СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 1, 2021

НЕКРОЛОГ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НЕКРОЛОГ

НИКОЛАЙ ХРИСТОВИЧ РОЗОВ
(20.02.1938–02.11.2020)

DOI: 10.31857/S0374064121010015

2 ноября 2020 года на 83-м году жизни скоропостижно скончался член редколлегии журнала "Дифференциальные уравнения" Николай Христович Розов – выдающийся специалист в области дифференциальных уравнений и математического моделирования, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета и декан факультета педагогического образования Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, член-корреспондент Российской академии образования, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации и заслуженный профессор Московского университета.

Более четырёхсот работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах, почти три десятка монографий и учебников, десятки учеников и последователей, а также перевод и редактирование научной литературы – итог активной и плодотворной деятельности Николая Христовича Розова. Интеллигентность, благожелательность, умение понять собеседника, великолепное чувство юмора, эрудиция и неординарность мышления делали общение с ним интересным и незабываемым, а его лекционные курсы по праву считались образцовыми. Ушёл из жизни искренний, добрый и чуткий человек.

Светлая память о Николае Христовиче Розове – прекрасном человеке и замечательном математике – навсегда сохранится в наших сердцах.

Выражаем искренние соболезнования родным и близким Николая Христовича.

И.В. Асташова, Е.А. Барабанов, А.В. Боровских, В.Ф. Бутузов, В.В. Быков, А.Н. Ветохин, С.Д. Глызин, А.Ю. Горицкий, Н.В. Денисова, Н.А. Изобов, А.В. Ильин, Ю.С. Ильяшенко, Т.О. Капустина, И.Т. Кигурадзе, В.В. Козлов, А.Ю. Колесов, А.А. Коньков, И.С. Ломов, Е.И. Моисеев, В.В. Палин, Е.В. Радкевич, В.В. Рогачёв, О.С. Розанова, М.С. Романов, В.А. Садовничий, И.Н. Сергеев, И.В. Филимонова, А.В. Филиновский, В.В. Фомичев, Г.А. Чечкин, В.Н. Чубариков, А.С. Шамаев, Т.А. Шапошникова, А.И. Шафаревич, А.Г. Ягола

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 4–13

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.52

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2021 г. Л. В. Крицков, В. Л. Иоффе

Изучены спектральные свойства задачи Коши для дифференциального оператора с инволюцией вида $-u''(x)+\alpha u''(-x)$ при α, удовлетворяющих неравенствам $0<|\alpha|<1$. На основании анализа спектра и построенной функции Грина показано, что если параметр $\varkappa=\sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$ иррационален, то система корневых функций полна, но не является базисом в L_2. В противном же случае установлено, что корневые функции могут быть выбраны такими, чтобы они образовывали безусловный базис в L_2.

DOI: 10.31857/S0374064121010027

Введение. Работа посвящена изучению спектральной задачи

$$l_\alpha u(x)\equiv -u''(x)+\alpha u''(-x)=\lambda u(x),\quad -1<x<1, \tag{1}$$

$$u(-1)=u'(-1)=0. \tag{2}$$

Дифференциальная операция l_α при $\alpha\neq 0$ содержит в своей главной части простейшую инволюцию – отражение $\varphi(x)=-x$.

Дифференциальные уравнения с инволюцией составляют отдельный класс задач в теории функционально-дифференциальных уравнений. Алгебраические и аналитические аспекты таких задач достаточно хорошо освещены в монографиях [1–4]. Спектральные свойства соответствующих операторов и обратные задачи для них стали привлекать внимание специалистов в последнее время. Операторы первого порядка с инволюцией подробно изучены в [5–9]. Различные спектральные вопросы, относящиеся к операторам второго порядка с инволюцией, рассматривались, например, в [10–14]. Общий операторный подход к анализу дифференциальных операторов с инволюцией общего вида предложен в [15]. Можно также отметить работы, в которых изучаются смешанные задачи для уравнений в частных производных с инволюциями [16–20].

Исследование задач для дифференциальной операции (1) при $\alpha\neq 0$ требуют особого подхода, так как в выражении $l_\alpha u(x)$ слагаемые с инволюцией и без инволюции “конкурируют” между собой и их своеобразный резонанс может привести к появлению у таких задач новых спектральных свойств.

Так, у задачи для уравнения (1) с условиями $u(-1)=0$, $u'(-1)=u'(1)$ обнаружена неустойчивость спектральных свойств по отношению к малым изменениям параметра α на интервале $(-1,1)$ [21, 22]. Появление кратного спектра и бесконечного числа присоединённых функций на всюду плотном в $(-1,1)$ множестве значений параметра α относит эту задачу к классу существенно несамосопряжённых задач (в терминологии В.А. Ильина [23]). Позже было показано, что аналогичные свойства имеют место и для более общих краевых условий $u(-1)=\beta u(1)$, $u'(-1)=u'(1)$ [24, 25].

Задача (1), (2) представляет собой ещё одно семейство существенно несамосопряжённых задач с инволюцией, одно из отличий которой состоит в том, что невозмущённый инволюцией оператор (при $\alpha=0$) не имеет спектра. Хотя спектральные свойства здесь так же, как и в [21], зависят от значения параметра $\varkappa=\sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$, они оказались несколько другими.

Для формулировки основного результата свяжем с рассматриваемой задачей (1), (2) линейный оператор $\mathcal{L}_\alpha$ в пространстве $L_2(-1,1)$, который определяется дифференциальным выражением l_α на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\alpha)=\{u\in W_2^2(-1,1): u(-1)=u'(-1)=0\}$. Очевидно, что при $\alpha\neq\pm 1$ оператор $\mathcal{L}_\alpha$ замкнут в $L_2(-1,1)$.

Исходя из структуры спектра оператора $\mathcal{L}_\alpha$ при α таких, что $0 < |\alpha| < 1$, в данной работе доказан следующий результат.

Основная теорема. *Система корневых функций оператора $\mathcal{L}_\alpha$ полна в $L_2(-1,1)$ при любом α, удовлетворяющим неравенствам $0 < |\alpha| < 1$. Если число $\varkappa$ иррационально, то эта система не образует базис в $L_2(-1,1)$. Если число $\varkappa$ рационально, то либо сами собственные функции оператора $\mathcal{L}_\alpha$ образуют безусловный базис в $L_2(-1,1)$, либо в системе корневых функций присоединённые функции могут быть выбраны такими, чтобы вся система образовывала безусловный базис в $L_2(-1,1)$.*

В дальнейшем изложении основная теорема разбита на четыре утверждения (теоремы 1–4), которые обосновываются последовательно.

1. Спектр оператора. Далее считаем, что α удовлетворяет неравенствам $0 < |\alpha| < 1$ и что $\varkappa = \sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$. Будем в дальнейшем наряду с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ из уравнения (1) использовать спектральный параметр μ, связанный с λ равенством

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}, \quad \arg\mu \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Используя линейно независимые решения $\cos(\mu x)$, $\sin(\varkappa\mu x)$ уравнения (1), нетрудно показать, что собственные значения $\lambda = (1-\alpha)\mu^2$ оператора $\mathcal{L}_\alpha$ определяются через корни уравнения

$$\Delta(\mu) \equiv \varkappa\cos(\varkappa\mu)\cos\mu + \sin(\varkappa\mu)\sin\mu = 0, \tag{3}$$

которое назовём характеристическим*).

Лемма 1. *Корни уравнения (3) при каждом $\varkappa \neq 1$ образуют счётное множество на комплексной плоскости, не имеющее конечных предельных точек и расположенное в некоторой полосе**) $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant C$.*

Доказательство. Запишем характеристическое уравнение (3) в виде

$$\frac{\cos((1-\varkappa)\mu)}{1-\varkappa} = \frac{\cos((1+\varkappa)\mu)}{1+\varkappa}. \tag{4}$$

Так как обе части этого равенства непрерывны как функции μ и принимают бесконечно много раз значения $\pm(1-\varkappa)^{-1}$ в левой и $\pm(1+\varkappa)^{-1}$ в правой части на растущих последовательностях действительных чисел, то множество корней характеристического уравнения не пусто и содержит бесконечно много действительных чисел. Тем самым, множество нулей $\Delta(\mu)$ как целой функции экспоненциального типа образует счётное множество в $\mathbb{C}$ с единственной предельной точкой на бесконечности.

Если предположить, что среди нулей функции $\Delta(\mu)$ содержится последовательность $\{\mu_k\}$, на которой $|\operatorname{Im}\mu_k| \to \infty$, то соответствующая дробь $\cos((1-\varkappa)\mu_k)/\cos((1+\varkappa)\mu_k)$ будет стремиться к нулю. Но это противоречит равенству (4), в котором эта дробь должна быть равна ненулевой константе. Лемма доказана.

Отметим, что в зависимости от значения $\varkappa$ корни характеристического уравнения (3) могут быть как вещественными, так и невещественными.

Например, при $\varkappa = 1/2$ уравнение (3) равносильно уравнению

$$\cos\frac{\mu}{2}\left(2\cos^2\frac{\mu}{2} - 3\right) = 0,$$

у которого есть как вещественные, так и невещественные корни. При $\varkappa = 2/3$ получится уравнение

$$\cos^3\frac{\mu}{3}\left(4\cos^2\frac{\mu}{3} - 5\right) = 0,$$

*) Отметим, что нуль не принадлежит спектру оператора $\mathcal{L}_\alpha$.

**) Здесь и далее через C, C_1, ... обозначены некоторые положительные константы.

для которого наблюдается та же ситуация, только среди вещественных корней есть трёхкратные. Наконец, при $\varkappa = 4$ уравнение (3) равносильно уравнению $\cos^3\mu(6\cos^2\mu - 5) = 0$ – здесь все корни вещественны.

Лемма 2. *Если число* $\varkappa$ *рационально, то корни уравнения (3) образуют периодическое множество на комплексной плоскости, а следовательно, найдётся такое* $\delta > 0$, *что для любых различных корней* μ' *и* μ'' *выполнено неравенство* $|\mu' - \mu''| \geqslant \delta$.

Утверждение леммы 2 тривиально вытекает из периодичности функции $\Delta(\mu)$ при $\varkappa \in \mathbb{Q}$.

Лемма 3. *Оператор* $\mathcal{L}_\alpha$ *имеет кратные корни тогда и только тогда, когда* $\varkappa$ *рационально и представимо в виде* $2m_0/(2n_0 - 1)$, *где* m_0, n_0 *– натуральные числа, причём все кратные собственные значения имеют кратность* 3.

Доказательство. Характеристическое уравнение имеет кратный корень в том и только том случае, когда наряду с (3) выполнено равенство $d\Delta(\mu)/d\mu = 0$, т.е.

$$(1 - \varkappa^2)\sin(\varkappa\mu)\cos\mu = 0.$$

Но тогда из (3) следует, что равенства $\sin(\varkappa\mu) = 0$ и $\cos\mu = 0$ должны выполняться одновременно, а это имеет место лишь тогда, когда $\varkappa = 2m_0/(2n_0 - 1)$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$.

Если $\varkappa$ имеет указанное представление в виде несократимой дроби, то кратные корни образуют последовательность $\mu_k^* = \pi(2n_0 - 1)(2k + 1)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При этих значениях получаем

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\Delta(\mu_k^*) = (1 - \varkappa^2)(\varkappa\cos(\varkappa\mu_k^*)\cos\mu_k^* - \sin(\varkappa\mu_k^*)\sin(\mu_k^*)) = 0$$

и

$$\frac{d^3}{d\mu^3}\Delta(\mu_k^*) = (\varkappa^2 - 1)((\varkappa^2 + 1)\sin(\varkappa\mu_k^*)\cos\mu_k^* + 2\varkappa\cos(\varkappa\mu_k^*)\sin(\mu_k^*)) =$$

$$= 2\varkappa(\varkappa^2 - 1)\cos(\varkappa\mu_k^*)\sin(\mu_k^*) \neq 0.$$

Следовательно, все кратные собственные значения имеют кратность три. Лемма доказана.

Отметим, что среди всех значений параметра $\varkappa$, для которых появляется трёхкратный спектр, выделяется число $\varkappa = 2$ (т.е. $\alpha = -3/5$). Если $\varkappa = 2$, то уравнение (3) равносильно уравнению $\cos^3\mu = 0$ и, значит, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_\alpha$ трёхкратны.

Лемма 4. *Если число* $\varkappa$ *иррационально, то множество корней уравнения (3) не отделимо, т.е. существуют две попарно различные последовательности корней* $\{\mu_k'\}$ *и* $\{\mu_k''\}$, *для которых* $\mu_k' - \mu_k'' \to 0$, *и при этом* $\operatorname{Im}\mu_k', \operatorname{Im}\mu_k'' \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3) с иррациональным параметром $\varkappa$. Используем указанные в лемме 3 значения параметра $\varkappa_* = 2m/(2n - 1)$, при которых характеристическое уравнение имеет трёхкратные корни. В силу теоремы Чебышёва [26, с. 53] неравенство

$$\left|\varkappa - \frac{2m}{2n - 1}\right| < \frac{6}{n^2} \tag{5}$$

имеет бесконечно много решений $m, n \in \mathbb{N}$. Для получающейся таким образом последовательности $\{n\} \subset \mathbb{N}$ рассмотрим первые трёхкратные нули уравнения (3) с соответствующим значением $\varkappa_* = 2m/(2n - 1)$ из (5): $\mu_n^* = \pi(1 + 2n)/2$. Тем самым, если

$$\Delta_*(\mu) = \varkappa_*\cos(\varkappa_*\mu)\cos\mu + \sin(\varkappa_*\mu)\sin\mu,$$

то $\Delta_*(\mu_n^*) = 0$.

Опишем вокруг точек μ_n^* окружности $\Gamma_n = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_n^*| = r_n\}$ с пока произвольными радиусами $r_n \leqslant 1$ и покажем, что r_n можно выбрать так, чтобы при $\mu \in \Gamma_n$ выполнялось неравенство

$$|\Delta(\mu) - \Delta_*(\mu)| < |\Delta_*(\mu)|. \tag{6}$$

Действительно, так как $\cos\mu_n^* = 0$, то при $\mu \in \Gamma_n$ имеем

$$|\Delta(\mu) - \Delta_*(\mu)| \leqslant |\cos\mu - \cos\mu_n^*|(|\varkappa - \varkappa_*||\cos(\varkappa\mu)| + \varkappa_*|\cos(\varkappa_*\mu) - \cos(\varkappa\mu)|) +$$

$$+|\sin\mu||\sin(\varkappa_*\mu)-\sin(\varkappa\mu)|\leqslant e^{\varkappa+2}|\mu-\mu_n^*|\frac{6}{n^2}(1+(\varkappa+1)e|\mu|)+e^{1+\varkappa}\frac{6}{n^2}|\mu|$$

в силу неравенства (5) и того, что $|\mathrm{Im}\,\mu|\leqslant 1$. Следовательно, при $\mu\in\Gamma_n$ справедлива оценка

$$|\Delta(\mu)-\Delta_*(\mu)|\leqslant\frac{C_1}{n}r_n. \tag{7}$$

С другой стороны, так как $\Delta_*(\mu_n^*)=\Delta_*'(\mu_n^*)=\Delta_*''(\mu_n^*)=0$ и $|\Delta_*'''(\mu_n^*)|=2\varkappa|\varkappa^2-1|\neq 0$, то

$$|\Delta_*(\mu)|=|\Delta_*(\mu)-\Delta_*(\mu_n^*)|\geqslant C_2|\mu-\mu_n^*|^3=C_2r_n^3. \tag{8}$$

Осталось только выбрать $r_n\leqslant 1$ таким, чтобы для правых частей оценок (7) и (8) выполнялось неравенство

$$\frac{C_1}{n}r_n<C_2r_n^3,\quad \text{т.е.}\quad r_n>\sqrt{\frac{C_1}{C_2n}}.$$

Если взять, например, $r_n=\min(1,2\sqrt{C_1/(C_2n)})$, то неравенство (6) будет выполняться для $\mu\in\Gamma_n$, начиная с некоторого n, а радиусы r_n будут стремиться к нулю при $n\to\infty$.

В таком случае из теоремы Руше следует, что $\Delta(\mu)$ имеет внутри Γ_n столько же (простых!) нулей, сколько их с учётом кратности имеет $\Delta_*(\mu)$, и при этом μ_n^* – трёхкратный нуль $\Delta_*(\mu)$. Таким образом, внутри Γ_n функция $\Delta(\mu)$ имеет по крайней мере два различных нуля μ_n' и μ_n'', и для них выполнено неравенство $|\mu_n'-\mu_n''|\leqslant 2r_n$. Кроме того, разности $\mu_n'-\mu_n^*$ и $\mu_n''-\mu_n^*$ стремятся к нулю и, значит, $\mathrm{Im}\,\mu_n',\mathrm{Im}\,\mu_n''\to 0$. Лемма доказана.

2. Собственные функции. Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим сопряжённую задачу

$$l_\alpha v(x)=\overline{\lambda}v(x),\quad -1<x<1, \tag{9}$$

$$\alpha v(-1)=v(1),\quad \alpha v'(-1)=-v'(1). \tag{10}$$

Соответствующий ей оператор будем обозначать $\mathcal{L}_\alpha^*$.

Выберем собственные функции задач (1), (2) и (9), (10) следующим образом:

$$u^{(0)}(x,\mu)=\sin(\varkappa\mu x)+\beta(\mu)\cos(\mu x) \tag{11}$$

для оператора $\mathcal{L}_\alpha$,

$$v^{(0)}(x,\overline{\mu})=-\varkappa^2\sin(\varkappa\overline{\mu}x)+\beta(\overline{\mu})\cos(\overline{\mu}x) \tag{12}$$

для оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$. Здесь μ – корни характеристического уравнения (3), а коэффициент $\beta(\mu)$ задаётся соотношением

$$\beta(\mu)=-\varkappa\cos(\varkappa\mu)\sin\mu+\sin(\varkappa\mu)\cos\mu.$$

Лемма 5. *Системы собственных функций (11) и (12) почти нормированы в* $L_2(-1,1)$, *и для них справедливо равенство*

$$(u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu),v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu}))=(1-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa\mu). \tag{13}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление даёт*) равенство

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2^2=\left(\frac{\mathrm{sh}(2\varkappa\,\mathrm{Im}\,\mu)}{2\varkappa\,\mathrm{Im}\,\mu}-\frac{\sin(2\varkappa\,\mathrm{Re}\,\mu)}{2\varkappa\,\mathrm{Re}\,\mu}\right)+|\beta(\mu)|^2\left(\frac{\mathrm{sh}(2\,\mathrm{Im}\,\mu)}{2\,\mathrm{Im}\,\mu}+\frac{\sin(2\,\mathrm{Re}\,\mu)}{2\,\mathrm{Re}\,\mu}\right). \tag{14}$$

Для нормы $\|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2$ справедливо такое же равенство, только перед первой скобкой правой части стоит множитель $\varkappa^2$.

---

*) Символ $\|\cdot\|_2$ означает здесь и далее норму в $L_2(-1,1)$.

Так как корни уравнения (3) расположены в полосе (лемма 1), то равномерно по μ, удовлетворяющим характеристическому уравнению, выполнены оценки

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2 \leqslant C_3, \quad \|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2 \leqslant C_3. \tag{15}$$

Из неравенства $\operatorname{sh} t \geqslant t$ вытекает, что для больших по модулю значений μ, а значит, в силу леммы 1, больших значений $\operatorname{Re}\mu$, выполнены также оценки снизу

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}(1+|\beta(\mu)|^2), \quad \|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}(\varkappa^2+|\beta(\mu)|^2).$$

И так как рассматриваемые квадраты норм – непрерывные относительно μ и положительные величины, то равномерно по всем μ, удовлетворяющим уравнению (3), выполнены равномерные оценки

$$\|u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu)\|_2 \geqslant C_4, \quad \|v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})\|_2 \geqslant C_4. \tag{16}$$

Оценки (15) и (16) доказывают почти нормированность систем собственных функций.

Установим теперь равенство (13). Имеем

$$(u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu), v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})) = -2\varkappa^2\int\limits_0^1 \sin^2(\varkappa\mu x)\,dx + 2\beta^2(\mu)\int\limits_0^1 \cos^2(\mu x)\,dx =$$

$$= -\varkappa^2 + \beta^2(\mu) + \mu^{-1}(\varkappa\sin(\varkappa\mu)\cos(\varkappa\mu) + \beta^2(\mu)\sin\mu\cos\mu). \tag{17}$$

Сначала заметим, что из характеристического уравнения (3) следует равенство

$$\beta^2(\mu) = \varkappa^2\cos^2(\varkappa\mu) + \sin^2(\varkappa\mu).$$

Аналогично для квадрата выражения, стоящего в круглых скобках правой части равенства (17), получаем

$$(\varkappa^2\cos^2(\varkappa\mu) - \beta^2(\mu)\sin^2\mu)(\sin^2(\varkappa\mu) - \beta^2(\mu)\cos^2\mu) = -(\varkappa^2\cos^2(\varkappa\mu)\cos^2\mu - \sin^2(\varkappa\mu)\sin^2\mu)^2,$$

т.е. это выражение равно нулю в силу (3).

Итак, окончательно

$$(u^{(0)}(\,\cdot\,,\mu), v^{(0)}(\,\cdot\,,\overline{\mu})) = -\varkappa^2 + \beta^2(\mu) = (1-\varkappa^2)\sin^2(\varkappa\mu).$$

Лемма доказана.

Отметим, что равенство леммы 5 соответствует тому факту, что если μ – кратный корень, то скалярное произведение (13) равно нулю, а если μ – простой корень, то оно отлично от нуля.

Лемма 6. *Если число $\varkappa$ иррационально, то можно выбрать последовательности $\{\lambda_k'\}$ и $\{\lambda_k''\}$ попарно различных собственных значений оператора $\mathcal{L}_\alpha$ так, чтобы соответствующие им собственные функции $\widetilde{u}_k^{(0)}(x)$ и $\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}(x)$ удовлетворяли соотношению*

$$\left\|\frac{\widetilde{u}_k^{(0)}(x)}{\|\widetilde{u}_k^{(0)}\|_2} - \frac{\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}(x)}{\|\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}\|_2}\right\|_2 \to 0 \tag{18}$$

при $k\to\infty$. Такое же свойство имеет место и для собственных функций сопряжённого оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$.

Доказательство. Рассмотрим построенные в лемме 4 последовательности $\{\mu_k'\}$ и $\{\mu_k''\}$ корней характеристического уравнения и соответствующие им собственные функции $\widetilde{u}_k^{(0)}(x)$ и $\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}(x)$, задаваемые равенством (11) при $\mu=\mu_k'$ и $\mu=\mu_k''$ соответственно. Тогда

$$(\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}) = (1+\beta(\mu_k')\beta(\overline{\mu}_k''))\frac{\sin(\varkappa(\mu_k'-\overline{\mu}_k''))}{\varkappa(\mu_k'-\overline{\mu}_k'')} - (1-\beta(\mu_k')\beta(\overline{\mu}_k''))\frac{\sin(\mu_k'+\overline{\mu}_k'')}{\mu_k'+\overline{\mu}_k''} =$$

$$= 1+\beta^2(\mu_k^*) + o(1) = 1+\varkappa^2+o(1)$$

при $k\to\infty$ в силу свойств выбранных последовательностей.

Из равенства (14) следует, что для квадратов норм $\|\widetilde{u}_k^{(0)}\|_2^2$ и $\|\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}\|_2^2$ справедливы соотношения $1+\beta^2(\mu_k^*)+o(1)=1+\varkappa^2+o(1)$. Таким образом, величина $\|\widetilde{u}_k^{(0)}\|_2^{-1}\|\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)}\|_2^{-1}(\widetilde{u}_k^{(0)},\widetilde{\widetilde{u}}_k^{(0)})$ стремится к единице, что и доказывает сходимость (18). Лемма доказана.

Утверждение леммы 6, по своей сути, означает следующее: *если число $\varkappa$ иррационально, то системы собственных функций операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$ не являются равномерно минимальными в пространстве $L_2(-1,1)$.*

3. Функция Грина задачи (1), (2). Решение уравнения $l_\alpha u(x)=\lambda u(x)+f(x)$, удовлетворяющее условиям (2) при значениях λ, лежащих вне спектра оператора $\mathcal{L}_\alpha$, имеет вид

$$u(x)=\int\limits_{-1}^{1}G(x,t;\lambda)f(t)\,dt, \tag{19}$$

где $G(x,t;\lambda)=g_0(x,t;\lambda)+g_1(x,t;\lambda)$,

$$g_0(x,t;\lambda)=\frac{1}{2(1-\alpha)\mu\Delta(\mu)}[(\varkappa\cos(\varkappa\mu)\cos(\mu x)-\sin\mu\sin(\varkappa\mu x))(\varkappa\cos(\varkappa\mu)\sin(\varkappa\mu t)+$$

$$+\sin\mu\cos(\mu t))-(\sin(\varkappa\mu)\cos(\mu x)+\cos\mu\sin(\varkappa\mu x))(\cos\mu\cos(\mu t)-\varkappa^2\sin(\varkappa\mu)\sin(\varkappa\mu t))],$$

$$g_1(x,t;\lambda)=\frac{1}{2(1-\alpha)\mu}\begin{cases}\operatorname{sgn}t(-\cos(\mu x)\sin(\mu t)+\varkappa\sin(\varkappa\mu x)\cos(\varkappa\mu t)), & \text{если } |x|\leqslant|t|\leqslant1,\\ \operatorname{sgn}x(-\sin\mu x\cos(\mu t)+\varkappa\cos(\varkappa\mu x)\sin(\varkappa\mu t)), & \text{если } |t|\leqslant|x|\leqslant1.\end{cases}$$

Представление (19) для решения проверяется непосредственно*).

Оценим функцию Грина оператора $\mathcal{L}_\alpha$ вне точек его спектра.

Лемма 7. *Пусть $\{\mu_n\}$ – корни уравнения (3). Для любого $\delta>0$ найдётся константа $C=C(\delta)>0$, при которой равномерно по $\mu\in\mathbb{C}$ таким, что $|\mu-\mu_n|\geqslant\delta$, и $-1\leqslant x,\ t\leqslant1$, выполнена оценка*

$$|G(x,t;\lambda)|\leqslant\frac{C}{|\mu|}r(x,t,\mu), \tag{20}$$

где

$$r(x,t,\mu)=\exp(-\min(1,\varkappa)|\operatorname{Im}\mu|||x|-|t||)+\exp(-\min(1,\varkappa)|\operatorname{Im}\mu|(2-|x|-|t|)).$$

Доказательство. Рассмотрим значения μ, для которых $\nu\equiv\operatorname{Im}\mu>0$, и покажем, как проводится оценка функции Грина, например, в случаях $0\leqslant x\leqslant t\leqslant1$ и $0\leqslant t\leqslant x\leqslant1$.

Воспользуемся уравнением (3) и запишем функцию $G(x,t;\lambda)$ при $0\leqslant x\leqslant t\leqslant1$ в виде

$$G(x,t;\lambda)=\frac{1}{2(1-\alpha)\mu\Delta(\mu)}[\varkappa(\sin\mu\sin(\varkappa\mu x)\sin(\varkappa\mu(1-t))+\cos(\varkappa\mu)\cos(\mu x)\sin\mu(1-t))+$$

$$+\varkappa^2(\cos\mu\sin(\varkappa\mu x)\cos(\varkappa\mu(1-t))-\sin(\varkappa\mu)\cos(\mu x)\cos\mu(1-t))+$$

$$+\varkappa^2\cos(\mu x)\sin(\varkappa\mu t)-\sin(\varkappa\mu x)\cos(\mu t)].$$

Тогда

$$|G(x,t;\lambda)|=O(1/|\mu\Delta(\mu)|)(e^{(1+\varkappa)\nu+\varkappa\nu(x-t)}+e^{(1+\varkappa)\nu+\nu(x-t)}+e^{\nu(x+\varkappa t)}+e^{\nu(\varkappa x+t)}).$$

Отсюда, так как для рассматриваемых значений μ выполнено неравенство $|\Delta(\mu)|\geqslant Ce^{(1+\varkappa)\nu}$, получаем оценку (20).

*) Функция Грина $G(x,t;\lambda)$ строится так же, как в [14]. Конкретный вид функции Грина в (19) предоставлен авторам А. М. Сарсенби.

При $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ функция $G(x,t;\lambda)$ записывается по-другому:

$$G(x,t;\lambda) = \frac{1}{2(1-\alpha)\mu\Delta(\mu)}[\varkappa(\cos(\varkappa\mu)\cos(\mu t)\sin\mu(1-x) + \sin\mu\sin(\varkappa\mu t)\sin(\varkappa\mu(1-x))) +$$

$$+ \varkappa^2(\cos(\mu x)\sin(\varkappa\mu t) + \cos\mu\sin(\varkappa\mu t)\cos(\varkappa\mu(1-x))) -$$

$$- \sin(\varkappa\mu x)\cos(\mu t) - \sin(\varkappa\mu)\cos(\mu t)\cos(\mu(1-x))].$$

Следовательно,

$$|G(x,t;\lambda)| = O(1/|\mu\Delta(\mu)|)(e^{(1+\varkappa)\nu+\nu(t-x)} + e^{(1+\varkappa)\nu+\varkappa\nu(t-x)} + e^{\nu(x+\varkappa t)} + e^{\nu(\varkappa x+t)}),$$

откуда также следует оценка (20). Лемма доказана.

Из полученной оценки функции Грина и утверждения леммы 1 о расположении спектра следует, что применима теорема о полноте [27] и справедлива следующая

Теорема 1. *При всех* α, *удовлетворяющих неравенствам* $0 < |\alpha| < 1$, *системы корневых функций операторов* $\mathcal{L}_\alpha$ *и* $\mathcal{L}_\alpha^*$ *полны в* $L_2(-1,1)$.

Отметим, что утверждение теоремы 1 для сопряжённого оператора следует из того, что его функция Грина $G^*(x,t;\lambda)$ совпадает с функцией $\overline{G(t,x;\overline{\lambda})}$.

Прямым следствием леммы 6 и теоремы 1 является

Теорема 2. *Если* α, *удовлетворяющее неравенствам* $0 < |\alpha| < 1$, *таково, что число* $\varkappa$ *иррационально, то системы корневых функций операторов* $\mathcal{L}_\alpha$ *и* $\mathcal{L}_\alpha^*$ *полны в* $L_2(-1,1)$, *но не образуют базисов.*

4. Базисность корневых функций. Рассмотрим сначала случай, когда $\varkappa$ рационально и спектр простой.

Теорема 3. *Пусть число* $\varkappa$ *рационально и не представимо в виде* $2m_0/(2n_0-1)$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. *Тогда система собственных функций оператора* $\mathcal{L}_\alpha$ *(оператора* $\mathcal{L}_\alpha^*$*) образует базис Рисса в* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Вследствие теоремы 1 система U собственных функций (11) полна в $L_2(-1,1)$, а так как $\sin(\varkappa\mu) \neq 0$ при рассматриваемых $\varkappa$, то из равенства (13) следует, что система $V = \{(1-\varkappa^2)^{-1}\sin^{-2}(\varkappa\mu)v^{(0)}(x,\overline{\mu})\}$ является полной биортогонально сопряжённой системой собственных функций оператора $\mathcal{L}_\alpha^*$. Поэтому система U минимальна в $L_2(-1,1)$.

Из лемм 1, 2 и 5 вытекает, что выполнены все условия теоремы о безусловной базисности [13] и система U (а следовательно, и система V) образует базис Рисса пространства $L_2(-1,1)$. Теорема доказана.

Перейдём к описанному в лемме 3 случаю кратного спектра оператора $\mathcal{L}_\alpha$.

Теорема 4. *Пусть число* $\varkappa$ *представимо в виде несократимой дроби* $2m_0/(2n_0-1)$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. *Тогда в системе корневых функций оператора* $\mathcal{L}_\alpha$ *(оператора* $\mathcal{L}_\alpha^*$*) можно выбрать присоединённые функции так, чтобы эта система образовывала базис Рисса в* $L_2(-1,1)$.

Доказательство. Выделим в множестве корней уравнения (3) кратные корни $\mu_k^* = \pi \times (2n_0-1)(2k+1)/2$, остальные обозначим μ_k^{**} (как известно, для безусловной базисности упорядочение собственных значений не играет роли).

Для простых корней μ_k^{**} возьмём собственные функции операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$ в виде (11) и (12). В силу равенства (13) и соотношения $\sin(\varkappa\mu_k^{**}) \neq 0$ получаем, что системы функций

$$U^{**} = \{u^{(0)}(x,\mu_k^{**})\}, \quad V^{**} = \{(1-\varkappa^2)^{-1}\sin^{-2}(\varkappa\mu_k^{**})v^{(0)}(x,\overline{\mu_k^{**}})\} \tag{21}$$

образуют почти нормированную биортогональную пару в $L_2(-1,1)$.

Для кратных корней μ_k^* воспользуемся тем, что корневые подпространства $K(\mu_k^*)$ и $K^*(\mu_l^*)$ операторов $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_\alpha^*$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Поэтому построение систем корневых функций проведём только в паре соответствующих пространств $K(\mu_k^*)$ и $K^*(\mu_k^*)$.

Так как $\beta(\mu_k^*) = -\varkappa\cos(\varkappa\mu_k^*)\sin\mu_k^* = \varkappa(-1)^{m_0+n_0+k} \equiv \varkappa\beta_k,$ то собственные функции (11) и (12) примут вид

$$\widetilde{u}_k^{(0)}(x) = \sin(\varkappa\mu_k^*x) + \varkappa\beta_k\cos(\mu_k^*x),$$
$$\widetilde{v}_k^{(0)}(x) = -\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \beta_k\cos(\mu_k^*x).$$

Решая уравнения

$$\mathcal{L}_\alpha\widetilde{u}_k^{(1)}(x) = \lambda\widetilde{u}_k^{(1)}(x) + \widetilde{u}_k^{(0)}(x), \quad \mathcal{L}_\alpha^*\widetilde{v}_k^{(1)}(x) = \lambda\widetilde{v}_k^{(1)}(x) + \widetilde{v}_k^{(0)}(x),$$
$$\mathcal{L}_\alpha\widetilde{u}_k^{(2)}(x) = \lambda\widetilde{u}_k^{(2)}(x) + \widetilde{u}_k^{(1)}(x), \quad \mathcal{L}_\alpha^*\widetilde{v}_k^{(2)}(x) = \lambda\widetilde{v}_k^{(2)}(x) + \widetilde{v}_k^{(1)}(x),$$

найдём присоединённые функции первого и второго порядков.

Тогда соотношения

$$(\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{v}_k^{(0)}) = (\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{v}_k^{(1)}) = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(0)}) = 0,$$
$$(\widetilde{u}_k^{(0)}, \widetilde{v}_k^{(2)}) = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(1)}) = (\widetilde{u}_k^{(2)}, \widetilde{v}_k^{(0)}), \quad (\widetilde{u}_k^{(2)}, \widetilde{v}_k^{(1)}) = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(2)})$$

выполняются автоматически, и для соблюдения условий биортогональности

$$(u_k^{(1)}, v_k^{(2)}) = (u_k^{(2)}, v_k^{(2)}) = 0$$

присоединённые функции, при необходимости, модифицируются выбором подходящих констант в соотношениях

$$u_k^{(1)}(x) = \widetilde{u}_k^{(1)}(x) + A_k\widetilde{u}_k^{(0)}(x), \quad u_k^{(2)}(x) = \widetilde{u}_k^{(2)}(x) + A_k\widetilde{u}_k^{(1)}(x) + B_k\widetilde{u}_k^{(0)}(x),$$
$$v_k^{(1)}(x) = \widetilde{v}_k^{(1)}(x) + A_k^*\widetilde{v}_k^{(0)}(x), \quad v_k^{(2)}(x) = \widetilde{v}_k^{(2)}(x) + A_k^*\widetilde{v}_k^{(1)}(x) + B_k^*\widetilde{v}_k^{(0)}(x).$$

После нормировки корневых функций

$$(u_k^{(0)}, v_k^{(2)}) = (u_k^{(1)}, v_k^{(1)}) = (u_k^{(2)}, v_k^{(0)}) = 1$$

получится требуемая биортогональная пара систем в корневых подпространствах $K(\mu_k^*)$ и $K^*(\mu_k^*)$.

Эти корневые функции имеют следующий вид:

$$u_k^{(0)}(x) = \frac{2(1-\alpha)\mu_k^*}{\varkappa}(\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \varkappa\beta_k\cos(\mu_k^*x)),$$

$$u_k^{(1)}(x) = x(-\beta_k\sin(\mu_k^*x) + \cos(\varkappa\mu_k^*x)) + \frac{1}{4\varkappa\mu_k^*}(\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \varkappa\beta_k\cos(\mu_k^*x)),$$

$$u_k^{(2)}(x) = \frac{1}{4(1-\alpha)\mu_k^*}\bigg[\bigg(\frac{3}{5} - x^2\bigg)(\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \beta_k\cos(\mu_k^*x)) -$$
$$- \frac{x}{2\mu_k^*}(\cos(\varkappa\mu_k^*x) - \beta_k\sin(\mu_k^*x)) - \frac{32\varkappa^2(\mu_k^*)^2 + 5}{80(\mu_k^*)^2}\beta_k\cos(\mu_k^*x) - \frac{32(\mu_k^*)^2 + 5}{80\varkappa(\mu_k^*)^2}\sin(\varkappa\mu_k^*x)\bigg],$$

$$v_k^{(0)}(x) = \frac{6(1-\alpha)\mu_k^*}{1-\varkappa^2}(-\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \beta_k\cos(\mu_k^*x)),$$

$$v_k^{(1)}(x) = \frac{3}{2(1-\varkappa^2)}\bigg[-x(\beta_k\sin(\mu_k^*x) + \varkappa^2\cos(\varkappa\mu_k^*x)) - \frac{1}{2\mu_k^*}(-\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \beta_k\cos(\mu_k^*x))\bigg],$$

$$v_k^{(2)}(x) = \frac{3}{4(1-\varkappa^2)(1-\alpha)\mu_k^*}\bigg[\bigg(\frac{3}{5} - x^2\bigg)(-\varkappa^3\sin(\varkappa\mu_k^*x) + \beta_k\cos(\mu_k^*x)) +$$
$$+ \frac{x}{2\mu_k^*}(\varkappa^2\cos(\varkappa\mu_k^*x) + \beta_k\sin(\mu_k^*x)) - \frac{32\varkappa^2(\mu_k^*)^2 + 5}{80(\mu_k^*)^2}\beta_k\cos(\mu_k^*x) + \frac{32(\mu_k^*)^2 + 5}{80\varkappa(\mu_k^*)^2}\varkappa\sin(\varkappa\mu_k^*x)\bigg].$$

Отметим, что для этих функций выполнены равномерные по k оценки

$$\|u_k^{(0)}\|_2\|v_k^{(2)}\|_2 \leqslant C, \quad \|u_k^{(1)}\|_2\|v_k^{(1)}\|_2 \leqslant C, \quad \|u_k^{(2)}\|_2\|v_k^{(0)}\|_2 \leqslant C. \tag{22}$$

Установленные в леммах 1, 2 и 5 свойства, почти нормированность собственных функций (21) и оценки (22) показывают, что для построенной системы корневых функций выполнены все условия теоремы о базисности Рисса в $L_2(-1,1)$ [13]. Теорема доказана.

Работа Крицкова Л.В. выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP 08855792).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with Transformed Argument. Algebraic Approach. Amsterdam; Warsiawa, 1973.
2. *Wiener J.* Generalized Solutions of Functional Differential Equations. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 1993.
3. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York, 1996.
4. *Cabada A., Tojo F.A.F.* Differential Equations with Involutions. Amsterdam; Paris; Beijing, 2015.
5. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 196–204.
6. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. № 4 (1). С. 3–10.
7. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2233–2246.
8. *Бурлуцкая М.Ш.* Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика и Математика. 2011. № 2. С. 64–72.
9. *Бурлуцкая М.Ш.* О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 3–12.
10. *Курдюмов В.П.* О базисах Рисса из собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и интегральными краевыми условиями // Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 4. С. 392–405.
11. *Садыбеков М.А., Сарсенби А.М.* Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1126–1132.
12. *Kopzhassarova A.A., Sarsenbi A.M.* Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution // Abstr. Appl. Anal. 2012. Art. ID 576843.
13. *Крицков Л.В., Сарсенби А.М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 35–48.
14. *Kritskov L.V., Sarsenbi A.M.* Equiconvergence property for spectral expansions related to perturbations of the operator $-u''(-x)$ with initial data // Filomat. 2018. V. 32. № 3. P. 1069–1078.
15. *Шкаликов А.А., Владыкина В.Е.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 12–17.
16. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 2. С. 168–171.
17. *Figueroa R., Pouso R.L.* Minimal and maximal solutions to second-order boundary value problems with state-dependent deviating arguments // Bull. London Math. Soc. 2011. V. 43. P. 164–174.
18. *Kirane M., Nasser A.-S.* Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlin. Sci. Appl. 2016. V. 9. P. 1243–1251.
19. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.M.* Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Func. Anal. Opt. 2017. V. 38. № 10. P. 1295–1304.
20. *Сарсенби А.А.* Некорректная задача для уравнения теплопроводности с инволюцией // Журн. Средневолжского мат. о-ва. 2019. Т. 21. № 1. С. 48–59.

21. *Крицков Л.В., Сарсенби А.М.* Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 990–996.
22. *Kritskov L.V., Sarsenbi A.M.* Basicity in L_p of root functions for differential equations with involution // Electr. J. Differ. Equat. 2015. V. 2015. № 278. P. 1–9.
23. *Ильин В.А.* О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряжённого дифференциального оператора // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 9. С. 1516–1529.
24. *Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M.* Nonlocal spectral problem for a second-order differential operator with an involution // Bull. of the Karaganda Univ. Math. 2018. V. 91. № 3. P. 53–60.
25. *Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M.* Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish J. Math. 2019. V. 43. P. 393–401.
26. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М., 1978.
27. *Наймарк М.А.* О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединённых векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. № 5. С. 727–730.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.
После доработки 17.09.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 14–21

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.55

О НЕЛОКАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. Д. М. Поляков

Рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора второго порядка с периодическими краевыми условиями и интегральным возмущением. Для указанного оператора получена асимптотика собственных значений, а также оценки отклонений спектральных проекторов.

DOI: 10.31857/S0374064121010039

Введение. В настоящей работе изучается дифференциальный оператор $L : D(L) \subset \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ вида

$$(Lu)(x) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \quad x \in (0,1).$$

Область определения $D(L)$ этого оператора содержится в $W_2^2(0,1)$ и задаётся следующими нелокальными краевыми условиями:

$$u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) + \int\limits_0^1 \overline{p(x)}u(x)\,dx.$$

Будем предполагать, что функция p и потенциал q являются комплекснозначными функциями из класса $L_2(0,1)$.

Изучение спектральных свойств оператора L представляет интерес, в частности, для некоторых задач механики, а также в теории диффузионных процессов. Конкретные примеры физических задач, которые приводят к моделям такого вида, можно найти в статьях [1] и [2].

Дифференциальный оператор произвольного порядка с интегральными краевыми условиями рассматривался в работе [3]. В этой работе было замечено, что если краевые условия являются усиленно регулярными, то система собственных и присоединённых (корневых) функций образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Позже в [4] для усиленно регулярного оператора произвольного порядка была изучена асимптотика собственных значений и получены оценки равносходимости спектральных разложений. Однако наиболее интересная ситуация возникает в том случае, когда краевые условия являются регулярными. В уже упомянутой работе [3] доказано, что корневые функции образуют базис Рисса со скобками в $L_2(0,1)$. Таким образом, вопрос о базисности Рисса остался открытым.

Этот вопрос для оператора L в случае $q = 0$ рассматривался в [5]. В этой работе установлено, что свойство базисности корневых функций может меняться при сколь угодно малом изменении ядра интегрального возмущения, а также записана асимптотика собственных значений. Развитие данной тематики продолжилось в серии работ [6–8], в которых авторы получили близкие по духу результаты, но уже в случае ненулевого потенциала q. Отметим также работу [9], в которой найдены условия, обеспечивающие дискретность спектра дифференциального оператора второго порядка с нелокальными условиями, не содержащими атомарную меру концов интервала.

В настоящей работе мы ставим целью уточнить известные к настоящему времени результаты, которые относятся к асимптотике спектра оператора L, а также установить ряд утверждений об оценках отклонений спектральных проекторов. Эти оценки позволят получить новый результат о базисности Бари из подпространств пространства $L_2(0,1)$. Напомним, что базисы, которые порождаются системами проекторов, квадратично близкими к полным и минимальным системам ортогональных проекторов, называются *базисами Бари*. Отметим, что базисы Бари обычно выделяются в особый класс и их изучение представляет собой отдельный интерес. По теореме Бари–Маркуса (см. [10, гл. VI, теорема 5.2]) всякий базис из подпространств, квадратично близкий к ортогональному базису из подпространств, является базисом Рисса из подпространств (базисом Рисса со скобками). Таким образом, полученный результат о базисности Бари из подпространств является более сильным утверждением, чем базисность Рисса из подпространств.

1. Преобразование оператора и вспомогательные результаты. Если $q=0$, то такой оператор L обычно считается невозмущённым оператором. Прямому применению методов теории возмущений мешает тот факт, что невозмущённый оператор не является оператором с хорошо изученными спектральными свойствами. В связи с этим появляется необходимость преобразования оператора L. Один из подходов состоит в переходе к сопряжённому оператору (см. [11]). Непосредственный подсчёт показывает, что сопряжённая краевая задача имеет вид

$$(L^*v)(x) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) + p(x)v(0) = \overline{\lambda}v(x), \quad v(0)=v(1), \quad v'(0)=v'(1),$$

где $D(L^*) = \{v \in W_2^2(0,1)\}$. Причина перехода к сопряжённой задаче заключается в том, что в этом случае невозмущённый оператор (при $p=q=0$) является самосопряжённым оператором с известными спектральными свойствами. Наша ближайшая цель – изучить свойства оператора L^*. При этом обратный переход позволит описать свойства исходного оператора L.

Для исследования оператора L^* мы будем активно использовать технику из статьи [12], в которой изучен оператор L с $p=0$. Она основана на сведéнии с помощью подобия изучения оператора L^* к изучению некоторого оператора блочно-диагональной структуры, спектральные свойства которого легко описываются.

Представим оператор L^* в виде $L^* = L_0 - B$, где оператор L_0 задан дифференциальным выражением $L_0 v = -v''$ на области определения $D(L_0) = D(L^*)$, а действие оператора B задаётся правилом $Bv = -\overline{q(x)}v(x) - p(x)v(0)$. В этом случае невозмущённый оператор L_0 является самосопряжённым оператором с дискретным спектром. Его собственные значения имеют вид $\lambda_n = 4\pi^2 n^2$, а соответствующие им собственные функции $e_n(x) = e^{i2\pi nx}$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(0,1)$.

Пусть P_n, $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, – ортогональный проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda_n\}$. Для любого $x \in L_2(0,1)$ он имеет вид

$$P_n x = (x, e_{-n})e_{-n} + (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad P_0 x = (x, e_0)e_0.$$

Поскольку подобие операторов связано с построением оператора преобразования, то далее мы введём операторы, с помощью которых будет осуществляться указанное построение. Обозначим через $\mathfrak{S}_2$ идеал операторов Гильберта–Шмидта с нормой $\|\cdot\|_2$ (см. подробнее [10, гл. 3, § 9]). Рассмотрим операторы $J : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{S}_2$ и $\Gamma : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{S}_2$, заданные равенствами

$$JX = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n X P_n, \quad \Gamma X = \sum_{\substack{k,j\in\mathbb{Z}_+\\ k\neq j}} \frac{P_k X P_j}{\lambda_k - \lambda_j} \tag{1}$$

для любого $X \in \mathfrak{S}_2$. В нашем исследовании эти операторы будут играть вспомогательную роль.

Наряду с введёнными операторами будем рассматривать последовательности операторов J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, следующего вида:

$$J_m X = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad \Gamma_m X = \Gamma X - P_{(m)}(\Gamma X)P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{S}_2,$$

где $P_{(m)} = \sum_{j\leqslant m} P_j$. Корректность и ограниченность указанных операторов установлена в [12, лемма 2]. Отметим, что каждый оператор J_m является ортогональным проектором. По существу, операторы J_m и Γ_m отличаются от соответствующих операторов J и Γ на оператор конечного ранга, т.е., другими словами, из операторов J_m и Γ_m “вырезается” конечномерный блок размера $m \times m$. Следовательно, выбирая подходящим образом число m, можно управлять размером блока и величиной $\|\Gamma_m X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2$. Последний факт будет играть существенную роль при построении оператора преобразования.

Сформулируем необходимую для дальнейшего анализа теорему о подобии исходного оператора и оператора, имеющего блочно-диагональную структуру. Для этого введём в рассмотрение оператор $\widetilde{B}$ следующего вида:

$$\widetilde{B} = J_m B + B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B - (\Gamma_m B)(I + \Gamma_m B)^{-1}(B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)J_m B). \tag{2}$$

При этом заметим, что $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2$ (см. [12, теорема 17]).

Теорема 1. *Существует такое достаточно большое число* m, *что выполнены условия*

$$\|\Gamma_m B\|_2 \leqslant 1/2, \quad \|\widetilde{B}\|_2 < \pi^2(2m+1). \tag{3}$$

Тогда оператор L^* *подобен оператору* $L_0 - J_m\widetilde{X}$, *где* $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_2$ – *решение нелинейного уравнения*

$$X = \widetilde{B} + \widetilde{B}\Gamma_m X - (\Gamma_m X)J_m\widetilde{B} - (\Gamma_m X)J_m(\widetilde{B}\Gamma_m X). \tag{4}$$

Для доказательства приведённой теоремы достаточно полностью повторить рассуждения из работы [12, теорема 18], в которой эта теорема установлена для случая $p = 0$. Поскольку $p \in L_2(0,1)$, то основные отличия в доказательствах этих теорем носят исключительно технический характер.

Прокомментируем содержание теоремы. Первое условие из (3) обеспечивает обратимость оператора $I + \Gamma_m B$. Этот оператор будет служить оператором преобразования подобия. Второе условие из (3) отвечает за разрешимость уравнения (4). Оба условия выполняются при подходящем выборе числа m. Так как J_m является проектором, то теорема 1 является теоремой о подобии исходного оператора L^* оператору блочно-диагонального вида $L_0 - J_m\widetilde{X}$. Поскольку спектры у подобных операторов совпадают, то дальнейший анализ мы будем проводить уже с оператором $L_0 - J_m\widetilde{X}$. Следующий результат посвящён вычислению собственных значений этого оператора. Всюду ниже общим символом $M > 0$ обозначаются различные положительные постоянные.

Теорема 2. *Пусть число* m *выбрано достаточно большим. Тогда оператор* $L_0 - J_m\widetilde{X}$ *является оператором с дискретным спектром, который совпадает со спектром оператора*

$$L_0 - J_m\widetilde{X} = L_0 - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{j \geqslant m+1} P_j\widetilde{X}P_j.$$

При этом

$$\sigma(L_0 - J_m\widetilde{X}) = \sigma_{(m)} \bigcup \Big(\bigcup_{j \geqslant m+1} \sigma_j \Big), \tag{5}$$

где $\sigma_{(m)}$ *и* σ_j – *спектры сужений оператора* $L_0 - J_m\widetilde{X}$ *на инвариантные подпространства* $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$ *и* $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$ *соответственно. Каждое из множеств* σ_n *не более чем двухточечно и совпадает со спектром* $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}$ *матрицы* $\mathcal{A}_n$ *вида*

$$\mathcal{A}_n = 4\pi^2 n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathcal{B}_n + \mathcal{C}_n, \quad \text{где} \quad \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} (\widetilde{B}e_{-n}, e_{-n}) & (\widetilde{B}e_n, e_{-n}) \\ (\widetilde{B}e_{-n}, e_n) & (\widetilde{B}e_n, e_n) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

и при $n \geqslant m+1$ *величина* $\|\mathcal{C}_n\|_2$ *удовлетворяет оценкам*

$$\|\mathcal{C}_n\|_2 = \|J_m(\widetilde{X} - \widetilde{B})\|_2 \leqslant \frac{M}{n}\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2. \tag{7}$$

Сформулированная теорема доказана в работе [12, теорема 12] для произвольного блочно-диагонального возмущения из класса $\mathfrak{S}_2$. По теореме 1 оператор $J_m\widetilde{X}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$. Следовательно, теорема 2 имеет место и в рассматриваемой ситуации. Она будет основой для доказательства результатов данной работы, которые мы проведём в следующем пункте.

2. Основные результаты. Перейдём к анализу спектральных свойств оператора $L_0-J_m\widetilde{X}$ (следовательно, и оператора L^*), а также получим теоремы об асимптотике собственных значений и об оценках отклонений спектральных проекторов.

По теореме 2 для вычисления асимптотики собственных значений оператора $L_0 - J_m\widetilde{X}$ достаточно вычислить величины, которые входят в матрицы $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C}_n$, а также собственные значения матрицы $\mathcal{A}_n$. Соответственно для получения асимптотики собственных значений исходного оператора L достаточно применить операцию комплексного сопряжения. Что касается оценок отклонений спектральных проекторов, то здесь мы снова будем опираться на известную ранее технику.

Итак, перейдём к формулировке и доказательству основных результатов работы. Стандартным образом через p_n и q_n обозначим коэффициенты Фурье функций p и q соответственно:

$$p_n = \int\limits_0^1 p(x)e^{-i2\pi nx}\,dx, \quad q_n = \int\limits_0^1 q(x)e^{-i2\pi nx}\,dx, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений оператора L.

Теорема 3. *При достаточно большом числе n для собственных значений $\widetilde{\lambda}_n^{\pm}$ оператора L имеет место следующая асимптотическая оценка:*

$$\left|\widetilde{\lambda}_n^{\pm} - 4\pi^2n^2 - q_0 - \frac{\overline{p}_n+\overline{p}_{-n}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(q_{2n}+\overline{p}_{-n})(q_{-2n}+\overline{p}_n)+(\overline{p}_{-n}-\overline{p}_n)^2}\right| \leqslant M\gamma_n n^{-1}, \qquad (8)$$

где $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – некоторая суммируемая с квадратом последовательность.

Доказательство. По теореме 2 оператор $L_0 - J_m\widetilde{X}$ является оператором с дискретным спектром и имеет место представление (5). Следовательно, по теореме 1 точно такими же свойствами обладает и оператор L^*.

Опишем множества, которые входят в формулу (5). Используя представление (2), запишем оператор $L_0 - J_m\widetilde{X}$ в следующем виде:

$$L_0 - J_m\widetilde{X} = L_0 - J_m(\widetilde{X}-\widetilde{B}+\widetilde{B}) =$$
$$= L_0 - J_m\widetilde{B} - J_m(\widetilde{X}-\widetilde{B}) = L_0 - JB - J(B\Gamma B) - J(\widetilde{X}-\widetilde{B}) + T + C. \qquad (9)$$

Оператор

$$T \equiv JB - J_mB + J(B\Gamma B) - J_m(B\Gamma_m B) + J(X_* - \widetilde{B}) - J_m(X_* - \widetilde{B})$$

имеет конечный ранг, а оператор C содержит в себе все оставшиеся члены из представления (2). Конкретный их вид несущественен, поскольку в асимптотике собственных значений члены, которые отвечают операторам T и C, попадут в остаток. Заметим, что слагаемые, входящие в формулу (9), уже зависят от известного оператора B.

Проведём анализ спектральных асимптотик матрицы $\mathcal{A}_n$ вида (6). Вычислим величины, входящие в указанную формулу. Согласно неравенству (7) для анализа матрицы $\mathcal{C}_n$ необходимо оценить величину $\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2$. Применим проектор P_n сначала справа, а затем справа и слева к равенству (2) и вычтем полученные равенства. Тогда получим

$$\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n = (B\Gamma_mB)P_n - (\Gamma_mB)P_nBP_n - P_n(B\Gamma_mB)P_n +$$

$$+ (P_n(\Gamma_m B) - \Gamma_m B)(I + \Gamma_m B)^{-1}((B\Gamma_m B)P_n - (\Gamma_m B)P_n B P_n).$$

Оценим обе части последнего равенства по норме идеала операторов Гильберта–Шмидта. Используя первое условие из (3), приходим к следующим соотношениям:

$$\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \leqslant \|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2 + \|P_n(B\Gamma_m B)P_n\|_2 +$$
$$+ \frac{\|P_n(\Gamma_m B)\|_2 + \|\Gamma_m B\|_2}{1 - \|\Gamma_m B\|_2}(\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2) \leqslant$$
$$\leqslant 2\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2 +$$
$$+ (2\|P_n(\Gamma_m B)\|_2 + 1)(\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 + \|(\Gamma_m B)P_n\|_2\|P_n B P_n\|_2). \tag{10}$$

Теперь получим оценки величин $\|(\Gamma_m B)P_n\|_2$ и $\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2$. Для этого сначала найдём представление 2×2-матрицы, которая порождается оператором B. Имеют место равенства

$$(Be_{-j}, e_{-k}) = \int\limits_0^1 (-\overline{q}(x)e^{-i2\pi jx} - p(x))e^{i2\pi kx}\,dx =$$
$$= -\int\limits_0^1 \overline{q}(x)e^{i2\pi(k-j)x}\,dx - \int\limits_0^1 p(x)e^{i2\pi kx}\,dx = -\overline{q}_{k-j} - p_{-k}, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Повторяя проведённые рассуждения, получаем следующее представление матрицы оператора B:

$$(B)_{kj} = \begin{pmatrix} (\widetilde{B}e_{-j}, e_{-k}) & (\widetilde{B}e_j, e_{-k}) \\ (\widetilde{B}e_{-j}, e_k) & (\widetilde{B}e_j, e_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{q}_{k-j} - p_{-k} & -\overline{q}_{k+j} - p_{-k} \\ -\overline{q}_{-j-k} - p_k & -\overline{q}_{j-k} - p_k \end{pmatrix}, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Из второй формулы в (1) следует, что матрица оператора ΓB имеет вид

$$(\Gamma B)_{kj} = \frac{1}{4\pi^2(k^2 - j^2)} \begin{pmatrix} -\overline{q}_{k-j} - p_{-k} & -\overline{q}_{k+j} - p_{-k} \\ -\overline{q}_{-j-k} - p_k & -\overline{q}_{j-k} - p_k \end{pmatrix}, \quad k \neq j, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Это представление даёт возможность оценить $\|(\Gamma_m B)P_n\|_2$. Справедливы следующие соотношения:

$$\|(\Gamma_m B)P_n\|_2^2 = \frac{1}{16\pi^4}\sum_{k\neq n}\biggl(\frac{|\overline{q}_{k-n} + p_{-k}|^2}{(k^2 - n^2)^2} + \frac{|\overline{q}_{k+n} + p_{-k}|^2}{(k^2 - n^2)^2} + \frac{|\overline{q}_{-n-k} + p_k|^2}{(k^2 - n^2)^2} + \frac{|\overline{q}_{n-k} + p_k|^2}{(k^2 - n^2)^2}\biggr) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{8\pi^4 n^2}\sum_{k\neq n}\biggl(\frac{|\overline{q}_{k-n}|^2 + |\overline{q}_{k+n}|^2 + |\overline{q}_{-n-k}|^2 + |\overline{q}_{n-k}|^2}{(k-n)^2} + \frac{2(|p_{-k}|^2 + |p_k|^2)}{(k-n)^2}\biggr) \leqslant \frac{\|p\|^2 + \|q\|^2}{6\pi^2 n^2}.$$

Такие же рассуждения имеют место и для оператора $P_n(\Gamma_m B)$. Таким образом, выполняются оценки

$$\|P_n(\Gamma_m B)\|_2 \leqslant \frac{M}{n}, \quad \|(\Gamma_m B)P_n\|_2 \leqslant \frac{M}{n}. \tag{13}$$

Перейдём к оценке величины $\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2$. Используя равенства (11) и (12), получаем следующее представление:

$$(B\Gamma B)_{kj} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq\pm j}} \frac{1}{l^2 - j^2}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где

$$k_{11} = (\overline{q}_{k-l} + p_{-k})(\overline{q}_{l-j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{k+l} + p_{-k})(\overline{q}_{-j-l} + p_l),$$

$$k_{12} = (\overline{q}_{k-l} + p_{-k})(\overline{q}_{l+j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{k+l} + p_{-k})(\overline{q}_{j-l} + p_l),$$

$$k_{21} = (\overline{q}_{-k-l} + p_k)(\overline{q}_{l-j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{l-k} + p_k)(\overline{q}_{-j-l} + p_l),$$

$$k_{22} = (\overline{q}_{-k-l} + p_k)(\overline{q}_{l+j} + p_{-l}) + (\overline{q}_{l-k} + p_k)(\overline{q}_{j-l} + p_l).$$

Чтобы понять характер оценок, мы не будем анализировать все имеющиеся слагаемые, а остановимся отдельно только на двух из них. С остальными слагаемыми метод работы будет точно таким же. Действие оператора $(B\Gamma_m B)P_n$ означает, что в выражении (14) коэффициент j заменяется на n. При этом при вычислении нормы суммирование будем проводить только по аргументу k. Итак, в выражении для элемента k_{11} раскрываем скобки и анализируем первое получившееся слагаемое. Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left|\sum_{l\neq\pm n}\frac{\overline{q}_{k-l}\overline{q}_{l-n}}{l^2-n^2}\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left|\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{\overline{q}_{k-n-s}\overline{q}_s}{s(s+2n)}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{|\overline{q}_{k-n-s}|^2}{s^2}\right)\left(\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{|\overline{q}_s|^2}{(s+2n)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\max_{s\neq 0,-2n}|\overline{q}_{k-n-s}|^2\right)\left(\sum_{s\neq 0,-2n}\frac{1}{s^2}\right)\left(\sum_{l\neq 0,2n}\frac{|\overline{q}_{l-2n}|^2}{l^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2\|q\|^2}{3}\left(\sum_{\substack{|l|<2n\\ l\neq 0}}\frac{|\overline{q}_{l-2n}|^2}{l^2} + \sum_{|l|\geqslant 2n+1}\frac{|\overline{q}_{l-2n}|^2}{l^2}\right) \leqslant \frac{\pi^2\|q\|^2}{3}\alpha(2n)^2,$$

где последовательность $\alpha(2n)$ является суммируемой с квадратом и имеет вид

$$\alpha(2n) = \left(\sum_{\substack{|l|<2n\\ l\neq 0}}\frac{\widetilde{q}(l-2n)+\widetilde{q}(l+2n)}{l^2} + \frac{\|q\|^2}{(2n+1)^2}\right)^{1/2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\widetilde{q}(n) = \max\{|\overline{q}_n|^2, |\overline{q}_{-n}|^2\}$, $n\in\mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим ещё одно слагаемое, которое получается при раскрытии скобок в выражении для элемента k_{11}. Снова используем неравенство Гёльдера. Справедливы следующие оценки:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left|\sum_{l\neq\pm n}\frac{p_{-k}p_{-l}}{l^2-n^2}\right|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}|p_{-k}|^2\left(\sum_{l\neq\pm n}\frac{|p_{-l}|^2}{(l+n)^2}\right)\left(\sum_{l\neq\pm n}\frac{1}{(l-n)^2}\right) \leqslant \frac{\pi^2\|p\|^4}{3n^2}.$$

Остальные слагаемые, которые получаются при раскрытии скобок в выражении (14), оцениваются теми же величинами. Для этого мы просто повторим описанную выше процедуру. Тогда будем иметь

$$\|(B\Gamma_m B)P_n\|_2 \leqslant M(\alpha(2n) + 1/n) \leqslant M\gamma_n, \tag{15}$$

где $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – суммируемая с квадратом последовательность.

Учитывая последовательно неравенства (13) и (15) сначала в оценке (10), а затем в итоговом неравенстве в (7), получаем

$$\|\mathcal{C}_n\|_2 = \|J(\widetilde{X} - \widetilde{B})\|_2 \leqslant \frac{M}{n}\|\widetilde{B}P_n - P_n\widetilde{B}P_n\|_2 \leqslant \frac{M\gamma_n}{n}. \tag{16}$$

Кроме того, эта же оценка будет справедлива и для операторов $J(B\Gamma B)$, C и T (см. более подробно в [12, § 4]). Следовательно, слагаемые в асимптотике собственных значений, получаемые от операторов $J(B\Gamma B)$, C и T, попадут в остаточный член.

Перейдём к рассмотрению матрицы $\mathcal{B}_n$, которая вносит существенный вклад в асимптотику собственных значений. Указанная матрица соответствует действию оператора JB в представлении (9). Напомним, что оператор J является диагонализирующим. Следовательно, для вычисления матрицы $\mathcal{B}_n$ необходимо положить $k=j=n$ в формуле (11). Тогда матрица $\mathcal{A}_n$ из (6) принимает следующий вид:

$$\mathcal{A}_n = 4\pi^2 n^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{q}_0 + p_{-n} & \overline{q}_{2n} + p_{-n} \\ \overline{q}_{-2n} + p_n & \overline{q}_0 + p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n \end{pmatrix},$$

где матрица $\operatorname{diag}(\xi_n, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, допускает оценку (16). Вычисляя собственные значения матрицы $\mathcal{A}_n$ и беря комплексное сопряжение, приходим при достаточно большом числе n к асимптотической оценке (8). Теорема доказана.

В работе [5] рассматривался случай дифференциального оператора второго порядка с $q = 0$. Приведём соответствующий результат в этой ситуации. Повторяя все рассуждения, которые проведены в доказательстве теоремы 3, получаем

Следствие 1. *Если $q=0$ в операторе L, то его собственные значения для достаточно большого n имеют вид*

$$\widetilde{\lambda}_n^{(1)} = 4\pi^2 n^2 + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad \widetilde{\lambda}_n^{(2)} = 4\pi^2 n^2 + \overline{p}_n + \overline{p}_{-n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Результаты следствия 1 уточняют полученную ранее асимптотику собственных значений из работ [5–7].

В статье [13] рассматривался нагруженный дифференциальный оператор L^* с коэффициентом $p(x) = \cos(\pi x)$. Приведём ещё одно следствие теоремы 3, которое описывает асимптотические оценки собственных значений оператора L в этом частном случае.

Следствие 2. *Пусть $q(x) = 0$, $p(x) = \cos(\pi x)$. Тогда для достаточно большого n собственные значения $\widetilde{\lambda}_n^{(1)}$ и $\widetilde{\lambda}_n^{(2)}$ имеют вид*

$$\widetilde{\lambda}_n^{(1)} = 4\pi^2 n^2 + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad \widetilde{\lambda}_n^{(2)} = 4\pi^2 n^2 - \frac{i2ne^{i2\pi n}}{\pi(1-4n^2)} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Перейдём, наконец, к последнему результату, в котором даны оценки отклонений спектральных проекторов. Возьмём число m таким, как в теореме 1. По теореме 2 оператор L^* подобен оператору $L_0 - J_m\widetilde{X}$, спектр $\sigma(L_0 - J_m\widetilde{X})$ которого представим в виде (5). Через $\widetilde{P}_n$, $n \geqslant m+1$, обозначим проектор Рисса, который построен по множеству $\sigma_n = \{\overline{\widetilde{\lambda}}{}_n^+\} \bigcup \{\overline{\widetilde{\lambda}}{}_n^-\}$. Указанный проектор является проектором на двумерное подпространство $\mathcal{H}_n$, описанное в теореме 2. Имеет место

Теорема 4. *Для $n \geqslant m+1$ справедлива оценка $\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \leqslant Mn^{-1}$. Более того, система двумерных подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n\geqslant m+1}$ образует базис Бари из подпространств в пространстве $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Необходимая оценка в случае $p=0$ установлена в [12, теорема 5]. Для доказательства в рассматриваемом случае необходимо повторить те же самые рассуждения. Так как $p \in L_2(0,1)$, то добавление аддитивного возмущения того же класса будет влиять только на постоянную $M > 0$, а не на порядок оценки. Базисность Бари из двумерных подпространств непосредственно следует из этой оценки и теоремы Бари–Маркуса (см. [10, гл. 6, теорема 5.2]). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В.В. Щербакову, А.С. Макину и М.А. Садыбекову за ценные замечания, которые способствовали улучшению статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. Math. 1952. V. 55. № 4. P. 468-519.
2. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.
3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
4. *Баскаков А.Г., Кацаран Т.К.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1424–1433.
5. *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 4. С. 560–562.
6. *Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С.* О базисности корневых функций периодической задачи с интегральным возмущением краевого условия // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 889–893.
7. *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Math. J. 2013. V. 4. № 3. P. 53–62.
8. *Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С.* Регулярный дифференциальный оператор с возмущённым краевым условием // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 5. С. 768–778.
9. *Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М.* О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.
10. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
11. *Krall A.M.* The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math. 1975. V. 5. № 4. P. 493–542.
12. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
13. *Ломов И.С., Чернов В.В.* Исследование спектральных свойств одного нагруженного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 861–865.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН,
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.
После доработки 24.07.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 22–42

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911+517.925.51

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИХ РЕШЕНИЙ. I

© 2021 г. М. С. Филипковская

Для нестационарных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности глобальных решений, теоремы об устойчивости по Лагранжу (ограниченность глобальных решений), диссипативности (предельная ограниченность решений) и неустойчивости по Лагранжу (отсутствие глобальных решений).

DOI: 10.31857/S0374064121010040

Введение. Дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), которые также называют вырожденными дифференциальными уравнениями (ДУ), алгебро-дифференциальными системами (АДС) и дескрипторными уравнениями, являются удобной абстрактной формой записи многих динамических моделей реальных процессов и объектов в радиоэлектронике, экономике, робототехнике, теории управления, химии и экологии [1–4]. Дифференциальным уравнениям этого типа посвящено большое число работ, например, монографии [1–4] и статьи [5–7] (см. также приведённую в них библиографию), где представлены различные подходы к их исследованию. Основная часть работ, посвящённых полулинейным, квазилинейным и нелинейным ДАУ, связана с исследованием их локальной разрешимости, в том числе с изучением структуры ДАУ, и с разработкой численных методов их решения. Гораздо меньшее число работ посвящено глобальной разрешимости этих уравнений. Достаточно много работ связано с исследованием устойчивости по Ляпунову положения равновесия ДАУ (см., например, [2–4] и библиографию в них). В [2–4] представлены теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову для полулинейных и нелинейных ДАУ, использующие как классические (в смысле теории устойчивости), так и различные специфические (связанные со спецификой подходов к исследованию ДАУ) ограничения. В [7] изучалась робастная устойчивость стационарных линейных ДАУ. Условия для глобальной разрешимости полулинейных ДАУ с регулярным характеристическим пучком операторов и регулярных нелинейных ДАУ представлены в [1, 3]. Различные условия глобальной разрешимости стационарных полулинейных ДАУ с регулярным характеристическим пучком получены в [5, 8, 9]. В работах [10] и [11] установлены условия устойчивости по Лагранжу, которые также включают условия глобальной разрешимости, для стационарных полулинейных ДАУ с регулярным и сингулярным (нерегулярным) характеристическими пучками соответственно.

В настоящей работе рассматриваются неявные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) (т.е. ОДУ, не разрешённые относительно старшей производной неизвестной функции) вида

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)]+B(t)x(t)=f(t,x(t)),\quad A(t)\frac{d}{dt}x(t)+B(t)x(t)=f(t,x(t)),$$

где линейный оператор $A(t)$ (зависящий от параметра t) в общем случае вырожден (в этом случае рассматриваемые ДУ называют нестационарными полулинейными ДАУ) и линейный оператор $B(t)$ также может быть вырожденным. Получены теоремы о глобальной разрешимости, устойчивости по Лагранжу, диссипативности (предельной ограниченности решений) и неустойчивости по Лагранжу, которые представлены в части 1 статьи, а также теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости в целом и неустойчивости по Ляпунову, которые представлены в части 2 статьи. В части 2 продемонстрировано также применение теорем о глобальной разрешимости для решения прикладной задачи и предложен некоторый конкретный вид для функции V, присутствующей в полученных теоремах. В отличие от теорем о глобальной разрешимости и устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову из [3] в полученных теоремах не требуется, чтобы рассматриваемые ДАУ являлись регулярными ДАУ индекса податливости 1 (индекса преобразуемости, “tractability index” в оригинале), т.е. чтобы пучок $\lambda A(t)+B(t)-\partial f(t,x)/\partial x$ являлся регулярным пучком индекса 1 (для более точного сравнения см. определение “tractability index” для регулярных ДАУ в [3, с. 91, 319–320] и комментарии относительно его связи с другими понятиями индекса, которые даны в [3] и [10, раздел 2]), а требуется, только чтобы пучок $\lambda A(t)+B(t)$, который отвечает линейной (левой) части рассматриваемых ДАУ, был регулярным пучком индекса не выше 1 (см. определение в п. 1). Заметим, что регулярный пучок $\lambda A(t)+B(t)$ индекса не выше 1 удовлетворяет критерию “ранг-степень” (см. определение в [2, с. 30–31]) для каждого t. Также в полученных теоремах не требуется, чтобы рассматриваемые ДАУ являлись “сжимающими” (см. [3, с. 379]). Отметим, что в полученных теоремах о глобальной разрешимости не используется глобальное условие Липшица, как, например, в [1], или подобные ограничения, что позволяет использовать теоремы для решения более широких классов прикладных задач. Подробнее это обсуждается в пп. 2.1. Во второй части статьи в п. 5 продемонстрировано применение теорем 2.1, 2.2 о глобальной разрешимости (которые не содержат глобальных условий Липшица) для решения одной задачи по электротехнике, а также показано, что условия теорем могут выполняться для функций, не удовлетворяющих условию утверждения 2.1 о глобальной разрешимости, в котором требуется, чтобы “алгебраическая часть” ДАУ удовлетворяла глобальному условию Липшица по компоненте $P_2(t)x$ переменной x (некоторые условия теорем и утверждения совпадают), а для функций, удовлетворяющих условиям утверждения, условия теорем также будут выполнены. Вообще, из доказательства утверждения 2.1 следует, что если его условия выполнены, то выполнены и условия теорем 2.1, 2.2. Отметим также, что в полученных теоремах по сравнению с соответствующими теоремами из [2, 3] ослаблены требования к гладкости нелинейной части ДАУ.

Устойчивость по Лагранжу ДАУ (диссипативность ДАУ) означает существование глобальных решений для всех согласованных начальных значений, т.е. для всех возможных начальных значений, и ограниченность (предельную ограниченность) всех решений. Таким образом, в отличие от устойчивости по Ляпунову, устойчивость по Лагранжу и диссипативность ДАУ можно рассматривать как в определённом смысле устойчивость всего ДАУ (т.е. в определённом смысле устойчивость всех его решений), а не только отдельного, исследуемого на устойчивость, решения.

В работе применяются нестационарные спектральные проекторы [12, 1], позволяющие привести полулинейные ДАУ к эквивалентным полуявным ДАУ. Также используются второй метод Ляпунова и основанные на нём методы Ж. Ла-Салля [13] и Т. Йошизавы [14] для исследования продолжаемости решений, устойчивости по Лагранжу и диссипативности явных ОДУ (т.е. ОДУ, разрешённых относительно старшей производной неизвестной функции). При доказательстве теоремы об асимптотической устойчивости (асимптотической устойчивости в целом положения равновесия) ДАУ используется теорема Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости явных ОДУ [15].

1. Постановка задачи, определения и предварительные сведения. Рассмотрим неявные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)]+B(t)x(t)=f(t,x(t)), \quad t\in[t_+,\infty), \tag{1.1}$$

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t)+B(t)x(t)=f(t,x(t)), \quad t\in[t_+,\infty), \tag{1.2}$$

и начальное условие

$$x(t_0)=x_0, \tag{1.3}$$

где $t_0 \geqslant t_+ \geqslant 0$, $A, B\colon [t_+,\infty) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ (через $\mathrm{L}(X,Y)$ обозначается векторное пространство непрерывных линейных операторов, действующих из векторного пространства X в векторное пространство Y; $\mathrm{L}(X,X) = \mathrm{L}(X)$) и $f\colon [t_+,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Операторы $A(t)$ и $B(t)$ могут быть вырожденными (необратимыми). Уравнения типа (1.1), (1.2) с вырожденным (при некотором t) оператором $A(t)$ называют *вырожденными дифференциальными уравнениями* или *дифференциально-алгебраическими уравнениями*. В терминологии ДАУ уравнения вида (1.1), (1.2) принято называть *полулинейными*, однако их иногда называют нелинейными из-за наличия нелинейной функции f. Поскольку операторы $A(t)$, $B(t)$ нестационарны, то уравнения (1.1), (1.2) называются *нестационарными* полулинейными ДАУ или нестационарными вырожденными дифференциальными уравнениями. В дальнейшем, для общности, уравнения (1.1) и (1.2), где $A(t)$ ($A\colon [t_+,\infty) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$) – произвольный (не обязательно вырожденный) оператор, будем называть *нестационарными полулинейными ДАУ*.

Левой (линейной) части уравнений (1.1) и (1.2) отвечает пучок операторов $\lambda A(t) + B(t)$. Пусть для каждого $t \geqslant t_+$ пучок регулярен, т.е. для каждого $t \geqslant t_+$ множество его регулярных точек не пусто (множеством регулярных точек пучка $\lambda A(t) + B(t)$ является множество регулярных точек его комплексного расширения). Для регулярных точек λ существует резольвента $R(\lambda,t) = (\lambda A(t) + B(t))^{-1}$.

В дальнейшем предполагается, что для каждого $t \geqslant t_+$ пучок регулярен и выполнено следующее условие: существуют функции $C_1\colon [t_+,\infty) \to (0,\infty)$ и $C_2\colon [t_+,\infty) \to (0,\infty)$ такие, что для любого $t \in [t_+,\infty)$ выполнена оценка

$$\|R(\lambda,t)\| \leqslant C_1(t), \quad |\lambda| \geqslant C_2(t). \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что либо точка $\mu = 0$ является для резольвенты $(A(t) + \mu B(t))^{-1}$ простым полюсом (это эквивалентно тому, что $\lambda = \infty$ является устранимой особой точкой резольвенты $R(\lambda,t)$), либо $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A(t) + \mu B(t)$.

Согласно [1, с. 181] индексом регулярного пучка $\lambda A + B$, где A, B – стационарные квадратные матрицы, называется наибольшая длина цепочки из собственного и присоединённых векторов пучка матриц $A + \mu B$ в точке $\mu = 0$. Следуя монографии [1], определим индекс пучка $\lambda A(t) + B(t)$.

Если пучок $\lambda A(t) + B(t)$ регулярен для каждого t и удовлетворяет условию (1.4), то он является *регулярным пучком индекса не выше* 1 (т.е. индекса 0 или 1). Если оператор $A(t)$ невырожден для всех t, т.е. $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A(t) + \mu B(t)$ для каждого t, то $\lambda A(t) + B(t)$ является *регулярным пучком индекса* 0. Если $A(t)$ вырожден для всех t и выполнено условие (1.4) (т.е. $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A(t) + \mu B(t))^{-1}$ для каждого t), то $\lambda A(t) + B(t)$ является *регулярным пучком индекса* 1.

Ниже приведены сведения из [12; 1, с. 82–84], которые будут использоваться в дальнейшем. Если регулярный пучок удовлетворяет условию (1.4), то для каждого $t \in [t_+,\infty)$ существуют две пары взаимно дополнительных проекторов

$$P_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_2(t)} R(\lambda,t)\,d\lambda\,A(t), \quad P_2(t) = I_{\mathbb{R}^n} - P_1(t),$$

$$Q_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda| = C_2(t)} A(t)R(\lambda,t)\,d\lambda, \quad Q_2(t) = I_{\mathbb{R}^n} - Q_1(t) \tag{1.5}$$

($P_i(t)P_j(t) = \delta_{ij}P_i(t)$, $P_1(t) + P_2(t) = I_{\mathbb{R}^n}$, и $Q_i(t)Q_j(t) = \delta_{ij}Q_i(t)$, $Q_1(t) + Q_2(t) = I_{\mathbb{R}^n}$, $I_{\mathbb{R}^n}$ – тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, δ_{ij} – символ Кронекера), которые порождают прямые разложения пространств

$$\mathbb{R}^n = X_1(t)\dot{+}X_2(t), \quad X_j(t) = P_j(t)\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n = Y_1(t)\dot{+}Y_2(t), \quad Y_j(t) = Q_j(t)\mathbb{R}^n, \quad j = 1,2, \tag{1.6}$$

такие, что пары подпространств $X_1(t)$, $Y_1(t)$ и $X_2(t)$, $Y_2(t)$ инвариантны относительно $A(t)$, $B(t)$ (т.е. $A(t), B(t)\colon X_j(t) \to Y_j(t)$). Суженные операторы $A_j(t) = A(t)|_{X_j(t)}\colon X_j(t) \to Y_j(t)$,

$B_j(t) = B(t)|_{X_j(t)}\colon X_j(t) \to Y_j(t)$, $j = 1,2$, таковы, что $A_2(t) = 0$ и существуют $A_1^{-1}(t)$ (если $X_1(t) \ne \{0\}$) и $B_2^{-1}(t)$ (если $X_2(t) \ne \{0\}$). Подпространства $X_j(t)$, $Y_j(t)$ таковы, что $Y_1(t) = \mathcal{R}(A(t))$ ($\mathcal{R}(A(t))$ – область значений $A(t)$), $X_2(t) = \operatorname{Ker} A(t)$, $Y_2(t) = B(t)X_2(t)$ и $X_1(t) = R(\lambda,t)Y_1(t)$, $|\lambda| \geqslant C_2(t)$. Спектральные проекторы (1.5) являются вещественными (поскольку $A(t)$ и $B(t)$ вещественные) и удовлетворяют следующим свойствам:

$$A(t)P_1(t)=Q_1(t)A(t)=A(t),\quad A(t)P_2(t)=Q_2(t)A(t)=0,\quad B(t)P_j(t)=Q_j(t)B(t),\quad j=1,2. \tag{1.7}$$

Используя спектральные проекторы, для каждого $t \in [t_+,\infty)$ получаем вспомогательный оператор

$$G(t) = A(t) + B(t)P_2(t) = A(t) + Q_2(t)B(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \tag{1.8}$$

такой, что $G(t)\colon X_j(t) \to Y_j(t)$ $(G(t)X_j(t) = Y_j(t))$ [12; 1, с. 82–84]. Этот оператор имеет обратный $G^{-1}(t) = A_1^{-1}(t)Q_1(t) + B_2^{-1}(t)Q_2(t) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ $(G^{-1}(t)\colon Y_j(t) \to X_j(t))$ со свойствами

$$G^{-1}(t)A(t)P_1(t) = G^{-1}(t)A(t) = P_1(t),\quad G^{-1}(t)B(t)P_2(t) = P_2(t),$$

$$A(t)G^{-1}(t)Q_1(t) = A(t)G^{-1}(t) = Q_1(t),\quad B(t)G^{-1}(t)Q_2(t) = Q_2(t).$$

Проекторы $P_i(t)$, $Q_i(t)$ $(i = 1,2)$ и операторы $G(t)$, $G^{-1}(t)$ как оператор-функции имеют ту же степень гладкости, что и оператор-функции $A(t)$, $B(t)$ и функция $C_2(t)$ [1, с. 82–84]. Вообще, в [12; 1, с. 82–84] рассматривались оператор-функции (операторы) $A(t)$, $B(t)$ в банаховых пространствах и требовалось, чтобы они были сильно непрерывно дифференцируемыми, тогда $P_i(t)$, $Q_i(t)$, $G(t)$, $G^{-1}(t)$ также будут сильно непрерывно дифференцируемы, но, как известно, в конечномерных пространствах это свойство равносильно непрерывной дифференцируемости в обычном смысле (по норме).

Предположим, что $A, B \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ и $C_2 \in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, тогда $P_i(t)$, $Q_i(t)$, $G(t)$ и $G^{-1}(t)$ также непрерывно дифференцируемы как оператор-функции на $[t_+,\infty)$ (т.е. $P_i, Q_i, G, G^{-1} \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)))$.

Функцию $x \in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $[t_0,t_1) \subseteq [t_+,\infty)$, называют *решением уравнения (1.1) на промежутке* $[t_0,t_1)$, если $A(t)x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0,t_1)$ и $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на $[t_0,t_1)$. Если функция $x(t)$ дополнительно удовлетворяет начальному условию (1.3), то её называют *решением задачи Коши* (*начальной задачи*) (1.1), (1.3).

Функцию $x \in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$ называют *решением уравнения (1.2) на* $[t_0,t_1)$, если $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) на $[t_0,t_1)$. Если функция $x(t)$ дополнительно удовлетворяет начальному условию (1.3), то её называют *решением задачи Коши* (1.2), (1.3).

Замечание 1.1. Заметим, что $\operatorname{rank} P_j(t) = \operatorname{rank} Q_j(t) = \dim X_j(t) = \dim Y_j(t)$, $j = 1,2$, и $\dim Y_1(t) = \operatorname{rank} A(t)$, и что в силу непрерывности проекторов $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ размерности подпространств $X_j(t) = P_j(t)\mathbb{R}^n$, $Y_j(t) = Q_j(t)\mathbb{R}^n$ постоянны (см. [16, с. 34, лемма 4.10]): $\dim X_1(t) = \dim Y_1(t) = \mathrm{const}$ и $\dim X_2(t) = \dim Y_2(t) = \mathrm{const}$ для всех $t \in [t_+,\infty)$. Будем обозначать $\dim X_2(t) = \dim Y_2(t) = d$, тогда $\dim X_1(t) = \dim Y_1(t) = n-d$.

Для каждого t любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим (относительно разложения (1.6)) в виде

$$x = P_1(t)x + P_2(t)x = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t),\quad x_{p_i}(t) = P_i(t)x \in X_i(t). \tag{1.9}$$

Заметим, что ДАУ (1.1) можно записать в виде

$$A(t)[P_1(t)x(t)]' + A'(t)[P_1(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t,x(t)).$$

Применим к ДАУ (1.1) проекторы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ и, воспользовавшись свойствами (1.7), получим эквивалентную ему систему

$$A(t)P_1(t)[P_1(t)x(t)]' + Q_1(t)A'(t)P_1(t)x(t) + B(t)P_1(t)x(t) = Q_1(t)f(t,x(t)), \tag{1.10}$$

$$Q_2(t)A'(t)P_1(t)x(t) + B(t)P_2(t)x(t) = Q_2(t)f(t,x(t)). \tag{1.11}$$

Далее применим к системе (1.10), (1.11) оператор $G^{-1}(t)$ и воспользуемся его свойствами и равенством $P_1(t)[P_1(t)x(t)]' = [P_1(t)x(t)]' - P_1'(t)P_1(t)x(t)$, в результате получим эквивалентную систему

$$[P_1(t)x(t)]' = [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t) + B(t)]]P_1(t)x(t) + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t, x(t)), \tag{1.12}$$

$$G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x(t)) - A'(t)P_1(t)x(t)] - P_2(t)x(t) = 0. \tag{1.13}$$

Таким образом, ДАУ (1.1) сведено к эквивалентной системе, состоящей из явного ОДУ (1.12) (относительно $P_1(t)x(t)$) и алгебраического уравнения (1.13). Используя представление (1.9) ($x_{p_i}(t) = P_i(t)x(t)$), запишем систему (1.12), (1.13) в виде

$$x_{p_1}'(t) = [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t) + B(t)]]x_{p_1}(t) + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)), \tag{1.14}$$

$$G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - A'(t)x_{p_1}(t)] - x_{p_2}(t) = 0. \tag{1.15}$$

Система (1.14), (1.15) и эквивалентная ей система (1.12), (1.13) являются неавтономными полуявными ДАУ (в общем случае *неавтономными полуявными ДАУ* называют системы вида $\dot{y} = f(t, y, z)$, $0 = g(t, y, z)$).

Теперь применим проекторы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ к ДАУ (1.2) и получим эквивалентную ему систему

$$A(t)P_1(t)x'(t) + B(t)P_1(t)x(t) = Q_1(t)f(t, x(t)), \tag{1.16}$$

$$B(t)P_2(t)x(t) = Q_2(t)f(t, x(t)). \tag{1.17}$$

Далее применим к системе (1.16), (1.17) оператор $G^{-1}(t)$ и воспользуемся равенством

$$P_1(t)x'(t) = [P_1(t)x(t)]' - P_1'(t)x(t),$$

в результате получим эквивалентную ей систему

$$\begin{gathered} [P_1(t)x(t)]' = G^{-1}(t)[-B(t)P_1(t)x(t) + Q_1(t)f(t, x(t))] + P_1'(t)x(t), \\ G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x(t)) - P_2(t)x(t) = 0. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Таким образом, ДАУ (1.2) сведено к эквивалентной системе (1.18). Используя представление (1.9) ($x_{p_i}(t) = P_i(t)x(t)$), запишем систему (1.18) в виде

$$x_{p_1}'(t) = G^{-1}(t)[-B(t)x_{p_1}(t) + Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))] + P_1'(t)(x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)), \tag{1.19}$$

$$G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - x_{p_2}(t) = 0. \tag{1.20}$$

Замечание 1.2. Введём многообразия

$$L_{t_+} = \{(t, x) \in [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2(t)[A'(t)P_1(t)x + B(t)x - f(t, x)] = 0\}, \tag{1.21}$$

$$\widehat{L}_{t_+} = \{(t, x) \in [t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n \mid Q_2(t)[B(t)x - f(t, x)] = 0\}. \tag{1.22}$$

Условие согласования $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ ($(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$) для начальной точки (t_0, x_0) является одним из необходимых условий существования решения задачи Коши (1.1), (1.3) (задачи Коши (1.2), (1.3)). Начальная точка (t_0, x_0), удовлетворяющая этому условию, называется *согласованной начальной точкой* (соответствующие начальные значения t_0, x_0 называются *согласованными начальными значениями*).

Это замечание следует из эквивалентности ДАУ (1.1) и ДАУ (1.2) соответственно системам (1.10), (1.11) и (1.16), (1.17).

В формулах (1.21), (1.22) число t_+ является параметром. В частности, в дальнейшем будет использоваться обозначение L_T для многообразия, имеющего вид L_{t_+}, где $t_+ = T$.

Очевидно, что графики решений $x(t)$ ДАУ (1.1) и ДАУ (1.2) (т.е. множества точек $(t, x(t))$, где t из области определения решения $x(t)$) должны лежать в многообразиях L_{t_+} и $\widehat{L}_{t_+}$ соответственно.

Напомним некоторые классические определения. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область, содержащая начало координат. Функция $W \in C(D, \mathbb{R})$ называется *положительно определённой*, если $W(x) > 0$ при всех $x \neq 0$ и $W(0) = 0$. Функция $V \in C([t_+, \infty) \times D, \mathbb{R})$ называется *положительно определённой*, если $V(t, 0) \equiv 0$ и существует такая положительно определённая функция $W \in C(D, \mathbb{R})$, что $V(t, x) \geqslant W(x)$ при всех $x \neq 0$, $t \in [t_+, \infty)$.

Определение 1.1. Рассмотрим оператор-функцию $H\colon J \to \mathrm{L}(X)$, где X – некоторое линейное конечномерное или гильбертово пространство и $J \subseteq \mathbb{R}$ – некоторый промежуток. Оператор $H(t) \in \mathrm{L}(X)$ $(t \in J)$, являющийся самосопряжённым при каждом $t \in J$, будем называть просто самосопряжённым. По аналогии с определениями из [17, с. 50, 51, 209] введём следующие определения. Самосопряжённый оператор $H(t) \in \mathrm{L}(X)$ $(t \in J)$ называется *положительным*, если $(H(t)x, x) > 0$ для всех $t \in J$, $x \neq 0$. Самосопряжённый оператор $H(t)$ называется *положительно определённым* или *равномерно положительным*, если существует константа $H_0 > 0$ такая, что $(H(t)x, x) \geqslant H_0\|x\|^2$ для всех t, x.

Оператор-функция $H\colon J \to \mathrm{L}(X)$ называется *самосопряжённой*, если оператор $H(t)$ является самосопряжённым. Самосопряжённая оператор-функция $H\colon J \to \mathrm{L}(X)$ называется *положительной*, если оператор $H(t)$ положителен, и *положительно определённой* или *равномерно положительной*, если оператор $H(t)$ положительно определён.

Если X – линейное конечномерное пространство и самосопряжённый оператор $H \in \mathrm{L}(X)$ является стационарным и положительным (т.е. $(Hx, x) > 0$ при всех $x \neq 0$), то он является также положительно определённым (равномерно положительным): $(Hx, x) \geqslant H_0\|x\|^2$, где $H_0 = \inf\limits_{\|x\|=1}(Hx, x) > 0$ [17]. Для нестационарного оператора $H(t)$ можно брать

$$H_0 = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ t\in[t_+,\infty)}} (H(t)x, x).$$

Следуя [13], рассмотрим дифференциальные неравенства

$$v' \leqslant \chi(t, v), \tag{1.23}$$

$$v' \geqslant \chi(t, v), \tag{1.24}$$

где $\chi \in C([t_+, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R})$ (в дальнейшем нас будут интересовать только положительные скалярные функции $v \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, удовлетворяющие одному из этих неравенств). Если функция $\chi(t, v)$ имеет вид

$$\chi(t, v) = k(t)U(v),$$

где $k \in C([t_+, \infty), \mathbb{R})$ и $U \in C(0, \infty)$ (т.е. $U \in C((0, \infty), (0, \infty))$), то верны следующие утверждения [13, с. 132–133]: если $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv = \infty$ ($v_0 > 0$ – некоторая константа), то неравенство (1.23) не имеет положительных решений $v(t)$ с конечным временем определения; если $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv = \infty$ и $\int_{t_0}^{\infty}k(t)\,dt < \infty$ ($t_0 \geqslant t_+$ – некоторое число), то неравенство (1.23) не имеет положительных неограниченных при $t \geqslant t_+$ решений; если $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv < \infty$ и $\int_{t_0}^{\infty}k(t)\,dt = \infty$, то неравенство (1.24) не имеет положительных неограниченно продолжаемых решений (т.е. решений, определённых на всём промежутке $[t_+, \infty)$).

Используя дифференциальные неравенства вида (1.23), (1.24), Ж. Ла-Салль получил условия неограниченной продолжаемости решений, устойчивости и неустойчивости (решения имеют конечное время определения) по Лагранжу ОДУ $x' = f(t, x)$ [13]. Соответствующие определения для (явного) ОДУ приведены в [13]. Ниже даны соответствующие определения для ДАУ.

2. Существование, единственность и ограниченность глобальных решений ДАУ.

Определение 2.1. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) называется *глобальным* или *неограниченно продолжаемым*, если оно существует на всём промежутке $[t_0, \infty)$. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) называется *устойчивым по Лагранжу*, если оно является глобальным и ограниченным, т.е. $x(t)$ существует на $[t_0, \infty)$ и $\sup\limits_{t\in[t_0,\infty)}\|x(t)\| < \infty$.

Определение 2.2. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) имеет *конечное время определения*, если оно существует на некотором конечном интервале $[t_0,T)$ и неограниченно на нём, т.е. существует число $T>t_0$ $(T<\infty)$ такое, что $\lim\limits_{t\to T-0}\|x(t)\|=\infty$. Решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.3) называется *неустойчивым по Лагранжу*, если оно имеет конечное время определения.

Если решение неустойчиво по Лагранжу, то также говорят, что оно "взрывается" или "уходит на бесконечность" за конечный промежуток времени.

Определение 2.3. Уравнение (1.1) называется *устойчивым по Лагранжу для начальной точки* (t_0,x_0), если для этой начальной точки решение задачи Коши (1.1), (1.3) устойчиво по Лагранжу.

Уравнение (1.1) устойчиво по Лагранжу, если каждое решение задачи Коши (1.1), (1.3) устойчиво по Лагранжу (т.е. уравнение устойчиво по Лагранжу для каждой согласованной начальной точки).

Определение 2.4. Уравнение (1.1) называется *неустойчивым по Лагранжу для начальной точки* (t_0,x_0), если для этой начальной точки решение задачи Коши (1.1), (1.3) неустойчиво по Лагранжу.

Уравнение (1.1) неустойчиво по Лагранжу, если каждое решение задачи Коши (1.1), (1.3) неустойчиво по Лагранжу.

Аналогичные определения формулируются для ДАУ (1.2) (задачи Коши (1.2), (1.3)).

2.1. Глобальная разрешимость ДАУ. В дальнейшем через $U_R^c(0)$ будем обозначать множество $\{z\in\mathbb{R}^n\mid \|z\|\geqslant R\}$ $(R>0)$.

Теорема 2.1 (глобальная разрешимость ДАУ (1.1)). *Пусть* $f\in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x\in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$ *существует единственный* $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *такой, что*

$$(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+};\tag{2.1}$$

2) для каждых $t_*\in[t_+,\infty)$, $x^*_{p_1}(t_*)\in X_1(t_*)$, $x^*_{p_2}(t_*)\in X_2(t_*)$ *таких, что*

$$(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x^*_{p_2}(t_*))\in L_{t_+},$$

оператор $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)}$, *определённый как*

$$\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)}=\left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*)f(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x^*_{p_2}(t_*))]-B(t_*)\right]P_2(t_*)\colon X_2(t_*)\to Y_2(t_*),\tag{2.2}$$

обратим;

3) существуют функция $k\in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$, *функция* $U\in C(0,\infty)$, *удовлетворяющая соотношению* $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv=\infty$ $(v_0>0$ *– некоторая константа), число* $R>0$ *и положительно определённая функция* $V\in C^1([t_+,\infty)\times U_R^c(0),\mathbb{R})$ *такие, что*

3.1) $V(t,z)\to\infty$ *равномерно по* t *на каждом конечном полуинтервале* $[a,b)\subset[t_+,\infty)$ *при* $\|z\|\to\infty$;

3.2) для всех $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$, $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *таких, что* $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\|\geqslant R$, *справедливо неравенство*

$$V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))\leqslant k(t)U(V(t,x_{p_1}(t))),\tag{2.3}$$

где $V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))$ *– производная функции* V *в силу уравнения (1.14) (где* $x_{p_1}(t)=z(t)$*):*

$$V'_{(1.14)}(t,x_{p_1}(t))=\frac{\partial V}{\partial t}(t,x_{p_1}(t))+\bigg(\frac{\partial V}{\partial z}(t,x_{p_1}(t)),[P_1'(t)-G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t)+B(t)]]x_{p_1}(t)+$$
$$+G^{-1}(t)Q_1(t)f(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\bigg).\tag{2.4}$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.1), (1.3).*

Доказательство. Как показано выше, ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.12), (1.13) или (1.14), (1.15). Введём отображения $\Pi, F \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, определив их равенствами

$$\Pi(t,z,u) = [P_1'(t) - G^{-1}(t)Q_1(t)[A'(t)+B(t)]]P_1(t)z + G^{-1}(t)Q_1(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u), \quad (2.5)$$

$$F(t,z,u) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t,P_1(t)z+P_2(t)u) - A'(t)P_1(t)z] - u. \quad (2.6)$$

Эти отображения имеют непрерывные частные производные первого порядка по z и по u на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Запишем эти частные производные для отображения $F(t,z,u)$ (заметим, что $Q_2(t)A'(t) = Q_2(t)A'(t)P_1(t)$):

$$\frac{\partial}{\partial z}F(t,z,u) = G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_1(t) - G^{-1}(t)Q_2(t)A'(t), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u) = G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_2(t) - I_{\mathbb{R}^n} =$$
$$= G^{-1}(t)\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}P_2(t) - P_1(t), \quad (2.8)$$

где $\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$ – оператор (2.2), и обозначим $\tilde\Phi_{t,z,u} = \Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$.

Рассмотрим систему

$$z'(t) = \Pi(t,z(t),u(t)), \quad (2.9)$$

$$F(t,z(t),u(t)) = 0. \quad (2.10)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.1. *Если функция $x(t)$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет начальному условию (1.3), то функции $z(t) = P_1(t)x(t)$, $u(t) = P_2(t)x(t)$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяют начальным условиям $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$ и включениям $z \in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $u \in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$.*

Обратно, если функции $z \in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $u \in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяют начальным условиям $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$, то $P_1(t)z(t) = z(t)$, $P_2(t)u(t) = u(t)$ и функция $x(t) = z(t)+u(t)$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет начальному условию (1.3).

Доказательство. Пусть функция $x(t)$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет (1.3). Заметим, что $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$, так как ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.10), (1.11) и при $t=t_0$ (тогда $x(t_0)=x_0$) выполняется равенство (1.11) (замечание 1.2). Поскольку ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.12), (1.13), то функции $z(t) = P_1(t)x(t)$, $u(t) = P_2(t)x(t)$, являются решением системы (1.12), (1.13) на $[t_0,t_1)$ и, следовательно, решением системы (2.9), (2.10). Очевидно, что $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$ и $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$. Гладкость функций $z(t)$, $u(t)$ следует из гладкости функции $x(t)$ и проекторов $P_i(t)$, $i=1,2$.

Пусть теперь функции $z \in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $u \in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,t_1)$ и $z(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $u(t_0) = P_2(t_0)x_0$. Очевидно, что $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$. Умножив уравнение (2.10) на $P_1(t)$ и на $P_2(t)$, будем иметь $P_1(t)u(t)\equiv 0$ и $P_2(t)u(t)\equiv u(t)$. Умножив уравнение (2.9) на $P_2(t)$, получим, что $z(t)$ удовлетворяет уравнению $P_2(t)z'(t) = P_2(t)P_1'(t)P_1(t)z(t)$. Так как $P_2(t)z'(t) = [P_2(t)z(t)]' - P_2'(t)z(t)$, $P_2(t)P_1'(t) = -P_2'(t)P_1(t)$ и $z(t_0)\in X_1(t_0)$, то функция $P_2(t)z(t)$ удовлетворяет уравнению $[P_2(t)z(t)]' = P_2'(t)[P_2(t)z(t)]$ и начальному условию $P_2(t_0)z(t_0) = 0$. Следовательно, $P_2(t)z(t)\equiv 0$ и, значит, $P_1(t)z(t)\equiv z(t)$. Таким образом, функция $x(t) = z(t)+u(t)$ такова, что $P_1(t)x(t) = z(t)$ и $P_2(t)x(t) = u(t)$. Следовательно, функция $x(t) = z(t)+u(t)$ является решением системы (1.12), (1.13) на $[t_0,t_1)$ и $x(t_0) = x_0$. Поэтому она является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,t_1)$ и удовлетворяет условию (1.3). Лемма доказана.

В доказательстве леммы 2.1 показано, что если $u(t)\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенству (2.10), т.е. $F(t,z(t),u(t)) = 0$, то $u(t) = P_2(t)u(t)$, т.е. $u(t)\in X_2(t)$.

Лемма 2.2. *Для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$ существует единственный $u\in X_2(t)$ такой, что*

$$F(t,z,u) = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Заметим, что $F(t,z,u) = F(t,P_1(t)z,u)$ для любого $z\in\mathbb{R}^n$ и что $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$ тогда и только тогда, когда t, $x_{p_1}(t)$, $x_{p_2}(t)$ удовлетворяют уравнению (1.15) или, что то же самое, t, $z(t)=x_{p_1}(t)$, $u(t)=x_{p_2}(t)$ удовлетворяют уравнению (2.10) (т.е. $F(t,x_{p_1}(t),x_{p_2}(t))=0$). Значит в силу условия 1) для каждых $t\in[t_+,\infty)$ и $z\in\mathbb{R}^n$ существует единственный $u=x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ такой, что $(t,P_1(t)z+u)\in L_{t_+}$, т.е. $F(t,z,u)=0$. Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы. Возьмём произвольную начальную точку $(t_0,x_0)\in\in L_{t_+}$ и любые фиксированные $t_*\in[t_0,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, где $z_*=P_1(t_*)x_0$ при $t_*=t_0$. По лемме 2.2 существует единственный $u_*\in X_2(t_*)$ $(u_*=P_2(t_*)x_0$ при $t_*=t_0)$ такой, что $F(t_*,z_*,u_*)=0$. Поскольку в силу условия 2) оператор $\tilde{\Phi}_{t,z,u}$ обратим для каждой точки $(t,z,u)=(t_*,z_*,u_*)$ такой, что $u_*\in X_2(t_*)$ и $F(t_*,z_*,u_*)=0$ (т.е. $(t_*,P_1(t_*)z_*+u_*)\in L_{t_0}$), то для таких $(t,z,u)=(t_*,z_*,u_*)$ оператор

$$\Psi_{t,z,u}=\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=G^{-1}(t)\tilde{\Phi}_{t,z,u}P_2(t)-P_1(t)\in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) \tag{2.12}$$

имеет обратный $[\Psi_{t,z,u}]^{-1}=[\tilde{\Phi}_{t,z,u}]^{-1}G(t)P_2(t)-P_1(t)\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$.

Воспользовавшись теоремами о неявной функции, получаем следующее утверждение: существуют промежуток $U_{\delta_1}(t_*)=\{t\in(t_0,\infty):|t-t_*|<\delta_1\}$ $(U_{\delta_1}(t_0)=[t_0,t_0+\delta_1)$ при $t_*=t_0)$, окрестности $U_{\delta_2}(z_*)\subset\mathbb{R}^n$ и $U_{\delta_3}(u_*)\subset\mathbb{R}^n$ точек z_* и u_* соответственно и единственная функция $\nu(t,z)\in C(U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*),U_{\delta_3}(u_*))$, непрерывно дифференцируемая по z и такая, что $F(t,z,\nu(t,z))=0$ для $(t,z)\in U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*)$, и $\nu(t_*,z_*)=u_*$. Поскольку $F(t,z,\nu(t,z))=0$, т.е. функция $u=\nu(t,z)$ является решением уравнения (2.11), то $\nu(t,z)=P_2(t)\nu(t,z)\in X_2(t)$ для каждого $(t,z)\in U_{\delta_1}(t_*)\times U_{\delta_2}(z_*)$. Таким образом, доказано, что в некоторой окрестности $U(t_*,z_*)$ каждой точки $(t_*,z_*)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ (где $z_*=P_1(t_*)x_0$ при $t_*=t_0$) существует единственное решение $u=\nu_{t_*,z_*}(t,z)$ уравнения (2.11), непрерывное по (t,z), непрерывно дифференцируемое по z и такое, что $\nu_{t_*,z_*}(t,z)\in X_2(t)$ для каждой точки $(t,z)\in U(t_*,z_*)$.

Введём функцию $\eta\colon[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и определим $\eta(t,z)=\nu_{t_*,z_*}(t,z)$ в точке $(t,z)==(t_*,z_*)$ для каждой точки $(t_*,z_*)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Тогда функция $u=\eta(t,z)$ непрерывна по (t,z), непрерывно дифференцируема по z, является решением уравнения (2.11) и $\eta(t,z)\in\in X_2(t)$ для $(t,z)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Докажем единственность введённой функции. Допустим, существует функция $u=\mu(t,z)$, обладающая в некоторой точке $(\tilde{t},\tilde{z})\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ теми же свойствами, что и функция $u=\eta(t,z)$. По лемме 2.2 существует единственный вектор $\tilde{u}\in X_2(\tilde{t})$ такой, что $(t,z,u)=(\tilde{t},\tilde{z},\tilde{u})$ удовлетворяет уравнению (2.11). Значит, $\eta(\tilde{t},\tilde{z})==\mu(\tilde{t},\tilde{z})=\tilde{u}$. Аналогично доказывается, что если точка $(\tilde{t},\tilde{z})$ принадлежит пересечению окрестностей $U^1(t^1,z^1)$ и $U^2(t^2,z^2)$ некоторых точек $(t^1,z^1),(t^2,z^2)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, в которых определены соответственно решения $u=\nu_{t^1,z^1}(t,z)$ и $u=\nu_{t^2,z^2}(t,z)$ уравнения (2.11), то $\nu_{t^1,z^1}(\tilde{t},\tilde{z})=\nu_{t^2,z^2}(\tilde{t},\tilde{z})=\eta(\tilde{t},\tilde{z})=\tilde{u}$. Это выполнено для любой точки $(\tilde{t},\tilde{z})\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, следовательно, существует единственная функция $u=\eta(t,z)$ с указанными выше свойствами.

Подставим функцию $u=\eta(t,z)$ в (2.5) и обозначим $\widetilde{\Pi}(t,z)=\Pi(t,z,\eta(t,z))$. Тогда уравнение (2.9) примет вид

$$z'(t)=\widetilde{\Pi}(t,z(t)). \tag{2.13}$$

Вследствие свойств функций η и Π функция $\widetilde{\Pi}$ непрерывна по (t,z) и непрерывно дифференцируема по z на $[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Следовательно, существует единственное решение $z==\zeta(t)$ уравнения (2.13) на некотором промежутке $[t_0,\alpha)$, удовлетворяющее начальному условию $\zeta(t_0)=z_0$, где $z_0=P_1(t_0)x_0$. Решение $\zeta(t)$ может быть продолжено на максимальный промежуток $[t_0,\omega)$ $(\omega\leqslant\infty)$ существования (т.е. до непродолжаемого решения), и это продолжение единственно (см., например, [18, с. 16]).

Поскольку функции $z=\zeta(t)$ и $u=\eta(t,\zeta(t))$ являются решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,\omega)$ и удовлетворяют начальным условиям $\zeta(t_0)=z_0=P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0,z_0)=P_2(t_0)x_0$, то по лемме 2.1 $\zeta(t)=P_1(t)\zeta(t)\in X_1(t)$, $\eta(t,\zeta(t))=P_2(t)\eta(t,\zeta(t))\in X_2(t)$ для всех $t\in[t_0,\omega)$, а функция $x(t)=\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t))$ является решением ДАУ (1.1) на $[t_0,\omega)$ и удовлетворяет начальному условию (1.3). Из единственности решения $u=\eta(t,z)$ уравнения (2.11) и единственности решения $z=\zeta(t)$ уравнения (2.13) следует единственность решения $z=\zeta(t)$, $u=\eta(t,\zeta(t))$ системы (2.9), (2.10) и, следовательно, решения $x(t)$ ДАУ (1.1) на $[t_0,\omega)$.

В силу теорем о продолжении решения либо $\omega=\infty$, т.е. максимальный интервал существования решения $z=\zeta(t)$ уравнения (2.13) совпадает с $[t_0,\infty)$, либо $\omega<\infty$ и $\lim\limits_{t\to\omega-0}\|\zeta(t)\|=\infty$, т.е. решение имеет конечное время определения $[t_0,\omega)$. Докажем, что $\omega=\infty$. Напомним, что $\zeta(t)=P_1(t)x(t)=x_{p_1}(t)$, $\eta(t,\zeta(t))=P_2(t)x(t)=x_{p_2}(t)$, где $x(t)=\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t))$ – решение ДАУ (1.1), а также, что ДАУ (1.1) эквивалентно системе (1.14), (1.15) и соответственно функции $x_{p_1}(t)=\zeta(t)$, $x_{p_2}(t)=\eta(t,\zeta(t))$ являются решением системы (1.14), (1.15) ($z= =\zeta(t)$ – решение уравнения (2.13), совпадающего с уравнением (1.14) при $x_{p_1}(t)=P_1(t)z(t)$, $x_{p_2}(t)=\eta(t,z(t))$). Допустим, что $\omega<\infty$ (значит, $\lim\limits_{t\to\omega-0}\|\zeta(t)\|=\infty$). Тогда существует $t_1\in(t_0,\omega)$ такое, что при каждом $t\in[t_1,\omega)$ решение $\zeta(t)$ содержится в множестве $E= =\{x\in\mathbb{R}^n\mid(t,x)\in L_{t_0},\ \|P_1(t)x\|\geqslant R_0>R\}\subset U_R^c(0)$. В силу условия 3) для всех $t\geqslant t_1$ производная функции V в силу уравнения (2.13) удовлетворяет неравенству

$$V'_{(2.13)}(t,\zeta(t))=\frac{\partial V}{\partial t}(t,\zeta(t))+\left(\frac{\partial V}{\partial z}(t,\zeta(t)),\widetilde{\Pi}(t,\zeta(t))\right)\leqslant k(t)U(V(t,\zeta(t))). \tag{2.14}$$

Значит, при $t\geqslant t_1$ функция $v(t)=V(t,\zeta(t))$ является положительным решением дифференциального неравенства

$$v'\leqslant k(t)U(v). \tag{2.15}$$

По предположению решение $\zeta(t)$ имеет конечное время определения, следовательно, и функция $v(t)$ имеет конечное время определения. С другой стороны, поскольку, согласно условию 3), $k\in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$, а для функции $U\in C(0,\infty)$ справедливо соотношение $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv=\infty$, то неравенство (2.15) не имеет положительных решений с конечным временем определения, что противоречит предположению. Следовательно, $\omega=\infty$ и решение $\zeta(t)$ является глобальным.

Таким образом, доказано, что функция $x(t)=\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t))$ является единственным решением задачи Коши (1.1), (1.3) на $[t_0,\infty)$. Поскольку (t_0,x_0) – произвольная точка из L_{t_+}, то существование единственного глобального решения доказано для каждой начальной точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$. Теорема доказана.

Аддитивным разложением единицы в s-мерном линейном пространстве Z называется система из s попарно дизъюнктных проекторов $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ (проекторы одномерны), $\Theta_k\in L(Z)$, которые в сумме дают тождественный (единичный) оператор I_Z в Z, т.е. $\Theta_i\Theta_j=\delta_{ij}\Theta_i$ и $I_Z=\sum_{k=1}^s\Theta_k$ [9]. Аддитивное разложение единицы порождает разложение $Z=Z_1\dot{+}\ldots\dot{+}Z_s$ пространства Z в прямую сумму одномерных подпространств $Z_k=\Theta_kZ$, а система векторов $\{z_k\in Z\}_{k=1}^s$ таких, что $z_k\neq0$ и $z_k=\Theta_kz_k$, образует базис в Z.

Ниже дано определение базисной обратимости, введённое в [9].

Определение 2.5. Оператор-функция $\Phi\colon D\to\mathrm{L}(W,Z)$, где W, Z – s-мерные линейные пространства и $D\subset W$, называется *базисно обратимой* на отрезке $[\hat{w},\tilde{w}]\subset D$ (на промежутке $J\subset D$), если для некоторого аддитивного разложения единицы $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ в пространстве Z и для любого набора элементов $\{w^k\}_{k=1}^s\subset[\hat{w},\tilde{w}]$ ($\{w^k\}_{k=1}^s\subset J$) оператор $\Lambda=\sum_{k=1}^s\Theta_k\Phi(w^k)\in \in\mathrm{L}(W,Z)$ имеет обратный $\Lambda^{-1}\in\mathrm{L}(Z,W)$.

Очевидно, что из базисной обратимости отображения Φ на промежутке $J\subset D$ следует обратимость Φ на J, т.е. для каждой точки $w^*\in J$ её образ $\Phi(w^*)$ при отображении Φ является обратимым оператором. Обратное утверждение не верно (см. [10, пример 2.1]), кроме случая, когда пространства W, Z одномерны.

Отметим, что свойство базисной обратимости не зависит от выбора аддитивного разложения единицы или базиса в Z.

Если в условии 2) теоремы 2.1 заменить требование обратимости на требование базисной обратимости, то в условии 1) не нужно требовать единственности $x_{p_2}(t)$ (см. формулировку теоремы ниже).

Теорема 2.2 (глобальная разрешимость ДАУ (1.1)). *Пусть* $f\in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x\in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$ *существует* $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *такой, что верно включение (2.1);*

2) для каждых $t_*\in[t_+,\infty)$, $x^*_{p_1}(t_*)\in X_1(t_*)$, $x^i_{p_2}(t_*)\in X_2(t_*)$, $i=1,2$, *таких, что* $(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x^i_{p_2}(t_*))\in L_{t_+}$, $i=1,2$, *оператор-функция* $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))$, *определённая как*

$$\begin{gathered}\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}\colon X_2(t_*)\to\mathrm{L}(X_2(t_*),Y_2(t_*)),\\ \Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))=\left[\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t_*)f(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x_{p_2}(t_*))]-B(t_*)\right]P_2(t_*),\end{gathered}\tag{2.16}$$

базисно обратима на $[x^1_{p_2}(t_*),x^2_{p_2}(t_*)]$;

3) выполняется условие 3) теоремы 2.1.

Тогда для каждой начальной точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.1), (1.3).*

Замечание 2.1. В случае, если пространство $X_2(t)$ одномерно, условие 2) теоремы 2.2 эквивалентно условию 2) теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.2. Как и в доказательстве теоремы 2.1, рассмотрим отображения (2.5), (2.6) и систему (2.9), (2.10). Частные производные по z и по u отображения $F(t,z,u)$ (2.6) имеют вид (2.7), (2.8), где в (2.8) оператор $\Phi_{t,P_1(t)z,P_2(t)u}$ заменён на оператор-функцию $\Phi_{t,P_1(t)z}(P_2(t)u)$ (см. (2.16)), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_2(t)-I_{\mathbb{R}^n}=G^{-1}(t)\Phi_{t,P_1(t)z}(P_2(t)u)P_2(t)-P_1(t).$$

Обозначим $\tilde\Phi_{t,z}(u)=\Phi_{t,P_1(t)z}(P_2(t)u)$ и введём оператор-функцию

$$\Psi_{t,z}\colon\mathbb{R}^n\to\mathrm{L}(\mathbb{R}^n),\quad \Psi_{t,z}(u)=\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=G^{-1}(t)\tilde\Phi_{t,z}(u)P_2(t)-P_1(t).\tag{2.17}$$

В силу базисной обратимости оператор-функции (2.16) для любых фиксированных $t_*\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u^i_*\in X_2(t_*)$, $i=1,2$, таких, что $F(t_*,z_*,u^i_*)=0$ (т.е. $(t_*,P_1(t_*)z_*+u^i_*)\in L_{t_+}$), оператор-функция $\tilde\Phi_{t_*,z_*}$ является базисно обратимой на $[u^1_*,u^2_*]$. Это свойство понадобится для доказательства леммы 2.2 (см. ниже). Из базисной обратимости оператор-функции $\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u)$ следует также, что для любых фиксированных $t_*\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u_*\in X_2(t_*)$ таких, что $F(t_*,z_*,u_*)=0$, существует обратный оператор $[\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_*)]^{-1}$ и, следовательно, для таких точек (t_*,z_*,u_*) оператор $\Psi_{t_*,z_*}(u_*)$ имеет обратный

$$[\Psi_{t_*,z_*}(u_*)]^{-1}=[\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_*)]^{-1}G(t_*)P_2(t_*)-P_1(t_*)\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^n).$$

Леммы 2.1 и 2.2 остаются в силе, однако доказательство леммы 2.2 меняется.

Докажем лемму 2.2, исходя из условий теоремы 2.2. В силу условия 1) (здесь не требуется существование единственного $x_{p_2}(t)$, в отличие от условия 1) теоремы 2.1) для каждых $t\in\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$ существует $u\in X_2(t)$, при котором $(t,P_1(t)z+u)\in L_{t_+}$, т.е. $F(t,z,u)=0$. Докажем единственность такого элемента u. Рассмотрим произвольные фиксированные $t_*\in\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u^i_*\in X_2(t_*)$, $i=1,2$, такие, что $F(t_*,z_*,u^i_*)=0$. Базисная обратимость оператор-функции $\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u)$ на $[u^1_*,u^2_*]$ означает, что для любого набора точек $\{u_k\}_{k=1}^d\subset\subset[u^1_*,u^2_*]$ оператор

$$\Lambda_1=\sum_{k=1}^d\tilde\Theta_k(t_*)\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_k)\in\mathrm{L}(X_2(t_*),Y_2(t_*)),\tag{2.18}$$

где $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ – некоторое аддитивное разложение единицы в $Y_2(t_*)$ и $d=\dim Y_2(t) = \dim X_2(t)$, $t\in[t_+,\infty)$ (см. замечание 1.1), имеет обратный $\Lambda_1^{-1}\in L(Y_2(t_*),X_2(t_*))$. Поскольку оператор $Q_2(t_*)$ (суженный на $Y_2(t_*)$) является тождественным в $Y_2(t_*)$ (так как $Q_2(t_*)y_*=y_*$ при любом $y_*\in Y_2(t_*)$), то выберем $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ так, чтобы $\sum_{k=1}^d\tilde{\Theta}_k(t_*) = Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$, т.е. $\{\tilde{\Theta}_k(t_*)\}_{k=1}^d$ – аддитивное разложение единицы $Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$ в $Y_2(t_*)$. Тогда система $\{\Theta_k(t_*)\}_{k=1}^d$ проекторов $\Theta_k(t_*)=G^{-1}(t_*)\tilde{\Theta}_k(t_*)G(t_*)|_{X_2(t_*)}$ будет аддитивным разложением единицы $P_2(t_*)|_{X_2(t_*)}$ в $X_2(t_*)$ $(\sum_{k=1}^d\Theta_k(t_*)=P_2(t_*)|_{X_2(t_*)})$. Заметим, что $F(t_*,z_*,u_*)=P_2(t_*)F(t_*,z_*,u_*)$ при любых $t_*\in[t_+,\infty)$, $z_*\in\mathbb{R}^n$, $u_*\in X_2(t_*)$. Проекции $F_k(t_*,z_*,u_*)=\Theta_k(t_*)F(t_*,z_*,u_*)=\Theta_k(t_*)P_2(t_*)F(t_*,z_*,u_*)$, где $u_*\in X_2(t_*)$, являются функциями со значениями в одномерных пространствах $\Theta_k(t_*)X_2(t_*)$, изоморфных $\mathbb{R}$. Согласно формуле конечных приращений существует точка $u_k\in[u_*^1,u_*^2]$ такая, что

$$F_k(t_*,z_*,u_*^2)-F_k(t_*,z_*,u_*^1)=\frac{\partial}{\partial u}F_k(t_*,z_*,u_k)(u_*^2-u_*^1)=$$

$$=\Theta_k(t_*)P_2(t_*)\frac{\partial}{\partial u}F(t_*,z_*,u_k)(u_*^2-u_*^1)=\Theta_k(t_*)P_2(t_*)\Psi_{t_*,z_*}(u_k)(u_*^2-u_*^1),\quad k=\overline{1,d}.$$

Суммируя полученные выражения по k и учитывая равенства $F(t_*,z_*,u_*^i)=0$ $(i=1,2)$, получаем

$$\sum_{k=1}^d\Theta_k(t_*)P_2(t_*)\Psi_{t_*,z_*}(u_k)(u_*^2-u_*^1)=G^{-1}(t_*)\sum_{k=1}^d\tilde{\Theta}_k(t_*)\tilde{\Phi}_{t_*,z_*}(u_k)(u_*^2-u_*^1)=$$

$$=G^{-1}(t_*)\Lambda_1(u_*^2-u_*^1)=0.$$

Поскольку существует оператор Λ_1^{-1}, то $u_*^2=u_*^1$. Лемма доказана.

Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.1 (см. часть доказательства после леммы 2.2). Теорема доказана.

Теорема 2.3 (глобальная разрешимость ДАУ (1.2)). *Пусть* $f\in C^1([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), в котором* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$ *существует единственный* $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *такой, что*

$$(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in\widehat{L}_{t_+};\tag{2.19}$$

2) для каждых $t_*\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}^*(t_*)\in X_1(t_*)$, $x_{p_2}^*(t_*)\in X_2(t_*)$ *таких, что*

$$(t_*,x_{p_1}^*(t_*)+x_{p_2}^*(t_*))\in\widehat{L}_{t_+},$$

оператор $\Phi_{t_*,x_{p_1}^*(t_*),x_{p_2}^*(t_*)}$ *(2.2) обратим;*

3) существуют функция $k\in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$, *функция* $U\in C(0,\infty)$, *удовлетворяющая соотношению* $\int_{v_0}^\infty(U(v))^{-1}\,dv=\infty$ *($v_0>0$ – некоторая константа), число* $R>0$ *и положительно определённая функция* $V\in C^1([t_+,\infty)\times U_R^c(0),\mathbb{R})$ *такие, что*

3.1) $V(t,z)\to\infty$ *равномерно по* t *на каждом конечном полуинтервале* $[a,b)\subset[t_+,\infty)$ *при* $\|z\|\to\infty$;

3.2) для всех $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$, $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *таких, что* $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in\widehat{L}_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\|\geqslant R$, *справедливо неравенство*

$$V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))\leqslant k(t)U(V(t,x_{p_1}(t))),\tag{2.20}$$

где $V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))$ *– производная функции* V *в силу уравнения (1.19) (где* $x_{p_1}(t)=z(t)$*):*

$$V'_{(1.19)}(t,x_{p_1}(t))=\frac{\partial V}{\partial t}(t,x_{p_1}(t))+\bigg(\frac{\partial V}{\partial z}(t,x_{p_1}(t)),G^{-1}(t)[-B(t)x_{p_1}(t)+$$

$$+ Q_1(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))] + P_1'(t)[x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)]\Big). \tag{2.21}$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.2), (1.3).*

Теорема 2.4 (глобальная разрешимость ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), в котором* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены следующие условия:*

1) для каждых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ *существует* $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ *такой, что верно включение (2.19);*

2) для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $x^*_{p_1}(t_*) \in X_1(t_*)$, $x^i_{p_2}(t_*) \in X_2(t_*)$, $i = 1, 2$, *таких, что* $(t_*, x^*_{p_1}(t_*) + x^i_{p_2}(t_*)) \in \widehat{L}_{t_+}$, $i = 1, 2$, *оператор-функция* $\Phi_{t_*, x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))$ *(2.16) базисно обратима на* $[x^1_{p_2}(t_*), x^2_{p_2}(t_*)]$;

3) выполняется условие 3) теоремы 2.3.

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$ *существует единственное глобальное решение задачи Коши (1.2), (1.3).*

Доказательство сформулированных теорем о глобальной разрешимости для ДАУ (1.2) проводится аналогично доказательству соответствующих теорем для ДАУ (1.1).

Выше представлены теоремы о глобальной разрешимости полулинейных ДАУ без использования глобальных условий Липшица и других подобных ограничений. Это позволяет расширить область применения данных теорем, поскольку полулинейные ДАУ, возникающие при моделировании динамики реальных объектов и процессов, часто содержат нелинейные функции, не удовлетворяющие таким ограничениям. Отметим, что теоремы о глобальной разрешимости (на $[t_0, \infty)$ или на произвольном отрезке $[t_0, T]$) полулинейных ДАУ, содержащие глобальные условия Липшица или другие подобные ограничения, известны (см., например, [1], а также [19], где рассматривается автономное полуявное ДАУ). Как правило, эти условия накладываются на "всю" нелинейную часть ДАУ (относительно фазовых переменных), причём нелинейная "алгебраическая часть" удовлетворяет глобальному условию Липшица с константой, меньшей единицы. Легко проверить, что в этом случае условия приведённых выше теорем выполнены. Ниже показано, что в доказанных выше теоремах о глобальной разрешимости вместо выполнения условий 1), 2) можно потребовать, чтобы нелинейная "алгебраическая часть" ДАУ (для ДАУ (1.1) это нелинейная функция в уравнениях (1.12) или (1.15)) удовлетворяла глобальному условию Липшица с константой меньшей единицы по $x_{p_2}(t)$.

Известны также теоремы о глобальной разрешимости, в которых требуется, чтобы нелинейная "алгебраическая часть" ДАУ не зависела от фазовой переменной (чтобы ДАУ сводилось к системе из явного нелинейного ДУ и линейного алгебраического уравнения). Подобные ограничения в настоящей работе отсутствуют.

Утверждение 2.1. *Теорема 2.1 останется справедливой, если вместо условий 1), 2) потребовать, чтобы существовала константа* $0 \leqslant \alpha < 1$ *такая, что неравенство*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x^1_{p_2}(t)) - G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x^2_{p_2}(t))\| \leqslant \alpha \|x^1_{p_2}(t) - x^2_{p_2}(t)\| \tag{2.22}$$

верно для любых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ *и* $x^i_{p_2}(t) \in X_2(t)$, $i = 1, 2$.

Замечание 2.2. Очевидно, что условие (2.22) можно заменить на следующее: существует константа $0 \leqslant \alpha < 1$ такая, что для любых $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$ и $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}[G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))]P_2(t) \right\| \leqslant \alpha. \tag{2.23}$$

Замечание 2.3. Утверждение, аналогичное утверждению 2.1, имеет место для теоремы 2.3 (условия (2.22) и (2.23) не меняются).

Доказательство утверждения. Обозначим

$$W(t, z, u) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, P_1(t)z + P_2(t)u) - A'(t)P_1(t)z] \tag{2.24}$$

и запишем уравнение (2.11), т.е. $F(t,z,u)=0$, где $F(t,z,u)=W(t,z,u)-u$ (см. (2.6)), в виде

$$u=W(t,z,u). \tag{2.25}$$

Очевидно, что отображение $W(t,z,u)$ непрерывно по (t,z,u) и имеет непрерывные частные производные первого порядка по z и по u на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Заметим, что если для u выполняется (2.25) (или (2.11)), то $P_1(t)u\equiv 0$, т.е. $u\in X_2(t)$, и $P_2(t)u=W(t,z,u)=W(t,z,P_2(t)u)$. Далее будем рассматривать отображение $W(t,z,u)$ как отображение $W\colon [t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\times X_2(t)\to X_2(t)$. В силу условия (2.22) (которое можно заменить на (2.23)) существует константа $0\leqslant\alpha<1$ такая, что

$$\|W(t,z,u_1)-W(t,z,u_2)\|\leqslant\alpha\|u_1-u_2\| \tag{2.26}$$

для любых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u_i\in X_2(t)$, $i=1,2$ (заметим, что $W(t,z,u)=W(t,P_1(t)z,u)$). Следовательно, для каждых $t\in[t_+,\infty)$ и $z\in\mathbb{R}^n$ отображение $W(t,z,u)$ является сжимающим по u в $X_2(t)$. Несложно убедиться, что вследствие непрерывности $f(t,x)$, $G^{-1}(t)$, $Q_2(t)$, $A'(t)$ и $P_j(t)$, $j=1,2$, при каждом $u_*\in X_2(t_*)$ отображение $W_{u_*}(t,z)=W(t,z,u_*)$ является непрерывным по (t,z) для любой точки $(t,z)\in[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Следовательно, по теоремам о неподвижной точке [18, с. 108, 110] существует единственная функция $\eta\colon [t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n\to$ $\to X_2(t)$ такая, что $\eta(t,z)=W(t,z,\eta(t,z))$, и $\eta(t,z)$ непрерывна на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Поскольку функция $u=\eta(t,z)$ является единственным решением уравнения (2.25), то она также является единственным решением уравнения (2.11) (относительно $u\in X_2(t)$), и для любой точки $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$ справедливо равенство $\eta(t_0,P_1(t_0)x_0)=P_2(t_0)x_0$.

Для частных производных первого порядка по z и по u отображения $W(t,z,u)$ имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial z}W(t,z,u)=\frac{\partial}{\partial z}F(t,z,u)$$

(см. формулу (2.7)),

$$\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)=G^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial x}[Q_2(t)f(t,P_1(t)z+P_2(t)u)]P_2(t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)=\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)-I_{\mathbb{R}^n}$$

(см. формулу (2.8)). Из (2.26) (так же, как из (2.23)) следует, что

$$\left\|\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)\right\|\leqslant\alpha<1 \tag{2.27}$$

для любых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u\in X_2(t)$. Заметим, что $P_2(t)$ является тождественным оператором в $X_2(t)$. Следовательно, в силу (2.27) получаем, что (по теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному) для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u\in X_2(t)$ существует линейный непрерывный обратный оператор $[\partial W(t,z,u)/\partial u-P_2(t)]^{-1}\colon X_2(t)\to X_2(t)$ и этот оператор непрерывен как оператор-функция по (t,z,u). Поскольку функция $\eta(t,z)$ является решением уравнения $W(t,z,u)-P_2(t)u=0$ $(F(t,z,P_2(t)u)=0)$ или $W(t,z,u)-u=0$ $(F(t,z,u)=0$ (см. (2.11))) относительно $u\in X_2(t)$ (напомним, что если u удовлетворяет (2.25) или (2.11), то $u\in X_2(t)$), то по теореме о дифференцируемости неявной функции она непрерывно дифференцируема по z на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Кроме того, для каждых $t\in[t_+,\infty)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $u\in X_2(t)$ существует обратный оператор

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}F(t,z,u)\right]^{-1}=\left[\frac{\partial}{\partial u}W(t,z,u)-P_2(t)\right]^{-1}P_2(t)-P_1(t)\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^n),$$

непрерывный как оператор-функция по (t,z,u), и, следовательно, непрерывность по (t,z) и непрерывная дифференцируемость по z неявно заданной функции $\eta(t,z)$ могут быть установлены так же, как в доказательстве теоремы 2.1. Таким образом, функция $\eta\colon [t_+,\infty)\times$ $\times\mathbb{R}^n\to X_2(t)$ непрерывна по (t,z) и непрерывно дифференцируема по z на $[t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n$, а $u=\eta(t,z)$ является решением уравнения (2.11).

Функция $\eta(t,z)$ с такими же свойствами получена и в доказательстве теоремы 2.1 с использованием условий 1), 2). В остальном доказательства данного утверждения и теоремы 2.1 аналогичны. Утверждение доказано.

Очевидно, что утверждение, аналогичное доказанному выше, имеет место для теоремы 2.2 и её условий 1), 2).

Заметим, что если условия утверждения 2.1 выполнены, то условия теорем 2.1 и 2.2 также будут выполнены (это следует из доказательства утверждения). Таким образом, теоремы 2.1 и 2.2 накладывают более слабые ограничения на нелинейную часть ДАУ, чем утверждение 2.1.

2.2. Устойчивость по Лагранжу ДАУ (ограниченность решений).

Теорема 2.5 (устойчивость по Лагранжу ДАУ (1.1)). *Пусть* $f\in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x\in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A,B\in C^1([t_+,\infty),\mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t)+B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2\in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2, а также условие*

3) существуют функции $k\in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$ *и* $U\in C(0,\infty)$, *для которых* $\int_{t_+}^{\infty}k(t)\,dt<\infty$ *и* $\int_{v_0}^{\infty}(U(v))^{-1}\,dv=\infty$ *($v_0>0$ – некоторая константа), число $R>0$ и положительно определённая функция* $V\in C^1([t_+,\infty)\times U_R^c(0),\mathbb{R})$ *такие, что*

3.1) $V(t,z)\to\infty$ *равномерно по t на $[t_+,\infty)$ при $\|z\|\to\infty$;*

3.2) для всех $t\in[t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t)\in X_1(t)$, $x_{p_2}(t)\in X_2(t)$ *таких, что* $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\|\geqslant R$, *справедливо неравенство (2.3).*

Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

4.a) для всех $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$, $\|x_{p_1}(t)\|\leqslant M<\infty$ *(M – произвольная константа), выполнено неравенство*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))-A'(t)x_{p_1}(t)]\|\leqslant K_M<\infty, \tag{2.28}$$

где $K_M=K(M)$ – некоторая константа;

4.b) для всех $(t,x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\in L_{t_+}$, $\|x_{p_1}(t)\|\leqslant M<\infty$ *(M – произвольная константа), справедливо неравенство* $\|x_{p_2}(t)\|\leqslant K_M<\infty$, *где $K_M=K(M)$ – некоторая константа;*

4.c) для каждого $t_*\in[t_+,\infty)$ *существует* $\tilde{x}_{p_2}(t_*)\in X_2(t_*)$ *такой, что для каждых* $x^*_{p_i}(t_*)\in X_i(t_*)$, $i=1,2$, *для которых* $(t_*,x^*_{p_1}(t_*)+x^*_{p_2}(t_*))\in L_{t_+}$, *оператор-функция* $\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2}(t_*))$ *(2.16) базисно обратима на* $(\tilde{x}_{p_2}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)]$ *и соответствующий обратный оператор (т.е. оператор* $\Lambda_1^{-1}=[\sum_{k=1}^{d}\tilde{\Theta}_k(t_*)\Phi_{t_*,x^*_{p_1}(t_*)}(x_{p_2,k}(t_*))]^{-1}$, *обратный к оператору (2.18), где* $z_*=x^*_{p_1}(t_*)$, $\{u_k=x_{p_2,k}(t_*)\}_{k=1}^{d}$ *– произвольный набор элементов из* $(\tilde{x}_{p_2}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)]$*) равномерно ограничен по* t_*, $x_{p_2}(t_*)$ *(по* t_*, $x_{p_2,k}(t_*)$*) на* $[t_+,\infty)$, $(\tilde{x}_{p_2}(t_*),x^*_{p_2}(t_*)]$, *а также выполнены неравенства* $\sup\limits_{t_*\in[t_+,\infty)}\|\tilde{x}_{p_2}(t_*)\|<\infty$ *и*

$$\sup_{\substack{t\in[t_+,\infty)\\ \|x_{p_1}(t)\|\leqslant M<\infty}}\|G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t,x_{p_1}(t)+\tilde{x}_{p_2}(t_*))-A'(t)x_{p_1}(t)]\|<\infty \tag{2.29}$$

(M – произвольная константа).

Тогда ДАУ (1.1) устойчиво по Лагранжу.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 2.1, доказываем, что $z=\zeta(t)$ и $u=\eta(t,\zeta(t))$ $(\zeta(t)\in X_1(t),\ \eta(t,\zeta(t))\in X_2(t),\ (t,\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t)))\in L_{t_0}$ для всех $t\in[t_0,\infty))$ являются единственным решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0,\infty)$, удовлетворяющим начальным условиям $\zeta(t_0)=P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0,\zeta(t_0))=P_2(t_0)x_0$, где $(t_0,x_0)\in L_{t_+}$, и $x(t)=\zeta(t)+\eta(t,\zeta(t))$ является единственным решением задачи Коши (1.1), (1.3).

Докажем, что решение $z=\zeta(t)$ уравнения (2.13) ограничено на $[t_0,\infty)$. Допустим, что $\zeta(t)$ не ограничено на $[t_0,\infty)$. Значит, существует последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[t_0,\infty)$ такая, что $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ и $\|\zeta(t_k)\|\to\infty$ при $k\to\infty$. Тогда функция $v(t)=V(t,\zeta(t))$ будет положительным неограниченным при $t\geqslant t_1$ решением дифференциального неравенства (2.15), но в силу условия 3) (вследствие свойств функций $k(t)$, $U(v)$) неравенство (2.15) не имеет положительных неограниченных при $t \geqslant t_1$ решений, что приводит к противоречию. Таким образом, существует константа M такая, что

$$\|\zeta(t)\| \leqslant M, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{2.30}$$

Поскольку уравнение (2.10) можно записать в виде

$$u(t) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, P_1(t)z(t) + P_2(t)u(t)) - A'(t)z(t)],$$

то

$$\eta(t, \zeta(t)) = G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))) - A'(t)\zeta(t)]. \tag{2.31}$$

Следовательно, в силу оценки (2.30) и условия 4.a) существует константа K_M, при которой для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполнена оценка

$$\|\eta(t, \zeta(t))\| \leqslant K_M. \tag{2.32}$$

Учитывая оценку (2.30), из условия 4.b) также заключаем, что существует константа K_M, при которой для любого $t \in [t_0, \infty)$ справедлива оценка (2.32).

Теперь докажем ограниченность $\|\eta(t, \zeta(t))\|$, используя условие 4.c). Возьмём произвольные фиксированные $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$, для которых выполняется равенство $F(t_*, z_*, u_*) = 0$ (т.е. $(t_*, P_1(t_*)z_* + u_*) \in L_{t_+}$). В силу условия 4.c) существует элемент $\tilde u_* = \tilde u(t_*) \in X_2(t_*)$ такой, что оператор-функция $\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u) = \Phi_{t_*,P_1(t_*)z_*}(P_2(t_*)u)$ (2.16) базисно обратима на $(\tilde u_*, u_*]$ и соответствующий обратный оператор, т.е. оператор

$$\Lambda_1^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{d} \tilde\Theta_k(t_*)\tilde\Phi_{t_*,z_*}(u_k)\right]^{-1} = \Lambda_1^{-1}(t_*, z_*, u_k) \in L(Y_2(t_*), X_2(t_*)),$$

обратный к оператору (2.18), где $\{u_k\}_{k=1}^d$ – произвольный набор элементов из $(\tilde u_*, u_*]$ $(d = \dim X_2(t_*))$, $\{\tilde\Theta_k(t_*)\}_{k=1}^d$ – некоторое аддитивное разложение единицы в $Y_2(t_*)$, равномерно ограничен по t_* и u_k на $[t_+, \infty)$ и $(\tilde u_*, u_*]$ соответственно. Как в доказательстве леммы 2.2, проведённом в доказательстве теоремы 2.2, выберем $\{\tilde\Theta_k(t_*)\}_{k=1}^d$ так, чтобы $\sum_{k=1}^d \tilde\Theta_k(t_*) = Q_2(t_*)|_{Y_2(t_*)}$, и возьмём аддитивное разложение единицы $P_2(t_*)|_{X_2(t_*)}$ в $X_2(t_*)$ вида $\{\Theta_k(t_*) = G^{-1}(t_*)\tilde\Theta_k(t_*)G(t_*)|_{X_2(t_*)}\}_{k=1}^d$. Рассмотрим проекции

$$F_k(t_*, z_*, u) = \Theta_k(t_*)F(t_*, z_*, u) = \Theta_k(t_*)P_2(t_*)F(t_*, z_*, u),$$

где $u \in X_2(t_*)$. Согласно формуле конечных приращений существует точка $u_k \in (\tilde u_*, u_*]$ такая, что имеют место равенства

$$F_k(t_*, z_*, u_*) - F_k(t_*, z_*, \tilde u_*) = \frac{\partial}{\partial u}F_k(t_*, z_*, u_k)(u_* - \tilde u_*) = \Theta_k(t_*)P_2(t_*)\Psi_{t_*,z_*}(u_k)(u_* - \tilde u_*),$$

$k = \overline{1, d}$, где оператор-функция $\Psi_{t,z}$ определена в (2.17). Поскольку $F_k(t_*, z_*, u_*) = 0$, то, суммируя полученные равенства по k, получаем, что существует набор $\{u_k\}_{k=1}^d \subset (\tilde u_*, u_*]$ такой, что $-F(t_*, z_*, \tilde u_*) = G^{-1}(t_*)\Lambda_1(u_* - \tilde u_*)$. Так как в силу условия 4.c) существует Λ_1^{-1}, то

$$u_* = \tilde u_* - \Lambda_1^{-1}G(t_*)F(t_*, z_*, \tilde u_*) = \tilde u_* - \Lambda_1^{-1}(Q_2(t_*)[f(t_*, P_1(t_*)z_* + P_2(t_*)\tilde u_*) - A'(t_*)z_*] - G(t_*)\tilde u_*).$$

Это равенство справедливо для любых фиксированных $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$, для которых $F(t_*, z_*, u_*) = 0$. Следовательно, для каждого $t_* \in [t_0, \infty)$ выполнено равенство

$$\eta(t_*, \zeta(t_*)) = \tilde u_* - \Lambda_1^{-1}G(t_*)F(t_*, z_*, \tilde u_*) =$$
$$= \tilde u_* - \Lambda_1^{-1}G(t_*)(G^{-1}(t_*)Q_2(t_*)[f(t_*, \zeta(t_*) + P_2(t_*)\tilde u_*) - A'(t_*)\zeta(t_*)] - \tilde u_*).$$

В силу условия 4.c) множество элементов $\tilde{u}_* = \tilde{u}(t_*)$ ограничено, т.е. существует константа $\tilde{M}$ такая, что $\|\tilde{u}_*\| = \|\tilde{u}(t_*)\| \leqslant \tilde{M} < \infty$ для каждого $t_* \in [t_+, \infty)$. Из непрерывности нелинейного отображения $\Lambda_1^{-1} = \Lambda_1^{-1}(t_*, z_*, u_k)$ по t_*, z_* и компактности шара $\|\zeta(t_*)\| \leqslant M$, $t_* \in [t_0, \infty)$, где $z = \zeta(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$ $(\zeta(t) \in X_1(t))$, следует равномерная непрерывность Λ_1^{-1} по z_* (по $P_1(t_*)z_*$) и его ограниченность на $\|z_*\| = \|\zeta(t_*)\| \leqslant M$. По условию 4.c) оператор $\Lambda_1^{-1} = \Lambda_1^{-1}(t_*, z_*, u_k) \in L(Y_2(t_*), X_2(t_*))$ равномерно ограничен по t_* и u_k на $[t_+, \infty)$ и $(\tilde{u}_*, u_*]$ соответственно. Следовательно, существует константа $N > 0$, не зависящая от t_*, z_*, u_k, такая, что $\|\Lambda_1^{-1}\| \leqslant N$ для каждых $t_* \in [t_+, \infty)$, $z_* \in \mathbb{R}^n$, $u_* \in X_2(t_*)$, удовлетворяющих равенству $F(t_*, z_*, u_*) = 0$, и любого набора $\{u_k\}_{k=1}^d \subset (\tilde{u}_*, u_*]$. Таким образом, получаем, что

$$\|\eta(t_*, \zeta(t_*))\| \leqslant \tilde{M}(1 + N\|G(t_*)\|) + \|G^{-1}(t_*)Q_2(t_*)[f(t_*, \zeta(t_*) + P_2(t_*)\tilde{u}_*) - A'(t_*)\zeta(t_*)]\|$$

для каждого $t_* \in [t_+, \infty)$. Тогда из неравенств (2.30), (2.29) следует, что существует константа K_M такая, что $\|\eta(t_*, \zeta(t_*))\| \leqslant K_M$ для всех $t_* \in [t_+, \infty)$.

Учитывая сказанное выше, получаем: $\|x(t)\| = \|\zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))\| \leqslant M + K_M$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, т.е. решение $x(t)$ ограничено на $[t_0, \infty)$ и, значит, устойчиво по Лагранжу. Поскольку для каждой согласованной начальной точки (t_0, x_0), т.е. для $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.3), которое устойчиво по Лагранжу, то каждое решение задачи Коши (1.1), (1.3) устойчиво по Лагранжу (напомним, что задача Коши (1.1), (1.3) имеет решение только для начальных точек $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$). Таким образом, уравнение (1.1) устойчиво по Лагранжу. Теорема доказана.

Замечание 2.4. Условие 4.a) является следствием условия 4.b), так как уравнение

$$Q_2(t)[A'(t)P_1(t)x + B(t)P_2(t)x - f(t, x)] = 0,$$

определяющее многообразие L_{t_+}, можно записать в виде

$$G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - A'(t)x_{p_1}(t)] = x_{p_2}(t)$$

(см. формулу (1.15)).

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей.

Теорема 2.6 (устойчивость по Лагранжу ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4, а также выполнено условие 3) теоремы 2.5, где* L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и неравенство (2.3) заменено на (2.20). Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

либо условие 4.a) теоремы 2.5, где L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и неравенство (2.28) заменено на*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t))\| \leqslant K_M < \infty,$$

либо условие 4.b) теоремы 2.5, где L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$,

либо условие 4.c) теоремы 2.5, где L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и требование (2.29) заменено на*

$$\sup_{\substack{t \in [t_+, \infty) \\ \|x_{p_1}(t)\| \leqslant M < \infty}} \|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t) + \tilde{x}_{p_2}(t_*))\| < \infty.$$

Тогда ДАУ (1.2) устойчиво по Лагранжу.

2.3. Диссипативность ДАУ (предельная ограниченность решений). Предельно ограниченные (или ограниченные в пределе) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые также называют диссипативными системами (или D-системами), исследовались, в частности, в [13, 14, 20]. Сформулированные ниже определения для ДАУ подобны тем, что приведены в [13; 14, с. 144; 20, с. 17] для систем (явных) ОДУ.

Определение 2.6. Решения ДАУ (1.1) называются *предельно ограниченными* (или *ограниченными в пределе*), если существует константа $K > 0$ (константа не зависит от выбора решения, т.е. от выбора начальных значений t_0, x_0) и для каждого решения $x(t)$ с начальной точкой (t_0, x_0) существует число $\tau = \tau(t_0, x_0) \geqslant t_0$ такие, что $\|x(t)\| < K$ для всех $t \in [t_0 + \tau, \infty)$.

ДАУ (1.1) называется *предельно ограниченным* или *диссипативным*, если для любой согласованной начальной точки (t_0, x_0) существует глобальное решение задачи Коши (1.1), (1.3) и все решения предельно ограничены.

Определение 2.7. Если в определении 2.6 число τ не зависит от выбора t_0, т.е. $\tau = \tau(x_0)$, то решения ДАУ (1.1) называются *равномерно предельно ограниченными* и, соответственно, ДАУ (1.1) называется *равномерно предельно ограниченным* или *равномерно диссипативным.*

Аналогичные определения формулируются для ДАУ (1.2).

Теорема 2.7 (равномерная предельная ограниченность (диссипативность) ДАУ (1.1)). *Пусть* $f \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), где* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия:*

3) существуют число $R > 0$, *положительно определённая функция* $V \in C^1([t_+, \infty) \times U_R^c(0), \mathbb{R})$, *неубывающая функция* $U_0 \in C([0, \infty))$, *возрастающая функция* $U_1 \in C([0, \infty))$ *и функция* $U_2 \in C([0, \infty))$ *такие, что* $U_0(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$, $U_2(r) > 0$ *при* $r > 0$ *и для всех* $t \in [t_+, \infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$, $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$, *для которых* $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}$ *и* $\|x_{p_1}(t)\| \geqslant R$, *выполнены условие* $U_0(\|x_{p_1}(t)\|) \leqslant V(t, x_{p_1}(t)) \leqslant U_1(\|x_{p_1}(t)\|)$ *и одно из следующих неравенств:*

3.a) $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -U_2(\|x_{p_1}(t)\|)$ $(V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *имеет вид (2.4));*

3.b) $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -U_2((H(t)x_{p_1}(t), x_{p_1}(t)))$, *где* $H \in C([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ – *некоторая положительно определённая самосопряжённая оператор-функция, для которой*

$$\sup_{t \in [t_+, \infty)} \|H(t)\| < \infty;$$

3.c) $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \leqslant -CV(t, x_{p_1}(t))$, *где* $C > 0$ – *некоторая константа;*

4) существуют константа $c > 0$ *и число* $T > t_+$ *такие, что*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)[f(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) - A'(t)x_{p_1}(t)]\| \leqslant c\|x_{p_1}(t)\| \tag{2.33}$$

для всех $(t, x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)) \in L_T$.

Тогда ДАУ (1.1) равномерно предельно ограничено (равномерно диссипативно).

Доказательство. Как и в доказательстве теорем 2.1 или 2.2 получаем, что для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ существует единственное глобальное решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ задачи Коши (1.1), (1.3), где $\zeta(t) = P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$, $\eta(t, \zeta(t)) = P_2(t)x(t) = x_{p_2}(t)$. Действительно, поскольку в силу условия 3) вместо неравенства (2.14) выполнено одно из следующих неравенств: $V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \leqslant -U_2(\|\zeta(t)\|)$, $V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \leqslant -U_2((H(t)\zeta(t), \zeta(t)))$, $V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \leqslant -CV(t, \zeta(t))$, то вместо неравенства (2.15) выполняется неравенство $v' \leqslant 0$, которое также не имеет положительных решений с конечным временем определения. В остальном доказательство этого факта совпадает с тем, что приведено в доказательстве теорем 2.1 или 2.2.

В силу условия 3) с неравенствами 3.a) и 3.c), как и в доказательстве теоремы Йошизавы [14, теорема 10.4] и следствия из неё, получаем, что решения ОДУ (2.13) равномерно предельно ограничены, т.е. существует константа $N > 0$ и для каждого решения $z = \zeta(t)$, удовлетворяющего начальному условию $\zeta(t_0) = P_1(t_0)x_0$, существует число $\tau_1 = \tau_1(x_0) \geqslant t_0$ такие, что $\|\zeta(t)\| < N$ при всех $t \geqslant t_0 + \tau_1$. Нетрудно проверить, что из условия 3) с неравенством 3.b) также следует, что решения ОДУ (2.13) равномерно предельно ограничены. Здесь используется тот факт, что вследствие свойств оператора $H(t)$ существуют константы $H_0, H_1 > 0$ такие, что $H_0\|z\|^2 \leqslant (H(t)z, z) \leqslant H_1\|z\|^2$ для всех $t \in [t_+, \infty)$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Вследствие условия 4) и равенства (2.31) существуют такие константа $c > 0$ и число $\tau_2 = \tau_2(x_0) > t_0$, что $\|\eta(t, \zeta(t))\| \leqslant c\|\zeta(t)\| < cN$ для всех $t \geqslant \tau_2$. Таким образом, для каждого решения с начальной точкой (t_0, x_0) существует число $\tau = \tau(x_0) \geqslant t_0$ такое, что

$$\|x(t)\| \leqslant \|\zeta(t)\| + \|\eta(t,\zeta(t))\| < (1+c)N$$

для всех $t \in [t_0+\tau, \infty)$, где константа $(1+c)N > 0$ не зависит от t_0, x_0. Следовательно, уравнение (1.1) равномерно предельно ограничено. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.8 (равномерная предельная ограниченность (диссипативность) ДАУ (1.2)). *Пусть $f \in C^1([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, пучок $\lambda A(t)+B(t)$ удовлетворяет условию (1.4), где $C_2 \in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$, и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4. Пусть, кроме того, выполнены условие 3) теоремы 2.7, где L_{t_+} заменено на $\widehat{L}_{t_+}$ и производная $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ заменена на производную $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ (2.21), и условие 4) теоремы 2.7, где L_T заменено на $\widehat{L}_T$ и неравенство (2.33) заменено на*

$$\|G^{-1}(t)Q_2(t)f(t, x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t))\| \leqslant c\|x_{p_1}(t)\|.$$

Тогда ДАУ (1.2) равномерно предельно ограничено (равномерно диссипативно).

2.4. Неустойчивость по Лагранжу ДАУ (отсутствие глобальных решений). Теорема о неустойчивости по Лагранжу даёт достаточные условия, при выполнении которых ДАУ не имеет глобальных решений, точнее, условия, при которых ДАУ неустойчиво по Лагранжу для согласованных начальных точек (t_0, x_0), где компонента $P_1(t_0)x_0$ из определённой области (см. определения 2.2, 2.4). Кроме того, из неустойчивости решения по Лагранжу следует его неустойчивость по Ляпунову, а из неустойчивости решения по Ляпунову в общем случае не следует его неустойчивость по Лагранжу.

Теорема 2.9 (неустойчивость по Лагранжу ДАУ (1.1)). *Пусть $f \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial f/\partial x \in C([t_+,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, $A, B \in C^1([t_+,\infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$ и пучок $\lambda A(t)+B(t)$ удовлетворяет условию (1.4), где $C_2 \in C^1([t_+,\infty),(0,\infty))$. Пусть, кроме того, выполнены условия 1), 2) теоремы 2.1 или 1), 2) теоремы 2.2, а также следующие условия:*

3) существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $0 \notin \Omega$ и компонента $P_1(t)x(t)$ каждого существующего решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$, где $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, всё время остаётся в Ω;

4) существуют функции $k \in C([t_+,\infty),\mathbb{R})$ и $U \in C(0,\infty)$, для которых

$$\int\limits_{t_+}^{\infty} k(t)\,dt = \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{1}{U(v)}\,dv < \infty$$

($v_0 > 0$ – некоторая константа), и положительно определённая функция $V \in C^1([t_+,\infty)\times\Omega, \mathbb{R})$ такие, что для всех $t \in [t_+,\infty)$, $x_{p_1}(t) \in X_1(t)$, $x_{p_2}(t) \in X_2(t)$, для которых $(t, x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t)) \in L_{t_+}$ и $x_{p_1}(t) \in \Omega$, выполнено неравенство

$$V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \geqslant k(t)U(V(t, x_{p_1}(t))) \quad (V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t)) \ \text{имеет вид (2.4)}).$$

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ такой, что $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.3), и это решение неустойчиво по Лагранжу.

Доказательство. Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теореме 2.1, устанавливается, что существует единственное решение $z = \zeta(t)$ уравнения (2.13) на $[t_0, \omega)$, удовлетворяющее начальному условию $\zeta(t_0) = P_1(t_0)x_0$, где $[t_0, \omega)$ – максимальный промежуток существования решения. Далее, как и в доказательстве теоремы 2.1, получаем, что существует единственное решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ ДАУ (1.1) на $[t_0, \omega)$, удовлетворяющее начальному условию (1.3). Напомним, что функции $z = \zeta(t)$ и $u = \eta(t, \zeta(t))$ $(\zeta(t) \in X_1(t),\ \eta(t,\zeta(t)) \in X_2(t))$ являются единственным решением системы (2.9), (2.10) на $[t_0, \omega)$, удовлетворяющим начальным условиям $\zeta(t_0) = P_1(t_0)x_0$, $\eta(t_0, \zeta(t_0)) = P_2(t_0)x_0$.

Докажем, что решение $x(t)$ неустойчиво по Лагранжу, т.е. имеет конечное время определения ($\omega < \infty$). Согласно условию 3) существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $0 \notin \Omega$ и компонента $P_1(t)x(t) = x_{p_1}(t)$ каждого существующего решения $x(t)$ с начальной точкой $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$, где $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, все время остаётся в Ω. Поскольку $\zeta(t) = P_1(t)x(t)$, то каждое решение $\zeta(t)$ уравнения (2.13), начинающееся в области Ω, все время остаётся в ней. В силу условия 4) для всех $t \geqslant t_0$ и $\zeta(t) \in \Omega$ выполняется неравенство

$$V'_{(2.13)}(t, \zeta(t)) \geqslant k(t)U(V(t, \zeta(t))).$$

Значит, при $t \geqslant t_0$ функция $v(t) = V(t, \zeta(t))$ является положительным решением дифференциального неравенства

$$v' \geqslant k(t)U(v). \tag{2.34}$$

Так как в силу условия 4) (в силу свойств функций $k(t)$, $U(v)$) неравенство (2.34) не имеет положительных неограниченно продолжаемых решений, то, как и в доказательстве теоремы [13, с. 109, теорема XIV], получаем, что решение $\zeta(t)$ имеет конечное время определения, т.е. $\omega < \infty$ и $\lim\limits_{t\to\omega-0} \|\zeta(t)\| = \infty$. Поэтому решение $x(t) = \zeta(t) + \eta(t, \zeta(t))$ задачи Коши (1.1), (1.3) также имеет конечное время определения $[t_0, \omega)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.10 (неустойчивость по Лагранжу ДАУ (1.2)). *Пусть* $f \in C^1([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A, B \in C^1([t_+, \infty), \mathrm{L}(\mathbb{R}^n))$, *пучок* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет условию (1.4), в котором* $C_2 \in C^1([t_+, \infty), (0, \infty))$, *и выполнены условия 1), 2) теоремы 2.3 или 1), 2) теоремы 2.4. Пусть, кроме того, выполнены условия 3), 4) теоремы 2.9, где* L_{t_+} *заменено на* $\widehat{L}_{t_+}$ *и производная* $V'_{(1.14)}(t, x_{p_1}(t))$ *заменена на* $V'_{(1.19)}(t, x_{p_1}(t))$ *(2.21).*

Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \widehat{L}_{t_+}$ *такой, что* $P_1(t_0)x_0 \in \Omega$, *существует единственное решение задачи Коши (1.2), (1.3), и это решение неустойчиво по Лагранжу.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке Национальной академии наук Украины (проект “Качественный, асимптотический и численный анализ различных классов дифференциальных уравнений и динамических систем, их классификация и практическое применение”, государственный регистрационный номер 0119U102376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск, 2006.
2. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
3. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Heidelberg, 2013.
4. *Riaza R.* Differential-Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications. Hackensack, New York, 2008.
5. *Gliklikh Yu.E.* On global in time solutions for differential-algebraic equations // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2014. Т. 7. № 3. С. 33–39.
6. *Баев А.Д., Зубова С.П., Усков В.И.* Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 134–140.
7. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений в условиях неопределённости // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 881–890.
8. *Филипковская М.С.* Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике // Вісн. Харківськ. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2012. Т. 19. № 1015. С. 306–319.
9. *Руткас А.Г., Филипковская М.С.* Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений // Журн. обчисл. та прикл. математики. 2013. № 1 (111). С. 135–145.
10. *Filipkovska M.S.* Lagrange stability of semilinear differential-algebraic equations and application to nonlinear electrical circuits // J. of Math. Phys., Anal., Geom. 2018. V. 14. № 2. P. 169–196.

11. *Filipkovskaya M.S.* Lagrange stability and instability of irregular semilinear differential-algebraic equations and applications // Ukr. Math. J. 2018. V. 70. № 6. P. 947–979.
12. *Rutkas A.G., Vlasenko L.A.* Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations // Nonlin. Oscillations. 2001. V. 4. № 2. P. 252–263.
13. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
14. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo, 1966.
15. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
16. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Berlin, 1966.
17. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
18. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. М., 1972.
19. *Куликов Г.Ю.* О численном решении автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 4. С. 522–540.
20. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

Физико-технический институт низких температур
им. Б.И. Веркина НАН Украины, г. Харьков

Поступила в редакцию 02.01.2020 г.
После доработки 28.08.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 43–60

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.922+517.926.4+517.977.1

ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СЛАГАЕМЫХ В РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

© 2021 г. А. А. Щеглова

Рассматривается управляемая линейная система дифференциально-алгебраических уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, которая может иметь произвольно высокий индекс неразрешённости. Предполагается, что матрица при производной искомой вектор-функции имеет постоянный ранг. Доказана теорема о существовании решения в классе обобщённых функций типа Соболева–Шварца, представимых в виде суммы регулярной обобщённой функции и линейной комбинации дельта-функции и её производных. Получены условия существования управления в виде обратной связи такого, что общее решение замкнутой системы не содержит сингулярных слагаемых. Показана связь этих условий со свойством импульсной управляемости.

DOI: 10.31857/S0374064121010052

Введение. Рассматривается управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t)+B(t)x(t)+U(t)u(t)=0, \quad t\in\mathbb{R}\equiv(-\infty,+\infty), \tag{0.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ – известные $n\times n$-матрицы; $x(t)$ – искомая n-мерная вектор-функция; $U(t)$ – заданная $n\times l$-матрица; $u(t)$ – l-мерная вектор-функция управления. Предполагается, что $\det A(t)\equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Такие системы называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Сложность внутренней структуры ДАУ характеризует целочисленная величина r $(0\leqslant r\leqslant n)$, называемая *индексом неразрешённости* (кратко *индексом*). Точное определение индекса, используемое в данной работе, будет сформулировано в п. 1.

Известно, что решение ДАУ в классе обобщённых функций может обладать импульсным поведением. В стационарном случае этот факт установлен в работах [1, 2]. В них же показано, что решение в пространстве распределений представимо в виде суммы регулярной обобщённой функции и линейной комбинации дельта-функции и её производных.

В англоязычной литературе ДАУ, решения которых не содержат дельта-функции и её производных, называются системами, свободными от импульсного поведения (impuls-free), что соответствует частному случаю индекса неразрешённости 1. Такие системы удовлетворяют известному критерию "ранг-степень" [3, с. 137].

Целью данной работы является получение для ДАУ (0.1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами условий существования такого управления в виде обратной связи, что общее решение замкнутой системы не содержит сингулярных функций, а также установление связи этих условий со свойством импульсной управляемости системы.

Эта проблема хорошо изучена для стационарных систем с регулярным матричным пучком. Например, в работах [4, 5] анализ базируется на использовании канонической формы Кронекера–Вейерштрасса [6, с. 313].

В работах [7, 8] на основе сильной стандартной канонической формы [9] (которая является аналогом канонической формы Кронекера–Вейерштрасса) изучалась импульсная управляемость ДАУ с вещественно-аналитическими коэффициентами. Там же установлена связь между свойством импульсной управляемости и задачей исключения импульсных слагаемых в решении с помощью соответствующего позиционного управления.

Обе упомянутые выше канонические формы содержат детальную информацию о внутренней структуре ДАУ, достаточную для установления связи между возможностью преобразования системы ДАУ в систему impuls-free и свойством её импульсной управляемости. Для систем с гладкими (в том числе бесконечно дифференцируемыми) коэффициентами структурные формы, обладающие подобным свойством, не известны. Например, форма, используемая в [10], позволяет получить удобное для проверки условие импульсной управляемости для системы вида (0.1), но не может быть применена для исследования возможности исключения сингулярных слагаемых из решения системы. По этой причине получение условий для преобразования ДАУ (0.1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в систему, не обладающую импульсным поведением, по-прежнему актуально. В данной работе эта задача решена для систем произвольно высокого индекса неразрешённости с матрицей $A(t)$ постоянного ранга.

1. Индекс неразрешённости. В этом пункте приводятся вспомогательные сведения из структурной теории нестационарных ДАУ, используемые в дальнейшем при доказательстве теоремы о существовании в пространстве распределений решения системы (0.1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Допустим, что коэффициенты системы (0.1) – достаточно гладкие на $\mathbb{R}$ функции. Пусть s – неотрицательное целое число. Введём в рассмотрение $n(s+1)\times ns$-матрицу

$$\Lambda_s(t)=\begin{pmatrix} O_n^n & O_n^n & \ldots & O_n^n \\ C_1^1A(t) & O_n^n & \ldots & O_n^n \\ C_2^1A'(t)+C_2^2B(t) & C_2^2A(t) & \ldots & O_n^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ C_s^1A^{(s-1)}(t)+C_s^2B^{(s-2)}(t) & C_s^2A^{(s-2)}(t)+C_s^3B^{(s-3)}(t) & \ldots & C_s^sA(t) \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$\Gamma_s(t)=\left(\begin{array}{c||c} C_0^0A(t) & \\ C_1^0A'(t)+C_1^1B(t) & \\ \vdots & \Lambda_s(t) \\ C_s^0A^{(s)}(t)+C_s^1B^{(s-1)}(t) & \end{array}\right),\quad D_s(t)=\big(\,\mathcal{B}(t)\mid\Gamma_s(t)\,\big),$$

имеющие соответственно размеры $n(s+1)\times n(s+1)$ и $n(s+1)\times n(s+2)$. Здесь и далее $C_i^j=i!/(j!(i-j)!)$ – биномиальные коэффициенты, $\mathcal{B}(t)=\operatorname{col}(B(t),B'(t),\ldots,B^{(r)}(t))$. Через O_i^j обозначена нулевая матрица, при этом нижний индекс равен числу строк, а верхний – числу её столбцов. Далее в тех случаях, когда размеры нулевой матрицы не имеют значения или очевидны, индексы (один или оба) будем опускать.

Предположим, что для некоторого $s=r$ $(0\leqslant r\leqslant n)$ выполняется условие $\operatorname{rank}\Lambda_r(t)=\lambda=\mathrm{const}$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и в матрице $D_r(t)$ имеется неособенный на $\mathbb{R}$ минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_r(t)$.

В работе используются выражения “обратимость на $\mathbb{R}$”, “линейная (не)зависимость на $\mathbb{R}$” и т.п., которые следует понимать как обратимость и линейную (не)зависимость при всех $t\in\mathbb{R}$.

Определение 1. Неособенный при всех $t\in\mathbb{R}$ минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_r(t)$, включающий в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_r(t)$, будем называть *разрешающим минором.*

Определение 2. Наименьшее значение $r\leqslant n$, при котором в матрице $D_r(t)$ имеется разрешающий минор, называется *индексом неразрешённости* ДАУ (0.1).

Всюду ниже число r обозначает индекс неразрешённости системы (0.1).

Лемма 1 [11]. *Пусть выполнены условия:*

1) имеют место включения $A(t),B(t)\in C^r(\mathbb{R})$;

2) для всех $t\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\operatorname{rank}\Lambda_r(t)=\lambda=\mathrm{const}$;

3) в матрице $D_r(t)$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R}\equiv R_0(t)+R_1(t)\frac{d}{dt}+\ldots+R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{1.1}$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ *коэффициентами* $R_j(t)$, *обладающий свойством: для любой* n*-мерной функции* $\varphi(t) \in C^{r+1}(\mathbb{R})$ *верно равенство*

$$\mathcal{R}\left[A(t)\frac{d}{dt}\varphi(t)+B(t)\varphi(t)\right] = (R_0(t)\ R_1(t)\ \ldots\ R_r(t))D_r(t)\ \mathrm{col}\left(\varphi(t), \frac{d}{dt}\varphi(t), \ldots, \left(\frac{d}{dt}\right)^{(r+1)}\varphi(t)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}\frac{d}{dt}\varphi(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1}\varphi(t),$$

где E_{n-d} – *единичная матрица порядка* $n-d$, Q – $n\times n$*-матрица перестановок**).

2. Решение ДАУ в пространстве распределений. Обозначим $\mathbb{D}$ – пространство финитных функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathbb{D}'$ – пространство обобщённых функций на $\mathbb{D}$. Через $\{f(t)\}$ будем обозначать регулярную функцию из $\mathbb{D}'$, порождаемую локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией $f(t)$.

Рассмотрим систему (0.1), в которой $A(t), B(t), U(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$; $x(t), u(t) \in \mathbb{D}'$; d/dt обозначает обобщённую производную. Управление зададим в виде

$$u(t) = \{v(t)\}, \tag{2.1}$$

где $v(t) \in C^r_\tau(\mathbb{R})$ – функция, непрерывная всюду на $\mathbb{R}$ за исключением точки τ, в которой она, если и имеет разрыв, то только первого рода, причём этим же свойством обладают и все производные этой функции до порядка r включительно. Обозначим скачок j-й производной функции $v(t)$ в точке τ через

$$\Delta_{v^{(j)}}(\tau) = v^{(j)}(\tau+0) - v^{(j)}(\tau-0), \quad j=\overline{0,r}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее запись $v^{(j)}$ обозначает обычную производную j-го порядка.

Определение 3. *Решением* системы (0.1), (2.1) будем называть функцию $x(t) \in \mathbb{D}'$, которая обращает ДАУ (0.1) в тождество при подстановке, и может быть представлена в виде суммы

$$x(t) = \{\chi(t)\} + \eta(t), \tag{2.3}$$

где $\chi(t) \in C^1_\tau(\mathbb{R})$,

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \eta_{j-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-1}\delta(t-\tau), \tag{2.4}$$

$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака: $\langle\delta(t-\tau), \phi(t)\rangle = \phi(\tau)$ для любой $\phi(t)\in\mathbb{D}$; $\eta_j \in \mathbb{R}^n$. При этом функцию $\{\chi(t)\}$ будем называть *регулярной*, а функцию $\eta(t)$ – *сингулярной* составляющей решения.

В работе [10] доказана теорема о существовании решения ДАУ (0.1) в пространстве $\mathbb{D}'$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) имеют место включения $A(t), B(t), U(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) для всех $t\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\operatorname{rank}\Lambda_r(t) = \lambda = \mathrm{const}$;

3) в матрице $D_r(t)$ *имеется разрешающий минор;*

4) для всех $t\in\mathbb{R}$ *верно равенство* $\operatorname{rank}\Gamma_r(t) = \operatorname{rank}\Gamma_{r-1}(t) + n$.

Тогда существует решение системы (0.1), (2.1).

Замечание 1. Если для ДАУ (0.1) задать согласованные начальные условия вида $\chi(\tau-0) = \xi_1$ или $\chi(\tau+0) = \xi_2$ $(\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n)$, то решение будет единственным [10].

Рассмотрим ДАУ специального вида

$$\begin{pmatrix} O^n_{n-\hat\rho} \\ A_0(t) \end{pmatrix}\frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.5}$$

*) О матрицах перестановок строк и столбцов см. монографию [6, с. 127, 128]. О построении матрицы Q см. [10].

где $A_0(t)$ – $\hat\rho\times n$-матрица, вектор-функции $f_1(t), f_2(t)\in\mathbb{D}'$ состоят из $n-\hat\rho$ и $\hat\rho$ строк соответственно, а матрицы $B_1(t)$ и $B_2(t)$ имеют соответственно размеры $(n-\hat\rho)\times n$ и $\hat\rho\times n$. Кроме того, выполняется условие

$$\det\begin{pmatrix} B_1(t)\\ A_0(t)\end{pmatrix}\neq 0 \quad \text{для любого} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Покажем, что решение такой системы не содержит дельта-функции и её производных в случае, когда $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются регулярными обобщёнными функциями.

Теорема 2. *Пусть для ДАУ (2.5) выполнены следующие условия:*

1) имеют место включения $A_0(t), B_1(t), B_2(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) матрица

$$D_1(t)=\left(\begin{array}{c|c||c} B_1(t) & O & O\\ B_2(t) & A_0(t) & O\\ \hline B_1'(t) & B_1(t) & O\\ B_1'(t) & A_0'(t)+B_2(t) & A_0(t)\end{array}\right) \tag{2.7}$$

содержит разрешающий минор;

3) справедливо условие (2.6);

4) верно равенство $f_i(t)=\{v_i(t)\}$, *где* $v_i(t)\in C^1_\tau(\mathbb{R})$, $i=1,2$.

Тогда решение системы (2.5) существует и представимо в виде

$$x(t)=\{\chi(t)\},\quad \chi(t)\in C^1_\tau(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

Доказательство. Покажем, что при сделанных предположениях при $r=1$ для ДАУ (2.5) выполняются все условия теоремы 1.

Условие (2.6) гарантирует, что матрицы $B_1(t)$ и $A_0(t)$ обладают на $\mathbb{R}$ полным строчным рангом, поэтому $\operatorname{rank} A_0(t)=\hat\rho=\mathrm{const}$ для любого $t\in\mathbb{R}$.

Поскольку матрица $\Lambda_1(t)$ расположена в (2.7) правее двойной вертикальной черты, то при всех значениях $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\operatorname{rank}\Lambda_1(t)=\operatorname{rank}A_0(t)=\hat\rho=\mathrm{const}.$$

Следовательно, условие 2) теоремы 1 выполнено.

В свою очередь $\Gamma_0(t)=\operatorname{col}(O, A_0(t))$, а матрица $\Gamma_1(t)$ располагается в (2.7) справа от одиночной вертикальной черты и включает в себя матрицу $\Lambda_1(t)$. Если принять во внимание предположение (2.6), то справедливость условия 4) теоремы 1 становится очевидной. Таким образом, по теореме 1 решение ДАУ (2.5) вида (2.3), (2.4) существует. Покажем, что $\eta(t)=0$.

Подставляя представление (2.3) в уравнение (2.5), придём к системе

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho}\\ A_0(t)\end{pmatrix}\left[\{\chi'(t)\}+h_\chi(\tau)\delta(t-\tau)+\frac{d}{dt}\eta(t)\right]+\begin{pmatrix} B_1(t)\\ B_2(t)\end{pmatrix}[\{\chi(t)\}+\eta(t)]+\begin{pmatrix}\{v_1(t)\}\\ \{v_2(t)\}\end{pmatrix}=0, \tag{2.9}$$

где $h_\chi(\tau)=\chi(\tau+0)-\chi(\tau-0)$ – скачок функции $\chi(t)$ в точке τ.

Будем искать сингулярную составляющую решения в виде $\eta(t)=\eta_0\delta(t-\tau)$. Приравняем регулярные и сингулярные слагаемые в левой и правой частях равенства (2.9). В результате получим уравнение для нахождения функции $\chi(t)$, которое в данном случае нас не интересует, и уравнение для сингулярных слагаемых

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho}\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}h_\chi(\tau)\delta(t-\tau)+\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho}\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}\eta_0\frac{d}{dt}\delta(t-\tau)+\begin{pmatrix} B_1(\tau)\\ B_2(\tau)-A_0'(\tau)\end{pmatrix}\eta_0\delta(t-\tau)=0, \tag{2.10}$$

которое записано с использованием формулы

$$g(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i\delta(t-\tau)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jg^{(j)}(\tau)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j}\delta(t-\tau)\quad\text{для любой}\quad g(t)\in C^\infty(\mathbb{R}),\qquad(2.11)$$

где $i=1,2,\ldots$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных дельта-функции, стоящих слева и справа от знака равенства в уравнении (2.10), получаем следующую систему уравнений относительно $h_\chi(\tau)$ и η_0:

$$\begin{pmatrix}O_{n-\hat\rho}\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}h_\chi(\tau)+\begin{pmatrix}B_1(\tau)\\ B_2(\tau)-A_0'(\tau)\end{pmatrix}\eta_0=0,\quad\begin{pmatrix}O_{n-\hat\rho}\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}\eta_0=0.\qquad(2.12)$$

Перегруппировка уравнений системы (2.12) даёт для нахождения коэффициента η_0 уравнение

$$\begin{pmatrix}B_1(\tau)\\ A_0(\tau)\end{pmatrix}\eta_0=0\qquad(2.13)$$

и для нахождения скачка регулярной составляющей решения уравнение

$$A_0(\tau)h_\chi(\tau)+(B_2(\tau)-A_0'(\tau))\eta_0=0.$$

С учётом условия (2.6) из (2.13) находим $\eta_0=0$. Таким образом, $\eta(t)=0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из условия 2) теоремы 2 вытекает существование в матрице $B_1(t)$ обратимой на $\mathbb{R}$ подматрицы порядка $n-\hat\rho$. Учитывая этот факт, можно найти явное представление для регулярной составляющей решения $\{\chi(t)\}$ и скачка $h_\chi(\tau)$.

Замечание 3. Сингулярную составляющую решения системы (2.5), (2.6) можно искать в виде

$$\eta(t)=\eta_0\delta(t-\tau)+\eta_1\frac{d}{dt}\delta(t-\tau)+\ldots+\eta_s\left(\frac{d}{dt}\right)^s\delta(t-\tau),$$

где $s\geqslant 1$. При этом все коэффициенты определятся единственным образом и будут равны нулю.

3. Вспомогательные утверждения о рангах переменных матриц.

Лемма 2 [12, с. 39]. *Пусть выполнены условия:*

1) $l\times s$-матрица $M(t)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R})$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$;

2) для всех $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство $\operatorname{rank}M(t)=\mu=\mathrm{const}$.

Тогда существуют $l\times l$-матрица $L(t)$ и $s\times s$-матрица $S(t)$ такие, что $L(t),S(t)\in C^k(\mathbb{R})$, $\det L(t)\neq 0$, $\det S(t)\neq 0$ для любого $t\in\mathbb{R}$ и верны тождества

$$L(t)M(t)\equiv\begin{pmatrix}O\\ M_1(t)\end{pmatrix},\quad M(t)S(t)\equiv\begin{pmatrix}M_2(t) & O\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

где матрицы $M_1(t)$ и $M_2(t)$ имеют полный ранг μ по строкам и столбцам соответственно.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия:*

1) матрицы $P_i(t)\in C^k(\mathbb{R})$ $(i=\overline{1,r},\ k\in\mathbb{N})$ имеют соответствующие размеры;

2) каждая из матриц $P_i(t)$ обладает полным строчным рангом ρ_i.

Тогда матрица $P_r(t)P_{r-1}(t)\cdots P_1(t)$ имеет полный строчный ранг ρ_r.

Доказательство. По лемме 2 найдётся обратимая на $\mathbb{R}$ матрица $S_1(t)\in C^k(\mathbb{R})$ такая, что

$$P_1(t)S_1(t)=(\hat P_1(t)\ O),$$

где $\rho_1\times\rho_1$-матрица $\hat P_1(t)$ неособенна для всех $t\in\mathbb{R}$. Тогда $\operatorname{rank}P_2(t)P_1(t)=\operatorname{rank}P_2(t)\hat P_1(t)=\rho_2$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению о справедливости утверждения.

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия:*
1) матрицы $A_1(t), B_1(t), P_1(t) \in C^k(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ *имеют соответствующие размеры;*
2) матрица $A_1(t)$ *обладает полным рангом по строкам всюду на* $\mathbb{R}$;
3) справедливо тождество $P_1(t)B_1(t) + A_1(t) \equiv O,\ \ t \in \mathbb{R}$.
Тогда матрица $P_1(t)$ *имеет полный ранг по строкам для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Предположим, что существует значение $t_1 \in \mathbb{R}$, при котором матрица $P_1(t_1)$ не обладает полным строчным рангом. В соответствии с леммой 2 найдётся обратимая матрица L такая, что $LP_1(t_1) = \operatorname{col}(\hat{P}_1, O)$. В этом случае

$$LP_1(t_1)B_1(t_1) = \operatorname{col}(\hat{B}_1, O) = LA_1(t_1),$$

что невозможно в силу условия 2). Полученное противоречие доказывает утверждение.

4. Преобразование системы. Опишем процедуру преобразования системы (0.1) индекса r к виду (2.5), (2.6). В дальнейшем этот процесс будет необходим для того, чтобы установить связь между возможностью исключения сингулярных слагаемых из решения ДАУ с помощью обратной связи и свойством импульсной управляемости.

Пусть для системы (0.1) выполняются следующие предположения:

А1) имеют место включения $A(t), B(t), U(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

А2) для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\operatorname{rank} A(t) = \rho = \mathrm{const}$;

А3) при некотором $r \leqslant n$ матрица $D_r(t)$ всюду на $\mathbb{R}$ имеет полный строчный ранг, равный $(r+1)n$.

Согласно лемме 2 предположения А1) и А2) гарантируют существование $n \times n$-матрицы $P_0(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, обратимой на $\mathbb{R}$, такой, что

$$P_0(t)A(t) = \operatorname{col}(O_{n-\rho}, A^{[0]}(t)), \tag{4.1}$$

где $\rho \times n$-матрица $A^{[0]}(t)$ имеет полный ранг по строкам при всех $t \in \mathbb{R}$.

В результате умножения слева системы (0.1) на матрицу $P_0(t)$ получим

$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} U_1^{[0]}(t) \\ U_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} u(t) = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} = P_0(t)B(t), \qquad \begin{pmatrix} U_1^{[0]}(t) \\ U_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} = P_0(t)U(t). \tag{4.3}$$

Из предположения А3) следует, что матрица $D_0(t) = (B(t)\ A(t))$ имеет полный строчный ранг n при всех значениях $t \in \mathbb{R}$. Тогда матрица

$$P_0(t)(B(t)\ A(t)) = \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) & O_{n-\rho} \\ B_2^{[0]}(t) & A^{[0]}(t) \end{pmatrix}$$

также имеет полный ранг по строкам. Поскольку $\operatorname{rank} A^{[0]}(t) \equiv \rho$, то $\operatorname{rank} B_1^{[0]}(t) = n - \rho$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Если матрица $\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix}$ обратима на $\mathbb{R}$, то (4.2) является искомой системой вида (2.5), (2.6). Противное означает, что в этой матрице имеются линейно зависимые на $\mathbb{R}$ строки.

Не ограничивая общности, можно считать матрицу $P_0(t)$ такой, что

$$A^{[0]}(t) = \operatorname{col}(A_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t)), \tag{4.4}$$

где блоки $A_1^{[0]}(t)$ и $A_2^{[0]}(t)$ состоят из ρ_1 и $\rho - \rho_1$ строк соответственно. При этом все строки матрицы $A_1^{[0]}(t)$ линейно зависимы со строками матрицы $B_1^{[0]}(t)$, а строки матрицы

$\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t))$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. В этом случае найдётся $\rho_1 \times (n-\rho)$-матрица $P_1(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что

$$P_1(t)B_1^{[0]}(t) + A_1^{[0]}(t) \equiv O. \tag{4.5}$$

В соответствии с утверждением 2 матрица $P_1(t)$ будет иметь на $\mathbb{R}$ полный ранг по строкам, равный ρ_1.

Подействуем на обе части системы (4.2) оператором

$$\mathcal{P}_1 \equiv \begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O \\ O & E_{\rho_1} & O \\ O & O & E_{\rho-\rho_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{n-\rho}^{n-\rho} & O & O \\ P_1(t) & O_{\rho_1}^{\rho_1} & O \\ O & O & O_{\rho-\rho_1}^{\rho-\rho_1} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}, \tag{4.6}$$

в результате чего получим ДАУ

$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ O_{\rho_1} \\ A^{[1]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_1^{[1]}(t) \\ B_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} U_1^{[0]}(t) \\ U_1^{[1]}(t) \\ U_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t) \\ O_{\rho-\rho_1} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}u(t) = 0, \tag{4.7}$$

где

$$A^{[1]}(t) = A_2^{[0]}(t), \quad \begin{pmatrix} B_1^{[1]}(t) \\ B_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} = B_2^{[0]}(t) + \begin{pmatrix} P_1(t)(B_1^{[0]}(t))' \\ O \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} U_1^{[1]}(t) \\ U_2^{[1]}(t) \end{pmatrix} = U_2^{[0]}(t) + \begin{pmatrix} P_1(t)(U_1^{[0]}(t))' \\ O \end{pmatrix}.$$

По построению матрица $A^{[1]}(t)$ будет иметь на $\mathbb{R}$ полный строчный ранг $\rho-\rho_1$. Так же, как это было сделано выше в отношении матрицы $B_1^{[0]}(t)$, можно показать, что условие А3) гарантирует полноту на $\mathbb{R}$ строчного ранга матрицы $\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), B_1^{[1]}(t))$.

Если матрица $\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), B_1^{[1]}(t), A^{[1]}(t))$ обратима на $\mathbb{R}$, то (4.7) и есть искомая система (2.5), (2.6). В противном случае матрица $A^{[1]}(t)$ содержит подматрицу $A_1^{[1]}(t)$ размера $\rho_2 \times n$, все строки которой линейно зависимы со строками матрицы $B_1^{[1]}(t)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $A^{[1]}(t) = \operatorname{col}(A_1^{[1]}(t), A_2^{[1]}(t))$, где $\operatorname{rank}\operatorname{col}(B_1^{[1]}(t), A_2^{[1]}(t)) \equiv \rho$ совпадает с числом строк этой матрицы. Кроме того, найдётся $\rho_2 \times \rho_1$-матрица $P_2(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $P_2(t)B_1^{[1]}(t) + A_1^{[1]}(t) \equiv O$ на $\mathbb{R}$. По утверждению 2 $\operatorname{rank} P_2(t) \equiv \rho_2$.

Подействуем на обе части равенства (4.7) оператором

$$\mathcal{P}_2 \equiv \begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O & O \\ O & E_{\rho_1} & O & O \\ O & O & E_{\rho_2} & O \\ O & O & O & E_{\rho-\rho_1-\rho_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{n-\rho}^{n-\rho} & O & O & O \\ O & O_{\rho_1}^{\rho_1} & O & O \\ O & P_2(t) & O_{\rho_2}^{\rho_2} & O \\ O & O & O & O_{\rho-\rho_1-\rho_2}^{\rho-\rho_1-\rho_2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt}. \tag{4.8}$$

Аналогичным образом продолжая процесс преобразований далее, за конечное число шагов k получим систему

$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ O_{\rho_1} \\ \vdots \\ O_{\rho_k} \\ A^{[k]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ B_1^{[1]}(t) \\ \vdots \\ B_1^{[k]}(t) \\ B_2^{[k]}(t) \end{pmatrix} x(t) +$$

$$
+\begin{pmatrix} V_1^{[0]}(t) & O & O & \dots & O \\ V_2^{[0]}(t) & V_1^{[1]}(t) & O & \dots & O \\ V_3^{[0]}(t) & V_2^{[1]}(t) & V_1^{[2]}(t) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{k+1}^{[0]}(t) & V_k^{[1]}(t) & V_{k-1}^{[2]}(t) & \dots & V_1^{[k]}(t) \\ V_{k+2}^{[0]}(t) & O & O & \dots & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dfrac{d}{dt}u(t) \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^2 u(t) \\ \vdots \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^k u(t) \end{pmatrix} = 0, \qquad (4.9)
$$

где $\operatorname{rank} A^{[k]}(t) \equiv \hat{\rho} = \rho - \sum_{j=1}^{k} \rho_j$,

$$
\det \operatorname{col}(B_1^{[0]}(t),\ B_1^{[1]}(t), \dots,\ B_1^{[k]}(t),\ A^{[k]}(t)) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (4.10)
$$

Если матрица $P_0(t)$ в соответствии с изложенным выше алгоритмом разбивает матрицы $B(t)$ и $U(t)$ на блоки соответствующего размера:

$$
\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t),\ B_{2,1}^{[0]}(t),\ B_{2,2}^{[0]}(t),\ \dots, B_{2,k+1}^{[0]}(t)) = P_0(t)B(t),
$$

$$
\operatorname{col}(U_1^{[0]}(t),\ U_{2,1}^{[0]}(t),\ U_{2,2}^{[0]}(t),\ \dots,\ U_{2,k+1}^{[0]}(t)) = P_0(t)U(t), \qquad (4.11)
$$

то

$$
B_1^{[1]}(t) = B_{2,1}^{[0]}(t) + P_1(t)(B_1^{[0]}(t))', \quad B_1^{[2]}(t) = B_{2,2}^{[0]}(t) + P_2(t)(B_1^{[1]}(t))', \quad \dots,
$$

$$
B_1^{[k]}(t) = B_{2,k}^{[0]}(t) + P_k(t)(B_1^{[k-1]}(t))', \quad B_2^{[k]}(t) = B_{2,k+1}^{[0]}(t);
$$

$$
V_1^{[0]}(t) = U_1^{[0]}(t), \quad V_2^{[0]}(t) = U_{2,1}^{[0]}(t) + P_1(t)(V_1^{[0]}(t))', \quad \dots,
$$

$$
V_{k+1}^{[0]}(t) = U_{2,k}^{[0]}(t) + P_k(t)(V_k^{[0]}(t))', \quad V_{k+2}^{[0]}(t) = U_{2,k+1}^{[0]}(t);
$$

$$
V_1^{[i]}(t) = P_i(t)V_1^{[i-1]}(t), \quad i = \overline{1,k};
$$

$$
V_j^{[i]}(t) = P_{j+i-1}(t)V_j^{[i-1]}(t) + P_{j+i-1}(t)(V_{j-1}^{[i]}(t))', \quad i = \overline{1,k-1}, \quad j = \overline{2,k-i+1}.
$$

Система (4.9) получена из системы (0.1) применением линейного дифференциального оператора $\mathcal{P}$ k-го порядка такого, что для любой n-мерной вектор-функции $\varphi(t) \in C^k(\mathbb{R})$ верно равенство

$$
\mathcal{P}[\varphi(t)] = \mathcal{P}_k[\mathcal{P}_{k-1}[\dots[\mathcal{P}_1[P_0(t)\varphi(t)]\dots]], \qquad (4.12)
$$

где $\mathcal{P}_k,\ \mathcal{P}_{k-1}, \dots,\ \mathcal{P}_3$ – операторы, аналогичные (4.6), (4.8).

Лемма 3. *В предположениях A1)–A3) оператор $\mathcal{P}$ обратим.*

Доказательство. По построению $n \times n$-матрица $P_0(t)$ обратима при всех $t \in \mathbb{R}$, а операторы $\mathcal{P}_i$ $(i = \overline{1,k})$ имеют вид

$$
\mathcal{P}_i = E_n + \mathcal{N}_i(t)\frac{d}{dt}, \qquad (4.13)
$$

где $\mathcal{N}_i(t)$ – нижнетреугольная матрица с квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что $\mathcal{N}_i^2(t) = O$, $\mathcal{N}_i(t)\mathcal{N}_i'(t) = O$ для $i = \overline{1,k}$ и всех $t \in \mathbb{R}$.

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$
\mathcal{P}_i^{-1} = E_n - \mathcal{N}_i(t)\frac{d}{dt}.
$$

Таким образом, $\mathcal{P}^{-1}[\varphi(t)] = P_0^{-1}(t)\mathcal{P}_1^{-1}[\mathcal{P}_2^{-1}[\dots[\mathcal{P}_k^{-1}[\varphi(t)]\dots]]$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть для системы (0.1) выполнены условия А1)–А3). Тогда для неё справедливы равенства*

$$\operatorname{rank}\Lambda_i(t)=\hat\rho+(i-1)n=\mathrm{const}, \tag{4.14}$$

$$\operatorname{rank}\Gamma_i(t)=\operatorname{rank}\Gamma_{i-1}(t)+n \quad \textit{для всех} \quad t\in\mathbb{R}, \quad i=\overline{1,r}, \quad r\leqslant n, \tag{4.15}$$

где в соответствии с изложенным выше алгоритмом $\hat\rho=\rho-\sum_{j=0}^{k}\rho_i=\operatorname{rank}A^{[k]}(t)$ *(см. (4.9)).*

Доказательство. Для упрощения выкладок запишем ДАУ (4.9) в виде (2.5), где

$$B_1(t)=\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t),B_1^{[1]}(t),\ldots,B_1^{[k]}(t)), \quad B_2(t)=B_2^{[k]}(t), \quad A_0(t)=A^{[k]}(t), \tag{4.16}$$

а обобщённая функция $\operatorname{col}(f_1(t),f_2(t))$ включает в себя все слагаемые из (4.9), содержащие управление и его производные. В принятых обозначениях условия (2.6) и (4.10) идентичны.

Аналоги матриц $D_i(t)$, $\Gamma_i(t)$ и $\Lambda_i(t)$ для системы (4.9) обозначим через $\bar D_i(t)$, $\bar\Gamma_i(t)$ и $\bar\Lambda_i(t)$ соответственно. При некотором значении $i:1\leqslant i\leqslant n$

$$\bar D_i(t)=\left(\begin{array}{c|c||ccccc}
C_0^0B_1(t) & O & O & \ldots & O & O\\
* & C_1^0A_0(t) & O & \ldots & O & O\\ \hline
* & C_1^1B_1(t) & O & \ldots & O & O\\
* & * & C_2^1A_0(t) & \ldots & O & O\\ \hline
* & * & C_2^2B_1(t) & \ldots & O & O\\
* & * & * & \ldots & O & O\\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & O & O\\ \hline
* & * & * & \ldots & O & O\\
* & * & * & \ldots & C_i^{i-1}A_0(t) & O\\ \hline
* & * & * & \ldots & C_i^iB_1(t) & O\\
* & * & * & \ldots & * & C_{i+1}^iA_0(t)
\end{array}\right). \tag{4.17}$$

Здесь и ниже звездочками обозначены блоки, явное представление которых для дальнейшего анализа несущественно.

Матрица $\bar\Lambda_i(t)$ располагается в (4.17) справа от двойной вертикальной черты, а матрица $\bar\Gamma_i(t)$ – правее одиночной вертикальной линии (и включает в себя матрицу $\bar\Lambda_i(t)$). При этом $\operatorname{rank}A_0(t)\equiv\hat\rho$ на $\mathbb{R}$. Несложно видеть, что в силу условия (2.6) справедливы равенства

$$\operatorname{rank}\bar\Lambda_i(t)=\hat\rho+(i-1)n, \quad \operatorname{rank}\bar\Gamma_i(t)=\hat\rho+in. \tag{4.18}$$

Нетрудно показать, что матрицы $\bar D_i(t)$ и $D_i(t)$ связаны друг с другом посредством некоторой обратимой на $\mathbb{R}$ матрицы $\bar P(t)$ такой, что

$$\bar D_i(t)=\bar P(t)D_i(t), \quad \det\bar P(t)\neq 0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Вследствие последнего обстоятельства ранги матриц $\bar\Lambda_i(t)$, $\Lambda_i(t)$ и $\bar\Gamma_i(t)$, $\Gamma_i(t)$ попарно совпадают. Равенства (4.14), (4.15) являются прямым следствием соотношений (4.18). Лемма доказана.

Если усилить предположение А3), заменив его на условие 3) теоремы 1, то можно показать, что в (4.9) $k=r-1$, где r – индекс неразрешённости системы (0.1).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия:*

1) имеют место предположения А1), А2);

2) матрица $D_r(t)$ *содержит разрешающий минор.*

Тогда $k=r-1$.

Доказательство. Запишем систему (4.9) в форме (2.5), воспользовавшись обозначениями (4.16).

Вследствие связи (4.19) наличие в матрице $D_r(t)$ разрешающего минора означает, что такой же минор имеется и в матрице $\bar{D}_r(t)$ (см. (4.17)). Последнее обеспечивает существование в матрице $B_1(t)$ обратимой на $\mathbb{R}$ подматрицы порядка $d = n - \hat{\rho}$, которую обозначим через $B_{1,2}(t)$. Пусть Q – матрица перестановок столбцов такая, что

$$B_1(t)Q = (B_{1,1}(t) \quad B_{1,2}(t)).$$

В системе (2.5) сделаем замену переменных $x(t) = Q\,\mathrm{col}\,(x_1(t), x_2(t))$, где $x_1(t), x_2(t) \in \in \mathbb{D}'$ – вектор-функции размерностей $\hat{\rho} = n - d$ и d соответственно. В результате система (2.5) приобретёт вид

$$\begin{pmatrix} O_d & O \\ A_{0,1}(t) & A_{0,2}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1}(t) & B_{1,2}(t) \\ B_{2,1}(t) & B_{2,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.20}$$

где

$$(A_{0,1}(t) \quad A_{0,2}(t)) = A_0(t)Q, \quad (B_{2,1}(t) \quad B_{2,2}(t)) = B_2(t)Q.$$

При сделанных предположениях справедлива лемма 1, согласно которой для ДАУ (0.1) определён линейный дифференциальный оператор (1.1) порядка r, действие которого на систему (0.1) преобразует её к виду

$$\begin{pmatrix} O_d & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \mathcal{R}[U(t)u(t)] = 0, \tag{4.21}$$

$J_1(t)$ и $J_2(t)$ – некоторые матрицы соответствующих размеров.

В силу того, что $\det B_{1,2}(t) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, условие (2.6) гарантирует обратимость матрицы [6, с. 57]

$$G_0(t) = A_{0,1}(t) - A_{0,2}(t)B_{1,2}^{-1}(t)B_{1,1}(t).$$

Нетрудно убедиться, что систему (4.20) можно преобразовать к виду (4.21) при помощи действия линейного дифференциального оператора первого порядка

$$\mathcal{G} \equiv \begin{pmatrix} B_{1,2}^{-1} & O \\ O & G_0^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E_d & O \\ -A_{0,2}\left(B_{1,2}^{-1}\right)' - B_{2,2}B_{1,2}^{-1} & E_{n-d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & O \\ -A_{0,2}B_{1,2}^{-1} & O \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right].$$

Таким образом, действие оператора (1.1) r-го порядка, преобразующего ДАУ (0.1) к виду (4.21), определяется тождеством

$$\mathcal{R}[\varphi(t)] \equiv G[\mathcal{P}[\varphi(t)]] \quad \text{для любой} \quad \varphi(t) \in C^r(\mathbb{R}),$$

где $\mathcal{P}$ – оператор порядка k, преобразующий систему (0.1) в систему (4.9) (или, что то же самое, в систему (2.5)). Поэтому $k = r - 1$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1) имеют место включения $A(t), B(t), U(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$;

2) для всех $t \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\operatorname{rank} A(t) = \rho = \mathrm{const}$;

3) в матрице $D_r(t)$ *имеется разрешающий минор.*

Тогда решение системы (0.1) существует в классе $\mathbb{D}'$. *При этом любое решение ДАУ (0.1) будет решением системы (4.9) и наоборот.*

Доказательство. При сделанных предположениях справедлива лемма 4. Поэтому для системы (0.1) выполняются все предположения теоремы 1, в соответствии с которой решение системы в смысле определения 3 существует. Эквивалентность в смысле совпадения решений систем (0.1) и (4.9) является прямым следствием леммы 3. Теорема доказана.

5. Исключение импульсной составляющей решения с помощью обратной связи. Пусть имеют место предположения A1)–A3). В системе (0.1) зададим управление в виде обратной связи

$$u(t) = K(t)x(t) + \{w(t)\}, \quad K(t) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad w(t) \in C^1_\tau(\mathbb{R}). \tag{5.1}$$

В этом пункте работы найдены условия, при которых для ДАУ (0.1) найдётся $l \times n$-матрица $K(t)$ такая, что общее решение замкнутой системы

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + (B(t) + U(t)K(t))x(t) + U(t)\{w(t)\} = 0 \tag{5.2}$$

не содержит слагаемых с дельта-функцией и её производными, т.е. в представлении (2.3) $\eta(t) = 0$.

Сначала получим критерий существования такой матрицы $K(t)$, что умножением слева на некоторую обратимую матрицу с элементами класса $C^\infty(\mathbb{R})$ система (5.2) может быть преобразована к виду (2.5), (2.6).

Если $\operatorname{rank} A(t) \equiv n$, то ДАУ (0.1) уже имеет форму (2.5), (2.6) и $K(t) \equiv O$.

Пусть $\operatorname{rank} A(t) = \rho < n$. Умножим систему (5.2) слева на обратимую матрицу $P_0(t)$, зануляющую линейно зависимые на $\mathbb{R}$ строки в матрице $A(t)$ (см. (4.1)). Полученная система с использованием обозначений (4.1), (4.3) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} O_{n-\rho} \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) + \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ B_2^{[0]}(t) + U_2^{[0]}(t)K(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} U_1^{[0]} \\ U_2^{[0]} \end{pmatrix} \{w(t)\} = 0, \tag{5.3}$$

где матрица $A^{[0]}(t)$ имеет полный ранг ρ по строкам всюду на $\mathbb{R}$. Так же, как это было сделано в предыдущем пункте, можно показать, что при сделанных предположениях матрица $B_1^{[0]}(t)$ обладает полным строчным рангом всюду на $\mathbb{R}$.

Для ДАУ (5.3) за счёт выбора матрицы $K(t)$ должно быть справедливо условие (аналогичное условию (2.6) для системы (2.5))

$$\det \begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ A^{[0]}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Если при этом матрица $\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A^{[0]}(t))$ обратима на $\mathbb{R}$, то условие (5.4) выполняется при $K(t) \equiv O$. Если же эта матрица содержит ρ_1 линейно зависимых для всех $t \in \mathbb{R}$ строк, то существует $\rho_1 \times (n-\rho)$-матрица $P_1(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что имеет место тождество (4.5), в котором $A_1^{[0]}(t)$ – $(\rho_1 \times n)$-подматрица матрицы $A^{[0]}(t)$ (см. (4.4)).

Умножив слева матрицу из левой части соотношения (5.4) на

$$\begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O \\ P_1(t) & E_{\rho_1} & O \\ O & O & E_\rho \end{pmatrix},$$

получим с учётом (4.5) матрицу

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t)K(t) \\ A_2^{[0]}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где матрица $\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t))$ имеет полный ранг по строкам:

$$\operatorname{rank} \operatorname{col}(B_1^{[0]}(t), A_2^{[0]}(t)) = n - \rho_1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Лемма 6. *Если выполнены предположения A1)–A3), то $l \times n$-матрица $K(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ такая, что справедливо условие (5.4), существует тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} P_1(t)U_1^{[0]}(t) = \rho_1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (5.7). В силу тождества (5.6) по лемме 2 найдётся обратимая на $\mathbb{R}$ квадратная матрица $S(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ порядка n такая, что

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) \\ A_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} S(t) = \begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & O \\ O & E_{\rho-\rho_1} & O \end{pmatrix}.$$

Умножив (5.5) справа на $S(t)$, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} E_{n-\rho} + U_1^{[0]}(t)K_1(t) & U_1^{[0]}(t)K_2(t) & U_1^{[0]}(t)K_3(t) \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t)K_1(t) & P_1(t)U_1^{[0]}(t)K_2(t) & P_1(t)U_1^{[0]}(t)K_3(t) \\ O & E_{\rho-\rho_1} & O \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

где $(K_1(t)\ K_2(t)\ K_3(t)) = K(t)S(t)$. Полагая в (5.8)

$$K_1(t) \equiv O, \quad K_2(t) \equiv O, \quad K_3(t) = (P_1(t)U_1^{[0]}(t))^{\mathrm{т}}(P_1(t)U_1^{[0]}(t)(P_1(t)U_1^{[0]}(t))^{\mathrm{т}})^{-1}$$

($^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования), получим

$$\begin{pmatrix} E_{n-\rho} & O & U_1^{[0]}(t)K_3(t) \\ O & O & E_{\rho_1} \\ O & E_{\rho-\rho_1} & O \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

По построению ранги матриц (5.9) и (5.5) совпадают. В свою очередь матрицы

$$\operatorname{col}(B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t), A^{[0]}(t))$$

и (5.5) связаны обратимым на $\mathbb{R}$ преобразованием, поэтому их ранги также совпадают при всех значениях $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, для построенной выше матрицы

$$K(t) = (K_1(t)K_2(t)K_3(t))S^{-1}(t)$$

условие (5.4) будет выполнено.

Необходимость. Допустим, что нашлась матрица $K(t)$ такая, что справедливо условие (5.4), и, следовательно, матрица (5.5) обратима на $\mathbb{R}$. В этом случае тождество (5.7) также будет иметь место. В самом деле, если существует точка $\hat{t} \in \mathbb{R}$, в которой $\operatorname{rank} P_1(\hat{t})U_1^{[0]}(\hat{t}) < \rho_1$, то по лемме 2 найдётся обратимая матрица L, зануляющая линейно-зависимые строки в матрице $P_1(\hat{t})U_1^{[0]}(\hat{t})$. После умножения матрицы (5.5) в точке $\hat{t}$ слева на неособенную матрицу $\operatorname{diag}\{E_{n-\rho}, L, E_{\rho-\rho_1}\}$ получим матрицу с нулевыми строками, что противоречит обратимости матрицы (5.5) при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому условие (5.7) выполняется. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы 3 и условие (5.7). Тогда найдётся управление вида (5.1) такое, что решение системы (5.2) существует и представимо в виде (2.8).*

Доказательство. По построению системы (5.2) и (5.3) имеют одно и то же множество решений. Решение системы (5.2) существует и имеет требуемый вид, если для ДАУ (5.3) выполняются все предположения теоремы 2.

Условия теоремы 2 применительно к системе (5.3) будут справедливы, если для ДАУ (5.3) можно построить матрицу $K(t)$ такую, что будет иметь место соотношение (5.4) и в матрице

$$\left(\begin{array}{c|c||c} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) & O & O \\ B_2^{[0]}(t) + U_2^{[0]}(t)K(t) & A^{[0]}(t) & O \\ \hline (B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t))' & B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) & O \\ (B_2^{[0]}(t) + U_2^{[0]}(t)K(t))' & (A^{[0]}(t))' + B_2^{[0]}(t) + U_2^{[0]}(t)K(t) & A^{[0]}(t) \end{array}\right) \tag{5.10}$$

найдётся разрешающий минор.

Рассмотрим матрицу $D_r(t)$. Умножим её слева на обратимую при всех $t\in\mathbb{R}$ матрицу

$$\begin{pmatrix} C_0^0P_0(t) & O & O & \dots & O\\ C_1^0P_0'(t) & C_1^1P_0(t) & O & \dots & O\\ C_2^0P_0''(t) & C_2^1P_0'(t) & C_2^2P_0(t) & \dots & O\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_r^0P_0^{(r)}(t) & C_r^1P_0^{(r-1)}(t) & C_r^2P_0^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^rP_0(t)\end{pmatrix},$$

а затем на матрицу

$$\operatorname{diag}\left\{E_{n-\rho},\begin{pmatrix}E_\rho & P_1(t)\\ O & E_{n-\rho}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}E_\rho & P_1(t)\\ O & E_{n-\rho}\end{pmatrix},E_\rho\right\},$$

где $P_0(t)$ зануляет линейно зависимые строки в матрице $A(t)$ (см. (4.1)), а $P_1(t)$ такова, что с учётом (4.4) справедливо тождество (4.5). В результате получим матрицу (из-за громоздкости явный вид её записывать не будем), в которой в силу условия 3) теоремы 3 имеется разрешающий минор. Из структуры этой матрицы вытекает, что матрицы $B_1^{[0]}(t)$, $A^{[0]}(t)$ и $\operatorname{col}(A_2^{[0]}(t),B_1^{[0]}(t))$ должны содержать обратимые на $\mathbb{R}$ подматрицы, имеющие порядки $n-\rho$, ρ и $n-\rho_1$ соответственно. В этом случае найдутся матрицы перестановок столбцов S_0 и S_1 такие, что

$$B_1^{[0]}(t)S_0=\left(\boxed{\tilde B_1(t)}\ \tilde B_2(t)\right),\quad A^{[0]}(t)S_1=\left(\boxed{\tilde A_1(t)}\ \tilde A_2(t)\right).$$

Здесь и ниже обведённые в рамку матрицы обратимы при всех $t\in\mathbb{R}$.

Умножив слева матрицу (5.10) на

$$\operatorname{diag}\left\{E_{n-\rho},\begin{pmatrix}E_\rho & P_1(t)\\ O & E_{n-\rho}\end{pmatrix},E_\rho\right\},$$

получим с учётом (4.5) матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c||c} B_1^{[0]}(t)+U_1^{[0]}(t)K(t) & O & O\\ * & P_1(t)U_1^{[0]}(t) & O\\ * & A_2^{[0]}(t) & O\\ \hline * & B_1^{[0]}(t)+U_1^{[0]}(t)K(t) & O\\ * & * & A^{[0]}(t)\end{array}\right). \tag{5.11}$$

Обозначим

$$K(t)S_0=(K_1(t)\ K_2(t)),\quad A_2^{[0]}(t)S_0=(A_{2,1}(t)\ A_{2,2}(t)).$$

В матрице (5.11) переставим между собой столбцы с помощью матрицы $\operatorname{diag}\{S_0,S_0,S_1\}$. Положив при этом $K_1(t)\equiv O$, придём к матрице

$$\left(\begin{array}{cc|cc||cc} \boxed{\tilde B_1} & \tilde B_2+U_1^{[0]}K_2 & O & O & O & O\\ * & * & O & P_1U_1^{[0]}K_2 & O & O\\ * & * & A_{2,1} & A_{2,2} & O & O\\ \hline * & * & \boxed{\tilde B_1} & \tilde B_2+U_1^{[0]}K_2 & O & O\\ * & * & * & * & \boxed{\tilde A_1} & \tilde A_2\end{array}\right). \tag{5.12}$$

Умножив слева матрицу (5.12) на соответствующую неособенную матрицу, занулим блок $A_{2,1}(t)$. В результате получим матрицу $\tilde{D}_1(t)$, по структуре отличающуюся от (5.12) только тем, что в третьей блочной строке на месте $A_{2,1}(t)$ будет стоять нулевая матрица, а вместо $A_{2,2}(t)$ – матрица $H(t) - A_{2,1}\tilde{B}_1^{-1}U_1^{[0]}K_2$, где

$$H(t) = A_{2,2}(t) - A_{2,1}(t)\tilde{B}_1^{-1}(t)\tilde{B}_2(t).$$

Поскольку при сделанных предположениях в матрице $\operatorname{col}(A_2^{[0]}(t), B_1^{[0]}(t))$ имеется обратимая на $\mathbb{R}$ подматрица, то по построению подматрица с тем же свойством должна присутствовать и в $H(t)$. В силу этого найдётся матрица перестановок столбцов S_2 такая, что

$$H(t)S_2 = \Big(\boxed{H_1(t)}\ H_2(t)\Big).$$

Обозначим $K_2(t)S_2 = (K_{2,1}(t)\ \ K_{2,2}(t))$.

Умножив справа матрицу $\tilde{D}_1(t)$ на матрицу перестановок $\operatorname{diag}(E_{2n-\rho}, S_2, E_n)$ и положив $K_{2,1}(t) \equiv O$, $K_{2,2}(t) = (P_1(t)U_1^{[0](t)})^{\text{т}}$, получим матрицу вида

$$\left(\begin{array}{cc|c||cc} \boxed{\tilde{B}_1(t)} & * & O & O & O \\ * & * & F(t) & O & O \\ * & * & * & \boxed{\tilde{A}_1(t)} & \tilde{A}_2(t) \end{array}\right), \tag{5.13}$$

где

$$F(t) = \begin{pmatrix} O & O & \boxed{P_1(t)U_1^{[0]}(t)(P_1(t)U_1^{[0]}(t))^{\text{т}}} \\ O & \boxed{H_1(t)} & * \\ \boxed{\tilde{B}_1(t)} & * & * \end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что матрица (5.13) содержит разрешающий минор, состоящий из столбцов, в которых присутствуют обведённые рамкой блоки. Это означает, что в матрице (5.10) также имеется разрешающий минор.

Для построенной выше матрицы $K(t)$ выполняется тождество

$$\begin{pmatrix} B_1^{[0]}(t) + U_1^{[0]}(t)K(t) \\ P_1(t)U_1^{[0]}(t)K(t) \\ A_2^{[0]}(t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(t)F(t)\tilde{S},$$

в котором $\tilde{P}(t)$ – некоторая обратимая на $\mathbb{R}$ матрица, а $\tilde{S}$ – матрица перестановок столбцов. Очевидно, что при этом матрица (5.5) будет обратима на $\mathbb{R}$, а следовательно, будет выполнено и условие (5.4). Теорема доказана.

6. Связь с импульсной управляемостью. В предыдущем пункте получено условие, при котором для ДАУ (0.1) существует управление в виде обратной связи (5.1) такое, что для замкнутой системы (5.2) (или, что то же самое, (5.3)) справедливо соотношение (5.4). Условие (5.7) носит необходимый и достаточный характер, однако оно неконструктивно, поскольку не существует алгоритмов для нахождения матрицы $P_1(t)$. С другой стороны, давно известна связь между возможностью исключения из решения импульсных слагаемых и свойством импульсной управляемости ДАУ. В [10] получено удобное для проверки необходимое и достаточное условие импульсной управляемости для класса нестационарных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешённости. Ниже будет показано, что при соответствующих предположениях это условие можно использовать как альтернативу условию (5.7).

Пусть выполнены все предположения теоремы 3. В соответствии с этой теоремой решение системы (0.1) в смысле определения 3 существует и, кроме того, ДАУ (0.1) и (4.9) эквивалентны в смысле совпадения решений.

Для того чтобы ввести определение импульсной управляемости и получить подходящее для его анализа условие, нужно предварительно найти представление для сингулярной составляющей решения системы (0.1), (2.1). Согласно лемме 5 в системе (4.9) $k = r-1$, поэтому импульсные слагаемые решения будем искать в виде (см. (2.3), (2.4))

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{k} \eta_{j-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{j-1} \delta(t-\tau). \tag{6.1}$$

Для удобства запишем систему (4.9) с использованием обозначений (4.16) в виде

$$\begin{pmatrix} O_{n-\hat\rho} \\ A_0(t) \end{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} x(t) + \mathcal{P}[U(t)u(t)] = 0, \tag{6.2}$$

где $\hat\rho = \rho - \sum_{j=0}^{k} \rho_i$, а $\mathcal{P}$ – оператор, преобразующий ДАУ (0.1) к виду (4.9) (см. (4.12), (4.13)). В операторе (4.13) по построению будем иметь

$$\mathcal{N}_i = \begin{pmatrix} O^{n-\rho}_{n-\rho+\rho_1+\ldots+\rho_{i-1}} & O^{\rho_1} & \ldots & O^{\rho_{i-2}} & O^{\rho_{i-1}} & O^{\rho_i} & \ldots & O^{\rho_k} & O^{\hat\rho} \\ O_{\rho_i} & O & \ldots & O & P_i(t) & O & \ldots & O & O \\ O_{\rho_{i+1}+\ldots+\rho_k+\hat\rho} & O & \ldots & O & O & O & \ldots & O & O \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{6.3}$$

Из представлений (2.1) и (2.2) вытекают равенства

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{i} u(t) = \{v^{(i)}(t)\} + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta_{v^{(j)}}(\tau) \left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1-j} \delta(t-\tau), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

Воспользовавшись формулами (2.11) и (6.4), получим

$$\begin{gathered} \mathcal{P}[U(t)u(t)] = (E_n\ \Phi_{k,1}\ \Phi_{k,2}\ \ldots\ \Phi_{k,k}) \mathcal{U}_k \operatorname{col}(\{v(t)\}, \{v'(t)\}, \ldots, \{v^{(k)}(t)\}) + \\ + \sum_{j=0}^{k-1} (\Phi_{k,j+1}(t)\ \Phi_{k,j+2}(t)\ \ldots\ \Phi_{k,k}(t)) \mathcal{U}_{k-1-j}(\tau) \times \\ \times \operatorname{col}(\Delta_v(\tau), \Delta_{v'}(\tau), \ldots, \Delta_{v^{(k-1-j)}}(\tau)) \left(\frac{d}{dt}\right)^{j} \delta(t-\tau), \end{gathered} \tag{6.5}$$

где

$$\mathcal{U}_i(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 P_0 U & O & \ldots & O \\ C_1^0 (P_0 U)' & C_1^1 P_0 U & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_i^0 (P_0 U)^{(i)} & C_i^1 (P_0 U)^{(i-1)} & \ldots & C_i^i P_0 U \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} \Phi_{1,1}(t) = \mathcal{N}_1(t), \quad \Phi_{i,i}(t) = \mathcal{N}_i(t) \Phi_{i-1,i-1}(t), \\ \Phi_{i,1}(t) = \Phi_{i-1,1}(t) + \mathcal{N}_i(t)(E + \Phi'_{i-1,1}(t)), \quad i = \overline{2,k}; \\ \Phi_{k,j}(t) = \Phi_{k-1,j}(t) + \mathcal{N}_k(t)(\Phi_{k-1,j-1}(t) + \Phi'_{k-1,j}(t)), \quad j = \overline{2,k-1}. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Подставив представление (2.3), (6.1) в систему (6.2), (6.5), получим два матричных уравнения: для регулярных и для сингулярных функций. Последнее преобразуем с помощью формулы (2.11), а затем приравняем слагаемые при одинаковых производных от δ-функции, стоящие слева и справа от знака равенства. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно скачка регулярной части решения $h_\chi(\tau)$ и коэффициентов сингулярной составляющей решения. Из этой системы единственным образом находятся коэффициенты η_0, η_1, $\ldots$, η_{k-1}:

$$\operatorname{col}(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) = -\Theta_k^{-1}(\tau) \Phi_k(\tau) \mathcal{U}_k(\tau) \operatorname{col}(\Delta_v(\tau), \Delta_{v'}(\tau), \ldots, \Delta_{v^{(k)}}(\tau)),$$

где

$$\Theta_k(\tau) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B_1(\tau) \\ A_0(\tau) \end{matrix} & * & \dots & * \\ \hline O & \begin{matrix} B_1(\tau) \\ A_0(\tau) \end{matrix} & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \dots & \begin{matrix} B_1(\tau) \\ A_0(\tau) \end{matrix} \end{array}\right).$$

Очевидно, что матрица $\Theta_k(t)$ в силу условия (4.10) (или, что то же самое, (2.6)) обратима при всех $t \in \mathbb{R}$. В свою очередь

$$\Phi_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}C_{j-1}^{j-1}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-1)} & \sum\limits_{j=2}^{k}(-1)^{j-2}C_{j-2}^{j-2}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-2)} & \dots & C_0^0\bar{\Phi}_{k,k} \\ \sum\limits_{j=2}^{k}(-1)^{j-2}C_{j-1}^{j-2}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-2)} & \sum\limits_{j=3}^{k}(-1)^{j-3}C_{j-2}^{j-3}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-3)} & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=k-1}^{k}(-1)^{j-k+1}C_{j-1}^{j-k+1}\bar{\Phi}_{k,j}^{(j-k+1)} & C_{k-2}^0\bar{\Phi}_{k,k} & \dots & O \\ C_{k-1}^0\bar{\Phi}_{k,k} & O & \dots & O \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

где матрицы $\bar{\Phi}_{k,j}(t)$ получены из соответствующих матриц $\Phi_{k,j}(t)$ (см. (6.7), (6.3)) вычёркиванием последних $\hat{\rho}$ нулевых строк.

Следуя подходу, изложенному, в частности, в [4, 5, 10], введём определение импульсной управляемости.

Определение 4. Будем говорить, что система (0.1) *импульсно управляема*, если для каждых $\beta \in \mathbb{R}^{kn}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдётся управление вида (2.1) такое, что для сингулярной составляющей решения справедливо представление (6.1), для коэффициентов которого выполняется равенство

$$\operatorname{col}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) = -\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau)\beta.$$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Система (0.1) импульсно управляема тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau) = \operatorname{rank}\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau) \quad \text{для всех} \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.9}$$

Доказательство. В работе [10] получено условие импульсной управляемости для ДАУ вида (0.1), которое в данном случае приобретает вид

$$\operatorname{rank}\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau) \equiv \operatorname{rank}\Theta_k^{-1}(\tau)\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)$$

на $\mathbb{R}$. Отсюда очевидным образом вытекает утверждение леммы.

Теорема 5. *В предположениях теоремы 3 для ДАУ (0.1) обратная связь вида (5.1) такая, что для замкнутой системы (5.2) (или, что то же самое, (5.3)) справедливо условие (5.4), существует тогда и только тогда, когда система (0.1) импульсно управляема.*

Доказательство. Покажем равносильность условий (5.7) и (6.9).

Принимая во внимание формулы (6.8), (6.7) и (6.3), нетрудно показать, что в тождестве (6.9) матрица $\Phi_k(\tau)$ имеет следующую структуру:

$$\Phi_k(\tau) = \begin{pmatrix} E & O & O & \dots & O & O \\ * & E & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & E & O \\ * & * & * & \dots & * & E \end{pmatrix}\Psi(\tau),$$

где

$$\Psi(\tau)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|ccc|c|cc|c} \boxed{P_1} & O & \ldots & O & O & \ldots & O & \ldots & O & O & O \\ * & P_2 & \ldots & O & \boxed{P_2P_1} & \ldots & O & \ldots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & O & * & \ldots & O & \ldots & \boxed{\prod_{i=1}^{k-1} P_i} & O & O \\ * & * & \ldots & P_k & * & \ldots & P_kP_{k-1} & \ldots & * & \prod_{j=2}^{k} P_i & \boxed{\prod_{j=1}^{k} P_i} \end{array}\right), \qquad (6.10)$$

$\prod_{i=1}^{m} P_i(\tau)=P_m(\tau)P_{m-1}(\tau)\cdots P_1(\tau)$. Очевидно, что $\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)=\operatorname{rank}\Psi(\tau)$.

По построению (см. п. 5) матрицы $P_i(t)$ $(i=\overline{1,k})$ обладают полным рангом ρ_i по строкам для всех $t\in\mathbb{R}$. Согласно утверждению 1 в матрице (6.10) блоки, обведённые рамками, также будут иметь полный ранг по строкам, т.е. $\operatorname{rank} P_i(t)P_{i-1}(t)\cdots P_1(t)\equiv\rho_i$ на $\mathbb{R}$. Поэтому всюду на $\mathbb{R}$ ранг матрицы $\Psi(t)$ равен сумме рангов матриц, обведённых рамками. Следовательно,

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)=\sum_{i=1}^{k}\rho_i \quad \text{для всех} \quad \tau\in\mathbb{R}. \qquad (6.11)$$

В свою очередь с учётом формул (6.6) и (4.11) получаем

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} P_1U_1^{[0]} & O & O & \ldots & O & O \\ * & P_2P_1U_1^{[0]} & O & \ldots & O & O \\ * & * & \left(\prod\limits_{i=1}^{3} P_i\right)U_1^{[0]} & \ldots & O & O \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ * & * & * & \ldots & * & \left(\prod\limits_{i=1}^{k} P_i\right)U_1^{[0]} \end{pmatrix}. \qquad (6.12)$$

Допустим, что условие (5.7) выполнено. По построению матрица $P_1(t)$ состоит из ρ_1 строк, следовательно, матрица $P_1(\tau)U_1^{[0]}(\tau)$ обладает полным строчным рангом. В соответствии с утверждением 1 имеем

$$\operatorname{rank} P_i(\tau)P_{i-1}(\tau)\cdots P_1(\tau)U_1^{[0]}(\tau)=\rho_i \quad \text{для любого} \quad \tau\in\mathbb{R} \quad (i=\overline{1,k}).$$

Из представления (6.12) вытекает тождество

$$\operatorname{rank}\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)=\sum_{i=1}^{k}\rho_i \quad \text{для любого} \quad \tau\in\mathbb{R}. \qquad (6.13)$$

Таким образом, справедливо условие (6.9).

Обратно, пусть имеет место свойство (6.9), тогда из (6.11) вытекает тождество (6.13). Последнее в свою очередь гарантирует, что матрица $\Phi_k(\tau)\mathcal{U}_k(\tau)$ будет иметь всюду на $\mathbb{R}$ полный ранг по строкам. А значит, тем же свойством обладает и её блок $P_1(\tau)U_1^{[0]}(\tau)$ (см. (6.12)), т.е. условие (5.7) выполняется. Теорема доказана.

Прямым следствием теорем 4 и 5 является следующий результат.

Следствие. *Пусть*

1) выполнены все условия теоремы 3;

2) система (0.1) импульсно управляема.

Тогда для ДАУ (0.1) найдётся обратная связь (5.1) такая, что решение замкнутой системы (5.2) существует и представимо в виде (2.8).

Заключение. В статье для нестационарных ДАУ (0.1) произвольно высокого индекса неразрешённости изучалась возможность построения управления в виде обратной связи (5.1) такого, что общее решение замкнутой системы (5.2) (или, что то же самое, (5.3)) не содержало бы сингулярных обобщённых функций. В частности, получено необходимое и достаточное условие (5.7), гарантирующее существование управления вида (5.1), обеспечивающего выполнение для ДАУ (5.3) соотношения (5.4). Доказано (теорема 4), что предположение (5.7) в совокупности с условиями теоремы о существовании решения ДАУ (0.1) (теорема 3) обеспечивают отсутствие в решении системы (5.2) слагаемых, содержащих дельта-функцию и её производные.

К сожалению, в общем случае условие (5.7) сложно проверить, поскольку не существует алгоритмов построения матрицы $P_1(t)$. Такая ситуация характерна для всех работ в этой области.

С другой стороны, для системы (0.1) имеются конструктивные условия импульсной управляемости [10]. В настоящей работе показано, что предположение (5.7) равносильно условию импульсной управляемости ДАУ (0.1) (теорема 5).

Следует отметить, что важную роль в представленном анализе сыграло предположение о постоянстве ранга матрицы $A(t)$. Это предположение обеспечивало возможность построения алгоритма преобразования системы (0.1) к виду (2.5), (2.6), изложенного в п. 4.

Дальнейшие перспективы исследования данной проблемы связаны с изучением систем вида (0.1) с матрицей при производной переменного ранга. Предложенный в данной работе подход не может быть использован для анализа таких систем. В общем случае невозможно с помощью управления вида (5.1) исключить импульсные слагаемые из решения ДАУ в случае, когда матрица $A(t)$ имеет переменный ранг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cobb D.* On the solution of linear differential equations with singular coefficients // J. Differ. Equat. 1982. V. 46. P. 310–323.
2. *Verghese G.C., Levy B., Kailath T.* A generalized state-space for singular systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1981. V. AC-26. № 4. P. 811–831.
3. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования. Новосибирск, 1998.
4. *Cobb D.* Controllability, observability, and duality in singular systems // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1984. V. AC-29. № 12. P. 1076–1082.
5. *Dai L.* Singular control system. Lecture notes in control and information sciences. V. 118. Berlin; Heidelberg; New York, 1989.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
7. *Cobb D.* State feedback impulse elimination for singular systems over a Hermite domain // SIAM J. Contr. Optim. 2006. V. 44. № 6. P. 2189–2209.
8. *Wang C.-J.* State feedback impulse elimination of linear time-varying singular systems // Automatica. 1996. V. 32. № 1. P. 133–136.
9. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1983. № 4. P. 517–512.
10. *Щеглова А.А.* Управляемость дифференциально-алгебраических уравнений в классе импульсных воздействий // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 1. С. 210–224.
11. *Щеглова А.А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.
12. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.

Институт динамики систем и теории управления
СО РАН им. В.М. Матросова, г. Иркутск

Поступила в редакцию 20.03.2020 г.
После доработки 26.10.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 61–75

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.983.23

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. В. Глушак**

В банаховом пространстве рассмотрены начальные задачи для ряда гиперболических уравнений со степенным характером вырождения и операторными коэффициентами. Установлены достаточные условия их однозначной разрешимости, налагаемые на коэффициенты уравнения, порядок вырождения и начальные элементы.

DOI: 10.31857/S0374064121010064

Введение. Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей (см. монографии [1–3] и имеющуюся в них библиографию). Отдельные виды таких уравнений подробно изучены, однако для уравнений второго порядка, вырождающихся в уравнения первого порядка, некоторые вопросы в случае операторных коэффициентов (абстрактные уравнения), в частности, получение явных формул для решений, требуют дальнейшего исследования.

В настоящей работе рассматриваются уравнения в банаховом пространстве в гиперболическом случае. Ранее задача Коши с оператором $A = A_0^2$, где A_0 – генератор C_0-группы, для дифференциального уравнения вида $u''(t) - t^\alpha Au(t) = 0$, $\alpha > 0$, изучалась в [4], случай гильбертова пространства рассмотрен в [5]. Задача Коши с генератором операторной косинус-функции для слабо вырождающегося дифференциального уравнения вида $t^\gamma u''(t) - Au(t) = f(t)$, $0 < \gamma < 2$, рассматривалась в [6] (по поводу терминов см., например, монографию [7]). И в том, и в другом случаях указанных вырождающихся уравнений исследование проводилось с помощью сведения их к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Мы рассмотрим более общий, чем в [4–6], вид как дифференциального уравнения, так и операторного коэффициента, имеющего, кроме того, и переменную составляющую. Исследования также будут проводиться путём сведения к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу, при этом потребуется использование операторной функции Бесселя, введённой в рассмотрение автором [8] и изученной в работах [8, 9].

Опишем класс операторов A, с которым в дальнейшем будут рассматриваться различные уравнения. В работах [8, 9] при $k > 0$ в гиперболическом случае исследована корректная разрешимость для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) с операторным коэффициентом A следующей задачи Коши:

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = Av(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$v(0) = u_0, \quad v'(0) = 0. \tag{2}$$

В работе [8] необходимое и достаточное условие разрешимости сформулировано в терминах оценки нормы резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ и её весовых производных, а в статье [9] получен критерий равномерной корректности этой задачи, который, в отличие от [8], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и её невесовых производных.

Класс операторов A, для которых задача Коши (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор (назовём его *операторной функцией*

Бесселя (ОФБ)) – через $Y_k(t)$, т.е. $v(t) = Y_k(t)u_0$, при этом через G_0 $(G_0 \subset G_k$ при $k > 0)$ обозначим множество генераторов операторной косинус-функции $C(t)$ и $Y_0(t) = C(t)$. Класс G_k будем называть *классом корректной разрешимости*, а число k – его *индексом.* Примеры операторов $A \in G_k$ и порождаемых ими ОФБ $Y_k(t)$ приведены в [9]. В частности, если $A \in G_0 \subset G_k$ и $k > 0$, то

$$Y_k(t) = \frac{2\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)} \int\limits_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} C(ts)\,ds, \tag{3}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

1. Слабо вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения. При $t \geqslant 0$ в банаховом пространстве E рассмотрим слабо вырождающееся дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами, имеющее вид

$$t^\gamma u''(t) + bt^{\gamma-1}u'(t) = (A + t^\beta B)u(t), \tag{4}$$

где $0 < \gamma < 2$, $b \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$, A – неограниченный замкнутый оператор, $B \in \mathrm{L}(E)$ – ограниченный оператор. Принадлежность параметра γ интервалу $(0,2)$ означает *слабое вырождение*, в отличие от случая *сильного вырождения* – когда $\gamma \geqslant 2$, который также будет рассмотрен в работе.

Под *решением* уравнения (4) будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую на $(0,+\infty)$ функцию $u(t)$, принадлежащую области определения $D(A)$ оператора A и удовлетворяющую этому уравнению при всех $t > 0$. Аналогично определяются решения и для остальных рассматриваемых в работе уравнений.

В скалярном случае при $\gamma = 1$, $A = \lambda > 0$, $B = 0$ неоднородное уравнение (4) методами теории полугрупп исследовалось в работе [10] при изучении стохастических процессов, которые являются пределом последовательности случайных блужданий.

Замена независимой переменной $t = (\tau/\nu)^\nu$, $\nu = 2/(2-\gamma)$, и неизвестной функции $u(t) = u((\tau/\nu)^\nu) = w(\tau)$ с учётом очевидных равенств

$$u'(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{1-\nu} w'(\tau), \quad u''(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{2(1-\nu)} \left(w''(\tau) + \frac{1-\nu}{\tau} w'(\tau)\right) \tag{5}$$

приводит слабо вырождающееся уравнение (4) к уравнению ЭПД вида

$$w''(\tau) + \frac{b\nu - \nu + 1}{\tau} w'(\tau) = \left(A + \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu\beta} B\right) w(\tau), \quad \tau > 0. \tag{6}$$

Корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (6) зависит от знака параметра $b\nu - \nu + 1$. Если $b\nu - \nu + 1 \geqslant 0$, то начальные условия так же, как и для уравнения (1), имеют вид

$$w(0) = u_0, \quad w'(0) = 0. \tag{7}$$

Если $b\nu - \nu + 1 < 0$, то (см. [11]) следует задавать весовое начальное условие

$$w(0) = 0, \quad \lim_{\tau \to 0+} \tau^{b\nu-\nu+1} w'(\tau) = u_1. \tag{8}$$

Возможна и более общая постановка начальных условий (см. [12]), но для неё требуется дополнительная гладкость начальных элементов, и здесь мы её рассматривать не будем.

Разрешимость начальной задачи для уравнения (6), естественно, зависит и от оператора $A + (\tau/\nu)^{\nu\beta}B$. Будем предполагать, что оператор A принадлежит более широкому, чем в указанной во введении работе [6], классу функций G_k при некотором $k > 0$ $(G_k \supset G_0)$.

Если $A \in G_k$, $k > 0$, то вопрос о принадлежности возмущённого оператора $A + B$ классу G_k, если B – ограниченный оператор, исследован в работе [13], а вопрос о его принадлежности некоторому классу корректности, если $B \in G_m$, $m \geqslant 0$, – неограниченный оператор, в работе [14]. Указанные результаты о возмущении значительно расширяют класс операторов, порождающих ОФБ. В настоящей работе рассматривается возмущение оператора $A \in G_k$, $k > 0$, переменным оператором вида $B(\tau) = (\tau/\nu)^{\nu\beta} B$.

Теорема 1. *Пусть* $k > 0$, $A \in G_k$, $B(t) = (t/\nu)^{\nu\beta} B$, $\nu\beta \geqslant 0$, *а* $Q(t,s)$ – *непрерывный при* $t \geqslant s > 0$ *оператор, удовлетворяющий операторному дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k^2 - 2k}{4t^2} Q(t,s) - B(t)Q(t,s) = \frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial s^2} - \frac{k^2 - 2k}{4s^2} Q(t,s) \tag{9}$$

и граничным условиям

$$\frac{dQ(t,t)}{dt} = \frac{1}{2} B(t), \quad \lim_{s \to 0+} s^{k/2-1} Q(t,s) = 0. \tag{10}$$

Тогда функция

$$v(t) = Y_k(t)u_0 + t^{-k/2} \int\limits_0^t s^{k/2} Q(t,s) Y_k(s) u_0 \, ds \tag{11}$$

является единственным решением уравнения

$$v''(t) + \frac{k}{t} v'(t) = (A + B(t))v(t), \tag{12}$$

удовлетворяющим условиям (2).

Доказательство. Для первого слагаемого в представлении (11) по определению ОФБ $Y_k(t)$ справедливо равенство

$$Y_k''(t)u_0 + \frac{k}{t} Y_k'(t)u_0 = AY_k(t)u_0, \tag{13}$$

здесь и в дальнейшем будем использовать обозначение

$$Y_k'(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'.$$

Обозначим второе слагаемое в представлении (11) через $\varphi(t)$, т.е.

$$\varphi(t) = t^{-k/2} \int\limits_0^t s^{k/2} Q(t,s) Y_k(s) u_0 \, ds. \tag{14}$$

Дважды дифференцируя тождество (14), получаем

$$\varphi'(t) = t^{-k/2} \int\limits_0^t s^{k/2} \left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} - \frac{k}{2t} Q(t,s) \right) Y_k(s) u_0 \, ds + Q(t,t) Y_k(t) u_0,$$

$$\varphi''(t) = t^{-k/2} \int\limits_0^t s^{k/2} \left(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2} - \frac{k}{t} \frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} + \frac{2k + k^2}{4t^2} Q(t,s) \right) Y_k(s) u_0 \, ds +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} \bigg|_{s=t} + \frac{dQ(t,t)}{dt} - \frac{k}{2t} Q(t,t) \right) Y_k(t) u_0 + Q(t,t) Y_k'(t) u_0$$

и, следовательно,

$$\varphi''(t)+\frac{k}{t}\varphi'(t)=t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2}-\frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s)\Big)Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\Big(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t}+\frac{dQ(t,t)}{dt}+\frac{k}{2t}Q(t,t)\Big)Y_k(t)u_0+Q(t,t)Y_k'(t)u_0. \tag{15}$$

Обозначим интеграл в равенстве (15) через $\psi(t)$ и упростим его, используя уравнение (9) и граничное условие (10). После двукратного интегрирования по частям будем иметь

$$\psi(t)=\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial t^2}-\frac{k^2-2k}{4t^2}Q(t,s)\Big)Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t s^{k/2}\frac{\partial^2 Q(t,s)}{\partial s^2}Y_k(s)u_0\,ds+\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(B(t)-\frac{k^2-2k}{4s^2}I\Big)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=t^{k/2}\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\Big|_{s=t}Y_k(t)u_0-\int\limits_0^t\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\Big(\frac{k}{2}s^{k/2-1}Y_k(s)+s^{k/2}Y_k'(s)\Big)u_0\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t s^{k/2}\Big(B(t)-\frac{k^2-2k}{4s^2}I\Big)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds=$$

$$=t^{k/2}\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\Big|_{s=t}Y_k(t)u_0-\frac{kt^{k/2-1}}{2}Q(t,t)Y_k(t)u_0-t^{k/2}Q(t,t)Y_k'(t)u_0+$$

$$+\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)\Big(Y_k''(s)+\frac{k}{s}Y_k'(s)\Big)u_0\,ds+\int\limits_0^t s^{k/2}B(t)Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds. \tag{16}$$

Заменив интеграл в (15) его представлением (16), в силу граничного условия (10) приходим к равенству

$$\varphi''(t)+\frac{k}{t}\varphi'(t)=t^{-k/2}(A+B(t))\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds+$$

$$+\Big(\frac{\partial Q(t,s)}{\partial s}\Big|_{s=t}+\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t}+\frac{dQ(t,t)}{dt}\Big)Y_k(t)u_0=$$

$$=(A+B(t))\varphi(t)+2\frac{dQ(t,t)}{dt}Y_k(t)u_0=(A+B(t))\varphi(t)+B(t)Y_k(t)u_0. \tag{17}$$

Вследствие соотношений (13)–(17) окончательно получаем

$$v''(t)+\frac{k}{t}v'(t)=AY_k(t)u_0+(A+B(t))\varphi(t)+B(t)Y_k(t)u_0=(A+B(t))v(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (11) функция $v(t)$, которую в дальнейшем удобно обозначить

$$v(t)=\tilde{Y}_k(t)u_0\equiv Y_k(t)u_0+t^{-k/2}\int\limits_0^t s^{k/2}Q(t,s)Y_k(s)u_0\,ds, \tag{18}$$

является решением уравнения (12).

Записывая функцию $v(t)$ в виде

$$v(t)=Y_k(t)u_0+t\int\limits_0^1\xi^{k/2}Q(t,t\xi)Y_k(t\xi)u_0\,d\xi$$

и учитывая свойства ОФБ $Y_k(0)=I$, $Y_k'(0)=0$, а также вытекающее из уравнения (9) равенство

$$\lim_{t\to 0+}Q(t,t\xi)=0,$$

несложно убедиться в том, что функция $v(t)$ удовлетворяет условиям (2).

Доказательство единственности решения задачи (9), (10) проведём методом от противного. Пусть $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – два решения задачи (9), (10). Рассмотрим функцию двух переменных

$$V(t,s)=f(\tilde{Y}_k(s)(v_1(t)-v_2(t))),$$

где $f\in E^*$ (E^* – сопряжённое с E пространство), $t,s\geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{k}{s}\frac{\partial V}{\partial s},\quad t,s>0,$$

и начальным условиям

$$V(0,s)=\frac{\partial V(0,s)}{\partial t}=0.$$

Эта задача для уравнения в частных производных заменой

$$t_1=(t+s)^2/4,\quad s_1=(t-s)^2/4$$

сводится (см. [15, § 5, п. 3]) к задаче, единственность решения которой в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t,s\geqslant 0$ функций установлена в [15, § 5, п. 2]). Кроме того, утверждение о единственности содержится также в теореме 6.1 работы [16], в которой рассматривается даже более общее уравнение.

Из полученной в работе [15] явной формулы для решения указанной задачи следует тождество $V(t,s)\equiv 0$. В силу произвольности $f\in E^*$, полагая $s=0$, получаем $v_1(t)\equiv v_2(t)$, и единственность решения установлена. Теорема доказана.

Как доказано в теореме 1, разрешимость начальной задачи для уравнения (12) зависит от разрешимости граничной задачи (9), (10) для операторного дифференциального уравнения, которая фактически установлена в работе [17].

Теорема 2. *Операторное дифференциальное уравнение (9) с граничными условиями (10) имеет решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.*

Если $B\in\mathbb{R}$, то разрешимость граничной задачи для скалярного уравнения (9) установлена в [17]. Нетрудно убедиться, что замена коэффициента $B\in\mathbb{R}$ непрерывным операторным коэффициентом $B(t)=(t/\nu)^{\nu\beta}B$ не препятствует повторению рассуждений §§ 2, 3 работы [17]. Отметим также, что случай $k=0$ рассмотрен в работе [18].

Укажем ещё, что если $\beta=0$, $k=2n$, $n\in\mathbb{N}$, то, как следует из теоремы 3 [13], в этом частном случае функцию $Q(t,s)$ можно записать в явном виде:

$$Q(t,s)=\frac{s^nB}{2^{n+1}n!t^{n-1}}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n\left((s^2-t^2)^n_1F_2\left(1;n+1,2;\frac{t^2-s^2}{4}B\right)\right),$$

где ${}_1F_2(\cdot)$ – обобщённая гипергеометрическая функция.

Установив результаты о разрешимости начальной задачи для возмущённого уравнения ЭПД (12), сформулируем теперь результаты о разрешимости начальных задач для слабо вырождающегося уравнения (4).

Пусть $b\nu - \nu + 1 \geqslant 0$, $\nu = 2/(2-\gamma)$ или, что то же самое, $2b \geqslant \gamma$. Возвращаясь к исходной переменной t и неизвестной функции $u(t)$, получаем, что уравнение (6) перейдёт в уравнение (4), а начальные условия (7) в силу равенств (5) – в условия

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{1-1/\nu} u'(t) = 0. \tag{19}$$

Из теорем 1, 2 вытекает утверждение о разрешимости начальной задачи (4), (19).

Теорема 3. *Пусть* $0 < \gamma < 2$, $2b \geqslant \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_0 \in D(A)$. *Тогда функция* $u(t) = \tilde{Y}_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}(\nu t^{1/\nu})u_0$, *где* $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(2b-\gamma)/(2-\gamma)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям (19).*

Пусть теперь $b\nu - \nu + 1 < 0$ или $2b < \gamma$. В этом случае для уравнения (6) следует задавать начальные условия (8), которые для исходной функции $u(t)$ принимают вид

$$u(0) = 0, \quad \nu^{b\nu-\nu+1} \lim_{t\to 0+} t^b u'(t) = u_1. \tag{20}$$

Учитывая результаты работы [11] о разрешимости весовой задачи Коши для уравнения ЭПД, приходим к утверждению.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \gamma < 2$, $2b < \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_1 \in D(A)$. *Тогда функция*

$$u(t) = \frac{\nu^{\nu-b\nu-1}t^{1-b}}{1-b}\tilde{Y}_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}(\nu t^{1/\nu})u_1,$$

где $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(4-b-\gamma)/(2-\gamma)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям (20).*

В частности, при $b = 0$, $B = 0$ и операторе $A \in G_{\nu+1}$ из более широкого, чем в [6], множества $G_{\nu+1} \supset G_0$ решение задачи (4), (20) имеет вид

$$u(t) = \nu^{\nu-1} t Y_{\nu+1}(\nu t^{1/\nu})u_1.$$

Утверждения теорем 3 и 4, очевидно, справедливы и при $\gamma = 0$, поскольку в этом случае уравнение (4) уже является уравнением ЭПД. В этих теоремах не только указана постановка начальных условий и доказана однозначная разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения (4), но и установлена связь между порядком вырождения γ, коэффициентом b при первой производной $u'(t)$ и множеством операторов A, образующим класс корректной разрешимости.

Элементарный анализ утверждений теоремы 3 приводит к следующим выводам. Если $0 \leqslant \gamma \leqslant 2b$ и $0 \leqslant b < 1$, то индекс класса корректной разрешимости при фиксированном b убывает по переменной γ от значения b до значения 0, при этом сам класс корректной разрешимости сужается с G_b до G_0. Если $0 \leqslant \gamma < 2$ и $b = 1$, то класс корректной разрешимости один и тот же при всех γ и совпадает с G_1. Если $0 \leqslant \gamma < 2$ и $b > 1$, то индекс класса корректной разрешимости возрастает по переменной γ от значения b до $+\infty$. При выполнении условия $2b = \gamma$, $0 \leqslant \gamma < 2$, класс корректной разрешимости один и тот же при всех γ и совпадает с G_0.

При фиксированном значении γ, $0 \leqslant \gamma < 2$, индекс класса корректной разрешимости возрастает по переменной b от значения $\gamma/2$ до $+\infty$.

Если выполнено условие $2b = \gamma$, $0 \leqslant \gamma < 2$, $B = 0$, то класс корректной разрешимости один и тот же при всех γ и совпадает с G_0. Предельный случай $b = \gamma = 0$ соответствует абстрактному волновому уравнению

$$u''(t) = Au(t), \quad t \geqslant 0, \quad A \in G_0,$$

которое не является вырождающимся. Как известно, единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u_0, u_1 \in D(A),$$

является функция $u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1$, где $C(t)$ – операторная косинус-функция и

$$S(t) = \int_0^t C(\tau)\,d\tau$$

– операторная синус-функция.

В другом предельном случае $\gamma = 2$, $b = 1$, который при используемой в п. 1 замене не сводится к уравнению ЭПД и который не исследован в п. 1, получается вырождающееся абстрактное уравнение Эйлера

$$t^2u''(t) + tu'(t) = Au(t), \quad t > 0,$$

которое при $A \in G_0$ имеет единственное решение

$$u(t) = C(\ln t)u_0 + S(\ln t)u_1,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(1) = u_0, \quad u'(1) = u_1, \quad u_0, u_1 \in D(A).$$

В монографии [19] ограниченное в точке вырождения решение неоднородного абстрактного уравнения Эйлера с операторными коэффициентами находится методом малых стабилизирующих возмущений.

Аналогичный анализ можно провести, используя теорему 4.

2. Абстрактное уравнение Шарпа. Рассмотрим далее частный случай уравнения (4) при $b = \gamma = \beta = 1$, $B = -I$. Уравнение

$$tu''(t) + u'(t) - tu(t) = A_0u(t) \tag{21}$$

называется *уравнением Шарпа* (см. [20, с. 118]), и для него при $A_0 \in G_1$ справедлива теорема 3. Покажем, что для некоторого его решения можно указать явную формулу и в случае, если $A_0 \notin G_1$. Естественно, задача (4), (19) с таким оператором не будет корректной, поскольку принадлежность $A_0 \in G_1$ является необходимым и достаточным условием корректности.

Пусть оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t; A_0)$, тогда $A_0^2 \in G_0$ и $C(t; A_0^2) = 1/2(T(t; A_0) + T(-t; A_0))$ – порождаемая им равномерно ограниченная операторная косинус-функция.

При $u_2 \in D(A_0^2)$ введём в рассмотрение функцию

$$u(t) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right)u_2\,d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)A_0S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right)u_2\,d\varphi, \tag{22}$$

где $S(t; A_0^2)$ – операторная синус-функция.

В силу равномерной ограниченности операторной косинус-функции $C(t; A_0^2)$ сходимость первого интеграла в (22) очевидна, а сходимость второго интеграла вытекает из конечности интеграла 2.6.34.3 из [21]

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Покажем, что определяемая равенством (22) функция $u(t)$ является ограниченным в нуле решением уравнения (21), и с этой целью вычислим её производные. После интегрирования по частям с учётом равномерной ограниченности операторной косинус-функции будем иметь

$$u'(t) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\cos\varphi C\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right)u_2\,d\varphi + \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\cos\varphi A_0S\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\right)u_2\,d\varphi =$$

$$= t\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\sin^2\varphi C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)C'\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi +$$

$$+ t\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\sin^2\varphi A_0 S\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)A_0 C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi,$$

$$u''(t) = \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)\cos^2\varphi C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)\cos^2\varphi A_0 S\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi,$$

$$tu''(t) + u'(t) = tu(t) + \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(t\cos\varphi)A_0^2 S\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(t\cos\varphi)A_0 C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi = tu(t) + A_0 u(t).$$

Таким образом, определяемая равенством (22) ограниченная функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (21), а при $t = 0$ условию

$$u(0) = \int\limits_0^{\pi/2} C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi.$$

Если поставить задачу о нахождении ограниченного решения уравнения (21), удовлетворяющего начальному условию

$$u(0) = u_0, \tag{23}$$

то относительно элемента $u_2 \in D(A_0^2)$ возникает операторное уравнение первого рода

$$\int\limits_0^{\pi/2} C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi = u_0, \tag{24}$$

для решения которого необходимо наложить дополнительные условия гладкости на начальный элемент u_0.

Учитывая представление операторной косинус-функции $C(t; A_0^2)$ через резольвенту

$$C(t; A_0^2)u_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda, \quad \sigma > 0, \quad u_2 \in E,$$

левую часть операторного уравнения (24) запишем в виде

$$\int\limits_0^{\pi/2} C\Big(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; A_0^2\Big)u_2\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}C(t; A_0^2)u_2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{t(\lambda+1)}\,dt}{1+e^{2t}}\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta\Big(\frac{1-\lambda}{2}\Big)\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\,d\lambda \tag{25}$$

(при этом мы использовали интеграл 2.3.12.6 из [21]), где

$$\beta(z) = \frac{1}{2}\biggl(\psi\biggl(\frac{z+1}{2}\biggr) - \psi\biggl(\frac{z}{2}\biggr)\biggr),$$

$\psi(\cdot)$ – пси-функция (см., например, [21, с. 775; 22, с. 536]).

Используя представление (25), операторное уравнение (24) относительно $u_2 \in D(A_0^2)$ запишем в виде

$$Pu_2 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta\biggl(\frac{1-\lambda}{2}\biggr)\lambda R(\lambda^2; A_0^2)u_2\, d\lambda = u_0. \tag{26}$$

Таким образом, вопрос о разрешимости операторного уравнения (24) сводится к вопросу о существовании у заданного левой частью уравнения (26) и продолженного по непрерывности на E ограниченного оператора $P : D(A_0^2) \to E$ обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из $D(A_0^2)$. Важную роль при этом будет играть функция

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2}\beta\biggl(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{2}\biggr),$$

с помощью которой уравнение (26) запишем в виде

$$Pu_2 \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi\chi(\xi^2)R(\xi^2; A_0^2)u_2\, d\xi = u_0.$$

Оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t;A_0)$, следовательно, спектр оператора A_0^2 лежит на отрицательной полуоси, и поэтому, как будет видно из дальнейшего доказательства, нам будет важен факт отсутствия [22, с. 536] действительных нулей у функции $\chi(\lambda)$.

Пусть Υ_1 – контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_1 > 0$, тогда Υ_1^2 – парабола, являющаяся образом прямой Υ_1 при отображении $w = z^2$ $(z \in \Upsilon_1,\ w \in \Upsilon_1^2)$. Поскольку спектр оператора A_0^2 лежит на отрицательной полуоси, то введём в рассмотрение контур Ξ, который получается из Υ_1 стягиванием к отрицательной полуоси так, чтобы он не содержал слева от себя нулей функции $\chi(z)$.

Возьмём λ_0 из регулярного множества $\rho(A_0^2)$ такое, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$, и введём в рассмотрение ограниченный оператор

$$Hv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi} \frac{R(z; A_0^2)v\, dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)}, \quad H : E \to E, \tag{27}$$

абсолютная сходимость которого вытекает из известного неравенства

$$\|\lambda R(\lambda^2; A_0^2)\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega,$$

для резольвенты генератора операторной косинус-функции $C(t; A_0^2)$.

Покажем теперь, что оператор P имеет обратный оператор $P^{-1} : D(A_0^2) \to E$. Пусть $v \in D(A_0^2)$, $\sigma_1 < \sigma_2 < \operatorname{Re}\lambda$. Тогда, применяя определяемый равенством (27) оператор H к Pv и учитывая тождество Гильберта

$$R(z; A_0^2)R(\xi^2; A_0^2) = \frac{R(z; A_0^2) - R(\xi^2; A_0^2)}{\xi^2 - z},$$

получаем равенство

$$HPv = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z;A_0^2)}{\chi(z)(z-\lambda_0)}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\xi\chi(\xi^2)R(\xi^2;A_0^2)v\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\left(\frac{\xi\chi(\xi^2)R(z;A_0^2)v}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)} - \frac{\xi\chi(\xi^2)R(\xi^2;A_0^2)v}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)}\right)d\xi\,dz. \tag{28}$$

Интеграл в (28) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$HPv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{\xi\chi(\xi^2)R(z;A_0^2)v\,d\xi\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)} -$$

$$- \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\xi\chi(\xi^2)R(\xi^2;A_0^2)v\int\limits_{\Xi}\frac{dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)}\,d\xi. \tag{29}$$

Если контур интегрирования Ξ замкнуть влево, то внутренний интеграл во втором слагаемом в (29) обратится в нуль в силу теоремы Коши. Для вычисления же интегралов в первом слагаемом в (29) используем интегральную формулу Коши. Таким образом, верно равенство

$$HPv = \frac{2}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon_2}\frac{\xi\chi(\xi^2)R(z;A_0^2)v\,d\xi\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\xi^2-z)} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\Upsilon_2^2}\frac{\chi_k(\lambda)R(z;A_0^2)v\,d\lambda\,dz}{\chi(z)(z-\lambda_0)(\lambda-z)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Xi}\frac{R(z;A_0^2)v\,dz}{z-\lambda_0} = -R(\lambda_0;A_0^2)v,$$

где Υ_2 – контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_2$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \operatorname{Re}\lambda$, а контур Υ_2^2 – парабола, являющаяся образом контура Υ_2 при отображении $w = z^2$ $(z \in \Upsilon_2,\ w \in \Upsilon_2^2)$.

Коммутирующие между собой операторы H, P, $R(\lambda_0;A_0^2)$ ограничены, и область определения $D(A_0^2)$ плотна в E, поэтому равенство $HPv = -R(\lambda_0;A_0^2)v$ справедливо и для $v \in E$, и при этом $HP : E \to D(A_0^2)$. Отсюда следует, что оператор $P^{-1}v = -(\lambda_0 I - A_0^2)Hv$ при $v \in D(A_0^2)$ является обратным к оператору P, $P^{-1} : D(A_0^2) \to E$. Действительно,

$$PP^{-1}v = -P(\lambda_0 I - A_0^2)Hv = -PH(\lambda_0 I - A_0^2)v = R(\lambda_0;A_0^2)(\lambda_0 I - A_0^2)v = v, \quad v \in D(A_0^2),$$

$$P^{-1}Pv = -(\lambda_0 I - A_0^2)HPv = (\lambda_0 I - A_0^2)R(\lambda_0;A_0^2)v = v, \quad v \in E.$$

Возвращаясь к операторному уравнению (26) и требуя дополнительно, чтобы имело место включение $u_0 \in D(A_0^4)$, определим принадлежащий $D(A_0^2)$ начальный элемент

$$u_2 = (A_0^2 - \lambda_0 I)Hu_0,$$

где оператор H задан равенством (27), $\lambda_0 \in \rho(A_0^2)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$. Тогда определяемая равенством (22) функция $u(t)$ будет ограниченным решением уравнения (21), удовлетворяющим начальному условию (23). Заметим, что вырождающееся уравнение (21) может иметь второе неограниченное в нуле решение. Таким образом установлена

Теорема 5. *Пусть оператор A_0 порождает равномерно ограниченную группу $T(t;A_0)$ и выполняется включение $u_0 \in D(A_0^4)$. Тогда функция $u(t)$, определяемая равенством (22), в котором $u_2 = (A_0^2 - \lambda_0 I)Hu_0$, где оператор H задан равенством (27), $\lambda_0 \in \rho(A_0^2)$, $\operatorname{Re}\lambda_0 > \sigma_1 > 0$, является ограниченным решением уравнения (21), удовлетворяющим начальному условию (23).*

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{C} = D(A)$, $A = iA_1$, $A_1 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $T(t;A_0) = e^{itA_1}$, $C(t;A_0^2) = \cos(tA_1)$ и решение задачи (21), (23) имеет вид

$$u(t) = u_2 \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ch}\left(t\cos\varphi + iA_1 \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

где функция u_2 находится из условия

$$u_2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\left(A_1 \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = u_0.$$

Пример 2. Пусть $E = BUC(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$ (или $E = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$), оператор $A_0u(x) = u'(x)$ с областью определения $D(A_0) = \{u(x) \in E : u(x)$ – абсолютно непрерывна, $u'(x) \in E\}$. Тогда

$$T(t;A_0)u(x) = u(x+t), \quad C(t;A_0^2)u(x) = 1/2(u(x+t) + u(x-t))$$

и, если $u_2(x) \in D(A_0^2)$, то функция

$$u(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ch}(t\cos\varphi) + \operatorname{sh}(t\cos\varphi))u_2\left(x + \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{ch}(t\cos\varphi) - \operatorname{sh}(t\cos\varphi))u_2\left(x - \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

является ограниченным решением уравнения (21).

3. Сильно вырождающееся дифференциальное уравнение со степенным характером вырождения. Рассмотрим уравнение (4) в случае сильного вырождения, когда параметр $\gamma > 2$. Замена независимой переменной $t = (-\tau/\nu)^{-\nu}$, $\nu = 2/(2-\gamma)$, и неизвестной функции $u(t) = u((-\tau/\nu)^{-\nu}) = w(\tau)$ приводит сильно вырождающееся уравнение (4) к уравнению ЭПД

$$w''(\tau) + \frac{1+\nu-b\nu}{\tau}w'(\tau) = \left(A + \left(-\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu\beta} B\right)w(\tau), \quad \tau > 0.$$

Аналогично теоремам 3 и 4 устанавливаются следующие теоремы 6 и 7, в которых в случае сильного вырождения указана постановка начальных условий, доказывается однозначная разрешимость соответствующих начальных задач для уравнения (4), а также устанавливается связь между порядком вырождения γ, коэффициентом b при первой производной $u'(t)$ и множеством операторов A, образующим класс корректной разрешимости.

Теорема 6. *Пусть $\gamma > 2$, $2b \geqslant 4 - \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_0 \in D(A)$. Тогда функция $u(t) = \tilde{Y}_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}(-\nu t^{-1/\nu})u_0$, где $\nu = 2/(2-\gamma)$, а функция $\tilde{Y}_{(2b+\gamma-4)/(\gamma-2)}(\cdot)$ определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям*

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{1+1/\nu}u'(t) = 0.$$

Теорема 7. *Пусть* $\gamma > 2$, $2b < 4 - \gamma$, $\beta \geqslant 0$, $A \in G_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}$, $B \in \mathrm{L}(E)$, $u_1 \in D(A)$. *Тогда функция*

$$u(t) = \frac{(-\nu)^{b\nu-\nu-1}t^{1-b}}{1-b}\tilde{Y}_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}(-\nu t^{-1/\nu})u_1,$$

где $\nu = 2/(2-\gamma)$, *а функция* $\tilde{Y}_{(\gamma-2b)/(\gamma-2)}(\cdot)$ *определена равенством (18), является единственным решением уравнения (4), удовлетворяющим начальным условиям*

$$u(0) = 0, \quad (-\nu)^{1+\nu-b\nu}\lim_{t\to 0+} t^b u'(t) = u_1.$$

4. Абстрактный аналог вырождающегося по пространственной переменной дифференциального уравнения со степенным характером вырождения. При $\alpha > 0$ рассмотрим уравнение

$$u''(t) = t^\alpha Au(t), \quad t \geqslant 0. \tag{30}$$

Если A – оператор дифференцирования по пространственной переменной x, например $Au(t,x) = u''_{xx}(t,x)$, то уравнение (30) является вырождающимся гиперболическим и обобщает уравнение Трикоми, но имеет другой характер вырождения по сравнению с уравнениями предыдущих пунктов. Поэтому абстрактное уравнение (30) естественно также называть вырождающимся.

Замена переменной $t = (\tau/\mu)^\mu$, $\mu = 2/(\alpha+2)$, и неизвестной функции $u(t) = (\tau/\mu)^\mu w(\tau)$ приводит вырождающееся уравнение (30) к уравнению ЭПД вида

$$w''(\tau) + \frac{\mu+1}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau), \quad \tau > 0. \tag{31}$$

Поскольку $0 < \mu < 1$, то по теореме 1 из [12] при $A \in G_{1-\mu} \subset G_{\mu+1}$ функция

$$w(\tau) = \mu^\mu\tau^{-\mu}Y_{1-\mu}(\tau)u_0 + Y_{\mu+1}(\tau)u_1 \tag{32}$$

будет единственным решением уравнения (31), удовлетворяющим двум ненулевым начальным условиям

$$\lim_{\tau\to 0+}(w(\tau) - \mu^\mu\tau^{-\mu}Y_{1-\mu}(\tau)u_0) = u_1, \quad \lim_{\tau\to 0+}\tau^{\mu+1}w'(\tau) = -\mu^{\mu+1}u_0. \tag{33}$$

Возвращаясь в (32), (33) к исходной переменной, получаем представление решения уравнения (30)

$$u(t) = Y_{1-\mu}(\mu t^{1/\mu})u_0 + tY_{\mu+1}(\mu t^{1/\mu})u_1 \tag{34}$$

и начальные условия

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{35}$$

которым это решение удовлетворяет. Таким образом, справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\alpha > 0$, $\mu = 2/(\alpha+2)$, $A \in G_{1-\mu}$, $u_0, u_1 \in D(A)$. *Тогда определяемая равенством (34) функция* $u(t)$ *является единственным решением уравнения (30), удовлетворяющим начальным условиям (35).*

Заметим, что в рассматриваемом в [4] частном случае $A = A_0^2$, где A_0 – генератор C_0-группы, отсутствует утверждение о единственности, а доказательство утверждения о разрешимости состоит в проверке с помощью дифференцирования под знаком интеграла представления вида (3) для ОФБ. Имея решение (34) и используя свойство ОФБ определять решение уравнения ЭПД, эту проверку можно произвести значительно проще.

Следует отметить, что добавление в уравнение (30) “младших” слагаемых требует, вообще говоря, дополнительной гладкости от начальных условий по сравнению с задачей (30), (35), а начальная задача для изменённого уравнения может оказаться некорректной. Приведём соответствующий пример.

Пример 3. *Пусть* $u_0 \in D(A_0^n)$, $n = \max\{2, m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, A_0 *– генератор* C_0*-группы* $T(t; A_0)$. *Тогда функция*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!\sqrt{\pi}t^{2j}}{j!(m-j)!\Gamma(j+1/2)} T(t^2/2)A_0^j u_0 \tag{36}$$

является решением уравнения

$$u''(t) = t^2 A_0^2 u(t) + (4m+1)A_0 u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{37}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{38}$$

Этот факт нетрудно проверить, сравнивая после подстановки определяемой равенством (36) функции в уравнение (37) коэффициенты при $t^{2j}A_0^{j+1}u_0$, $0 \leqslant j \leqslant m$, в левой и правой частях получившегося соотношения.

Равенство (36) показывает наличие зависимости между коэффициентом при $A_0 u(t)$ в уравнении (37) и гладкостью начального элемента u_0 в начальных условиях (38) (ср. со случаем вырождающегося гиперболического уравнения в частных производных [3, с. 255]).

5. Вырожденное гипергеометрическое операторное уравнение. В заключение покажем, как с помощью дробного интегродифференцирования (см. [23, § 2]) можно исследовать вырожденное гипергеометрическое операторное уравнение

$$tu''(t) + (bI - tA)u'(t) - cAu(t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{39}$$

параметры b и c которого удовлетворяют неравенствам $b > c > 0$.

Будем искать ограниченное в нуле решение уравнения (39) и вначале предположим, что $b > 1$, $c = \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Учитывая равенство (см. [23, формула (15.11)])

$$D_{0+}^{\alpha}(tu(t)) = tD_{0+}^{\alpha}u(t) + \alpha D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$$

для дробной производной Римана–Лиувилля D_{0+}^{α}, это уравнение запишем в виде

$$D_{0+}^{\alpha}(t(D_{0+}^{1-\alpha}u(t))' + ((b-\alpha)I - tA)D_{0+}^{1-\alpha}u(t)) = 0.$$

Обозначив $v(t) = D_{0+}^{1-\alpha}u(t)$, относительно функции $v(t)$ получим уравнение

$$tv'(t) + (b-\alpha)v(t) = tAv(t) + t^{\alpha-1}v_0 \tag{40}$$

с некоторым элементом $v_0 \in E$.

Чтобы существовало решение дифференциального уравнения первого порядка, естественно предположить, что оператор A является генератором C_0-полугруппы $U(t; A)$. Тогда в качестве решения уравнения (40) возьмём функцию

$$v(t) = t^{\alpha-1}\int_0^1 (1-s)^{b-2}U(ts; A)v_0\,ds. \tag{41}$$

Учитывая представление (41), найдём ограниченное решение уравнения (39). После элементарных преобразований получим

$$u(t) = I_{0+}^{1-\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^1 (1-s)^{b-2} U(\tau s; A) v_0 \, ds \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-b}}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^\tau (\tau-x)^{b-2} U(x; A) v_0 \, dx \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t U(x; A) v_0 \int\limits_x^t \frac{\tau^{\alpha-b}(\tau-x)^{b-2}}{(t-\tau)^\alpha} \, d\tau \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(b-\alpha) t^{b-1}} \int\limits_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{b-\alpha-1} U(x; A) v_0 \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 s^{c-1}(1-s)^{b-c-1} U(ts; A) v_0 \, ds, \tag{42}$$

при этом мы использовали интеграл 2.2.6.2 из [21].

Наконец, чтобы найденное решение удовлетворяло начальному условию

$$u(0) = u_0 \in D(A), \tag{43}$$

в представлении (42) положим $v_0 = \dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-1)\Gamma(c)} u_0$. Тогда

$$u(t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 s^{c-1}(1-s)^{b-c-1} U(ts; A) u_0 \, ds. \tag{44}$$

Равенство (44), установленное для $b > 1$ и $0 < c < 1$, в силу принципа аналитического продолжения справедливо и для $b > c > 0$. Таким образом, доказана

Теорема 9. *Пусть оператор A порождает C_0-полугруппу $U(t; A)$, $b > c > 0$ и выполняется включение $u_0 \in D(A)$. Тогда определяемая равенством (44) функция $u(t)$ является ограниченным решением вырожденного гипергеометрического операторного уравнения (39), удовлетворяющим начальному условию (43).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.
2. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1970.
3. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М., 2010.
4. *Favini A.* Su un'equazione astratta di tipo ellittico-iperbolico // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1976. V. 55. P. 227–242.
5. *Вайнерман Л.И.* Гиперболические уравнения с вырождением в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 4. С. 736–746.
6. *Орлов В.П.* О слабо вырождающихся гиперболических уравнениях // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1409–1419.
7. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
8. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.

9. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
10. *Brezis H., Rosenkrantz W., Singer B.* On a degenerat elliptic-parabolic equation occurring in the theory of probability // Comm. Pur Appl. Math. 1971. V. 24. P. 395–416.
11. *Глушак А.В.* Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 627–637.
12. *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. 1986. № 6. С. 55–56.
13. *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 363–369.
14. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 128–130.
15. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 1. Вып. 2 (42). С. 102–143.
16. *Bragg L.R.* Fundamental solutions and properties of solutions of the initial value radial Euler–Poisson–Darboux // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 607–616.
17. *Волк В.Я.* О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при x=0 // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8. Вып. 4 (56). С. 141–151.
18. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. Вып. 4. С. 309–360.
19. *Фомин В.И.* Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве. М., 2012.
20. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
21. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
22. *Дунаев А.С., Шлычков В.И.* Специальные функции. Ч. 2. Екатеринбург, 2015.
23. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.
После доработки 29.05.2020 г.
Принята к публикации 26.06.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 76–86

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.956.226

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

© 2021 г. А. С. Омуралиев, Э. Д. Абылаева, П. Эсенгул кызы

Строится регуляризованная асимптотика решения первой краевой задачи для сингулярно возмущённого двумерного дифференциального уравнения параболического типа, когда предельное уравнение имеет регулярную особенность. В таких задачах наряду с параболическими пограничными слоями возникают степенной и угловые пограничные слои.

DOI: 10.31857/S0374064121010076

Введение. Метод регуляризации Ломова [1] для сингулярно возмущённых задач первоначально был разработан для уравнений, порядок которых при стремлении малого параметра к нулю не понижается, а приобретает ту или иную особенность [2]. Метод позволяет строить регуляризованную асимптотику решения [1]. Впоследствии этот метод был обобщён на многие классы сингулярно возмущённых уравнений в различных постановках (библиографию работ, посвящённых построению регуляризованных асимптотик и опубликованных в последние годы, можно найти в монографии [3]). Задачи со степенным погранслоем с разных точек зрения изучались в работах [2–7]. Так, в работе [4] построена асимптотика решений краевых и начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром со степенным пограничным слоем. В ней же приводятся примеры смешанных краевых задач для уравнений с частными производными параболического и гиперболического типов, при решении которых возникает явление степенного пограничного слоя. В изученных в [4] уравнениях перед самосопряжённым эллиптическим оператором малый параметр отсутствовал. С помощью метода Фурье исходная задача сводилась к обыкновенному дифференциальному уравнению, асимптотика решения которого содержала только степенной пограничный слой.

Исследованное в данной работе параболическое уравнение, в отличие от работы [4], содержит малый параметр при части пространственных производных второго порядка. Такое вхождение малого параметра в уравнение приводит к возникновению, дополнительно, параболического пограничного слоя, описываемого специальной функцией, называемой “дополнительным интегралом вероятности”. Кроме того, асимптотика построенного решения содержит угловые погранслойные функции, представляющие собой произведение степенной и параболической погранслойных функций. Фундаментальные результаты по степенным пограничным слоям для обыкновенных дифференциальных уравнений содержит монография [3, с. 379–401], в которой методом регуляризации для сингулярно возмущённых задач построена регуляризованная асимптотика. Эта асимптотика решения содержит полином по степеням $\ln(1+\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. Нам, вводя регуляризующие функции другим образом, удалось упростить структуру построенного решения – оно не содержит полином по степеням $\ln(1+\tau)$. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такой результат опубликован в [7]. В работах [5, 6] алгебраическим методом изучены сингулярно возмущённые начальные и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями различных типов и построены асимптотики решения, содержащие степенные пограничные слои.

Метод может быть применён к задачам гидро- и аэродинамики. Сингулярно возмущённые задачи из механики жидкости, из теории взрыва и из других прикладных областей приведены в работе [8], а в работе [9] описываются такие задачи из радиотехники.

Настоящая работа посвящена асимптотическому решению первой краевой задачи для сингулярно возмущённого двумерного дифференциального уравнения параболического типа

$$L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon) \equiv (\varepsilon+t)\partial_t u(x,y,t,\varepsilon) - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,y,t,\varepsilon) - L(y,t)u(x,y,t,\varepsilon) = f(x,y,t),$$
$$(x,y)\in\Omega\equiv(0,1)\times(0,1), \quad (x,y,t)\in Q\equiv\Omega\times(0,T],$$
$$u(x,y,t,\varepsilon)|_{t=0} = u(x,y,t,\varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Асимптотика решения этой задачи наряду с параболической погранслойной функцией содержит и степенную погранслойную функцию

$$\Pi_\varepsilon(t) = \left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^\lambda, \quad \lambda > 0,$$

а также их произведение, которое описывает угловой пограничный слой [7].

Задача решается при следующих предположениях:

1) функция $a(x)$ принадлежит классу $C^\infty[0,1]$ и положительна при всех $x \in [0,1]$; свободный член $f(x,y,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\overline{Q})$;

2) самосопряжённый оператор $L(y,t)$ в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ при каждом $t \in [0,T]$ имеет простой дискретный спектр $\{\lambda_k(t) : k \in \mathbb{N}\}$ (т.е. $L\psi_k(y,t) = \lambda_k(t)\psi_k(y,t)$, $\psi_k(y,t)|_{y=0} = \psi_k(y,t)_{y=1} = 0$), который удовлетворяет условиям:

a) справедливо соотношение $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ для любых $i \neq j$ и всех $t \in [0,T]$,

b) имеет место неравенство $\lambda_k(0) < 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

1. Регуляризация задачи. Наряду с независимыми переменными x, t будем рассматривать регуляризующие переменные, которые введём с помощью следующих равенств:

$$\mu_j = \lambda_j(0)\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \equiv K_j(t,\varepsilon), \quad \tau = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right), \quad \zeta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon^{3/2}}, \tag{2}$$

$$\varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int\limits_{l-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad l = 1, 2,$$

и объявим их независимыми переменными расширенной функции

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,y,t,\varepsilon), \tag{3}$$

$$M = (x,y,t,\theta), \quad \theta = (\zeta,\tau,\mu), \quad \mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots), \quad \zeta = (\zeta_1,\zeta_2),$$

$$\chi(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon^{3/2}}, \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right), K_1(t,\varepsilon), K_2(t,\varepsilon), \ldots\right), \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)).$$

С учётом определения (2) из (3) найдём производные расширенной функции:

$$\partial_t u(x,y,t,\varepsilon) \equiv \left(\partial_t\tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon(t+\varepsilon)}\partial_\tau\tilde{u} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(0)}{t+\varepsilon}\partial_{\mu_j}\tilde{u}\right)_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}, \tag{4}$$

$$\partial_x^2 u \equiv \left(\partial_x^2\tilde{u} + \sum_{l=1}^{2}\left[\left(\frac{\varphi_l'(x)}{\varepsilon^{3/2}}\right)^2\partial_{\zeta_l}^2\tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}(2\varphi_l'(x)\partial_{x,\zeta_l}^2 + \varphi_l''(x)\partial_{\zeta_l})\tilde{u}\right]\right)_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}.$$

Ради упрощения записи не приведены слагаемые, содержащие $\partial^2_{\zeta_1,\zeta_2}\tilde{u}(M)$, так как асимптотика не содержит функций, зависящих от (ζ_1,ζ_2).

На основании (1), (2)–(4) для расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \varepsilon\partial_t\tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon}T_0\tilde{u} + T_1\tilde{u} - \sqrt{\varepsilon}L_\zeta\tilde{u} - \varepsilon^2 L_x\tilde{u} = f(x,y,t), \quad M \in B,$$

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=\tau=\mu=0} = 0, \quad \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\partial B} = 0, \tag{5}$$

где

$$B \equiv Q\times(0,\infty)^3,\quad T_0\equiv\partial_\tau-\Delta_\zeta,\quad T_1\equiv t\partial_t+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(0)\partial_{\mu_j}-L(y,t),\quad \Delta_\zeta\equiv\sum_{l=1}^{2}\partial^2_{\zeta_l},$$

$$L_\zeta\equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\zeta,l},\quad L_x\equiv a(x)\partial_x^2,\quad L_{\zeta,l}\equiv\partial_{\zeta_l}D_{x,l},\quad D_{x,l}\equiv 2\varphi_l'(x)\partial_{x_l}+\varphi_l''(x).$$

При этом имеет место тождество

$$(\tilde L_\varepsilon\tilde u(M,\varepsilon))_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}\equiv L_\varepsilon u(x,y,t,\varepsilon). \tag{6}$$

Решение задачи (5) будем искать в виде ряда

$$\tilde u(M,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}u_k(M).$$

Для коэффициентов этого ряда стандартным образом получаем следующие итерационные задачи:

$$\begin{gathered}T_\nu u_0(M)=0,\quad T_0u_2(M)=-T_1u_0(M)+f(x,y,t),\\ T_0u_k(M)=-T_1u_{k-2}(M)+L_\zeta u_{k-3}(M)-\partial_tu_{k-4}(M)+L_xu_{k-6}(M),\\ u_k(M)|_{t=\tau=\mu=0}=0,\quad u_k(M)|_{\partial B}=0,\quad k\geqslant 0,\quad \nu=0,1.\end{gathered}\tag{7}$$

2. Пространство безрезонансных решений. Определим класс функций, в котором каждая из задач (7) однозначно разрешима. Для этого введём функциональные пространства

$$G_0=\{g_0(x,y,t):g_0(x,y,t)=\langle\upsilon(x,t),\psi(y,t)\rangle,\ \ \upsilon(x,t)\in C^\infty([0,1]\times[0,T])\},$$

$$G_1=\bigg\{g_1(N^l):g_1(N^l)=\sum_{l=1}^{2}\langle Y(N^l),\psi(y,t)\rangle,\ \ \|Y(N^l)\|<c\exp\bigg(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\bigg),$$

$$Y(N^l)=y(x,t)Y(\zeta_l,\tau),\quad y(x,t)\in C^\infty([0,1]\times[0,T])\bigg\},$$

$$\begin{gathered}G_2=\{g_2(x,y,t,\mu):g_2(x,y,t,\mu)=\langle[C(x,t)+\Lambda(P(x))]\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle,\\ C(x,t)\in C^\infty([0,1]\times[0,T]),\quad P(x)\in C^\infty([0,1])\},\end{gathered}$$

$$G_3=\bigg\{g_3(N^l):g_3(N^l)=\sum_{l=1}^{2}\langle Z(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle,\ \ \|Z(N^l)\|<c\exp\bigg(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\bigg),$$

$$Z(N^l)=z(x,t)Z(\zeta_l,\tau),\quad z(x,t)\in C^\infty([0,1]\times[0,T])\bigg\},$$

$$\begin{gathered}N^l=(x,t,\zeta_l,\tau),\quad \mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots),\quad \upsilon(x,t)=(\upsilon_1(x,t),\upsilon_2(x,t),\ldots),\quad Z(N^l)=(Z_{ij}(N^l)),\\ Y(N^l)=(Y_1(N^l),Y_2(N^l),\ldots),\quad C(x,t)=(c_{ij}(x,t)),\quad \Lambda(P(x))=\operatorname{diag}(P_1(x),P_2(x),\ldots),\\ \exp(\mu)=(\exp(\mu_1),\exp(\mu_2),\ldots),\quad \psi(y,t)=(\psi_1(y,t),\psi_2(y,t),\ldots),\quad i,j=1,2,\ldots,\end{gathered}$$

$$\langle\upsilon(x,t),\psi(y,t)\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_i(x,t)\psi_i(y,t),$$

$$\langle[C(x,t)+\Lambda(P(x))]\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle=\sum_{ij=1}^{\infty}c_{ij}(x,t)\exp(\mu_j)\psi_i(y,t)+\sum_{i=1}^{\infty}P_i(x)\exp(\mu_i)\psi_i(y,t),$$

$$\langle Z(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle=\sum_{ij=1}^{\infty}Z_{ij}(N^l)\exp(\mu_j)\psi_i(y,t),\quad \langle Y(N^l),\psi(y,t)\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(N^l)\psi_i(y,t).$$

Из этих пространств построим новое пространство, определив его как прямую сумму введённых выше пространств
$$U = G_0 \bigoplus G_1 \bigoplus G_2 \bigoplus G_3,$$
которое, следуя [1], назовём *пространством безрезонансных решений*. Произвольный элемент $u_k(M)$ пространства U имеет вид

$$u_k(M) = \langle v_k(x,t), \psi(y,t)\rangle + \sum_{l=1}^{2} \langle Y^k(N^l), \psi(y,t)\rangle +$$
$$+ \langle [C^k(x,t) + \Lambda(P^k(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle + \sum_{l=1}^{2} \langle Z^k(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle. \tag{8}$$

Вычислим действия операторов T_0, T_1, L_ζ на функцию $u_k(M) \in U$. Имеем

$$T_0 u_k(M) = \sum_{l=1}^{2} \langle [\partial_\tau Y^k(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Y^k(N^l) + (\partial_\tau Z^k(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Z^k(N^l))\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle,$$

$$T_1 u_k(M) = \left\langle \left(D^1 v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} D^1 Y^k(N^l)\right), \psi(y,t)\right\rangle +$$
$$+ \langle D^3(C^k(x,t) + \Lambda(P^k(x)))\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle + \left\langle \sum_{l=1}^{2} D^3 Z^k(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\right\rangle,$$

$$L_\zeta u_k(M) = a(x)\sum_{l=1}^{2} \langle [\partial_{\zeta_l}(D_{x,l}(Y^k(N^l))) + \partial_{\zeta_l}(D_{x,l}(Z^k(N^l)))\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle,$$
$$D^1 \equiv t\partial_t - \Lambda(\lambda(t)) + tA^{\mathrm{т}}(t), \quad D^3 Z \equiv t\partial_t Z + tA^{\mathrm{т}}(t)Z + Z\Lambda(0) - \Lambda(t)Z,$$
$$\alpha_{ik}(t) = (\partial_t\psi_i(y,t), \psi_k(y,t)), \quad \Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots), \quad A(t) = (\alpha_{ik}(t)). \tag{9}$$

3. Разрешимость итерационных задач. В общем случае итерационные уравнения (7) можно записать в виде
$$T_0 u_k(M) = h^k(M). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1), 2) и функция $h^k(M)$ принадлежит пространству $G_1 \bigoplus G_3$. Тогда уравнение (10) имеет решение $u_k(M)$, принадлежащее пространству U.*

Доказательство. Пусть $h^k(M) \in G_1 \bigoplus G_3$, т.е.

$$h^k(M) = \left\langle \sum_{l=1}^{2} [h^{k,1}(N^l) + h^{k,2}(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\right\rangle, \quad \|h^{k,r}(N^l)\| < c\exp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right), \quad r = 1, 2.$$

Подставим представление (8) в уравнение (10), тогда на основании вычислений (9) получим относительно функций $Y^k(N^l)$ и $Z^k(N^l)$ уравнения

$$\partial_\tau Z^k_{ij}(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Z^k_{ij}(N^l) = h^{k,2}_{ij}(N^l), \quad \partial_\tau Y^k_i(N^l) - \partial^2_{\zeta_l} Y^k_i(N^l) = h^{k,1}_i(N^l).$$

Эти уравнения при соответствующих краевых условиях

$$Z^k_{ij}(N^l)|_{\tau=0} = 0, \quad Z^k_{ij}(N^l)|_{\zeta_l=0} = W^{k,l}_{ij}(x,t), \quad Y^k_i(N^l)|_{\tau=0} = 0, \quad Y^k_i(N^l)|_{\zeta_l=0} = d^{k,l}_i(x,t)$$

имеют решения, представимые в виде

$$Z_{ij}^k(N^l) = W_{ij}^{k,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) + h_{ij}^{k,2}(x,t)I_2(\zeta_l,\tau), \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty \exp(-t^2)\,dt,$$

$$Y_i^k(N_{1,l}) = d_i^{k,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) + h_i^{k,1}(x,t)I_1(\zeta_l,\tau), \tag{11}$$

$$I_r(\zeta_l,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\infty \frac{h_1^{k,r}(\eta,s)}{\sqrt{\tau-s}}\left[\exp\biggl(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-s)}\biggr) - \exp\biggl(-\frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-s)}\biggr)\right]d\eta\,ds, \quad r=1,2,$$

где $h_1^{k,r}(x,t)$, $h_2^{k,r}(\eta,s)$ – известные функции.

Оценим интеграл $I_r(\eta_l,\tau)$, используя теорему о среднем:

$$|I_r(N^l)| \leqslant c\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau \frac{d\nu}{\sqrt{\tau-\nu}}\int\limits_0^\infty \left[\exp\biggl(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\biggr) - \exp\biggl(-\frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\biggr)\right]\exp\biggl(-\frac{\eta^2}{8\nu}\biggr)d\eta\right| =$$

$$= \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_0^\tau \frac{d\nu}{\sqrt{\tau-\nu}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{\bigl(\zeta_l+\eta\bigr)^2}{4(\tau-\nu)} + \theta\biggl(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)} + \frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\biggr)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)} + \frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\right)\exp\biggl(-\frac{\eta^2}{8\nu}\biggr)d\eta\right| =$$

$$= \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau \exp\biggl(-\frac{\eta^2}{8\nu}\biggr)\exp\biggl(-(1-\theta)\frac{(\zeta_l+\eta)^2}{4(\tau-\nu)} - \theta\frac{(\zeta_l-\eta)^2}{4(\tau-\nu)}\biggr)\frac{\zeta_l\eta}{\sqrt{(\tau-\nu)^3}}\,d\eta\,d\nu\right|.$$

Так как

$$-\frac{1}{(\tau-\nu)} \leqslant -\frac{1}{\tau}, \quad -\frac{1}{\nu} \leqslant -\frac{1}{\tau}, \quad \left|\frac{\zeta_l\eta}{2\sqrt{\tau-\nu}}\exp\biggl(-\frac{\zeta_l\eta}{4(\tau-\nu)}\biggr)\right| < c,$$

то, выбирая $\theta = 1/4$, будем иметь

$$|I_1(N_l)| \leqslant c\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\biggl(-\frac{\eta_l^2}{4\tau}\biggr)\exp\biggl(-\frac{\eta^2}{8\tau}\biggr)\int\limits_0^\tau \exp\biggl(-\frac{\eta^2}{4(\tau-\nu)}\biggr)\frac{1}{(\tau-\nu)}\,d\nu\,d\eta\right|.$$

Сделаем замену $\tau-\nu = z$, затем, применяя теорему о среднем, будем иметь

$$|I_1(N_l)| \leqslant c\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \exp\biggl(-\frac{\eta_l^2}{4\tau}\biggr)\exp\biggl(-\frac{\eta^2}{8\tau}\biggr)\frac{1}{\tau}\int\limits_\theta^\tau \exp\biggl(-\frac{\eta^2}{4z}\biggr)dz\,d\eta\right|.$$

Усиливая неравенство и применяя ещё раз теорему о среднем, приходим к неравенству

$$|I_1(N_l)| \leqslant c\left|\frac{1}{\tau}\exp\biggl(-\frac{\eta_l^2}{4\tau}\biggr)\int\limits_0^\infty \exp\biggl(-\frac{\eta^2}{8\tau}\biggr)\tau\exp\biggl(-\frac{\eta^2}{4\theta\tau}\biggr)d\eta\right|, \quad \theta\in(0,\tau).$$

Отсюда, используя формулу 3.321.3 из [10], получим требуемую оценку. Теорема доказана.

Далее для матрицы C через $\overline{C}$ (через $\overline{\overline{C}}$) будем обозначать матрицу с теми же, что и у C, диагональными (внедиагональными) элементами и нулевыми внедиагональными (диагональными) элементами, в частности, $C = \overline{C} + \overline{\overline{C}}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1), 2) и* $\overline{h^{k,2}(x,t)}|_{t=0}=0$ *(т.е.* $h^{k,2}_{ii}(x,0)=$ $=0$*). Тогда задача*

$$D^3(C^k(x,t)+\Lambda(P^k(x)))=h^{k,2}(x,t),$$

$$\overline{C^k(x,t)}|_{t=0}=-[\Lambda(\upsilon_k(x,0))+\Lambda(\overline{\overline{C^k(x,t)}}\mathbf{1})+\Lambda(P^k(x))]_{t=0}$$

$$\left(\text{т.е. } c^k_{i,i}(xt)|_{t=0}=-\upsilon_{ki}(x,0)-P^k_i(x)-\sum_{i\neq j}c^k_{ij}(x,0)\right), \tag{12}$$

где $\mathbf{1}=\mathrm{col}\,(1,1,\ldots)$, *однозначно разрешима.*

Доказательство. В уравнении (12) положим

$$\overline{\overline{C^k(x,t)\Lambda(0)-\Lambda(t)C^k(x,t)}}|_{t=0}=[\overline{\overline{h^{k,2}(x,t)}}]|_{t=0} \tag{13}$$

$$\left(\text{т.е. } c^k_{ij}(x,t)|_{t=0}=\frac{h^{k,2}_{i,j}(x,0)}{\lambda_j(0)-\lambda_i(0)},\quad i\neq j\right).$$

Тогда в силу условия $\overline{h^{k,2}(x,t)}|_{t=0}=0$ система (12) невырождена.

Уравнение (12) при соответствующих начальных условиях из (12) и (13) однозначно определяет функцию $C^k(x,t)$. Теорема доказана.

Замечание. При решении итерационных уравнений условие $\overline{h^{k,2}(x,t)}|_{t=0}=0$ обеспечивается выбором вектор-функции $P^k(x)=(P^k_1(x),P^k_2(x),\ldots)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 1), 2). Тогда уравнение (10) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям:*

a) $u_k(M)|_{t=\tau=\mu=0}=0,\ u_k(M)|_{\partial B}=0$;

b) $T_1u_k(M)+h^k(M)\in G_1\bigoplus G_3$;

c) $L_\zeta u_k(M)=0$.

Доказательство. По теореме 1 решение уравнения (10) существует и представимо в виде (8). Удовлетворим решение (8) условию b): оно обеспечивается, если произвольные функции $\upsilon_k(x,t)$, $C^k(x,t)$ будут выбраны как решения уравнений

$$D^1\upsilon_{k,i}(x,t)=-h^{k,1}_i(x,t),\quad D^3[c^k_{ij}(x,t)+P^k_i(x)]=-h^{k,2}_{ij}(x,t).$$

Тогда на основании (9) выражение $T_1u_k(M)+h^k(M)$ запишется в виде

$$T_1u_k(M)+h^k(M)=\sum_{l=1}^{2}[\langle D^1Y^k(N^l)+h^{k,3}(N^l),\psi(y,t)\rangle+$$

$$+\langle (D^3Z^k(N^l)+h^{k,4}(N^l))\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle]\in G_1\bigoplus G_3,$$

$$h^k(M)=\sum_{l=1}^{2}\langle h^{k,3}(N^l)+h^{k,4}(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle.$$

Удовлетворив функцию (8) краевым условиям a), найдём, что

$$Y^k_i(N^l)|_{t=\tau=0}=0,\quad Y^k_i(N^l)|_{\zeta_l=0}=d^{k,l}_i(x,t),\quad d^{k,l}_i(x,t)|_{x=l-1}=-\upsilon_{k,i}(l-1,t),$$

$$\overline{C^k(x,t)}|_{t=0}=-\Lambda(\upsilon_k(x,0))-\Lambda(P^k(x))-\Lambda(\overline{\overline{C^k(x,0)}}\mathbf{1})$$

$$\left(\text{т.е. } c^k_{ii}(x,t)|_{t=0}=-\upsilon_{ki}(x,0)-P^k_i(x)-\sum_{i\neq j}c^k_{ij}(x,0)\right),\quad Z^k_{ij}(N^l)|_{t=\tau=0}=0,$$

$$Z^k_{ij}(N^l)|_{\zeta_l=0}=W^{k,l}_{ij}(x,t),\quad W^{k,l}_{ij}(x,t)|_{x=l-1}=-c^k_{ij}(l-1,t)-P^k_i(l-1). \tag{14}$$

По теореме 2 матрица-функция $C^k(x,t)$ определяется однозначно.

Подставим функцию $u_k(M)$ в условие c). Тогда, учитывая представления (11), а также равенство $h^{k,r+3}(N^l) = h^{k,r+3}(x,t)I_r(\zeta_l,\tau)$, и замечая, что функция $\operatorname{erfc}(\zeta_l/2\sqrt{\tau})$ имеет такую же, как и функция $I_r(\zeta_l,\tau)$, $r=1,2$, оценку, получаем, согласно (9), уравнения

$$D_{x,l}[d_i^{k,l}(x,t) + h_i^{k,3}(x,t)] = 0, \quad D_{x,l}[W_{i,j}^{k,l}(x,t) + h_{i,j}^{k,4}(x,t)] = 0.$$

Из этих уравнений при начальных условиях из (14) однозначно определим функции $d_i^{k,l}(x,t)$ и $W_{i,j}^{k,l}(x,t)$, а следовательно, в силу (11) однозначно определяются функции $Y^k(N^l)$ и $Z^k(N^l)$.

Уравнение относительно $\upsilon_k(x,t)$ имеет единственное гладкое решение (см. [2, 3, 11, 12]), удовлетворяющее условию $\|\upsilon_k(x,0)\| < \infty$.

Таким образом, решение уравнения (10) определено однозначно. Теорема доказана.

4. Решение итерационных задач. Итерационное уравнение (7) при $k=0,1$ является однородным, поэтому, согласно теореме 1, эти уравнения разрешимы в пространстве U, если функции $Y^k(N^1)$ и $Z^k(N^l)$ являются решениями уравнений

$$\partial_\tau Y_i^k(N^1) = \partial_{\zeta_l}^2 Y_i^k(N^l), \quad \partial_\tau Z_{ij}^k(N^1) = \partial_{\zeta_l}^2 Z_{ij}^k(N^l).$$

Решения этих уравнений при краевых условиях

$$Y_i^k(N^1)|_{\tau=0} = 0, \quad Y_i^k(N^1)|_{\zeta_l=0} = d_i^{k,l}(x,t), \quad Z_{ij}^k(N^1)|_{\tau=0} = 0, \quad Z_{ij}^k(N^1)|_{\zeta_l=0} = W_{ij}^{k,l}(x,t)$$

представимы в виде

$$Y_i^k(N_1) = d_i^{k,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad Z_{ij}^k(N_1) = W_{ij}^{k,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right), \qquad (15)$$

где произвольные функции $d_i^{k,l}(x,t)$, $W_{ij}^{k,l}(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$d_i^{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -\upsilon_{k,i}(l-1,t), \quad W_{ij}^{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -c_{ij}^k(l-1,t) - P_i^k(l-1).$$

Вычислим свободный член уравнения (7) при $k=2$, предварительно разложив свободный член $f(x,y,t)$ в ряд

$$f(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x,t)\psi_i(y,t).$$

В результате получим

$$F_2(M) = -T_1u_0(M) + f(x,y,t) = -\langle D^1\upsilon_0(x,t) - f(x,t), \psi(y,t)\rangle -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\langle D^1Y^0(N^1), \psi(y,t)\rangle - \langle D^3[C^0(x,t) + \Lambda(P^0(x))]\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \sum_{l=1}^{2}\langle D^3Z^0(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle,$$

$$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), \ldots).$$

Положим

$$D^1\upsilon_{0i}(x,t) - f_i(x,t) = 0, \quad D^3[c_{ij}^0(x,t) + \Lambda(P_i^0(x))] = 0, \qquad (16)$$

тогда

$$F_2(M) = -\sum_{l=1}^{2}\langle [D^1Y^0(N^1) + D^3Z^0(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle.$$

Уравнение с такой правой частью разрешимо в пространстве U, если функции $Y_i^2(N^l)$ и $Z_{ij}^2(N^l)$ являются решениями уравнений

$$T_0 Y_i^2(N^l) = -D^1 Y_i^0(N^1), \quad T_0 Z_{ij}^2(N^l) = -D^3 Z_{ij}^0(N^l).$$

Рассмотрим уравнения (16). Первое уравнение имеет решение, удовлетворяющее условию (см. [2, 3, 11, 12]) $\|v_0(x,0)\| < \infty$.

Снимая вырожденность второй системы из (16), положим

$$\overline{\overline{C^0(x,t)\Lambda(0) - \Lambda(t)C^0(x,t)}}|_{t=0} = 0 \quad (\text{т.е.}\ \ (\lambda_i(0)-\lambda_j(t))c_{i,j}^0(x,t)|_{t=0} = 0, \quad i \neq j). \tag{17}$$

Кроме того, из начального условия (14) найдём

$$\overline{C^0(x,t)}|_{t=0} = -[\Lambda(v_0(x,t)) + \Lambda(\overline{\overline{C^0(x,t)}}\,1) + \Lambda(P^0(x))]_{t=0}, \tag{18}$$

или в координатной форме это равенство с учётом (17) можно записать в виде

$$c_{ii}^0(x,t)|_{t=0} = -[v_{0,i}(x,0) + P_i^0(x)].$$

Соотношения (17), (18) используются в начальных условиях второй системы (16), и она однозначно разрешима.

Перейдём к следующему итерационному уравнению при $k=3$, его свободный член на основании вычислений (9) запишется в виде

$$F_3(M) = -T_1 u_1(M) + L_\zeta u_0(M) = -\left\langle D^1 v_1(x,t) + \sum_{l=1}^{2} D^1 Y^1(N^l), \psi(y,t)\right\rangle -$$

$$-\langle D^3(C^1(x,t) + \Lambda(P^1(x)))\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \sum_{l=1}^{2}\langle D^3 Z^1(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle +$$

$$+ a(x)\sum_{l=1}^{2}\langle \partial_{\zeta_l} D_{x,l}[Y^0(N^l) + Z^0(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle.$$

Обеспечивая разрешимость этого уравнения, на основании (15) положим

$$D^1 v_{1,i}(x,t) = 0, \quad D_{x,l} d_i^{0,l}(x,t) = 0, \quad D_{x,l} W_{i,j}^{0,l}(x,t) = 0, \quad D^3(c_{i,j}^1(x,t) + P_i^1(x)) = 0. \tag{19}$$

Из первого уравнения в (19) найдём, что $v_1(x,t) = 0$. Решая второе и третье уравнения при условиях $d_i^{0,l}(x,t)|_{t=0} = -v_{0,i}(x,0)$ и $W_{i,j}^{0,l}(x,t)|_{t=0} = -c_{i,j}^0(x,0)$, определим $d_i^{0,l}(x,t)$ и $W_{i,j}^{0,l}(x,t)$. Четвёртое уравнение разрешимо, если выполняется равенство

$$(\lambda_i(0) - \lambda_j(t))c_{ij}^1(x,0)|_{t=0} = 0 \quad \text{для всех} \quad i \neq j.$$

Из начального условия (14) находим, что

$$\overline{C^1(x,t)|_{t=0}} = -\Lambda(v_1(x,0)) - \Lambda(P^1(x)) \quad (c_{ii}^1(x,t)|_{t=0} = -v_{1,i}(x,0) - P_i^1(x)).$$

Ниже будет показано, что $P_i^k(x) = 0$ при нечётном k. Уравнение относительно $c_{ij}^1(x,t)$ является однородным, поэтому $c_{ij}^1(x,t) = 0$. Свободный член итерационного уравнения при $k=3$ примет вид

$$F_3(M) = -\sum_{l=1}^{2}\langle [D^1 Y^1(N^l) + D^3 Z^1(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle,$$

по теореме 1 оно имеет решение, представимое в виде (8) с номером $k=3$.

В следующем шаге $(k=4)$ свободный член итерационного уравнения запишется в виде

$$F_4(M)=-T_1u_2(M)+L_\zeta u_1-\partial_t u_0=-\langle D^1v_2(x,t)+\partial_t v_0(x,t)+A^{\mathrm{T}}(t)v_0(x,t),\psi(y,t)\rangle-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\langle D^1Y^2(N^l)+D^3Z^2(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle-\langle D^3[C^2(x,t)+\Lambda(P^2(x))]\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle+$$

$$+a(x)\sum_{l=1}^{2}\langle\partial_{\zeta_l}D_{x,l}[Y^1(N^l)+Z^1(N^l)\exp(\mu)],\psi(y,t)\rangle-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\langle\partial_tY^0(N^l)+\partial_tZ^0(N^l)\exp(\mu)+A^{\mathrm{T}}(t)Y^0(N^l)+A^{\mathrm{T}}(t)Z^0(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle-$$

$$-\langle[\partial_tC^0(x,t)+A^{\mathrm{T}}(t)C^0(x,t)+A^{\mathrm{T}}(t)\Lambda(P^0(x))]\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle.$$

Обеспечивая разрешимость итерационного уравнения при $k=4$, положим

$$D^1v_{2,i}(x,t)=-[\partial_tv_{0,i}+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ji}(t)v_{0,i}(x,t)],$$

$$D^3[c_{ij}^2(x,t)+P_i^2(x)]=-[\partial_tc_{ii}^0(x,t)+\alpha_{ii}(t)c_{ii}^0(x,t)+\alpha_{ii}(t)P_i^0(x)],$$

$$D_{x,l}d_i^{1,l}(x,t)=0,\quad D_{x,l}W_{ij}^{1,l}(x,t)=0. \tag{20}$$

Первое уравнение позволяет определить функцию $v_2(x,t)$. Снимая вырожденность второго уравнения, положим

$$(\lambda_i(0)-\lambda_j(t))c_{ij}^2(x,t)|_{t=0}=0\quad\text{для всех}\quad i\neq j,\quad -(\partial_tc_{ii}^0+\alpha_{ii}(t)c_{ii}^0(x,t)+\alpha_{ii}(t)P_i^0(x))|_{t=0}=0.$$

Последние соотношение обеспечивается выбором компонент вектора $P^0(x)=(P_1^0(x),P_2^0(x),\ldots)$:

$$P_i^0(x)=-\frac{\partial_tc_{ii}^0(x,t)+\alpha_{ii}(t)c_{ii}^0(x,t)}{\alpha_{ii}(t)}\bigg|_{t=0}.$$

Уравнения относительно функций $d_i^{1,l}(x,t)$ и $W_{ij}^{1,l}(x,t)$ из (20) решаются при нулевых начальных условиях:

$$d_i^{1,l}(x,t)|_{x=l-1}=-v_{1,i}(l-1,t)=0,\quad W_{ij}^{1,l}(x,t)|_{x=l-1}=-c_{ij}^1(l-1,t)-P_i^1(l-1)=0,$$

здесь учтено, что $P_i^1(x)=0$, поэтому $Y^1(N^l)=0$, $Z^1(N^l)=0$, а следовательно, $u_1(M)=0$.

Свободный член $F_4(M)$ на основании (20) примет вид

$$F_4(M)=-\sum_{l=1}^{2}\{\langle D^1Y^2(N^l)+D^3Z^2(N^l)\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle+$$

$$+\langle\partial_tY^0(N^l)+A^T(t)Y^0(N^l)+[\partial_tZ^0(N^l)+A^T(t)Z^0(N^l)]\exp(\mu),\psi(y,t)\rangle\}\in G_1\bigoplus G_3,$$

по теореме 1 итерационное уравнение при $k=4$ разрешимо в U.

Рассмотрим ещё одно итерационное уравнение при $k=5$, свободный член которого запишется в виде

$$F_5(M) = -T_1u_3(M) + L_\zeta u_2(M) - \partial_t u_1 = -\langle D^1\upsilon_3(x,t) + \partial_t\upsilon_1(x,t) + A^{\text{т}}(t)\upsilon_1(x,t), \psi(y,t)\rangle -$$
$$-\sum_{l=1}^{2}\langle D^1Y^3(N^l) + D^3Z^3(N^l)\exp(\mu), \psi(y,t)\rangle - \langle D^3[C^3(x,t) + \Lambda(P^3(x))], \psi(y,t)\rangle +$$
$$+ a(x)\sum_{l=1}^{2}\langle \partial_{\zeta_l}D_{x,l}[Y^2(N^l) + Z^2(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle - \sum_{l=1}^{2}\langle \partial_t Y^1(N^l) +$$
$$+ \partial_t Z^1(N^l)\exp(\mu) + A^{\text{т}}(t)[Y^1(N^l) + Z^1(N^l)\exp(\mu)], \psi(y,t)\rangle -$$
$$- \langle \partial_t C^1(x,t) + A^{\text{т}}(t)[C^1(x,t) + \Lambda(P^1(x))], \psi(y,t)\rangle.$$

По теореме 1 итерационное уравнение при $k=5$ разрешимо, если

$$D^1\upsilon_{3i}(x,t) = -\partial_t\upsilon_{1i}(x,t) - \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ki}\upsilon_{1k}(x,t),$$
$$D^3[C^3(x,t) + \Lambda(P^3(x))] = \partial_t C^1(x,t) + A^{\text{т}}(t)[C^1(x,t) + \Lambda(P^1(x))],$$
$$\partial_{\zeta_l}D_{x,l}Y^2(N^l) = 0, \quad \partial_{\zeta_l}D_{x,l}Z^2(N^l) = 0. \tag{21}$$

Поскольку $C^1(x,t)=0$, то, обеспечивая разрешимость второго уравнения в (21), положим $P^1(x)=0$. Далее, аналогичным образом последовательно определим коэффициенты частичной суммы

$$u_{n,\varepsilon}(M) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_{2k}(M).$$

5. Оценка остаточного члена. Подставим выражение

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^k u_{2k}(M) - \varepsilon^{n+1}u_{2(n+1)}(M) + \varepsilon^{n+1}R_\varepsilon(M) \tag{22}$$

в расширенную задачу (5). Тогда с учётом итерационных задач (7) получим относительно остаточного члена задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon R_\varepsilon(M) = g_{\varepsilon,n}(M), \quad R_\varepsilon(M)|_{t=\tau=\mu=0}(M) = R_\varepsilon(M)|_{x=l-1,\zeta_l=0}(M) = 0, \tag{23}$$

где

$$g_{\varepsilon,n}(M) = -T_1u_{2n}(M) - \partial_t u_{2n-2}(M) + L_x u_{2n-4}(M) - \tilde{L}_\varepsilon u_{2(n+1)}(M). \tag{24}$$

В соотношениях (23), (24) проведём сужение посредством регуляризующих функций $\theta = \chi(x,t,\varepsilon)$. Тогда в силу тождества (6) для $R_{\varepsilon,n}(x,t) \equiv R_\varepsilon(M)$ получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon,n}(x,t) = g_{\varepsilon,n}(x,t), \quad R_{\varepsilon,n}(x,t)|_{t=0} = R_{\varepsilon,n}(x,t)|_{x=l-1} = 0. \tag{25}$$

Из самого построения функций $u_k(M)$ и тождества (6) вытекает ограниченность правой части $g_{\varepsilon,n}(x,t) \equiv g_{\varepsilon,n}(M)|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)}$ уравнения задачи (25). При достаточно малых $\varepsilon>0$ оператор L_ε удовлетворяет всем условиям принципа максимума [13, с. 22], поэтому, следуя [14], получаем оценку $\|R_{\varepsilon,n}(x,t)\| < c$. Из (22) имеем оценку

$$\|\tilde{u}(M) - u_{n,\varepsilon}(M)\|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} < c\varepsilon^{n+1}, \tag{26}$$

где постоянная c не зависит от $\varepsilon>0$, $n=0,1,2,\ldots$

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 1), 2). Тогда частичная сумма (22), полученная описанным выше методом при $\theta=\chi(x,t,\varepsilon)$, является асимптотическим решением задачи (1), т.е. при достаточно малых $\varepsilon>0$ и всех $n=0,1,2,\ldots$ справедлива оценка (26).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Ломов С.А.* О модельном уравнении Лайтхилла // Сб. науч. тр. МО СССР. 1964. № 54. С. 74–83.
3. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
4. *Ломов С.А.* Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 525–572.
5. *Коняев Ю.А.* Построение точного решения некоторых сингулярно возмущённых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений со степенным пограничным слоем // Мат. заметки. 2006. Т. 79. Вып. 6. С. 950–954.
6. *Коняев Ю.А.* Сингулярно возмущённые задачи с двойной особенностью // Мат. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 4. С. 494–501.
7. *Omuraliev A.S., Abylaeva E.D.* Ordinary differential equations with power boundery layers // J. of Math. Sci. 2019. V. 242. № 3. P. 427–431.
8. *Цянь Сюэ-Сень.* Метод Пуанкаре–Лайтхилла–Го // Проблемы механики. 1959. Вып. 2. С. 7–62.
9. *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. Т. 2. М., 1988.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
11. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.
12. *Глушко В.П.* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж, 1972.
13. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
14. *Омуралиев А.С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 8 С. 1423–1532.

Кыргызско-турецкий университет “Манас”,
г. Бишкек, Киргизия

Поступила в редакцию 22.03.2019 г.
После доработки 12.03.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ–РИМАНА В МНОГОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2021 г. Э. Н. Сатторов, Ф. Э. Эрмаматова

Рассматривается задача восстановления решений обобщённой системы Коши–Римана в многомерной пространственной ограниченной области по их значениям на куске границы этой области, т.е. строится приближённое решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана–Ярмухамедова.

DOI: 10.31857/S0374064121010088

1. Введение и постановка задачи. В настоящей работе продолжается исследование, начатое в работе [1]. Рассматривается задача восстановления решения системы уравнений [2, 3]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}+H_i\right)=0,$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_j}-H_kF_j+H_jF_k=0 \quad (k,j=\overline{1,n}), \tag{1.1}$$

представляющей собой n-мерный аналог обобщённой системы Коши–Римана, по его известным значениям на части границы области, т.е. задача Коши. Когда все H_i тождественно нулевые, система (1.1) является системой Рисса [4, с. 106]. Система Коши–Римана в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [5–7], являющимися одними из основных элементов интенсивного взаимодействия почти всех разделов математики и теоретической физики как с кватернионным параметром, так и в суперанализе в квантовой теории поля.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное евклидово пространство,

$$x=(x_1,\ldots,x_n),\quad y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,\quad x'=(x_2,\ldots,x_n),\quad y'=(y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^{n-1},$$

$$s=\alpha^2=|y'-x'|^2=(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2,\quad r^2=(y_1-x_1)^2+s=|y-x|^2,\quad \tau=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},$$

$$\rho>1,\quad G_\rho=\{y:|y'|<\tau y_1,\ \ y_1>0\},\quad \partial G_\rho=\{y:|y'|=\tau y_1,\ \ y_1>0\},\quad \overline{G}_\rho=G_\rho\bigcup\partial G_\rho,$$

ε, ε_1 и ε_2 – достаточно малые постоянные положительные числа,

$$G_\rho^\varepsilon=\{y:|y'|<\tau(y_1-\varepsilon)\},\quad \partial G_\rho^\varepsilon=\{y:|y'|=\tau(y_1-\varepsilon)\},\quad \overline{G}_\rho^\varepsilon=G_\rho^\varepsilon\bigcup\partial G_\rho^\varepsilon,$$

$$\mathbb{C}=\{\varsigma:\varsigma=\xi+i\eta,\ \ -\infty<\xi<\infty,\ \ -\infty<\eta<\infty\}.$$

Через Ω_ρ будем обозначать ограниченную односвязную область в $\mathbb{R}^n$, граница $\partial\Omega_\rho$ которой состоит из части поверхности конуса $\overline{G}_\rho$ и лежащего в этом конусе гладкого куска S поверхности. Случай $\rho=1$ предельный. В этом случае ∂G_1 – плоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ и G_1 – полупространство $y_1>0$, Ω_1 – односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, состоящей из части плоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ и гладкого куска поверхности S, лежащего в полупространстве $y_1\geqslant 0$, $\overline{\Omega}_\rho=\Omega_\rho\bigcup\partial\Omega_\rho$, S_0 – внутренние точки поверхности S. Пусть $A(\Omega_\rho)$ – совокупность вектор-функций класса $C^1(\Omega_\rho)$, удовлетворяющих эллиптической системе (1.1) и непрерывных на $\overline{\Omega}_\rho=\Omega_\rho\bigcup\partial\Omega_\rho$, $H=(H_1,H_2,\ldots,H_n)$ – заданный постоянный вектор.

Несложно показывается, что каждая компонента F_i вектор-функции

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)),$$

являющейся решением системы (1.1), удовлетворяет уравнению

$$\triangle F_i - |H|^2 F_i = 0. \tag{1.2}$$

Введём следующие обозначения:

$$L_{kj}(X_1, X_2, \dots, X_n; H)F = L_{jk}(X_1, X_2, \dots, X_n; H)F =$$

$$= (X_j - H_j)F_k - (X_k - H_k)F_j + \delta_{kj}(X_i + H_i)F_i \quad (k \leqslant j),$$

$$L_k(X, H)F = (L_{k1}F, L_{k2}F, \dots, L_{kn}F) \quad (k = \overline{1, n}),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. В этих обозначениях систему (1.1) можно записать в виде

$$L_k\bigg(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H\bigg)F = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \tag{1.3}$$

Для каждого векторного оператора L_k определяем сопряжённый к нему векторный оператор L_k^* равенством

$$U \cdot L_k\bigg(\frac{\partial}{\partial x}; H\bigg)F + F \cdot L_k^*\bigg(\frac{\partial}{\partial x}; H\bigg)U = \operatorname{div} F_k,$$

где $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Тогда нетрудно получить, что имеет место равенство

$$L_k^*\bigg(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H\bigg)U =$$

$$= L_k\bigg(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; -H_1, \dots, -H_k, H_{k+1}, \dots, H_n\bigg)U.$$

Пусть $U^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$ – фундаментальное решение системы [2, 3]

$$L_k^*\bigg(\frac{\partial}{\partial x}; H\bigg)U^k = 0,$$

где функции u_k^i определяются равенствами

$$u_i^i(y, x) = \bigg(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + H_i\Phi_0\bigg) \quad \text{и} \quad u_k^i(y, x) = \bigg(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} - H_k\Phi_0\bigg)\operatorname{sign}(k - i), \quad i \neq k, \tag{1.4}$$

Φ_0 – классическое фундаментальное решение уравнения (1.2).

Постановка задачи (задача Коши). Известны данные Коши решения системы (1.3) на поверхности S:

$$F(y) = f(y), \quad y \in S, \tag{1.5}$$

где $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ – заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить функцию $F(x)$ в области Ω_ρ, исходя из заданной на части S границы этой области функции f, т.е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщённой системы Коши–Римана в многомерную евклидову пространственную ограниченную область по значениям решения на гладком куске S границы области.

Задача Коши для обобщённой системы Коши–Римана, как и многие задачи Коши для нахождения регулярных решений эллиптических уравнений и систем, в общем случае оказывается неустойчивой относительно равномерно малых изменений начальных данных. Таким образом, эти задачи некорректно поставлены [8, с. 39].

При исследовании задачи Коши для системы (1.1) будем априори предполагать существование её решения. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [9, с. 4]. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [10, с. 58]. Метод получения указанных результатов работы основан на построении в явном виде для обобщённой системы Коши–Римана матрицы фундаментального решения, зависящей от положительного параметра и исчезающей к нулю при стремлении параметра к бесконечности на $\partial\Omega_\rho \backslash S,$ когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_1 > 0.$ Следуя М.М. Лаврентьеву и Ш. Ярмухамедову в их исследованиях по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца, матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовём матрицей Карлемана–Ярмухамедова для полупространства [9, с. 34; 11; 12]. После построения матрицы Карлемана–Ярмухамедова в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши записываются в виде обобщённой пространственной интегральной формулы Коши.

Если вместо функции $f(y)$ заданы её приближения $f_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0,1)$ в метрике пространства $C(S),$ а также число B – размер компакта, которому принадлежат решения, то речь идёт о построении семейства вектор-функций $F(x, f_\delta) = F_{\sigma\delta}$ (регуляризация), сходящихся к точному решению задачи (1.3), (1.5) в области Ω_ρ при подходящем выборе параметра регуляризации $\sigma = \sigma(\delta)$ и $\delta \to 0$ [9].

Следуя [13], функцию $F_{\sigma\delta}$ назовём регуляризованным решением задачи Коши для обобщённой системы Коши–Римана. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближённого решения задачи.

На протяжении последних десятилетий сохранился интерес к классическим некорректным задачам математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато работами [11, 14–16] и развивалось впоследствии в работах [17–27].

2. Построение матрицы Карлемана–Ярмухамедова. В данной работе на основе результатов работ [9, с. 34; 11; 12] по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца построена матрица Карлемана–Ярмухамедова в явном виде и на её основе – регуляризованное решение задачи Коши для системы (1.3). В [28] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости для более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [17, 28] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной работе речь идёт о явных формулах, то построение матрицы Карлемана–Ярмухамедова в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и для уравнений, близких к нему, в случае, если дополнение границы области до S – часть поверхности конуса, построена в [11]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S – произвольное множество положительной меры, построил Л.А. Айзенберг [17]. Развивая идею С.Е. Мергеляна [16], указавшего способ построения функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S – кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [13] построена матрица Карлемана для эллиптических систем. В монографиях Л.А. Айзенберга [29] и Н.Тарханова [30] рассматривается построение формулы Карлемана в задаче Коши в комплексном анализе и для системы с инъективным символом, в этих же монографиях приведена обширная библиография.

В том случае, когда $n = 2,$ $H = 0,$ рассматриваемая система (1.3) является обобщённой системой Коши–Римана, теория которой разработана И.Н. Векуа [31], а формула продолжения решения по её значениям на куске границы получена Т. Ишанкуловым [32]. Если $n = 3,$ то $F(y)$ будет обобщённым потенциальным вектором, и в этом случае система (1.3) (ряд аналитических фактов) изучена [33], а формула продолжения решения в ограниченной области по её значениям на куске границы и аналог теоремы Фока–Куни найдена в работе [22]. В настоящей работе утверждается, что все результаты, полученные в трёхмерном случае в [22], остаются справедливыми для системы (1.3) и в бесконечной области типа слоя. Именно в этом случае явно строится фундаментальная матрица, которая является ядром обобщённых интегралов Коши и типа Коши.

Дадим следующее

Определение 2.1. Матрица $M_0(y,x;H)$ называется *матрицей фундаментальных решений* системы (1.3), если

$$M_0(y,x;H)=\|L_k^*(\alpha;0)U^k\|,$$

где вектор-функция U^k определяется согласно (1.4).

Следуя [11], приведём

Определение 2.2. *Матрицей Карлемана–Ярмухамедова* задачи (1.3), (1.5) называется $n\times n$-матрица $M_\sigma(y,x;H)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) имеет место равенство $M_\sigma(y,x;H)=M_0(y,x;H)+G_\sigma(y,x;H)$, где σ – положительный числовой параметр, матрица $G_\sigma(y,x;H)$ по переменной y удовлетворяет системе (1.3) всюду в области Ω, а $M_0(y,x;H)$ – матрица фундаментальных решений уравнений (1.3);

2) при каждом фиксированном $x\in\Omega_\rho$ справедливо неравенство $\int_{\partial G_\rho}|M_\sigma(y,x;H)|\,dS_y\leqslant$ $\leqslant\varepsilon(\sigma)$, где $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$; здесь и далее $|M_\sigma|$ означает евклидову норму матрицы $M_\sigma=\|M_{ij}\|$, т.е. $|M_\sigma|=(\sum_{ij=1}^n M_{ij}^2)^{1/2}$, в частности, $|F|=(\sum_i^n F_i^2)^{1/2}$ для вектора $F=$ $=(F_1,F_2,\ldots,F_n)$.

Для $F(y)\in A(\Omega_\rho)$ справедлива обобщённая пространственная интегральная формула Коши [2]

$$\int\limits_{\partial\Omega_\rho} M_0(y,x;H)F(y)\,dS_y=\begin{cases}0, & x\notin\overline{\Omega}_\rho,\\ F(x), & x\in\Omega_\rho,\end{cases}$$

а также имеют место аналог интеграла типа Коши и формулы скачков для предельных значений этого интеграла [3].

Поскольку матрица Карлемана–Ярмухамедова отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то обобщённая интегральная формула Коши остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

С целью построения приближённого решения задачи (1.3), (1.5) рассмотрим матрицу

$$M_\sigma(y,x;H)=\|L_k^*(\alpha;0)V^k\|, \tag{2.1}$$

где $V^k=(v_1^1,\ldots,v_n^k)$ определяется равенствами

$$v_i^i(y,x)=\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_i}+H_i\Phi_\sigma\right)\quad\text{и}\quad v_k^i(y,x)=\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_k}-H_k\Phi_\sigma\right)\operatorname{sign}(k-i)\quad\text{при}\quad i\neq k, \tag{2.2}$$

а функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ при $s\geqslant 0$, $v\geqslant 1$ – следующим равенством:

$$C_nK(x_1)\Phi_\sigma(y,x;\lambda)=\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w}\right]\frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,du,\quad w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_1, \tag{2.3}$$

где

$$\psi(\lambda u)=\begin{cases}uJ_0(\lambda u), & n=2m,\quad m\geqslant 1,\\ \cos(\lambda u), & n=2m+1,\quad m\geqslant 1,\end{cases}$$

$J_0(\lambda u)$ – функция Бесселя нулевого порядка, здесь берётся регулярная ветвь аналитической функции $J_0(\lambda)$ в $C^{(n)}(\Omega)$, $n=2m$, вещественная при $\lambda>0$, $\lambda=|H|^2$,

$$C_n=\begin{cases}(-1)^m2^{-1}(m-2)!(n-2)\omega_n, & n=2m,\quad m\geqslant 2,\\ (-1)^m2^{-2n+1}(m-1)!(n-2)\pi\omega_n, & n=2m+1,\quad m\geqslant 1,\end{cases}$$

ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $K(w)$ – целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w $(w=u+iv,$ где $u,v\in\mathbb{R})$ и $K(u)\neq\infty,$ $|u|<\infty,$ удовлетворяющая условиям

$$\sup_{v\geqslant 1}|K^{(p)}(u+iv)\exp(v)|\operatorname{Im}\lambda||=M(u)<\infty,\quad p=0,1,\ldots \tag{2.4}$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ вытекает равенство $\overline{K(\overline{w})}=K(w)$. Так как

$$\operatorname{Im}\left(\frac{K(w)}{w}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\frac{K(w)}{w}-\frac{K(\overline{w})}{\overline{w}}\right\}=\frac{\overline{w}K(w)-wK(\overline{w})}{2i(r^2+u^2)}=\frac{(y_1-x_1)\operatorname{Im}K(w)-\sqrt{s+u^2}\operatorname{Re}K(w)}{r^2+u^2},$$

то формула (2.3) принимает вид

$$C_nK(x_1)\Phi(y,x;\lambda)=\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{(y_1-x_1)\operatorname{Im}K(w)}{\sqrt{s+u^2}}-\operatorname{Re}K(w)\right\}\frac{\psi(\lambda u)}{r^2+u^2}\,du. \tag{2.5}$$

Из равенств (2.4) и (2.5) следует, что при $y\neq x$ интеграл в (2.3) абсолютно сходится.

Если $K(w)\equiv 1,$ то функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ представляет собой классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_\sigma(y,x;\lambda)\equiv\Phi_0(y,x;\lambda)=C_n\frac{1}{r^{n-2}}e^{-\lambda r}.$$

Согласно [22] можно показать, что

$$\frac{1}{r^{n-2}}e^{-\lambda r}=\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int\limits_0^\infty\frac{\psi(\lambda u)}{r^2+u^2}\,du.$$

В [12] доказана

Лемма 2.1. *Функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$, определённая формулой (2.3), представима в виде*

$$\Phi_\sigma(y,x;\lambda)=\Phi_0(r;\lambda)+g_\sigma(y,x;\lambda),$$

где $\Phi_0(r;\lambda)$ – классическое фундаментальное решение уравнения (1.2):

$$\Phi_0(r;\lambda)=A_m\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n/2-1}K_{-1+n/2}(\lambda r),\quad A_{2m}=(-1)^m2^{m-1},\quad A_{2m+1}=(-1)^m2^{-m-1/2},$$

$K_0(\lambda)$ – функция Макдональда [34, 35], $g_\sigma(y,x;\lambda)$ – регулярные решения уравнения (1.2) по y в $\mathbb{R}^n$ для $\lambda\in C^n(\Omega)$.

Для системы (1.3) справедлива аналогичная

Лемма 2.2. *Матрица $M_\sigma(y,x;H)$, определённая формулой (2.2), является матрицей Карлемана–Ярмухамедова задачи (1.3), (1.5), т.е. представима в виде*

$$M_\sigma(y,x;H)=M_0(r;\lambda)+G_\sigma(y,x;H), \tag{2.6}$$

где $G_\sigma=\|G_{ij\sigma}(y,x,\sigma)\|_{n\times n}$ – матрица, определённая для всех значений y, x и удовлетворяющая по переменной y системе (1.3) во всём пространстве $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Представление (2.6) следует из леммы 2.1 и определения 2.1. Так как

$$\Delta\frac{\partial}{\partial y}g_\sigma-\lambda^2g_\sigma=0,$$

то отсюда вытекает, что матрица $G_\sigma(y,x;H)$ удовлетворяет уравнению (1.3), т.е. она является регулярным решением по переменной y, включая и точку $y=x$.

Из формулы (2.3) видим, что на ∂G_ρ $(y_1 = 0)$ функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ и её градиент $\nabla\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ при $\sigma \to \infty$ экспоненциально стремятся к нулю при всех $y_2, \ldots, y_n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$. Тогда при $\sigma \to \infty$ матрица $M_\sigma(y, x; H)$ также стремится к нулю при всех $y_2, \ldots, y_n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$. Согласно определению 2.1 матрица $M_\sigma(y, x; H)$, определённая формулой (2.1), является матрицей Карлемана–Ярмухамедова для области Ω и части ∂G_ρ. Лемма доказана.

3. Целая функция Миттаг-Лёффлера и некоторые её свойства. При решении задачи (1.3), (1.5) формула продолжения выражается через целую функцию Миттаг-Лёффлера, поэтому приведём без доказательства основные свойства этой функции. Они изложены в [36, гл. 3, § 2] с подробными доказательствами.

Целая функция Миттаг-Лёффлера определяется рядом

$$E_\rho(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\Gamma(1 + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad w \in \mathbb{C}, \quad E_1(w) = \exp(w),$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\rho > 1$. Обозначим через $\gamma = \gamma(1, \beta)$, $0 < \beta < \pi/\rho$, $\rho > 1$, контур в комплексной плоскости w, пробегаемый в направлении неубывания $\arg w$ и состоящий из луча $\arg w = -\beta$, $|w| \geqslant 1$, дуги $-\beta \leqslant \arg w \leqslant \beta$, окружности $|w| = 1$ и луча $\arg w = \beta$, $|w| \geqslant 1$. Контур γ разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на две односвязные бесконечные области Ω^- и Ω^+, лежащие слева и справа от γ соответственно. Будем предполагать, что выполнены неравенства $\pi/(2\rho) < \beta < \pi/\rho$, $\rho > 1$.

При этих условиях справедливы следующие интегральные представления:

$$E_\rho(w) = \rho \exp(w^\rho) + \psi_\rho(w), \quad w \in \Omega^+,$$

$$E_\rho(w) = \psi_\rho(w), \quad E'_\rho(w) = \psi'_\rho(w), \quad w \in \Omega^-, \tag{3.1}$$

где

$$\psi_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{\varsigma - w}\, d\varsigma, \quad \psi'_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma - w)^2}\, d\varsigma. \tag{3.2}$$

Так как значение $E_\rho(w)$ вещественно при вещественном w, то

$$\operatorname{Re}\psi_\rho(w) = \frac{\psi_\rho(w) + \psi_\rho(\overline{w})}{2} = \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma - \operatorname{Re} w)}{(\varsigma - w)(\varsigma - \overline{w})}\, d\varsigma, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{Im}\psi_\rho(w) = \frac{\psi_\rho(w) - \psi_\rho(\overline{w})}{2i} = \frac{\rho \operatorname{Im} w}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma - w)(\varsigma - \overline{w})}\, d\varsigma, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{Im}\frac{\psi'_\rho(w)}{\operatorname{Im} w} = \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{2\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma - \operatorname{Re} w)}{(\varsigma - w)^2(\varsigma - \overline{w})^2}\, d\varsigma.$$

Всюду в дальнейшем в определении контура $\gamma(1, \beta)$ будем выбирать $\beta = \pi/(2\rho) + \varepsilon_2/2$, $\rho > 1$. Очевидно, что если

$$\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon_2 \leqslant |\arg w| \leqslant \pi, \tag{3.5}$$

то $w \in \Omega^-_\rho$ и $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$.

Обозначим

$$T_{k,p}(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varsigma^p e^{\varsigma^p}}{(\varsigma - w)^k (\varsigma - \overline{w})^k}\, d\varsigma, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots$$

При $\pi/(2\rho)+\varepsilon_2 \leqslant |\arg w| \leqslant \pi$ справедливы неравенства

$$|E_\rho(w)| \leqslant \frac{C_1}{1+|w|}, \quad |E'_\rho(w)| \leqslant \frac{C_2}{1+|w|^2}, \tag{3.6}$$

$$|T_{k,p}(w)| \leqslant \frac{C_3}{1+|w|^{2k}}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{3.7}$$

где C_1 C_2, C_3 – постоянные, не зависящие от w. Выберем в равенстве (3.3) $\beta=\pi/(2\rho)+ + \varepsilon_2/2 < \pi/\rho$, $\rho>1$. Тогда $E_\rho(w)=\psi_\rho(w)$, где $\psi_\rho(w)$ определяется в (3.2). При этом заметим, что $\cos\rho\beta<0$ и интеграл сходится:

$$\int\limits_\gamma |\zeta|^p \exp[\cos\rho\beta|\zeta|^\rho]|\,d\varsigma| < \infty, \quad p=0,1,\ldots \tag{3.8}$$

Далее, при достаточно большом $|w|$ $(w\in\Omega^+$ и $\overline{w}\in\Omega^-)$ имеем

$$\min_{\varsigma\in\gamma}|\varsigma-w| \geqslant |w|\sin\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \min_{\varsigma\in\gamma}|\varsigma-\overline{w}| \geqslant |w|\sin\frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{3.9}$$

Теперь из представлений (3.1) и разложений

$$\frac{1}{\varsigma-w}=-\frac{1}{w}+\frac{\zeta}{w(\varsigma-w)}, \quad \frac{1}{\varsigma-\overline{w}}=-\frac{1}{w}+\frac{\zeta}{\overline{w}(\varsigma-\overline{w})} \tag{3.10}$$

для больших $|w|$ следует, что

$$\left|E_\rho(w)-\Gamma^{-1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{w}\right| \leqslant \frac{\rho}{2\pi\sin(\varepsilon_2/2)}\,\frac{1}{|w|^2}\int\limits_\gamma |\varsigma|\exp[\cos\rho\beta|\varsigma|^\rho]|\,d\varsigma| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|w|^2},$$

$$\Gamma^{-1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \exp(\varsigma^\rho)\,d\varsigma.$$

Отсюда вытекает первое из неравенств (3.6). Из (3.8), (3.2) и разложения

$$\frac{1}{(\varsigma-w)^2}=\frac{1}{w^2}-2\frac{\varsigma}{w^2(\varsigma-w)}+\frac{\varsigma^2}{w^2(\varsigma-w)^2}$$

при больших $|w|$ аналогично выводим неравенство

$$\left|E'_\rho(w)-\Gamma^{-1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{w^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|w|^3}.$$

Второе неравенство в (3.6) доказано.

При $k=1,2,\ldots$ из разложения (3.10) следует, что

$$\frac{1}{(\varsigma-w)^k}\frac{1}{(\overline{\varsigma}-w)^k}=\left[\frac{(-1)^k}{w^k}+\ldots+\frac{\zeta^k}{w^k(\varsigma-w)^k}\right]\left[\frac{(-1)^k}{\overline{\varsigma}^k}+\ldots+\frac{\zeta^k}{w^k(\zeta-\overline{\varsigma})^k}\right]=$$

$$=\frac{1}{|w|^{2k}}+\frac{-k}{|w|^{2k+1}(\varsigma-w)}+\ldots$$

При больших $|w|$ первый член этого разложения является главным, поэтому из неравенств (3.8) и (3.9) вытекает оценка

$$\left|T_{k,p}-\Gamma^{-1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{|w|^{2k}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|w|^{2k+1}}.$$

Отсюда получаем неравенство (3.7).

4. Формула продолжения и регуляризация по Лаврентьеву. В формуле (2.5) в качестве функции $K(w)$ выберем целую функцию Миттаг-Лёффлера

$$K(w) = \exp(aw^2)E_\rho(\sigma w),$$

где $\rho > 1$, $w = i\sqrt{u^2+s} + y_1 - x_1$, $a > 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Согласно (2.5), выделяя мнимые части, будем иметь

$$C_n\Phi_\sigma(y,x;\lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{e^{aw^2}E_\rho(\sigma w)}{w}\right]\frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{s+u^2}}\,du =$$

$$= e^{a(y_1-x_1)^2}\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int\limits_0^\infty \varphi_\sigma(y,x,\lambda,u)\frac{e^{-as-au^2}\psi(\lambda u)\,du}{u^2+r^2}, \tag{4.1}$$

где

$$\varphi_\sigma(y,x,\lambda,u) = \left[\frac{(y_1-x_1)}{\sqrt{u^2+s}}\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w) - \operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)\right]\cos(\nu\sqrt{u^2+s}) +$$

$$+\left[\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w) + \frac{(y_1-x_1)}{\sqrt{u^2+s}}\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)\right]\sin(\nu\sqrt{u^2+s}), \quad \nu = 2a(y_1-x_1). \tag{4.2}$$

Если $\sigma = 0$ и $K(0) = E_\rho(0) = 1$, то функция $\Phi_0(y-x;\lambda)$ из (4.1) определяет классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. (Сходимость несобственного интеграла в правых частях равенств (4.1) обеспечивается присутствием в нём множителя $e^{-\sigma u^2}$.)

В точке $(0,0,\ldots,0) \in \partial\Omega_\rho$ нормальная производная не определена. Так как функции $F(y)$, $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $M_\sigma(y-x;H)$ $(x \in \Omega_\rho)$ имеют непрерывные частные производные вплоть до границы $\partial\Omega_\rho$, то

$$\frac{\partial F}{\partial n}(0) = \frac{\partial F}{\partial y_n}(0), \quad \frac{\partial M_\sigma}{\partial n}(0,x) = \frac{\partial M_\sigma}{\partial y_n}(0,x), \quad x \in \Omega_\rho.$$

При фиксированном $x \in \Omega_\rho$ обозначим через S^* ту часть S, на которой выполняется неравенство $|y'| = \tau y_1 - |x'| \geqslant \alpha$. Если $x = x_0 \in \Omega_\rho$, то $S = S^*$ (в этом случае $|y'| = \tau y_1 - |x'| = \tau y_1$, $\alpha = |y'|$ и неравенство означает, что точка y лежит внутри или на конусе $|y'| = \tau y_1 - |x'|$).

Предположим, что $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ ограничена на $\partial\Omega_\rho$:

$$|F(y)| \leqslant B, \quad y \in T \equiv \partial\Omega_\rho \setminus S, \tag{4.3}$$

где B – заданное положительное число. В этом предположении верна обобщённая интегральная формула Коши

$$F(x) = \int\limits_{\partial\Omega_\rho} M_\sigma(y,x;H)F(y)\,dS_y, \quad x \in \Omega_\rho. \tag{4.4}$$

Обозначим

$$F_\sigma(x) = \int\limits_S M_\sigma(y,x;H)F(y)\,dS_y, \quad x \in \Omega_\rho, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) = \int\limits_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y-x;H)F(y)\,dS_y, \quad x \in \Omega_\rho. \tag{4.6}$$

Замечание. Из-за присутствия величины $\alpha_0 = \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ в выражении $\beta = \tau y_1 - \alpha_0$ функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$, $y \in \partial\Omega_\rho$, не имеет производных по x_j $(j = \overline{2,n})$ в точках $x = x_0 = (x_1,0,\ldots,0) \in \Omega_\rho$. Поэтому $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$ определены всюду в Ω_ρ, кроме точек $x = x_0$. Доопределим в точках $x = x_0$ производные следующим образом. В (4.5), (4.6) величину $\beta = \tau y_1$

полагаем равной $\beta = \tau y_1$ $(\gamma = \tau x_1)$. Тогда функция $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $y \in \partial\Omega_\rho$, дифференцируема по переменной x всюду в Ω_ρ. Таким образом, при $x \neq x_0 \in \Omega_\rho$ производные $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$ определяются по формуле (4.6), в которой $\beta = \tau y_1 - \alpha_0$. Затем в правой части в (4.6) положим $\alpha_0 = 0$ $(\beta = \tau y_1)$ и вычислим производные по формуле $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$.

Теорема 4.1. *Пусть функция $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ на части T границы $\partial\Omega_\rho$ удовлетворяет условию (4.3). Тогда для любых $x \in \Omega_\rho$ и $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ справедливо неравенство*

$$|F(x) - F_\sigma(x)| \leqslant C_1(\sigma, H)Be^{-\sigma x_n^2}, \quad \left|\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_\sigma(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant C_2(\sigma, H)Be^{-\sigma x_n^2}.$$

Доказательство. Из формулы (4.4) для любого $x \in \Omega_\rho$ следует, что

$$|F(x) - F_\sigma(x)| = J_\sigma^1(x), \quad \left|\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial F_\sigma(x)}{\partial x_j}\right| = J_\sigma^2(x),$$

$$J_\sigma^1(x) = \int\limits_T M_\sigma(y, x; H)F(y)\,dS_y, \quad J_\sigma^2(x) = \int\limits_T \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y, x; H)F(y)\,dS_y, \tag{4.7}$$

$$|J_\sigma^1(x)| \leqslant BT_\sigma^1(x), \quad T_\sigma^1(x) = \int\limits_T |M_\sigma(y, x; H)|\,dS_y,$$

$$|J_\sigma^2(x)| \leqslant BT_\sigma^2(x), \quad T_\sigma^2(x) = \int\limits_T \left|\frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}\right| dS_y. \tag{4.8}$$

Согласно (2.1), (2.2), воспользовавшись явным видом (4.1), (4.2) матрицы $M_\sigma(y, x; H)$, получаем неравенство

$$|M_\sigma(y, x; H)| = \left(\sum_{i,j=1}^n |M_{\sigma ij}|\right)^{1/2} \leqslant n\left[|H||\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_n}\right|\right]. \tag{4.9}$$

Приведём, согласно [37], оценки для функций

$$\Phi_\sigma(y, x;\lambda), \quad \frac{\partial\Phi_\sigma(y, x;\lambda)}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{\partial\Phi_\sigma(y, x;\lambda)}{\partial y_k}.$$

Лемма 4.1. *Пусть K – компакт в G_ρ, δ – расстояние от K до ∂G_ρ. Тогда для $\sigma \geqslant 0$ при $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n\backslash G_\rho$ $(|y'| \geqslant \tau y_1)$ справедливы неравенства*

$$|\Phi_\sigma(y, x;\lambda)| + \left|\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_\sigma(y, x;\lambda)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_\sigma(y, x;\lambda)\right| \leqslant \frac{C_3(\rho, \delta)r}{1 + \sigma\delta}, \quad r \geqslant \delta > 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{4.10}$$

Из леммы 4.1 следует утверждение теоремы 4.1. Действительно, если K – компакт в Ω_ρ, то $K \subset G_\rho$. Поэтому неравенства для функции $\Phi_\sigma(y, x;\lambda)$ и её производных, участвующих в формулировке леммы, сохраняются и в том случае, когда $x \in K \subset \Omega_\rho$ и $y \in \partial\Omega_\rho\backslash S \subset \partial G_\rho$ (в этом случае δ – расстояние от компакта $K \subset \Omega_\rho$ до $\partial\Omega_\rho$). Тогда получим необходимые оценки для (4.8).

Доказательство леммы 4.1. Нужно оценить интеграл справа в равенстве (4.1) и его производные. Для этого выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $K \subset \overline{G}_\rho^\varepsilon(|x'| \leqslant \tau(x_1 - \varepsilon))$, $\overline{G}_\rho^\varepsilon \subset G_\rho$. Так как расстояние от $\partial G_\rho^\varepsilon$ до ∂G_ρ равно $\varepsilon\tau_1$, то $\delta \geqslant \varepsilon\tau_1$. В условиях леммы 4.1 имеем

$$\tau w = i\tau\sqrt{u^2 + s} + \tau y_1 - \tau x_1 = \sqrt{u^2 + s}\left(i\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho} + \frac{\tau y_1 - \tau x_1}{\sqrt{u^2 + s}}\right), \quad u \geqslant 0, \quad \rho > 1,$$

$$\frac{\tau y_1 - \tau x_1}{\sqrt{u^2 + s}} \leqslant \frac{|y'| - |x'| - \varepsilon\tau}{|y' - x'|} \leqslant 1 - \varepsilon_1, \quad y' \neq x', \quad \left|\arg\left(a \pm \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho}\right)\right| \geqslant \frac{\pi}{2\rho}; \quad a \leqslant 1.$$

Таким образом, при $y' \neq x'$ выполняются неравенства (3.5); если $y' = x'$, то $\operatorname{Re} w < 0$, и, значит, эти неравенства также выполняются. Поэтому $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$, $w \in \Omega_\rho^-$, где $\beta = \pi/(2\rho) + \varepsilon_2/2$.

Далее имеем

$$(\zeta - \sigma w)(\zeta - \sigma\overline{w}) = \zeta^2 - 2\sigma\zeta(y_1 - x_1) + \sigma^2(u^2 + s + (y_1 - x_1)^2),$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\frac{1}{(\zeta - \sigma w)(\zeta - \sigma\overline{w})} = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\sigma^{2(m-1)}}{(\zeta - \sigma w)^m(\zeta - \sigma\overline{w})^m}.$$

Теперь из (3.2) и (3.3) получаем

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\sigma^{2(m-1)}\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{(\varsigma - \sigma(y_1 - x_1))\exp(\varsigma^\rho)}{(\zeta - \sigma w)^m(\zeta - \sigma\overline{w})^m}\,d\varsigma,$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2 + s}} = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!\sigma^{2m-1}\rho}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\zeta - \sigma w)^m(\zeta - \sigma\overline{w})^m}\,d\varsigma.$$

Интегралы оцениваем согласно неравенствам (3.6):

$$\left|\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w)\right| \leqslant \frac{C_4(\rho\delta, m)\sigma^{2m-1}r}{1 + \sigma^{2m}|w|^{2m}}, \quad |w|^2 = u^2 + r^2 \geqslant r^2 \geqslant \delta^2, \quad \delta \geqslant \tau_1\varepsilon, \tag{4.11}$$

$$\left|\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2 + s}} \leqslant \frac{C_4(\rho\delta, m)\sigma^{2m-1}r}{1 + \sigma^{2m}|w|^{2m}}\right|. \tag{4.12}$$

При доказательстве мы воспользовались легко проверяемыми неравенствами

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\frac{\sin(\nu\alpha)}{\alpha}\right| \leqslant C_k\frac{2^k|y_n|^k\sigma^k}{\alpha^{k+1}} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\cos(\nu\alpha)\right| \leqslant C_k\frac{2^k|y_n|^k\sigma^k}{\alpha^k}, \quad \alpha \geqslant 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\frac{\sin(\nu\alpha)}{\alpha}\right| \leqslant C_k\frac{2^k|y_n|^k\sigma^k}{\alpha^{2k}}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\cos(\nu\alpha)\right| \leqslant C_k\frac{2^k|y_n|^k\sigma^k}{\alpha^{2(k+1)}}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad \left|\frac{\partial}{\partial s}\cos(\nu\alpha)\right| \leqslant C_k\frac{2|y_n|\sigma}{\alpha}.$$

Учитывая, что $s = \alpha^2$ в формуле (4.1), имеем

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\left\{\frac{e^{-\sigma s}}{u^2 + s + (y_1 - x_1)^2}\varphi_\sigma(y, x, \lambda, u)\right\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-1}^p \frac{\partial^{m-1-p}}{\partial s^{m-1-p}}\left(\frac{e^{-\sigma s}}{u^2 + s + (y_1 - x_1)^2}\right)\frac{\partial^p}{\partial s^p}\varphi_\sigma(y, x, \lambda, u). \tag{4.13}$$

В формуле (4.13) вычисляем производные

$$\frac{\partial^{m-1-p}}{\partial s^{m-1-p}}\left(\frac{e^{-\sigma s}}{u^2 + (y_1 - x_1)^2 + s}\right) = \sum_{i=0}^{m-p-1} C_{m-p-1}^i (e^{-\sigma s})^{(m-p-1)}[(u^2 + s + (y_1 - x_1)^2)^{-1}]^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-p-1} C_{m-p-1}^i (-1)^{m-p-1}\sigma^{m-p-1-i}e^{-\sigma s}(m - p - i)!((u^2 + s + (y_1 - x_1)^2)^{-1})^{-m+p+i}.$$

Вычислим производные функций, определённых равенствами (3.3), (3.4), по переменным y_i, $i=\overline{1,n}$. Заметим, что оценки (4.11) и (4.12) для них сохраняются, но с другими постоянными. Тогда получим неравенства (4.10). Теперь вычисляем интегралы (4.7), (4.8) аналогично (4.9), (4.10). Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. *Для любого* $x\in\Omega_\rho$ *справедливы равенства*

$$F(x)=\lim_{\sigma\to\infty}F_\sigma(x),\quad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial F}{\partial x_j}(x),$$

выполняющиеся равномерно на компактах из Ω_ρ.

Приведём оценку устойчивости.

Положим

$$R^\rho=\max_{y\in S}\operatorname{Re}w_0,\quad x\in\Omega_\rho,\quad \sigma=R^{-\rho}\ln\frac{1}{\delta}. \tag{4.14}$$

Теорема 4.2. *Пусть вектор-функция* $F(y)\in A(\Omega_\rho)$ *удовлетворяет на поверхности* $T=\partial\Omega_\rho\backslash S$ *граничному условию (4.3), а на поверхности* S *– условию*

$$|F(y)|\leqslant\delta,\quad y\in S,\quad 0<\delta<1.$$

Тогда

$$|F(x)|\leqslant C_1(x)B^{1-(\gamma/R)^\rho}\delta^{(\gamma/R)^\rho}\ln^n\frac{1}{\delta},$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)\right|\leqslant\widetilde{C}_2(x)B^{1-(\gamma/R)^\rho}\delta^{(\gamma/R)^\rho}\ln^{n+2}\frac{1}{\delta},\quad x\in\Omega_\rho. \tag{4.15}$$

Доказательство. Согласно формуле (4.4) и теореме 4.1 имеем

$$|F(x)|\leqslant\left|\int\limits_S|M_\sigma(y,x;H)|\,dS_y\right|+\left|\int\limits_T|M_\sigma(y,x;H)|\,dS_y\right|.$$

Для функций $F_\sigma(x)$, $\partial F_\sigma(x)/\partial x_j$ вследствие (4.5), (4.6), (4.8), (4.10) получаем оценки

$$|F_\sigma(x)|\leqslant C_1(x)\sigma^n e^{\sigma R^\rho-\sigma\gamma^\rho},\quad \left|\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)\right|\leqslant C_2\sigma^{n+2}e^{\sigma R^\rho-\sigma\gamma^\rho},\quad x\in\Omega_\rho,\quad j=\overline{1,n}.$$

Согласно условию теоремы 4.2 и неравенствам (4.8), (4.10) заключаем, что

$$|F_\sigma(x)|\leqslant C_1(x)\sigma^n(1+\delta e^{\sigma R^\rho}),\quad \left|\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)\right|\leqslant C_2(1+\delta e^{\sigma R^\rho}),\quad x\in\Omega_\rho,\quad j=\overline{1,n},\quad \sigma\geqslant\sigma_0>0.$$

Выбирая σ как (4.14), доказываем оценку (4.15). Теорема доказана.

Приведём результат, который позволяет вычислить значение $F(x)$ приближённо, когда на поверхности S вместо функции $f(y)$ заданы её непрерывные приближения $f_\delta(y)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $0<\delta Be^{-\sigma b_1^2}$:

$$\max_S|f(y)-f_\delta(y)|\leqslant\delta.$$

Предположим, что поверхность S задана уравнением

$$y_1=h(y_2,\ldots,y_n),\quad (y_2,\ldots,y_n)\in T,$$

где h – однозначная функция, удовлетворяющая условиям Ляпунова, при этом

$$\max_T h=b_1,\quad b_2=\max_T\left[1+\left(\frac{dh}{dy_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dh}{dy_n}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Положим $F_{\sigma\delta}(x) = \int_S M_\sigma(y,x;H) f_\delta(y)\,dS,$ тогда

$$\frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x) = \int\limits_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y,x;H) f_\delta(y)\,dS, \quad x \in \Omega,$$

где $\sigma = (1/b_1^2)\ln(B/\delta),$ $\delta < B.$

Теорема 4.3. *Пусть вектор-функция* $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ *удовлетворяет условиям (4.3). Тогда при* $\sigma \geqslant 1$ *справедливы неравенства*

$$|F(x) - F_{\sigma\delta}(x)| \leqslant C_1(x) B^{1-(\gamma/R)^\rho} \delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^n \frac{1}{\delta}, \quad x \in \Omega_\rho,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant \widetilde{C}_2(x) B^{1-(\gamma/R)^\rho} \delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^{n+2} \frac{1}{\delta}, \quad x \in \Omega_\rho. \tag{4.16}$$

Доказательство. Из обобщённой интегральной формулы Коши (4.4) при любом $x \in \Omega_\rho$ получаем равенства

$$F(x) - F_{\sigma\delta}(x) = J_\sigma^1(x) + \int\limits_S M_\sigma(y,x;H)[f(y) - f_\delta(y)]\,dS_y,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x)\right| = J_\sigma^2(x) + \int\limits_S \frac{\partial M_\sigma(y,x;H)}{\partial x_j}[f(y) - f_\delta(y)]\,dS_y,$$

$$J_\sigma^1(x) = \int\limits_T M_\sigma(y,x;H) F(y)\,dS_y, \quad J_\sigma^2(x) = \int\limits_S \frac{\partial M_\sigma(y,x;H)}{\partial x_j} F(y)\,dS_y, \quad x \in \Omega_\rho, \quad j = \overline{1,n}.$$

Теперь, дословно повторяя доказательство теоремы 4.1, получаем оценки (4.16). Теорема доказана.

Следствие 4.2. *Для любого* $x \in \Omega_\rho$ *справедливы равенства*

$$F(x) = \lim_{\delta\to 0} F_{\sigma\delta}(x), \quad \lim_{\delta\to 0} \frac{\partial F_{\sigma\delta}}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x),$$

выполняющееся равномерно на компактах из Ω_ρ.

Построенный функционал $F_{\sigma\delta}(x, f_\delta)$, определённый на множестве $\{f_\delta\}$, где $f_\delta(x) \in C(S)$, $0 < \delta < \delta_0$, называется регуляризацией по Лаврентьеву решения задачи Коши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сатторов Э.Н., Эрмаматова Ф.Э.* Формула Карлемана для решений обобщённой системы Коши–Римана в многомерной пространственной области // Совр. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. Вып. 1. С. 95–108.
2. *Оболашвили Е.И.* Обобщенная система Коши–Римана в многомерном евклидовом пространстве // Сб. тр. конф. “Комплексный анализ”. Гале, 1976.
3. *Оболашвили Е.И.* Обобщенная система Коши–Римана в многомерном пространств // Тр. Тбилисского мат. ин-та. 1978. Т. 58. С. 168–173.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.
5. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ I. Дифференциальное исчисление // Теор. и мат. физика. 1984. Т. 59. № 1. С. 3–27.
6. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теор. и мат. физика. 1984. Т. 60. № 2. С. 169–198.
7. *Brackx F., Delanghe K., Sommen F.* Clifford Analysis. V. 76. London, 1982.
8. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.

9. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
10. *Берс А., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
11. *Ярмухамедов Ш.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
12. *Ярмухамедов Ш.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 3. С. 320–323.
13. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
14. *Иванов В.К.* Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 131–136.
15. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. С. 195–197.
16. *Мергелян С.Н.* Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. № 5. С. 3–26.
17. *Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н.* Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1292–1296.
18. *Махмудов О.И.* Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве // Изв. вузов. Математика. 2004. Т. 501. № 2. С. 43–53.
19. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity // Contemporary Math. 2008. V. 455. P. 297–310.
20. *Сатторов Э.Н., Мардонов Дж.А.* Задача Коши для системы уравнений Максвелла // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. № 4. С. 851–861.
21. *Сатторов Э.Н.* Регуляризация решения задачи Коши для обобщённой системы Моисила–Теодореску // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1100–1110.
22. *Сатторов Э.Н.* О продолжении решений обобщенной системы Коши–Римана в пространстве // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 768–781.
23. *Сатторов Э.Н.* Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. № 6. С. 445–455.
24. *Сатторов Э.Н.* О восстановлении решений обобщенной системы Моисила–Теодореску в пространственной области по их значениям на куске границы // Изв. вузов. Математика. 2011. № 1. С. 72–84.
25. *Ярмухамедов Ш.* Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 6. С. 34–40.
26. *Makhmudov K.O., Makhmudov O.I., Tarkhanov N.* Equations of Maxwell type // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 378. P. 64–75.
27. *Сатторов Э.Н., Эрмаматова З.Э.* О восстановлении решений однородной системы уравнений Максвелла в области по их значениям на куске границы // Изв. вузов. Математика. 2019. № 2. С. 39–48.
28. *Тарханов Н.Н.* О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 294–297.
29. *Айзенберг Л.А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск, 1990.
30. *Tarkhanov N.N.* Cauchy problem for solutions of elliptic equations // Math. Topics. V. 7. Akad. Verl., Berlin, 1995.
31. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
32. *Ишанкулов Т.И.* О возможности обобщённо-аналитического продолжения в область функций, заданных на куске её границы // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41. № 6. С. 1350–1356.
33. *Оболашвили Е.И.* Пространственный аналог обобщённых аналитических функций // Сообщ. АН ГССР. 1974. Т. 73. № 1. С. 20–24.
34. *Никофоров Л.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. М., 1974.
35. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
36. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. М., 1966.
37. *Ярмухамедов Ш.* Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45. № 3. С. 702–719.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 08.04.2020 г.
После доработки 08.04.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 100–113

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО

© 2021 г. В. Е. Федоров, М. Костич

Для линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Герасимова–Капуто доказана теорема о существовании единственного решения обратной задачи с зависящим от времени неизвестным коэффициентом. Предполагается выполнение условия относительной ограниченности пары операторов в уравнении и задание условия переопределения с оператором, ядро которого содержит подпространство вырождения исследуемого уравнения. Полученный результат проиллюстрирован на примере не разрешённой относительно производной по времени дробного порядка модельной системы уравнений в частных производных с неизвестным коэффициентом, снабжённой начальными и краевыми условиями и условием переопределения.

DOI: 10.31857/S037406412101009X

Введение. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, оператор $L:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ линеен и непрерывен, оператор $M:D_M\to\mathfrak{Y}$ линеен, замкнут и имеет плотную область определения $D_M\subset\mathfrak{X}$, снабжённую нормой графика оператора M, число $T>0$ фиксировано, оператор $B(t):\mathfrak{U}\to\mathfrak{Y}$ при всех $t\in[0,T]$ линеен и непрерывен, а функция $y:[0,T]\to\mathfrak{Y}$ непрерывна, $m\in\mathbb{N}$, $m-1<\alpha\leqslant m$, D_t^α – производная Герасимова–Капуто порядка α. Рассмотрим обратную задачу, называемую также задачей идентификации [1] (или задачей прогноз-управления [2–4]) для эволюционной системы, описываемой вырожденным ($\ker L\neq\{0\}$) эволюционным уравнением

$$D_t^\alpha Lx(t)=Mx(t)+B(t)u(t)+y(t),\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

с характерными для таких уравнений начальными условиями

$$(Px)^{(k)}(0)=x_k,\quad k=\overline{0,m-1},\tag{2}$$

где P – определяемый операторами L и M проектор вдоль подпространства вырождения уравнения (1) (подробнее см. п. 3). Задача состоит в нахождении пары (u,x) функций $u\in C([0,T];\mathfrak{U})$ и $x\in C([0,T];D_M)$, для которых уравнение (1) выполняется при всех $t\in[0,T]$, а для функции x справедливы включение $D_t^\alpha Lx\in C([0,T];\mathfrak{Y})$ и начальные условия (2). Для разрешимости этой задачи необходимо дополнительное условие – условие переопределения, которое в данном случае будет иметь вид

$$\Phi x(t)=\Psi(t),\quad t\in[0,T],\tag{3}$$

где оператор $\Phi:\mathfrak{X}\to\mathfrak{U}$ и функция $\Psi:[0,T]\to\mathfrak{U}$ заданы.

В рамках задачи (1)–(3) могут быть рассмотрены начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных, имеющих неизвестные коэффициенты в правой части (или функции источника) [5, 6]. Уравнения и системы дробного порядка по времени часто встречаются при моделировании реальных процессов в различных областях науки (см. [7, 8] и др.).

Обратные задачи для линейных вырожденных эволюционных уравнений первого порядка рассматривались многими авторами [1, 3, 4, 9–15] при различных предположениях об операторах L и M. В данной работе предполагается выполнение условия (L,p)-ограниченности оператора M (определение приводится в п. 3 работы). Прямая задача (1), (2) (при известной функции u) в случае (L,p)-ограниченного оператора M и её приложения исследованы в работах [16–19]. Условия однозначной разрешимости различных обратных задач для вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка вида (1) получены в работах [20–22], для других дробных уравнений см., например, [23–25] и приведённую в них библиографию.

В работе [26] также исследовалась задача (1)–(3) с (L,p)-ограниченным оператором M при тех же предположениях, что и в настоящей работе. Однако результат об однозначной разрешимости этой задачи был установлен только при ограничениях $\alpha \geqslant 1$, $p = 0$. Причиной этих ограничений явилось отсутствие в [26] доказательства повышенной гладкости решения вспомогательного интегрального уравнения Вольтерры. В данной работе это ограничение снято – получены условия разрешимости задачи (1)–(3) при любых $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \bigsqcup \mathbb{N}$.

Второй пункт настоящей работы содержит доказательство существования решения повышенной гладкости уравнения Вольтерры специального вида. Для этого вводится в рассмотрение весовое функциональное пространство функций конечной гладкости с особенностью в нуле и устанавливаются некоторые свойства таких функций. В третьем пункте доказана теорема о существовании решений повышенной гладкости невырожденной задачи (1)–(3) в случае, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, $L = I$ – тождественный оператор, и найдена оценка устойчивости решения. Четвёртый пункт работы содержит основной результат – теорему о существовании и единственности решения задачи (1)–(3). В последнем пункте полученный результат проиллюстрирован на примере не разрешённой относительно производной дробного порядка по времени модельной системы уравнений в частных производных с неизвестным коэффициентом, снабжённой начальными и краевыми условиями и конкретным условием переопределения вида (3).

1. Решения повышенной гладкости специального уравнения Вольтерры. Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ – банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ – нормированное векторное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$, $\mathcal{L}(\mathfrak{U}) := \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$; $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ – множество всех линейных замкнутых операторов с плотной областью определения в $\mathfrak{U}$, действующих в пространство $\mathfrak{V}$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U}) := \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$.

Обозначим через $C^{n,k}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ пространство функций, заданных на прямоугольнике $\widehat{\triangle} := \{(t,s) : t \in [0,T],\ \ s \in [0,t]\} \subset \mathbb{R}^2$, принимающих значения в пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и являющихся непрерывными по совокупности переменных вместе со своими частными производными до порядка n включительно по первой переменной и до порядка k включительно – по второй.

Лемма 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > n$, $h \in C^n([0,T];\mathfrak{U})$, $K \in C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда уравнение*

$$u(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s) u(s)\, ds + h(t) \tag{4}$$

имеет единственное решение $u \in C^n([0,T];\mathfrak{U})$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant C(K) \|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \tag{5}$$

с некоторой константой $C = C(K)$, *не зависящей от* h.

Доказательство. Запишем уравнение (4) в виде $u = F(u)$, где оператор $F : C^n([0,T];\mathfrak{U}) \to C^n([0,T];\mathfrak{U})$ действует по правилу

$$[F(u)](t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s) u(s)\, ds + h(t). \tag{6}$$

При $k \leqslant n < \alpha$ имеем

$$\frac{d^k}{dt^k} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s) u(s)\, ds = \sum_{l=0}^k c_{lk} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1-l} K_{k-l}(t,s) u(s)\, ds,$$

где c_{lk} – некоторые константы, $K_l(t,s) = \partial^l K(t,s)/\partial t^l$. Поэтому при всяком $t_1 \in (0,T]$ при некоторых постоянных $b_l > 0$ выполняется неравенство

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{C^n([0,t_1];\mathfrak{U})} \leqslant \sum_{l=0}^{n} b_l t_1^{\alpha-l} \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} \|u_1 - u_2\|_{C^n([0,t_1];\mathfrak{U})},$$

в котором

$$\|v\|_{C^n([0,t_1];\mathfrak{U})} = \sum_{l=0}^{n} \max_{t\in[0,t_1]} \|v^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{U}}, \quad \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} = \sum_{l=0}^{n} \max_{(t,s)\in\widehat{\triangle}} \left\| \frac{\partial^l}{\partial t^l} K(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}.$$

Выбрав t_1 достаточно малым, получим сжимающий оператор F на полном метрическом пространстве $C^n([0,t_1];\mathfrak{U})$. По теореме о сжимающем отображении найдётся единственная неподвижная точка $u_0^1 \in C^n([0,t_1];\mathfrak{U})$ оператора F.

Если $t_1 < T$, то при $t_2 \in (t_1,T]$ введём в рассмотрение метрическое пространство

$$C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U}) := \{u \in C^n([0,t_2];\mathfrak{U}) : u(t) = u_0^1(t), \quad t \in [0,t_1]\}$$

с метрикой $d(u_1,u_2) = \|u_1 - u_2\|_{C^n([0,t_2];\mathfrak{U})}$. Нетрудно показать его полноту, при этом, в силу доказанного выше, оператор F действует из пространства $C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ в него же, поскольку при всяком $u \in C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ для $t \in [0,t_1]$ имеем $(Fu)(t) = (Fu_0^1)(t) = u_0^1(t)$. Для любых $u_1, u_2 \in C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ при $k \leqslant n$ очевидно равенство

$$\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1) - F(u_2)) = \sum_{l=0}^{k} c_{lk} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{\alpha-1-l} K_{k-l}(t,s)(u_1(s) - u_2(s))\, ds.$$

Таким образом,

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{C^n([0,t_2];\mathfrak{U})} \leqslant \sum_{l=0}^{n} b_l (t_2 - t_1)^{\alpha-l} \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} \|u_1 - u_2\|_{C^n([0,t_2];\mathfrak{U})},$$

при этом константы b_l – те же, что и выше. Поэтому, если $t_2 = \min\{2t_1, T\}$, оператор F является сжимающим на полном метрическом пространстве $C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку – функцию $u_0^2 \in C^n_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$, совпадающую, таким образом, на $[0,t_1]$ с функцией u_0^1.

Если $t_2 = 2t_1 < T$, то на следующем шаге выбираем $t_3 \in (2t_1, T]$ и рассматриваем отображение F на полном метрическом пространстве

$$C^n_{t_2}([0,t_3];\mathfrak{U}) := \{u \in C^n([0,t_3];\mathfrak{U}) : u(t) = u_0^2(t), \quad t \in [0,t_2]\}.$$

Повторим рассуждения k раз до выполнения условий $(k-1)t_1 < T$, $kt_1 \geqslant T$.

Для полученного решения $u \in C^n([0,T];\mathfrak{U})$ имеем при $l \in \mathbb{N}$ представление

$$u(t) = [F^{l+1}(u)](t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_l} [(t-t_1)(t_1-t_2)\cdots(t_l - t_{l+1})]^{\alpha-1} \times$$

$$\times K(t,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_l,t_{l+1}) u(t_{l+1})\, dt_{l+1} \cdots dt_2\, dt_1 + \sum_{r=0}^{l-1} (F_0^r h)(t),$$

где

$$[F_0 h](t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s) h(s)\, ds.$$

Тогда при $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ получаем

$$\frac{d^k}{dt^k}u(t) = \sum_{p=0}^{k} d_{pk} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_l} (t-t_1)^{\alpha-p-1}[(t_1-t_2)\cdots(t_l-t_{l+1})]^{\alpha-1} \times$$
$$\times K_{k-p}(t,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_l,t_{l+1})u(t_{l+1})\,dt_{l+1}\cdots dt_2\,dt_1 +$$
$$+\sum_{r=0}^{l-1}\sum_{p=0}^{k} e_{pk} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{r-1}} (t-t_1)^{\alpha-p-1}[(t_1-t_2)\cdots(t_{r-1}-t_r)]^{\alpha-1} \times$$
$$\times K_{k-p}(t,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{r-1},t_r)h(t_r)\,dt_r\cdots dt_2\,dt_1,$$
$$\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant \sum_{k=0}^{n} d_k \|K\|_{C^{n,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|K\|^l_{C(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\frac{T^{(\alpha-1)l}T^{\alpha+l}}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l)}\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} +$$
$$+ lC_h\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant \frac{C_1T^{(\alpha+1)l}\|K\|^l_{C(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}}{\alpha l!}\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} + lC_h\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant$$
$$\leqslant q_l\|u\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})} + lC_h\|h\|_{C^n([0,T];\mathfrak{U})},$$

где d_{pk}, e_{pk} – некоторые константы, d_k – положительные константы, $q_l < 1$ при достаточно большом l. Отсюда следует, что выполняется оценка (5). Лемма доказана.

При $n \geqslant m \in \mathbb{N}$ введём в рассмотрение линейное пространство

$$C^n_m([0,T];\mathfrak{U}) := \{u \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U}) : t^{k+1}u^{(m+k)}(t) \in C([0,T];\mathfrak{U}),\quad k = \overline{0, n-m}\}.$$

Условимся, что при $n < m$ по определению $C^n_m([0,T];\mathfrak{U}) := C^n([0,T];\mathfrak{U})$. При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ имеем вложение $C^n_m([0,T];\mathfrak{U}) \subset C([0,T];\mathfrak{U})$.

Лемма 2. *Пусть $n \geqslant m \in \mathbb{N}$. Тогда пространство $C^n_m([0,T];\mathfrak{U})$ с нормой*

$$\|u\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{U})} = \|u\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})} + \sum_{k=0}^{n-m} \max_{t\in[0,T]} t^{k+1}\|u^{(m+k)}(t)\|_{\mathfrak{U}}$$

является банаховым.

Доказательство. Аксиомы нормы проверяются стандартным образом.

Докажем полноту пространства. Рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, фундаментальную в указанной норме. Очевидно, что существует функция $u \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})$, к которой эта последовательность сходится в $C^{m-1}([0,T];\mathfrak{U})$. Тогда функция $tu^{(m-1)}(t)$ лежит в $C([0,T];\mathfrak{U})$, а последовательность функций $(tu_k^{(m-1)}(t))' = u_k^{(m-1)}(t) + tu_k^{(m)}(t)$ сходится к некоторой функции $v = (tu^{(m-1)}(t))' = u^{(m-1)}(t) + tu^{(m)}(t)$ в $C([0,T];\mathfrak{U})$, поэтому $tu^{(m)}(t) \in C([0,T];\mathfrak{U})$. Аналогично, последовательность $(t^2u_k^{(m)}(t))' = 2tu_k^{(m)}(t) + t^2u_k^{(m+1)}(t)$ сходится к $2tu^{(m)}(t) + t^2u^{(m+1)}(t)$ в $C([0,T];\mathfrak{U})$, а значит, $t^2u^{(m+1)}(t) \in C([0,T];\mathfrak{U})$. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ – банаховы пространства и $\circ : \mathfrak{U}\times\mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ – билинейное отображение. Тогда для $u \in C^n_m([0,T];\mathfrak{U})$, $v \in C^n_m([0,T];\mathfrak{V})$ справедливы включения $u\circ v \in C^n_m([0,T];\mathfrak{W})$ и оценка*

$$\|u\circ v\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{W})} \leqslant \|u\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{U})}\|v\|_{C^n_m([0,T];\mathfrak{V})}.$$

Доказательство. При $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ имеем равенство

$$t^{k+1}(u\circ v)^{(m+k)} = \sum_{l=0}^{k} t^l C^l_{m+k} u^{(l)} \circ t^{k-l+1} v^{(m+k-l)} + t^{k+1}\sum_{l=k+1}^{m-1} C^l_{m+k} u^{(l)} \circ v^{(m+k-l)} +$$
$$+ \sum_{l=m}^{m+k} t^{m+k-l} C^l_{m+k} t^{l-m+1} u^{(l)} \circ v^{(m+k-l)}, \quad C^l_{m+k} = \frac{(m+k)!}{l!(m+k-l)!},$$

а при $k \in \{m, m+1, \ldots, n-m\}$ – равенство

$$t^{k+1}(u \circ v)^{(m+k)} = \sum_{l=0}^{m-1} t^l C_{m+k}^l u^{(l)} \circ t^{k-l+1} v^{(m+k-l)} + t^{m-1} \sum_{l=m}^{k} C_{m+k}^l t^{l-m+1} u^{(l)} \circ t^{k-l+1} v^{(m+k-l)} +$$
$$+ \sum_{l=k+1}^{m+k} t^{m+k-l} C_{m+k}^l t^{l-m+1} u^{(l)} \circ v^{(m+k-l)}.$$

Остальная часть доказательства очевидна. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant n$, $h \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$, $K \in C^{n,n-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$. *Тогда уравнение (4) имеет единственное решение* $u \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant C(K)\|h\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{U})} \tag{7}$$

с некоторой константой $C = C(K)$, *не зависящей от* h.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, рассмотрим оператор (6), но теперь в банаховом пространстве $C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$. При $\alpha \leqslant k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{d^k}{dt^k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds = \frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\sum_{l=0}^{m-1} c_{l,m-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-1-l}(t,s)u(s)\,ds =$$
$$= \frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\sum_{l=0}^{m-2} c_{l,m-1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-1-l}(t,s)u(s)\,ds +$$
$$+ c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\int_0^t s^{\alpha-m}K(t,t-s)u(t-s)\,ds =$$
$$= \frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}}\sum_{l=0}^{m-1} c_{l,m}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-l}(t,s)u(s)\,ds +$$
$$+ c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}}\left(t^{\alpha-m}K(t,0)u(0) + \int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d}{dt}[K(t,t-s)u(t-s)]\,ds\right) =$$
$$= \frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}\sum_{l=0}^{m-1} c_{l,m+1}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{m+1-l}(t,s)u(s)\,ds +$$
$$+ c_{m-1,m}\frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}\left(t^{\alpha-m}K_1(t,0)u(0) + \int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d}{dt}[K_1(t,t-s)u(t-s)]\,ds\right) +$$
$$+ c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}}\Bigg((\alpha-m)t^{\alpha-m-1}K(t,0)u(0) + t^{\alpha-m}K_1(t,0)u(0) +$$
$$+ t^{\alpha-m}\frac{d}{dt}\bigg|_{s=t}[K(t,t-s)u(t-s)] + \int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d^2}{dt^2}[K(t,t-s)u(t-s)]\,ds\Bigg) =$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} c_{l,k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)u(s)\,ds + \sum_{l=m}^{k} C_l(t)t^{\alpha-l} + \sum_{l=0}^{k-m+1} c_l\int_0^t s^{\alpha-m}\frac{d^l}{dt^l}[K(t,t-s)u(t-s)]\,ds.$$

При этом при любом $t_1 \in (0, T]$ выполняются неравенства

$$\max_{t\in[0,t_1]} \|C_l(t)t^{\alpha-l+k-m+1}\|_{\mathfrak{U}} \leqslant$$

$$\leqslant b\|K\|_{C^{k-l,k-l}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha-m+1}\|u^{(i)}(t)\|_{\mathfrak{U}} + \sum_{i=m}^{k-l}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha}\|t^{i-m+1}u^{(i)}(t)\|_{\mathfrak{U}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant bt_1^{\alpha-m+1}\|K\|_{C^{k-l,k-l}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u\|_{C_m^{k-l}([0,t_1];\mathfrak{U})},$$

где $b>0$, c_l, $c_{l,r}$ – константы,

$$\|K\|_{C^{k,l}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\max_{(t,s)\in\widehat{\triangle}}\left\|\frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i\partial s^j}K(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}.$$

Следовательно,

$$\max_{t\in[0,t_1]}\left\|t^{k-m+1}\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1(t)) - F(u_2(t)))\right\|_{\mathfrak{U}} \leqslant at_1^{\alpha+k-2m+2}\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C([0,t_1];\mathfrak{U})} +$$

$$+ b_1t_1^{\alpha-m+1}\|K\|_{C^{k-m,k-m}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C_m^{k-m}([0,t_1];\mathfrak{U})} +$$

$$+ c\|K\|_{C^{k-m+1,k-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha+k-2m+2}\|u_1^{(i)}(t) - u_2^{(i)}(t)\|_{\mathfrak{U}} +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=m}^{k-m+1}\max_{t\in[0,t_1]} t^{\alpha}\|t^{i-m+1}(u_1^{(i)}(t) - u_2^{(i)}(t))\|_{\mathfrak{U}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant a_1t_1^{\alpha-m+1}(\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))} + \|K\|_{C^{k-m+1,k-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))})\|u_1-u_2\|_{C_m^{k-m+1}([0,t_1];\mathfrak{U})}$$

при некоторых положительных постоянных a, a_1, b_1, c.

При $k \leqslant m-1$ нужная оценка получается значительно проще:

$$\frac{d^k}{dt^k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}K(t,s)u(s)\,ds = \sum_{l=0}^{k} c_{l,k}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)u(s)\,ds,$$

$$\left\|\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1) - F(u_2))\right\|_{C[0,t_1];\mathfrak{U})} \leqslant at_1^{\alpha-k}\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C([0,t_1];\mathfrak{U})}.$$

В итоге приходим к неравенству

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})} \leqslant a_2t_1^{\alpha-m+1}\|K\|_{C^{n,n-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})}.$$

Выбрав t_1 достаточно малым, получим сжимаемость оператора F на полном метрическом пространстве $C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})$. По теореме о сжимающем отображении найдётся единственная неподвижная точка $u_0^1 \in C_m^n([0,t_1];\mathfrak{U})$ оператора F.

Заметим, что из проведённых рассуждений и условия $h \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ следует также, что оператор F действует из пространства $C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ в него же.

Если $t_1 < T$, то при $t_2 \in (t_1, T]$ рассмотрим метрическое пространство

$$C_{m,t_1}^n([0,t_2];\mathfrak{U}) := \{u \in C_m^n([0,t_2];\mathfrak{U}) : u(t) = u_0^1(t), \quad t \in [0,t_1]\}$$

с метрикой $d(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_{C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})}$. Нетрудно доказать его полноту, при этом, в силу доказанного выше, оператор F действует из пространства $C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ в него же. Для произвольных $u_1,u_2\in C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ обозначим $v=u_1-u_2$, тогда при $k\leqslant m-1$ имеем

$$\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))=\frac{d^k}{dt^k}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1}K(t,s)v(s)\,ds=\sum_{l=0}^{k}c_{l,k}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)v(s)\,ds,$$

$$\left\|\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))\right\|_{C[0,t_2];\mathfrak{U})}\leqslant a(t_2^{\alpha-k}-t_1^{\alpha-k})\|K\|_{C^{k,0}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C([0,t_2];\mathfrak{U})},$$

а при $m\leqslant k\leqslant n$ получаем

$$\frac{d^k}{dt^k}(F(u_1)-F(u_2))=\frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\sum_{l=0}^{m-2}c_{l,m-1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l}K_{m-1-l}(t,s)v(s)\,ds+$$

$$+\,c_{m-1,m-1}\frac{d^{k-m+1}}{dt^{k-m+1}}\int\limits_{0}^{t-t_1}s^{\alpha-m}K(t,t-s)v(t-s)\,ds=$$

$$=\sum_{l=0}^{m-1}c_{l,k}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l}K_{k-l}(t,s)v(s)\,ds+\sum_{l=0}^{k-m+1}c_l\int\limits_{0}^{t}s^{\alpha-m}\frac{d^l}{dt^l}[K(t,t-s)v(t-s)]\,ds$$

в силу очевидных равенств $v(t_1)=v'(t_1)=\ldots=v^{(n)}(t_1)=0$. Таким образом,

$$\|F(u_1)-F(u_2)\|_{C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})}\leqslant a_1(t_2^{\alpha-m+1}-t_1^{\alpha-m+1})\|K\|_{C^{n,n-m+1}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))}\|u_1-u_2\|_{C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})},$$

при этом константу a_1 можно выбрать той же, что и на предыдущем этапе рассуждений. Поэтому при $t_2=\min\{2t_1,T\}$ оператор F является сжимающим на полном метрическом пространстве $C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку – функцию $u_0^2\in C^n_m([0,t_2];\mathfrak{U})$, совпадающую на $[0,t_1]$ с функцией u_0^1 по определению пространства $C^n_{m,t_1}([0,t_2];\mathfrak{U})$.

Если $t_2<T$, то на следующем шаге выбираем $t_3=\min\{3t_1,T\}$ и рассматриваем отображение F на полном метрическом пространстве

$$C^n_{m,t_2}([0,t_3];\mathfrak{U}):=\{u\in C^n_m([0,t_3];\mathfrak{U}):u(t)=u_0^2(t),\quad t\in[0,t_2]\}.$$

Найдётся такое $k\in\mathbb{N}$, что $(k-1)t_1<T$, $kt_1\geqslant T$. Повторив рассуждения k раз, завершим доказательство разрешимости.

Доказательство оценки (7) проводится так же, как и доказательство аналогичной оценки в лемме 1. Лемма доказана.

2. Невырожденная задача идентификации. Обозначим

$$g_\delta(t):=\Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1},\quad J_t^\delta h(t):=(g_\delta*h)(t)=\int\limits_0^t g_\delta(t-s)h(s)\,ds$$

при $\delta>0$, $t>0$. Пусть $m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, D_t^m – обычная производная целого порядка m, J_t^0 – тождественный оператор,

$$D_t^\alpha f(t)=D_t^m J_t^{m-\alpha}\biggl(f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}f^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\biggr)$$

– производная Герасимова–Капуто (см. [27, 28], обсуждение терминологии – например, в [29, 30]). При $\alpha, \beta > 0$ обозначим функцию Миттаг-Лёффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Пусть $\mathfrak{Z}$ – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f : [0,T] \to \mathfrak{Z}$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$. Рассмотрим задачу Коши

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{9}$$

Решением задачи (8), (9) будем называть функцию $z \in C^{m-1}([0,T]; \mathfrak{Z})$, для которой справедливо включение

$$J_t^{m-\alpha}\biggl(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) g_{k+1}\biggr) \in C^m([0,T]; \mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (8), (9).

Лемма 5 [18, 19]. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f \in C([0,T]; \mathfrak{Z})$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда задача (8), (9) имеет единственное решение, и это решение представляется в виде*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s)\, ds. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу идентификации

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$z^{(k)}(0) = z_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{12}$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Z}$ – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Z})$, $g : [0,T] \to \mathfrak{Z}$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{V})$, $\Psi : [0,T] \to \mathfrak{V}$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$ заданы, а функции $z : [0,T] \to \mathfrak{Z}$ и $u : [0,T] \to \mathfrak{U}$ требуется определить, (13) – условие переопределения.

Решением задачи (11)–(13) будем называть пару (u, z) функций $u \in C([0,T]; \mathfrak{U})$ и $z \in C^{m-1}([0,T]; \mathfrak{Z})$ такую, что

$$J_t^{m-\alpha}\biggl(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) g_{k+1}\biggr) \in C^m([0,T]; \mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (11)–(13).

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $B \in C^{\max\{0, n-m+1\}}([0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Z}))$, $g \in C_m^n([0,T]; \mathfrak{Z})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}; \mathfrak{V})$, *при всех* $t \in [0,T]$ *существует обратный оператор* $(\Phi B(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})$, $(\Phi B(t))^{-1} \in C^n([0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U}))$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = \overline{0, m-1}$, $\Psi \in C([0,T]; \mathfrak{V})$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $D_t^\alpha \Psi \in C_m^n([0,T]; \mathfrak{V})$, $\Psi^{(k)}(0) = \Phi z_k$, $k = \overline{0, m-1}$. *Тогда задача (11)–(13) имеет единственное решение* (u, z), *при этом* $u \in C_m^n([0,T]; \mathfrak{U})$ *и справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|z\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Z})} + \|D_t^\alpha z\|_{C([0,T];\mathfrak{Z})} + \|u\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant \\ &\leqslant C\biggl(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathfrak{Z}} + \|g\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{Z})} + \|D_t^\alpha \Psi\|_{C_m^n([0,T];\mathfrak{V})}\biggr), \end{aligned} \tag{14}$$

в которой константа $C = C(A, B, \Phi)$ *не зависит от* $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}, g, \Psi$.

Доказательство. Если z – решение задачи Коши (11), (12) при некотором u, то в силу непрерывности оператора Φ справедливо равенство

$$D_t^\alpha \Phi z(t) = \Phi D_t^\alpha z(t) = \Phi(Az(t) + B(t)u(t) + g(t)).$$

Поэтому в соответствии с равенством (10) и условием (13) имеем

$$D_t^\alpha \Psi(t) = \Phi A\left(\sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(t^\alpha A)z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)g(s)\,ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B(s)u(s)\,ds\right) + \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t).$$

Воспользовавшись условием непрерывной обратимости операторов семейства $\Phi B(t)$, приходим к равенству

$$u(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} K(t,s)u(s)\,ds + h(t), \tag{15}$$

где

$$K(t,s) = -(\Phi B(t))^{-1}\Phi A E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B(s) \in C^{n,\max\{0,n-m+1\}}(\widehat{\triangle};\mathcal{L}(\mathfrak{U})),$$

$$h(t) = (\Phi B(t))^{-1}\left(D_t^\alpha \Psi(t) - \Phi A \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(t^\alpha A)z_k - \right.$$

$$\left. - \Phi A \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)g(s)\,ds - \Phi g(t)\right) \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U}).$$

Действительно, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 4, при $g \in C_m^n([0,T];\mathfrak{Z})$ получаем в силу непрерывности операторов Φ и A, что

$$\Phi g \in C_m^n([0,T];\mathfrak{V}), \quad \Phi A \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)g(s)\,ds \in C_m^n([0,T];\mathfrak{V}),$$

остаётся учесть вложение $C^n([0,T];\mathfrak{V}) \subset C_m^n([0,T];\mathfrak{V})$ и лемму 3.

Таким образом, по лемме 1 при $n < \alpha$ или по лемме 4 в случае $n \geqslant \alpha$ существует единственное решение $u \in C_m^n([0,T];\mathfrak{U})$ уравнения (15), которое удовлетворяет оценке вида (14) для функции u.

Из доказанного следует, что по лемме 5 существует единственное решение z задачи Коши (11), (12) с заданным u, которое удовлетворяет оценке (14) в силу равенства (10) с функцией $f(t) = g(t) + B(t)u(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Понятно, что ключевым условием в теореме является условие непрерывной обратимости операторов семейства $\Phi B(t)$. По сути оно означает адекватное соответствие информации, получаемой из условия переопределения, и неизвестной информации в уравнении.

3. Задача идентификации для вырожденного уравнения. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, D_M – область определения оператора M, снабжённая его нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Обозначим $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если существует такое $a>0$, что при любом μ из множества $\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|>a\}$ существует оператор $(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$. Возьмём контур $\gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=r>a\}$. В [31, с. 89] показано, что операторы

$$P:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R_{\mu}^{L}(M)\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})\quad\text{и}\quad Q:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L_{\mu}^{L}(M)\,d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y})\tag{16}$$

являются проекторами. Положим

$$\mathfrak{X}^0:=\ker P,\quad \mathfrak{X}^1:=\operatorname{im}P,\quad \mathfrak{Y}^0:=\ker Q,\quad \mathfrak{Y}^1:=\operatorname{im}Q,\quad P_0:=I-P,\quad Q_0:=I-Q.$$

Тогда $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^0\bigoplus\mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}^0\bigoplus\mathfrak{Y}^1$. Обозначим через L_k (через M_k) сужение оператора L (оператора M) на подпространство $\mathfrak{X}^k$ $(D_{M_k}:=D_M\bigcap\mathfrak{X}^k)$, $k=0,1$.

Теорема 2 [31, с. 90]. *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) $M_1\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^1;\mathfrak{Y}^1)$, $M_0\in\mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0;\mathfrak{Y}^0)$, $L_k\in\mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k=0,1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$.

Обозначим $H:=M_0^{-1}L_0$. При $p\in\mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-*ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен и при этом $H^p\neq 0$, $H^{p+1}=0$.

Лемма 6 [18]. *Пусть $\alpha,\beta>0$, оператор M является (L,σ)-ограниченным и*

$$X_{\alpha,\beta}(t):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R_{\mu}^{L}(M)E_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha})\,d\mu,\quad t\geqslant 0.$$

Тогда при всех $t\geqslant 0$ выполняются следующие соотношения:

(i) $X_{\alpha,\beta}(t)P=PX_{\alpha,\beta}(t)=X_{\alpha,\beta}(t)$;

(ii) $\mathfrak{X}^0\subset\ker X_{\alpha,\beta}(t)$, $\operatorname{im}X_{\alpha,\beta}(t)\subset\mathfrak{X}^1$;

(iii) $X_{\alpha,\beta}(t)=E_{\alpha,\beta}(L_1^{-1}M_1t^{\alpha})P$.

Пусть $f:[0,T]\to\mathfrak{Y}$. *Решением* уравнения

$$D_t^{\alpha}Lx(t)=Mx(t)+f(t),\quad t\in[0,T],\tag{17}$$

называется функция $x\in C([0,T];D_M)$, для которой справедливы включения

$$Lx\in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y}),\quad J_t^{m-\alpha}\biggl(Lx-\sum_{k=0}^{m-1}(Lx)^{(k)}(0)g_{k+1}\biggr)\in C^m([0,T];\mathfrak{Z})$$

и при всех $t\in[0,T]$ выполняется равенство (17). Решение x уравнения (17), для которого $x\in C^{m-1}([0,T);\mathfrak{X})$ и выполняются равенства

$$x^{(k)}(0)=x_k,\quad k=\overline{0,m-1},\tag{18}$$

называется *решением задачи Коши* (17), (18).

Введём обозначение $G:=L_0M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0)$.

Лемма 7. *Пусть оператор M является (L,p)-ограниченным при $p\in\mathbb{N}_0$, $g:[0,T]\to$ $\to\mathfrak{Y}^0$ и существуют операторы $(D_t^{\alpha}H)^kM_0^{-1}g\in C([0,T];\mathfrak{X})$ при $k=\overline{0,p}$. Тогда существует единственное решение уравнения $D_t^{\alpha}Hx(t)=x(t)+M_0^{-1}g(t)$, и это решение представляется в виде*

$$x(t)=-\sum_{k=0}^{p}(D_t^{\alpha}H)^kM_0^{-1}g(t).$$

Если, кроме того, $g\in C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, то для этого решения справедливо неравенство

$$\|x\|_{C([0,T];D_M)}+\|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})}+\|D_t^{\alpha}Lx\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})}\leqslant C\|g\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})},$$

в котором положительная константа $C=C(L,M)$ не зависит от g.

Доказательство. Существование единственного решения x доказано в работе [18]. Учитывая равенство $D_t^\alpha L_0 x(t) = M_0 x(t) + g(t),$ для решения $x : D_{M_0} \to \mathfrak{X}$ имеем оценку

$$\|x\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha Lx\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|x\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|g\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{p} \|(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1} g\|_{C([0,T];\mathfrak{X})} + 2\sum_{k=1}^{p} \|(D_t^\alpha G)^k g\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} + 3\|g\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} +$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1} \|(D_t^\alpha G)^k Gg\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant C(L,M)\|g\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что

$$Lx(t) = -\sum_{n=0}^{p}(D_t^\alpha G)^n Gg(t) = -\sum_{n=0}^{p-1}(D_t^\alpha G)^n Gg(t) \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})$$

в условиях данной леммы, поскольку $G^{p+1} = M_0 H^{p+1} M_0^{-1} = 0.$

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ является (L,p)-ограниченным при $p \in \mathbb{N}_0$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{V})$, $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, $y : [0,T] \to \mathfrak{Y}$, $\Psi : [0,T] \to \mathfrak{V}$, $x_k \in \mathfrak{X}^1$, $k = \overline{0,m-1}$, заданы. При $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$ рассмотрим задачу идентификации

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

$$Px^{(k)}(0) = x_k, \quad k = \overline{0,m-1}, \tag{20}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{21}$$

Пара (u,x) функций $u \in C([0,T];\mathfrak{U})$ и $x \in C([0,T];D_M)$, для которой $D_t^\alpha Lx \in C([0,T];\mathfrak{Y})$, называется *решением* этой задачи, если выполняются равенства (19)–(21).

Замечание 2. При постановке условий (20) важен тот факт, что гладкость функции Px не меньше, чем у Lx, так как $Px = L_1^{-1}L_1Px = L_1^{-1}QLx$.

Замечание 3. При $p \geqslant 1$ уравнение (19) называется *сильно вырожденным*, поскольку в этом случае его подпространство вырождения $\mathfrak{X}^0$ состоит не только из векторов ядра $\ker L$, но и из их M-присоединённых векторов высоты, не большей p (см. [31]).

Далее используется ключевое условие $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M является (L,p)-ограниченным, $B \in C_m^{\max\{0,mp-m+1\}}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, $Q_0B \in C^{mp}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y}))$, при $p>0$ справедливо соотношение $\|Q_0B^{(m-1+k)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})} = O(t^k)$ при $t\to 0$ для $k = \overline{1,mp-m+1}$, $y : [0,T] \to \mathfrak{Y}$, $Qy \in C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, $Q_0y \in C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{V})$, $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$, при всех $t \in [0,T]$ существует обратный оператор $(\Phi L_1^{-1}QB(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})$, $(\Phi L_1^{-1}QB(t))^{-1} \in C^{mp}([0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U}))$, $\Psi \in C([0,T];\mathfrak{V})$, $m-1<\alpha\leqslant m$, $D_t^\alpha\Psi \in C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{V})$, $x_k \in \mathfrak{X}^1$, $\Psi^{(k)}(0) = \Phi x_k$, $k=\overline{0,m-1}$. Тогда существует единственное решение (u,x) задачи (19)–(21), при этом выполняется неравенство*

$$\|x\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lx\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha Lx\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} + \|u\|_{C([0,T];\mathfrak{U})} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{k=0}^{m-1}\|x_k\|_{\mathfrak{X}} + \|Qy\|_{C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|Q_0y\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha\Psi\|_{C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{V})}\right), \tag{22}$$

в котором положительная константа $C = C(L,M,B,\Phi) > 0$ не зависит от x_k, $k = \overline{0,m-1}$, y, Ψ.

Доказательство. Имеем $x(t) = v(t) + w(t)$, где $Px(t) := v(t)$, $P_0x(t) := w(t)$. Из условия $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$ следует, что $\Phi P_0 = 0$, поэтому исходная задача (19)–(21) эквивалентна задаче нахождения функций v, w, u, удовлетворяющих соотношениям

$$D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}QB(t)u(t) + L_1^{-1}Qy(t), \quad t \in [0,T], \tag{23}$$

$$v^{(k)}(0) = x_k, \quad k = \overline{0,m-1}, \tag{24}$$

$$\Phi x(t) \equiv \Phi v(t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

$$D_t^\alpha Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}Q_0B(t)u(t) + M_0^{-1}Q_0y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{26}$$

По теореме 1 с $n = mp$ задача (23)–(25) однозначно разрешима, при этом выполняется включение $u \in C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{U}) \subset C([0,T];\mathfrak{U})$. Тогда с учётом условий на оператор Q_0B имеем по лемме 3 включение $Q_0Bu \in C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})$, поэтому при $n = \overline{0,p}$ существуют функции $(D_t^\alpha H)^n M_0^{-1}Q_0Bu \in C([0,T];\mathfrak{X})$ и уравнение (26) разрешимо в силу леммы 7, при этом

$$\|w\|_{C([0,T];D_M)} + \|Lw\|_{C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|D_t^\alpha Lw\|_{C([0,T];\mathfrak{Y})} \leqslant$$
$$\leqslant C(L,M)(\|Q_0Bu\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y})} + \|Q_0y\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y}))} \leqslant$$
$$\leqslant C(L,M)\|Q_0y\|_{C^{mp}([0,T];\mathfrak{Y}))} + C(L,M,B)\|u\|_{C_m^{mp}([0,T];\mathfrak{U})}.$$

Отсюда и из неравенства (14) вытекает требуемая оценка (22). Теорема доказана.

Замечание 4. Результат, аналогичный теореме 3, получен в [26] только при условии, что $\alpha \geqslant 1$ и $p = 0$.

Замечание 5. При условии $\mathfrak{X}^1 \subset \ker\Phi$ однозначная разрешимость задачи (19)–(21) была исследована для любых $\alpha > 0$ и $p \in \mathbb{N}_0$ как в случае начальных условий (20), так и при начальных условиях Коши.

4. Пример. Пусть $d \in \{1,2,3\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v_1}{\partial t^k}(s,0) = v_{1k}(s), \quad k = \overline{0,m-1}, \quad s \in \Omega, \tag{27}$$

$$v_1(s,t) = v_3(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{28}$$

$$D_t^\alpha \triangle v_1 = v_1 + b_1(s,t)u(t), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T],$$
$$D_t^\alpha \triangle v_3 = v_2 + b_2(s,t)u(t), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T],$$
$$0 = \triangle v_3 + b_3(s,t)u(t), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{29}$$

$$v_1(s_0,t) = \Psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{30}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}_0$, $s_0 \in \Omega$.

Пусть $A := \Delta = \sum_{k=1}^d \partial^2/\partial s_k^2$ – оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega) := \{z \in H^2(\Omega) : z(s) = 0, \ s \in \partial\Omega\} \subset L_2(\Omega)$, $\{\varphi_k\}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система его собственных функций, соответствующая собственным значениям $\{\lambda_k\}$ оператора A, занумерованным в порядке их невозрастания с учётом кратности.

Редуцируем задачу (27)–(30) к задаче (19)–(21), выбрав пространства

$$\mathfrak{X} = H_0^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times H_0^2(\Omega), \quad \mathfrak{Y} = (L_2(\Omega))^3, \quad \mathfrak{U} = \mathbb{R} \tag{31}$$

и операторы

$$L = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}). \tag{32}$$

При этом $\Phi x = x_1(s_0)$ для $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathfrak{X}$, поэтому $\mathfrak{V} = \mathbb{R}$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathbb{R})$, так как при $d < 4$ имеет место вложение $H_0^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Лемма 8 [32]. *Пусть заданы пространства (31) и операторы (32). Тогда оператор* M $(L,1)$*-ограничен и проекторы (16) имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Из представления проектора P следует, что начальные условия (27) имеют вид условий (20), при этом $\mathfrak{X}^0 \subset \ker \Phi$.

Теорема 4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $b_1 \in C^1_m([0,T];L_2(\Omega))$, $b_2, b_3 \in C^m([0,T];L_2(\Omega))$, *справедливы соотношения* $\|\partial^m b_i(\,\cdot,t)/\partial t^m\|_{L_2(\Omega)} = O(t)$ *при* $t \to 0$ *и* $i = 2,3$, *при всех* $t \in [0,T]$ *выполняются условия* $(A^{-1}b_1(\,\cdot,t))|_{s=s_0} \neq 0$ *и* $[(A^{-1}b_1(\,\cdot,t))|_{s=s_0}]^{-1} \in C^m([0,T];\mathbb{R})$, $\Psi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $D^\alpha_t \Psi \in C^m_m([0,T];\mathbb{R})$, $v_{1k} \in H^2_0(\Omega)$, $\Psi^{(k)}(0) = v_{1k}(s_0)$, $k = \overline{0,m-1}$. *Тогда существует единственное решение* (v_1,v_2,v_3,u) *задачи (27)–(30), при этом имеет место неравенство*

$$\|v_1\|_{C([0,T];H^2_0(\Omega))} + \|v_2\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \|v_3\|_{C([0,T];H^2_0(\Omega))} + \|\Delta v_1\|_{C^{m-1}([0,T];L_2(\Omega))} +$$

$$+ \|\Delta v_3\|_{C^{m-1}([0,T];L_2(\Omega))} + \|D^\alpha_t \Delta v_1\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \|D^\alpha_t \Delta v_3\|_{C([0,T];L_2(\Omega))} + \sum_{i=1,2,3} \|u_i\|_{C([0,T];\mathbb{R})} \leqslant$$

$$\leqslant C(\|v_{11}\|_{H^2_0(\Omega)} + \|v_{12}\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{13}\|_{H^2_0(\Omega)} + \|D^\alpha_t \Psi\|_{C^m_m([0,T];\mathbb{R})}),$$

в котором константа $C > 0$ *не зависит от* v_{1k}, $k = \overline{0,m-1}$, *и* Ψ.

Доказательство. В условиях задачи (27)–(30) отображение $\Phi L_1^{-1} Q B(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляет собой оператор умножения на число $(A^{-1}b_1(\,\cdot,t))|_{s=s_0}$. Поэтому все условия теоремы 3 при $p = 1$ выполняются и по этой теореме получаем требуемое. Теорема доказана.

Работа Федорова В.Е. выполнена в рамках исследований Уральского математического центра, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-450001) и финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (акт 211, контракт 02.A03.21.0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al Horani M., Favini A.* An identification problem for first-order degenerate differential equations // J. of Optim. Theory and Appl. 2006. V. 130. P. 41–60.
2. *Прилепко А.И.* Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 11. 1560–1571.
3. *Уразаева А.В., Федоров В.Е.* Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1111–1119.
4. *Уразаева А.В., Федоров В.Е.* О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. 2009. Т. 85. Вып. 3. С. 440–450.
5. *Prilepko A.I., Orlovskii D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel, 2000.
6. *Favini A., Lorenzi A.* Differential Equations. Inverse and Direct Problems. Boca Raton; London; New York, 2006.
7. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск, 2008.
8. *Tarasov V.E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York, 2011.
9. *Kozhanov A.I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht, 1999.
10. *Пятков С.Г., Абашеева Н.Л.* Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43. № 3. С. 678–693.
11. *Fedorov V.E., Urazaeva A.V.* An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12. P. 387–395.

12. *Pyatkov S.G., Shergin S.N.* Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2016. Т. 9. № 2. С. 75–89.
13. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel // Discr. and Contin. Dynamical Systems. Ser. S. 2016. V. 9. P. 687–696.
14. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Inverse problem for Oskolkov's system of equations // Math. Methods in the Appl. Sci. 2017. V. 40. № 17. P. 6123–6126.
15. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Inverse problems for a class of linear Sobolev type equations with overdetermination on the kernel of operator at the derivative // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. V. 28. № 1. P. 53–61.
16. *Федоров В.Е., Гордиевских Д.М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 71–83.
17. *Гордиевских Д.М., Федоров В.Е.* Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.
18. *Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Плеханова М.В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1367–1375.
19. *Plekhanova M.V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative // Math. Methods in the Appl. Sci. 2017. V. 40. № 17. P. 6138–6146.
20. *Fedorov V.E., Nazhimov R.R.* Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2019. V. 22. № 2. P. 271–286.
21. *Федоров В.Е., Нагуманова А.В.* Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто в секториальном случае // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 28. С. 123–137.
22. *Федоров В.Е., Нагуманова А.В.* Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. Темат. обзоры. 2019. Т. 167. С. 97–111.
23. *Глушак А.В.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Соврем. математика. Фунд. направления. 2006. Т. 15. С. 126–141.
24. *Глушак А.В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. заметки. 2010. Т. 87. № 5. С. 684–693.
25. *Orlovsky D.G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. Федер. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. Т. 8. № 1. P. 55–63.
26. *Fedorov V.E., Ivanova N.D.* Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2017. V. 20. № 3. P. 706–721.
27. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. С. 251–260.
28. *Caputo M., Mainardi F.* A new dissipation model based on memory mechanism // Pure and Appl. Geophysics. V. 91. № 1. P. 134–147.
29. *Rossikhin Y.A.* Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 2010. V. 63. № 1.
30. *Новоженова О.Г.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М., 2018.
31. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston, 2003.
32. *Plekhanova M.V.* Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative // Discr. and Contin. Dynamical systems. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 833–847.

Челябинский государственный университет,
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), г. Челябинск,
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Университет Нови-Сада, г. Нови-Сад, Сербия

Поступила в редакцию 19.06.2020 г.
После доработки 07.07.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 114–124

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ РИМАНА С ОТРАЖЕНИЕМ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

© 2021 г. А. А. Карелин, А. А. Тарасенко

Доказывается теорема об эквивалентности скалярной краевой задачи Римана со сдвигом-отражением на вещественной оси и матричной краевой задачи Римана без сдвига. Устанавливается связь между рассматриваемой краевой задачей и краевой задачей с сохраняющим ориентацию сдвигом-поворотом на единичной окружности. Основным средством изучения служат операторные тождества, построенные авторами в предыдущих работах и позволяющие удалить сдвиг-отражение в интегральном уравнении, соответствующем краевой задаче.

DOI: 10.31857/S0374064121010106

Введение. Краевым задачам Римана и связанным с ними сингулярным интегральным уравнениям посвящено большое число работ. Особое место в этой тематике занимают исследования краевых задач и интегральных уравнений со сдвигами. Интерес к этой проблематике не ослабевает и в настоящее время.

В работе [1] нами построены операторные тождества, преобразующие сингулярные интегральные операторы с инволюциями, порождёнными дробно-линейными карлемановскими сдвигами, к эквивалентным матричным характеристическим операторам без сдвигов. Преобразование осуществляется с помощью обратимых операторов. Простота рассматриваемых сдвигов позволила избежать появления дополнительных и компактных операторов, которые не оказывают влияния на построение теории Фредгольма, но существенно сказываются на размерности, структуре ядра операторов и методах нахождения решений уравнений. Для сингулярного интегрального оператора B с инволюцией, изменяющей ориентацию, операторное тождество имеет вид $\mathcal{H}B\mathcal{E}=D_{\mathbb{R}_+}$. Здесь $\mathcal{H}$ и $\mathcal{E}$ – обратимые операторы, а $D_{\mathbb{R}_+}$ – матричный характеристический сингулярный интегральный оператор без сдвига.

Применение операторных тождеств открывает возможность известные результаты для матричных характеристических сингулярных интегральных операторов использовать для исследования скалярных сингулярных интегральных операторов со сдвигом, и наоборот.

На этом пути были найдены приложения, в которых основным методом исследования служили именно операторные тождества.

В работе [2] на основе известных результатов о факторизации [3] получены условия обратимости в весовых пространствах Лебега для сингулярных интегральных операторов с дробно-линейной инволюцией и кусочно-постоянными коэффициентами с тремя согласованными точками разрыва. Для однородных уравнений с такими операторами получены формулы подсчёта числа линейно-независимых решений [4, теорема 4].

Достоинства предлагаемого метода проявляются при рассмотрении различных приложений. В соответствии с этим подходом в работе [5, теорема 1] изучалась краевая задача Римана со сдвигом во внутрь области и кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими два значения, с точкой разрыва в начале координат. Найдены условия существования и единственности решения неоднородной задачи, а также формулы подсчёта числа линейно независимых решений однородной задачи.

Операторные тождества также можно использовать при изучении матричных сингулярных интегральных операторов без сдвигов. В статье [6, теорема 3.1] рассматривались матричные характеристические операторы с коэффициентами, представляющими собой кусочно-постоянные матрицы с разрывами на множестве точек $\{-1,0,1\}$, принимающие согласованные значения. Для таких операторов установлены условия их обратимости в весовых пространствах Лебега на вещественной оси.

В настоящей работе мы продолжаем применять операторные тождества для исследования краевых задач Римана и сингулярных интегральных уравнений и предлагаем новые приложения. В п. 2 приводятся сведения об операторных тождествах для нашего случая сдвига-отражения и некоторые формулы, которые будут использованы в следующих пунктах работы. В п. 3 формулируется краевая задача Римана с отражением на вещественной оси, которой и посвящена данная работа.

В п. 4 доказывается, что скалярная краевая задача со сдвигом-отражением о нахождении аналитических функций $\Phi^+(z)$ в верхней и $\Phi^-(z)$ в нижней полуплоскостях по условию на границе $\mathbb{R}\equiv(-\infty,+\infty)$:

$$[\chi_{\mathbb{R}_+}-\chi_{\mathbb{R}_-}a(x)]\Phi^+(x)+[\chi_{\mathbb{R}_+}a(x)-\chi_{\mathbb{R}_-}]\Phi^-(x)-[\chi_{\mathbb{R}_+}b(x)]\Phi^+(-x)+[\chi_{\mathbb{R}_-}b(x)]\Phi^-(-x)=0,$$

где $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ – положительная и отрицательная полуоси, $\chi_{\mathbb{R}_\pm}(x)$ – характеристическая функция контура $\mathbb{R}_\pm$, заданная на $\mathbb{R}$, эквивалентна матричной краевой задаче без сдвига о нахождении аналитической функции $\Psi(z)$ в плоскости с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси по условию

$$\Psi^+(x)=\mathbb{G}(x)\Psi^-(x),$$

где $\Psi^+(x)$ и $\Psi^-(x)$ – предельные значения искомой функции соответственно сверху и снизу относительно положительной полуоси. Доказывается следствие о приведении рассматриваемой краевой задачи с изменяющим ориентацию сдвигом к краевой задаче с сохраняющим ориентацию сдвигом.

1. Об операторных равенствах и продолжении операторов с полуоси на всю вещественную ось. Пусть Γ и γ – два контура и $\gamma\subset\Gamma$. Расширение функции $f(t)$, $t\in\gamma$, на $\Gamma\setminus\gamma$ нулём будем обозначать через $(J_{\Gamma\setminus\gamma}f)(t)$, $t\in\Gamma$, а сужение функции $\varphi(t)$, $t\in\Gamma$, на γ – через $(C_\gamma\varphi)(t)$, $t\in\gamma$. Символом $[H_1,H_2]$ обозначаем множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства H_1 в банахово пространство H_2; $[H_1]\equiv$ $\equiv[H_1,H_1]$.

Пространства с весом определяются стандартным образом:

$$L_2^2(\mathbb{R}_+,\rho(t))=\{f:\rho f\in L_2^2(\mathbb{R}_+)\}.$$

Введём операторы вдоль контура $\mathbb{R}$: $I_\mathbb{R}$ – тождественный оператор, $W_\mathbb{R}$ – оператор отражения, $S_\mathbb{R}$ и $S_{\mathbb{R}_+}$ – операторы сингулярного интегрирования вдоль контуров $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно:

$$(I_\mathbb{R}\varphi)(t)=\varphi(t),\quad (W_\mathbb{R}\varphi)(t)=\varphi(-t),\quad (S_\mathbb{R}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau,\quad (S_{\mathbb{R}_+}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$I_\mathbb{R},S_\mathbb{R},W_\mathbb{R}\in[L_2(\mathbb{R})];\quad C_{\mathbb{R}_+}\in[L_2(\mathbb{R}),L_2(\mathbb{R}_+)];\quad J_{\mathbb{R}_-}\in[L_2(\mathbb{R}_+),L_2(\mathbb{R})].$$

Отметим, что $S_\mathbb{R}W_\mathbb{R}=-W_\mathbb{R}S_\mathbb{R}$.

Введём также операторы

$$M_\mathbb{R}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{cases}\varphi_1(t), & t\in\mathbb{R}_+\\ \varphi_2(-t), & t\in\mathbb{R}_-\end{cases}=J_{\mathbb{R}_-}\varphi_1+W_\mathbb{R}J_{\mathbb{R}_-}\varphi_2,\quad M_\mathbb{R}^{-1}\varphi=\begin{bmatrix}\varphi(t), & t\in\mathbb{R}_+\\ \varphi(-t), & t\in\mathbb{R}_+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{\mathbb{R}_+}\varphi\\ C_{\mathbb{R}_+}W_\mathbb{R}\varphi\end{bmatrix},$$

$$Z^{\pm1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad (N_\mathbb{R}\zeta)(t)=\zeta(t^2),\quad (N_\mathbb{R}^{-1}\zeta)(t)=\zeta(t^{1/2}),$$

$$M_\mathbb{R}^{-1}\in[L_2(\mathbb{R}),L_2^2(\mathbb{R}_+)],\quad M_\mathbb{R}\in[L_2^2(\mathbb{R}_+),L_2(\mathbb{R})],$$

$$N_\mathbb{R}\in[L_2^2(\mathbb{R}_+,\rho),L_2^2(\mathbb{R}_+)],\quad N_\mathbb{R}^{-1}\in[L_2^2(\mathbb{R}_+),L_2^2(\mathbb{R}_+,\rho)],\quad \rho(t)=t^{-1/4}.$$

Оператор $\mathcal{H}\in[L_2(\mathbb{R}),L_2^2(\mathbb{R}_+,\rho)]$ определим как композицию операторов $N^{-1}ZM_\mathbb{R}^{-1}$.

Введём также обратимый оператор $P = \begin{pmatrix} S_{\mathbb{R}_+} + U_{1,\mathbb{R}_+} & 0 \\ 0 & I_{\mathbb{R}_+} \end{pmatrix}$, $P \in [L_2^2(\mathbb{R}_+)]$.

В работе [1, теорема 3.11] построены операторные равенства, преобразующие сингулярные интегральные операторы $aI_{\mathbb{R}} + bQ_{\mathbb{R}} + cS_{\mathbb{R}} + dQ_{\mathbb{R}}S_{\mathbb{R}} \in L_2(\mathbb{R})$ с ограниченными измеримыми коэффициентами a, b, c, d и инволюцией $Q_{\mathbb{R}}$, определяемой правилом

$$(Q_{\mathbb{R}}\varphi)(x) = \frac{\sqrt{\delta^2+\rho}}{x-\delta}\varphi[\alpha(x)], \quad \alpha(x) = \frac{\delta x + \rho}{x - \delta},$$

где δ, ρ – действительные числа, $\delta^2 + \rho > 0$, в матричные характеристические сингулярные интегральные операторы $uI_{\mathbb{R}_+} + vS_{\mathbb{R}_+} \in [L_2^2(\mathbb{R}_+, t^{-1/4})]$ с ограниченными измеримыми коэффициентами u и v.

Сформулируем эту теорему об операторных равенствах для нашего случая сдвига-отражения.

Теорема 1. *Сингулярный интегральный оператор*

$$B_w = aI_{\mathbb{R}} + bW_{\mathbb{R}} + cS_{\mathbb{R}} + dW_{\mathbb{R}}S_{\mathbb{R}}, \quad B_w \in [L_2(\mathbb{R})],$$

с отражением $(W_{\mathbb{R}}\varphi)(t) = \varphi(-t)$ *и ограниченными измеримыми коэффициентами* a, b, c, d *при умножении на него обратимых операторов*

$$\mathcal{H} = N_{\mathbb{R}}^{-1}Z^{-1}M_{\mathbb{R}}^{-1} \in [L_2^2(\mathbb{R}_+), L_2^2(\mathbb{R}_+, t^{-1/4})] \quad \text{и} \quad \mathcal{E} = M_{\mathbb{R}}ZPN_{\mathbb{R}} \in [L_2^2(\mathbb{R}_+, t^{-1/4}), L_2^2(\mathbb{R}_+)],$$

на $\mathcal{H}$ *слева и на* $\mathcal{E}$ *справа, преобразуется в матричный характеристический сингулярный интегральный оператор* $D_{\mathbb{R}_+}$:

$$D_{\mathbb{R}_+} = \mathcal{H}B_w\mathcal{E}, \quad D_{\mathbb{R}_+} = uI_{\mathbb{R}_+} + vS_{\mathbb{R}_+}, \quad D_{\mathbb{R}_+} \in [L_2^2(\mathbb{R}_+, t^{-1/4})]. \tag{1}$$

Коэффициенты оператора B_w *и коэффициенты оператора* $D_{\mathbb{R}_+}$ *связаны равенствами*

$$u(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (c(\sqrt{t}) - d(\sqrt{t})) - (c(-\sqrt{t}) - d(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) - b(\sqrt{t})) - (a(-\sqrt{t}) - b(-\sqrt{t})) \\ (c(\sqrt{t}) - d(\sqrt{t})) + (c(-\sqrt{t}) - d(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) - b(\sqrt{t})) + (a(-\sqrt{t}) - b(-\sqrt{t})) \end{bmatrix},$$

$$v(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (a(\sqrt{t}) + b(\sqrt{t})) + (a(-\sqrt{t}) + b(-\sqrt{t})) & (c(\sqrt{t}) + d(\sqrt{t})) + (c(-\sqrt{t}) + d(-\sqrt{t})) \\ (a(\sqrt{t}) + b(\sqrt{t})) - (a(-\sqrt{t}) + b(-\sqrt{t})) & (c(\sqrt{t}) + d(\sqrt{t})) - (c(-\sqrt{t}) + d(-\sqrt{t})) \end{bmatrix}.$$

Оператор B_w предста́вим в удобном для нас виде

$$B_w = a_0I_{\mathbb{R}} + b_0S_{\mathbb{R}} + (a_1I_{\mathbb{R}} + b_1S_{\mathbb{R}})W_{\mathbb{R}}, \quad B_w \in L_2(\mathbb{R}),$$

и приведём некоторые соотношения из работ [1, 6], с использованием которых и была доказана теорема об операторных тождествах. Теперь они будут использованы для изучения краевых задач в следующем пункте работы.

Оператор сдвига $W_{\mathbb{R}}$, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, переходит в оператор умножения на матрицу $\mathbb{V}$ в пространстве $L_2^2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}W_{\mathbb{R}}\mathcal{H}^{-1} = \mathbb{V}, \quad \mathbb{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Отметим также, куда переходит оператор умножения на функцию:

$$\mathcal{H}a(t)I\mathcal{H}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t})) \\ (a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

В справедливости равенств (2), (3) несложно убедиться прямыми вычислениями.

Функциональный оператор со сдвигом переходит в оператор умножения на матрицу-функцию:

$$\mathcal{H}[a(t)I + b(t)W_{\mathbb{R}}]\mathcal{H}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(a(\sqrt{t}) + b(\sqrt{t})) + (b(-\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) - b(\sqrt{t})) + (b(-\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t}))\\ (a(\sqrt{t}) + b(\sqrt{t})) - (b(-\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) - b(\sqrt{t})) - (b(-\sqrt{t}) - (-\sqrt{t}))\end{bmatrix}.$$

Перемножая операторы в произведении $Z^{-1}M_{\mathbb{R}}^{-1}B_wM_{\mathbb{R}}Z,$ приходим к оператору

$$B_2 := Z^{-1}M_{\mathbb{R}}^{-1}B_wM_{\mathbb{R}}Z = u_2I_{\mathbb{R}_+} + v_2\sum_{k=0}^{1}(-1)^kV^{-k}U_{k,\mathbb{R}_+}, \tag{4}$$

где

$$U_{0,\mathbb{R}_+} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{f(\tau)}{\tau - x}\,d\tau, \quad U_{1,\mathbb{R}_+} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\frac{f(\tau)}{\tau + x}\,d\tau, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

и матричные коэффициенты $u_2,$ $v_2,$ определённые на $\mathbb{R}_+,$ задаются равенствами

$$u_2(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(a_0 + a_1)(x) + (a_0 + a_1)(-x) & (a_0 - a_1)(x) - (a_0 - a_1)(-x)\\ (a_0 + a_1)(x) - (a_0 + a_1)(-x) & (a_0 - a_1)(x) + (a_0 - a_1)(-x)\end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$v_2(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(b_0 + b_1)(x) - (b_0 + b_1)(-x) & (b_0 - b_1)(x) + (b_0 - b_1)(-x)\\ (b_0 + b_1)(x) + (b_0 + b_1)(-x) & (b_0 - b_1)(x) - (b_0 - b_1)(-x)\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Умножив оператор (4) справа на оператор $P,$ получим

$$B_2P = u_3I_{\mathbb{R}_+} + v_3(S_{\mathbb{R}_+} + U_{1,\mathbb{R}_+}) =: B_3, \tag{7}$$

где

$$u_3 = u_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad v_3 = u_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Умножая оператор (7) слева на $N_{\mathbb{R}}^{-1}$ и справа на $N_{\mathbb{R}}$ и учитывая, что

$$N_{\mathbb{R}}^{-1}(S_{\mathbb{R}_+} + U_{1,\mathbb{R}_+})N_{\mathbb{R}} = S_{\mathbb{R}_+},$$

придём к матричному характеристическому оператору

$$N_{\mathbb{R}}^{-1}B_3N_{\mathbb{R}} = uI_{\mathbb{R}_+} + vS_{\mathbb{R}_+} =: D_{\mathbb{R}_+}, \quad D_{\mathbb{R}_+} \in [L_2^2(\mathbb{R}_+, t^{-1/4})],$$

с ограниченными измеримыми матричными коэффициентами

$$u = N_{\mathbb{R}}^{-1}u_3, \quad v = N_{\mathbb{R}}^{-1}v_3. \tag{9}$$

Покажем, как продолжаются сингулярные интегральные уравнения с полуоси на всю вещественную ось. Рассмотрим в пространстве $L_2^2(\mathbb{R}_+, \rho)$ уравнение

$$(B_{\mathbb{R}_+}\varphi)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad B_{\mathbb{R}_+} = \frac{1}{2}[1 + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)]I_{\mathbb{R}_+} + \frac{1}{2}[1 - \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)]S_{\mathbb{R}_+}, \tag{10}$$

где $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)$ – ограниченная измеримая невырожденная матрица-функция, заданная на $\mathbb{R}_+.$

С операторами $P_{\mathbb{R}_+}^+ = 1/2(I_{\mathbb{R}_+} + S_{\mathbb{R}_+}),$ $P_{\mathbb{R}_+}^- = 1/2(I_{\mathbb{R}_+} - S_{\mathbb{R}_+})$ уравнение (10) записывается в виде

$$(P_{\mathbb{R}_+}^+\varphi)(t) + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)(P_{\mathbb{R}_+}^-\varphi)(t) = 0.$$

Заметим, что операторы $P_{\mathbb{R}_+}^{\pm}$ не являются проекторами.

Продолжим уравнение ограниченной измеримой невырожденной матрицей-функцией второго порядка $K(t)$, заданной на $\mathbb{R}_-$, на всё пространство $L_2^2(\mathbb{R},\rho)$:

$$\tilde{B}_{\mathbb{R}} = [J_{\mathbb{R}_+}K] + J_{\mathbb{R}_-}\left[\frac{1+\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}I_{\mathbb{R}_+} + \frac{1-\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}S_{\mathbb{R}_+}\right]C_{\mathbb{R}_+} =$$

$$= [J_{\mathbb{R}_+}K] + J_{\mathbb{R}_-}[P^+_{\mathbb{R}_+} + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)P^-_{\mathbb{R}_+}]C_{\mathbb{R}_+}. \tag{11}$$

Рассмотрим также в пространстве $L_2^2(\mathbb{R},\rho)$ уравнение $(B_Rf)(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$,

$$B_{\mathbb{R}} = \left[J_{\mathbb{R}_+}K + J_{\mathbb{R}_-}\frac{1+\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\right]I_{\mathbb{R}} + \left[J_{\mathbb{R}_-}\frac{1-\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\right]S_{\mathbb{R}} =$$

$$= [J_{\mathbb{R}_+}K + J_{\mathbb{R}_-}]P^+_{\mathbb{R}} + [J_{\mathbb{R}_+}K + J_{\mathbb{R}_-}\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)]P^-_{\mathbb{R}}. \tag{12}$$

Отметим, что в операторе сингулярного интегрирования в (11) интегрирование ведётся по вещественной полуоси: $(S_{\mathbb{R}_+}f)(t) = (S_{\mathbb{R}}J_-C_{\mathbb{R}_+}f)(t)$, но результатом является функция из $L_2^2(\mathbb{R},\rho)$, а в (12) – по всей вещественной оси. Решения уравнений (11) и (12) равны нулю на контуре $\mathbb{R}_-$, так как для них $J_+Kf(t)=0$. Справедливы следующие соотношения между ядрами:

$$J_-B_{\mathbb{R}_+} = \ker\tilde{B}_{\mathbb{R}} = \ker B_{\mathbb{R}}, \quad \ker B_{\mathbb{R}_+} = C_{\mathbb{R}_+}\ker\tilde{B}_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}_+}\ker B_{\mathbb{R}}.$$

Отличие (12) от (11) и от (10) состоит в том, что в (12) интегрирование в операторе сингулярного интегрирования ведётся вдоль всей действительной оси и здесь операторы $P^+_{\mathbb{R}} = (I_{\mathbb{R}}+S_{\mathbb{R}})/2$, $P^-_{\mathbb{R}} = (I_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}})/2$ уже являются проекторами.

2. Постановка краевой задачи Римана с отражением на вещественной оси. Определим, какая часть оператора B_w с помощью операторного тождества преобразуется в оператор $P^+_{\mathbb{R}_+}$, а какая его часть – в оператор $P^-_{\mathbb{R}_+}$, т.е. мы ищем операторы $\Pi^+_{\mathbb{R}}$ и $\Pi^-_{\mathbb{R}}$ такие, что

$$\mathcal{H}\Pi^+_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = P^+_{\mathbb{R}_+}, \quad \mathcal{H}\Pi^-_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = P^-_{\mathbb{R}_+}.$$

Из представления (1) следует, что равенство $u=v=2^{-1}I_{\mathbb{R}_+}$ порождает оператор $P^+_{\mathbb{R}_+}$, а равенство $u=-v=2^{-1}I_{\mathbb{R}_+}$ – оператор $P^-_{\mathbb{R}_+}$. Для оператора $P^-_{\mathbb{R}_+}$ вследствие равенств (9) получаем

$$u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad v_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Затем в силу равенств (8) находим, что

$$u_3 = u_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad v_3 = u_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Используем равенства (5) и (6) для нахождения коэффициентов a_0, b_0, a_1, b_1 оператора $\Pi^-_{\mathbb{R}}$:

$$(a_0+a_1)(x) + (a_0+a_1)(-x) = -1, \quad (a_0-a_1)(x) - (a_0-a_1)(-x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}_+,$$
$$(a_0+a_1)(x) - (a_0+a_1)(-x) = 0, \quad (a_0-a_1)(x) + (a_0-a_1)(-x) = 1, \quad x\in\mathbb{R}_+,$$

$$(b_0+b_1)(x) - (b_0+b_1)(-x) = 1, \quad (b_0-b_1)(x) + (b_0-b_1)(-x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}_+,$$
$$(b_0+b_1)(x) + (b_0+b_1)(-x) = 0, \quad (b_0-b_1)(x) - (b_0-b_1)(-x) = -1, \quad x\in\mathbb{R}_+.$$

Вычитая и складывая соответствующие уравнения, получаем тождества

$$2(a_0+a_1)(x)=-1,\quad 2(a_0+a_1)(-x)=-1,\quad 2(a_0-a_1)(x)=1,\quad 2(a_0-a_1)(-x)=1,\quad x\in\mathbb{R}_+,$$

$$2(b_0+b_1)(x)=1,\quad -2(b_0+b_1)(-x)=1,\quad 2(b_0-b_1)(x)=-1,\quad 2(b_0-b_1)(-x)=-1,\quad x\in\mathbb{R}_+,$$

из которых вытекает, что

$$4a_0(x)=0,\quad 4a_1(x)=-\frac{1}{2},\quad 4a_0(-x)=0,\quad 4a_1(-x)=-\frac{1}{2},\quad x\in\mathbb{R}_+,$$

$$4b_0(x)=2,\quad 4b_1(x)=0,\quad -4b_1(-x)=0,\quad -4b_0(-x)=2,\quad x\in\mathbb{R}_+.$$

Таким образом, мы построили коэффициенты оператора $\Pi^-_{\mathbb{R}}$, именно:

$$a_0(x)=0,\quad a_1(x)=-\frac{1}{2},\quad b_0(x)=0,\quad b_1(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Итак,

$$\Pi^-_{\mathbb{R}}=\Big[-\frac{1}{2}I_{\mathbb{R}}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)S_{\mathbb{R}}\Big]W_{\mathbb{R}},\quad \mathcal{H}\Pi^-_{\mathbb{R}}\mathcal{E}=P^-_{\mathbb{R}_+}. \tag{13}$$

Рассуждая аналогично, получаем для оператора $P^+_{\mathbb{R}_+}$ матрицы

$$u_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad v_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

и находим, что для коэффициентов оператора $\Pi^+_{\mathbb{R}}$ справедливы тождества

$$a_0(x)=\frac{1}{2},\quad a_1(x)=0,\quad b_1(x)=0,\quad b_0(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Итак,

$$\Pi^+_{\mathbb{R}}=\frac{1}{2}I_{\mathbb{R}}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)S_{\mathbb{R}},\quad \mathcal{H}\Pi^+_{\mathbb{R}}\mathcal{E}=P^+_{\mathbb{R}_+}. \tag{14}$$

Теперь сформулируем скалярную краевую задачу Римана: найти аналитические функции $\Phi^+(z)$ в верхней D_+ и $\Phi^-(z)$ в нижней D_- полуплоскостях, удовлетворяющие условию на границе

$$[\chi_{\mathbb{R}_+}-\chi_{\mathbb{R}_-}a(x)]\Phi^+(x)+[\chi_{\mathbb{R}_+}a(x)-\chi_{\mathbb{R}_-}]\Phi^-(x)-[\chi_{\mathbb{R}_+}b(x)]\Phi^+(-x)+[\chi_{\mathbb{R}_-}b(x)]\Phi^-(-x)=0. \tag{15}$$

Известные коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ принадлежат классу ограниченных измеримых функций, а краевые значения $\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$ ищем из пространства $L_2(\mathbb{R})$, при этом $\Phi^-(\infty)=0$.

Приведём и другие формы записи краевого условия (15):

$$(1-a(x))\frac{\Phi^+(x)-\Phi^-(x)}{2}+\operatorname{sgn}(x)(1+a(x))\frac{\Phi^+(x)+\Phi^-(x)}{2}-$$

$$-b(x)\frac{\Phi^+(-x)-\Phi^-(-x)}{2}-\operatorname{sgn}(x)b(x)\frac{\Phi^+(-x)+\Phi^-(-x)}{2}=0.$$

Сформулированная краевая задача относится к четырёхэлементным краевым задачам со сдвигом Карлемана [7, гл. 16.1]. Для некоторых частных случаев этих задач известны методы нахождения их решений.

В следующем пункте работы при переходе от краевой задачи (15) к сингулярному интегральному уравнению станет понятно, зачем понадобилось получать соотношения (13), (14) и почему краевое условие выбрано нами в таком виде.

3. Об эквивалентности краевой задачи с отражением на вещественной оси и матричной краевой задачи без сдвига на вещественной положительной полуоси. Рассмотрим матричную задачу Римана: найти аналитическую вектор-функцию $\Psi(z)$ на плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси по краевому условию

$$\Psi^+(t) = \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)\Psi^-(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

где $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ – предельные значения искомой вектор-функции соответственно сверху и снизу относительно положительной полуоси, коэффициент $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t) = \begin{bmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{bmatrix}$ – известная не сингулярная матрица-функция с элементами $g_{ij}(t)$ из множества ограниченных измеримых функций, краевые значения $\Psi^+(t)$ и $\Psi^-(t)$ ищем из пространства $L_2^2(\mathbb{R}_+)$ при условии $\Psi^-(\infty) = 0$.

Скалярная задача Римана в классической постановке для гёльдеровского коэффициента и замкнутого контура решена в [8, § 14], затем задача обобщалась на различные классы коэффициентов и контуров. Однако эффективные методы решения матричных задач не найдены.

Теорема 2. *Краевые задачи (15) и (16) эквивалентны. Связь между коэффициентами краевых задач осуществляется по формулам*

$$\begin{gathered} a(t) = \frac{1}{2} J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) + g_{12}(t^2) + g_{21}(t^2) + g_{22}(t^2)] + \\ + \frac{1}{2} W_{\mathbb{R}} J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) - g_{12}(t^2) - (tg_{21}(t^2) - g_{22}(t^2))], \\ b(t) = \frac{1}{2} J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) - g_{12}(t^2) + g_{21}(t^2) - g_{22}(t^2)] + \\ + \frac{1}{2} W_{\mathbb{R}} J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) + g_{12}(t^2) - (g_{21}(t^2) + g_{22}(t^2))] \end{gathered} \tag{17}$$

и

$$\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) + (b(\sqrt{t}) + b(-\sqrt{t})) & -(a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t})) + (b(\sqrt{t}) - b(-\sqrt{t})) \\ (a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t})) + (b(\sqrt{t}) - b(-\sqrt{t})) & -(a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) + (b(\sqrt{t}) + b(-\sqrt{t})) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство. От краевой задачи (15) по формулам Сохоцкого [9, с. 55]

$$(I_{\mathbb{R}}\varphi)(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x), \quad (S_{\mathbb{R}}\varphi)(x) = \Phi^+(x) + \Phi^-(x) \tag{19}$$

перейдём к эквивалентному ей скалярному сингулярному интегральному уравнению со сдвигом $(B_w\varphi)(t) = 0$,

$$\begin{gathered} (B_w\varphi)(t) = \left[\frac{1}{2}(I_{\mathbb{R}}\varphi)(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)(S_{\mathbb{R}}\varphi)(x)\right] + \\ + [a(x)I_{\mathbb{R}} + b(x)W_{\mathbb{R}}]\left[-\frac{1}{2}(I_{\mathbb{R}}\varphi)(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)(S_{\mathbb{R}}\varphi)(x)\right], \end{gathered} \tag{20}$$

решения которого ищутся в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Используя соотношения

$$-\frac{1}{2} I_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) S_{\mathbb{R}} = \Pi_{\mathbb{R}}^- W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}} \Pi_{\mathbb{R}}^-,$$

запишем уравнение (20) в другой форме, через оператор $\Pi_{\mathbb{R}}^+$, $\Pi_{\mathbb{R}}^-$:

$$(B_w\varphi)(t) = (\Pi_{\mathbb{R}}^+\varphi)(t) + [a(t)W_{\mathbb{R}} + b(t)I_{\mathbb{R}}](\Pi_{\mathbb{R}}^-\varphi)(t). \tag{21}$$

От матричной краевой задачи (16) по формулам Сохоцкого (19)

$$\Psi^+(t) = (P^+_{\mathbb{R}_+}\psi)(t), \quad \Psi^-(t) = -(P^-_{\mathbb{R}_+}\psi)(t),$$

где $P^+_{\mathbb{R}_+} = (I_{\mathbb{R}_+} + S_{\mathbb{R}_+})/2$, $P^-_{\mathbb{R}_+} = (I_{\mathbb{R}_+} - S_{\mathbb{R}_+})/2$, перейдём к равносильному ей векторному сингулярному интегральному уравнению

$$(B_{\mathbb{R}_+}\psi)(t) = 0, \quad (B_{\mathbb{R}_+}\psi)(t) = (P^+_{\mathbb{R}_+}\psi)(t) + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t)(P^-_{\mathbb{R}_+}\psi)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{22}$$

решения которого ищутся в пространстве $L^2_2(\mathbb{R}_+)$.

Теперь покажем эквивалентность интегральных уравнений (21) и (22).

Применив операторное тождество к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом (21), получим

$$(\mathcal{H}B_w\mathcal{E}\psi)(t) = 0, \quad \mathcal{H}\Pi^+_{\mathbb{R}}\mathcal{E}\psi(t) + \mathcal{H}[a(x)W_{\mathbb{R}} + b(x)I_{\mathbb{R}}]\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}\Pi^-_{\mathbb{R}}\mathcal{E}\psi(t) = 0,$$

где $\psi(t) = (\mathcal{E}^{-1}\varphi)(t)$.

Учитывая равенство $SW_{\mathbb{R}} = -W_{\mathbb{R}}S$ и соотношения (2), (3), (13), (14), приходим к матричному уравнению

$$P^+_{\mathbb{R}_+}\psi + \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t}))\\ (a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t})) & (a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t}))\end{bmatrix}\mathbb{V} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(b(\sqrt{t}) + b(-\sqrt{t})) & (b(\sqrt{t}) - b(-\sqrt{t}))\\ (b(\sqrt{t}) - b(-\sqrt{t})) & (b(\sqrt{t}) + b(-\sqrt{t}))\end{bmatrix}\right)P^-_{\mathbb{R}_+}\psi = 0,$$

которое и соответствует векторному сингулярному интегральному уравнению без сдвига (22) с коэффициентами, подсчитываемыми по формуле (18).

Чтобы установить связь между коэффициентами, выражаемую формулами (17), запишем результат применения операторного тождества к матричному коэффициенту $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t) = \begin{bmatrix}g_{11}(t) & g_{12}(t)\\ g_{21}(t) & g_{22}(t)\end{bmatrix}$. Для этого, чтобы упростить в дальнейшем запись, введём обозначения

$$g_1(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t), \quad g_2(t) = g_{21}(t) + g_{22}(t), \quad g_3(t) = g_{11}(t) - g_{12}(t), \quad g_4(t) = -g_{21}(t) + g_{22}(t).$$

Тогда будем иметь

$$\mathcal{H}^{-1}\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}\mathcal{H}\phi = M_{\mathbb{R}}ZN\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}N^{-1}Z^{-1}M^{-1}_{\mathbb{R}}\phi = M_{\mathbb{R}}Z\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(t^2)Z^{-1}M^{-1}_{\mathbb{R}}\phi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}M_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11}(t^2) & g_{12}(t^2)\\ g_{21}(t^2) & g_{22}(t^2)\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}M^{-1}_{\mathbb{R}}\phi =$$

$$= \frac{1}{2}M_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}g_1(t^2) + g_2(t^2) & g_3(t^2) - g_4(t^2)\\ g_1(t^2) - g_2(t^2) & g_3(t^2) + g_4(t^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{\mathbb{R}_+}\phi\\ C_{\mathbb{R}_+}W_{\mathbb{R}}\phi\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}M_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}(g_1(t^2) + g_2(t^2))C_{\mathbb{R}_+}\phi + (g_3(t^2) - g_4(t^2))C_{\mathbb{R}_+}W_{\mathbb{R}}\phi\\ (g_1(t^2) - g_2(t^2))C_{\mathbb{R}_+}\phi + (g_3(t^2) + g_4(t^2))C_{\mathbb{R}_+}W_{\mathbb{R}}\phi\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}J_{\mathbb{R}_-}[(g_1(t^2) + g_2(t^2))C_{\mathbb{R}_+}\phi + (g_3(t^2) - g_4(t^2))C_{\mathbb{R}_+}W_{\mathbb{R}}\phi] +$$

$$+ \frac{1}{2}WJ_{\mathbb{R}_-}[(g_1(t^2) - g_2(t^2))C_{\mathbb{R}_+}\phi + (g_3(t^2) + g_4(t^2))C_{\mathbb{R}_+}W\phi].$$

Итак, нами получено равенство $\mathcal{H}^{-1}\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}\mathcal{H}\phi = a(t)(I\phi)(t) + b(t)(W_{\mathbb{R}}\phi)(t)$, где

$$a(t) = \frac{1}{2}J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) + g_{12}(t^2) + g_{21}(t^2) + g_{22}(t^2)] + \frac{1}{2}W_{\mathbb{R}}J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) - g_{12}(t^2) - (g_{21}(t^2) - g_{22}(t^2))],$$

$$b(t) = \frac{1}{2}J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) - g_{12}(t^2) + g_{21}(t^2) - g_{22}(t^2)] + \frac{1}{2}W_{\mathbb{R}}J_{\mathbb{R}_-}[g_{11}(t^2) + g_{12}(t^2) - (g_{21}(t^2) + g_{22}(t^2))].$$

Обозначим: T – единичная окружность с центром в начале координат, D_+ – ограничиваемый ею открытый круг, а D_- – дополнение к его замыканию, $D_- = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_+$. Сформулируем скалярную краевую задачу Римана со сдвигом, сохраняющим ориентацию на окружности T: найти аналитические функции $\Theta^+(z)$ в области D_+ и $\Theta^-(z)$ в области D_- по условию на границе:

$$\Theta^-(t) = a_T(t)\Theta^+(t) + b_T(t)\Theta^+(\alpha(t)), \quad \alpha(t) = -t, \quad t \in T. \tag{23}$$

Известные коэффициенты $a_T(t)$, $b_T(t)$ принадлежат классу ограниченных измеримых функций, краевые значения $\Theta^+(t)$, $\Theta^-(t)$ ищем из пространства $L_2(T, h(t))$, причём $\Theta^-(\infty) = 0$, а весовую функцию берём равной $h(t) = (1-t)^{-1/4}(1+t)^{1/4}$.

Следствие. *Краевая задача (15) эквивалентна краевой задаче (23) с коэффициентами, подсчитываемыми по формулам (17) и (26), (27), (29) (см. ниже).*

Доказательство. По теореме 2 от скалярной задачи (15) с краевым условием

$$[\chi_{\mathbb{R}_+} - \chi_{\mathbb{R}_-} a(x)]\Phi^+(x) + [\chi_{\mathbb{R}_+} a(x) - \chi_{\mathbb{R}_-}]\Phi^-(x) - [\chi_{\mathbb{R}_+} b(x)]\Phi^+(-x) + [\chi_{\mathbb{R}_-} b(x)]\Phi^-(-x) = 0$$

приходим к векторной задаче (16) с краевым условием

$$\Psi^+(x) = \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)\Psi^-(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Формулы (17) дают выражение элементов матрицы $\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)$ через коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ краевой задачи Римана с инволюцией, изменяющей ориентацию.

Затем по формулам (19) записываем её в виде векторного характеристического уравнения (22) в пространстве $L_2^2(\mathbb{R}_+, x^{-1/4})$:

$$(B_{\mathbb{R}_+}\psi)(x) = 0, \quad B_{\mathbb{R}_+} = P^+_{\mathbb{R}_+} + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)P^-_{\mathbb{R}_+}.$$

С помощью единичного оператора продолжаем уравнение на всё пространство $L_2^2(\mathbb{R}, x^{-1/4})$. В формуле (12) функцию $K(x)$ надо взять равной единице $K(x) = 1$. Переходим к уравнению

$$(B_R f)(x) = 0, \quad B_{\mathbb{R}} = u_{\mathbb{R}} I_{\mathbb{R}} + v_{\mathbb{R}} S_{\mathbb{R}},$$

$$u_{\mathbb{R}}(x) = \left[\chi_{\mathbb{R}_-}(x) + J_- \frac{(1 + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x))}{2}\right], \quad v_{\mathbb{R}}(x) = \left[J_- \frac{1 - \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)}{2}\right]. \tag{24}$$

С использованием проекторов это уравнение запишется в виде

$$(B_R f)(x) = (P^+_{\mathbb{R}} f)(x) + [\chi_{\mathbb{R}_-}(x) + J_- \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)](P^-_{\mathbb{R}} f)(x).$$

Обозначим через T_+ и T_- верхнюю и нижнюю части окружности T. Чтобы не возникало разночтений, тождественный оператор и сингулярный интегральный оператор Коши вдоль единичной окружности, рассматриваемые в векторном пространстве $[L_2^2(T, h(t)]$, будем обозначать через $\mathbb{I}_T$ и $\mathbb{S}_T$, а рассматриваемые в скалярном пространстве $[L_2(T, h(t)]$ – через I_T и S_T соответственно.

С помощью взаимнообратных операторов

$$(\Lambda\varphi)(t) = \frac{1}{t-1}\varphi\left(i\frac{t+1}{t-1}\right), \quad (\Lambda^{-1}\varphi)(x) = \frac{2i}{x-i}\xi\left(i\frac{x+i}{x-i}\right), \quad \Lambda \in [L_2^2(\mathbb{R}, \rho(x)), L_2^2(T, h(t))]$$

переведём уравнение (24) с вещественной оси на единичную окружность [10, гл. 9.6; 94]:

$$(A_T\xi)(t) = 0, \quad \xi(t) = (\Lambda f)(t), \quad A_T = \Lambda B_{\mathbb{R}}\Lambda^{-1} = u_T(t)\mathbb{I}_T - v_T(t)\mathbb{S}_T, \quad A_T \in [L_2^2(T, h(t)], \tag{25}$$

где

$$u_T(t) = \Lambda\left[\chi_{\mathbb{R}_-}(x) + J_- \frac{1 + \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)}{2}\right]\Lambda^{-1} u_{\mathbb{R}}(x), \quad v_T(t) = \Lambda\left[J_- \frac{1 - \mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)}{2}\right]\Lambda^{-1} v_{\mathbb{R}}(x). \tag{26}$$

Выше было учтено равенство $\Lambda S_{\mathbb{R}}\Lambda^{-1} = -\mathbb{S}_T$. Отметим, что справедливы равенства

$$\Lambda P^{\pm}{}_{\mathbb{R}}\Lambda^{-1} = \mathbb{P}_T^{\mp},$$

и запишем уравнение (25) через проекторы $\mathbb{P}_T^{\pm} = 2^{-1}\mathbb{I}_T \pm 2^{-1}\mathbb{S}_T$:

$$(A_T\xi)(t) = (\mathbb{P}_T^{-}\xi)(t) + \mathbb{G}_T(\mathbb{P}_T^{+}\xi)(t), \quad \mathbb{G}_T(t)\mathbb{I}_T = \Lambda[\chi_{\mathbb{R}_-}(x) + J_-\mathbb{G}_{T_+}(x)]\Lambda^{-1}. \tag{27}$$

Применяем операторное тождество $\mathcal{F}A_T\mathcal{F}^{-1} = A_w$ из работы [6] к векторному уравнению без сдвига (25), чтобы получить скалярное уравнение с сохраняющим ориентацию карлемановским сдвигом

$$(A_w\xi)(t) = 0, \quad A_w = \mathcal{F}[\mathbb{P}_T^{-} + \mathbb{G}_T\mathbb{P}_T^{+}]\mathcal{F}^{-1}, \quad \xi(t) = (\mathcal{F}f)(t), \quad \mathcal{F} = MZ\Pi N, \tag{28}$$

в пространстве $L_2(T, h(t))$, где составляющие части M, Z, Π, N оператора $\mathcal{F}$ выражаются по формулам

$$M_T\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = J_{T_-}\psi_1 + W_TJ_{T_-}\psi_2, \quad M_T \in [L_2^2(T_+, h), L_2(T, h)], \quad (N_T\zeta)(t) = \zeta(t^2), \quad N_T \in [L_2^2(T_+, h)],$$

$$M_T^{-1}\varphi = \begin{bmatrix} C_{T_+}\varphi \\ C_{T_+}W_T\varphi\end{bmatrix}, \quad M_T^{-1} \in [L_2(T), L_2^2(T_+)], \quad (N_T^{-1}\zeta)(t) = \zeta(t^{1/2}), \quad N_T^{-1} \in [L_2^2(T_+, h)],$$

$$Z^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \quad \Pi^{\pm 1} = \operatorname{diag}[1, t^{\pm 1}].$$

Укажем взаимосвязь проекторов $\mathcal{F}\mathbb{P}_T^{\pm}\mathcal{F}^{-1} = P_T^{\pm}$ и отметим, что оператор умножения на матрицу-функцию $\mathbb{G}_T$ переходит в функциональный оператор со сдвигом

$$\mathcal{F}\mathbb{G}_T\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\Lambda[\chi_{\mathbb{R}_-}(x) + J_{\mathbb{R}_-}\mathbb{G}_{\mathbb{R}_+}(x)]\Lambda^{-1}\mathcal{F}^{-1} = a_TI_T + b_TW_T.$$

Эти соотношения можно получить прямыми вычислениями. Коэффициенты $a_T(t)$, $b_T(t)$ выражаются через компоненты матрицы-функции $\mathbb{G}_T(t) = \begin{bmatrix}q_{11}(t) & q_{12}(t)\\ q_{21}(t) & q_{22}(t)\end{bmatrix}$ при помощи равенств

$$\begin{aligned} a_T(t) &= \frac{1}{2}J_{\mathbb{T}_-}\{q_{11}(t^2) + t^{-1}q_{12}(t^2) + tq_{21}(t^2) + q_{22}(t^2)\} + \\ &+ \frac{1}{2}W_TJ_{\mathbb{T}_-}\{q_{11}(t^2) - t^{-1}q_{12}(t^2) - [tq_{21}(t^2) - q_{22}(t^2)]\},\\ b_T(t) &= \frac{1}{2}J_{\mathbb{T}_-}\{q_{11}(t^2) - t^{-1}q_{12}(t^2) + tq_{21}(t^2) - q_{22}(t^2)\} + \\ &+ \frac{1}{2}W_TJ_{\mathbb{T}_-}\{q_{11}(t^2) + t^{-1}q_{12}(t^2) - [tq_{21}(t^2) + q_{22}(t^2)]\}, \end{aligned} \tag{29}$$

которые можно получить аналогично тому, как это было сделано выше для сдвига, изменяющего ориентацию на вещественной оси.

Итак, от уравнения (28) мы приходим к скалярному сингулярному интегральному уравнению в пространстве $L_2(T, h(t))$ со сдвигом $(W_T\phi)(t) = \phi(-t)$, но уже сохраняющим ориентацию на единичной окружности:

$$(P_T^{-}\xi)(t) + (a_TI_T + b_TW_T)(P_T^{+}\xi)(t) = 0.$$

Связь между коэффициентами осуществляется по формулам (17), (25), (27), (29).

Чтобы завершить доказательство, осталось перейти по формулам Сохоцкого

$$\Theta^{+}(t) = (P_T^{+}\xi)(t), \quad \Theta^{-}(t) = -(P_T^{-}\xi)(t)$$

к краевой задаче Римана со сдвигом (23).

Доказанное следствие устанавливает связь между краевой задачей с изменяющим ориентацию сдвигом и краевой задачей с сохраняющим ориентацию сдвигом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karelin A.A.* On a relation between singular integral operators with a carlemann linear-fractional shift and matrix characteristic operators without shift // Boletin Soc. Mat. Mexicana. 2001. V. 7. № 3. P. 235–246.
2. *Karelin A.A.* Singular integral operators with coefficients of a special structure related to operator equalities // Complex Analysis and Operator Theory. 2008. V. 2. № 4. P. 549–567.
3. *Спитковский И.М., Ташбаев А.М.* Факторизация кусочно-постоянных матриц-функций с 3 точками разыва в классах $L_{p,\rho}$ и некоторые её приложения // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 291–296.
4. *Karelin A.A.* On the operator equality and some of its application // Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 2002. V. 128. P. 105–116.
5. *Karelin A.A.* Applications of operator equalities to singular integral operators and to Riemann boundary value problems // Math. Nachr. 2007. V. 280. № 9–10. P. 1108–1117.
6. *Карелин А.А., Перес-Лечуга Ж., Тарасенко А.А.* Задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с коэффициентами, порождёнными кусочно-постоянными функциями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 9. С. 1182–1192.
7. *Litvinchuk G.S.* Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift. Dordrecht; Boston; London, 2000.
8. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
10. *Gohberg I., Krupnik N.* One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. Operator Theory: Advances and Applications. V. 53. Basel; Boston; Berlin, 1992.

Независимый университет штата Идальго,
г. Пачука-де-Сото, Мексика

Поступила в редакцию 20.06.2020 г.
После доработки 20.06.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 125–129

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.3

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

 А. Т. Асанова

Для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка в прямоугольной области рассматривается начально-краевая задача. С помощью введения новой неизвестной функции исследуемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка с параметрами и интегральных соотношений. Предложен итерационный алгоритм нахождения приближённого решения эквивалентной задачи и доказана его сходимость. Установлены достаточные условия существования единственного классического решения исследуемой задачи, формулируемые в терминах её исходных данных.

DOI: 10.31857/S0374064121010118

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $\Omega=[0,T]\times[0,\omega]$ для линейной неоднородной системы n дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+D(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+E(t,x)u+f(t,x) \tag{1.1}$$

рассматривается начально-краевая задача

$$\sum_{j=0}^{m+1}\biggl\{P_{0,j}(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial x^2}+P_{1,j}(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x\partial t}\bigg|_{t=t_j}+P_{2,j}(x)\frac{\partial u(t_j,x)}{\partial x}+$$

$$+P_{3,j}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j}+P_{4,j}(x)u(t_j,x)\biggr\}=\varphi(x),\quad x\in[0,\omega], \tag{1.2}$$

$$u(t,0)=\psi_1(t),\quad t\in[0,T], \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\psi_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{1.4}$$

где $u(t,x)=\mathrm{col}\,(u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_n(t,x))$ – неизвестная функция; $n\times n$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, $E(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω; $n\times n$-матрицы $P_{i,j}(x)$, $i=\overline{0,4}$, $j=\overline{0,m+1}$, и n-вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$; $0=t_0\leqslant t_1<\ldots<t_m\leqslant t_{m+1}=T$; n-вектор-функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$.

Через $C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ $(C([0,\omega],\mathbb{R}^n))$ обозначим пространство непрерывных на Ω (на $[0,\omega]$) n-вектор-функций $u(t,x)$ $(\varphi(x))$ с нормой $\|u\|_0=\max\limits_{(t,x)\in\Omega}\|u(t,x)\|$ $(\|\varphi\|_0=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|)$, где $\|u(t,x)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(t,x)|$ $(\|\varphi(x)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|\varphi_i(x)|)$, а через $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ n-вектор-функций $\psi(t)$ с нормой

$$\|\psi\|_1=\max(\max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi(t)\|).$$

Функция $u(t,x) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, имеющая в прямоугольнике Ω непрерывные по совокупности переменных частные производные $\partial u(t,x)/\partial x$, $\partial u(t,x)/\partial t$, $\partial^2 u(t,x)/\partial x^2$, $\partial^2 u(t,x)/\partial x \partial t$, $\partial^3 u(t,x)/\partial x^2 \partial t$, называется *классическим решением* задачи (1.1)–(1.4), если она удовлетворяет системе уравнений (1.1) для всех $(t,x) \in \Omega$ и краевым условиям (1.2)–(1.4).

Начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка возникают при исследовании различных явлений естествознания и техники (из многочисленных публикаций, в которых приводятся приложения таких систем, укажем только монографии [1–4]).

В настоящей работе получены достаточные условия существования и единственности классического решения задачи (1.1)–(1.4) и предложен метод построения её приближённых решений. Для этого мы используем метод введения функциональных параметров [5]. С помощью этого метода рассматриваемая начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений третьего порядка сводится к эквивалентной задаче, включающей нелокальную задачу для системы гиперболических уравнений второго порядка относительно параметр-функции и интегральные соотношения. Построен итерационный алгоритм нахождения приближённых решений эквивалентной задачи и установлена его сходимость. Достаточные условия однозначной разрешимости начально-краевых задач (1.1)–(1.4) формулируются в терминах коэффициентов системы и матриц краевых условий. Результаты работ [6, 7] распространяются на класс начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Отметим, что ранее начально-краевые задачи типа (1.1)–(1.4) рассматривались в одномерном случае.

2. Редукция к эквивалентной задаче и основное утверждение. Введём новую неизвестную функцию $v(t,x) = \partial u(t,x)/\partial x$. Тогда задача (1.1)–(1.4) перейдёт в эквивалентную задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t} + C(t,x)v + f(t,x) + F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial v(t_j,x)}{\partial x} + P_{1,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j} + P_{2,j}(x)v(t_j,x)\right\} =$$

$$= \varphi(x) - \Phi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad x \in [0,\omega], \tag{2.2}$$

$$v(t,0) = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

$$u(t,x) = \psi_1(t) + \int\limits_0^x v(t,\xi)\,d\xi, \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{2.4}$$

где

$$F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = D(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + E(t,x)u, \quad \Phi\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{3,j}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j} + P_{4,j}(x)u(t_j,x)\right\}.$$

В соотношениях (2.4) учтены условия (1.3).

Пара функций $(v(t,x), u(t,x))$, непрерывных на Ω, называется *решением* задачи (2.1)–(2.4), если функция $v(t,x) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ имеет непрерывные частные производные $\partial v(t,x)/\partial x$, $\partial v(t,x)/\partial t$, $\partial^2 v(t,x)/\partial x \partial t$ на Ω и удовлетворяет нелокальной задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка (2.1)–(2.3), где функции $u(t,x)$ и $v(t,x)$ связаны интегральным соотношением (2.4).

Пусть $u^*(t,x)$ – классическое решение задачи (1.1)–(1.4). Тогда пара $(v^*(t,x), u^*(t,x))$, где $v^*(t,x) = \partial u^*(t,x)/\partial x$, будет решением задачи (2.1)–(2.4). Обратно, если пара $(\widetilde{v}(t,x), \widetilde{u}(t,x))$ – решение задачи (2.1)–(2.4), то функция $\widetilde{u}(t,x)$ будет классическим решением задачи (1.1)–(1.4).

Если известны функция $u(t,x)$ и её производная $\partial u(t,x)/\partial t$, то из нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений (2.1)–(2.3) находим функцию $v(t,x)$ и её производные. Если известна функция $v(t,x)$, то из интегральных соотношений (2.4) находим функцию $u(t,x)$ и её производную $\partial u(t,x)/\partial t$. Так как неизвестными являются как функция $u(t,x)$, так и функция $v(t,x)$, то применяется итерационный процесс, строящийся по следующему алгоритму.

Шаг 0. 1) Положим $u(t,x)=\psi_1(t)$, $\partial u(t,x)/\partial t=\dot\psi_1(t)$ в правой части системы уравнений (2.1) и в соотношении (2.2); затем, решая нелокальную задачу (2.1)–(2.3), находим $v^{(0)}(t,x)$ и её производные $\partial v^{(0)}(t,x)/\partial x$, $\partial v^{(0)}(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2) Из интегральных соотношений (2.4) при $v(t,x)=v^{(0)}(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t=\partial v^{(0)}(t,x)/\partial t$ определяем $u^{(0)}(t,x)$ и $\partial u^{(0)}(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

Шаг m $(m\in\mathbb{N})$. 1) Положим $u(t,x)=u^{(m-1)}(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial t=\partial u^{(m-1)}(t,x)/\partial t$ в правой части системы уравнений (2.1) и в соотношении (2.2); затем, решая нелокальную задачу (2.1)–(2.3), находим $v^{(m)}(t,x)$ и её производные $\partial v^{(m)}(t,x)/\partial t$, $\partial v^{(m)}(t,x)/\partial x$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2) Из интегральных соотношений (2.4) при $v(t,x)=v^{(m)}(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t=\partial v^{(m)}(t,x)/\partial t$ определяем $u^{(m)}(t,x)$ и $\partial u^{(m)}(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$; $m=1,2,\ldots$

Таким образом, построенный алгоритм состоит из двух частей: 1) при фиксированных $u(t,x)$ решаются нелокальные задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка относительно функции $v(t,x)$; 2) при фиксированных $v(t,x)$ из интегрального соотношения определяются функции $u(t,x)$.

Пусть $U_s(t,x)$ – матрица, имеющая вид

$$U_s(t,x)=I+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\,d\tau_1+\ldots+\int\limits_0^t A(\tau_1,x)\cdots\int\limits_0^{\tau_{s-2}} A(\tau_{s-1},x)\int\limits_0^{\tau_{s-1}} A(\tau_s,x)\,d\tau_s\cdots d\tau_1,\quad s\in\mathbb{N}.$$

Введём обозначения $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|$, $P(x)=\sum_{j=1}^{m+1}\|P_{0,j}(x)\|$, $x\in[0,\omega]$. Следующее утверждение устанавливает условия однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4), одновременно обеспечивающие реализуемость и сходимость приведённого выше алгоритма.

Теорема. *Предположим, что при некотором $s_0>0$ для любого $s>s_0$ $n\times n$-матрица $Q_s(x)=P_{0,0}(x)+\sum_{j=1}^{m+1}P_{0,j}(x)U_s(t_j,x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и справедливы неравенства:*

1) $\|[Q_s(x)]^{-1}\|\leqslant\gamma_s(x)$, где $\gamma_s(x)$ – положительная непрерывная функция на $[0,\omega]$;

2) $q_s(x)=\gamma_s(x)P(x)[e^{\alpha(x)T}-1-\sum_{j=1}^{s}[\alpha(x)T]^j/(j!)]\leqslant\chi<1$, где $\chi=\mathrm{const}$.

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)\in\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. По предположению теоремы $n\times n$-матрица $Q_s(x)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$ и справедливы неравенства 1), 2). Поэтому нелокальная задача для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+C(t,x)v+F_0(t,x),\tag{2.5}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial v(t_j,x)}{\partial x}+P_{1,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=t_j}+P_{2,j}(x)v(t_j,x)\right\}=\varphi(x),\quad x\in[0,\omega],\tag{2.6}$$

$$v(t,0)=\psi_2(t),\quad t\in[0,T],\tag{2.7}$$

имеет единственное классическое решение для любых $F_0(t,x)\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x)\in C([0,\omega],\mathbb{R}^n)$ и $\psi_2(t)\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ [7].

Используем эквивалентность задач (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.4). Решение задачи (2.1)–(2.4) – пару функций $(v(t,x),u(t,x))$ – найдём согласно приведённому выше алгоритму. Возьмём функцию $\psi_1(t)$ за начальное приближение $u(t,x)$, тогда функцию $v^{(0)}(t,x)$ найдём, решая задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=A(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}+C(t,x)v+f(t,x)+F(t,x,\psi_1,\dot\psi_1), \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\left\{P_{0,j}(x)\frac{\partial v(t_j,x)}{\partial x}+P_{1,j}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=t_j}+P_{2,j}(x)v(t_j,x)\right\}=$$
$$=\varphi(x)-\Phi(x,\psi_1,\dot\psi_1),\quad x\in[0,\omega], \tag{2.9}$$

$$v(t,0)=\psi_2(t),\quad t\in[0,T]. \tag{2.10}$$

При условиях 1), 2) теоремы задача (2.8)–(2.10) имеет единственное классическое решение $v^{(0)}(t,x)$. Тогда из интегральных соотношений (2.4) определяем $u^{(0)}(t,x)$ и её производную $\partial u^{(0)}(t,x)/\partial t$ при $v(t,x)=v^{(0)}(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t=\partial v^{(0)}(t,x)/\partial t$.

Соответственно на $(m-1)$-м шаге алгоритма находим $v^{(m-1)}(t,x)$ и $u^{(m-1)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Тогда $v^{(m)}(t,x)$ находится как решение задачи (2.1)–(2.3), в которой $u(t,x)=$ $=u^{(m-1)}(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial t=\partial u^{(m-1)}(t,x)/\partial t$, $m=1,2,\ldots$

Если найдена функция $v^{(m)}(t,x)$, то следующее приближение функции $u(t,x)$ и её производной $\partial u(t,x)/\partial t$ определяется из интегральных соотношений (2.4):

$$u^{(m)}(t,x)=\psi_1(t)+\int\limits_0^x v^{(m)}(t,\xi)\,d\xi,\quad \frac{\partial u^{(m)}(t,x)}{\partial t}=\dot\psi_1(t)+\int\limits_0^x\frac{\partial v^{(m)}(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi,\quad (t,x)\in\Omega.$$

Введём обозначения

$$\Delta_1^{(m)}(t,x)=v^{(m)}(t,x)-v^{(m-1)}(t,x),\quad \Delta_2^{(m)}(t,x)=\frac{\partial v^{(m)}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial v^{(m-1)}(t,x)}{\partial t},$$

$$\Delta_3^{(m)}(t,x)=u^{(m)}(t,x)-u^{(m-1)}(t,x),\quad \Delta_4^{(m)}(t,x)=\frac{\partial u^{(m)}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial u^{(m-1)}(t,x)}{\partial t},\quad (t,x)\in\Omega.$$

Тогда для них будут справедливы неравенства

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m+1)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m+1)}(t,x)\|\right)\leqslant$$
$$\leqslant Hd(x)\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_3^{(m)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_4^{(m)}(t,x)\|\right),$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_3^{(m)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_4^{(m)}(t,x)\|\right)\leqslant\int\limits_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m)}(t,\xi)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m)}(t,\xi)\|\right)d\xi,$$

где

$$H=\max\{e^{H_0H_1\omega}[1+\omega H_0],H_2[H_1(1+\omega H_0)+1]\},\quad H_0=\max(H_2,\|A\|_0H_2+1),$$

$$H_1=\max_{x\in[0,\omega]}\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|,\sum_{j=0}^{m+1}(\|P_{1,j}(x)\|+\|P_{2,j}(x)\|)\right\},$$

$$H_2=\max_{x\in[0,\omega]}[k_1(x,s)+k_2(x,s)],\quad d(x)=\max_{t\in[0,T]}\|D(t,x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|E(t,x)\|,\quad d_0=\max_{x\in[0,\omega]}d(x),$$

$$k_1(x,s)=\frac{\gamma_s(x)}{1-q_s(x)}P(x)\frac{[\alpha(x)T]^s}{s!}k_0(x,s)+T\gamma_s(x)\max\left\{1+P(x)\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!},\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!}\right\},$$

$$k_2(x,s)=\left\{[e^{\alpha(x)T}-1]\frac{\gamma_s(x)}{1-q_s(x)}P(x)\frac{[\alpha(x)T]^s}{s!}+1\right\}k_0(x,s),$$

$$k_0(x,s)=[e^{\alpha(x)T}-1]\gamma_s(x)\max\left\{1+P(x)\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!},\sum_{j=0}^{s-1}\frac{[\alpha(x)T]^j}{j!}\right\}T+Te^{\alpha(x)T};$$

все эти величины не зависят от f, ψ_1, ψ_2 и φ.

Отсюда вытекает основное неравенство

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m+1)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m+1)}(t,x)\|\right)\leqslant$$
$$\leqslant Hd(x)\int\limits_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_1^{(m)}(t,\xi)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_2^{(m)}(t,\xi)\|\right)d\xi. \tag{2.11}$$

Из неравенства (2.11) следует, что последовательности $\{v^{(m)}(t,x)\}$ и $\{\partial v^{(m)}(t,x)/\partial t\}$ сходятся в пространстве $C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ при $m\to\infty$ к функциям $v^*(t,x)$ и $w^*(t,x)$ соответственно. Предельные функции $v^*(t,x)$ и $w^*(t,x)$ непрерывны на Ω, кроме того, $w^*(t,x)=\partial v^*(t,x)/\partial t$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Из неравенства (2.10) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(m)}(t,x)\}$ и $\{\partial u^{(m)}(t,x)/\partial t\}$ на Ω при $m\to\infty$ к функциям $u^*(t,x)$ и $\partial u^*(t,x)/\partial t$ соответственно. Тогда пара функций $(v^*(t,x),u^*(t,x))$ является решением задачи (2.1)–(2.4) и удовлетворяет неравенству

$$\max\{\|v^*\|_0,\|u^*\|_0\}\leqslant(1+\omega)e^{Hd_0\omega}\max\{\|f\|_0,\|\psi_1\|_1,\|\psi_2\|_1,\|\varphi\|_0\}. \tag{2.12}$$

Пусть теперь пара $(\widetilde{v}(t,x),\widetilde{u}(t,x))$ – решение задачи (2.1)–(2.4), где $f(t,x)=0$, $\psi_1(t)=0$, $\psi_2(t)=0$ и $\varphi(x)=0$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Тогда из однозначной разрешимости задачи (2.5)–(2.7) и условий (2.4) заключаем, что $\widetilde{v}(t,x)=0$ и $\widetilde{u}(t,x)=0$ для всех $(t,x)\in\Omega$. Поэтому из оценки (2.12) вытекает, что задача (2.1)–(2.4) однозначно разрешима. Из эквивалентности задач (2.1)–(2.4) и (1.1)–(1.4) следует однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.4). Классическое решение $u^*(t,x)\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет неравенству

$$\|u^*\|_0\leqslant(1+\omega)e^{Hd_0\omega}\max\{\|f\|_0,\|\psi_1\|_1,\|\psi_2\|_1,\|\varphi\|_0\}.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2020–2022 гг. (грант AP08955461).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.
4. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., 2006.
5. *Asanova A.T., Dzhumabaev D.S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. 2013. V. 402. № 1. P. 167–178.
6. *Assanova A.T., Imanchiev A.E.* On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations // Eurasian Math. J. 2015. V. 6. № 4. P. 19–28.
7. *Asanova A.T.* Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // J. of Math. Sci. (United States). 2016. V. 212. № 3. P. 213–233.

Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Республика Казахстан

Поступила в редакцию 28.02.2019 г.
После доработки 02.09.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 130–134

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.5

ОТСУТСТВИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

 А. М. Ахтямов

Приведены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка, зависящие от спектрального параметра, чтобы у него не существовало вырожденных двухточечных краевых условий.

DOI: 10.31857/S037406412101012X

Введение. Если характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи или дифференциального оператора [1, с. 26] не равен тождественно некоторой постоянной, то для этих задачи или оператора их краевые условия называются *невырожденными краевыми условиями* [2, с. 35], в противном случае, т.е. когда $\Delta(\lambda)\equiv\mathrm{const}$, они называются *вырожденными*.

В работе [3] М.Х. Стоуном показано, что если в задаче Штурма–Лиувилля

$$y''+q(x)y+\lambda y=0,$$

$$y(0)-y(\pi)=0,$$

$$y'(0)+y'(\pi)=0,$$

рассматриваемой на отрезке $[0,\pi]$, потенциальная функция $q(x)$ является симметричной (т.е. $q(x)=q(\pi-x)$ для любого $x\in[0,\pi]$), то характеристический определитель этой краевой задачи тождественно нулевой, а значит, её спектр полностью заполняет всю плоскость.

В монографии [3, с. 27] показано, что если коэффициенты обыкновенного линейного дифференциального уравнения являются непрерывными, то для спектра его краевой задачи имеет место следующая альтернатива: либо 1) существует не более счётного числа собственных значений, не имеющих предельных точек в $\mathbb{C}$, либо 2) каждое $\lambda\in\mathbb{C}$ есть собственное значение.

Прямые и обратные задачи с нераспадающимися краевыми условиями для случая 1) достаточно хорошо изучены (см., например, [4, 5]). Вырожденный случай 2) изучен значительно меньше.

В работах [6] и [7] описаны все вырожденные двухточечные краевые условия для оператора D^2 и для оператора Штурма–Лиувилля соответственно. Эти результаты обобщены на оператор диффузии в работе [8]. Именно, в ней показано, что у рассматриваемого на отрезке $[0,\pi]$ уравнения

$$y''+(\lambda^2-2\lambda p(x)-q(x))y=0,$$

в котором λ – спектральный параметр, а $p(\cdot)\in W_2^1(0,\pi)$, $q(\cdot)\in L_2(0,\pi)$ – вещественнозначные функции, в случае, если $p(x)\ne p(\pi-x)$ или $q(x)\ne q(\pi-x)$ для x из некоторого подынтервала отрезка $[0,\pi]$, двухточечных краевых условий с $\Delta(\lambda)\equiv 0$ не существует и единственно возможными вырожденными двухточечными краевыми условиями являются условия Коши: $y(0)=y'(0)=0$ и $y(\pi)=y'(\pi)=0$. В случае же $p(x)=p(\pi-x)$ и $q(x)=q(\pi-x)$, $x\in[0,\pi]$, тождество $\Delta(\lambda)\equiv 0$ реализуется только для условий $y^{(i)}(0)+(-1)^iy^{(i)}(\pi)=0$, $i=0,1$, и $y^{(i)}(0)+(-1)^{i+1}y^{(i)}(\pi)=0$, $i=0,1$ (названных в [7] ложнопериодическими условиями), а тождество $\Delta(\lambda)\equiv\mathrm{const}\ne 0$ – только для условий $y^{(i)}(0)+(-1)^iay^{(i)}(\pi)=0$, $i=0,1$, и $y^{(i)}(0)+(-1)^{i+1}ay^{(i)}(\pi)=0$, $i=0,1$, где $a\ne 1$ (названных в [7] обобщёнными условиями Коши).

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного чётного порядка получены в работе [9] (см. также монографию [10]). В этой работе приведены примеры дифференциальных операторов любого чётного порядка n, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Краевые условия у этих операторов имели следующий вид:

$$y^{(i)}(0) + (-1)^i y^{(i)}(\pi) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Возникает естественный вопрос, существуют ли другие, помимо приведённых в [9], примеры операторов чётного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость.

В работе [11] дан утвердительный ответ на поставленный вопрос. Более того, для оператора D^4 описаны все 12 возможных классов двухточечных краевых задач на собственные значения, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Каждый из этих классов содержит произвольную константу. Поэтому для оператора дифференцирования четвёртого порядка имеется континуум краевых задач со спектром, полностью заполняющим всю комплексную плоскость.

До недавнего времени оставался открытым вопрос, сформулированный, в частности, в монографии [10]: существуют ли спектральные задачи с дифференциальным уравнением нечётного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Примеры таких операторов для любого нечётного порядка приведены в работе [12].

В работе [13] показано, что если n – чётное число, большее двух, а $d \neq \pm 1$, то характеристический определитель задачи

$$y^{(n)}(x) + \sum_{m=1}^{n} p_m(x) y^{(n-m)}(x) + \lambda y(x) = 0,$$

$$y^{(n-j)}(0) + d(-1)^{j+1} y^{(n-j)}(\pi) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где $p_m(\cdot) \in L_1(0, \pi)$, тождественно равен константе, отличной от нуля.

В заключение отметим, что для оператора Штурма–Лиувилля с вырожденными краевыми условиями достаточно хорошо изучены [14, 15] вопросы полноты и базисности.

1. Случай, когда корни характеристического уравнения – константы. Рассмотрим спектральную задачу, порождённую уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x,\lambda)\frac{dy}{dx} + p_2(x,\lambda) y = 0 \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_j(y) \equiv a_{j1} y(0) + a_{j2} y(1) + a_{j3} y'(0) + a_{j4} y'(1) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

здесь λ – спектральный параметр, $x \in [0,1]$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2,\ k = \overline{1, 4})$, а функции $p_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ имеют следующий вид:

$$p_1(x,\lambda) = \lambda p_{10} + p_{11}(x), \quad p_2(x,\lambda) = \lambda^2 p_{20} + \lambda p_{21}(x) + p_{22}(x),$$

где $p_{i1}(x) \in C^1[0,1]$, $p_{22}(x) \in C[0,1]$, $p_{i0} = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

Обозначим матрицу, образованную коэффициентами a_{jk} краевых условий (2) через A, а её миноры, составленные из l-го и m-го столбцов, через M_{lm}, т.е.

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1l} & a_{1m} \\ a_{2l} & a_{2m} \end{vmatrix}, \quad l, m = \overline{1, 4}.$$

На протяжении всей статьи будем считать, что ранг матрицы A равен двум:

$$\operatorname{rank} A = 2. \tag{3}$$

Пусть также выполнены следующие три условия:
1) $p_{10}^2 - 4p_{20} \neq 0$;
2) $p_{10} \neq 0$;
3) $p_{20} \neq 0$.

Вследствие условия 1) характеристическое уравнение $\omega^2 + p_{10}\omega + p_{20} = 0$ имеет различные корни $\omega_1 \neq \omega_2$. Поэтому (см. [16]) уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\{y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda)\}$ такую, что эти решения и их производные допускают при $\lambda \to +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, асимптотические разложения

$$y_k(x,\lambda) = e^{\omega_k \lambda x}(u_{k0}(x) + \lambda^{-1}u_{k1}(x) + \lambda^{-2}u_{k2}(x) + \mathcal{O}(\lambda^{-3})), \quad k = 1,2, \tag{4}$$

$$\frac{dy_k(x,\lambda)}{dx} = \omega_k \lambda e^{\omega_k \lambda x}\left(u_{k0}(x) + \lambda^{-1}(u_{k1}(x) + \frac{1}{\omega_k}u'_{k0}(x)) + \mathcal{O}(\lambda^{-2})\right), \quad k = 1,2, \tag{5}$$

где $u_{k0}(x) \neq 0$, $k = 1,2$, при всех $x \in [0,1]$. Здесь и ниже через $\mathcal{O}(\lambda^{-m})$, где $m \in \mathbb{N}$, обозначается функция от x и λ, модуль которой не превосходит $\mathrm{const}\,|\lambda|^{-m}$ для всех $x \in$ $\in [0,1]$ и достаточно больших $|\lambda|$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$f_1(\lambda) = y_1(0,\lambda)y_2(1,\lambda) - y_2(0,\lambda)y_1(1,\lambda), \quad f_2(\lambda) = y_1(0,\lambda)y'_2(0,\lambda) - y'_1(0,\lambda)y_2(0,\lambda),$$

$$f_3(\lambda) = y_1(0,\lambda)y'_2(1,\lambda) - y_2(0,\lambda)y'_1(1,\lambda), \quad f_4(\lambda) = y_1(1,\lambda)y'_2(0,\lambda) - y'_1(0,\lambda)y_2(1,\lambda),$$

$$f_5(\lambda) = y_1(1,\lambda)y'_2(1,\lambda) - y_2(1,\lambda)y'_1(1,\lambda), \quad f_6(\lambda) = y'_1(0,\lambda)y'_2(1,\lambda) - y'_2(0,\lambda)y'_1(1,\lambda). \tag{6}$$

Очевидно, что $f_2(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Обозначим через $z_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$, решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $z_1(0,\lambda) = 1$, $z'_1(0,\lambda) = 0$ и $z_2(0,\lambda) = 0$, $z'_2(0,\lambda) = 1$. Отсюда и из линейной независимости функций $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ вытекают тождества

$$z_1(x,\lambda) = \frac{y'_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda) - y'_1(0,\lambda)y_2(x,\lambda)}{f_2(\lambda)}, \quad z_2(x,\lambda) = \frac{y_1(0,\lambda)y_2(x,\lambda) - y_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda)}{f_2(\lambda)}. \tag{7}$$

Как несложно убедиться, воспользовавшись формулами (7), характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det\,(U_k(z_i))_{k,i=1}^2$ задачи (1), (2) имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) = M_{12}\frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{13} + M_{14}\frac{f_3(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{23}\frac{f_4(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{24}\frac{f_5(\lambda)}{f_2(\lambda)} + M_{34}\frac{f_6(\lambda)}{f_2(\lambda)}. \tag{8}$$

Из вида функций $f_i(\lambda)$, $i = \overline{1,6}$, и представлений (4), (5) следует [17], что тождество $\Delta(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ невозможно. В работе [17] доказана линейная независимость семейства функций $\{f_i(\lambda) : i = \overline{1,6}\}$, а значит, тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ возможно тогда и только тогда, когда выполняются равенства $M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = M_{34} = 0$, но эти равенства противоречат условию (3). Поэтому справедлива

Теорема 1. *Задача (1), (2) не имеет вырожденных краевых двухточечных условий.*

2. Случай, когда корни характеристического уравнения – переменные. Рассмотрим спектральную задачу, порождённую уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda q_1(x,\lambda)\frac{dy}{dx} + \lambda^2 q_2(x,\lambda)y = 0 \tag{9}$$

и краевыми условиями (2), где для коэффициентов $q_i(x,\lambda)$ справедливо представление

$$q_i(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j}p_{ij}(x), \quad i = 1,2, \tag{10}$$

для всех $x \in [0,1]$ и $\lambda \in \Omega_R$ при некотором $R > 0$ (здесь и ниже $\Omega_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant R\}$) и хотя бы одна из функций $p_{i0}(x)$, $i = 1,2$, не равна тождественно нулю на $[0,1]$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

а) функции $p_{ij}(x)$, $i = 1,2$, $j = 0,1,\ldots,$ (см. представление (10)) непрерывны и ограничены в совокупности на отрезке $[0,1]$;

б) корни $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ характеристического уравнения $\omega^2 + p_{10}(x)\omega + p_{20}(x) = 0$ различны между собой при всех значениях $x \in (0,1)$;

в) функции $dp_{i0}(x)/dx$ и $p_{i1}(x)$, $i = 1,2$, имеют непрерывные производные в промежутке $(0,1)$;

г) существует бесконечная подобласть $\widetilde{\Omega}_R$ области Ω_R, в которой при всех значениях $x \in [0,1]$ выполняются неравенства $\mathrm{Re}\,(\lambda\omega_1(x)) \leqslant \mathrm{Re}\,(\lambda\omega_2(x))$;

д) справедливы соотношения

$$\int\limits_0^1 \omega_i(x)\,dx \neq 0, \quad i = 1,2, \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 (\omega_1(x) \pm \omega_2(x))\,dx \neq 0;$$

е) $\omega_1(1)\omega_2(0) \neq 0$ или $\omega_1(0)\omega_2(1) \neq 0$;

ж) $\omega_1(0)\omega_1(1) - \omega_2(0)\omega_2(1) \neq 0$.

При выполнении условий а)–г) дифференциальное уравнений (9) имеет в области $\widetilde{\Omega}_R$ фундаментальную систему решений $\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$, допускающих представление

$$y_k(x,\lambda) = e^{\lambda\int_0^x \omega_k(\tau)d\tau}(u_{k0}(x) + \lambda^{-1}u_{k1}(x) + \lambda^{-2}u_{k2}(x) + \mathcal{O}(\lambda^{-3})), \quad k = 1,2, \tag{11}$$

где $u_{k0}(x) \neq 0$, $k = 1,2$, при всех $x \in [0,1]$; причём представления (11) можно дифференцировать с точностью до первых двух членов.

Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (2), (9) задаётся равенством (8), в котором функции $f_i(\lambda)$, $i = \overline{1,6}$, определяются формулами (6) с функциями (11).

Из вида функций $\{f_i(\lambda)\}$, $i = \overline{1,6}$, следует [17], что тождество $\Delta(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ невозможно. В работе [17] доказано, что функции $\{f_i(\lambda) : i = \overline{1,6}\}$, заданные равенствами (6), (11), являются линейно независимыми, поэтому тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$ возможно тогда и только тогда, когда выполняются равенства $M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = M_{34} = 0$, но эти равенства противоречат условию (3). Поэтому имеет место

Теорема 2. *Задача (2), (9) не имеет вырожденных краевых двухточечных условий.*

Работа выполнена за счёт средств государственного бюджета по госзаданию (проект 0246-2019-0088) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-51-06002-Аз_а, 18-01-00250-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
3. *Stone M.H.* Irregular differential systems of order two and the related expansion problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1927. V. 29. P. 23–53.
4. *Ширяев Е.А., Шкаликов А.А.* Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Мат. заметки. 2007. Т. 81. Вып. 4. С. 636–640.
5. *Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M.* General inverse Sturm–Liouville problem with symmetric potential // Azerbaijan J. of Math. 2015. V. 5. № 2. P. 96–108.
6. *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. I. Spectral properties // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V. 141. № 2. P. 538–558.
7. *Ахтямов А.М.* О вырожденных краевых условиях в задаче Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1121–1123.
8. *Ахтямов А.М.* Вырожденные краевые условия оператора диффузии // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1546–1549.

9. *Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 2. С. 310–313.
10. *Locker J.* Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators (Mem. Amer. Math. Soc.). Providence, 2006.
11. *Akhtyamov A.M.* On degenerate boundary conditions for operator D^4 // Springer Proc. in Math. and Stat. 2017. V. 216. P. 195–203.
12. *Ахтямов А.М.* О спектре дифференциального оператора нечётного порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 101. Вып. 5. С. 643–646.
13. *Makin A.* Two-point boundary-value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electr. J. of Differ. Equat. 2018. V. 95. P. 1–7.
14. *Маламуд М.М.* О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими краевыми условиями // Функц. анализ и его приложения. 2008. Т. 42. № 3. С. 45–52.
15. *Макин А.С.* Об обратной задаче для оператора Штурма–Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1408–1411.
16. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
17. *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по её спектру // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6. Вып. 4. С. 995–1006.

Башкирский государственный университет, г. Уфа,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова,
Уфимского научного центра РАН

Поступила в редакцию 26.02.2020 г.
После доработки 26.02.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 135–139

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.57+517.958

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Нгуен Минь Хонг

Рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости. Доказывается существование оптимального решения, дающего минимум заданному функционалу качества. Для доказательства существования оптимального решения используется аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики.

DOI: 10.31857/S0374064121010131

Введение. Движение несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, на промежутке времени $[0,T]$ $(T<\infty)$ описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\operatorname{Div}[2\mu(I_2(v))\varepsilon(v)]+\operatorname{grad}p=f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}v=0,\quad v|_{t=0}=v_0(x),\quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0, \tag{2}$$

где $v(x,t)$ – вектор-функция скорости частицы жидкости в точке $x\in\Omega$ в момент времени $t\in[0,T]$; p – функция давления в жидкости; f – плотность внешних сил; ε – тензор скоростей деформации $\varepsilon(v)=(\varepsilon_{ij}(v))$, $\varepsilon_{ij}(v)=(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)/2$; тензор $I_2(v)$ определяется равенством $I_2^2(v)=\varepsilon(v):\varepsilon(v)=\sum_{i,j=1}^n[\varepsilon_{ij}(v)]^2$. Здесь для произвольных квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного порядка используется обозначение $A:B:=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$, а через $\operatorname{Div}M$ обозначена дивергенция тензора $M=(m_{ij})$, т.е. вектор

$$\operatorname{Div}M:=\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial m_{1j}}{\partial x_j},\ldots,\sum_{j=1}^n\frac{\partial m_{nj}}{\partial x_j}\right).$$

Данная математическая модель подробно исследовалась в работах профессора В.Г. Литвинова (см., например, [1]), в которых приведены примеры таких жидкостей и естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды, выраженные через свойства функции $\mu:\mathbb{R}_+\to\to\mathbb{R}$. Эта функция должна быть непрерывно дифференцируема и удовлетворять неравенствам

$$a)\ 0<C_1\leqslant\mu(s)\leqslant C_2<\infty;\quad b)\ -s\mu'(s)\leqslant\mu(s)\quad\text{при}\quad\mu'(s)<0;$$

$$c)\ |s\mu'(s)|\leqslant C_3<\infty.$$

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы.

Вопрос существования решений для данной задачи рассматривался в работах [1–3] и др. В данной работе рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для системы (1), (2). Исследованию задач управления посвящено большое количество работ (см. [4–6]). Однако, в то время как управление для линейных систем достаточно хорошо изучено, управление для нелинейных систем остаётся малоисследованной задачей (даже для конечномерных или локальных областей). На практике часто возникает задача управления (оптимального управления) движением жидкости при помощи внешних сил. Обычно при решении таких задач управление выбирается из некоторого заданного (конечного) множества управлений.

В настоящей работе рассматривается задача управления внешними силами, которые зависят от скорости движения жидкости. Такие задачи называются задачами с обратной связью (см., например, [7–9] и приведённую в этих работах библиографию). Эта позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения (естественно, что на это отображение накладываются некоторые условия), что даёт возможность более точно выбрать управление.

В данной работе изучается вопрос существования решений задачи управления с обратной связью для модели нелинейно-вязкой жидкости (1), (2), а также доказывается существование оптимального решения рассматриваемой задачи, дающего минимум заданному ограниченному функционалу качества.

1. Постановка задачи и основные результаты. Сначала введём основные обозначения и приведём вспомогательные утверждения.

Обозначим: $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, – множество измеримых вектор-функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-й степенью; $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, – пространства Соболева; $C_0^\infty(\Omega)^n$ – пространство бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Через $\mathcal{V}$ обозначим множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega)^n\colon\ \operatorname{div} v = 0\}$. Замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$ будем обозначать через H, а по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ – через V. Введём основное пространство, в котором будут изучаться слабые решения рассматриваемой задачи:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0,T,V) \bigcap L_\infty(0,T;H), \quad v' \in L_1(0,T,V^*)\}.$$

Пространство W_1 снабжено нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T,V)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|v'\|_{L_1(0,T,V^*)}$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap L_2(0,T,V^*)$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные и выпуклые значения;

(Ψ2) отображение Ψ компактно и полунепрерывно сверху (т.е. для любой функции $v \in W_1$ и открытого множества $Y \subset L_2(0,T,V^*)$, такого что $\Psi(v) \subset Y$, существует окрестность $U(v)$, для которой $\Psi(U(v)) \subset Y$);

(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $C_4 > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T,V^*)} := \sup\{\|u\|_{L_2(0,T,V^*)} : u \in \Psi(v)\} \leqslant C_4 \quad \text{для всех} \quad v \in W_1;$$

(Ψ4) отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1$, $v_l \rightharpoonup v_0$ и $u_l \in \Psi(v_l)$, $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T,V^*)$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1), (2). В работе под *обратной связью* мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \tag{3}$$

Определение 1. Пара функций $(v,f) \in W_1 \times L_2(0,T,V^*)$ называется *слабым решением* задачи с обратной связью (1), (2), если она удовлетворяет при всех $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$ равенству

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi)\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{4}$$

начальному условию $v(0) = v_0$ и условию обратной связи (3).

Здесь и далее $\langle v', \varphi\rangle = (\partial v/\partial t, \varphi)$.

Первым результатом работы является

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), а вязкость μ рассматриваемой среды – условиям a)–c). Тогда существует хотя бы одно решение $(v_*, f_*) \in W_1 \times L_2(0,T,V^*)$ задачи с обратной связью (1)–(3).*

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0,T;V^*)$ множество всех слабых решений задачи управления с обратной связью (1)–(3). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \geqslant \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$.

(Φ2) Если $v_l \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_l \to f_*$ в $L_2(0,T;V^*)$, то $\Phi(v_*,f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_l,f_l)$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), вязкость μ рассматриваемой среды – условиям a)–c), а функционал Φ – условиям (Φ1), (Φ2), то задача оптимального управления с обратной связью (1)–(3) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что*

$$\Phi(v_*,f_*) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f).$$

2. Схема доказательства. Доказательство теорем 1 и 2 основано на аппроксимационно-топологическом методе исследования задач гидродинамики (см. [10–14]).

Для этого сначала переходят к операторной трактовке рассматриваемой задачи:

$$v'(t) + D(v) - K(v) = f, \tag{5}$$

в которой операторы $K : V \to V^*$ и $D : V \to V^*$ для функций $v \in V$ и $\varphi \in V$ задаются равенствами

$$\langle K(v),\varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx \quad \text{и} \quad \langle D(v),\varphi\rangle = 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi)\,dx.$$

Таким образом, слабое решение задачи с обратной связью (1)–(3) – это решение $(v,f) \in W_1 \times$ $\times\, L_2(0,T,V^*)$ операторного уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0} = v_0$ и условию обратной связи (3). Отметим некоторые свойства введённых выше операторов.

Лемма 1. *1) Оператор $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ непрерывен.*

2) Оператор $D : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ непрерывен и монотонен.

Далее, в связи с тем, что операторы в полученном операторном включении не обладают необходимыми свойствами, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную (в данном случае она представляет собой также операторное включение, но с оператором, обладающим требуемыми свойствами, рассматриваемое в более удобном функциональном пространстве $W_2 = \{v : v \in L_2(0,T;V),\ v' \in L_2(0,T;V^*)\}$).

Вспомогательная задача. Найти пару функций $(v,f) \in W_2 \times L_2(0,T,V^*)$, удовлетворяющую операторному включению

$$v'(t) + D(v) - K_\delta(v) = f \in \Psi(v) \tag{6}$$

и начальному условию $v(0) = v_0$. Здесь оператор $K_\delta : V \to V^*$, $\delta > 0$, для функций $v \in V$ и $\varphi \in V$ задаётся равенством

$$\langle K_\delta(v),\varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i v_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx, \quad \text{где} \quad |v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i v_i.$$

Лемма 2. *Для любого $\delta > 0$ оператор $K_\delta : W_2 \to L_2(0,T;V^*)$ компактен и справедлива оценка*

$$\|K_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_5/\delta \tag{7}$$

с некоторой константой C_5, не зависящей от v.

После чего на основе априорных оценок решений и теории топологической степени многозначных отображений доказывается существование решения вспомогательной задачи. Для этого вспомогательная задача записывается в следующем виде:

$$\mathbf{L}(v) - \mathbf{K}_\delta(v) \in \mathbf{\Psi}(v),$$

где $\mathbf{L}: W_2 \to L_2(0,T;V^*)\times H$, $\mathbf{L}(v) = (v'+D(v), v|_{t=0})$; $\mathbf{K}_\delta : W_2 \subset L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)\times H$, $\mathbf{K}_\delta(v) = (K_\delta(v), 0)$; $\mathbf{\Psi}: W_2 \to L_2(0,T;V^*)\times H$, $\mathbf{\Psi}(v) = (\Psi(v), v_0)$.

Лемма 3. *Нелинейный оператор* $\mathbf{L}: W_2 \to L_2(0,T;V^*)\times H$ *корректно определён, обратим, и для любых* $v \in W_2$ *справедлива оценка*

$$\|v\|_{W_2} \leqslant C_6 \|\mathbf{L}(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times H}. \tag{8}$$

Кроме того, обратный оператор $\mathbf{L}^{-1}: L_2(0,T;V^*)\times H \to W_2$ *непрерывен.*

Из последней леммы следует, что изучение вспомогательной задачи эквивалентно исследованию задачи о неподвижной точке следующего включения:

$$v \in F(v), \tag{9}$$

где $F: W_2 \to W_2$ и $F(v) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{K}_\delta(v) + \mathbf{\Psi}(v))$.

Теорема 3. *Операторное включение (9) имеет хотя бы одно решение* $v \in W_2$.

Для доказательства теоремы 3 рассматривается семейство вспомогательных включений: $v \in G(v)$, где $G(v) = \mathbf{L}^{-1}(\lambda \mathbf{K}_\delta(v) + \lambda \mathbf{\Psi}(v))$. Заметим, что данное семейство совпадает с изучаемой задачей (9) при $\lambda = 1$.

Установим априорную оценку решений для включения $v \in G(v)$. Если $v \in W_2$ – решение одного из включений семейства вспомогательных задач, то в силу оценок (7) и (8) и условий $(\Psi1)$–$(\Psi4)$ имеем

$$\|v\|_{W_2} \leqslant C_7(\|\mathbf{K}_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_0\|_H) \leqslant C_7(C_5/\delta + C_8 + \|v_0\|_H).$$

Выберем $R > C_7(C_5/\delta + C_8 + \|v_0\|_H)$, тогда ни одно решение семейства вспомогательных задач не принадлежит границе шара $B_R \subset W_2$. Поэтому отображение $G: W_2 \times [0,1] \to W_2$ определяет гомотопию многозначных отображений на B_R. Следовательно, топологическая степень $\deg(G, \bar{B}_R, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0,1]$ (см. [15, гл. 3]). В силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем $\deg(F, \bar{B}_R, 0) = \deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1$. Отличие от нуля степени отображения F обеспечивает существование решения операторного включения (9), а следовательно, существование решения вспомогательной задачи.

Лемма 4. *Для любого решения* $v_\delta \in W_2$, $\delta > 0$, *операторного включения (9) справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|v_\delta(t)\|_H + \|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_9(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H), \tag{10}$$

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{10}(1 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H)^2 \tag{11}$$

с константами C_9 *и* C_{10}, *не зависящими от* δ.

И, наконец, показывается, что из последовательности решений вспомогательной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в некотором смысле к решению исходного операторного включения.

Для этого возьмём произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_l\}_{l=1}^\infty$, $\delta_l \to 0$. Для каждого δ_l известно, что соответствующая вспомогательная задача имеет по крайней мере одно решение $v_l \in W_2$. Вследствие оценок (10) и (11), не уменьшая общности рассуждений, считаем, что $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V)$, $v_l \rightharpoonup {}^*$– слабо в $L_\infty(0,T;H)$, $v_l \to v_*$ сильно в $L_2(Q_T)$, $v_l \to v_*$ почти всюду Q_T, $v'_l \rightharpoonup v'_*$ в смысле распределений. Так как оператор D слабо непрерывен, то будем полагать, что $D(v_l) \rightharpoonup D(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$, а следовательно, в смысле распределений со значениями в V^*. В силу леммы 5.3 из гл. 5 монографии [16] имеет место следующая сходимость: $K_{\delta_l}(v_l) \dashrightarrow K(v_*)$ в смысле распределений.

Принимая во внимание оценки (10), (11) и условия $(\Psi1)$–$(\Psi4)$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^*)$ такое, что $f_l \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $l \to \infty$. Таким образом, переходя в каждом из членов равенства

$$v'_l + D(v_l) - K_{\delta_l}(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

к пределу при $l \to \infty$, получаем, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству

$$v'_* + D(v_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*),$$

а переходя к пределу при $l \to \infty$ в начальном условии $v_l(0) = v_0$, заключаем, что v_* удовлетворяет начальному условию $v_*(0) = v_0$.

Следовательно, (v_*, f_*) – слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(3). Заметим, что так как $v_* \in L_2(0,T;V) \bigcap L_\infty(0,T;H)$, то из равенства (5) следует включение $v'_* \in L_1(0,T;V^*)$.

После доказательства разрешимости задачи управления показывается, что во множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества (именно поэтому данный вид задач называют задачами оптимального управления движением жидкости с обратной связью).

Исследования Звягина В.Г. выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZGU-2020-0035) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00051). Исследования Звягина А.В. выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-60014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М., 1982.
2. *Соболевский П.Е.* Существование решений математической модели нелинейно вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 1. С. 44–48.
3. *Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G.* The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type // Abstr. and Appl. Analysis. 1997. V. 2. № 1. P. 1–45.
4. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Berlin, 1971.
5. *Abergel F., Temam R.* On some control problems in fluid mechanics // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1990. V. 1. № 6. P. 303–325.
6. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
7. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems // J. Fixed Point Theory and Appl. 2014. V. 16. P. 27–82.
8. *Звягин А.В.* Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
9. *Звягин А.В.* Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье–Стокса // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 5. С. 527–530.
10. *Звягин В.Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Совр. математика. Фундам. направления. 2012. Т. 46. С. 92–119.
11. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М., 2012.
12. *Звягин А.В., Поляков Д.М.* О разрешимости альфа-модели Джеффриса–Олдройда // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 782–787.
13. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 12. С. 1633–1645.
14. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin, 2001.
16. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. М., 2004.

Воронежский государственный университет,
Воронежский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию 16.03.2020 г.
После доработки 16.03.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 1, с. 140–144

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

ЗАДАЧИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ ОКРУЖНОСТЬЮ И ТОЧКОЙ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

© 2021 г. Ю. С. Фёдоров, А. Б. Расулов

В настоящей работе для обобщённой системы Коши–Римана, младшие коэффициенты которой допускают сильную особенность на окружности и слабую особенность в точке, решена задача типа Гильберта.

DOI: 10.31857/S0374064121010143

1. Постановка задачи типа Римана–Гильберта. Пусть область D содержит точку $z=0$ и окружность $L=\{z:|z|=R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Обозначим $D_0=D\setminus(\{0\}\bigcup L)$ и $D_\varepsilon=D\setminus(d_{0\varepsilon}\bigcup d_{1\varepsilon})$ с малым $\varepsilon>0$, где $d_{0\varepsilon}=\{z:|z|<\varepsilon\}$ и $d_{1\varepsilon}=\{z:R-\varepsilon<|z|<R+\varepsilon\}$. В области D_0 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial\bar z}-p(z)\frac{a(z)}{||z|-R|^n}u+\frac{b(z)}{|z|^m}\overline{u}=f(z), \tag{1.1}$$

где $2\partial_{\overline{z}}=\partial_x+i\partial_y$, $u(z)=u_1(x,y)+iu_2(x,y)$, нормирующий множитель $p(z)=p_0(z)|p_0(z)|^{-1}$, $p_0(z)=z(|z|-R)$. Коэффициенты a, b принадлежат классу $C(\overline{D})$, а правая часть f – классу $L^p(D)$, $p>2$, где $n>1$, $0<m<1$.

Исследованию задач для уравнения (1.1) с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке или линии, посвящены работы [1–8] и др.

Под *обобщённым решением* уравнения (1.1) понимается функция $u\in C(\overline{D}\backslash(\{0\}\bigcup L))$, имеющая первую обобщённую производную по $\overline{z}$, принадлежащую классу $L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon>0$, и удовлетворяющая этому уравнению почти всюду.

В настоящей работе для обобщённой системы типа Коши–Римана (1.1), коэффициенты которой допускают сильную особенность на окружности L и слабую особенность в точке $z=0$, исследована задача типа Римана–Гильберта.

Задача R. Для уравнения (1.1) в классе

$$u, e^{a(R)/||z|-R|^{n-1}}u\in C^\mu(\overline{D}),\quad 0<\mu<1-2/p, \tag{1.2}$$

требуется найти решения краевой задача типа Римана–Гильберта:

$$\operatorname{Re} Ge^{a(R)/||z|-R|^{n-1}}u|_\Gamma=g, \tag{1.3}$$

где функции G, g заданы и принадлежат классу $C^\nu(\Gamma)$, причём G всюду отлична от нуля.

2. Интегральные представления решений. Рассмотрим частный случай уравнения (1.1) с $b=0$, т.е. уравнение

$$u_{\bar z}-Au=f, \tag{2.1}$$

где для краткости положено $A(z)=p(z)(||z|-R|^n)^{-1}a(z)$, $a(z)\in C(\overline{D})$. В данном случае коэффициент A ограничен в начале координат и имеет сильную неподвижную особенность на окружности L.

В представлении общего решения последнего уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор Векуа [9, с. 31]

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta-z}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. Здесь и ниже через $d_2\zeta$ обозначается элемент площади. Хорошо известно, что этот оператор $T : L^p(D) \to W^{1,p}(D)$ ограничен и имеет место вложение $W^{1,p}(D) \subset C^\alpha(\overline{D})$ с показателем Гёльдера $\alpha = (p-2)/p$. В частности, этот оператор компактен в пространстве $L^p(D)$, $p > 2$.

В общем случае сингулярного коэффициента A интегральный оператор Векуа также можно применить при условии, что известно некоторое решение уравнения $\Omega'_{\overline{z}} = A$ в области D_0, где

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A)(z), \quad z \neq L.$$

Следующая лемма [10] описывает одно из решений уравнения $\Omega'_{\overline{z}} = A$ в области D_0.

Лемма 1. *В предположении*

$$A_0(z) = p(z)(a(z) - a(R))(||z| - R|^n)^{-1} \in L^p(D), \quad n > 1, \tag{2.2}$$

сингулярный интеграл $\Omega(z)$ *существует и представим в виде*

$$\Omega(z) = -\frac{2a(R)}{(n-1)||z| - R|^{n-1}} + h(z),$$

где $h(z) \in H(\overline{D})$ *определяется равенством*

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\frac{a(R)}{(n-1)}\int\limits_\Gamma \frac{1}{|\rho - R|^{n-1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

С помощью этой леммы по обычной процедуре [9, с. 31] непосредственно приходим к следующему представлению, полученному в работе [8].

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2.2) и* $\operatorname{Re} a(R) > 0$, *а также* $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$. *Тогда общее решение уравнения (2.1) в классе* $C(\overline{D}\backslash L)$ *даётся формулой*

$$u = e^\Omega[\phi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где функция $\phi \in C(\overline{D}\backslash L)$ *аналитична в области* $C(D\backslash L)$.

Сформулированная теорема показывает, что имеет место соотношение

$$u = O(1)e^{-2a(R)/||z|-R|^{n-1}} \quad \text{при} \quad |z| \to R.$$

Теперь рассмотрим случай, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ отличны от нуля для любого $z \in \overline{D}$. Заметим, что область D содержит сингулярное многообразие, которое состоит из двух неподвижных особенностей: точка $z = 0$ и окружность L. Используя общее решение уравнения (2.1), приходим к интегральному уравнению

$$V + T(B\overline{V}) = \phi + F, \tag{2.3}$$

в котором $V = e^{-\Omega}u$, $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\operatorname{Im}\Omega}$, $F = T(e^{-\Omega}f)$, причём вид функции Ω указан в лемме 1. В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобное уравнение возникало у И.Н. Векуа, который для его обращения предложил [9, с. 28] метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения.

Для рассмотрения интегрального уравнения (2.3) предварительно изучим действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(T_0\varphi)(z) = \int\limits_D \frac{\varphi(\zeta)\, d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0}|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \quad z \in D,$$

с положительными α_j, $j = 1, 2$ [8].

Лемма 2. *Пусть постоянные* α_0, α_1, p, *удовлетворяющие неравенствам*

$$0 < \alpha_0 < 1 \leqslant \alpha_1 < 2, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 < 3, \quad p > 2/(3 - \alpha_0 - 2\alpha_1), \tag{2.4}$$

таковы, что

$$0 < \mu_0 = 3 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - 2/p < 1. \tag{2.5}$$

Тогда оператор $T_0 : L^p(D) \to C^\mu(\overline{D})$ *ограничен.*

Как будет показано ниже, в представлении общего решения этого уравнения (1.1) важную роль играет вещественный линейный интегральный оператор

$$(K\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{b_1(\zeta)}{|\zeta|^m(\zeta - z)}\overline{\varphi(\zeta)}\, d_2\zeta, \quad z \in D,$$

и связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 2. *При выполнении условий (2.4) и (2.5) имеют место следующие утверждения:*

(a) однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ *в классе* $C(\overline{D})$ *имеет конечное число линейно независимых (над полем* $\mathbb{R}$) *решений* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H(\overline{G})$, *и существуют такие линейно независимые суммируемые функции* $h_1, \ldots, h_n \in L(D)$, *что условия ортогональности*

$$\operatorname{Re}\int\limits_D f(\zeta)h_j(\zeta)\, d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.6}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$;

(b) для заданного $1 < \alpha_1 < 2$, *которое по отношению к* $\alpha_0 = m$ *удовлетворяет условиям (2.4), найдутся такие функции* $P_1(z,\zeta), P_2(z,\zeta) \in C(\overline{D} \times \overline{D})$, *что при выполнении условий (2.6) функция*

$$\varphi(z) = f(z) + (Pf)(z), \quad (Pf)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{[P_1(z,\zeta)f(\zeta) + P_2(z,\zeta)\overline{f(\zeta)}]\, d_2\zeta}{|\zeta|^m|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \tag{2.7}$$

является одним из решений уравнения $\varphi + K\varphi = f$;

(c) для достаточно малого $\varepsilon > 0$ *оператор* $P : C(\overline{D}) \to C^\varepsilon(\overline{D})$ *ограничен.*

Обратимся к уравнению (2.3) с ядром $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\operatorname{Im}\Omega}$, а также с правой частью $\phi + F$, где $F = T(e^{-\Omega}f)$.

Обозначим через $H(\overline{D}, e^\Omega)$ класс функций u, для которых $e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})$. Аналогичный смысл имеет и весовой класс $L^p(D, e^\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть* $n > 1$, $0 < m < 1$, *выбрано* $1 < \alpha < (3 - m)/2$ *и выполнены условия теоремы 1. Пусть* $e^{-\Omega}F \in L^p(D)$, $p > 2$, *так что функция* $F \in H(\overline{D})$. *Тогда в обозначениях теоремы 2 любое решение* u *уравнения (1.1) в классе* $u \in H(\overline{D}, e^\Omega)$ *представимо в виде*

$$u = e^\Omega\left[\phi + P\phi + F + PF + \sum_{j=1}^n \xi_j\varphi_j\right] \tag{2.8}$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, *где интегральный оператор* P *определяется формулой (2.7), а функция* $\phi(z) \in H(\overline{D})$ *аналитична в области* D *и удовлетворяет условиям*

$$\operatorname{Re}\int\limits_D (\phi + F)(\zeta)h_j(\zeta)\, d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.9}$$

Доказательства теорем 1–3 приведены в [8].

3. Решение задачи типа Римана–Гильберта. Мы не приводим хорошо известные результаты (см., например, [11, 12]) относительно классической задачи Римана–Гильберта для аналитических функций, задаваемой условием

$$\operatorname{Re} G\phi|_\Gamma = g,$$

где функция $G \in C^\nu(\Gamma)$ всюду отлична от нуля.

Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и функция $\zeta = \alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta| < 1$. Тогда по теореме Келлога [13] эта функция принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$. Считая контур Γ ориентированным против часовой стрелки, введём индекс Коши

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \arg G|_\Gamma.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теорем 2, 3 и $F \in L^p(D, e^\Omega)$, $p > 2$. Тогда задача R является фредгольмовой в классе $H(D, e^\Omega)$ и её индекс равен $1 - 2\varkappa$.*

Другими словами, однородная задача имеет конечное число m линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима при выполнении m' условий ортогональности на правую часть f уравнения (1.1) и правой части g задачи R, причём $m - m' = 1 - 2\varkappa$.

Доказательство. Подставляя представление (2.8) в условие (1.3), для аналитической функции ϕ вместе с дополнительными условиями (2.9) получим краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0(\phi + R\phi)|_\Gamma + \sum_1^n \xi_j \operatorname{Re}(G_0\varphi_j)|_\Gamma = g_0 \tag{3.1}$$

с коэффициентом $G_0 = \lambda e^h|_\Gamma$ и правыми частями

$$g_0 = g - \operatorname{Re}[G_0(F + PF)]|_\Gamma.$$

Неизвестными в этой задаче наряду с функцией ϕ являются и вещественные числа ξ_j.

Соотношения (3.1) запишем в следующем операторном виде:

$$R^0\phi + P^0\phi + \sum_1^n \xi_j \varphi_j^0 = g^0,$$

$$\operatorname{Re} \int_D \phi(\zeta) h_j(\zeta)\, d_2\zeta = \eta_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{3.2}$$

где положено

$$R^0\phi = \operatorname{Re} G_0\phi|_\Gamma, \quad P^0\phi = \operatorname{Re} G_0(P\phi)|_\Gamma, \quad \varphi_j^0 = \operatorname{Re} G_0\varphi_j|_\Gamma,$$

$$g^0 = g_0, \quad \eta_j = -\operatorname{Re} \int_D F(\zeta) h_j(\zeta)\, d_2\zeta.$$

Обозначим через X банахово пространство функций ϕ, которые аналитичны в D и принадлежат классу $C^\mu(\overline{D})$. Через Y^0 обозначим пространство вещественнозначных функций из класса $C^\mu(\Gamma)$. Тогда при достаточно малом μ оператор $R^0 : X \to Y^0$ ограничен, а с учётом теоремы 2 оператор $P^0 : X \to Y^0$ компактен. Как следует из теоремы 3, оператор $R^0 : X \to \to Y^0$ фредгольмов и его индекс равен $1 - 2\varkappa$, поэтому на основании известных свойств (см. [14, с. 122; 15]) фредгольмовых операторов это же верно и для оператора $N = (R^0 + P^0)$. С другой стороны, оператор системы (3.1) можно рассматривать как ограниченный оператор $\widetilde{N} : X \times \mathbb{R}^n \to Y^0 \times \mathbb{R}^n$, главная часть которого совпадает с N. Поэтому (см. [14, с. 122; 15]) оператор $\widetilde{N}$ также фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N = 1 - 2\varkappa$. Остаётся заметить [12, с. 134, 334], что система (3.2) эквивалентна исходной задаче R. Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность А.П. Солдатову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов Л.Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.
2. *Усманов З.Д.* Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе, 1993.
3. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
4. *Тунгатаров А., Абдыманапов С.А.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы, 2005.
5. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equat. 2004. V. 196. P. 67–90.
6. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Var. and Elliptic Equat. 2008. V. 53. P. 1111–1130.
7. *Гончаров А.Л., Климентов С.Б.* Построение нелокальных решений обобщённых систем Коши–Римана с сингулярной точкой // Междунар. школа-семинар по геометрии и анализу, посвящ. памяти Н.В. Ефимова. Тез. докл. Абрау-Дюрсо, 1998. С. 185–187.
8. *Расулов А.Б., Бободжанова М.А., Федоров Ю.С.* Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 1–16.
9. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
10. *Расулов А.Б.* Интегральные представления и краевые задачи для обобщённой системы Коши–Римана со сверхсингулярными многообразиями // Вестн. МЭИ. 2012. № 6. С. 23–30.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М, 1977.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
13. *Goluzin G.M.* Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Providence, 1969.
14. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М., 1970.
15. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Совр. математика. Фунд. направления. 2017. Т. 63. № 1. С. 1–189.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 25.06.2019 г.
После доработки 12.09.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.