Отметим, что комбинация упругих констант, удовлетворяющих условиям  $k_A = 1$  или  $\rho = 1$ , соответствует двум из трех частных случаев, рассмотренных де Сен-Венаном [34], для которых тип зависимости упругих констант от ориентации в пространстве имеет наиболее простую форму. Случай неравенства всех трех главных значений напряжений и произвольного наклона их направления к оси скважины был рассмотрен в [35].

На практике определение упругих параметров, входящих в (4.3), может быть затруднено, особенно величины податливости сдвига, которая является обратной по отношению к модулю сдвига. Однако, используя стандартные формулы для компонент напряжений в повернутой системе координат [28], формула (4.3) может быть переписана в терминах модулей Юнга вдоль нормали и в направлении  $45^\circ$  к слоистости,  $E_1 = \beta_{11}^{-1}, E_3 = \beta_{33}^{-1}, E_{(45)} = \beta_{(45)}^{-1}E$ :

$$4E_{(45)}^{-1} = \beta_{11} + \beta_{33} + 2\beta_{13} - \beta_{44} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.3), получаем

$$k_A - 1 = 2 \frac{\beta_{11} + \beta_{33} - 2\beta_{(45)}}{\beta_{44}} \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что, поскольку  $\beta_{44} > 0$ , условие  $k_A < 1$  (т.е. условие концентраций напряжений в точках А, В) соответствует условию

$$\beta_{11} + \beta_{33} < 2\beta_{(45)}, \quad \text{или} \quad 2E_{(45)}^{-1} > E_{11}^{-1} + E_{33}^{-1} \quad (4.7)$$

Использование условия (4.6) или качественного условия (4.7) на практике может быть проще, чем использование условия (4.3).

На рис. 7 показана концентрация напряжений по контуру круглого отверстия в трансверсально-изотропном теле в условиях гидростатического сжатия для разных значений параметра  $k_A$ . Ось отверстия лежит в плоскости изотропии. Система координат соответствует главной оси изотропии;  $\lambda = 1, \beta_{13}/\beta_{11} = -0.2$ ; сплошные, пунктирные и штрих-пунктирные линии отвечают  $k_A = 1, 0.75, 1.5$  соответственно. Точки А соответствуют направлению напряжений, перпендикулярных слою; точка В соответствует направлению напряжений, параллельных слою; точка С' соответствует направлению минимального (для  $k_A < 1$ ) или максимального (для  $k_A > 1$ ) окружного напряжения.

Согласно [31], для большинства осадочных пород отклонение параметра  $k_A$  от единицы невелико. Между тем, анализ данных [31] показывает, что  $k_A < 1$  для 59% исследованных пород, а среднее значение  $k_A$  также меньше единицы, а именно равно 0.97. Хотя термодинамических ограничений на данный параметр не существует (за исключением того, что он должен быть положительным), однако из рассмотрения различных моделей гетерогенных материалов следует, что этот параметр для неоднородных материалов имеет тенденцию быть меньше единицы. Ниже, в разделе 5, рассматриваются три такие модели, а именно: тело, состоящее из изотропных слоев, тело с ориентированной системой трещин и тело с ориентированной системой сдвиговых трещин. Согласно полученным результатам, основанных на моделях [36, 37], параметр  $k_A$  имеет тенденцию быть меньше единицы для гетерогенных анизотропных сред, описываемых всеми тремя моделями.

4.3. *Комбинированное влияние прочностной и упругой анизотропии.* Разрушение на контуре отверстия должно начинаться в точках, где действующее напряжение превосходит локальную прочность. Обычно наименьшая прочность соответствует точкам С, прочность увеличивается с увеличением угла к точкам В и А, причем прочность в точке А обычно выше, чем в точке В [22–24, 16] (рис. 6). При рассмотрении напряженного состояния (рис. 7), можно также выделить три критические точки: А, В и точку С' (близкую к точке С и предполагаемую совпадающей с точкой С в последующем качественном анализе), где напряжения могут быть максимальными или минимальными. Следовательно, в зависимости от сочетания прочности и концентрации напряжений в точках А, В, С, все они могут быть потенциально опасными в качестве точек начала разрушения. Следует выделить три случая:

1. При наличии выраженной анизотропии прочности и отсутствии упругой анизотропии (или упругой анизотропии с  $k_A \geq 1$  или немного меньше 1) не наблюдается существенной концентрации напряжений (или наблюдается вблизи точек С), и начало разрушения определяется меньшей прочностью в точках С. В этом случае ожидаются двухлопастные вывалы, как описано в [6] и цитируемой там литературе.

2. Однако, если упругая анизотропия заметно выражена и  $k_A < 1$ , влияние концентрации напряжений в точках А, В может превышать влияние снижения прочности в точке С. Так, для  $k_A = 0.5$  отношение напряжений в точке А к минимальным напряжениям в точке, близкой к С, составляет около 1.5, что может быть достаточным для подавления разрушения в точках С и инициирования его в точках В (при условии, что существует анизотропия прочности и прочность при сжатии в направлении, нормальном к слоистости, в точке А, превышает прочность при сжатии в направлении, параллельном слоистости, в точке В). Если это так, то можно ожидать формирование однолопастных вывалов, подобных наблюдавшимся в некоторых из описанных выше экспериментов.

3. Гипотетически, если прочностная анизотропия незначительна, а упругая анизотропия ярко выражена ( $k_A < 1$ ), инициирование разрушения может начаться в точках В и А, в этом случае мы наблюдали бы двухлопастные крестообразные вывалы. Однако, насколько нам известно, подобного вида разрушения не наблюдалось.

Таким образом, комбинированное влияние прочностной и упругой анизотропии (для параметра  $k_A < 1$ ) может быть возможной причиной наблюдавшихся однолопастных вывалов, образывавшихся на контурах отверстий в трансверсально-изотропных породах с отверстиями в плоскости залегания, а не двухлопастных вывалов, предсказываемых теорией [6]. Подобные вывалы могут образовываться также в отверстиях, перпендикулярных напластованию, если анизотропия упругости и прочности в этой плоскости образована ориентированной трещиноватостью или наличием плоскостей ослабления, не совпадающих с напластованием.

4.4. *Подавление инициирования дополнительных вывалов при появлении первичных вывалов в некоторых точках контура отверстия.* Другой возможный механизм может заключаться в следующем. Прочность горных пород имеет естественный разброс даже внутри образца. Следовательно, при нагружении изотропного образца, содержащего отверстие, гидростатическими напряжениями таким образом, чтобы окружные напряжения были постоянными по всему контуру, разрушение начинается в точках контура отверстия с минимальной прочностью. Если это начальное разрушение разовьется достаточно, чтобы сформировать вывал, образованный вывал будет служить концентратором напряжений, и распределение напряжений по контуру отверстия изменится: напряжение увеличится в вершине вывала и упадет на контуре вблизи него.

Действительно, рассмотрим цилиндрическое отверстие в теле, подвергнутом гидростатическому сжатию. До образования вывала концентрация окружного напряжения составляла 2 по всему контуру. После формирования первичного вывала (точка

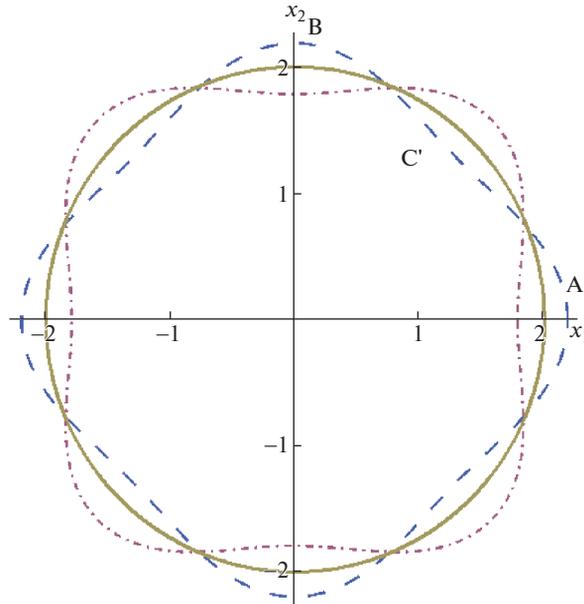
D, рис. 8), концентрация окружных напряжений вдоль контура изменяется: она падает до нуля в точке E (на самом деле это происходит в идеальном случае, изображенном на рисунке, в действительности из-за оставшихся в отверстии обломков горных пород она падает до некоторой небольшой, но конечной величины) и постепенно увеличивается вдоль контура, достигая максимума в точке, противоположной D, т.е. точке D', так что абсолютные значения напряжений вдоль контура подчиняются следующему неравенству  $|\sigma_E| < |\sigma_F| < |\sigma_G| < |\sigma_{D'}|$ . Следовательно, наиболее вероятная точка для появления второго вывала является точкой, противоположной D, т.е. точка D' (показана пунктирной линией на рис. 8). После формирования второго вывала концентрацию напряжений вокруг контура можно оценить из решения для круглого отверстия с двумя трещинами, исходящими из его противоположных сторон. В [38, 39] было показано, что с увеличением длины трещин распределение напряжений по контуру отверстия быстро стремится к распределению напряжений для случая равномерно сжатой полуплоскости с полукруглой выемкой [40, 41] для одноосного нагружения вдоль линии трещины (с максимумом порядка 1.5), и к нулю [39] для равнокомпонентного нагружения. Аналогичные результаты уменьшения напряжений были получены в [16] при моделировании напряженного состояния вокруг скважин с перфорационными щелями. Поэтому, появление двух хорошо развитых вывалов на противоположных сторонах контура должно подавлять развитие разрушения в других точках контура. Таким образом, мы можем говорить о нестабильности круглой формы вывалов даже в изотропных породах.

Описанный сценарий, в принципе, может быть причиной наблюдаемых вытянутых в одном направлении вывалов в гидростатически сжатых образцах, как изотропных, так и обладающих трансверсальной изотропией прочности. В первом случае направление вывала может быть произвольным. В последнем случае точка D на рис. 8 может соответствовать точке C на рис. 6, и направление вывала может быть не перпендикулярно слоистости, что может объяснить наблюдаемые отклонения направления вывалов от нормали к слоистости. Такой механизм может иметь место, если изменение свойств достаточно велико, чтобы сформировать первичный вывал, достаточно большой и способный подавить инициирование других вывалов. Реализация этого механизма, а именно подавление двух из четырех потенциальных вывалов, может также объяснить появление двух вывалов, развивающихся по контуру отверстия не в строго противоположных направлениях, рис. 8,b, а также небольшую асимметрию разрушения вокруг отверстий даже в карбонатных породах (месторождение Приразломное, рис. 2).

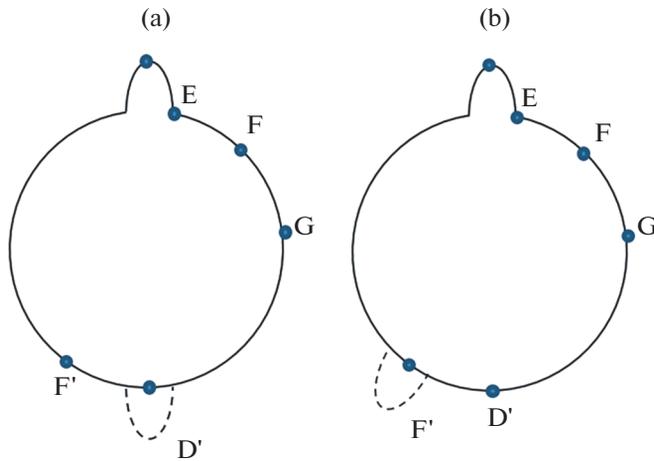
*4.5. Анизотропия прочности определенного типа.* Наблюдаемые вывалы однолопастной формы также могут образовываться из-за анизотропии прочности определенного типа. Если это так, то прочность на сжатие должна описываться овалообразными кривыми без минимума в точке C (рис. 6). Другими словами, прочность на сжатие должна монотонно изменяться с изменением угла между направлением сжатия и плоскостью залегания с максимумом, соответствующим сжатию, нормальному к плоскости залегания, и минимумом, соответствующим сжатию, параллельному плоскости залегания.

Предложенные механизмы возникновения наблюдаемых однолопастных вывалов при равномерной гидростатической нагрузке рассматриваются нами только как гипотезы. Также могут быть рассмотрены другие механизмы, например, такие, как разрушение или деформация отдельных слоев в точках наблюдаемых вывалов (для вывалов, распространяющихся нормально к напластованию). Наблюдаемое поведение также может быть обусловлено сочетанием факторов, упомянутых выше.

Для проверки предложенных гипотез необходимо провести дополнительные испытания, а именно определить полный набор упругих констант, особенно параметр  $s_{44}$  (для определения параметра упругой анизотропии  $k_A$  (4.3)), и определить зависимость прочности на сжатие от угла между приложенным сжатием и плоскостью залегания.



**Рис. 7.** Концентрация напряжений по контуру круглого отверстия в трансверсально-изотропном теле в условиях гидростатического сжатия.



**Рис. 8.** Качественная модель первичного вывала (точка D), подавляющего развитие вторичных вывалов: симметрично, в точках F, F', a); несимметрично, в точках F, D', b).

Все предложенные опыты должны проводиться вместе с испытаниями на образцах с отверстиями, изготовленными из одних и тех же кусков керна горных пород.

Понимание механизмов образования вывалов различных форм будет способствовать лучшей интерпретации данных исследования скважин, в частности, для определения напряжений, действующих в массиве.

**5. Приложение. Многослойная среда.** Для среды, состоящей из двух типов упругих трансверсально-изотропных слоев с упругими податливостями  $\beta_{ij}^{(k)}$ , где индекс  $k = 1, 2$  относится к двум типам слоев, эффективные упругие податливости  $\beta_{ij}^{\text{eff}}$  с использованием общих формул [36] могут быть записаны в используемой нотации следующим образом

$$\begin{aligned}\beta_{44}^{\text{eff}} &= (1 - \Omega)\beta_{44}^{(1)} + \Omega\beta_{44}^{(2)} \\ \beta_{11}^{\text{eff}} &= [(1 - \Omega)\beta_{11}^{(1)-1} + \Omega\beta_{11}^{(2)-1}]^{-1} \\ \beta_{13}^{\text{eff}} &= \frac{(1 - \Omega)\beta_{11}^{(2)}\beta_{13}^{(1)} + \Omega\beta_{11}^{(1)}\beta_{13}^{(2)}}{(1 - \Omega)\beta_{11}^{(2)} + \Omega\beta_{11}^{(1)}} \\ \beta_{33}^{\text{eff}} &= (1 - \Omega)\beta_{33}^{(1)} + \Omega\beta_{33}^{(2)} - \frac{(\beta_{13}^{(1)} - \beta_{13}^{(2)})^2}{\beta_{11}^{(1)}/(1 - \Omega) + \beta_{11}^{(2)}/\Omega}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Здесь  $(1 - \Omega)$  и  $\Omega$  относительные концентрации материалов первого и второго типа. Для изотропных слоев с модулями Юнга  $E^{(1)}, E^{(2)} = E^{(1)}/a$  и коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}$

$$\begin{aligned}s_{11}^{(1)} = s_{33}^{(1)} &= 1/E^{(1)}, & s_{11}^{(2)} = s_{33}^{(2)} &= a/E^{(1)} \\ s_{13}^{(1)} &= -\nu^{(1)}/E^{(1)}, & s_{13}^{(2)} &= -\nu^{(2)}a/E^{(1)} \\ s_{44}^{(1)} &= 2(1 + \nu^{(1)})/E^{(1)}, & s_{44}^{(2)} &= 2a(1 + \nu^{(2)})/E^{(1)}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Подстановка (5.1) и (5.2) в (4.3) с учетом (4.4) дает довольно громоздкое алгебраическое выражение для зависимости  $k_A$  от  $\Omega, a, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}$ , элементарный анализ которого показывает, что  $k_A(\Omega, a, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}) \leq 1$  для любых значений аргументов.

*Среда с ориентированной системой трещин.* Из результатов [37] следует, что небольшое количество (на единицу объема)  $d\Omega$  круговых трещин, ориентированных параллельно плоскости  $x_1x_2$  в трансверсально-изотропном теле, влияет только на два коэффициента податливости  $s_{33}$  и  $s_{44} = s_{55}$ , а остальные коэффициенты не “чувствуют” наличие трещин. Для первоначально изотропного тела результаты [37] могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}s_{44}^{\text{eff}} &= s_{44} + \frac{2(1 - \nu^2)16}{E(2 - \nu)3}d\Omega, & s_{33}^{\text{eff}} &= s_{33} + \frac{(1 - \nu^2)16}{E}d\Omega \\ s_{11}^{\text{eff}} &= s_{11}, & s_{12}^{\text{eff}} &= s_{12}, & s_{13}^{\text{eff}} &= s_{13}\end{aligned}\quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (4.3) и раскладывая в ряд по  $d\Omega$  и оставляя только главный член, имеем

$$k_A = 1 - \frac{(1 - \nu)\nu}{(2 - \nu)3}d\Omega \quad (5.4)$$

который меньше единицы для положительных концентраций и коэффициентов Пуассона.

*Среда с ориентированной системой сдвиговых трещин.* Также рассмотрим случай сдвиговых трещин, то есть трещин, раскрытию которых препятствуют достаточно высокие сжимающие напряжения, но которые способны приводить к относительным

смещениям их поверхностей при сдвиге. По сравнению с предыдущим случаем, здесь компонента  $s_{33}^{\text{eff}} = s_{33}$  также остается постоянной, и вместо (5.3) имеем

$$s_{44}^{\text{eff}} = s_{44} + \frac{2(1-\nu^2)}{E(2-\nu)} \frac{16}{3} d\Omega, \quad s_{33}^{\text{eff}} = s_{33}, \quad s_{11}^{\text{eff}} = s_{11}, \quad s_{12}^{\text{eff}} = s_{12}, \quad s_{13}^{\text{eff}} = s_{13} \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (4.3) и раскладывая в ряд и сохраняя только главный член, имеем

$$k_A = 1 - \frac{(1-\nu)}{(2-\nu)} \frac{16}{3} d\Omega \quad (5.6)$$

Следовательно, согласно всем трем рассмотренным моделям, параметр, характеризующий степень анизотропии, меньше единицы.

**6. Заключение.** Прямое моделирование продемонстрировало, что однолопастные вывалы на контурах скважин могут образовываться в условиях гидростатического сжатия, для которого, согласно общепринятому мнению, ожидаются либо кольцевые, либо двухлопастные вывалы (для изотропных и трансверсально-изотропных пород соответственно).

Наблюдаемая возможность возникновения однолопастных вывалов на контурах скважин в условиях гидростатического сжатия может привести к неправильной интерпретации результатов исследований скважин в соответствии с существующими методами.

Для объяснения наблюдаемого явления было предложено несколько гипотез: комбинированное влияние прочности и упругой анизотропии, подавление инициирования дополнительных вывалов после образования первичных вывалов, влияние анизотропии прочности определенного типа, проявляющееся в виде монотонного изменения прочности при сжатии с максимумом, соответствующим сжатию, нормальному к плоскости залегания, и минимуму, соответствующему сжатию, параллельному плоскости залегания.

Была подчеркнута важность таких факторов, как анизотропия прочности и естественный разброс прочностных свойств, а также роль специфического параметра, характеризующего упругую анизотропию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект № 22-11-00273.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каримов М.Ф. Эксплуатация подземных хранилищ газа. М.: Недра, 1981. 248 с.
2. Мирзаджанзаде А.Х., Кузнецов О.Л., Басниев К.С., Алиев З.С. Основы технологии добычи газа. М.: Недра, 2003. 880 с.
3. Башкатов А.Д. Предупреждение пескования скважин. М.: Недра, 1981. 176 с.
4. Врачев В.В., Шафаренко В.П., Шустров В.П. Пескопроявление при эксплуатации ПХГ // Газовая промышленность. 1999. № 11. С. 62.
5. Басниев К.С., Будзуляк Б.В., Зиновьев В.В. Повышение надежности и безопасности эксплуатации подземных хранилищ газа. М.: ООО "Недра-Бизнесцентр". 2005. 391 с.
6. Zoback M.D. Reservoir Geomechanics. California: Cambridge University Press, 2007. 443 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511586477>
7. Zang A., Stephansson O. Stress Field of the Earth's Crust. Dordrecht: Springer, 2010. 322 p.
8. Ljunggren C., Chang Y., Janson T., Christiansson R. An overview of rock stress measurement methods // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2003. № 40. P. 975–989.
9. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. N. Y.: McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. 471 p.
10. Vernik L., Zoback M.D. Strength anisotropy of crystalline rock: Implications for assessment of in situ stresses from wellbore breakouts / Rock Mechanics Contributions and Challenges: Proc. of the 31st US Symposium. Ed. by W.A. Hustrulid, G.A. Johnson. London: CRC Press, 1990. P. ARMA-

- 90-0841.  
<https://doi.org/10.1201/9781003078944>
11. *Germanovich L.N., Galybin A.N., Dyskin A.V., Mokhel A.N., Dunayevsky V.* Borehole stability in laminated rock / Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering. Ed. by G. Barla. Rotterdam and Brookfield: CRC Press/Balkema, 1996. V. 2. P. 767–776.
  12. *Kaiser P.K., Guenot A., Morgenstern N.R.* Deformation of small tunnels. IV. Behaviour during failure // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr. 1985. V. 22. P. 141–152.
  13. *Babcock E.A.* Measurement of subsurface fractures from dipmeter logs // AAPG Bull. 1978. V. 62 № 7. P. 1111–1126.  
<https://doi.org/10.1306/C1EA4FBD-16C9-11D7-8645000102C1865D>
  14. *Bell J.S., Gough D.I.* Northeast-southwest compressive stress in Alberta: evidence from oil wells // Earth Planet Sci Lett. 1979. V. 45. P. 475–482.  
[https://doi.org/10.1016/0012-821X\(79\)90146-8](https://doi.org/10.1016/0012-821X(79)90146-8)
  15. *Karev V.I., Kovalenko Y.F.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production / True Triaxial Testing of Rocks. Leiden: CRC Press/Balkema, 2013. P. 301–310.
  16. *Karev V.I., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B.* Geomechanics of Oil and Gas Wells. Advances in Oil and Gas Exploration and Production. Cham: Springer International Publishing, 2020. 166 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>
  17. *Рыжов А.Е., Виценовский М.Ю., Сауткин Р.С.* Оценка коллекторских свойств карбонатных пород Приразломного нефтяного месторождения // Геология нефти и газа. 2012. № 4. С. 39–53.
  18. *Климов Д.М., Тер-Саркисов Р.М., Чугай С.Е., Коваленко Ю.Ф., Рыжов А.Е.* Определение прочностных характеристик пород Штокмановского ГКМ и оценка рисков выноса песка при его разработке // Газовая промышленность. 2010. № 11. С. 57–60.
  19. *Donath F.A.* Experimental study of shear failure in anisotropic rock // Bull. Geol. Soc. America. 1966. V. 72. P. 985–990.
  20. *Jaeger J.C., Cook N.G.W.* Fundamentals of Rock Mechanics. 2nd ed. N. Y.: Chapman and Hall, 1979. 260 p.
  21. *Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Y.F., Ustinov K.B.* Fracture of sedimentary rocks under a complex triaxial stress state // Mech. Solids. 2016. V. 51. P. 522–526.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654416050022>
  22. *Singh M., Samadhiya N.K., Kumar A., Kumar V., Singh B.* A nonlinear criterion for triaxial strength of inherently anisotropic rocks // Rock Mech. and Rock Eng. 2015. V. 48 (4). P. 1387–1405.
  23. *Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.* Modeling deformation and failure of anisotropic rocks nearby a horizontal well // J. Min. Sci. 2017. V. 53. № 3. P. 425–433.  
<https://doi.org/10.1134/S1062739117032319>
  24. *Karev V.I., Klimov D.M., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.* Fracture model of anisotropic rocks under complex loading // Phys. Mesomech. 2016. V. 19. № 6. P. 34–40. doi.org/  
<https://doi.org/10.1134/S1029959918030050>
  25. *Hill R.* A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // Proc. Roy. Soc. London A. 1948. V. 193. P. 281–297
  26. *Caddell R.M., Raghava E.S., Atkins A.G.* A yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers // J. Mater. Sci. 1973. V. 8. P. 1641–1646.
  27. *Lui C., Huang Y., Stout M.G.* On the asymmetric yield surface of plastically orthotropic materials: a phenomenological study // Acta Mater. 1997. V. 45. № 6. P. 2397–2406
  28. *Lekhnitskii S.G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. San Francisco: Holden-Day, 1963. 404 p.
  29. *Suo Z.* Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media // Proc. R. Soc. Lond. A, Math. Phys. Sci. 1990. V. 427 (1873). P. 331–358.
  30. *Zhuravlev A.B., Ustinov K.B.* On values characterizing the degree of elastic anisotropy of transversely isotropic rocks. Role of shear modulus // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 6. P. 958–967.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654419060104>
  31. *Batugin S.A., Nirenburg R.K.* Approximate relation between the elastic constants of anisotropic rocks and the anisotropy parameters // J. Mining Sci. 1972. V. 8 (1). P. 5–9.

32. *Gassmann F.* Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media // Pure Appl. Geoph. 1964. V. 58. P. 63–112.  
<https://doi.org/10.1007/BF00879140>
33. *Annin B.D.* Transverse-Isotropic Elastic Model of Geomaterials // Sib. Zh. Industr. Mat. 2009. № 12 (3). P. 5–14.
34. *De Saint-Venant.* Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope (Deuxième article) // J. Math. Pures Appl. 2e Sér. 1863. V. 8. P. 257–430.
35. *Mimouna A., Prioul R.* Closed-form approximations to borehole stresses for weak transverse isotropic elastic media // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. 2017. № 98. P. 203–216.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2017.06.002>
36. *Christensen R.M.* Mechanics of composite materials. N. Y.: Wiley-Interscience, 1979. 348 p.
37. *Vavakin A.S., Salganik R.L.* Effective elastic characteristics of bodies with isolated cracks, cavities, and rigid non-homogeneities // Mech. Solids. 1978. V. 13. № 2. P. 87–97.
38. *Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B.* Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression // Int. J. Fract. 1993. V. 62. P. 307–324.  
<https://doi.org/10.1007/BF00017238>
39. *Ustinov K.B.* Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading // Int. J. Fract. 1994. V. 68. P. 73–77.  
<https://doi.org/10.1007/BF00013075>
40. *Jeffery G.B.* Plane stress and plane strain in bipolar coordinates // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1921. V. 221. P. 265–293.
41. *Chin-Bing Ling.* On the stresses in a plate containing two circular holes // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. № 1. P. 77–82.

---

---

## К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ВЛАДИМИРА АНАТОЛЬЕВИЧА ЛЕВИНА

DOI: 10.31857/S0572329922060150

Исполнилось 70 лет профессору кафедры “Вычислительная механика” механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, “Заслуженному профессору Московского университета”, “Заслуженному деятелю науки РФ”, “Почетному работнику Высшего профессионального образования РФ”, крупному ученому в области МДТТ, педагогу, организатору науки Владимиру Анатольевичу Левину.

В.А. Левин – широко известный активно и плодотворно работающий специалист в области задач МДТТ, в которых необходимо учитывать наличие в теле больших деформаций и описывать их перераспределение в процессе нагружения. Им создана и детально разработана теория многократного наложения больших деформаций. Теория создавалась и развивалась на начальном этапе под патронатом академика Л.И. Семенова, написавшего предисловие к первой монографии В.А. Левина, в которой Леонид Иванович сформулировал направления дальнейшего развития данной теории и ее места в МДТТ.

Теория позволила решить при больших деформациях принципиально новые классы статических и динамических задач, в которых дискретно или непрерывно в процессе нагружения изменяются границы (включая связность области, занимаемой телом), граничные условия, свойства части материала тела. Теория позволяет, при больших деформациях описывать процесс нагружения, в котором изменяется форма тела путем удаления или добавления (нагруженных или ненагруженных) его частей из того же или другого материала.

В.А. Левин – ключевой автор и научный редактор 5 томного цикла монографий “Нелинейная вычислительная механика прочности” (более 2000 стр.). Предисловие к циклу написал академик Г.И. Марчук. Издание осуществлено по рекомендации Бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН.

В области прикладной науки основной результат В.А. Левина – создание под его научно-техническим руководством промышленного полнофункционального пакета для прочностного инженерного анализа Фидесис, который широко используется в различных отраслях промышленности, в учебном процессе и научно-исследовательской деятельности.

В наиболее наукоемкой части пакета реализованы практически важные результаты теории многократного наложения больших деформаций: модель развития дефекта в теле с конечными деформациями с учетом образования и эволюции зон предразрушения, вязкий рост трещин; методика оценки эффективных механических и прочностных характеристик неоднородных упругих и неупругих материалов (пористых, композиционных, метаматериалов, “цифровой керн”) при конечных деформациях и их перераспределении и др.

Редакционная коллегия журнала “Известия РАН. Механика твердого тела” поздравляет Владимира Анатольевича Левина с юбилеем и желает ему крепкого здоровья, личного счастья, новых творческих достижений в его многогранной научно-технической деятельности.