СОДЕРЖАНИЕ

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 3–5

УДК 531

ПЛОСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОРОДНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С СУХИМ ТРЕНИЕМ

© 2021 г. В. Ф. Журавлёв

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: zhurav@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 11.03.2020 г.
После доработки 15.03.2020 г.
Принята к публикации 19.03.2020 г.

Рассмотрена задача о динамике твердого тела в форме параллелепипеда на плоскости при наличии двумерного сухого трения (обобщенная модель сухого трения Кулона–Контенсу [1]). Поскольку в этой модели трения нет разрывов первого рода по скорости, то в математическом плане задача проще, чем задачи с одномерным (по Кулону) сухим трением. В этом примере увеличение размерности приводит к регуляризации задачи.

Ключевые слова: динамика, сухое трение, параллелепипед, плоскость

DOI: 10.31857/S0572329921010141

Уравнения динамики прямоугольного однородного параллелепипеда, движущегося по горизонтальной плоскости с сухим трением (рис. 1) имеют вид [2]:

$$
\begin{aligned}
J\dot{u} &= -fl^2\sigma\iint_D \frac{(r^2u + x\nu_y - y\nu_x)dxdy}{\sqrt{r^2u^2 + \nu^2 + 2u(x\nu_y - y\nu_x)}}\\
m\dot{\nu}_x &= -fl^2\sigma\iint_D \frac{(\nu_x - uy)dxdy}{\sqrt{r^2u^2 + \nu^2 + 2u(x\nu_y - y\nu_x)}} + P\\
m\dot{\nu}_y &= -fl^2\sigma\iint_D \frac{(\nu_y + ux)dxdy}{\sqrt{r^2u^2 + \nu^2 + 2u(x\nu_y - y\nu_x)}} + Q
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь обозначено: J – момент инерции тела вокруг оси z, m – масса тела, $u = \omega l$, где ω – угловая скорость параллелепипеда вокруг оси z, а l – его длина, h – ширина, (ν_x, ν_y) – скорость центра масс, f – коэффициент сухого трения по Кулону, σ – равномерное распределение давления тела на плоскость, $r^2 = x^2 + y^2$, (P, Q) – приложенная к телу горизонтальная сила.

Стационарное решение

$$
u \equiv 0, \quad \nu_x \equiv p, \quad \nu_y \equiv q \tag{2}
$$

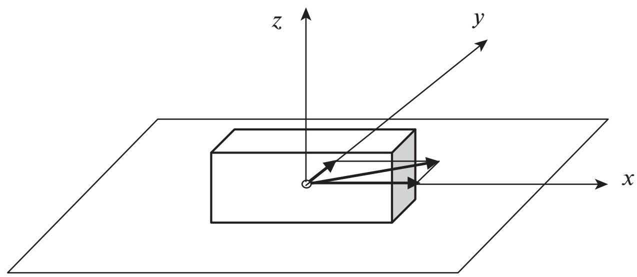


Рис. 1

Удовлетворяет уравнениям стационарного движения

$$\begin{gathered}\iint_D \frac{(xq-yp)dxdy}{\sqrt{p^2+q^2}} \equiv 0 \\ -F\iint_D \frac{pdxdy}{\sqrt{p^2+q^2}} + P \equiv -\frac{Fphl}{\sqrt{p^2+q^2}} + P \equiv 0 \\ -F\iint_D \frac{qdxdy}{\sqrt{p^2+q^2}} + Q \equiv -\frac{Fqhl}{\sqrt{p^2+q^2}} + Q \equiv 0\end{gathered} \tag{3}$$

где $F = fl^2\sigma$.

Откуда следует:

$$\frac{p}{P} = \frac{q}{Q}$$

т.е. любое стационарное движение происходит в направлении приложенной силы. Соотношения (3) позволяют выразить компоненты установившейся скорости (p, q) через компоненты приложенной силы (P, Q).

Для исследования устойчивости стационарного решения (2) проварьируем его

$$u = \delta u, \quad \nu_x = p + \delta\nu_x, \quad \nu_y = q + \delta v_y$$

и запишем уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} J\delta\dot{u} &= -\frac{fl^2N(p^2l^2+q^2h^2)}{12\sqrt{(p^2+q^2)^3}}\delta u \\ m\delta\dot{\nu}_x &= -\frac{fl^2qN(q\delta v_x - p\delta v_y)}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}} \\ m\delta\dot{\nu}_y &= \frac{fl^2pN(q\delta v_x - p\delta v_y)}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}}\end{aligned} \tag{4}$$

где $N = \sigma lh$ – величина силы, прижимающей трущиеся тела друг к другу (вес параллелепипеда).

Уравнения в вариациях (4) распались. Уравнение по угловой скорости δu отделилось от уравнений по линейной скорости. Стационарное решение $\delta u = 0$ в первом уравнении является, с очевидностью, асимптотически устойчивым.

Устойчивость тривиального решения $(\delta\nu_x, \delta\nu_y) = 0$ может быть изучена анализом двух последних уравнений системы (4):

$$\begin{aligned} \delta\dot{\nu}_x &= -a(q\delta\nu_x - p\delta\nu_y) \\ \delta\dot{\nu}_y &= b(q\delta\nu_x - p\delta\nu_y) \end{aligned} \qquad (5)$$

где $a = fl^2qN/mr^3$, $b = fl^2pN/mr^3$.

Устойчивость определяется корнями характеристического уравнения:

$$\|A - \lambda E\| = 0, \qquad (6)$$

в котором

$$A = \begin{Vmatrix} -aq & ap \\ bp & -bq \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение (6), следовательно, имеет вид:

$$\lambda^2 + (bp - aq)\lambda = 0$$

Его корни таковы

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(bp + aq) = -\frac{h(p^2 + q^2)}{fl\sigma m}$$

Нулевой корень объясняется наличием у системы (5) стационарного интегрального многообразия $q\delta\nu_x - p\delta\nu_y \equiv 0$.

Второй корень λ_2 на этом многообразии является строго отрицательным и, следовательно, система (5) является асимптотически устойчивой.

В монографии [2] уравнения (1) рассматривались приближенно посредством замены двукратных интегралов в их правых частях аппроксимациями Паде в первом приближении. Анализ этой задачи в настоящей работе показывает полное качественное соответствие выполненного ранее приближенного исследования тому, что выполнено выше.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № АААА-А20-120011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В.Ф.* О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. № 3. С. 58–76.
2. *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 6–16

УДК 539.374

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МОНОТОННЫХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

© 2021 г. Д. Р. Абашев[a], В. С. Бондарь[a,*]

[a] *Московский политехнический университет, Москва, Россия*

**e-mail: v.s.bondar@mospolytech.ru*

Поступила в редакцию 01.11.2018 г.
После доработки 08.10.2019 г.
Принята к публикации 05.12.2019 г.

На основе анализа результатов экспериментальных исследований образцов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком (контролируемые деформации) процессе деформирования, включающем в себя последовательности монотонных и циклических режимов нагружения, выявлены некоторые особенности и различия процессов изотропного и анизотропного упрочнений при монотонных и циклических нагружениях. Для описания этих особенностей в рамках теории пластичности в пространстве тензора пластических деформаций вводится критерий смены направления пластического деформирования и поверхность памяти, позволившие разделить процессы монотонного и циклического деформирования. Для описания переходных процессов формулируются эволюционные уравнения для параметров изотропного и анизотропного упрочнений. Сравниваются расчетные и экспериментальные изменения напряженно-деформированных состояний по процессу монотонных и циклических нагружений.

Ключевые слова: монотонные и циклические нагружения, теория пластичности, поверхность памяти, базовый эксперимент, метод идентификации

DOI: 10.31857/S0572329921010025

Введение. Нестационарные и несимметричные процессы циклического деформирования состоят из последовательности монотонных и циклических режимов нагружения. Математическое моделирование таких процессов в условиях жесткого (контролируемые деформации) нагружения и особенно мягкого (контролируемые напряжения) нагружения представляют собой весьма сложную задачу. К тому же при реализации таких режимов возникают трудно описываемые процессы посадки и вышагивания (ratcheting) петли гистерезиса. Что же касается оценки и прогнозирования ресурса в условиях нестационарных и несимметричных циклических нагружений, то в этих случаях накопление повреждений необходимо определять по всему процессу деформирования, учитывая, что накопление повреждений существенно нелинейно.

Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях строится, в основном, на вариантах теорий пластичности, относящихся к классу теорий пластического течения при комбинированном (изотропном и анизотропном) упрочнении, обзор и анализ которых содержатся в работах [1–12]. В настоящей работе математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений базируется на варианте теории пластичности [1, 9], который, как показано в работе [10], является наиболее адекватным вариантом описания процессов деформирования и разрушения при циклических нагружениях по сравнению с моделями Коротких [2] и Шабоша [6–8].

Для выявления особенностей деформирования при нестационарном и несимметричном циклическом нагружении рассматривается жесткое нагружение в условиях растяжения-сжатия образцов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т, которое представляет собой последовательность пяти этапов: циклическое, монотонное, циклическое, монотонное, циклическое вплоть до разрушения. Анализ переходных процессов от циклического к монотонному и от монотонного к циклическому показывает необходимость разделения процессов монотонного и циклического деформирования. Для этого в пространстве пластических деформаций вводится критерий смены направления пластического деформирования и поверхность памяти, разделяющая циклические и монотонные процессы деформирования. Далее в уравнения теории пластичности вводятся уравнения эволюции параметров изотропного и анизотропного упрочнений для монотонных и циклических режимов нагружения.

Разделение процессов монотонного и циклического деформирования имеет место и в модели Коротких [2–4], но только для описания эволюции изотропного упрочнения. Поверхность памяти в этой модели строится в пространстве девиатора микронапряжений с определением в процессе деформирования максимального значения интенсивности микронапряжений. В работах [2, 11] для описания эволюции анизотропного упрочнения в пространстве девиатора пластических деформаций вводится поверхность памяти с определением в процессе деформирования интенсивности максимальной амплитуды пластической деформации. Далее в работе [12] для описания эволюции анизотропного упрочнения используется такая же поверхность памяти, как и ранее для изотропного упрочнения. Все эти подходы [2, 11, 12] обладают одним существенным недостатком – достигнутый размер поверхности памяти имеет возможность в конце цикла и уменьшиться и увеличиться и это приводит к тому, что в конце каждого цикла возможно как монотонное, так и циклическое нагружение. К томе же согласно эволюционному уравнению для максимальной интенсивности микронапряжений при циклическом нагружении эта величина всегда уменьшается, хотя она должна оставаться постоянной на стабилизированном цикле. В заключение следует также сказать, что достаточного обоснования рассматриваемых подходов [2, 11, 12] в литературе нет.

С учетом выявленных особенностей монотонных и циклических нагружений для уточненных уравнений модифицированной теории пластичности определен базовый эксперимент и сформулирован метод идентификации материальных функций. Получены материальные функции нержавеющей стали 12Х18Н10Т при комнатной температуре. Приводится сравнение результатов расчетных и экспериментальных исследований нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком нагружении, состоящем из последовательности монотонных и циклических режимов нагружения. Анализируется кинетика напряженно-деформированного состояния, рассматриваются изменения размаха и среднего напряжения цикла в процессе этапов циклических нагружений.

1. Основные уравнения теории пластичности. Рассматривается весьма простой вариант теории пластичности [9, 10], являющийся частичным вариантом теории неупругости [1]. Вариант теории пластичности относится к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном упрочнении. Область применимости варианта теории пластичности ограничивается малыми деформациями начально изотропных металлов при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь.

Далее приводится сводка основных уравнений варианта теории пластичности.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{I} \tag{1.2}$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{a}):(\mathbf{s}-\mathbf{a}) - C^2 = 0 \tag{1.3}$$

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}^p_{u*}, \quad \dot{\varepsilon}^p_{u*} = \left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \sum_{m=1}^{M} \dot{\mathbf{a}}^{(\mathbf{m})} \tag{1.5}$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{(\mathbf{1})} = \frac{2}{3}g^{(1)}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} + g_a^{(1)}\mathbf{a}^{(\mathbf{1})}\dot{\varepsilon}^p_{u*} \tag{1.6}$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{(\mathbf{2})} = \frac{2}{3}g^{(2)}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} + g_a^{(2)}\mathbf{a}^{(\mathbf{2})}\dot{\varepsilon}^p_{u*} \tag{1.7}$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{(\mathbf{m})} = \frac{2}{3}g^{(m)}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} \quad (m = 3,\ldots,M) \tag{1.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\lambda = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}^*}{\sigma_u^*}\dot{\varepsilon}^p_{u*}, \quad \mathbf{s}^* = \mathbf{s} - \mathbf{a}, \quad \sigma_u^* = \left(\frac{3}{2}\mathbf{s}^* : \mathbf{s}^*\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.9}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{u*} = \frac{1}{E_*}\frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}^* : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_u^*}, \quad E_* = q_\varepsilon \sum_{m=1}^{M} g^{(m)} + \sum_{m=1}^{2} g_a^{(m)} a_u^{(m)*}, \quad a_u^{(m)*} = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}^* : \mathbf{a}^{(\mathbf{m})}}{\sigma_u^*} \tag{1.10}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{u*} = \frac{1}{E_* + 3G}3G\frac{\mathbf{s}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sigma_u^*}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}^p_{u*} \le 0 - \text{упругость} \\ \sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}^p_{u*} > 0 - \text{упругопластичность} \end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\dot{\omega} = \alpha\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\frac{\mathbf{a}^{(\mathbf{2})} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}}{W_a}, \quad \alpha = (\sigma_a^{(2)}/a_u^{(2)})^{n_\alpha}, \quad a_u^{(2)} = \left(\frac{3}{2}\mathbf{a}^{(\mathbf{2})} : \mathbf{a}^{(\mathbf{2})}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.13}$$

Здесь $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{e}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}$ – тензоры скоростей полной, упругой и пластической деформаций; $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}, \mathbf{s}^*, \mathbf{a}$ – тензор напряжений, девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений; ε^p_{u*} – накопленная пластическая деформация; ω – поврежденность; E, ν – модуль Юнга, коэффициент Пуассона; C – радиус (размер) поверхности нагружения; $\mathbf{a}^{(\mathbf{1})}, \mathbf{a}^{(\mathbf{2})}, \mathbf{a}^{(\mathbf{m})}$ – микронапряжения (девиатор смещения центра поверхности нагружения) первого, второго и третьего типов; q_ε, $g^{(m)}$, $g_a^{(m)}$ – определяющие функции, связь которых с материальными будет приведена ниже.

2. Эксперимент. В статье рассматриваются результаты экспериментальных исследований образцов нержавеющей стали 12Х18Н10Т. Химический состав и механические свойства стали представлены в табл. 1.

Испытания проведены на универсальной испытательной машине Zwick Z100. Геометрия и размеры испытанных образцов соответствуют требованиям стандарта ASTM

Таблица 1

C	Si	Mn	Ni	S	P	Cr	Cu	Ti	Fe
<0.12	<0.8	<2	9–11	<0.02	<0.035	17–19	<0.3	0.4–1	~67
Модуль Юнга (ГПа)		Коэффициент Пуассона		Предел текучести (МПа)		Предел прочности (МПа)		Относительное удлинение при разрыве (%)	
198		0.28		196		510		40	

E606. Диаметр рабочей части образца 8 мм, длина 24 мм, радиусы перехода от рабочей к захватной части 32 мм (рис. 1). Деформация в процессе испытания измерялась и контролировалась по навесному экстензометру с измерительной базой 10 мм.

3. Монотонное и циклическое нагружения нержавеющей стали 12Х18Н10Т. Рассматриваются результаты экспериментальных исследований нержавеющей стали 12Х18Н10Т при одноосном жестком нагружении, включающем в себя этапы монотонных и циклических нагружений. Эксперимент состоит из 5-ти этапов нагружения:

– 1 этап включает в себя циклическое нагружение с частотой 0.2 Гц при $\varepsilon_m^{(1)} = 0$, $\Delta\varepsilon^{(1)} = 0.016$ и $N^{(1)} = 20$ циклов;

– 2 этап включает в себя монотонное растяжение до $\varepsilon^{(2)} = 0.05$;

– 3 этап включает в себя циклическое нагружение с частотой 0.4 Гц при $\varepsilon_m^{(3)} = 0.05$, $\Delta\varepsilon^{(3)} = 0.012$ и $N^{(3)} = 200$ циклов;

– 4 этап включает в себя монотонное растяжение до $\varepsilon^{(4)} = 0.1$;

– 5 этап включает в себя циклическое нагружение с частотой 0.4 Гц при $\varepsilon_m^{(5)} = 0.1$, $\Delta\varepsilon^{(5)} = 0.012$ и $N^{(5)} = N_f$ циклов до разрушения.

Здесь $\varepsilon_m^{(i)}$ – средняя деформация цикла; $\Delta\varepsilon^{(i)}$ – размах деформации цикла; $\varepsilon^{(i)}$ – достигаемая деформация при монотонном нагружении; $\mathbf{N}^{(i)}$ – число циклов.

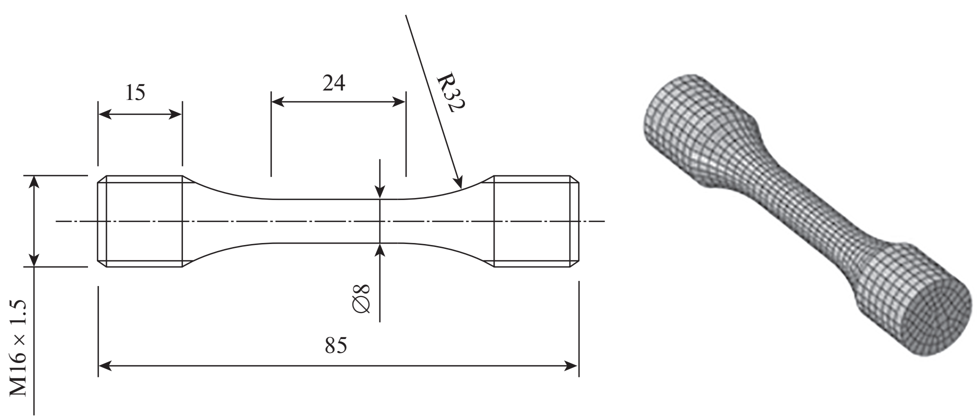


Рис. 1

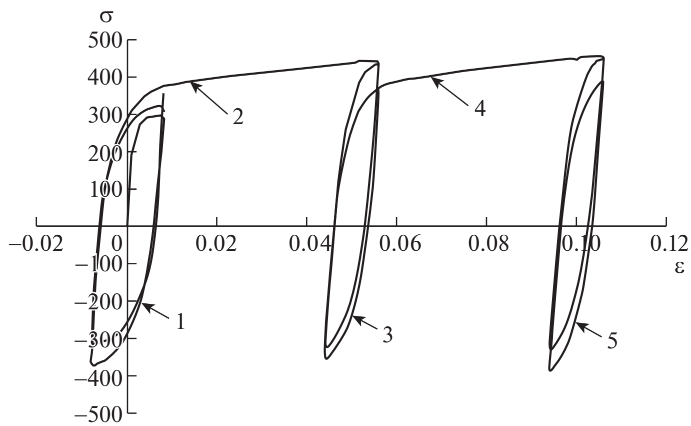


Рис. 2

На рис. 2 приведена экспериментальная диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ (σ [МПа]) деформирования стали 12Х18Н10Т, включающая все пять этапов нагружения. На циклических диаграммах первого, третьего и пятого этапов показаны петли для первого и последнего циклов. Далее анализируются полученные экспериментальные результаты.

Циклическое деформирование на первом этапе показывает, что сталь 12Х18Н10Т на начальной стадии циклически упрочняется с последующим замедлением процесса циклического упрочнения до незначительного ($dC_p/d\varepsilon^p_{u*} \approx 1$ МПа) и сталь становится практически циклически стабильной.

На третьем и пятом этапах циклического деформирования имеет место посадка петли гистерезиса. Причем процессы посадки на этих этапах идентичны – как будто и не было предварительной истории деформирования. Таким образом модуль E_a, входящий в эволюционное уравнение для микронапряжений первого типа и обеспечивающий процесс посадки петли, должен иметь одинаковое начальное значение $E_a = E_{a0}$. Т.е. на этапах монотонного нагружения после циклических нагружений, на которых происходит падение E_a практически до нуля, должен происходить быстрый возврат модуля E_a к своему начальному значению E_{a0}.

На втором и четвертом этапах монотонных нагружений упрочнение является одинаковым и постоянным. Упрочнение здесь определяется модулем E_{a0} и в меньшей степени некоторым модулем монотонного изотропного упрочнения.

Таким образом поведение модуля E_a, характеризующего анизотропное упрочнение, и, соответственно, поведение параметров изотропного упрочнения существенно зависит от режима процесса деформирования – циклического или монотонного.

Для разделения процессов монотонного и циклического деформирования в пространстве тензора пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$ вводится поверхность памяти, ограничивающая область циклического деформирования. Поверхность определяется положением ее центра $\boldsymbol{\xi}$ и ее радиусом (размером) C_ε. Для вычисления центра и размера поверхности вводится два тензора пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p(1)}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p(2)}}$, определяющие границы поверхности. В начале деформирования эти переменные равны нулю. Определение смещения и размера поверхности памяти происходит в момент смены направления пластического деформирования. В качестве критерия смены направления принимается следующее условие:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}_{(\mathbf{t-0})} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}_{(\mathbf{t})} < 0$$

где $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}_{(\mathbf{t})}$ – тензор скоростей пластической деформации в текущей момент времени; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}_{(\mathbf{t-0})}$ – тензор скоростей пластической деформации в предшествующий момент времени.

В этот момент изменение границ, центра и размера поверхности нагружения описывается на основе следующих соотношений:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(1)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}, \quad \xi = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(2)}}{2}, \quad C_\varepsilon = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(2)}}{2}\right) : \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}(2)}}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Тогда условием циклического деформирования является деформирование в пределах поверхности памяти

$$\left[\frac{2}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \xi) : (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}} - \xi)\right]^{\frac{1}{2}} \le C_\varepsilon$$

Вне поверхности памяти деформирование является монотонным.

На основании, изложенных выше, особенностей монотонных и циклических нагружений для модуля E_a и определяющих функций для микронапряжений формулируются следующие уравнения:

$$g^{(1)} = E_a, \quad g^{(2)} = \beta^{(2)}\sigma_a^{(2)}, \quad g_a^{(2)} = -\beta^{(2)}$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)}\sigma_a^{(m)} \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \ge \sigma_a^{(m)} \cap \mathbf{a}^{(\mathbf{m})} : \mathbf{s}^* > 0, \end{cases} \quad a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2}\mathbf{a}^{(\mathbf{m})}\mathbf{a}^{(\mathbf{m})}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (m = 3,\ldots,M)$$

$$\dot{E}_a = \begin{cases} -K_E\left(\dfrac{E_a}{E_{a0}}\right)^{n_E}\dot{\varepsilon}^p_{u*} & \text{при циклическом нагружении} \\ M_E\left(\dfrac{E_{a0} - E_a}{E_{a0}}\right)\dot{\varepsilon}^p_{u*} & \text{при монотонном нагружении} \end{cases}$$

$$g_a^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{E_a}\dfrac{dE_a}{d\varepsilon^p_{u*}} & \text{при циклическом нагружении} \\ 0 & \text{при монотонном нагружении} \end{cases}$$

Итак, для описания микронапряжений надо определить следующие материальные функции:

$E_{a0}, \sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)}$ – модули анизотропного упрочнения;

K_E, n_E, M_E – параметры анизотропного упрочнения при циклическом и монотонном деформировании.

Для определения этих материальных функций используются результаты эксперимента на рис. 2.

Модуль анизотропного упрочнения E_{a0} определяется по формуле

$$E_{a0} = \frac{\sigma_m^{(3)}}{\varepsilon_m^{p(3)}}$$

где $\sigma_m^{(3)}$ – среднее напряжение на первом цикле третьего этапа; $\varepsilon_m^{p(3)}$ – средняя пластическая деформация на первом цикле третьего этапа.

Модули анизотропного упрочнения $\sigma_a^{(m)}$ и $\beta^{(m)}$ определяются из обработки циклической диаграммы последнего полуцикла первого этапа по методике описанной в работах [1, 9].

Параметры анизотропного упрочнения K_E и n_E определяются на основе результатов посадки петли гистерезиса на третьем и пятом этапах. Для этого строится зависимость в координатах

$$Y_E = \ln\left[\frac{\sigma_m(N-1)-\sigma_m(N)}{2\Delta\varepsilon^p\varepsilon_m^p}\right], \quad X_E = \ln\left[\frac{\sigma_m(N)}{\varepsilon_m^p E_{a0}}\right]$$

где N – номер цикла; $\sigma_m(N)$ – среднее напряжение N-го цикла; $\Delta\varepsilon^p$ – размах пластической деформации; ε_m^p – средняя пластическая деформация. Полученная зависимость аппроксимируется линейной функцией

$$Y_E = a_E X_E + b_E, \quad K_E = \exp(b_E), \quad n_E = a_E$$

Параметр анизотропного упрочнения M_E при монотонном нагружении определяется из соображения восстановления параметра E_a с 0 до значения E_{a0} при изменении пластической деформации при монотонном нагружении за ε_{st}^p. Тогда параметр M_E будет определяться по формуле

$$M_E = \frac{E_{a0}}{\varepsilon_{st}^p}$$

Определив микронапряжения по всему процессу от первого до пятого этапа нагружения, можно определить поведение размера (радиуса) поверхности нагружения, т.е. изменение изотропного упрочнения в переходных процессах от циклического к монотонному и от монотонного к циклическому деформированию.

На рис. 3 приведено изменение размера поверхности нагружения (функционала C [МПа]) по всему процессу деформирования от первого до пятого этапа нагружения. Пунктиром на рис. 3 показана функция изотропного упрочнения $C = C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ при циклическом нагружении.

Анализ результатов, приведенных на рис. 3, показывает, что при переходе от циклического деформирования к монотонному (этапы два и четыре) происходит увеличение интенсивности изотропного упрочнения, а при переходе от монотонного к циклическому (этапы три и пять) происходит медленное уменьшение изотропного упрочнения и оно стремится к изотропному $C = C_p(\varepsilon_{u*}^p)$ при циклическом деформировании.

На основании, изложенных выше, особенностей изменения изотропного упрочнения при циклических и монотонных нагружениях для определяющей функции изотропного упрочнения принимается следующая зависимость:

$$q_\varepsilon = \begin{cases} \left[\dfrac{dC_p}{d\varepsilon_{u*}^p} - K_C\left(\dfrac{C-C_p}{C_p}\right)^{n_C}\right] & \text{при циклическом нагружении} \\ \left[\dfrac{dC_p}{d\varepsilon_{u*}^p} + M_C\right] & \text{при монотонном нагружении} \end{cases}$$

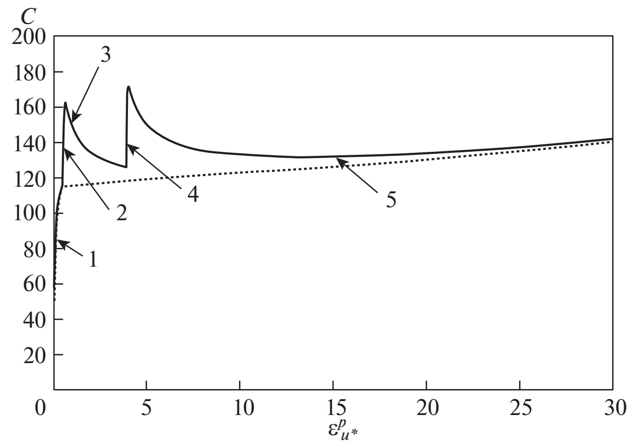


Рис. 3

Итак, для описания изотропного упрочнения надо определить следующие материальные функции:

$C_p(\varepsilon^p_{u*})$ – функция изотропного упрочнения при циклическом нагружении;

K_C, n_C, M_C – модули изотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении.

Для определения этих материальных функций используются результаты эксперимента на рис. 3.

Функция изотропного упрочнения при циклическом нагружении $C_p(\varepsilon^p_{u*})$ определяется на основе изменения размера поверхности на первом, третьем и пятом этапах – пунктирная кривая на рис. 3.

Параметры изотропного упрочнения K_C и n_C при циклическом нагружении определяются на основе результатов уменьшения размера поверхности нагружения на третьем и пятом этапах нагружения. Для этого строится зависимость в координатах

$$Y_C = \ln\left[\frac{d\left(C_p - C\right)}{d\varepsilon^p_{u*}}\right], \quad X_C = \ln\left[\frac{\left(C - C_p\right)}{C_p}\right]$$

Полученная зависимость аппроксимируется линейной функцией

$$Y = a_C X_C + b_C, \quad K_C = \exp\left(b_C\right), \quad n_C = a_C$$

Параметр изотропного упрочнения M_C при монотонном нагружении определяется по наклону кривой деформирования на втором и четвертом этапах по формуле

$$M_C = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} - E_{a0} - \frac{dC_p}{d\varepsilon^p}$$

4. Верификация модифицированной теории пластичности. С целью верификации модифицированной теории пластичности и проверки адекватности аппроксимаций материальных функций проводится расчет кинетики напряженно-деформированного состояния нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком циклическом и монотонном нагружении по программе (пять этапов) изложенной во втором разделе. Для расчетов использовались материальные функции, полученные на основе экспериментальных

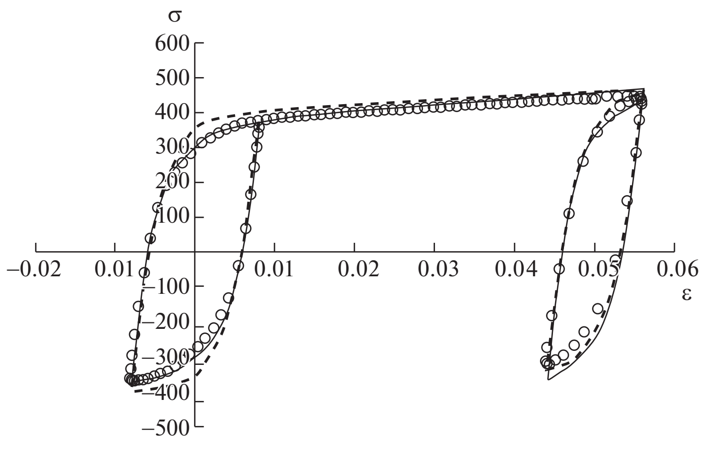


Рис. 4

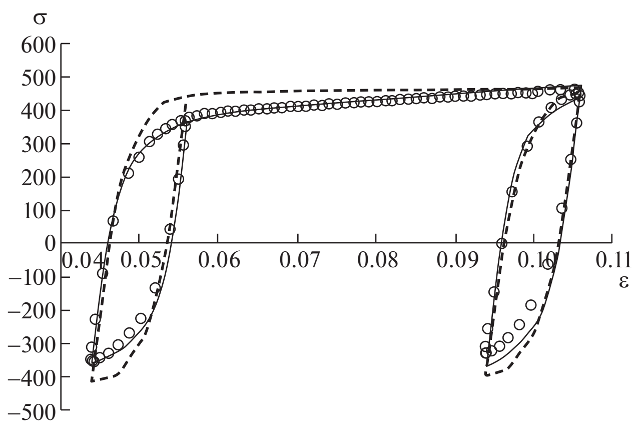


Рис. 5

данных на рис. 2. Сравнения расчетных (сплошные кривые) и экспериментальных (светлые кружки) результатов приведены на рис. 4–7. Пунктирными кривыми приведены результаты расчетов на основе варианта [10]. На рис. 4 показана циклическая диаграмма 20-го цикла (последнего) первого этапа, монотонное нагружение на втором этапе и первый цикл третьего этапа. На рис. 5 показана циклическая диаграмма 200-го цикла (последнего) третьего этапа, монотонное нагружение на четвертом этапе и первый цикл пятого этапа. Изменения размаха напряжения и среднего напряжения циклов на первом, третьем и пятом этапах нагружения приведены на рис. 6, 7. Все напряжения и размах напряжений на рис. 4–7 измеряются в МПа.

Наблюдается значительное улучшение описания кинетики напряженно-деформированного состояния на основе предложенного здесь варианта по сравнению с предыдущим [10]. Что же касается изменений размаха и среднего напряжения циклов, то предложенный вариант достаточно адекватно описывает и эти довольно сложные процессы.

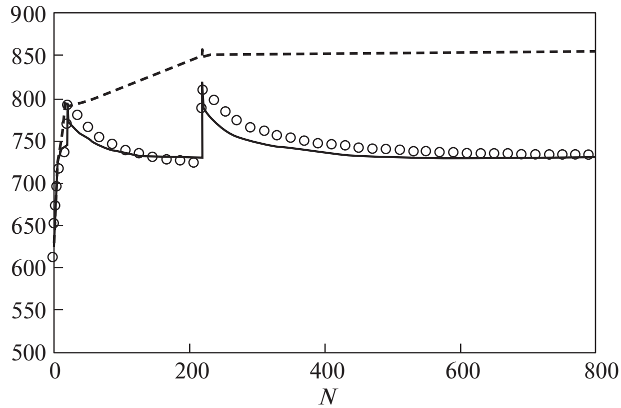


Рис. 6

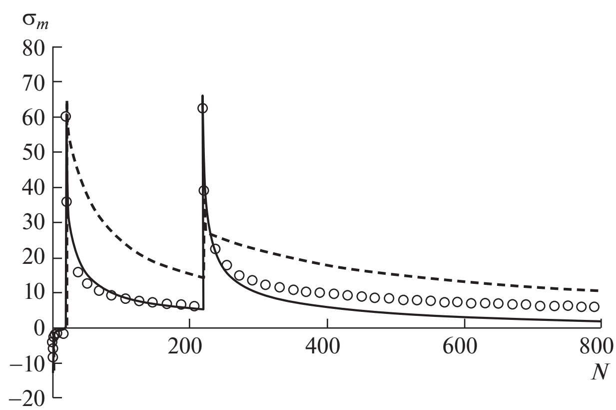


Рис. 7

Заключение. На основе анализа результатов экспериментальных исследований нержавеющей стали установлено, что изотропное и анизотропное упрочнения существенно различны при монотонном и циклическом деформировании. Также имеют место переходные процессы упрочнения при смене процессов монотонного и циклического, циклического и монотонного деформирования.

С учетом выявленных особенностей монотонных и циклических нагружений, уточнены уравнения модифицированной теории пластичности. Определен базовый эксперимент, сформулирован метод идентификации материальных функций и получены материальные функции нержавеющей стали 12Х18Н10Т при комнатной температуре.

Проведено сравнение результатов расчетных и экспериментальных исследований нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком нагружении, состоящем из последовательности монотонных и циклических режимов нагружения. Анализировалась кинетика напряженно-деформированного состояния, рассматривались изменения размаха и среднего напряжения цикла в процессе циклических нагружений. Получено надежное соответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Достаточно адекватное описание теорией процессов изменения кинетики, размаха и среднего напряжения цикла при жестком нагружении позволяет предположить возможность более адекватного описания и процессов мягкого нагружения особенно при нестационарных несимметричных режимах нагружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bondar V.S.* Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013. 194 p.
2. *Волков И.А., Коротких Ю.Г.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 424 с.
3. *Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Каплиенко А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А.* Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 282 с.
4. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г.* Прикладная теория вязкопластичности: Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2015. 317 с.
5. *Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А.* Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 347 с.
6. *Бессон Ж. [и др].* Нелинейная механика материалов. Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та, 2010. 397 с.
7. *Chaboche J.-L.* A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. 2008. V. 24. P. 1642–1692.
8. *Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F.* Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // Int. J. of Plasticity. 2012. V. 35. P. 44–66.
9. *Bondar V.S., Danshin V.V., Vu L.D., Duc N.D.* Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state // Mechanics of advanced materials and structures. 2018. V. 25. № 12. P. 1009–1017.
10. *Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К.* Сравнительный анализ вариантов теорий пластичности при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 23–44.
11. *Коротких Ю.Г.* Описание процессов накопления повреждений материала при неизотермическом вязкопластическом деформировании // Проблемы прочности. 1985. № 1. С. 18–23.
12. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С. и др.* Моделирование усталостной долговечности поликристаллических конструкционных сплавов при блочном несимметричном малоцикловом нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2018. № 1. С. 15–30.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 17–43

УДК 521.1

УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИКВАТЕРНИОНОВ И ДУАЛЬНЫХ МАТРИЦ

 Ю.Н. Челноков

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Поступила в редакцию 20.01.2019 г.
После доработки 17.02.2019 г.
Принята к публикации 28.02.2019 г.

Разрабатывается в нелинейной динамической постановке с использованием бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного движений). Управления обеспечивают асимптотическую устойчивость в большом любого выбранного программного пространственного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого пространственного движения твердого тела. Для построения законов управления используются бикватернионные и дуальные матричные модели пространственного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и приведение построенных нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры за счет использования предлагаемых нелинейных обратных связей в законах управления.

Рассматриваются бикватернионные модели пространственного движения твердого тела, дается постановка задачи управления движением твердого тела, приводятся различные формы нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела в бикватернионных и винтовых переменных, удобные для построения законов управления. Предлагаются различные дуальные матричные (винтовые) законы управления пространственным движением твердого тела, для которых нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела принимают вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка (относительно винтовой части бикватерниона ошибки положения твердого тела), инвариантных относительно любого выбранного программного пространственного движения твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные дуальные или матричные дуальные) этих уравнений являются коффициентами усиления нелинейных обратных связей в предлагаемых дуальных законах управления, обеспечивающих нужное качество переходных процессов управления. Обсуждается определение коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, свойства управляемого движения твердого тела.

Ключевые слова: твердое тело, пространственное движение, программное и стабилизирующее управления, винтовые законы управления, бикватернион

DOI: 10.31857/S0572329921010049

Введение. *Применение кватернионов Гамильтона в задачах управления вращательным движением твердого тела.* Построение управления движением твердого тела в традиционной постановке включает задачу построения программного движения, программного управления и задачу построения управления, стабилизирующего программное движение в малом. Задача управления угловым движением твердого тела в настоящее время, как правило, решается с использованием кватернионов поворота Гамильтона, являющихся наиболее удобным средством описания углового (вращательного) движения твердого тела, и с использованием кватернионных кинематических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона), имеющих известные качественные преимущества перед уравнениями в угловых переменных (в углах Эйлера—Крылова).

Задача построения программного углового движения и программного управления с использованием кватернионов во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления (наиболее часто с использованием принципа максимума Понтрягина) [1—10]. Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольно заданных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости твердого тела не найдено. Поэтому в общем случае приходится рассчитывать лишь на приближенное аналитическое или численное решение задачи. Построение стабилизирующего управления осуществляется на основе линеаризованных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела и также встречает серьезные трудности в случаях, когда эти уравнения нестационарны.

Большое количество работ посвящено другому подходу к построению управления угловым движением твердого тела с использованием кватернионов [11—17]. Этот подход использует принцип обратной связи для формирования законов управления и метод Ляпунова для анализа устойчивости управляемого углового движения твердого тела. Во многих работах этот подход используется для построения управления большими пространственными поворотами космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело. В большинстве из этих работ изучается задача переориентации твердого тела: задача перевода твердого тела из одного фиксированного углового положения в другое (при нулевых угловых скоростях твердого тела в начальном и конечном положениях). Законы управления строятся в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки ориентации и вектора угловой скорости твердого тела так, чтобы процесс переориентации был асимптотически устойчивым в большом или в целом. Уравнения движения твердого тела, замкнутые такими законами управления, получаются нелинейными, что затрудняет изучение динамики управляемого углового движения твердого тела и определение коэффициентов усиления обратных связей, гарантирующих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов.

В работах автора статьи [18—25] разработаны в нелинейной постановке с использованием кватернионов теория и методы аналитического построения управлений угловым движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом или в целом любого выбранного программного углового движения и желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела. Для построения законов управления использованы кватернионные модели вращательного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и приведение дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела к эталонным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры (за счет определенного формирования нелинейных обратных связей в законах управления).

В этих работах предложены кватернионные динамические модели вращательного движения твердого тела в нормированных и ненормированных кватернионах поворотов, дана постановка задач управления ориентацией твердого тела, получены различные формы дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела в кватернионных и векторных переменных, удобные для построения законов управления. Рассмотрены эталонные дифференциальные уравнения, описывающие желаемую динамику управляемого углового движения твердого тела, синтезированы три группы законов управления, использующих кватернионные (нормированные и ненормированные) и векторные кинематические параметры вращательного движения твердого тела: 1) векторные части нормированных кватернионов ориентации, 2) векторы конечных поворотов, 3) ненормированные кватернионы поворотов. Рассмотрено определение коэффициентов (скалярных, матричных, кватернионных) усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих желаемые качественные и количественные характеристики переходных процессов, предложены алгоритмы управления, реализующие предложенные законы управления.

Отметим, что использование нормированных кватернионов поворотов в теории и практике управления вращательным движением твердого тела стало общепринятым, поскольку они являются наиболее простым и удобным средством математического описания вращательного движения твердого тела. Использование нами (при синтезе третьей группы законов управления) ненормированных кватернионов поворотов приводит к необходимости введения расширенного (восьмимерного) вектора состояния твердого тела и расширенного (четырехмерного) вектора управления вместо обычно используемых семимерного вектора состояния и трехмерного вектора управления. Роль переменных состояния твердого тела играют в этом случае ненормированный кватернион ориентации твердого тела и кватернион угловой скорости с ненулевой скалярной частью, а роль управления – кватернион углового ускорения (или кватернион управляющего момента) с ненулевой скалярной частью. Такое расширение вектора состояния и вектора управления позволяет провести синтез четырехмерного стабилизирующего управления в кватернионном виде без разделения кватернионных уравнений движения на скалярную и векторную части. Выделение скалярной и векторной частей, необходимое для построения вектора углового ускорения твердого тела и вектора управляющего момента, проводится на конечной стадии (в конечных соотношениях).

Отметим также, что решение задачи синтеза стабилизирующего управления на основе кватернионных моделей возмущенного углового движения твердого тела, использующих нормированные кватернионы поворотов, кватернионы угловой скорости и углового ускорения с нулевыми скалярными частями, в рамках предложенного в этих работах метода синтеза требует разделения уравнений возмущенного движения на скалярную и векторную части в рамках самой процедуры синтеза, что приводит к более сложному решению задачи синтеза. Кроме этого, законы управления, построенные на основе этих моделей, а также на основе векторных моделей, вырождаются при определенном угловом положении твердого тела в пространстве (при равенстве 180 градусам эйлерова угла поворота твердого тела в его возмущенном движении), в то время как использование при синтезе "четырехмерных" угловых скоростей и ускорений позволяет построить невырождающиеся законы управления.

Применение бикватернионов Клиффорда в задачах управления пространственным движением твердого тела. Применение бикватернионов Клиффорда [26–30] в задачах управления пространственным движением твердого тела было начато в кинематических задачах управления движением твердого тела. До этого [29–38] в кинематических задачах управления вращательным движением твердого тела широко использовались кватернионы Гамильтона. В этих задачах управления в качестве математических моделей движения тела рассматриваются кинематические уравнения вращательного (углового) и (или) поступательного (траекторного) движения тела, в которых в качестве фазовой переменной выступает кватернион поворота Гамильтона или бикватернион конечного перемещения Клиффорда, а в качестве управлений — векторы угловой и (или) поступательной скоростей тела или кинематические винты. Цель кинематического управления — перевод твердого тела из его заданного начального положения (углового положения в случае рассмотрения углового (вращательного) перемещения или углового и линейного положения в случае рассмотрения общего пространственного перемещения) в требуемое конечное положение за счет сообщения телу требуемой угловой скорости или требуемых угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения программных (в частности, оптимальных) траекторий движения и программных управлений движением твердого тела. Также целью кинематического управления может быть перевод твердого тела из его заданного начального положения на любую выбранную программную траекторию углового (вращательного) или общего программного пространственного движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по программной траектории с требуемой программной угловой скоростью в случае рассмотрения углового движения или с требуемыми программными угловой и линейной скоростями в случае рассмотрения общего пространственного движения за счет сообщения телу требуемой стабилизирующей угловой скорости или требуемых стабилизирующих угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения стабилизирующих (в частности, оптимальных стабилизирующих) траекторий движения и управлений движением твердого тела.

Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела в силу следующих причин. Во-первых, они, в отличие от динамических задач управления, во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных траекторий и управлений движением твердого тела. Во-вторых, использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с методом решения обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику. В последнее время решения кинематических задач управления стали использоваться при синтезе управлений движением твердого тела в динамической постановке с использованием метода “бэкстеппинг”.

Кинематические задачи управления имеют ряд важных приложений, в частности, в задачах управления движением космических аппаратов, инерциальной навигации и в задачах управления движением роботов-манипуляторов.

Как известно, произвольное пространственное перемещение свободного твердого тела эквивалентно винтовому перемещению (теорема Шаля). Поэтому мгновенное пространственное движение свободного твердого тела представляет собой мгновенное винтовое движение. Кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной постановке изучалась в работах [38, 39]. Для получения аналитического решения задачи было использовано бикватернионное кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела, предложенное автором настоящей статьи в работах [40, 41] (см. также [29]).

Использование бикватернионного кинематического уравнения в теории кинематического управления движением свободного твердого тела позволяет применить мощный принцип перенесения Котельникова—Штуди [26—30], в соответствии с которым все результаты, полученные в задачах кинематического управления вращательным движением твердого тела с использованием кватернионного кинематического уравнения, могут быть формально перенесены на более общие задачи кинематического управления движением свободного твердого тела с использованием бикватернионного кинематического уравнения, если в кватернионных уравнениях и соотношениях, полученных при решении задач управления вращательным движением, кватернионные величины заменить на соответствующие бикватернионные величины, используемые в задачах кинематического управления движением свободного твердого тела.

Кинематическое управление движением свободного твердого тела рассматривалось с использованием дуальных кватернионов (параболических бикватернионов) в [42]. В этой работе используется понятие логарифма кватерниона, введенное M.J. Kim, M.S. Kim и S.Y. Shin [43]: это – трехмерный вектор, равный половинному эйлерову углу поворота, умноженному на единичный вектор эйлеровой оси конечного поворота твердого тела (т.е. это – половинный классический эйлеров вектор конечного поворота твердого тела). Отметим, что такое логарифмическое представление кватерниона поворота известно в отечественной литературе, так в книге [29] автора статьи показывается, что четырехмерная ортогональная кватернионная матрица поворота равна матричной экспоненте от трехмерной кососимметрической матрицы, элементы которой – проекции половинного эйлерова вектора конечного поворота, а классический кватернион поворота Гамильтона равен кватернионной экспоненте от половинного эйлерова вектора конечного поворота. Отсюда непосредственно следует, что логарифм кватерниона равен половинному эйлерову вектору конечного поворота. В статье [42] приводится также логарифмическое представление дуального кватерниона (параболического бикватерниона) перемещения твердого тела в виде половинного винта конечного перемещения, соответствующего описанию Шаля винтового конечного перемещения свободного твердого тела. Введенное логарифмическое представление дуального кватерниона используется для построения кинематического логарифмического закона управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи.

В статье [42] вводится как известное (без приведения ссылок или вывода) дуальное (бикватернионное) кинематическое уравнение движения свободного твердого тела в форме, использующей (в наших терминах) отображение кинематического винта твердого тела на “неподвижный” (опорный) базис. Отметим, что это уравнение было получено ранее [41] автором настоящей статьи (см. также бикватернионные кинематические уравнения (6.29), (6.15) книги [29] автора статьи и уравнение (3.64) книги [30]). В работе [41] автора статьи и в его книге [29] отмечается, что дуальные ортогональные проекции кинематического винта твердого тела на оси “неподвижной” (опорной) системы координат, входящие в обсуждаемое бикватернионное кинематическое уравнение, содержат не только проекции векторов угловой и линейной скорости тела (точнее, линейной скорости точки тела, выбранной в качестве полюса) на оси опорной системы координат, но и проекции радиус-вектора выбранного полюса тела на опорные координатные оси. Это затрудняет использование такой бикватернионной формы кинематических уравнений движения свободного твердого тела (в силу их сложности). Указанного недостатка не имеет другая форма бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела, также предложенная в [40, 41] автором статьи. В этой форме в качестве коэффициентов бикватернионного уравнения выступают только дуальные ортогональные проекции кинематического винта твердого тела на оси системы координат, связанной с телом, представляющие собой комплексные (в смысле Клиффорда) композиции проекций векторов угловой и линейной скорости тела на связанные с ним координатные оси. Именно такое бикватернионное кинематическое уравнение движения свободного твердого тела было использовано в [38, 39] при решении кинематической задачи оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное положение. В случае, когда необходимо знание проекций найденного оптимального винта скоростей твердого тела не на связанные с телом координатные оси, а на оси “неподвижной” (опорной) системы координат (как например, в задачах робототехники), необходимо воспользоваться операцией перепроектирования дуальных ортогональных проекций кинематического винта из связанной системы координат в опорную.

В статье [42] предложен кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления движением свободного твердого тела, имеющий вид логарифмической обратной связи. Кинематический винт свободного твердого тела, определенный своими дуальными ортогональными проекциями в “неподвижной” (основной) системе координат, предлагается формировать по принципу отрицательной обратной связи в виде логарифма дуального кватерниона, характеризующего положение тела в пространстве, умноженного на отрицательный коэффициент пропорциональности (коэффициент усиления обратной связи). С помощью функций Ляпунова доказывается, что такое управление гарантирует стабилизацию (асимптотическую устойчивость) любого первоначального положения твердого тела. В статье также приводится бикватернионное логарифмическое стабилизирующее управление программным (рекомендованным) движением при наличии программного и стабилизирующего управлений, предназначенное для вывода тела на рекомендованную траекторию из произвольного начального положения и отслеживания рекомендованной траектории движения тела, а также приводятся примеры управления плоским движением твердого тела (омниробота). Отметим, однако, что в статье нет строгой постановки задач кинематического управления движением твердого тела и нет рекомендаций по выбору коэффициентов усиления предлагаемых логарифмических отрицательных обратных связей, обоснованный выбор которых осложняется нелинейностью дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела, замкнутых законами управления, построенными в виде логарифмической обратной связи.

Работы [44, 45] также посвящены решению кинематических задач управления движением механических систем и свободного твердого тела с использованием дуальных кватернионов и законов управления, построенных с использованием отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи. В недавней работе [46] рассмотрено управление движением руки робота с использованием дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного в [42] и имеющего вид отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи.

В работе автора статьи [47] рассмотрена кинематическая задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого свободному твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданным (программным) кинематическим винтом скоростей. Роль управления играет кинематический винт твердого тела, фазовой переменной является нормированный или ненормированный бикватернион конечного перемещения твердого тела, исходная математическая модель движения имеет вид бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела, предложенная в работах автора статьи [40, 41].

В статье [47] приводится решение задачи в двух постановках: с использованием бикватернионных кинематических уравнений движения в нормированных и ненормированных бикватернионных переменных. При этом в первом случае в качестве управления выступает трехмерный винт управления (точнее, бикватернион кинематического винта с нулевой скалярной частью), а во-втором – четырехмерный бикватернион управления с ненулевой дуальной скалярной частью, которая отвечает за изменение нормы бикватерниона конечного перемещения твердого тела (точнее, отвечает за управление нормой этого бикватерниона). Показывается, что использование ненормированных бикватернионных переменных позволяет построить регулярные в целом законы управления, не содержащие особых точек, в то время как использование нормированных бикватернионных переменных приводит (в рамках использованной процедуры синтеза управлений) к законам управления, содержащим особую точку, в которой эйлеров угол поворота тела равен 180 градусам.

Основное внимание в работе [47] уделяется задаче построения стабилизирующего управления, которое формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибки по местоположению твердого тела (угловому и линейному) так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения: вид дуальных линейных стационарных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечную ошибку по местоположению твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные, матричные, бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по местоположению тела, реализуемых системой управления движением твердого тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

В работе автора статьи и Е.И. Нелаевой [48] получено аналитическое решение в кинематической бикватернионной постановке задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. В качестве математических моделей движения используются бикватернионные кинематические уравнения возмущенного движения свободного твердого тела в нормированных бикватернионах конечных перемещений, а в качестве управлений – дуальные ортогональные проекции мгновенного винта скоростей движения тела на связанные с ним координатные оси или на оси инерциальной системы координат. Каждый из двух минимизируемых функционалов характеризует собой интегральную величину затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений, взятых в определенной пропорции, определяемой величинами весовых коэффициентов (т.е. минимизируется интеграл от взвешенной суммы квадратов компонент кинематического винта (управления) и суммы квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений). С помощью принципа максимума Понтрягина построены законы оптимального управления и дифференциальные уравнения задачи оптимизации. Найдено аналитическое решение этой задачи в бикватернионной и кватернионной формах. Оптимальное движение свободного твердого тела в текущий момент времени представляет собой асимптотически устойчивое мгновенное винтовое движение вдоль оси, имеющей в инерциальной (опорной) системе координат направление, противоположное направлению мгновенного винта ошибки ориентации и местоположения твердого тела в этой системе координат. В законы оптимального управления входят в явном виде коэффициенты функционала минимизации, управление может быть реализовано по принципу обратной связи.

Отметим, что в работе автора статьи [49] дан обзор работ по теории кинематического управления вращательным движением твердого тела и пространственным движением свободного твердого тела с использованием кватернионных и бикватернионных кинематических моделей движения твердого тела. В его работе [50] дан обзор работ, посвященных следующим приложениям кватернионной и бикватернионной теории кинематического управления движением твердого тела: двухконтурное управление вращательным движением космического аппарата с использованием бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС); бесплатформенные корректируемые системы ориентации и навигации движущихся объектов; управление движением платформенного комплекса “ТСП-Аргус” космического проекта “Марс-94”, состоящего из манипулятора и трехосной стабилизированной платформы, расположенной на выходном звене манипулятора в обращенном торсионном кардановом подвесе; оптимальная переориентация орбиты, плоскости оскулирующей орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты аппарата; решение обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления; кинематическое управление в механике роботов-манипуляторов (независимое программное управление движением по скорости).

Отметим также, что в работах автора статьи [41, 25, 51] и в книге [30] бикватернионы были использованы для получения новых бикватернионных уравнений и алгоритмов инерциальной навигации, предназначенных для нахождения параметров ориентации, координат местоположения и проекций вектора скорости движущегося объекта по измеренным в связанной с объектом системе координат проекциям вектора абсолютной угловой скорости объекта и проекциям вектора его кажущегося ускорения (или измеренным приращениям интегралов от проекций этих векторов) и информации о гравитационном поле Земли, в котором движется объект.

В последнее время бикватернионы стали широко использоваться для решения задач управления пространственным движением твердого тела, в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело, в динамической постановке [52–74]. Уравнения динамики твердого тела записываются в бикватернионной форме, объединяющей динамические уравнения вращательного и поступательного движений твердого тела, и дополняются бикватернионным кинематическим уравнением. Для построения законов управления по принципу обратной связи часто используется один из современных методов теории управления – управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control или MPC) [75]. MPC позволяет получить квазиоптимальное решение для нелинейных объектов при наличии ограничений на управление и фазовых ограничений, но имеет и ряд недостатков, среди которых – неаналитичность, достаточно высокое потребление вычислительных ресурсов, поскольку этот метод требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Для синтеза законов управления по принципу обратной связи также используется метод “бэкстеппинг” (“backstepping”). Это – рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего ей закона управления. Метод был предложен П. Кокотовичем в 1990 году. В соответствии с этим методом задача построения закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для систем меньшего порядка. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по этому алгоритму, и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математической модели объекта. Для задачи управления пространственным движением твердого тела на первом этапе рассматривается кинематическая задача управления движением тела, описываемая бикватернионным кинематическим уравнением. На этом этапе кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления часто берется в виде логарифмической обратной связи, т.е. в виде, использующем логарифмическое представление дуального кватерниона (бикватерниона) пространственного перемещения тела (об этом законе говорилось выше).

В настоящей статье в нелинейной динамической постановке с использованием параболических бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц изучается задача построения управления пространственным движением твердого тела (винтовым движением, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного движений). Предлагается аналитический метод построения законов управления пространственным движением твердого тела и законы управления, обеспечивающие асимптотически устойчивый в большом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положений на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. Переходный процесс управления при этом имеет желаемые качественные и количественные характеристики.

1. Уравнения движения. Рассмотрим свободное твердое тело или несвободное твердое тело, способное совершать относительно основной системы координат мгновенное винтовое движение, эквивалентное композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной точкой тела и вращения тела вокруг этой точки. Тело находится под действием произвольного главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Управляемое пространственное движение тела будем рассматривать относительно инерциальной системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ) (ее начало O_1 находится в центре масс Земли, ось $O_1\xi_3$ направлена по оси вращения Земли, а оси $O_1\xi_1$ и $O_1\xi_2$ лежат в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли), а также относительно опорной (программной) системы координат $O_2Z_1Z_2Z_3(Z)$, задающей в инерциальном пространстве программное пространственное движение твердого тела. С твердым телом жестко свяжем систему координат $CX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре масс тела C.

Введем обозначения: $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости центра масс твердого тела в инерциальной системе координат, $\boldsymbol{\lambda}$ — кватернион ориентации тела в этой системе координат, компонентами которого являются параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера) $\lambda_j (j = \overline{0,3})$, одинаковые в базисах ξ и X (эти параметры могут быть выражены через углы Эйлера—Крылова), $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела, $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ — векторы управляющей силы и управляющего момента, приложенных к телу, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ — главный вектор других внешних сил, действующих на твердое тело, (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой) и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени t и переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Исходные дифференциальные уравнения движения твердого тела, записанные в связанной с твердым телом системе координат X, имеют вид

$$m[\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] = \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) + \mathbf{F}_{cx}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \varepsilon_x = \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{M}_{cx}] \tag{1.2}$$

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x \tag{1.3}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_v = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \dot{\lambda} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_v = \dot{\lambda}_0 + \sum_{k=1}^{3} \dot{\lambda}_k \mathbf{i}_k$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \boldsymbol{\omega}_1\mathbf{i}_1 + \boldsymbol{\omega}_2\mathbf{i}_2 + \boldsymbol{\omega}_3\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_3 & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 & 0 & -\boldsymbol{\omega}_1 \\ -\boldsymbol{\omega}_2 & \boldsymbol{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь в уравнениях (1.1) и (1.2) $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{v}_x$, $\boldsymbol{\omega}_x$, ε_x, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_{cx}$, $\mathbf{M}_{cx}$ — векторы-столбцы размерами 3×1 или, далее, кватернионы с нулевыми скалярными частями, составлен-ные из проекций $x_k, v_k, \omega_k, \varepsilon_k, F_k, M_k, F_{ck}, M_{ck}$ $(k = 1,2,3)$ векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{F_c}$, $\mathbf{M_c}$ на оси связанной системы координат X; m — масса тела, J — постоянная матрица инерции твердого тела; $K(\omega_x)$ — кососимметрическая матрица угловых скоростей тела, сопоставляемая вектору $\boldsymbol{\omega}$; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства (векторные мнимые единицы Гамильтона); $\mathbf{a}_y$ — отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис $Y(Y = \xi, X, Z)$, определяемое как кватернион $\mathbf{a}_y = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$, компоненты которого — проекции a_k вектора $\mathbf{a}$ на базис Y; верхняя точка означает производную по времени t (при вычислении производной от кватерниона орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ полагаются неизменными), знак $\circ$ означает кватернионное умножение.

Первое матричное уравнение (1.1) и матричное уравнение (1.2) являются динамическими, а второе матричное уравнение (1.1) и кватернионное уравнение (1.3) — кинематическими уравнениями пространственного движения твердого тела, представляющего собой композицию поступательного (траекторного) и углового (вращательного) движений. Они образуют систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений тринадцатого порядка относительно переменных x_k, v_k и λ_j, ω_k. В случае, когда с твердым телом жестко связывается система координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в другой произвольно выбранной точке O тела, в состав главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}$ внешних сил включаются переносная сила инерции и ее момент относительно точки O твердого тела.

2. Задачи управления. Поставим следующую задачу: построить допустимые управления

$$\mathbf{F}_{cx} = \mathbf{F}_{cx}(\mathbf{r}_z^*(t), \mathbf{v}_z^*(t), \dot{\mathbf{v}}_z^*, \boldsymbol{\omega}_z^*(t), \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x, \boldsymbol{\omega}_x), \qquad \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{M}_{cx}(\boldsymbol{\lambda}^*(t), \boldsymbol{\omega}_z^*(t), \varepsilon_z^*(t), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x)$$

обеспечивающие асимптотически устойчивый в большом перевод твердого тела из произвольного, заранее незаданного начального состояния $\mathbf{r}_x(t_0)$, $\mathbf{v}_x(t_0)$, $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}_x(t_0)$ на любую выбранную программную траекторию

$$\mathbf{r}_z^* = \mathbf{r}_z^*(t), \qquad \mathbf{v}_z^* = \mathbf{v}_z^*(t), \qquad \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^*(t), \qquad \boldsymbol{\omega}_z^* = \boldsymbol{\omega}_z^*(t)$$

и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории. При этом переходный процесс (возмущенное движение тела) должен иметь желаемые качественные и количественные характеристики.

Здесь $\mathbf{r}_z^*$ и $\mathbf{v}_z^*$ — отображения программных радиус-вектора $\mathbf{r}^*$ и вектора $\mathbf{v}^*$ скорости центра масс твердого тела в инерциальной системе координат на оси программной системы координат Z, $\boldsymbol{\lambda}^*$ — кватернион программной ориентации тела в инерциальной системе координат, компонентами которого являются параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера) λ_j^* $(j = \overline{0,3})$, одинаковые в базисах ξ и Z, $\boldsymbol{\omega}_z^*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_z^*$ — отображения векторов программных абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^*$ и абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ тела на оси программной системы координат Z.

Поставленную задачу будем решать, используя концепцию решения обратных задач динамики и принцип управления с обратной связью. Законы формирования управляющей силы и управляющего момента в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики получаются на основе уравнений (1.1), (1.2) и имеют вид

$$\mathbf{F}_{cx} = m[\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) \tag{2.2}$$

Вторые и третьи слагаемые в этих законах управления носят компенсационный характер и обеспечивают, в том числе, компенсацию действующих внешних сил неуправляющего характера и их моментов. Они могут быть сформированы по известному вектору $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ текущего состояния твердого тела, вырабатываемому, например, бесплатформенной инерциальной навигационной системой. Входящие в первые слагаемые законов управления (2.1) и (2.2) требуемая составляющая $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемое абсолютное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ могут быть построены на основе матричных (2.3) и кватернионных (2.4) уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x \tag{2.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3\mathbf{i}_3 \tag{2.4}$$

получающихся из уравнений (1.1)–(1.3).

Фигурирующие в этих уравнениях величины $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ рассматриваются нами в дальнейшем как новые управления.

Таким образом, задача построения управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ в рассматриваемой постановке сводится к синтезу требуемой составляющей $\mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, входящих в качестве управлений в уравнения (2.3) и (2.4). Задача синтеза управлений $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как уравнения (2.3) и (2.4) справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ на основе конечных соотношений (2.1) и (2.2).

Введем в рассмотрение кинематический винт $\mathbf{U}$ твердого тела, отображение которого $\mathbf{U}_x$ на связанный с телом базис X определяется бикватернионом

$$\mathbf{U}_x = U_1\mathbf{i}_1 + U_2\mathbf{i}_2 + U_3\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i}_1 + v_2\mathbf{i}_2 + v_3\mathbf{i}_3$$

s – символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$, $U_k = \omega_k + sv_k$ $(k = 1, 2, 3)$ – дуальные ортогональные проекции кинематического винта $\mathbf{U}$ на базис X.

Тогда векторные (2.3) и кватернионные (2.4) дифференциальные уравнения можно заменить двумя следующими бикватернионными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x = \mathbf{H}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{w}_x = w_1\mathbf{i}_1 + w_2\mathbf{i}_2 + w_3\mathbf{i}_3 \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

в которых фазовыми переменными являются бикватернион $\mathbf{U}_x$ (отображение кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на связанный базис X) и бикватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$ конечного перемещения тела в инерциальном пространстве, главная часть которого (кватернион $\boldsymbol{\lambda}$) характеризует ориентацию твердого тела в инерциальной системе координат, а моментная (кватернион $\boldsymbol{\lambda}^0$) – местоположение тела в этой системе координат (декартовые координаты ξ_k $(k = 1, 2, 3)$ центра масс тела в этой системе координат), а дуальным управлением – бикватернион $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, являющийся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x = \mathbf{v}_x$ абсолютного линейного ускорения тела.

Декартовые координаты ξ_k центра масс тела (т.е. проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс твердого тела на оси инерциальной системы координат ξ) и проекции x_k этого вектора на оси связанной с твердым телом системы координат X находятся через компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ по формулам [29, 40, 41]

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i}_1 + \xi_2\mathbf{i}_2 + \xi_3\mathbf{i}_3 = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0$$

Здесь и далее верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Управления $\mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ складывается из программного и стабилизирующего управлений. В соответствии с этим эти управления будем формировать в связанной системе координат X по формулам

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x = \sum_{k=1}^{3}(w_k^*(t) + \delta w_k)\mathbf{i}_k \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_k^*(t) + \delta\varepsilon_k)\mathbf{i}_k \tag{2.7}$$

или по формулам

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_x^*(t, \boldsymbol{\nu}_x) + \Delta\mathbf{w}_x = \bar{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x + \sum_{k=1}^{3}\Delta w_k\mathbf{i}_k \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x^*(t, \boldsymbol{\nu}_x) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \bar{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x + \sum_{k=1}^{3}\Delta\varepsilon_k\mathbf{i}_k \tag{2.9}$$

Здесь w_k^* и ε_k^* – проекции составляющей $\mathbf{w}^*$ абсолютного программного линейного ускорения и абсолютного программного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ тела на оси программной системы координат Z, δw_k и $\delta\varepsilon_k$ (или Δw_k и $\Delta\varepsilon_k$) – проекции составляющей $\delta\mathbf{w}$ (или $\Delta\mathbf{w}$) абсолютного стабилизирующего линейного ускорения и абсолютного стабилизирующего углового ускорения $\delta\varepsilon$ (или $\Delta\varepsilon$) тела на оси связанной системы координат X; $\boldsymbol{\nu}_x$ – собственный кватернион ошибки ориентации твердого тела (определенный своими компонентами в связанном базисе X), характеризующий отклонение действительной ориентации тела от его программной ориентации и определяемый формулой

$$\boldsymbol{\nu}_x = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \circ \boldsymbol{\lambda}$$

в которой $\boldsymbol{\lambda}^*$ – кватернион программной ориентации тела в инерциальной системе координат.

Бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}^*$ (его компоненты Λ_j^* одинаковы в базисах ξ и Z), характеризующий угловое и линейное программные движения тела в инерциальной системе координат, и бикватернионы $\mathbf{U}_z^*$ и $\mathbf{H}_z^*$ программных угловых и линейных скоростей тела и программных управлений его движением, определенные в программной системе координат Z, удовлетворяют бикватернионным уравнениям, аналогичным (2.5):

$$\dot{\mathbf{U}}_z^* = \boldsymbol{\varepsilon}_z^* + s\mathbf{w}_z^* = \mathbf{H}_z^*, \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^* = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \mathbf{U}_z^* \tag{2.10}$$

Величины $\boldsymbol{\Lambda}^*$, $\mathbf{U}_z^*$, $\mathbf{H}_z^*$ строятся на основе уравнений (2.10) в виде явных функций времени: $\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}^*(t)$, $\mathbf{U}_z^* = \mathbf{U}_z^*(t)$, $\mathbf{H}_z^* = \mathbf{H}_z^*(t)$. Их построение определяется конкретно решаемой задачей, выбранным оптимизируемым функционалом качества и может быть выполнено с помощью методов оптимального управления, например, с помощью принципа максимума Понтрягина.

Стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{w}$ (или $\Delta\mathbf{w}$) и $\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ (или $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$) строятся в виде некоторых функций ошибок по линейному и угловому положениям тела, а также ошибок по линейной и угловой скоростям твердого тела на основе принципа обратной связи. Одна из существующих здесь задач заключается в синтезе стабилизирующих управлений местоположением и ориентацией твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом или в целом произвольного программного пространственного движения тела и другие требуемые характеристики его управляемого движения.

Многие известные решения задачи управления угловым движением твердого тела ориентируются на реализацию конкретно выбранного программного углового движения твердого тела, например, на перевод твердого тела из некоторого начального углового положения в другое конечное положение при нулевых угловых скоростях тела в этих положениях, или на реализацию плоского эйлерова поворота твердого тела и других конкретных движений. Стабилизирующие управления угловым движением строятся в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки по положению и проекций вектора ошибки по угловой скорости твердого тела исходя из соображений простоты, накопленного опыта, геометрических и других соображений. Уравнения возмущенного движения твердого тела, замкнутые такими управлениями, получаются нелинейными, а при ненулевых программных угловых скоростях и нестационарными. Устойчивость таких предлагаемых законов управления доказывается с помощью функций Ляпунова. Однако при этом остается открытой проблема обеспечения желаемых динамических характеристик управляемого углового движения твердого тела, поскольку точное нахождение необходимых коэффициентов усиления обратных связей, осуществляемое на основе уравнений возмущенного движения, невозможно в силу сложности этих уравнений. Аналогичные трудности существуют и при решении задачи управления линейным (поступательным) движением твердого тела и более общей задачи управления пространственным (угловым и линейным) движением твердого тела.

В работах [18–25] автора статьи рассмотрена задача аналитического построения (с использованием кватернионов) асимптотически устойчивых в большом или в целом стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела для его любого выбранного программного углового движения. В основу решения задачи положен подход, использующий приведение нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений возмущенного углового движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам за счет использования соответствующих обратных связей в предложенных законах управления. Такой подход позволяет обойти вышеуказанные трудности аналитического синтеза стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела, проводимого на основе нелинейных уравнений движения. В настоящей работе решается с использованием подходов, предложенных в работах [18–25] для синтеза стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела, более общая задача синтеза стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в большом любого выбранного программного пространственного движения тела и желаемую динамику процесса управления. Отметим, что предлагаемые законы стабилизирующих управлений могут быть использованы для решения задачи перевода твердого тела из его произвольного пространственного начального состояния (по положению и скорости) в требуемое состояние без использования программных управлений и траекторий движения тела в силу обеспечения при использовании этих законов асимптотической устойчивости в большом любого пространственного состояния тела (частный случай этой задачи – перевод твердого тела из его произвольного пространственного начального положения покоя в требуемое положение покоя).

3. Дифференциальные бикватернионные и винтовые уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела. Введем ошибки (отклонения) по положению и скорости твердого тела. В соответствии с бикватернионными формулами сложения конечных перемещений [29, 30] бикватернион ошибки положения $\mathbf{N}_\xi$, определенный своими компонентами $N_{\xi j}$ в инерциальной системе координат ξ, находится по формуле

$$\mathbf{N}_\xi = \mathbf{v}_\xi + s\mathbf{v}_\xi^0 = \Lambda \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \tag{3.1}$$

а бикватернион ошибки положения $\mathbf{N}_x$, определенный своими компонентами N_{xj} в связанной системе координат X, — по формуле

$$\mathbf{N}_x = \mathbf{v}_x + s\mathbf{v}_x^0 = \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \circ \mathbf{\Lambda} \tag{3.2}$$

Отметим, что из соотношений (3.1) и (3.2) следует равенство скалярных частей бикватернионов $\mathbf{N}_\xi$ и $\mathbf{N}_x$: $N_{\xi 0} = N_{x0}$.

Бикватернион ошибки по скорости, определенный своими дуальными компонентами в связанном базисе X, может быть введен по одной из следующих формул:

$$\delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_z^*(t) = \sum_{k=1}^{3} (U_k - U_k^*(t))\mathbf{i}_k \tag{3.3}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x^* = \mathbf{U}_x - \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x \tag{3.4}$$

Компоненты бикватерниона ошибки по линейной и угловой скоростям $\Delta\mathbf{U}_x$, определяемого соотношением (3.4), равны дуальным ортогональным проекциям винтовой разности $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^*$ на оси связанной системы координат X, в то время как компоненты бикватерниона ошибки по линейной и угловой скоростям $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x$, определяемого соотношением (3.3), не имеют смысла дуальных ортогональных проекций этой винтовой разности, а выражаются линейным образом через дуальные ортогональные проекции винтов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ на оси разных систем координат (связанной X и программной Z).

В соответствии с соотношениями (2.6)–(2.9) дуальное управление $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, являющееся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x = \mathbf{v}_x$ абсолютного линейного ускорения тела, формируется в связанной системе координат X либо по формуле

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_z^*(t) + \delta\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x) \tag{3.5}$$

соответствующей выражению (3.3), либо по формуле

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{w}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\mathbf{w}_x) \tag{3.6}$$

соответствующей выражению (3.4), в виде винтовой суммы программного $\mathbf{H}^*$ и стабилизирующего $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}$ (или $\Delta\mathbf{H}$) управлений. В (3.6) бикватернион $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\Delta\mathbf{w}_x)$, как и бикватернион $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\delta\varepsilon}_x + s(\boldsymbol{\delta}\mathbf{w}_x)$, фигурирующий в (3.5), имеет смысл стабилизирующего управления. Стабилизирующее управление $\Delta\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{v}_x)$ отвечает винтовой разности $\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$ и закон его формирования будет отличаться от закона формирования стабилизирующего управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_z^*(t)$, компоненты которого формируются в виде разности дуальных ортогональных проекций винтов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ на оси разных систем координат (X и Z).

Запишем нормальные и осцилляторные формы дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела, используя введенные переменные. Нормальные формы уравнений в бикватернионных переменных $\mathbf{N}_\xi$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x$ и $\mathbf{N}_x$, $\Delta\mathbf{U}_x$ имеют вид (3.7), (3.8) и (3.9), (3.10) соответственно:

$$2\dot{\mathbf{N}}_\xi = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi \circ \mathbf{N}_\xi, \quad \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{N}_\xi \circ \mathbf{\Lambda}^*(t) \tag{3.8}$$

$$2\dot{\mathbf{N}}_x = \mathbf{N}_x \circ \Delta\mathbf{U}_x, \quad \Delta\dot{\mathbf{U}}_x = \Delta\mathbf{U}_x \times \mathbf{U}_x + \Delta\mathbf{H}_x \tag{3.9}$$

$$\mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x + \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x \tag{3.10}$$

где $\times$ — символ винтового произведения.

Отметим, что в уравнениях (3.7), (3.8) фигурирует бикватернион $\mathbf{\Lambda}^*(t)$ программного местоположения и программной ориентации твердого тела, в то время как в уравнениях (3.9), (3.10) — бикватернион программной линейной и угловой скоростей $\mathbf{U}_z^*(t)$.

Из (3.7), (3.8) и (3.9), (3.10) получаем осцилляторные формы уравнений возмущенного движения (3.11), (3.12) и (3.13), (3.14):

$$2\ddot{\mathbf{N}}_\xi = \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi \circ \mathbf{N}_\xi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_\xi \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_x \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}, \quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_x = \mathbf{U}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x + \boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x \\ \mathbf{U}_x = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_z^*(t), \quad |\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2 = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{N}_\xi \circ \mathbf{\Lambda}^*(t)\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$2\ddot{\mathbf{N}}_x = \mathbf{N}_x \circ \Delta\mathbf{G}_x - \frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_x \tag{3.13}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{G}_x = \Delta\mathbf{U}_x \times \mathbf{U}_x + \Delta\mathbf{H}_x, \quad |\Delta\mathbf{U}|^2 = \Delta\mathbf{U}_x \cdot \Delta\mathbf{U}_x \\ \mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x + \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x\end{gathered} \tag{3.14}$$

Здесь центральная точка — символ скалярного произведения.

Выделяя в первом уравнении (3.7) и в уравнении (3.11) скалярную и винтовую части, получим уравнения первого и второго порядков относительно скалярной $N_{\xi 0}$ и винтовой $\mathbf{N}_{\xi v}$ частей бикватерниона $\mathbf{N}_\xi$:

$$\begin{gathered}2\dot{N}_{\xi 0} = -\mathbf{N}_{\xi v} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi \\ 2\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} = N_{\xi 0}\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi - \mathbf{N}_{\xi v} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi\end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}2\ddot{N}_{\xi 0} = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,N_{\xi 0} - \mathbf{N}_{\xi v} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi \\ 2\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v} + N_{\xi 0}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi - \mathbf{N}_{\xi v} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi\end{gathered} \tag{3.16}$$

Фигурирующие здесь величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi$ и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2$ определяются соотношениями (3.8) и (3.12).

Выделяя в первом уравнении (3.9) и в уравнении (3.13) скалярную и винтовую части, получим уравнения первого и второго порядков относительно скалярной N_{x0} и винтовой $\mathbf{N}_{xv}$ частей бикватерниона $\mathbf{N}_x$:

$$\begin{gathered}2\dot{N}_{x0} = -\mathbf{N}_{xv} \cdot \Delta\mathbf{U}_x \\ 2\dot{\mathbf{N}}_{xv} = N_{x0}\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{N}_{xv} \times \Delta\mathbf{U}_x\end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered}2\ddot{N}_{x0} = -\frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2\,N_{x0} - \mathbf{N}_{xv} \cdot \Delta\mathbf{G}_x \\ 2\ddot{\mathbf{N}}_{xv} = -\frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv} + N_{x0}\Delta\mathbf{G}_x + \mathbf{N}_{xv} \times \Delta\mathbf{G}_x\end{gathered} \tag{3.18}$$

Фигурирующие здесь величины $\Delta\mathbf{G}_x$, $|\Delta\mathbf{U}|^2$ определяются соотношениями (3.14).

4. Стабилизирующие управления. Выразим стабилизирующие управления из полученных уравнений возмущенного движения. Для этого введем кососимметрическую $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ и симметрическую $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ дуальные матрицы, сопоставляемые бивектору (винтовой части бикватерниона) $\mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{N}_{\xi v}, \mathbf{N}_{xv})$:

$$K(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Запишем уравнения (3.15)–(3.18) в матричных формах, используя матрицы (4.1):

$$2\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} = [N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi \tag{4.2}$$

$$[N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = 2\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \frac{1}{2}|\delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v} \tag{4.3}$$

$$2\dot{\mathbf{N}}_{xv} = [N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\ddot{\mathbf{N}}_{xv})]\Delta\mathbf{U}_x \tag{4.4}$$

$$[N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]\Delta\mathbf{G}_x = 2\mathbf{N}_{xv} + \frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv} \tag{4.5}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица размерами 3×3; $\mathbf{N}_{\xi v}$, $\mathbf{N}_{xv}$ (не стоящие в круглых скобках после $\mathbf{K}$) и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{U}_x$, $\Delta\mathbf{G}_x$ – дуальные матрицы-столбцы размерами 3×1, элементами которых являются соответственно компоненты винтовых частей одноименных бикватернионов $\mathbf{N}_\xi$, $\mathbf{N}_x$ и бикватернионов $\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi$, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{U}_x$, $\Delta\mathbf{G}_x$ с нулевыми скалярными частями.

Выразим трехмерные дуальные величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{G}_x$, рассматриваемые как новые управления, из матричных уравнений (4.3), (4.5). При этом учтем соотношения

$$\begin{gathered} [N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]^{-1} = (2N_{\xi 0})^{-1}[\mathbf{E} + (\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi))^T] \\ [N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]^{-1}\mathbf{N}_{\xi v} = \mathbf{N}_{\xi v}/N_{\xi 0} \\ [N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]^{-1} = (2N_{x0})^{-1}[\mathbf{E} + \mathbf{C}(\mathbf{N}_x)] \\ [N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]^{-1}\mathbf{N}_{xv} = \mathbf{N}_{xv}/N_{x0} \end{gathered} \tag{4.6}$$

в которых верхний индекс T – символ транспонирования, а $\mathbf{C}(\mathbf{N}_x)$ – матрица дуальных направляющих косинусов углов между осями систем координат Z и X, имеющая известный вид [29, 30]:

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}_x) = \begin{pmatrix} N_0^2 + N_1^2 - N_2^2 - N_3^2 & 2(N_1N_2 + N_0N_3) & 2(N_1N_3 - N_0N_2) \\ 2(N_1N_2 - N_0N_3) & N_0^2 - N_1^2 + N_2^2 - N_3^2 & 2(N_2N_3 + N_0N_1) \\ 2(N_1N_3 + N_0N_2) & 2(N_2N_3 - N_0N_1) & N_0^2 - N_1^2 - N_2^2 + N_3^2 \end{pmatrix}$$

В этой матрице $N_j = N_{xj}$ – дуальные параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), характеризующие ориентацию и местоположение твердого тела (системы координат X) в опорной (программной) системе координат Z. Эти параметры являются компонентами бикватерниона $\mathbf{N}_x$. Матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi)$ имеет такую же структуру, что и матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_x)$, и построена из компонент $N_{\xi j}$ бикватерниона $\mathbf{N}_\xi$.

Отметим, что матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_x)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{C}(\mathbf{N}_x) = 2[N_{x0}^2\mathbf{E} - N_{x0}\mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv}) + \mathbf{S}(\mathbf{N}_{xv})] - \mathbf{E}$$

где кососимметричная $\mathbf{K}$ и симметричная $\mathbf{S}$ матрицы определяются соотношениями (4.1). Аналогичное представление имеет и матрица $\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi)$.

В результате преобразований получаем следующие матричные выражения для новых управлений $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$, $\Delta\mathbf{G}_x$:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = N_{\xi 0}^{-1}[\mathbf{E} + (\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi))^T]\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + (2N_{\xi 0})^{-1}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v} \tag{4.7}$$

$$\Delta\mathbf{G}_x = (N_{x0})^{-1}[\mathbf{E} + \mathbf{C}(\mathbf{N}_x)]\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + (2N_{x0})^{-1}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv} \tag{4.8}$$

Трехмерные стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ выражаются через величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$ и $\Delta\mathbf{G}_x$ по формулам

$$\delta\mathbf{H}_x = \overline{\Lambda} \circ \delta\mathbf{G}_\xi \circ \Lambda - \mathbf{U}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \tag{4.9}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\mathbf{G}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{4.10}$$

вытекающим из соотношений (3.12), (3.14).

Полученные выражения (4.7)–(4.10) определяют собой стабилизирующие управления $\delta\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ в виде функций ошибок по положению и скорости твердого тела и вторых производных по времени от ошибок по положению. Подстановка в эти выражения таких законов изменения вторых производных по времени от ошибок по положению, которые отвечают желаемым динамическим характеристикам переходных процессов управления, позволяет получить нужные законы стабилизирующих управлений. В разделе 5 статьи рассматриваются два варианта задания вторых производных по времени от ошибок по положению твердого тела в виде линейных функций ошибок по положению твердого тела и их первых производных по времени. При таком их задании желаемая динамика управляемого движения твердого тела описывается линейными стационарными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно ошибок по линейному и угловому положениям твердого тела (относительно одной из выбранных переменных $\mathbf{N}_\xi$ или $\mathbf{N}_x$). Соответствующий выбор постоянных дуальных коэффициентов этих уравнений, являющихся коэффициентами усиления нелинейных обратных связей, обеспечивает желаемые динамические характеристики управляемого пространственного движения твердого тела.

5. Эталонные дифференциальные уравнения переходных процессов. Стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ будем формировать таким образом, чтобы уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые этими законами управления, принимали эталонные дифференциальные формы. В качестве эталонных дифференциальных форм для уравнений возмущенного движения твердого тела в переменных $\mathbf{N}_\xi$ и $\mathbf{N}_x$ примем формы (5.1) и (5.2):

$$\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{P}_0\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{K}(\mathbf{P}_v)\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{Q}_0\mathbf{N}_{\xi v} + \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v)\mathbf{N}_{\xi v} = 0 \tag{5.1}$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + \mathbf{P}_0^*\mathbf{N}_{xv} - \mathbf{K}(\mathbf{P}_v^*)\dot{\mathbf{N}}_{xv} + \mathbf{Q}_0^*\mathbf{N}_{xv} - \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v^*)\mathbf{N}_{xv} = 0 \tag{5.2}$$

Формы (5.1) и (5.2) – дуальные матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка относительно дуальных трехмерных переменных (матриц – столбцов) $\mathbf{N}_{\xi v}$ и $\mathbf{N}_{xv}$ с постоянными дуальными матричными коэффициентами. В них $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_0^*$, $\mathbf{Q}_0^*$ – диагональные матрицы с постоянными дуальными диагональными элементами $P_{0k} = p_{0k} + sp_{0k}^0$, $Q_{0k} = q_{0k} + sq_{0k}^0$ и $P_{0k}^* = p_{0k}^* + sp_{0k}^{0*}$, $Q_{0k}^* = q_{0k}^* + sq_{0k}^{0*}$ ($k = 1$, 2, 3) соответственно; $\mathbf{K}(\mathbf{P}_v)$, $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_v)$ и $\mathbf{K}(\mathbf{P}_v^*)$, $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_v^*)$ – постоянные дуальные кососимметрические матрицы вида (4.1), сопоставляемые винтам $\mathbf{P}_v$, $\mathbf{Q}_v$ и $\mathbf{P}_v^*$, $\mathbf{Q}_v^*$, имеющим дуальные компоненты $P_k = p_k + sp_k^0$, $Q_k = q_k + sq_k^0$ и $P_k^* = p_k^* + sp_k^{0*}$, $Q_k^* = q_k^* + sq_k^{0*}$ соответственно.

В случаях, когда $P_{0k} = P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $P_{0k}^* = P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, матрицы

$$\mathbf{P}_0 = P_0\mathbf{E} = (p_0 + sp_0^0)\mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_0 = Q_0\mathbf{E} = (q_0 + sq_0^0)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{P}_0^* = P_0^*\mathbf{E} = (p_0^* + sp_0^{0*})\mathbf{E}, \quad \mathbf{Q}_0^* Q_0^*\mathbf{E} = (q_0^* + sq_0^{0*})\mathbf{E}$$

где $\mathbf{E}$, по-прежнему, – трехмерная единичная матрица, и уравнения (5.1), (5.2) могут быть записаны в винтовом виде:

$$\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + P_0\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + \mathbf{P}_v \times \dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + Q_0\mathbf{N}_{\xi v} + \mathbf{Q}_v \times \mathbf{N}_{\xi v} = 0 \tag{5.3}$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + P_0^*\dot{\mathbf{N}}_{xv} + \dot{\mathbf{N}}_{xv} \times \mathbf{P}_v^* + Q_0^*\mathbf{N}_{xv} + \mathbf{N}_{xv} \times \mathbf{Q}_v^* = 0 \tag{5.4}$$

В этих уравнениях переменные $\mathbf{N}_{\xi v}$ и $\mathbf{N}_{xv}$ имеют смысл винтов, определенных своими дуальными ортогональными проекциями в системах координат ξ и X соответственно.

В соответствии с известной классификацией вторые слагаемые в уравнениях (5.1)–(5.4) определяют собой управляющие диссипативные силы, третьи слагаемые – гироскопические, четвертые – потенциальные (консервативные) силы, пятые – силы радиальной коррекции.

6. Законы стабилизирующих управлений. Построим законы стабилизирующих управлений, отвечающие эталонным дифференциальным формам (5.1), (5.2) уравнений возмущенного движения твердого тела с замкнутой системой управления движением. Выражая из уравнений (5.1), (5.2) вторые производные $\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v}$, $\ddot{\mathbf{N}}_{xv}$ и подставляя их в матричные соотношения (4.7), (4.8), получаем, учитывая (4.2), (4.4), следующие дуальные матричные выражения для управлений $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$ и $\Delta\mathbf{G}_x$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi = \frac{1}{N_{\xi 0}}[\mathbf{E} + (\mathbf{C}(\mathbf{N}_\xi))^T]\times \\ \times\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{P}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{P}_v)][N_{\xi 0}\mathbf{E} - \mathbf{K}(\mathbf{N}_{\xi v})]\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi + [\mathbf{Q}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v)]\mathbf{N}_{\xi v}\right\} + \frac{1}{2N_{\xi 0}}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{\xi v}\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_x = -\frac{1}{N_{x0}}[\mathbf{E} + \mathbf{C}(\mathbf{N}_x)]\times \\ \times\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{P}_0^* - \mathbf{K}(\mathbf{P}_v^*)][N_{x0}\mathbf{E} + \mathbf{K}(\mathbf{N}_{xv})]\Delta\mathbf{U}_x + [\mathbf{Q}_0^* - \mathbf{K}(\mathbf{Q}_v^*)]\mathbf{N}_{xv}\right\} + \frac{1}{2N_{x0}}|\Delta\mathbf{U}|^2\,\mathbf{N}_{xv}\end{gathered} \tag{6.2}$$

Трехмерные дуальные стабилизирующие управления $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x$ (дуальные композиции линейного и углового ускорений) выражаются через величины $\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}_\xi$ и $\Delta\mathbf{G}_x$ по формулам (4.9) и (4.10). Поэтому соотношения (4.9), (6.1) или (4.10), (6.2) образуют различные законы формирования дуального стабилизирующего управления (ускорения) $\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x$ или $\Delta\mathbf{H}_x$ в виде нелинейных функций ошибок по положению и скорости твердого тела. При сообщении этого дуального стабилизирующего ускорения твердому телу вместе с дуальным программным ускорением $\mathbf{H}_z^*(t)$ или $\mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{v}_x)$ в соответствии с формулами (3.5) или (3.6) дифференциальные нелинейные нестационарные уравнения возмущенного движения твердого тела принимают эталонную форму (5.1) или (5.2), инвариантную относительно любого выбранного программного пространственного движения. Сообщение требуемого абсолютного дуального ускорения

$\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ твердому телу осуществляется за счет приложения к нему управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$, формируемых в соответствии с формулами (2.1) и (2.2).

В частном случае дуальных скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, когда $P_{0k} = P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$; $P_{0k}^* = P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, $\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$, законы формирования стабилизирующих ускорений с учетом соотношений (4.6) существенно упрощаются и принимают винтовой вид

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{H}_x = \frac{1}{N_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}|^2 - 2Q_0\right)\mathbf{N}_{xv} - P_0\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x \tag{6.3}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x = \frac{1}{N_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\Delta\mathbf{U}|^2 - 2Q_0^*\right)\mathbf{N}_{xv} - P_0^*\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{6.4}$$

Выделяя в соотношениях (6.3) и (6.4) главные и моментные части, получаем следующие векторные законы формирования стабилизирующих линейных и угловых ускорений:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}\mathbf{w}_x = \frac{1}{\nu_{x0}}(\boldsymbol{\delta\omega}_x \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_x - 2q_0^0)\boldsymbol{\nu}_{xv}^0 - \frac{\nu_{x0}^0}{\nu_{x0}^2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta\omega}_x \cdot \boldsymbol{\delta\omega}_x - 2q_0\right)\boldsymbol{\nu}_{xv} - \\ - (p_0\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_x + p_0^0\boldsymbol{\delta\omega}_x) - (\boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_x \times \boldsymbol{\delta\omega}_x)\end{gathered} \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{\delta\varepsilon}_x = \frac{1}{\nu_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{\delta\omega}|^2 - 2q_0\right)\boldsymbol{\nu}_{xv} - p_0\boldsymbol{\delta\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{\delta\omega}_x \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{w}_x = \frac{1}{\nu_{x0}}\left(\Delta\boldsymbol{\omega}_x \cdot \Delta\mathbf{v}_x - 2q_0^{0*}\right)\boldsymbol{\nu}_{xv}^0 - \frac{\nu_{x0}^0}{\nu_{x0}^2}\left(\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\omega}_x \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}_x - 2q_0^*\right)\boldsymbol{\nu}_{xv} - \\ - (p_0^*\Delta\mathbf{v}_x + p_0^{0*}\Delta\boldsymbol{\omega}_x) - (\boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x)\end{gathered} \tag{6.7}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{1}{\nu_{x0}}\left(\frac{1}{2}|\Delta\boldsymbol{\omega}|^2 - 2q_0^*\right)\boldsymbol{\nu}_{xv} - p_0^*\Delta\boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \Delta\boldsymbol{\omega}_x \tag{6.8}$$

Законы формирования угловых стабилизирующих управлений (6.6) и (6.8) совпадают с аналогичными законами, полученными в работах [23, 24] (соотношения (7.6.11) и (7.6.12) книги [25]).

Отметим, что полученные законы формирования стабилизирующих управлений (6.1)–(6.4) и (6.5)–(6.8) имеют особую точку, когда $\varphi = 180$ град., в которой они вырождаются (φ — эйлеров угол поворота твердого тела в возмущенном угловом движении). В этой точке величины $N_{\xi 0} = N_{x0}$ и ν_{x0}, фигурирующие в знаменателях законов управления, становятся равными нулю. Поэтому предлагаемые законы стабилизирующих управлений обеспечивают (при соответствующем выборе постоянных матричных $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{P}_v$, $\mathbf{Q}_v$; $\mathbf{P}_0^*$, $\mathbf{Q}_0^*$ и $\mathbf{P}_v^*$, $\mathbf{Q}_v^*$ или скалярных $P_{0k} = P_0$, $Q_{0k} = Q_0$ ($\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$); $P_{0k}^* = P_0^*$, $Q_{0k}^* = Q_0^*$ ($\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$) коэффициентов усиления нелинейных обратных связей) асимптотическую устойчивость любого выбранного программного движения твердого тела в большом, но не в целом. Можно показать, что эта особая точка в законах управления может быть устранена, но для этого нужно использовать (в рамках предлагаемого подхода к синтезу стабилизирующих управлений) не трехмерные винты скоростей и ускорений пространственного движения твердого тела (бикватернионы скоростей и ускорений с нулевыми скалярными частями), а “четырехмерные” скорости и ускорения пространственного движения твердого тела (бикватернионы скоростей и ускорений с ненулевыми дуальными скалярными частями, используемыми в алгоритме формирования стабилизирующих управлений). В отношении синтеза законов стабилизирующего управления угловым движением твердого тела такой подход был предложен автором статьи в работах [23–25].

7. Динамика управляемого пространственного движения твердого тела. Выбор коэффициентов законов управления. Построенные в разделе 6 законы изменения стабилизирующих ускорений представляют собой нелинейные функции компонент бикватерниона ошибки по линейному и угловому положению и компонент винта ошибки по линейной и угловой скорости твердого тела. Эти законы, реализуемые в системах управления пространственным движением твердого тела, образуют нелинейные обратные связи по положению и скорости твердого тела с дуальными скалярными или матричными коэффициентами усиления.

Нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимают вид дуальных матричных дифференциальных линейных уравнений второго порядка, инвариантных относительно любого выбранного программного движения твердого тела, имеющих постоянные дуальные скалярные или матричные коэффициенты. Эти коэффициенты уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных связей (коэффициентами построенных законов стабилизирующего управления). Поэтому динамика управляемого пространственного движения твердого тела для таких законов управления полностью описывается дуальными линейными стационарными дифференциальными уравнениями, приведенными в разделе 5, а задача нахождения необходимых значений коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих асимптотическую устойчивость и другие требуемые качественные и количественные характеристики управляемого движения твердого тела, сводится к задаче выбора коэффициентов этих уравнений. Эта задача имеет не единственное решение и может быть решена на основе анализа общих аналитических решений эталонных дифференциальных уравнений, исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходных процессов управления и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые скорости и ускорения твердого тела. К качественным характеристикам относятся устойчивость (асимптотическая или неасимптотическая), вид процесса (колебательный, колебательный затухающий, апериодический), оптимальность в том или ином смысле. К количественным характеристикам относятся периоды и частоты колебаний, коэффициенты затухания, перерегулирование, запасы устойчивости, время переходного процесса и другие. С точки зрения теории управления задача выбора коэффициентов эталонных линейных стационарных дифференциальных форм может рассматриваться как задача параметрического синтеза, модального управления, а также может рассматриваться в других постановках.

Рассмотрим случай дуальных скалярных коэффициентов усиления обратных связей, когда $P_{0k} = P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$; $P_{0k}^* = P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, $\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$. В этом случае дуальные матричные эталонные дифференциальные уравнения (5.1) и (5.2) принимают одинаковый вид

$$\ddot{\mathbf{N}}_{\xi v} + P_0\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} + Q_0\mathbf{N}_{\xi v} = 0 \tag{7.1}$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_{xv} + P_0^*\dot{\mathbf{N}}_{xv} + Q_0^*\mathbf{N}_{xv} = 0 \tag{7.2}$$

Уравнения (7.1) и (7.2) распадаются на отдельные независимые дуальные скалярные дифференциальные уравнения второго порядка относительно дуальных переменных $N_{\xi j}$ и N_{xj} с постоянными дуальными коэффициентами $P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_0 = q_0 + sq_0^0$ и $P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$.

Полагая $p_0 > 0, q_0 > 0$, запишем общее решение дуального дифференциального уравнения (7.1) (решение уравнения (7.2) совпадает по своей форме с решением уравнения (7.1)) для значений p_0 и q_0, удовлетворяющих условиям

$$p_0/2 < q_0^{1/2} \quad (p_0^2 < 4q_0) \tag{7.3}$$

Имеем

$$\mathbf{N}_{\xi v} = e^{-Kt}(\mathbf{C}_1 \cos(Lt) + \mathbf{C}_2 \sin(Lt)) \tag{7.4}$$

$$\dot{\mathbf{N}}_{\xi v} = -K\mathbf{N}_{\xi v} + Le^{-Kt}(\mathbf{C}_2 \cos(Lt) - \mathbf{C}_1 \sin(Lt)) \tag{7.5}$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{N}_{\xi v}(0), \quad \mathbf{C}_2 = L^{-1}(\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0) + K\mathbf{N}_{\xi v}(0))$$

Здесь $K = P_0/2$, $L = (Q_0 - (P_0/2)^2)^{1/2}$; $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – произвольные винтовые постоянные интегрирования, определяемые начальными (для момента времени $t = t_o = 0$) значениями $\mathbf{N}_{\xi v}(0)$, $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0)$ винтов $\mathbf{N}_{\xi v}$ и $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}$, связанными с начальными значениями $\mathbf{\Lambda}(0)$, $\mathbf{U}_x(0)$ искомых переменных $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{U}_x$ соотношениями

$$\begin{gathered}
\mathbf{N}_{\xi v}(0) = \mathrm{screv}(\mathbf{\Lambda}(0) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(0)) \\
\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0) = (1/2)\mathrm{screv}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi(0) \circ \mathbf{N}_\xi(0)) = (1/2)\mathrm{screv}(\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_\xi(0) \circ \mathbf{\Lambda}(0) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(0)) = \\
= (1/2)\mathrm{screv}(\mathbf{\Lambda}(0) \circ \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x(0) \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(0)) \\
\boldsymbol{\delta}\mathbf{U}_x(0) = \mathbf{U}_x(0) - \mathbf{U}_z^*(0)
\end{gathered} \tag{7.6}$$

Здесь screv(·) – винтовая часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Как видно из (7.4), (7.5), для скалярных $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, удовлетворяющих условиям (7.3), значение винтовой части $\mathbf{N}_{\xi v}$ бикватерниона $\mathbf{N}_\xi$ ошибки положения твердого тела в инерциальной системе координат ξ и ее первой производной по времени $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}$ в процессе управления стремятся асимптотически к нулю, что соответствует переводу твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из произвольного начального углового и линейного положения на любую заданную программную траекторию и дальнейшему асимптотически устойчивому движению твердого тела по программной траектории с требуемыми программными угловой и линейной скоростями и программными угловым и линейным ускорениями. При этом законы изменения всех дуальных переменных $N_{\xi i}$ и $\dot{N}_{\xi i}$ $(i = 1, 2, 3)$ в процессе управления для дуальных скалярных коэффициентов $P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_0 = q_0 + sq_0^0$ усиления нелинейных обратных связей носят качественно одинаковый характер (затухающий колебательный) и имеют такие одинаковые количественные характеристики, как частоты (периоды) колебаний, коэффициенты затухания. Отметим, что для скалярных $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$ в случаях $p_0/2 = q_0^{1/2}$ и $p_0/2 > q_0^{1/2}$ законы изменения всех дуальных переменных $N_{\xi i}$ и $\dot{N}_{\xi i}$ $(i = 1, 2, 3)$ в процессе управления для дуальных скалярных коэффициентов P_0, Q_0 будут иметь одинаковый затухающий апериодический характер.

Анализ (7.4), (7.5) показывает, что управляемое движение носит характер плоского винтового движения твердого тела в случае, когда винт $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0) = 0$, а также в случае, когда винтовые части $\mathbf{N}_{\xi v}(0)$ и $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}(0)$ бикватернионов $\mathbf{N}_\xi(0)$ и $\dot{\mathbf{N}}_\xi(0)$ параллельны, что означает равенство нулю для начального момента времени ошибок по угловой и линейной скоростям твердого тела или (во втором случае) параллельность для этого момента времени винта $\delta\mathbf{U}(0)$ ошибки по угловой и линейной скоростям твердого тела и винта $\mathbf{N}_v(0)$ ошибки по угловому и линейному положениям.

Соотношения (7.3)–(7.6) позволяют определить необходимые значения дуальных скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей P_0 и Q_0 исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходного процесса и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые скорости и ускорения твердого тела.

Отметим, что использование дуальных матричных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по положению и скорости твердого тела в общих законах управления пространственным движением твердого тела (6.1) и (6.2) позволяет реализовать взаимосвязанную желаемую динамику каналов управления движением, оптимальную в том или ином смысле и описываемую дуальными матричными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка (5.1) и (5.2) с дуальными матричными коэффициентами.

Заключение. В статье изучена в динамической нелинейной постановке с использованием параболических бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц задача построения управления пространственным движением твердого тела, обеспечивающего асимптотически устойчивый в большом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положения на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение твердого тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. При этом переходный процесс управления должен иметь желаемые качественные и количественные динамические характеристики.

Для решения задачи управления пространственным движением твердого тела в инерциальной системе координат использованы бикватернионные модели движения свободного твердого тела и концепция решения обратных задач динамики, с помощью которой задача построения управляющего момента и управляющей силы сводится к задаче синтеза требуемого углового и линейного ускорений твердого тела. Последняя задача носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, и поэтому представляет самостоятельный интерес. Требуемые угловое и линейное ускорения формируются в виде суммы программного и стабилизирующего угловых и линейных ускорений. Построение программных углового и линейного ускорений может быть выполнено с помощью методов теории оптимального управления.

Основное внимание в статье уделено синтезу стабилизирующих углового и линейного ускорений твердого тела. Оно формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной винтовой функции компонент бикватерниона ошибок ориентации и местоположения твердого тела, а также дуальных компонент кинематического винта твердого тела (дуальных композиций проекций векторов ошибок по угловой и линейной скоростям твердого тела) так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые предлагаемыми законами управления, принимали эталонный вид: вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка относительно винтовой переменной, характеризующей конечные ошибки ориентации и местоположения твердого тела (относительно винтовой части бикватерниона ошибок ориентации и местоположения твердого тела). Постоянные коэффициенты (дуальные скалярные или матричные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл дуальных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по угловому и линейному положениям, а также по угловой и линейной скоростям, реализуемых системой управления пространственным движением твердого тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов управления. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей исходя из желаемых качественных и количественных динамических характеристик переходного процесса управления.

Центральную роль в построенной теории играют нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела. Применение бикватернионов конечных перемещений позволяет построить компактные и наглядные уравнения возмущенного движения твердого тела, удобные для построения асимптотически устойчивых в большом управлений ориентацией и местоположением твердого тела. В статье рассматриваются два бикватернионных способа описания ошибок по угловому и линейному положениям твердого тела: с помощью бикватерниона ошибки ориентации и местоположения, определенного своими дуальными компонентами в основной (инерциальной) системе координат, и с помощью бикватерниона ошибки ориентации и местоположения, определенного своими дуальными компонентами в связанной с твердым телом системе координат (с помощью собственного бикватерниона ошибки ориентации и местоположения). Кроме этого, рассматриваются два способа описания ошибок по угловой и линейной скоростям, а также стабилизирующих углового и линейного ускорений твердого тела: 1) винтовой, когда ошибки по угловой и линейной скоростям и стабилизирующие угловое и линейное ускорения формируются в виде винтовых разностей действительного и программного винтов скоростей твердого тела и винтов действительного и программного ускорений; 2) формальный, когда ошибки по угловой и линейной скоростям и стабилизирующие угловое и линейное ускорения формируются в виде разностей дуальных проекций соответствующих винтов, определенных в разных системах координат. Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным дуальным законам формирования стабилизирующего управления.

В статье построены два вида винтовых законов управления, соответствующих двум различным формам дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела, с дуальными матричными или скалярными коэффициентами усиления нелинейных обратных связей, которые позволяют реализовать взаимосвязанную или развязанную желаемую динамику каналов управления движением, оптимальную в том или ином смысле и описываемую дуальными матричными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с дуальными постоянными матричными или скалярными коэффициентами. Эти законы управления позволяют обеспечить требуемые качественные и количественные динамические характеристики процесса управления пространственным движением твердого тела.

Предлагаемые законы управления могут быть использованы в инерциальных системах управления пространственным движением подвижных объектов, построенных на бесплатформенных принципах, когда подвижный объект имеет на своем борту бесплатформенную инерциальную навигационную систему, измеряющую проекции векторов абсолютной угловой скорости вращения и кажущегося ускорения объекта на связанные с ним координатные оси и вырабатывающую с помощью бортового вычислителя компоненты бикватерниона действительного углового и линейного положения объекта в инерциальной системе координат и проекции его абсолютной линейной скорости на связанные с ним координатные оси или на оси инерциальной системы координат. Эти законы управления могут быть также реализованы в системах управления движением роботов-манипуляторов, в которых используется принцип управления по абсолютному угловому и линейному положениям и по абсолютным угловой и линейной скоростям выходного звена робота-манипулятора.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00205.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lastman G.J.* A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Intern. J. Control. 1978. V. 27. № 4. P. 513–524.
2. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
3. *Li. F., Bainum P.M.* Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1990. V. 13. № 1. P. 38–45.
4. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
5. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144–157.
6. *Bedrossian, N., Bhatt S., Kang W. and Ross M.* Zero-Propellant Maneuver Guidance // IEEE Control Systems magazine. 2009. V. 29. № 5. P. 53–73.
7. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 61–69.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Известия РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 16–27.
9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 13–25.
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 131–141.
11. *Mortensen R.E.* A globally stable linear attitude regulator // International journal of control. 1968. V. 8. № 3. P. 297–302.
12. *Гаврилова Н.Л., Ткаченко А.И.* О стабилизации положения твердого тела // Автоматика. 1974. № 6. С. 3–8.
13. *Лебедев Д.В.* Управление ориентацией твердого тела с использованием параметров Родрига–Гамильтона // Автоматика. 1974. № 4. С. 29–32.
14. *Лебедев Д.В.* К задаче управления ориентацией твердого тела // Прикладная механика. 1976. Т. 12. № 2. С. 76–82.
15. *Лебедев Д.В.* К управлению трехосной ориентацией твердого тела при наличии ограничений на параметры управления // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 545–551.
16. *Wie B. and Barba P.M.* Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers // Journal of guidance, control and dynamics. 1985. V. 8. P. 360–365.
17. *Мартыненко В.В., Пушкова С.В.* Синтез оптимального управления вращением космического аппарата // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 1. С. 52–59.
18. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.
19. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 3–12.
20. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 3. С. 21–32.
21. *Челноков Ю.Н.* Кватернионный синтез нелинейного управления ориентацией движущегося объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 145–150.
22. *Челноков Ю.Н.* Кватернионы и динамика управляемого движения твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 13–23.

23. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 3–17.
24. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 2. С. 3–17.
25. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
26. *Clifford W.* Preliminary Sketch of Bi-quaternions. Proceedings of the London Mathematical Society. 1873. P. 381–395.
27. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. 215 с.
28. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. общества при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
29. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
30. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
31. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 24–31.
32. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Кинематическая задача ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 36–43.
33. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
34. *Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
35. *Панков А.А., Челноков Ю.Н.* Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 3–13.
36. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота твердого тела // Проблемы механики и управления: Межвуз. сб. науч. трудов. Пермь: Изд-во ПГУ, 1995. С. 122–131.
37. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации углового движения твердого тела // Математика. Механика: Сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 172–174.
38. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 204 с.
39. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 73–76.
40. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
41. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
42. *Han D., Qing Wei Q., Li Z.* Kinematic Control of Free Rigid Bodies Using Dual Quaternions // International Journal of Automation and Computing. 05(3). July 2008. P. 319–324.
43. *Kim M.J., Kim M.S., Shin S.Y.* A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve // Journal of Visualization and Computer Animation. 1996. V. 7. № 1. P. 43–57.
44. *Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li, Weimeng Sun.* Control of Oriented Mechanical systems: A Method Based on Dual Quaternion // Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, July 6–11 2008. P. 3836–3841.
45. *Dapeng Han, Qing Wei, Zexiang Li.* A Dual-quaternion Method for Control of Spatial Rigid Body. Networking, Sensing and Control // IEEE International Conference. 6–8 April 2008. P. 1–6.
46. *Ozgur E., Mezouar Y.* Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // Robotics and Autonomous Systems. 77 (2016). P. 66–73.

47. *Челноков Ю.Н.* Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.
48. *Челноков Ю.Н., Нелаева Е.И.* Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 2. С. 198–206.
49. *Челноков Ю.Н.* Теория кинематического управления движением твердого тела // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 7. С. 435–446.
50. *Челноков Ю.Н.* Приложения теории кинематического управления движением твердого тела // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 8. С. 532–542.
51. *Челноков Ю.Н.* Уравнения и алгоритмы для нахождения инерциальной ориентации и кажущейся скорости движущегося объекта в кватернионных и бикватернионных четырехмерных ортогональных операторах // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 17–25.
52. *Perez A. and McCarthy J.M.* Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems // Journal of Mechanical Design. 2004. V. 126. № 3. P. 425–435.
53. *Kavan L., Collins S., O'Sullivan, C. and Zara J.* Dual quaternions for Rigid Transformation Blending // Tech. Rep. TCD-CS-2006-46. 2006.
54. *Han D., Wei Q., Li Z. and Sun W.* Control of Oriented Mechanical Systems: A Method Based on Dual Quaternions // Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea. 2008. P. 3836–3841.
55. *Pham H.L., Perdereau V., Adorno B.V. and Fraisse P.* Position and Orientation Control of Robot Manipulators Using Dual Quaternion Feedback // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference of Intelligence Robots System. 2010. P. 658–663.
56. *Wang X. and Yu C.* Feedback Linearization Regulator with Coupled Attitude and Translation Dynamics Based on Unit Dual Quaternion // IEEE Multi-Conference on Systems and Control. 2010. P. 2380-2384.
57. *Schilling M.* Universally Manipulable Body Models – Dual Quaternion Representations in Layered and Dynamic MMCs // Autonomous Robots. 2011. V. 30 (4). P. 399–425.
58. *Zhang F., Duan G.* Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 08-11 August. 2011. Portland, Oregon. USA. AIAA 2011-6396.
59. *Wang J. and Sun Z.* 6-DOF Robust Adaptive Terminal Sliding Mode Control for Spacecraft Formation Flying // Acta Astronautica. 2012. V. 73. P. 76–87.
60. *Wang J., Liang H., Sun Z., Zhang S., Liu M.* Finite-time control for spacecraft formation with dual-number-based description // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35 (3). P. 950–962.
61. *Filipe N. and Tsiotras P.* Simultaneous Position and Attitude Control without Linear and Angular Velocity Feedback using Dual Quaternion // Proceedings of the American Control Conference. Washington DC. 2013. P. 4808-4813.
62. *Filipe N. and Tsiotras P.* Rigid Body Motion Tracking Without Linear and Angular Velocity Feedback Using Dual Quaternions // IEEE European Control Conference. 2013. P. 329–334.
63. *Lee U.* State-Constrained Rotational and Translational Motion Control with Applications to Monolithic and Distributed Spacecraft // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Program Authorized to Offer Degree: Aeronautics and Astronautics. University of Washington. 2014. 178 p.
64. *Zu Y., Lee U. and Dai R.* Distributed Motion Estimation of Space Objects Using Dual Quaternions // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. 2014. P. 1–13.
65. *Filipe N. and Tsiotras P.* Adaptive Position and Attitude–Tracking Controller for Satellite Proximity Operations Using Dual Quaternions // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2015. V. 38(4). P. 566–577.
66. *Filipe N., Kontitsis M. and Tsiotras P.* Extended Kalman Filter for Spacecraft Pose Estimation Using Dual Quaternions // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. V. 38 (9). P. 1625–1641.
67. *Lee U. and Mesbahi M.* Optimal Power Descent Guidance with 6-DoF Line of Sight Constraints via Unit Dual Quaternions // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 2015.

68. *Unsik Lee and Mehran Mesbahi.* Optimal Powered Descent Guidance with 6-DoF Line of Sight Constraints via Unit Dual Quaternions // University of Washington, Seattle, WA 98195-2400 1 of 21 American Institute of Aeronautics and Astronautics. P. 1–21.
69. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive Position and Attitude–Tracking Controller for Satellite Proximity Operations Using Dual Quaternions // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2015. V. 38 (4). P. 566–577.
70. *Haichao Gui, George Vukovich.* Dual-quaternion-based adaptive motion tracking of spacecraft with reduced control effort // Nonlinear Dynamics. 2016. V. 83. Issue 1–2. P. 597–614.
71. *Lee U. and Mesbahi M.* Constrained Autonomous Precision Landing via Dual Quaternions and Model Predictive Control // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. V. 40 (2). P. 292–308.
72. *Ахрамович С.А., Малышев В.В., Старков А.В.* Математическая модель движения беспилотного летательного аппарата в бикватернионной форме // Научно-технический журнал “Полет”. 2018. № 4. С. 9–20.
73. *Ахрамович С.А., Малышев В.В.* Применение бикватернионов в задачах управления летательными аппаратами // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М.: МАИ. 2018. С. 117–120.
74. *Ахрамович С.А., Баринов А.В.* Система управления движением БПЛА с прогнозирующей моделью в бикватернионной форме // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М.: МАИ. 2018. С. 120–122.
75. *Garcia C., Prett D.M., Morari M.* Model predictive control: theory and practice // Automatica. 1989. № 3. P. 335–348.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021,
№ 1, с. 44–49

УДК 539.3

КРУГОВЫЕ ДИСЛОКАЦИИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ: УДЕЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

© 2021 г. С. В. Кузнецов[a,b,c,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[b] *Московский государственный технический университет им. Баумана, Москва, Россия*
[c] *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*
**e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

Поступила в редакцию 05.04.2019 г.
После доработки 15.08.2019 г.
Принята к публикации 21.09.2020 г.

Построен псевдодифференциальный оператор, описывающий поле напряжений в анизотропной среде, вызванное дислокацией с переменным вектором Бюргерса.

В предположении $\mathbf{b} \in H_{1/2}(\Pi, R^3)$ впервые получены аналитические выражения для энергии круговых дислокаций с переменным вектором Бюргерса, находящихся в упругой среде с анизотропией общего вида. Обнаружено, что в изотропной среде энергия образования краевой дислокации и дислокации скольжения определяется только равномерной нормой вектора Бюргерса.

Ключевые слова: дислокация, вектор Бюргерса, анизотропия, энергия

DOI: 10.31857/S0572329921010074

1. Введение. Энергия образования изолированной дислокации позволяет судить о многих свойствах кристаллов, с точки зрения механики разрушения наиболее важные из которых связанны с пластичностью и трещиностойкостью. Последнее обусловлено тем, что по современным представлениям краевая дислокация является предшественником трещины. В анизотропных кристаллах энергия дислокации среди прочих параметров может зависеть от ориентации дислокации (ориентации плоскости, в которой расположена дислокация) и ориентации вектора Бюргерса, характеризующего тип дислокации. Так в случае, если вектор Бюргерса лежит в плоскости дислокации говорят о дислокации скольжения, связанной с пластической работой материала, при векторе Бюргерса перпендикулярном плоскости дислокации речь идет о краевой дислокации. Естественно, что минимальные значения энергии отвечают наиболее вероятным расположениям дислокаций и, тем самым, определяют направления линий скольжения в кристаллах и направления, по которым должны развиваться будущие трещины. Кроме того, это позволяет оценить соотношение между пластическими и хрупкими свойствами кристалла.

Наиболее простой и в то же время естественный способ теоретического исследования энергии образования дислокации состоит в описании упругого поля перемещений, индуцированного дислокацией, в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{y}') \cdot \mathbf{T}(\nu, \partial_y)\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}')dy' \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ – поле перемещений, Ω – (плоская) область, занятая дислокацией, $\mathbf{b}$ – вектор Бюргерса, $\mathbf{T}$ – оператор поверхностных напряжений на плоскости $\Pi \supset \Omega$ с вектором единичной нормали $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$ – фундаментальное решение уравнений равновесия. Затем по (1.1) вычисляются напряжения на плоскости П, после чего оказывается возможным определить и энергию дислокации, как работу поверхностных напряжений на соответствующем скачке смещений, создаваемым вектором Бюргерса:

$$W = 1/2\int_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} dx' \tag{1.2}$$

где $\mathbf{t}$ – поверхностные напряжения на плоскости П.

Этот подход применялся в исследованиях [1–3], где определялась энергия образования дислокации, размещенной в изотропной среде, и в [4], где найдена энергия дислокации, находящейся в плоскости изотропии трансверсально изотропной среды. В [5] аналогичный подход в сочетании с интегральным преобразованием Фурье позволил обойти трудности, связанные с отсутствием аналитических формул для фундаментальных решений при произвольной анизотропии.

Замечание 1.1. В [1–5] при описании дислокаций предполагалось, что вектор Бюргерса постоянен в Ω, – это в сочетании с теоремой Пича–Колера [6], позволяло ограничиться изучением энергии, произведенной дислокационной петлей (контуром, ограничивающим область Ω). В этом случае энергия образования дислокации оказывается бесконечной, и для получения конечных значений энергии приходиться выделять некоторую тороидальную окрестность петли. Метод выделения тороидальных окрестностей для получения конечных значений энергии дислокационных петель применялся в [7]. Надо отметить принципиальное различие между задачами теории трещин и дислокаций: если в теории трещин, в силу предположений о характере поля скачков смещений на берегах трещины, поле напряжений интегрируемо, то в теории дислокаций положение более сложное: для дислокаций с постоянным вектором Бюргерса поле напряжений имеет неинтегрируемую особенность в окрестности дислокационной границы, это вносит отмеченные выше затруднения в подсчете энергии краевой дислокации. Конечные значения энергии дислокаций могут быть получены и в предположении, что вектор Бюргерса непостоянен в Ω. Строго говоря, для конечных значений энергии требуется, чтобы $\mathbf{b} \in H_{1/2}(\Pi, R^3)$, при $\operatorname{supp} \mathbf{B} \subset \Omega$, где supp обозначает носитель распределения (функции), а $H_{1/2}$ – функциональное пространство Хермандера, определенное как множество распределений, преобразование Фурье которых интегрируемо в квадрате с весом $k(\xi') = (1 + |\xi'|^2)^{1/2}$.

В настоящей работе методом, основанном на анализе символов, построен псевдодифференциальный оператор, описывающий поле напряжений в анизотропной среде, вызванное дислокацией с переменным вектором Бюргерса.

В предположении $\mathbf{b} \in H_{1/2}(\Pi, R^3)$ получены аналитические формулы для энергии круговой дислокации в среде с анизотропией общего вида. Кроме того, приведена аналитическая формула, дающая значения энергии круговой дислокации, находящейся в изотропной среде.

2. Основные соотношения. Рассматривается однородная анизотропная упругая среда, уравнения равновесия которой записываются в виде

$$\mathbf{A}(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u} = -\mathrm{div}_{\mathrm{x}}\mathbf{C} \cdot \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{A}$ – матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный тензор упругости. Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен

$$\mathbf{s} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{s} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \tag{2.2}$$

Предполагается также, что исследуемая среда гиперупругая, в силу чего тензор **C** симметричен, как оператор, действующий в шестимерном пространстве симметричных тензоров второго ранга: $C^{ijmn} = C^{mnij}$.

Применяя интегральное преобразование Фурье

$$f^{\wedge}(\xi) = \int_{R^3} f(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \mathbf{x} \cdot \xi) dx, \qquad f \in L^2(R^3)$$

к уравнению (2.1), получим символ оператора **A**

$$\mathbf{A}^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^2 \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \xi \tag{2.3}$$

причем условие (2.2) обеспечивает эллиптичность символа $\mathbf{A}^{\wedge}$. По символу (2.3) легко вычисляется преобразованное по Фурье фундаментальное решение

$$\mathbf{E}^{\wedge}(\xi) = \mathbf{A}^{\wedge -1}(\xi) \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. В общем случае анизотропии обратить по Фурье выражение (2.4) удается только численно. Однако, как показано ниже, при построении основного п.д.о., необходимого для вычисления энергии, оказывается возможным ограничиться символом $\mathbf{E}^{\wedge}(\xi)$.

Напряжения на плоскости, несущей дислокацию, определяются по (1.1) с помощью следующего п.д.о:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}') = -\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}'} \mathbf{T}(\nu, \partial_{\mathbf{x}}) \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{y}') \cdot \mathbf{T}(\nu, \partial_y) \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}') dy' \; \mathbf{x}' \in \Pi \tag{2.5}$$

Предел в правой части (2.5) вычисляется по некасательным направлениям к П. При этом в области Ω непосредственный переход к пределу под знаком интеграла оказывается невозможным из-за слишком большой особенности ядра

$$\mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\mathbf{T}(\nu_y, \partial_y) \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{T}^t(\nu_x, \partial_x) \tag{2.6}$$

Можно показать [7], что ядро **G** имеет неинтегрируемую особенность r^{-3} при $r \to 0$.

Интегральное преобразование Фурье, примененное к (2.6) дает соответствующую амплитуду в виде

$$\mathbf{G}^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^2 \nu_y \cdot \mathbf{C} \cdot \xi \otimes \mathbf{E}^{\wedge}(\xi) \otimes \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \nu_x \tag{2.7}$$

где для главного символа оператора поверхностных напряжений использовано представление $\mathbf{T}^{\wedge}(\nu, \xi) = 2\pi i \nu \cdot \mathbf{C} \cdot \xi$.

Замечание 2.2. Непосредственно из (2.7) следует, что амплитуда $\mathbf{G}^{\wedge}$ положительно однородна по ξ степени 0.

3. Сужение $\mathbf{G}^{\wedge}$ на плоскость П. В терминах обратного интегрального преобразования Фурье сужение $\mathbf{G}^{\wedge}$ на плоскость П, соответствующее формуле (2.5), может быть записано в виде

$$\mathbf{G}^{\sim}(\xi') = \lim_{x'' \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}^{\wedge}(\xi) \exp(2\pi i x'' \xi'') d\xi'', \qquad \xi' = \mathrm{Pr}_{\Pi}\, \xi, \qquad \xi'' = \mathrm{Pr}_{\nu}\, \xi \tag{3.1}$$

где знак "~" обозначает преобразование Фурье по переменным лежащим в плоскости П, а x'' – проекция вектора **x** на направление $\boldsymbol{\nu}$. Надо признать, что пользоваться формулой (3.1) также неудобно, как и (2.5), поскольку для вычисления предела в правой части (3.1) необходимо многократно при различных значениях x'' вычислять несобственный интеграл (3.1).

Для перехода к пределу непосредственно под интегралом, введем в рассмотрение постоянный тензор

$$\lim_{\xi''\to 0} \mathbf{G}^{\wedge}(\xi) = \nu_y \cdot \mathbf{C} \cdot \nu_x \tag{3.2}$$

Выделяя из амплитуды (2.7) постоянный тензор (3.2), получим асимптотическую оценку

$$(\mathbf{G}^{\wedge}(\xi) - \boldsymbol{\nu}_y \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\nu}_x) = O(|\xi''|^{-1}), \quad |\xi''| \to \infty \tag{3.3}$$

Оценка (3.3) показывает, что после выделения постоянного тензора (3.2) несобственный интеграл в (3.1) при $x'' = 0$ все еще расходится. Однако, анализ выражения в левой части (3.3) показывает, что компоненты, для которых эта оценка достигается нечетны по ξ''. Это позволяет получить следующую регулярную формулу для вычисления несобственного интеграла (3.1) при $x'' = 0$:

$$\mathbf{G}^{\sim}(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} \{1/2[\mathbf{G}^{\wedge}(\xi) + \mathbf{G}^{\wedge}(-\xi)] - \nu_y \cdot \mathbf{C} \cdot \nu_x\} d\xi'' \tag{3.4}$$

Замечания 3.1. а) Методами [7, 8] можно показать, что амплитуда $\mathbf{G}^{\sim}$ положительно однородна по ξ' степени 1 и при $\nu_y = \nu_x$ дает символ, строго эллиптичный при любых $\xi' \neq 0$.

б) Из предыдущего замечания следует, что вычисление $\mathbf{G}^{\sim}$ по формуле (3.4) можно проводить лишь для значений ξ', лежащих на окружности единичного радиуса, поскольку

$$\mathbf{G}^{\sim}(\xi') = |\xi'| \mathbf{G}_0^{\sim}(\varphi), \quad \varphi = \arcsin(\xi_2/|\xi'|) \tag{3.5}$$

Надо отметить, что зависимость символа $\mathbf{G}_0^{\sim}$ только от окружной координаты аналогична зависимости положительно однородного символа фундаментального решения уравнений статики $\mathbf{E}^{\wedge}(\xi)$, представимого в виде $|\xi|^{-2}\,\mathbf{E}_0^{\sim}(\varphi,\theta)$, только от двух сферических координат φ, θ. Это позволяет свести определение символа $\mathbf{E}^{\wedge}(\xi)$ к определению значений $\mathbf{E}_0^{\sim}(\varphi,\theta)$ на сфере единичного радиуса [7].

4. Формула для энергии. Используя (3.4), преобразованные по Фурье напряжения на плоскости П представим в виде

$$\mathbf{t}^{\sim}(\xi') = \mathbf{b}^{\sim}(\xi') \cdot \mathbf{G}^{\sim}(\xi') \tag{4.1}$$

Теперь, применяя равенство Парсеваля к выражению для энергии (1.2) и используя (4.1), найдем

$$W = 1/2 \int_{\Pi} \mathbf{b}^{\sim}(\xi') \cdot \overline{\mathbf{G}^{\sim}(\xi') \cdot \mathbf{b}^{\sim}(\xi')} d\xi' \tag{4.2}$$

В силу (3.5) выражение (4.2) принимает конечные значения, если $\mathbf{b} \in H_{1/2}(\Pi, R^3)$.

Замечания 4.1. а) Для любой измеримой области $\Omega \subset \Pi$ характеристическая функция $\chi_\Omega \notin H_{1/2}(\Pi)$. Этот факт немедленно вытекает из рассмотрения выражения преобразованной по Фурье характеристической функции какой-либо простой области, погруженной в заданную, для которой преобразование Фурье удается вычислить явно.

Например, для окружности единичного радиуса имеем [9]: $\hat{\chi}_\Omega(\xi') = |\xi'|^{-1} J_1(2\pi|\xi'|)$, что приводит к асимптотической оценке

$$|\hat{\chi}_\Omega(\xi')| = O(|\xi'|^{-3/2}), \quad |\xi'| \to \infty \tag{4.3}$$

Из (4.3) в свою очередь следует, что норма такой функции не ограничена в $H_{1/2}$. Но для дислокаций с постоянным вектором Бюргерса имеем $\mathbf{b}(\mathbf{x}') = \mathbf{b}\chi_\Omega(\mathbf{x}')$, $\mathbf{x}' \in \Pi$.

Таким образом при любой анизотропии упругой среды, в том случае если вектор Бюргерса постоянен в (плоской) области, занятой дислокацией, ее энергия, определяемая по (4.2) при учете (3.5), оказывается неограниченной.

б) Рассмотрим круговые дислокации с переменным вектором Бюргерса:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}') = \begin{cases} \mathbf{b}_0(1 - |\mathbf{x}'|^2)^\delta, & |\mathbf{x}'| \le 1, \quad 0 < \delta \\ 0, & |\mathbf{x}'| > 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

где $\mathbf{b}_0$ – постоянный вектор. Преобразование Фурье представления (4.4) дает [8]:

$$\mathbf{b}^{\sim}(\xi') = \mathbf{b}_0 \pi^{-\delta} \Gamma(\delta + 1) |\xi'|^{-\delta-1} J_{\delta+1}(2\pi|\xi'|) \tag{4.5}$$

Имея ввиду асимптотические оценки бесселевых функций

$$J_\alpha = O(r^\alpha), \quad r \to 0, \quad J_\alpha = O(r^{-1/2}), \quad r \to \infty, \quad \forall_{\alpha \ge 0} \alpha$$

При из (4.2), (4.5) по аналогии с п. а) немедленно получаем

При любой анизотропии упругой среды, энергия круговых дислокаций с вектором Бюргерса, определенным формулой (4.4), конечна.

Подстановка выражения (4.5) в формулу для энергии (4.2) при учете (3.5) дает

$$W = 1/2\pi^{-2\delta}\Gamma^2(\delta + 1)\int_0^\infty r^{-2\delta-1} J_{\delta+1}^2(2\pi r) dr \int_0^{2\pi} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{G}_0^{\sim}(\varphi) \cdot \mathbf{b}_0 d\varphi \tag{4.6}$$

В формуле (4.6) упругие свойства среды и тип дислокации входят лишь в последний интеграл, так что при оценке влияния анизотропии упругих свойств на энергию образования круговой дислокации (4.4) оказывается возможным ограничиться анализом значений интеграла на единичной окружности.

5. Дислокация в изотропной среде. Рассматривается изотропная однородная упругая среда, тензор упругости которой имеет вид

$$C^{ijkl} = \lambda\delta^{ij}\delta^{kl} + \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) \tag{5.1}$$

где λ, μ – константы Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. Для этой среды непосредственное использование выражений (2.3), (2.4) дает

$$\mathbf{E}^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-2} [\mu(\lambda + 2\mu)]^{-1} [(\lambda + 2\mu)|\xi|^{-2} \mathbf{I} - (\lambda + \mu)|\xi|^{-4} \xi \otimes \xi] \tag{5.2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица. Подставляя выражения (5.1), (5.2) в формулу (2.7) для главного символа $\mathbf{G}^\wedge$ (при $\nu_x = \nu_y$), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^\wedge(\xi) = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Bigg[&(\lambda + \mu)^2 \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{|\xi|^2}(\xi \cdot \boldsymbol{\nu})(\xi \otimes \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \otimes \xi) + \\ &+ \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{|\xi|^2}\xi \otimes \xi - \frac{\mu(\lambda + \mu)}{|\xi|^4}(\xi \cdot \boldsymbol{\nu})^2 \xi \otimes \xi\Bigg] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Далее, используя для символа (5.3) регуляризацию (3.4), будем иметь

$$\mathbf{G}^{\sim}(\xi') = \frac{\mu|\xi'|}{2(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+2\mu)\mathbf{I} + \lambda\left(\frac{\xi'\otimes\xi'}{|\xi'|^2} + \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\right)\right] \tag{5.4}$$

Выражение (5.4) с точностью до множителя $|\xi'|$ совпадает с символом оператора теории трещин для изотропной среды [7, 10].

Имея ввиду замечание 4.1.б), из (5.4) получим формулу для интеграла по единичной окружности в формуле (4.6):

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{b}_0\cdot\mathbf{G}_0^{\sim}(\varphi)\cdot\mathbf{b}_0\,d\varphi = 2\pi\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}|\mathbf{b}_0|^2 \tag{5.5}$$

Выражение (5.5) показывает, что в изотропной среде энергия рассматриваемой круговой дислокации не зависит от ее типа. Таким образом, в изотропной среде появление краевых дислокаций и дислокаций скольжения с точки зрения энергии равновероятно.

6. Заключение. Построен псевдодифференциальный оператор, описывающий поле напряжений в анизотропной среде, вызванное дислокацией с произвольным вектором Бюргерса.

В предположении $\mathbf{b}\in H_{1/2}(\Pi, R^3)$ получены аналитические формулы для энергии круговой дислокации с переменным вектором Бюргерса, находящейся в анизотропной среде с анизотропией общего вида.

Получены аналитические выражения, дающие значения энергии круговой дислокации, находящейся в изотропной среде. Показано, что в изотропной среде энергия рассматриваемой круговой дислокации с переменным вектором Бюргерса $\mathbf{b}\in H_{1/2}(\Pi, R^3)$ не зависит от типа дислокации.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 19-19-00616.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mechanics of Generalized Continua (editor *Kroner E.*). Proceedings of the IUTAM-Symposium. Springer; 2014. ISBN-13:978-3662302590.
2. Collected Works of J. D. Eshelby: The Mechanics of Defects and Inhomogeneities. Springer; 2006 edition. ISBN-10:140204416X.
3. *Nabarro F.R.N.* The mathematical theory of stationary dislocations // Adv. Phys. 1952. V. 1. № 3. P. 269–394.
4. *Chou Y.T., Eshelby J.D.* The energy and line tension of a dislocation in a hexagonal crystal // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. № 1. P. 27–34.
5. *Kuznetsov S.V.* On the operator of the theory of cracks // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série II, Mécanique, Physique, Chimie, Astronomie. 1996. V. 323. Iss. 7. P. 427–432.
6. *Peach M.O., Koehler J.S.* The forces exerted in dislocations and the stress field produced by them // Phys. Rev. Ser. 2. 1950. V. 80. P. 436–439.
7. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63. P. 455–467.
8. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* 3D Green’s function for equations of harmonic vibrations // Arch. Appl. Mech. 2017. V.87. P. 159–165. https://doi.org/10.1007/s00419-016-1184-y
9. *Stein E.* Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press, 2005. ISBN-13:978-0691113869.
10. *Willis J.R.* A penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. № 3. P. 367–385.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 50–68

УДК 531.36, 531.38

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МНОГОТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ. 2

© 2021 г. Б. И. Коносевич[a,*], Ю. Б. Коносевич[a]

[a] *Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина*

**e-mail: konos.donetsk@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.04.2019 г.
После доработки 22.05.2019 г.
Принята к публикации 06.06.2019 г.

Данная статья является второй частью работы, опубликованной в виде двух статей. Рассмотрен оставшийся неизученным в первой части случай, когда при невозмущенном значении постоянной циклического интеграла механическая приведенная потенциальная энергия является постоянной по отношению к внутреннему карданову углу. Доказано, что в этом случае для большинства конструкций прибора имеет место неустойчивость всех стационарных решений уравнений движения. Из полученных результатов следует, что для большинства конструкций прибора наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного решения уравнений движения.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, стационарное движение, синхронный электромотор, устойчивость по Ляпунову, приведенная потенциальная энергия, принцип инвариантности Ла-Салля

DOI: 10.31857/S0572329921010062

Введение. В настоящей статье продолжено начатое в [1] исследование устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электромотором синхронного типа, который поддерживает вращение гироскопа (ротора) при наличии момента сил трения относительно его оси. При этом трение на осях карданова подвеса предполагается отсутствующим, а наружная ось подвеса – вертикальной. Рассмотрен оставшийся неизученным в [1] случай D, когда при невозмущенном значении $p = \tilde{p}$ постоянной циклического интеграла механическая приведенная потенциальная энергия $U_*(p, \beta)$ постоянна по отношению к углу β поворота внутренней “рамки” карданова подвеса. Случай D имеет место при выполнении указанных в лемме 1 [1] условий D_1, D_2 на параметры прибора.

Статья состоит из трех разделов. В разделе 3 даны основные теоремы о неустойчивости стационарных решений при условиях D_1, D_2. Для их доказательства используются установленные в разделе 2 нелокальные свойства решений возмущенной приведенной системы S_p при малых по модулю возмущениях $p - \tilde{p}$ интегральной постоянной p. Вывод указанных нелокальных свойств основан на приведенных в разделе 1 принципе инвариантности Ла-Салля, леммах о неограниченности и ограниченности решений и леммах о структуре множества стационарных решений при условиях D_1, D_2.

1. Принцип Ла-Салля и леммы о свойствах решений приведенной системы при условиях D_1, D_2. *1.1. Теорема Ла-Салля.* Принцип Ла-Салля используется в данной статье в виде теоремы VIII из книги [2], которая следующим образом формулируется применительно к отдельно взятому решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Пусть задана автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Z(z) \tag{1.1}$$

где $z \in R^n$, функция $Z : R^n \to R^n$ – непрерывно дифференцируема. Пусть $V: R^n \to R$ – непрерывно дифференцируемая функция, производная которой по времени в силу системы (1.1) удовлетворяет условию

$$\dot{V}(z) \le 0, \quad z \in R^n \tag{1.2}$$

Обозначим через M максимальное инвариантное множество, образованное фазовыми траекториями непродолжаемых влево и вправо решений $z(t)$ системы (1.1), для которых $\dot{V}(z(t)) = 0$ при всех t из максимального интервала их существования.

Пусть для решения $z(t)$, $t \in [0, \infty)$, системы (1.1) выполнены условия:

(a) функция $V(z(t))$ ограничена снизу при всех $t \in [0, \infty)$;

(b) решение $z(t)$ ограничено на полуоси $[0, \infty)$.

Тогда решение $z(t)$ неограниченно приближается к M при $t \to \infty$.

1.2. Леммы о неограниченности и ограниченности решений. В этом пункте доказаны леммы 2, 3 о свойствах решений приведенной системы, которые используются далее. Предварительно устанавливается следующий результат, на который опирается доказательство леммы 2.

Лемма 1. Пусть задана автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), где $z \in R^n$, а функция $Z : R^n \to R^n$ непрерывна. Если для решения $z(t)$ этой системы его максимальный правый интервал существования $[0, \tau)$ конечен, то решение $z(t)$ неограниченно на этом интервале.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы 1 неверно, то есть решение $z(t)$ ограничено на промежутке $[0, \tau)$. В таком случае существует ограниченная область D такая, что $z(t) \in$ D при всех $t \in [0, \tau)$.

Пусть последовательность моментов времени $t_n \in [0, \tau)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ стремится к τ при $n \to \infty$. Тогда соответствующее ограниченное множество точек $z(t_n) \in$ D имеет точку сгущения z^*, принадлежащую замыканию $\bar{\mathrm{D}}$ области D. Поэтому последовательность t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ содержит подпоследовательность t_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ такую, что $t_{n_k} \to \tau$ при $k \to \infty$, и последовательность $z(t_{n_k})$ имеет предел z^* при $k \to \infty$. Существование предела означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $k(\varepsilon)$ такой, что

$$\|z(t_{n_k}) - z^*\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad k \ge k(\varepsilon) \tag{1.3}$$

Однако конечный предел функции $z(t)$ при $t \to \tau$ не существует, так как в случае его существования решение $z(t)$ можно продолжить для значений $t > \tau$, воспользовавшись непрерывностью функции $Z(z)$. Несуществование такого предела означает следующее:

$$(\forall z^* \in R^n)(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta \in (0, \tau))(\exists t \in (\tau - \delta, \tau)) \quad \|z(t) - z^*\| \ge \varepsilon_0 \tag{1.4}$$

С учетом того, что здесь δ – любое значение из интервала $[0, \tau)$, рассмотрим какую-нибудь последовательность $\delta_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ значений δ, стремящуюся к 0 при

$k \to \infty$ и удовлетворяющую условию $\delta_k < \tau$. Из (1.4) следует, что для каждого δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ существует момент времени $t_k \in (\tau - \delta_k, \tau)$, когда

$$\|z(t_k) - z^*\| \geq \varepsilon_0 \tag{1.5}$$

Пользуясь имеющимся произволом в выборе $\delta_k \in (0, \tau)$, полагаем $\delta_k = \tau - t_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, здесь величины t_{n_k} определены выше. Тогда

$$t_k - t_{n_k} \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{1.6}$$

Выбираем $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ в (1.3), и тогда при всех $k > k(\varepsilon_0/2)$ из (1.3), (1.5) следует, что

$$\|z(t_k) - z(t_{n_k})\| \geq \|z(t_k) - z^*\| - \|z(t_{n_k}) - z^*\| \geq \varepsilon_0/2 \tag{1.7}$$

С другой стороны, согласно (1.1) имеем

$$z(t_k) = z(0) + \int_0^{t_k} Z(z(\sigma))d\sigma, \quad z(t_{n_k}) = z(0) + \int_0^{t_{n_k}} Z(z(\sigma))d\sigma$$

и поэтому

$$z(t_k) - z(t_{n_k}) = \int_{t_{n_k}}^{t_k} Z(z(\sigma))d\sigma \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

Но, по предположению, $z(t)$ при всех $t \in [0, \tau)$ принадлежит ограниченной области D. Функция $Z(z)$ непрерывна на замыкании $\overline{\mathrm{D}}$ этой области, и, следовательно, норма функции $Z(z)$ имеет в $\overline{\mathrm{D}}$ конечный максимум $Z_{\max}$. Поэтому подынтегральная функция в (1.8) ограничена по норме величиной $Z_{\max}$. В таком случае из (1.8) получаем неравенство

$$\|z(t_k) - z(t_{n_k})\| \leq |t_k - t_{n_k}| Z_{\max} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Тогда, при учете (1.6), имеем $\|z(t_k) - z(t_{n_k})\| \to 0$ $(k \to \infty)$, что противоречит (1.7). Лемма 1 доказана.

С целью сокращения записи далее используются введенные в (1.10, [1]) обозначения y, z_p для фазовых векторов преобразованной системы (1.9, [1]) и приведенной системы S_p:

$$y = (p, \dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}), \quad z_p = (\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2})$$

Лемма 2. Пусть для решения $z_p(t)$ приведенной системы S_p его правый максимальный интервал существования $J_p^+ = [0, \tau_p)$ конечен, то есть $0 < \tau_p < \infty$. Тогда хотя бы одна из угловых переменных β, γ в этом решении неограниченна по модулю при $t \to \tau_p$.

Доказательство. Поскольку решение $z_p(t)$ существует лишь на конечном промежутке времени $J_p^+ = [0, \tau_p)$, то, по лемме 1, его норма $\|z_p(t)\|$ неограниченна на этом промежутке. Значит, модуль хотя бы одной из компонент фазового вектора системы S_p в этом решении неограничен при $t \to \tau_p$. В случае, когда такой компонентой является β или γ, утверждение леммы 2 выполнено.

Рассмотрим случай, когда неограниченным при $t \to \tau_p$ является модуль одной из отличных от β, γ компонент $\dot\beta, \dot\gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}$ фазового вектора. В таком случае, согласно определениям (1.31, 1.26, [1]) функций T_*, T_1, хотя бы одна из этих функций принимает на рассматриваемом решении сколь угодно большие положительные значения при $t \to \tau_p$.

Функция E_3, определенная формулой (1.30, [1]), имеет знакопостоянную отрицательную производную (1.32, [1]) по t. Поэтому на решении $z_p(t)$ функция E_3 ограничена сверху своим начальным значением. При сколь угодно больших положительных значениях одной из функций T_*, T_1, это возможно только в случае, когда член $c_0\gamma$ в выражении (1.19, [1]) функции U_1, входящей в определение (1.30, [1]) функции E_3, принимает сколь угодно большие по модулю отрицательные значения при $t \to \tau_p$, то есть когда переменная γ неограниченна снизу при $t \to \tau_p$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть в решении $z_p(t)$, $t \in [0, \infty)$, приведенной системы S_p его компонента $\gamma(t)$ ограничена при $t \in [0, \infty)$. Тогда в этом решении все его компоненты ограничены при $t \in [0, \infty)$, если угловая переменная β рассматривается как точка окружности единичного радиуса.

Доказательство. Поскольку в решении $z_p(t)$ функция $\gamma(t)$ ограничена по предположению, здесь следует установить ограниченность всех остальных компонент фазового вектора при $t \in [0, \infty)$.

Ограниченность функции $\gamma(t)$ означает, в частности, ее ограниченность снизу. Поэтому среди точек γ_{1s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ локального минимума функции $U_1(\gamma)$, определенных в (1.15, 1.16, [1]), существует точка γ_{1s_0} с некоторым номером s_0 такая, что $\gamma(t) \geq \gamma_{1s_0}$ при всех $t \in [0, \infty)$. Тогда из формулы (1.19, [1]), определяющей функцию $U_1(\gamma)$, следует, что точка γ_{1s_0} является точкой минимума этой функции на всей полуоси $\gamma \geq \gamma_{1s_0}$. Значит, для определенной в (1.35, [1]) функции $\Delta U_1(\gamma)$ на рассматриваемом решении выполнено неравенство $\Delta U_1(\gamma) \geq 0$.

Механическая приведенная потенциальная энергия (1.18, [1]) является, при учете (1.2, 1.3, [1]), непрерывной 2π-периодической функцией $U_*(p, \beta)$ переменной β. Следовательно, для определенной в (1.35, [1]) функции $\Delta U_*(p,\beta)$ при всех β выполнено неравенство $\Delta U_*(p,\beta) \geq 0$.

Рассмотрим функцию V_p, определенную в (1.34, [1]). Она имеет знакопостоянную отрицательную производную (1.36, [1]) по t в силу системы S_p. Поэтому на решении $z_p(t)$ функция V_p не превосходит своего начального значения V_{p0}, то есть фазовые переменные в этом решении принадлежат множеству

$$\{(\dot\beta, \dot\gamma, \beta, \gamma, x, i_1, \ldots, i_{n_2}) : T_*(\dot\beta, \dot\gamma, \beta) + T_1(x, i_1, \ldots, i_{n_2}) + \Delta U_*(p, \beta) + \Delta U_1(\gamma) \leq V_{p0}\} \tag{1.9}$$

Как было отмечено в п. 1.4 [1], функция T_*, определенная формулой (1.31, [1]), при любом β является определенно положительной квадратичной формой переменных $\dot\beta$, $\dot\gamma$. Функция T_1, определенная формулой (1.26, [1]), является определенно положительной квадратичной формой переменных $x, i_1, \ldots, i_{n_2}$. Функции $\Delta U_1(\gamma)$ и $\Delta U_*(p,\beta)$, как отмечено выше, неотрицательны. Поскольку все функции T_*, T_1, ΔU_*, ΔU_1 неотрицательны на решении $z_p(t)$, то $V_{p0} \geq 0$, и тогда из (1.9) следуют четыре неравенства

$$T_*(\dot\beta, \dot\gamma, \beta) \leq v_{p0}, \quad T_1(x, i_1, \ldots, i_{n_2}) \leq v_{p0}, \quad \Delta V_*(p, \beta) \leq V_{p0}, \quad \Delta U_1(\gamma) \leq V_{p0} \tag{1.10}$$

Снова воспользуемся тем, что функция T_* является определенно положительной квадратичной формой переменных $\dot\beta, \dot\gamma$ с непрерывными 2π-периодическими по β коэффициентами, а функция T_1 является определенно положительной по переменным $x, i_1, \ldots, i_{n_2}$. Тогда из двух первых неравенств (1.10) следует, что на рассматриваемом решении $z_p(t)$ выполняются неравенства

$$\dot\beta^2 + \dot\gamma^2 \le \rho_1^2 \quad (\rho_1 \ge 0), \quad x^2 + i_1^2 + \ldots + i_{n_2}^2 \le \rho_2^2 \quad (\rho_2 \ge 0)$$

Тем самым установлена ограниченность решения $z_p(t)$ по переменным $\dot\beta$, $\dot\gamma$, β γ, x, i_1, ..., i_{n_2}. Угловая переменная β также ограничена, если, следуя [3], рассматривать ее изменение на окружности единичного радиуса.

1.3. Структура множества стационарных решений при условиях D_1, D_2. Если выполнены условия D_1 или D_2, установленные в лемме 1 [1], то $U_*(\tilde p, \beta) \equiv \text{const}$ тождественно по β, и преобразованная система (1.9, [1]) имеет стационарное решение

$$p = \tilde p, \quad \dot\beta = 0, \quad \dot\gamma = 0, \quad \beta = \tilde\beta^0, \quad \gamma = \tilde\gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \ldots, i_{n2} = 0 \tag{1.11}$$

при $\beta = \tilde\beta^0$ любом и $\gamma = \tilde\gamma^0$, равном одному из значений, указанных в (1.15, [1]). Решению (1.11) соответствует решение

$$\dot\beta = 0, \quad \dot\gamma = 0, \quad \beta = \tilde\beta^0, \quad \gamma = \tilde\gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \ldots, i_{n2} = 0 \tag{1.12}$$

приведенной системы $S_{\tilde p}$, в котором $\tilde\beta^0$ – любое, а $\tilde\gamma^0$ равно одному из значений (1.15, [1]).

Чтобы изучить вопрос об устойчивости стационарного решения (1.11), с помощью теоремы Ла-Салля 1 проводится анализ нелокального поведения решений возмущенной приведенной системы S_p, соответствующей ненулевому возмущению $p - \tilde p$ постоянной p. Нелокальное поведение таких решений тесно связано со структурой множества стационарных решений системы S_p. Структура этого множества при условиях D_1, D_2 установлена в леммах 4, 5.

Лемма 4. Пусть $c_0/b_0 < 1$, и выполнены условия D_1, D_2, указанные в лемме 1 [1]. Пусть величины δp_1, δp_2 и β_{1n}, β_{2n} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ определены формулами

$$\delta p_1 = -\left|\frac{\tilde p - \omega q}{g_1}\right|(|g_1| + 4|g_4|), \quad \delta p_2 = \left|\frac{\tilde p - \omega q}{g_1}\right|(|g_1| - 4|g_4|) \tag{1.13}$$

$$\beta_{1n} = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \quad \beta_{2n} = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.14}$$

где $\tilde p$ выражается по формуле (1.21, [1]), а величины γ_{1s}, γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ определены формулами (1.15, 1.16, [1]).

Тогда

1) $\delta p_1 < 0$, $\delta p_2 > 0$;

2) при положительных возмущениях $\delta p = p - \tilde p \in (0, \delta p_2)$ периодическая по β функция $U_*(p, \beta)$, определенная формулой (1.22, [1]), имеет локальные минимумы в точках β_{2n} и локальные максимумы в точках β_{1n}, при отрицательных возмущениях $\delta p \in (\delta p_1, 0)$ функция $U_*(p, \beta)$, наоборот, имеет локальные минимумы в точках β_{1n} и локальные максимумы в точках β_{2n} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов функция $U_*(p, \beta)$ является строго монотонной;

3) функция $U_1(\gamma)$, определенная формулой (1.19, [1]), имеет локальные минимумы в точках γ_{1s} и локальные максимумы в точках γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов эта функция строго монотонна;

4) при $\delta p \in (\delta p_1, \delta p_2)$, $\delta p \neq 0$, множество стационарных решений приведенной системы S_p состоит из точек

$$\dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \ldots, i_{n_2} = 0 \tag{1.15}$$

где β^0 – одно из значений β_{1n}, β_{2n} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а γ^0 – одно из значений γ_{1s}, γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Доказательство. При условиях D_1 величина $\tilde{p}$ определена формулой (1.21, [1]), согласно которой $(\tilde{p} - \omega q_0) g_1 = -2\omega q_1 (g_0 + g_4)$. Правая часть здесь отрицательна, так как ω, $q_1 > 0$ по постановке задачи, а $g_0 + g_4 > 0$ по лемме 1 [1]. Следовательно, величина $\tilde{p} - \omega q_0$ отлична от нуля вместе с g_1, и эти две величины имеют разные знаки. Кроме того, $g_4 < 0$ при условиях D_1 согласно лемме 1 [1]. Поэтому имеем

$$\frac{\tilde{p} - \omega q_0}{g_1} = -\left|\frac{\tilde{p} - \omega q_0}{g_1}\right|, \quad g_4 = -|g_4| \tag{1.16}$$

Тогда из формул (1.13) и неравенства $\left|(\tilde{p} - \omega q_0)/g_1\right| > 0$ с учетом установленного в лемме 1 [1] неравенства $|g_1| > 4|g_4|$ следует утверждение 1 леммы 4.

Функция $U_*(p, \beta)$ при условиях D_1 выражается по формуле (1.22, [1]). Производная этой функции по β равна

$$U_*'(p, \beta) = -32(p - \tilde{p}) g_4^2 \frac{(p - \tilde{p}) g_1 + (p^* - \omega q_0)(g_1 - 4 g_4 \sin\beta)}{g_1 (g_1 - 4 g_4 \sin\beta)^3} \cos\beta$$

или, при учете (1.16),

$$U_*'(p, \beta) = (p - \tilde{p}) F(p, \beta) \cos\beta \tag{1.17}$$

Здесь

$$\begin{gathered} F(p, \beta) = -32 g_4^2 \frac{(p - \tilde{p}) - f(\beta)\left|(\tilde{p} - \omega q_0)/g_1\right|}{f^3(\beta)} \\ f(\beta) = g_1 + 4|g_4| \sin\beta \end{gathered} \tag{1.18}$$

Рассмотрев по отдельности случаи $g_1 > 0$ и $g_1 < 0$, устанавливаем, что если при $g_1 > 0$ выполнено условие $\delta p \in (0, \delta p_2)$, а при $g_1 < 0$ выполнено условие $\delta p \in (\delta p_1, 0)$, то для функции $F(p, \beta)$, определенной в (1.18), при всех β выполнено неравенство $F(p, \beta) > 0$. Поэтому из формулы (1.17) следует, что при $g_1 \neq 0$ любого знака и $\delta p \in (\delta p_1, \delta p_2)$, $\delta p \neq 0$ производная $U_*'(p, \beta)$ функции $U_*(p, \beta)$ по β имеет такие же интервалы знакопостоянства и точки обращения в нуль, как функция $(p - \tilde{p}) \cos\beta$. Тогда сама функция $U_*(p, \beta)$, рассматриваемая как функция переменной β, имеет такие же интервалы монотонности и точки экстремума, как функция $(p - \tilde{p}) \sin\beta$, то есть график этой функции представляет собой деформированную синусоидальную кривую. Это означает справедливость утверждения 2 леммы 4.

Утверждение 3 следует при $c_0/b_0 < 1$ из формулы (1.19, [1]) для $U_1(\gamma)$.

Утверждение 4 следует из утверждений 2, 3.

Лемма 5. Пусть выполнены условия D_2, указанные в лемме 1 [1]. Пусть $c_0/b_0 < 1$, величины β_{1n}, β_{2n} определены формулами (1.14), величины γ_{1s}, γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ определены формулами (1.15, 1.16, [1]), а величина $\tilde{p}$ выражается по формуле (1.23, [1]). Тогда

1) для любых возмущений $\delta p = p - \tilde{p} \neq 0$ периодическая по β функция $U_*(p, \beta)$, определенная формулой (1.24, [1]), при $g_1 > 0$ имеет локальные минимумы в точках β_{1n} и локальные максимумы в точках β_{2n}, а при $g_1 < 0$ эта функция имеет локальные минимумы в точках β_{2n} и локальные максимумы в точках β_{1n} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов функция $U_*(p, \beta)$ является строго монотонной;

2) функция $U_1(\gamma)$, определенная формулой (1.19, [1]), имеет локальные минимумы в точках γ_{1s} и локальные максимумы в точках γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, на интервалах между точками локальных минимумов и максимумов эта функция строго монотонна;

3) при $\delta p \neq 0$ множество стационарных решений приведенной системы S_p состоит из точек (1.15), где β^0 – одно из значений β_{1n}, β_{2n} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а γ^0 – одно из значений γ_{1s}, γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Доказательство. При условиях D_2 функция $U_*(p, \beta)$ определена формулой (1.24, [1]). Производная этой функции по β равна

$$U'_*(p, \beta) = -(p - \tilde{p})^2 g_4^2 \frac{g_1 \cos \beta}{2(g_0 + g_1 \sin \beta)^2} \tag{1.19}$$

Согласно лемме 1 [1], при условиях D_2 имеют место неравенства $g_1 \neq 0$, $|g_0| > |g_1|$, и поэтому $g_0 + g_1 \sin \beta \neq 0$ при любом β. Следовательно, при любом $\delta p = p - \tilde{p} \neq 0$ производная (1.19) функции $U_*(p, \beta)$ по β имеет такие же интервалы знакопостоянства и точки обращения в нуль, как функция $-g_1 \cos \beta$. Тогда сама функция $U_*(p, \beta)$ имеет такие же интервалы монотонности и точки экстремумов, как функция $-g_1 \sin \beta$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 следует при $c_0/b_0 < 1$ из формулы (1.19, [1]) для $U_1(\gamma)$.

Утверждение 3 следует из утверждений 1, 2.

Леммы 4, 5 дают качественное описание зависимости функции $U_*(p, \beta)$ от β при условиях D_1, D_2 и позволяют изобразить при этих условиях поверхности $U_* = U_*(p, \beta)$ и $U_p = U_p(\beta, \gamma) = U_*(p, \beta) + U_1(\gamma)$. Сечения поверхности $U_*(p, \beta)$ плоскостями $p = \text{const} \neq \tilde{p}$ представляют собой деформированные синусоидальные кривые. При условиях D_1 точки минимумов и максимумов этих кривых меняются местами при изменении знака возмущения $p - \tilde{p}$, если это возмущение достаточно мало по модулю. При условиях D_2 точки минимумов и максимумов не меняются местами при изменении знака $p - \tilde{p}$.

2. Нелокальное поведение решений при условиях D_1, D_2. Для исследования устойчивости стационарных решений вида (1.11), которые при условиях D_1, D_2 и $p = \tilde{p}$ существуют при всех $\tilde{\beta}^0$, воспользуемся нелокальными свойствами решений возмущенной приведенной системы S_p при ненулевых возмущениях $\delta p = p - \tilde{p}$. Такие свойства установлены в следующей лемме для решений, определенных на бесконечном промежутке времени $[0,\infty)$ и ограниченных по переменной γ.

Лемма 6. Пусть $c_0/b_0 < 1$ и выполнены условия D_1 или D_2, указанные в лемме 1 [1]. Пусть в случае выполнения условия D_1 приведенная система S_p соответствует ненулевому возмущению $\delta p = p - \tilde{p}$ из интервала $(\delta p_1, \delta p_2)$, где δp_1, δp_2 определены в (1.13), а в случае выполнения условий D_2 приведенная система S_p соответствует произвольному ненулевому возмущению $\delta p = p - \tilde{p}$. Если в решении $z_p(t)$, $t \in [0,\infty)$, такой системы S_p функция $\gamma(t)$ ограничена по модулю при $t \in [0,\infty)$, то справедлива следующая альтернатива:

1) либо функция $\beta(t)$, $t \in [0,\infty)$, в этом решении неограниченна по модулю;

2) либо это решение при $t \to \infty$ стремится к одной из стационарных точек системы S_p, указанных в леммах 4, 5 для случаев D_1, D_2.

Доказательство леммы 6 состоит из четырех частей, которые занумерованы римскими цифрами.

I. Проверка выполнения условий теоремы 1. Применим к системе S_p принцип Ла-Салля в формулировке теоремы 1, взяв в качестве функции V функцию V_p, определенную формулой (1.34, [1]). Производная этой функции по t в силу системы S_p выражается по формуле (1.36, [1]). При учете (1.4, [1]) отсюда следует, что в фазовом пространстве системы S_p выполнено условие (1.2) теоремы 1.

Функция ΔU_1, определенная формулой (1.35, [1]), ограничена снизу на рассматриваемом решении $z_p(t)$ системы S_p, поскольку функция $\gamma(t)$ в этом решении ограничена снизу при $t \geq 0$ по условию леммы 6. Остальные функции в правой части формулы (1.34, [1]) для V_p ограничены снизу во всем фазовом пространстве. Поэтому на решении $z_p(t)$ для функции V_p выполнено условие (a) теоремы 1. В лемме 3 доказано, что из ограниченности решения приведенной системы по переменной γ следует его ограниченность по всем фазовым переменным, если рассматривать изменение β на окружности единичного радиуса. Тогда выполнено и условие (b) теоремы 1. Следовательно, по теореме 1, решение $z_p(t)$ при $t \to \infty$ неограниченно приближается к инвариантному множеству M_p.

II. Геометрический анализ инвариантного множества M_p. Множество M_p состоит здесь из фазовых траекторий непродолжаемых влево и вправо решений $z_p(t)$ системы S_p, удовлетворяющих условию $\dot{V}_p(z_p(t)) = 0$ для всех t из максимального интервала существования J_p. При учете формулы (1.36, [1]) для $\dot{V}_p$ это означает, что множество M_p состоит из целых фазовых траекторий решений, удовлетворяющих условиям

$$\dot{\gamma}(t) = 0, \quad x(t) = 0, \quad i_1(t) = 0, \ldots, \quad i_{n_2}(t) = 0, \quad t \in J_p$$

Таким образом, M_p состоит из фазовых траекторий непродолжаемых влево и вправо решений вида

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(t), \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta(t), \quad \gamma = \gamma_0, \quad x = i_1 = \ldots = i_{n_2} = 0 \tag{2.1}$$

где γ_0 – некоторая постоянная величина.

В таких решениях функции $\dot{\beta}(t)$, $\beta(t)$ при всех t из максимального интервала существования J_p удовлетворяют соотношению

$$\dot{\beta}^2(t)\frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} + \Delta U_*(p, \beta(t)) = e \tag{2.2}$$

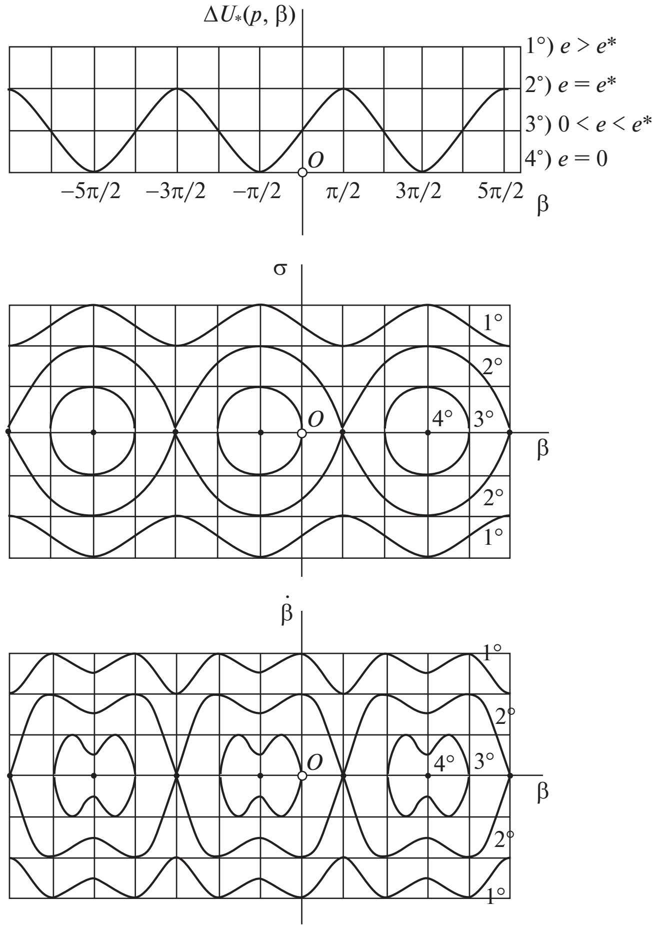


Рис. 1

а если интервал J_p содержит полуось $[0, \infty)$, то также и соотношению

$$\frac{[p - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} + \dot{\beta}(t)\frac{G(\beta(t))R - Q(\beta(t))N(\beta(t))}{G(\beta(t))} = f \tag{2.3}$$

Здесь e, f – постоянные. Соотношение (2.2) выражает тот факт, что функция V_p, определенная по формуле (1.34, [1]), постоянна на решениях вида (2.1). Соотношение (2.3) следует для решения (2.1) при $[0, \infty) \subseteq J_p$ из третьего уравнения преобразованной системы (1.9, [1]) при учете равенства $b_0 \sin\gamma_0 + c_0 = 0$, установленного в лемме 3 [1].

В первую очередь проанализируем фазовые траектории решений вида (2.1), определяемые одним только соотношением (2.2). Это соотношение фактически определяет проекции траекторий решений вида (2.1) на координатную плоскость $(\beta, \dot{\beta})$. Сами фазовые траектории лежат в плоскости, получаемой параллельным сдвигом плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ в направлении оси $O\gamma$ на величину γ_0. Из неравенств Сильвестра (1.3, [1]) и неравенства $\Delta U_*(p, \beta) \geq 0$ для определенной в (1.35, [1]) функции ΔU_* следует, что левая часть соотношения (2.2) неотрицательна, и поэтому $e \geq 0$. Изучим кривые, определяемые на плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ соотношением (2.2) при разных значениях $e \geq 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда либо выполнены условия D_1 и возмущение δp является малым положительным (точнее, $\delta p \in (0, \delta p_2)$), либо при условиях D_2 выполнено неравенство $g_1 < 0$. Тогда, согласно леммам 4, 5, график зависимости функции $\Delta U_*(p,\beta)$ от β имеет такой же вид, как график функции $a(1+\sin\beta)$ $(a > 0)$. Этот график показан в верхней части рис. 1. Четыре качественно различных варианта соответствуют следующим значениям e: 1°) $e > e_*$, 2°) $e = e_*$, 3°) $0 < e < e_*$, 4°) $e = 0$. Здесь $e_* = \max_\beta \Delta U_*(p,\beta)$.

Пусть

$$F(\beta) = \frac{G(\beta)H - N^2(\beta)}{2G(\beta)} \tag{2.4}$$

Согласно (1.2, 1.3, [1]), функция $F(\beta)$ – 2π-периодическая и положительная при всех β. Введем вместо $\dot{\beta}$ переменную $\sigma = \dot{\beta}\sqrt{F(\beta)}$. Тогда соотношение (2.2) определяет зависимость σ от β в виде

$$\sigma = \pm\sqrt{e - \Delta U_*(p,\beta)} \tag{2.5}$$

Для указанных выше вариантов 1°, 2°, 3°, 4° формула (2.5) определяет на плоскости (β, σ) кривые, имеющие такой же вид, как для математического маятника. Эти кривые изображены в средней части рис. 1.

Воспользовавшись обозначением (2.4), получаем из (2.2) формулу

$$\dot{\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{F(\beta)}}\sqrt{e - \Delta U_*(p,\beta)} \tag{2.6}$$

которая определяет зависимость $\dot{\beta}$ от β. Ее правая часть получается путем умножения правой части формулы (2.5) на положительную 2π-периодическую функцию $1/\sqrt{F(\beta)}$. Поэтому семейство кривых $\dot{\beta}(\beta)$, определяемое на плоскости $(\beta, \dot{\beta})$ равенством (2.6), получается из семейства кривых $\sigma(\beta)$ путем деформации в вертикальном направлении, сопровождающейся, возможно, появлением дополнительных "волн". При этом не изменяются точки пересечения рассматриваемых кривых с осью абсцисс и не изменяется также тип кривых, то есть бесконечные периодические и замкнутые кривые переходят в такие же кривые, как это показано в нижней части рис. 1.

Рассмотрим теперь случай, когда либо выполнены условия D_1 и возмущение δp является малым отрицательным (точнее, $\delta p \in (\delta p_1, 0)$), либо при условиях D_2 выполнено неравенство $g_1 > 0$. В этом случае, согласно леммам 4, 5, функция $\Delta U_*(p,\beta)$ ведет себя как функция $a(1-\sin\beta)$ $(a > 0)$, так что график зависимости функции $\Delta U_*(p,\beta)$ от β отличается от такого графика в предыдущем случае только горизонтальным сдвигом на π. Следовательно, кривые $\sigma(\beta)$ и $\dot{\beta}(\beta)$ в этом случае отличаются от аналогичных кривых в предыдущем случае только сдвигом на π по β.

Таким образом, качественное поведение кривых $\dot{\beta}(\beta)$, определяемых соотношением (2.2), во всех случаях одинаково, и оно аналогично поведению таких кривых для математического маятника.

Для варианта 2°, когда $e = e_*$, соотношение (2.2) определяет непродолжаемые фазовые траектории, соединяющие пары соседних стационарных точек, соответствующих точкам максимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$. Вдоль таких траекторий (их называют гомоклиническими орбитами) решение приведенной системы определено при $t \in (-\infty,\infty)$, и оно стремится к одной из двух крайних стационарных точек при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$. Сами эти точки также являются непродолжаемыми фазовыми траекториями. С учетом этого в варианте 2° выделяются два случая: случай 2_1°, соответствующий гомоклиническим орбитам, и случай 2_2°, соответствующий стационарным решениям при максимуме функции $\Delta U_*(p,\beta)$.

III. Совместность условий, определяющих множество M_p. Стационарные решения, которые соответствуют точкам максимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$ (случай 2_2°), при надлежащем выборе постоянной f вместе с соотношением (2.2) удовлетворяют и соотношению (2.3). Соотношения (2.2) и (2.3) совместны также для стационарных решений, соответствующих точкам минимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$, то есть для варианта 4°, когда $e = 0$. Таким образом, инвариантное множество M_p содержит все стационарные точки системы S_p.

Покажем, что соотношения (2.2), (2.3) являются несовместными для варианта 3°, когда $0 < e < e_*$, то есть множество M_p не содержит замкнутых фазовых траекторий. Для доказательства заметим, что если коэффициент при $\dot\beta(t)$ в соотношении (2.3) отличен от тождественного нуля, то оно однозначно определяет $\dot\beta(t)$ при заданном $\beta(t)$, и тогда соответствующая траектория не может быть замкнутой. Значит, для замкнутых фазовых траекторий этот коэффициент тождественно равен нулю, то есть $G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta) = 0$ при $\beta = \beta(t)$, $t \ge 0$. Тогда соотношение (2.3) переходит в равенство $[p - \omega Q(\beta)]Q(\beta)/G(\beta) = f$, которое выполняется тождественно по $t \ge 0$ при $\beta = \beta(t)$. Поскольку функция $\beta(t)$ не является здесь постоянной по t, полученные два равенства должны быть тождествами не только по t, но и по β. Однако в [4] доказаны леммы 1, 2, согласно которым это невозможно при любых значениях параметров прибора и постоянных p, f. Следовательно, вариант 3° нереализуем.

Анализ совместности соотношений (2.2), (2.3) для 2π-периодических по β фазовых траекторий (вариант 1°), а также для гомоклинических орбит (случай 2_1°) сопряжен с большими трудностями. Вместо проведения такого анализа будем предполагать возможность существования фазовых траекторий типов 1° и 2_1°. Наличие или отсутствие таких траекторий не влияет на установленные ниже в разделе 3 результаты о неустойчивости стационарных решений при условиях D_1 и D_2.

IV. Нелокальное поведение рассматриваемого решения. Итак, вместо инвариантного множества M_p рассматриваем содержащее его множество M_p^+, которое включает все стационарные точки системы S_p, а также фазовые траектории типов 1° и 2_1°, которые удовлетворяют соотношению (2.2), но, возможно, не удовлетворяют соотношению (2.3). При таком подходе утверждение теоремы Ла-Салля 1 применительно к системе S_p переходит в утверждение, что в предположении ограниченности рассматриваемое решение $z_p(t)$ при $t \to \infty$ стремится к одной из непродолжаемых влево и вправо фазовых траекторий, образующих множество M_p^+ и определенных при $t \in (-\infty,+\infty)$.

Как уже отмечалось, чтобы при использовании теоремы 1 обеспечить ограниченность решения $z_p(t)$ по переменной β, достаточно перейти в цилиндрическое фазовое пространство, в котором эта переменная изменяется на окружности единичного радиуса. При переходе к цилиндрическому фазовому пространству множество M_p^+ приобретает следующую структуру. Каждой паре неограниченных периодических по β фазовых траекторий типа 1° соответствует пара замкнутых интегральных кривых, не имеющих общих точек и охватывающих фазовый цилиндр (это предельные циклы второго рода [3]). Двум счетным наборам гомоклинических орбит типа 2_1° соответствуют две замкнутые интегральные кривые, которые также охватывают фазовый цилиндр, но при этом имеют на нем одну общую стационарную точку типа 2_2°. Кроме того, по доказанному выше, на фазовом цилиндре существует одна стационарная точка типа 4°, но отсутствуют замкнутые фазовые траектории типа 3°, которые не охватывают фазовый цилиндр (предельные циклы первого рода).

Тогда, согласно теореме 1, для рассматриваемого решения $z_p(t)$ возможны такие варианты его поведения на фазовом цилиндре при $t \to \infty$:

1) решение $z_p(t)$ неограниченно приближается к предельному циклу второго рода (типа 1°), бесконечно наматываясь на фазовый цилиндр;

2) это решение неограниченно приближается к гомоклинической орбите (типа 2_1°), бесконечно наматываясь на фазовый цилиндр;

3) рассматриваемое решение стремится к одной из двух стационарных точек (типов 2_2° и 4°), имеющихся на фазовом цилиндре.

Из полученного результата следует, что в фазовом пространстве, где переменная β изменяется на числовой прямой, справедлива альтернатива, указанная в лемме 6.

3. Неустойчивость стационарных решений при условиях D_1, D_2. Если выполнены условия D_1 или D_2, установленные в лемме 1 [1], то $U_*(\tilde{p}, \beta) \equiv \mathrm{const}$, и преобразованная система (1.9, [1]) имеет стационарное решение (1.11), где значение $\tilde{p}$ определено формулой (1.21, [1]) или (1.23, [1]), $\tilde{\beta}^0$ – любое, а $\tilde{\gamma}^0$ равно одному из значений (1.15, [1]), существующих при $c_0/b_0 < 1$. Решению (1.11) преобразованной системы соответствует решение (1.12) приведенной системы $S_{\tilde{p}}$, в котором $\tilde{\beta}^0$ – любое, а $\tilde{\gamma}^0$ равно одному из значений (1.15, [1]). С учетом определений фазовых векторов (1.10, [1]) эти стационарные решения задаются векторами

$$\tilde{y}^0 = (\tilde{p}, 0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0), \qquad \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0) \tag{3.1}$$

Обозначим через $z_p(t, z_{p0})$ решение приведенной системы S_p при начальном условии $z_p(0, z_{p0}) = z_{p0}$. Пусть $J_p(z_{p0})$ – максимальный интервал существования этого решения, $J_p^+(z_{p0}) = [0, \tau_p(z_{p0}))$ – его максимальный правый интервал существования. Вводим следующие обозначения: $\|z_p\|$ – норма вектора z_p, равная максимальному из модулей его компонент; $B_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$ – открытый шар радиуса $\delta > 0$ с центром $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$; $I_\delta(\tilde{p})$ – числовой интервал $I_\delta(\tilde{p}) = (\tilde{p} - \delta, \tilde{p} + \delta)$.

Неустойчивость решения $y = \tilde{y}^0$ преобразованной системы означает, что для решений $z_p(t, z_{p0})$ приведенных систем S_p справедливо такое утверждение:

$$\begin{gathered}(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists p \in I_\delta(\tilde{p}))(\exists z_{p0} \in B_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0))(\exists t \in J_p^+(z_{p0})) \\ \left\| z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 \right\| \geq \varepsilon\end{gathered} \tag{3.2}$$

На вопрос об устойчивости решений вида (1.11) при условиях D_1 отвечает теорема 2.

Теорема 2. Пусть $c_0/b_0 < 1$, выполнены условия D_1, указанные в лемме 1 [1], а постоянная $\tilde{p}$ определена по формуле (1.21, [1]). Тогда при любом значении $\tilde{\beta}^0$ и любом из значений $\tilde{\gamma}^0$, указанных в (1.15, 1.16, [1]), стационарное решение (1.11) преобразованной системы (1.9, [1]) неустойчиво.

Доказательство теоремы 2 состоит из трех частей, которые занумерованы римскими цифрами.

I. Выбор класса возмущенных решений. Выделим стационарное решение (1.11) преобразованной системы при условиях D_1, соответствующее определенному в (1.21, [1]) значению $\tilde{p}$ постоянной p и некоторым фиксированным значениям $\tilde{\beta}^0$, $\tilde{\gamma}^0$. Принимая его в качестве невозмущенного, рассмотрим следующий класс возмущенных решений преобразованной системы, которые в начальный момент $t = 0$ отличаются по норме от невозмущенного решения (1.11) на сколь угодно малую величину $\delta > 0$.

Выбираем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие $\delta < \min(|\delta p_1|, \delta p_2, \pi/2)$, где $\delta p_1 < 0$, $\delta p_2 > 0$ определены по формулам (1.13). Тогда, как установлено в лемме 4, при $0 < p - \tilde{p} \le \delta$ функция $\Delta U_*(p, \beta)$ ведет себя как функция $a(1 + \sin\beta)$ $(a > 0)$, а при $-\delta \le p - \tilde{p} < 0$ она ведет себя как функция $a(1 - \sin\beta)$ $(a > 0)$. Это позволяет, задав возмущенное значение постоянной p равным $p = \tilde{p} \pm \delta$, выбрать здесь знак перед δ так, чтобы исходное стационарное значение $\tilde{\beta}^0$ не совпадало ни с одной из точек локального минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$, рассматриваемой как функция переменной β.

При указанном выборе знака возмущения $p - \tilde{p}$ точка $\tilde{\beta}^0$ либо принадлежит одному из интервалов строгой монотонности функции $\Delta U_*(p, \beta)$, либо $\tilde{\beta}^0$ совпадает с одной из точек локального максимума этой функции. Учитывая, что значение $\tilde{\beta}^0$ определено с точностью до $2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, без ограничения общности будем предполагать, что в случае $p - \tilde{p} > 0$ значение $\tilde{\beta}^0$ принадлежит интервалу $(-\pi/2, 3\pi/2)$ длины 2π с границами в точках минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$ и с центром в точке $\beta_c = \pi/2$ максимума этой функции, а при $p - \tilde{p} < 0$ значение $\tilde{\beta}^0$ принадлежит интервалу $(-3\pi/2, \pi/2)$ длины 2π также с границами в точках минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$ и с центром в точке $\beta_c = -\pi/2$ максимума этой функции.

Теперь следующим образом определяем начальное значение $\beta_0 = \beta(0)$ переменной β для возмущенного решения. Если исходное значение $\tilde{\beta}^0$ не совпадает с точкой β_c максимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$, то оставляем $\beta_0 = \tilde{\beta}^0$, а в случае $\tilde{\beta}^0 = \beta_c$ полагаем $\beta_0 = \tilde{\beta}^0 + \delta$. Начальные значения всех остальных фазовых переменных для возмущенного решения оставляем такими же, как и для невозмущенного.

Таким образом, при сколь угодно малом $\delta > 0$ рассматривается возмущенное решение $y(t, y_0)$ преобразованной системы, которое определено начальным условием $y(0, y_0) = y_0$, где

$$y_0 = (p, 0, 0, \beta_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$$

Значения p, β_0 определены выше. Этому решению соответствует решение $z_p(t, z_{p0})$ возмущенной приведенной системы S_p при начальном условии $z_p(0, z_{p0}) = z_{p0}$, где

$$z_{p0} = (0, 0, \beta_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$$

При выбранном сколь угодно малом $\delta > 0$ имеем $|p - \tilde{p}| = \delta$, $\left\| z_{p0} - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 \right\| = 0$ или $\left\| z_{p0} - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 \right\| = \delta$, так что $p \in \bar{I}_\delta(\tilde{p})$, $z_{p0} \in \bar{B}_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$. С учетом произвола в выборе δ вместо открытого промежутка $I_\delta(\tilde{p})$ и открытого шара $B_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$ в определении неустойчивости (3.2) можно рассматривать замкнутый промежуток $\bar{I}_\delta(\tilde{p})$ и замкнутый шар $\bar{B}_\delta(\tilde{z}_{\tilde{p}}^0)$. Поэтому указанный выбор δ и p обеспечивает выполнение второго, третьего и четвертого пунктов в утверждении (3.2).

Далее, при указанном выборе начальной точки z_{p0} функция V_p, определенная по формуле (1.34, [1]), принимает в этой точке значение $V_p(z_{p0})$, которое строго меньше ее значения в стационарной точке

$$z_{pc}^0 = (0, 0, \beta_c, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$$

системы S_p, соответствующей точке $\beta_c^0 = \pi/2$ или $\beta_c^0 = -\pi/2$ максимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$ на выбранном интервале $(-\pi/2, 3\pi/2)$ или $(-3\pi/2, \pi/2)$ для $\tilde{\beta}^0$. Поскольку функция V_p не возрастает на решениях системы S_p, возмущенное решение $z_p(t, z_{p0})$ не может с течением времени приблизиться к точке z_{pc}^0, то есть эта точка недостижима из начальной точки z_{p0}.

II. Выбор величины ε *в определении неустойчивости*. Точка (3.1):

$$\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$$

– стационарная для системы $S_{\tilde{p}}$, но она в общем случае не является стационарной для системы S_p. Пусть $z_{p\min}^0$ – ближайшая к $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ стационарная точка для системы S_p, отличная от недостижимой стационарной точки z_{pc}^0. Пусть $\varepsilon = \rho/2$, где $\rho = \left\| \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - z_{p\min}^0 \right\|$ – расстояние от точки $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ до точки $z_{p\min}^0$. Покажем, что величина ε положительна и определена только невозмущенным значением $\tilde{\beta}^0$ угла β.

Обозначим через β_1^0 ближайшую к $\tilde{\beta}^0$ точку минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$ или правую из двух равноотстоящих ближайших к $\tilde{\beta}^0$ точек минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$. Пусть $\rho_1 = \left| \tilde{\beta}^0 - \beta_1^0 \right|$ – расстояние между этими точками на числовой оси. Тогда при $p - \tilde{p} > 0$, когда $-\pi/2 < \tilde{\beta}^0 < 3\pi/2$, имеем $\rho_1 = \min(\pi/2 + \tilde{\beta}^0, 3\pi/2 - \tilde{\beta}^0)$, а при $p - \tilde{p} < 0$, когда $-3\pi/2 < \tilde{\beta}^0 < \pi/2$, имеем $\rho_1 = \min(3\pi/2 + \tilde{\beta}^0, \pi/2 - \tilde{\beta}^0)$. Итак, значение ρ_1 лежит в диапазоне $0 < \rho_1 < \pi$ и зависит только от $\tilde{\beta}^0$.

Обозначим через γ_1^0 то из стационарных значений угла γ, которое наиболее близко к его невозмущенному значению $\tilde{\gamma}^0$. Если $\tilde{\gamma}^0$ – одно из определенных в (1.15, 1.16, [1]) значений γ_{1s}, то γ_1^0 – это ближайшее к $\tilde{\gamma}^0$ значение γ_{2s}. Если же $\tilde{\gamma}^0$ – одно из определенных в (1.15, 1.16, [1]) значений γ_{2s}, то γ_1^0 – это ближайшее к $\tilde{\gamma}^0$ значение γ_{1s}. Поэтому на числовой оси расстояние между точками γ_1^0, $\tilde{\gamma}^0$ равно $\rho_2 = \gamma^{(0)} - \gamma^{(1)} = \pi + 2\gamma^{(0)}$, где $\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0)$ в предположении, что $c_0/b_0 < 1$. Следовательно, $0 < \rho_2 < \pi$.

В фазовом пространстве возмущенной системы S_p рассмотрим стационарные точки

$$\begin{aligned} z_{p1}^0 &= (0, 0, \beta_1^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0) \\ z_{p2}^0 &= (0, 0, \beta_c^0, \gamma_1^0, 0, 0, \ldots, 0) \\ z_{p3}^0 &= (0, 0, \beta_1^0, \gamma_1^0, 0, 0, \ldots, 0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Все эти точки различаются только значениями координат β, γ. Поэтому они лежат в одной плоскости, параллельной плоскости $O\beta\gamma$, и вместе с точкой z_{pc}^0 образуют в этой плоскости прямоугольник с параллельными сторонами $[z_{pc}^0, z_{p1}^0]$, $[z_{p2}^0, z_{p3}^0]$. Точка $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ принадлежит стороне $[z_{pc}^0, z_{p1}^0]$ этого прямоугольника. Ближайшие к точке $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ стационарные точки соответствуют вершинам данного прямоугольника. Из них достижимыми из начальной точки z_{p0} являются три точки (3.3). Поэтому расстояние ρ от точки $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ до ближайшей к ней достижимой стационарной $z_{p\min}^0$ точки равно $\rho = \min_{i=1,2,3} \left\| \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - \tilde{z}_{pi}^0 \right\|$. Здесь расстояния $\left\| \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - \tilde{z}_{pi}^0 \right\|$ равны расстояниям между соответствующими точками на плоскости (β, γ). При этом расстояние между двумя точками плоскости (β, γ) равно максимальному из модулей разностей их одноименных координат. Следовательно, искомые расстояния выражаются формулами

$$\left\| \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - \tilde{z}_{pi}^0 \right\| = \rho_i \quad (i = 1, 2), \quad \left\| \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - \tilde{z}_{p3}^0 \right\| = \max(\rho_1, \rho_2)$$

в которых величины $\rho_1, \rho_2 > 0$ определены выше. В результате приходим к выводу, что расстояние от точки $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ до ближайшей к ней достижимой стационарной точки равно $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, и при этом величина $\rho > 0$ вместе с величинами ρ_1, ρ_2 зависит только от невозмущенного значения $\tilde{\beta}^0$.

III. Доказательство основного неравенства в определении неустойчивости. Полагая $\varepsilon = \rho/2$, покажем, что для возмущенного решения $z_p(t, z_{p0})$ в некоторый момент времени t из правого максимального интервала его существования $J_p^+(z_{p0}) = [0, \tau_p(z_{p0}))$ выполняется неравенство

$$\left\| z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0 \right\| \geq \varepsilon \tag{3.4}$$

обеспечивающее выполнение свойства неустойчивости (3.2).

Установим выполнение неравенства (3.4) для каждого из логически возможных вариантов поведения рассматриваемого решения $z_p(t, z_{p0})$.

Вариант 1. Правый максимальный интервал существования решения $z_p(t, z_{p0})$ конечен, то есть $0 < \tau_p(z_{p0}) < \infty$.

В этом случае, согласно лемме 2, хотя бы одна из угловых переменных β, γ в рассматриваемом решении неограниченна по модулю при $t \to \tau_p(z_{p0})$. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ и, в частности, при определенном выше $\varepsilon = \rho/2$, в некоторый момент времени $t \in [0, \tau_p(z_{p0}))$ выполняется хотя бы одно из неравенств $\left|\beta(t, z_{p0}) - \tilde{\beta}^0\right| \geq \varepsilon$, $\left|\gamma(t, z_{p0}) - \tilde{\gamma}^0\right| \geq \varepsilon$. Следовательно, в этот момент выполняется и неравенство (3.4).

Вариант 2. Правый максимальный интервал существования решения $z_p(t, z_{p0})$ бесконечен, то есть $J_p^+ = [0, \infty)$, и функция $\gamma(t, z_{p0})$ в этом решении неограниченна по модулю.

В этом случае при любом $\varepsilon > 0$ и, в частности, при $\varepsilon = \rho/2$ в некоторый момент времени $t \in [0, \infty)$ выполняется неравенство $\left|\gamma(t, z_{p0}) - \tilde{\gamma}^0\right| \geq \varepsilon$, а вместе с ним выполняется и неравенство (3.4).

Вариант 3. Правый максимальный интервал существования решения $z_p(t, z_{p0})$ бесконечен, то есть $J_p^+ = [0, \infty)$, и функция $\gamma(t, z_{p0})$ в этом решении ограничена по модулю.

Согласно лемме 6, для решения $z_p(t, z_{p0})$ справедлива такая альтернатива:

1) либо функция $\beta(t, z_{p0})$ в этом решении неограниченна по модулю;

2) либо это решение при $t \to \infty$ стремится к одной из стационарных точек системы S_p, указанных в леммах 4, 5.

В первом случае при любом $\varepsilon > 0$ и, в частности, при $\varepsilon = \rho/2$ в некоторый момент времени $t \in [0, \infty)$ выполняется неравенство $\left|\beta(t, z_{p0}) - \tilde{\beta}^0\right| \geq \varepsilon$, а вместе с ним выполняется и неравенство (3.4).

Во втором случае решение $z_p(t, z_{p0})$ с течением времени попадает в сколь угодно малую окрестность одной из стационарных точек z_p^0 системы S_p и затем остается в этой окрестности. Значит, существует момент времени $t > 0$, когда

$$\left\|z_p(t, z_{p0}) - z_p^0\right\| < \rho/2 \tag{3.5}$$

Воспользуемся теперь известным свойством нормы

$$\left\|z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}_{\tilde{p}}^0\right\| \geq \left\|\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - z_p^0\right\| - \left\|z_p(t, z_{p0}) - z_p^0\right\| \tag{3.6}$$

Здесь расстояние от точки $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ до неизвестной стационарной точки z_p^0 больше либо равно расстоянию ρ от точки $\tilde{z}_{\tilde{p}}^0$ до ближайшей к ней достижимой стационарной точки $z_{p\,\min}^0$:

$$\left\|\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - z_p^0\right\| \geq \left\|\tilde{z}_{\tilde{p}}^0 - z_{p\,\min}^0\right\| = \rho \tag{3.7}$$

Из (3.6) при учете (3.5), (3.7) следует, что существует момент времени $t > 0$, когда выполняется неравенство (3.4). Теорема 2 доказана.

Согласно лемме 5, при условиях D_2 положение точек минимума и максимума функции $U_*(p, \beta)$ не изменяется, когда возмущение $p - \tilde{p}$ меняет знак. Поэтому математическая техника, использованная для доказательства теоремы 2, в случае выполнения условий D_2 приводит к следующему результату.

Теорема 3. Пусть $c_0/b_0 < 1$, выполнены условия D_2, указанные в лемме 1 [1], а постоянная $\tilde{p}$ определена по формуле (1.23, [1]). Тогда стационарное решение (1.11) преобразованной системы (1.9, [1]) неустойчиво в случаях, когда

1) значение $\tilde{\beta}^0$ при $p \neq \tilde{p}$ не является точкой минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$, определенной формулами (1.35, 1.24, [1]), а $\tilde{\gamma}^0$ – любое из значений γ_{1s}, γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, указанных в (1.15, 1.16, [1]);

2) значение $\tilde{\beta}^0$ при $p \neq \tilde{p}$ является точкой минимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$, но $\tilde{\gamma}^0$ – одна из точек γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ максимума функции $\Delta U_1(\gamma)$, указанных в (1.15, 1.16, [1]).

Доказательство. Рассмотрим в качестве невозмущенного одно из стационарных решений (1.11) преобразованной системы при условиях D_2, соответствующее определенному в (1.23, [1]) значению $\tilde{p}$ постоянной p, какому-либо фиксированному значению $\tilde{\beta}^0$ и значению $\tilde{\gamma}^0$, принадлежащему одному из двух счетных наборов (1.15, 1.16, [1]). Следуя схеме доказательства теоремы 2, определим класс возмущенных решений, сколь угодно близких к невозмущенному в начальный момент $t = 0$, и установим, что эти решения с течением времени отклоняются от невозмущенного на конечное расстояние. Класс возмущенных решений определим по-разному при доказательстве утверждений 1) и 2).

Доказательство утверждения 1). В лемме 5 установлено, что в случае выполнения условий D_2, указанных в лемме 1 [1], при $p \neq \tilde{p}$ поведение функции $\Delta U_*(p,\beta)$, рассматриваемой как функция переменной β, зависит от знака коэффициента g_1 при $\sin\beta$ в выражении $G(\beta)$. Точнее, при любом возмущении $p - \tilde{p} \neq 0$ функция $\Delta U_*(p,\beta)$ ведет себя как $a(1 + \sin\beta)$ $(a > 0)$ в случае $g_1 < 0$, и она ведет себя как $a(1 - \sin\beta)$ $(a > 0)$ в случае $g_1 > 0$. Воспользовавшись тем, что в утверждении 1) значение $\tilde{\beta}^0$ отлично от точек минимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$, и это значение определено с точностью до $2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, будем предполагать, что в случае $g_1 < 0$ значение $\tilde{\beta}^0$ принадлежит интервалу $(-\pi/2, 3\pi/2)$ с границами в точках минимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$ и с центром в точке $\beta_c = \pi/2$ максимума этой функции, а в случае $g_1 > 0$ значение $\tilde{\beta}^0$ принадлежит интервалу $(-3\pi/2, \pi/2)$ также с границами в точках минимума и с центром в точке $\beta_c = -\pi/2$ максимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$.

Выбрав сколь угодно малое $\delta > 0$, для возмущенного решения полагаем $p = \tilde{p} + \delta$. Начальное значение $\beta_0 = \beta(0)$ для возмущенного решения определяем так же, как в доказательстве теоремы 2, то есть берем $\beta_0 = \tilde{\beta}^0$ при $\tilde{\beta}^0 \neq \beta_c$ и $\beta_0 = \tilde{\beta}^0 + \delta$ при $\tilde{\beta}^0 \neq \beta_c$. Начальные значения всех остальных фазовых переменных для возмущенного решения преобразованной системы оставляем такими же, как и для невозмущенного. Таким образом, при сколь угодно малом $\delta > 0$ определены начальные условия для возмущенного решения $y(t, y_0)$ преобразованной системы. Ему соответствует решение $z_p(t, z_{p0})$ приведенной системы S_p при начальном условии $z_{p0} = (0, 0, \beta_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$.

Теперь так же, как и в доказательстве теоремы 2, определяем величину $\varepsilon > 0$, зависящую только от $\tilde{\beta}^0$, и устанавливаем, что в некоторый момент времени $t > 0$ выполнено неравенство $\left\| z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}^0_{\tilde{p}} \right\| \geq \varepsilon$, где $\tilde{z}_{\tilde{p}} = (0, 0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$.

Доказательство утверждения 2). Пусть в невозмущенном стационарном решении преобразованной системы, определяемом вектором $\tilde{y}^0 = (\tilde{p}, 0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$, значение $\tilde{\beta}^0$ – точка минимума функции $\Delta U_*(p,\beta)$ при условиях D_2 и $p \neq \tilde{p}$, а $\tilde{\gamma}^0$ – одна из точек γ_{2s} $(s = 0, \pm 1, \pm 1, \ldots)$ локального максимума функции $\Delta U_1(\gamma)$.

Выберем сколь угодно малое $\delta > 0$, удовлетворяющее условию $\delta < \rho$, где $\rho = |\tilde{\gamma}^0 - \gamma_1|$, γ_1 – ближайшая к $\tilde{\gamma}^0$ точка локального минимума функции $\Delta U_1(\gamma)$. Для возмущенного решения $y(t, y_0)$ преобразованной системы полагаем $p = \tilde{p} + \delta$. Начальные значения $\beta_0 = \beta(0)$, $\gamma_0 = \gamma(0)$ для возмущенного решения выбираем равными $\beta_0 = \tilde{\beta}^0$, $\gamma_0 = \tilde{\gamma}^0 + \delta$. Начальные значения всех остальных фазовых переменных для возмущенного решения $y(t, y_0)$ преобразованной системы оставляем такими же, как и для невозмущенного. Обозначим через $z_p(t, z_{p0})$ решение приведенной системы S_p, соответствующее решению $y(t, y_0)$ преобразованной системы.

Так как $\tilde{\beta}^0$ – точка минимума функции $\Delta U_*(p, \beta)$, определенной в (1.35, [1]), имеем $\Delta U_*(p, \tilde{\beta}^0) = 0$. Поэтому в точке $\tilde{z}_{\tilde{p}} = (0, 0, \tilde{\beta}^0, \tilde{\gamma}^0, 0, 0, \ldots, 0)$ функция V_p, определенная формулой (1.34, [1]), равна $V_p(\tilde{z}_{\tilde{p}}) = \Delta U_1(\tilde{\gamma}^0)$. А поскольку $\tilde{\gamma}^0$ – точка локального максимума функции $\Delta U_1(\gamma)$, то в близкой к ней точке γ_0 имеем $\Delta U_1(\gamma_0) < \Delta U_1(\tilde{\gamma}^0)$. Следовательно, в начальный момент $t = 0$ функция V_p принимает значение $V_p(z_{p0})$, которое меньше ее значения $V_p(\tilde{z}^0_{\tilde{p}})$ в точке $\tilde{z}^0_{\tilde{p}}$, а значит, и во всех стационарных точках системы S_p, соответствующих невозмущенному значению $\tilde{\gamma}^0$. Функция V_p не возрастает на решениях системы S_p, и поэтому возмущенное решение $z_p(t, z_{p0})$ не может с течением времени приблизиться ни к одной из стационарных точек, соответствующих значению $\tilde{\gamma}^0$. Это решение может неограниченно приближаться только к одной из стационарных точек $z^0_p = (0, 0, \beta^0, \gamma^0, 0, 0, \ldots, 0)$, соответствующих значениям $\gamma^0 \neq \tilde{\gamma}^0$. Ближайшая из них удалена от точки $\tilde{z}^0_{\tilde{p}}$ на расстояние $\left\| \tilde{z}^0_{\tilde{p}} - z^0_p \right\| = \rho$, где $\rho > 0$ определено выше.

Положив $\varepsilon = \rho/2$ и повторив часть III доказательства теоремы 2, заключаем, что в некоторый момент $t > 0$ выполнено неравенство $\left\| z_p(t, z_{p0}) - \tilde{z}^0_{\tilde{p}} \right\| \geq \varepsilon$, обеспечивающее выполнение свойства неустойчивости (3.2). Теорема 3 доказана.

Вследствие равенства $2u_1 g_1 + \omega^2 q_1^2 = 0$, входящего в число условий D_2, коэффициенты u_1 и g_1 имеют разные знаки. Поэтому при любом $p \neq \tilde{p}$ функция $-g_1 \cos\beta$ в выражении (1.19) для $U'_*(p, \beta)$ с точностью до положительного множителя совпадает с производной $U'(\beta) = u_1 \cos\beta$ потенциальной энергии силы тяжести. Следовательно, если выполнены условия D_2, то при $p \neq \tilde{p}$ функции $\Delta U_*(p, \beta)$ и $U(\beta) = u_0 + u_1 \sin\beta$ имеют одинаковые интервалы монотонности и одинаковые точки максимумов и минимумов.

Выводы. Из теорем 2, 3 и теорем 3, 5, 6 [1] следует такой вывод.

Теорема 4. Наличие изолированного минимума полной приведенной потенциальной энергии $U_{p^0}(\beta, \gamma) = U_*(p^0, \beta) + U_1(\gamma)$ в точке (β^0, γ^0) является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного решения (1.17, [1]), преобразованной системы (1.9, [1]), исключая, быть может, случай, когда при условиях D_2 рассматривается стационарное решение, для которого $p^0 = \tilde{p}$, а в качестве (β^0, γ^0) выбрана точка минимума функции $U_p(\beta, \gamma)$ при $p \neq \tilde{p}$.

Поскольку уравновешенный гироскоп ($U(\beta) \equiv \mathrm{const}$) и гироскоп общепринятой конструкции ($G(\beta) = g_0 + g_4 \cos 2\beta$) не удовлетворяют условиям D_2 (а именно, неравенству $u_1 \neq 0$ и неравенству $g_1 \neq 0$), то из теоремы 4 следует, что для них наличие изолированного минимума функции $U_p(\beta, \gamma)$ в стационарной точке является необходимым и достаточным условием устойчивости любого стационарного режима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 1// Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 124–141.
2. *LaSalle J., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's direct method with applications. Academic press, New York, London, 1961. = *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
3. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.
4. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Свойство притяжения стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 3–14.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 69–82

УДК 539.21

КЛАССИЧЕСКИЕ И МНОГОУРОВНЕВЫЕ КОНСТИТУТИВНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ (*в порядке обсуждения*)

© 2021 г. П. В. Трусов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru

Поступила в редакцию 18.09.2019 г.
После доработки 23.09.2019 г.
Принята к публикации 04.10.2019 г.

Потребности совершенствования существующих и разработки новых эффективных технологий обработки металлических материалов давлением (в том числе – при интенсивных пластических деформациях, позволяющих получать изделия с ультрамелкозернистой структурой), постоянно возрастающие требования к точности прочностных расчетов, появляющиеся новые материалы со сложными свойствами (включая градиентные материалы), необходимость проектирования и создания функциональных материалов требуют от механиков и физиков-материаловедов постоянной работы над конститутивными моделями (определяющими соотношениями) для описания поведения различных материалов. При этом наибольший интерес привлекают модели, применяемые для описания процессов термомеханической обработки, поскольку именно в последних формируются основные рабочие характеристики готовых изделий. Физико-механические (в т.ч. – прочностные) характеристики материалов изделий определяются главным образом микроструктурой, образующейся в результате обработки. В связи с этим наиболее востребованными становятся модели, позволяющие в явном виде описывать эволюционирующую микроструктуру различных структурных и масштабных уровней. Тем не менее, в настоящее время наиболее распространенными в среде специалистов в области механики деформируемого твердого тела, технологов, конструкторов являются макрофеноменологические определяющие соотношения, основанные на обработке результатов макроэкспериментов и не использующие явного описания структуры материалов.

Наряду с конститутивными соотношениями указанного класса в последние 15–20 лет все более широкое признание для анализа поведения материалов при термомеханических (и более сложных, например, радиационных) воздействиях приобретают многоуровневые модели, основанные на введении внутренних переменных и физических теориях упругопластичности (упруговязкопластичности).

В предлагаемой работе делается попытка сопоставления преимуществ и недостатков моделей указанных классов, оценки областей их применимости, а также формулировки некоторых проблемных вопросов, ответов на которые автор не нашел в существующей литературе по механике деформируемого твердого тела и материаловедению.

Ключевые слова: конститутивные соотношения, феноменологические и многоуровневые модели, внутренние переменные, физические теории упруговязкопластичности

DOI: 10.31857/S0572329921010128

Введение. Центральным элементом постановок различных краевых задач, возникающих в механике деформируемого твердого тела (МДТТ), являются конститутивные модели (определяющие соотношения (ОС)) [1–3]. Наибольшей популярностью в среде механиков, конструкторов, “прочнистов”, технологов в настоящее время пользуются феноменологические определяющие соотношения, заложенные в большинстве пакетов прикладных программ, реализующих метод конечных элементов (МКЭ), таких как ANSYS, DYNA, QFORM, КОМПАС и др. Заметим, что в настоящей работе речь пойдет в основном о металлах и сплавах, хотя часть рассматриваемых вопросов относятся и к другим материалам, в том числе — к композиционным.

Основой для построения ОС указанного класса являются результаты экспериментальных исследований поведения макроскопических образцов из исследуемых материалов, подвергаемых различным термомеханическим и иным (например, радиационным, химическим и т.д.) воздействиям; в связи с вышесказанным ОС данного класса правильнее называть макрофеноменологическими. В большинстве случаев эти испытания осуществляются на одноосное нагружение (деформирование), например, на растяжение–сжатие или простой сдвиг сплошных образцов. Важнейшим условием для дальнейшей интерпретации измеренных силовых и геометрических характеристик в терминах континуальной механики (напряжений, деформаций и т.д.) является однородность образцов (в макроскопическом смысле). Полученные в результате обработки экспериментальных данных “одноосные” ОС в дальнейшем обобщаются на трехмерный случай с использованием некоторых гипотез, не всегда основанных на должном физическом обосновании. Для проверки справедливости принимаемых гипотез требуются, вообще говоря, испытания на сложное нагружение, реализуемые, например, на трубчатых образцах [4–7]. Однако деформируемые твердые тела обладают свойством памяти [2, 4], причем для неупруго деформируемых тел — ко всей истории воздействий, в связи с чем для проверки гипотез и возможной переформулировки ОС на основе результатов экспериментов на сложное нагружение требуется огромное (теоретически — мощности континуум) количество экспериментов.

Поскольку построение феноменологических ОС базируется на экспериментах, данный подход не может быть использован для проектирования новых, еще не существующих, ориентированных на повышение рабочих характеристик конкретных деталей и конструкций, функциональных материалов [8, 9]. При этом в силу невозможности проведения экспериментальных измерений физико-механических характеристик во всем объеме готовых изделий, применение феноменологических ОС даже для прочностных расчетов, требующих решения краевых задач теории упругости, может приводить к значительным погрешностям. Действительно, данные ОС не позволяют описать изменение симметрии физико-механических свойств материала (например, в силу формирующейся текстуры), возникновение остаточных напряжений различного рода [10–12], локальных отклонений упругих модулей (вследствие неоднородности структуры материалов на мезо- и микроуровнях).

Из свойства “исторической памяти” вытекает необходимость формулировки ОС в виде операторов над историей воздействий, чаще всего — функционалов. Идентификация подобных конститутивных соотношений сопряжена со значительными трудностями, требует огромных материальных и временных затрат. Кроме того, функциональный вид ОС существенно усложняет систему уравнений краевых задач, в постановку которых они входят, и алгоритмы решения этих задач.

Для “ухода” от указанных сложностей при построении конститутивных моделей материалов в последние десятилетия широко используется введение так называемых внутренних переменных (ВП) [13–15], являющихся “носителями памяти”. В большинстве работ, однако, отсутствует четкое определение ВП и объяснение их физического смысла. При использовании термодинамического подхода для формулировки ОС внутренние переменные часто появляются в качестве энергетически сопряженных обобщенных термодинамических сил или потоков при переменных с известным термомеханическим смыслом. В последние годы внутренним переменным в ряде работ придается ясный физический смысл: они служат для описания эволюционирующей микроструктуры материала и определяют количественные меры различных носителей физических механизмов, обусловливающих эти изменения структуры (например, тензоры ориентации решеток кристаллитов, параметры, характеризующие форму и размеры зерен, плотности дислокаций разных знаков на системах скольжения и т.д.); именно в таком смысле ВП трактуются и в настоящей работе. С возможным вариантом общей структуры конститутивных моделей, основанных на введении внутренних переменных, можно ознакомиться в работах [16–18].

В структуру конститутивных моделей с внутренними переменными хорошо "вписываются" весьма активно развиваемые и приобретающие все большее признание в последние 15–20 лет (к сожалению – в основном в работах зарубежных исследователей) многоуровневые модели [19–24], основанные на физических теориях упругопластичности (упруговязкопластичности) [25–27]. Модели данного класса лишены многих из отмеченных выше недостатков и ограничений феноменологических теорий. Основным преимуществом многоуровневых моделей является явное описание физических механизмов и носителей этих механизмов процессов, происходящих в материалах при термомеханических воздействиях, на нескольких структурных и/или масштабных уровнях. Краткое изложение структуры многоуровневых моделей и основные уравнения приведены ниже в разделе 3[1].

1. Основные понятия и определения. Для замкнутости статьи в данном разделе приведены некоторые основные понятия и определения, необходимые для дальнейшего изложения. Одним из основных в МДТТ является понятие представительного объема (ПО), под которым понимается минимальный объем материала, в котором содержится достаточное для статистического описания состояния тела число "носителей" рассматриваемых механизмов процесса. Добавление к этому объему других частей данного материала с аналогичной (в статистическом смысле) конфигурацией "носителей" анализируемых механизмов не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полевых величин, описывающих изменение конфигурации "носителей". В классической механике сплошных сред (МСС) предполагается, что размеры представительного объема таковы, что градиентами этих полевых величин и других параметров состояния в пределах представительного объема можно пренебречь, что позволяет считать указанные поля однородными (в статистическом смысле) в масштабах представительного объема.

При этом все параметры определяются осреднением по скользящему представительному объему со стенками, абсолютно "прозрачными" для материи, с "приписыванием" в дальнейшем определенного осреднением значения параметра выбранной точке ПО (например, геометрическому центру ПО). И только в этом смысле следует понимать определение любой механической величины в (математической) точке.

В настоящей работе рассматриваются только простые материалы [2], т.е. такие, деформированное состояние ПО которых описывается первым градиентом места (или градиентом перемещений), который полностью определяет отклик (изменение напряженного состояния) на изменение конфигурации ПО. При этом в нелинейной МДТТ используется весьма широкий спектр мер и тензоров деформации, построенных на градиенте места [28–30]; произвольный тензор деформации в дальнейшем будет обозначаться как $\mathbf{M}$. Значительным разнообразием отличается также множество мер напряженного состояния [30–33]. Наиболее часто в МДТТ используется тензор

[1] С более подробным изложением многоуровневых моделей интересующийся читатель может ознакомиться по монографии: П.В. Трусов, А.И. Швейкин. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 605 стр. DOI: 10.15372/MULTILEVEL2019TPV

напряжений Коши, который будет обозначаться как $\mathbf{\Sigma}$ на макроуровне и $\boldsymbol{\sigma}$ – на мезоуровне; для произвольного тензора напряжений принимается обозначение $\mathbf{P}$ ($\mathbf{p}$). При формулировке ОС, особенно – с использованием термодинамического подхода, часто к мерам напряжений и деформаций предъявляется требование энергетической сопряженности. Тензоры напряжений $\mathbf{P}$ и деформаций $\mathbf{M}$ называются энергетически сопряженными, если для любого момента процесса деформирования выполняется равенство: $\mathbf{P} : \mathbf{M}^{\mathrm{o}} = \chi\mathbf{\Sigma} : \mathbf{D}$, где $\mathbf{M}^{\mathrm{o}}$ – независящая от выбора системы отсчета производная (чаще всего – коротационная), $\mathbf{D}$ – тензор деформации скорости (симметризованный градиент скорости перемещений), $\chi = \overset{\mathrm{o}}{\rho}/\hat{\rho}$ – если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ определены в отсчетной конфигурации ($\overset{\mathrm{o}}{\rho}$, $\hat{\rho}$ – плотность в отсчетной и актуальной конфигурациях) и $\chi = 1$– если в актуальной.

Известно, что поведение материалов при неупругом деформировании (включая процессы накопления поврежденности, см., например, [34]) существенно зависит от сложности нагружения [4]. Степень сложности процесса нагружения устанавливается по виду траектории деформации в соответствующем пространстве деформаций (или девиаторных составляющих тензора деформации); строго говоря, любое нагружение по траектории деформации, отличной от лучевой, следует относить к сложному. Для описания процессов неупругого деформирования часто используется представление деформаций и напряжений в совмещенном векторном пространстве, изоморфном исходному пространству двухвалентных тензоров над трехмерным евклидовым пространством [4]. При этом полная информация о рассматриваемом деформировании ПО дает образ процесса нагружения: совокупность траектории деформации и определенных в каждой ее точке векторов напряжений, температур и т.д.

Формулируемые конститутивные модели должны удовлетворять ряду аксиом общей теории определяющих соотношений (принципу детерминизма, термодинамическим ограничениям и т.д.) [2]. Одной из важнейших (особенно – при рассмотрении геометрически нелинейных проблем) является аксиома независимости определяющих соотношений от выбора системы отсчета, называемая также принципом материальной индифферентности. С необходимостью выполнения данной аксиомы тесно связана задача разложения движения деформируемого твердого тела на квазитвердое и деформационное. Для описания первой составляющей вводится подвижная жесткая система координат (ПСК), которая должна быть связана с материалом и в случае жесткого движения тела должна полностью повторять это движение. Часть движения "за вычетом" движения ПСК тогда может трактоваться как деформационное. Поскольку в произвольно деформируемом континууме не существует тройки материальных волокон, не изменяющих углов между собой, решение данной задачи для произвольного континуума представляет неразрешенную на сегодняшний день проблему, которая, возможно, вообще не имеет однозначного решения в рамках континуальной механики. Тем не менее, ниже будет показано, что данная проблема может быть решена при использовании многоуровневых моделей.

К сожалению, в подавляющем большинстве работ по нелинейной МДТТ вопрос о разложении движения на квазитвердое и деформационное подменяется вопросом о корректном выборе независимой от выбора системы отсчета производной, необходимой при построении ОС упруго(вязко)пластичности. Конечно, замена материальных производных на независящие от выбора системы отсчета конвективные или коротационные производные [30, 31] позволяет удовлетворить принципу материальной индифферентности, однако она не имеет под собой должного физического обоснования. Чаще всего при формулировке геометрически нелинейных ОС скоростного типа используются коротационные Зарембы – Яуманна [35, 36] и Грина – Нагхди [37] производные. В последние 10–15 лет все большей популярностью пользуется так называемая логарифмическая коротационная производная [38–40]. При ее введении авторы апеллировали к необходимости выполнения двух дополнительных требований к геометрически нелинейным ОС: 1) в замкнутом цикле по упругим деформациям замкнутой должна быть и траектория напряжений, 2) в указанном упругом цикле совершенная работа должна быть нулевой; в дальнейшем для краткости эти условия будут называться требованиями консервативности ОС. Авторами доказано удовлетворение требованию консервативности гипоупругими ОС, использующими коротационную логарифмическую производную тензора напряжений Кирхгоффа, однако — только для изотропного материала. В случае анизотропного упругого материала доказательство проведено только для случая сохранения симметрийных свойств в отсчетной (или разгруженной) конфигурации. Следует отметить, что логарифмическая производная определяется исключительно кинематикой движения и никак не связана с материалом, в силу чего не имеет ясного физического смысла.

В настоящей работе рассматриваются ОС, ориентированные на описание поведения моно- и поликристаллических металлов и сплавов. Искажения решеток полагаются упругими и малыми; неупругое деформирование принимается осуществляемым за счет движения краевых дислокаций по кристаллографическим системам скольжения, положение которых по отношению к решеткам известно для каждого типа кристаллита. В отсчетной конфигурации для материала на всех масштабных уровнях принимается гипотеза о естественном (ненапряженном) состоянии.

2. Некоторые проблемные вопросы формулировки и использования феноменологических моделей. Остановимся на некоторых аспектах разработки и использования конститутивных моделей, основанных на обработке макроэкспериментов с однородно деформируемыми образцами. Напомним, что подавляющее большинство макроэкспериментов, применяемых для построения упруго(вязко)пластических ОС, проводится на одноосное нагружение с использованием сплошных цилиндрических образцов (круглого или прямоугольного поперечного сечения). Но даже на таких образцах однородность напряженно-деформированного состояния (НДС) сохраняется только до умеренно больших неупругих деформаций (порядка нескольких десятков процентов относительного изменения длины). В реальных процессах обработки металлов давлением, для анализа которых главным образом и востребованы теории пластичности, деформации достигают огромных значений (например, при прокатке лент и листов — до десятков и сотен тысяч процентов). Однако на сегодняшний день отсутствуют однозначные и физически обоснованные подходы к обобщению геометрически линейных теорий на случай больших градиентов перемещений; результаты решения даже тестовых задач (например, простого сдвига) при использовании различным образом обобщенных ОС могут отличаться качественно. Следует отметить также, что стандартные одноосные испытания не позволяют определять модули упругости в случае анизотропии упругих свойств.

Понятие однородности НДС, вообще говоря, не является однозначным и физически прозрачным. Известно (см., например, [41] и приведенный в статье обширный перечень источников), что в пластически деформируемых образцах практически сразу при превышении предела текучести возникают полосы сдвига, движущиеся вдоль образцов. Значительную роль в инициации пластических сдвигов играют границы образца, ориентация кристаллитов границы по отношению к характерным осям нагружения [42—44]. Иначе говоря, даже при анализе этих, казалось бы — простейших, — натурных испытаний возникают различные вопросы. Прежде всего: поведение чего именно исследуется в этих опытах — материала или образца (конструкции)? Каковы должны быть характерные размеры представительного объема (ПО), для которого можно принять истинными полученные в данных опытах характеристики материала? Описывается ли поведение материала в объеме исследуемого изделия и вблизи его границы одними и теми же ОС и/или параметрами ОС? Приведенные вопросы представляются особенно важными при необходимости исследовать поведение малоразмерных (миниатюрных) изделий, при анализе процессов разрушения (в частности – усталостного).

Вызывает вопросы и обобщение получаемых в указанных опытах одноосных ОС на 3-мерное НДС. Как правило, для этого принимается гипотеза о несжимаемости неупругих деформаций, а одноосные напряжения и деформации (скорости деформации) заменяются девиаторами мер напряжений и деформаций (скоростей деформации). Для проверки приемлемости данных гипотез требуется проведение опытов на сложное нагружение. Однако в настоящее время размерность пространств напряжений – деформаций для таких испытаний ограничена – она не превышает 3 (на тонкостенных трубчатых образцах, подвергаемых растяжению–сжатию, кручению и внутреннему давлению). Кроме того, эксперименты на произвольное сложное нагружение еще более ограничены по величине деформации; сдвиговые деформации (при кручении трубок), как правило, не превышают 5–7%. Иначе говоря, построить геометрически нелинейные упруго(вязко)пластические ОС непосредственно обработкой экспериментальных данных даже для одной предписанной программы нагружения не представляется возможным. Следует отметить дополнительно возникающие сложности построения образа процесса нагружения в случае больших градиентов перемещений [45]. В геометрически линейном варианте образ процесса нагружения строится по компонентам тензоров напряжений и деформаций, определенным в базисе условно неподвижной лабораторной системы координат; в цитируемой выше работе показано, что построенный таким образом образ процесса не удовлетворяет принципу независимости от выбора системы отсчета.

При формулировке классических теорий пластичности (например, различных вариантов теории пластического течения [46, 47]) используется гипотеза единой кривой, согласно которой считается, что кривая одноосного нагружения может быть использована для многоосного нагружения при замене одноосных мер на интенсивности напряжений и деформаций (или интенсивности накопленных полных или пластических деформаций, определяемых интегрированием интенсивности скорости деформации по времени). Однако должного физического обоснования данная гипотеза не имеет; едва ли достаточным основанием может служить равенство интенсивностей соответствующим мерам при одноосном нагружении (интенсивность напряжений равна одноосному напряжению при растяжении и сжатии (по модулю) и напряжению сдвига – при чистом сдвиге, интенсивность деформаций равна одноосной деформации при растяжении и сжатии (по модулю) и величине сдвиговой деформации при простом сдвиге). Даже простые эксперименты не подтверждают справедливость данной гипотезы; например, приведенные в [48] результаты экспериментов на сжатие и простой сдвиг образцов из поликристаллической меди, пересчитанные в интенсивности, показывают различие, превышающее 20%.

Понятно, что для сопоставления результатов испытаний образцов из материалов по различным программам нагружения, уменьшения количества потребных экспериментов весьма желательно наличие скалярных инвариантов, интегрально отражающих эволюцию НДС. При этом сами меры НДС и их скалярные аналоги должны иметь ясный физический смысл с точки зрения основных механизмов и их носителей на соответствующих структурных и масштабных уровнях. Не ясно, возможно ли решение этих задач в рамках континуальных теорий для описания необратимого деформирования, с использованием известных симметризованных мер, например, тензоров деформации из класса Хилла – Сетха [49–51]. Для введенной в [52] в рамках двухуровневой упруговязкопластической модели неголономной несимметричной меры деформации на макроуровне удалось показать ее физический смысл в терминах сдвигов по системам скольжения.

Следует коснуться еще одного вопроса, возникающего в практике решения конкретных задач (как аналитическими, так и численными методами) – о различии понятия “точка” в математическом и механическом смыслах. Конечно, специалисты в области построения конститутивных моделей материалов всегда помнят о представительном объеме (ПО) (“толстой точке”), о необходимости использования получаемых ОС на масштабах, равных или превышающих характерные размеры ПО. Однако исследователи, применяющие сформулированные осредненные по представительным объемам ОС для решения задач МДТТ, часто даже не упоминают о ПО. Наиболее показательным в этом плане является широкий круг задач по исследованию сингулярных точек, при приближении к которым резко (в некоторых случаях – с бесконечными производными по направлению) возрастают градиенты перемещений, компоненты тензоров деформаций и напряжений. При этом часто используются изотропные ОС первого порядка, что совершенно неприемлемо: для материалов первого порядка градиенты материальных функций (перемещений, напряжений, деформаций) не должны существенно меняться на характерных размерах ПО; при уменьшении масштабов исследуемых объемов большинство материалов обнаруживают анизотропию свойств. В связи с этим стоит отметить также иллюзию повышения точности численных расчетов при устремлении размеров сеток к нулю. Конечно, такие численные эксперименты позволяют оценить свойства вычислительных схем (аппроксимации, сходимости), но декларируемая на основе таких расчетов “точность” в десятые и сотые доли процентов не имеет никакого практического значения. При этом необходимо исследовать теоретически возможную точность расчетов, обусловленную существующим в любых изделиях разбросе физико-механических характеристик.

Кратко остановимся на описании многоуровневых моделей, основанных на физических теориях упруго(вязко)пластичности, позволяющих избежать, по крайней мере, части из отмеченных сложностей.

3. Многоуровневые модели: структура, возможности, сложности. При использовании многоуровневого подхода каждой материальной точке (представительному объему) на некотором масштабном уровне ставится в соответствие неоднородная область на нижележащем масштабном уровне. Число используемых в модели уровней устанавливается исследователем в зависимости от поставленных задач, важности тех или иных физических механизмов разных структурных уровней для анализируемого процесса. В настоящее время принята следующая иерархическая совокупность структурных (и/или масштабных) уровней: макроуровень (уровень представительного макрообъема) – мезоуровень (уровень кристаллитов) – микроуровень (дислокационных субструктур) – атомарный уровень (с характерным размером в несколько десятков межатомных расстояний). Основным классификационным признаком моделей является способ связи “родственных” переменных соседних уровней, по которому различают статистические, самосогласованные и прямые модели [23, 24]. Наибольшее распространение получили двухуровневые (макро- и мезоуровень) статистические модели, структура и формулировка соотношений которых рассматривается ниже. В статистических двухуровневых моделях [19, 48, 53] представительный объем верхнего уровня рассматривается как выборка элементов нижнего уровня (совокупности или отдельных зерен, субзерен) относительно независимых друг от друга; объединение элементов мезоуровня в элемент макроуровня (представительный макрообъем) осуществляется статистическим осреднением. При назначении с верхнего уровня параметров нагружения для модели нижнего уровня преимущественно используется или обобщенная гипотеза Фойгта (для каждого элемента нижнего уровня градиент скорости перемещений равен градиенту скорости перемещений верхнего уровня), или гипотеза Рейсса (для каждого элемента нижнего уровня напряжения совпадают с напряжениями вышележащего уровня). В таких моделях неупругая составляющая меры (скорости) деформации и эффективные анизотропные упругие свойства на верхнем уровне определяются тем или иным осреднением характеристик мезоуровня (неявных внутренних переменных макроуровня) в каждый момент процесса деформирования [16, 17].

В рассматриваемых конститутивных моделях параметрами процессов на каждом из масштабных (или структурных) уровней являются: меры напряженного состояния (и их объективные скорости изменения), меры скорости деформирования, температура, внутренние (явные и неявные) переменные, определяющие состояние зеренной и дефектной структуры. При этом важным отличием модели от традиционных статистических моделей, основанных на физических теориях пластичности (ФТП), является учет в рассматриваемой модели взаиморасположения кристаллитов и границ между ними. Это позволяет принять во внимание несовместность движения дислокаций в соседних кристаллитах, накопление дислокаций ориентационного несоответствия в границе, что приводит к зернограничному упрочнению и дополнительным поворотам решетки. На мезоуровне описываются механизм внутризеренного дислокационного скольжения (ВДС), ротации решеток кристаллитов, изменение формы и размеров кристаллитов. Используется ранее разработанный подход к формулировке геометрически нелинейных кинематических и определяющих соотношений, основанный на рассмотрении в рамках многоуровневого подхода разложения движения на мезоуровне с учетом симметрии материала [54]. Для этого в каждом кристаллите вводится жесткая подвижная декартова ортогональная система координат (ПСК), движение которой считается квазитвердым и которая привязывается к симметрийным элементам кристаллита — кристаллографическому направлению и плоскости, содержащей это направление. Следует заметить, что предлагаемые соотношения мезоуровня без изменений могут применяться в рамках прямых моделей. В приведенных далее соотношениях "родственные" параметры макро- и мезоуровня обозначаются одинаковыми буквами, величины макроуровня — заглавными буквами, мезоуровня — строчными.

Рассмотрим общую структуру статистической модели. Система уравнений модели на макроуровне в общем виде содержит следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{K}^{\mathrm{cor}} \equiv \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{K} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Pi} : (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega} - \mathbf{Z}^{\mathrm{in}} - \mathbf{Z}^{\mathrm{th}}) \\
\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{Z}^{\mathrm{in}} = \mathbf{Z}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{Z}^{\mathrm{th}} = \mathbf{Z}^{\mathrm{th}}(\boldsymbol{\pi}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{in}}_{(i)}, \mathbf{z}^{\mathrm{th}}_{(i)}, \theta_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\mathrm{q}_{(i)}), \qquad i = 1,\dots,N \\
\mathbf{K}\big|_{t=0} = \mathbf{K}_0
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где $\mathbf{K}$ — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа макроуровня, $\mathbf{K} = \langle \overset{\mathrm{o}}{\rho} / \hat{\rho} \rangle \mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Sigma}$ — тензор напряжений Коши макроуровня, $\langle \overset{\mathrm{o}}{\rho} / \hat{\rho} \rangle$ — среднее отношение плотности в отсчетной и текущей конфигурации для кристаллитов, составляющих представительный объем макроуровня; $\mathbf{\Omega}$ — спин подвижной системы координат макроуровня; $\mathbf{Z} = (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega})$ — мера скорости деформации (градиент относительной скорости перемещений), $\mathbf{L}$ — градиент (абсолютной) скорости перемещений; $\mathbf{K}^{\mathrm{cor}} \equiv \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{K} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{\Omega}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная) тензора напряжений Кирхгоффа; $\mathbf{K}_0$ — начальное значение тензора макронапряжений, для естественной конфигурации $\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$. Тензор эффективных упругих свойств $\mathbf{\Pi}$ макроуровня, тензор спина $\mathbf{\Omega}$, неупругая составляющая тензора скорости деформации $\mathbf{Z}^{\text{in}}$, термическая составляющая скорости деформации $\mathbf{Z}^{\text{th}}$ и мощность источника Q (который необходимо использовать в уравнении теплопроводности краевой термомеханической задачи на уровне конструкции) являются явными внутренними переменными макроуровня, которые зависят от структуры на низших масштабных уровнях (а через нее – от истории нагружения) и определяются по характеристикам мезоуровня (неявным переменным макроуровня). Следует заметить, что запись зависимостей макропараметров от полного набора переменных мезоуровня (3.1) следует воспринимать символически: по части переменных – как функции, по другим – как функционалы над историей изменения параметров мезоуровня. С использованием указанных явных внутренних переменных макроуровня записывается связь отклика $\mathbf{K}$ и воздействий – кинематического $\mathbf{L} = \hat{\nabla}\mathbf{V}^{\text{T}}(\text{t})$ (градиента скорости перемещений) и термического $\Theta(\text{t})$ (температура). Отметим, что при использовании многоуровневых моделей, как и любых других моделей материалов, для исследования напряженно-деформированного состояния реальных конструкций необходимы постановка и решение соответствующей краевой задачи, в результате которого (при совместном рассмотрении определяющих и балансовых уравнений) определяются поля воздействий и отклик. Переменные $\mathbf{п}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{z}_{(i)}^{\text{in}}, \mathbf{z}_{(i)}^{\text{th}}$ – тензор упругих свойств, спин ПСК, неупругая и термическая составляющая тензора скорости деформации мезоуровня вводятся для каждого кристаллита, N – число элементов мезоуровня, необходимых для статистического описания представительного объема макроуровня; эти переменные в соответствие со структурой конститутивных моделей, основанных на введении внутренних переменных, относятся к неявным внутренним переменным макроуровня, в то же время (как следует из нижеизложенного) – к явным внутренним переменным мезоуровня.

В качестве эволюционных уравнений макроуровня выступают соотношения модели мезоуровня, которые в общем виде могут быть представлены следующей системой (применяются для каждого элемента мезоуровня, все величины принимаются однородными в пределах каждого элемента, индекс элемента для простоты записи опускается):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{k}^{\text{cor}} \equiv \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{п} : (\mathbf{l} - \boldsymbol{\omega} - \mathbf{z}^{\text{in}} - \mathbf{z}^{\text{th}}) \\
\mathbf{l} = \hat{\nabla}\mathbf{v}^{\text{T}} = \hat{\nabla}\mathbf{V}^{\text{T}} = \mathbf{L}, \quad \theta = \Theta, \quad \dot{\theta} = \dot{\Theta} \\
\mathbf{z}^{\text{in}} = \sum_{k=1}^{K} \dot{\gamma}^{(k)}\mathbf{b}^{(k)}\mathbf{n}^{(k)} \\
\dot{\gamma}^{(k)} = [\text{соотношения для } \dot{\gamma}^{(k)}(\tau^{(k)}, \tau_{\text{c}}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad k = 1,\ldots,K \\
\tau^{(k)} = \mathbf{k} : \mathbf{b}^{(k)}\mathbf{n}^{(k)}, \quad k = 1,\ldots,K \\
\dot{\tau}_{\text{c}}^{(k)} = [\text{соотношения для } \dot{\tau}_{\text{c}}^{(k)}(\gamma^{(k)}, \dot{\gamma}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad k = 1,\ldots,K, \quad i = 1,\ldots,I \\
\boldsymbol{\omega} = [\text{соотношения для } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{z}^{\text{in}}, \mathbf{z}^{\text{th}}, \gamma^{(k)}, \dot{\gamma}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad \dot{\mathbf{o}}\cdot\mathbf{o}^{\text{T}} = \boldsymbol{\omega}, \quad i = 1,\ldots,I, \\
\mathbf{z}^{\text{th}} = \boldsymbol{\alpha}\,\dot{\theta}, \\
\text{q} = \alpha\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{z}^{in} / \hat{\rho}, \\
\dot{\boldsymbol{\beta}}_i = [\text{соотношения для } \dot{\boldsymbol{\beta}}_i(\mathbf{l}, \mathbf{z}^{\text{in}}, \mathbf{z}^{\text{th}}, \gamma^{(k)}, \dot{\gamma}^{(k)}, \mathbf{o}, \theta, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad i = 1,\ldots,I \\
\mathbf{k}\big|_{t=0} = \mathbf{k}_0, \quad \tau_{\text{c}}^{(k)}\Big|_{t=0} = \tau_{\text{c}0}^{(k)}, \ \gamma^{(k)}\Big|_{t=0} = \gamma_0^{(k)}, \quad k = 1,\ldots,K, \quad \mathbf{o}\big|_{t=0} = \mathbf{o}_0
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Здесь: $\mathbf{k} = (\overset{o}{\rho}/\hat{\rho})\boldsymbol{\sigma}$ — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа мезоуровня, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши мезоуровня; $\mathbf{k}^{cor} \equiv \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная) тензора напряжений Кирхгоффа; $\boldsymbol{\omega}$ — тензор спина ПСК кристаллита, определяющий скорость ее поворота; $\mathbf{п}$ — тензор упругих свойств кристаллита (его компоненты постоянны в базисе ПСК кристаллита); $I = \hat{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ — транспонированный градиент скорости перемещений, $\hat{\nabla}$ — оператор Гамильтона в текущей лагранжевой системе координат; $\mathbf{z}^{in}$ и $\mathbf{z}^{th}$ — неупругая и термическая составляющие транспонированного градиента относительной скорости перемещений; $\dot{\gamma}^{(k)}, \tau^{(k)}, \tau_c^{(k)}$ — скорость сдвига, действующее касательное и критическое касательной напряжение k-й системы скольжения; $\mathbf{b}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}$ — вектор направления скольжения и нормали к плоскости k-й системы скольжения; $\boldsymbol{\alpha}$ — тензор термического расширения (компоненты постоянны в базисе ПСК кристаллита); q, α — мощность теплового источника и коэффициент выхода тепла; $\boldsymbol{\beta}_i$ — дополнительные тензорные (произвольного ранга) внутренние переменные, вводимые при необходимости описания отличных от скольжения краевых дислокаций физических механизмов деформирования и изменения микроструктуры; $\mathbf{o}$ — тензор ориентации ПСК.

Различные модификации рассмотренной двухуровневой модели были ранее применены для решения задач исследования отклика разных материалов при широком классе воздействий. В статье [55], например, приведены результаты исследования поведения представительного объема (образца) полукристаллического полимера, подвергаемого простейшему одноосному (на макроуровне) нагружению в изотермических условиях. Следует отметить, что при использовании многоуровневых моделей одноосное деформирование на макроуровне приводит к произвольному пространственному нагружению уже на мезоуровне. Возможности применения двухуровневой модели для анализа сложного нагружения представительных объемов поликристаллических металлов продемонстрированы в работах [45, 56, 57]. Показано, что для качественного исследования деформирования материалов при сложном нагружении и больших градиентах перемещений предлагаемые модели могут служить в качестве аналогов машин сложного нагружения. Модификация многоуровневой модели, описанной выше, была разработана и применена к анализу диффузионных и бездиффузионных (мартенситных) твердотельных фазовых превращений [58—60].

Как отмечено выше, система соотношений мезоуровня (3.2) может непосредственно использоваться в качестве конститутивной модель материала в рамках так называемых прямых моделей [24]. С помощью прямых моделей можно детально исследовать поведение приграничных областей материала, анализировать НДС в окрестностях концентраторов напряжений. Пример применения прямой модели для исследования процесса осадки монокристаллического образца представлен в [44]. Было показано, что исходный однородный объем монокристалла в процессе деформирования разделяется на 7 фрагментов, в которых интенсивность сдвиговой деформации отличается на несколько порядков. Вследствие неоднородности пластических сдвигов возникает разориентация выделившихся фрагментов; максимальное значение разориентации соседних фрагментов достигает 8°, поворот кристаллической решетки в них относительно недеформированного состояния достигает 4° при относительной осадке всего на 6%. В результате неоднородного вращения кристаллической решетки в объеме образца (между фрагментами) могут возникать области с искривленной решеткой. В численных экспериментах показано, что в ходе осадки в ряде областей происходит существенное искривление кристаллической решетки монокристалла, что согласуется с результатами натурного эксперимента, в котором показано, что на поверхности также наблюдаются искривленные линии скольжения краевых дислокаций. Данный пример свидетельствует о возможностях применения рассматриваемых моделей для анализа весьма “тонких” эффектов, к которым относятся искривления кристаллической решетки.

На основе более чем десятилетнего опыта разработки и эксплуатации различных вариантов многоуровневых моделей, основанных на введении внутренних переменных и физических теорий упругопластичности (упруговязкопластичности) можно утверждать, что они обладают значительной универсальностью в силу идентичности физических механизмов деформирования на мезо- и микроуровнях для широких классов материалов; указанное свойство позволяет использовать многоуровневые модели для проектирования функциональных материалов и разработки технологий их изготовления. При необходимости они допускают неограниченное расширение включением новых механизмов деформирования и упрочнения (двойникование, зернограничное скольжение, образование барьеров дислокационной природы, взаимодействие дислокаций с точечными дефектами, твердотельные фазовые переходы и т.д.), наращиванием числа структурных и масштабных уровней. Многоуровневые модели могут быть использованы в качестве машины сложного нагружения без ограничений на размерность пространств напряжений и деформаций, что позволит формулировать упрощенные феноменологические модели.

Несмотря на то, что многоуровневые модели свободны от многих недостатков и ограничений феноменологических конститутивных моделей, они не лишены некоторых сложностей при их построении и применении. Прежде всего, физические теории значительно сложнее формулировать: требуется тщательное изучение широкого спектра физических механизмов и их носителей, ответственных за поведение материалов при рассматриваемых термомеханических воздействиях, выделение из них наиболее важных, создание способов описания эволюции носителей, установление связей “родственных” переменных различных уровней и т.д. Многообразие механизмов приводит к необходимости формулировки большого числа уравнений и входящих в них параметров, подлежащих идентификации (при невозможности прямого измерения по части параметров). Как правило, сформулированные уравнения являются существенно нелинейными, что ведет к невозможности аналитических решений и требует применения численных методов, отсюда – потребность в огромных вычислительных ресурсах. Следует отметить также отсутствие апробированной методологии применения многоуровневых моделей для создания функциональных материалов. Однако указанные трудности не представляются принципиально непреодолимыми, в частности, вследствие чрезвычайно высоких темпов развития вычислительной техники.

Заключение. В предлагаемой статье сделана попытка формулировки некоторых вопросов, относящихся к построению и использованию различных классов конститутивных моделей, и представляющих, по мнению автора, определенный интерес. Из сопоставления сложностей и возможностей феноменологических и многоуровневых моделей можно сделать вывод о значительных преимуществах вторых. В то же время многоуровневые модели нуждаются в дальнейшем углублении и совершенствовании, что требует привлечения к их созданию более широкого круга специалистов в области нелинейной механики и физики деформируемого твердого тела. Привлечение внимания к данной области исследований, чрезвычайно глубокой и широкой, и к обозначенным нерешенным вопросам и составляло основную задачу предлагаемой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания ПНИПУ, проект № FSNM – 2020-0027) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00379-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жилин П.А.* Рациональная механика сплошных сред. Учебн. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Трусов П.В., Келлер И.Э.* Теория определяющих соотношений. Ч. 1. Общая теория. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-т, 2006. 173 с.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: АН СССР, 1963. 272 с.
5. *Васин Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып.1. М.: МГУ, 1971. С. 59–126.
6. *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
7. *Зубчанинов В.Г.* Механика сплошных деформируемых сред. Тверь: Изд-во ТГТУ, ЧуДо, 2000. 703 с.
8. *Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Макаров П.В. и др.* Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. В 2-х т. Т. 1. Новосибирск: Наука. Сибирская издат. фирма РАН, 1995. 298 с.
9. *Панин В.Е., Макаров П.В., Псахье С.Г. и др*. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2-х т. Т. 2. В. Новосибирск: Наука. Сибирская издат. фирма РАН, 1995. 320 с.
10. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
11. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Ч. 1. М.: Машиностроение, 1974. 472 с.
12. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения: теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
13. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
14. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1988. 712 с.
15. *McDowell D.L.* Internal state variable theory // Handbook of Materials Modeling, S. Yip (ed.). Springer, 2005. P. 1151–1169. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-3286-8_58
16. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И.* Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 3. С. 327–344.
17. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И.* Моделирование эволюции структуры поликристаллических материалов при упругопластическом деформировании // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152. Кн. 4. С. 225–237.
18. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Теория пластичности. Пермь: Изд-во Перм. национ. исслед. политехн. ун-та, 2011. 419 с.
19. *Asaro R.J., Needleman A.* Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals // Acta Metall. 1985. V. 33. № 6. P. 923–953.
20. *Anand L.* Single–crystal elasto–viscoplasticity: application to texture evolution in polycrystalline metals at large strains // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2004. V. 193. P. 5359–5383.
21. *McDowell D.L.* A perspective on trends in multiscale plasticity // Int. J. Plasticity. 2010. V. 26. P. 1280–1309.
22. *Roters F., Eisenlohr P., Bieler T.R., Raabe D.* Crystal Plasticity Finite Element Methods in Materials Science and Engineering. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2010. 209 p.
23. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 4. С. 17–28.
24. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 5. С. 5–30.
25. *Taylor G.I.* Plastic strain in metals // J. Inst. Metals. 1938. V. 62. P. 307–324.
26. *Линь Т.Г.* Физическая теория пластичности // Проблемы теории пластичности. Сер. Новое в зарубежной механике. Вып. 7. М.: Мир, 1976. С. 7–68.

27. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
28. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
29. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
30. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
31. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
32. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.
33. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 стр.
34. *Fincato R., Tsutsumi S.* Numerical modeling of the evolution of ductile damage under proportional and non-proportional loading // Int. J. Solids and Structures. 2019. V. 160. P. 247–264.
35. *Zaremba S.* Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation // Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. 1903. P. 595–614.
36. *Jaumann G.* Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differential-gesetze // Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa. 1911. B. 120. S. 385–530.
37. *Green A.E., Naghdi P.M.* A general theory of an elastic-plastic continuum // Arch. Rational Mech. Anal. 1965. V. 18. P. 251–281.
38. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate // J. Elasticity. 1997. V. 47. P. 51–68.
39. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate // Acta Mechanica. 1997. V. 124. P. 89–105.
40. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. P. 143–177.
41. *Зуев Л.Б., Данилов В.И.* Медленные автоволновые процессы при деформации твердых тел // Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6. № 1. С. 75–94.
42. *Теплякова Л.А., Лычагин Д.В., Козлов Э.В.* Локализация сдвига при деформации монокристаллов алюминия с ориентацией оси сжатия [001] // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5. № 6. С. 49–55.
43. *Теплякова Л.А., Лычагин Д.В., Беспалова И.В.* Закономерности макролокализации деформации в монокристаллах алюминия с ориентацией оси сжатия [110] // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7. № 6. С. 63–78.
44. *Трусов П.В., Янц А.Ю., Теплякова Л.А.* Прямая физическая упруговязкопластическая модель: приложение к исследованию деформирования монокристаллов // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 2. С. 33–44.
45. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Двухуровневые модели поликристаллов: приложение к оценке справедливости постулата изотропии Ильюшина в случае больших градиентов перемещений // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 1. С. 23–37.
46. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
47. *Бондарь В.С.* Неупругость. Варианты теории. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 144 с.
48. *Bronkhorst C.A., Kalidindi S.R., Anand L.* Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in FCC metals // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1992. V. 341. P. 443–477.
49. *Hill R., Rice J.R.* Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain // J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20. P. 401–413.
50. *Seth B.R.* Generalized strain measure with applications to physical problems / Second Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics. Eds. M. Reiner, D. Abir. Oxford: Pergamon Press, 1964. V. 2. P. 162–172.
51. *Seth B.R.* Generalized strain and transition concepts for elasticplastic deformation – creep and relaxation / Applied Mechanics: Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. (Munich 1964), eds. H. Görtler and P. Sorger. Springer-Verlag: Berlin, 1966. P. 383–389.

52. *Трусов П.В., Янц А.Ю.* О физическом смысле неголономной меры деформации // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 2. С. 13–21.
53. *Dancette S., Delannay L., Jodlowski T., Giovanola J.* Multisite model prediction of texture induced anisotropy in brass // Int. J. Mater. Form. 2010 V. 3. Suppl. 1. P. 251–254.
54. *Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю.* О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 2. С. 47–65.
55. *Нечаева Е.С., Трусов П.В.* Конститутивная модель частично кристаллического полимерного материала. Алгоритм реализации для представительного объема макроуровня // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 2. С. 82–95.
56. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Двухуровневые модели поликристаллов: о независимости образа нагружения представительного макрообъема // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 33–41.
57. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Двухуровневые модели поликристаллов: приложение к анализу сложного нагружения // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 43–50.
58. *Исупова И.Л., Трусов П.В.* Математическое моделирование фазовых превращений в сталях при термомеханической нагрузке // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 3. С. 127–156.
59. *Исупова И.Л., Трусов П.В.* Моделирование поведения сталей с учетом диффузионных фазовых превращений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2014. № 1 (190). С. 191–197.
60. *Трусов П.В., Исупова И.Л.* Построение двухуровневой модели для описания поведения сталей при термомеханическом нагружении в интервале мартенситных превращений // Физическая мезомеханика. 2014. Т. 17. № 2. С. 5–17.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021,
№ 1, с. 83–105

УДК 531/534+539.3

ОБЪЕКТИВНЫЕ ТЕНЗОРЫ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

 Г. Л. Бровко

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
e-mail: glb@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 14.10.2019 г.
После доработки 18.10.2019 г.
Принята к публикации 21.10.2019 г.

Представлены основы теории объективных тензорных механических характеристик: общее понятие объективности, типы объективности, простые тензорные аналоги механических характеристик и связывающие их простые коммутативные диаграммы. Для объективных тензоров второго ранга дана общая классификация простых диаграмм, приведены примеры диаграмм.

Рассмотрены отображения, связывающие объективные механические тензорные процессы различных рангов и типов объективности. Введено понятие независимых от системы отсчета отображений, составляющих основу теории определяющих соотношений сред, установлена теорема о необходимых и достаточных условиях такой независимости. Приведены примеры.

Для двух произвольных диаграмм объективных тензорных процессов (вообще говоря, разных рангов) рассмотрен полный набор (пакет) родственных друг другу отображений (кондукторов) всевозможных аналогов одной диаграммы во всевозможные аналоги другой диаграммы – пакет кондукторов, или отображение диаграмм. Для совпадающих диаграмм (одного ранга с одинаковыми переплетающими операторами) введено обобщающее понятие объективных производных, составляющих подпакет кондукторов, связывающих тензоры одинаковых (всевозможных) типов объективности.

Приведены общие формулы объективных производных скаляров, векторов и тензоров второго ранга, представленные в лагранжевом и эйлеровом видах. Показано, что известные производные Зарембы–Яуманна, Олдройда, Коттер–Ривлина, Труසделла, Хилла, Седова, Динса, Гордона–Шоуолтера охватываются этими формулами.

В качестве оператора, обратного к объективной производной, построен оператор объективного интегрирования.

Приведены примеры использования объективных производных и объективных интегралов в построении определяющих соотношений сред при конечных деформациях.

Ключевые слова: тензорные характеристики механических процессов, замена системы отсчета, объективные тензоры, диаграммы, интроспективы и ретроспективы, тензорные отображения, независимость от системы отсчета, переплетения отображений, объективные производные и интегралы

DOI: 10.31857/S0572329920060045

Введение. В литературе по классической механике деформируемых сред [1–9] используются тензорные характеристики механических процессов различных видов.

В работах А.А. Ильюшина [10, 11], а также У. Нолла и К. Трусделла [12, 13] впервые обращено существенное внимание на математические аспекты инвариантности тензорных характеристик и связей между ними в определяющих соотношениях: введены понятия образа процесса и свойств пятимерной изотропии, понятие материальной независимости от системы отсчета.

Эти идеи получили воплощение и развитие в дальнейших работах авторов и их последователей [2–6, 8, 9, 14–21].

Дальнейшее развитие математических основ в работах по геометрическим и алгебраическим аспектам инвариантностей [22–34] нашло приложение в работах по механике сплошной среды и ее разделам, в том числе в работах автора [35–47], послуживших основой настоящего изложения.

В настоящей работе представлена общая теория объективных тензорных процессов классической механики, включая классическую механику сплошной среды. Введены понятия объективных тензоров различных рангов, типов объективности, включая типы Ильюшина–Хилла (материально ориентированные тензоры) и Нолла–Трусделла (пространственно ориентированные тензоры) [40]. Введены понятия простых тензорных аналогов механических характеристик одного ранга и разных типов, понятия простых коммутативных диаграмм объективных тензоров. Подробно рассмотрены диаграммы тензоров второго ранга, наиболее часто используемых в механике деформируемых сред.

Среди отображений, связывающих тензорные процессы различных рангов и типов объективности, выделены отображения, не зависящие от системы отсчета. Это фундаментальное свойство, присущее отображениям, связывающим тензорные процессы в определяющих соотношениях механических свойств тел, включая свойства сопротивления деформированию. Установлена теорема о необходимых и достаточных условиях независимости отображений от системы отсчета. Теорема накладывает наименьшие ограничения (лишь требование инвариантности относительно сдвига временной переменной) на отображения, связывающие материально ориентированные тензорные процессы, – отображения типа Ильюшина.

Для двух произвольных диаграмм объективных тензорных процессов (вообще говоря, разных рангов) рассмотрен полный набор (пакет) родственных друг другу отображений (кондукторов) всевозможных аналогов одной диаграммы во всевозможные аналоги другой диаграммы – пакет кондукторов, или отображение диаграмм. Показано, что все кондукторы пакета независимы от системы отсчета лишь одновременно (вместе с порождающим отображением – индуктором). Индуктор типа Ильюшина порождает пакет кондукторов наиболее общего вида.

Для совпадающих диаграмм (одного ранга с одинаковыми переплетающими операторами) введено обобщающее понятие объективных производных на основе индуктора типа Ильюшина – материальной производной материально ориентированного тензора. Объективные производные составляют подпакет кондукторов, связывающих тензоры одинаковых (всевозможных) рангов и типов объективности.

Приведены общие формулы объективных производных скаляров, векторов и тензоров второго ранга, представленные в лагранжевом и эйлеровом видах. Показано, что этими формулами охватываются все известные производные Зарембы–Яуманна, Олдройда, Коттер–Ривлина, Трусделла, Хилла, Седова, Динса [48–56], включая производные, использованные в работах [57–64], а также семейство производных Гордона–Шоуолтера [65].

В качестве оператора, обратного к объективной производной, построен оператор объективного интегрирования.

Возможности эффективного применения представленных в настоящей работе объективных производных и объективных интегралов проиллюстрированы на примерах подходов к построению различных моделей сред при конечных деформациях [66–84].

1. Тензорные характеристики механических процессов. *1.1. Характеристики деформаций.* При лагранжевом (отсчетном, относительном) описании движения сплошной среды ($\mathbf{x}$ и x — положения точки тела в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно, t — время)

$$x = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1.1}$$

основной исходной характеристикой деформаций в смысле Коши является градиент (аффинор) деформации

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{1.2}$$

имеющий в силу невырожденности однозначные правое и левое полярные разложения

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Q} \tag{1.3}$$

с ортогональным тензором $\mathbf{Q}$, называемым тензором полярного поворота (полярной ориентации), и симметричными положительно определенными тензорами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, называемыми правым и левым тензорами растяжений (чистой деформации), связанными очевидным тождеством

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \tag{1.4}$$

Одномерные собственные подпространства тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называют главными правыми и левыми осями деформаций соответственно.

В подходе Коши–Грина применяются мера деформаций Коши $\mathbf{C}$ и тензор деформаций Грина $\mathscr{E}$, определяемые формулами

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{X}^2, \quad \mathscr{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{1.5}$$

а в подходе Коши–Альманси — мера Альманси $\mathbf{B}$ и тензор Альманси $\mathbf{E}$, задаваемые равенствами

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{Y}^{-2}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}) \tag{1.6}$$

Равенства (1.5) показывают соосность тензоров $\mathbf{X}$, $\mathbf{C}$ и $\mathscr{E}$, а равенства (1.6) — соосность тензоров $\mathbf{Y}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$.

В лагранжевых базисах $\{\mathbf{e}_{0i}\}$, $\{\mathbf{e}_0^i\}$ отсчетной и $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}^i\}$ актуальной конфигураций частицы тела справедливы представления (суммирование по правилу Эйнштейна)

$$\begin{gathered}\mathbf{A} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_0^i, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}_0^i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{e}_{0i} \otimes \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_{0i} \\ \mathbf{C} = \mathrm{g}_{ij}\mathbf{e}_0^i \otimes \mathbf{e}_0^j, \quad \mathscr{E} = \frac{1}{2}(\mathrm{g}_{ij} - \mathrm{g}_{0ij})\mathbf{e}_0^i \otimes \mathbf{e}_0^j \\ \mathbf{B} = \mathrm{g}_{0ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathrm{g}_{ij} - \mathrm{g}_{0ij})\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Совпадение компонент тензоров $\mathscr{E}$ и $\mathbf{E}$ (в разных базисах!) равносильно тождеству

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathscr{E} \cdot \mathbf{A}^{-1} \tag{1.8}$$

Подобно построениям (1.5), (1.6) на основе обратных к мерам деформации $\mathbf{C}$ Коши и $\mathbf{B}$ Альманси тензоров $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}$ (тензор $\mathbf{F}$ называется мерой деформаций Фингера [16]) могут быть рассмотрены “взаимные” к $\mathscr{E}$ и $\mathbf{E}$ тензоры деформаций $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{E}_{\mathrm{II}}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \equiv \mathbf{X}^{-2}, \quad \mathscr{E}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) \\ \mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \equiv \mathbf{Y}^2 \equiv \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{E}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{I})\end{gathered} \tag{1.9}$$

аналогично (1.8) удовлетворяющие тождеству

$$\mathbf{E}_{\mathrm{II}} = \mathbf{A} \cdot \mathscr{E}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.10}$$

Скорости деформаций характеризуются тензором скоростей деформаций $\mathbf{V}$ ($\mathbf{v}$ – поле скоростей движения точек среды)

$$\mathbf{V} = \operatorname{sym} \nabla_x \mathbf{v} \tag{1.11}$$

для которого справедливы тождественные представления

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \operatorname{sym}(\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{Q} \cdot \operatorname{sym}(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}^{-1}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \\ &= \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathscr{E}} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathscr{E}}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1.12}$$

1.2. Тензоры напряжений. В классической механике сплошной среды используется тензор истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$, отвечающий основной формуле теории напряжений

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \mathbf{n} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ – вектор напряжения на элементарной площадке, $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали этой площадки.

Применяются также тензоры условных напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода $\mathbf{\Pi}$, второго рода $\mathbf{P}$ и тензор напряжений Ильюшина ("энергетический" тензор напряжений) Σ, определенные формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &\coloneqq J\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \\ \mathbf{P} &\coloneqq J\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \equiv \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{\Sigma} &\coloneqq \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}} \equiv J^{-1}\mathbf{P} \end{aligned} \tag{1.14}$$

2. Объективные тензоры. *2.1. Замена системы отсчета. Объективные тензоры. Типы объективности.* В качестве пространства конфигураций тел и их точек в механике сплошной среды принимается трехмерное аффинное евклидово пространство $\mathscr{X}$ с точками $\boldsymbol{x}$, а в качестве пространства моментов времени – одномерное аффинное пространство $\mathscr{T}$ с точками (моментами времени) t ($\mathscr{T}$ можно отождествить с множеством действительных чисел R и считать t числом). Пара переменных ($\mathbf{x}$, t) носит название эйлеровых переменных. Присоединенное векторное (трехмерное евклидово) пространство $\mathscr{V}$ пространства $\mathscr{X}$ служит для изображения векторных величин (векторов скорости, ускорения, силы и т.п.); тензорные характеристики (включая тензоры деформаций, напряжений и др.) рассматриваются над векторным пространством $\mathscr{V}$.

Замена системы отсчета выражается следующей заменой "старых" эйлеровых переменных ($\mathbf{x}$, t) на "новые" ($\mathbf{x}_*, t_*$):

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_{0*}(t) + \mathfrak{Q}(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad t_* = t + a \tag{2.1}$$

где параметрами замены служат a – постоянный скаляр (физической размерности времени), $\boldsymbol{x}_0$ – постоянная точка трехмерного пространства $\mathscr{X}$, а также точечнозначная $\mathbf{x}_{0*}$ и тензорнозначная $\mathfrak{Q}$ функции времени t, причем $\mathfrak{Q}$ – ортогональный тензор над $\mathscr{V}$: $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{Q}^{\mathrm{T}}\mathfrak{Q} = \mathbf{I}$, т.е. $\mathfrak{Q}^{-1} = \mathfrak{Q}^{\mathrm{T}}$. Как правило, эти функции предполагаются не только непрерывными, но и необходимое число раз дифференцируемыми по t.

Будем для фиксированного материального объекта (точки тела $\mathbf{x}$, частицы или тела в целом) рассматривать скалярные φ, векторные $\mathbf{u}_{(0)}, \mathbf{u}_{(1)}$ и тензорные (второго ранга)

$\mathbf{L}_{(00)}, \mathbf{L}_{(10)}, \mathbf{L}_{(01)}, \mathbf{L}_{(11)}$ механические процессы, преобразующиеся при замене системы отсчета (2.1) по правилам

$$\begin{gathered}\varphi_* = \varphi, \quad \mathbf{u}_{(0)*} = \mathbf{u}_{(0)},\ \mathbf{u}_{(1)*} = \mathfrak{Q} \cdot \mathbf{u}_{(1)} \\ \mathbf{L}_{(00)*} = \mathbf{L}_{(00)}, \quad \mathbf{L}_{(10)*} = \mathfrak{Q} \cdot \mathbf{L}_{(10)} \\ \mathbf{L}_{(01)*} = \mathbf{L}_{(01)} \cdot \mathfrak{Q}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{L}_{(11)*} = \mathfrak{Q} \cdot \mathbf{L}_{(11)} \cdot \mathfrak{Q}^{\mathrm{T}}\end{gathered} \tag{2.2}$$

В пространствах $\mathscr{L}_m$ тензоров $\mathbf{L}_m$ более высоких рангов m также могут быть выделены множества тензоров, преобразующихся по формулам типа (2.2). Для набора $\mathfrak{A}_m = (\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_m)$ из m тензоров второго ранга $\mathscr{A}_i$ определим его действие в пространстве $\mathscr{L}_m$ как линейного оператора (эндоморфизма) формулами (для полиад и произвольных тензоров):

$$\mathfrak{A}_m \overset{m}{\cdot} (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_m) := (\mathscr{A}_1 \cdot \mathbf{v}_1) \otimes \ldots \otimes (\mathscr{A}_m \cdot \mathbf{v}_m) \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{A}_m \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_m := \left(\mathrm{T}_\sigma \left(\underset{m}{\overset{i=1}{\otimes}} \mathscr{A}_i \right) \right) \overset{m}{:} \mathbf{L}_m \tag{2.4}$$

где символом $\overset{m}{\cdot}$ обозначено определяемое здесь действие оператора $\mathfrak{A}_m$, символом $\overset{m}{:}$ обозначена обычная параллельная m-кратная свертка тензоров, а σ – подстановка набора чисел (1, 2, ..., $2m$) со значениями (1, m + 1, 2, m + 2, ..., m, $2m$) и T_σ – соответствующий ей оператор транспонирования [28–30, 42, 44]. Оператор $\mathfrak{A}_m$ с невырожденными тензорами $\mathscr{A}_i$ является автоморфизмом пространства $\mathscr{L}_m$.

Воспользуемся тензорной записью введенного в [42, 44] обобщенного представления групп в тензорах, являющегося обобщением классического представления [30]. Пусть $\mathrm{M}(\mathscr{V})$ – подгруппа группы $GL(\mathscr{V}) = \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ невырожденных тензоров второго ранга над (евклидовым) пространством $\mathscr{V}$, и представление φ: $G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ группы G в векторном пространстве $\mathscr{V}$ осуществляет эпиморфизм G на $\mathrm{M}(\mathscr{V})$. Обозначим через $\mathbf{k}_m = (\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \ldots, \mathrm{k}_m)$ двоичный мультииндекс длины m (числа k_i равны 0 или 1). Для $\mathbf{M} \in \mathrm{M}(\mathscr{V})$ примем $\mathbf{M}^1 = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичный тензор, и составим набор $\mathbf{M}^{\mathbf{k}_m} = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{k}_1}, \mathbf{M}^{\mathrm{k}_2}, \ldots, \mathbf{M}^{\mathrm{k}_m}\right)$. Подстановка набора $\mathbf{M}^{\mathbf{k}_m}$ в (2.3), (2.4) в качестве набора $\mathfrak{A}_m$ (то есть невырожденных тензоров $\mathbf{M}^{\mathrm{k}_i}$ качестве тензоров $\mathscr{A}_i$) показывает, что $\mathbf{M}^{\mathbf{k}_m}$ осуществляет по формулам (2.3), (2.4) автоморфизм пространства тензоров $\mathscr{L}_m$. Тем самым получаем, что представление φ группы G в векторном пространстве $\mathscr{V}$ порождает соответствующее представление $\varphi^{\mathbf{k}_m}$: $G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{L}_m)$ группы G в пространстве $\mathscr{L}_m$ тензоров $\mathbf{L}_m$ ранга m над $\mathscr{V}$, называемое обобщенным $\mathbf{k}_m$-представлением группы G в тензорах. Если $\mathrm{M}(\mathscr{V}) = \mathrm{O}(\mathscr{V})$ – ортогональная группа, то представление $\varphi^{\mathbf{k}_m}$ называется ортогональным $\mathbf{k}_m$-представлением.

Полагая в (2.3), (2.4) $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{Q}^{\mathbf{k}_m}$, где $\mathfrak{Q}$ – ортогональный тензор из (2.1), из множества $\mathscr{L}_m$ всех тензоров $\mathbf{L}_m$ ранга m над $\mathscr{V}$ выделим тензоры $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$, преобразующиеся подобно (2.2) по формулам автоморфизмов ортогонального $\mathbf{k}_m$-представления

$$\mathbf{L}_{\mathbf{k}_{m*}} = \mathfrak{Q}^{\mathbf{k}_m} \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m} \tag{2.5}$$

Определение 2.1. Назовем все механические тензорные процессы, подчиняющиеся какому-либо из правил вида (2.2), (2.5) объективными, а нижний двоичный мультииндекс $\mathbf{k}_m$ – типом объективности (для объективных скаляров отсутствие (мульти-) индекса формально рассматривается как пустой мультииндекс “( )”, показывающий нулевой ранг скаляра как тензора).

Примем $|\mathbf{k}_m| = \mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2 + \ldots + \mathrm{k}_m$ $(m \geq 1)$. Очевидно, что объективные тензоры с $|\mathbf{k}_m| = 0$, то есть тензоры типа (0), (00) и аналогичные тензоры более высокого ранга, являются тензорами типа Ильюшина–Хилла [45] (известны в литературе также как “лагранжевы” [21], или “инвариантные” [62]). Будем называть их также материально ориентированными, или материальными, или правыми. Объективные тензоры с $|\mathbf{k}_m| = m$, то есть тензоры типа (1), (11) и т.п., являются тензорами типа Нолла–Трусделла [45] (известны также как “не зависящие от системы отсчета” [3], или “эйлеровы” [21], или “индифферентные” [62]). Будем называть их пространственно ориентированными, или пространственными, или левыми. Остальные типы будем называть смешанными. Тип объективного тензора – его неизменный атрибут.

Нетрудно видеть, например, что векторы элементарных материальных волокон $\delta\mathbf{x}$, ориентированных материальных площадок $\delta\mathbf{S}_0$ и их нормалей $\mathbf{n}_0$ в отсчетной конфигурации являются объективными векторами типа (0), а соответствующие векторы $\delta\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{S}$ и $\mathbf{n}$ актуальной конфигурации – объективными типа (1). Меры и тензоры деформаций $\mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}, \mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ из (1.5), $(1.9)_1$, правый тензор растяжений $\mathbf{X}$ из (1.3), (1.4), а также тензоры напряжений $\mathbf{P}, \mathbf{\Sigma}$ из (1.14) суть объективные тензоры типа (00). Меры и тензоры деформаций $\mathbf{B}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_{\mathrm{II}}$ из (1.6), $(1.9)_2$, тензор $\mathbf{Y}$ из (1.3), (1.4), тензор скоростей деформаций $\mathbf{V}$ из (1.11), (1.12), а также тензор напряжений Коши $\mathbf{S}$ – объективные тензоры типа (11). Аффинор деформаций $\mathbf{A}$ из (1.2), (1.3), тензор полярного поворота Q из (1.2), (1.3) и тензор $\mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}$, а также тензор напряжений $\mathbf{\Pi}$ из (1.14) объективны типа (10), тензоры $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, а также $\mathbf{\Pi}^{\mathrm{T}}$ объективны типа (01).

2.2. Диаграммы. 2.2.1. Определение диаграмм. Родственные механические характеристики могут быть выражены объективными тензорами одного ранга и разных типов. Разнотипные родственные тензоры, как правило, связаны определенными взаимно однозначными (невырожденными) отображениями. Отразим это следующим формальным определением (для простоты ограничимся объективными векторами и тензорами второго ранга).

Определение 2.2. Объективные разных типов векторные характеристики $\mathbf{u}_{(0)}, \mathbf{u}_{(1)}$ по отношению друг к другу, а также объективные разных типов тензорные (второго ранга) характеристики $\mathbf{L}_{(00)}, \mathbf{L}_{(10)}, \mathbf{L}_{(01)}, \mathbf{L}_{(11)}$ по отношению друг к другу назовем простыми эквивалентными представлениями (простыми эквивалентами, простыми аналогами), если они связаны друг с другом попарно тождествами в виде отображений, составляющих коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}_{(1)} \arrow[dd, leftrightarrow] & & \mathscr{L}_{(11)} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\
& \mathscr{L}_{(10)} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathscr{L}_{(01)} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\mathscr{L}_{(0)} & & \mathscr{L}_{(00)} &
\end{tikzcd} \qquad (2.6)$$

где $\mathscr{L}_{(k)}(k = 0, 1)$ – линейное пространство всех (k)-объективных векторов ($\mathbf{u}_{(k)} \in \mathscr{L}_{(k)}$), $\mathscr{L}_{(k,l)}$ (k, l = 0, 1) – линейное пространство всех (k, l)-объективных тензоров ($\mathbf{L}_{(k,l)} \in \mathscr{L}_{(k,l)}$), а стрелками обозначены составляющие диаграмму отображения, выраженные формулами

$$\mathbf{u}_{(k')} = \mathscr{A}_{(k',k)}\mathbf{u}_{(k)}, \quad \mathbf{L}_{(k',l')} = \mathscr{A}_{1(k',k)}\mathbf{L}_{(k,l)}\mathscr{A}^{\mathrm{T}}_{2(l',l)} \tag{2.7}$$

(суммирование по k, l отсутствует) с невырожденными (k', k)-объективными тензорами $\mathscr{A}_{(k',k)}$ и $\mathscr{A}_{1(k',k)}, \mathscr{A}_{2(k',k)}$, связанными условиями (суммирование по повторяющимся индексам отсутствует)

$$\begin{gathered}\mathscr{A}_{(k,k)} \equiv \mathbf{I}, \quad \mathscr{A}_{(k,l)} \equiv \mathscr{A}^{-1}_{(l,k)} \\ \mathscr{A}_{i(k,k)} \equiv \mathbf{I}, \quad \mathscr{A}_{i(k,l)} \equiv \mathscr{A}^{-1}_{i(l,k)} \quad (i = 1,2; k,l = 0,1)\end{gathered} \tag{2.8}$$

Диаграммы (2.6) назовем простыми диаграммами, отображения (2.7) назовем переплетающими операторами, а тензоры (2.8) – переходными тензорами этих диаграмм.

Для диаграмм объективных тензоров ранга m примем в качестве переходных тензоров невырожденные (k'_i, k_i)-объективные тензоры второго ранга $\mathscr{A}_{i(k'_i,k_i)}$, удовлетворяющие условиям вида $(2.8)_2$ для $i = 1, 2, ..., m$. Положим в (2.3), (2.4) $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}_{i(k'_i,k_i)}$ и обозначим их набор вида $\mathfrak{A}_m$ через $\mathfrak{A}_{\mathbf{k}'_m\otimes\mathbf{k}_m}$ (где $\mathbf{k}'_m = (k'_1, k'_2, \ldots, k'_m)$ и $\mathbf{k}_m = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$). Тогда формула (2.4) с $\mathbf{L}_m = \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ определяет общий вид переплетающих операторов для объективных тензоров ранга m:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{k}'_m} = \mathfrak{A}_{\mathbf{k}'_m\otimes\mathbf{k}_m} \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m} \tag{2.9}$$

Класс простых диаграмм полностью исчерпывает все коммутативные диаграммы для векторных аналогов, класс простых диаграмм объективных тензоров второго ранга не исчерпывает множества всех коммутативных диаграмм. Тем не менее введенные классы простых диаграмм достаточно богаты для представления объективных векторных и тензорных характеристик второго ранга различными аналогами, включая аналоги типа Ильюшина–Хилла и Нолла–Труcделла [45].

2.2.2. Диаграммы тензоров второго ранга. Введем следующее определение, полезное для применения диаграмм объективных тензоров второго ранга.

Определение 2.3. Назовем простую диаграмму тензоров второго ранга, определяемую с помощью (2.2)–(2.4), квазисимметричной, если $\mathscr{A}_{2(10)} \equiv \alpha\mathscr{A}_{1(10)}$ с $\alpha \neq 0$, и симметричной, если при этом $\alpha \equiv 1$. Пару простых диаграмм, определяемых соответственно переходными тензорами $\mathscr{A}^{(1)}_{i(k,l)}$ и $\mathscr{A}^{(2)}_{i(k,l)}$ вида (2.4), назовем квазисопряженной (а сами диаграммы взаимно квазисопряженными), если $\mathscr{A}^{(2)}_{1(10)} \equiv \beta\mathscr{A}^{(1)-1\mathrm{T}}_{1(10)}$ и $\mathscr{A}^{(2)}_{2(10)} \equiv \gamma^{-1}\mathscr{A}^{(1)-1\mathrm{T}}_{2(10)}$ с $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, и сопряженной (диаграммы – взаимно сопряженными), если при этом $\beta \equiv \gamma = 1$.

Первая пара родственных названий в Определении 1.3 проистекает из того, что в любой квазисимметричной диаграмме материально и пространственно ориентированные аналоги симметричны лишь одновременно. Вторая пара названий соответствует тому, что для квазисопряженной пары диаграмм скалярные произведения (в классическом смысле двойной свертки $\mathbf{M} : \mathbf{L} \equiv \mathrm{tr}(\mathbf{ML}^{\mathrm{T}})$) однотипных аналогов этих диаграмм пропорциональны друг другу, а для сопряженной пары диаграмм – равны.

Заметим, что (квази-) сопряженные диаграммы (квази-) симметричны лишь одновременно.

Для каждого объективного тензора второго ранга орбита любой простой диаграммы (множество значений на этом тензоре всех композиций переплетающих операторов $(2.6)_2$) содержит ровно по одному элементу (включая данный тензор) в каждом из четырех пространств $\mathscr{L}_{(\mathrm{k,l})}$ (k, l = 0, 1), то есть ровно по одному аналогу каждого типа объективности.

Рассмотрим некоторые из таких диаграмм для тензорных (второго ранга) эквивалентных представлений (аналогов) объективных механических характеристик, используя для построения переходных тензоров (2.8) невырожденный (10)-объективный тензор – аффинор (градиент) деформации $\mathbf{A}$ из (1.2) и его (однозначные) полярные разложения (1.3) с ортогональным тензором полярного поворота $\mathbf{Q}$ и тензорами растяжений $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ [2, 3, 16].

Определим формулами $(2.6)_2$, (2.7), (2.8) некоторые из простых диаграмм для объективных тензоров второго ранга $\mathbf{L}_{(\mathrm{k,l})} \in \mathscr{L}_{(\mathrm{k,l})}$, задавая определенным образом переходные тензоры $\mathscr{A}_{i(\mathrm{k,l})}$ (i = 1, 2; k, l = 0, 1). Диаграмму Грина–Альманзи определим тензорами

$$\mathscr{A}_{i(10)} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}, \quad \mathscr{A}_{i(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2) \tag{2.10}$$

диаграмму Коши–Ильюшина – тензорами

$$\mathscr{A}_{i(10)} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{i(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1} \quad (i = 1,2) \tag{2.11}$$

Диаграммы Грина–Альманзи и Коши–Ильюшина обе симметричны и сопряжены друг другу.

Определим диаграмму Коши–Пиолы переходными тензорами

$$\begin{gathered} \mathscr{A}_{1(10)} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{1(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1} \\ \mathscr{A}_{2(10)} \equiv J^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{2(01)} \equiv J\mathbf{A}^{-1} \end{gathered} \tag{2.12}$$

диаграмму Коши–Хилла – тензорами

$$\begin{gathered} \mathscr{A}_{1(10)} \equiv J^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{1(01)} \equiv J\mathbf{A}^{-1} \\ \mathscr{A}_{2(10)} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{2(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1} \end{gathered} \tag{2.13}$$

Диаграммы Коши–Пиолы и Коши–Хилла обе квазисимметричны и квазисопряжены диаграмме Грина–Альманзи.

Определим коротационные диаграммы переходными тензорами

$$\mathscr{A}_{i(10)} \equiv \mathbf{QR}, \quad \mathscr{A}_{i(01)} \equiv \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2) \tag{2.14}$$

в частности, нейтральную диаграмму ($\mathbf{R} \equiv \mathbf{I}$) – тензорами

$$\mathscr{A}_{i(10)} \equiv \mathbf{Q}, \quad \mathscr{A}_{i(01)} \equiv \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2) \tag{2.15}$$

Здесь всюду $\mathbf{A}$ – аффинор деформации, $\mathbf{Q}$ – тензор полярного поворота, $J \equiv |\det\mathbf{A}|$, $\mathbf{R}$ – произвольно заданный ортогональный (00)-объективный тензор.

Все коротационные диаграммы, включая нейтральную, симметричны и самосопряжены.

Нетрудно проследить [1–3, 16], что диаграмма Грина–Альманзи (2.10) связывает в качестве аналогов материально и пространственно ориентированные тензоры деформаций Грина $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathscr{E}$ и Альманзи $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{E}$, а также новые тензоры смешанных типов объективности, характеризующие деформацию: $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}) \equiv \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{-1}) \equiv \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{-1})\mathbf{Q}$ и $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}^{-1}) \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{-1})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{-1})$. Эта же диаграмма связывает в качестве аналогов материальную производную тензора деформаций Грина $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \dot{\mathscr{E}}$ и пространственно ориентированный тензор скоростей деформаций $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{V}$, а также смешанных типов тензоры $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{VA} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}\dot{\mathscr{E}} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{X}^{-1}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X} + \dot{\mathbf{X}})$ и $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} \equiv \equiv \dot{\mathscr{E}}\mathbf{A}^{-1} \equiv \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, характеризующие скорость деформации. Ее аналогами являются также тензоры $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{C} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, и тензоры $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}$, $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1}$.

Диаграмма Коши—Ильюшина (2.11) связывает в качестве аналогов пространственно и материально ориентированные тензоры истинных напряжений Коши $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{S}$ и условных напряжений Ильюшина $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{\Sigma}$, тензоры деформаций $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{E}_{\mathrm{II}}$, материальную производную тензора деформаций $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \dot{\mathscr{E}}_{\mathrm{II}}$ и тензор скоростей деформаций $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{V}$, а также тензоры $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}$, $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1}$ и тензоры $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{I}$, $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{F}$, $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Диаграммой Коши—Пиолы (2.12) связаны в качестве аналогов, например, тензор истинных напряжений Коши $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{S}$, первый и второй тензоры условных напряжений Пиолы—Кирхгофа $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{\Pi}$, $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{P}$. В диаграмме Коши—Хилла (2.13) аналогами являются, например, тензор истинных напряжений Коши $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{S}$ и второй тензор условных напряжений Пиолы—Кирхгофа $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{P}$.

Аналогами нейтральной диаграммы вида (2.14) являются, например, тензоры, характеризующие деформацию, $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \mathbf{X}$, $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \mathbf{Y}$, $\mathbf{L}_{(10)} \equiv \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_{(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, а также логарифмические тензоры деформации – правый тензор $\mathbf{L}_{(00)} \equiv \ln\mathbf{X}$ и левый тензор Генки $\mathbf{L}_{(11)} \equiv \ln\mathbf{Y}$. Нетрудно видеть, что в нейтральной диаграмме материально и пространственно ориентированными аналогами являются тензоры $\mathbf{C}$ и $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{F}^{-1} \equiv \mathbf{B}$. Этой же диаграммой связаны и другие наборы аналогов, характеризующих деформации, скорости деформаций и напряжения.

Диаграммы, образованные перекрестным использованием тензоров вида (2.10) и (2.11), а именно

$$\mathscr{A}_{1(10)} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{1(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathscr{A}_{2(10)} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}, \quad \mathscr{A}_{2(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{2.16}$$

а также наоборот

$$\mathscr{A}_{1(10)} \equiv \mathbf{A}^{-1\mathrm{T}}, \quad \mathscr{A}_{1(01)} \equiv \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \mathscr{A}_{2(10)} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathscr{A}_{2(01)} \equiv \mathbf{A}^{-1} \tag{2.17}$$

назовем соответственно первой и второй “косыми” диаграммами Хилла—Седова.

Первая и вторая “косые” диаграммы Хилла—Седова не симметричны, но сопряжены друг другу.

Замечательным свойством обеих диаграмм (2.16), (2.17) является то, что они связывают в качестве материально и пространственно ориентированных аналогов тензоры деформаций перекрестно из “взаимных” пар тензоров $\mathscr{E}$, $\mathbf{E}$ и $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$, $\mathbf{E}_{\mathrm{II}}$ из (1.5), (1.6) и (1.9). А именно, для каждой из этих диаграмм в орбиту (набор аналогов) правого тензора $\mathscr{E}$ входит в качестве его левого аналога тензор $\mathbf{E}_{\text{II}}$, а в орбиту $\mathscr{E}_{\text{II}}$ – тензор $\mathbf{E}$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что для обеих этих диаграмм правым и левым аналогами являются меры деформации Коши $\mathbf{C}$ и Фингера $\mathbf{F}$, а также обратные к ним тензорные меры деформации $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{F}^{-1} \equiv \mathbf{B}$ – мера Альманзи.

Отметим специально, что для любых коротационных (2.14), включая нейтральную, а также для "косых" (2.16), (2.17) диаграмм объективных тензоров второго ранга их переплетающие операторы, связывающие пространства $\mathscr{L}_{(00)}$ и $\mathscr{L}_{(11)}$ материально и пространственно ориентированных тензоров, являются изоморфизмами $\mathscr{L}_{(00)}$ и $\mathscr{L}_{(11)}$ не только как линейных пространств, но и как линейных (некоммутативных) алгебр с единицей $\mathbf{I}$. Более того, для коротационных диаграмм такие изоморфизмы также сохраняют скалярное произведение, то есть являются изоморфизмами пространств $\mathscr{L}_{(00)}$ и $\mathscr{L}_{(11)}$ как евклидовых (с обычным скалярным умножением тензоров $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ – их двойной сверткой $\mathbf{M} : \mathbf{L} \equiv \operatorname{tr}(\mathbf{M}\mathbf{L}^{\mathrm{T}})$).

2.3. Объективные тензорные процессы. Интроспективы. Для различных тензорных процессов $\chi(\tau)$ – тензорнозначных функций времени, определенных на множестве моментов времени $\tau \in D(\chi) \subseteq \mathscr{T}$, введем по отношению к произвольному фиксированному моменту времени t (моменту наблюдения) следующее

Определение 2.4. Функции

$$\chi^t(s) \equiv \chi(t-s), \quad (t-s) \in D(\chi) \tag{2.18}$$

$$\chi^{t-}(s) \equiv \chi(t-s), \quad (t-s) \in D(\chi), \quad s \geq 0 \tag{2.19}$$

назовем соответственно t-историей и t-предысторией процесса $\chi(\tau)$, или интроспективами (вторую функцию также ретроспективой) процесса $\chi(\tau)$.

Очевидно, что задание процесса $\chi(\tau)$ на всей области определения $D(\chi)$ (или до момента t) эквивалентно заданию пары $(\psi(s), t)$, где $\psi(s) = \chi^t(s)$ (или пары $(\psi(s), t)$, где $\psi(s) = \chi^{t-}(s)$):

$$\chi(\tau) \approx (\chi^t(s), t), \quad \tau = t - s \in D(\chi) \tag{2.20}$$

$$\chi(\tau) \approx (\chi^{t-}(s), t), \quad \tau = t - s \in D(\chi), \quad \tau \leq t \quad (s \geq 0) \tag{2.21}$$

Подчеркнем, что с течением времени t (то есть с изменением момента наблюдения t) t-история и t-предыстория любого заданного процесса (как функции переменного s), вообще говоря, изменяются, иными словами, взгляд на историю и предысторию процесса, вообще говоря, меняется с моментом наблюдения t.

Для объективных механических процессов $\chi(\tau)$ отметим важное свойство их интроспектив в отношении действия подгруппы G_a временных сдвигов (сдвигов на временной интервал a) группы G замен системы отсчета (2.1), а именно: интроспективы любого объективного процесса $\chi(\tau)$ инвариантны относительно действия подгруппы G_a, то есть имеют место тождества по s

$$\chi_a^{t_a}(s) \equiv \chi^t(s), \quad \chi_a^{t_a-}(s) \equiv \chi^{t-}(s) \tag{2.22}$$

при любых $a \in R$ $(t_a = t + a, \chi_a(\xi) \equiv \chi(\xi - a))$.

Теорема 2.1. Действие всей группы G замен системы отсчета на $\mathbf{k}_m$-объективные механические тензорные процессы $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ из (2.5) в терминах парных представлений (2.20), (2.21) через интроспективы (2.18), (2.19) выражается формулой

$$(\mathbf{L}^{t_*}_{\mathbf{k}_{m*}}(s), t_*) = (\mathfrak{Q}^{t\mathbf{k}_m}(s) \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}^{t}_{\mathbf{k}_m}(s), t+a) \tag{2.23}$$

3. Отображения объективных тензорных процессов. *3.1. Отображения общего вида. 3.1.1. Изотропные отображения. Обобщенная изотропия типа* $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$. Введем некоторые специальные классы отображений тензоров и тензорных процессов. Пусть $\mathcal{F}$ – отображение тензоров $\mathbf{L}_m \in \mathcal{L}_m$ ранга m над n-мерным векторным пространством $\mathcal{V}$ в тензоры $\mathbf{L}_{m'} \in \mathcal{L}_{m'}$ ранга m' над $\mathcal{V}$, т.е. тензорнозначная функция тензорного аргумента:

$$\mathcal{F}: \mathcal{L}_m \to \mathcal{L}_{m'}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{L}_m) = \mathbf{L}_{m'} \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Назовем функцию $\mathcal{F}$ из (3.1) *изотропной типа* $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$, или $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$-*изотропной*, если для произвольных тензоров-аргументов $\mathbf{L}_m \in \mathcal{L}_m$ и произвольного ортогонального тензора-константы $\mathbf{Q}_0$ выполнено соотношение

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}_0^{\mathbf{k}_m} \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_m) = \mathbf{Q}_0^{\mathbf{l}_{m'}} \overset{m'}{\cdot} \mathcal{F}(\mathbf{L}_m) \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь отображения тензорных процессов в тензоры:

$$\mathcal{F}[\mathbf{L}_m(t)]_{t\in\mathbf{R}} = \mathbf{L}_{m'} \tag{3.3}$$

Определение 3.2. Назовем отображение $\mathcal{F}$ из (3.3) t_0-*изотропным типа* $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$, если для произвольного аргумента $\mathbf{L}_m(t)$ и произвольного ортогонального тензора-процесса $\mathbf{Q}(t)$ $(t \in R)$ выполнено соотношение

$$\mathcal{F}[\mathbf{Q}^{\mathbf{k}_m}(t) \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_m(t)]_{t\in R} = \mathbf{Q}^{\mathbf{l}_{m'}}(t_0) \overset{m'}{\cdot} \mathcal{F}[\mathbf{L}_m(t)]_{t\in R} \tag{3.4}$$

Если (3.4) выполнено лишь для произвольного ортогонального тензора-константы $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{Q}_0 \equiv \mathrm{const}$, то отображение $\mathcal{F}$ будем подобно (3.2) называть просто *изотропным типа* $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$.

3.1.2. Отображения, связывающие объективные тензорные процессы. Независимость отображений от системы отсчета. Для множества Γ механических тензорных процессов $\boldsymbol{\gamma}$ рассмотрим отображение $\mathcal{F}$ этого множества в множество Π механических тензорных процессов $\boldsymbol{\pi}$ (процессы определены на всей временной оси $\mathcal{T} = R$ моментов времени):

$$\mathcal{F}: \Gamma \to \Pi, \quad \mathcal{F}[\boldsymbol{\gamma}(\tau)]^{t}_{\tau\in R} = \boldsymbol{\pi}(t) \tag{3.5}$$

Пусть $\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\pi}_*, \Gamma_*, \Pi_*$ – образы $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\pi}, \Gamma, \Pi$ при переходе к новой системе отсчета (2.1). Заданное в новой системе отсчета отображение $\mathcal{F}_*$ множества Γ_* в множество Π_* будем называть *физически тем же*, что и отображение $\mathcal{F}$ в старой системе отсчета, если оно связывает физически те же процессы:

$$\mathcal{F}_*: \Gamma_* \to \Pi_*, \quad \mathcal{F}_*[\boldsymbol{\gamma}_*(\tau_*)]^{t^*}_{\tau^*\in \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\pi}_*(t_*) \tag{3.6}$$

(то есть уравнения (3.5) и (3.6) физически эквивалентны), или, иначе, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, bend left, "g"] & \Pi \arrow[d, bend left, "g"] \\ \Gamma_* \arrow[r, "\mathscr{F}_*"] \arrow[u, bend left, "g^{-1}"] & \Pi_* \arrow[u, bend left, "g^{-1}"] \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

коммутативна. Вертикальными стрелками в (3.7) обозначены операторы преобразования процессов $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ и $\boldsymbol{\pi} \in \Pi$ в процессы $\boldsymbol{\gamma}_* \in \Gamma_*$ и $\boldsymbol{\pi}_* \in \Pi_*$ при переходе к новой системе отсчета (2.1), т.е. операторы действия элементов g (и обратных к ним элементов g^{-1}) группы G замен системы отсчета на рассматриваемых процессах.

Будем считать аргументы $\boldsymbol{\gamma}$ и образы $\boldsymbol{\pi}$ объективными тензорами (2.5) определенных типов $\mathbf{k}_m$ и $\mathbf{l}_{m'}$ (и рангов m и m') соответственно:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m} \in \Gamma \subset \mathscr{L}_{\mathbf{k}_m}, \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{L}_{\mathbf{l}_{m'}} \in \Pi \subset \mathscr{L}_{\mathbf{l}_{m'}}. \tag{3.8}$$

Введем следующее фундаментальное понятие.

Определение 3.3. Отображение $\mathscr{F}$ вида (3.5), (3.6), удовлетворяющее (3.7) с $\Gamma_* = \Gamma$ и $\Pi_* = \Pi$, назовем *независимым от системы отсчета*, если при свободном действии группы G выполнено математическое тождество

$$\mathscr{F}_* \equiv \mathscr{F} \tag{3.9}$$

Для равенств (3.5), (3.6) тождество (3.9) означает соответственно следующие эквиваленции

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \mathscr{F}[\boldsymbol{\gamma}(\tau)]^t_{\tau\in R} \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi}_*(t_*) = \mathscr{F}[\boldsymbol{\gamma}_*(\tau_*)]^{t_*}_{\tau\in R} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \mathscr{F}([\boldsymbol{\gamma}^t(s)]_{s\in R}; t) \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi}_*(t_*) = \mathscr{F}([\boldsymbol{\gamma}^{t_*}_*(s)]_{s\in R}; t_*) \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. Отображение $\mathscr{F}$ вида (3.5) объективных тензоров (3.8) не зависит от системы отсчета тогда и только тогда, когда выполнены одновременно условия:

1. отображение $\mathscr{F}$ инвариантно относительно сдвига временной переменной:

$$\mathscr{F}[\boldsymbol{\gamma}(\tau - a)]^t_{\tau\in R} = \mathscr{F}[\boldsymbol{\gamma}(\tau)]^{t-a}_{\tau\in R} \quad \forall a = \mathrm{const} \tag{3.12}$$

2. отображение $\mathscr{F}$ является t-изотропным типа $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$, то есть для любого аргумента $\boldsymbol{\gamma}(\tau) \equiv \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\tau)$ и произвольного ортогонального тензорного процесса $\mathbf{Q}(\tau)$ выполнено согласно (3.4) тождество

$$\mathscr{F}[\mathbf{Q}^{\mathbf{k}_m}(\tau) \overset{m}{\cdot} \boldsymbol{\gamma}(\tau)]^t_{\tau\in R} = \mathbf{Q}^{\mathbf{l}_{m'}}(t) \overset{m'}{\cdot} \mathscr{F}[\boldsymbol{\gamma}(\tau)]^t_{\tau\in R} \tag{3.13}$$

Теорема 3.1. Вообще говоря, накладывает на вид отображения $\mathscr{F}$ специальные ограничения, зависящие от типов объективности тензоров $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\pi}$. Соответствующий общий вид отображения называют его общей приведенной формой.

3.1.3. Примеры независимых от системы отсчета отображений. В качестве примеров рассмотрим независимые от системы отсчета отображения, связывающие (мгновенные) значения объективных тензоров второго ранга $\mathbf{U} \in \mathscr{L}_{\mathbf{k}_2}$ и $\mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{\mathbf{l}_2}$ как функция (первое условие теоремы выполнено)

$$\mathbf{Z} = \mathscr{F}(\mathbf{U}) \tag{3.14}$$

Соответственно возможным типам объективности $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{l}_2$ тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{Z}$ (типы (00) или (01), или (10), или (11)) существуют 16 различных типов связей вида (3.14).

Пример 1. Если $\mathbf{U}, \mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{(00)}$, т.е. оба тензора $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$ материально ориентированы, то отображение (3.14) согласно *Теореме 3.1* является (00;00)-объективным и имеет общий вид (теорема не накладывает ограничений).

Пример 2. Если $\mathbf{U} \in \mathscr{L}_{(10)}, \mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{(00)}$, то (3.14) (10;00)-объективно. Его общая приведенная форма имеет вид (с произвольной функцией $\mathbf{f}$)

$$\mathscr{F}(\mathbf{U}) \equiv \boldsymbol{f}(\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}) \tag{3.15}$$

выражающий связь тензора $\mathbf{Z}$ лишь с неотрицательно определенной симметричной тензорной (второго ранга) комбинацией $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}$.

Случай $\mathbf{U} \in \mathscr{L}_{(01)}, \mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{(00)}$ аналогичен этому.

Пример 3. Если $\mathbf{U} \in \mathscr{L}_{(10)}, \mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{(11)}$, т.е. $\mathbf{U}$ – объективный тензор смешанного типа, а $\mathbf{Z}$ – пространственного типа, то (3.14) (10;11)-объективно и имеет приведенную форму вида

$$\mathscr{F}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{U}} \cdot \boldsymbol{f}(\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \tag{3.16}$$

где $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ – ортогональная часть полярного разложения тензора $\mathbf{U}$, а $\mathbf{f}$ – произвольная тензорнозначная функция симметричного неотрицательно определенного тензорного аргумента со значениями, обеспечивающими инвариантность правой части (3.16) относительно замены $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ в рамках неоднозначности полярного разложения.

Случай $\mathbf{U} \in \mathscr{L}_{(01)}, \mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{(11)}$ аналогичен рассмотренному здесь.

Пример 4. Пусть $\mathbf{U}, \mathbf{Z} \in \mathscr{L}_{(11)}$ (оба тензора $\mathbf{U}$ и $\mathbf{Z}$ пространственно ориентированы). Тогда для (3.14) выполнено свойство изотропии типа (11; 11), совпадающее с классическим. Его приведенная форма известна для случая, когда $\mathscr{F}$ – аналитическая функция произвольного тензорного аргумента $\mathbf{U}$ или когда аргумент $\mathbf{U}$ – симметричный тензор [16]. Эта форма имеет вид

$$\mathscr{F}(\mathbf{U}) \equiv f_0\mathbf{I} + f_1\mathbf{U} + f_2\mathbf{U}^2 \tag{3.17}$$

где f_0, f_1, f_2 – скалярнозначные функции совокупности $\mathrm{Inv}(\mathbf{U})$ собственных скалярных инвариантов тензора-аргумента $\mathbf{U}$.

Применительно к конкретным моделям механики сплошной среды рассмотренные здесь случаи связей тензоров второго ранга различных типов объективности могут рассматриваться как формы определяющих соотношений сред. Так, в Примере 1, рассматривая $\mathbf{U}$ как тензор деформаций Грина $\mathscr{E}$, а $\mathbf{Z}$ как тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода $\mathbf{P}$ или как тензор напряжений Ильюшина $\mathbf{\Sigma}$, получаем, что (3.14) определяет по Ильюшину [2, 20] класс произвольных упругих материалов (вообще говоря, не линейных и не изотропных). К этому же результату приводит Пример 2, если положить в качестве $\mathbf{U}$ аффинор (градиент) деформации $\mathbf{A}$, а в качестве $\mathbf{Z}$ – тензор $\mathbf{P}$ или $\mathbf{\Sigma}$. Полагая в Примере 3 $\mathbf{U} \equiv \mathbf{A}$ – аффинор деформации и $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{S}$ – тензор напряжений Коши $\mathbf{S}$, получаем, что (3.14) определяет по Ноллу–Трусделлу [3, 13] тот же класс произвольных упругих материалов и имеет приведенную форму (3.16). В Примере 4, полагая $\mathbf{U} \equiv \mathbf{E}$ – тензор деформаций Альманзи и $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{S}$, получаем, что соотношение (3.14) определяет класс изотропных упругих материалов [3, 16] и имеет приведенную форму (3.17); в этом же случае, полагая $\mathbf{U} \equiv \mathbf{V}$ – тензор скоростей деформаций и $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{S}$, получаем, что связь (3.14) с приведенной формой (3.17) задает тензор вязких напряжений класса нелинейно вязких жидкостей с инфинитезимальной памятью первого порядка [3, 18].

Подобные примеры [40, 41, 43, 45] иллюстрируют существенное значение учета типов объективности тензоров в определяющих соотношениях сопротивления материалов деформированию.

3.2. Переплетения отображений. Отображения диаграмм. Коммутативность простых диаграмм, обеспечивающая для каждого объективного тензорного процесса типа $\mathbf{k}_m$ и типа $\mathbf{l}_{m'}$ единственность его аналога любого другого типа (и того же ранга), естественным образом индуцирует (порождает) для каждого конкретного отображения $\mathcal{F} : \mathcal{L}_{\mathbf{k}_m} \to \mathcal{L}_{\mathbf{l}_{m'}}$ единственную совокупность $2^{m+m'}$ отображений $\mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}_{(\mathbf{k}'_m,\mathbf{l}'_{m'})} : \mathcal{L}_{\mathbf{k}'_m} \to \mathcal{L}_{\mathbf{l}'_{m'}}$, связывающих всевозможные аналоги аргумента (ранга m) и образа (ранга m') исходного отображения $\mathcal{F}$, и задаваемых формулой

$$\mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}_{(\mathbf{k}'_m,\mathbf{l}'_{m'})}[\mathbf{L}_{\mathbf{k}'_m}] \equiv \mathfrak{A}^{(2)}_{\mathbf{l}'_{m'}\otimes\mathbf{l}_{m'}} \overset{\mathbf{m}'}{\cdot} \mathcal{F}[\mathfrak{A}^{(1)}_{\mathbf{k}_m\otimes\mathbf{k}'_m} \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}'_m}] \tag{3.18}$$

где использованы обозначения из (2.3), (2.4) и (2.9), причем набор $\mathfrak{A}^{(1)}_{\mathbf{k}_m\otimes\mathbf{k}'_m}$, содержащий m тензоров, составлен из числа $4m$ невырожденных тензоров второго ранга $\mathcal{A}^{(1)}_{i(\mathrm{k}_i,\mathrm{k}'_i)}$ вида (2.8) ($i = 1,2,\ldots,m$; $\mathrm{k}_i,\mathrm{k}'_i = 0,1$) – переходных тензоров диаграммы переплетений для объективных тензоров ранга m (тензоров-аргументов), набор $\mathfrak{A}^{(2)}_{\mathbf{l}'_{m'}\otimes\mathbf{l}_{m'}}$, включающий m' тензоров, составлен из числа $4m'$ тензоров второго ранга $\mathcal{A}^{(2)}_{j(\mathrm{l}_j,\mathrm{l}'_j)}$ ($j = 1$, 2, ..., m'; $\mathrm{l}_j,\mathrm{l}'_j = 0,1$) – переходных тензоров диаграммы переплетений для объективных тензоров ранга m' (тензоров-образов); тензор $\mathbf{L}_{\mathbf{k}'_m} \equiv \mathfrak{A}^{(1)}_{\mathbf{k}'_m\otimes\mathbf{k}_m} \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ – аналог типа $\mathbf{k}'_m$ исходного тензора-аргумента $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$.

На основании (3.18) имеем также формулы

$$\mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}_{(\mathbf{k}'_m,\mathbf{l}'_{m'})}[\mathbf{L}_{\mathbf{k}'_m}] \equiv \mathfrak{A}^{(2)}_{\mathbf{l}'_{m'}\otimes\mathbf{l}''_{m'}} \overset{m'}{\cdot} \mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}_{(\mathbf{k}''_m,\mathbf{l}''_{m'})}[\mathfrak{A}^{(1)}_{\mathbf{k}''_m\otimes\mathbf{k}'_m} \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}'_m}] \tag{3.19}$$

включающие (3.18) как частный случай при $\mathbf{k}''_m = \mathbf{k}_\mathrm{m}, \mathbf{l}''_{m'} = \mathbf{l}_{m'}$.

Для удобства обращения к рассматриваемым здесь отображениям введем следующие краткие названия.

Определение 3.4. Для фиксированных простых диаграмм объективных тензорных процессов ранга m и ранга m' назовем фигурирующее в (3.18) порождающее отображение $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}_{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}$ индуктором, каждое из отображений $\mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}_{(\mathbf{k}'_m,\mathbf{l}'_{m'})}$ в (3.18), (3.19) (включая индуктор) – кондуктором, а совокупность $\mathcal{F}^{(\mathbf{k}_m,\mathbf{l}_{m'})}$ всех кондукторов – пакетом (или отображением диаграмм). Верхний спаренный мультииндекс $(\mathbf{k}_m, \mathbf{l}_{m'})$ кондуктора (пакета) назовем порождающим типом этого кондуктора (пакета), а нижний спаренный мультииндекс кондуктора $(\mathbf{k}'_m, \mathbf{l}'_{m'})$ – его собственным типом. Равенства (3.18), (3.19) будем называть переплетениями кондукторов.

Коммутативность диаграмм и формулы переплетений показывают, что пакет в целом является однозначным отображением множества наборов из 2^m аналогов объективных тензорных процессов ранга m в множество наборов из $2^{m'}$ аналогов объективных тензоров ранга m', а детально при этом каждый элемент первого набора отображается в каждый элемент второго набора тензоров некоторым (единственным) кондуктором этого пакета. Весь пакет и его кондукторы однозначно порождаются заданием диаграмм и индуктора (заметим, что порождающий и собственный типы индуктора, конечно, совпадают). Индуктор определяет свойства всех кондукторов и пакета в целом. В частности, благодаря коммутативности диаграмм, свойство взаимной однозначности индуктора (если он им обладает) переносится на каждый из кондукторов и пакет в целом. Влияние диаграмм аргументов и образов выражается зависимостью кондукторов от переходных тензоров этих диаграмм, т.е. параметризацией кондукторов этими тензорами. Во всяком пакете параметризованные кондукторы являются независимыми от системы отсчета отображениями лишь все одновременно.

3.3. Объективные производные и интегралы. 3.3.1. Объективные производные. Для отображений диаграмм объективных тензоров из соображений наибольшей широты (нестесненности) представления в общих приведенных формах независимых от системы отсчета отображений (кондукторов) в качестве порождающего отображения (индуктора) следует выбирать (00...0; 00...0)-индуктор – отображение материально ориентированных тензоров в материально ориентированные, т.е. отображение типа Ильюшина.

Это, в частности, относится и к дифференциальным операторам по времени, среди которых первостепенную важность имеют так называемые объективные производные по времени, отображающие объективные тензорные процессы в тензоры того же типа объективности (и, конечно, того же ранга), называемые также скоростями (протекания) исходного процесса. Здесь предполагается дифференцируемость по времени самих объективных тензоров – аргументов объективных производных – и переходных тензоров диаграммы (общей для аргументов и образов).

Определение 3.5. Объективной производной по времени типа $\mathbf{k}_m$ назовем отображение-кондуктор $D_{\mathbf{k}_m}$ вида $\mathcal{F}^{(00...0;00...0)}_{(\mathbf{k}_m,\mathbf{k}_m)}$ из (3.18) объективных тензорных процессов $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ типа $\mathbf{k}_m$ в объективные тензоры типа $\mathbf{k}_m$, порожденное для совпадающих диаграмм аргументов и образов ($\mathcal{A}^{(1)}_{i(10)} \equiv \mathcal{A}^{(2)}_{i(10)} =: \mathcal{A}_{(10)}$, $i = 1, 2, ..., m$) (00...0; 00...0)-индуктором $\mathcal{F} \equiv D_{(00...0)}$ вида полной ("материальной") производной по времени от материально ориентированного тензора $\mathbf{L}_{(00...0)}$ – материального аналога тензора $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ – в текущий момент t:

$$D_{(00...0)}[\mathbf{L}_{(00...0)}(\tau)]^t \equiv \frac{d}{d\tau}\mathbf{L}_{(00...0)}(\tau)\Big|_{\tau=t} \tag{3.20}$$

Заметим, что материальная производная по времени материальных тензоров не зависит от системы отсчета, так как инвариантна относительно сдвигов временной переменной. Поэтому и все объективные производные (рассматриваемые как параметризованные кондукторы) являются независимыми от системы отсчета отображениями объективных тензоров.

Для объективных скалярных, векторных и тензорных второго ранга процессов (2.2) в соответствии с *Определением 9* имеем:

$$
\begin{gathered}
D[\varphi]^t \equiv \dot{\varphi} \\
D_{(0)}[\mathbf{u}_{(0)}]^t \equiv \dot{\mathbf{u}}_{(0)}, \quad D_{(1)}[\mathbf{u}_{(1)}]^t \equiv \mathcal{A}_{(10)}(\mathcal{A}_{(10)}^{-1}\mathbf{u}_{(1)})^{\bullet} \\
D_{(00)}[\mathbf{L}_{(00)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(00)}, \quad D_{(10)}[\mathbf{L}_{(10)}]^t \equiv \mathcal{A}_{1(10)}(\mathcal{A}_{1(10)}^{-1}\mathbf{L}_{(10)})^{\bullet} \\
D_{(01)}[\mathbf{u}_{(01)}]^t \equiv (\mathbf{L}_{(10)}\mathcal{A}_{2(10)}^{-1T})^{\bullet}\mathcal{A}_{2(10)}^{T} \\
D_{(11)}[\mathbf{L}_{(11)}]^t \equiv \mathcal{A}_{1(10)}(\mathcal{A}_{1(10)}^{-1}\mathbf{L}_{(11)}\mathcal{A}_{2(10)}^{-1T})^{\bullet}\mathcal{A}_{2(10)}^{T}
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

Для $|\mathbf{k}_m| = 0$ объективные производные совпадают с обычными материальными производными, а для $|\mathbf{k}_m| > 0$ они суть дифференциальные операторы первого порядка по времени, параметризованные переходными тензорами диаграммы, и вид их целиком определяется значениями в момент t самих переходных тензоров $\mathcal{A}_{i(10)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и их первых полных производных по времени $\dot{\mathcal{A}}_{i(10)}$.

Другие (тождественные) представления $D_{\mathbf{k}_m}$ с $|\mathbf{k}_m| > 0$ могут оказаться удобными при эйлеровом способе описания. Для (3.21) они имеют вид:

$$
\begin{gathered}
D_{(1)}[\mathbf{u}_{(1)}]^t \equiv \dot{\mathbf{u}}_{(1)} - \mathfrak{D}\cdot\mathbf{u}_{(1)} \\
D_{(10)}[\mathbf{L}_{(10)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(10)} - \mathfrak{D}_1\cdot\mathbf{L}_{(10)} \\
D_{(01)}[\mathbf{L}_{(01)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(01)} - \mathbf{L}_{(01)}\cdot\mathfrak{D}_2^{\mathrm{T}} \\
D_{(11)}[\mathbf{L}_{(11)}]^t \equiv \dot{\mathbf{L}}_{(11)} - \mathfrak{D}_1\cdot\mathbf{L}_{(11)} - \mathbf{L}_{(11)}\cdot\mathfrak{D}_2^{\mathrm{T}}
\end{gathered}
\tag{3.22}
$$

где использованы обозначения

$$
\mathfrak{D} \equiv \dot{\mathcal{A}}_{(10)}\mathcal{A}_{(10)}^{-1}, \quad \mathfrak{D}_i \equiv \dot{\mathcal{A}}_{i(10)}\mathcal{A}_{i(10)}^{-1} \quad (i = 1, 2)
\tag{3.23}
$$

Введенное здесь понятие объективной производной существенно обобщает известные понятия объективных производных, относящиеся в большинстве своем к пространственно ориентированным тензорам второго ранга (см., например, [2, 16–55]). Так, известные объективные производные пространственно ориентированных тензоров Коттер–Ривлина [51], Олдройда [50] и Трусделла [52] суть не что иное как производная $D_{(11)}[\,\cdot\,]^t$ соответственно в диаграммах Грина–Альманзи (2.10), Коши–Ильюшина (2.11) и Коши–Пиолы (2.12) (либо в последнем случае также в диаграмме Коши–Хилла (2.13)). Производная Хилла [55] – не что иное как производная $D_{(10)}[\,\cdot\,]^t$ тензоров смешанного вида объективности (10) в диаграмме Коши–Хилла. Нейтральная производная [35, 56, 62, 63] – это производная $D_{(11)}[\,\cdot\,]^t$ в нейтральной диаграмме (2.15).

Любая объективная коротационная производная пространственно ориентированных тензоров [36, 37], включая производную Яуманна [48, 49], – производная $D_{(11)}[\,\cdot\,]^t$ в соответствующей коротационной диаграмме (2.14).

“Косые” производные Седова [53, 54] – это производная $D_{(11)}[\,\cdot\,]^t$ в “косых” диаграммах (2.16), (2.17).

Все объективные производные $D_{\mathbf{k}_m}$ являются линейными в отношении основного аргумента $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ дифференциальными операторами. Заметим, однако, что такие привычные для обычных производных (и сохраняющиеся, конечно, для случая $|\mathbf{k}_m| = 0$) правила, как формула Ньютона–Лейбница и формула дифференцирования обратного тензора (для алгебры тензоров второго ранга), коммутативность с операцией транспонирования, вообще говоря, не имеют места для $D_{\mathbf{k}_m}$ в случаях $|\mathbf{k}_m| > 0$, в том числе даже для $D_{(11)}$. Широкий класс объективных производных $D_{(11)}$ (производные конвективно-коротационного типа) изучен в отношении указанных правил и способов интегрирования этих производных по времени [37]. Здесь отметим лишь, что для $D_{(11)}$ все указанные правила в их обычной формулировке имеют место в точности в случае коротационных диаграмм (2.14), т.е. в точности для производных $D_{(11)}$ коротационного типа.

3.3.2. Объективное интегрирование. В [37] для пространственно ориентированных тензоров второго ранга выведена формула интегрирования объективных производных $D_{(11)}$. Обобщением ее является формула интегрирования по времени объективной производной $D_{\mathbf{k}_m}$:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t) = \mathfrak{A}_{\mathbf{k}_m\otimes(00\ldots0)}(\mathbf{x},t) \overset{m}{\cdot} \\ \overset{m}{\cdot}\left(\int_{t_0}^{t}\mathfrak{A}_{(00\ldots0)\otimes\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau) \overset{m}{\cdot} D_{\mathbf{k}_m}[\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau')]^{\tau}d\tau + \right. \\ \left. + \mathfrak{A}_{(00\ldots0)\otimes\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t_0) \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t_0)\right) \tag{3.24}$$

При этом, если производная $D_{\mathbf{k}_m}$ задана в виде (3.22) или подобном, то для реализации формулы (3.24) требуется предварительное интегрирование (решение относительно $\mathscr{A}_{i(10)}$) формул (3.23) с известными $\mathscr{D}_i$. Формула этого последнего интегрирования имеет вид

$$\mathscr{A}_{i(10)}(\mathbf{x},t) = \mathrm{T}^{+}\exp\left(\int_{\mathrm{t}_0}^{t}\mathscr{D}_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\right)\cdot\mathscr{A}_{i(10)}(\mathbf{x},t_0) \tag{3.25}$$

где использовано понятие хронологической экспоненты [22]. Полезные тождества для хронологических экспонент выведены в [37].

Выполнение формул (3.24) для объективных производных позволяет ввести

Определение 3.6. Объективным интегралом по времени типа $\mathbf{k}_m$ (или $\mathbf{k}_m$-интегралом) на физическом промежутке времени $\tau \in [t_0, t]$ от объективного тензорного процесса $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$ типа $\mathbf{k}_m$ назовем отображение этого процесса в объективный тензор того же типа $\mathbf{k}_m$, задаваемое формулой

$$^{\mathrm{Obj}}\int_{t_0}^{t}\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau)d\tau := \\ := \mathfrak{A}_{\mathbf{k}_m\otimes(00\ldots0)}(\mathbf{x},t) \overset{m}{\cdot} \int_{t_0}^{t}\mathfrak{A}_{(00\ldots0)\otimes\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau) \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{3.26}$$

Подобно объективным производным $\mathbf{k}_m$-интегралы являются простейшими интегральными операторами в множестве процессов в $\mathscr{L}_{\mathbf{k}_m}$, материально порожденными (как кондукторы в данной диаграмме переплетений) обычным оператором интегрирования (как индуктором) материально ориентированного аналога $\mathbf{L}_{\underbrace{(0\,0\ldots0)}_{m}}$ объективного тензора $\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}$.

Связь $\mathbf{k}_m$-интеграла (3.26) с объективной производной $D_{\mathbf{k}_m}$ выражается тождествами

$$D_{\mathbf{k}_m}\left[{}^{\mathrm{Obj}}\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau')d\tau'\right]^t \equiv \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t)$$

$$^{\mathrm{Obj}}\int_{t_0}^{t} D_{\mathbf{k}_m}[\mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},\tau')]^{\tau}d\tau \equiv \tag{3.27}$$

$$\equiv \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t) - \mathfrak{A}_{\mathbf{k}_m\otimes(00\ldots0)}(\mathbf{x},t) \overset{m}{\cdot} \mathfrak{A}_{(00\ldots0)\otimes\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t_0) \overset{m}{\cdot} \mathbf{L}_{\mathbf{k}_m}(\mathbf{x},t_0)$$

второе из которых совпадает с (3.24). При необходимости для реализации (3.26), (3.27) могут быть применены формулы (3.25).

Аналогично введенным $\mathbf{k}_m$-интегралам могут быть построены более сложного вида объективные интегральные операторы по времени от объективных тензоров и рассмотрены соответствующие интегральные уравнения.

Подчеркнем, что понятия объективных производных и объективных интегралов (и обобщающих их операторов) позволяют исследование сложных интегро-дифференциальных связей между объективными тензорами различных типов (например, пространственных типов) свести с помощью алгебраических операций к исследованию обычных интегро-дифференциальных связей между материально ориентированными тензорами. Это касается и вопросов существования интегралов и производных, интегрируемости дифференциальных уравнений, разрешимости уравнений относительно каких-либо величин и т.п.

3.4. Приложения новых объективных производных. Распространенным способом построения определяющих соотношений сред при конечных деформациях является обобщение соотношений, известных при малых деформациях, путем замены в этих соотношениях тензоров напряжений и (малых) деформаций, и их (материальных) производных по времени новыми тензорными мерами напряжений и конечных деформаций, и их объективными производными. В 1960-м году в Москве на первом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике В. Прагер в своем докладе предупреждал исследователей от нерасчетливого использования в таких обобщениях известных к тому времени объективных производных, в первую очередь производной Яуманна. Немедленной реакцией Л.И. Седова на том же конгрессе стал его доклад, опубликованный в [53], в котором он предложил две новые объективные производные (названные здесь “косыми” производными Седова), вошедшие в его книгу [54].

Позднее подобные критические замечания об использовании производной Яуманна отмечались в работах [57, 58], причем в последней было явно отмечено нефизичное поведение моделей пластичности при конечных деформациях с производной Яуманна, получившее название “аномалии” колебаний напряжений при простом сдвиге. Реакцией на работу [58] стал ряд статей (см., например, [59, 60]), авторы которых предлагали во избежание указанной “аномалии” использовать другие объективные производные, в частности, коротационную производную, предложенную в [56] (названную здесь нейтральной). Дальнейшее развитие этой позиции нашло отражение в работах по пластичности при больших деформациях [61–64].

В последние годы в рамках представленного в настоящей работе обобщенного понятия объективных производных построены новые производные и целые их семейства (и порожденные объективным интегрированием соответствующие тензорные меры напряжений и конечных деформаций, и семейства этих мер), которые использованы в определяющих соотношениях моделей пластичности, гипоупругости, вязкоупругости, тел с памятью формы.

Так, в работах [66, 67] предложено новое подсемейство коротационных объективных производных (типа Яуманна–Динса), использованное в построении моделей гипоупругости и различных моделей пластичности при конечных деформациях. Численные эксперименты по этим моделям демонстрируют существенное влияние выбора производной из этого подсемейства на поведение тел при простом сдвиге, при кручении с растяжением цилиндра в процессах конечной деформации (до степеней деформации 600%).

В работах [68, 69] на базе семейства голономных тензорных мер напряжений и конечных деформаций [39], отвечающих производным определенного вида, построены модели тел с памятью формы (обобщением модели А.А. Мовчана [70]) при конечных деформациях, и проведена идентификация этих моделей.

В работе [71] предложена модель пластичности при конечных деформациях, основанная на использовании двух различных тензорных мер деформаций: голономной логарифмической и неголономной меры, построенной на базе нейтральной объективной производной. В работе [72] дано принципиальное уточнение основных тензорных мер конечных деформаций и напряжений, используемых в известном пакете ANSYS. Работы [73, 74] продолжают цикл исследований моделей гипоупругости, построенных на базе коротационных объективных производных и соответствующих мер.

Работы [75, 76] посвящены описанию конечных деформаций вязкоупругих тел с использованием объективных производных семейства Гордона–Шоуолтера.

В работах [77–82] изучены подходы к построению и механические свойства моделей классического и неклассического типов, включая модели Коссера. Работы [83, 84] посвящены построению и описанию моделей наполненных пористых сред при произвольных скоростях течения жидкой фазы и произвольных конечных деформациях каркаса.

Представленное в настоящей работе обобщенное понятие объективных производных включает широкий класс производных конвективно-коротационного типа [37, 38], в рамках которого в настоящее время ведутся исследования форм определяющих соотношений различных сред при конечных деформациях.

4. Заключение. Представленные в настоящей работе основы теории объективных тензоров, их диаграмм, связывающих их независимых от системы отсчета отображений, пакетов этих отображений (кондукторов) и соответствующих объективных производных и интегралов демонстрируют эффективность использования свойств инвариантности процессов и соотношений в механике сплошной среды: теория обобщает и упорядочивает известные представления и подходы, разработанные в механике сплошной среды, и составляет универсальный математический аппарат для развития современной теории определяющих соотношений.

Приведенные построения послужили основой для создания более широкой аксиоматики [9, 42, 43, 82] и построения новой теории определяющих соотношений [38, 45, 46], обобщающей подходы Ильюшина и Нолла, для построения новой обобщенной теории тензорных мер деформаций и напряжений [36, 47], существенно расширяющей возможности эффективной аппроксимации данных определяющих экспериментов и классификации свойств сред.

Работа подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 16-01-00669).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с. Т. 2. 584 с.
2. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 310 с. (См. также: М.: 1965–1966; М.: 1971; М.: 1978)
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

4. *Жермен П.* Механика сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
5. *Jaric J.* Mehanika Kontinuuma. Beograd: IRO Gradevinska knjiga, 1988. 392 p.
6. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 272 с.
7. *Эглит М.Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. 318 с.
8. *Gurtin M.E., Fried E., Anand L.* The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge, New York *et al*: Cambridge University Press, 2010. 694 p.
9. *Бровко Г.Л.* Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова". Ч. 1. 2011. 96 с. Ч. 2. 2013. 128 с.
10. *Ильюшин А.А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 6. С. 641–666.
11. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
12. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. V. 2. P. 197–226.
13. *Truesdell C.A., Noll W.* The nonlinear field theories of mechanics. Third Edition (edited by Stuard S. Antman). Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokio: Springer-Verlag, 2004. XXIX p.+602 p. (*See also*: Enciclopedia of Physics vol III/3, 1965; Second Edition, 1992)
14. *Ильюшин А.А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
15. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
16. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
17. *Черных К.Ф.* Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб.: Изд-во "Соло", 2004. 420 с.
18. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
19. *Hill R.* Aspects of invariance in solid mechanics // Advances in Appl. Mech. N.-Y. – L.: Acad. Press, 1978. V. 18. P. 1–75.
20. *Hill R.* Invariance relations in thermoelasticity with generalized variables // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. V. 90. № 2. P. 373–384.
21. *Ogden R.W.* On Eulerian and Lagrangean objectivity in continuum mechanics // Arch. Mech. 1984. V. 36. № 2. P. 207–218.
22. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
23. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. М.: Наука. Ч. 1. Аналитическая геометрия. 1986. 414 с. Ч. 2. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. 1986. 399 с. Ч. 3. Гладкие многообразия. 1987. 480 с.
24. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968. 564 с.
25. *Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д.* Геометрическая теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 280 с.
26. *Винберг Э.Б., Горбацевич В.В., Онищик А.Л.* Строение групп Ли и алгебр Ли. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 41. С. 5–258.
27. Общая алгебра. Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука. Т. 1. 1990. 592 с. Т. 2. 1991. 480 с.
28. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М.: Физматлит. Т. 1. 2004. 272 с. Т. 2. 2001. 368 с. Т. 3. 2001. 272 с.
29. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002. 544 с.
30. *Винберг Э.Б.* Представления классических групп в тензорах. Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1984. С. 595–598.
31. *Желобенко Д.П., Штерн А.И.* Представления групп Ли. М.: Наука, 1983. 360 с.
32. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М.–Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 408 с.

33. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
34. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
35. *Бровко Г.Л.* Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 68–81.
36. *Бровко Г.Л.* Понятия образа процесса и пятимерной изотропии свойств материалов при конечных деформациях. Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 3. С. 565–570.
37. *Бровко Г.Л.* Свойства и интегрирование некоторых производных по времени от тензорных процессов в механике сплошной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 54–60.
38. *Бровко Г.Л.* Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // Изв. АН СССР. ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 814–824.
39. *Бровко Г.Л.* Об одном семействе голономных тензорных мер деформаций и напряжений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1992. № 4. С. 86–91.
40. *Бровко Г.Л.* Развитие математического аппарата и основ общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды. Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Изд-во АО “Диалог МГУ”, 1996. 32 с.
41. *Brovko G.L.* Invariance Types of Tensors, Tensor Processes and Their Transforms in Classical Continuum Mechanics // Proc. of the Fifth Int. Seminar on Geometry, Continuum and Microstructures. Sept. 26–28, 2001, Sinaia, Romania. Eds: S. Cleja-Ţigoiu, V. Ţigoiu. Editura Academiei Romane. Bucuresti, 2002. P. 13–24.
42. *Бровко Г.Л.* Вопросы инвариантности в классических и неклассических моделях сплошных сред // Упругость и неупругость. М.: URSS, 2006. С. 110–123.
43. *Brovko G.L.* On general principles of the theory of constitutive relations in classic continuum mechanics // J. Eng. Math. Kluver Academic Publishers. Printed in Nederlands. 2013. V. 78. P. 37–53.
44. *Бровко Г.Л.* Элементы математического аппарата механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2015. 424 с.
45. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с.
46. *Бровко Г.Л.* Общие приведенные формы определяющих соотношений классической механики сплошной среды // Вестн. Моск. ун-та. Сен. 1, Математика. Механика. 2018. № 2. С. 67–71.
47. *Бровко Г.Л.* Обобщенная теория тензорных мер деформаций и напряжений в классической механике сплошной среды // Вестн. Моск. ун-та. Сен. 1, Математика. Механика. 2018. № 5. С. 46–57.
48. *Zaremba S.* Sur une forme perfectionee de la theorie de la relaxation // Bull. Intl. Acad. Sci. Cracovie, 1903. P. 594–614.
49. *Jaumann G.* Geschlossenes system physikalischer und chemischer differenzialgesetze // Sitzber.Akad.Wiss. Wien (Ha) 1911. 120. S. 385–530.
50. *Oldroyd J.G.* On the formulation of rheological equations of state // Proc. Roy. Soc. London. A. 1950. V. 200. P. 523–541.
51. *Cotter B.A., Rivlin R.S.* Tensors assotiated with time-dependent stress // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13. № 2. P. 177–188.
52. *Truesdell C.* Hypo-elasticity // Journ. Rat. Mech. and Anal. 1955. V. 4. P. 83–133.
53. *Седов Л.И.* Понятие разных скоростей изменения тензоров // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 393–398.
54. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
55. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
56. *Dienes J.K.* On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta Mech. 1979. V. 32. № 4. P. 217–232.
57. *Lehmann Th.* Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen fur grosse elastoplastische Formanderungen // Ing.-Arch. 1972. V. 41. P. 279–310.

58. *Nagtegaal J.C., de Jong J.E.* Some aspects of nonisotropic work hardening in finite strain plasticity // Plasticity of metals at finite strain: Theory, Experiment and Computation. Stanford Univ. and Dept. Mech. Eng., R.P.I., 1982. P. 65–102.

59. *Dafalias Y.F.* Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations // Trans. ASME: Journ. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 3. P. 561–565.

60. *Atluri S.N.* On constitutive relations at finite strain: hypoelasticity and elastoplasticity with isotropic or kinematic hardening // Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1984. V. 43. № 2. P. 137–171.

61. *Metzger D.R., Dubey R.N.* Corotational rates in constitutive modeling of elastic-plastic deformations // Int. Journ. Plast. 1987. V. 3. № 4. P. 341–368.

62. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка. 1987. 231 с.

63. *Маркин А.А., Толоконников Л.А.* Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Всес. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1987. С. 32–37.

64. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.

65. *Gordon R.J., Schowalter W.R.* Anisotropic fluid theory: a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions // Trans. Soc. Rheol. 1972. V. 16. P. 79–97.

66. *Финошкина А.С.* Использование новых объективных производных в простейших моделях гипоупругости и пластического течения с кинематическим упрочнением // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6. Вып. 2. С. 160–166.

67. *Финошкина А.С.* К построению моделей пластичности при конечных деформациях на основе определяющих соотношений, известных при малых деформациях // Упругость и неупругость. М.: URSS, 2006. С. 256–264.

68. *Шуткин А.С.* Подходы к обобщению определяющих соотношений деформируемых твердых тел на область конечных деформаций // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 2. С. 166–180.

69. *Бровко Г.Л., Шуткин А.С.* Модели материалов с памятью формы при конечных деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 129–133.

70. *Мовчан А.А., Мовчан И.А.* Одномерная микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при прямом и обратном термоупругих превращениях // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13. № 3. С. 297–322.

71. *Муравлев А.В., Девятов А.С.* Развитие теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина и экспериментально-теоретических методов исследования вязкопластических свойств материалов при конечных деформациях // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. 2016. № 1. С. 84–90.

72. *Овчинникова Н.В.* О тензорных мерах напряжений и деформаций, используемых в ANSYS для решения упругопластических задач при конечных деформациях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2017. № 5. С. 31–36.

73. *Тунгускова З.Г., Овчинникова Н.В.* Поведение новых моделей гипоупругости с коротационными объективными производными при больших деформациях // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов в 4 томах. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 420–422.

74. *Тунгускова З.Г.* Исследование напряженно-деформированного состояния гипоупругого цилиндрического слоя при конечных деформациях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2020. № 2. С. 35–39.

75. *Мартынова Е.Д., Стеценко Н.С.* Использование однопараметрического семейства объективных производных Гордона–Шоуолтера для описания конечных деформаций вязкоупругих тел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2017. № 6. С. 64–68.

76. *Мартынова Е.Д.* Процессы кручения цилиндрических образцов из несжимаемых вязкоупругих материалов максвелловского типа // Изв. РАН. ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 95–106.

77. *Brovko G.L., Ivanova O.A., Finoshkina A.S.* On geometrical and analytical aspects in formulations of problems of classic and non-classic continuum mechanics // Operator Theory: Advances and Applications. Basel/Switzerland: Birkhäuser Verlag, 2009. V. 191. P. 51–79.
78. *Бровко Г.Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 22–36.
79. *Иванова О.А.* О предельных формах равновесия модели одномерного континуума Коссера с пластическими свойствами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 1. С. 52–68.
80. *Иванова О.А.* Модель оснащенного стержня с вязкоупругими внутренними взаимодействиями // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 1. С. 70–81.
81. *Бровко Г.Л., Кузичев С.А.* Устойчивость вынужденных крутильных колебаний оснащенного стержня // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2010. № 1. С. 57–62.
82. *Бровко Г.Л.* О подходах к моделированию свойств материалов усложненной структуры // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2019. № 6. С. 41–45.
83. *Brovko G.L., Grishayev A.G., Ivanova O.A.* Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions // Journal of Physics: Conference Series. The Seventh International Seminar on Geometry, Continua and Microstructures. 2007. V. 62. P. 1–22.
84. *Фасхеев И.О.* Моделирование механических процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил. Канд. дисс. физ.-мат. наук. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2017.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 106–118

УДК 517.93+531.314

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

© 2021 г. А. Д. Брюно

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва, Россия
e-mail: abruno@keldysh.ru

Поступила в редакцию 06.12.2019 г.
После доработки 11.12.2019 г.
Принята к публикации 19.12.2019 г.

В связи со 120-летием выхода последнего тома книги А. Пуанкаре “Новые методы небесной механики” рассматриваются следующие методы, возникшие с тех пор.

1. Метод нормальной формы, позволяющий изучать регулярные возмущения вблизи стационарного решения, вблизи периодического решения и т.д.

2. Метод укороченных систем, полученных с помощью многогранников Ньютона, позволяющий изучать сингулярные возмущения.

3. Метод порождающих семейств периодических решений (регулярных и сингулярных).

4. Метод обобщенных задач, допускающих тела с отрицательными массами.

5. Вычисление сети семейств периодических решений как “скелета” части фазового пространства.

Ключевые слова: система Гамильтона, нормальная форма, укороченный гамильтониан, семейство периодических решений, порождающее семейство, отрицательная масса, скелет

DOI: 10.31857/S0572329921010037

1. Введение. В связи со 120-летием выхода последнего (третьего) тома книги А. Пуанкаре “Новые методы небесной механики” [1] здесь рассматриваются следующие методы, возникшие за последние 120 лет.

1. Метод нормальной формы, позволяющий изучать регулярные возмущения вблизи стационарного решения [2, гл. I], вблизи периодического решения [2, гл. II], [3–5], вблизи инвариантного тора [2, гл. II] и вблизи семейств таких решений [2, гл. VII, VIII], а также – бифуркации периодических решений и инвариантных торов.

2. Метод укороченных систем, полученных с помощью многогранников Ньютона, позволяющий изучать сингулярные возмущения. Теорию и три приложения см. в [6, гл. IV]. Другие приложения: уравнение Белецкого о колебаниях спутника [7], задачи о периодических облетах Луны и планет [8].

3. Метод порождающих семейств периодических решений (регулярных и сингулярных). Порождающие семейства – это пределы семейств периодических решений при стремлении к нулю возмущающих параметров. Решения порождающих семейств состоят из определенных частей решений предельной задачи. Если предельная задача интегрируема, то порождающие семейства находятся аналитически. Приложения: ограниченная задача трех тел, где предельная задача – это задача двух тел и порождающие семейства однопараметрические [2, гл. III–V], [9–11]; задача Хилла, где предель-

ная задача – это промежуточная задача Хенона и каждое порождающее семейство состоит из одного решения [12, 13].

4. Метод обобщенных задач, допускающих тела с отрицательными массами [14]. В таких задачах имеются единые полные семейства периодических решений, что облегчает их вычисление. Пример: задача Хилла [14].

5. Вычисление сети семейств периодических решений как "скелета" части фазового пространства. О пользе таких "скелетов" писал еще Пуанкаре [1]. Примеры: задача Хилла [14] и отчасти ограниченная задача трех тел [11, 15–20].

Имеется еще много работ по этим методам. Здесь приведены итоговые. В разработке и применении этих пяти методов принимали участие автор и его сотрудники. Эти методы рассматриваются ниже в указанной последовательности в разделах 2–6. Предварительная версия этой работы – препринт [21], который соответствовал секционному докладу автора на I секции XII съезда по механике (Уфа, 2019).

2. Резонансная нормальная форма. *2.1. Автономная система.* Рассмотрим автономную систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1,\ldots,n \tag{2.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижной точки

$$\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n) = 0 \tag{2.2}$$

Если функция Гамильтона $\gamma(\xi, \boldsymbol{\eta})$ аналитична в этой точке, то она разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\xi, \boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}}\xi^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geq 0$, $\xi^{\mathbf{p}} = \xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\ldots\xi_n^{p_n}$. Поскольку точка (2.2) неподвижная, то разложение (2.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (2.1). Собственные числа ее матрицы A разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j, \quad j = 1,\ldots,n$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Канонические замены координат

$$(\xi, \boldsymbol{\eta}) \to (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы.

Теорема 1 ([22, § 12]). Существует каноническое формальное преобразование (2.4), приводящее гамильтониан (2.3) к нормальной форме

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} \tag{2.5}$$

где ряд $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ содержит только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$$

а квадратичная часть $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ имеет свою нормальную форму (так что матрица линейной части системы является гамильтоновым аналогом жордановой нормальной формы). Здесь $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + +p_n\lambda_n$ – скалярное произведение.

Если $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то нормальная форма (2.5) эквивалентна системе с меньшим числом степеней свободы и дополнительными параметрами. При нормализующем преобразовании (2.4) сохраняются малые параметры и линейные автоморфизмы

$$(\xi, \boldsymbol{\eta}) \to (\tilde{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}), \quad t \to \tilde{t}$$

Локальные, т.е. проходящие через точку $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$, семейства периодических решений системы

$$\dot{x}_j = \frac{\partial g}{\partial y_j}, \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

соответствующей гамильтониану (2.5), удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \lambda_j x_j a, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda_j y_j a, \quad j = 1, \dots, n$$

где a – свободный параметр. Им соответствуют локальные семейства периодических решений исходной системы (2.1).

Для вещественной исходной системы (2.1) коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы (2.5) удовлетворяют специальным соотношениям вещественности, и при стандартной канонической линейной замене координат $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ система с гамильтонианом (2.5) переходит в вещественную систему. Имеется несколько способов вычисления коэффициентов $g_{\mathbf{pq}}$ нормальной формы (2.5). Наиболее простой описан в книге [23] Журавлёва, Петрова, Шундерюка. Резонансная нормальная форма автономной системы Гамильтона вблизи стационарного решения, учитывающая только собственные числа матрицы A ее линейной части и без ограничений на эту матрицу A, была введена в [22, § 12]. Позже была введена слегка более простая сверхрезонансная нормальная форма, которая учитывала жордановы клетки нормальной формы матрицы A [24]. Но эти дополнительные упрощения не позволяли дополнительно понизить число степеней свободы.

Теория резонансной нормальной формы вблизи стационарного решения подробно изложена в гл. I книги [2].

2.2. Периодическая система. Пусть $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ – малые параметры. Посредством формальной канонической периодической замены координат $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t \to \mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau$ периодическая по t функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \boldsymbol{\mu})$ с n степенями свободы вблизи нулевого решения $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, $\boldsymbol{\mu} = 0$ приводится к нормальной форме

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau, \boldsymbol{\mu}) = \sum g_{\mathbf{pqr}m} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{r} \exp(im\tau)$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \geq 0$ и

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + im = 0$$

Дополнительное каноническое преобразование

$$x_j = u_j \exp(-i \operatorname{Im} \lambda_j \tau), \quad y_j = v_j \exp(i \operatorname{Im} \lambda_j \tau), \quad j = 1, \dots, n$$

преобразует нормальную форму $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau, \boldsymbol{\mu})$ в приведенную нормальную форму, не зависящую от времени [3, 4],

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \sum h_{\mathbf{pqr}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s$, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \geq 0$ и

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = 0$$

Для $\boldsymbol{\mu} = 0$ разложение ряда h в (2.6) начинается с членов порядка 3. Локальные семейства периодических решений исходной системы соответствуют локальным семействам неподвижных точек системы с приведенной нормальной формой функции Гамильтона (2.6). Эти неподвижные точки $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\mu}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.7}$$

которая не имеет линейной части при $\boldsymbol{\mu} = 0$.

В гл. II книги [2] изложена аналогичная теория резонансной нормальной формы автономной системы Гамильтона вблизи периодического решения. См. также [3–5].

Нормальная форма вблизи инвариантного тора и вблизи семейства периодических решений изложена в [25, Part II]; [2, гл. VII, VIII]. Нормальная форма полезна при исследовании устойчивости [26], бифуркаций, интегрируемости [27, 28] и асимптотического поведения решений.

3. Метод укороченных систем. Если уравнение (или система уравнений) содержит линейную часть и не содержит членов с отрицательным показателем степени, то в качестве первого приближения можно взять его линейную часть, а его нелинейную часть рассматривать как возмущение. Но если уравнение не имеет линейной части или содержит члены с отрицательными показателями степени, то возникает вопрос: что же считать его первым приближением? Ответ на него дает метод укороченных уравнений, позволяющий выписать несколько первых приближений и для каждого указать область в пространстве переменных и параметров, где оно доминирует.

3.1. Укороченная функция Гамильтона. Пусть векторы $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ и $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ суть канонические переменные и малые параметры соответственно. Пусть функция Гамильтона разлагается в степенной ряд

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = \sum h_{\mathbf{pqr}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{p}} = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ и $h_{\mathbf{pqr}}$ – постоянные коэффициенты.

Каждому слагаемому ряда (3.1) поставим в соответствие его векторный показатель степени $Q = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{2n+s}$. Множество $\mathbf{S}$ всех точек Q с $h_Q \neq 0$ в сумме (3.1) называется носителем $\mathbf{S} = \mathbf{S}(h)$ суммы (3.1). Выпуклая оболочка $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Gamma}(h)$ носителя $\mathbf{S}$ называется многогранником Ньютона суммы (3.1). Его граница состоит из вершин $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(0)}$, ребер $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(1)}$ и граней $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)}$ размерностей d: $1 < d \leq 2n + s - 1$. Пересечение $\mathbf{S} \cap \boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)} = \mathbf{S}_j^{(d)}$ называется граничным подмножеством множества $\mathbf{S}$. Каждой обобщенной грани $\boldsymbol{\Gamma}_j^{(d)}$ (включая вершины и ребра) соответствуют:

– нормальный конус

$$U_j^{(d)} = \{P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle < \langle P, Q''' \rangle, \text{ где } Q', Q'' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, Q''' \in \mathbf{S} \backslash \mathbf{S}_j^{(d)}\}$$

в пространстве $\{P\} = \mathbb{R}_*^{2n+s}$, сопряженном к пространству $\mathbb{R}^{2n+s}$;

– укороченная сумма

$$\hat{h}_j^{(d)} = \sum h_{\mathbf{pqr}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}} \quad \text{по} \quad Q = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in \mathbf{S}_j^{(d)}$$

Она является первым приближением к сумме (2.6), когда

$$(\log|x_1|, \dots, \log|x_n|, \log|y_1|, \dots, \log|y_n|, \log|\mu_1|, \dots, \log|\mu_s|) \to \infty$$

вдоль $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Таким образом с помощью укороченных функций Гамильтона мы можем найти приближенные задачи.

3.2. Ограниченная задача трех тел. Пусть два тела $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ с массами $1 - \mu$ и μ соответственно вращаются вокруг их общего центра масс с периодом 2π. Плоская круговая ограниченная задача трех тел состоит в исследовании плоского движения тела $\mathbf{P}_3$ бесконечно малой массы под действием ньютонова притяжения тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Во вращающейся (синодической) системе координат задача описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром μ [29]. Функция Гамильтона имеет вид [2]

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1-\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}} + \mu x_1 \tag{3.2}$$

Здесь тело $\mathbf{P}_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : x_1 = x_2 = 0\}$ и тело $\mathbf{P}_2 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y} : x_1 = 1, x_2 = 0\}$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Рассмотрим малые значения отношения масс $\mu \geq 0$. Для $\mu = 0$ задача становится задачей двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$. Но здесь нужно удалить из фазового пространства точки, соответствующие столкновениям тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Точки столкновения расщепляют решения задачи двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$ на части. Для малых $\mu > 0$ вблизи тела $\mathbf{P}_2$ имеется сингулярное возмущение случая $\mu = 0$.

Для того чтобы найти все первые приближения ограниченной задачи трех тел, нужно вблизи тела $\mathbf{P}_2$ ввести локальные координаты

$$\xi_1 = x_1 - 1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - 1$$

и разложить функцию Гамильтона в степенной ряд по этим координатам. После разложения $1/\sqrt{(\xi_1 + 1)^2 + \xi_2^2}$ в ряд Маклорена функция Гамильтона (3.2) примет вид

$$\begin{gathered} h + \frac{3}{2} - 2\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 + \\ + f(\xi_1, \xi_2^2) + \mu\left\{\xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} - f(\xi_1, \xi_2^2)\right\} \end{gathered} \tag{3.3}$$

где f – сходящийся степенной ряд, не содержащий членов порядка меньше трех. Положим

$$p = \operatorname{ord}\xi_1 + \operatorname{ord}\xi_2, \quad q = \operatorname{ord}\eta_1 + \operatorname{ord}\eta_2, \quad r = \operatorname{ord}\mu$$

Множество $\mathbf{S}$ этих точек (p, q, r) состоит из точек

$$(0,2,0), \quad (1,1,0), \quad (2,0,0), \quad (k,0,0), \quad (2,0,1), \quad (-1,0,1), \quad (k,0,1)$$

где $k = 3, 4, 5, \ldots$ Выпуклая оболочка множества $\mathbf{S}$ – это многогранник $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3$. Поверхность $\partial\mathbf{\Gamma}$ многогранника $\mathbf{\Gamma}$ состоит из граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$, ребер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$. Каждому такому элементу $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует укороченный гамильтониан $\hat{h}_j^{(d)}$, являющийся суммой тех членов ряда (3.3), точки которых (p, q, r) принадлежат $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$. Укороченные функции Гамильтона $\hat{h}_j^{(d)}$ – это различные первые приближения функции (3.3), справедливые в различных областях пространства $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \mu)$. Рис. 1 изображает многогранник $\mathbf{\Gamma}$ для ряда (3.3) в координатах p, q, r, являющийся полубесконечной трехгранной призмой с косым основанием. Он имеет четыре грани и шесть ребер. Рассмотрим их.

Грань $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$, являющаяся косым основанием призмы $\mathbf{\Gamma}$, содержит вершины

$$(0,2,0), \quad (2,0,0), \quad (-1,0,1) \quad \text{и точку} \quad (1,1,0) \in \mathbf{S}$$

Ей соответствует укороченная функция Гамильтона

$$\hat{h}_1^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \tag{3.4}$$

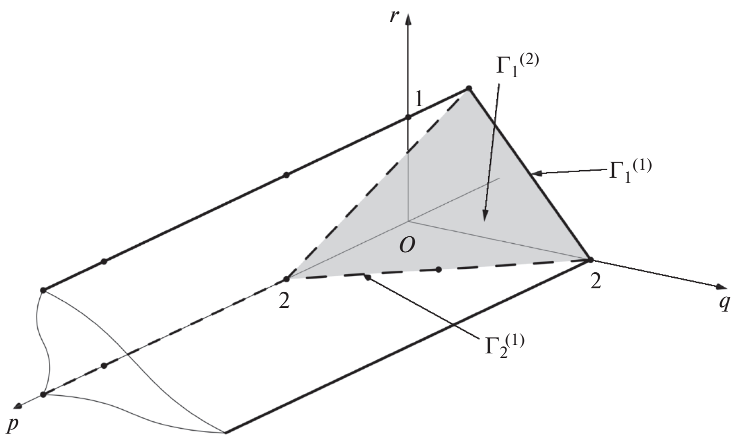


Рис. 1

Она описывает задачу Хилла [30], которая является неинтегрируемой. Степенное преобразование

$$\tilde{\xi}_i = \xi_i \mu^{-1/3}, \quad \tilde{\eta}_i = \eta_i \mu^{-1/3}, \quad i = 1, 2 \tag{3.5}$$

приводит соответствующую систему Гамильтона к системе Гамильтона с функцией Гамильтона вида (3.4), где ξ_i, η_i, μ надо заменить на $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, 1$ соответственно.

Грань $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ содержит точки

$$(0, 2, 0), (1, 1, 0), (2, 0, 0) \quad \text{и} \quad (k, 0, 0) \subset \mathbf{S}$$

Ей соответствует укороченная функция Гамильтона $\hat{h}_2^{(2)}$, которая получается из функции h при $\mu = 0$. Она описывает задачу двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$, которая является интегрируемой.

Рассмотрим ребра. Из шести ребер одно несобственное. Оно проходит через точку (0, 2, 0) параллельно вектору (1, 0, 0). На трех ребрах $q = 0$, т.е. для них укороченные функции Гамильтона не зависят от η_1, η_2, и у решений соответствующих укороченных систем Гамильтона $\xi_1, \xi_2 = \mathrm{const}$, что неинтересно. Остаются два ребра.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_1^{(1)}$. Оно содержит точки (0, 2, 0) и (−1, 0, 1) множества $\mathbf{S}$. Соответствующая укороченная функция Гамильтона есть

$$\hat{h}_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{\mu}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \tag{3.6}$$

Она описывает задачу двух тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$. Степенное преобразование (3.5) переводит ее в систему Гамильтона с функцией Гамильтона вида (3.6), где ξ_i, η_i, μ заменены на $\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, 1$ соответственно.

Ребро $\mathbf{\Gamma}_2^{(1)}$ содержит точки (2, 2, 0) (1, 1, 0) (0, 2, 0) множества $\mathbf{S}$. Ему соответствует укороченная функция Гамильтона (3.4) с $\mu = 0$. Она описывает промежуточную задачу (между задачей Хилла и задачей двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$), которая является интегрируемой. Это первое приближение ввел Хенон [31].

Итак, очень близко к телу $\mathbf{P}_2$ первым приближением исходной ограниченной задачи с функцией Гамильтона (3.3) является задача двух тел $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ с гамильтонианом (3.6), просто близко – задача Хилла с гамильтонианом (3.4), подальше от тела $\mathbf{P}_2$ – промежуточная задача, а вдали от тела $\mathbf{P}_2$ – задача двух тел $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$. Вблизи тела $\mathbf{P}_2$ периодические решения ограниченной задачи являются возмущениями как периодических решений всех указанных четырех первых приближений, так и результатов склейки гиперболических орбит задачи двух тел $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ с решениями-отрезками либо задачи двух тел $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$, либо промежуточной задачи. В [32–36] периодические решения промежуточной задачи были использованы как порождающие для отыскания периодических квазиспутниковых орбит ограниченной задачи.

3.3. Укороченные системы. Рассмотрим теперь совокупность полиномов

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}), \ldots, f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \tag{3.7}$$

Каждому $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ соответствуют свой носитель $\mathbf{S}_j \subset \mathbb{R}^{2n+s}$ и все сопутствующие объекты: многогранник Ньютона $\boldsymbol{\Gamma}_j$, его обобщенные грани $\boldsymbol{\Gamma}_{jk_j}^{(d_j)}$, их нормальные конусы $\mathbf{U}_{jk_j}^{(d_j)}$, граничные множества $\mathbf{S}_{jk_j}^{(d_j)}$, укороченные многочлены $\hat{f}_{jk_j}^{(d_j)}$. Кроме того, каждому непустому пересечению

$$\mathbf{U}_{1k_1}^{(d_1)} \cap \mathbf{U}_{2k_2}^{(d_2)} \cap \cdots \cap \mathbf{U}_{mk_m}^{(d_m)} \tag{3.8}$$

соответствует совокупность укорочений

$$\hat{f}_{1k_1}^{(d_1)}, \hat{f}_{2k_2}^{(d_2)}, \ldots, \hat{f}_{mk_m}^{(d_m)} \tag{3.9}$$

которая является первым приближением совокупности (3.7), при

$$(\log|\mathbf{x}|, \log|\mathbf{y}|, \log|\boldsymbol{\mu}|) \to \infty$$

вблизи пересечения (3.8) и называется укорочением совокупности (3.7).

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$f_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{3.10}$$

соответствующую совокупности (3.7). Системе (3.10) соответствуют все объекты, указанные для совокупности (3.7), а также укороченные системы уравнений

$$\hat{f}_{jk_j}^{(d_j)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{3.11}$$

каждая из которых соответствует одной совокупности укорочений (3.9). Каждая укороченная система (3.11) является первым приближением полной системы (3.10).

3.4. Периодические решения периодической системы Гамильтона. Как было показано в подразделе 2.2, поиск локальных семейств периодических решений периодической системы Гамильтона сводится к поиску локальных семейств неподвижных точек $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\mu}$ системы с приведенной нормальной формой (2.6) функции Гамильтона, т.е. точек-решений системы (2.7).

Чтобы решить эту систему, надо рассмотреть укороченные системы и найти их решения, которые дадут первые приближения к решениям системы (2.7). Пример таких вычислений см. в [4]. Вообще говоря, одному периодическому решению исходной системы соответствуют несколько неподвижных точек $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\mu}$ – решений системы (2.7).

Другие приложения этого метода: уравнение Белецкого колебаний спутника [7] и задача о периодических облетах планет с близким подходом к Земле [8].

4. Порождающие семейства периодических решений. Как только появились электронные вычислительные машины, на них стали вычислять семейства периодических решений ограниченной задачи трех тел для разных случаев: Солнце–Юпитер ($\mu \approx 10^{-3}$), Земля–Луна ($\mu \approx 10^{-2}$) и т. д. Оказалось, что эти семейства весьма похожи, а их периодические решения напоминают решения задачи двух тел. В 1968 г. Хенон [37] сообразил, что надо рассматривать пределы этих семейств при $\mu \to 0$.

4.1. Метод. Пусть функция Гамильтона $H(\mu)$ аналитически зависит от малых параметров $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ и соответствующая система Гамильтона имеет семейства периодических решений $\mathcal{F}_j(\boldsymbol{\mu})$. Некоторые из этих семейств могут иметь пределы $\mathcal{F}_j(0)$ при $\boldsymbol{\mu} \to 0$. Семейства $\mathcal{F}_j(0)$ называются порождающими. Их решения образованы частями решений предельной системы Гамильтона с $\boldsymbol{\mu} = 0$.

Если эта предельная система интегрируема, то порождающие семейства можно описать аналитически. Этот подход предложил Хенон [37]. Он был использован для задачи Хилла и для ограниченной задачи трех тел [2, гл. III–V], [9, 10].

4.2. Задача Хилла. Ее функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \tag{4.1}$$

Соответствующая система

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, 2$$

описывает движение Луны ($\mathbf{P}_3$) с нулевой массой под действием притяжения Солнца ($\mathbf{P}_1$), расположенного в бесконечности, и Земли ($\mathbf{P}_2$) с массой 1, расположенной в начале координат. Функция Гамильтона (4.1) аналитична в

$$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^4 \backslash \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$$

Делаем каноническое преобразование координат

$$\xi_j = \varepsilon X_j, \quad \eta_j = \varepsilon Y_j, \quad j = 1, 2$$

и получаем систему Гамильтона

$$\dot{X}_j = \frac{\partial h}{\partial Y_j}, \quad \dot{Y}_j = -\frac{\partial h}{\partial X_j}, \quad j = 1, 2 \tag{4.2}$$

где

$$h = \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{1}{\varepsilon^3\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

Положим $\varepsilon = \sqrt{2|H|}$ и $H \to -\infty$. Тогда в пределе получаем систему (4.2) с

$$h = h_0 = \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2$$

Это промежуточная задача [31]. Для h_0 система (4.2) линейна и, следовательно, интегрируема. В силу однородности гамильтониана h_0 достаточно рассматривать ее при $h_0 = 1/2$. Она имеет одно регулярное периодическое решение

$$X_1(t) = \cos t, \quad X_2(t) = -2\sin t$$

Если орбита $(X_1(t), X_2(t))$ решения задачи Хенона проходит через точку

$$X_1 = X_2 = 0, \tag{4.3}$$

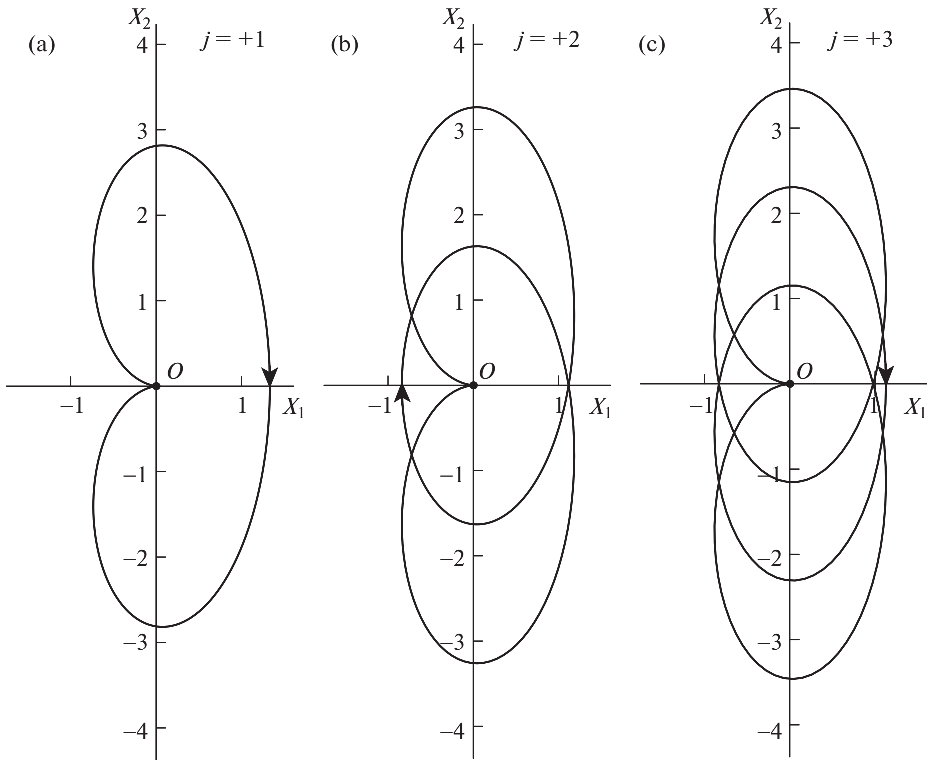


Рис. 2

то тело $\mathbf{P}_3$ сталкивается с телом $\mathbf{P}_2$ и решение не может быть продолжено через столкновение. Поэтому точка (4.3) делит решение на независимые части. Хенон [31] нашел все решения-отрезки, которые начинаются и заканчиваются такими столкновениями. Они образуют счетное множество двух типов. Решения-отрезки первого типа обозначаются символом $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, и их орбиты являются эпициклоидами. Для $j = +1, +2, +3$ они показаны на рис. 2. Орбиты решений-отрезков с отрицательными значениями j им симметричны относительно оси X_2.

Решения-отрезки второго типа обозначаются буквами i и e, их орбиты являются эллипсами, проходящими через точку (4.3). Они показаны на рис. 3.

Теорема 2 ([12]). Последовательность решений-отрезков, не содержащая подряд двух одинаковых решений-отрезков второго типа, является порождающим решением для задачи Хилла.

Здесь порождающее семейство периодических решений состоит из одного решения. Все известные семейства периодических решений задачи Хилла включают хотя бы одно порождающее решение.

В ограниченной задаче трех тел имеется счетное множество однопараметрических порождающих семейств [37]. Некоторые из них устроены довольно сложно [9, 10, 16, 18–20].

5. Обобщенные задачи. Обычно в небесной механике рассматриваются тела с неотрицательными массами. Но Батхин [14] предложил рассматривать задачи, где некоторые массы отрицательны. В задаче Хилла с массой тела $\mathbf{P}_2$ равной -1 (названной *зада-*

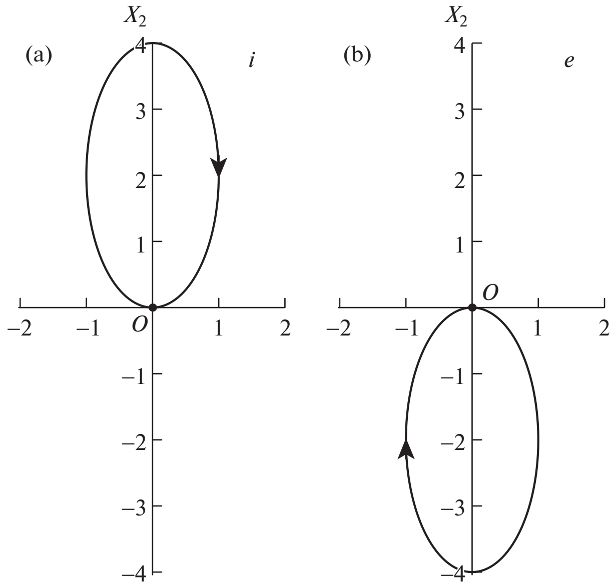


Рис. 3

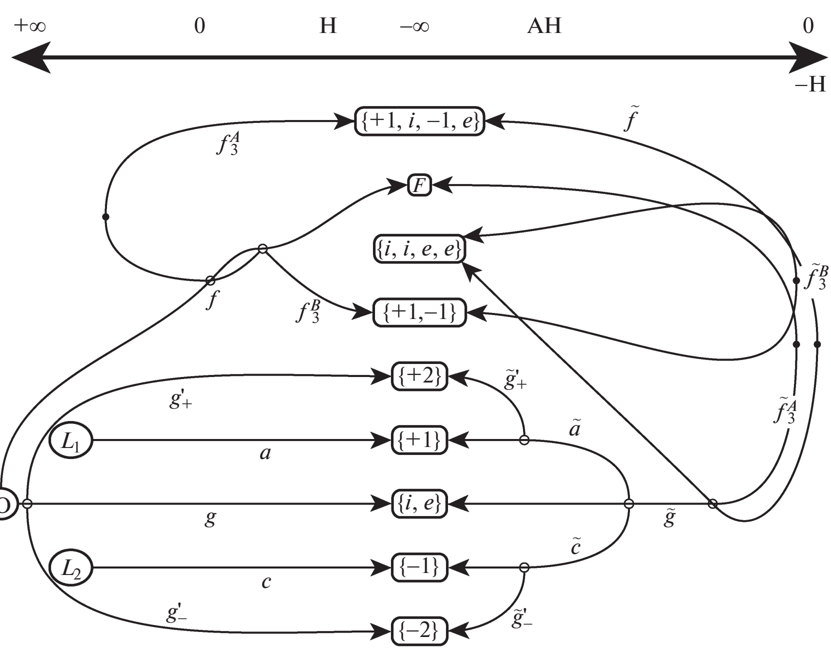


Рис. 4

чей анти-Хилла), семейства периодических решений являются продолжениями семейств периодических решений обычной задачи Хилла. Поэтому вычисление семейств периодических решений удобнее делать сразу для обеих задач: Хилла и анти-Хилла. Этот подход дает новые семейства периодических решений для обычной задачи Хилла.

Рис. 4 показывает диаграмму связей между этими семействами задач Хилла (левая часть) и анти-Хилла (правая часть). Центральный столбец дает порождающие решения этих семейств.

6. Скелеты. В некоторых частях фазового пространства системы Гамильтона имеется много семейств периодических решений, и они образуют “скелет” этой части фазового пространства. Поэтому вычисление таких семейств очень полезно для исследования структуры фазового пространства. Батхин [38] заметил, что в системе с конечной группой симметрий большинство таких семейств состоит из периодических решений, которые инвариантны относительно всех симметрий этой группы.

В разных задачах имеется много вычисленных семейств периодических решений, но их количество пока недостаточно, чтобы образовать скелет. Недавние результаты в этом направлении для ограниченной задачи трех тел см. в [11, 15–20, 39–41]. По задаче Хилла см. в [12–14, 31, 42–47].

7. Заключение. Все 5 методов являются новыми не только в небесной механике, но и в гамильтониановой механике. При этом методы 1 и 2 являются новыми в нелинейном анализе, а классический анализ можно рассматривать как квазилинейный, ибо в нем все уравнения имеют линейные части. Пример применения существенно нелинейного анализа – это задача о пограничном слое на игле [48].

Автор благодарит А.Б. Батхина и Э.П. Казанджана за помощь в подготовке этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избранные труды: в трех томах. Т. II. М.: Наука, 1972. С. 9–356.
2. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. *Брюно А.Д.* Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 223.
4. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 1. С. 39–56.
5. *Bruno A.D.* Normalization of the periodic Hamiltonian system // Programming and Computer Software. 2020. V. 46. № 2. P. 76–83.
6. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998. 288 с.
7. *Bruno A.D., Varin V.P.* The limit problems for the equation of oscillations of a satellite // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1997. V. 67. № 1. P. 1–40.
8. *Bruno A.D.* On periodic flybys of the Moon // Celestial Mechanics. 1981. V. 24. P. 255–268.
9. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Berlin, Heidelber, New York: Springer, 1997. 278 p. (Lecture Note in Physics. Monographs; 52).
10. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. II. Quantitative Study of Bifurcations. Berlin, Heidelber, New York: Springer–Verlag, 2001. 308 p. (Lecture Note in Physics. Monographs; 65).
11. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс // Прикл. матем. и мех. 2007. Т. 71. № 6. С. 1034–1066.
12. *Батхин А.Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 4. С. 308–322.
13. *Батхин А.Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 6. С. 497–510.
14. *Батхин А.Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // ДАН. 2014. Т. 458. № 2. С. 131–137.
15. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство *h* периодических решений ограниченной задачи для малого μ // Астрономический вестник. 2009. Т. 43. № 1. С. 4–27.

16. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейства *c* и *i* периодических решений ограниченной задачи для $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ // Астрономический вестник. 2009. Т. 43. № 1. С. 28–43.
17. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Семейство *h* периодических решений ограниченной задачи для больших μ // Астрономический вестник. 2009. Т. 43. № 2. С. 167–186.
18. *Брюно А.Д., Варин В.П.* Замкнутые семейства периодических решений ограниченной задачи // Астрономический вестник. 2009. Т. 43. № 3. С. 265–288.
19. *Брюно А.Д., Варин В.П.* О распределении астероидов // Астрономический вестник. 2011. Т. 45. № 4. С. 334–340.
20. *Bruno A.D., Varin V.P.* Periodic solutions of the restricted three body problem for small μ and the motion of small bodies of the Solar system // Astronomical and Astrophysical Transactions (AApTr). 2012. V. 27. № 3. P. 479–488.
21. *Брюно А.Д.* Новейшие методы небесной механики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 79. С. 18.
22. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199–239.
23. *Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
24. *Baider A., Sanders J.A.* Unique normal forms: the nilpotent Hamiltonian case // Journal of Differential Equations. 1991. V. 92. P. 282–304.
25. *Bruno A.D.* Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo: Springer–Verlag, 1989. 350 p.
26. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва “Наука”, 1978. 352 с.
27. *Брюно А.Д., Еднерал В.Ф.* Алгоритмический анализ локальной интегрируемости // ДАН. 2009. Т. 424. № 3. С. 299–303.
28. *Брюно А.Д.* О периодической системе Гамильтона // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 631–634.
29. *Euler L.* Theoria Motuum Lunae. Petropoli: Typis Academiae Imperialis Scientiarum, 1772. Reprinted in: Opera Omnia, Ser. 2 / Ed. L. Courvoisier. V. 22, Orell Füssli Turici, Lausanne, 1958, 411 p.
30. *Hill G.W.* Researches in the Lunar Theory // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 5–26, 129–147, 245–260 // Collected mathematical works. Washington (D.C.): Carnegie Inst. 1905. V. 1. P. 223–238.
31. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill’s case: periodic orbits and their stability // Astron. & Astrophys. 1969. V. 1. P. 223–238.
32. *Benest D.* Libration effects for retrograde satellitesin the restricted three-body problem. I: Circular plane Hill’s case // Celestial Mechanics. 1976. № 13. P. 203–215.
33. *Коган А.Ю.* Далекие спутниковые орбиты в ограниченной задаче трех тел // Космические исследования. 1988. Т. XXVI. № 6. С. 813–818.
34. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. Квазиспутниковые периодические орбиты // Аналитическая небесная механика / под ред. К.В. Холшевникова. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. С. 53–57.
35. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел // Космические исследования. 1993. Т. 31. № 2. С. 75–99.
36. *Лидов М.Л., Вашковьяк М.А.* О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной // Письма в Астрономический журнал. 1994. Т. 20. № 3. С. 239–240.
37. *Hénon M.* Sur les orbites interplanetaires qui rencontrent deux fois la terre // Bull. astron. Ser. 3. 1968. T. 3. № 3. P. 377–402.
38. *Батхин А.Б.* О структуре фазового потока в окрестности симметричного периодического решения системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 69.
39. *Bruno A.D., Varin V.P.* On families of periodic solutions of the restricted threebody problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2006. V. 95. P. 27–54.
40. *Voyatzis G., Kotoulas T., Hadjidemetriou J.D.* Symmetric and Nonsymmetric Periodic Orbits in the Exterior Mean Motion Resonances with Neptune // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2005. V. 91. № 1/2. P. 191–202.

41. *Voyatzis G., Kotoulas T.* Planar periodic orbits in exterior resonances with Neptune // Planetary and Space Science. 2005. V. 53. № 11. P. 1189–1199. arXiv: astro-ph/0502579 [astro-ph].
42. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: non-periodic orbits // Astron. & Astr. 1970. № 9. P. 24–36.
43. *Simó C., Stuchi T. J.* Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. 2000. V. 140. C. 1–32.
44. *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2003. V. 85. P. 223–246.
45. *Hénon M.* Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of three bodies // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2005. V. 93. P. 87–100.
46. *Tsirogiannis G.A., Perdios E.A., Markellos V.V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. Application to Hill's problem // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2009. № 103. C. 49–78.
47. *Батхин А.Б., Батхина Н.В.* Задача Хилла. Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с.
48. *Брюно А.Д., Шадрина Т.В.* Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 224–287.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 119–128

УДК 629.7.015.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРУГОДИССИПАТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДВЕСКИ ДВИГАТЕЛЯ НА ПИЛОНЕ ПОД КРЫЛОМ НА АЭРОУПРУГИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЕТА

В. В. Овчинников[a], Ю. В. Петров[b,*]

[a] *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

[b] *Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия*

**e-mail: doctor561@rambler.ru*

Поступила в редакцию 22.09.2019 г.
После доработки 15.10.2020 г.
Принята к публикации 25.10.2020 г.

Для исследования влияния и выбора рациональных упругодиссипативных параметров подвески двигателей самолета на пилонах под крылом разработана математическая модель аэроупругости крупногабаритного транспортного самолета с учетом кинетического момента роторов двигателей и специальным образом сконструированных узлов крепления двигателей к пилонам. Показано существенное влияние упругодиссипативных параметров узлов крепления, реализующих концепцию освобожденного двигателя, на интегральные аэроупругие и прочностные характеристики самолета. Предложены принципиальные схемы узлов крепления двигателя к пилону. Доказана целесообразность практической реализации концепции освобожденного двигателя для повышения аэроупругой устойчивости и снижения уровня усталостной повреждаемости элементов конструкции самолета.

Ключевые слова: аэроупругость, двигатель на пилоне, упругодиссипативные связи, аэроупругая устойчивость, усталостная повреждаемость

DOI: 10.31857/S0572329921010086

1. Введение. На современных крупногабаритных транспортных самолетах широко применяется аэродинамическая компоновка с двигателями на пилонах под крылом. При известных преимуществах такая компоновка приводит к определяющему влиянию на аэроупругие и прочностные характеристики самолета в целом динамического взаимодействия в системе двигатель–пилон–крыло. В частности, появляются новые формы флаттера (пилонный флаттер), существенное влияние на параметры динамической системы оказывают гироскопические эффекты от двигателей, возникает гироскопическая связанность симметричных и антисимметричных тонов колебаний. Проведенные исследования показали, что существенный положительный эффект с точки зрения аэроупругих свойств самолета может быть достигнут путем реализации концепции освобожденного двигателя. Узлы крепления двигателя к пилону модернизируются таким образом, чтобы обеспечить возможность заданных относительных перемещений двигателя и пилона. В систему крепления вводятся также специальные упругие и демпфирующие элементы. В этом случае двигатель совмещает функции гироскопического и динамического гасителя колебаний. Следовательно, возникает задача подбора рациональных параметров введенных в конструкцию специальных упругодиссипативных связей с целью повышения динамической устойчивости и снижения уровня динамического нагружения основных конструкционных элементов планера самолета.

2. Постановка задачи. Важным этапом исследования влияния параметров подвески двигателя на пилоне под крылом на динамические и прочностные характеристики самолета является разработка математической модели аэроупругости (ММАУ). Для синтеза ММАУ самолета с работающими двигателями на пилонах используется хорошо зарекомендовавший себя метод заданных форм [1]. В соответствии с данным методом деформации конструкции при возмущенном движении находятся в виде разложения в ряд по известным координатным векторным функциям (формам). В качестве заданных форм рассматриваются обладающие свойством полноты формы собственных колебаний базовой конструкции самолета в пустоте. При разработке ММАУ необходимо учитывать, что суммарные инерционно-массовые параметры двигателей соизмеримы с соответствующими характеристиками крыла, а значит, двигатели оказывают существенное влияние на динамические свойства самолета в целом. В частности, значительно изменяются частоты и формы собственных упругих колебаний планера самолета, появляются двигательные тона упругих колебаний [2].

В данной работе гондола и ротор двигателя рассматриваются как абсолютно жесткие тела, упругостью узлов крепления ротора к гондоле пренебрегаем. Пилон моделируется упругой балкой, а упругие и диссипативные свойства узлов крепления пилона к крылу и двигателя к пилону соответствующими упругодиссипативными связями. Двигатель обладает кинетическим моментом H_P, влиянием динамических составляющих тяги двигателя пренебрегаем. Так, в работе [3] показано, что на собственные частоты и формы колебаний, а также на флаттерные характеристики ЛА влияние динамических составляющих тяги незначительно и им можно пренебречь. При расчете аэродинамических характеристик двигатель схематизируется совокупностью вертикальных и горизонтальных тонких несущих поверхностей, моделируемых семейством присоединенных и свободных вихрей.

На рис. 1 изображена используемая в работе принципиальная упругая схематизация динамической системы двигатель–пилон–крыло, где *1* – балочная модель консоли крыла, *2*, *4* – упругодиссипативные связи, *3* – пилон, *5* – гондола двигателя, *6* – ротор двигателя.

С концом пилона *3* связана система координат $O^k x_1^k x_2^k x_3^k$, а с гондолой *5* и ротором *6* связаны системы $O^{o1} x_1^{o1} x_2^{o1} x_3^{o1}$ и $O^p x_1^p x_2^p x_3^p$, соответственно. Будем считать, что базовая конструкция самолета включает планер и неработающие двигатели, установленные на упругих пилонах под крылом. В этом случае двигатели на пилоне являются составной частью базовой модели самолета и их геометрические, инерционно-массовые характеристики, а также параметры узлов крепления учтены на этапе упругой и аэродинамической схематизации летательного аппарата.

Учет работающего двигателя фактически сводится к введению в уравнение возмущенного движения базовой конструкции самолета обобщенных сил, обусловленных наличием быстровращающегося ротора. Для вычисления форм и частот собственных колебаний самолета с неработающими двигателями на упругих пилонах использовались стандартные программные продукты. Внутреннее и конструкционное демпфирование в уравнениях возмущенного движения учитывается приближенно в соответствии с гипотезой вязкого трения.

Многочисленные исследования [2–6] показали, что установленные на упругих пилонах под крылом двигатели оказывают существенное влияние на аэроупругие и прочностные характеристики самолета в целом. Появляются так называемые двигательные тона аэроупругих колебаний, которые для большинства компоновок самолетов оказываются критическими по динамической устойчивости ЛА в целом. Важно, что эти колебания являются слабо демпфированными, так как рассеивание энергии

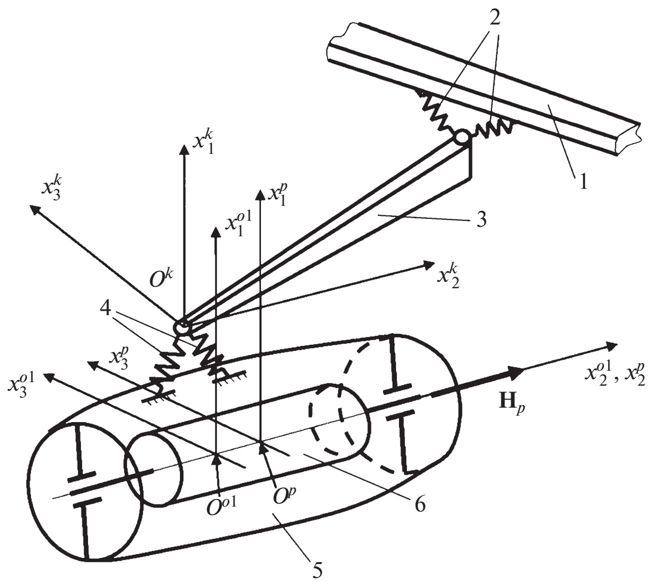


Рис. 1

упругих колебаний осуществляется лишь за счет внутреннего и конструкционного демпфирования в системе двигатели–пилон–крыло. Одним из способов управления аэроупругими колебаниями двигателей на пилонах является реализация концепции освобожденного двигателя [1]. В этом случае выполняется доработка узлов крепления двигателя к пилону, позволяющая увеличить амплитуду относительных смещений двигателя и пилона, а также ввести в конструкцию специальные демпфирующие устройства, существенно увеличивающие рассеивание энергии колебаний в системе. При такой компоновке освобожденный работающий двигатель совмещает функции гироскопического и динамического гасителей колебаний [7]. Очевидно, что необходимо решить задачу выбора рациональных упругодиссипативных параметров подвески двигателя к пилону с точки зрения аэроупругой устойчивости и усталостной прочности ЛА с целью максимально эффективного использования виброгасящих свойств освобожденного двигателя.

3. Метод и построение решения. При заданных инерционно-массовых параметрах двигателя, геометрических характеристиках пилона, кинетическом моменте ротора H_P, упругодиссипативных параметрах крепления двигателя к пилону, используя уравнения Лагранжа, можно сформировать уравнения возмущенного движения упругого ЛА с работающим двигателем на пилоне, как это показано в работе [1]

$$\mathbf{M}_{BD} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{BD} + \mathbf{D}_{BD} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{BD} + \mathbf{B}_{BD} \cdot \mathbf{q}_{BD} = \mathbf{P}_H$$

$$\mathbf{q}_{BD} = \left|\frac{\mathbf{q}_B}{\mathbf{q}_d}\right|, \quad \mathbf{M}_{BD} = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B}_{BD} = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_d \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{BD} = \mathbf{D}_B + \mathbf{D}_d + \mathbf{G}_{BG}, \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{F}_d^T \cdot \mathbf{B}_d^0 \cdot \mathbf{F}_d, \quad \mathbf{B}_d^0 = \mathrm{diag}(b_{d1},\ldots,b_{dj},\ldots,b_{dN})$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{F}_d^T \cdot \mathbf{D}_d^0 \cdot \mathbf{F}_d, \quad \mathbf{D}_d^0 = \mathrm{diag}(d_{d1},\ldots,d_{dj},\ldots,d_{dN})$$

$$\mathbf{G}_{BG} = \mathbf{F}_d^T \cdot \mathbf{G}_G \cdot \mathbf{F}_d, \quad \mathbf{G}_G = H_p \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{d0} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G}_{d0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

где $\mathbf{M}_B$, $\mathbf{D}_B$, $\mathbf{B}_B$ – соответственно, матрицы обобщенных масс, демпфирования и жесткости базовой модели; $\mathbf{D}_d$, $\mathbf{B}_d$ – матрицы демпфирования и жесткости дополнительных упругодиссипативных связей; $\mathbf{G}_{BG}$ – матрица влияния работающего двигателя (гироскопической связанности по обобщенным координатам); $\mathbf{F}_d$ – матрица, составленная из проекций векторов абсолютных линейных и угловых смещений связанной с двигателем системы координат на соответствующие оси этой системы; $\mathbf{P}_H$ – матрица обобщенных внешних сил; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица.

Будем считать, что смещения двигателя относительно пилона описываются обобщенными координатами q_{dj} $(j = 1 \div N)$, где N – суммарное число независимых обобщенных координат ($N \leq 6$). На рис. 2 (1 – пилон, 2 – двигатель, 3 – упругодиссипативные связи) изображены составляющие вектора обобщенных координат, где q_{d1}, q_{d2}, q_{d3} – координаты, описывающие линейные смещения двигателя за счет податливости узлов его крепления к пилону; q_{d4}, q_{d5}, q_{d6} – координаты соответствующих относительных угловых смещений; b_{dk}, d_{dk} $(k = 1 \div 6)$ – парциальные коэффициенты жесткости и демпфирования упругодиссипативных связей. В данном случае дополнительные упругодиссипативные связи моделируют парциальную жесткость и диссипативные характеристики специальным образом спроектированных узлов крепления двигателя к пилону в соответствии с концепцией освобожденного двигателя [1].

Проведенные исследования показали, что наибольший положительный эффект может быть достигнут, когда двигатель обладает определенной свободой угловых перемещений относительно пилона. При этом он выполняет функции и гироскопического, и динамического гасителя колебаний. На рис. 2,d узлы крепления двигателя спроектированы так, что он имеет заданную свободу угловых перемещений относительно пилона вокруг оси $O^{o1}x_1^{o1}$. Положение двигателя относительно пилона задается обобщенной координатой q_{d4}. На рис. 2,e приведена схема освобождения двигателя относительно оси, параллельной оси $O^{o1}x_2^{o1}$. Угловое смещение двигателя относительно пилона задается обобщенной координатой q_{d5}. Двигатель, обладающий свободой относительных угловых перемещений относительно оси, параллельной оси $O^{o1}x_3^{o1}$, изображен на рис. 2, f (обобщенная координата q_{d6}).

Приведенное матричное уравнение описывает возмущенное движение упругого самолета с работающим двигателем и учитывает диссипативные параметры узлов их крепления к пилонам. Предложенный алгоритм учета диссипативных свойств подвески справедлив для случаев малого демпфирования, когда его влиянием на собственные частоты и формы колебаний ЛА можно пренебречь. Кроме того, полученное уравнение учитывает наличие лишь одного двигателя на консоли крыла, очевидно, что не представляет большого труда сформировать ММАУ многодвигательного самолета.

Матричное уравнение возмущенного движения упругого самолета с работающими двигателями использовалось для оценки влияния кинетического момента роторов и упругодиссипативных параметров подвески на аэроупругие и прочностные характеристики крупногабаритного самолета типа Ан-124. Учитывается общая податливость пилона и узлов его крепления к крылу самолета. При вычислении аэроупругих характеристик ЛА система уравнений решалась на собственные значения $\{\lambda_j\} = \{\sigma_j \pm i\omega_j\}$ $(j = 1 \div N_C)$, где σ_j, ω_j – соответственно, коэффициент затухания и частота собствен-

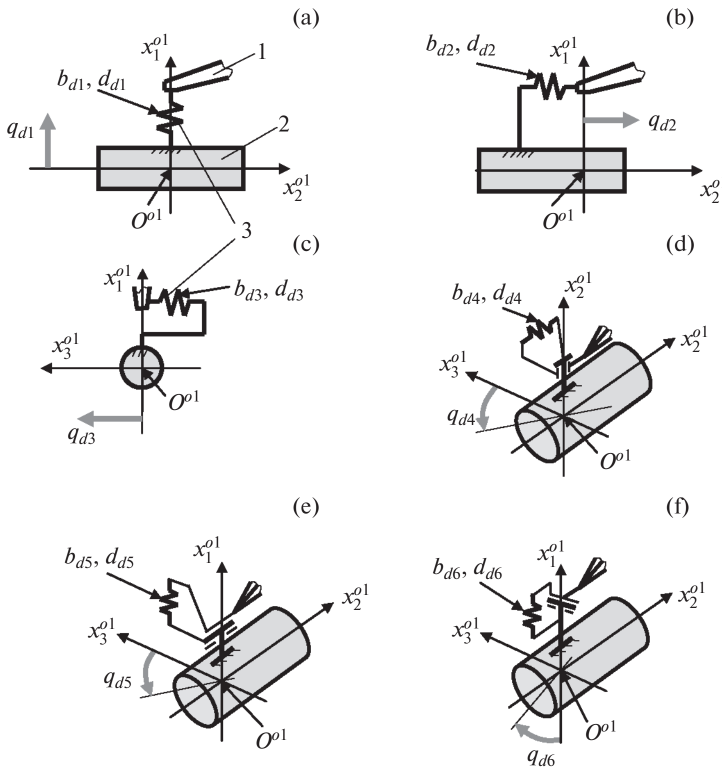


Рис. 2

ных колебаний j-го тона, N_C – число удерживаемых тонов. Логарифмический декремент конструкционного демпфирования принимался равным 0.05.

Оценивалось влияние упругодиссипативных параметров узлов крепления двигателя к пилону на демпфирование двигательных тонов упругих колебаний самолета. В качестве исходной рассматривалась модель ЛА, в которой податливость узлов крепления двигателей выбрана так, чтобы обеспечить соответствие низших парциальных частот колебаний двигателя частотам колебаний базового варианта самолета (f_B^k). В процессе расчетов изменялись коэффициенты жесткости b_{dk} и демпфирования d_{dk} упругодиссипативных элементов, моделирующих податливость и диссипативные свойства узлов крепления двигателя к пилону, и вычислялись коэффициенты затухания двигательных тонов (действительная часть собственных значений).

4. Анализ результатов и примеры. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 3 и 4, где σ_B – коэффициент затухания для тона SD$^\text{B}$ (симметричные вертикальные колебания внешних двигателей и кручение крыла); σ_V – коэффициент затухания для тона SD$^\text{V}$ (симметричные боковые колебания внешних двигателей); $\bar{f}_{dk} = f_{dk}/f_B^k$ ($k = 1 \div 6$) – относительная парциальная собственная частота и δ_{dk} ($k = 1 \div 6$) – логарифмический декремент затухания колебаний по k-й обобщенной координате относительных смещений двигателя q_{dk}, определяемые параметрами b_{dk} и d_{dk} (рис. 2). Данные графики построены при следующих исходных значениях: $\bar{H}_p = 1.0$; $V_\infty = 0$.

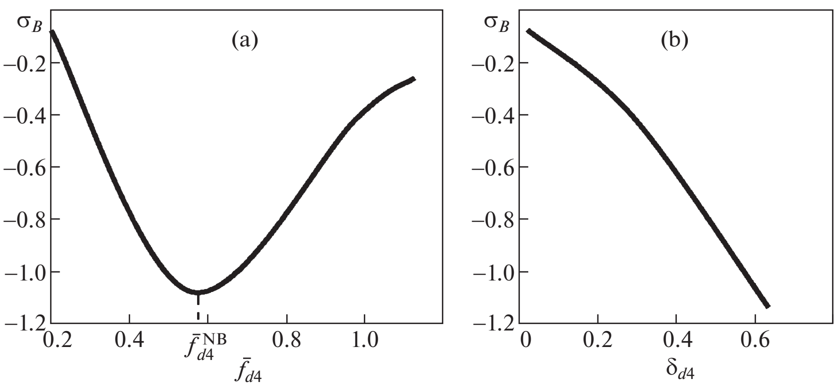


Рис. 3

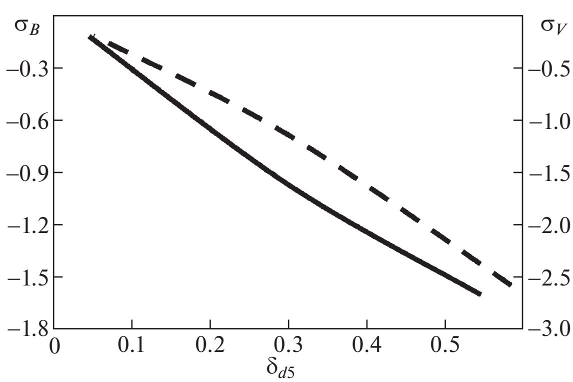


Рис. 4

Причем $\overline{H}_p = H_p/H_{p\max}$, где H_p – текущее значение кинетического момента, определяемое режимом работы двигателя, $H_{p\max}$ – соответствующее максимальное значение. Для рис. 3,a значение логарифмического декремента затухания $\delta_{d4} = 0.6$, для рис. 3,b $\bar{f}_{d4} = \bar{f}_{d4}^{NB}$, на рис. 4 сплошной линией показано изменение σ_B при $\bar{f}_{d5} = \bar{f}_{d5}^{NB}$, штриховой – зависимость σ_V от логарифмического декремента затухания δ_{d5} при $\bar{f}_{d5} = \bar{f}_{d5}^{NV}$.

Анализ приведенных результатов показывает наличие некоторой рациональной (“N” – настроечной) жесткости подвески $\bar{f}_{dk}^{NB}$ ($\bar{f}_{dk}^{NV}$), при которой коэффициенты затухания двигательных тонов σ_B и σ_V достигают своего максимального по абсолютной величине значения. В общем случае $\bar{f}_{dk}^{NB}$ и $\bar{f}_{dk}^{NV}$ не совпадают.

Положительный эффект, наблюдаемый при настроечной жесткости подвески и парциальном логарифмическом декременте затухания колебаний $\delta_{dk} > 0.1$, обусловлен тем, что двигатель совмещает функции инерционного динамического гасителя колебаний и гироскопического стабилизатора, перераспределяя энергию колебаний

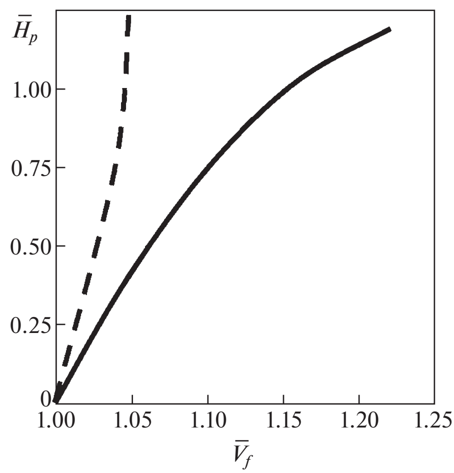


Рис. 5

между обобщенными координатами и рассеивая ее. Следует подчеркнуть, что известные схемы подвески, у которых диссипация энергии колебаний осуществляется лишь за счет внутреннего и конструкционного демпфирования, не позволяют реализовать выявленный эффект, следовательно, требуются принципиальные конструктивные доработки узлов крепления в соответствии с методом освобожденного двигателя.

Учет параметров работающего двигателя, изменение характеристик подвески двигателя к пилону приводят к изменению частот и форм собственных упругих колебаний самолета, перераспределению энергии колебаний между обобщенными координатами и изменению фазовых сдвигов флаттирующих тонов, что в конечном итоге оказывает влияние на динамическую аэроупругую устойчивость ЛА, а также на повторяемость динамических нагрузок. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов, полученные с использование ММАУ крупногабаритного самолета типа Ан-124.

На рис. 5 приведены зависимости относительной критической скорости флаттера $\bar{V}_f = V_f/V_{f0}$ изгибно-крутильной (штриховая линия) и пилонной (сплошная линия) форм от значения относительного кинетического момента $\bar{H}_p$, где V_{f0} – значение критической скорости флаттера для базовой модели. Гироскопические эффекты, как следует из графиков, в большей степени проявляются на пилонных формах флаттера и практически не влияют на классический изгибно-крутильный флаттер.

Исследования показали, что значительное влияние на характеристики аэроупругой устойчивости ЛА оказывает жесткость подвески при доработке узлов крепления двигателя. Так, на рис. 6 приведена зависимость критической скорости флаттера $\bar{V}_f$ от парциальной собственной частоты колебаний двигателя $\bar{f}_{d4}$ по обобщенной координате q_{d4} при значении логарифмического декремента $\delta_{d4} = 0.9$, где PF – пилонный флаттер; IKF – изгибно-крутильный флаттер. В рассматриваемом диапазоне изменения $\bar{f}_{d4}$ при модели неработающего двигателя (штриховая линия) происходит смена формы флаттера, являющейся критической. При учете работающих двигателей (сплошная линия) критической является изгибно-крутильная форма во всем диапазоне значений $\bar{f}_{d4}$, причем при $\bar{f}_{d4} < 0.75$ и $\bar{f}_{d4} > 0.95$ $\bar{V}_f$ выше, чем при неработающих двигателях, а при $0.75 < \bar{f}_{d4} < 0.95$ – ниже. Следовательно, при выборе настроечной

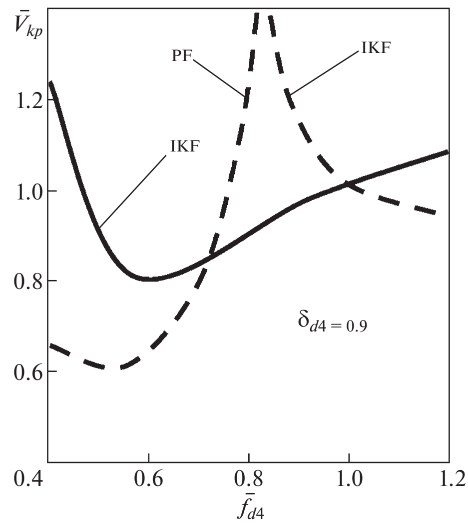


Рис. 6

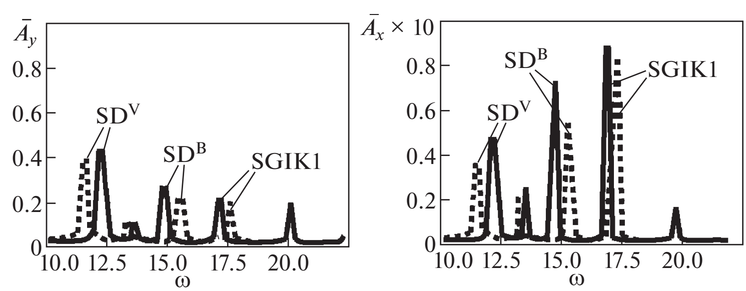


Рис. 7

парциальной жесткости узлов подвески двигателя необходимо исследовать систему на динамическую аэроупругую устойчивость.

Особую важность при вычислении интегральных аэроупругих и прочностных характеристик самолета представляют исследования динамической реакции ЛА с работающими двигателями на внешние воздействия. Так, на рис. 7 показаны амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) по симметричным упругим тонам для концевого сечения крыла самолета Ан-124 при приложении вертикальной сосредоточенной силы в центре масс ЛА (ω в рад/с), где SGIKl – первый тон симметричных горизонтально-изгибных колебаний крыла. Исходные данные: $V_\infty = 0$; заправка топлива $\bar{G}_T = 13.4\%$. Сплошной линией показаны АЧХ при неработающих двигателях, штриховой – при работающих. Нормировка проведена по максимальной амплитуде вертикальных колебаний крыла $A_y^{\max}$, тогда $\bar{A}_x = A_x/A_y^{\max}$ – нормированная АЧХ горизонтальных колебаний концевого сечения крыла. Как следует из графиков, при учете работающих двигателей за счет перераспределения энергии колебаний между обобщенными координатами возрастают диссипативные свойства системы, а также наблюдается эффект

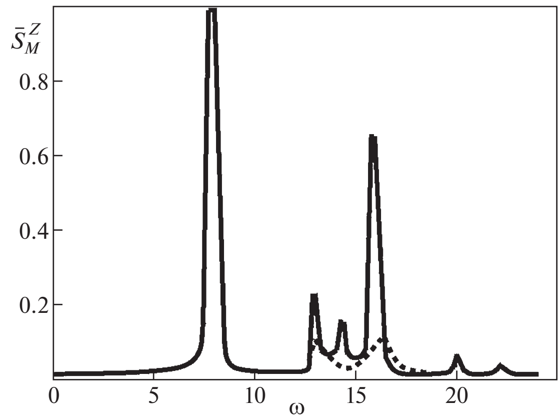


Рис. 8

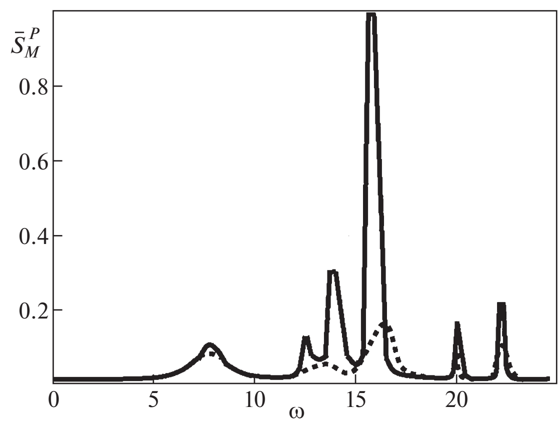


Рис. 9

расхождения собственных частот гироскопически связанных упругих тонов, в частности, SD^B и SD^V.

Очевидно, что снижение уровня и повторяемости динамических нагрузок, действующих на систему крыло—пилон—двигатель, приводит к уменьшению усталостной повреждаемости элементов конструкции. Важной количественной характеристикой нагруженности конструкции ЛА является спектральная плотность изгибающего момента в расчетных сечениях. Некоторые результаты расчета таких характеристик приведены на рис. 8 и 9.

В частности, на рис. 8 изображена нормированная спектральная плотность изгибающего момента $\bar{S}_M^Z$ в сечении крыла самолета Ан-124 (ω в рад/с), соответствующем месту крепления внешнего двигателя, при рулении самолета по аэродрому со скоростью $V_0 = 10$ м/с и при заправке топливом $\bar{G}_T = 0$.

Сплошной линией показана кривая при исходной схеме крепления двигателя, штриховой – для освобожденного относительно горизонтальной оси (рис. 2,е) по обобщенной координате q_{d5} и при рациональной парциальной жесткости и коэффициенте демпфирования $\delta_{d5} = 0.9$. Аналогичная зависимость для корневого сечения пилона внешнего двигателя при полете самолета в турбулентной атмосфере $\bar{S}_M^P$ со скоростью $V_0 = 150$ м/с приведена на рис. 9.

Оценка влияния освобожденного двигателя на усталостную повреждаемость элементов конструкции крыла проводилась в соответствии с гипотезой спектрального суммирования усталостных повреждений. В частности, расчеты показали, что при доработке узлов крепления двигателя к пилону и рациональных упругодиссипативных параметрах подвески можно ожидать снижения относительной усталостной повреждаемости нижней панели крыла на 10–15%.

5. Заключение. В работе получена математическая модель аэроупругости крупногабаритного транспортного самолета, позволяющая учитывать влияние кинетического момента роторов двигателей, а также исследовать влияние упругодиссипативных параметров узлов крепления двигателей к пилонам на интегральные аэроупругие и прочностные характеристики самолета. Доказана целесообразность реализации концепции освобожденного двигателя для повышения аэроупругой устойчивости и снижения уровня усталостной повреждаемости элементов конструкции ЛА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овчинников В.В., Петров Ю.В.* Численные методы исследования аэроупругости летательных аппаратов: монография. М: ИД Академии имени Н.Е. Жуковского, 2017. 160 с.
2. *Rodden, William P.* Theoretical and Computational Aeroelasticity. Crest Publishing, 1st Edition, 2011. 347p.
3. *Stefan Waitz, Holger Hennings*. The Aeroelastic Impact of Engine Thrust and Gyroscopics on Aircraft Flutter Instabilities. International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics. June 28–July 02. 2015. P. 1–15.
4. *Michimasa Fujino, Hiroki Oyama, Hideo Omotani*. Flutter Characteristics of an Over-the-Wing Engine Mount Business-Jet Configuration/ 4th AiAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 8-10 April 2003, Norfolk, Virginia (AIAA 2003-1942). P. 1–12.
5. *Libo Wang, Zhigiang Wan, Qiang Wu, Chao Yang*. Aeroelastic Modeling and Analysis of the Wing/Engine System of a Large Aircraft. Procedia Engineering 31 (2012). P. 879–885.
6. *John Skelly, Alexis Laporte.* Engine pylon for aircraft. US 20110204179 A1 (патент) Aug 25, 2011. 13 p.
7. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1981. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. К.В. Фролова, 1981. 456 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 129–147

УДК 623.093,539.3,539.411.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ДЖОНСОНА–КУКА ПРИ РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОБОЙНИКОВ С ГОМОГЕННЫМИ И КОМПОЗИЦИОННЫМИ ПРЕГРАДАМИ

© 2021 г. Е. В. Гаврилов[a], Н. А. Горелый[a], Н. А. Кулаков[a,*], И. В. Паниченко[a]

[a] *Московский Политех, Москва, Российская Федерация*

**e-mail: kulakov@mami.ru*

Поступила в редакцию 06.11.2019 г.
После доработки 15.02.2020 г.
Принята к публикации 25.03.2020 г.

В работе представлены результаты расчетно-экспериментального исследования взаимодействия структурированных пробойников, соответствующих конструкции отечественных и зарубежных боеприпасов стрелкового оружия с гомогенной стальной и композиционной броней. Особое внимание было уделено тщательному моделированию поведения материалов пробойника и преграды при динамическом нагружении.

Для подтверждения достоверности используемых расчетных моделей были проведены испытания путем обстрела реальных образцов защиты, результаты которых показали достаточно хорошее совпадение с данными численных экспериментов.

Разработанные модели позволяют на стадии проектирования конструкции предложить эффективную защиту, а также оценить уровень бронирования существующих зарубежных образцов. Расчеты проводились с использованием программного комплекса LS-DYNA.

Ключевые слова: численное моделирование, испытания обстрелом, модель Джонсона–Кука модель Джонсона–Холмквиста, бронебойно-зажигательная пуля, стальная броня, композиционная броня

DOI: 10.31857/S0572329921010050

1. Введение. Разработка адекватных математических моделей высокоскоростного процесса взаимодействия структурированных пробойников (пуль) и существенно неоднородных преград (композиционной брони) является сложной и актуальной проблемой механики твердого деформируемого тела. Сложность проблемы состоит в необходимости точного моделирования конструкции пули, состоящей из высокопрочного сердечника, рубашки и наконечника, а также в особенности моделирования композиционной брони, состоящей из керамических и стальных элементов с различными механизмами взаимодействия с пробойником. Высокая скорость взаимодействия (порядка 1000 м/сек) требует детального описания свойств пробойника и преграды посредством моделей материалов, способных учитывать влияние больших деформаций, высоких скоростей деформаций и температур [1].

Актуальность проблемы заключается в том, что при создании и модернизации легкобронированной техники (бронетранспортеров, вертолетов, бронекатеров) остро стоит вопрос о проектировании минимальной по массе и максимальной по уровню баллистической стойкости брони. Вариативность задачи заключается в необходимости защиты от различных боеприпасов с различными скоростями воздействия, а также в возможности использования различных материалов (керамика, сталь, алюминий, титан и т.п.) с различными характеристиками самих материалов, варьирования их толщинами, а также различного конструктивного исполнения (разнесение слоев и т.п.). В связи с вышесказанным на первое место при проектировании выходит необходимость создания соответствующих математических моделей, позволяющих адекватно с использованием тестового экспериментального подтверждения производить многовариантные расчеты сложной композиционной брони.

На первом этапе отрабатывалась модель взаимодействия пули со стальной броней. Напряженное состояние в таких моделях обычно выражается через эквивалентное напряжение фон-Мизеса, являющееся функцией накопленной пластической деформации, скорости деформации и абсолютной температуры [2–5]. На практике для указанных целей широко используется модель Джонсона–Кука [2, 3]. Указанная модель содержит в описании большое количество параметров для определения которых проводят специальные испытания образцов при разных температурах и скоростях деформации, например, методом стержней Гопкинсона [6–8]. В литературе приводятся данные лишь для ограниченного круга материалов [2, 3, 5–11], при этом параметры одного материала, взятые из разных источников могут различаться весьма значительно. В подобной ситуации приходится определять параметры модели исходя из условия наилучшего совпадения с известными экспериментальными данными.

Сталь Miilux 500 по своим характеристикам приблизительно соответствует стали Hardox 400 [11]. Параметры используемой модели материала для стали Hardox 400 находятся в открытом доступе, поэтому в первом приближении для расчетов было решено использовать их и для стали Miilux 500.

Разработка расчетных моделей велась последовательно с усложнением конструкции брони на каждом этапе. Вначале была отлажена модель взаимодействия пуль с однослойной стальной броней. С этой целью были проведены численные и натурные испытания, которые дали отправные точки для отладки моделей.

2. Теоретическое описание моделей материалов. Основное воздействие на броню оказывает сердечник пули, материал которого задавался моделью Джонсона–Кука с уравнением состояния в форме Ми-Грюнайзена.

Согласно данной модели, предел текучести материала меняется в зависимости от накопленной пластической деформации, скорости деформирования и температуры [3]:

$$\sigma_T = (A + B\varepsilon_p^n)(1 + C\ln\varepsilon_p^*)(1 - T^{*m}) \tag{2.1}$$

где ε_p – эффективная пластическая деформация; $T^* = (T - T_r)/(T_m - T_r)$– гомологическая температура; T_m – температура плавления; T_r – комнатная температура; $\varepsilon_p^* = \dot{\varepsilon}_p^*/\dot{\varepsilon}_0$ – нормализованная скорость пластической деформации; A, B, C, n, m, ε_0 – параметры модели.

Изменение температуры вычисляется по формуле:

$$\Delta T = \frac{1}{\rho C_p}\int \sigma d\varepsilon_p$$

где ρ – плотность, C_p – удельная теплоемкость.

Формула (2.1), по сути, представляет собой кривую деформирования материала.

Первая часть выражения (2.1) в скобках описывает напряжение как функцию деформации при $\varepsilon_p^* = 1\ \text{с}^{-1}$ и $T = 20°$C (т.е. для лабораторных экспериментов при комнатной температуре). Константа A является начальным пределом текучести материала при медленном нагружении, параметры B и n отвечают за деформационное упрочнение.

Вторая часть выражения (2.1) показывает влияние скорости деформации на предел текучести материала.

Третья часть описывает термическое разупрочнение, при котором предел текучести снижается до нуля при достижении температуры плавления.

Для описания разрушения материала Джонсона-Кука в использованном для численного моделирования пакете LS-DYNA по умолчанию используется критерий, согласно которому разрушение конечного элемента происходит, когда параметр поврежденности D становится равным единице:

$$D = \frac{1}{\varepsilon_f} \sum_i \Delta\varepsilon_p^i$$

где $\Delta\varepsilon_p^i$ – приращение эффективной пластической деформации в конечном элементе на i-м шаге интегрирования по времени. Величина ε_f вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_f = \left(D_1 + D_2 \exp\left(D_3 \frac{p}{\sigma_{\text{eff}}}\right)\right)\left(1 + D_4 \ln \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)\left(1 + D_5 \frac{T - T_r}{T_m - T_r}\right)$$

где D_1, ..., D_5 – параметры материала; σ_{eff} – эффективное напряжение; p – давление в рассматриваемом конечном элементе.

Важную роль при моделировании высокоскоростного взаимодействия твердых тел играет вид уравнения состояния, используемое для определения зависимости давления от объемной деформации.

В частности, уравнение состояния отвечает за скорость распространения ударной волны [12]. В нашем случае используется уравнение в форме Ми-Грюнайзена:

$$\frac{\rho_0 C_0^2 \mu \left(1 + \left(1 - \frac{\gamma_0}{2}\right)\right)\mu - \frac{a}{2}\mu^2}{1 - (S_1 - 1)\mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2}} + (\gamma_0 + a\mu) U_m, \quad p > 0$$

$$\rho_0 C_0^2 \mu + (\gamma_0 + a\mu) U_m, \quad p < 0$$

где ρ_0 – плотность; C_0 – объемная скорость звука; $\mu = V_0/V - 1$ – объемная деформация; γ_0 – безразмерный коэффициент Грюнайзена; – коэффициент, характеризующий наклон графика зависимости коэффициента Грюнайзена от объема; U_m – удельная внутренняя энергия (отнесенная к начальному объему); S_1, S_2, S_3 – безразмерные коэффициенты наклона ударной адиабаты.

Для моделирования поведения стальной пластины использовалась модифицированная версия модели Джонсона–Кука.

Данная модель определяет следующее соотношение для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{eqv} = (A + B\varepsilon_{eqv}^n)(1 + \dot{\varepsilon}_{eqv}^*)^C (1 - T^{*m})$$

где ε_{eqv} – эквивалентная пластическая деформация; $\dot{\varepsilon}_{eqv}^* = \dot{\varepsilon}_p/\dot{\varepsilon}_0$ – нормированная эквивалентная скорость пластической деформации; ε_0 – справочная скорость деформации, полученная в квазистатических испытаниях; A, B, n, C, m – константы, зависящие от материала; T^* – гомологическая температура.

Таблица 1

Модель материала Джонсона–Кука для пуль						Модифицированная модель материала Джонсона–Кука для пластины [11]	
Параметр модели	Пуля Б-32 7.62 мм			Пуля M193 5.56 мм			
	Стальной сердечник [6, 13]	Свинцовая рубашка [14]	Латунная оболочка [13]	Свинцовый сердечник [16, 17]	Латунная оболочка [13]	Параметр модели	Значение
ρ, кг/м^3	7850	11340	8960	11340	8960	ρ, кг/м^3	7850
E, ГПа	210	1	124	1	124	E, ГПа	210
G, ГПа	80	7	46	7	46	μ	0.33
μ	0.33	0.44	0.34	0.44	0.34	A, ГПа	1.35
A, ГПа	1.658	27.6	90	120	90	B, ГПа	0.362
B, ГПа	20.86	110	292	800	292	n	1
n	0.651	0.52	0.31	1	0.31	C	0.0108
C	0.0076	0.116	0.025	0.12	0.025	m	1
m	0.35	0.00116	1	1	1	T_m, K	1800
Tm, K	1800	760	1356	760	1356	T_r, K	293
Tr, K	293	293	293	293	293	C_p, Дж/кгK	452
Cp, Дж/кгK	455	124	386	124	386	χ	0.9
D_1	–	–	0.54	–	0.54	$\dot{\varepsilon}_0$, с$^{-1}$	5e-4
D_2	–	–	4.89	–	4.89	α, K^{-1}	1.2e-5
D_3	–	–	–3.03	–	–3.03	T_c, K	1620
D_4	–	–	0.014	–	0.014	W_{cr}, МПа	2013
D_5	–	–	1.12	–	1.12		

Изменение температуры при адиабатическом нагревании вычисляется по формуле [18]:

$$\Delta T = \int_0^{\varepsilon_{eqv}} \chi \frac{\sigma_{eqv}}{\rho C_p} d\varepsilon_{eqv}$$

где ρ – плотность материала, C_p – удельная теплоемкость, χ – коэффициент Тейлора-Куни (представляет собой долю работы пластической деформации, превращаемой в тепло).

Для описания разрушения материала используется критерий, предложенный Кокрофтом и Латэмом [19]:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{eqv}} \langle \sigma_1 \rangle d\varepsilon_{eqv} \le W_{cr}$$

где σ_1 – наибольшее главное напряжение, $\langle \sigma_1 \rangle = \sigma_1$, когда $\sigma_1 \ge 0$ и $\langle \sigma_1 \rangle = 0$, когда $\sigma_1 < 0$; W_{cr} – общая работа пластической деформации при разрушении.

Численные значения параметров моделей материалов приведены в табл. 1 и 2.

Для керамического элемента выбрана модель Джонсона–Холмквиста, моделирующая поведение хрупких материалов [20–25].

Таблица 2

Параметр	Пуля Б-32 7.62 мм			Пуля M193 5.56 мм	
	Стальной сердечник [6, 13]	Свинцовая рубашка [14]	Латунная оболочка [13]	Свинцовый сердечник [16, 17]	Латунная оболочка [13]
C_0, м/с	4570	2050	3940	2006	3940
S_1	1.49	1.48	1.49	1.429	1.49
S_2	0	0	0	0	0
S_3	0	0	0	0	0
γ_0	1.93	1.97	1.99	2.74	1.99

Прочность хрупкого материала описывается в виде безразмерной плавно меняющейся функции (рис. 1,а) напряжения неповрежденного материала и напряжения разрушенного материала, включающей в себя также описание зависимости давления от объема и модель повреждения, которая переносит материал из неповрежденного состояния в разрушенное. Нормализованное эквивалентное напряжение:

$$\sigma^* = \sigma_i^* - D(\sigma_i^* - \sigma_f^*)$$

где σ_i^* – нормализованное эквивалентное напряжение неповрежденного материала, σ_f^* – нормализованное эквивалентное напряжение разрушенного материала, D – параметр поврежденности ($0 < D < 1$).

Пока материал не начал разрушаться, т.е. $D = 0$, поведение материала описывается кривой неповрежденного материала:

$$\sigma_i^* = A(P^* + T^*)^N \left(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*\right)$$

где * означает, что величина нормализована, т.е. $P^* = P/P_{HEL}$ – давление, нормализованное по давлению P_{HEL}, $T^* = T/P_{HEL}$ – максимальное растягивающее гидростатическое давление, нормализованное по давлению P_{HEL}, $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$ – скорость деформации, $\dot{\varepsilon}$ – действительная скорость деформации, $\dot{\varepsilon}_0 = 1$ с$^{-1}$ – справочная скорость деформации, A, C, N – константы.

Нормализованное эквивалентное напряжение в общей форме:

$$\sigma^* = \sigma/\sigma_{HEL}$$

где σ – действительное эквивалентное напряжение, σ_{HEL} – эквивалентное напряжение, соответствующее пределу упругости Гюгонио.

HEL (Hugoniot Elastic Limit) – предел упругости Гюгонио, при котором материал переходит из упругого состояния в упруго-пластическое, а давление, соответствующее этому переходу, обозначается P_{HEL}. Значения P_{HEL} варьируются от 0.2 до 20 ГПа.

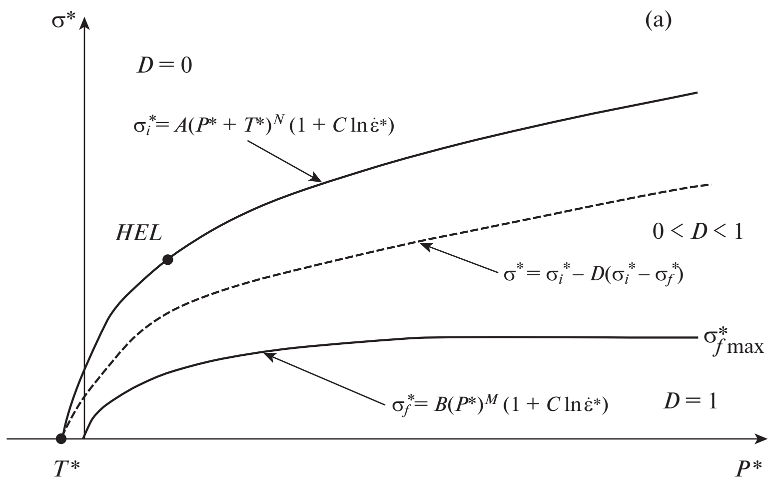
Общее выражение для эквивалентного напряжения:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]}$$

Аналогично для эквивалентной скорости деформации:

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\right]}$$

При переходе из упругой области в пластическую, в материале начинают накапливаться повреждения. Величина поврежденности зависит от параметра поврежденно-



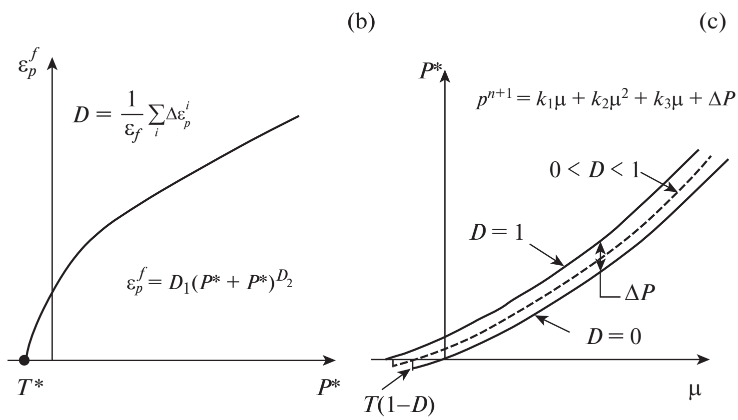


Рис. 1

сти D и уровня накопленной пластической деформации и записывается аналогично модели разрушения Джонсона–Кука:

$$D = \frac{1}{\varepsilon_p^f}\sum_i \Delta\varepsilon_p^i$$

где $\varepsilon_p^f = f(P)$ – пластическая деформация разрушения под действием постоянного давления P (рис. 1,b). В общем виде:

$$\varepsilon_p^f = D_1\left(P^* + T^*\right)^{D_2}$$

где D_1 и D_2 – константы. Параметр D_1 управляет скоростью накопления повреждений. Если он задается равным нулю, то разрушение происходит за один счетный шаг, то есть мгновенно.

Материал не испытывает пластических деформаций при $P^* = -T^*$. С повышением P^* возрастает и ε_p^f.

Гидростатическое давление при $D = 0$ вычисляется следующим образом:

$$p = k_1\mu + k_2\mu^2 + k_3\mu^3 \tag{2.2}$$

где k_1, k_2, k_3 – константы, $\mu = \rho/\rho_0 - 1$ для текущей ρ и начальной ρ_0 плотности. Для растягивающего давления ($\mu < 0$) уравнение (2.2) преобразуется в следующее:

$$p = k_1\mu$$

Когда начинает накапливаться повреждение, т.е. $D > 0$, происходит смятие. Эффект смятия сопровождается добавлением приращения давления ΔP:

$$p^{n+1} = k_1\mu + k_2\mu^2 + k_3\mu^3 + \Delta P$$

Приращение давления меняется от нуля при $D = 0$ до $\Delta P_{\max}$ при $D = 1$. Постепенное снижение внутренней упругой энергии (ввиду уменьшения девиатора тензора напряжений) преобразуется в потенциальную внутреннюю энергию путем постепенного повышения ΔP. Уменьшение в девиаторе тензора напряжений происходит из-за снижения прочности при возрастании повреждений, как показано на рис. 1,c.

Увеличение давления при накоплении повреждений связано с тем, что часть упругой энергии β превращается в гидростатическую потенциальную энергию (давление):

$$\Delta P_{t+\Delta t} = -K_1\mu_{t+\Delta t} + \sqrt{\left(K_1\mu_{t+\Delta t} + \Delta P_t\right)^2 + 2\beta K_1 \Delta U}$$

Потери энергии:

$$\Delta U = \frac{(\sigma_{el})^2 - (\sigma)^2}{12G}$$

где $\sigma_{el} = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$ – эффективное напряжение в упругой области, σ – эффективное напряжение в пластической области.

Достигнув кривой σ_i^*, т.е. $\sigma_{el}^* \geq \sigma_i^*$ начинает накапливаться повреждение D за счет приращения пластической деформации $\Delta\varepsilon_p$:

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{\sigma_{el}^{n+1} - (\sigma_i^{n+1} - D^n(\sigma_i^{n+1} - \sigma_f^{n+1}))}{3G}$$

где $\sigma_f^* = MIN[B(P^*)^M(1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*), \sigma_f^{\max}]$ – кривая, описывающая поведение разрушенного материала; B, M, C, $\sigma_f^{\max}$ – константы.

Если значение $\sigma_f^* > \sigma_f^{\max}$, то полагается $\sigma_f^* = \sigma_f^{\max}$.

Зная параметр поврежденности D, кривые σ_i^* и σ_f^*, можно найти кривую, описывающую поведение материала:

$$\sigma^{*n+1} = \sigma_i^{*n+1} - D^{n+1}(\sigma_i^{*n+1} - \sigma_f^{*n+1})$$

Величина параметра поврежденности меняется от 0 до 1. Если параметр поврежденности достиг значения $D = 1$, вещество разрушено, и поведение материала описывается кривой σ_f^*.

Параметры модели для наиболее часто используемой броневой керамики Al_2O_3 [23, 24] представлены в табл. 3.

Бронебойно-зажигательная пуля Б-32 состоит из стального сердечника, свинцовой рубашки и латунной оболочки (рис. 2,a), имеет массу 10.4 г. Пуля M193 состоит из свинцового сердечника и медной оболочки (рис. 2,b), имеет массу 3.56 г.

Таблица 3

Параметр	Значение
Плотность, ρ	3700 кг/м^3
Модуль сдвига, G	90.16 ГПа
Константы	
A	0.93
B	0.31
C	0.007
m	0.6
n	0.6
Скорость деформации, EPSI	1
Гидродинамический предел прочности, T	0.462 ГПа
Предел упругости Гюгонио HEL	3.48 ГПа
Давление P_{HEL}	1.46 ГПа
Параметры повреждения	
D_1	0.0125
D_2	1
Коэффициенты давления	
K_1	130.95 ГПа
K_2	0
K_3	0
BETA	1

Расчеты проводились в программном комплексе LS-DYNA в ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) постановке. Задача рассматривалась в осесимметричной постановке с выбором следующих граничных условий: жесткое закрепление модели броневой пластины на краю и разрешенное вертикальное перемещение вдоль оси симметрии.

Конечно-элементная сетка была подготовлена с помощью препроцессора Altair HyperMesh. Использовались четырехузловые прямоугольные конечные элементы с длиной грани 0.2 мм.

3. Тестовые расчеты. Для отработки модели пробития однородной стальной брони Miilux 500, использовались данные, представленные в технической спецификации на указанную сталь. Согласно спецификации, сталь Miilux 500 толщиной 13+ мм выдерживает попадание пули Б-32 калибра 7.62 мм при стрельбе из винтовки СВД с дистанции 30 м, в то же время указанная пуля пробивает лист той же стали толщиной 10+ мм. Знак 13+ мм означает, то, что броневая сталь всегда катается с гарантированным положительным допуском, обычно 13.4—13.5 мм.

Согласно стандарту НАТО STANAG 4569 [26] определяющему процедуры испытаний на противопульную стойкость, скорость подлета к броне для пули Б-32 должна составлять 854 м/с с допуском ±20 м/с. В расчетах была задана скорость 874 м/с (максимально допустимая).

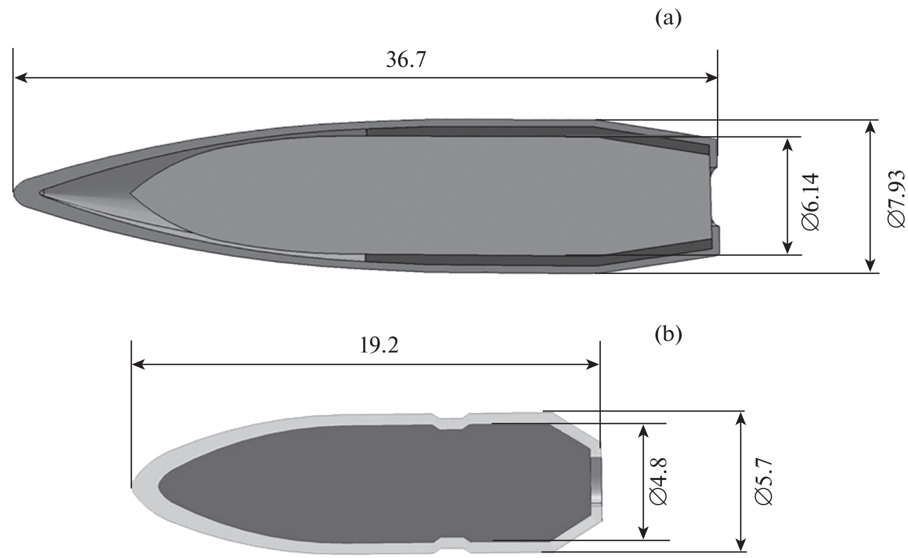


Рис. 2

На рис. 3 изображен результат моделирования воздействия пули Б32 на лист стали Hardox 400 толщиной 10 мм, на рис. 4 – остаточная скорость пули после пробития (около 100 м/с). На рис. 5 изображен результат моделирования воздействия пули Б32 на лист стали Hardox 400 толщиной 13 мм.

Из приведенных выше результатов видно, что путем варьирования параметров модели материала сердечника пули, позаимствованных из ранее опубликованных источников [6, 13, 14, 16, 17], удалось добиться выполнения вышеописанных условий.

4. Расчетно-экспериментальные исследования. Так как в работе интересовала противопульная стойкость реальной конструкции, которая была выполнена из стали Miilux 500 толщиной 6+ мм и возможные варианты ее усиления, были проведены натурные и виртуальные испытания образца стали. Рассматривался вариант воздействия на указанную сталь пули M193 при выстреле из баллистического ствола, соответствующего стволу винтовки M16.

Обстрел образца проводился с дальности 30 м согласно схеме, изображенной на рис. 6. После каждого выстрела проводился осмотр, оценивался результат воздействия пуль (пробитие/НЕпробитие) для каждого выстрела.

Фиксировалась скорость пуль V_5, измеренная на расстоянии 5 метров от дульного среза оружия. Результаты испытаний представлены в табл. 4 и на рис. 7.

Таблица 4

Используемое оружие	Средство поражения	№ выстрела	V_5, м/с	Результат	Примечания
Баллистический ствол калибра 5.56 × 45 мм	Пули M193 патронов калибра 5.56 × 45 мм	2	989	Пробитие	–
		3	984	Пробитие	–

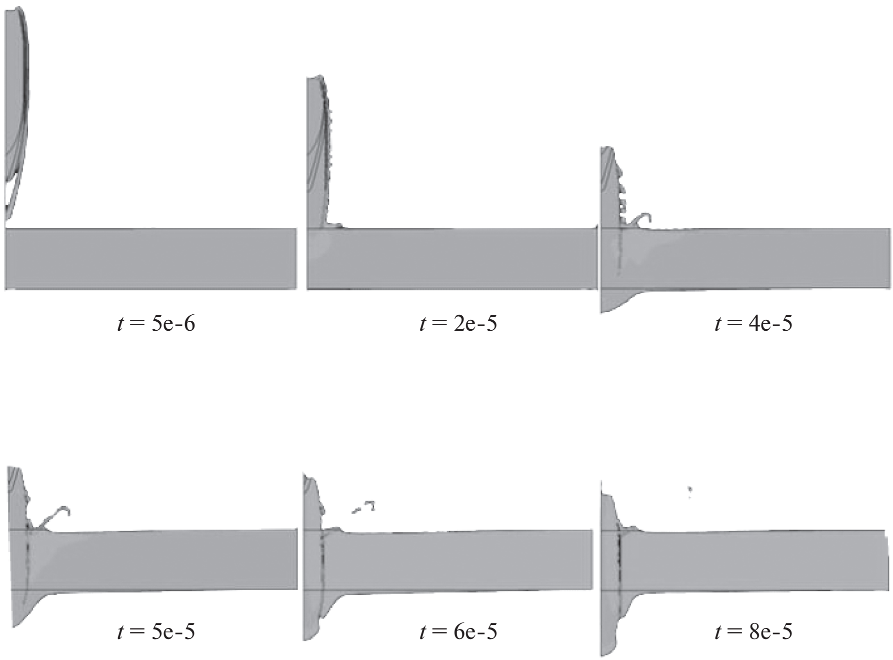


Рис. 3

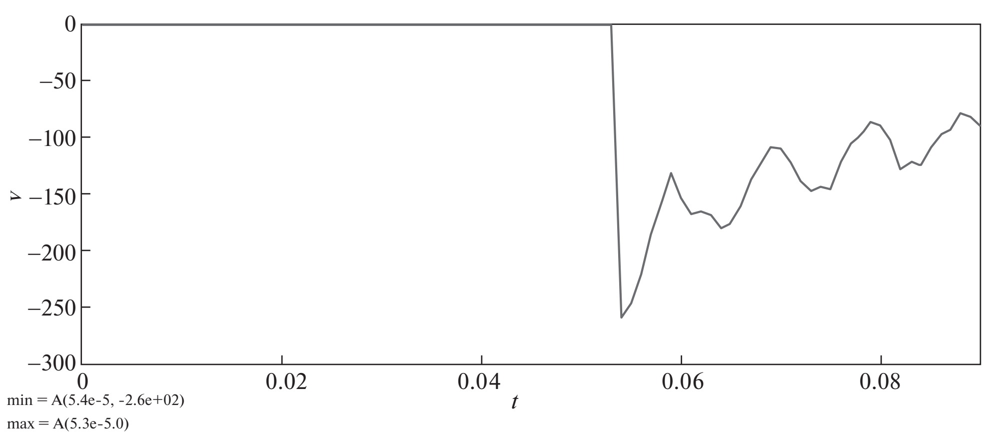


Рис. 4

Так как измерение скорости пули осуществлялось на расстоянии 5 м от ствола, то скорость удара о преграду, находящуюся в 30 м от среза ствола, пересчитывалась для расстояния 25 м от измерителя скорости (всего 30 м), по формуле (4.1):

$$V_{(25)} = V_{(5)} e^{-(X\rho C\pi \mathrm{D}^2)/8m} \tag{4.1}$$

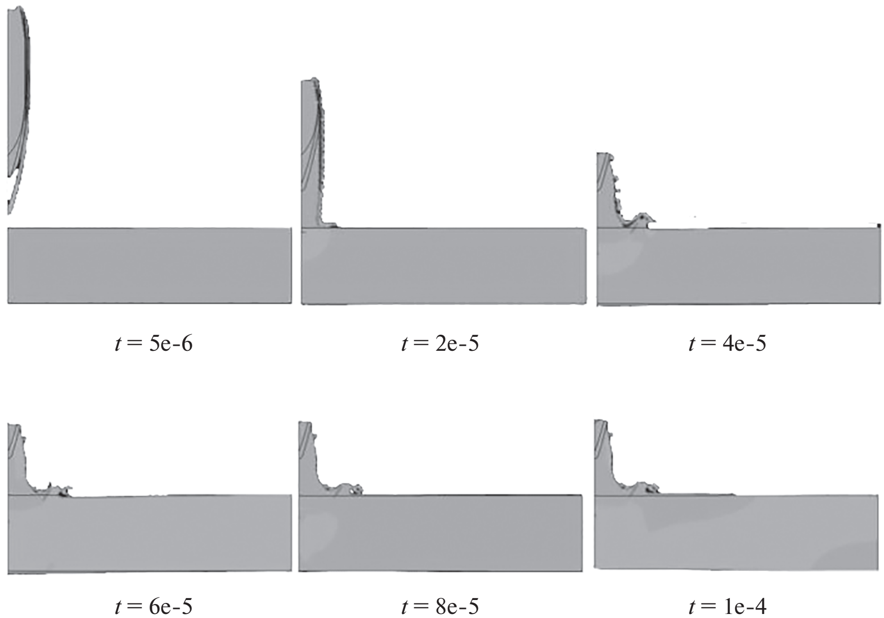


Рис. 5

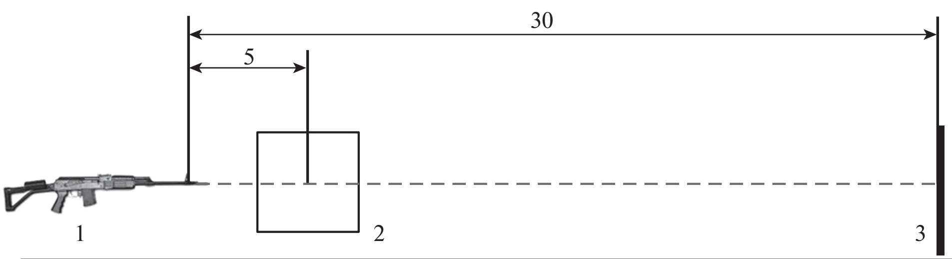


Рис. 6

где $V_{(25)}$ – скорость пули при попадании в образец брони; $V_{(5)}$ – скорость, измеренная датчиком; X – расстояние между точками замера и встречи пули с образцом брони (м), в нашем случае 25 м; ρ – плотность воздуха – 1.225 кг/м^3; C – коэффициент трения – 0.33; D – диаметр пули – 0.0057 м; m – масса пули – 0.00356 кг.

Например, если скорость пули М193 при выстреле из винтовки М16, измеренная на расстоянии 5 м от среза ствола, была равна 989 м/с, тогда скорость удара о броню будет:

$$V_{(25)} = 989e^{-25\cdot 1.225\cdot 0.33\cdot 3.14\cdot 0.0057/8\cdot 0.00356} = 953.81\ [\text{м/с}]$$

В соответствии со стандартом STANAG 4569 скорость удара пули М193 должна быть, 937 ± 20 м/с. В расчетах принималась скорость удара для пули М193 – 957 м/с.

Согласно данным эксперимента пуля М193 с 30 м не пробивает лист стали Miilux 500 толщиной 6 мм при специально пониженной начальной скорости 823 м/с (ско-

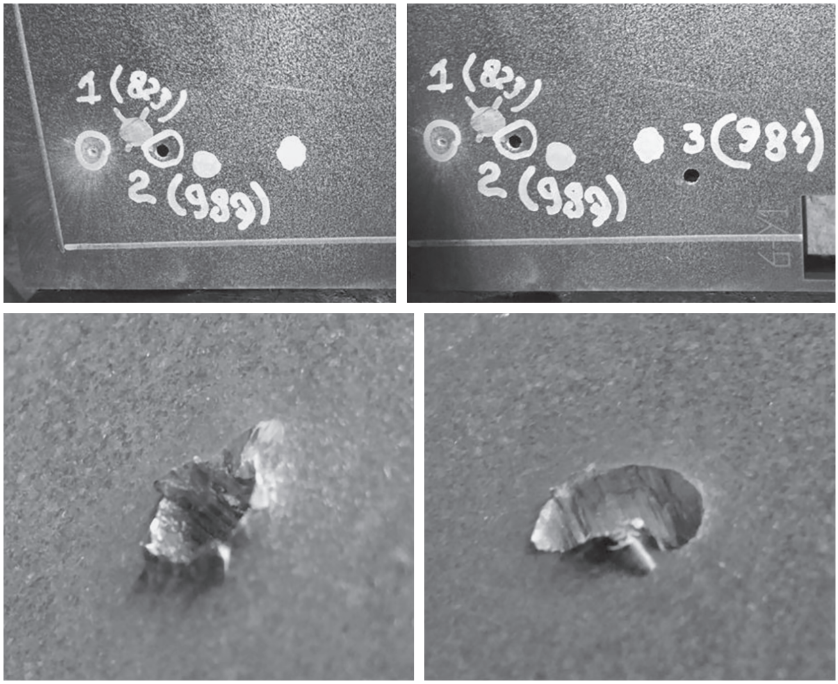


Рис. 7

рость удара 795 м/с), выстрел № 1 и пробивает указанный лист при штатной скорости удара. Выстрел № 2 – пробитие, скорость начальная 989 м/с, скорость удара 954 м/с. Выстрел № 3 – пробитие, скорость начальная 984 м/с, скорость удара 949 м/с. На рис. 7 представлены результаты натурных экспериментов.

На рис. 8 представлен результат моделирования первого случая воздействия (скорость 795 м/с, непробитие). На рис. 9 – результат моделирования воздействия пули M193 на стальную преграду, соответствующий выстрелам № 2 и № 3 согласно испытаниям.

Как видно из сравнения результатов натурных и виртуальных экспериментов, полученных для случая пробития и не пробития, разработанная модель достаточно адекватно описывает процесс взаимодействия пули и стальной брони.

5. Разработка моделей взаимодействия пробойников с композиционной броней. Далее в статье рассматривается решение более сложной задачи. Дело в том, что конструкция современной брони предусматривает слоистую структуру в виде фронтового особо твердого керамического слоя, который разрушает сердечники пуль и стального слоя, который задерживает полученные осколки [27–32]. Подобная конструкция позволяет значительно, в полтора-два раза, снизить массу брони при одинаковой стойкости. При этом возникают дополнительные сложности при проектировании и испытаниях. Необходимо оптимальным образом подобрать толщину, твердость, прочность, вязкость и тому подобные характеристики.

При моделировании в программном комплексе LS-Dyna использовались модели материалов 015-JOHNSON_COOK, 107-MODIFIED_JOHNSON_COOK и 110-JOHNSON_HOLMQUIST_CERAMICS. Задаваемые параметры и коэффициенты приведены в табл. 1–3.

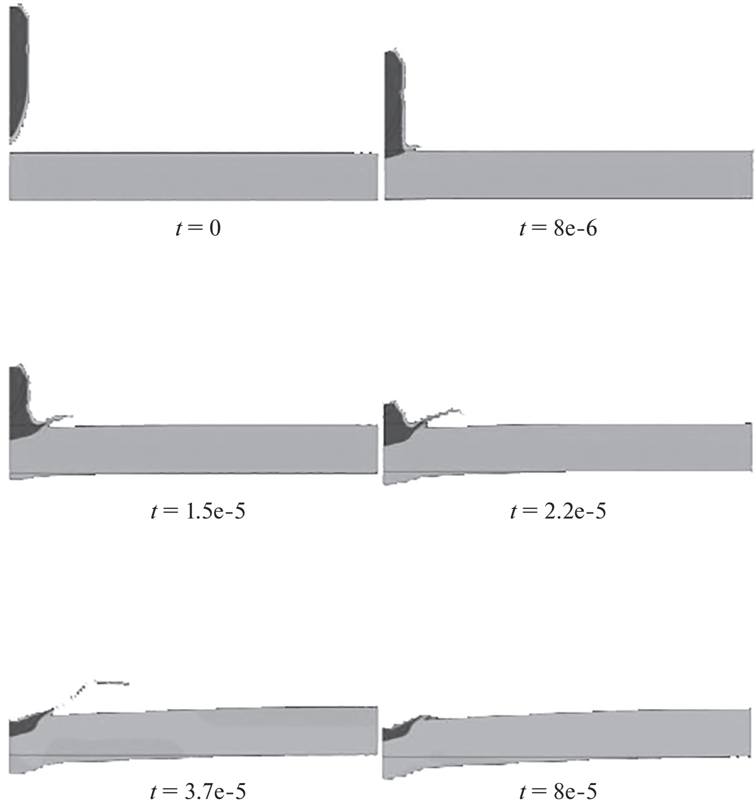

t = 0
t = 8e-6
t = 1.5e-5
t = 2.2e-5
t = 3.7e-5
t = 8e-5

Рис. 8

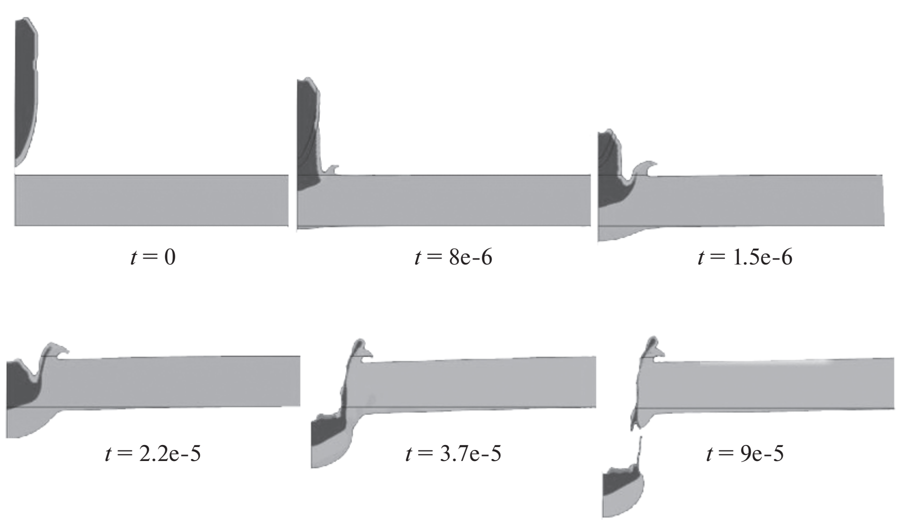

t = 0
t = 8e-6
t = 1.5e-6
t = 2.2e-5
t = 3.7e-5
t = 9e-5

Рис. 9

Таблица 5

Используемое оружие	Средство поражения	Испытываемый образец	№ выстрела	V_5, м/с	Результат	Прим.
Баллистический ствол калибра 7.62 × 54 мм	Пули Б-32 патронов калибра 7.62 × 54 мм	Образец № 1 (керамические элементы Al_2O_3 толщина 9 мм + пластина из стали Miilux 6 мм)	1	861	Непробитие	–
			2	873	Непробитие	–
		Образец № 2 (керамические элементы Al_2O_3 толщина 9 мм + пластина из стали Hardox400 4 мм)	3	872	Непробитие	–
			4	864	Непробитие	–
		Образец № 3 (керамические элементы Al_2O_3 толщина 4 мм + пластина из стали Miilux 6 мм)	5	819	Пробитие	–
Баллистический ствол калибра 5.56 × 45 мм	Пули M193 патронов калибра 5.56 × 45 мм	Образец № 4 (керамические элементы Al_2O_3 толщина 4 мм + пластина из стали Miilux 6 мм)	6	1000	Непробитие	–
			7	980	Непробитие	–

6. Анализ результатов моделирования и сравнение с экспериментальными данными. Методика натурных испытаний изложена в разделе 4. Результаты испытаний представлены в табл. 5. На рис. 10 показаны результаты воздействия боеприпасов на образцы. С левой стороны слой керамических элементов, с правой – лист стали (подложка).

На рис. 11–13 показаны результаты моделирования воздействия бронебойно-зажигательной пули Б32 калибра 7.62 мм на различные варианты композиционной брони. Скорость удара пули в броню принималась равной 874 м/с, что соответствует обстрелу из винтовки СВД с дистанции 30 м.

На рис. 11 представлены результаты воздействия пули Б 32 на композиционный образец брони из стали Miilux толщиной 6 мм с фронтовым керамическим слоем толщиной 9 мм. Согласно результатам, полученным в натурных испытаниях (рис. 10) и результатам расчетов образец выдерживает попадание пули с 30 м, стальной лист практически не деформирован. Пробития нет.

На рис. 12 представлены результаты воздействия пули Б 32 на образец брони из стали толщиной 4.5 мм с фронтовым керамическим слоем толщиной 9 мм. По данным эксперимента образец выдерживает попадание пули, при этом на стальном листе с тыльной стороны образовалась незначительная отдулина высотой порядка 2–3 мм. В расчетной модели стальная подложка прогибается на 3.2 мм. Пробития нет.

На рис. 13 представлены результаты воздействия пули Б 32 на образец брони из стали толщиной 6 мм с фронтовым керамическим слоем толщиной 4 мм. В эксперименте зафиксировано сквозное пробитие образца. В расчетной модели сердечник пули также пробивает композиционную защиту и проходит через преграду с остаточной скоростью порядка 50 м/с (рис. 14).

Как правило при взаимодействии с композиционной броней сердечник пули и керамические элементы разрушаются. При расчете полного разрушения сердечника добиться не удалось, поскольку рассматривался предельный случай попада-

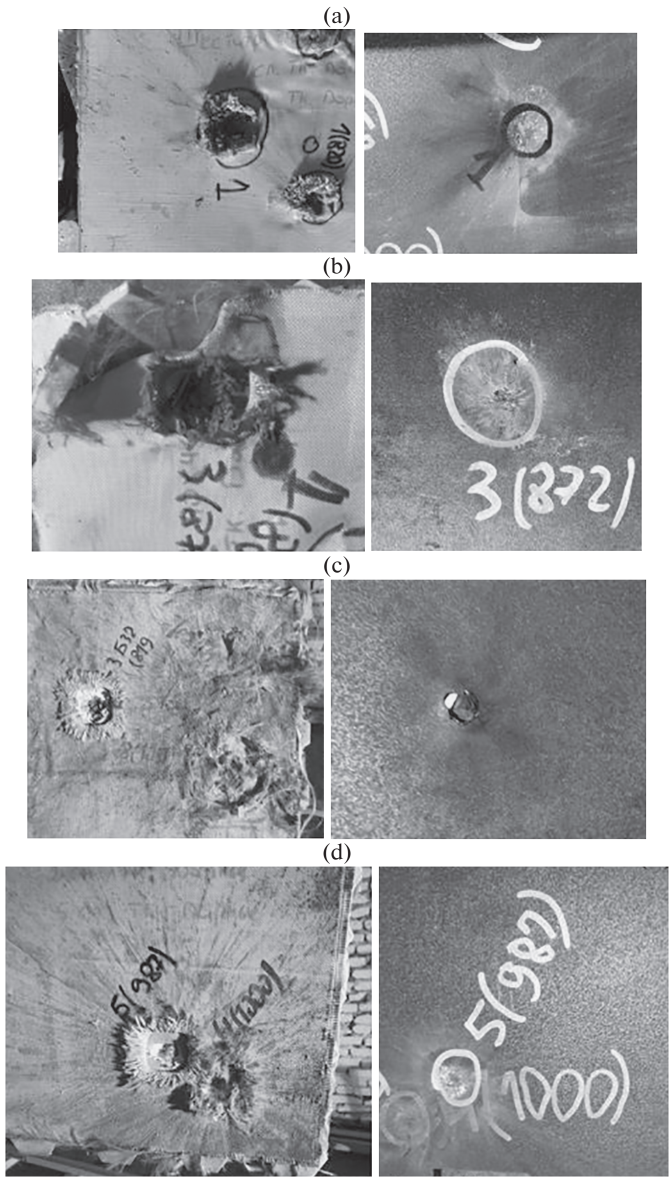


Рис. 10

ния пули строго под прямым углом, тем не менее, расчетные модели можно считать корректными.

На рис. 15 представлены результаты воздействия пули М 193 калибра 5.56 мм на образец брони из стали Miilux 6 мм с фронтовым керамическим слоем толщиной 4 мм. По данным эксперимента образец выдерживает попадание пули, при этом на стальном листе с тыльной стороны образовалась незначительная отдулина. В расчетной модели прогиб стали составил 0.7 мм. Пробития нет.

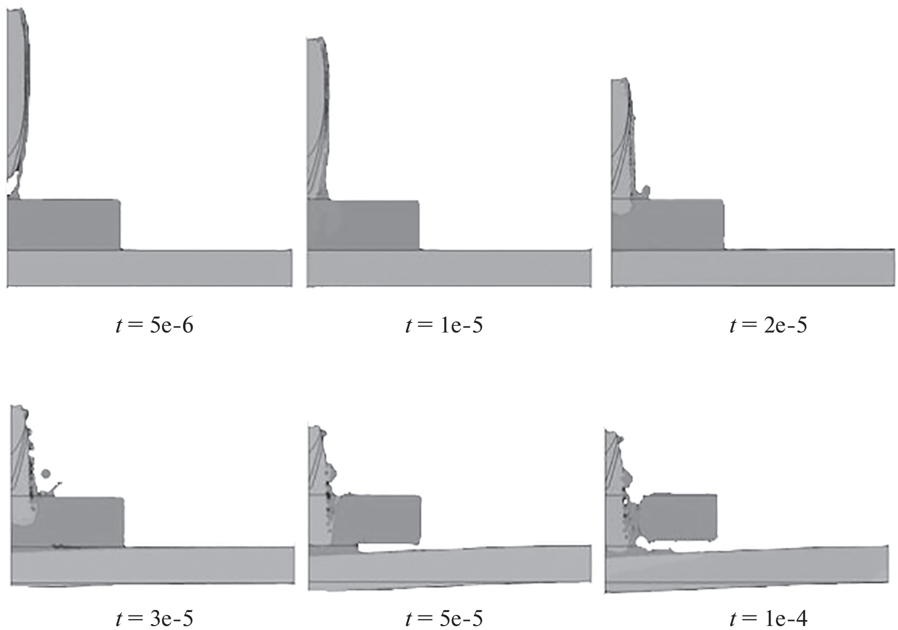


Рис. 11

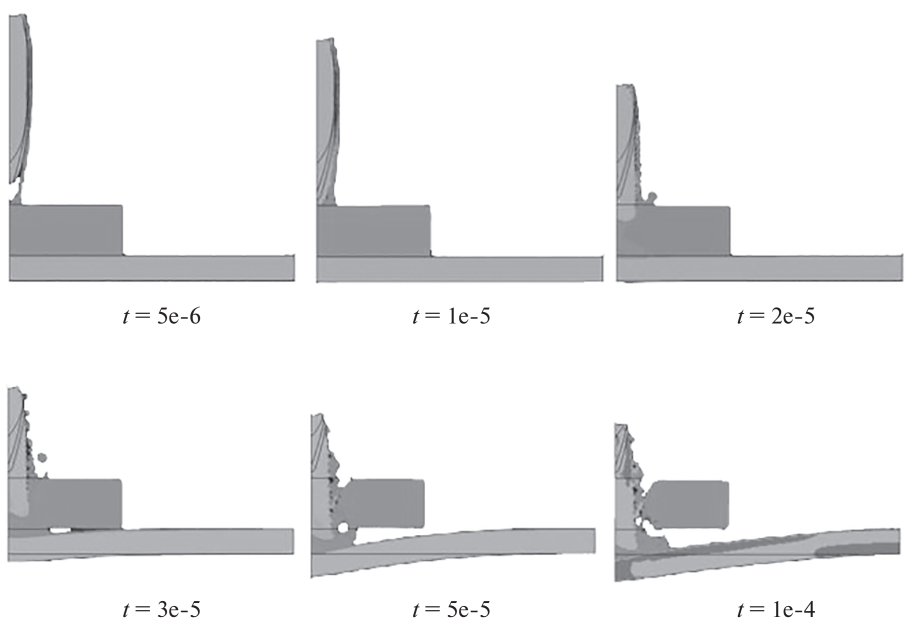


Рис. 12

7. Заключение. Полученные результаты расчетов показывают достаточно хорошее совпадение с результатами обстрела реальных образцов брони в том числе композиционной в виде керамики с подложкой из броневой стали. Получены качественно и количественно совпадающие результаты расчетов и экспериментов, что позволило

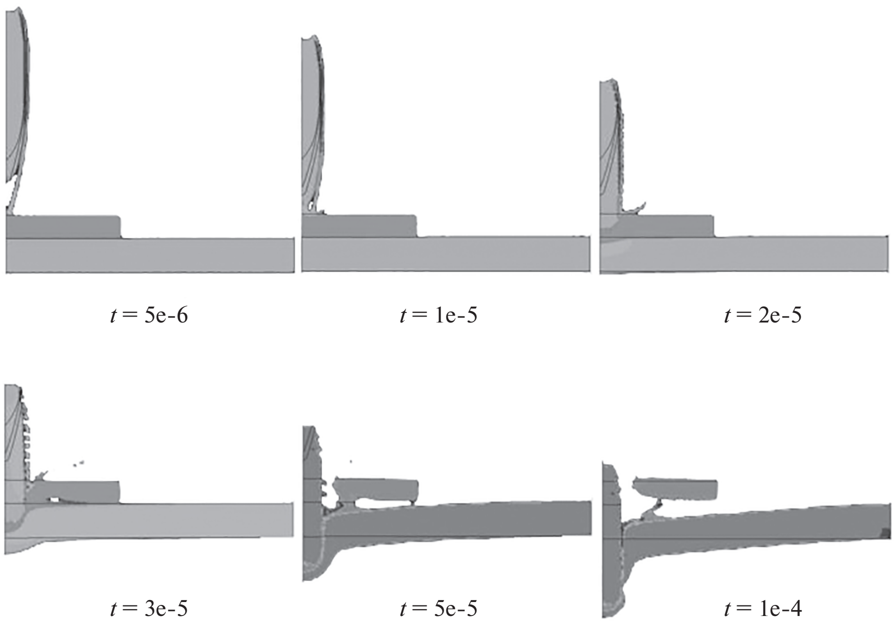


Рис. 13

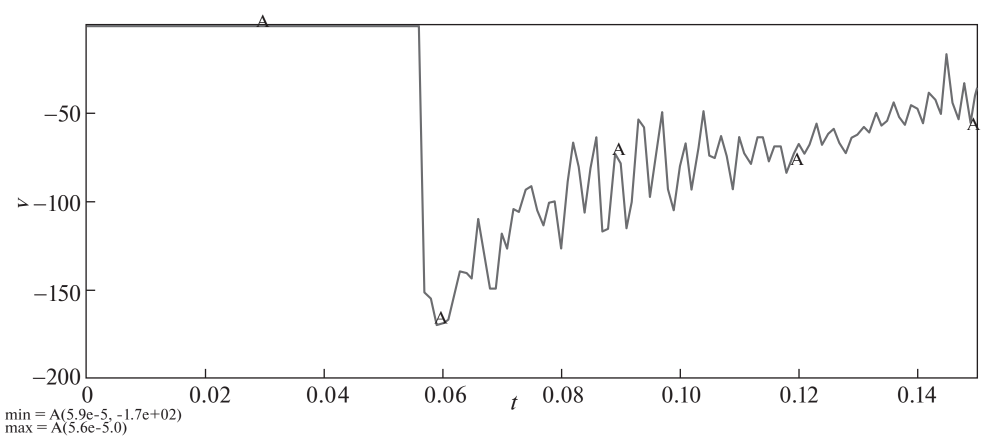


Рис. 14

использовать их при проектировании композиционной брони для реальных изделий. Опробованные в работе параметры моделей материалов можно использовать при отработке различных случаев воздействия на броневые материалы.

Подобные расчеты позволяют оценить основные параметры композиционной брони, тем самым снижая объем предварительных испытаний, что позволяет существенно удешевить усовершенствование брони. Тем не менее окончательные варианты конструкции брони должны быть определены по результатам натурных испытаний.

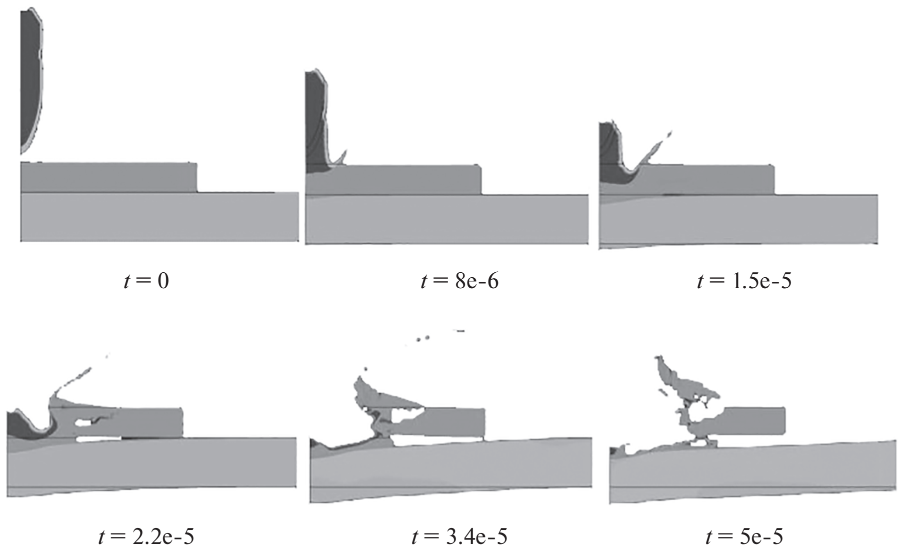


Рис. 15

Для дальнейшего уточнения расчетной модели необходимо проведение соответствующих испытаний для идентификации параметров моделей для различных видов стали и керамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zukas J.A. High* velocity impact dynamics. New York: Wiley, 1990. 935 p.
2. *Johnson G.R., Cook W.H.* Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. Eng. Fracture Mech. 1985. V. 21. P. 31–48.
3. *Johnson G.R., Cook W.H.* A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. Proceedings of the 7th international symposium on ballistics, The Hauge, The Netherlands, Aprile 1983. P. 541–547.
4. *Harding J.* The development of constitutive relations for material behavior at high rates of strain. Mechanical properties at high strain rates, Conf. Ser. No. 102: Session 5. Oxford, UK: Institute of Physics; 1989. P. 189–203.
5. *Steinberg D.J., Cochran S.G., Gunain M.W.* A constitutive model for metals applicable at high-strain rate. J. of Appl. Phys. 1980. V. 51. P. 498–504.
6. *Iqbal M.A.* An investigation of the constitutive behavior of Armox 500T steel and armor piercing incendiary projectile material / Iqbal M.A., Senthil K., Sharma P., Gupta N.K. // International Journal of Impact Engineering, 2016. V. 96. P. 146–164.
7. *Clausen A.H.* Flow and fracture characteristics of aluminium alloy AA5083–H116 as function of strain rate, temperature and triaxiality / Clausen A.H., Børvik T., Hopperstad O.S., Benallal A. // Materials Science and Engineering. 2004. V. A364. P. 260–270.
8. *Borvik T.* Experimental and numerical study on the perforation of AA6005-T6 panels / Borvik T., Clausen A.H., Eriksson M., Berstad T., Hopperstad O.S., Langseth M. // International Journal of Impact Engineering. 2005. V. 32. P. 35–64.
9. *Wisniewski A., Zochowski P.* Building and validation of the Johnson–Cook constitutive model of nano composite NANOS-BA steel for armour applications. Scientific Aspects of Armanent and Safety Technology. Pultusk, Poland. 2014. V. 2 (16). P. 7–18.

10. *Niezgoda T., Morka A.* On the numerical methods and physics of perforation in the high velocity impact mechanics. Military University of Technology, 2 gen. S. Kaliskiego St., 00-908 Warsaw, Poland. 2009. P. 21–23.
11. *Borvik T., Dey S., Clausen C.H.* Perforation resistance of five different high strength steel plates subjected to small arms projectiles. Int. J. of Impact Eng. 2009. V. 36. P. 948–964.
12. Ударные волны и экстремальные состояния вещества / Под ред. В.Е. Фортова, Л.В. Альтшулера, Р.Ф. Трунина, А.И. Фунтикова. М.: Наука, 2000. 425 с.
13. *Kilik N.* Ballistic behavior of high hardness perforated armor plates against 7.62 mm armor piercing projectile / Kilik N., Bedir S., Erdik A., Ekici B., Tasdemirci A., Guden M. // Materials and Design. 2014. V. 63. P. 427–438.
14. *Anderson C.E.* Time-resolved penetration of B_4C tiles by the APM2 bullet / Anderson C.E., Walker J., Burkins M., Gooch W. // Computer Modelling in Engineering and Science. 2005. V. 8. P. 91–104.
15. *Preece D.S., Berg V.S.* Bullet impact on steel and Kevlar/steel armor – computer modelling and experimental data. Structures Under Extreme Loading Symposium, 2004. San-Diego, CA. P. 134–159.
16. *Yoon G.H.* Ivestigation of bullet penetration in ballistic gelatin via finite element simulation and experiment / Yoon G.H., Mo J.S., Kim K.H., Yoon C.H., Lim N.H. // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. V. 29 (9). P. 3747–3759.
17. *Lakshmana R.S.* Applied impact mechanics / Lakshmana R.S., Narayanamurthy V., Simha K.R.Y. // Ane Books Pvt. Ltd. India, 2016. P. 350.
18. *Borvik T., Hopperstad O.S., Berstad T., Langseth M.* Computational model of viscoplasticity and ductile damage for impact and penetration. European journal of mechanics. 2001. A/Solids 20 (5). P. 685–712.
19. *Cockcroft M.G., Latham D.J.* Ductility and workability of metals. Journal of the Institute of Metals. 1968. V. 96. P. 9–33.
20. *Holmquist T.J., Johnson G.R.* Modeling prestressed ceramic and its effect on ballistic performance. Int. J. Impact Engg. 2005. P. 113–127.
21. *Holmquist T.J.M., Templeton D.W., Bishnoy K.D.* Constitutive modelling of aluminium nitride for large strain, high strain rate and high pressure applications. Int. J. Impact Engg. 2001. P. 211–231.
22. *Geers M.G.D.* Numerical simulation of ballistic impacts on ceramic material. / Geers M.G.D., van Dommelen J.A.W., de Lange H.C., Huizing A.T.M.J.M. //Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2007. 66 p.
23. *Cronin D.S.* Implementation and validation of the Johnson-Holmquist ceramic material model in LS-Dyna / Cronin D.S., Bui K., Kaufmann C., McIntosh G., Berstad T. // 4th European LS-Dyna Users Conf., Germany, 2003. P. 24–35.
24. *Morka A., Nowak J.* Numerical analyses of ceramic/metal ballistic panels subjected to projectiles impact. J. of KONES Powertrain and Transport. 2012. V. 19. № 4. P. 465–472.
25. *Anderson C.E.* Time-resolved penetration of B_4C tiles by the APM2 bullet / Anderson C.E., Walker J., Burkins M., Gooch W. // Comp. Model. Engg Sci. 2005. V. 8. P. 91–104.
26. NATO STANAG 4569. Vol. 1. Ed. 2. Procedures for evaluating the protection level of armoured vehicles, August 2011. 86 p.
27. *Кулаков Н.А., Любин А.Н.* Особенности конструкции композитной брони повышенной живучести. М.: Известия МГТУ “МАМИ”, 2011. № 1 (11). С. 46–51.
28. *Кулаков Н.А., Любин А.Н.* Исследование взаимодействия пробойника с композиционной защитной панелью. М.: Известия МГТУ “МАМИ”, 2008. № 1 (5). С. 53–56.
29. *Кулаков Н.А., Любин А.Н., Скакбаева А.С.* Расчетно-экспериментальное исследование стойкости композитной керамической брони при воздействии пуль и высокоскоростных осколков // Известия МГТУ “МАМИ”, 2012. Т. 1. № 2 (14). С. 206–213.
30. *Гриневич А.В., Ярош В.В.* Дробящий эффект керамического слоя комбинированной брони // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. 1999. Вып. 1–2. С. 20–30.
31. *Григорян В.А., Кобылкин И.Ф., Маринин В.М., Чистяков Е. Н.* Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования. М.: РадиоСофт, 2008. С. 406.
32. *Geers M.G.D.* Numerical simulation of ballistic impacts on ceramic material / Geers M.G.D., van Dommelen J.A.W., de Lange H.C., Huizing A.T.M.J.M. // Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2007. P. 66.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 148–162

УДК 532.591,531.5.031

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ТРЕЩИН

© 2021 г. А. В. Звягин[a,b,*], А. А. Лужин[a,], Д. И. Панфилов[a,***], А. А. Шамина[a,c,****]**

[a] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[b] *Институт машиноведения РАН (ИМАШ РАН) им. А.А. Благонравова, Москва, Россия*
[c] *ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований (НИИСИ) РАН, Москва, Россия*

**e-mail: zvsasha@rambler.ru*
***e-mail: luzhinsson@gmail.com*
****e-mail: panfilovdm@mail.ru*
*****e-mail: anashamina90@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.11.2019 г.
После доработки 10.02.2020 г.
Принята к публикации 26.02.2020 г.

В работе предложен численный метод для решения пространственных задач механики трещин (метод разрывных смещений). Преимуществом метода является представление решения в виде конечного ряда разложения по найденным аналитически представленным функциям. Коэффициенты разложения определяются из условий выполнения граничных условий в геометрических центрах тяжести граничных элементов. На тестовых задачах для пространственных трещин, имеющих аналитическое решение, показана достоверность численных результатов. Несомненным достоинством метода является возможность мобильного решения задачи для системы конечного числа трещин с произвольной взаимной ориентацией и расположением в пространстве. Преимуществом метода также является большая скорость расчетов при удовлетворительной точности, в том числе при вычислении коэффициентов интенсивности напряжений. В качестве проверки метода для системы трещин, в данной работе показаны результаты сравнения для задачи взаимодействия двух трещин, в зависимости от расстояния между плоскостями трещин. Проведено сравнение с системой двух эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. В качестве основной характеристики использовался коэффициент влияния (отношение коэффициента интенсивности напряжений в случае системы трещин к соответствующему значению для одиночной трещины). Проведенное сравнение с результатами других авторов показало хорошее качественное и количественное соответствие.

Ключевые слова: трехмерное пространство, упругая среда, трещина, коэффициент интенсивности напряжений, метод граничных элементов, метод разрывных смещений

DOI: 10.31857/S0572329921010153

Введение. Одним из важных разделов современной науки о прочности материалов и конструкций является линейная механика разрушения. Ее истоки заложены в работах [1, 2]. Первоосновой является наличие в материале дефектов в форме т.н. трещин, которые математически моделируются разрывом поля перемещений на некоторой части поверхности. Для упругой среды это приводит к особенностям на границе трещин. При приближении к границе трещины напряжения стремятся к бесконечности, т.е. происходит концентрация напряжений в достаточно малой окрестности границы.

Поскольку в реальных материалах существование бесконечных напряжений невозможно, в окрестности краев трещины возникает область необратимых пластических деформаций. Тем не менее, в тех случаях, когда размеры данной области малы, по сравнению с размерами самой трещины, показана применимость критериев роста трещины на основе анализа полученного упругого решения [3—8]. В настоящее время линейная механика разрушения является одним из основных инструментов оценки прочности материала с дефектами. Достаточно полное представление о полученных в данной области результатах можно составить из обзоров, приведенных в работах [8—12]. В качестве основных методов исследований в механике трещин можно условно выделить аналитические, численно-аналитические и чисто численные методы решения. Каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками. Основным преимуществом аналитических и численно-аналитических методов является возможность непосредственно оценить влияние параметров задачи на возможный рост трещин. Недостатком — применимость только для достаточно простой геометрической конфигурации задачи. В связи с ростом мощности и быстродействия современных ЭВМ, все более активно стали развиваться численные методы в применении к механике разрушения. Следует отметить, что задачи в данной области исследований имеют ряд специфических особенностей, сильно затрудняющих применение обычных численных методов, таких, например, как метод конечных элементов или сеточный метод. Наличие особенностей в малой окрестности границы трещин приводит к необходимости увеличения количества элементов вокруг особой точки. Если исследуется система трещин, которые имеют свою внутреннюю топологию и вдобавок, как-то ориентированы в пространстве, уже создание сетки элементов, адаптированной к заданной геометрии задачи, является достаточно сложной проблемой. В связи с этим, в механике трещин активно используются безсеточные численные методы, сводящие задачу к решению граничных уравнений [8, 12—15]. Очень хороший обзор разновидностей этих методов приведен во введении к монографии [12]. Один из таких методов развивают авторы настоящей статьи. По общепринятой терминологии, предлагаемый метод является непрямым методом граничных элементов. В математике употребляется название — разложение решения по базису из не ортогональных функций [16]. Близкими к рассматриваемому в данной статье методу являются работы [17—19]. В качестве базисных функций разложения используются три решения теории упругости о разрыве компонент вектора перемещений на поверхности граничного элемента. Общее решение всей задачи представляется суммой с неопределенными коэффициентами в форме конечного ряда с аналитически заданными базисными функциями. Коэффициенты ряда определяются методом коллокаций на границе (граничные условия выполняются только в центрах граничных элементов). Данный подход позволяет избежать вычисления сингулярных интегралов, которые возникают в прямых методах граничных интегральных уравнений.

Преимуществом данного метода является то, что на конечные элементы разбивается только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды. Это понижает размерности задачи на стадии ее решения. Для каждого элемента используется три независимых аналитических решения, в каждом из которых на элементе терпит разрыв одна из трех компонент вектора перемещений. Решение конкретной граничной задачи ищется в виде ряда с неопределенными коэффициентами по всему множеству элементов. Каждое элементарное решение вносит свой вклад в поле перемещений и в поле напряжений с весом, который и является соответствующим неопределенным коэффициентом ряда. Выполнение конкретных граничных условий приводит к системе линейных уравнений. После численного определения коэффициентов разложения мы имеем фактически аналитическое представление решения в виде конечного ряда внутри области. С точки зрения памяти, нам надо хранить только найденные коэффициенты разложения, позволяющие затем найти любые требуемые характеристики в любой точке области решения. Это существенно с точки зрения простоты практического использования полученного решения. Еще одним важным преимуществом предлагаемого метода является возможность решения всех типов краевых задач (задача в напряжениях, задача в перемещениях, смешанная задача).

Недостатком метода является недостаточная математическая обоснованность, поэтому необходим большой объем работы, связанный с проверкой достоверности получаемых результатов. С этой целью авторами проведено сравнение с имеющимися аналитическими решениями пространственных задач, а также с имеющимися результатами численного решения задач механики трещин, полученными с использованием других численных методов [9, 10, 20–22]. Коды программы реализованы на языке C++. Основной целью данной работы является апробация предлагаемого метода путем сравнения с известными решениями пространственных задач механики трещин. Для этого проведено численное исследование известной задачи взаимного влияния двух дискообразных плоских трещин в зависимости от расстояния между трещинами и их взаимного расположения. Результаты тестирования позволяют говорить об эффективности и удовлетворительной точности предлагаемого метода.

1. Базисные функции. Основой метода разложения решения по не ортогональным функциям [16] является построение системы линейно независимых решений основной системы уравнений задачи (базисных функций). В статической теории упругости — это решения уравнений равновесия.

Введем следующие обозначения: (x_1, x_2, x_3) — декартовы координаты в некоторой системе координат с базисом e_1, e_2, e_3; $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1,2,3)$ — компоненты вектора перемещений; λ, μ, E, ν — упругие модули (E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона); ε_{ij}, σ_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ — матрицы компонент тензора деформаций и тензора напряжений; для упрощения записи воспользуемся следующим обозначением частной производной $\partial f/\partial x_k = f_{,k}$; повторяющийся индекс в любом выражении будет означать операцию свертки; ∇ — оператор градиента функции; ∇^2 — оператор Лапласа.

Рассмотрим в упругом пространстве граничный элемент в виде плоского прямоугольника $S: x_3 = 0, |x_1| \le h_1, |x_2| \le h_2$. Определим, функцию $\varphi^{(k)}$, как потенциал двойного слоя с плотностью $\mu^{(k)}$

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{x}) = \iint_S \mu^{(k)} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|}\bigg|_{\xi_3=0} dS_\xi, \quad k = 1,2,3$$

Потенциал двойного слоя обладает следующим свойством

$$\varphi = -\frac{\partial g}{\partial x_3}, \quad g(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\mu(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|}\bigg|_{\xi_3=0} dS_\xi$$

где $g(\mathbf{x})$ — потенциал простого слоя.

Известно, что в статической теории упругости каждая из компонент поля перемещений, при отсутствии массовых сил, является бигармонической функцией [23, 24]. Рассмотрим три общих решения уравнений равновесия для поля перемещений в представлении Треффца [24]:

$$u_1^{(1)} = \varphi^{(1)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial {x_1}^2}, \quad u_2^{(1)} = \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad u_3^{(1)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} \tag{1.1}$$

$$u_1^{(2)} = \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad u_2^{(2)} = \varphi^{(2)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial {x_2}^2}, \quad u_3^{(2)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} \tag{1.2}$$

$$u_1^{(3)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1}, \quad u_2^{(3)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(3)} = \varphi^{(3)} - \Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} \tag{1.3}$$

Легко проверить, что каждая компонента перемещений (1.1)–(1.3) является бигармонической функцией $\nabla^2\nabla^2 u_i^{(k)} = 0$, $i, k = 1, 2, 3$, а данные поля перемещений будут удовлетворять уравнениям упругости, если

$$\Lambda = 1/(3 - 4\nu)$$

Используя закон Гука $\sigma_{ji} = \lambda\delta_{ji}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ji}$ и выражения для деформаций $\varepsilon_{ji} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2$, можно найти компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, соответствующие каждому решению (1.1), (1.2), (1.3).

В некоторых случаях потенциалы простого и двойного слоя можно вычислить аналитически. Например, в случае постоянной единичной плотности они соответственно равны:

$$g(\mathbf{x}) = \left\{ [g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)] \Big|_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\} \Big|_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \left\{ [\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)] \Big|_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\} \Big|_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2} \tag{1.4}$$

В формулах (1.4) использовано символическое равенство

$$f(\eta)\Big|_{\eta=b}^{\eta=b} = f(b) - f(a)$$

а функции $g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$, $\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$ соответственно представлены в аналитической форме

$$\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = -\frac{\partial g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_3}$$

$$g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = (x_1 - \xi_1)\log(r + x_2 - \xi_2) + (x_2 - \xi_2)\log(r + x_1 - \xi_1) -$$
$$- z\,\mathrm{arctg}\left(\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r x_3}\right), \quad r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}$$

Аналитическое представление базисных функций в методе граничных элементов позволяет значительно упростить процедуру решения, поскольку отпадает необходимость вычисления сингулярных интегралов в системе граничных интегральных уравнений. Следует помнить, что решения (1.1)–(1.3) получены в локальной системе координат каждого граничного элемента. Для построения численной схемы обозначим поля перемещений и напряжений, соответствующие каждому из базисных решений, следующим образом:

$$U_i^{m(k)}, \sigma_{ij}^{m(k)}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (m = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.5}$$

В выражениях (1.5) верхний индекс $k = 1, 2, 3$ означает номер решения, индекс m соответствует номеру граничного элемента, индекс i – соответствующей проекции вектора перемещений. Каждое из решений имеет разрыв соответствующей компоненты вектора перемещения на данном граничном элементе.

2. Описание метода. Рассмотрим типичную задачу механики трещин для бесконечного пространства. В пространстве глобальной системы координат (X, Y, Z) с базисом ($э_1, э_2, э_3$) расположены несколько трещин, которые моделируются поверхностями разрыва перемещений (рис. 1,а).

Будем, для определенности, ставить задачу в напряжениях. Для бесконечного пространства могут быть поставлены две типичные краевые задачи. В первой краевой задаче на бесконечности может быть задан ненулевой вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_\infty$, а на берегах трещин вектор напряжений равен нулю. Во второй краевой задаче вектор напря-

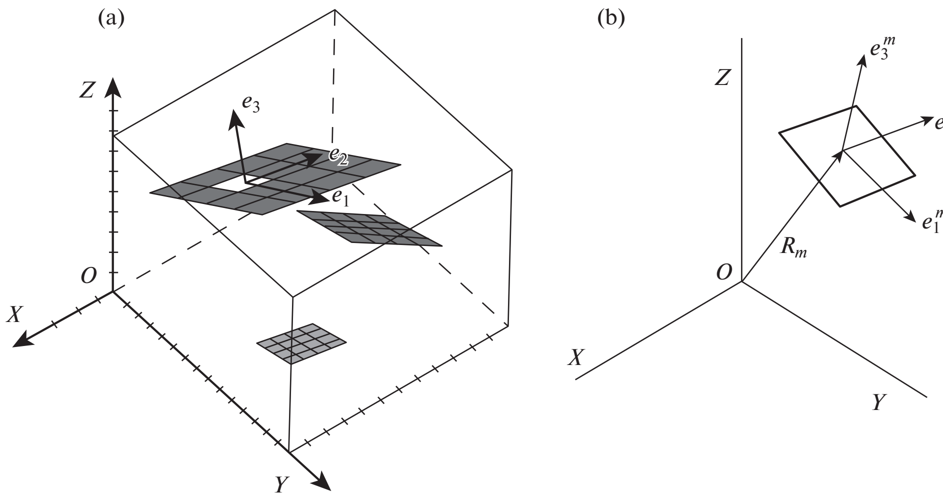


Рис. 1

жений на бесконечности равен нулю, а на берегах трещин действует заданный вектор напряжений $\mathbf{P_0}$. В линейном случае первая задача может быть сведена ко второй использованием суперпозиции решений. Действительно, можно представить поле перемещений $\mathbf{u}$ и тензор напряжений σ в виде суммы двух решений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \tilde{\mathbf{u}}$, $\sigma = \sigma_\infty + \tilde{\sigma}$, где $\mathbf{u}_\infty, \hat{\sigma}_\infty$ решение для пространства с заданными условиями на бесконечности при отсутствии трещин, а решение $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\sigma}$ стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет на границах трещин условию $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma_0}$.

Построение первого решения будем считать известным. Остановимся подробно на построении решения с нулевыми условиями на бесконечности и с заданным вектором напряжений на поверхности трещин.

Это означает, что на берегу трещины задан вектор напряжений, как функция точек поверхности. Пусть $\mathbf{R}^{(m)} = \left(X_m, Y_m, Z_m\right)$ – радиус вектор центра граничного элемента с номером m в глобальной системе координат, (e_1^m, e_2^m, e_3^m) – локальный базис данного элемента (рис. 1,b). Введем в рассмотрение ортогональные матрицы, $F^{(m)}$, $F^{(mn)}$, позволяющие выразить векторы в глобальном базисе и переходить из одного локального базиса в другой

$$\mathbf{e}^m = F^{(m)}\text{э}, \quad \mathbf{e}^n = F^{(mn)}\mathbf{e}^m \tag{2.1}$$

Для каждого граничного элемента с номером n в его локальном базисе e_i^n можно считать заданными три компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью e_3^n:

$$\sigma_{31} = b_1^n, \quad \sigma_{32} = b_2^n, \quad \sigma_{33} = b_3^n \tag{2.2}$$

Рассмотрим три поля перемещений и напряжений, соответствующих (1.1)–(1.3):

$$U_i^{m(1)}(M), U_i^{m(2)}(M), U_i^{m(3)}(M); \quad \sigma_{ij}^{m(1)}(M), \sigma_{ij}^{m(2)}(M), \sigma_{ij}^{m(3)}(M) \tag{2.3}$$

Эти поля являются решениями уравнений теории упругости в локальном базисе $e_1^{\,m}, e_2^{\,m}, e_3^{\,m}$. Задавая координаты пробной точки M в данном базисе, мы можем найти компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений, которые возникают в этой точке от данного элемента, взятого с единичной плотностью соответствующих потенциалов простого и двойного слоя. Выражения (2.3) называются коэффициентами влияния граничного элемента в локальной системе координат данного элемента.

Выберем в качестве пробной точки – центр другого граничного элемента с номером n. Подстановка его локальных координат (в базисе $e_i^{(m)}$) в формулы (2.3), позволяет найти вклад (влияние) граничного элемента с номером m в поле перемещений и напряжений в центре граничного элемента с номером n.

В нашей постановке надо выполнить граничные условия (2.2), заданные в локальном базисе. Поэтому необходимо напряжения (2.3) пересчитать в базисе $e_i^{(n)}$. Для этого необходимо воспользоваться формулами перехода от одного базиса к другому (2.1). При этом мы получим вклады от граничного элемента с номером m в поле напряжений в базисе $e_i^{(n)}$. Обозначим это поле напряжений от первого, второго и третьего решения, соответственно:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(m,n)} &= \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}_{mn}), \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} e_i^{\,(n)} e_j^{\,(n)} \\ B_{ij}^{(m,n)} &= \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}_{mn}), \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} e_i^{\,(n)} e_j^{\,(n)} \\ C_{ij}^{(m,n)} &= \sigma_{ij}^{(3)}(\mathbf{r}_{mn}), \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(3)} e_i^{\,(n)} e_j^{\,(n)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Суммируя (2.4) с неопределенными коэффициентами по всем граничным элементам, получим в локальном базисе $e_i^{(n)}$ суммарное поле напряжений

$$\Sigma_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{N} D_l^{(1)} A_{ij}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} B_{ij}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} C_{ij}^{(l,n)}$$

где N – общее количество граничных элементов, $D_l^{(k)}$, $(k = 1,2,3)$, $(l = 1,2,\cdots,N)$ – неопределенные коэффициенты. Если нам необходимо выполнить граничные условия (2.2), получим $3N$ уравнений

$$\Sigma_{31}^{(n)} = b_1^{(n)}, \quad \Sigma_{32}^{(n)} = b_2^{(n)}, \quad \Sigma_{33}^{(n)} = b_3^{(n)}$$

Вид матрицы полученной системы линейных уравнений будет зависеть от порядка выполнения каждого из граничных условий. Если выбрать порядок (2.2) для всех элементов, получим систему уравнений в форме

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{N} D_l^{(1)} A_{31}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} B_{31}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} C_{31}^{(l,n)} &= b_1^{(n)} \\ \sum_{l=1}^{N} D_l^{(1)} A_{32}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} B_{32}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} C_{32}^{(l,n)} &= b_2^{(n)} \\ \sum_{l=1}^{N} D_l^{(1)} A_{33}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} B_{33}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^{N} D_l^{(2)} C_{33}^{(l,n)} &= b_3^{(n)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Введем девять матриц ($N \times N$) и шесть векторов-столбцов:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^{(1)} = \{A_{31}^{(l,n)}\}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \{B_{31}^{(l,n)}\}, \quad \mathbf{C}^{(1)} = \{C_{31}^{(l,n)}\} \\ \mathbf{A}^{(2)} = \{A_{32}^{(l,n)}\}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \{B_{32}^{(l,n)}\}, \quad \mathbf{C}^{(1)} = \{C_{32}^{(l,n)}\} \\ \mathbf{A}^{(3)} = \{A_{33}^{(l,n)}\}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \{B_{33}^{(l,n)}\}, \quad \mathbf{C}^{(3)} = \{C_{33}^{(l,n)}\}, \quad l,n = 1,2,\ldots,N \\ \mathbf{D}^k = (D_1^k, D_2^k, \cdots D_N^k)^T, \quad \mathbf{b}^k = (b_1^k, b_2^k, \cdots b_N^k)^T, \quad k = 1,2,3\end{gathered} \tag{2.6}$$

где символ $(\cdots)^T$ означает операцию транспонирования вектора.

В обозначениях (2.6) система (2.5) может быть переписана в блочной форме

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{B}^{(2)} & \mathbf{C}^{(2)} \\ \mathbf{A}^{(3)} & \mathbf{B}^{(3)} & \mathbf{C}^{(3)}\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{D}^1 \\ \mathbf{D}^2 \\ \mathbf{D}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов $D_i^k, (k = 1,2,3), (i = 1,2,\cdots N)$, позволяет получить коэффициенты разложения поля перемещений по базисным функциям, т.е. фактически разрывы поля перемещений, и затем вычислить все необходимые величины в любой пробной точке тела.

3. Задачи тестирования. Изложенный метод был реализован в виде программы на языке C++. Для проверки работоспособности метода было проведено тестирование и верификация с имеющимися аналитическими и численными решениями других авторов [8, 10, 20–22]. Результаты тестирования изложены в работах [26–30]. Здесь мы приводим результаты сравнения численного решения, полученного авторами, с аналитическими решениями пространственных задач.

В качестве задач тестирования были выбраны следующие аналитические результаты:

1. Круглая плоская трещина радиуса $R = a$ находится под внутренним давлением p и расположена в плоскости $z = 0$. Теоретическое решение [21] для компоненты напряжений $\sigma_0(r) = \sigma_{zz}(r,z)\big|_{z=0}$ на продолжении трещины $r > a$ имеет вид

$$r > a \qquad \sigma_0(r) = \frac{2pa}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{2p}{\pi}\arcsin\frac{a}{r} \tag{3.1}$$

На рис. 2 представлены результаты сравнения аналитического решения (3.1) с численным решением для трещины $a = 1$, $p = 0.1$: ($z = 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} < a$). Значения компоненты напряжений σ_{zz} вычислялись в точках прямой линии $y = 0$, $z = 0$, расположенных на продолжении трещины ($x > 1$).

На рис. 2,a представлены графики зависимости напряжения $\sigma_{zz}/(2\mu)$ от расстояния s до края трещины. Сплошная линия соответствует кривой аналитического решения для функции $\sigma_{zz}^{(T)}/(2\mu)$. Точечная кривая – соответствует численным результатам $\sigma_{zz}^{(N)}/(2\mu)$. Напряжения определялись в плоскости трещины $z = 0$ для точек с координатами $M(x,0,0)$, $x > 1$. На рис. 2,b приведено распределение относительной ошибки $\delta = (\sigma_{zz}^{(N)} - \sigma_{zz}^{(T)})/\sigma_{zz}^{(T)}$, в зависимости от расстояния s. Ошибка растет с уменьшением расстояния до края трещины, но не превышает 3.5%. Как видим, она максимальна около края трещины и уменьшается с ростом расстояния от края трещины.

Важнейшими характеристиками упругого решения в линейной механике разрушения являются три коэффициента интенсивности напряжений (КИН), соответствую-

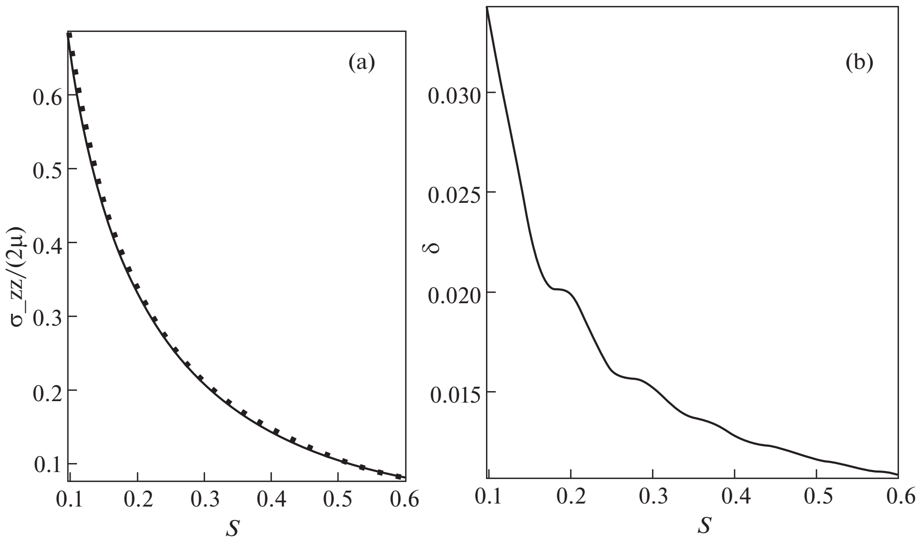


Рис. 2

щие трем элементарным нагрузкам поверхности трещины (рис. 3). На рис. 3 изображен фрагмент пространственной плоской трещины Π. Ось z перпендикулярна плоскости (x, y) локальной системы координат. Кривая AB является частью края трещины, поверхность $ABCD$ – верхним берегом трещины (поверхность $ABC'D'$ – нижний берег трещины), $\boldsymbol{\tau}$ – единичным вектором, касательным к краю AB. Единичный вектор $\mathbf{n}$ расположен в плоскости трещины Π, а расстоянием от пробной точки M до трещины называется расстояние s, указанное на рис. 3.

По определению, коэффициенты интенсивности напряжений соответственно равны:

$$K_I = \lim_{s \to 0^+} \sqrt{2\pi s}\sigma_{zz}(s), \quad K_{II} = \lim_{s \to 0^+} \sqrt{2\pi s}\sigma_{zn}(s), \quad K_{III} = \lim_{s \to 0^+} \sqrt{2\pi s}\sigma_{z\tau}(s) \tag{3.2}$$

где s – расстояние от точки вычисления напряжений до границы. В аналитическом решении для круглой трещины, находящейся под действием внутреннего давления, отличен от нуля коэффициент K_I, а его величина равна

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{r\sigma_{zz}(r)\,\mathrm{d}\,r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{3.3}$$

Для единичного давления внутри трещины единичного радиуса $K_I = 1.1284$. Численное значение K_I, соответствующее расчетам, определялось с использованием (3.2) для разных расстояний до фронта трещины.

На рис. 4 приведены численные значения K_I, найденные по определению (3.2) для разных значений расстояния s (рис. 3). Сплошная линия рис. 4,a соответствует теоретическому решению $K_I^{(T)}$, точечная кривая – расчетным значениям $K_I^{(N)}(s)$, определенным для разных расстояний s. На рис. 4,b показаны значения относительной ошибки $\delta(s) = (K_I^{(N)}(s) - K_I^{(T)}) / K_I^{(T)}$, в зависимости от величины s. Видно, что дальняя асимптотика является более точной. С уменьшением расстояния до края трещины

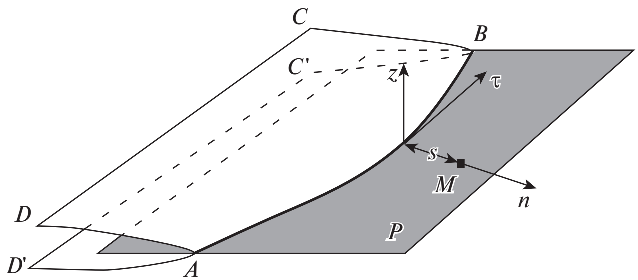


Рис. 3

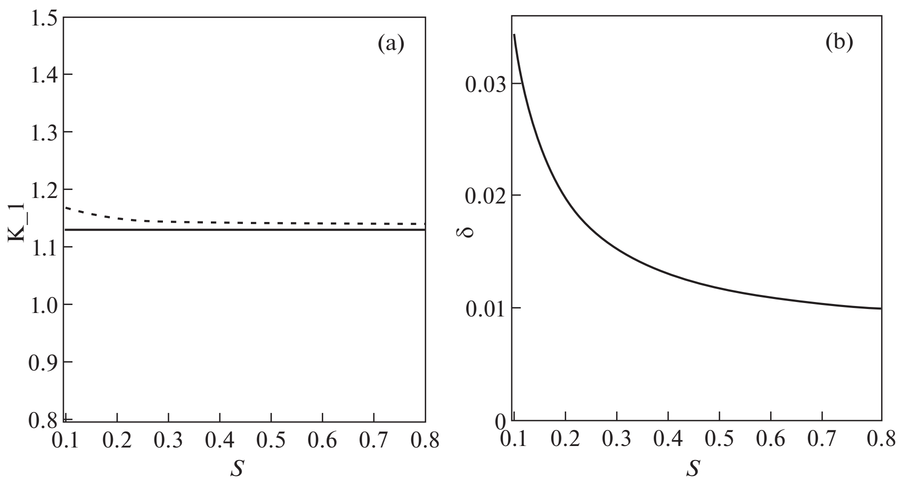


Рис. 4

ошибка растет, но не превышает 3.5%. Как видим, численные значения всегда больше, чем теоретическое значение K_I.

2. Метод позволяет работать с любой заданной в плане геометрией трещин. На рис. 5 показано сравнение кривых распределения коэффициента интенсивности K_I вдоль границы эллиптической трещины в упругом пространстве. Постоянная внешняя нагрузка σ действует в направлении ортогональном плоскости трещины. Сплошные кривые соответствуют аналитическому решению [10]

$$K_I = \frac{\sigma}{E(k)}\left(\frac{\pi b}{a}\right)^{1/2}(a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta)^{1/4} = \frac{\sigma}{E(k)}\left(\frac{\pi b}{a}\right)^{1/2}\left[\frac{a^2(a/b)^2\mathrm{tg}^2\theta + b^2}{1+(a/b)^2\mathrm{tg}^2\theta}\right]^{1/4}$$

где a, b – полуоси эллипса, $a \geq b$, $k = \sqrt{1-(b/a)^2}$, $\theta = \mathrm{arctg}\left[(b/a)\,\mathrm{tg}\beta\right]$, $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Точечные кривые являются результатом расчетов. По оси абсцисс отложен угол β, по оси ординат – безразмерный коэффициент $K\_1 = K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$.

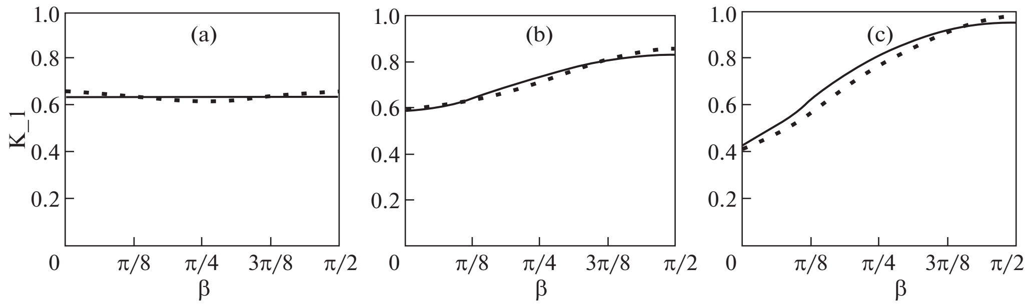


Рис. 5

Пары кривых соответствуют разному отношению полуосей: рис. 5,a — $a/b = 1$; рис. 5,b — $a/b = 2$; рис. 5,c — $a/b = 5$. Видно, что для сравнительно малых значений величины $a/b \le 2$ кривые почти совпадают (отличие составляет менее 1%). Для значений отношения $a/b \ge 2$ ошибка мала для углов $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$, но для промежуточных углов начинает увеличиваться (максимальное значение ошибки равно 10%). Возрастание ошибки, по нашему мнению, связано с использованной в расчетах одинаковой сеткой граничных элементов. По всей вероятности, увеличение кривизны кривой границы трещины требует модификации сетки в сторону уменьшения размера граничных элементов.

3. Задача для двух круглых плоских параллельных, одноосных трещин одинакового радиуса $R = a$, которые находятся под давлением P на расстоянии 2h друг от друга, рассмотрена в монографии [20]. Ее решение сведено к системе двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Нам удалось, после решения интегральных уравнений восстановить аналитическую зависимость напряжения $\sigma_0(r) = \sigma_{zz}(r,z)\big|_{z=0}$. Результаты одного из тестовых сравнений для значений параметров $R = 1$, $2h = 0.6$, $P = p/(2\mu) = 0.1$ представлены на рис. 6. Трещины радиуса $R = 1$ расположены параллельно плоскости $z = 0$ одна над другой на расстоянии $2h = 0.6$ между их плоскостями. Обе трещины находятся под внутренним давлением $P = 0.1$.

На рис. 6,a показаны результаты сравнения аналитического $\sigma_{zz}^{(T)}/(2\mu)$ и численного решения $\sigma_{zz}^{(N)}/(2\mu)$. На оси абсцисс отложена координата x, на оси ординат — значение напряжения. Сплошная линия соответствует теоретическому решению, точечная кривая — численным расчетам. Зависимость относительной ошибки $\Delta\sigma/\sigma = (\sigma_{zz}^{(N)} - \sigma_{zz}^{(T)})/\sigma_{zz}^{(T)}$ от координаты x приведена на рис. 6,b. Как и в случае одиночной трещины, ошибка нарастает с приближением к краю трещины (координата края $x = 1$). Для данного расчета максимальное значение ошибки не превышает 5%.

Одним из основных недостатков численных решений является их привязка к конкретным значениям параметров задачи. Исследование зависимости решения от внешних данных приводит к необходимости проведения большого количества расчетов. Это накладывает достаточно жесткие требования на расчетное время, которое требуется для обработки одного конкретного набора параметров. Если это время велико, то задача определения характера зависимости решения от параметров становится громоздкой по времени. С этой точки зрения, предлагаемый метод имеет ряд преимуществ. Фактически, после решения системы (2.7), решение представлено конечным

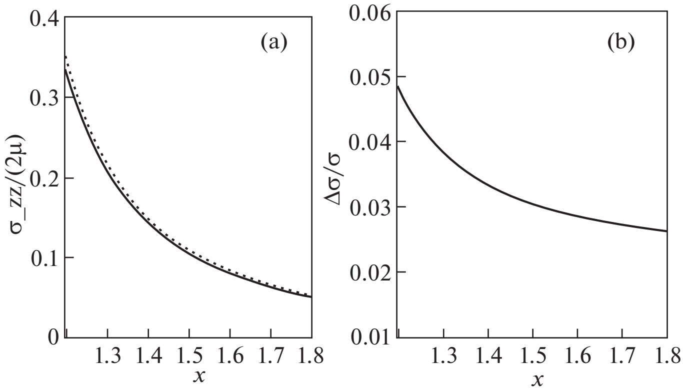


Рис. 6

рядом. Исследование любой характеристики полученного решения сводится к суммированию соответствующего этой характеристике ряда.

Для выяснения эффективности метода рассмотрим задачи взаимного влияния двух параллельных трещин в упругом пространстве. Такие задачи рассматривались в работах [20, 21, 31–33]. В монографии [20] методом парных интегральных уравнений построено решение для двух одноосных трещин в упругом слое. В статье [21] приведено решение для двух эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. В работе [31] на основе асимптотического поведения решения для больших расстояний от трещины предложен механизм и геометрия зарождения новых трещин. В статье [32] приведены исследования взаимного влияния эллиптических трещин. В работе [33] излагается метод определения коэффициентов влияния для системы трещин и получены аналитические формулы данного коэффициента для двух круглых трещин. С целью проверки метода для системы трещин было проведено сравнение с некоторыми результатами этих работ.

4.Коэффициент влияния для двух круглых параллельных трещин. Основой данного раздела является сравнение с результатами [20, 33] для одноосных круглых параллельных трещин. В работе [33], наряду с более общими результатами, приведена полученная аналитическая зависимость коэффициента влияния двух круглых одноосных трещин радиуса a, в зависимости от расстояния z между их плоскостями

$$k^{(1)} = 1 - \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{2a}{z}\right) - \frac{2az}{4a^2 + z^2}\right]$$

Величина коэффициента влияния $k^{(1)}$ равна отношению КИН K_I для двух трещин к его значению для одиночной трещины. На рис. 7 приведены результаты сравнения. На оси абсцисс отложено безразмерное расстояние между трещинами z/a, на оси ординат – коэффициент влияния $k^{(1)}$. Сплошная кривая соответствует формуле (3.3), точечная кривая – результатам наших расчетов. Кружками приведены три значения коэффициентов влияния, полученные Я.С. Уфляндом [20].

В [33] также приведена аналитическая формула для предельного значения коэффициента влияния, когда расстояние между трещинами стремится к нулю

$$k = \lim_{z\to 0} k^{(1)} = \frac{6\pi^2}{4 + 9\pi^2} = 0.638$$

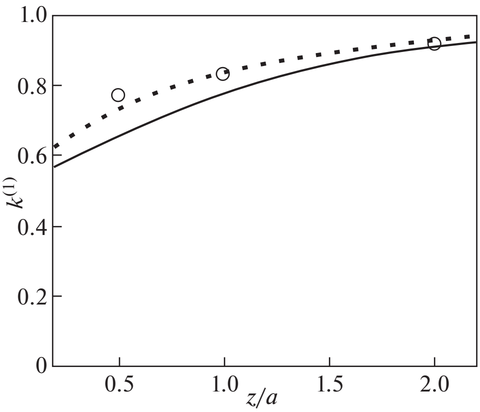


Рис. 7

Численный метод не позволяет нам приблизить трещины на бесконечно близкое расстояние. Он ограничен характерным размером используемого граничного элемента (в наших расчетах использовался размер 0.05). Предельное расстояние достоверности результатов для данного масштаба граничного элемента $z = 0.1$. Численное значение коэффициента влияния для данного расстояния получилось равным $k^{(1)} = 0.594$.

5. Коэффициент влияния двух эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. В работах [21, 32] проведено взаимное влияние двух эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. Показано, что наибольшее влияние характерно для такого взаимного расположения, когда большие полуоси эллипсов параллельны (рис. 8,a), а две другие полуоси расположены на одной прямой. На рис. 8,b приведены результаты сравнения с работой [32]. На оси абсцисс отложено приведенное расстояние между трещинами $d = t/(2b)$ (рис. 8,a). По оси ординат отложен коэффициент влияния $F = K_I(B)/K_{I0}(B)$, где $K_{I0}(B)$ – значение коэффициента интенсивности напряжений для одной эллиптической трещины в точке B, $K_I(B)$ – соответствующее значение коэффициента интенсивности напряжений для двух трещин. Символом “круг” отмечены точки, приведенные в [32], символом “крест” обозначены наши результаты. Расхождение результатов растет по мере сближения трещин, но максимальная ошибка составляет 4%. Как видим, результаты наших расчетов соответствуют работе [32].

Существенной особенностью метода является то, что матрица системы линейных уравнений для определения скачков поля перемещений является всюду плотной. У нее нет глобального преобладания диагональных элементов. Для решения системы использовался итерационный метод, предложенный в работе [30] – “стабилизированный метод бисопряженных градиентов”.

Предложенный авторами метод численного расчета характеристик упругого тела с системой трещин в приложении к некоторым частным задачам представлен в работах [31–35]. Следует также отметить, что трехмерная программа хорошо сохраняет симметрию задачи (если она есть), что также является косвенной проверкой корректности ее работы. Одним из достоинств метода является достаточно малое время варианта расчета и мобильность программы. Под мобильностью мы понимаем возможность быстрого выбора формы каждой трещины (реализованы эллипсы, полуэллипсы, прямоугольники), ее размеров и положения в пространстве. Предусмотрен выбор типа граничных условий (в перемещениях или в напряжениях). Практика использования программы показала, что при характерном размере трещины 1 для хорошего количе-

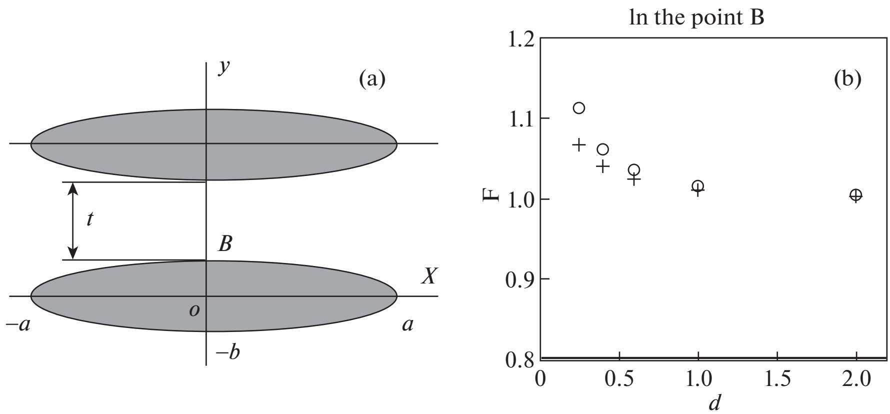


Рис. 8

ственного описания требуется ~500 граничных элементов. Программа работает достаточно быстро. Статистика для расчетов на ноутбуке MSI GF63 (Intel Core i7-8750h, 32Гб) такова. Время одного расчета (в секундах) зависит от использованного числа граничных элементов (г.э.). Среднее время, которое требуется для расчета одного варианта задачи, соответственно равно:

для 749 г.э. – 3 с; для 2539 г.э. – 26 с; для 3869 г.э. – 103 с; для 6509 г.э. – 292 с; для 9689 г.э. – 687 с; для 13485 г.э. – 1306 с; для 17905 г.э. – 2389 с.

Сам пакет находится в активной стадии разработки. Продолжается работа по расширению возможных геометрических форм трещин, по улучшению пользовательского интерфейса, по внедрению параллельных вычислений.

Заключение. Подводя итоги работы, можно сказать следующее:

1. Предложенный метод позволяет достаточно эффективно решать задачи механики системы трещин в упругом пространстве. Он может быть хорошим инструментом, дополняющим другие методы исследования.

2. Тестовые расчеты показали вполне удовлетворительное количественное и качественное совпадение численных и аналитических результатов, как для напряжений, так и для коэффициентов интенсивности.

3. Количественное сравнение с результатами для простейшей системы двух трещин можно также считать удовлетворительным. Это показано для эллиптических в плане трещин, лежащих в одной плоскости, а также для системы двух одноосных круглых трещин.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01111.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions Royal Society of London. Series A. 1921. V. 221. P. 163–198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture // In: Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics. Delft, 1924. P. 55–63.
3. *Orowan E.* Energy criteria of fracture // The welding journal. 1955. V. 34. № 3. P. 1576–1606.
4. *Irwing G.R.* Fracture dynamics // In: Fracturing in metals. Cleveland: ASM. 1948. P. 147–166.
5. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. 1968. № 35. P. 379–386.

6. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения. В сборнике: Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир. 1975. С. 204–335.
7. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous media. // J. Appl. Math. Mech. 1967. № 31. P. 503–512.
8. *Кит Г.С., Хай М.В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. “Наукова думка” Киев. 1989. 288 с.
9. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 1: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Изд. Мир, 1990. 448 с.
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 2: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Изд. Мир, 1990. 1016 с.
11. *Slepyan L I.* Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer. 2002. 577 p.
12. *Шифрин Е. И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Издательство Физико-математической литературы. 2002. 368 с.
13. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
14. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
15. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Изд-во МИР. 1987. 328 с.
16. *Алексидзе М.А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Изд. “Наука”, 1978. 351 с.
17. *Jones D.S.* Boundary integrals in elastodynamics // IMA Journal of Applied Mathematics. 1985. V. 34. № 1. P. 83–97.
18. *Budreck D.E., Achenbach J.D.* Scattering from three dimensional planar cracks by the boundary integral equation method // Trans. Of the ASME journal of Applied mechanics. 1988. V. 5. № 2. P. 405–412.
19. *Некрасов С.В., Андрейко С.С.* Вычислительная схема оценки напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной трехмерной упругой среды на основе непрямого метода граничных элементов // Вестник ПНИПУ. Геология. Нефтегазовое и горное дело. 2015. № 16. С. 86–97.
20. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд-во “Наука”, 1967. 402 с.
21. *Гольдштейн Р.В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 3. С. 111–126.
22. *Kassir M.K. and Sih G.C.* External crack in elastic solid // The international Journal of Fracture Mechanics. V. 4. № 4. 1968. P. 347–356.
23. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: МИР, 1975. 872 с.
24. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. М.: Издательство ГТТЛ, 1934. ОНТИ.
25. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
26. *Гольдштейн Р.В., Капцов А.В.* Формирование структур разрушения слабо взаимодействующих трещин. Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 173–182.
27. *O'Donoghue P.E., Nishioka T., Atluri S.N.* Multiple coplanar embedded elliptical cracks in an infinite solid subject to arbitrary crack face tractions. // International journal for numerical methods in engineering. 1985. V. 21. P. 437–449.
28. *Fabrikant V.I.* Interaction of a parallel circular cracks subjected to arbitrary loading in transversely isotropic elastic space // Applicable Analysis. 1997. V 66. P. 273–290.
29. *Tsang D.K.L., Oyadiji S.O., Leung A.Y.T.* Multiple penny-shaped cracks interaction in a finite body and their effect on stress intensity factor // Engineering Fracture Mechanics. 2001. V. 70. Iss. 15. P. 2199–2214.
30. *Henk A. van der Vorst.* Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems. Cambridge University Press 2003. 219 p.
31. *Звягин А.В., Панфилов Д.И., Шамина А.А.* Взаимное влияние дискообразных трещин в трехмерном упругом пространстве // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2019. № 4. С. 34–41.

32. *Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А.* Взаимное влияние трехмерных трещин в упругом теле // В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19–24 августа 2019 года. Расширенные тезисы докладов. Изд. РИЦ БашГУ Уфа, 2019. С. 642–644.
33. *Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А.* Взаимное влияние трехмерных трещин в упругом теле // В сборнике Триггерные эффекты в геосистемах: тезисы докладов V-й Международной конференции, Москва, 4–7 июня 2019 г., Изд. ГЕОС (Москва), 2019. С. 76–77.
34. *Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А.* Взаимодействие эллиптических трещин с границей упругого тела. // в сборнике Материалы XXV Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова, Изд. ООО “ТРП” (М), 2019. Т. 1. С. 108–111.
35. *Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А.* Трехмерные трещины в упругом теле // В сборнике Современные проблемы математики и механики, серия Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего, Изд. МАКС Пресс (М), 2019. С. 701–703.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 1, с. 163–164

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ШЕСТЕРИКОВА СЕРГЕЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА

DOI: 10.31857/S0572329921010098

Сергей Александрович Шестериков родился 6 декабря 1930 г. в Москве в семье служащих. В 1954 г. он окончил с отличием механико-математический факультет Московского университета им. М.В. Ломоносова. Во время учебы в университете наибольшее влияние на него оказали профессора – члены-корреспонденты АН СССР Н.Г. Четаев (теоретическая механика), В.З. Власов (теория оболочек) и Ю.Н. Работнов (теории пластичности, ползучести, длительной прочности). Сергей Александрович учился в аспирантуре у будущего академика Юрия Николаевича Работнова, которую завершил защитой в декабре 1957 г. кандидатской диссертации на тему "Устойчивость при ползучести" – тему, которая во многом определила его последующую научную деятельность. Этой же проблематике была посвящена и его докторская диссертация "Некоторые общие вопросы теории ползучести и задачи устойчивости" (1966). В течение двух лет после окончания аспирантуры (1958–1959) С.А. Шестериков работал ассистентом кафедры теории пластичности Московского университета, а с 1960 по 2003 г. непрерывно заведовал лабораторией в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова (1975–1999 – зав. отделом). В январе 2002 г. он возглавил университетскую кафедру теории пластичности, на которой почти за полвека до того сам сформировался как высококвалифицированный ученый. Наряду с Московским университетом С.А. Шестериков преподавал и в других вузах страны, а также читал циклы лекций и выступал с научными докладами на конференциях за рубежом (в США, Великобритании, Франции, Китае, Польше, Болгарии и др.). Им опубликовано около 170 научных трудов, в том числе 4 монографии.

Круг научных интересов Сергея Александровича был широк и многообразен. Ему принадлежат принципиально новые идеи в различных разделах механики деформируемого твердого тела – в теории ползучести, механике разрушения, устойчивости, пластичности и др. В научную литературу по теории ползучести прочно вошли термины "устойчивость по Работнову–Шестерикову" и "дробная функция Шестерикова". Им получены фундаментальные результаты в изучении особенностей деформирования и разрушения в экстремальных условиях различных типов материалов (металлов и сплавов, полимеров и композитов, строительных материалов и т.д.) и элементов машиностроительных конструкций.

С.А. Шестериков разработал и экспериментально проверил систему определяющих и кинетических уравнений, описывающих деформирование и длительное разрушение твердых тел в условиях высокотемпературной ползучести. Он дал формулировку кинетических уравнений теории длительной прочности при стационарных и нестационарных режимах, предложил общую форму сингулярных определяющих соотношений реономных сред, разработал ряд методов расчета элементов конструкций, находящихся в условиях ползучести.

Его фундаментальные работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Они широко применяются при расчетах лопаток турбин, в задачах непрерывной разливки сталей, при проектировании нефтяного оборудования, при прогнозировании длительной прочности энергетического оборудования, при расчетах терморазрушения материалов и т.д.

Научная и научно-организационная деятельность Сергея Александровича получила широкое признание. В 1972 г. он был избран в состав Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике; в 1970-х и 1980-х годах он был председателем методической комиссии по составлению и утверждению нормативно-технической документации при Комитете стандартов СССР. С.А. Шестериков – лауреат Государственной премии РСФСР (1990) и премии Минвуза СССР (1990); в 1998 г. он был избран действительным членом Российской академии естественных наук и через два года – членом-корреспондентом Российской академии наук. В 1999 г. ему было присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки Российской Федерации. Руководимый им коллектив ученых был официально признан ведущей научной школой страны. На протяжении многих лет он являлся членом Ученых советов по защите докторских диссертаций в различных организациях.

Необходимо отметить большую работу С.А. Шестерикова в Реферативном журнале “Механика”, в который он был привлечен Ю.Н. Работновым сначала в качестве референта, а затем и научного редактора. В течение последних 40 лет Сергей Александрович являлся членом редколлегии, ответственным за ряд больших разделов, относящихся к механике деформируемого твердого тела. Он был активным членом редколлегий и других академических журналов, в том числе “Известия РАН. Механика твердого тела” и “Прикладная математика и механика”.

В феврале 2003 года тяжелая болезнь оторвала С.А. Шестерикова от активного участия в научной жизни страны, и 6 июля 2005 г. он скончался. Для всех знавших Сергея Александровича это была очень тяжелая потеря. Обладая широкой эрудицией, Сергей Александрович щедро делился своими знаниями с окружающими. Особую категорию составляют его ученики, которые были у него всегда: и когда он еще не имел высоких титулов и званий, и когда он стал широко известным ученым. Тридцать учеников С.А. Шестерикова стали кандидатами наук, а пять из них – докторами наук: А.Л. Аршакуни, В.И. Астафьев, В.И. Ванько, В.В. Кашелкин и А.М. Локощенко. Будучи очень демократичным человеком, Сергей Александрович представлял ученикам полную свободу выбора в научном творчестве. Но в то же время он подходил к результатам научных исследований с высокими требованиями, так как их он в первую очередь предъявлял к себе. Все это в полной мере отражено в его работах.

Наряду с механикой деформируемого твердого тела, в круг научных интересов Сергея Александровича входили и совершенно иные области науки: так, например, он обладал глубокими знаниями в области исторической и экономической науки.

Сергею Александровичу были присущи компетентность, глубина суждений, острота мысли, доброжелательность и корректность.

Светлая память о нем навсегда сохранится в сердцах тех, кто его близко знал.

Заведующий лабораторией ползучести и длительной прочности
Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук
А.М. Локощенко