

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 84. Iss. 3

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.V. Karapetyan (Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udvardia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

May–June

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Бифуркационные диаграммы Смейла в динамике системы трех связанных тел <i>А. В. Карапетян</i>	273
К задаче оптимизации структуры ракеты-носителя <i>В. Н. Бранец</i>	280
Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения <i>Г. Б. Сизых</i>	304
Асимптотическое разложение кинетической энергии жидкости при движении в ней двух сфер переменных радиусов вблизи их контакта <i>Ш. В. Сандуляну</i>	311
Волны, захваченные полубесконечной пластиной Кирхгофа на ультранизких частотах <i>С. А. Назаров</i>	327
Влияние формы тела на решение несвязанной квазистатической циклической задачи термоупругости в термическом слое (на примере тел простой формы) <i>М. И. Супельняк</i>	341
К решению геометрической обратной задачи статической теории упругости по не полностью переопределенным данным на границе <i>Е. А. Каспарова, Е. И. Шифрин</i>	362
Моделирование волновых процессов в геологических трещиноватых средах с использованием модели Шонберга <i>П. В. Стогний, Н. И. Хохлов, И. Б. Петров</i>	375
Вариант связи механических и адгезионных свойств твердых материалов <i>С. Н. Ромашин, В. С. Шоркин</i>	387

CONTENTS

Bifurcation Smale diagrams for three connected heavy rigid bodies system <i>A. V. Karapetyan</i>	273
On the problem of optimization launch vehicle design <i>V. N. Branets</i>	280
system of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave <i>G. B. Sizykh</i>	304
Fluid kinetic energy asymptotic expansion for two variable radii moving spherical bubbles at small separation distance <i>S. V. Sanduleanu</i>	311
Waves trapped by semi-infinite Kirchhoff plate at ultra-low frequencies <i>S. A. Nazarov</i>	327
Effect of the shape of solid on solution of uncoupled quasistatic cyclic thermoelasticity problem in thermal layer (on the example of regular solids) <i>M. I. Supel'nyak</i>	341
On the solution of geometric elastostatic inverse problem by means of not completely overdetermined boundary data <i>E. A. Kasparova, E. I. Shifrin</i>	362
Modelling of wave processes in fractured geological media using Shoenberg model <i>P. V. Stognii, N. I. Khokhlov, I. B. Petrov</i>	375
Variant of connection of mechanical and adhesive properties of solid materials <i>S. N. Romashin, V. S. Shorkin</i>	387

УДК 531.01



11 мая 2020 года исполняется 70 лет члену редакционной коллегии журнала, заслуженному профессору МГУ Александру Владименовичу КАРАПЕТЯНУ. Юбилар — известный специалист в области аналитической механики, теории устойчивости и бифуркации. Опубликовал 150 научных работ, 3 монографии и учебник по теоретической механике. Подготовил 17 кандидатов наук и трех лауреатов Золотой медали РАН за лучшие работы по механике среди молодых ученых и студентов.

Редколлегия и редакция ПММ, сердечно поздравляют Александра Владименовича с юбилеем, желают здоровья и новых творческих успехов

БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА В ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ

© 2020 г. А. В. Карапетян^{1,*}

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: avkarapetyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.02.2020 г.

После доработки 15.03.2020 г.

Принята к публикации 21.03.2020 г.

Рассматривается задача о движении трех связанных тел в однородном гравитационном поле (обобщенная задача о движении гироскопа в кардановом подвесе). Найлены все стационарные движения системы, условия их устойчивости и ветвления. На основе проведенного анализа показано, что полный атлас бифуркационных диаграмм

Смейла для этой задачи состоит из 24 карт, различающихся видом этих диаграмм. В работе приведена одна из наиболее сложных диаграмм Смейла и описано, как из нее получаются все остальные.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, бифуркационные диаграммы, топология областей возможного движения

DOI: 10.31857/S0032823520030030

Уравнения движения и первые интегралы рассматриваемой задачи приведены в [1]. Построение диаграмм Смейла [2] основано на анализе стационарных движений системы методом Рауса [3, 4] и Пуанкаре—Четаева [5, 6]. Частный случай этой задачи рассмотрен в [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении трех связанных твердых тел в однородном поле сил тяжести. Каждое из тел может вращаться только вокруг одной из осей: первое – вокруг неподвижной вертикали OZ , второе – вокруг горизонтали Ox , закрепленной на первом теле, а третье – вокруг оси Oz , закрепленной на втором теле и ортогональной оси Ox . Предположим, что $Oxuz$ – главные оси инерции (для точки O) второго тела (ось Oy ортогональна плоскости Oxz), причем Oz – ось симметрии эллипсоида инерции (для точки O) третьего тела.

Момент инерции первого тела относительно OZ обозначим через C_1 , а моменты инерции второго и третьего тел относительно осей $Oxuz$ – через A_2 , B_2 , C_2 и A_3 , B_3 , C_3 соответственно. Пусть центры масс второго и третьего тел лежат на оси Oz в точках с координатами c_2 и c_3 соответственно, а m_2 и m_3 – массы этих тел. Положительное направление оси Oz выбираем так, что $m_2c_2 + m_3c_3 = mc > 0$ (случай $c = 0$ тривиален и в статье не рассматривается).

Углы поворота первого, второго и третьего тел вокруг осей OZ , Ox и Oz соответственно обозначим через φ_1 , φ_2 и φ_3 . Очевидно, конфигурационное пространство системы – трехмерный тор (\mathbb{T}^3).

Рассматриваемая система допускает интеграл энергии (g – ускорение свободного падения)

$$H = \frac{1}{2}((A_3 + B_2) \sin^2 \varphi_2 + C_1 + C_2 \cos^2 \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(A_2 + A_3) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}C_3(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2)^2 + mgc \cos \varphi_2 = h$$

и два циклических интеграла

$$K = ((A_3 + B_2) \sin^2 \varphi_2 + C_1 + C_2 \cos^2 \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + C_3(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 = k$$

$$L = C_3(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) = l$$

(h , k и l – произвольные постоянные; см. напр., [1]).

Напомним, что топологический анализ систем, допускающих первые интегралы, основан на построении (в пространстве констант этих интегралов) бифуркационного по Смейлу [2] множества, на котором эти интегралы зависимы. Учитывая структуру функций H , K и L , задачу отыскания критических уровней интегралов $H = h$, $K = k$, $L = l$ можно свести к задаче определения всех критических точек эффективного потенциала V_{kl} системы – минимума функции H по скоростям на фиксированных уровнях интегралов $K = k$ и $L = l$. В рассматриваемой задаче этот минимум достигается при

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{k - l \cos \varphi_2}{J(\varphi_2)}, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{(J(\varphi_2) + C_3 \cos^2 \varphi_2)l - C_3 k \cos \varphi_2}{C_3 J(\varphi_2)} \quad (1.1)$$

и задается формулой [7]

$$V_{kl} = mgc \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} \frac{(k - l \cos \varphi_2)^2}{J(\varphi_2)} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{C_3} = V_{kl}(\varphi_2) \quad (1.2)$$

$$J(\varphi_2) = (A_3 + B_2 + C_1) - (A_3 + B_2 - C_2) \cos^2 \varphi_2$$

Полагая, что $k \neq 0$, введем следующие обозначения

$$a = l/k \in \mathbb{R}, \quad b = -(A_3 + B_2 - C_2)(A_3 + B_2 + C_1)^{-1} > -1$$

$$p = k^2((A_3 + B_2 + C_1)mgc)^{-1}, \quad q = \left(h - \frac{l^2}{2C_3} \right) (mgc)^{-1}$$

При этом $V_{kl} = mgc f(x) + \text{const}$, где

$$f(x) = x + \frac{1}{2} p \frac{(1 - ax)^2}{1 + bx^2}, \quad x = \cos \varphi_2 \in [-1, 1] \quad (1.3)$$

Отметим, что если второе тело – почти плоская рамка (как для гироскопа в кардановом подвесе), то $b \in (-1, 0)$; этот случай рассмотрен в [7].

Если же второе тело достаточно сильно отличается от плоского, то параметр b может принимать положительные значения, в том числе, достаточно большие.

Заметим также, что случай $k = 0, l \neq 0$ получается из общего случая предельным переходом при $a \rightarrow \infty$, а случай $k = l = 0$ тривиален и не рассматривается.

Таким образом, анализ критических уровней первых интегралов задачи сводится к анализу критических точек функции $f(x)$ (1.3), заданной на отрезке $[-1, 1]$.

2. Анализ критических точек эффективного потенциала. Очевидно, $x = -1$ ($\varphi_2 = \pi$) и $x = +1$ ($\varphi_2 = 0$) – критические точки функции $f(x)$, причем $f(-1) = \min$ (\max), если $f'(-1) > 0$ (< 0), а $f(+1) = \min$ (\max), если $f'(1) < 0$ (> 0). Здесь

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 1 + p \frac{(ax - 1)(bx + a)}{(1 + bx^2)^2}, \quad f'(\pm 1) = 1 + p \frac{(a \mp 1)(b \pm a)}{(1 + b)^2}$$

Таким образом, $f(-1) = \min$ при любом p , если $a \in [-1, b]$; если же $a \in (-\infty, -1) \cup (b, +\infty)$, то $f(-1) = \min$ (\max) при $p < p_-$ ($p > p_-$). Аналогично, $f(+1) = \max$ при любом p , если $a \in (-\infty, -b] \cup [1, +\infty)$; если же $a \in (-b, 1)$, то $f(+1) = \max$ (\min) при $p < p_+$ ($p > p_+$). Здесь

$$p_{\pm} = (b + 1)^2 (1 \mp a)^{-1} (b \pm a)^{-1} \quad (2.1)$$

Значения p_+ и p_- существуют одновременно (напомним, что $p > 0$), если $a \in (|b|, 1)$ при $|b| < 1$ или $a \in (-b, -1)$ при $b > 1$, причем $p_+ > p_-$ ($p_+ < p_-$) при $b > a^2$ ($b < a^2$).

Критические точки $x \in (-1, 1)$ определяются из уравнения $f'(x) = 0$, которое можно представить в виде

$$p = u(x) = \frac{(1 + bx^2)^2}{(1 - ax)(bx + a)} \quad (2.2)$$

Очевидно, что если $x \in (-1, 1)$ – решение уравнения (2.2), то $f''(x) = u'(x)/u(x)$. Следовательно, критическая точка $x \in (-1, 1)$ доставляет функции $f(x)$ минимум (максимум), если функция $u(x)$ возрастает (убывает) в этой точке.

В зависимости от параметров задачи a и b область определения $\Delta \subseteq [-1, 1]$ функции $u(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 = [-1, 1] \quad \text{при} \quad |b| < a < 1; \\ \Delta &= \Delta_\alpha = [-1, 1/a) \quad \text{при} \quad |a| > 1, \quad |a| > b > 0 \quad \text{и} \quad |a| < 1, \quad |a| < -b \quad (b < 0) \\ \Delta &= \Delta_\beta = (-a/b, 1] \quad \text{при} \quad |a| < 1, \quad b > |a| \\ \Delta &= \Delta_\alpha \cup \Delta_\beta \quad \text{при} \quad a < -1, \quad b > |a| \\ \Delta &= \Delta_{\alpha\beta} = (-a/b, 1/a) \quad \text{при} \quad b > a > 1 \\ \Delta &= \emptyset \quad \text{при} \quad -1 < a < 0, \quad a < b < -a \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что критические точки $x \in (-1, 1)$ функции $f(x)$, в отличие от точек $x = \pm 1$, зависят от параметра p , причем каждой такой точке отвечают два значения $\varphi_2 = \pm \arccos x$.

Обозначим критические точки функции $f(x)$, принадлежащие интервалам $(-1, 1)$, $(-1, 1/a)$, $(-a/b, 1)$ и $(-a/b, 1/a)$ — через $x_0(p)$, $x_\alpha(p)$, $x_\beta(p)$ и $x_{\alpha\beta}(p)$ соответственно; при этом

$$\lim_{p \rightarrow p_\pm} x_0(p) = \pm 1, \quad \lim_{p \rightarrow p_-} x_\alpha(p) = -1, \quad \lim_{p \rightarrow p_+} x_\beta(p) = +1$$

Поскольку $x(p)$ — решение уравнения (2.2), то свойства монотонности функций $x(p)$ и $u(x)$ совпадают.

Вычислим

$$u'(x) = \frac{(1 + bx^2)}{(1 - ax)^2(a + bx^2)^2} v(x) \quad (2.4)$$

$$v(x) = -2ab^2x^3 + 3bx^2(b - a^2) + 6abx + a^2 - b$$

$$v'(x) = -6ab^2(x - 1/a)(x + a/b) \quad (2.5)$$

$$v(1/a) = (b + a^2)^2 a^{-2}, \quad v(-a/b) = (b + a^2)^2 b^{-1}$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что $u'(x)$ может обращаться в ноль на отрезке Δ_0 и полуинтервалах Δ_α , Δ_β не более одного раза (в точках x_0 , x_α , x_β соответственно), а в интервале $\Delta_{\alpha\beta}$ обращается в ноль ровно один раз (в точке $x_{\alpha\beta}$). Учитывая, что $u(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1/a$ и $x \rightarrow -a/b$, заключаем, что x_0 существует при $v(+1)v(-1) < 0$, x_α — при $v(-1) < 0$, x_β — при $v(+1) > 0$ ($x_{\alpha\beta}$ существует всегда). Здесь

$$v(\pm 1) = \mp 2ab^2 + 3b(b - a^2) \mp 6ab + a^2 - b$$

В заключение этого раздела отметим, что критические точки функции $f(x)$ отвечают стационарным движениям системы ($x = \pm 1$ — вертикальным вращением при наименьшем для $x = -1$ и наибольшем для $x = +1$ положении центра масс, а $x(p) \in (-1, 1)$ — прецессионным движениям; см. (1.1)), причем точки минимума (максимума) соответствуют устойчивым (неустойчивым) движениям.

3. Бифуркационная диаграмма. Приведенный выше анализ критических точек функции $f(x)$ позволяет построить полный атлас бифуркационных диаграмм Пуанкаре—Четаева [5, 6]. Каждая карта этого атласа на плоскости $\{p; x\}$ ($p > 0$, $x \in [-1, 1]$) состоит из прямых $x = \pm 1$ и кривых $x(p)$, где $x(p)$ — решение уравнения (2.2). Карты различаются видом кривых $x(p)$ и распределением точек минимума/максимума на этих кривых и на прямых $x = \pm 1$.

Для построения полного атласа бифуркационных диаграмм Смейла [2] необходим небольшой дополнительный анализ. Каждая карта этого атласа на плоскости $\{p; q\}$ ($p > 0$, $q \geq -1$) состоит из прямых

$$q = q_+(p) = 1 + p \frac{(1-a)^2}{2(1+b)}, \quad q = q_-(p) = -1 + p \frac{(1+a)^2}{2(1+b)} \quad (3.1)$$

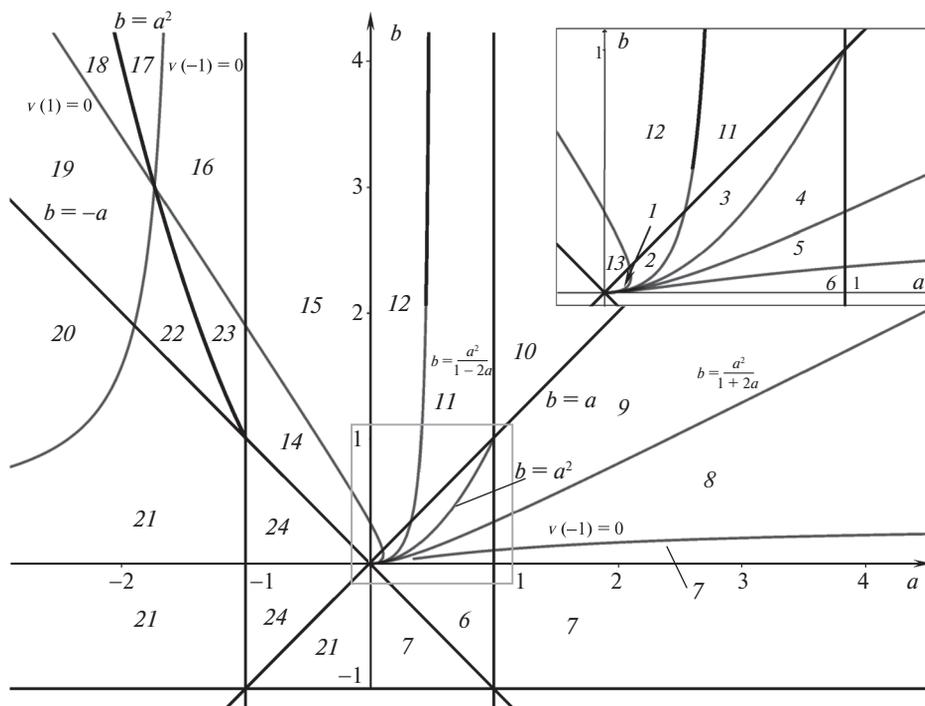


Рис. 1. Плоскость параметров.

и кривых $q = q(p)$, заданных параметрически соотношениями $q = f(x)$, $p = u(x)$, которые (см. (1.3) и (2.2)) можно привести к виду

$$q = x + \frac{1(1 + bx^2)(1 - ax)}{2bx + a}, \quad p = \frac{(1 + bx^2)^2}{(1 - ax)(bx + a)} \quad (3.2)$$

(x – параметр, принадлежащий соответствующему этой карте интервалу (2.3)).

Совокупность прямых (3.1) и кривых (3.2) определяет бифуркационное по Смейлу множество, на котором происходят перестройки топологического типа областей возможности движения, задаваемых соотношением $f(x) \leq q$ ($V_{kl} \leq h$). Если $a < 0$, то прямые (3.1) не пересекаются; если же $a > 0$, то они пересекаются при $p = (1 + b)/a$. Очевидно,

$$p_+ > \frac{1+b}{a} \quad \left(p_+ < \frac{1+b}{a} \right) \quad \text{при} \quad b < \frac{a^2}{1-2a} \quad \left(b > \frac{a^2}{1-2a} \right)$$

$$p_- > \frac{1+b}{a} \quad \left(p_- < \frac{1+b}{a} \right) \quad \text{при} \quad b > \frac{a^2}{1+2a} \quad \left(b < \frac{a^2}{1+2a} \right)$$

Взаимное расположение точек p_+ , p_- и $(1 + b)/a$ тоже влияет на вид диаграммы Смейла.

Таким образом, плоскость параметром задачи a и b ($a \in \mathbb{R}$, $b > -1$) разбивается на 24 области (см. рис. 1), различающиеся видом бифуркационных диаграмм. Заметим, что при $x(p) \rightarrow 1/a$ кривая (3.2) стремится к прямой $f(1/a) = 1/a$, а при $x \rightarrow -a/b$ – к прямой

$$q = f\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b} + p\frac{b+a^2}{2b} \quad (3.3)$$

Очевидно, угол наклона прямой (3.3) больше углов наклона прямых (3.1).

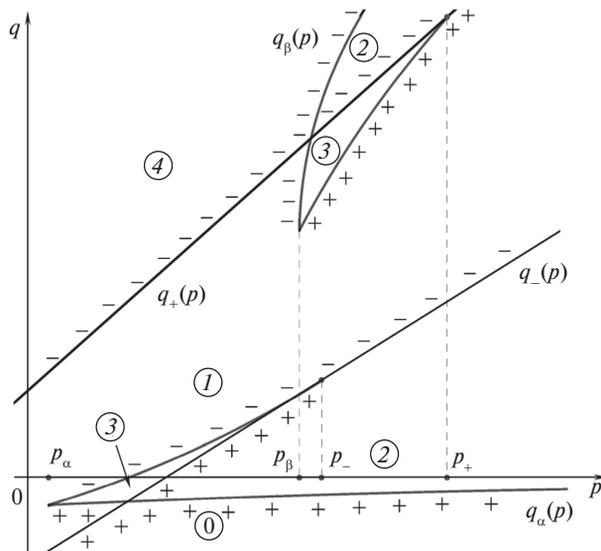


Рис. 2. Диаграмма Смейла для области 18.

На рис. 2 приведена диаграмма Смейла для параметров задачи, принадлежащих области 18 (см. рис. 1), в которой $a < -1$, $b < a^2$, $v(+1) > 0$, $v(-1) < 0$. На этой диаграмме кривые $q_\alpha(p)$ и $q_\beta(p)$ соответствуют полуинтервалам Δ_α и Δ_β (см. (2.3)) существования решений уравнения (2.2), значение p_\pm задаются соотношениями (2.1), а значения p_α и p_β — соотношениями $p_\alpha = u(x_\alpha)$, $p_\beta = u(x_\beta)$, где x_α и x_β корни уравнения $v(x) = 0$ на полуинтервалах Δ_α и Δ_β соответственно. Цифрами (0), (1), (2), (3), (4) обозначены топологические типы областей возможности движения ((0) — пустое множество, (1), (2) или (3) — один, два или три “толстых” двумерных тора ($\mathbb{T}^2 \times \mathbb{D}^1$), (4) — трехмерный тор (\mathbb{T}^3)), а знаками плюс (минус) — точки минимума (максимума) функции $f(x)$.

Диаграммы, соответствующие областям 16, 17, 19, 22, 23, отличаются от приведенной на рис. 2, расположением точек p_+ , p_- , p_α и p_β и отсутствием точек возврата как на одной из кривых $q_\alpha(p)$, $q_\beta(p)$, так и на обеих. Для областей 20 (15) и 21 (14) исчезает ветвь $q_\beta(p)$ ($q_\alpha(p)$); при этом для областей 20 и 15 есть точка возврата, а для областей 21 и 14 ее нет. Для областей 11 ($(1+b)/a < p_+$) и 12 ($(1+b)/a > p_+$) (13) диаграммы отличаются от диаграмм 15 (14) тем, что на них кривые (3.1) пересекаются. Для областей 1 — 6 кривые $q = q_0(p) = f(x_0(p))$, где $x_0(p)$ — решение уравнения (2.2) на Δ_0 , соединяют точки прямых (3.1), соответствующие значениям p_\pm и существуют только на ограниченном интервале изменения параметра p ; при этом для областей 1 ($p_+ < p_-$) и 6 ($p_+ > p_-$) на кривой $q_0(p)$ нет точек возврата, а для областей 2 ($p_+ < p_0 < p_-$), 3 ($p_0 < p_+ < p_-$), 4 ($p_0 < p_- < p_+$) и 5 ($p_- < p_0 < p_+$) точки возврата есть (здесь $p_0 = u(x_0)$, x_0 — корень уравнения $v(x) = 0$ на Δ_0). Для областей 7–9 не существует кривой $q_\beta(p)$, причем для области 7 на кривой $q_\alpha(p)$ нет точки возврата, а для областей 8 ($p_- < (1+b)/a$) и 9 ($p_- > (1+b)/a$) она есть. Для области 10, кроме прямых (3.1), есть только кривая $q = q_{\alpha\beta}(p) = f(x_{\alpha\beta}(p))$, где $x_{\alpha\beta}(p)$ — корень уравнения (2.2) на интервале $\Delta_{\alpha\beta}$. Эта кривая состоит из двух ветвей, рождающихся в точке $p = p_{\alpha\beta}(p) = u(x_{\alpha\beta})$, где $x_{\alpha\beta}$ — корень уравнения $v(x) = 0$ на $\Delta_{\alpha\beta}$. При $p \rightarrow +\infty$ одна ветвь стремится к прямой $q = 1/a$, а другая — к пря-

мой (3.3). Для области 24 диаграмма состоит только из непересекающихся прямых (3.1). При этом для областей 10 и 24 все точки прямой $q_-(p)$ ($q_+(p)$) являются точками минимума (максимума) функции $f(x)$.

Таким образом, общий случай гораздо богаче случая гироскопа в кардановом подвесе [7]: полный атлас бифуркационных диаграмм содержит 24 (а не 4) карты, а области возможного движения могут состоять из трех “толстых” двумерных торов (а не только одного) такого тора.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
2. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. С. 77–123.
3. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: MacMillan and Co., 1877. 108 p.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
5. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. V. 7. P. 259–380.
6. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР, 1962.
7. Карапетян А.В., Чаплыгина М.П. Бифуркационный анализ динамики гироскопа в кардановом подвесе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 2019. № 3. С. 73–76.

Bifurcation Smale Diagrams for Three Connected Heavy Rigid Bodies System

A. V. Karapetyan^{a,#}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*

The problem on the motion of three connected rigid bodies in the homogeneous gravitation field (the generalization of the problem of a gyroscope in Gimbal suspension) is considered. All steady motions of the system, their stability and bifurcation conditions are found. The given parametric analysis has shown that the full atlas of Smale bifurcation diagrams contains 24 maps with different types of these diagrams. In the paper there is given one of the most complicated Smale diagrams and there are described all other diagrams.

Keywords: gyroscope in Gimbal suspension, bifurcation diagrams, topology of possible motions domains

REFERENCES

1. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1971.
2. *Smale S.* Topology and mechanics // Invent. Math., 1970, vol. 10, pp. 305–311; 1970, vol. 11, pp. 45–64.
3. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: MacMillan and Co., 1877. 108 p.
4. *Karapetyan A.V.* Stability of Steady Motions (Ustoichivost statsyonarnykh dvizhenii). Moscow: URSS, 1998. 165 p. (in Russian)
5. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. // Acta Math., 1885, vol. 7, pp. 259–380.
6. *Chetaev N.G.* The Stability of Motion. London: Pergamon. 1961. 200 p.
7. *Karapetyan A.V., Chaplygina M.P.* Bifurcation analysis of gyroscope in Gimbal suspension // Moscow Univ. Mech. Bull., 2019, no. 74, pp. 75–78.

УДК 629.764

К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ© 2020 г. В. Н. Бранец^{1,2,3,*}¹ *ОАО “Газпром – космические системы”, Щелково М.О., Россия*² *Московский физико-технический институт, Долгопрудный М.О., Россия*³ *Томский государственный университет, Томск, Россия***e-mail: branets.07@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.10.2019 г.

После доработки 25.02.2020 г.

Принята к публикации 11.03.2020 г.

Несмотря на большой прогресс в ракетной технике и практический опыт создания ряда ракетно-космических систем (ракет-носителей (РН)), задача оптимизации структуры РН не потеряла своего значения. Еще в фундаментальной работе известных американских ученых [1] в 1965 году ставился, в частности, вопрос об оптимизации распределения топлива между ступенями многоступенчатой конфигурации носителя. Было предложено его приближенное решение: авторы показали, что при одинаковых удельных импульсах ракетных двигателей последовательно работающих ступеней РН, оптимальным является равное распределение характеристических скоростей для каждой ступени. Позднее в учебном пособии, вышедшем в России [2], такой же вывод был повторен. В монографии [3], вышедшей в США в 2004 году, также упоминавших этот результат, кроме того было сказано, что другого более общего решения пока не найдено.

В предлагаемой работе делается попытка найти новые подходы к решению этой и других смежных задач, связанных с оптимизацией ракеты-носителя.

Ключевые слова: ракета-носитель, реактивный двигатель (РД), ракетная ступень (РС)

DOI: 10.31857/S0032823520030029

Введение. Предлагаемая схема исследования основана на трех идейных предпосылках. Первая состоит в применении схемы “обратного полета”, когда процесс выведения рассматривается при обращении знака времени, т.е. выполняемом как бы в обратном порядке. Вследствие этого положения анализ процесса выведения РН начинается с последней ступени притом, что начальными условиями становятся условия нахождения ракетной ступени с полезным грузом на круговой орбите ИСЗ (окончание процесса реального выведения). Вторая предпосылка позволяет рассматривать виртуальную модель ракетной ступени с переменным количеством топлива и, соответственно, переменным весом топливных баков. Представляется, что поиск оптимального распределения топлива между ракетными ступенями носителя нужно искать при сравнении виртуальных РС. Третья – использует весьма наглядный и понятный параметр эффективности расходования топлива, являющийся производной от характеристической скорости ракетной ступени по расходуемому топливу. В статье проводится последовательно массово-весовой анализ РН и определяются условия для границ распределения топлива между ракетными ступенями, далее выполняется исследование динамики движения последней ступени, что совместно с требованиями к первой сту-

пени позволяет во многом определить структуру РН. В заключительной части проводится анализ существующих ракет-носителей, иллюстрирующих полученные выводы.

1. Распределение топлива между РС. Исходные определения и аналитика. Проведем массово-весовой анализ РН и поиск подходов к поставленной задаче распределения топлива (и характеристических скоростей) между РС, следуя работе [3] и используя обозначения этой работы. Главным объектом анализа является ракетная ступень ракеты-носителя. Положим, что каждая РС состоит из ракетного двигателя РД, имеющего массу $m_{рд}$, баков для хранения топлива массой m_6 , и рядом служебных систем РС массой m_s , так что вес “сухой” ракетной ступени равен $m_{рд} + m_6 + m_s$; массу полезного груза обозначим $m_{пг}$, конечная масса РС будет $m_{кон} = m_{рд} + m_6 + m_s + m_{пг}$, измеряемая в килограммах. Вес топлива РС обозначим m_t ; величина тяги РД зависит от массового расхода и удельного импульса $R_{уд}$ в секундах:

$$F = gR_{уд} \frac{dm_t}{dt}, \quad (1.1)$$

где g – гравитационное ускорение Земли, и тяга измеряется в H . Потери тяги двигателя из-за атмосферного давления на малой высоте – будем учитывать в величине удельного импульса РД. Основным “выходным” параметром рассматриваемой k -й ракетной ступени будем считать приращение скорости ΔV_k , получаемой за счет тяги ракетного двигателя, т.е. интеграла от ускорения, сообщаемого этим двигателем на полном интервале работы РД в условиях отсутствия внешних сил; эту величину называют характеристической скоростью РС. Для работы k -й ракетной ступени будем использовать далее известное соотношение для величины получаемого приращения скорости (формула Циолковского–Мещерского):

$$\Delta V_i = \int_{m_{кон}}^{m_{нач}} gR_{удi} \left(\frac{dm}{m} \right)_i = gR_{удi} \ln MR_i = V_{ист i} \ln \left(1 + \frac{m_t}{m_{кон}} \right)_i, \quad (1.2)$$

где $\Delta V_{ист i}$ – скорость истечения газов РД i -й РС, $MR_k = (m_{нач}/m_{кон})_i$ – массовое отношение (*mass ratio*) для рассматриваемой РС, т.е. отношение начальной массы ступени РН к его конечной массе, получаемой после выработки топлива.

Сумма ΔV_{Σ} всех ступеней даст полную скорость, которую может сообщить полезному грузу РН. Скорость для выведения на низкую круговую орбиту ИСЗ, хорошо известна, представим ее суммой ΔV_i в виде их выражения (1.2), можно видеть, что при равных удельных импульсах РД всех ракетных ступеней, суммарная скорость будет определяться произведением MR_i под знаком логарифма. Очевидно, что максимальное значение этого произведения при том, что сумма ΔV_i фиксирована, будет тогда, когда значения всех составляющих будут одинаковы (и равно 1/3 для трехступенчатой РН, 1/2 – для двухступенчатой РН и т.д.). Выше мы и упоминали этот результат работы [1], и его будем рассматривать как первое приближение в решении поставленной задачи.

Построим проектную кривую обратного метода функциональной зависимости скорости ΔV обратного по знаку ускорения в функции от расходуемого топлива. Рассмотрение начнем с последней ступени, которой дадим номер i (для простоты изложения индекс дальше использовать не будем, когда идет рассмотрение одной ступени РН). Особенностью этой проектной кривой будет формирование того же самого массового отношения начальной массы к конечной для вычисления приращения ско-

рости в соответствии с соотношением (1.2) в функции текущего значения расходуемой массы топлива. Обозначим текущую (изменяющуюся во времени) массу РС

$$m_c(t) = m_{\text{пг}} + m_{\text{рд}} + m_6 + m_s + m_t \quad (1.3)$$

На начальный момент времени реального полета $m_c = m_{\text{нач}}$, и массовое отношение будет переменным во времени:

$$MR(t) = \frac{m_c}{m_{\text{кон}}} = 1 + \frac{m_t}{m_{\text{пг}} + m_{\text{рд}} + m_s + m_6} \quad (1.4)$$

В предлагаемом здесь обратном методе эта зависимость ΔV начинается с $MR(0) = 1$, ($\Delta V = 0$) при $m_c = m_{\text{кон}}$, и продолжается до $m_c = m_{\text{нач}}$.

Безразмерные соотношения и виртуальная РС. Помимо величины массового отношения (1.4) введем понятие виртуальной ракетной ступени, которая будет отличаться от исходной тем, что запас топлива в ней не фиксирован, как в реальной РС. Этот переменный запас топлива будем обозначать той же переменной m_t , такие соотношения нам потребуются при анализе массовых параметров для переменных величин ΔV ракетной ступени, характеризуемых переменным количеством топлива.

Можно видеть, что все весовые составляющие для виртуальной РС могут при этом оставаться такими же, как в реальной РН, кроме веса баков для топлива. Положим простейшую линейную модель, когда вес баков пропорционален весу хранящегося в них топлива с неким коэффициентом μ , т.е. $m_6 = \mu m_t$ (не составляет труда использовать более точную весовую модель баков). Тогда имеем

$$MR_{\text{врт}} = \frac{m_c}{m_{\text{кон}}} = 1 + \frac{m_t}{m_{\text{пг}} + m_{\text{рд}} + m_s + \mu m_t} \quad (1.5)$$

и тем самым мы имеем возможность варьировать основной интересующий нас параметр ΔV в функции от расходуемого топлива. Следует заметить, что виртуальное массовое соотношение $MR_{\text{тек}}$ совпадает с реальным MR для выбранной ступени только в двух точках. Это точка начала работы ступени, когда для уже выбранных параметров ступени определена масса топлива и, тем самым, фиксирован вес топливных баков (т.е. определен MR), и в конечной точке, где $MR = 1$.

В формулах (1.1), (1.4) и (1.5) масса всех составляющих входит в виде их отношения, т.е. имеется возможность представить формулы в безразмерном виде. Поскольку для нас самой важной является масса полезного выводимого груза, будем относить все массовые составляющие к этой массе. Введем безразмерные обозначения: $x = m_t/m_{\text{пг}}$ – основной параметр, определяющий запасы топлива в рассматриваемой ракетной ступени. Далее обозначим $a_k = (m_{\text{рд}} + m_s)/m_{\text{пг}}$ – некий массовый конструктивный коэффициент, учитывающий вес РД и конструкции РС и ее систем, являющийся для выбранной ступени постоянным. Тогда получим для массового отношения (1.5) такую формулу

$$MR_{\text{врт}} = 1 + \frac{x}{1 + a_k + \mu x} \quad (1.6)$$

В качестве примера определим введенные коэффициенты в формуле (1.6) для третьей ступени РН “Протон-К”, параметры которой представлены в следующей таблице 1.

Используя числовые данные:

$$m_c = m_{\text{рд}} + m_s + m_6 = 4.185 \text{ т}, \quad m_t = 46.562 \text{ т}, \\ \dot{m} = 0.195 \text{ т/с} \quad \text{при} \quad m_{\text{пг}} = 20.7 \text{ т},$$

получим следующие значения $\mu = 0.06$, $a_k = 0.067$.

Таблица 1. Основные характеристики РН “Протон-К”

Ступень	Первая	Вторая	Третья
Тяга двигателя, кН	9500	2300	583
Масса с топливом, кгс	450510	167828	50747
Масса сухая, кгс	31000	11750	4150
Удельный импульс, с	288	320	325
Полезный груз, кг	20700		

На рис. 1 представлены зависимости виртуального массового отношения (1.6) на основе числовых данных, когда $a_k = 0.067$ и различных значений бакового коэффициента μ . Из этого графика и формулы (1.6) видно, что конструктивный параметр a_k определяет наклон прямой (соответствует $\mu = 0$), и он тем выше, чем меньше весовые значения составляющих сухого веса ступени. Влияние же веса баков иллюстрируется семейством кривых. Представим безразмерные зависимости самого главного для нас параметра ΔV , который запишем тоже в безразмерном виде, отнесенным к скорости истечения массы из ракетного двигателя

$$\Delta V = gR_{уд}y = \Delta V_{ист}ky \tag{1.7}$$

На рис. 2 представлены зависимости (1.2) для ΔV в безразмерном виде, справедливые, как для реальных, так и для виртуальных массовых отношений:

$$y = \ln MR_{врт} \tag{1.8}$$

Функция $y(x)$ представляет $\Delta V(x)$ в единицах скорости истечения газов ракетного двигателя $V_{ист}$. Эти кривые дают представление о том, как вариации параметров ра-

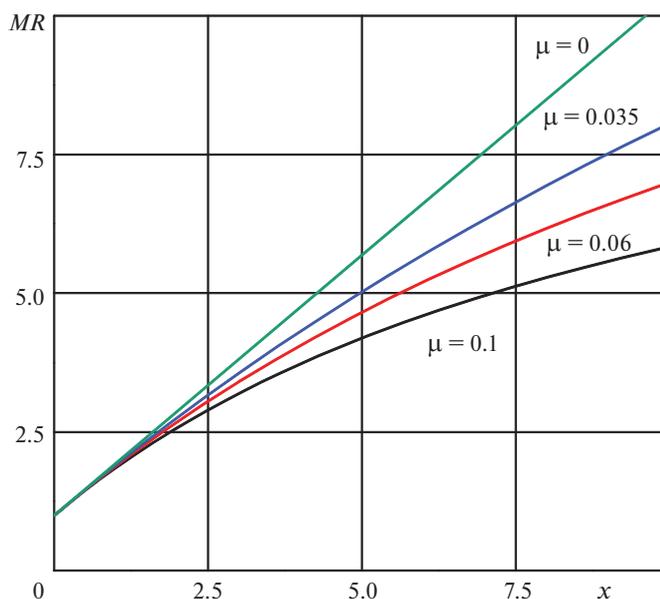


Рис. 1. Зависимость $MR_{врт}$ от запасаемого топлива $x = m_T / m_{ПГ}$.

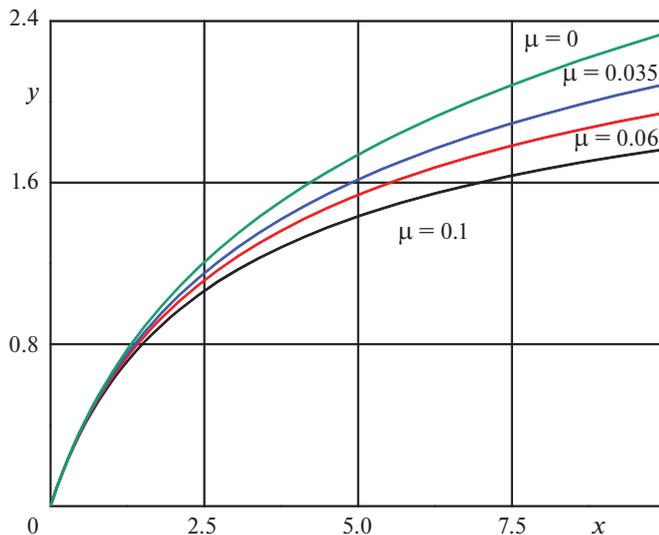


Рис. 2. Зависимость безразмерной характеристической скорости РС от запасаемого топлива.

кетной ступени — μ , a_k , m_T влияют на основную ее характеристику — величину доставляемой ракетной ступенью приращения скорости ΔV . Представленные зависимости очень показательны: во-первых, они относятся ко всем ступеням РН с любыми ракетными двигателями. Во-вторых, видно, что близко к началу координат существует область почти линейной зависимости ΔV от затраченного топлива: именно в этой области и работают все ракетные ступени. Так при $x \leq 2$ ($m_T \leq 2m_{пр}$), величина y достигает 1, тогда как последующее увеличение скорости, к примеру, в два раза потребует затрат топлива почти на порядок больше. Этим определяется тот факт, что очень трудно сделать одноступенчатую ракету, так как для этого потребуются массовое отношение не менее $y \sim 3$. Даже при самом высоком удельном импульсе (в рассматриваемом примере, $R_{уд} = 325$ с, для третьей ступени РН), потребуется топлива в сотни раз больше веса полезного груза. Основное влияние здесь оказывает баковый коэффициент, которой сделать малым для конструкции с исходным большим весом практически возможным не представляется. Разделив потребную для выведения характеристическую скорость на три, т.е. рассматривая трехступенчатую РН, мы получим условия для каждой ступени в благоприятной зоне приемлемых характеристик.

На рис. 3 представлены две зависимости $\Delta V(m_T)$, построенные для существующих параметров третьей ступени РН “Протон-К”: реальная зависимость, вычисленная по формуле (1.2) с использованием MR формулы (1.4), которая заканчивается при m_T , равном 46.562 т (заправка РС) и виртуальная кривая, которая не ограничена. Как и следовало ожидать, начало и конец зависимости для третьей ступени лежат на виртуальной кривой $\Delta V(m_T)$. Отсюда можно сделать вывод, что виртуальная зависимость является огибающей семейства таких зависимостей для семейства РС, отличающихся различными объемами запасаемого топлива.

Показатель эффективности расходования топлива. Зависимости $y(x)$ рис. 2 показывают, что эффективность преобразования ракетного топлива в скорость ракетной ступени сильно изменяется от самой высокой в начале графика (реально это конец работы РС), быстро снижающейся по мере увеличения запасаемого топлива.

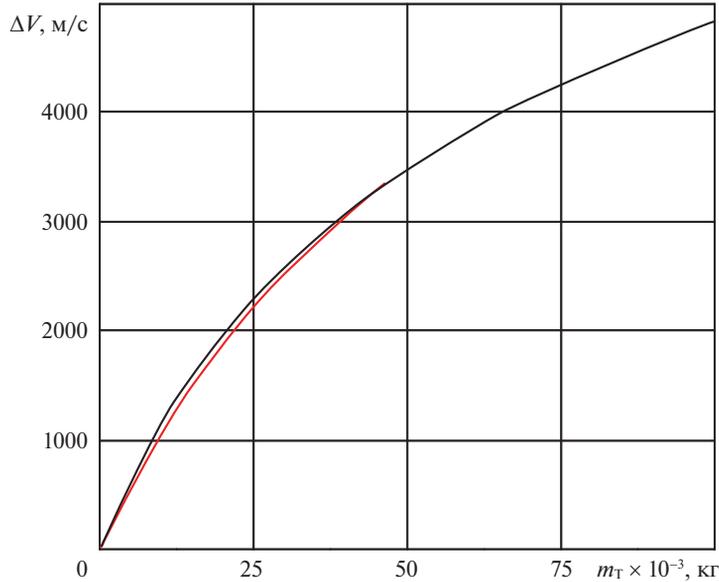


Рис. 3. Реальная и виртуальная зависимости $\Delta V(m_T)$ для третьей ступени РН “Протон”.

Введем понятие эффективности расходования топлива (ЭРТ) ракетной ступенью, как величину производной от скорости ΔV по расходу топлива, то есть будем рассматривать производную $d\Delta V/dm_T$. Дифференцируя соотношение (1.2), получаем

$$\frac{d\Delta V}{dm_T} = \frac{d\Delta V}{dMR} \frac{dMR}{dm_T} = \frac{gR_{уд}}{MR} \frac{dMR}{dm_T} \tag{1.9}$$

Будем рассматривать производные от реальных (1.4) и виртуальных (1.5) массовых отношений

$$\frac{dMR}{dm_T} = \frac{1}{m_{пг} + m_{рд} + m_s + m_6}, \quad \frac{dMR_{врт}}{dm_T} = \frac{m_{пг} + m_{рд} + m_к}{(m_{пг} + m_{рд} + m_к + \mu m_T)^2}$$

в итоге для реальной и виртуальной зависимостей получаем:

$$\frac{d\Delta V}{dm_T} = \frac{gR_{уд}}{m_c}, \quad \frac{d\Delta V_{врт}}{dm_T} = \frac{gR_{уд}}{m_c} \frac{m_{пг} + m_{рд} + m_s}{m_{пг} + m_{рд} + m_s + \mu m_T} \tag{1.10}$$

Поскольку нас интересуют рассматриваемые величины производных в двух точках начала и конца работы ступени, то в начале: $\mu m_T = m_6$ и $m_c = m_n$, в конце: $m_c = m_{пг} + m_{рд} + m_s$, то в этих точках имеем такие соотношения между виртуальной и реальной приращениями скоростей

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V_{врт}}{dm_T} &= k \frac{d\Delta V}{dm_T} \text{ – в начале} \\ \frac{d\Delta V_{врт}}{dm_T} &= \frac{1}{k} \frac{d\Delta V}{dm_T} \text{ – в конце} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Таблица 2. Основные характеристики РН “Зенит-2”

Ступень	Первая	Вторая
Тяга двигателя, кН	7259	834
Масса с топливом, кг	352700	89900
Удельный импульс, сек	337.2	350
Масса сухая, кг	33900	9300
Масса полезного груза, кг	13700	

траектории обратного движения, где

$$k = 1 + \frac{m_6}{m_{\text{пг}} + m_{\text{рд}} + m_s} > 1 \quad (1.12)$$

некоторый коэффициент, определяемый отношением веса “сухой” ракетной ступени к этому же весу без учета веса баков.

Именно это различие в производных показано на рис. 3. Сравнение этих производных показывает следующее. В начале обратного полета (конец выведения) виртуальная производная (1.10) будет в k раз больше реальной, тогда как в конце она становится в k раз меньше, таким образом, виртуальная зависимость $\Delta V_{\text{тек}}(m_r)$ является действительно огибающей реальных кривых зависимостей $\Delta V(m_r)$ для различных вариантов этой ступени, отличающихся величиной запасаемого топлива. Заметим, что ранее [4] была сделана попытка (от которой впоследствии отказались) построить алгоритм нахождения оптимальной границы перехода с помощью этого коэффициента.

Для дальнейшего анализа будет нужен в основном реальный показатель эффективности расходования топлива (ЭРТ), обозначим его символом ζ ; можно видеть, что эта величина есть отношение ускорения РС к массовому расходу топлива, в итоге из соотношений (1.9) и (1.10) получаем

$$\zeta = \frac{d\Delta V}{dm_r} = \frac{d\Delta V}{dt} \frac{dt}{dm_r} = \frac{F}{m_c} \frac{1}{\dot{m}_r} = \frac{gR_{\text{уд}}}{m_c} \quad (1.13)$$

Этот показатель не зависит от тяги РД, расхода топлива и определяется только удельным импульсом и текущей массой ракетной ступени. Заметим, что вторая формула (1.10) иллюстрирует падение эффективности РС по мере увеличения размеров запасаемого топлива и самой ступени для виртуальной зависимости.

Можно видеть, что данных таблицы 1 достаточно, чтобы построить зависимость показателя ЭРТ для каждой РС, а тем самым и для всей РН. На рис. 4 и 5 представлены такие зависимости для РН “Протон-К” и “Зенит” (последняя советская РН); на графиках даны две зависимости: кривые показателя ζ , являющиеся гиперболами, и текущая масса РН, точки разрыва кривых – это переход от одной ступени к другой, происходящий из-за отбрасывания массы пустой РС. Данные для РН “Зенит” представлены в таблице 2.

Ход кривых ЭРТ на представленных рисунках показывает, что показатель ЭРТ начала работ последующей ступени выше, чем конца работы предыдущей. Эта информация позволяет искать решение задачи оптимизации перераспределения топлива между ступенями РС в поиске возможности использования более высоких показателей ЭРТ. Совершенно очевидно, что желательнее большее количество топлива израсходовать там, где выше коэффициент ζ , т.е. переместить как можно большее количество топлива в РС в сторону последней ступени. При этом по мере увеличения топлива в

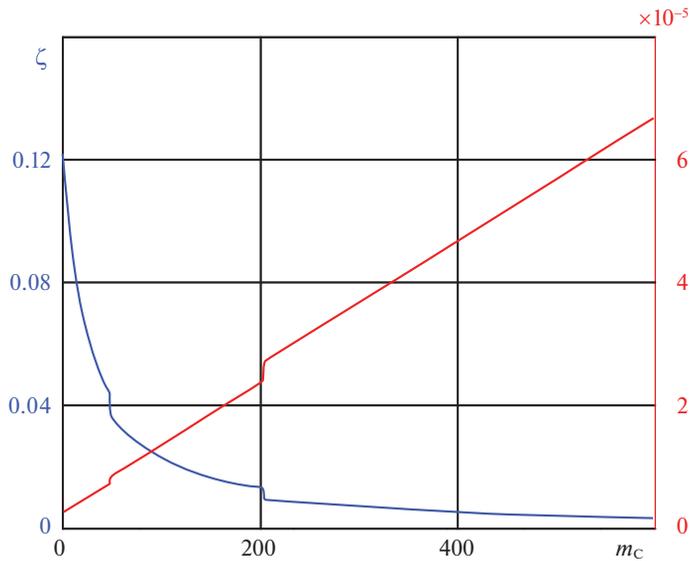


Рис. 4. РН “Протон”, показатель ЭРТ ζ в функции от текущей массы РС m_c ; слева – кривая 3 ступени, затем второй, и далее – первой. По оси абсцисс – масса РН в кг, по оси ординат – показатель ЭРТ в м/с кг. Заметим, что характеристические скорости ракетных ступеней суть: $\Delta V_1 = (2615/2900)$ м/с (для предельных значений $R_{уд}$), $\Delta V_2 = 3327$ м/с и $\Delta V_3 = 3366$ м/с.

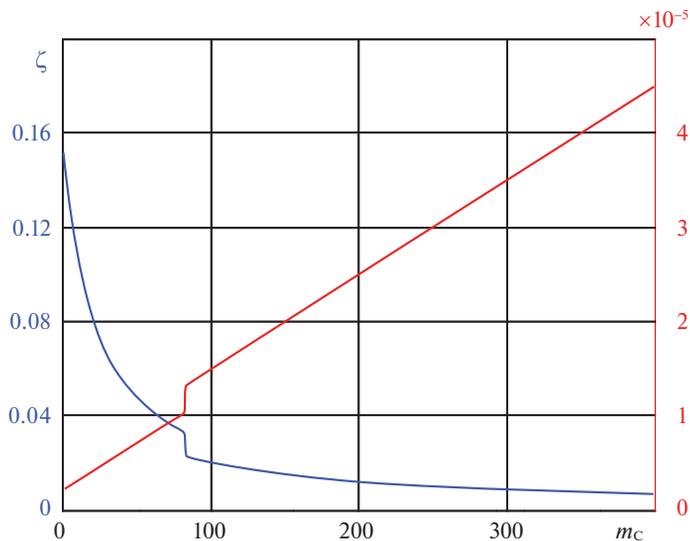


Рис. 5. РН “Зенит”, зависимости ζ от m_c . Слева кривые второй ступени, далее – первой: точка разрыва – переход от первой ступени ко второй. Характеристические скорости ступеней этой РН: $\Delta V_1 = 3637/3966$ м/с (предельные значения $R_{уд}$), $\Delta V_2 = 5167$ м/с.

более эффективной РС кривая зависимости ζ изменяется; она увеличивается по длине и “проседает”, но по-разному: меньше всего в начале координат (увеличение массы баков), и больше – к границе перехода к смежной РС (баки и топливо). Такое “перераспределение” топлива должно закончиться при выравнивании показателей ЭРТ на границе двух РС. По сути дела этот вывод и есть решение задачи об оптимальном распределении топлива между ракетными ступенями, который нужно дополнить естественными ограничениями, существующими для различных участков полета.

Тем самым, может быть создан некоторый новый методический подход к решению поставленной задачи оптимизации: нужно построить компьютерный алгоритм поиска границы по массе топлива при переходе от одной ступени к другой, таким образом, чтобы исключить “разрывы” в кривой ЭРТ между соседними РС, кроме, может быть, той, которая вызвана сбросом массы отработанной ступени РН.

Обсуждение результатов и выводы. В качестве примера рассмотрим более детально один такой переход, скажем от второй к третьей РС РН “Протон-К”. Значение показателя ЭРТ конца работы второй ступени в конце ее работы равен (используем данные таблицы 1 такие: $\zeta_{2k} = 0.0377$ м/с кг, тогда как в начале работы третьей ступени этот показатель равен $\zeta_{30} = 0.04458$ м/с кг. Если допустить увеличение запасов топлива, т.е. и характеристической скорости третьей ступени ΔV_3 на $\delta V = 1$ м/с, и уменьшение на такую же величину ΔV_2 , то получим выигрыш в массе топлива $\delta m = \delta V (1/\zeta_{2k} - 1/\zeta_{30}) = 4.093$ кг, т.е. такой проектный процесс передачи топлива к более эффективной РС имеет смысл. Величину массы топлива третьей ступени можно увеличивать, к примеру, до тех пор, пока ζ_{30} не уменьшится до конечного значения $\zeta_{2k} = 0.0377$ м/с кг, откуда получим в линейном приближении, что массу третьей ступени можно увеличить на 13035 кг, и это эквивалентно увеличению скорости на $\delta V_3 = 535$ м/с. Из рассмотрения кривых показателя ЭРТ рис. 4 и 5 видно, что такие же соображения можно применить и ко всем другим точкам перехода от одной РС к другой. Заметим, что примерно такие расчеты были приведены в работах [5–7].

Более внимательный анализ показывает, что такая линейная экстраполяция вряд ли справедлива для больших изменений в распределении масс и скоростей. Дело в том, что изменяя параметры ракетной ступени (массу ее топлива), мы должны переходить к виртуальной ее модели, при этом вся кривая ЭРТ этой ступени меняется в целом. Обратимся к безразмерному соотношению для массового отношения РС (1.6) и попробуем выразить величину параметра ЭРТ через переменные $x = m_r/m_{пр}$ и y в безразмерных равенствах (1.7). Имеем

$$y = \ln MR_{врт}, \quad \zeta = \frac{d\Delta V}{dm_r} = \frac{gR_{уд}}{m_{пр}} \frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + a_k}{(1 + a_k + \mu x)(1 + a_k + x + \mu x)} \quad (1.14)$$

При малых значениях x показатель ЭРТ равен $\zeta = \frac{gR_{уд}}{m_{пр}} \frac{1}{1 + a_k}$, но как только величина x возрастает, начинается падение ЭРТ, которое затем происходит не по обычной, а по квадратичной гиперболе, тем самым граница искомого перехода, когда эффективности выравниваются, действительно всегда существует. Схема использования запасов топлива при $x \leq 2$ для всех ступеней соответствует упомянутому выше критерию равных характеристических скоростей [1–3]. Появление трехступенчатых РН в истории объясняется тем, что все они были получены из межконтинентальных баллистических ракет добавлением третьей ступени, которая действительно сильно увеличила ее суммарную эффективность.

Как показала практика, при проектировании уже ракеты-носителя для выведения на низкую круговую орбиту (НОО), все равно переходили к использованию двухсту-

пенчатой РН, когда последняя ступень взяла на себя задачи второй и третьей из-за ее более высокой эффективности. Точно такой же процесс можно было бы себе представить и на границе перехода от второй к первой ступени, однако требования к первой ступени, которые мы рассмотрим дальше, являются уникальными и не могут быть исполнены последующими ступенями. Можно видеть, что перераспределение скоростей (или топлива) между РС возможно, и оно, безусловно, может привести к положительному результату. Найти простые аналитические соотношения в поставленной задаче – не удалось, даже с использованием виртуальной модели. Не вызывает сомнений, что можно и нужно построить компьютерный алгоритм нахождения рационального распределения характеристических скоростей между ракетными ступенями, о чем говорилось выше.

2. Динамика выведения последней ступени. Применим метод обратного полета к исследованию динамики движения последней ступени. Такая задача имеет особый интерес с точки зрения исследования возможности для построения РН с двумя ступенями, когда последняя ступень выполняет основной набор орбитальной скорости оптимальным образом. При этом, естественно выгодно использование на последней ступени РД с самыми высокими удельными импульсами, какие имеют кислородно-водородные двигатели, хотя проведенное рассмотрение будет справедливым для любых других РД.

Исследование оптимальной траектории. При торможении орбитальной скорости возникает особый случай: при достаточно энергичном горизонтальном ускорении РС успевает выдать достаточно большой импульс приращения скорости при малом изменении высоты полета.

Обратимся к уравнениям движения и запишем их в проекциях скорости движение ракетной ступени на оси орбитальной системы координат [3]. Пусть α представляет собой угол к линии горизонта направления вектора тяги РД, V_θ и V_r – компоненты горизонтальной и вертикальной составляющих скорости, r – геоцентрический радиус РС; при отсутствии аэродинамических сил уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV_\theta}{dt} &= \frac{F \cos \alpha}{m} \\ \frac{dV_r}{dt} &= \frac{F \sin \alpha}{m} - \left(g - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Максимальная эффективность импульса тяги РД получается при его использовании только в целях гашения (т.е. набора в реальном полете) орбитальной скорости V_θ . Примем для дальнейшего анализа угол $\alpha = 0$, при этом получаем такие уравнения:

$$\frac{dV_\theta}{dt} = \frac{F}{m}, \quad \frac{dV_r}{dt} = -g + \frac{V_\theta^2}{r}, \quad (2.2)$$

и они могут быть проинтегрированы отдельно. Рассмотрим такое предельное движение; очевидно, что единственным условием его корректности является требование, чтобы эта траектория проходила вне атмосферы. Для составляющей орбитальной скорости V_θ при оптимальном использовании импульса тяги РД имеем:

$$V_\theta(t) = V_\theta^0 - \int_0^t \frac{F}{m} dt,$$

при этом масса ступени является переменной $m_c(t) = m_k + \dot{m}_t t$ (для обратного метода). В итоге с учетом соотношения (1.2) получаем следующую зависимость изменения горизонтальной скорости

$$V_\theta(t) = V_\theta^0 - \Delta V = V_\theta^0 - gR_{уд} \ln[MR(t)] = V_\theta^0 - gR_{уд} \ln\left(1 + \frac{\dot{m}_t t}{m_k}\right) \quad (2.3)$$

Аналогичным образом может быть получено соотношение с участием виртуального изменения скорости, позволяющее оценить процесс торможения для любого выбранного переменного запаса топлива этой ступени. Уменьшение орбитальной скорости (2.3) приводит к появлению вертикального ускорения, вследствие чего появляется вертикальная скорость снижения. Подставляя это значение во второе уравнение (2.2), получаем:

$$\frac{dV_r}{dt} = -g + \frac{(V_\theta^0 - \Delta V)^2}{r} \approx -\frac{\Delta V}{r} (2V_\theta^0 - \Delta V) = g \frac{\Delta V}{V_\theta^0} \left(\frac{\Delta V}{V_\theta^0} - 2 \right), \quad \dot{r}(t) = V_r \quad (2.4)$$

В этих уравнениях будем считать на начальном участке движения изменение высоты полета r малым, так что $V_\theta^0{}^2 = gr$ и величину гравитационного ускорения будем считать постоянной. Можно видеть, что вертикальная составляющая скорости получается интегрированием уравнения (2.4) при соотношении для $\Delta V(t)$ в виде (1.2) в первом разделе этой работы и нулевых начальных условиях по скоростям:

$$V_r = g \int_0^t \left(\frac{\Delta V}{V_\theta^0} \right)^2 dt - 2g \int_0^t \left(\frac{\Delta V}{V_\theta^0} \right) dt$$

$$\Delta V(t) = gR_{уд} \ln \frac{m_c(t)}{m_k}, \quad \frac{m_c(t)}{m_k} = 1 + \frac{\dot{m}_T t}{m_k}$$

Однако, в целях получения достаточно общих соотношений для любых параметров РС, нам удобнее будет представить зависимости высоты и скорости вертикального снижения в функции от безразмерной переменной $w = \Delta V/V_\theta^0$. Эта переменная представляет собой долю полной орбитальной скорости, получаемую за счет работы рассматриваемой ракетной ступени. Для анализа вертикального движения преобразуем первое уравнение (2.4) следующим образом:

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{d\Delta V} \frac{d\Delta V}{dm_T} \frac{dm_T}{dt}, \quad \frac{dm_T}{dt} = \dot{m}_T = \text{const}, \quad \frac{d\Delta V}{dm_T} \dot{m}_T = \frac{gR_{уд}\dot{m}_T}{m_c} = \frac{F}{m_c} = a,$$

где a – ускорение РС вследствие работы РД. Переходя к переменной w , получаем с учетом величины текущей массы РС $m_c = m_k \exp(\Delta V/(gR_{уд}))$ уравнение

$$\frac{dV_r}{dw} = \frac{g}{a} [w(w-2)] = \frac{m_k}{R_{уд}\dot{m}_T} \exp(\Delta V/(gR_{уд})) [w(w-2)], \quad (2.5)$$

которое может быть проинтегрировано. Удобно ввести безразмерные переменные: $\eta = V_\theta^0/(gR_{уд})$ – отношение первой космической (орбитальной) скорости к скорости истечения РД, $n = a/g$ – величину перегрузки при работе РД, заметим, что величина $R_{уд}\dot{m}_T/m_k = n_0$ определяется ускорением в начальной точке обратного полета. С учетом этих переменных уравнение (2.5) примет такой вид:

$$\frac{dV_r}{dw} = \frac{g}{a_0} V_\theta^0 e^{\eta w} [w(w-2)] = \frac{V_\theta^0}{n_0} e^{\eta w} w(w-2) \quad (2.6)$$

Второе уравнение для вертикального расстояния $r(t)$ (2.4) приведем к этим же переменным: $V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = \frac{dr}{dw \cdot V_\theta^0} a_0 e^{-\eta w}$, откуда получаем

$$\frac{dr}{dw} = \frac{V_{\theta}^0}{a_0} e^{\eta w} V_r \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.6) с учетом начальных условий по скорости $V_r^0 = 0$, имеем

$$V_r/V_{\theta}^0 = \frac{1}{n_0 \eta} \left\{ e^{\eta w} w \left[w - 2 \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right] + \frac{2}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta w} - 1) \right\} \quad (2.8)$$

Подставляя полученное решение в (2.7) с учетом начального условия по высоте вида $r_0 = V_{\theta}^{0^2}/g$, получаем

$$\frac{r}{r_0} = 1 + \frac{1}{2n_0^2 \eta^2} \left\{ e^{2\eta w} w \left(w - 2 - \frac{3}{\eta} \right) + \frac{1}{\eta} \left(3 + \frac{7}{2\eta} \right) (e^{2\eta w} - 1) - \frac{4}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) (e^{\eta w} - 1) \right\} \quad (2.9)$$

Как следует из полученных решений, траектория определяется параметрами η , зависящим как от $gR_{уд}$, так и от $n_0 = a_0/g$ – величины перегрузки в начале обратного полета. Можно видеть, что для уменьшения вертикальной скорости и уменьшения снижения высоты полета ее следует выбрать максимальной. С учетом конструктивных ограничений для полезной нагрузки это максимальное значение может быть взято порядка $n_0 \leq 4$, именно эта величина ниже используется при построении графиков.

Анализ возможностей. Полученные аналитические зависимости дают представление о поведении основных параметров траектории выведения: можно видеть, что для уменьшения вертикальной скорости и уменьшения снижения высоты полета существует ее значительный участок, определяемый начальной высотой целевой орбиты. Формула (2.9) показывает условие (т.е. накладывает требование) на уровень тяги ракетного двигателя последней ступени: его величину желательно сделать как можно больше, этим данный участок ракетного полета отличается от орбитального полета, где величина тяги РД может быть, в том числе, и очень малой. Более того, перегрузка от тяги РД соотносится с величиной земного ускорения.

Заметим, что STS “Спейс Шаттл” имеет перегрузку в конце выведения, равную 3, такая перегрузка уменьшает на порядок высотную “просадку” траектории по сравнению, скажем, с перегрузкой, равной 1. Можно себе представить, что при перегрузке в 0.1 “просадка” траектории становится на три порядка больше.

На рис. 6 представлена зависимость $V_r(w)$, и $r(w)$ в безразмерном виде (8.2) и (9.2) для двух величин удельного импульса. Используя представление $e^{\eta w} \approx 1 + \eta w + \frac{1}{2} \eta^2 w^2 + \frac{1}{6} \eta^3 w^3 + \dots$, выразим приближение формулы (8.2) в виде степенного ряда:

$$\frac{V_r}{V_{\theta}^0} = -\frac{1}{n_0} \left(w^2 + \frac{2}{3} \eta w^3 + \dots \right) \quad (2.10)$$

Точно так же для высоты полета, отсчитываемой от круговой орбиты r_0 , справедливо следующее приближенное представление формулы (2.9):

$$\frac{r}{r_0} = 1 - \frac{1}{n_0^2} \left\{ \frac{1}{3} w^3 + \left(\frac{5}{12} \eta - \frac{1}{12} \right) w^4 + \dots \right\} \quad (2.11)$$

Степенные функции (2.10) и (2.11), графиков рис. 6 и 7, а также и сами решения (2.8), (2.9) позволяют проанализировать зависимость траектории полета от параметров РС. Уменьшение высоты полета для рассматриваемой нами модели движения возможно только до расстояния ~80 км, ниже которого нужно будет учитывать влияние атмосферы.

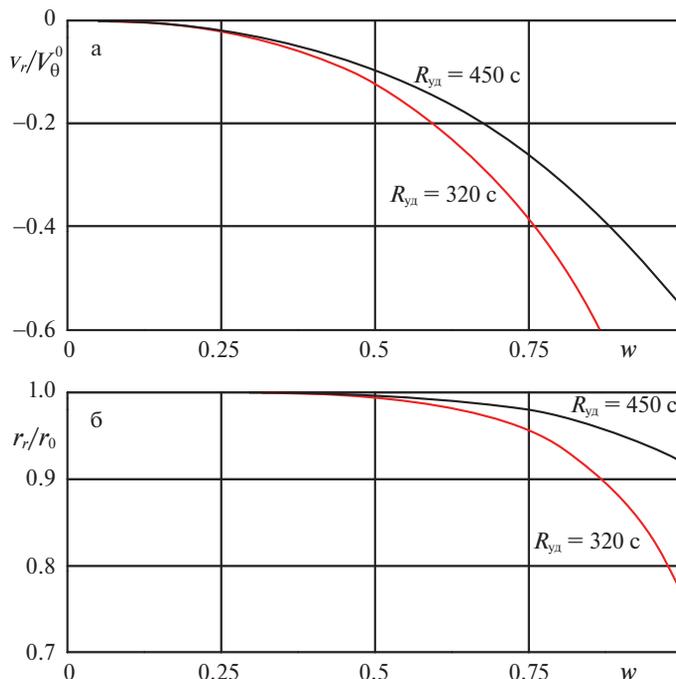


Рис. 6. Вертикальная скорость (а) и расстояние (высота) снижения (б) как функция от w .

График изменения высоты рис. 6 показывает, что имеется возможность использовать рассматриваемую оптимальную схему набора орбитальной скорости до достаточно больших импульсов ΔV . Однако, для реализации такой траектории РС должна получить от предыдущей (первой) ступени требуемую составляющую вертикальной скорости, представленную на этом же рисунке. Безразмерный параметр $\eta = V_\theta^0 / (gR_{yd})$ изменяется в пределах от 1.78 до 2.67 (от $R_{yd} = 450 \text{ c}$ до $R_{yd} = 300 \text{ c}$). Траектория торможения при $R_{yd} = 450 \text{ c}$ с учетом только первых двух членов разложения (2.11) проходит 80 км уже при $w \approx 0.63$, что соответствует $\Delta V = 4950 \text{ м/с}$. Вертикальная составляющая скорости в конце такой траектории должна быть $\sim -900 \text{ м/с}$, которую нужно рассматривать как требование к конечным параметрам траектории первой ступени.

Как видно из представленных зависимостей изменения высоты, динамика движения в принципе позволяет реализацию оптимального гашения скорости до достаточно больших значений w . Можно видеть далее, что для высокого удельного импульса задача достижения как можно большей скорости для последней ступени решается существенно легче.

Поставим вопрос о возможности увеличения импульса торможения, для чего необходимо в первую очередь обеспечить сохранение высоты полета для больших значений w . Вертикальное ускорение согласно соотношению (2.4) равно $gw(2-w)$ и в нашем распоряжении имеется возможность изменения ориентации вектора тяги РД. Пусть вектор активного ускорения \mathbf{a} расположен под углом α к линии горизонта вверх, тогда уравнения (2.1) будут иметь такой вид:

$$\frac{dV_r}{dt} = a \sin \alpha + gw(w-2), \quad \frac{dV_\theta}{dt} = a \cos \alpha \quad (2.12)$$

При этом уравнение гашения орбитальной скорости (2.3) изменится на такое:

$$V_{\theta}(t) = V_{\theta}^0 - \int a \cos \alpha dt = V_{\theta}^0 - \Delta V + \int a(1 - \cos \alpha) dt \quad (2.13)$$

и интеграл $\int a(1 - \cos \alpha) dt$ можно рассматривать как скоростные потери $\Delta V_{\text{гр}}$. Для оценки величины этих потерь используем $a = \frac{d\Delta V}{dt} = a_0 e^{-\eta w}$, $\frac{dw}{dt} = \frac{a_0}{V_{\theta}^0} e^{-\eta w}$, $\frac{d\Delta V_{\text{гр}}}{dt} = a(1 - \cos \alpha)$ с помощью которых найдем искомое уравнение:

$$\frac{d\Delta V_{\text{гр}}}{dw} = V_{\theta}^0 (1 - \cos \alpha) \quad (2.14)$$

Первой идеей может оказаться желание компенсировать вертикальное ускорение, т.е. выбрать угол наклона вектора тяги $\sin \alpha \approx gw(2 - w)$. При этом условии угол α быстро становится большим, уравнения (2.14) интегрируются, но уже член первого порядка относительно переменной w имеет вид

$$\Delta V_{\text{гр}} = \frac{4V_{\theta}^0}{n_0} \left[\frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) e^{\eta w} + \frac{1}{2n_0\eta} e^{2\eta w} \right] w + \dots,$$

что показывает чрезмерность потерь и делает неприменимой рассматриваемую идею.

Следующий подход к решению задачи состоит в том, что будем полагать вариации угла α небольшими, вызывающими малые отклонения рассматриваемой траектории торможения. Обозначим вариации скорости вертикального движения и расстояния переменными ΔV_r и Δr соответственно. Поскольку в уравнения вертикального движения ускорение $a \sin \alpha$ входит аддитивно, то уравнения для варьируемых параметров примут следующий вид:

$$\frac{d\Delta V_r}{dt} = a \sin \alpha, \quad \frac{d\Delta r}{dt} = \Delta V_r$$

Переходя к переменным w, η , получаем

$$\frac{d\Delta V_r}{dw} = V_{\theta}^0 \sin \alpha, \quad \frac{d\Delta r}{dw} = \frac{1}{a_0} V_{\theta}^0 e^{\eta w} \Delta V_r \quad (2.15)$$

При интегрировании первого уравнения (2.15) предположим, что в начальной точке обратного полета имеется вертикальная составляющая скорости V_r^0 (не поясняя, как она появилась), тогда изменение вертикальной скорости и высоты получим в таком виде

$$\frac{\Delta V_r}{V_{\theta}^0} = \frac{\Delta V_r^0}{V_{\theta}^0} + w \sin \alpha \quad (2.16)$$

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta V_r^0}{V_{\theta}^0} \frac{(e^{\eta w} - 1)}{n_0 \eta} + \frac{\sin \alpha}{n_0 \eta} \left\{ w e^{\eta w} - \frac{(e^{\eta w} - 1)}{\eta} \right\} \quad (2.17)$$

Полученные формулы дают возможность проследить отдельно влияние начальной составляющей скорости и активного ускорения на желаемое увеличение высоты траектории. На рис. 7 представлены вычисленные зависимости $(r + \Delta r)$ (2.17), показывающие влияние порознь компоненты, зависящей от начальной скорости (кривая "А") и компоненты малого угла наклона к горизонту (кривая "В") относительно опорной траектории (кривая "О"), представленной ранее на рис. 6 для самого высокого удельного импульса.

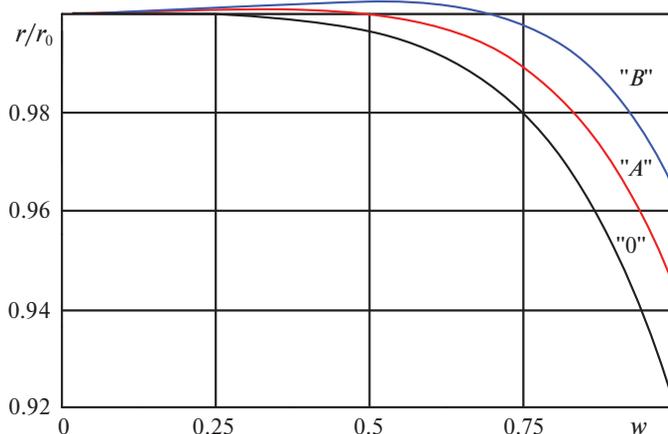


Рис. 7. Зависимости $(r + \Delta r)$ – высоты полета от w .

Представим для дальнейшего анализа формулу (2.17) в виде степенного ряда

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta V_r^0}{V_\theta^0 n_0} \left(w + \frac{1}{2} \eta w^2 + \frac{1}{6} \eta^2 w^3 + \dots \right) + \frac{\sin \alpha}{n_0} \left(\frac{1}{2} w^2 + \frac{2}{3} \eta w^3 + \dots \right) \quad (2.18)$$

Рассмотрим сначала влияние начальной скорости ΔV_r^0 . Согласно формуле (2.16) эта компонента “сдвигает” вверх профиль скоростей рис. 6. Это означает, что такая величина приращения скорости должна быть добавлена к V_r в начале работы последней ступени (т.е. за счет предыдущей ступени), а затем “погашена” в конце ее работы. Несмотря на то, что эти приращения выполняются в конце работы как предыдущей, так и последней ступени, когда имеют место максимальные ускорения, т.е. минимальные гравитационные потери, тем не менее, такие потери существенно увеличивают величину затрачиваемой характеристической скорости.

Положим, что добавка высоты Δr в соответствии с формулой (2.17) дает приращение параметру w на величину Δw . Поварьируем основное уравнение для высоты полета (2.11) с учетом только первого порядка величины Δw :

$$\frac{\Delta r}{r_0} = -\frac{\Delta w}{n_0^2} \left\{ w^2 + \left(\frac{5}{3} \eta - \frac{1}{3} \right) w^3 + \dots \right\} \quad (2.19)$$

Последнее равенство может рассматриваться как уравнение для определения Δw при его приравнении соотношениям (2.18). Заметим, что поскольку ηw не является малой величиной, предлагаемая оценка может дать представление о порядке величин в решении задачи. Оценим сначала влияние члена ΔV_r^0 , из сравнения (2.19) и (2.18) получаем

$$\Delta w \approx n_0 \frac{\Delta V_r^0}{V_\theta^0} \left[\left(w + \frac{1}{2} \eta w^2 + \frac{1}{6} \eta w^3 + \dots \right) / \left(w^2 + \left(\frac{5}{3} \eta - \frac{1}{3} \right) w^3 + \dots \right) \right] \quad (2.20)$$

Возьмем, для примера $\Delta V_r^0 = 40$ м/с ($0.005 V_\theta^0$), и при основном значении $w = 0.63$ получим зависящий от w множитель в равенстве (2.19) равным 1.63, что в итоге дает значение $\Delta w = 0.032$. Эта оценка с учетом того, что реальная $\Delta V'$ за счет гравитацион-

ных потерь будет заметно больше данной ΔV_r^0 , показывает низкую эффективность метода “А”.

Оценку влияния составляющей ускорения (метод “В”) получим таким же образом:

$$\Delta w = \frac{n_0 \sin \alpha}{2} \left[\left(w^2 + \frac{4}{3} \eta w^3 + \dots \right) / \left(w^2 + \left(\frac{5}{3} \eta - \frac{1}{3} \right) w^3 + \dots \right) \right] \quad (2.21)$$

Для примера возьмем $\sin \alpha = 0.1$, множитель, зависящий от w в равенстве (2.21) равен 1.64, откуда получаем значение $\Delta w = 0.328$. Гравитационные потери (2.14) при этом составят $V_\theta^0 (1 - \cos \alpha) = 0.005 V_\theta^0 \leq 30$ м/с. Таким образом, именно этот метод является более эффективным и может быть предложен для увеличения времени и характеристической скорости работы последней ступени.

Кривая зависимости снижения высоты рис. 7 показывает, что в этой области горизонтальных скоростей ($w \approx 1$) вертикальное движение является близким к свободному падению с высоты, равной радиусу целевой круговой орбиты под действием силы притяжения Земли. Это обстоятельство позволяет сформулировать требования к конечным параметрам траектории движения первой ступени носителя.

Требования к первой ступени. В свете изложенных выше идей одним из основных требований к первой ступени является:

- Обеспечение вертикальной составляющей движения, позволяющей осуществить выход за пределы атмосферы и достижению номинальной высоты орбиты (в данном случае 185 км) и возможному попутному набору некоторой горизонтальной скорости за счет профиля выведения по углу тангажа. Потенциальная энергия подъема на эту высоту, т.е. требование чтобы траектория “коснулась” конечной круговой орбиты, определяет по законам механики ($V^2 = 2gh$) эквивалентную скорость в 1900 м/с.

Следует заметить, что в реальном проекте при формировании профиля выведения последней ступени начало “оптимального” горизонтального разгона может быть начато сразу после выхода РС из атмосферы, т.е. существенно ранее достижения высоты в $r/r_0 \geq 0.98$, как это было рассмотрено выше. Такая возможность имеется для любой РН, и она позволяет еще увеличить время работы РД и величину разгонного импульса последней ступени. Имеет смысл напомнить здесь и другие требования к РС1:

- Для первой ступени совершенно необходима большая тяга РД: нужно значительное вертикальное ускорение, существенно превосходящее начальный вес РН. Основные потери характеристической скорости первой ступени создает гравитационное ускорение Земли, уменьшающее величину вертикальной проекции ускорения от работы реактивных двигателей, величина этих потерь определяется временем их работы (см. [2, 7, 8]). Оценки гравитационных потерь лежат в интервале 1000–1300 м/с;

- Потери в эффективности работы РД создает атмосферное давление, которое снижает тягу ракетных двигателей: величина удельного импульса, учитывающая их работу на малой высоте ниже того, что могут дать эти двигатели, находящиеся в вакууме. Оценки таких потерь составляют 120–180 м/с [3, 4, 5];

- Наличие атмосферы создает весьма существенное аэродинамическое сопротивление (скоростной напор), действующий на находящуюся в полете РН; такие потери оцениваются в 150–250 м/с. Помимо этого, преодоление атмосферного сопротивления требует выполнения ориентации РН строго против вектора скорости. Тем самым внешние условия в полете первой ступени приводят к потерям реальной скорости полета от той, которую обеспечивают ракетные двигатели (характеристической скорости). Согласно учебным пособиям [3, 4, 5] суммарные потери характеристической скорости первой ступени лежат в пределах 1200–1650 м/с. Все эти обстоятельства определяют необходимую величину характеристической скорости первой ступени РН.

Оптимизация траектории выведения рекомендует одновременно осуществлять достижение высоты и горизонтальной скорости [3, 6], для этого предполагается непрерывный активный участок полета с разворотом изделия в плоскости орбиты по углу тангажа, создающего проекцию ускорения в сторону орбитального движения. Тем самым во время вертикального подъема осуществляется набор некоторой части горизонтальной скорости. Однако, можно видеть, что низкая ЭРТ первой ступени может поставить ограничения альтернативной схеме набора горизонтальной скорости последующей РС, имеющей более высокое ЭРТ. Другими словами, набор горизонтальной скорости РС-1 оправдан, если он по показателю ЭРТ приближается к последней ступени (в начале ее работы).

Перечисленные здесь задачи первой ступени не могут быть перенесены для исполнения последующими ступенями, в этом смысле величина ее характеристической скорости полностью определяется поставленными выше требованиями. Оптимизация расходов топлива первой ступени состоит в возможном сокращении ее участия в том, что может быть сделано следующими ступенями и совокупностью конструктивных и системных технических решений для этой РС.

В известном смысле происходит разделение задач, когда достижение орбитальной скорости становится основным требованием к последней ступени, тогда как выход за атмосферу и достижение высоты целевой орбиты – задача первой ступени. Низкая эффективность первой ступени – вынужденная плата за решение задачи выведения на орбиту.

Естественно, что при более углубленном исследовании этой задачи потребуются применение численного моделирования для определения оптимизации распределения и профилей выведения.

3. Анализ существующих РН. Первая ступень является самой важной и сложной составляющей РН; основным ее компонентом является ракетный двигатель (двигатели) большой тяги. Создание такого ракетного двигателя, равно как конструктивных и технических решений РС-1, минимизирующих ее массу, всегда является уникальной разработкой, определяющей саму возможность создания РН и ее пользовательские качества (т.е. длительность ее использования).

Аналитические оценки всех этих потерь возможны и существуют, но их одновременное действие можно оценить только при компьютерном моделировании процесса выведения; оно зависит от многих факторов, в том числе и от профиля выведения, т.е. от самой траектории выведения (изменение угла наклона вектора тяги к горизонту и уровня тяги РД). Проектирование ракетной системы для выведения на орбиту – весьма сложная задача, требующая учета массы факторов, влияющих на ее совершенство: это и конструктивные параметры РН и ее составляющих, характеристики ракетных двигателей и работы бортовых систем и приборов. Во всем этом многообразии данных не существует четкого алгоритма, позволяющего выстроить ясно обоснованную схему достижения наилучшего решения. Тем не менее, успешные главные конструкторы РН достигли выдающихся результатов в такой сложной разработке, какой является создание РН, в основном за счет своих уникальных качеств инженера и руководителя. Их разработки дают нам возможность провести аналитические оценки уровня совершенства ракеты-носителя в целом, которые нам предоставляет история ракетной техники, опираясь на ряд показателей, которые мы рассмотрим далее. Данные по реальным ракетным системам, взятым из практики, показывают их различную эффективность, т.е. деятельность главных конструкторов имеет непреходящую и большую ценность. Сделаем попытку показать эти аналитические оценки на примерах.

Показатель эффективности РН и влияние конструктивной схемы. На практике существует очень важный показатель эффективности РН, определяемый отношением

веса выводимого полезного груза (речь идет о низкой орбите) к начальному весу ракеты-носителя: $\lambda = m_{\text{пг}} / (m_{\text{нач}} - m_{\text{пг}})$. По сути дела, этот параметр достаточно полно характеризует совершенство РН. Совместно с такими параметрами, как удельный импульс РД, суммарное значение характеристических скоростей ракетных ступеней РН – все эти данные создают некоторое “поле” аналитических оценок.

Первыми ракетными двигателями большой тяги для межконтинентальной двухступенчатой баллистической ракеты дальнего действия Р-7 главного конструктора С.П. Королева, положившими начало созданию ракет-носителей, явились РД 107 и РД 108 главного конструктора В.П. Глушко. Эти РД имели тягу на поверхности Земли в 83.5/100.24 т и 79.3/99.3 т соответственно (здесь и далее в знаменателе приведена тяга этого же двигателя в вакууме). Ракета Р7 имела хорошо известную теперь пакетную схему из 4-х боковых ускорителей и центрального блока большего размера (длины), который являлся второй ступенью, все РД этих ступеней начинают работу со старта. Этот носитель в двухступенчатом варианте имел начальный стартовый вес 270–280 т, он позволил в октябре 1957 года вывести на орбиту Земли первый искусственный спутник весом в 80 кг, через полгода таким же РН был выведен третий ИСЗ весом в 1700 кг (вес полезного груза МБР Р7 был около 5.0 т). Установка третьей ступени на эту ракету дала возможность довести величину полезного груза до величины более 5.5 т, так появилось понятие ракеты-носителя (эта РН получила название “Восток”, и на этой ракете был выполнен первый полет человека в космос). Впоследствии был осуществлен ряд модификаций этой ракеты: РН “Союз” – так был назван носитель, использованный для пилотируемого корабля “Союз” 7К-ОК. Вес выводимого на низкую орбиту полезного груза был доведен до 6.8 т, на этой ракете появилась более мощная третья ступень, стартовый вес РН увеличился до 306 т. Пилотируемые корабли “Союз” нашего времени имеют вес до 7.2 т, они летают на модификации РН “Союз-2”, модернизация этой РН продолжается. Рассмотренный здесь период времени занимает более 60 лет, за это время конструкция РД сильно не менялась. Уровень тяги РД первой ступени поднялся до 86.6/104 т и 80.8/94 т соответственно, за счет увеличения удельного импульса с 252/313 с (РД 107) и 252/313.6 с (РД 108) до значений 263/320 с и 257.7/320.6 с соответственно.

Показатель эффективности РН для первых “Союзов” оказался равным 0.0217, для “Союза ФГ” (носитель эпохи станции “Мир”, стартовая масса РН 308 т) он равен 0.023, и для “Союза-2” (эпоха МКС, стартовая масса РН 313 т) – 0.0246. Величина начального ускорения на этой серии РН сохранилась на уровне 1.34 g. Из этих данных видно, что усовершенствование характеристик РН – весьма трудный и длительный процесс.

Рассмотренная выше РН “Протон” (главный конструктор В.Н. Челомей, двухступенчатая межконтинентальная баллистическая ракета УР-500, первый полет 1965 год) относится к классу тяжелых РН, она прошла аналогичный “Союзу” длительный путь модернизации и превращения из двухступенчатой ракеты в трехступенчатую РН. Первый пуск “Протона-К” – трехступенчатой РН – состоялся в марте 1967 года. При массе полезного груза, выводимого на низкую круговую орбиту в 20.7 т показатель эффективности этого носителя составляет $\lambda = 0.03$ (у тяжелых РН, как правило, конструктивные показатели лучше). Последняя его модификация – РН “Протон-М”, начавшая полеты с 2001 года, имеет $m_{\text{пг}} = 23.7$ т и показатель эффективности $\lambda = 0.0336$. Разность в показателях эффективности “Союза” и “Протона” объясняется в основном применением в РН “Союз” пакетной конструктивной схемы, сравнительно с классической тандемной в случае “Протона”. По конструктивному совершенству пакетная схема заметно уступает тандемной схеме, имеющей общие топливные баки.

Упомянутый РН “Зенит-2” (РН среднего класса) имеет показатель $\lambda = 0.03$. Отметим, что эта ракета сделана по тандемной конструктивной схеме.

Аналогом РН среднего класса, близкий к “Союзу”, является американская РН “Атлас-5”, прошедшая также длительный период своих модернизаций. Первая РН “Атлас Д” была одноступенчатой, она вывела в космос на незамкнутую орбиту (суборбитальный полет) первый американский пилотируемый корабль “Меркурий” (май 1961 г.); модификация этой РН, содержащая две ступени, обеспечила несколько орбитальных полетов этого корабля, начиная с февраля 1962 года. Существующая модификация имеет вторую ступень, использующую водородное топливо (на первой ступени кислород – керосин). При начальном весе в 334.5 т эта РН выводит на низкую орбиту 9.8 т полезного груза. В качестве РД первой ступени используется российский РД-180 (изготовитель НПО “Энергомаш”, созданный на основе ракетных двигателей РН “Энергия” и “Зенит-2”) – с тягой 390.2/423 т, имеющий удельный импульс – 311.3/337.8 с. На второй ступени используется РД RL – 10А-4-2 (американская компания Rocketdyne) с тягой 10.1 т на топливе жидкий кислород и жидкий водород с удельным импульсом в 451 с. Показатель эффективности этой РН равен $\lambda = 0.03$, получаемый, в том числе за счет более высоких характеристик используемых РД (водородное топливо), за счет орбиты меньшего наклона из-за места старта, имеющего близкую к экватору широту точки старта.

Тяжелые носители. Общеизвестно, что самый большой и эффективной РН является “Сатурн-5”, главного конструктора Вернера Фон Брауна, первый полет которой состоялся в 1967 году. На этой РН были осуществлены полеты человека на Луну, она имела стартовую массу в 2965 т, две ступени этой ракеты выводили на низкую (порядка 185 км) круговую орбиту вес более 140 т (третью ступень и лунный комплекс). В первой ступени этой ракеты использовались пять параллельно работающих ракетных двигателей F-1 с тягой в 690/790 т, каждый, имевших удельный импульс $R_{уд} = 264/304$ с (топливо–кислород–керосин), вторая ступень имела пять РД J-2 с тягой по 100.7 т каждый и удельным импульсом в $R_{уд} = 421$ с (кислородно-водородное топливо). Такой же РД был установлен на третьей ступени, предназначенной для выведения лунного комплекса с низкой околоземной орбиты на траекторию полета к Луне. Показатель эффективности этой РН выведения на низкую земную орбиту равен $\lambda = 0.0495$ – самый высокий на сегодняшний день в ракетной практике.

В Советском Союзе тяжелой ракетой-носителем, подобной “Сатурну-5” является РН “Энергия” (главный конструктор В.П. Глушко). Первый полет этой РН состоялся в 1987 году, она имела стартовый вес 2419 тонн, вес выводимого на низкую орбиту ПГ – 105 тонн. Ракета имела две ступени: центральный блок и четыре боковых ускорителя с кислородно-керосиновыми РД 170 (главный конструктор РД – В.П. Глушко, тяга 740.5/806 т, удельный импульс 309.5/337.2 с). Центральный блок являлся второй ступенью, он работал со старта и имел четыре РД 0120, использующий кислородно-водородное топливо (РД тягой по 155/190 т, удельный импульс 360/455 с, производство воронежского КБ Химавтоматики, главный конструктор А.Д. Конопатов). Показатель эффективности этой РН $\lambda = 0.043$.

Казалось бы, прогресс в совершенствовании ракетных двигателей, произошедший за время от программы “Аполлон” полетов к Луне до программы “Буря” (около 20 лет) должен был привести к увеличению показателя эффективности рассматриваемой тяжелой РН, но этого не случилось. На мой взгляд, причиной этого явилось применение в РН “Энергия” так называемой пакетной схемы, повторявшей, по сути, конструктивную схему ракеты Р-7 С.П. Королева. Конструктивные издержки сильно влияют на итоговые показатели РН. Нужно сказать, что выбор пакетной схемы в начале косми-

ческой эры был оправдан, так как в то время достижение уровня тяги РД в 100 тонн было осуществлено с использованием 4-камерного ракетного двигателя, имевшего вследствие этого существенный диаметр, не позволявший разместить на ограниченном по размеру ракетном блоке более одного такого РД.

Размещение на первой ступени при общих топливных баках нескольких ракетных двигателей, работающих параллельно, началось практически одновременно у нас и в Америке. Первые старты ракеты носителя “Сатурн-1” Вернера фон Брауна (эта ракета предназначалась для отработки кораблей лунного комплекса на орбите Земли), начались в 1964 году. На большом диаметре первой ступени (размером 6.52 м) главный конструктор разместил 8 РД фирмы Rocketdyne, работающих на кислородно-керосиновом топливе тягой по 86 т каждый, взятых с военной ракеты. Для последующих ступеней было принято решение делать их на кислородно-водородном топливе; той же компании были заказаны две модификации такого РД: RL-10 с тягой 6–8 т (первая) и затем J-2 с тягой в 100 т. РН “Сатурн-1” имел три ракетных ступени: на второй было установлено 6 двигателей RL-10, а на третьей два таких двигателя, всего в программе было 10 таких РН. Следующая модификация этого носителя “Сатурн-1В” начала полеты в 1966 году, она была двухступенчатой с использованием одного двигателя J-2 для второй ступени, что позволило увеличить выводимый вес почти в два раза. В лунной программе было 6 таких ракет, и еще 3 для полетов к орбитальной станции “Скайлэб”. Показатели эффективности этих РН были $\lambda = 0.0194$ для “Сатурна-1” и $\lambda = 0.0314$ для “Сатурна 1В” (хорошая иллюстрация, почему 2-ступенчатая РН эффективней 3-ступенчатой).

На этой же ракете Вернер фон Браун применил еще одно важное новшество: в каждый РД была встроена автоматика, анализирующая правильность работы двигателя, в случае нарушения функционирования двигатель отключался. Были проведены специальные натурные испытания с имитацией таких отказов. Оказалось, что даже при исключении из работы одного–двух РД, первая ступень РН “Сатурн” выполняла задачу выведения (в частности, благодаря этому мероприятию все пуски РН “Сатурн” были успешными, несмотря на то, что отказы РД в программе “Аполлон” имели место).

В Советском Союзе ракета УР-500 и созданные на ее основе упоминавшийся в этой работе РН “Протон-К” и “Протон-М”, имели на первой ступени шесть параллельно работающих РД-253 разработки В.П. Глушко тягой по 150 т каждый (на последней модификации РН – используются РД-276).

Тяжелая ракета-носитель С.П. Королева Н-1, разработка которой не была завершена, имела на первой ступени 26 реактивных двигателей НК-33 тягой по 150–160 т, и могла вывести на низкую орбиту 75 т полезного груза. В процессе разработки проект дорабатывался, и число РД было увеличено до 30 РД, такая ракета должна была выводить на низкую орбиту до 95 т полезного груза. Показатели эффективности РН Н-1 (проектные) были на уровне $\lambda = 0.034$. Эта РН имела четыре испытательных пуска, закончившихся неудачами вследствие недостаточности наземной отработки.

Влияние начального ускорения. Рассмотрим сравнительный пример двух советских РН середины 60-х (“Протон-К”) и двадцать лет спустя, середины 80-х (“Зенит-2”). В результате проведенных оценок параметров ΔV трех ступеней РН “Протон К”, которые можно сделать, используя приведенные данные по этой РН и формулу для характеристической скорости (2.1).

Имеем следующие величины: $\Delta V_1 = 2615/2900$ м/с, $\Delta V_2 = 3327$ м/с и $\Delta V_3 = 3366$ м/с, т.е. суммарное приращение скорости всех трех ступеней этой РН $\Delta V_\Sigma = 9308/9533$ м/с, тогда как первая космическая скорость на высоте 185 км составляет $V_0^0 = 8020$ м/с (заметим, что две цифры величин скорости первой ступени соответствуют двум значениям удельного импульса: на поверхности Земли и в вакууме, реальное ее значение лежит внутри этого интервала, и может быть определено при компьютерном расчете

траектории выведения). Таким образом, получаем первую оценку (достаточно грубую) величины потерь в 1288/1513 м/с (в среднем 1430 м/с), которые будем относить к потерям первой ступени.

Заметим, что ракета-носитель “Союз ФГ” — одна из последних модификаций, используемая для пилотируемых полетов, имеет ускорение $a_0 = 1.34g$, составляющие характеристических скоростей $\Delta V_1 = 2615/2900$ м/с, $\Delta V_2 = 2611$ м/с, $\Delta V_3 = 3865$ м/с, $\Delta V_\Sigma = 9404$ м/с, т.е. примерно такое же значение, как и для РН “Протон”.

В более современной РН “Зенит-2”, разработка которой была выполнена в рамках программы “Энергия”—“Буран” в конце 90-х годов XX столетия, была применена двухступенчатая структура носителя, выбранная благодаря более высокой эффективности ракетных двигателей. Аналогичные вычисления с использованием данных по этой РН, дают $\Delta V_1 = 3637/3966$ м/с и $\Delta V_2 = 5167$ м/с, т.е. полная характеристическая скорость этой РН составляет $\Delta V_\Sigma = 8804/9133$ м/с, и величина потерь становится (в среднем) около 1048.5 м/с. Разницу в величинах полной скорости можно объяснить в первую очередь разными стартовыми ускорениями этих ракет и профилями выведения: если для РН “Протон-К” оно равно $a_0 = 1.32$, то у РН “Зенит-2” оно составляет $a_0 = 1.61$. Из физических соображений понятно, что чем выше вертикальное ускорение, тем быстрее закончится решение задачи выведения, меньшее время потребует работы РД и меньше будут гравитационные потери. Однако, увеличение скорости в более плотной атмосфере увеличивает аэродинамические потери, еще раз хочу подчеркнуть, что четкой аналитической зависимости между стартовым ускорением и величиной суммарных потерь первой ступени не существует.

Применение твердотопливных ускорителей (ТТРД). В 1981 г. стартовал корабль многоразового использования “Спейс шаттл”, на котором были применены ускорители первой ступени, работающие на твердом топливе. Такой ускоритель *SRB (Solid Rocket Booster)* при весе в 570 т развивал тягу в 1360—1501 т, и имел удельный импульс 269 с у Земли, и длительность работы 124 с. Главными жидкостными ракетными двигателями этого корабля (*Space Shuttle Main Engine*) — были три кислородно-водородных двигателя тягой по 170 т на старте и 212 т в вакууме, они имели максимальный удельный импульс 455 с и осуществляли основной набор орбитальной скорости, работая в течение 480 с. Стартовый вес корабля составлял 2050 т, т.е. начальное ускорение $a_0 = 1.59g$, вес выведенного на низкую орбиту космического самолета — 122.5 т, в этом весе на полезный груз выделено 24.4 т. Если показатель эффективности рассчитывать по полному весу STS на низкой орбите, то он будет таким: $\lambda = 0.061$ (надо признать, что это самый высокий на сегодня показатель для РН!). Если же его считать по полезному грузу, доставляемому STS на орбиту, то показатель будет равен $\lambda = 0.012$.

Еще до полета “Спейс шаттла” американские компании “Локхид Мартин” (семейство РН “Атлас”) и “Мак-Дональд Дуглас” (впоследствии компания “Боинг”, семейство РН “Дельта”) начали применять твердотопливные ускорители (ТТУ) на обычных одноразовых ракетах-носителях.

Применение ТТУ оказалось весьма эффективным по целому ряду показателей. Первое неоспоримое преимущество состоит в существенно более высокой надежности ТТУ (на порядок и выше в сравнении с ракетными двигателями основной РН). Это обстоятельство позволяет применять несколько параллельно работающих ускорителей в связке без заметного снижения надежности РН в целом. Второе достоинство заключается в возможности за счет выбора числа ТТУ достаточно простым способом увеличивать стартовую тягу РД первой ступени, т.е. начальное ускорение РН при старте, что влияет на величину потерь на начальном участке полета. При этом не обязательно время работы ТТУ должно совпадать с временем работы основного РД

ракеты: здесь важно преодолеть начальный участок большого стартового веса с приемлемым начальным ускорением.

Так, в упоминавшемся выше РН “Атлас-5” существует модификация варианта “heavy”, когда при старте используются дополнительные боковые твердотопливные ускорители (от 2-х до 5). Каждый из них имеет тягу в 172.1 т (1688 кН), $R_{уд} = 279.3$ с, время горения 94 с (при времени работы основного РД-180 в 253 с), вес каждого ГТУ равен 5.761 т (сухой) при 41 т горючего. Эта РН в своем максимальном варианте при стартовом весе в 546.7 т выводит на низкую орбиту вес полезного груза в 18.8 т, т. е. почти в два раза больший вес. При этом, естественно масса топлива второй ступени увеличивается, и такая РН имеет показатель эффективности $\lambda = 0.0356$.

Последние достижения. Рассмотрения раздела 2 настоящей статьи показывает, что можно говорить о минимальной величине вертикальной составляющей импульса тяги первой ступени, определяемого тем, что траектория выведения должна “достичь” высоты круговой орбиты (в рассматриваемом случае – 185 км). Основной набор орбитальной скорости может быть выполнен второй ступенью. Здесь совершенно не обязательно иметь непрерывный процесс разгона РН с переходом на вторую РС, хотя такой порядок работы РД, как правило, всегда выполняется. Важно получить условия сопряжения конца работы первой ступени с началом работы второй ступени. Вторая же ступень должна обеспечить основную составляющую орбитальной скорости для достижения целевой орбиты (вплоть до значения 0.9 или более), условием же оптимальности (отсутствие “просадки” траектории по высоте, т.е. гравитационных потерь) является величина уровня тяги РД второй ступени, создающей перегрузку в $n_0 \geq 3$ –4 единицы в конце участка выведения.

На настоящий день ближе всего к изложенным в этих статьях идеям оказалась последняя американская ракета-носитель “Falcon 9”, руководителем этой разработки явился талантливый инженер и изобретатель Илон Маск. Регулярные полеты начались с 2005 года, к настоящему времени выполнено четыре модификации этой РН с последовательным увеличением выводимого полезного груза, и эти работы продолжаются. Инновационное и техническое содержание этих разработок свидетельствует, что их руководитель является реальным главным конструктором уровня Вернера фон Брауна и С.П. Королева. Одна из последних модификаций этой РН “Falcon 9 FT” при стартовой массе в 549 т, начальном ускорении в $a_0 = 1.37 g$, выводит на НОО – 22.8 т полезного груза (здесь надо учесть малое наклонение этой орбиты и место стартового полигона, близкое к экватору). По имеющейся информации на этой РН горизонтальная составляющая скорости в конце работы первой ступени существенно меньше той, которая рекомендована в классических трудах [3, 9].

Такие решения вызваны тем, что после отделения первой ступени предполагалось затем гасить эту скорость для осуществления ее посадки. Тем самым, основную часть орбитальной скорости обеспечивает именно последняя ступень: ракетный двигатель этой ступени имеет вакуумное сопло, высокий удельный импульс $R_{уд} = 348$ с при достаточно большой тяге РД в 95 т, создающий, по-видимому, перегрузку в конце выведения $n_0 \geq 3$. Ракета-носитель имеет рекордный показатель эффективности $\lambda = 0.0415$, при том, что все ракетные двигатели этой РН используют кислородно-керосиновое топливо.

В этой же ракете осуществлена возможность мягкой посадки первой ступени на полигон старта или плавающую платформу с использованием собственного реактивного двигателя – одно из самых смелых и уникальных достижений в ракетной технике.

В исполнении Илона Маска получила определенные преимущества и рассмотренная в этом разделе пакетная схема построения первой ступени: все три РС тяжелого носителя “Falcon-9 Heavy” выполняют мягкую посадку в целях их последующего применения.

Таблица 3. Современные тяжелые носители

Ракета-носитель	Первый полет	Кол-во пусков в год (всего)	Ширина СК	Стартовая масса, т	Масса ПН, т			Диаметр ГО, м	λ	Цена пуска, млн \$
					НОО	ГПО	ГСО			
“Протон-М” – “Бриз-М” 	2001	8–12 (98)	46°	705	23	6.35	3.25	4.35	0.0336	65–70
“Зенит-3SL” 	1999	4–5 (36)	0°	473	13.7	6.06	2.6	4.15	0.03	80
Agiane 5 ECA 	2002	6 (36)	5°	780	20	10		5.4	0.0265	220
Delta IV Heavy 	2004	1 (6)	35° и 28°	732	23	10.75	6.57	5.1	0.0314	265
Delta IV M+(5.4) 	2009	2–3 (2)	35° и 28°	399	13.5	5.5	3.12	5.1	0.0348	170
Atlas V 521 	2003	2 (2)	35° и 28°	419	13.49	4.88	2.63	5.4	0.0333	160
Atlas V 551 	2006	1 (3)	35° и 28°	541	18.8	6.86	3.90	5.4	0.0356	190
Falcon 9 FT 	2015	18–20 (54)	28°	549	22.8	5.5–8.3		5.2	0.0415	62
Falcon Heavy 	2018	1–2 (3)	28°	1421	63.8	8.0–26.7		5.2	0.047	90–150
H-IIВ 	2009	2 (5)	30°	531	19	8		5.1	0.0348	182
CZ-3В 	1996	4 (22)	28°	426	11.2	5.1	2	4.2	0.0263	50–70
CZ-5 	2016	1 (2)	19.6°	687	20	14	11	3.35	0.0261	

В заключение в таблице 3 приведены сводные статистические данные о ракетах-носителях, эксплуатируемых в настоящее время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill P.G., Peterson C.R. Mechanics and Thermodynamics of Propulsion. Reading MA: Addison-Wesley Publ., 1965. 565 p.
2. Куренков В.И., Юмашев Л.П. Выбор основных проектных характеристик и конструктивного облика ракет носителей. Самара: Самарский гос. аэрокосмический университет, 2005.
3. Griffin M.D., French J.R. Space Vehicle Design AIAA Education Series. Reston VA: AIAA, 2004. 687 p.

4. Алифанов О.М., Андреев А.Н., Гуцин В.Н. Баллистические ракеты и ракеты-носители. М.: Дрофа, 2004. 512 с.
5. Бранец В.Н. Об оптимизации структуры ракеты-носителя // Полет. 2012. № 9. С. 21–35.
6. Бранец В.Н. Новые подходы к задачам оптимизации структуры ракеты-носителя // Доклад на XII съезде механиков, (секция механика космических полетов), Уфа, 2019 г. (в печати).
7. Бранец В.Н. К вопросу оптимизации структуры ракеты-носителя // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 1. С. 201–215.
8. Павлюк Ю.С. Баллистическое проектирование ракет. Челябинск: Изд. ЧГТУ, 1996. 92 с.
9. Охочимский Д.Е., Янеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63. Вып. 1а. С. 5–32.

On the Problem of Optimization Launch Vehicle Design

V. N. Branets^{a,b,c,#}

^a *Gazprom Space Systems JSC, Moscow region, Schelkovo, Russia*

^b *Physical Technical Institute, Moscow region, Dolgoprudny, Russia*

^c *Tomsk State University, Tomsk, Russia*

[#] *e-mail: branets.07@mail.ru*

In spite of great progress in the rocket technology and practical experience in the development and production of a number of rocket space systems (i.e. launch vehicles – LV), the task of optimizing the LV structure is still essential. Even in the fundamental work of well-known American scientists [1] in 1965, where the task of optimization of propellant distribution between the stages of a multi-stage launcher configuration was raised, and an approximate solution was proposed. It was shown, that in case of equal specific impulses of rocket engines of LV stages working successively, the equal distribution of characteristic velocities for each stage is the optimal one. Later, the same conclusion was made in the teaching aids published in Russia [2]. The treatise [3], published in the US in 2004, says there is no other solution found yet.

This paper suggested a new approach in decision this and some other connected problem.

Keywords: launch vehicle, rocket engine, rocket stage

REFERENCES

1. Hill P.G., Peterson C.R. Mechanics and Thermodynamics of Propulsion. Reading MA: Addison-Wesley Publ., 1965. 565 p.
2. Kurenkov V.I., Yumachev L.P. “Definition design parameters and constructive view of launch vehicles” education text-book under leadership of D.I. Kozlov (RAN member) Samara State Aerospace University, 2005.
3. Griffin M.D., French J.R. Space Vehicle Design AIAA Education Series. Reston VA: AIAA, 2004. 687 p.
4. Alifanov O.M., Andreev A.N., Guchin V.N. Ballistic Rockets and Launch Vehicles. Moscow: MAI, “Drofa” Publ., 2004. 512 p. (in Russian).
5. Branets V.N. On optimization launch vehicle structure // Polyet, 2012, no. 9, pp. 21–25 (in Russian).
6. Branets V.N. On Optimization of Launch Vehicle, Methodological Approaches // Presentation on XII Russian Mechanic’s Congress in Ufa, 2019 (in Press).
7. Branets V.N. On optimization launch vehicle structure // Cosmonavtica i Raketostroenie, 2014, no. 1. pp. 201–215 (in Russian).
8. Pavluk Yu. S. Ballistic Rockets Design. Chelyabinsk: Chelyab. State Techn. Univ., 1996. 92 p. (in Russian).
9. Ochocimskiy D.E., Yeneev T.M. Some variation task connected Artificial Satellite Launch // Physics Uspekhi, 1957, vol. 63, no. 1a, pp. 5–32. (in Russian).

УДК 533.6.011

СИСТЕМА ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ НА ИЗОЭНТРОПИЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗА ОТОШЕДШИМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

© 2020 г. Г. Б. Сизых*

*Московский авиационный институт, Москва, Россия***e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.07.2019 г.

После доработки 16.09.2019 г.

Принята к публикации 24.09.2019 г.

Исследованы 3D стационарные течения идеального газа за отошедшим скачком уплотнения при обтекании однородным сверхзвуковым потоком несимметричной головной части затупленного тела. На изоэнтропийных поверхностях, представляющих собой поверхности тока, начинающиеся на замкнутых линиях, расположенных на скачке и охватывающих лидирующую точку скачка, рассмотрены векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии. Показано, что если они опоясывают изоэнтропийную поверхность, то замыкаются сами на себя. Это означает, что на каждой изоэнтропийной поверхности можно построить систему ортогональных криволинейных координат, в которой линии тока являются координатными линиями.

Ключевые слова: криволинейные координаты, изоэнтропийная поверхность, отошедший скачок уплотнения

DOI: 10.31857/S0032823520020071

При обтекании однородным сверхзвуковым потоком тела с затупленной носовой частью перед ним формируется отошедший скачок уплотнения, поверхность которого искривлена, вследствие чего течение газа за ним вихревое. Связь формы скачка и завихренности на его поверхности известна [1, 2]. В течениях за скачком справедливы закономерности вихревых течений для общего (без предположения о какой-либо симметрии) 3D случая. Наиболее важные из них представлены в работах [3–6]. Все они обобщают инварианты, известные для баротропных течений. При этом рассматриваются “обобщенные” циркуляции и поля “обобщенных” скорости и завихренности, что делает упомянутые законы сохранения труднообозримыми. Однако при дополнительном предположении об изоэнергетичности вихревого течения (которое выполняется в течениях за отошедшим скачком) обнаруженные закономерности получаются более обозримыми особенно для плоских и осесимметричных течений. В первую очередь необходимо упомянуть результат Крокко [7]. Он состоит в том, что в плоском случае вдоль линий тока сохраняется отношение завихренности к давлению $I_1 = \Omega/p$, а в осесимметричном – инвариант $I_2 = \Omega/(pr)$, где r – расстояние от оси симметрии. Также можно указать на формулу, связывающую завихренность на поверхности осесимметричного тела (при нулевом угле атаки) с минимальным радиусом кривизны скачка [8].

Кроме законов сохранения представляют интерес и закономерности формы тех линий, которые определяются полем течения. Так, например, для несжимаемой жидкости изучались закономерности формы линий тока [9, 10], а также использовались [11, 12] и исследовались [13] закономерности формы вихревых линий.

В последнее время появились результаты [14, 15], относящиеся к общему (несимметричному) 3D случаю течений за отошедшим скачком уплотнения. Было предложено [14] точку, в которой вектор нормали к поверхности скачка параллелен скорости набегающего потока, называть лидирующей точкой. Для общего 3D случая показано, во-первых, что во всех точках линии тока, начинающейся в лидирующей точке, завихренность равна нулю (линия нулевой завихренности), а во всех остальных точках течения за скачком завихренность отлична от нуля. Во-вторых, что вихревые линии за скачком замкнуты и один раз охватывают линию нулевой завихренности. Для общего 3D случая показано [15], что при обтекании гладких выпуклых носовых частей линия торможения (линия тока, которая заканчивается в передней точке торможения) начинается в лидирующей точке скачка (и, следовательно, совпадает с линией нулевой завихренности). В данной статье продолжается поиск закономерностей течений за отошедшим скачком в общем 3D случае. Исследуются векторные линии векторного произведения скорости и градиента энтропии. Интерес к форме этих линий связан с вопросом существования (и возможности построения) таких систем ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийных поверхностях за скачком, в которых линии тока являются координатными линиями (система естественных координат). Для таких систем координат исследуемые в данной статье линии представляют собой второе семейство координатных линий. Если хотя бы одна такая линия, начавшись в точке A на одной из линий тока и сделав один оборот по изоэнтропийной поверхности, окажется на той же линии тока в точке $B \neq A$, то существование системы координат окажется невозможным (поскольку координатные линии не должны иметь двух точек пересечения). Ниже будет показано, что если линия делает один оборот, то всегда $B = A$, и построение системы координат возможно.

1. Основные обозначения и уравнения движения. Рассмотрим течение газа за отошедшим скачком уплотнения, образовавшимся при стационарном обтекании тела с затупленной носовой частью однородным сверхзвуковым потоком. Кроме отошедшего скачка ниже по течению могут существовать другие скачки и тангенциальные разрывы. Пусть G_0 – область, расположенная за отошедшим головным скачком, в которой отсутствуют какие-либо разрывы и точки торможения. И пусть при этом часть границы G_0 , лежащая на скачке, содержит лидирующую точку скачка. Давление p и плотность ρ газа связаны соотношением $p = \sigma \rho^k$, где k – показатель адиабаты, σ – энтропийная функция, которая постоянна вдоль линий тока, но в области G_0 может принимать разные значения на различных линиях тока. Скорость газа \mathbf{V} связана с плотностью уравнением неразрывности: $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$. Газ предполагается идеальным: $p = R\rho T$, где T – температура, R – отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе. Поскольку набегающий сверхзвуковой поток однороден, течение за скачком остается изоэнергетическим. Это значит, что полная энтальпия $k(k-1)^{-1} p \rho^{-1} + V^2/2$, где $V = |\mathbf{V}|$, всюду одинакова. Поэтому уравнения Эйлера, записанные в форме Крокко [16], имеют вид

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} RT \nabla \ln \sigma, \quad \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{V} \quad (1.1)$$

В области G_0 газодинамические функции \mathbf{V} , ρ и p предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по пространственным координатам и допускающими вместе со своими производными до второго порядка включительно непрерывное про-

должение на поверхность скачка. Все дальнейшие рассуждения будут относиться к области G_0 и к той части скачка, которая является частью границы G_0 . Под значениями завихренности и энтропийной функции на скачке будем понимать непрерывные продолжения Ω и σ из области G_0 на эту поверхность.

2. Завихренность на поверхности скачка. Как отмечено во введении, поскольку скачок имеет искривленную форму, завихренность непосредственно за скачком принимает ненулевое значение. Расположим прямоугольную декартову систему координат $Oxuz$ с началом в произвольной точке O на скачке так, чтобы ось z совпала с нормалью к поверхности скачка. Учитывая условие непрерывности (при пересечении скачка) касательной составляющей скорости, несложно убедиться, что тем же свойством обладает z -компонента завихренности (нормальная к скачку компонента завихренности). Поскольку в набегающем сверхзвуковом потоке завихренность равна нулю, нормальная составляющая завихренности по обе стороны скачка также равна нулю, т.е. вихревые линии лежат на скачке. Поэтому поток вектора Ω через любую поверхность, лежащую на скачке, равен нулю.

3. Циркуляция скорости газа по контуру, лежащему на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения. Из условий на косом скачке уплотнения [16, 17] следует, что энтропийная функция σ на поверхности скачка имеет одно и то же значение на линии (лежащей на скачке), вдоль которой нормаль к скачку составляет один и тот же угол с вектором скорости набегающего потока. Такие линии, лежащие на скачке гладкой выпуклой формы, замкнуты и охватывают лидирующую точку, в которой вектор нормали параллелен скорости набегающего потока (рис. 1).

Поверхности тока, начинающиеся на упомянутых замкнутых линиях, охватывают линию тока, начинающуюся в лидирующей точке (линию нулевой завихренности), и представляют собой изоэнтропийные поверхности $\sigma = \text{const}$.

Теорема 1. Пусть в течении за отошедшим головным скачком контур лежит на поверхности $\sigma = \text{const}$ и один раз охватывает линию нулевой завихренности. И пусть на части этой поверхности, расположенной между скачком и контуром, отсутствуют какие-либо разрывы. Тогда циркуляция скорости газа по такому контуру равна нулю.

Доказательство. Пусть C_1 – произвольный контур, лежащий на одной из поверхностей $\sigma = \text{const}$ и один раз охватывающий линию нулевой завихренности (рис. 2). Контур, лежащий на скачке и представляющий собой начало этой поверхности, обозначим C_0 . Рассмотрим две поверхности. S_0 – лежащая на скачке поверхность, ограниченная контуром C_0 и S_1 – часть поверхности $\sigma = \text{const}$, расположенная между контурами C_0 и C_1 . Объединение $S_0 \cup S_1$ представляет собой поверхность, ограниченную контуром C_1 . Поэтому, согласно теореме Стокса, циркуляция скорости \mathbf{V} по контуру C_1 есть поток вектора Ω через поверхность $S_0 \cup S_1$. В предыдущем разделе показано, что поток вектора Ω через поверхность S_0 равен нулю. Из уравнения (1.1) следует, что вихревые линии лежат на поверхностях вида $\sigma = \text{const}$. Поэтому поток вектора Ω через поверхность S_1 также равен нулю. Следовательно, циркуляция скорости \mathbf{V} по контуру C_1 равна нулю. Теорема 1 доказана.

4. Существование системы ортогональных криволинейных координат. Рассмотрим поле вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$. Из уравнения (1.1) следует, что в области G_0 этот вектор равен нулю только на линии нулевой завихренности. Поэтому во всех остальных точках G_0 определено семейство векторных линий вектора \mathbf{a} . Эти линии в каждой точке ортогональны линиям тока (поскольку \mathbf{a} и \mathbf{V} ортогональны). Согласно уравнению (1.1), каждая такая линия лежит на одной из поверхностей вида $\sigma = \text{const}$.

Теорема 2. Пусть в течении за отошедшим головным скачком часть C_{AB} векторной линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, лежащая на поверхности $\sigma = \text{const}$ (не являющейся лини-

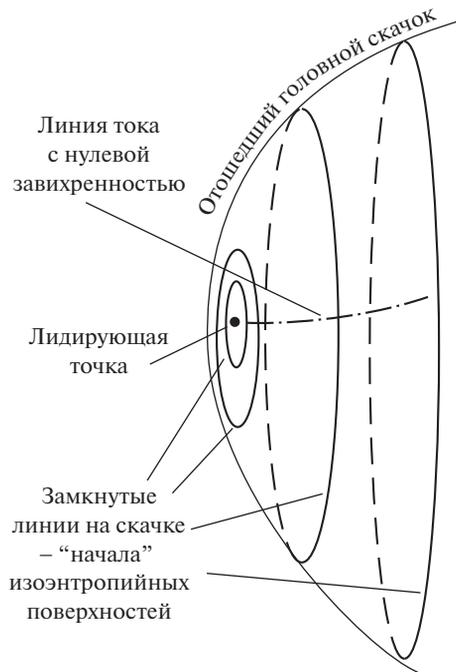


Рис. 1.

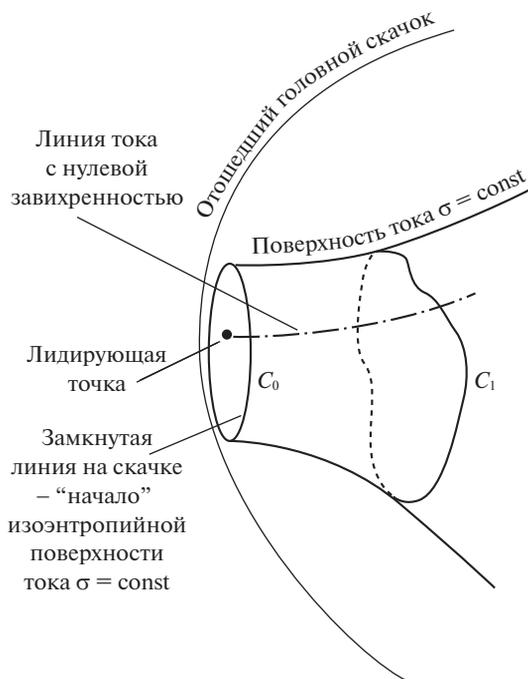


Рис. 2.

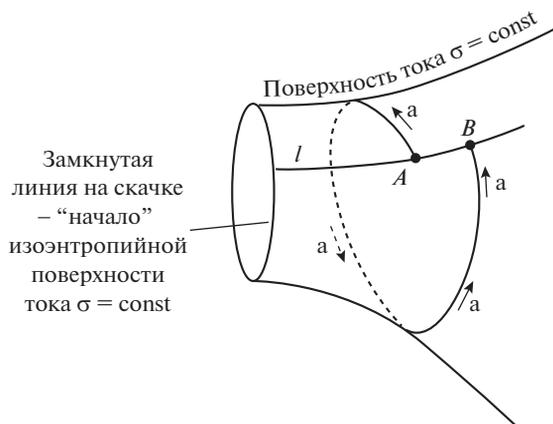


Рис. 3.

ей нулевой завихренности), делает один оборот вокруг линии нулевой завихренности и при этом начинается и заканчивается на одной и той же линии тока l в точках A и B . И пусть на части поверхности $\sigma = \text{const}$, расположенной между скачком, линией C_{AB} и криволинейным отрезком линии тока l между точками A и B , отсутствуют какие-либо разрывы и точки торможения. Тогда точки A и B совпадают.

Доказательство проведем методом “от противного”. Допустим, что $B \neq A$ (рис. 3).

Обозначим C_{BA} — часть линии тока l , заключенная между точками B и A . Вместе кривые C_{AB} и C_{BA} представляют собой контур, лежащий на поверхности $\sigma = \text{const}$ и один раз охватывающий линию нулевой завихренности. В предыдущем разделе было показано, что циркуляция скорости \mathbf{V} по такому контуру равна нулю. С другой стороны, на C_{AB} скорость \mathbf{V} ортогональна \mathbf{a} (и, следовательно, вклад в циркуляцию на этой части контура равен нулю), а на C_{BA} скорость \mathbf{V} не равна нулю и параллельна l , что означает ненулевой вклад в циркуляцию. Следовательно, циркуляция по контуру не равна нулю. Полученное противоречие означает, что $B = A$, и векторная линия \mathbf{a} замкнута. Теорема 2 доказана.

Векторная линия \mathbf{a} , начавшись в точке A , может заканчиваться или на скачке или ниже по течению на границе области G_0 , не пересекая второй раз линию тока l . Существование такой линии не противоречит возможности построения системы ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности $\sigma = \text{const}$, в которой линии тока являются координатными линиями. Поэтому теорема 2 означает существование (и возможность построения) системы ортогональных криволинейных координат на каждой поверхности $\sigma = \text{const}$ в области G_0 .

Заключение. В работе проведен анализ полных уравнений Эйлера для 3D стационарных течений идеального газа в области между отошедшим головным скачком и носовой частью обтекаемого однородным сверхзвуковым потоком тела без предположения о какой-либо симметрии. Показано существование такой системы ортогональных криволинейных координат на каждой изоэнтропийной поверхности $\sigma = \text{const}$, в которой линии тока есть координатные линии (теорема 2). В качестве промежуточного результата показано, что циркуляция скорости по контурам, лежащим на изоэнтропийных поверхностях равна нулю (теорема 1). Этот факт можно использовать для верификации численных расчетов, полученных не только схемами высокого, но и схе-

мами первого порядка (поскольку при проверке отсутствует необходимость вычислять производные).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Truesdell C.* On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // *J. Aeronaut. Sci.* 1952. № 19. P. 826–828.
2. *Hayes W.D.* The vorticity jump across a gasdynamic discontinuities // *J. Fluid Mech.* 1957. № 2. P. 595–600.
3. *Eckart C.* Variation principles of hydrodynamics // *Phys. Fluids.* 1960. V. 3. № 421.
4. *Голубинский А.И., Сычев В.В.* О некоторых свойствах сохранения вихревых течений газа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 798–799.
5. *Mobbs S.* Some vorticity theorems and conservation laws for non-barotropic fluids // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 108. P. 475–483.
<https://doi.org/10.1017/S002211208100222X>
6. *Голубинский А.И., Голубкин В.Н.* О некоторых свойствах сохранения в газовой динамике // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 115–119.
7. *Krocco L.* Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1937. V. 17. № 1. P. 1–7.
8. *Levin V.A., Markov V.V., Sizykh G.B.* Vorticity on the surface of an axially symmetric body behind a detached shock wave // *Dokl. Phys.* 2018. V. 63. № 12. P. 530–532.
<https://doi.org/10.1134/S1028335818120108>
9. *Arnold V.I.* Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *C.R. Acad. Sci. Paris.* 1965. V. 261. № 1. P. 17–20.
10. *Козлов В.В.* Замечания о стационарных движениях сплошной среды // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 341–342.
11. *Shcheglov G.A., Dergachev S.A.* Vortex loops based method for subsonic aerodynamic loads calculation // *MATEC Web of Conferences.* 2018. V. 221. Art. no 05004.
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201822105004>
12. *Marchevsky I., Shcheglov G., Dergachev S.* New modification of 3D meshless lagrangian vortex method with improved boundary condition satisfaction and divergence-free vorticity representation // *Conference: Topical Problems of Fluid Mechanics.* 2019. P. 151–160.
<https://doi.org/10.14311/TPFM.2019.021>
13. *Сизых Г.Б.* Винтовые вихревые линии в осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 2019. Вып. 3. С. 370–376.
14. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the vorticity behind 3D detached bow shock wave // *Adv. Aerodyn.* 2019. V. 1. № 15.
<https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5>
15. *Сизых Г.Б.* Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // ПММ. 2019. Вып. 3. С. 377–383.
16. *von Mises R.* *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow.* New York: Academ. Press, 1958. 514 p.
17. *Седов Л.И.* *Механика сплошной среды.* Т. I. М.: Наука, 1983. 528 с.

System of Orthogonal Curvilinear Coordinates on the Isentropic Surface Behind a Detached Bow Shock Wave

G. B. Sizykh[#]

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

[#]*e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

3-D ideal gas flow behind detached bow shock wave near nonsymmetrical nose part of bluff body in uniform supersonic flow is investigated. Vector lines of the velocity and entropy gradient vector product are considered. They lie on the isentropic surfaces formed by the stream surfaces originated on the closed lines on the bow shock which embrace the shock leading

point. It is shown that if these vector lines girdle isentropic surface, they are self-closed. This means that the system of orthogonal curvilinear coordinates in which coordinate lines coincide with streamlines may be constructed on the every isentropic surface.

Keywords: curvilinear coordinates, isentropic surface, detached bow shock wave

REFERENCES

1. *Truesdell C.* On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // *J. Aeronaut. Sci.*, 1952, no. 19, pp. 826–828.
2. *Hayes W.D.* The Vorticity jump across a gasdynamic discontinuities // *J. Fluid Mech.*, 1957, no. 2, pp. 595–600.
3. *Eckart C.* Variation principles of hydrodynamics // *Phys. Fluids*, 1960, vol. 3, pp. 421–427.
4. *Golubinskii A.I., Sychev V.V.* Some conservation properties of turbulent gas flows // *Sov. Phys. Dokl.*, 1977, vol. 22, no. 4, p. 714.
5. *Mobbs S.* Some vorticity theorems and conservation laws for non-barotropic fluids // *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 108, pp. 475–483.
6. *Golubinskii A.I., Golubkin V.N.* On certain conservation properties in gas dynamics // *JAMM*, 1985, vol. 49, no. 1, pp. 88–95.
7. *Krocco L.* Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1937, vol. 17, no. 1, pp. 1–7.
8. *Levin V.A., Markov V.V., Sizykh G.B.* Vorticity on the surface of an axially symmetric body behind a detached shock wave // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 12, pp. 530–532.
9. *Arnold V.I.* Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, no. 1, pp. 17–20.
10. *Kozlov V.V.* Notes on steady vortex motions of continuous medium // *JAMM*, 1983, vol. 47, no. 2, pp. 288–289.
11. *Shcheglov G.A., Dergachev S.A.* Vortex loops based method for subsonic aerodynamic loads calculation // *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 221, no. 05004. <https://doi.org/10.1051/matec-conf/201822105004>
12. *Marchevsky I.K., Shcheglov G.A., Dergachev S.A.* New modification of 3D meshless lagrangian vortex method with improved boundary condition satisfaction and divergence-free vorticity representation // *Conference: Topical Problems of Fluid Mechanics*, 2019, pp. 151–160.
13. *Sizykh G.B.* Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1038–1042. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060083>
14. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // *Adv. Aerodyn.*, 2019, vol. 1, no. 15. <https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5>
15. *Sizykh G.B.* Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part in the Supersonic Flow // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. <https://doi.org/10.1134/S0015462819070139>
16. *von Mises R.* *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*. N. Y.: Academ. Press, 1958. 514 p.
17. *Sedov L.I.* *Mechanics of Continuous Media (In 2 volumes)*. Singapore: World Scientific, 1997. 1368 p.

УДК 532.529.6

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
ЖИДКОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ В НЕЙ ДВУХ СФЕР ПЕРЕМЕННЫХ
РАДИУСОВ ВБЛИЗИ ИХ КОНТАКТА**© 2020 г. Ш. В. Сандуляну^{1,2,*}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*² *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия***e-mail: shtefan.sanduleanu@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.09.2019 г.

После доработки 02.03.2020 г.

Принята к публикации 16.03.2020 г.

Рассматриваются два сферических пузырька переменных радиусов в идеальной жидкости при их движении вдоль линии центров. Получено точное выражение для кинетической энергии жидкости. Для этого найдена функция тока Стокса в бисферических координатах в разложении по полиномам Гегенбауэра. С помощью функции тока определены точные ряды коэффициентов квадратичной формы кинетической энергии. Проведено сравнение известных рядов с новыми рядами и доказана их тождественность. Преимущество новой формы рядов состоит в возможности вывода разложений их по малому зазору между пузырьками до произвольного порядка точности, включая все первые известные члены разложения, и изучена их сходимость. Полученные результаты могут быть использованы для описания динамики пузырьков вблизи контакта и определения условий их слияния при акустическом воздействии на них.

Ключевые слова: взаимодействие пузырьков, сила Бьеркнеса, функция тока Стокса, кинетическая энергия жидкости, осевая симметрия, асимптотическое разложение

DOI: 10.31857/S003282352003008X

Введение. Проблема взаимодействия сферических газовых пузырьков в пульсирующем поле давления является предметом изучения большого числа как теоретических, так и экспериментальных работ, начиная с работ Бьеркнесов 19 века [1] и кончая работами последних лет [2–5]. Бьеркнес установил, что сила взаимодействия между пульсирующими сферами, находящимися на больших расстояниях, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Данная зависимость была подтверждена экспериментально [6, 7].

Аналитически исследована [8–10] динамика сфер переменных радиусов на большом расстоянии. Уточнение результатов Бьеркнеса связано с получением разложения для силы гидродинамического взаимодействия по обратным степеням расстояния между центрами сфер. Кинетическая энергия найдена с точностью до членов порядка r^{-3} [11, 12] и до r^{-4} [13], а само решение с точностью до r^{-5} [14] и до r^{-6} [3].

Однако, как теоретически [3, 15], так и экспериментально [4, 16–19], показано, что при приближении к контакту эта зависимость не применима и ее следует находить из решения задачи взаимодействия двух пульсирующих сфер в точной постановке.

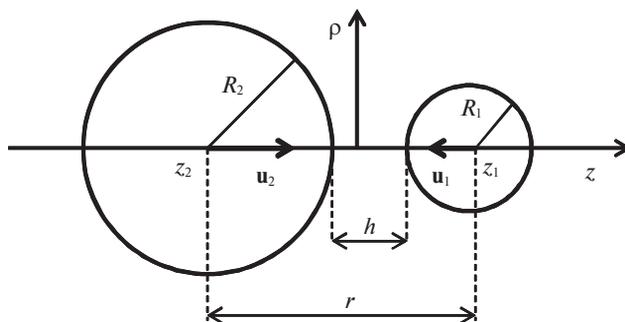


Рис. 1. Постановка задачи.

Задачу взаимодействия газовых пузырьков в акустическом поле волны удобно исследовать методом обобщенных координат Лагранжа. Основным слагаемым функции Лагранжа является кинетическая энергия. Для сферических пузырьков возникает задача вычисления кинетической энергии, как функции радиусов сфер, расстояния между центрами сфер и скоростей изменения радиусов и центров.

Для построения точного решения этой задачи существует два наиболее эффективных метода. Первым из них является метод отражений, с помощью которого Хикс построил точное решение для движения двух сфер постоянных радиусов [20]. Этим же методом получено точное решение для сфер переменных радиусов [21–23], хотя попытки были предприняты и раньше [24–26]. В случае постоянных радиусов кинетическая энергия является квадратичной формой двух скоростей центров сфер и имеет три коэффициента, найденных Хиксом. В случае переменных радиусов квадратичная форма содержит десять коэффициентов [21, 23], включая три коэффициента Хикса.

Второй метод заключается в том, чтобы представить решение в бисферических координатах [27]. Такое направление исследований проведено в случае постоянных радиусов [28–30] и в случае переменных радиусов [8, 31].

Следует заметить, что из рядов коэффициентов кинетической энергии, полученные первым методом, были найдены их трехчленные разложения вблизи контакта сфер как в случае сфер постоянных радиусов [32], так и для случая переменных радиусов [33]. Для рядов, полученных вторым методом в случае сфер постоянных радиусов [28, 29], был разработан алгоритм получения разложения до любого порядка по малому зазору [34]. Для случая сфер переменных радиусов такое разложение в литературе отсутствует. Цель данной работы устранить этот пробел.

В настоящем исследовании приведен вывод точного выражения в бисферических координатах кинетической энергии для случая переменных радиусов. А также вывод асимптотических разложений вблизи контакта. Исследование проводится в три этапа. Первый этап: построение точного решения краевой задачи для функции тока; второй этап: вычисление кинетической энергии и третий этап: построение асимптотических разложений для коэффициентов кинетической энергии.

1. Функция тока. Рассматривается потенциальное осесимметричное течение несжимаемой идеальной жидкости плотности ρ_l в области ограниченной внутри двумя сферами. Течение жидкости вызывают две сферы радиусов R_1 , R_2 , меняющиеся со скоростями \dot{R}_1 , \dot{R}_2 . Центры сфер на оси z имеют координаты z_1 , z_2 ($z_1 > z_2$) и двигаются со скоростями $u_1 = -\dot{z}_1$, $u_2 = \dot{z}_2$, направленными на встречу друг другу (рис. 1). Расстояние между центрами сфер $r = z_1 - z_2$, расстояние между поверхностями сфер (зазор) $h = r - R_1 - R_2$.

Компоненты скорости жидкости v_ρ , v_θ , v_z , в цилиндрической системе координат ρ , θ , z ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$) выражаются через функцию тока Ψ :

$$v_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \quad (1.1)$$

Уравнение для функции тока Ψ вытекает из условия потенциальности поля скорости и имеет вид [35]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Функция тока должна удовлетворять граничным условиям, следующим из условия равенства нормальных скоростей жидкости v_n и поверхности сфер w_n

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{n}) = (\mathbf{w}_i, \mathbf{n}), \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

Для решения краевой задачи (1.2), (1.3) удобно перейти к бисферическим координатам ξ , ζ , θ ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$):

$$\rho = c \frac{\sin \zeta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}, \quad z = c \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta} \quad (1.4)$$

Тогда поверхности сфер радиусов R_1 и R_2 задаются уравнениями

$$\xi = \tau_1 = \text{const}, \quad \xi = -\tau_2 = \text{const}, \quad \zeta \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (1.5)$$

при этом $R_i \operatorname{sh} \tau_i = c$, $r = R_1 \operatorname{ch} \tau_1 + R_2 \operatorname{ch} \tau_2$.

Таким образом, можно определить поверхности сфер с помощью параметров τ_1 , τ_2 и c , которые выражаются через R_1 , R_2 и малый зазор h следующим образом

$$\tau_i = \sqrt{2hp/R_i} + O(h^{3/2}), \quad c = \sqrt{2hp} + O(h^{3/2}), \quad p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad (1.6)$$

Функцию тока будем искать в виде [27, 29]

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \zeta) &= (\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\cos \zeta) \\ U_n(\xi) &= \frac{\alpha_n \operatorname{sh}((n-1/2)(\xi + \tau_2)) + \beta_n \operatorname{sh}((n-1/2)(\tau_1 - \xi))}{\operatorname{sh}((n-1/2)\tau)}, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $C_n^{-1/2}(\mu)$ – полиномы Гегенбауэра [36], $\mu = \cos \zeta$.

Коэффициенты α_n , β_n находятся из граничных условий (1.3) на поверхностях сфер при $\xi = \tau_1$ и $\xi = -\tau_2$

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{n}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \frac{\operatorname{ch} \tau_i - \cos \zeta}{c} = (-1)^i \left(u_i \left(-\frac{\operatorname{ch} \tau_i \cos \zeta - 1}{\operatorname{ch} \tau_i - \cos \zeta} \right) + \dot{R}_i \right) = (\mathbf{w}_i, \mathbf{n}) \quad (1.8)$$

После интегрирования уравнения (1.8) по ζ получаем

$$\Psi(\tau_i, \zeta) = u_i c^2 \frac{1 - \mu^2}{2(\operatorname{ch} \tau_i - \mu)^2} + \dot{R}_i c^2 \frac{1}{\operatorname{ch} \tau_i - \mu} + \left(\frac{\dot{R}_2 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 c^2 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right), \quad \mu = \cos \zeta \quad (1.9)$$

Выражение для $\Psi(-\tau_2, \zeta)$ получается перестановкой индексов 1 на 2 и заменой знака выражения $\Psi(\tau_1, \zeta)$. С помощью тождеств [29] при $\tau > 0$ и $-1 \leq \mu \leq 1$

$$(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{-1/2}(\mu)}{\sqrt{2}} e^{-(n-1/2)\tau}$$

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{-(n-1/2)\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \tau} e^{-(n-1/2)\tau}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \sqrt{2} n(n-1) e^{-(n-1/2)\tau}$$

находятся выражение для α_n

$$\alpha_n = \left(u_1 2n(n-1) - \dot{R}_1 \frac{2n-1}{\operatorname{sh} \tau_1} + \left(\frac{\dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right) \right) \frac{c^2}{\sqrt{2}} e^{-(n-1/2)\tau_1}, \quad (1.10)$$

выражение для β_n получается перестановкой индексов 1 на 2 и заменой знака α_n .

Следует отметить, что в случае движения сфер постоянных радиусов ($\dot{R}_i = 0$) суммирование в разложении (1.7) начинается с $n = 2$ [29] ввиду того, что коэффициенты α_n , определяемые формулой (1.10) равны нулю при $n = 0$ и 1. Однако множество полиномов Гегенбауэра с $n \geq 2$ не образует полного базиса. Последнее обстоятельство играет существенную роль и в случае движения сфер переменных радиусов. При начале суммирования от $n = 2$, необходимо предварительно выделить некоторую функцию [8], а остаток найти в виде разложения по полиномам Гегенбауэра с $n \geq 2$. Однако разложение по полному базису (1.7) начинается с $n = 0$, что исключает необходимость выделения отдельной функции. Данное преимущество также имеет место при решении задачи вязкого взаимодействия двух сфер переменных радиусов.

Выражение для функции тока (1.7) с точностью до константы тождественно с выражением, полученным в [8], однако в упомянутой работе были обнаружены несколько опечаток. Выбор константы не принципиален, однако он влияет на вид коэффициентов кинетической энергии, которые находятся в следующем разделе.

2. Кинетическая энергия. Кинетическая энергия жидкости выражается через интеграл от v^2 по области вне двух сфер:

$$T = \frac{\rho_l}{2} \iiint v^2 dV \quad (2.1)$$

С помощью формулы Грина, интеграл (2.1) может быть найден по формуле [29]

$$\frac{T}{\pi \rho_l} = \oint \psi \frac{1}{\rho} \psi'_\zeta d\xi - \psi \frac{1}{\rho} \psi'_\xi d\zeta = \int_{\xi=-\tau_2}^{\tau_1} \psi \frac{1}{\rho} \psi'_\zeta \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} d\xi + \int_{\zeta=0}^{\pi} \psi \frac{1}{\rho} \psi'_\xi \Big|_{\xi=-\tau_2}^{\xi=\tau_1} d\zeta \quad (2.2)$$

Следует заметить то, что в случае сфер постоянных радиусов функция тока равна нулю на оси симметрии [29] и первый интеграл вклада не дает. Используя выражение для функции тока (1.7), получаем кинетическую энергию в виде квадратичной формы по скоростям

$$T = 2\pi \rho_l \left\{ \sum_{j=1}^2 \left(A_j u_j^2 + D_j \dot{R}_j^2 + \sum_{i=1}^2 C_{ij} \dot{R}_j u_i \right) + 2(B u_1 u_2 + E \dot{R}_1 \dot{R}_2) \right\}$$

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2Q_n(\tau_1)(Q_n(\tau) - 1)}, \quad B = \frac{c^3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)^2 - 1}{Q_n(\tau) - 1}$$

$$C_{11} = 2c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n(\tau_1)}{Q_n(\tau_1)(Q_n(\tau) - 1)}, \quad C_{12} = 2c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n(\tau_2)}{Q_n(\tau) - 1} \quad (2.3)$$

$$D_1 = R_1^3 + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 - 1} \frac{S_n^2(\tau_1)}{Q_n(\tau_1)(Q_n(\tau) - 1)}$$

$$E = \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 - 1} \frac{S_n(\tau_1) S_n(\tau_2)}{Q_n(\tau)(Q_n(\tau) - 1)},$$

где $Q_n(x) = \exp((2n-1)x)$ и введено обозначение $S_n(x) = (Q_n(x) - (2n-1)\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) / \operatorname{sh}^2 x$, а коэффициенты A_2, C_{21}, C_{22} и D_2 получаются перестановкой 1 на 2 в формулах для A_1, C_{12}, C_{11}, D_1 . Кроме того ряды (2.3) можно выразить через исходные параметры R_1, R_2, r , подставив

$$c = \sqrt{(r^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2} / (2r), \quad e^{-\tau_1} = b - \sqrt{b^2 - 1}, \quad (2.4)$$

где $b = (r^2 + R_1^2 - R_2^2) / (2rR_1)$. Аналогично можно выразить экспоненты $e^{-\tau_2}$ и $e^{-\tau}$.

Если коэффициенты кинетической энергии (2.3) представить в виде рядов по экспонентам, то они полностью совпадут с рядами [20] и [15, 21, 23], что доказывает достоверность проведенных вычислений.

Кинетическая энергия была найдена в виде ряда по обратным степеням r [3]. Сравнение с точным решением показывает совпадение членов до r^{-6} , однако следующие по порядку члены не совпадают.

При рассмотрении взаимодействия двух пузырьков переменных радиусов с фиксированными центрами [37, 38] коэффициенты кинетической энергии оказались отличны от точных (2.3), так как задача решалась в предположении постоянства потенциала скоростей на поверхности сфер. Такая неточность не влияет на главную асимптотику силы Бьеркнеса при больших расстояниях между сферами.

В несколько ином виде коэффициенты кинетической энергии можно получить из выражений для гидродинамических сил [8]. С учетом небольших опечаток они согласуются с выражениями (2.3).

Следует заметить, что ряды [15, 20–23] более удобны для получения разложений на больших расстояниях $r \gg R_1, R_2$. Вблизи контакта, при малых $h \ll R_1, R_2$, из этих рядов было получено [32, 33] только трехчленное разложение. Следующие члены разложения удобно получить из рядов (2.3). Алгоритм их получения представлен в следующем разделе.

3. Асимптотическое разложение. 3.1. Асимптотическое разложение вблизи контакта. Для получения асимптотического разложения кинетической энергии жидкости вблизи контакта, воспользуемся методикой работы [34]. В этой работе методика представлена для сфер постоянных радиусов, то есть для коэффициентов A_1, A_2, B . Предлагается развитие этой методики для случая переменных радиусов, то есть для остальных семи коэффициентов.

Коэффициент A_1 запишем в виде:

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(1+\lambda_1)t} (2n-1)^2 - 1}{1 - e^{-t}}, \quad t = (2n-1)\tau, \quad \lambda_1 = \tau_1/\tau \quad (3.1)$$

Подставляя под знаком суммы преобразование Меллина и выполняя суммирование по n , имеем

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + \frac{c^3}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) Z(s) \zeta(s, 1 + \lambda_1) ds, \quad \sigma > 3, \quad (3.2)$$

где

$$Z(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)^{-s} \left((2n-1)^2 - 1 \right) = \zeta(s-2) \left(1 - 2^{-(s-2)} \right) - \zeta(s) \left(1 - 2^{-s} \right),$$

$\zeta(s, a)$ – дзета функция Гурвица, $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$ – дзета функция Римана [36].

Вычислим интеграл (3.2), воспользовавшись теоремой вычетов. Для этого необходимо найти полюса подынтегральной функции. Они расположены в точках: 3, 1, -1, ... и определяют порядки членов асимптотического разложения. Вычет в первой точке определяет главный член разложения, во второй точке – следующий и т.д. Учитывая значения вычетов в точках 3, 1, -1, ..., -2l + 1, получим следующее разложение:

$$A_l = \frac{R_1^3}{6} + \frac{c^3}{2} \left(\frac{\zeta(3, 1 + \lambda_1)}{\tau^3} + \frac{1}{2\tau} \left(\ln \frac{\tau}{2} + \psi(1 + \lambda_1) + \frac{1}{6} \right) - \sum_{k=1}^l \frac{\tau^{2k-1}}{(2k-1)!} Z(-2k+1) \zeta(-2k+1, 1 + \lambda_1) \right) + r_{A_l}^{2l-1}, \quad (3.3)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – дигамма функция [36], а остаточный член имеет вид:

$$r_{A_l}^m = \frac{c^3}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_m - i\infty}^{\sigma_m + i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s) Z(s) \zeta(s, 1 + \lambda_1) ds, \quad -m-1 < \sigma_m < -m \quad (3.4)$$

Аналогично для коэффициента B получаем [34]

$$B = \frac{c^3}{4\tau} \left(\frac{2\zeta(3)}{\tau^2} + \ln \frac{\tau}{2} + \left(\psi(1) + \frac{1}{6} \right) - 2 \sum_{k=1}^n \frac{\tau^{2k}}{(2k-1)!} Z(-2k+1) \zeta(-2k+1) \right) + r_B^{2l-1}, \quad (3.5)$$

где r_B^{2l-1} определяется аналогично $r_{A_l}^{2l-1}$.

Приведем асимптотические разложения остальных коэффициентов:

$$C_{1j} = \frac{2c^3}{\text{sh}^2 \tau_j} \left(\frac{2\tau - \zeta(2, 1 + \lambda_1(2-j))}{2\tau^2} \text{sh} \tau_j + \sum_{k=0}^m \frac{(-\tau)^k}{k!} Z_{C_{1j}}(-k, \lambda_1) + (-1)^{j-1} \frac{\gamma \text{ch}^{j-1} \tau_j + \text{ch}^{2-j} \tau_j \psi(\lambda_1 + 2-j)}{2\tau} + \frac{\text{ch} \tau_j - 1}{\tau} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\tau}{2} \right) \right) + r_{C_{1j}}^m, \quad (3.6)$$

$j = 1, 2$

где $\gamma \approx 0.577216$ – постоянная Эйлера и

$$Z_{C_{1j}}(s, \lambda_j) = \left(\zeta(s, \lambda_1^{j-1}) - \zeta(s, (1 + \lambda_1)^{2-j}) \text{ch} \tau_j \right) \left(\zeta(s) (1 - 2^{-s}) - 1 \right) - \zeta(s, (1 + \lambda_1)^{2-j}) \text{sh} \tau_j \left(\zeta(s-1) (1 - 2^{-(s-1)}) - 1 \right), \quad (3.7)$$

$j = 1, 2$

Для коэффициентов D_1 , E вывод асимптотического разложения существенно сложнее

$$D_1 = R_1^3 + \frac{2c^3}{\text{sh}^4 \tau_1} \sum_{k=-1}^n \text{res}_{s=-k} \left(\tau^{-s} \Gamma(s) Z_{D_1}(s, \lambda_1) \right) + r_{D_1}^m \quad (3.8)$$

$$E = \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{2c^3}{\text{sh}^2 \tau_1 \text{sh}^2 \tau_2} \sum_{k=-1}^n \text{res}_{s=-k} \left(\tau^{-s} \Gamma(s) Z_E(s, \lambda_1, \lambda_2) \right) + r_E^m \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned}
 Z_{D_1}(s, \lambda_1) &= \text{sh}^2 \tau_1 \zeta(s, 1 + \lambda_1) H(s - 2) + (\text{sh}(2\tau_1) \zeta(s, 1 + \lambda_1) - 2 \text{sh} \tau_1 \zeta(s)) H(s - 1) + \\
 &\quad + (\zeta(s, 1 - \lambda_1) - 2 \text{ch} \tau_1 \zeta(s) + \text{ch}^2 \tau_1 \zeta(s, 1 + \lambda_1)) H(s) \\
 Z_E(s, \lambda_1, \lambda_2) &= \text{sh} \tau_1 \text{sh} \tau_2 \zeta(s, 2) H(s - 2) - \\
 &\quad - (\text{sh} \tau_1 \zeta(s, 1 + \lambda_1) + \text{sh} \tau_2 \zeta(s, 1 + \lambda_2) - \text{sh} \tau \zeta(s, 2)) H(s - 1) + \\
 &\quad + (\zeta(s) - \text{ch} \tau_1 \zeta(s, 1 + \lambda_1) - \text{ch} \tau_2 \zeta(s, 1 + \lambda_2) + \text{ch} \tau_1 \text{ch} \tau_2 \zeta(s, 2)) H(s),
 \end{aligned}$$

а функция $H(s)$ имеет вид:

$$H(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-1)^{-s}}{(2n-1)^2 - 1}$$

Учитывая рекуррентное соотношение

$$H(s) = H(s + 2) + \zeta(s + 2) (1 - 2^{-(s+2)}) - 1,$$

а также, то, что $H(0) = 1/4$ и $H(1) = 3/4 - \ln 2$, после взятия вычета асимптотическое разложение для коэффициентов D_1 и E окончательно принимает вид

$$\begin{aligned}
 D_1 &= R_1^3 + \frac{2c^3}{\text{sh}^4 \tau_1} \left\{ -\frac{\text{ch} \tau_1 - 1}{2\tau} (\psi(1 + \lambda_1) - \text{sh} \tau_1 + 2 + \text{ch} \tau_1 (\psi(1 + \lambda_1) + \right. \\
 &\quad \left. + \ln \tau - 1 + 3 \ln 2) + \ln \left(\frac{\tau}{2}\right) \right\} + \sum_{k=0}^m \frac{(-\tau)^k}{k!} W_{D_1}(k, \lambda_1) \Big\} + r_{D_1}^m \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{c^3}{\tau \text{sh}^2 \tau_1 \text{sh}^2 \tau_2} \left\{ \text{sh} \tau_1 \text{sh} \tau_2 \left(-\ln(2\tau) - \frac{3}{2} + \gamma \right) + \frac{1}{2} (\text{sh} \tau - \text{sh} \tau_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \text{sh} \tau_2) + \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right) (\text{ch} \tau_1 - 1) (\text{ch} \tau_2 - 1) - 2 \sum_{k=0}^m \frac{(-\tau)^{k+1}}{k!} W_E(k, \lambda_1, \lambda_2) \right\} + r_E^m, \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

причем функции W_{D_1} и W_E определены как

$$\begin{aligned}
 W_{D_1}(k, \lambda_1) &= \sum_{j=-1}^1 (3j^2 - 2) \zeta(-k, 1 + j\lambda_1) \text{ch}^{j+1} \tau_1 G(k) + \\
 &\quad + \text{sh} \tau_1 [2 (\text{ch} \tau_1 \zeta(-k, 1 + \lambda_1) - \zeta(-k)) G(k + 1) + \text{sh} \tau_1 \zeta(-k, 1 + \lambda_1) G(k + 2)] + \\
 &\quad + \frac{1}{4} [F_k(0, 1 - \lambda_1) + F_k(2\tau_1, 1 + \lambda_1) - 2F_k(\tau_1, 1)] \\
 W_E(k, \lambda_1, \lambda_2) &= (\text{sh} \tau_1 \text{sh} \tau_2 G(k + 2) + \text{sh} \tau G(k + 1) + \text{ch} \tau_1 \text{ch} \tau_2 G(k)) \zeta(-k, 2) - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^2 (\text{sh} \tau_j \zeta(-k, 1 + \lambda_j) G(k + 1) + (\text{ch} \tau_j \zeta(-k, 1 + \lambda_j) - \frac{1}{2} \zeta(-k)) G(k)) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} [F_k(0, 1) + F_k(\tau, 2) - F_k(\tau_1, 1 + \lambda_1) - F_k(\tau_2, 1 + \lambda_2)],
 \end{aligned}$$

где

$$F_k(x, y) = \left\{ \zeta^{(1,0)}(-k, y) + L(k) \zeta(-k, y) \right\} \left\{ (1 + (-1)^k) \text{sh} x + (1 - (-1)^k) \text{ch} x \right\}$$

$$G(k) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - k + (1 - (-1)^k) \left(-\ln 2 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \zeta(1-2j) (1 - 2^{-(1-2j)}) \right) \right\}$$

$$L(k) = \sum_{j=1}^k j^{-1} - \ln \frac{\tau}{2}$$

Как отмечалось ранее, коэффициенты A_2, C_{22}, C_{21}, D_2 находятся перестановкой индексов.

3.2. Сравнение асимптотического разложения. Для случая сфер постоянных радиусов асимптотическое разложение кинетической энергии [34] находится в согласии с трехчленным разложением [32]. Также в согласии находятся полученные выше асимптотические разложения кинетической энергии, для случая сфер переменных радиусов, с трехчленным разложением [33].

3.3. Оценка остаточного члена. Разложение $X = \sum_{n=0}^m X_n(\epsilon) + R_X^m(\epsilon)$ является по Пуанкаре [36] асимптотическим по параметру ϵ , если $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |R_X^m / X_m| = 0$. Для определенности рассмотрим разложение A_1 (3.3). Представим его в виде

$$A_1 = x_{A_1}^0 + \sum_{k=1}^l x_{A_1}^{2k-1} + r_{A_1}^{2l-1}, \quad (3.12)$$

где

$$x_{A_1}^{2k-1} = -\frac{R_1^3 \operatorname{sh}^3 \tau_1 \tau_1^{2k-1}}{2 (2k-1)!} Z(-2k+1) \zeta(-2k+1, 1 + \lambda_1)$$

Докажем, что $\lim_{\tau \rightarrow 0} |r_{A_1}^{2l-1} / x_{A_1}^{2l-1}| = 0$. Для выражения:

$$\left| r_{A_1}^{2l-1} \right| = \frac{R_1^3 \operatorname{sh}^3 \tau_1}{2} \frac{1}{2\pi} \tau^{-\sigma_{2l-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\sigma_{2l-1} + it) Z(\sigma_{2l-1} + it) \zeta(\sigma_{2l-1} + it, 1 + \lambda_1)| dt, \quad (3.13)$$

$$-2l < \sigma_{2l-1} < -2l + 1,$$

была получена оценка [34]

$$\left| r_{A_1}^{2l-1} \right| = O(\tau^{2l-1+3})$$

Тогда, учитывая, что

$$\left| x_{A_1}^{2l-1} \right| = O(\tau^{2l-1+3})$$

можно доказать и более сильное утверждение

$$\left| r_{A_1}^{2l-1} \right| = o(\tau^{2l-1+3}) \quad (3.14)$$

Для этого заметим, что

$$\left| r_{A_1}^{2l-1} \right| = \left| x_{A_1}^{2l+1} + r_{A_1}^{2l+1} \right| \leq \left| x_{A_1}^{2l+1} \right| + \left| r_{A_1}^{2l+1} \right| = O(\tau^{2l+1+3}),$$

тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left| \frac{r_{A_1}^{2l-1}}{x_{A_1}^{2l-1}} \right| = 0$$

и тем самым доказано, что разложение A_1 – асимптотическое по Пуанкаре. При этом ряд расходится для любых $\tau > 0$ и для вычислений нужно ограничиться конечным числом членов ряда.

Как отмечалось ранее [39], целесообразно ограничить суммирование асимптотического ряда при $m = \eta$, где η находится из условия $d|x_{A_1}^m|/dm|_{\eta} \sim 0$.

Определим асимптотику $x_{A_1}^m$ при больших значениях m . Учитывая тождество

$$\zeta(-m, a + 1) = \zeta(-m, a) + a^m$$

и формулу Гурвица [36]

$$\zeta(1 - m, a) = 2 \frac{(m - 1)!}{(2\pi)^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi na - \frac{1}{2}\pi m\right)}{n^m}, \quad 1 \geq a \geq 0, \quad m \geq 1,$$

для больших m и при $0 \leq a \leq 2$ функцию $\zeta(-m, a)$ можно аппроксимировать как

$$\zeta(-m, a) \approx 2 \frac{m!}{(2\pi)^{m+1}} \cos\left(2\pi a - \frac{\pi}{2}(m + 1)\right) \sim 2 \frac{m!}{(2\pi)^{m+1}},$$

тогда асимптотику $x_{A_1}^m$ можно оценить как

$$\frac{x_{A_1}^m}{p^3} \sim 4\tau\sqrt{2\pi(m + 2)} \left(\frac{m + 2}{2\pi^2 e} \tau\right)^{m+2} \tag{3.15}$$

Из условия $d|x_{A_1}^m|/dm|_{\eta} \sim 0$ получаем $\eta \sim 2\pi^2/\tau$. Вблизи контакта, учитывая формулу (1.6), получим $\eta \sim 2\pi^2/\sqrt{2h/p}$. Аналогично вычисляются значения η для всех других коэффициентов. При таком выборе η погрешность имеет порядок $e^{-\eta}$. Эта оценка подтверждается многочисленными численными расчетами.

3.4. Разложение по h вблизи контакта. Для практических целей более удобно перейти от параметра $\tau = \tau_1 + \tau_2$ к зазору h . Тогда разложение коэффициентов кинетической энергии принимает вид

$$X = f_X(h) + g_X(h) \ln\left(\frac{h}{2p}\right), \quad X = \{A_i, B, C_{ij}, D_i, E\} \tag{3.16}$$

Необходимо найти 6 пар функций $f_X(h)$ и $g_X(h)$ для коэффициентов $A_1, B, C_{11}, C_{12}, D_1, E$, итого 12 независимых функций. Для остальных коэффициентов функции $f_X(h)$ и $g_X(h)$ получаются перестановкой индексов. Примечательно, что число независимых функций можно сократить до 10. Для этого докажем, что функции $g_X(h)$ для коэффициентов A и B совпадают и также совпадают функции $g_X(h)$ для коэффициентов C_{11}, C_{21} . Действительно, из формул (3.3) и (3.5) следует, что коэффициенты g_{A_1}, g_B получаются из члена $c^3/(4\tau) \ln(\tau/2)$, в котором аргумент τ надо выразить через h . Коэффициенты $g_{C_{11}}, g_{C_{21}}$ получаются аналогично из члена $c^3(\operatorname{ch} \tau_1 - 1)/(\tau \operatorname{sh}^2 \tau_1) \ln(\tau/2)$. Функции $f_X(h)$ и $g_X(h)$ можно разложить по степеням h . Достаточная точность достигается кубическими полиномами вида:

$$\begin{aligned} f_X(h) &= f_X^0 + f_X^1 h + f_X^2 h^2 + f_X^3 h^3 + O(h^4) \\ g_X(h) &= g_X^1 h + g_X^2 h^2 + g_X^3 h^3 + O(h^4) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Можно показать, что с точностью до перестановки индексов логарифмическая особенность определяется четырьмя полиномами. Их три первых коэффициента приведены в таблице 1.

Таблица 1. Аналитический вид g_X^1 , g_X^2 , g_X^3 для коэффициентов кинетической энергии, $\alpha_i = R_i/(R_1 + R_2)$

X	g_X^1	g_X^2	g_X^3
A_1, B	$\frac{p^2}{4}$	$\frac{5p}{24}(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)$	$\frac{1}{360}(13\alpha_1^4 - 98\alpha_1^3\alpha_2 + 183\alpha_1^2\alpha_2^2 - 98\alpha_1\alpha_2^3 + 13\alpha_2^4)$
C_{11}, C_{21}	$\frac{p^2}{2}$	$\frac{p}{12}(5\alpha_1^2 - 5\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2)$	$\frac{1}{180}(13\alpha_1^4 - 98\alpha_1^3\alpha_2 + 123\alpha_1^2\alpha_2^2 - 38\alpha_1\alpha_2^3 - 2\alpha_2^4)$
D_1	$\frac{p^2}{4}$	$\frac{p}{24}(5\alpha_1^2 - 5\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2)$	$\frac{11}{720} + \frac{1}{48}\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 16\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)$
E	$\frac{p^2}{4}$	$\frac{p}{24}(2\alpha_1^2 - 5\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2)$	$\frac{11}{720} - \frac{1}{48}(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(\alpha_1^2 + 9\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)$

Таблица 2. Численные значения f_X^0 , f_X^1 , f_X^2 , f_X^3 для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 1$

X	f_X^0/R_1^3	f_X^1/R_1^3	f_X^2/R_1^3	f_X^3/R_1^3
A_1	0.19257	0.03834	-0.05783	-0.0064
B	0.07513	-0.01375	-0.03339	-0.00841
A_2	0.19257	0.03834	-0.05783	-0.0064
C_{11}	0.07315	0.02403	-0.09609	0.00345
C_{12}	0.28191	-0.12419	-0.04413	-0.00127
C_{21}	0.28191	-0.12419	-0.04413	-0.00127
C_{22}	0.07315	0.02403	-0.09609	0.00345
D_1	1.05634	-0.02539	-0.02837	0.00549
E	0.52088	-0.20799	0.02508	-0.00506
D_2	1.05634	-0.02539	-0.02837	0.00549

Полиномы $f_X(h)$ имеют более громоздкий вид. Поэтому удобнее привести численные значения коэффициентов полиномов $f_X(h)$ при заданном отношении радиусов. Они приведены в таблицах 2–4 соответственно для отношений радиусов $R_2/R_1 = \{1, 3, 10\}$.

Сходимость приближений коэффициентов A_1 и D_1 полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия) показана на рис. 2а и 3а, а для их производных сходимость показана на рис. 2б и 3б. Как видно из рисунков с увеличением степени полинома наблюдается значительное повышение точности.

3.5. Гидродинамическая сила. Гидродинамическая сила, действующая на сферу, для произвольного расстояния между ними определяется по формуле Лагранжа:

$$F_1 = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial T}{\partial h} \quad (3.18)$$

Таблица 3. Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 3$

X	f_X^0/R_1^3	f_X^1/R_1^3	f_X^2/R_1^3	f_X^3/R_1^3
A_1	0.22593	0.15456	-0.12096	-0.00727
B	0.25356	0.03244	-0.08352	-0.00943
A_2	4.64004	0.05236	-0.0598	-0.02441
C_{11}	0.18871	0.14903	-0.22995	0.04843
C_{12}	0.65753	0.07208	-0.20445	-0.00445
C_{21}	1.81240	-0.59585	0.00243	-0.01
C_{22}	0.3404	0.06923	-0.13721	-0.03191
D_1	1.18701	-0.07682	-0.03699	0.01731
E	2.32151	-0.45781	-0.00579	0.00787
D_2	27.21124	0.019	-0.08045	-0.00683

Таблица 4. Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 10$

X	f_X^0/R_1^3	f_X^1/R_1^3	f_X^2/R_1^3	f_X^3/R_1^3
A_1	0.25175	0.29173	-0.11741	-0.04509
B	0.45156	0.20392	-0.1117	-0.04079
A_2	167.02413	0.16238	-0.09517	-0.03972
C_{11}	0.28907	0.33643	-0.31326	0.03108
C_{12}	0.98412	0.45188	-0.23408	-0.08365
C_{21}	8.51296	-1.12663	-0.13156	0.01537
C_{22}	0.77253	0.34336	-0.20516	-0.07911
D_1	1.35988	-0.10779	-0.0565	0.02402
E	9.22154	-0.64576	-0.09002	0.012
D_2	1000.41854	0.18447	-0.10969	-0.03978

С помощью этой формулы и асимптотических разложений коэффициентов кинетической энергии можно получить разложение силы вблизи контакта с любой степенью точности по h . Главная асимптотика гидродинамической силы равна

$$\frac{F_1}{2\pi r_l} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} p^2 h \ln \left(\frac{h}{2p} \right) \dot{h} \right) + \frac{1}{4} p^2 \ln \left(\frac{h}{2p} \right) \dot{h}^2 + O(h^0), \quad (3.19)$$

где $p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, $h = r - R_1 - R_2$, $\dot{h} = -(u_1 + u_2 + \dot{R}_1 + \dot{R}_2)$. Асимптотическое выражение (3.19) (совпадающая с ранее найденной методом тонкого слоя асимптотикой [40]) содержит логарифмическую особенность, которую трудно получить, если пред-

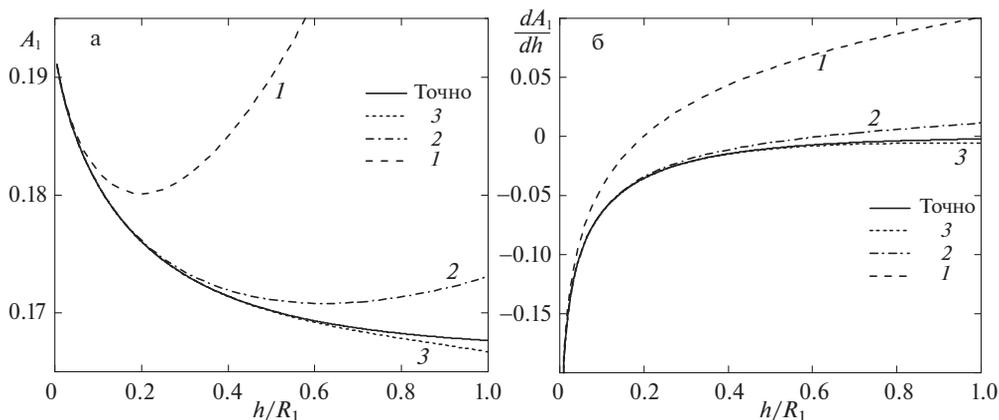


Рис. 2. Сходимость приближений (а) коэффициента A_1 и (б) производной dA_1/dh полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (сплошная линия).

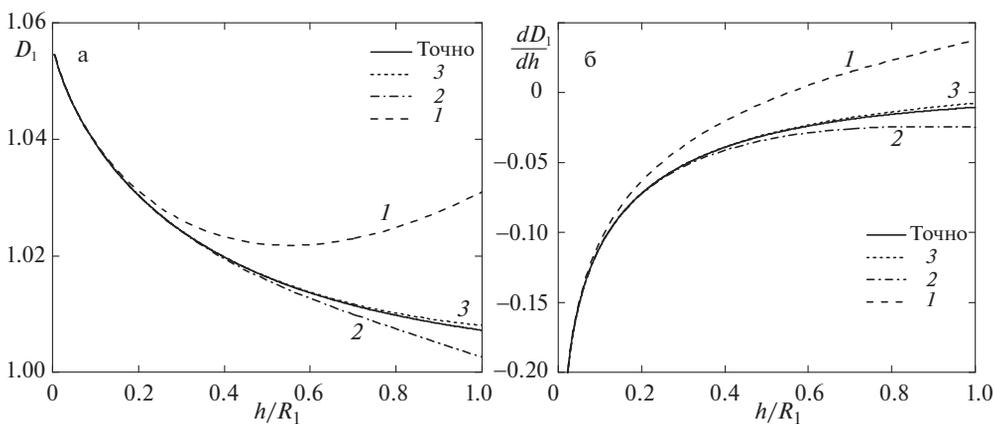


Рис. 3. Сходимость приближений (а) коэффициента D_1 и (б) производной dD_1/dh полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (сплошная линия).

ставлять кинетическую энергию в виде конечного разложения по обратным степеням расстояния между центрами пузырьков r .

В частом случае $u_2 = \dot{R}_2 = 0$, $R_2 \rightarrow \infty$ (сфера у стенки) формула (3.19) принимает вид [31]

$$\frac{F_1}{2\pi r_l} = -\frac{1}{4} R_1^2 \ln\left(\frac{h}{R_1}\right) (u_1 + \dot{R}_1)^2 + O(h^0) \quad (3.20)$$

При рассмотрении расширяющейся по закону $R = \beta t^{1/2}$ сферы, находящейся в контакте с плоскостью, ранее [41] было получено, что сила притяжения к плоскости равна $F = 0.29\pi\beta^4 r_l$. Этот результат согласуется с силой $F = 0.288954\pi\beta^4 r_l$, найденной по асимптотическим разложениям данной работы.

Таким образом, полученные разложения для сил взаимодействия двух сфер переменного радиуса обобщают все известные до сих пор результаты.

Заключение. Получено точное решение краевой задачи для функции тока в случае двух сфер переменных радиусов. Оно обобщает решение для твердых сфер. По найденной функции тока выведен новый вид кинетической энергии жидкости, в котором коэффициенты квадратичной формы представлены рядами. Показана тождественность новых рядов с ранее полученными рядами [20] и [21–23]. Преимущество новых рядов заключается в возможности их переразложения по зазору между сферами вместо обычно используемого расстояния между центрами пузырьков. Используя новую форму кинетической энергии, найдены асимптотические разложения коэффициентов кинетической энергии вблизи контакта. Доказано, что остаточный член разложения экспоненциально мал. Найденные асимптотические выражения обобщают все известные до сих пор результаты. Они необходимы для описания динамики сферических пузырьков вблизи контакта, а так же для анализа возможности их слияния (например, при акустическом воздействии на них).

Автор выражает благодарность Петрову А.Г. за полезные замечания и продуктивное обсуждение. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bjerknæs V.F.K. Field of Force. New York: Columbia Univ. Press, 1906. 136 p.
2. Zilonova E., Solovchuk M., Sheu T.W.H. Dynamics of bubble-bubble interactions experiencing viscoelastic drag // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. № 2. P. 023109.
3. Doinikov A.A., Bouakaz A. Theoretical model for coupled radial and translational motion of two bubbles at arbitrary separation distances // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. № 4. P. 043001.
4. Jiao J., He Y., Kentish S.E., Ashokkumar M., Manasseh R., Lee J. Experimental and theoretical analysis of secondary Bjerknæs forces between two bubbles in a standing wave // Ultrasonics. 2015. V. 58. P. 35–42.
5. Cleve S., Guédra M., Inserra C. et al. Surface modes with controlled axisymmetry triggered by bubble coalescence in a high-amplitude acoustic field // Phys. Rev. E. 2018. V. 98. № 3. P. 033115.
6. Казанцев В.Ф. Движение газовых пузырьков в жидкости под действием сил Бьеркнеса, возникающих в акустическом поле // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. № 1. С. 64–67.
7. Crum L.A. Bjerknæs forces on bubbles in a stationary sound field // J. Acoust. Soc. America. 1975. V. 57. № 6. P. 1363–1370.
8. Порфирьев Н.П. Силы взаимодействия между двумя осциллирующими в идеальной жидкости сферами // Динамика сплошной среды с нестационарными границами. ЧГУ, Чебоксары, 1984. С. 95–103.
9. Воинов О.В., Петров А.Г. Движение сферы переменного объема в идеальной жидкости около плоской поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 94–103.
10. Буров А.В. О движении двух пульсирующих шаров в идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. Т. 3. С. 159 – 162.
11. Кузнецов Г.Н., Шукин И.Е. Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акустич. ж. 1972. Т. 18. № 4. С. 565–570.
12. Doinikov A.A. Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 2001. T. 64. № 2. P. 026301.
13. Harkin A., Kaper T.J., Nadim A.L.I. Coupled pulsation and translation of two gas bubbles in a liquid // J. Fluid Mech. 2001. V. 445. P. 377–411.
14. Аганин А.А., Давлетшин А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // Матем. модел. 2009. Т. 21. № 6. С. 89–102.
15. Петров А.Г. Вынужденные колебания в жидкости двух газовых пузырей в окрестности их контакта // Изв. РАН МЖГ. 2011. № 4. С. 81–99.

16. *Jiao J., He Y., Leong T., Kentish S.E. et al.* Experimental and theoretical studies on the movements of two bubbles in an acoustic standing wave field // *J. Phys. Chem. B.* 2013. V. 117. № 41. P. 12549–12555.
17. *Jiao J., He Y., Yasui K., Kentish S.E. et al.* Influence of acoustic pressure and bubble sizes on the coalescence of two contacting bubbles in an acoustic field // *Ultrason. Sonochem.* 2015. V. 22. P. 70–77.
18. *Garbin V., Cojoc D., Ferrari E. et al.* Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging // *Appl. Phys. Lett.* 2007. V. 90. P. 114103.
19. *Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Сутин А.М.* Эффект самопросветления для акустических волн в жидкости с пузырьками газа // *Письма в ЖЭТФ.* 1979. Т. 30. № 7. С. 423–425.
20. *Hicks W.M.* On the motion of two spheres in a fluid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* 1880. № 171. P. 455–492.
21. *Воинов О.В.* Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости // В сб.: *Науч. конференция. Ин-т механ. МГУ. Тезисы докл. М.: МГУ, 1970. С. 10–12*
22. *Воинов О.В.* Движение идеальной жидкости около двух сфер с радиальными скоростями на поверхности // *Вестн. МГУ.* 1969. № 5. С. 83–88.
23. *Воинов О.В., Петров А.Г.* Движение пузырей в жидкости // *Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.* 1976. Т. 10. С. 86–147.
24. *Hicks W.M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1879. vol. III.
25. *Hicks W.M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid (part II) // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1879. vol. IV.
26. *Selby A.L.* On two pulsating spheres in a liquid // *London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag. & J. Sci.* 1890. V. 29. № 176. P. 113–123.
27. *Jeffery G.B.* On a form of the solution of Laplace's equation suitable for problems relating to two spheres // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1912. V. 87. № 593. P. 109–120.
28. *Neumann C.* Hydrodynamische untersuchungen: nebst einem Anhang über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induction. Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1883. 318 pp.
29. *Bentwich M., Miloh T.* On the exact solution for the two-sphere problem in axisymmetrical potential flow // *J. Appl. Mech.* 1978. V. 45. № 3. P. 463–468.
30. *Порфирьев Н.П.* Движение шара в жидкости перпендикулярно к твердой стенке и к невозмущенному уровню свободной поверхности // *Динамика сплошной среды с нестационарными границами.* ЧГУ, Чебоксары, 1979. С. 80–100.
31. *Порфирьев Н.П.* Взаимодействие пульсирующих в идеальной жидкости сферы с твердой стенкой // *Проблемы гидродинамики больших скоростей.* Чебоксары. 1993. С. 201–214.
32. *Воинов О.В.* О движении двух сфер в идеальной жидкости // *ПММ.* 1969. Т. 33. № 4. С. 659–667.
33. *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Трехчленные разложения коэффициентов кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух сфер вблизи их контакта // *Докл. РАН.* 2018. Т. 483. № 4. С. 389–393.
34. *Raszillier H., Guisau I., Durst F.* Optimal approximation of the added mass matrix of two spheres of unequal radii by an asymptotic short distance expansion // *ZAMM.* 1990. V. 70. № 2. P. 83–90.
35. *Ламб Г.* *Гидромеханика.* М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
36. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н.* *Курс современного анализа.* Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1963.
37. *Maksimov A.O., Yusupov V.I.* Coupled oscillations of a pair of closely spaced bubbles // *Europ. J. Mech.-B/Fluids.* 2016. V. 60. P. 164–174.
38. *Maksimov A.O., Polovinka Y.A.* Scattering from a pair of closely spaced bubbles // *J. Acoust. Soc. America.* 2018. V. 144. № 1. P. 104–114.
39. *Dingle R.B.* *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation.* London: Academic Press, 1973.
40. *Петров А.Г., Харламов А.А.* Пространственные задачи гидродинамического взаимодействия тел в вязкой жидкости в окрестности их контакта // *Изв. РАН. МЖГ.* 2013. № 5. С. 14–25.
41. *Witze C.P., Schrock V.E., Chambre P.L.* Flow about a growing sphere in contact with a plane surface // *Intern. J. Heat and Mass Transfer.* 1968. V. 11. № 11. P. 1637–1652.

Fluid Kinetic Energy Asymptotic Expansion for Two Variable Radii Moving Spherical Bubbles at Small Separation Distance

S. V. Sanduleanu^{a,b,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

[#] *e-mail: shtefan.sanduleanu@gmail.com*

Two spherical bubbles with changing radii are considered to be moving in ideal fluid along their center-line. The exact expression for the fluid kinetic energy is obtained. The Stokes stream function is expanded in Gegenbauer polynomials in bispherical coordinates. This expansion is used to obtain the exact series for the fluid kinetic energy quadratic form coefficients. The new series are confirmed to be correct by comparison with the known ones. The main advantage of the new kinetic energy form is the possibility to obtain asymptotic expansions at small separation distance between the bubbles. These expansions are obtained and their convergence is analyzed. The results of this work can be used to describe the bubbles approach before the contact and their coalescence in acoustic field.

Keywords: bubbles interaction, Bjerknes force, Stokes stream function, fluid kinetic energy, axial symmetry, asymptotic expansion

REFERENCES

1. *Bjerknes V.F.K.* Field of Force. N.Y.: Columbia Univ. Press, 1906. 136 p.
2. *Zilonova E., Solovchuk M., Sheu T.W.H.* Dynamics of bubble-bubble interactions experiencing viscoelastic drag // *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 99, no. 2, pp. 023109.
3. *Doinikov A.A., Bouakaz A.* Theoretical model for coupled radial and translational motion of two bubbles at arbitrary separation distances // *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, no. 4, pp. 043001.
4. *Jiao J., He Y., Kentish S.E., Ashokkumar M., Manasseh R., Lee J.* Experimental and theoretical analysis of secondary Bjerknes forces between two bubbles in a standing wave // *Ultrasonics*, 2015, vol. 58, pp. 35–42.
5. *Cleve S., Guédra M., Inserra C. et al.* Surface modes with controlled axisymmetry triggered by bubble coalescence in a high-amplitude acoustic field // *Phys. Rev. E*, 2018, vol. 98, no. 3, pp. 033115.
6. *Kazantsev V.F.* The motion of gaseous bubbles in a liquid under the influence of Bjerknes forces arising in an acoustic field // *Sov. Phys. Doklady*, 1960, vol. 4, no. 1, pp. 1250.
7. *Crum L.A.* Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field // *J. Acoust. Soc. America*, 1975, vol. 57, no. 6, pp. 1363–1370.
8. *Porfiriyev N.P.* Interaction forces between two spheres oscillating in an ideal fluid // *Dyn. Cont. Medium with Non-Stat. Bound.* ChelSU, Cheboksary, 1984, pp. 95–103. (in Russian)
9. *Voinov O.V., Petrov A.G.* Motion of a variable-volume sphere in an ideal fluid near a plane surface // *Fluid Dyn.*, 1971, vol. 6, no. 5, pp. 808–817.
10. *Burov A.V.* Motion of two pulsating spheres in an ideal incompressible fluid // *Fluid Dyn.*, 1983, vol. 18, no. 3, pp. 472–475.
11. *Kuznetsov G.N., Shchekin I.E.* Interaction of pulsating bubbles in a viscous fluid // *Akusticheskii zh.*, 1972, vol. 18, pp. 565–570. (in Russian)
12. *Doinikov A.A.* Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // *Phys. Rev. E*, 2001, T. 64, no. 2, pp. 026301.
13. *Harkin A., Kaper T.J., Nadim A.L.I.* Coupled pulsation and translation of two gas bubbles in a liquid // *J. Fluid Mech.*, 2001, vol. 445, pp. 377–411.
14. *Aganin A.A., Davletshin A.I.* Simulation of interaction of gas bubbles in a liquid with allowing for their small asphericity // *Matemat. Model.*, 2009, vol. 21, no. 6, pp. 89–102. (in Russian)
15. *Petrov A.G.* Forced oscillations of two gas bubbles in a fluid in the vicinity of bubble contact // *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 4, pp. 579–595.

16. *Jiao J., He Y., Leong T., Kentish S.E. et al.* Experimental and theoretical studies on the movements of two bubbles in an acoustic standing wave field // *J. Phys. Chem. B*, 2013, vol. 117, no. 41, pp. 12549–12555.
17. *Jiao J., He Y., Yasui K., Kentish S.E. et al.* Influence of acoustic pressure and bubble sizes on the coalescence of two contacting bubbles in an acoustic field // *Ultrason. Sonochem.*, 2015, vol. 22, pp. 70–77.
18. *Garbin V., Cojoc D., Ferrari E. et al.* Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging // *Appl. Phys. Lett.*, 2007, vol. 90, pp. 114103.
19. *Kobelev Y.A., Ostrovskii L.A., Sutin A.M.* Self-illumination effect for acoustic waves in a liquid with gas bubbles // *JETP Lett.*, 1979, vol. 30, no. 7, pp. 395–398.
20. *Hicks W.M.* On the motion of two spheres in a fluid // *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1880, no. 171, pp. 455–492.
21. *Voinov O.V.* Movement of two spheres of variable radii in an ideal fluid // *Sci. Conf. Theses, Inst. Mekh. Mosk. Gos. Univ. Moscow: MSU*, 1970. pp. 10–12. (in Russian)
22. *Voinov O.V.* Motion of inviscid fluid near two spheres with radial velocities on the surface // *Vestn. MSU. Matem. Mekhanika*, 1969, vol. 5, pp. 83–88.
23. *Voinov O.V., Petrov A.G.* The motion of bubbles in a liquid. Vol. 10/ *Hydromechanics* // *Itoqi Nauki Tekh., Ser.: Fluid Mech., VINITI, Moscow*, 1976. pp. 86–147. (in Russian)
24. *Hicks W.M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1879, vol. III.
25. *Hicks W.M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid (part II) // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1879, vol. IV.
26. *Selby A.L.* On two pulsating spheres in a liquid // *London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. & J. Sci.*, 1890, vol. 29, no. 176, pp. 113–123.
27. *Jeffery G.B.* On a form of the solution of Laplace's equation suitable for problems relating to two spheres // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1912, vol. 87, no. 593, pp. 109–120.
28. *Neumann C.* *Hydrodynamische untersuchungen: nebst einem Anhang über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induction.* Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1883. 318 p.
29. *Bentwich M., Miloh T.* On the exact solution for the two-sphere problem in axisymmetrical potential flow // *J. Appl. Mech.*, 1978, vol. 45, no. 3, pp. 463–468.
30. *Porfiryev N.P.* The motion of a sphere in a liquid perpendicular to the solid wall and to the unperturbed level of the free surface // *Dyn. Contin. Medium with Non-Stat. Bound. CSU, Cheboksary*, 1979. pp. 80–100. (in Russian)
31. *Porfiryev N.P.* Interaction of spheres pulsating in an ideal fluid with a solid wall // *Problems of High-Speed Hydrodynamics. Cheboksary*, 1993, pp. 201–214. (in Russian)
32. *Voinov O.V.* On the motion of two spheres in a perfect fluid // *JAMM*, 1969, vol. 33, no. 4, pp. 638–646.
33. *Sanduleanu S.V., Petrov A.G.* Trinomial expansion of kinetic-energy coefficients for ideal fluid at motion of two spheres near their contact // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 12, pp. 517–520.
34. *Raszillier H., Guisau I., Durst F.* Optimal approximation of the added mass matrix of two spheres of unequal radii by an asymptotic short distance expansion // *ZAMM*, 1990, vol. 70, no. 2, pp. 83–90.
35. *Lamb H.* *Hydrodynamics.* Cambridge: Univ. Press, 1975. 732 p.
36. *Whittaker E.T., Watson G.N.* *A Course of Modern Analysis.* Cambridge: Univ. Press, 1996.
37. *Maksimov A.O., Yusupov V.I.* Coupled oscillations of a pair of closely spaced bubbles // *Europ. J. Mech.-B/Fluids*, 2016, vol. 60, pp. 164–174.
38. *Maksimov A.O., Polovinka Y.A.* Scattering from a pair of closely spaced bubbles // *J. Acoust. Soc. America*, 2018, vol. 144, no. 1, pp. 104–114.
39. *Dingle R.B.* *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation.* London: Academic Press, 1973.
40. *Petrov A.G., Kharlamov A.A.* Three-dimensional problems of the hydrodynamic interaction between bodies in a viscous fluid in the vicinity of their contact // *Fluid Dyn.*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 577–587.
41. *Witze C.P., Schrock V.E., Chambre P.L.* Flow about a growing sphere in contact with a plane surface // *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1968, vol. 11, no. 11, pp. 1637–1652.

УДК 519.632.6:519.958:531.33:517.956.328

ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ КИРХГОФА НА УЛЬТРАНИЗКИХ ЧАСТОТАХ

© 2020 г. С. А. Назаров^{1,*}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 06.08.2019 г.

После доработки 16.03.2020 г.

Принята к публикации 02.04.2020 г.

Рассмотрена полубесконечная пластина Кирхгофа со свободным краем, частично лежащая на винклеровском основании (задача Неймана для бигармонического оператора, возмущенного малым свободным членом с компактным носителем). Показано, что для любого малого $\varepsilon > 0$ можно построить (неединственным образом) переменный коэффициент податливости основания порядка ε , при котором пластина приобретает собственное число ε^4 , вкрапленное в непрерывный спектр, а соответствующая собственная функция экспоненциально затухает на бесконечности. Проверено, что более одного малого собственного числа быть не может. Примечательно то, что у акустического волновода (задача Неймана для оператора Лапласа) малое положительное возмущение не может спровоцировать появление собственного числа около точки отсечки непрерывного спектра.

Ключевые слова: полубесконечная пластина Кирхгофа, винклеровское основание, малое возмущение, пороговый резонанс, окологороговое собственное число в непрерывном спектре

DOI: 10.31857/S0032823520030066

1. Постановка задачи. Пластина $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ состоит из единичной (произвели масштабирование) полуполосы-волновода $\Pi = \{x = (y, z): z \geq 0, y \in (-1/2, 1/2)\}$ и “резонатора” $\Theta \subset \{x: z < 0\}$, ограниченной области в нижней полуплоскости \mathbb{R}_-^2 (тонирована на рис. 1). Границу $\partial\Omega$ считаем гладкой, класса C^∞ для простоты. В области Ω рассмотрим задачу о собственных колебаниях пластины Кирхгофа [1, § 30], лежащей частично на винклеровском основании [2, 3] малой переменной податливости

$$\Delta^2 u_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

$$N^q(x, \nabla)u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (q = 2, 3) \quad (1.2)$$

Здесь u_ε – прогиб пластины, $\lambda_\varepsilon = D^{-1}\omega_\varepsilon^2$ – спектральной параметр, причем $\omega_\varepsilon > 0$ – частота колебаний, $D > 0$ – цилиндрическая жесткость пластины, а плотность пластины

$$\rho_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon^{-2}\rho(x), \quad \rho(x) = 0, \quad x \in \Pi \quad (1.3)$$

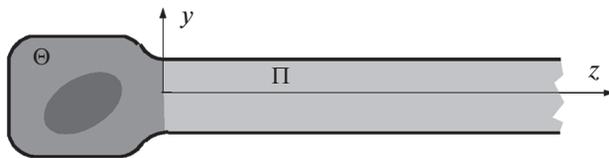


Рис. 1.

содержит большой параметр ε^{-2} и гладкую в $\bar{\Theta}$ функцию $\rho \geq 0$ (резонатор утяжелен), причем постоянная плотность однородного волновода Π сведена к единице. Кроме того, $\nabla = \text{grad}$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа, а $N^q(x, \nabla)$ – дифференциальные операторы краевых условий, отвечающих свободному краю пластины [1, 4]

$$\begin{aligned} N^3(x, \nabla) &= \partial_n \Delta - (1 - \nu)(\partial_s \kappa(s) \partial_s - \partial_s^2 \partial_n) \\ N^2(x, \nabla) &= \Delta - (1 - \nu)(\partial_s^2 - \kappa(s) \partial_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом $\nu \in [0, 1/2)$ – коэффициент Пуассона, κ – кривизна дуги $\partial\Omega$, $\partial_n = \partial/\partial n$, $\partial_s = \partial/\partial s$, а (n, s) – локальная система криволинейных координат, n – ориентированное расстояние до границы, $n > 0$ вне Ω , s – длина дуги на $\partial\Omega$, измеренная против часовой стрелки. На прямых участках границы $\{x : y = \pm 1/2, z > 0\}$ имеем

$$\begin{aligned} N_{\pm}^3(\nabla) &= \pm \partial_y (\partial_y^2 + (2 - \nu) \partial_z^2), \quad N_{\pm}^2(\nabla) = \partial_y^2 + \nu \partial_z^2 \\ \partial_n &= \pm \partial_y = \pm \partial/\partial y, \quad \partial_s = \mp \partial_z = \mp \partial/\partial z \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наконец, Da_ε – коэффициент податливости винклеровского основания Θ (пластина не контактирует с основанием вдоль полуполосы Π – носители функций a_ε и ρ глубоко тонированы на рис. 1), который будем искать в виде

$$a_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 a_0(x) + \varepsilon^3 \sum_{j=0,1,2} \tau_{j\varepsilon} b_j(x) \quad (1.6)$$

Здесь и далее $\varepsilon > 0$ – фиксированный малый параметр, а τ_j – дополнительные параметры, подбор которых обеспечит существование собственного числа рассматриваемой задачи

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^4 \quad (1.7)$$

Вариационная формулировка задачи (1.1), (1.2)

$$2E(u_\varepsilon, v; \Omega) + (a_\varepsilon u_\varepsilon, v)_\Omega = \lambda_\varepsilon (\rho_\varepsilon u_\varepsilon, v)_\Omega \quad v \in H^2(\Omega) \quad (1.8)$$

осуществляется на пространстве Соболева $H^2(\Omega)$ и включает скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\Omega$ в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а также функционал энергии пластины Кирхгофа [1, § 30]

$$E(u, u; \Omega) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\Delta u|^2 + 2(1 - \nu) \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] dx \quad (1.9)$$

$$E(u, v; \Omega) = \frac{1}{4} (E(u + v, u + v; \Omega) - E(u - v, u - v; \Omega)) \quad (1.10)$$

Поскольку билинейная форма (1.10) в левой части интегрального тождества (1.8) симметрична, положительна и замкнута в гильбертовом пространстве $H^2(\Omega)$, задаче (1.1), (1.2) отвечает [5, Гл. 10] самосопряженный положительный оператор A^ε в пространстве $L^2(\Omega)$ с областью определения

$$D(A^\varepsilon) = \{u \in H^4(\Omega): N^q u = 0 \text{ на } \partial\Omega, q = 2, 3\}$$

Непрерывный спектр σ_c^ε этого оператора и соответственно дифференциальной (1.1), (1.2) или вариационной (1.8) задач занимает полуось $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$, но в нем могут возникнуть собственные числа, образующие точечный спектр σ_p^ε , вкрапленные в непрерывный спектр и потому обладающие природной неустойчивостью. Именно последнее свойство требует применения процедуры “точной настройки” [6, 7] параметров задачи для образования точечного спектра.

Появление малого собственного числа (1.7) – необычный феномен: например, в подобной рассматриваемой задаче Неймана для оператора Лапласа, описывающей акустический волновод, малое возмущение не может вызвать возникновение собственного числа на интервале $(0, t_\Theta)$, верхний край $t_\Theta > 0$ которого определяется формой и размерами резонатора Θ (см. разд. 7). В обоих случаях на нижнем краю $\lambda_+ = 0$ непрерывного спектра задач реализуются пороговые резонансы [8–11], однако их качество различается, так как в задаче Неймана с $\lambda = 0$ имеется одна стоячая (не переносящая энергию) волна $w^0(x) = 1$, а в задаче Кирхгофа их три

$$v_0(x) = w^{10}(x) = 1, \quad v_1(x) := w^{20}(x) = z, \quad v_2(x) := w^{11}(x) = y \quad (1.11)$$

Именно линейно растущая волна v_1 и обуславливает возможность построения экспоненциально затухающей собственной функции на ультрорезонансной частоте.

Еще раз укажем основное отличие представленного далее результата от всех опубликованных ранее исследований дискретного и непрерывного спектров разнообразных краевых задач для бигармонического оператора: посредством малых, физически осмысленных, возмущений дифференциальных операторов собственное число медленно поднимается с нижнего порога спектра и, погружаясь в непрерывный спектр, становится неустойчивым и нуждается в тщательном подборе нескольких свободных параметров пластины.

2. Статическая задача. Рассмотрим неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$N^q(x, \nabla)u(x) = g^q(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (q = 2, 3) \quad (2.2)$$

Правые части f и g^q экспоненциально затухают при $z \rightarrow +\infty$, т.е. $e^{\beta z} f \in L^2(\Omega)$ при некотором $\beta > 0$, а g^q – след на $\partial\Omega$ функции G^q , причем $e^{\beta z} G^q \in H^{4-q}(\Omega)$ и

$$\|(f, g^2, g^3); W_\beta(\Omega)\| := \|e^{\beta z} f; L^2(\Omega)\| + \sum_{q=2,3} \inf \left\{ \|e^{\beta z} G^q; H^{4-q}(\Omega)\| : g^q = G^q \text{ на } \partial\Omega \right\}$$

Установлено [12, 13], что найдется величина $\beta(v) > 0$, при которой в случае $\beta \in (0, \beta(v))$ три условия ортогональности

$$J_p(f, g^2, g^3) := (f, v_p)_\Omega - (g^3, v_p)_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n v_p)_{\partial\Omega} = 0 \quad (p = 0, 1, 2) \quad (2.3)$$

обеспечивают существование единственного решения u задачи (2.1), (2.2) в весовом пространстве Соболева $W_{\beta}^4(\Omega)$ с нормой $\|u; W_{\beta}^4(\Omega)\| = \|e^{\beta z} u; H^4(\Omega)\|$ и оценку

$$\|u; W_{\beta}^4(\Omega)\| \leq c \|(f, g^2, g^3); W_{\beta}(\Omega)\|$$

Это решение далее обозначаем

$$u = R_{\beta}(f, g^2, g^3) \quad (2.4)$$

Приведем несколько утверждений, вытекающих из общих результатов [13] и полиномиального свойства [14] квадратичной формы (1.9): для любой ограниченной области $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ справедливо высказывание

$$E(u, u; \Xi) = 0, u \in H^2(\Xi) \Leftrightarrow u(x) = c_0 + c_1 z + c_2 y \quad (2.5)$$

Еще один факт, нужный для всех выводов: у однородной ($f = 0$ и $g^q = 0$) задачи (2.1), (2.2) нет решений в классе $H^2(\Omega)$.

Модельная задача для бигармонического уравнения в бесконечной полосе $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$ помимо линейных функций (1.11) имеет решения

$$w^{12}(x) = \frac{1}{2}(z^2 - \nu y^2), \quad w^{21}(x) = yz, \quad w^{13}(x) = \frac{1}{6}z^3 - \frac{\nu}{2}y^2 z \quad (2.6)$$

Других, линейно независимых (относительно указанных), решений с не более чем степенным ростом на бесконечности нет.

Решения (1.11), (2.6) связаны соотношениями

$$\partial_z w^{pq+1}(x) = w^{pq}(x), \quad q = 0, \dots, \tau_p - 1, \quad \partial_z w^{p0}(x) = 0, \quad p = 1, 2 \quad (2.7)$$

Здесь $\tau_1 = 4$ и $\tau_2 = 2$ — длины жордановых цепочек

$$W^{10}(y) = 1, \quad W^{11}(y) = 0, \quad W^{12}(y) = -\frac{\nu}{2}y^2, \quad W^{13}(y) = 0 \quad (2.8)$$

$$W^{20}(y) = y, \quad W^{21}(y) = 0. \quad (2.9)$$

Жордановы цепочки составлены из собственных и присоединенных векторов (скалярных функций в рассматриваемом случае) операторного пучка

$$\theta \mapsto \left\{ \partial_y^4 + 2\theta^2 \partial_y^2 + \theta^4, N_{\pm}^3(\partial_y, \theta) \Big|_{y=\pm 1/2}, N_{\pm}^2(\partial_y, \theta) \Big|_{y=\pm 1/2} \right\} \quad (2.10)$$

и отвечают нулевому собственному числу $\theta = 0$. По цепочкам выстраиваются полиномиальные решения задачи Кирхгофа в полосе $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$

$$w^{pq}(y, z) = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} z^k W^{pq-k}(y)$$

Длины τ_p можно предсказать [13, 15] на основе характеристик (2.5) и (2.7) функций (1.11).

При нарушении условий ортогональности (2.3) задача (2.1), (2.2) все-таки имеет решение, обладающее степенным ростом на бесконечности, определенное с точностью до линейного слагаемого и допускающее представление

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \chi(z) \sum_{p=1}^2 \sum_{q=0}^{\tau_p-1} c_{pq} w^{pq}(x) \quad (2.11)$$

Здесь остаток \tilde{y}_0 экспоненциально затухает при $z \rightarrow +\infty$, т.е. $e^{\beta z} \tilde{y} \in H^4(\Omega)$, и χ – гладкая срезающая функция

$$\chi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z > 2l, \quad \chi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z < l, \quad 0 \leq \chi \leq 1 \quad (2.12)$$

Коэффициенты c_{10} , c_{20} , c_{11} в представлении (2.11) произвольны, а коэффициенты c_{12} , c_{21} , c_{13} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{pq} &= \alpha_{pq} ((f, w^{p\tau_p - q})_{\Omega} - (g^3, w^{p\tau_p - 1 - q})_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n w^{p\tau_p - 1 - q})_{\partial\Omega}) \\ \alpha_{23} &= -\alpha_{13} = (1 - \nu^2)^{-1}, \quad \alpha_{21} = (2(1 - \nu))^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интегральные представления (2.13) выводятся согласно методу [16] при помощи подстановки функций u_0 и $w^{p\tau_p - 1 - q}$ в тождество

$$\begin{aligned} &(\Delta^2 u, w)_{\Omega_R} - (u, \Delta^2 w)_{\Omega_R} - (N^3 u, w)_{(\partial\Omega)_R} + (N^2 u, \partial_n w)_{(\partial\Omega)_R} - \\ &\quad - (\partial_n u, N^2 w)_{(\partial\Omega)_R} + (u, N^3 w)_{(\partial\Omega)_R} = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (u(x) N^3(\nabla) w(x) - \partial_z u(x) N^2(\nabla) w(x) + \partial_z w(x) N^2(\nabla) u(x) - w(x) N^3(\nabla) u(x)) \Big|_{z=R} dz - \\ &\quad - 2(1 - \nu) \sum_{\pm} \left(u\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) - w\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

и предельного перехода $R \rightarrow +\infty$; при этом $\Omega_R = \{x \in \Omega: z < R\}$ – усеченный волновод с краем $(\partial\Omega)_R = \{x \in \partial\Omega: z < R\}$, а операторы (1.4) на сечении $\{x \in \Pi: z = R\}$ принимают вид

$$N^3(\nabla) = \frac{\partial^3}{\partial z^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2}, \quad N^2(\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Формула Грина (2.14) включает внеинтегральные члены, происходящие от интегрирования вдоль контура $\partial\Omega_R$ с угловыми точками $(\pm 1/2, R)$ [1, 17], и поэтому ее следует признать обобщенной.

3. Волны на ультранизких частотах. Построим решения

$$w_{\varepsilon}(y, z) = e^{\varepsilon \theta_{\varepsilon} z} W_{\varepsilon}(y), \quad v_{\varepsilon}(y, z) = e^{\varepsilon^2 \tau_{\varepsilon} z} V_{\varepsilon}(y) \quad (3.1)$$

задачи в бесконечной полосе с параметром (1.7)

$$\begin{aligned} \Delta^2 w(x) &= \varepsilon^4 w(x), \quad x \in (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R} \\ N_q(\nabla) w(\pm 1/2, z) &= 0, \quad z \in \mathbb{R} \quad (q = 2, 3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Волна w_{ε} отвечает изгибным колебаниям полосы; после подстановки выражения для w_{ε} в соотношения (3.2) приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, которую следует интерпретировать как операторный пучок из-за полиномиального вхождения параметра θ_{ε}

$$\begin{aligned} \partial_y^4 W_{\varepsilon}(y) + 2\varepsilon^2 \theta_{\varepsilon}^2 \partial_y^2 W_{\varepsilon}(y) + \varepsilon^4 \theta_{\varepsilon}^4 W_{\varepsilon}(y) &= \varepsilon^4 W_{\varepsilon}(y), \quad y \in (-1/2, 1/2) \\ \pm \partial_y^3 W_{\varepsilon}(\pm 1/2) \pm (2 - \nu) \varepsilon^2 \theta_{\varepsilon}^2 \partial_y W_{\varepsilon}(\pm 1/2) &= 0, \quad \partial_y^2 W_{\varepsilon}(\pm 1/2) + \nu \varepsilon^2 \theta_{\varepsilon}^2 W_{\varepsilon}(\pm 1/2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Известны [18] разложения

$$W_\varepsilon(y) = \sum_{j=0}^3 \varepsilon^j \theta_\varepsilon^j W^{1j}(y) + \varepsilon^4 W'(y) + \varepsilon^6 W''(y) + \dots \quad (3.4)$$

$$\theta_\varepsilon = \theta_0 + \varepsilon^2 \theta'' + \dots$$

Здесь W^{1j} – собственные и присоединенные векторы (2.8), (2.9), числа $\theta_0, \theta'' \in \mathbb{C}$ и функции W', W'' подлежат определению, а многочлен обозначает младшие асимптотические члены. В задаче (3.3) заменим величины W_ε и θ_ε их разложениями (3.4) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра ε . Суммы коэффициентов при $\varepsilon^j \theta_\varepsilon^j$, $j = 0, \dots, 3$, обращаются в нуль согласно определению собственных и присоединенных векторов (этот факт проверяется непосредственно), а коэффициенты при ε^4 формируют задачу

$$\begin{aligned} \partial_y^4 W'(y) &= F'(y) := W^{10}(y) - \theta_0^4 (2\partial_y^2 W^{12}(y) + W^{10}(y)), \quad y \in (-1/2, 1/2) \\ \pm \partial_y^3 W'(\pm 1/2) &= G_{3\pm}' := \mp(2 - \nu)\theta_0^4 \partial_y W^{12}(\pm 1/2) \\ \partial_y^2 W'(\pm 1/2) &= G_{2\pm}' := -\nu\theta_0^4 W^{12}(\pm 1/2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Условия разрешимости задачи (3.5)

$$\int_{-1/2}^{1/2} F'(y) W^{p0}(y) dy - \sum_{\pm} \left(G_{3\pm}' W^{p0}\left(\pm \frac{1}{2}\right) \mp G_{2\pm}' \partial_y W^{p0}\left(\pm \frac{1}{2}\right) \right) = 0 \quad (3.6)$$

при $p = 2$ выполнено, а в случае $p = 1$ оно эквивалентно алгебраическому уравнению

$$1 - \theta_0^4 (1 - \nu^2) = 0 \quad (3.7)$$

Корни уравнения (3.7) имеют вид

$$\theta_{\pm}^{\text{re}} = \pm|\theta|, \quad \theta_{\pm}^{\text{im}} = \pm i|\theta| \quad (|\theta| = (1 - \nu^2)^{-1/4}) \quad (3.8)$$

Теперь задача (3.5) имеет решение W' , и оно становится единственным при соблюдении условий ортогональности

$$\int_{-1/2}^{1/2} W'(y) W^{p0}(y) dy = 0 \quad (p = 1, 2) \quad (3.9)$$

Итак, определены главные члены разложений (3.4). Поскольку $W^{11} = W^{13} = 0$, поправки W'' и θ'' находятся из задачи

$$\begin{aligned} \partial_y^4 W''(y) &= F''(y) := \theta_0^2 W^{12}(y) - 4\theta'' \theta_0^3 (2\partial_y^2 W^{12}(y) + W^{10}(y)) - \\ &\quad - \theta_0^2 (2\partial_y^2 W'(y) + \theta_0^4 W^{12}(y)), \quad y \in (-1/2, 1/2) \\ \pm \partial_y^3 W''(\pm 1/2) &= G_{3\pm}'' := \mp 4(2 - \nu)\theta'' \theta_0^3 \partial_y W^{12}(\pm 1/2) \mp (2 - \nu)\theta_0^4 \partial_y W'(\pm 1/2) \\ \partial_y^2 W''(\pm 1/2) &= G_{2\pm}'' := -4\nu\theta'' \theta_0^3 W^{12}(\pm 1/2) - \nu\theta_0^4 W'(\pm 1/2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Условие (3.6) разрешимости этой задачи превращается в линейное уравнение

$$-4\theta'' \theta_0^3 (1 - \nu^2) + i(\theta_0) = 0 \quad (3.11)$$

дающее величину θ'' для каждого корня (3.8). Наконец, задача (3.9), (3.10) приобретает единственное решение W'' , подчиненное условиям ортогональности (3.9).

Асимптотическая процедура может быть продолжена, однако ни младшие члены, ни выражения W' , W'' и θ'' , в частности, слагаемое $t(\theta_0)$ в уравнении (3.11), востребованы не будут. Понадобятся построенные главные члены асимптотики и известный [18] факт: функции

$$[0, \varepsilon_0) \ni \varepsilon \mapsto \theta_{\varepsilon\pm}^{\text{re/im}}, \quad [0, \varepsilon_0) \ni \varepsilon \mapsto W_{\varepsilon\pm}^{\text{re/im}}(y)$$

аналитические при некотором $\varepsilon_0 > 0$.

Вторая волна (3.1) отвечает крутильным колебаниям пластины, а ее ингредиенты отыскиваются из аналогичной (3.3) краевой задачи на отрезке $(-1/2, 1/2)$ в виде

$$V_\varepsilon(y) = W^{20}(y) + \varepsilon^2 \vartheta_\varepsilon W^{21}(y) + \varepsilon^4 V(y) + \dots = y + \varepsilon^4 V(y) + \dots \quad (3.12)$$

$$\vartheta_\varepsilon = \vartheta_0 + \dots$$

В итоге условия (3.6) разрешимости задачи

$$\partial_y^4 V'(y) = F'(y) := y, \quad y \in (-1/2, 1/2)$$

$$\pm \partial_y^3 V'(\pm 1/2) = G_{3\pm}^3 = \mp(2 - \nu)\vartheta_0^2, \quad \partial_y^2 V'(\pm 1/2) = \mp \nu \vartheta_0^2/2$$

приводят к квадратному уравнению

$$\frac{1}{12} + 2(1 - \nu)\vartheta_0^2 = 0$$

с чисто мнимыми корнями

$$\vartheta_\pm = \pm i |\vartheta| \quad (|\vartheta| = (24(1 - \nu))^{-1/2}) \quad (3.13)$$

Величины $\vartheta_{\varepsilon\pm}$ и $W_{\varepsilon\pm}$, включающие построенные главные асимптотические члены, аналитически зависят от переменной $\varepsilon^2 \in [0, \varepsilon_0^2)$.

4. Формальная асимптотика захваченной волны. В отличие от осциллирующих крутильных волн, заданных формулами (3.1) и (3.12), (3.13), среди четырех изгибных волн $w_{\varepsilon\pm}^{\text{im/re}}$ с ингредиентами (3.11) волна $w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$ исчезает при $z \rightarrow +\infty$ хоть и с малой, но экспоненциальной скоростью. Волны $w_{\varepsilon\pm}^{\text{im}}$ медленно осциллируют, а волна $w_{\varepsilon+}^{\text{re}}$ растет при $z \rightarrow +\infty$. Именно затухающую волну возьмем в качестве основного члена конструкции захваченной волны

$$u_\varepsilon^{\text{tr}}(y, z) = \chi(z)w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) + u_\varepsilon(y, z) \quad (4.1)$$

Функция $w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$ определена только в единичной полосе и потому умножена на срезающую функцию (2.12), а дополнительное слагаемое u_ε , которое компенсирует невязки, оставленные произведением $\chi w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$ в уравнении (1.1) и краевых условиях (1.2), исчезает на бесконечности, однако в отличие от $w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$ с большой скоростью, т.е. $e^{\beta z} u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$ (ср. разд. 2). Сам остаток будем искать в виде

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 u'_\varepsilon(x) \quad (4.2)$$

Слагаемые u_j экспоненциально затухают на бесконечности и удовлетворяют задаче (2.1), (2.2) с некоторыми правыми частями f_j и g_j^q , имеющими компактные носители.

Учитывая разложения (3.4) и формулы (2.8), видим, что на резонаторе Θ справедливо разложение

$$w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) = 1 - \varepsilon |\theta| z + \varepsilon^2 |\theta|^2 \frac{1}{2} (z^2 - \nu y^2) - \varepsilon^3 \left(|\theta|^3 \frac{z}{2} \left(\frac{z^2}{3} - \nu y^2 \right) - |\theta| \theta'' z \right) + \tilde{w}_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) \quad (4.3)$$

$$\tilde{w}_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) = O(\varepsilon^4), \quad (y, z) \in \bar{\Theta}$$

Поэтому, обозначив $[\Delta^2, \chi]$ и $[N^q(\nabla), \chi]$ коммутаторы бигармонического оператора и дифференциальных операторов (1.5) со срезающей функцией (2.12), находим

$$\begin{aligned} f_0 &= -[\Delta^2, \chi]1, & g_0^q &= -[N^q(\nabla), \chi]1 \\ f_1 &= |\theta|[\Delta^2, \chi]z, & g_1^q &= |\theta|[N^q(\nabla), \chi]z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Операторы (1.4) аннулируют линейные функции (1.11). Следовательно, первые два слагаемых в сумме (4.2) принимают вид

$$u_0(x) = 1 - \chi(z), \quad u_1(x) = -|\theta|(1 - \chi(z))z \quad (4.5)$$

и обладают компактными носителями, т.е. заведомо затухают на бесконечности. При учете соотношения (1.6) выводим выражения для правых частей задачи (2.1), (2.2) для слагаемого u_2

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \rho(x) - a_0(x) - \frac{|\theta|^2}{2}[\Delta^2, \chi(z)](z^2 - vy^2) \\ g_2^q(x) &= -\frac{|\theta|^2}{2}[N^q(\nabla), \chi(z)](z^2 - vy^2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решение u_2 экспоненциально затухает на бесконечности при выполнении трех условий разрешимости (2.3). В силу соотношений (2.13), (3.8) и обобщенной формулы Грина (2.14) получаем

$$\begin{aligned} J_2(f_2 - \rho + a_0, g_2^2, g_2^3) &= -\frac{|\theta|^2}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega_R} z \Delta^2 (\chi(z)(z^2 - vy^2)) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(\partial\Omega)_R} (zN^3(x, \nabla)(z^2 - vy^2) - \partial_n z N^2(x, \nabla)(z^2 - vy^2)) ds_x \right) = \\ &= -\frac{|\theta|^2}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \left(zN^3(\nabla)(z^2 - vy^2) - N^2(\nabla)(z^2 - vy^2) \right) \Big|_{z=R} dy = \\ &= |\theta|^2(1 - v^2) = \sqrt{1 - v^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Нетрудно подобрать нетривиальные неотрицательные функции a_0 и ρ , для которых

$$\int_{\Theta} z(\rho(x) - a_0(x)) dx = -\sqrt{1 - v^2}, \quad \int_{\Theta} (\rho(x) - a_0(x)) dx = \int_{\Theta} y(\rho(x) - a_0(x)) dx = 0 \quad (4.8)$$

В итоге находим единственное исчезающее на бесконечности решение u_2 задачи (2.1), (2.2) с правыми частями (4.6). Согласно разложениям (5.1) и (1.6) правые части задачи для функции u_3 принимают вид

$$\begin{aligned} f_3(x) &= |\theta|z(\rho(x) - a_0(x)) + \sum_{j=0}^2 \tau_{j0} b_j(x) + [\Delta^2, \chi(z)] \left(\frac{|\theta|^3}{2} \left(\frac{1}{3} z^3 - vy^2 z \right) - |\theta| \theta'' z \right) \\ g_3^q(x) &= [N^q(\nabla), \chi(z)] \left(\frac{|\theta|^3}{2} \left(\frac{1}{3} z^3 - vy^2 z \right) - |\theta| \theta'' z \right) \quad (q = 2, 3) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для того чтобы соблюсти условия разрешимости (2.3) в случае выражений (4.9), подчиним слагаемые b_j в представлении (1.6) коэффициента податливости a_ϵ двум требованиям. Во-первых, введем условия биортогональности

$$\int_{\Theta} b_j(x) v_k(x) dx = \delta_{j,k} \quad (4.10)$$

Здесь $j, k = 0, 1, 2$ и $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Во-вторых, считаем, что при некотором $\delta > 0$ носители слагаемых содержатся во множестве $\{x : a_0(x) \geq \delta\}$. В результате суммарный нормированный коэффициент податливости (1.6) остается положительным при малом $\varepsilon > 0$. Наконец, соотношения (4.10) позволяют удовлетворить упомянутые условия разрешимости за счет выбора главных членов τ_{j0} представлений

$$\tau_{j\varepsilon} = \tau_{j0} + \tau'_{j\varepsilon} \quad (4.11)$$

Точные значения величин τ_{j0} востребованы не будут.

Итак, задача (2.1), (2.2) с правыми частями (4.9) имеет единственное решение $u_3(y, z)$, затухающее при $z \rightarrow +\infty$. Отделенные члены асимптотики (4.2) захваченной волны $w_\varepsilon^{\text{tr}}$ построены. Попутно определены (заведомо не единственным способом) главные члены представления (1.6) коэффициента податливости винклеровского основания. Намеченную процедуру можно было бы продолжить и найти младшие асимптотические члены, однако проверить сходимость полученных формальных рядов затруднительно. Поэтому изберем иной путь и применим процедуру точной настройки параметров волновода.

5. Доказательство существования захваченной волны. Сформируем задачу для остатка u'_ε из представления (4.1)

$$\Delta^2 u'_\varepsilon(x) = f'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon), \quad x \in \Omega \quad (5.1)$$

$$N^q(x, \nabla)u'_\varepsilon(x) = g^{q'}(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon), \quad x \in \partial\Omega \quad (q = 2, 3)$$

Здесь $\tau' = (\tau'_{0\varepsilon}, \tau'_{1\varepsilon}, \tau'_{2\varepsilon})$ – набор остатков в разложениях (4.11) и (1.6). При учете соотношений (4.3), (4.4)–(4.7), (4.9) преобразуем правые части задачи (5.1) следующим образом

$$\begin{aligned} f'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) &= -\sum_{j=0}^2 \tau'_{j\varepsilon} b_j(x) + \tilde{f}'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \\ \tilde{f}'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) &= \varepsilon(u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 u'(x)) + \\ &+ (\rho(x) - a_0(x))(\chi(z)\varepsilon^{-1}(w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x) - 1) + \varepsilon|\theta|z) + \varepsilon u_2(x) + \varepsilon^2 u_3(x) + \varepsilon^2 u'(x) - \\ &- \sum_{j=0}^2 (\tau_{j0} + \tau'_{j\varepsilon}) b_j(x) (\chi(z)(w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x) - 1) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 u'_\varepsilon(x)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$g_\varepsilon^{q'}(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = \varepsilon^{-3} [N^q(x, \nabla), \chi(z)] \tilde{w}_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x)$$

В силу предположения (4.10) условия разрешимости (2.3) задачи (5.1) в классе функций, исчезающих на бесконечности, принимают вид

$$\tau' = J(\tilde{f}'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}) \quad (5.3)$$

Здесь $J = (J_1, J_2, J_3)$ – вектор функционалов (2.3).

Заменим в формуле (5.2) коэффициенты $\tau'_{j\varepsilon}$ их выражениями (5.3) и согласно обозначению (2.4) получим решения $u'_\varepsilon \in W_\beta^4(\Omega)$ задачи (5.1)

$$u'_\varepsilon = R_\beta(\tilde{f}'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}) \quad (5.4)$$

Положим

$$\mathcal{F}'_\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = (f'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}, J(\tilde{f}'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}))$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}'_\varepsilon(0, 0); W_\beta \times \mathbb{R}^3 \right\| \leq c\varepsilon \\ & \left\| \mathcal{F}'_\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) - \mathcal{F}'_\varepsilon(v'_\varepsilon, t'_\varepsilon); W_\beta \times \mathbb{R}^3 \right\| \leq c\varepsilon \left\| (u' - v'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon - t'_\varepsilon); W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \right\| \times \\ & \quad \times \left(1 + \left\| (u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon); W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \right\| + \left\| (v'_\varepsilon, t'_\varepsilon); W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \right\| \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Перепишем соотношения (5.3), (5.4) как абстрактное уравнение

$$(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = \mathcal{Q}_\beta^\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \quad \text{в} \quad \mathcal{H}_\beta = W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \quad (5.6)$$

В силу неравенств (5.5) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_r)$ оператор $\mathcal{Q}_\beta^\varepsilon$ – сжимающий оператор на шаре

$$\mathcal{B}_r = \{(u, \tau) \in \mathcal{H}_\beta : \|(u, \tau); \mathcal{H}_\beta\| \leq r\}$$

в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_β . Здесь r и ε_r – положительные, вообще говоря, малые числа. В итоге известный [19] принцип Банаха сжимающих отображений дает единственное решение $(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \in \mathcal{B}_r$ уравнения (5.6), к тому же допускающее оценку

$$\left\| (u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon); \mathcal{H}_\beta \right\| \leq c\varepsilon$$

При этом $u'_\varepsilon \in W_\beta^4(\Omega)$ – решение задачи (5.1), а значит, функция (4.1), экспоненциально затухающая на бесконечности согласно формулам (3.1) и (3.6), удовлетворяет задаче (1.1), (1.2) с коэффициентом податливости (1.6). Искомая захваченная волна построена.

6. Единственность захваченной волны на ультранизких частотах. Предположим, что нашлась бесконечно малая положительная последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$, при которой у задачи (1.1), (1.2) с ингредиентами (1.3), (1.6), (1.7) есть решение $u_{\varepsilon_k} \in H^4(\Omega)$, т.е. захваченная волна. Далее нижний индекс k у $\varepsilon = \varepsilon_k$ не пишем и считаем, что

$$|a_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^2, \quad |\rho_\varepsilon(x) - 1| \leq c\varepsilon^{-2}, \quad x \in \Theta, \quad a_\varepsilon(x) = 0, \quad \rho_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in \Pi \quad (6.1)$$

Нормируем функции u_ε в пространстве $L^2(\Theta)$. Функция $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$, разумеется, принадлежит пространству $W_{-\beta}^4(\Omega)$ функций с экспоненциальным ростом при $z \rightarrow +\infty$, на котором для решения $u \in W_{-\beta}^4(\Omega)$ задачи (2.1), (2.2) доказана [12, 20] весовая оценка

$$\left\| u; W_{-\beta}^4(\Omega) \right\| \leq c \left(\left\| f, g^2, g^3 \right\|; W_{-\beta}(\Omega) \right) + \left\| u; L^2(\Theta) \right\| \quad (6.2)$$

Неравенство (6.2) с не зависящим от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ множителем c сохраняется и при возмущении бигармонического оператора Δ^2 малым оператором $S_\varepsilon = a^\varepsilon - \varepsilon^4(1 + \varepsilon^{-2}\rho)$, т.е.

$$\left\| u_\varepsilon; W_{-\beta}^4(\Omega) \right\| \leq c \left\| u_\varepsilon; L^2(\Theta) \right\| = c$$

Итак, существует слабый в $W_{-\beta}^4(\Omega)$ и сильный в $L^2(\Theta)$ предел u_0 последовательности $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty$. При этом, во-первых,

$$\left\| u_0; L^2(\Theta) \right\| = 1 \quad (6.3)$$

и, во-вторых, $u_0 \in W_{-\beta}^4(\Omega)$ – решение однородной ($f = 0, g^2 = g^3 = 0$) задачи (2.1), (2.2), которое ввиду медленного роста (показатель $\beta > 0$ можно взять любым) превращается в линейную функцию

$$u_0(x) = c_0 + c_1 z + c_2 y$$

Убедимся в том, что $c_1 = c_2 = 0$, и тем самым установим, что на малой частоте $\omega_\varepsilon = \sqrt{D}\varepsilon^2$ (ср. формулу (1.7)) имеется только одна захваченная волна, так как $c_0 \neq 0$ в силу нормировки (6.3). С этой целью подставим в формулу Грина (2.14), переделанную для полосы Π , экспоненциально затухающую функцию $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$ и одну из ограниченных относительно переменной z функций

$$\begin{aligned} w_\varepsilon^{(1)}(x) &= \varepsilon^{-2}(2w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x) - (1+i)w_{\varepsilon+}^{\text{im}}(x) - (1-i)w_{\varepsilon-}^{\text{im}}(x)) \\ w_\varepsilon^{(2)}(x) &= \varepsilon^{-1}(v_{\varepsilon+}^{\text{im}}(x) - v_{\varepsilon-}^{\text{im}}(x)) \end{aligned}$$

Перечисленные функции удовлетворяют однородному уравнению с оператором $\Delta^2 - \varepsilon^4$ в полуполосе Π и краевым условиям (1.2) на ее боковых сторонах. Таким образом, формула Грина принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1/2}^{1/2} (u_\varepsilon(x)N^3(\nabla)w_\varepsilon^{(p)}(x) + \partial_z u_\varepsilon(x)N^2(\nabla)w_\varepsilon^{(p)}(x) + \\ &+ \partial_z w_\varepsilon^{(p)}(x)N^2(\nabla)u_\varepsilon(x) + w_\varepsilon^{(p)}(x)N^3(\nabla)u_\varepsilon(x))|_{z=0} dy + \\ &+ 2(1-\nu) \sum_{\pm} \left(u_\varepsilon\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \frac{\partial^2 w_\varepsilon^{(p)}}{\partial y \partial z}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) - w_\varepsilon^{(p)}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y \partial z}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Слабая сходимость $u_\varepsilon \cdot u_0$ в $H^4(\Theta)$ влечет за собой сильную сходимость в пространстве Соболева $H^3(-1/2, 1/2)$ на торце полуполосы Π . Кроме того, согласно полученным в разд. 3 асимптотическим разложениям имеем

$$\begin{aligned} w_\varepsilon^{(j)}(x) &= w_0^{(j)} + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2) \\ w_0^{(1)}(x) &= 2|\theta|^2(z^2 - \nu y^2), \quad w_0^{(2)}(x) = 2i\theta yz \end{aligned}$$

При учете соотношений (6.1) предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ в равенстве (6.4) дает соотношение

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} (u_0(x)N^3(\nabla)W_0^{(j)}(x) + \partial_z u_0(x)N^2(\nabla)w_0^{(j)}(x))|_{z=0} dy + \\ + 2(1-\nu) \sum_{\pm} \pm u_0\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \frac{\partial^2 w_0^{(j)}}{\partial y \partial z}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу формул (2.13) выводим, что левая часть соотношения (6.5) равна $2|\theta|\alpha_{23}c_2$ и $2i|\theta|\alpha_{21}c_1$ соответственно при $j = 1$ и $j = 2$. Таким образом, равенства $c_1 = c_2 = 0$ доказаны.

7. Формулировка результатов и пояснения к ним. 1°. *Изгибные колебания.* В предыдущих разделах доказано следующее утверждение: найдутся такие положительные величины ε_0 и δ_0 , что в случае $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при правильном выборе коэффициентов (1.3) и (1.6) у краевой задачи (1.1), (1.2) (или (1.8) в вариационной постановке) появляется собственное число (1.7), вкрапленное в непрерывный спектр. Кроме того, обнаруженное собственное число простое, и на интервале $(0, \varepsilon^4(1 + \delta_0))$ других собственных чисел нет. Соответствующая собственная функция экспоненциально затухает на бесконечности, и ее поведение при $\varepsilon \rightarrow +0$ описывается асимптотическими разложениями

(4.1), (4.2), т.е. согласно формулам (2.8) и (3.1), (3.4) в главном реализуется как изгибные колебания пластины.

2°. *Упрощения.* Для того чтобы соблюсти физически осмысленное требование

$$a_\varepsilon(x) \geq 0 \quad (7.1)$$

пришлось придать локальное, но значительное возмущение плотности ρ_ε – иначе не удастся удовлетворить два первых ограничения (4.8) одновременно. Если отказаться от условия (7.1) и, утратив прикладной характер спектральной задачи, допустить коэффициент a_ε переменного знака, то по прежней схеме можно построить собственное число (1.7) и при $\rho = 0$ в формуле (1.3).

3°. *Крутильные колебания.* В предположениях о симметрии области Ω относительно оси абсцисс и четности функций a_ε , ρ_ε можно искать собственные функции задачи (1.1), (1.2), нечетные по переменной y . Соответствующая постановка спектральной задачи сводится к сужению уравнения (1.1) и краевых условий (1.2) на половину волновода $\Omega_+ = \{x = (y, z) \in \Omega : y > 0\}$

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) &= \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_+ \\ N^q(x, \nabla)u_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in (\partial\Omega)_+ \quad (q = 2, 3) \end{aligned} \quad (7.2)$$

и постановки искусственных краевых условий

$$w_\varepsilon(0, z) = 0, \partial_y^2 w_\varepsilon(0, z) = 0, \quad (0, z) \in \Omega \quad (7.3)$$

Условия (7.3) имитируют свободно опёртый край пластины, и им удовлетворяет только вторая волна (3.1), порожденная жордановой цепочкой (2.9) с длиной два. Рассуждения и выкладки из разд. 6 показывают, что у задачи (7.2), (7.3) нет малых собственных чисел.

4°. *Акустический волновод.* В задаче Неймана для оператора Гельмгольца $\Delta + \varepsilon^4$ в полосе $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$ возникают две осциллирующие волны

$$w_{\varepsilon\pm}(y, z) = e^{\pm i\varepsilon^2 z}$$

Эти волны порождены жордановой цепочкой $\{1, 0\}$ с длиной два, порожденной нулевым собственным числом аналогичного (2.10) операторного пучка

$$\theta \mapsto \left\{ -\partial_y^2 - \theta^2, \pm \partial_y \Big|_{y=\pm 1/2} \right\}$$

Таким образом, свойства решений задачи Неймана

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon(x) + \varepsilon a_0(x)u^\varepsilon(x) &= \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \\ \partial_n u^\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.4)$$

с малым спектральным параметром λ^ε похожи на свойства решений видоизмененной задачи Кирхгофа (7.2), (7.3). В частности, у задачи (7.4) не может быть малых положительных собственных чисел.

5°. *Один открытый вопрос.* При помощи минимального принципа (см., например, [5]) нетрудно убедиться в том, что в случае

$$a_0(x) \leq 0, \quad x \in \Theta, \quad \int_\Theta a_0(x)dx < 0, \quad a_0(x) = 0, \quad x \in \Pi, \quad (7.5)$$

задача Неймана (7.4) обладает отрицательным собственным числом. При малом $\varepsilon > 0$ у задачи (7.4) нет других собственных чисел около начала координат, так как пороговый резонанс реализуется только на пространстве постоянных функций. Впрочем ограничения (7.5) противоречат физическому смыслу задачи и вводятся здесь с чисто математической целью.

Аналогичный вывод о существовании отрицательного собственного числа можно сделать и в задаче (1.1), (1.2) при плотности $\rho_\varepsilon = 1$ (способ возмущения существенно упрощается: утяжеление (1.3) “резонатора” не требуется и коэффициенте $a_\varepsilon(x) = \varepsilon a_0(x)$, подчиненном соотношениям (7.5). Остался открытым вопрос о построении коэффициентов ρ_ε и a_ε , обеспечивающих максимально возможное количество собственных чисел – двух отрицательных в дискретном спектре и одного положительного в непрерывном или трех отрицательных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Ленинград: изд-во АН СССР, 1931.
3. Hetenyi M. Beams on Elastic Foundation. Michigan: Univ. Press, 1946.
4. Бирман М.Ш. О вариационном методе Трэффца для уравнения $\Delta^2 u = f$ // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–204.
5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
6. Назаров С.А. Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
7. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
8. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
9. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
10. Pankrashkin K. Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
11. Бахарев Ф.Л., Назаров С.А. Критерии отсутствия и наличия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов // Алгебра и анализ. (в печати)
12. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin: Walter de Gruyter. 1994.
13. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
14. Назаров С.А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб.: изд-во СПбГУ. 1997. С. 167–192.
15. Назаров С.А. Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // Записки науч. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 1997. Т. 249. С. 212–230.
16. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
17. Назаров С.А. Асимптотика собственных колебаний длинной двумерной пластины Кирхгофа с переменным сечением // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 9. С. 35–86.
18. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
20. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.

Waves Trapped by Semi-Infinite Kirchhoff Plate at Ultra-Low Frequencies

S.A. Nazarov^{a,#}

^a Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

[#]e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Semi-infinite Kirchhoff plate with traction-free edge which lays partly on the heterogeneous Winkler foundation (the Neumann problem for the bi-harmonic operator perturbed by a small free term with a compact support). It is shown that for arbitrary small $\varepsilon > 0$, there is the compliance coefficient (defined non-uniquely) of order ε such that the plate gets the eigenvalue ε^4 which is embedded into the continuous spectrum and has the corresponding eigenfunction of the exponential decay at infinity. It is verified that other small eigenvalue does not exist. It is remarkable that in an acoustic waveguide (the Neumann problem for the Laplace operator), a small perturbation cannot give rise to an eigenvalue in the vicinity of the cutoff point of the continuous spectrum.

Keywords: semi-infinite Kirchhoff plate, Winkler foundation, small perturbation, threshold resonance, near-threshold eigenvalue embedded into continuous spectrum

REFERENCES

1. *Mikhlin S.G.* Variational Methods in Mathematical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1964. 548 p.
2. *Krylov A.N.* On Computation of Beams on Elastic Foundation. Leningrad: izd-vo AN USSR, 1931. 154 p. (in Russian)
3. *Hetenyi M.* Beams on Elastic Foundation. Michigan: Univ. Press, 1946.
4. *Birman M.S.* On the variational Trefftz method for the equation $\Delta^2 u = f$ // Dok. AN SSSR, 1955, vol. 101, no. 2, pp. 201–204 (in Russian).
5. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel, 1987.
6. *Nazarov S.A.* Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide // Theoretical and mathematical physics, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 606–627.
7. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // Funct. Anal. Appl., 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
8. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys., 2007, vol. 273, no. 2, pp. 533–559.
9. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc., 2008, vol. 97, no. 3, pp. 718–752.
10. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. Math. Anal. Appl., 2017, vol. 449, no. 1, pp. 907–925.
11. *Bakharev F.L., Nazarov S.A.* Criteria for the absence and existence of bounded solutions at the threshold frequency in a junction of quantum waveguides // arXiv: 1705.10481.
12. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.
13. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // Russ. Math. Surveys, 1999, vol. 54, no. 5, pp. 947–1014.
14. *Nazarov S.A.* Self-adjoint elliptic boundary-value problems. The polynomial property and formally positive operators // J. Math. Sci., 1998, vol. 92, no. 6, pp. 4338–4353.
15. *Nazarov S.A.* Non-self-adjoint elliptic problems with the polynomial property in domains having cylindrical outlets to infinity // J. Math. Sci., 1999, vol. 101, no. 5, pp. 3512–3522.
16. *Maz'ya V.G., Plamenevskij B.A.* On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems in domains with conical points // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 123, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1984. pp. 57–88.
17. *Nazarov S.A.* Asymptotics of natural oscillations of a long two-dimensional Kirchhoff plate with varying cross-section // Sb. Math., 2018, vol. 209, no. 9, pp. 1287–1336.
18. *Vainberg M.M., Trenogin V.A.* Theory of Branching of Solutions of Non-Linear Equations. Leyden: Noordho Intern. Publ., 1974.
19. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, vol. I: Metric and Normed Spaces. Rochester: Graylock Press, 1957. 129 p.
20. *Kondrat'ev V.A.* Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.

УДК 534.13:534.142:536.242

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ТЕЛА НА РЕШЕНИЕ НЕСВЯЗАННОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ТЕРМИЧЕСКОМ СЛОЕ (НА ПРИМЕРЕ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ)

© 2020 г. М. И. Супельняк^{1,*}

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана (Калужский филиал), Калуга, Россия

*e-mail: max2901@mail.ru

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.

После доработки 26.03.2020 г.

Принята к публикации 28.03.2020 г.

Получены аналитические решения несвязанной квазистатической циклической задачи термоупругости для тел простой геометрической формы: полупространства, пластины, пространства с цилиндрическим каналом, цилиндра, пространства со сферической полостью, шара. Решения, представляющие собой тригонометрические ряды Фурье по времени, с помощью замены пространственной переменной преобразованы к виду, удобному для исследования колебаний температуры и термоциклических напряжений в термическом слое. Для найденных решений установлены простые асимптотические зависимости, пригодные при больших радиусах кривизны поверхности и размерах тела. Изучено влияние формы тела на колебания температуры и термоциклические напряжения в термическом слое.

Ключевые слова: задача термоупругости, термоциклические напряжения

DOI: 10.31857/S0032823520030108

1. Введение. В ряде технических устройств имеет место циклический теплообмен между их элементами и жидкой средой, в результате которого в деталях возбуждаются колебания температуры, сопровождающиеся термоциклическими напряжениями. Таким образом, колебания температуры деталей установки влияют не только на ее эффективность, но и на надежность. Отдельный интерес представляют высокочастотные колебания температуры, которые быстро затухают с удалением от поверхности вглубь тела. Вызванные ими упругие термоциклические напряжения могут стать причиной многоциклового усталостного разрушения деталей, что подтверждается результатами экспериментальных исследований [1, 2]. Подобная проблема актуальна для рабочих лопаток газовых турбин, элементов двигателей внутреннего сгорания, трубопроводов атомных электростанций. Несмотря на успехи, связанные с уточнением модельных представлений о переносе теплоты и импульса в твердых телах [3–5], для инженерных приложений по-прежнему приемлемо использование модели среды, в основе которой лежат феноменологические законы Фурье и Гука, о чем свидетельствуют работы [6, 7].

Строго говоря, не только изменение температуры приводит к деформации твердого тела, но имеет место и обратная связь, поскольку при деформировании выделяется или поглощается теплота, которая влияет на температуру. Однако в действительности влияние деформаций на поле температуры крайне мало, из-за чего им пренебрегают. Также ввиду малости обычно пренебрегают силами инерции, действующими на колеблющиеся частицы твердого тела при циклическом изменении температуры. В та-

ком случае напряжения, вызванные колебаниями температуры, определяются с помощью несвязанной квазистатической задачи термоупругости, которая решается в два этапа. На первом этапе определяются колебания температуры из решения задачи теплопроводности. На втором этапе решается задача теории упругости с найденным на первом этапе неоднородным полем температуры.

Поверхностный слой материала, в котором происходит существенное затухание колебаний температуры и напряжений, называется термическим. Малая толщина термического слоя позволяет использовать для их расчета одномерные уравнения термоупругости. Одним из факторов, влияющих на величину термоциклических напряжений, является форма поверхности тела, определяемая в каждой своей точке главными кривизнами. Чтобы учесть влияние формы поверхности на термонапряженное состояние термического слоя, на практике обычно используют модели полупространства, цилиндра, пространства с цилиндрическим каналом, шара и пространства со сферической полостью. Для оценки влияния размеров тела на термоциклические напряжения в термическом слое применяют модель пластины. Решения циклических задач теплопроводности в указанных областях приведены в классических трудах [8, 9]. После их подстановки в уравнения теории упругости в перемещениях [10] могут быть найдены термоциклические напряжения и термоциклическое перемещение. Другим подходом к решению является использование термоупругого потенциала перемещений. С его помощью решена задача для полупространства в [11].

Использование в расчетах классических аналитических решений одномерных задач термоупругости вызывает сложности вычислительного характера в случаях, когда характерный линейный размер области существенно превосходит толщину термического слоя. Указанные трудности обусловлены поведением входящих в решения функций пространственной переменной, которые в одних случаях принимают слишком большие значения, а в других случаях — слишком малые. Кроме того, форма решений не позволяет в явном виде проследить за их поведением при неограниченном возрастании характерного линейного размера области R . Однако поведение решений достаточно просто установить, исходя из простых соображений: поскольку при $R \rightarrow \infty$ расчетная область может быть заменена полупространством, то характерные зависимости для колебаний температуры и термоциклических напряжений в термическом слое также можно получить из решения задачи термоупругости для полупространства. Автору известна лишь одна работа [8], в которой указанные соображения доказаны с использованием решения третьей краевой циклической задачи теплопроводности для пластины. Доказательство проведено с помощью замены пространственной переменной и предельного перехода в решении. При этом используемый в [8] подход нельзя признать рациональным, поскольку вычисление предела в классических решениях является довольно трудоемкой процедурой. Чтобы избежать отмеченных сложностей, требуются иные подходы, один из которых рассмотрен в представленной работе на примере решений несвязанных квазистатических циклических задач термоупругости для шести тел простой формы: полупространства, пластины, пространства с цилиндрическим каналом, цилиндра, пространства со сферической полостью, шара. При этом пластина имеет одинаковую с полупространством форму поверхности, что позволяет исследовать влияние размеров тела на термоциклические напряжения. Решение задач для тел правильной формы позволяет изучить влияние вида поверхности в случае двумерной и трехмерной геометрии. Для большей общности результатов решения задачи теплопроводности получены при граничных условиях I, II и III рода.

2. Классические решения задачи термоупругости. Для детального исследования термоупругих процессов в термическом слое необходимо располагать решениями несвязанной квазистатической циклической задачи термоупругости для интересующих нас областей. Поскольку в известной литературе представлены далеко не все решения рассматриваемых здесь задач, а среди имеющихся решений не все доведены до конеч-

Таблица 1

j	0	1	2	3	4	5
m	0	0	1	1	2	2
η	x	x	ρ	ρ	r	r
η_w	0	R	R	R	R	R
\mathcal{D}_η	$(0, \infty)$	$[0, R)$	(R, ∞)	$[0, R)$	(R, ∞)	$[0, R)$
γ	-1	1	-1	1	-1	1
κ'	0	0	$-R^{-1}$	R^{-1}	$-R^{-1}$	R^{-1}
κ''	0	0	0	0	$-R^{-1}$	R^{-1}

ных расчетных формул, ниже с использованием единообразного подхода решения выводятся сразу для всех областей. Для изучения влияния формы поверхности на термоупругие процессы в термическом слое при различных условиях теплообмена задача теплопроводности решается для граничных условий I, II и III рода.

Для удобства поставим в соответствие первой краевой задаче теплопроводности $i = 1$, второй краевой задаче теплопроводности $i = 2$, третьей краевой задаче теплопроводности $i = 3$, полупространству $j = 0$, пластине $j = 1$, пространству с цилиндрическим каналом $j = 2$, цилиндру $j = 3$, пространству со сферической полостью $j = 4$, шару $j = 5$. Свяжем с j номер системы координат $m = [j/2]$ и параметр $\gamma = (-1)^{j+1}$, причем в дальнейшем примем $m/\text{sign } j \equiv 0$ при $j = 0$. Во всех решениях независимыми переменными будут: η – обобщенная пространственная переменная, м; t – время, с. Совокупность значений η во внутренних точках области обозначим \mathcal{D}_η , а значение η на границе области – η_w . Величина η_w связана с номером j зависимостью $\eta_w = R \text{sign } j$, где R – характерный линейный размер области, м. Основные параметры задачи для расчетных областей приведены в таблице 1, где x – декартова координата, м; ρ – полярный радиус, м; r – радиальная координата, м; $\kappa' = \gamma \text{sign } m R^{-1}$, $\kappa'' = \gamma(m - \text{sign } m) R^{-1}$ – главные кривизны поверхности, м^{-1} .

Для упрощения анализа перейдем к безразмерным переменным

$$\hat{\eta} = \eta/h, \quad \hat{\eta}_w = \eta_w/h, \quad \hat{t} = \omega t, \quad \hat{R} = R/h, \quad \hat{\kappa}' = h\kappa', \quad \hat{\kappa}'' = h\kappa'', \quad \text{Bi} = \alpha h/\lambda$$

и безразмерным функциям

$$\Theta = \frac{T - \langle T_w \rangle}{\Delta T_w}, \quad \Theta_w = \frac{T_w - \langle T_w \rangle}{\Delta T_w}, \quad \Delta \epsilon_{\hat{\vartheta}}^* = \beta \Delta T_w, \quad i = 1$$

$$\Theta = \frac{\lambda T}{h \Delta q_w}, \quad \hat{q}_w = \frac{q_w}{\Delta q_w}, \quad \Delta \epsilon_{\hat{\vartheta}}^* = \frac{\beta h \Delta q_w}{\lambda}, \quad i = 2$$

$$\Theta = \frac{T - \langle T_f \rangle}{\Delta T_f}, \quad \Theta_f = \frac{T_f - \langle T_f \rangle}{\Delta T_f}, \quad \Delta \epsilon_{\hat{\vartheta}}^* = \beta \Delta T_f, \quad i = 3$$

$$\hat{\vartheta} = \Theta - \langle \Theta \rangle, \quad \hat{u} = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{u}{h \Delta \epsilon_{\hat{\vartheta}}^*}, \quad \hat{\sigma} = \frac{(1 - \nu) \sigma}{E \Delta \epsilon_{\hat{\vartheta}}^*} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{\eta\eta}, \hat{\sigma}_{\bar{n}\bar{n}}, \hat{\sigma}_{\zeta\zeta}), \quad i = \overline{1,3}$$

Здесь $T = T(\eta, t; i, j)$ – поле температуры твердого тела, К; $u = u(\eta, t; i, j)$ – проекция колебательной составляющей вектора полного перемещения на ось η , м; $\sigma = \sigma(\eta, t; i, j)$ – тензор напряжений, Па; $T_w = T_w(t)$ – температура поверхности тела, К;

$q_w = q_w(t)$ – плотность теплового потока через поверхность тела, Вт/м²; $T_f = T_f(t)$ – температура жидкости, К; $\alpha = \alpha(t) > 0$ – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м² К); $h = \sqrt{a/\omega}$ – характерный линейный масштаб процесса, м; $\omega = 2\pi/\mathcal{T}$ – круговая частота процесса, с⁻¹; \mathcal{T} – период цикла, с; a – коэффициент температуропроводности, м²/с; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м К); E – модуль Юнга, Па; ν – коэффициент Пуассона; β – коэффициент линейного термического расширения, К⁻¹; $\Delta T_w, \Delta T_f$ – размахи колебаний T_w и T_f , К; Δq_w – размах колебаний q_w , Вт/м²; $\langle T_w \rangle, \langle T_f \rangle$ – средние за период значения T_w и T_f , К; $\vartheta = T - \langle T \rangle$ – колебательная составляющая T , К; $\langle T \rangle$ – среднее за период значение T , К; Bi – критерий Био. По условию задачи краевые функции являются ограниченными и периодическими:

$$\begin{aligned} T_w(t + \mathcal{T}) &= T_w(t), & q_w(t + \mathcal{T}) &= q_w(t) \\ T_f(t + \mathcal{T}) &= T_f(t), & \alpha(t + \mathcal{T}) &= \alpha(t), \quad t > -\infty \end{aligned}$$

Кроме того, на размах колебаний q_w накладывается условие

$$\int_0^{\mathcal{T}} q_w dt = 0$$

Поскольку в дальнейшем речь будет идти о безразмерных величинах, для удобства опустим все диакритические знаки, т.е. под обозначением некоторой размерной величины b будем понимать ее безразмерное значение \hat{b} .

После приведения основных уравнений термоупругости [10] к безразмерному виду согласно принятым выше соотношениям запишем безразмерную несвязанную квазистатическую циклическую задачу термоупругости ($t > -\infty$):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{\eta^m} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^m \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right), \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.1)$$

$$\Theta(\eta, t + 2\pi; i, j) = \Theta(\eta, t; i, j), \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.2)$$

$$\Theta(\eta_w, t; 1, j) = \Theta_w, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.3)$$

$$-\gamma \frac{\partial \Theta(\eta_w, t; 2, j)}{\partial \eta} = q_w, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.4)$$

$$-\gamma \frac{\partial \Theta(\eta_w, t; 3, j)}{\partial \eta} = Bi [\Theta(\hat{\eta}_w, t; 3, j) - \Theta_f], \quad j = \overline{0,5} \quad (2.5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\eta^m \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,2,4} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, t; i, j)}{\partial \eta} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3,5} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\eta^m} \frac{\partial (\eta^m u)}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}, \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.8)$$

$$u(\eta, t + 2\pi; i, j) = u(\eta, t; i, j), \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.9)$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial u(\eta_w, t; i, j)}{\partial \eta} + m\nu \frac{u(\eta_w, t; i, j)}{\eta_w} = (1 - \nu) \vartheta(\eta_w, t; i, j), \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.10)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} u = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = 0, 2, 4 \quad (2.11)$$

$$u(0, t; i, j) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 3, 5 \quad (2.12)$$

Условие (2.6) выражает равенство нулю теплового потока через бесконечно удаленную от начала координат координатную поверхность. Условие (2.7) при $j = 1$ выражает симметрию поля температуры относительно $x = 0$, а при $j = 3, 5$ выражает ограниченность температуры при $\eta = 0$.

Используя обобщенный закон Дюамеля–Неймана и соотношения Коши, можно получить зависимости между компонентами тензора напряжений и вектора полного перемещения [10]. Воспользовавшись этими зависимостями для рассматриваемого случая и приведя их к безразмерному виду, получим для компонентов σ выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial \eta} + m\nu \frac{u}{\eta} - (1-\nu) \vartheta \right] \\ \sigma_{\eta\bar{\eta}} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial \eta} + (1-\nu)^{2-m} \operatorname{sign} m \frac{u}{\eta} - (1-\nu) \vartheta \right] \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= \frac{1}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial \eta} + \nu^{2-m} \operatorname{sign} m \frac{u}{\eta} - (1-\nu) \vartheta \right] \end{aligned}$$

Два основных подхода к решению задачи теплопроводности заключаются в использовании конечного преобразования Фурье по переменной времени и интегрального преобразования по пространственной переменной [8, 9]. В первом случае решение будет представлено тригонометрическим рядом Фурье по переменной времени, а во втором – рядом Фурье по пространственной переменной для ограниченных областей и интегралом Фурье для частично ограниченных областей. Оба подхода позволяют решать классические задачи теплопроводности, в которых входящий в граничное условие III рода коэффициент теплоотдачи является постоянным. Однако нестационарность коэффициента теплоотдачи вызывает при решении сложности принципиального характера [12]. Разрешить их для циклической задачи теплопроводности при произвольной периодической зависимости коэффициента теплоотдачи от времени можно только в рамках первого подхода, что было показано ранее [13]. В связи с этим в дальнейшем будет использоваться первый подход.

Приведем основные обозначения, которые будут применяться в дальнейшем, на примере периодической с периодом 2π функции $f = f(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье, записанный в комплексной форме, имеет вид

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{C}_n^f e^{int}, \quad \mathcal{C}_n^f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; \mathbb{Z} – множество целых чисел. Действительная форма ряда Фурье

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n [A_n^f \cos(nt) + B_n^f \sin(nt)],$$

где $\chi_n = (1 + \delta_{0,n})^{-1}$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера,

$$A_n^f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(nt) dt, \quad B_n^f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Обозначим среднее за период значение функции

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f dt$$

размах колебаний функции

$$\Delta f = \max_{0 \leq t < 2\pi} f - \min_{0 \leq t < 2\pi} f$$

Решение краевой задачи (2.1)–(2.7) будем искать в виде

$$\Theta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathcal{C}_n^\Theta e^{int} \quad (2.13)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция вида (2.13) удовлетворяет условию (2.2). Подставив ряд (2.13) в уравнение (2.1) и условия (2.3)–(2.7), получим краевую задачу ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{1}{\eta^m} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^m \frac{d\mathcal{C}_n^\Theta}{d\eta} \right) - in\mathcal{C}_n^\Theta = 0, \quad \eta \in \mathcal{D}_\eta, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{C}_n^\Theta(\eta_w; 1, j) = \mathcal{C}_n^{\Theta_w}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.15)$$

$$-\gamma \frac{d\mathcal{C}_n^\Theta(\eta_w; 2, j)}{d\eta} = \mathcal{C}_n^{a_w}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.16)$$

$$-\gamma \frac{d\mathcal{C}_n^\Theta(\eta_w; 3, j)}{d\eta} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathcal{C}_{n-k}^{\text{Bi}} \mathcal{C}_k^\Theta(\eta_w; 3, j) - \mathcal{C}_n^{\text{Bi}\Theta_f}, \quad j = \overline{0,5} \quad (2.17)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\eta^m \frac{d\mathcal{C}_n^\Theta}{d\eta} \right) = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{0,2,4} \quad (2.18)$$

$$\frac{d\mathcal{C}_n^\Theta(0; i, j)}{d\eta} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3,5} \quad (2.19)$$

Решение задачи (2.14)–(2.19) записывается как

$$\mathcal{C}_n^\Theta = \overline{\mathcal{C}}_n^\Theta (\Phi_n + i \text{sign } n\Psi_n),$$

где $\Phi_n = \Phi_n(\eta; j)$, $\Psi_n = \Psi_n(\eta; j)$, а вид постоянных интегрирования зависит от типа граничных условий. Имеем

$$i = 1: \overline{\mathcal{C}}_n^\Theta = \mathcal{C}_n^{\Theta_w} / (\Phi_n + i \text{sign } n\Psi_n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$i = 2: \overline{\mathcal{C}}_0^\Theta = \langle \hat{\Theta} \rangle, \quad \overline{\mathcal{C}}_n^\Theta = -\gamma \mathcal{C}_n^{a_w} / (\Lambda_n + i \text{sign } n\Omega_n), \quad |n| \in \mathbb{N}$$

При $i = 3$ постоянные интегрирования определяются из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[\gamma(\Lambda_k + i \text{sign } k\Omega_k) \delta_{n,k} + \mathcal{C}_{n-k}^{\text{Bi}} (\Phi_k + i \text{sign } k\Psi_k) \right] \overline{\mathcal{C}}_k^\Theta = \mathcal{C}_n^{\text{Bi}\Theta_f}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

которая может быть решена приближенно методом редукции [14]. В случае $\text{Bi} = \text{const}$ находим

$$i = 3: \overline{\mathcal{C}}_n^\Theta = \mathcal{C}_n^{\Theta_f} \left[(\Phi_n + \gamma\Lambda_n/\text{Bi}) + i \text{sign } n(\Psi_n + \gamma\Omega_n/\text{Bi}) \right]^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Таблица 2

j	ϕ_n	ψ_n
0	$e^{-x\sqrt{ n /2}} \cos(x\sqrt{ n /2})$	$-e^{-x\sqrt{ n /2}} \sin(x\sqrt{ n /2})$
1	$\operatorname{ch}(x\sqrt{ n /2}) \cos(x\sqrt{ n /2})$	$\operatorname{sh}(x\sqrt{ n /2}) \sin(x\sqrt{ n /2})$
2	$\operatorname{ker}(\rho\sqrt{ n })$	$\operatorname{kei}(\rho\sqrt{ n })$
3	$\operatorname{ber}(\rho\sqrt{ n })$	$\operatorname{bei}(\rho\sqrt{ n })$
4	$\frac{e^{-r\sqrt{ n /2}} \cos(r\sqrt{ n /2})}{r\sqrt{ n /2}}$	$\frac{e^{-r\sqrt{ n /2}} \sin(r\sqrt{ n /2})}{r\sqrt{ n /2}}$
5	$\frac{\operatorname{sh}(r\sqrt{ n /2}) \cos(r\sqrt{ n /2})}{r\sqrt{ n /2}}$	$\frac{\operatorname{ch}(r\sqrt{ n /2}) \sin(r\sqrt{ n /2})}{r\sqrt{ n /2}}$

где $\operatorname{ber} \rho$, $\operatorname{bei} \rho$, $\operatorname{ker} \rho$, $\operatorname{kei} \rho$ – функции Кельвина

Здесь \mathbb{N} – множество натуральных чисел;

$$\Phi_n = \phi_n(\eta_w; j), \quad \Psi_n = \psi_n(\eta_w; j), \quad \Lambda_n = \frac{d\phi_n(\eta_w; j)}{d\eta}, \quad \Omega_n = \frac{d\psi_n(\eta_w; j)}{d\eta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\phi_0 = 1, \quad \psi_0 = 0, \quad j = \overline{0, 5}.$$

выражения для функций ϕ_n и ψ_n при $|n| \in \mathbb{N}$ приведены в таблице 2.

Следует заметить, что при $i = 2$ постановка краевой задачи теплопроводности не допускает непосредственного определения величины $\langle \Theta \rangle$, и для ее нахождения необходимо привлекать дополнительные сведения. Поскольку здесь рассматривается безразмерная колебательная составляющая температуры $\vartheta = \Theta - \langle \Theta \rangle$, которая определяется однозначно, в дальнейшем для удобства примем $\langle \Theta \rangle = 0$ при $i = 2$.

От комплексной формы ряда Фурье (2.13) можно перейти к действительной

$$\Theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n [A_n^\Theta \cos(nt) + B_n^\Theta \sin(nt)],$$

где

$$\{A_n^\Theta, B_n^\Theta\} = \{\bar{A}_n^\Theta, \bar{B}_n^\Theta\} \phi_n + \{\bar{B}_n^\Theta, -\bar{A}_n^\Theta\} \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Выражения для коэффициентов \bar{A}_n^Θ и \bar{B}_n^Θ ($\bar{A}_0^\Theta = \bar{B}_0^\Theta = 0$) приведены в таблице 3, причем для третьей краевой задачи решение дано при $\operatorname{Bi} = \operatorname{const}$.

Автором было установлено [15], что в ряде случаев можно получить пригодное для инженерных расчетов приближенное решение третьей краевой задачи теплопроводности с нестационарным коэффициентом теплоотдачи путем специальной замены содержащего его граничного условия. При этом возможны два способа замены. В первом способе нестационарный коэффициент теплоотдачи заменяется эквивалентным стационарным, а во втором способе граничное условие III рода заменяется эквивалентным граничным условием II рода. Таким образом, нестационарность коэффициента теплоотдачи не приводит к возникновению принципиально новых эффектов, которые не могут быть исследованы при помощи классических решений задач теплопроводности.

Таблица 3

i	1	2	3
\bar{A}_n^Θ	$\frac{\Phi_n A_n^{\Theta_w} - \Psi_n B_n^{\Theta_w}}{\Phi_n^2 + \Psi_n^2}$	$-\gamma \frac{\Lambda_n A_n^{q_w} - \Omega_n B_n^{q_w}}{\Lambda_n^2 + \Omega_n^2}$	$\frac{(\Phi_n + \gamma \Lambda_n / \text{Bi}) A_n^{\Theta_f} - (\Psi_n + \gamma \Omega_n / \text{Bi}) B_n^{\Theta_f}}{(\Phi_n + \gamma \Lambda_n / \text{Bi})^2 + (\Psi_n + \gamma \Omega_n / \text{Bi})^2}$

Выражения для коэффициентов \bar{B}_n^Θ получаются из выражений для \bar{A}_n^Θ заменой $\{A_n^g, B_n^g\} \rightarrow \{B_n^g, -A_n^g\}$, $g = (\Theta_w, q_w, \Theta_f)$.

Краевые задачи (2.8)–(2.12) достаточно просто интегрируются. Используя решение (2.8)–(2.12) определим напряжения. Искомые зависимости можно представить в виде

$$h = \mathcal{L}_h(\vartheta) = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4)(\vartheta)$$

Здесь и далее переменная и индекс h принимает значения

$$h = (\sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\bar{n}\bar{n}}, \sigma_{\zeta\zeta}, u)$$

Подставив в них колебания температуры

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n^\Theta \cos(nt) + B_n^\Theta \sin(nt)]$$

найдем коэффициенты рядов Фурье

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n^h \cos(nt) + B_n^h \sin(nt)].$$

Очевидно, что

$$\{A_n^h, B_n^h\} = \{\bar{A}_n^\Theta, \bar{B}_n^\Theta\} \mathcal{L}_h(\Phi_n) + \{\bar{B}_n^\Theta, -\bar{A}_n^\Theta\} \mathcal{L}_h(\Psi_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Здесь \mathcal{L}_h – интегральные операторы вида

$$\begin{aligned} j = 0, 2, 4: \mathcal{L}_h(f) &= -(0, 1, 1, 0) f + \\ &+ \eta^{-(m+1)} \{(-m, \text{sign } m, m - \text{sign } m, \eta) I(f, \eta_w, \eta) + (0, 0, 0, \eta(\text{sign } m - 1)) I(f, \eta_w, \infty)\} \\ j = 1, 3, 5: \mathcal{L}_h(f) &= -(0, 1, 1, 0) f + \\ &+ \eta^{-(m+1)} (-m, \text{sign } m, m - \text{sign } m, \eta) I(f, 0, \eta) + \\ &+ R^{-(m+1)} \left(m, m, 2v^{2-m} \text{sign } m, \eta \frac{m(1-2v)}{1-v+mv} \right) I(f, 0, R), \end{aligned}$$

где $I(f, a, b) = \int_a^b f(\mu) \mu^m d\mu$. Подробные зависимости для рассматриваемых тел приведены в таблице 4, где введены обозначения

$$\begin{aligned} \xi_n &= -I(\Phi_n, \eta, \infty), \quad \upsilon_n = -I(\Psi_n, \eta, \infty), \quad j = 0, 2, 4 \\ \xi_n &= I(\Phi_n, 0, \eta), \quad \upsilon_n = I(\Psi_n, 0, \eta), \quad j = 1, 3, 5 \\ \Xi_n &= \xi_n(\eta_w; j), \quad \Upsilon_n = \upsilon_n(\eta_w; j), \quad j = \overline{0, 5} \end{aligned}$$

и использованы свойства симметрии

$$\mathcal{L}_k(\Psi_n) = \mathcal{L}_k(\Phi_n)|_{\Phi_n \rightarrow \Psi_n, \xi_n \rightarrow \upsilon_n, \Xi_n \rightarrow \Upsilon_n}, \quad k = \overline{1, 4}$$

Таблица 4

j	$\mathcal{L}_1(\phi_n)$	$\mathcal{L}_2(\phi_n)$	$\mathcal{L}_3(\phi_n)$	$\mathcal{L}_4(\phi_n)$
0	0	$-\phi_n$	$-\phi_n$	ξ_n
	$\xi_n = e^{-x\sqrt{n/2}} [\sin(x\sqrt{n/2}) - \cos(x\sqrt{n/2})] / \sqrt{2n}$			
1	0	$-\phi_n$	$-\phi_n$	ξ_n
	$\xi_n = [\operatorname{sh}(x\sqrt{n/2}) \cos(x\sqrt{n/2}) + \operatorname{ch}(x\sqrt{n/2}) \sin(x\sqrt{n/2})] / \sqrt{2n}$			
2	$-\frac{\xi_n - \Xi_n}{\rho^2}$	$\frac{\xi_n - \Xi_n}{\rho^2} - \phi_n$	$-\phi_n$	$\frac{\xi_n - \Xi_n}{\rho}$
	$\xi_n = \rho \operatorname{kei}'(\rho\sqrt{n}) / \sqrt{n}, \nu_n = -\rho \operatorname{ker}'(\rho\sqrt{n}) / \sqrt{n}$			
3	$\frac{\Xi_n - \xi_n}{R^2} - \frac{\xi_n}{\rho^2}$	$\frac{\Xi_n + \xi_n}{R^2} - \phi_n$	$2\nu \frac{\Xi_n}{R^2} - \phi_n$	$(1 - 2\nu)\rho \frac{\Xi_n}{R^2} + \frac{\xi_n}{\rho}$
	$\xi_n = \rho \operatorname{bei}'(\rho\sqrt{n}) / \sqrt{n}, \nu_n = -\rho \operatorname{ber}'(\rho\sqrt{n}) / \sqrt{n}$			
4	$-\frac{2\xi_n - \Xi_n}{r^3}$	$\frac{\xi_n - \Xi_n}{r^3} - \phi_n$	$\frac{\xi_n - \Xi_n}{r^3} - \phi_n$	$\frac{\xi_n - \Xi_n}{r^2}$
	$\xi_n = e^{-r\sqrt{n/2}} \{r\sqrt{n/2} [\sin(r\sqrt{n/2}) - \cos(r\sqrt{n/2})] + \sin(r\sqrt{n/2})\} / \sqrt{n^3/2}$			
5	$2\left(\frac{\Xi_n}{R^3} - \frac{\xi_n}{r^3}\right)$	$2\frac{\Xi_n}{R^3} + \frac{\xi_n}{r^3} - \phi_n$	$2\frac{\Xi_n}{R^3} + \frac{\xi_n}{r^3} - \phi_n$	$\frac{2(1 - 2\nu)}{1 + \nu} \frac{r}{R^3} \Xi_n + \frac{\xi_n}{r^2}$
	$\xi_n = \{r\sqrt{n/2} [\operatorname{ch}(r\sqrt{n/2}) \cos(r\sqrt{n/2}) + \operatorname{sh}(r\sqrt{n/2}) \sin(r\sqrt{n/2})] - \operatorname{ch}(r\sqrt{n/2}) \sin(r\sqrt{n/2})\} / \sqrt{n^3/2}$			

Здесь $n \in \mathbb{N}$ и штрихом обозначена производная функции по аргументу

Выражения для функций ν_n получаются заменой

$$\nu_n = \xi_n |_{\sin \rightarrow \cos, \cos \rightarrow -\sin, \operatorname{sh} \rightarrow -\operatorname{ch}, \operatorname{ch} \rightarrow -\operatorname{sh}}$$

а коэффициентов $\mathcal{L}_h(\Psi_n)$ заменой

$$\mathcal{L}_k(\Psi_n) = \mathcal{L}_k(\phi_n) |_{\phi_n \rightarrow \Psi_n, \xi_n \rightarrow \nu_n, \Xi_n \rightarrow \Upsilon_n}$$

Представленные классические решения циклических задач термоупругости достаточно тяжело поддаются анализу в том виде, в котором они были получены. Тем не менее, они позволяют легко установить следующие результаты ($i = 1, 3$):

$$\sigma_{\bar{n}\bar{n}}(R, t; i, j) = \sigma_{\zeta\zeta}(R, t; i, j) = -\vartheta(R, t), \quad j = 0, 2, 4$$

$$\Delta u(R; i, j) = 0, \quad j = 2, 4; \quad \Delta u(R; i, j) \neq 0, \quad j = 0, 1, 3, 5$$

Использование приведенных зависимостей для дальнейшего изучения процессов в термическом слое вызывает затруднения.

3. Термоупругие процессы в термическом слое. Для задач термоупругости (2.1)–(2.12) можно показать, что при $R \rightarrow \infty$ решения в термическом слое всех областей будут идентичны. Для этого введем величину $s = \gamma(\eta_w - \eta)$, которая представляет собой безразмерное расстояние от поверхности тела до его точки (глубину), и проекцию колебательной составляющей вектора безразмерного полного перемещения на направление внутренней нормали к поверхности тела $v = -\gamma u$. Очевидно, что $s = x$ и $v = u$

при $j = 0$. Заменяем η и u в (2.1)–(2.12) на s и v соответственно. В результате получим краевые задачи ($t > -\infty$):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial s^2} + \frac{m}{s - \gamma \eta_w} \frac{\partial \Theta}{\partial s}, \quad s \in \mathcal{D}_s, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.1)$$

$$\Theta(s, t + 2\pi; i, j) = \Theta(s, t; i, j), \quad s \in \mathcal{D}_s, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.2)$$

$$\Theta(0, t; 1, j) = \Theta_w, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, t; 2, j)}{\partial s} = q_w, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, t; 3, j)}{\partial s} = \text{Bi}[\Theta(0, t; 3, j) - \Theta_f], \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.5)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\left(\text{sign } j + \frac{s}{R} \right)^m \frac{\partial \Theta}{\partial s} \right] = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = 0, 2, 4 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Theta(R, t; i, j)}{\partial s} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 3, 5 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{m}{s - \gamma \eta_w} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{mv}{(s - \gamma \eta_w)^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s}, \quad s \in \mathcal{D}_s, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.8)$$

$$v(s, t + 2\pi; i, j) = v(s, t; i, j), \quad s \in \mathcal{D}_s, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.9)$$

$$(1 - v) \frac{\partial v(0, t; i, j)}{\partial s} - \gamma m v \frac{v(0, t; i, j)}{\eta_w} = (1 - v) \vartheta(0, t; i, j), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 5} \quad (3.10)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = 0, 2, 4 \quad (3.11)$$

$$v(R, t; i, j) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 3, 5 \quad (3.12)$$

Компоненты тензора безразмерных напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_{ss}, \sigma_{\bar{n}\bar{n}}, \sigma_{\zeta\zeta})$$

будут определяться зависимостями

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{1 - 2v} \left[(1 - v) \frac{\partial v}{\partial s} + mv \frac{v}{s - \gamma \eta_w} - (1 - v) \vartheta \right] \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\bar{n}\bar{n}} = \frac{1}{1 - 2v} \left[v \frac{\partial v}{\partial s} + (1 - v)^{2-m} \text{sign } m \frac{v}{s - \gamma \eta_w} - (1 - v) \vartheta \right] \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\zeta\zeta} = \frac{1}{1 - 2v} \left[v \frac{\partial v}{\partial s} + v^{2-m} \text{sign } m \frac{v}{s - \gamma \eta_w} - (1 - v) \vartheta \right] \quad (3.15)$$

Здесь $\Theta = \Theta(s, t; i, j)$, $v = v(s, t; i, j)$, $\vartheta = \vartheta(s, t; i, j)$, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(s, t; i, j)$, причем $\sigma_{ss} = \sigma_{\eta\eta}$. Полагая все функции и их производные в уравнениях (3.1)–(3.15) ограниченными, выполним в них предельный переход при $R \rightarrow \infty$, в результате получим краевые задачи термоупругости и формулы для расчета напряжений, отвечающие полупространству. Поэтому можно ожидать, что с увеличением R решения циклических задач термоупругости для $j = \overline{1, 5}$ будут стремиться к соответствующим решениям для $j = 0$.

Полученный вывод противоречит ранее установленным результатам, согласно которым ($i = \overline{1,3}$)

$$\Delta v(0; i, j) = 0, \quad j = 2, 4; \quad \Delta v(0; i, j) \neq 0, \quad j = 0, 1, 3, 5$$

Причина противоречия может быть установлена при помощи анализа решений крайних задач.

Использование решений задач термоупругости в пределах термического слоя при $j = \overline{1,5}$ вызывает сложности вычислительного характера, обусловленные поведением $\phi_n(R; j)$ и $\psi_n(R; j)$ при больших значениях R : $\phi_n(R; j)$ и $\psi_n(R; j)$ являются неограниченными при $R \rightarrow \infty$ для $j = 1, 3, 5$; $\phi_n(R; j)$ и $\psi_n(R; j)$ являются бесконечно малыми при $R \rightarrow \infty$ для $j = 2, 4$. Чтобы избежать указанных затруднений, следует преобразовать полученные решения таким образом, чтобы вместо $\phi_n(R; j)$ и $\psi_n(R; j)$ в них входили функции, принимающие конечные значения при $R \rightarrow \infty$. При этом преобразованные решения должны быть представлены в таком виде, который позволит явным образом установить их поведение при $R \gg 1$.

Преобразованные решения задачи теплопроводности, которые удовлетворяют указанным выше требованиям, были получены за счет приведения коэффициентов действительной формы ряда Фурье (2.25) $A_n^\ominus = A_n^\ominus(s; R, i, j)$, $B_n^\ominus = B_n^\ominus(s; R, i, j)$ к виду

$$\{A_n^\ominus, B_n^\ominus\} = \{\tilde{A}_n^\ominus, \tilde{B}_n^\ominus\} \tilde{\Phi}_n + \{\tilde{B}_n^\ominus, -\tilde{A}_n^\ominus\} \tilde{\Psi}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad j = \overline{1,5},$$

где функции $\tilde{\Phi}_n = \tilde{\Phi}_n(s; R, j)$ и $\tilde{\Psi}_n = \tilde{\Psi}_n(s; R, j)$ имеют следующий вид ($n \in \mathbb{N}$, $R \gg 1$):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0 &= 1, \quad \tilde{\Psi}_0 = 0, \quad j = \overline{1,5} \\ j = 1: \tilde{\Phi}_n &= e^{-s\sqrt{n/2}} \cos(s\sqrt{n/2}) + e^{-2R\sqrt{n/2}+s\sqrt{n/2}} \cos(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2}) \\ j = 2: \tilde{\Phi}_n &= \frac{e^{-s\sqrt{n/2}-\bar{\tau}_n} \cos(s\sqrt{n/2} - \bar{\tau}_n)}{\sqrt{1+s/R}} \\ j = 3: \tilde{\Phi}_n &= \frac{e^{-s\sqrt{n/2}+\tau_n} \cos(s\sqrt{n/2} + \tau_n)}{\sqrt{1-s/R}} \\ j = 4: \tilde{\Phi}_n &= \frac{e^{-s\sqrt{n/2}} \cos(s\sqrt{n/2})}{1+s/R} \\ j = 5: \tilde{\Phi}_n &= \frac{e^{-s\sqrt{n/2}} \cos(s\sqrt{n/2}) - e^{-2R\sqrt{n/2}+s\sqrt{n/2}} \cos(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2})}{1-s/R} \end{aligned}$$

Выражения для функций $\tilde{\Psi}_n$ получаются заменой $\tilde{\Psi}_n = -\tilde{\Phi}_n|_{\cos \rightarrow \sin}$. Постоянные интегрирования \tilde{A}_n^\ominus и \tilde{B}_n^\ominus для $i = 1, 2$ и $i = 3$ при $\text{Bi} = \text{const}$ выражены соотношениями, приведенными в таблице 3, где должны быть сделаны замены $(\Phi_n, \Psi_n, \Lambda_n, \Omega_n) \rightarrow (\tilde{\Phi}_n, \tilde{\Psi}_n, \tilde{\Lambda}_n, \tilde{\Omega}_n)$. В общем случае $\text{Bi} \neq \text{const}$ постоянные интегрирования находятся из решения бесконечной системы уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left[-\tilde{\Lambda}_k \delta_{n,k} + \chi'_k (A_{k+n}^{\text{Bi}} + A_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Phi}_k - \chi'_k (B_{k+n}^{\text{Bi}} + B_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Psi}_k \right] \tilde{A}_k^\ominus + \right. \\ &\left. + \left[-\tilde{\Omega}_k \delta_{n,k} + \chi'_k (B_{k+n}^{\text{Bi}} + B_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Phi}_k + \chi'_k (A_{k+n}^{\text{Bi}} + A_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Psi}_k \right] \tilde{B}_k^\ominus \right] = A_n^{\text{Bi}\ominus f}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_0^\Theta = 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \left[\tilde{\Omega}_k \delta_{n,k} + \chi'_k (B_{k+n}^{\text{Bi}} - B_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Phi}_k + \chi'_k (A_{k+n}^{\text{Bi}} - A_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Psi}_k \right] \tilde{A}_k^\Theta + \right. \\ \left. + \left[-\tilde{\Lambda}_k \delta_{n,k} - \chi'_k (A_{k+n}^{\text{Bi}} - A_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Phi}_k + \chi'_k (B_{k+n}^{\text{Bi}} - B_{k-n}^{\text{Bi}}) \tilde{\Psi}_k \right] \tilde{B}_k^\Theta \right\} = B_n^{\text{Bi}\Theta_f}, \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad i = 3; \quad \chi'_k = \chi_k/2$$

$$\tilde{\Phi}_n = \tilde{\phi}_n(0; R, j), \quad \tilde{\Psi}_n = \tilde{\psi}_n(0; R, j), \quad \tilde{\Lambda}_n = \frac{d\tilde{\phi}_n(0; R, j)}{ds}, \quad \tilde{\Omega}_n = \frac{d\tilde{\psi}_n(0; R, j)}{ds}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Здесь

$$\mathfrak{v}_n = \frac{1}{16|\mathcal{R}_n|} \left(1 - \frac{25}{96\mathcal{R}_n^2} - \frac{13}{32\mathcal{R}_n^3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^5}\right)$$

$$\mathfrak{\tau}_n = \frac{1}{16|\mathcal{R}_n|} \left(1 - \frac{1}{2\mathcal{R}_n} + \frac{25}{96\mathcal{R}_n^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^5}\right)$$

$$\bar{\mathfrak{v}}_n = \mathfrak{v}_n|_{\mathcal{R}_n(s) \rightarrow -\mathcal{R}_n(-s)}, \quad \bar{\mathfrak{\tau}}_n = \mathfrak{\tau}_n|_{\mathcal{R}_n(s) \rightarrow -\mathcal{R}_n(-s)}, \quad \mathcal{R}_n = R\sqrt{n/2}(1 - s/R),$$

$\mathcal{O}(x)$ – величина одного порядка малости с x при $x \rightarrow 0$. Для преобразования функций Кельвина использовались асимптотические зависимости при $\rho \gg 1$ [16]. Выражения для $\tilde{\phi}_n$ и $\tilde{\psi}_n$ при $j = 2, 3$ верны, когда $s/R \ll 1$.

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего, отметим, что из них в явном виде следуют соотношения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Theta(s, t; i, j) = \Theta(s, t; i, 0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 5},$$

существование которых было доказано ранее с помощью предельного перехода в задаче теплопроводности. Далее рассмотрим решение для пластины, которое позволяет изучить влияние размеров тела на колебания температуры. Помимо очевидного результата – образования термического слоя при $R \gg 1$ – оно также показывает, что

$$\Theta(s, t; i, 1) \approx \Theta(s, t; i, 0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad R \geq 3, \quad s/R \ll 1$$

Таким образом, колебания температуры вблизи поверхности слабо зависят от условий теплообмена на удаленной от нее границе области при $R \geq 3$. Данный вывод имеет важное практическое значение, поскольку он позволяет исключить из рассмотрения границу области произвольной формы, удаленную от рассматриваемой точки поверхности, даже в тех случаях, когда термический слой не образуется, и колебания температуры проникают на всю толщину детали $2R$, лишь бы было выполнено условие $R \geq 3$. В таких случаях на колебания температуры вблизи поверхности влияет только ее форма и заданные краевые условия теплообмена, что позволяет использовать модели тел простой формы. Из найденных соотношений также можно получить простые асимптотические зависимости при $R \gg 1$, $s/R \ll 1$

$$\{\tilde{\Phi}_n, \tilde{\Psi}_n\} \approx (1 + \kappa s) e^{-s\sqrt{n/2}} \{\cos(s\sqrt{n/2}), -\sin(s\sqrt{n/2})\}$$

$$\tilde{\Phi}_n \approx 1, \quad \tilde{\Psi}_n \approx 0, \quad \tilde{\Lambda}_n \approx -\sqrt{n/2} + \kappa, \quad \tilde{\Omega}_n \approx -\sqrt{n/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 5}$$

В них входит безразмерная средняя кривизна поверхности

$$\kappa = (\kappa' + \kappa'')/2 = \gamma m/(2R),$$

которая является единственным параметром, зависящим от формы тела. Отсюда следует, что в термическом слое тел, ограниченных изнутри или снаружи цилиндриче-

ской поверхностью радиуса R и сферической поверхностью радиуса $2R$, колебания температуры будут близки. Хотя термический слой образуется при $R \gg 1$, асимптотические зависимости можно применять в приближенных вычислениях для $s/R \ll 1$ уже при $R \geq 3$. Установленный результат имеет большое практическое значение, поскольку наибольшие колебания температуры, представляющие основной интерес, имеют место на поверхности тела.

Коэффициенты тригонометрических рядов Фурье функций σ_{ss} , $\sigma_{\bar{n}\bar{n}}$, $\sigma_{\zeta\zeta}$, v были приведены к виду

$$\{A_n^h, B_n^h\} = \{\tilde{A}_n^\ominus, \tilde{B}_n^\ominus\} \tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Phi}_n) + \{\tilde{B}_n^\ominus, -\tilde{A}_n^\ominus\} \tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Psi}_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Здесь $h = (\sigma_{ss}, \sigma_{\bar{n}\bar{n}}, \sigma_{\zeta\zeta}, v)$, причем $\tilde{\mathcal{L}}_{\sigma_{ss}} = \tilde{\mathcal{L}}_{\sigma_{\eta\eta}}$; $\tilde{\mathcal{L}}_v = -\gamma \tilde{\mathcal{L}}_u$; $\tilde{\mathcal{L}}_u$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\sigma_{\eta\eta}}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\sigma_{\bar{n}\bar{n}}}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\sigma_{\zeta\zeta}}$ — операторы, полученные из \mathcal{L}_u , $\mathcal{L}_{\sigma_{\eta\eta}}$, $\mathcal{L}_{\sigma_{\bar{n}\bar{n}}}$, $\mathcal{L}_{\sigma_{\zeta\zeta}}$ после замены в них переменной η на s . Для рассматриваемых тел данные зависимости сведены в таблицу 5. Из анализа зависимостей для напряжений следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_{ss}(s, t; i, j) = \sigma_{ss}(s, t; i, 0), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{n}\bar{n}}(s, t; i, j) = \sigma_{\bar{n}\bar{n}}(s, t; i, 0)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_{\zeta\zeta}(s, t; i, j) = \sigma_{\zeta\zeta}(s, t; i, 0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 5}$$

Найденные соотношения подтверждают результаты, полученные ранее с помощью предельного перехода в задаче термоупругости и зависимостях для напряжений. Формулы для напряжений в пластине показывают, что

$$\sigma_{ss}(s, t; i, 1) = \sigma_{ss}(s, t; i, 0) \equiv 0; \quad \sigma_{\bar{n}\bar{n}}(s, t; i, 1) \approx \sigma_{\bar{n}\bar{n}}(s, t; i, 0)$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}(s, t; i, 1) \approx \sigma_{\zeta\zeta}(s, t; i, 0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad R \geq 3, \quad s/R \ll 1$$

Эти соотношения позволяют распространить на термоциклические напряжения ранее сделанный вывод о влиянии границы области, достаточно удаленной от рассматриваемой точки поверхности тела, на колебания температуры вблизи нее.

Предельный переход в зависимостях для колебаний перемещения подтверждает ранее полученный парадоксальный результат:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} v(s, t; i, 1) = v(s, t; i, 0), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} v(s, t; i, j) \neq v(s, t; i, 0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{2, 5}$$

Интересно отметить, что предел функции v при $R \rightarrow \infty$ ($i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{2, 5}$) содержит два слагаемых, первое из которых не зависит от s и не может вызывать напряжений, а второе представляет собой перемещение $v(s, t; i, 0)$. Чтобы объяснить полученный парадокс, необходимо вспомнить, что граничные условия в любой краевой задаче, вообще говоря, носят предельный характер. Решим задачу термоупругости для v в областях $j = \overline{2, 5}$, но вместо (3.11), (3.12) используем граничное условие

$$v(s_*, t; i, j) = 0, \quad t > -\infty, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{2, 5}$$

Отсюда при $s_* \rightarrow \infty$ получим (3.11), а при $s_* \rightarrow R$ получим (3.12). В таком случае для $j = \overline{2, 5}$ будем иметь

$$v = (1 - \gamma s/R)^{-m} \int_0^s \vartheta(\mu, t; i, j) (1 - \gamma \mu/R)^m d\mu -$$

$$\frac{m(1 - 2v)(1 - \gamma s/R) + (1 - v + mv)(1 - \gamma s/R)^{-m} s_*}{m(1 - 2v)(1 - \gamma s_*/R)^{m+1} + 1 - v + mv} \int_0^{s_*} \vartheta(\mu, t; i, j) (1 - \gamma \mu/R)^m d\mu$$

Таблица 5

j	$\tilde{\mathcal{L}}_1(\tilde{\Phi}_n)$	$\tilde{\mathcal{L}}_2(\tilde{\Phi}_n)$	$\tilde{\mathcal{L}}_3(\tilde{\Phi}_n)$	$\tilde{\mathcal{L}}_4(\tilde{\Phi}_n)$
	0	$-\tilde{\Phi}_n$	$-\tilde{\Phi}_n$	$-\tilde{\xi}_n$
1	$\xi_n = -\frac{1}{\sqrt{2n}} \left\{ e^{-s\sqrt{n/2}} [\sin(s\sqrt{n/2}) - \cos(s\sqrt{n/2})] - e^{-2R\sqrt{n/2}+s\sqrt{n/2}} [\sin(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2}) - \cos(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2})] \right\}$			
2	$-\frac{\xi_n - \tilde{\xi}_n}{R^2(1+s/R)^2}$	$\frac{\xi_n - \tilde{\xi}_n}{R^2(1+s/R)^2} - \tilde{\Phi}_n$	$-\tilde{\Phi}_n$	$\frac{\xi_n - \tilde{\xi}_n}{R(1+s/R)}$
2	$\xi_n = \frac{R(1+s/R)^{1/2} e^{-s\sqrt{n/2}-\bar{\tau}_n}}{\sqrt{2n}} \left\{ \left(1 + \bar{\tau}_n/\sqrt{n/2}\right) \sin(s\sqrt{n/2} - \bar{\tau}_n) - \left(1 - \bar{\tau}_n/\sqrt{n/2}\right) \cos(s\sqrt{n/2} - \bar{\tau}_n) + \sin(s\sqrt{n/2} - \bar{\tau}_n) / [R\sqrt{2n}(1+s/R)] \right\}$			
3	$\frac{\tilde{\xi}_n}{R^2} - \frac{\xi_n/R^2}{(1-s/R)^2}$	$\frac{\tilde{\xi}_n}{R^2} + \frac{\xi_n/R^2}{(1-s/R)^2} - \tilde{\Phi}_n$	$2\nu \frac{\tilde{\xi}_n}{R^2} - \tilde{\Phi}_n$	$-(1-2\nu) \frac{1-s/R}{R} \tilde{\xi}_n - \frac{\xi_n/R}{1-s/R}$
3	$\xi_n = -\frac{R(1-s/R)^{1/2} e^{-s\sqrt{n/2}+\tau_n}}{\sqrt{2n}} \left\{ \left(1 - \tau_n/\sqrt{n/2}\right) \sin(s\sqrt{n/2} + \tau_n) - \left(1 + \tau_n/\sqrt{n/2}\right) \cos(s\sqrt{n/2} + \tau_n) - \sin(s\sqrt{n/2} + \tau_n) / [R\sqrt{2n}(1-s/R)] \right\}$			
4	$-\frac{2(\xi_n - \tilde{\xi}_n)}{R^3(1+s/R)^3}$	$\frac{\xi_n - \tilde{\xi}_n}{R^3(1+s/R)^3} - \tilde{\Phi}_n$	$\frac{\xi_n - \tilde{\xi}_n}{R^3(1+s/R)^3} - \tilde{\Phi}_n$	$\frac{\xi_n - \tilde{\xi}_n}{R^2(1+s/R)^2}$
4	$\xi_n = \frac{R^2(1+s/R)}{\sqrt{2n}} e^{-s\sqrt{n/2}} [\sin(s\sqrt{n/2}) - \cos(s\sqrt{n/2})] + \frac{R}{n} e^{-s\sqrt{n/2}} \sin(s\sqrt{n/2})$			
5	$\frac{2\tilde{\xi}_n}{R^3} - \frac{2\xi_n/R^3}{(1-s/R)^3}$	$\frac{2\tilde{\xi}_n}{R^3} + \frac{\xi_n/R^3}{(1-s/R)^3} - \tilde{\Phi}_n$	$\frac{2\tilde{\xi}_n}{R^3} + \frac{\xi_n/R^3}{(1-s/R)^3} - \tilde{\Phi}_n$	$\frac{2(1-2\nu)1-s/R}{1+\nu} \frac{\tilde{\xi}_n}{R^2} - \frac{\xi_n/R^2}{(1-s/R)^2}$
5	$\xi_n = -\frac{R^2(1-s/R)}{\sqrt{2n}} \left\{ e^{-s\sqrt{n/2}} [\sin(s\sqrt{n/2}) - \cos(s\sqrt{n/2})] + e^{-2R\sqrt{n/2}+s\sqrt{n/2}} [\sin(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2}) - \cos(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2})] \right\} + \frac{R}{n} \left[e^{-s\sqrt{n/2}} \sin(s\sqrt{n/2}) - e^{-2R\sqrt{n/2}+s\sqrt{n/2}} \sin(2R\sqrt{n/2} - s\sqrt{n/2}) \right]$			

Здесь $\tilde{\xi}_n = \xi_n(0; R, j)$, $\tilde{\Upsilon}_n = \Upsilon_n(0; R, j)$, $n \in \mathbb{N}$ и штрихом обозначена производная функции по аргументу. Выражения для функций $\tilde{\Upsilon}_n$ получаются заменой

$$\tilde{\Upsilon}_n = \xi_n \Big|_{\sin \rightarrow \cos, \cos \rightarrow -\sin}$$

а коэффициентов $\tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Psi}_n)$ заменой

$$\tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Psi}_n) = \tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Phi}_n) \Big|_{\tilde{\Phi}_n \rightarrow \tilde{\Psi}_n, \xi_n \rightarrow \tilde{\Upsilon}_n, \tilde{\xi}_n \rightarrow \tilde{\Upsilon}_n}$$

Из полученного выражения следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{s_* \rightarrow \infty} v \neq \lim_{s_* \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} v, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = 2,4$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{s_* \rightarrow R} v \neq \lim_{s_* \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} v, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = 3,5$$

Таким образом оказывается, что предельный переход в задаче термоупругости в перемещениях, вообще говоря, недопустим, и колебания нормального перемещения принципиальным образом зависят от формы поверхности тела и кинематических условий. В то же время, если бы задача термоупругости решалась в напряжениях, то в ней можно было бы выполнить предельный переход, что было показано ранее с помощью зависимостей для напряжений. Различное поведение решений задачи термоупругости для перемещения и напряжений при $R \rightarrow \infty$ связано с тем, что перемещения не определяются полностью напряжениями [17].

Из формул для термоциклических напряжений и колебаний перемещения можно установить асимптотические зависимости при $R \gg 1, s/R \ll 1 (n \in \mathbb{N})$

$$j = \overline{1,5}:$$

$$\xi_n \approx -\gamma R^m e^{-s\sqrt{n/2}} \left\{ \frac{1-\kappa s}{\sqrt{2n}} [\sin(s\sqrt{n/2}) - \cos(s\sqrt{n/2})] - \frac{\kappa}{n} \sin(s\sqrt{n/2}) \right\}$$

$$j = 1,3,5:$$

$$(\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2, \tilde{\mathcal{L}}_3)(\tilde{\Phi}_n) \approx R^{-(m+1)} \left\{ (m, m, 2\nu^{2-m} \text{sign } m) \tilde{\Xi}_n + \right.$$

$$\left. + (-m, \text{sign } m, m - \text{sign } m) [1 + (m+1)s/R] \tilde{\xi}_n \right\} - (0, 1, 1) \tilde{\Phi}_n$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_v(\tilde{\Phi}_n) \approx -R^{-m} (1 + ms/R) \left\{ \frac{m(1-2\nu)}{1-\nu+mv} [1 - (m+1)s/R] \tilde{\Xi}_n + \tilde{\xi}_n \right\}$$

$$j = 2,4:$$

$$(\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2, \tilde{\mathcal{L}}_3)(\tilde{\Phi}_n) \approx (-m, 1, m) R^{-(m+1)} [1 - (m+1)s/R] (\tilde{\xi}_n - \tilde{\Xi}_n) - (0, 1, 1) \tilde{\Phi}_n$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_v(\tilde{\Phi}_n) \approx R^{-m} (1 - ms/R) (\tilde{\xi}_n - \tilde{\Xi}_n)$$

Выражения для функций \tilde{v}_n получаются заменой $\tilde{v}_n = \xi_n|_{\sin \rightarrow \cos, \cos \rightarrow -\sin}$, а коэффициентов $\tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Psi}_n)$ заменой $\tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Psi}_n) = \tilde{\mathcal{L}}_h(\tilde{\Phi}_n)|_{\tilde{\Phi}_n \rightarrow \tilde{\Psi}_n, \tilde{\xi}_n \rightarrow \tilde{v}_n}$. Анализируя полученные формулы, можно заключить, что в них параметры, зависящие от величин j и R , которые однозначно определяют форму тела, не могут быть объединены в один комплекс, как это было в случае колебаний температуры. Таким образом, условия равенства параметра κ недостаточно, чтобы напряжения и перемещения в термическом слое двух тел с различной формой поверхности при прочих равных условиях были приближенно равны. Необходимым условием для этого является равенство главных кривизн поверхности, т.е. одинаковая форма тела. В то же время легко заметить, что в частично ограниченных областях основное влияние на термоциклические напряжения вблизи поверхности оказывает ее средняя кривизна, поскольку

$$\sigma_{ss}(0, t; i, j) = 0, \quad \sigma_{\bar{n}\bar{n}}(0, t; i, j) = \sigma_{\zeta\zeta}(0, t; i, j) = -\vartheta(0, t; i, j), \quad i = \overline{1,3}, \quad j = 0, 2, 4$$

4. Примеры. Для иллюстрации полученных результатов были проведены расчеты с использованием установленных зависимостей при простейших краевых функциях

$$\Theta_w = \frac{1}{2} \cos t, \quad q_w = \frac{1}{2} \cos t, \quad \Theta_f = \frac{1}{2} \cos t, \quad \text{Bi} = 1$$

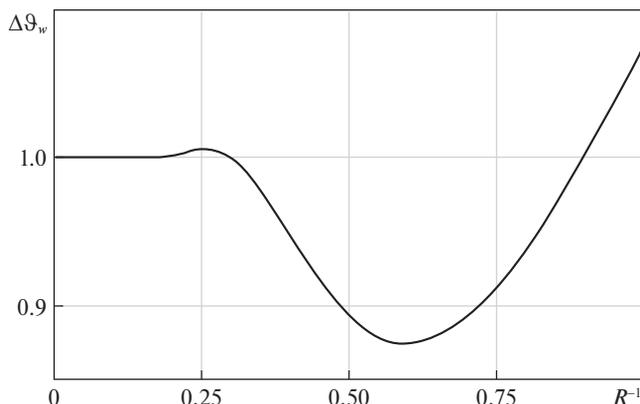


Рис. 1. Зависимость $\Delta\vartheta_w$ от R для пластины при $i = 2$.

Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ соответствовал стали. Во всех рассматриваемых случаях $\vartheta \equiv \Theta$. В прочностных расчетах компонентам тензора напряжений принято ставить в соответствие некоторое эквивалентное напряжение, характеризующее прочность тела. Для оценки выносливости используют эквивалентный размах колебаний напряжений [18]

$$\Delta\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Delta\sigma_{ss} - \Delta\sigma_{\bar{n}\bar{n}})^2 + (\Delta\sigma_{\bar{n}\bar{n}} - \Delta\sigma_{\zeta\zeta})^2 + (\Delta\sigma_{\zeta\zeta} - \Delta\sigma_{ss})^2}$$

Наибольшие колебания температуры и термоциклические напряжения возникают на поверхности тела, поэтому они представляют основной интерес для изучения. Полагая $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta(s; i, j)$ и $\Delta\sigma_e = \Delta\sigma_e(s; i, j)$, обозначим $\Delta\vartheta_w = \Delta\vartheta(0; i, j)$, $\Delta\sigma_{e,w} = \Delta\sigma_e(0; i, j)$.

Влияние размеров тела на колебания температуры наглядно иллюстрирует рис. 1, на котором показана зависимость $\Delta\vartheta$ на поверхности пластины от величины R при $i = 2$. Из нее следует, что $\Delta\vartheta_w$ при $R \geq 3$ отличается от $\Delta\vartheta$ на поверхности полупространства не более чем на 1.3%, хотя при $R = 3$ колебания температуры проникают на всю глубину пластины. Достаточно показательным является рис. 2, на котором приведены зависимости $\Delta\vartheta(s)$ для полупространства и пластины при $R = 3$. Сравнение двух зависимостей показывает, что для достаточно больших глубин $s \leq 2$ наибольшая разница между результатами составляет 7.1%, что вполне приемлемо для инженерных расчетов.

На рис. 3–8 приведено сравнение асимптотических зависимостей с точными решениями для тел, ограниченных цилиндрическими и сферическими поверхностями, при $i = \bar{1}, \bar{3}$. Для сравнения использовались зависимости $\Delta\vartheta_w$ и $\Delta\sigma_{e,w}$ от κ' , причем для $i = 1$ в связи с тривиальностью результата вместо $\Delta\vartheta_w$ рассчитывалась производная $(d\Delta\vartheta/ds)_w = d\Delta\vartheta(0; i, j)/ds$, которая характеризует интенсивность затухания колебаний температуры с увеличением глубины. Из представленных результатов следует, что асимптотические зависимости обеспечивают приемлемую для инженерных расчетов точность при $-1 \leq \kappa' \leq 0.4$. Наибольшие отклонения от точных результатов асимптотические зависимости дают при $\kappa' = 0.4$: отклонение от $\Delta\vartheta_w$ составляет -5.2% при $i = 2, j = 5$; отклонение от $\Delta\sigma_{e,w}$ составляет 12.6% при $i = 1, j = 5$. При $-1 \leq \kappa' \leq 0.3$ абсолютные отклонения от точных результатов не превышают 5%. Указанный диапа-

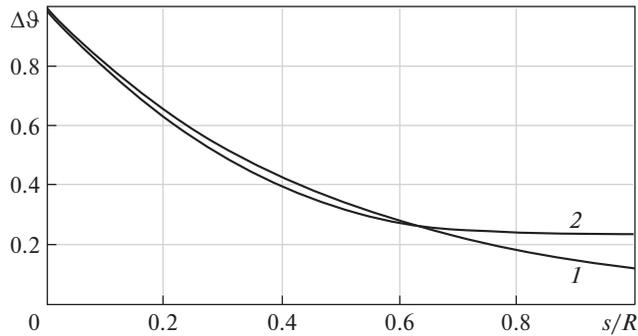


Рис. 2. Зависимость $\Delta\vartheta$ от s при $R = 3, i = 2$: 1 – полупространство; 2 – пластина.

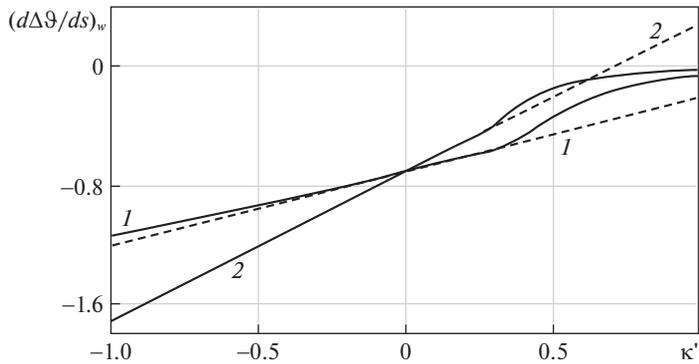


Рис. 3. Зависимости $(d\Delta\vartheta/ds)_w$ от κ' при $i = 1$ для тел, ограниченных цилиндрическими (1) и сферическими (2) поверхностями: сплошные линии – точные решения, штриховые линии – асимптотические зависимости.

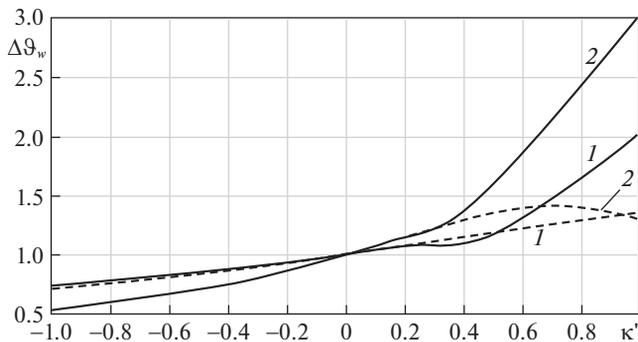


Рис. 4. Зависимости $\Delta\vartheta_w$ от κ' при $i = 2$ для тел, ограниченных цилиндрическими (1) и сферическими (2) поверхностями: сплошные линии – точные решения, штриховые линии – асимптотические зависимости.

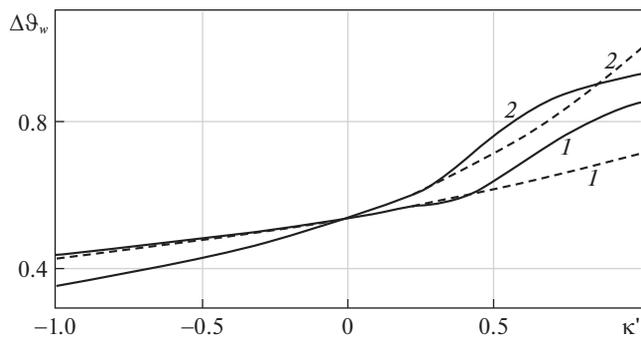


Рис. 5. Зависимости $\Delta\theta_w$ от κ' при $i = 3$ для тел, ограниченных цилиндрическими (1) и сферическими (2) поверхностями: сплошные линии – точные решения, штриховые линии – асимптотические зависимости.

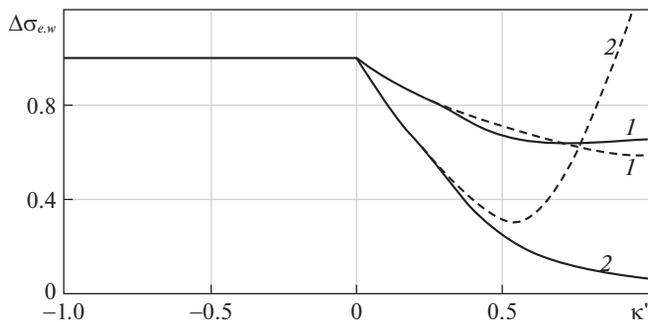


Рис. 6. Зависимости $\Delta\sigma_{e,w}$ от κ' при $i = 1$ для тел, ограниченных цилиндрическими (1) и сферическими (2) поверхностями: сплошные линии – точные решения, штриховые линии – асимптотические зависимости

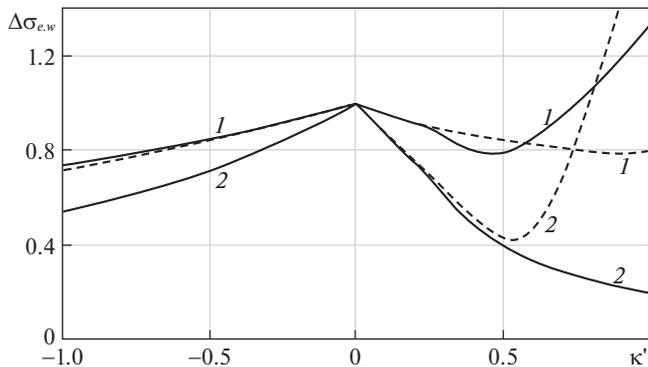


Рис. 7. Зависимости $\Delta\sigma_{e,w}$ от κ' при $i = 2$ для тел, ограниченных цилиндрическими (1) и сферическими (2) поверхностями: сплошные линии – точные решения, штриховые линии – асимптотические зависимости.

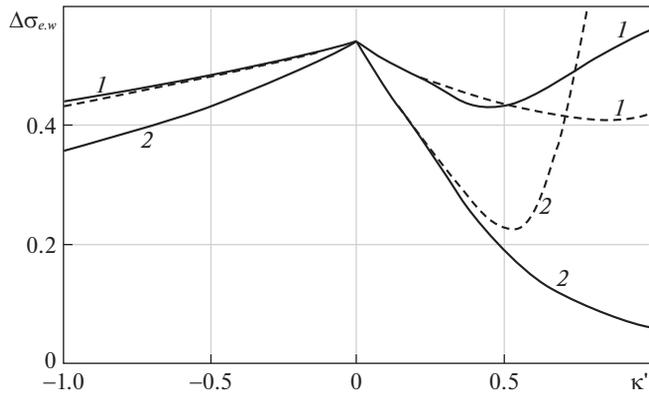


Рис. 8. Зависимости $\Delta\sigma_{e,w}$ от κ' при $i = 3$ для тел, ограниченных цилиндрическими (1) и сферическими (2) поверхностями: сплошные линии – точные решения, штриховые линии – асимптотические зависимости.

зон изменения κ' охватывает достаточно широкий круг практически важных случаев, поэтому полученные асимптотические зависимости можно рекомендовать для приближенных вычислений.

Заключение. В ходе проведенного исследования рассмотрены несвязанные квазистатические циклические задачи термоупругости для тел простой формы. Получены классические решения указанных задач, которые приведены к форме, удобной для расчетов при больших безразмерных радиусах граничных поверхностей. С помощью найденных решений установлены асимптотические зависимости, упрощающие проведение инженерных расчетов при больших безразмерных радиусах граничных поверхностей. Показано, что при определенных условиях найденные зависимости обеспечивают приемлемую точность расчетов вблизи поверхности, даже когда колебания температуры проникают на всю глубину тела. Исследовано влияние формы тела на колебания температуры и термоциклические напряжения. Показано, что влияние формы тела на колебания температуры и вызванные ими термоциклические напряжения принципиальным образом различается: если основным параметром формы тела, влияющим на колебания температуры в термическом слое, является средняя кривизна поверхности, то на термоциклические напряжения существенным образом влияют обе главные кривизны.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00090.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhu D., Miller R.A. Influence of high cycle thermal loads on thermal fatigue behavior of thick thermal barrier coatings // NASA Technical Paper TP-3676. Army Res. Lab. Techn. Rep. ARL-TR-1341, 1997. 51 p.
2. Wang Y., Charbal A., Hild F. et al. High cycle thermal fatigue of austenitic stainless steel // MATEC Web of Conferences. 2018. V. 165. № 19009. 6 p.
3. Wang L., Zhou X., Wei X. Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions. Berlin: Springer, 2008. 515 p.
4. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
5. Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by Hetnarski R.B. Dordrecht: Springer, 2014. 6643 p.

6. *Chattopadhyay S.* High cycle thermal fatigue crack growth in a semi-infinite plate // *J. Therm. Stresses*. 2009. V. 32. № 8. P. 839–846.
7. *Kasahara N., Itoh T., Okazaki M. et al.* Development of thermal fatigue evaluation methods of piping systems // *E-J. Advanced Maintenance*. 2014. V. 6. № 1. P. 14–23.
8. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
9. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
10. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Либроком, 2012. 656 с.
11. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
12. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
13. *Минасян Р.С.* Об одной периодической задаче теплопроводности в полом бесконечном цилиндре // *ИФЖ*. 1969. Т. 17. № 5. С. 880–891.
14. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматлит, 1962. 708 с.
15. *Supel'nyak M.I.* Calculation of temperature oscillations in thermal layer of regular solids at unsteady coefficient of heat transfer // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1382. № 012149. 10 p.
16. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Часть I. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 799 с.
17. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
18. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.

Effect of the Shape of Solid on Solution of Uncoupled Quasistatic Cyclic Thermoelasticity Problem in Thermal Layer (on the Example of Regular Solids)

M. I. Supel'nyak^{a, #}

^a *Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), Kaluga, Russia*

[#] *e-mail: max2901@mail.ru*

Analytical solutions of uncoupled quasistatic cyclic thermoelasticity problem are obtained for regular solids: half-space, plate, space with a cylindrical channel, cylinder, space with a spherical cavity, sphere. The solutions, which are trigonometric Fourier series of temporary variable, are rearranged in the form acceptable for analysis of temperature oscillations and thermocyclic stresses in thermal layer by means of change of spatial variable. Simple asymptotic dependences suitable for large radii of curvature of the surface and body size are established for the found solutions. The effect of the shape of solid on temperature oscillations and thermocyclic stresses in thermal layer is studied.

Keywords: thermoelasticity problem, thermocyclic stresses

REFERENCES

1. *Zhu D., Miller R.A.* Influence of high cycle thermal loads on thermal fatigue behavior of thick thermal barrier coatings // *NASA Technical Paper TP-3676, Army Res. Lab. Technical Report ARL-TR-1341*, 1997, 51 p.
2. *Wang Y., Charbal A., Hild F. et al.* High cycle thermal fatigue of austenitic stainless steel // *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 165, no. 19009, 6 p.
3. *Wang L., Zhou X., Wei X.* *Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions*. Berlin: Springer, 2008. 515 p.
4. *Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskii S. Yu.* *Wave Phenomena of Thermal Conductivity: A System-Structural Approach*. (Volnovye yavleniya teploprovodnosti: Sistemno-strukturnyi podkhod) Moscow: Editorial URSS, 2004. 296 p. (in Russian)
5. *Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by Hetnarski R.B. et al.* Dordrecht: Springer Netherlands, 2014. 6643 p.

6. *Chattopadhyay S.* High Cycle Thermal Fatigue Crack Growth in a Semi-Infinite Plate // *J. Therm. Stresses*, 2009, vol. 32, no. 8, pp. 839–846.
7. *Kasahara N., Itoh T., Okazaki M. et al.* Development of thermal fatigue evaluation methods of piping systems // *E-J. Advanced Maintenance*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 14–23.
8. *Lykov A.V.* Thermal Conductivity Theory. (Teoriya teploprovodnosti) Moscow: Vysshaya Shkola, 1967. 600 p. (in Russian)
9. *Carlaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon, 1959. 510 p.
10. *Kartashov E.M., Kudinov V.A.* Analytical Theory of Heat Conduction and Applied Thermoelasticity. (Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoj termouprugosti) Moscow: Librocom, 2012. 656 p. (in Russian)
11. *Parkus G.* Unsteady Thermal Stresses. (Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya) Moscow: Fizmatgiz, 1963. 252 p. (in Russian)
12. *Kartashov E.M.* Analytical Methods in Theory of Heat Conduction in Solids. (Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel) Moscow: Vysshaya Shkola, 2001. 550 p. (in Russian)
13. *Minasyan R.S.* A periodic problem of heat conduction in a hollow infinite cylinder // *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 1969, vol. 17, no. 5, pp. 1396–1403.
14. *Kantorovich L.V., Krylov V.I.* Approximate Methods of Higher Analysis. N.Y.: Interscience Publ., 1964. 682 p.
15. *Supel'nyak M.I.* Calculation of temperature oscillations in thermal layer of regular solids at unsteady coefficient of heat transfer // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1382, no. 012149, 10 p.
16. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Univ. Press, 1995. 812 p.
17. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. N.Y.: McGraw-Hill, 1970. 608 p.
18. *Birger I.A., Mavlyutov R.R.* Strength of Materials. (Soprotivlenie materialov) Moscow: Nauka, 1986. 560 p. (in Russian)

УДК 539.3



Профессору Ефиму Ильичу ШИФРИНУ, признанному специалисту в области механики деформируемого твердого тела, механики разрушения, автору более 200 статей по механике и прикладной математике, члену редакционной коллегии ПММ, активному рецензенту и автору журнала, 14 апреля 2020 г. исполнилось 70 лет.

Редколлегия и редакция ПММ, коллеги и ученики сердечно поздравляют его с юбилеем, желают здоровья и новых творческих успехов.

К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПО НЕ ПОЛНОСТЬЮ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ДАННЫМ НА ГРАНИЦЕ

© 2020 г. Е. А. Каспарова¹, Е. И. Шифрин^{1,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: shifrin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 18.03.2020 г.

После доработки 03.04.2020 г.

Принята к публикации 05.04.2020 г.

Рассматривается задача обнаружения и локализации полости, трещины или включения в упругом теле по частично переопределенным данным на его границе, полученным в результате одного статического испытания. Предложен новый подход к реше-

нию рассматриваемой задачи. Возможности предложенного подхода проиллюстрированы на примере задачи обнаружения полости в упругой пластине.

Ключевые слова: статическая теория упругости, геометрическая обратная задача, не полностью переопределенные граничные данные

DOI: 10.31857/S0032823520030042

1. Введение. Рассматривается обратная статическая задача обнаружения и локализации полости, трещины или включения в упругом теле по переопределенным данным на внешней границе. Задачи указанного типа изучались во многих публикациях. Были разработаны различные подходы к их решению. Применение к статическим обратным задачам теории упругости методов линейного отбора [1–3], факторизации [4, 5] и некоторых других, см. обзор [6], изначально развитых для обратных задач рассеяния, представлено в [7–9]. Среди методов, разработанных для решения статических обратных задач отметим метод, основанный на анализе дальнего поля [10–13], метод вложения [14, 15] и метод фундаментальных решений [16–18]. Одним из наиболее эффективных методов решения геометрических обратных задач является метод, основанный на принципе взаимности [19–28]. Обзор методов решения обратных задач теории упругости представлен в [29]. Все перечисленные методы обладают одним серьезным недостатком. Для их реализации требуется знать переопределенные данные (Дирихле и Неймана) на всей внешней границе рассматриваемой области. Применительно к геометрическим обратным задачам теории упругости это означает, что при проведении одного или нескольких статических экспериментов необходимо измерять как усилия, так и перемещения на всей внешней поверхности тела. Провести подобные эксперименты оказывается весьма непросто. Например, при применении оптических методов, удобно измерять перемещения только той части поверхности тела, которая свободна от приложенных усилий.

Целью данной статьи является разработка метода, позволяющего обнаружить и локализовать неоднородность в упругом теле в случае, когда усилия и перемещения известны лишь на части границы тела. Формально подход, основанный на оптимизации формы искомой неоднородности, позволяет решать обратную задачу, используя не полностью переопределенные данные на границе [30–32], однако реализация такого подхода достаточно сложна, к тому же целевая функция может иметь много локальных минимумов. Отметим также близкие по тематике к рассматриваемой в статье задаче работы по решению задачи Коши для уравнений эллиптического типа [33–36].

Идея предлагаемого в настоящей статье подхода к решению обратной задачи заключается в следующем. Рассматриваются расширяющиеся семейства подобластей занимаемой упругим телом области. Эти подобласти содержат часть границы, на которой заданы данные Коши. Для каждой подобласти рассматривается функционал типа Кона–Вогелиуса [37]. По значению этого функционала можно судить пересекает данная подобласть имеющийся дефект, или нет.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дается постановка задачи. Общий подход к решению задачи обнаружения и локализации дефектов с помощью не полностью переопределенных данных представлен в разделе 3. Разработанный подход иллюстрируется на примере плоской задачи теории упругости в разделе 4. Выводы представлены в разделе 5.

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. Представим границу в виде объединения подмножеств $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}_D \cup \partial\bar{\Omega}_N \cup \partial\bar{\Omega}_C$, $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_C = \partial\Omega_C \cap \partial\Omega_D = \emptyset$, $\emptyset \neq \partial\Omega_C \subset \partial\Omega$. Здесь черта сверху означает замыкание множества. Пусть $D \subset \Omega$ – некоторая подобласть. Предположим, что

линейно упругое тело с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M занимает область $S = \Omega \setminus D$. Предполагается также, что линейно упругое тело с модулем сдвига μ_I и коэффициентом Пуассона ν_I занимает область D . Случаи полости и жесткого включения можно рассматривать как предельные при $\mu_I \rightarrow 0$ и $\mu_I \rightarrow \infty$, соответственно. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Напряженно-деформированное состояние в теле, занимающем область S , будем помечать верхним индексом M : σ_{ij}^M – тензор напряжений, e_{ij}^M – тензор деформаций, \mathbf{u}^M – вектор перемещений. Уравнения линейной теории упругости в теле S имеют вид

$$\begin{aligned} e_{ij}^M(x) &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^M(x) + u_{j,i}^M(x)) \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in S \\ \sigma_{ij}^M(x) &= 2\mu_M \left(\frac{\nu_M}{1 - 2\nu_M} \theta^M(x) \delta_{ij} + e_{ij}^M(x) \right), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^M(x) \\ \sigma_{ij,j}^M(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Напряженно-деформированное состояние в теле, занимающем область D , будем помечать верхним индексом I : σ_{ij}^I – тензор напряжений, e_{ij}^I – тензор деформаций, \mathbf{u}^I – вектор перемещений. Напряженное состояние в D описывается уравнениями (2.1) с заменой верхних и нижних индексов M на I .

Предполагается, что между телами, занимающими области S и D , имеет место полное сцепление

$$\mathbf{u}^M(x) = \mathbf{u}^I(x), \quad \sigma_{ij}^M(x) N_j(x) = \sigma_{ij}^I(x) N_j(x), \quad x \in \partial D \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{N}(x) = (N_1(x), N_2(x), N_3(x))$ – единичная нормаль к границе области D , обозначаемой ∂D , в точке x .

Предполагается, что на $\partial\Omega$ заданы следующие переопределенные граничные условия

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega_D \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij}^M(x') n_j(x') = t_i^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega_N \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^C(x'), \quad \sigma_{ij}^M(x') n_j(x') = t_i^C(x'), \quad x' \in \partial\Omega_C \quad (2.5)$$

Здесь $\mathbf{n}(x') = (n_1(x'), n_2(x'), n_3(x'))$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x' , $\mathbf{u}^0(x) \in H^{1/2}(\partial\Omega_D)$, $\mathbf{u}^C(x') \in H^{1/2}(\partial\Omega_C)$, $t_i^0(x) \in H^{-1/2}(\partial\Omega_N)$ и $t_i^C(x') \in H^{-1/2}(\partial\Omega_C)$ – известные функции, $H^1(\Omega)$ – классическое пространство Соболева порядка 1, для части границы $\Gamma \subset \partial\Omega$ пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ – пространство следов $v|_\Gamma$ при $v(x) \in H^1(\Omega)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$ – пространство, сопряженное к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$.

Задача заключается в обнаружении и локализации включения D с помощью известных, переопределенных данных (2.3)–(2.5) на границе.

3. Метод обнаружения дефекта. Рассмотрим однородное, изотропное, линейно-упругое тело с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M , которое занимает всю область Ω . Упругое поле в теле Ω , удовлетворяющее граничным условиям (2.3),

(2.4) и второму из условий (2.5), обозначим верхним индексом h . Введем упругое поле

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(x) &= \mathbf{u}^M(x) - \mathbf{u}^h(x), \quad \Delta e_{ij}(x) = e_{ij}^M(x) - e_{ij}^h(x) \\ \Delta \sigma_{ij}(x) &= \sigma_{ij}^M(x) - \sigma_{ij}^h(x), \quad x \in S \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поле $\Delta \mathbf{u}(x)$ удовлетворяет уравнениям теории упругости (2.1) в области S , а также следующим условиям на внешней границе области S

$$\Delta \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_D \quad (3.2)$$

$$\Delta \sigma_{ij}(x) n_j(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_N \quad (3.3)$$

$$\Delta \mathbf{u}(x') = \mathbf{u}^C(x') - \mathbf{u}^h(x'), \quad \Delta \sigma_{ij}(x') n_j(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega_C \quad (3.4)$$

Пусть $\Omega_s, 0 < s \leq s^*$ – семейство подобластей исходной области Ω , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} s_1 < s_2 &\Rightarrow \Omega_{s_1} \subset \Omega_{s_2} \\ s \rightarrow 0 &\Rightarrow \Omega_s \rightarrow \Gamma_0, \quad \Gamma_0 \subset \partial\Omega_C \subset \partial\Omega \\ \Omega_{s^*} &= \Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим Γ_s границу подобласти Ω_s . Граница Γ_s может быть представлена в виде

$$\Gamma_s = \partial\bar{\Omega}_{Cs} \cup \partial\bar{\Omega}_{Ds} \cup \partial\bar{\Omega}_{Ns} \cup \bar{\Gamma}_{as} \quad (3.6)$$

Здесь $\partial\Omega_{Cs} = \Gamma_s \cap \partial\Omega_C$, $\partial\Omega_{Ds} = \Gamma_s \cap \partial\Omega_D$, $\partial\Omega_{Ns} = \Gamma_s \cap \partial\Omega_N$, а поверхность Γ_{as} пересекает область Ω . В каждой из подобластей Ω_s выполняются соотношения

$$\begin{aligned} e_{ij}^M(x) &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^M(x) + u_{j,i}^M(x)), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_s \\ \sigma_{ij}^M(x) &= 2\mu_M \left(\frac{\nu_M}{1 - 2\nu_M} \theta^M(x) \delta_{ij} + e_{ij}^M(x) \right), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^M(x) \\ \sigma_{ij,j}^M(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обозначим $\mathbf{u}^1(x')$ упругое поле, удовлетворяющее уравнениям (3.7) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1(x') &= 0, \quad x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') &= 0, \quad x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') &= 0, \quad x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') &= p_j(x'), \quad x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $\mathbf{p}(x') = (p_1(x'), p_2(x'), p_3(x')) \in H^{-1/2}(\Gamma_{as})$. Заметим, что в случае $\partial\Omega_{Ds} = \emptyset$ усилия $\mathbf{p}(x')$ должны быть самоуравновешенными.

Обозначим $\mathbf{v}(x^*)$ – сужение вектор-функции $\mathbf{u}^1(x)$ на часть границы $\partial\Omega_{Cs}$, ($\mathbf{v}(x^*) = \mathbf{u}^1(x^*)$, $x^* \in \partial\Omega_{Cs}$), $\mathbf{v}(x^*) \in H^{1/2}(\partial\Omega_{Cs})$. Таким образом, решение задачи (3.7), (3.8) порождает линейный оператор

$$T: \mathbf{p}(x') \in H^{-1/2}(\Gamma_{as}) \rightarrow \mathbf{v}(x^*) \in H^{1/2}(\partial\Omega_{Cs}) \quad (3.9)$$

Если $\Omega_s \cap D = \emptyset$, то вектор-функция $\Delta \mathbf{u}(x^*)$, определенная в (3.4), удовлетворяет условию $\Delta \mathbf{u}(x^*) \in \text{Im } T$. В противном случае $\Delta \mathbf{u}(x^*) \notin \text{Im } T$. Данное утверждение следует из единственности решения задачи Коши для уравнений теории упругости. Таким образом, получен критерий, позволяющий определить, удовлетворяется ли условие $\Omega_s \cap D = \emptyset$. Для анализа выполнения условия $\Delta \mathbf{u}(x^*) \in \text{Im } T$ воспользуемся функционалом типа Кона–Вогелиуса [37]. Обозначим $\mathbf{u}^2(x)$ – упругое поле, удовлетворяющее уравнениям (3.7) в области Ω_s и граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \sigma_{ij}^2(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \mathbf{u}^2(x') &= \Delta \mathbf{u}(x'), & x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \sigma_{ij}^2(x') n_j(x') &= p_i(x'), & x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Упругие поля $\mathbf{u}^1(x)$ и $\mathbf{u}^2(x)$ определяются усилиями $\mathbf{p}(x')$. Построим функционал, зависящий от $\mathbf{p}(x')$

$$F(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_s} \left(\sigma_{ij}^1(x') n_j(x') - \sigma_{ij}^2(x') n_j(x') \right) \left(u_i^1(x') - u_i^2(x') \right) dS \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что $F(\mathbf{p}) \geq 0$. Обозначим $F_{\min} = \min F(\mathbf{p})$. Если $F_{\min} = 0$, то $D \cap \Omega_s = \emptyset$. В противном случае $D \cap \Omega_s \neq \emptyset$.

Рассмотрим базис в пространстве усилий $\mathbf{p}^1(x')$, $\mathbf{p}^2(x')$, ..., где $\mathbf{p}^k(x') \in H^{-1/2}(\Gamma_{as})$. Искомую вектор-функцию $\mathbf{p}^*(x')$, на которой достигается минимум функционала $F(\mathbf{p})$, разложим по введенному базису

$$\mathbf{p}^*(x') = \sum_k c_k \mathbf{p}^k(x') \quad (3.12)$$

Решение уравнений (3.7) с граничными условиями (3.8) в случае $\mathbf{p}(x') = \mathbf{p}^k(x')$ обозначим $\mathbf{u}^{k1}(x)$. Решение уравнений (3.7) с граничными условиями (3.10) представим в виде суммы двух решений

$$\mathbf{u}^2(x) = \mathbf{u}^{02}(x) + \tilde{\mathbf{u}}^2(x) \quad (3.13)$$

Здесь $\mathbf{u}^{02}(x)$ – решение уравнений (3.7) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{02}(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \sigma_{ij}^{02}(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \mathbf{u}^{02}(x') &= \Delta \mathbf{u}(x'), & x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \sigma_{ij}^{02}(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$\tilde{\mathbf{u}}^2(x)$ – решение (3.7) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^2(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^2(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \tilde{\mathbf{u}}^2(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^2(x') n_j(x') &= p_i(x'), & x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Решение уравнений (3.7) с граничными условиями (3.15) в случае $\mathbf{p}(x') = \mathbf{p}^k(x')$ обозначим $\mathbf{u}^{k2}(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим конечномерное подпространство P_N с базисом $\mathbf{p}^k(x')$, $k = 1, 2, \dots, N$. Вектор-функции $\mathbf{p}(x')$ из этого подпространства имеют вид

$$\mathbf{p}(x') = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}^k(x') \quad (3.16)$$

Из (3.11), (3.13)–(3.16) следует, что функционал $F(\mathbf{p})$ на подпространстве P_N может быть представлен в виде

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{c}) = - \int_{\partial\Omega_{Cs}} \left(\sigma_{ij}^{02}(x') + \sum_{k=1}^N c_k \sigma_{ij}^{k2}(x') \right) n_j(x') \left(\sum_{m=1}^N c_m u_i^{m1}(x') - \Delta u_i(x') \right) dS \quad (3.17)$$

Здесь $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$, верхний индекс T означает транспонирование матрицы, $\sigma_{\alpha\beta}^{02}(x')$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{k2}(x')$ – напряжения, соответствующие упругим полям $\mathbf{u}^{02}(x)$ и $\mathbf{u}^{k2}(x)$.

Минимизация функции $F(\mathbf{c})$ приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (3.18)$$

где $\mathbf{A} = (a_{rm})$ – матрица,

$$a_{rm} = \int_{\partial\Omega_{Cs}} \left(\sigma_{ij}^{r2}(x') u_i^{m1}(x') + \sigma_{ij}^{m2}(x') u_i^{r1}(x') \right) n_j(x') dS,$$

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T$ – вектор,

$$b_r = \int_{\partial\Omega_{Cs}} \left(\sigma_{ij}^{r2}(x') \Delta u_i(x') - \sigma_{ij}^{02}(x') u_i^{r1}(x') \right) n_j(x') dS$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.18) является плохо обусловленной. Для ее решения воспользуемся регуляризацией Тихонова [38]. Таким образом, решение системы уравнений (3.18) заменяется задачей минимизации функции $\Phi(\mathbf{c})$

$$\Phi(\mathbf{c}) = \|\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{c}\|^2 \quad (3.19)$$

Здесь $\|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{k=1}^N c_k^2$. Параметр λ в рассмотренном ниже примере определяется с помощью метода L – кривой [39, 40].

4. Численный пример. Проиллюстрируем разработанный метод на примере плоской задачи теории упругости. Рассмотрим пластину, занимающую квадратную область $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x_i| \leq L, i = 1, 2\}$, $L = 10$ см. В качестве дефекта D возьмем прямоугольную полость с центром в точке $(x_1^0, x_2^0) = (-1, -2)$ и размерами 2×4 см. Координаты центра полости даны в см. Возьмем в качестве упругих постоянных материала модуль Юнга $E_M = 70$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_M = 0.33$. Обозначим $A(-L, -L)$, $B(-L, L)$, $C(L, L)$ и $D(L, -L)$ – вершины квадратной области Ω , см. рис. 1.

На границе пластины предполагаются заданными следующие граничные условия: нижняя сторона квадрата закреплена $\mathbf{u}(x') = 0$, $x' \in \partial\Omega_D = (A, D)$; на верхней стороне заданы однородные растягивающие усилия $\sigma_{12}(x') = 0$, $\sigma_{22}(x') = \sigma = 190$ МПа; данные Коши заданы на боковых сторонах квадрата $\partial\Omega_C = (A, B) \cup (C, D)$. Предполагается, что боковые стороны свободны от усилий $\sigma_{12}(x') = \sigma_{11}(x') = 0$, $x' \in \partial\Omega_C$. Перемещения $\mathbf{u}(x')$, $x' \in \partial\Omega_C$ определяются путем численного решения прямой задачи.

Для идентификации правой границы дефекта рассмотрим семейство прямоугольников $\Omega_s = EFCD$, где координаты вершин E и F зависят от параметра s следующим

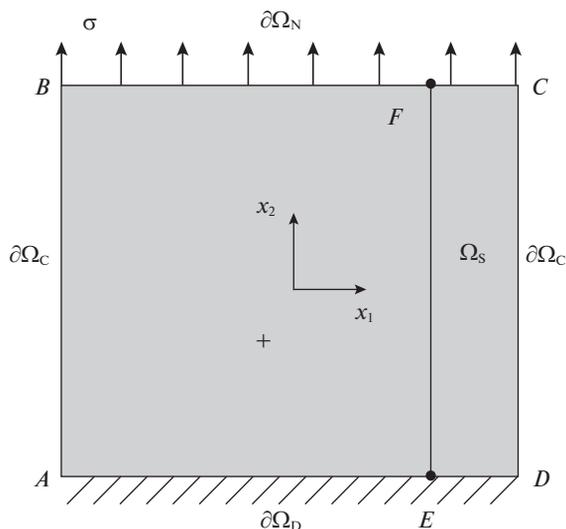


Рис. 1.

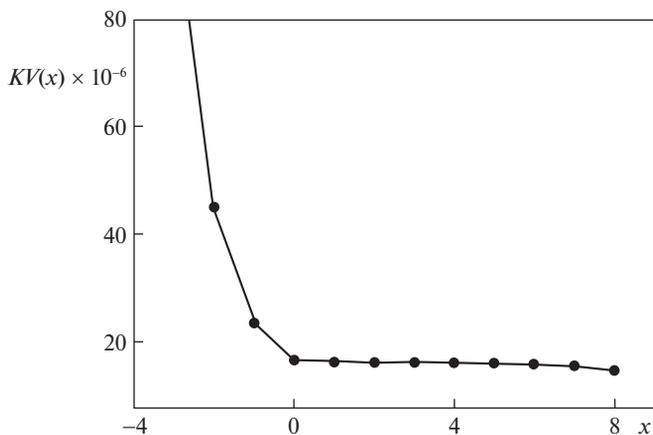


Рис. 2.

образом: $E = (L - s, -L)$, $F = (L - s, L)$, $0 < s \leq 2L$. Согласно введенным выше обозначениям, имеем $\partial\Omega_{Cs} = (C, D)$, $\partial\Omega_{Ds} = (E, D)$, $\partial\Omega_{Ns} = (F, C)$ и $\Gamma_{as} = (E, F)$. В рассматриваемом примере неизвестные функции $p_1(x') = -\sigma_{11}(x')$ и $p_2(x') = -\sigma_{21}(x')$, $x' = (L - s, x_2) \in \Gamma_{as}$ являются функциями от координаты x_2 . Аппроксимируем неизвестные компоненты вектора усилий с помощью кусочно-линейных базисных функций. При минимизации функции $\Phi(\mathbf{c})$, определенной в (3.19), используем одинаковое количество базисных функций N и фиксированное значение λ для всех подобластей семейства Ω_s . Обозначим $KV(\Omega_s, N, \lambda) = \min \Phi(\mathbf{c})$. Для рассматриваемого семейства подобластей Ω_s , при фиксированных значениях N и λ , KV – функционал становится функцией проекции точек E и F на ось абсцисс $x = L - s$, $KV(\Omega_s, N, \lambda) = KV(x)$.

График функции $KV(x)$ для $N = 15$ и $\lambda = 0.003$ представлен на рис. 2. По оси ординат отложены величины $KV(x) \times 10^{-6}$ Н. Проекция дефекта на ось абсцисс помечена

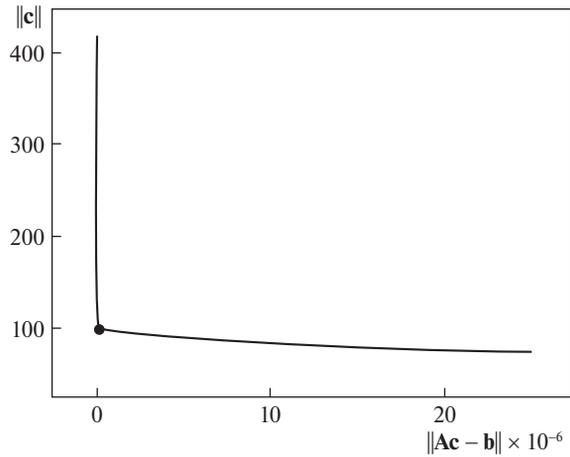


Рис. 3.

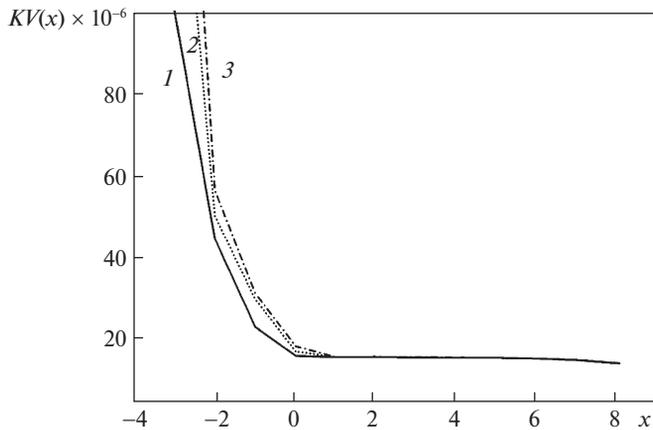


Рис. 4.

толстой горизонтальной линии. По рис. 2 видно, что при приближении к правой границе дефекта начинается резкий рост функции $KV(x)$. Таким образом, для выбранного семейства подобластей Ω_s по поведению функции $KV(x)$ можно обнаружить присутствие дефекта и приближенно определить расположение его правой границы.

Как указывалось выше, значение параметра λ определялось методом L -кривой. Типичный вид L -кривой в случае $N = 15$ и области Ω_s , определяемой x – координатой точки E , равной 0, представлен на рис. 3. По оси абсцисс отложены величины $\|Ac - b\| \times 10^{-6}$. Значение λ , соответствующее максимальной кривизне L -кривой, в данном случае равно $\lambda = 0.01$. Для разных подобластей одного семейства Ω_s значения λ , определяемые с помощью L -кривой, вообще говоря, разные. Поэтому, при использовании одинаковых значений λ для всех областей семейства Ω_s , важно знать, как зависит результат обнаружения границы дефекта от выбранного значения λ .

Графики функций $KV(x)$, построенные при $N = 15$ и различных значениях λ , представлены на рис. 4. Кривая 1 соответствует $\lambda = 0.003$, кривая 2 соответствует

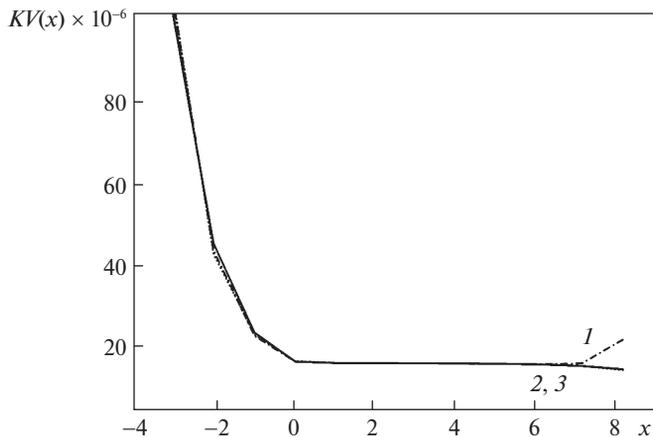


Рис. 5.

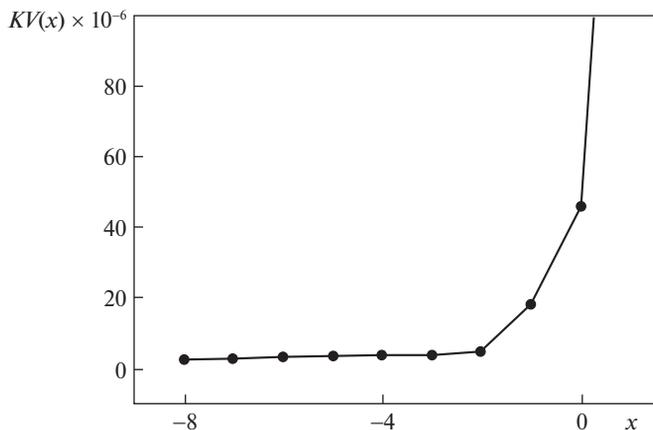


Рис. 6.

$\lambda = 0.007$ и кривая $3 - \lambda = 0.01$. Из рис. 4 видно, что правая граница дефекта достаточно хорошо определяется при вариации значений λ в достаточно широком диапазоне. Зависимость $KV(x)$ от количества используемых для аппроксимации базисных функций представлена на рис. 5. Здесь кривые 1, 2 и 3 соответствуют $N = 13$, $N = 15$ и $N = 17$. Рис. 5 показывает, что результаты устанавливаются, начиная с некоторого N . В рассмотренном примере результаты ведут себя устойчиво с $N = 15$.

Аналогичным образом может быть определена и левая граница дефекта. Для этого рассмотрим семейство прямоугольников $\Omega_s = ABFE$, где координаты точек E и F имеют вид: $E = (-L + s, -L)$, $F = (-L + s, L)$, $0 < s \leq 2L$. График функции $KV(x)$ для $N = 15$, $\lambda = 0.003$, $x = -L + s$, представлен на рис. 6. Из рис. 6 видно, что левая граница дефекта также хорошо определяется.

Заключение. Разработан метод обнаружения и локализации дефекта (полости, трещины, включения) в упругом теле с помощью не полностью переопределенных данных на внешней границе. Идея метода заключается в построении расширяющегося семейства подобластей, стремящихся к области, занимаемой упругим телом. Для каж-

дой подобласти семейства строится функционал типа Кона–Вогелиуса. По минимальному значению этого функционала можно судить пересекает ли данная подобласть дефект или нет и приближенно определить границы дефекта. Для иллюстрации разработанного подхода рассмотрен пример идентификации полости в упругой, квадратной пластине. Переопределенные данные заданы на боковых сторонах пластины, свободных от усилий. В рассматриваемом примере в качестве семейства подобластей выбрано семейство прямоугольников. Это позволило определить левую и правую границы дефекта. Для получения более полной информации о дефекте необходимо использовать семейства подобластей более сложной геометрии.

Работа выполнена по теме государственного задания № госрегистрации АААА-А20-120011690132-4 и при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colton D., Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. P. 383–393.
2. Colton D., Piana M., Potthast R. A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. P. 1477–1493.
3. Arens T. Linear sampling methods for 2d inverse elastic wave scattering // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 1445–1464.
4. Kirsch A. Characterization of the shape of a scattering obstacle using spectral data of the far field operator // *Inverse Problems*. 1998. V. 14. P. 1489–1512.
5. Grinberg N. Obstacle visualization via the factorization method for the mixed boundary value problem // *Inverse Problems*. 2002. V. 18. P. 1687–1704.
6. Potthast R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems // *Inverse Problems*. 2006. V. 22. P. R1–R47.
7. Dehghan Manshadi S.H., Khaji N., Rahimian M. Cavity/inclusion detection in plane linear elastic bodies using linear sampling method // *J. Nondestructive Evaluation*. 2014. V. 33. P. 93–103.
8. Kirsch A. The factorization method for a class of inverse elliptic problems // *Mathematische Nachrichten*. 2005. V. 278. P. 258–277.
9. Шифрин Е.И. Метод факторизации в геометрической обратной задаче статической теории упругости // *Изв. РАН. МТТ*. 2016. № 5. С. 68–78.
10. Ammari H., Kang H., Nakamura G., Tanuma K. Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of an inclusion of small diameter and detection of an inclusion // *J. Elasticity*. 2002. V. 67. P. 97–129.
11. Kang H., Kim E., Lee J.-Y. Identification of elastic inclusions and elastic moment tensors by boundary measurements // *Inverse Problems*. 2003. V. 19. P. 703–724.
12. Ammari H., Kang H. Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements. *Lecture Notes in Mathematics*. 1846. Berlin: Springer, 2004.
13. Ammari H., Kang H. Polarization and Moment Tensors: with Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory. *Applied Mathematical Sciences*. 162. New York: Springer, 2007.
14. Ikehata M. Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data // *Inverse Problems*. 1999. V. 15. P. 1231–1241.
15. Ikehata M. A regularized extraction formula in the enclosure method // *Inverse Problems*. 2002. V. 18. P. 435–440.
16. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for the detection of rigid inclusions and cavities in plane linear elastic bodies // *Computers and Structures*. 2012. V. 106–107. P. 176–188.
17. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. A moving pseudo-boundary method of fundamental solutions for void detection // *Numer. Meth. PDE*. 2013. V. 29. P. 935–960.
18. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for three-dimensional inverse geometric elasticity problems // *Computers and Structures*. 2016. V. 166. P. 51–59.
19. Andrieux S., Ben Abda A. Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. P. 553–563.

20. *Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D.* Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Problems*. 1999. V. 15. P. 59–65.
21. *Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Intern. J. Fracture*. 2007. V. 147. P. 45–54.
22. *Шифрин Е.И.* Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 3. С. 131–142.
23. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // *Inverse Problems*. 2010. V. 26. 055001 (17 pp).
24. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // *Intern. J. Solids & Struct.* 2011. V. 48. P. 1154–1163.
25. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Reconstruction of an ellipsoidal defect in anisotropic elastic solid, using results of one static test // *Inverse Problems in Sci.&Engng*. 2013. V. 21. P. 781–800.
26. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *Intern. J. Solids & Struct.* 2013. V. 50. P. 3707–3716.
27. *Шифрин Е.И., Шушпанников П.С.* Идентификация конечного числа малых дефектов в анизотропном, линейно упругом теле по результатам одного статического испытания // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 4. С. 68–81.
28. *Shifrin E.I., Kaptsov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Problems*. 2018. V. 34. 015009.
29. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // *Inverse Problems*. 2005. V. 21. P. R1–R50.
30. *Burger M.* A level set method for inverse problems // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 1327–1355.
31. *Burger M.* Levenberg–Marquardt level set methods for inverse obstacle problems // *Inverse Problems*. 2004. V. 20. P. 259–282.
32. *Ben Ameer H., Burger M., Hackl B.* Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity // *Inverse Problems*. 2004. V. 20. P. 673–696.
33. *Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В.* Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // *ЖВММФ*. 1991. Т. 31. № 1. С. 64–74.
34. *Cimetiere A., Delvare F., Jaoua M., Pons F.* Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 553–570.
35. *Baranger T.N., Andrieux S.* An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity // *Struct.&Multidisc. Optim.* 2008. V. 35. P. 141–152.
36. *Liu C.-S., Atluri S.N.* Numerical solution of the Laplacian Cauchy problem by using a better post-conditioning collocation Trefftz method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. V. 37. P. 74–83.
37. *Kohn R.V., Vogelius M.* Relaxation of a variational method for impedance computed tomography // *Commun. Pure & Appl. Math.* 1987. V. 40. P. 745–777.
38. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986. 287 с.
39. *Hansen P.C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // *SIAM Review*. 1992. V. 34. P. 561–580.
40. *Hansen P.C.* The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*. *Johnston P.* (Ed.) WIT Press. Southampton. 2001. P. 119–142.

On the Solution of Geometric Elastostatic Inverse Problem by Means of Not Completely Overdetermined Boundary Data

E. A. Kasparova^a and E. I. Shifrin^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: shifrin@ipmnet.ru*

The problem of detecting and localizing of a cavity, a crack, or an inclusion in an elastic body by means of the overdetermined data given on a part of the outer boundary of the body

is considered. The input data can be obtained in a single static experiment. A new approach for solving such problem is proposed. The possibilities of the proposed approach are illustrated by the example of the problem of detecting a cavity in an elastic plate.

Keywords: static theory of elasticity, geometric inverse problem, incompletely overdetermined boundary data

REFERENCES

1. Colton D., Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, pp. 383–393.
2. Colton D., Piana M., Potthast R. A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems // *Inverse Problems*, 1997, vol. 13, pp. 1477–1493.
3. Arens T. Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering // *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 1445–1464.
4. Kirsch A. Characterization of the shape of a scattering obstacle using spectral data of the far field operator // *Inverse Problems*, 1998, vol. 14, pp. 1489–1512.
5. Grinberg N. Obstacle visualization via the factorization method for the mixed boundary value problem // *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, pp. 1687–1704.
6. Potthast R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems // *Inverse Problems*, 2006, vol. 22, pp. R1–R47.
7. Dehghan Manshadi S.H., Khaji N., Rahimian M. Cavity/inclusion detection in plane linear elastic bodies using linear sampling method // *J. Nondestructive Evaluation*, 2014, vol. 33, pp. 93–103.
8. Kirsch A. The factorization method for a class of inverse elliptic problems // *Mathematische Nachrichten*, 2005, vol. 278, pp. 258–277.
9. Shifrin E.I. Factorization method in the geometric inverse problem of static elasticity // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 562–570.
10. Ammari H., Kang H., Nakamura G., Tanuma K. Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of an inclusion of small diameter and detection of an inclusion // *J. Elasticity*, 2002, vol. 67, pp. 97–129.
11. Kang H., Kim E., Lee J.-Y. Identification of elastic inclusions and elastic moment tensors by boundary measurements // *Inverse Problems*, 2003, vol. 19, pp. 703–724.
12. Ammari H., Kang H. Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements. *Lecture Notes in Mathematics*. 1846. Berlin: Springer, 2004.
13. Ammari H., Kang H. Polarization and moment tensors: with applications to inverse problems and effective medium theory. *Applied Mathematical Sciences*. 162. N. Y.: Springer, 2007.
14. Ikehata M. Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data // *Inverse Problems*, 1999, vol. 15, pp. 1231–1241.
15. Ikehata M. A regularized extraction formula in the enclosure method // *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, pp. 435–440.
16. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for the detection of rigid inclusions and cavities in plane linear elastic bodies // *Computers and Structures*, 2012, vol. 106–107, pp. 176–188.
17. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. A moving pseudo-boundary method of fundamental solutions for void detection // *Numer. Meth. PDE*, 2013, vol. 29, pp. 935–960.
18. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for three-dimensional inverse geometric elasticity problems // *Computers and Structures*, 2016, vol. 166, pp. 51–59.
19. Andrieux S., Ben Abda A. Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, pp. 553–563.
20. Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D. Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Problems*, 1999, vol. 15, pp. 59–65.
21. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Intern. J. Fracture*, 2007, vol. 147, pp. 45–54.
22. Shifrin E.I. Ellipsoidal defect identification in an elastic body from the results of a uniaxial tension (compression) test // *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 417–426.

23. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // *Inverse Problems*, 2010, vol. 26, 055001 (17 pp).
24. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // *Intern. J. Solids and Structures*, 2011, vol. 48, pp. 1154–1163.
25. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Reconstruction of an ellipsoidal defect in anisotropic elastic solid, using results of one static test // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2013, vol. 21, pp. 781–800.
26. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *Intern. J. Solids and Structures*, 2013, vol. 50, pp. 3707–3716.
27. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of finitely many small defects in an anisotropic linearly elastic body from a single static test // *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 4, pp. 421–431.
28. *Shifrin E.I., Kapstov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Problems*, 2018, vol. 34, 015009.
29. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, pp. R1–R50.
30. *Burger M.* A level set method for inverse problems // *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 1327–1355.
31. *Burger M.* Levenberg–Marquardt level set methods for inverse obstacle problems // *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 259–282.
32. *Ben Ameer H., Burger M., Hackl B.* Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity // *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 673–696.
33. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Fomin A.V.* An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations // *Comput. Math. Math. Phys.*, 1991, vol. 31, no. 1, pp. 45–52.
34. *Cimetiere A., Delvare F., Jaoua M., Pons F.* Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization // *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 553–570.
35. *Baranger T.N., Andrieux S.* An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity // *Struct. & Multidisc. Optimiz.*, 2008, vol. 35, pp. 141–152.
36. *Liu C.-S., Atluri S.N.* Numerical solution of the Laplacian Cauchy problem by using a better post-conditioning collocation Trefftz method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, vol. 37, pp. 74–83.
37. *Kohn R.V., Vogelius M.* Relaxation of a variational method for impedance computed tomography // *Commun. on Pure & Appl. Math.*, 1987, vol. 40, pp. 745–777.
38. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.* *Solutions of Ill-Posed Problems*. N.Y.: John Wiley, 1977. 258 p.
39. *Hansen P.C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // *SIAM Review*, 1992, vol. 34, pp. 561–580.
40. *Hansen P.C.* The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems // In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*. Johnston P. (Ed.) WIT Press. Southampton, 2001. pp. 119–142.

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ШОНБЕРГА© 2020 г. П. В. Стогний^{1,*}, Н. И. Хохлов^{2,**}, И. Б. Петров^{1,2,***}¹ *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*² *Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, Россия***e-mail: stognii@phystech.edu****e-mail: k_h@inbox.ru*****e-mail: petrov@mipt.ru*

Поступила в редакцию 29.11.2019 г.

После доработки 11.03.2020 г.

Принята к публикации 26.03.2020 г.

Для описания поведения геологических сред с наличием трещин Шонбергом была разработана механико-математическая модель, получившая применение в работах, связанных с сейсморазведкой нефтяных месторождений. В представленной работе предлагается использование этой модели при расчетах волновых процессов в геологических средах с помощью сеточно-характеристического метода. Искомые функциями при этом являются компоненты вектора скорости и тензора напряжений в точках расчетной сетки на границе с трещиной. Проведены расчеты распространения сейсмического импульса в однородной упругой среде с трещиной для предельного случая полного отражения волнового фронта от границы трещины. Проведены сравнительные расчеты характеристик волнового поля с использованием моделей Шонберга и двухбереговой трещины с помощью сеточно-характеристического метода. Результаты расчетов показали удовлетворительное соответствие результатов, полученных по обоим используемым моделям.

Ключевые слова: сейсморазведка, трещины Шонберга, сеточно-характеристический метод

DOI: 10.31857/S0032823520030091

Сейсморазведка является широко используемым методом поиска залежей углеводородов [1]. Во время проведения сейсморазведочных работ, на дневной поверхности устанавливается система из источника и приемников сейсмического сигнала. Сигнал от источника отражается от геологических неоднородностей, что регистрируется приемниками, находящимися на дневной поверхности (амплитуды пришедших волн в определенные моменты времени). В дальнейшем при помощи расчетов волновых полей и сейсмограмм определяются местоположение, размер и другие характеристики залежей. Сейсмограммы также регистрируют отраженные волны от таких неоднородностей, как каверны, ледовые образования, границы между слоями в грунте, что затрудняет исследование “полезных” отраженных волн от залежей углеводородов, в результате чего процесс анализа сейсмограмм становится более сложным.

В представленной работе проводится численное моделирование динамического поведения геологического массива, в частности вычисляются значения тензора напряжений и вектора скорости в каждой расчетной точке. Численное решение задачи позволяет подробно изучить влияние различных неоднородностей (каверн, ледовых об-

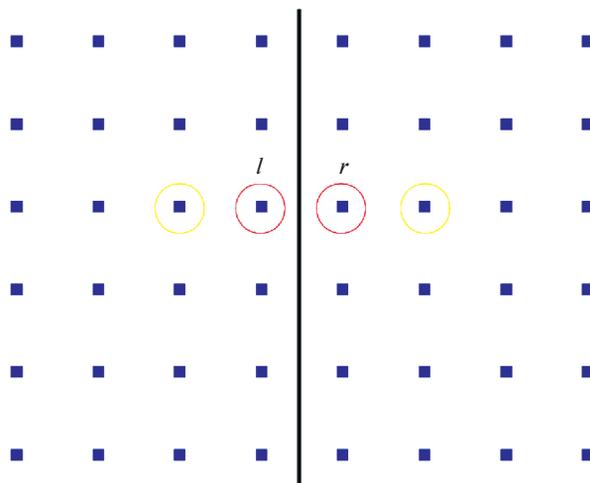


Рис. 1. Схематическое изображение вычисления значений тензора напряжений и скорости в точках на границе трещины.

разований, поверхностей раздела сред) на вид сейсмограмм. Численное решение прямой динамической задачи позволяет с большей точностью интерпретировать данные натурных экспериментов, а также сокращать затраты на дальнейшие геологические работы на исследуемой территории. Математическое моделирование позволяет учитывать наличие различных неоднородностей, в частности, трещин [2], что позволяет получать достаточно точные волновые картины в геологической среде, а также более точно интерпретировать сейсмограммы.

В настоящее время существует несколько механико-математических моделей трещин, позволяющих учесть в расчетах их наличие в геологическом массиве. Например, модель тонкого вертикального пласта (TLM — thin layer model) [3], для реализации которой необходимо использовать очень подробные расчетные сетки, что требует значительных вычислительных затрат. В работе [4], авторы используют псевдоспектральный метод для моделирования распространения упругих волн в геологических средах с трещинами. В работах [5, 6] авторами построены континуальные модели слоистых сред с линейными и нелинейными контактными условиями проскальзывания и отрыва на межслойных границах, а также предложен алгоритм численного расчета распространения волн в таких средах [7, 8]. Также существует метод, использующий вспомогательные расчетные сетки для учета трещин в модели [9].

Еще одной широко известной математической моделью трещин является модель линейного проскальзывания (linear slip model, LSM) Шонберга [10]. В данной модели смещение на границе трещины пропорционально силе сцепления на поверхности трещины. Трещина в модели LSM характеризуется двумя параметрами — длиной и параметром раскрытости. Последний можно вычислить теоретически или с помощью лабораторного эксперимента [11, 12]. В настоящей работе предлагается использовать модель LSM с применением сеточно-характеристического метода.

Сеточно-характеристический метод хорошо зарекомендовал себя при решении задач сейсморазведки [13–16]. При проведении расчетов с его помощью могут быть использованы как регулярные, так и нерегулярные расчетные сетки.

В данной работе предлагается использовать модель трещины LSM при численном решении двумерных задач (расположение трещины представлено на рис. 1). В резуль-

тате разработан и реализован алгоритм вычисления значений компонент вектора скорости и тензора напряжений в точках на границах трещины для линейно-упругой среды. Для проверки корректности разработанного алгоритма проводится тестовый расчет распространения волнового фронта в однородной среде с трещиной с параметрами, соответствующими полному отражению волны для продольной компоненты тензора напряжений Коши. Также проводится сравнение расчетов по предложенному алгоритму на основе модели LSM с расчетами по ранее разработанной модели двухбереговой бесконечно тонкой трещины [17–19] с использованием сеточно-характеристического метода.

1. Численный метод и определяющие уравнения. Для расчета компонент тензора напряжений и вектора скорости в геологической среде с трещиной использовалась система уравнений теории упругости [14]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} v &= (\nabla \cdot \sigma)^T \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma &= \lambda(\nabla \cdot v)I + \mu((\nabla \cdot v) + (\nabla \cdot v)^T) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ – плотность среды, v – скорость распространения сейсмических волн, σ – тензор напряжений Коши, t – время, λ и μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала, I – единичный тензор.

Для решения системы (1.1) применялся сеточно-характеристический метод, для использования которого представим систему (1.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_x \frac{\partial q}{\partial x} + A_y \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (1.2)$$

где вектор искомого решения $q = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, v_x, v_y\}$, матрицы A_x и A_y составлены из коэффициентов системы (1.1) и имеют следующий вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda - 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda - 2\mu \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Применяем метод расщепления по пространственным координатам, получаем две одномерные системы уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_i \frac{\partial q}{\partial i} = 0, \quad i = x, y \quad (1.4)$$

Рассмотрим систему (1.4) для координаты x :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_x \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

В силу того, что система (1.5) является гиперболической, ее можно представить в следующем виде [20]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Omega_x \Lambda_x \Omega_x^{-1} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь Ω_x – матрица из собственных векторов матрицы A_x , Λ_x – диагональная матрица с собственными значениями на диагонали. Собственные значения как матрицы A_x ,

так и матрицы A_y , равны $\{-c_p, c_p, -c_s, c_s, 0\}$, где c_p и c_s – продольная и поперечная скорости звука, соответственно, которые можно вычислить по формулам:

$$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho} \quad (1.7)$$

Аналогично можно рассмотреть систему (1.4) для координаты y .

Далее делаем замену переменных $\omega = \Omega_x^{-1}q$, после чего система (1.6) принимает вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Система (1.8) состоит из пяти уравнений, каждое из которых можно решить при помощи разностной схемы. В данной работе уравнения из системы (1.8) решались сеточно-характеристическим методом 2-го порядка точности.

2. Использование модели LSM в сеточно-характеристическом методе. Рассмотрим алгоритм вычисления значений компонент тензора напряжений и вектора скорости на границе трещины подробнее. На рис. 1 представлено схематичное изображение расчетной сетки вблизи трещины. Индексами l и r обозначены узлы сетки слева и справа от трещины, соответственно. Для них вводятся граничные условия в соответствии с моделью LSM [10], которые выглядят следующим образом:

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^r \quad (2.1)$$

$$\sigma_{xy}^l = \sigma_{xy}^r \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = K_T(v_x^r - v_x^l) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = K_N(v_y^r - v_y^l) \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1), (2.2) означают равенство нормальной и касательной компонент тензора напряжений слева и справа от трещины. Уравнения (2.3) и (2.4) позволяют вычислить эти компоненты тензора напряжений. Для этого вводятся дополнительные параметры, характеризующие трещину – параметры раскрытости трещины K_N и K_T .

Сначала рассмотрим алгоритм вычисления значений тензора напряжений и вектора скорости в точках слева от трещины. Уравнения (2.3), (2.4) позволяют вычислить две из пяти составляющих неизвестного вектора \mathbf{q} из (1.1), σ_{xx} и σ_{xy} . В данной работе уравнения (2.3), (2.4) решались с помощью одношагового метода Эйлера:

$$\sigma_{xx}^{l,n+1} = \sigma_{xx}^{l,n} + K_T \Delta t (v_x^{r,n} - v_x^{l,n}) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{xy}^{l,n+1} = \sigma_{xy}^{l,n} + K_N \Delta t (v_y^{r,n} - v_y^{l,n}) \quad (2.6)$$

Далее, для простоты обозначений индекс l везде опускается.

Для вычисления остальных компонент вектора \mathbf{q} рассмотрим подробнее уравнение (1.8), которое записано для преобразованных переменных $\omega = \Omega_x^{-1}q$. Это уравнение состоит из 5 независимых уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{\sigma_{xx}}}{\partial t} + c_p \frac{\partial \omega_{\sigma_{xx}}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \omega_{\sigma_{yy}}}{\partial t} - c_p \frac{\partial \omega_{\sigma_{yy}}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \omega_{\sigma_{xy}}}{\partial t} + c_s \frac{\partial \omega_{\sigma_{xy}}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \omega_{v_x}}{\partial t} - c_s \frac{\partial \omega_{v_x}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_{v_y}}{\partial t} = 0$$

Далее, для простоты, вместо обозначений $\omega_{\sigma_{xx}}$, $\omega_{\sigma_{yy}}$, $\omega_{\sigma_{xy}}$, ω_{v_x} , ω_{v_y} будут применяться обозначения ω_{xx} , ω_{yy} , ω_{xy} , ω_x , ω_y , соответственно. Для решения уравнений (2.7) на границе с трещиной применяется следующая схема [21]:

$$\omega_{xx_i}^{n+1} = \omega_{xx_i}^n + \frac{c_p \Delta t}{2h} (\omega_{xx_{i+1}}^n - \omega_{xx_i}^n)$$

$$\omega_{yy_i}^{n+1} = \omega_{yy_i}^n - \frac{c_p \Delta t}{2h} (\omega_{yy_i}^n - \omega_{yy_{i-1}}^n)$$

$$\omega_{xy_i}^{n+1} = \omega_{xy_i}^n + \frac{c_s \Delta t}{2h} (\omega_{xy_{i+1}}^n - \omega_{xy_i}^n) \quad (2.8)$$

$$\omega_{x_i}^{n+1} = \omega_{x_i}^n - \frac{c_s \Delta t}{2h} (\omega_{x_i}^n - \omega_{x_{i-1}}^n)$$

$$\omega_{y_i}^{n+1} = \omega_{y_i}^n,$$

где h – шаг равномерной декартовой прямоугольной сетки. Значения $\omega_{yy_i}^{n+1}$, $\omega_{x_i}^{n+1}$ и $\omega_{y_i}^{n+1}$ вычисляются с помощью известных значений в соответствующих точках на предыдущем шаге по времени. Остается найти значения $\omega_{xx_i}^{n+1}$ и $\omega_{xy_i}^{n+1}$, для вычисления которых используются условия (2.1), (2.2). Данные условия можно записать в следующем виде, учитывая, что $q = \Omega_x \omega$:

$$\Omega_{x\sigma_{xx}}^l \omega^l = \Omega_{x\sigma_{xx}}^r \omega^r \quad (2.9)$$

$$\Omega_{x\sigma_{xy}}^l \omega^l = \Omega_{x\sigma_{xy}}^r \omega^r \quad (2.10)$$

Здесь индексы σ_{xx} , σ_{xy} у матрицы Ω_x обозначают строки матрицы Ω_x , соответствующие компонентам σ_{xx} и σ_{xy} вектора \mathbf{q} . Уравнения (2.9), (2.10), вместе с (2.5), (2.6), позволяют найти оставшиеся неизвестные $\omega_{xx_i}^{n+1}$ и $\omega_{xy_i}^{n+1}$ из (2.8).

Значения справа от трещины вычисляются аналогично, за исключением того, что значения σ_{xx} и σ_{xy} , вычисленные слева, переносятся в соответствующие точки справа от трещины в связи с условиями (2.1), (2.2).

В соответствии с сеточно-характеристическим методом, для вычисления искомым функций на n -м шаге по времени (при вычислении точек на шаге $n + 1$) вводятся дополнительный узел (“ghost”-узел [22]) $i + 1$ для сетки слева от трещины и дополнительный узел $i - 1$ для сетки справа от трещины независимо друг от друга. В данные узлы заносятся значения из соотношений (2.8). Таким образом, описанный алгоритм позволяет независимо проводить вычисления для расчетных сеток справа и слева от трещины за исключением необходимости обмена значениями σ_{xx} и σ_{xy} на границе.

3. Результаты тестовых расчетов распространения сейсмического импульса в геологической среде с трещиной с использованием модели шонберга. Для проверки корректности разработанного алгоритма на основе модели трещины LSM, был проведен расчет волнового поля от трещины с нулевыми параметрами раскрытости K_N и K_T , что соответствует случаю полного отражения волны для продольной компоненты тензора на-

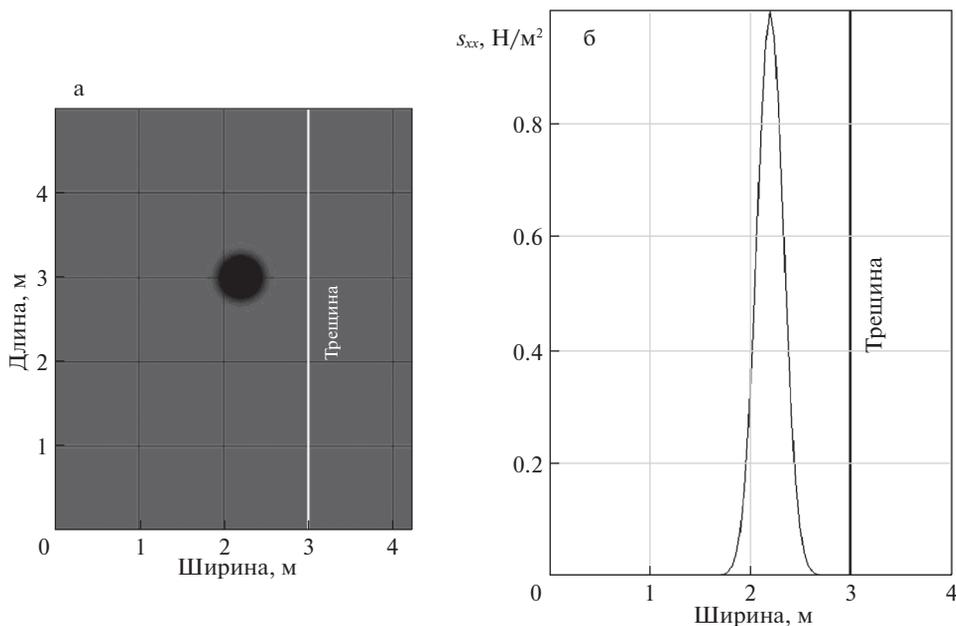


Рис. 2. Карта (а) и профиль (б) продольной компоненты тензора напряжений s_{xx} для момента времени $t = 0$ с.

пряжений (s_{xx}) от трещины. Размер геологической среды, в которой находилась трещина, был равен $4.5 \times 6 \text{ м}^2$. Физические свойства геологической среды были следующими: продольная скорость звука была равна 2 м/с , поперечная скорость звука — 1 м/с , плотность — 1 кг/м^3 . Трещина располагалась вертикально, параллельно оси y на координате $x = 3 \text{ м}$.

Проводилось моделирование распространения начального импульса, заданного следующими параметрами. В начальный момент времени скорость во всей области была равна нулю, значение продольной компоненты тензора напряжений было равно 1, значения всех остальных компонент тензора напряжений было равно нулю. В расчетах шаг по координатам x , y составлял 0.025 м , шаг по времени — 0.005 с . На рис. 2а–4а представлены карты продольной компоненты тензора напряжений в последовательные моменты времени (0 с , 0.025 с и 0.05 с , соответственно) в результате распространения сейсмической волны в однородной среде с трещиной (отмечена белой линией). На рис. 2б–4б представлены профили продольной компоненты тензора напряжений в моменты времени 0 с , 0.025 с и 0.05 с , соответственно. Из рис. 2–4 следует, что волна полностью отражается от трещины, причем значение амплитуды продольной компоненты тензора напряжений (s_{xx}) отраженной волны совпадает со значением амплитуды до отражения от трещины (рис. 4б) с точностью до знака. Это качественно подтверждает применимость модели LSM трещины в дальнейших расчетах.

4. Результаты сравнения разработанного алгоритма на основе модели трещины Шонберга с моделью двухбереговой бесконечно тонкой трещиной. Проводилось сравнение расчетов с использованием разработанного алгоритма на основе модели трещины LSM с расчетами с помощью модели двухбереговой бесконечно тонкой трещины (БТТ) с помощью сеточно-характеристического метода. Моделировалось распространение одиночного источника, заданного функцией Гаусса, в однородной среде с тре-

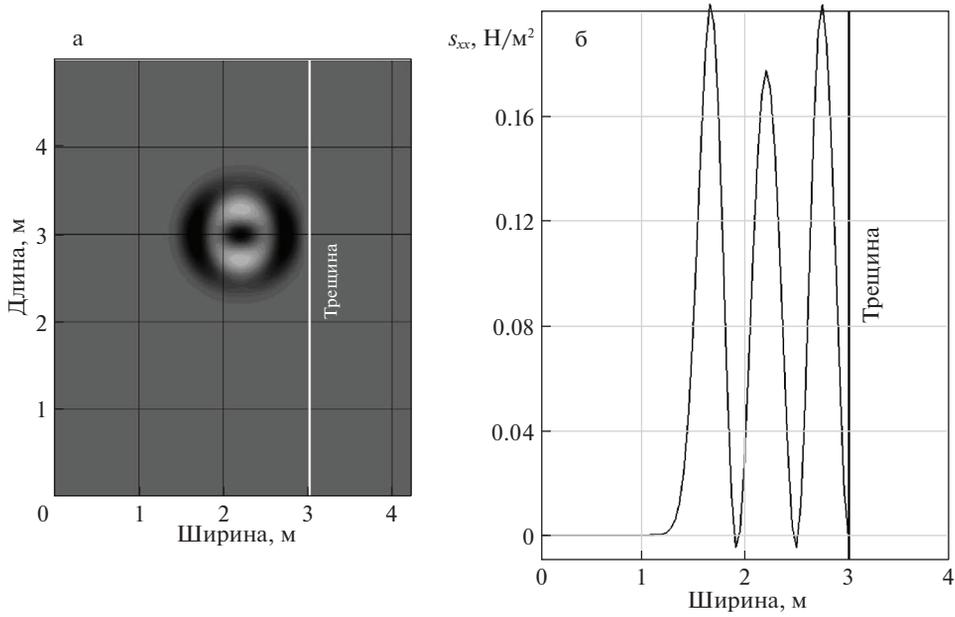


Рис. 3. Карта (а) и профиль (б) продольной компоненты тензора напряжений s_{xx} для момента времени $t = 0.025$ с.

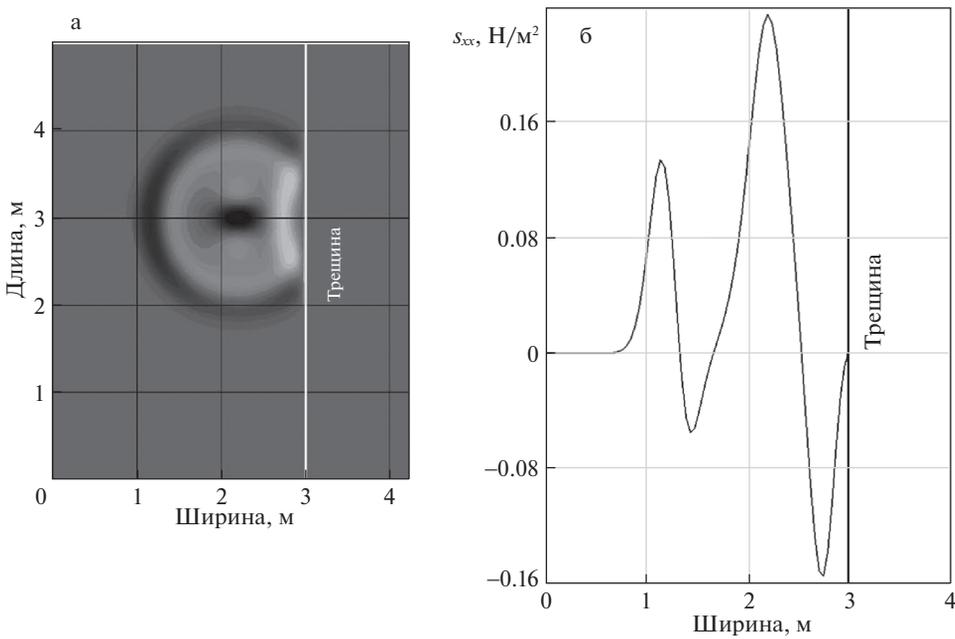


Рис. 4. Карта (а) и профиль (б) продольной компоненты тензора напряжений s_{xx} для момента времени $t = 0.05$ с.

щиной. Источник описывался следующими параметрами: скорость была равна нулю, значение продольной и поперечной компоненты тензора напряжений было равно 1, значение всех остальных компонент тензора напряжений было равно нулю. Физические свойства среды слева и справа от трещины были одинаковыми и описывались следующими параметрами: продольная скорость звука была равна 2 м/с, поперечная скорость звука – 1 м/с, плотность – 1 кг/м³. Параметры раскрытости для модели трещины LSM подбирались таким образом, чтобы максимально приблизиться к модели двухбереговой трещины [17]. Таким образом, значение параметра K_N должно быть равным нулю, чтобы тангенциальные компоненты тензора напряжений слева и справа от трещины были равны нулю, а значение параметра K_T должно стремиться к бесконечности, чтобы значения продольных компонент скорости были равны слева и справа от трещины. В модели LSM значение параметра K_N полагалось равным нулю, $K_T = 100, 200, 400$ для того, чтобы исследовать соответствие модели трещины LSM и модели БТТ. В расчетах шаг по координатам x, y составлял 1 м. Шаг по времени был равен 0.005 с при $K_T = 100$, 0.0025 с при $K_T = 200$ и 0.00125 с при $K_T = 400$. Результаты сравнения волновых откликов (компоненты s_{xx}) за вычетом волнового поля в отсутствие трещины для модели LSM при различных значениях K_T и двухбереговой трещины представлены на рис. 5. По оси x отложена ширина модели, по оси y – значения продольной компоненты тензора напряжений s_{xx} .

На рис. 5 сплошной линией показан волновой отклик от трещины, описанной моделью БТТ, пунктирными точками – моделью LSM. Из рис. 5 следует приближение волновых откликов от трещины при увеличении параметра раскрытости K_T (рис. 5в), что соответствует уравнению (2.3). Также, результаты расчетов, полученные с использованием модели трещины LSM, имеют хорошее совпадение с моделью двухбереговой трещины. Для достижения максимального соответствия моделей необходимо устремить параметр раскрытости K_T к бесконечности, что не представляется возможным.

Заключение. В данной работе представлен алгоритм применения модели трещины LSM Шонберга с использованием сеточно-характеристического метода. Разработан алгоритм расчета значений тензора напряжений и вектора скорости в точках на границе трещины, расположенной параллельно границам расчетной сетки, на структурированных сетках. Приведен метод расчета значений компонент вектора скорости и тензора напряжений в точках слева и справа от трещины для двумерного случая с помощью сеточно-характеристического метода. Дано описание “ghost”-узлов для использования представленного алгоритма в основной схеме расчета значений в точках вне границы с трещиной.

Проведены тестовые расчеты распространения импульса в однородной среде, содержащей трещину с заданной нулевой раскрытостью, для проверки правильности разработанного алгоритма. Как и предполагалось, наблюдалось полное отражение волнового фронта.

Проведено сравнение результатов расчетов с помощью модели трещины LSM (с соответствующими параметрами раскрытости) с результатами расчетов с использованием двухбереговой модели бесконечно тонкой трещины. Сравнение по значениям компоненты s_{xx} показало соответствие результатов, полученных с использованием модели LSM и с использованием модели трещины БТТ. Модель LSM является обобщением модели бесконечно тонкой двухбереговой трещины, что позволит в дальнейшем рассматривать различные модели трещин, учитывая значения параметра раскрытости. Планируется разработка аналогичного алгоритма с использованием сеточно-характеристического метода для трещины, заданной моделью LSM Шонберга, в трехмерном случае.

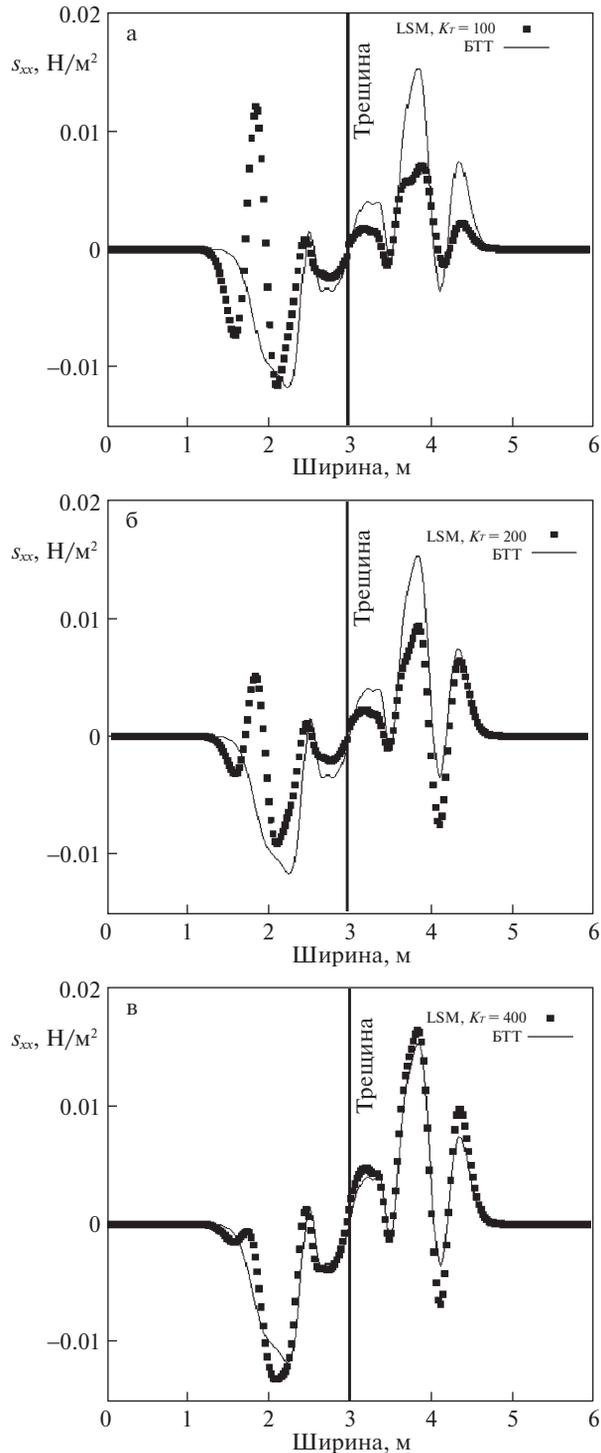


Рис. 5. Результат моделирования волнового отклика от трещины для $K_T = 100$ (а), 200 (б) и 400 (в). По оси y отложены значения компоненты s_{xx} для двух моделей трещины (LSM и БТТ – двухбереговой трещины) в момент времени $t = 0.5$ с. Трещина расположена вертикально на значении $x = 3$ м.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00281.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курин Е.А.* Сейсморазведка и суперкомпьютеры // Выч. мет. программирование. 2011. Т. 12. Вып. 1. С. 34–39.
2. *Khokhlov N., Stognii P.* Novel approach to modelling the seismic waves in the areas with complex fractured geological structures // Minerals. 2020. V. 10. № 2.
3. *Zhan Q., Sun Q., Ren Q. et al.* A discontinuous Galerkin method for simulating the effects of arbitrary discrete fractures on elastic wavepropagation // Geophys. Int. J. 2017. V. 210. № 2. P. 1219–1230.
4. *Carcione J.* Scattering of elastic waves by a plane crack of finite width in a transversely isotropic medium // Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1998. V. 22. № 4. P. 263–275.
5. *Нукитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 154–165.
6. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D.* Continuum model of the layered medium with slippage and nonlinear conditions at the interlayer boundaries // Solid State Phenom. 2017. V. 258. P. 137–140.
7. *Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.* Continuum model and method of calculating for dynamics of inelastic layered medium // Math. Models & Comput. Simul. 2019. V. 11. № 3. P. 59–74.
8. *Nikitin I.S., Burago N.G., Golubev V.I., Nikitin A.D.* Mathematical modeling of the dynamics of layered and block media with nonlinear contact conditions on supercomputers // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1392. P. 012057.
9. *Zhang J., Gao H.* Elastic wave modelling in 3-D fractured media: an explicit approach // Geophys. Intern. J. 2009. V. 177. № 3. P. 1233–1241.
10. *Schoenberg M.* Elastic wave behavior across linear slip interfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. № 5. P. 1516–1521.
11. *Rokhlin S., Wang Y.* Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. V. 89. № 2. P. 503–515.
12. *Santos J.E., Picotti S., Carcione J.* Evaluation of the stiffness tensor of a fractured medium with harmonic experiments // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2012. V. 247–248. P. 130–145.
13. *Petrov D.I.* Application of grid-characteristic method to some seismic exploration problems in the Arctic // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 955.
14. *Golubev V.I.* The usage of grid-characteristic method in seismic migration problems // Smart Innov., Syst. and Technol. 2019. V. 133. P. 143–155. https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_13
15. *Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Modelling the wave phenomena in acoustic & elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophys. Prosp. 2018. V. 66. № 8. P. 1485–1502.
16. *Khokhlov N.I., Golubev V.I.* On the class of compact grid-characteristic schemes // Smart Innov., Systems & Technol. 2019. V. 133. P. 64–77. https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_7
17. *Golubev V., Khokhlov N., Grigoriev D. et al.* Numerical simulation of destruction processes by the grid-characteristic method // Proc. Comput. Sci. 2018. V. 126. P. 1281–1288. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.08.071>
18. *Stognii P., Khokhlov N., Zhdanov M.* Novel approach to modelling the elastic waves in a cluster of subvertical fractures // 81st EAGE Conference and Exhibition 2019.
19. *Stognii P., Khokhlov N., Grigoriev D.* The comparison of two approaches to modelling the seismic reflection from the fractured media with the help of grid-characteristic method // 6th Scientific Conference. Tyumen 2019.
20. *Petrov I.B., Favorskaya A.V., Favorskaya M.N. et al.* Development and application of computational methods // Smart Innov., Syst. & Technol. 2019. V. 133. P. 3–7.
21. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2006.

22. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge: Univ. Press. 2002. P. 129–138.

Modelling of Wave Processes in Fractured Geological Media Using Schoenberg Model

P. V. Stognii^{a,#}, N. I. Khokhlov^{b,##}, and I. B. Petrov^{a,b,###}

^a *Moscow institute of physics and technology, Dolgoprudnyi, Russia*

^b *Scientific Research Institute for System Analysis RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: stognii@phystech.edu*

^{##} *e-mail: k_h@inbox.ru*

^{###} *e-mail: petrov@mipt.ru*

For describing the behaviour of geological media with Schoenberg fractures, we developed the mechanic-mathematical model, which was applied to works, connected with seismic prospecting of oil deposits. In this work, we suppose to use this model in the calculations of wave processes in geological media with the help of grid-characteristic method. The required functions are the components of vector velocity and stress tensor in the points on the border with the fracture. We carried out the computations of the seismic impulse spread in the homogeneous elastic medium with a fracture for the limit case of the complete wave reflection from the fracture border. The computations of the wave field with the use of the developed Schoenberg fracture model were compared with the computations of the wave field with the use of the model of a two-shore extremely thin fracture with the help of the grid-characteristic method. The results revealed a satisfactory coincidence between the two applied models.

Keywords: seismic prospecting, Schoenberg fractures, grid-characteristic method

REFERENCES

1. *Kurin E.A.* Seismic exploration and supercomputers (Seismorazvedka i superkomp'utery) // *Vych. met. Programirovanie*, 2011, vol. 12, no. 1, pp. 34–39. (in Russian)
2. *Khokhlov N., Stognii P.* Novel approach to modelling the seismic waves in the areas with complex fractured geological structures // *Minerals*, 2020, vol. 10, no. 2.
3. *Zhan Q., Sun Q., Ren Q. et al.* A discontinuous Galerkin method for simulating the effects of arbitrary discrete fractures on elastic wavepropagation // *Geophys. J. Int.*, 2017, vol. 210, no. 2, pp. 1219–1230.
4. *Carcione J.* Scattering of elastic waves by a plane crack of finite width in a transversely isotropic medium // *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech*, 1998, vol. 22, no. 4, pp. 263–275.
5. *Nikitin I.S.* Dynamic models of layered and block media with slip, friction and separation // *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 652–661.
6. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D.* Continuum model of the layered medium with slippage and nonlinear conditions at the interlayer boundaries // *Solid State Phenom.*, 2017, vol. 258, pp. 137–140.
7. *Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.* Continuum model and method of calculating for dynamics of inelastic layered medium // *Math. Models & Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 59–74.
8. *Nikitin I.S., Burago N.G., Golubev V.I., Nikitin A.D.* Mathematical modeling of the dynamics of layered and block media with nonlinear contact conditions on supercomputers // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1392, pp. 012057.
9. *Zhang J., Gao H.* Elastic wave modelling in 3-D fractured media: an explicit approach // *Geophys. J Int.*, 2009, vol. 177, no. 3, pp. 1233–1241.
10. *Schoenberg M.* Elastic wave behavior across linear slip interfaces // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1980, vol. 68, no. 5, pp. 1516–1521.
11. *Rokhlin S., Wang Y.* Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1991, vol. 89, no. 2, pp. 503–515.

12. Santos J.E., Picotti S., Carcione J. Evaluation of the stiffness tensor of a fractured medium with harmonic experiments // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2012, vol. 247–248, pp. 130–145.
13. Petrov D.I. Application of grid-characteristic method to some seismic exploration problems in the Arctic // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 955.
14. Golubev V.I. The usage of grid-characteristic method in seismic migration problems // *Smart Innov., Syst. & Technol.*, 2019, vol. 133, pp. 143–155.
DOI: 10.1007/978-3-030-06228-6_13
15. Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // *Geophys. Prosp.*, 2018, vol. 66, no. 8, pp. 1485–1502.
16. Khokhlov N.I., Golubev V.I. On the class of compact grid-characteristic schemes // *Smart Innov., Syst. & Technol.*, 2019, vol. 133, pp. 64–77.
DOI: 10.1007/978-3-030-06228-6_7
17. Golubev V., Khokhlov N., Grigoriev D. et al. Numerical simulation of destruction processes by the grid-characteristic method // *Proc. Comput. Sci.*, 2018, vol. 126, pp. 1281–1288.
DOI: 10.1016/j.procs.2018.08.071
18. Stognii P., Khokhlov N., Zhdanov M. Novel approach to modelling the elastic waves in a cluster of subvertical fractures // 81st EAGE Conference and Exhibition, 2019.
19. Stognii P., Khokhlov N., Grigoriev D. The comparison of two approaches to modelling the seismic reflection from the fractured media with the help of grid-characteristic method // 6th Scientific Conference, Tyumen 2019.
20. Petrov I.B., Favorskaya A.V., Favorskaya M.N. et al. Development and application of computational methods // *Smart Innov., Syst. & Technol.*, 2019, vol. 133, pp. 3–7.
21. Petrov I.B., Lobanov A.I. *Computational Mathematics Lectures*. Moscow: Internet-Univ, Inform. Technol., 2006. (in Russian)
22. LeVeque R.J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge: Univ. Press, 2002, pp. 129–138.

УДК 539.3

**ВАРИАНТ СВЯЗИ МЕХАНИЧЕСКИХ И АДГЕЗИОННЫХ
СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ**© 2020 г. С. Н. Ромашин^{1,*}, В. С. Шоркин^{1,**}¹ Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, Орел, Россия

*e-mail: sromashin@yandex.ru

**e-mail: vshorkin@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.10.2019 г.

После доработки 27.01.2020 г.

Принята к публикации 06.03.2020 г.

В работе представлен вариант выявления связи механических и адгезионных свойств линейно упругих, однородных, изотропных материалов второго порядка. Связь установлена с помощью нелокальной модели упругой среды, которая опирается на представление о парных и тройных потенциальных взаимодействиях бесконечно малых частиц сплошных твердых тел. В качестве примера использования выявленной связи показано, как механические свойства влияют на способность вступать, или не вступать в состояние адгезии.

Ключевые слова: адгезия, механические свойства, нелокальные потенциальные взаимодействия, градиентная теория упругости

DOI: 10.31857/S0032823520030078

Введение. Явление адгезии твердых тел играет как положительную, так и отрицательную роль. Для количественного описания адгезионного взаимодействия твердых тел используется целый ряд моделей (например [1–9]). В основе адгезии, как физического явления, лежат дальнедействующие потенциальные взаимодействия частиц материалов твердых тел [9–13]. В рамках механики твердого тела модели адгезии учитывают это обстоятельство различными способами. Во всех случаях зависимость характеристик адгезии от свойств материалов определяется набором параметров, который надо найти экспериментально или теоретически (например [14]).

Твердый материал под влиянием внешних воздействий в различных условиях проявляет различные свойства. Между этими свойствами существует взаимосвязь. Она обусловлена атомно-молекулярным взаимодействием.

Взаимосвязь различных свойств должна выражаться во взаимосвязи групп параметров, соответствующих их проявлениям. Например, известно [8, 10, 15–18], что для упругих материалов модули Юнга и сдвига – с одной стороны, и характеристики адгезионного взаимодействия – с другой стороны, вычисляются через изменение потенциальной энергии взаимодействия тел или их атомов. Потенциальная энергия и ее изменения рассчитываются с помощью тех или иных модельных потенциалов. Для получения информации об их параметрах из эксперимента в физике применяется способ расчета измеряемой характеристики через неизвестные параметры модельного потенциала [18]. При этом предполагается, что измеряемое свойство (явно или неявно) связано с величиной межмолекулярного потенциала, а, следовательно, может быть представлено как функция его параметров. Для реальных материалов с их слож-

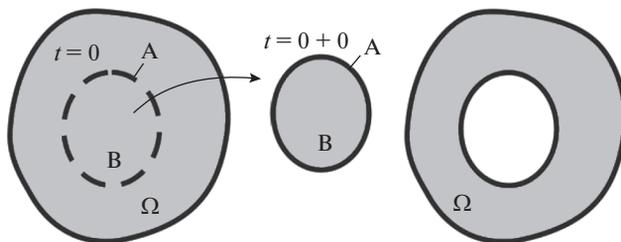


Рис. 1. Схема мгновенного выделения тела B из бесконечной среды Ω .

ними химическим составом и атомно-молекулярной структурой сделать это трудно, хотя выражение одних макропараметров через другие можно пытаться реализовать методом частиц [19, 20].

В данной работе предпринята попытка установить связь между параметрами Ламэ с энергией $\Delta f_{(12)}$ адгезии вдоль поверхности $A_{(12)}$ двух тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ с помощью нелокальной модели сплошных упругих материалов. В качестве иллюстрации выявленной связи показано, как установить, возможна или нет адгезия, зная механические свойства вступивших в контакт материалов.

1. Основные положения о взаимодействующих телах. Нелокальная модель сплошной упругой среды. Для построения нелокальной модели вводится ряд допущений. Допускается, что сплошные тела B получены сначала мысленным, с помощью поверхности A , в момент времени $t = 0$, а затем реальным, в момент $t = 0 + 0$, мгновенным выделением из бесконечно протяженных, однородных, изотропных сплошных упругих сред Ω с конфигурацией Λ_∞ , температурой Θ . Конфигурация Λ_0 тела B при мысленном выделении является отсчетной. Допущение введено для исключения влияния границ на свойства тел B в отсчетном состоянии (рис. 1).

Тело B после выделения ввиду изменения окружающих условий (удаление воздействия со стороны $\Omega \setminus B$, контакт с другим телом и т.д.), приобретает текущую конфигурацию Λ , которая с течением времени t может меняться.

Распределения температур Θ и плотностей ρ материала как в Ω , так и в B в любой момент времени t считаются равномерными, значения Θ и ρ известны. Для упрощения рассуждений допускается, что в актуальной (текущей) конфигурации Λ тело B находится в равновесии.

Центры инерции частиц dB произвольного тела B в отсчетной конфигурации Λ_0 имеют радиус-векторы $\vec{r} = x_j \vec{e}_j$, \vec{e}_j ($j = 1, 2, 3$) – ортонормированный базис. Положение частицы $dB_2 \subset B$ относительно другой частицы $dB_1 \equiv dB \subset B$ определяется вектором $\vec{l}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}$. Его длина равна $l_2 = |\vec{l}_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}|$. При движении тела B его частицы dB приобретают новые положения (рис. 2). Они характеризуются радиус-вектором $\vec{R} = X_j \vec{e}_j$ и вектором перемещения $\vec{u} = \vec{R} - \vec{r}$. Вектор перемещений определен с точностью до жестких движений.

Положение частицы $dB_1 \equiv dB$ относительно частицы $dB_j \equiv dB$, $j \geq 2$ в текущей конфигурации определяться вектором

$$\vec{L}_{1j} \equiv \vec{L}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_1 \equiv \vec{R}_j - \vec{R} = (\vec{r}_j - \vec{r}) + (\vec{u}_j - \vec{u}) = \vec{l}_j + \Delta \vec{u}_j$$

с длиной $L_j = |\vec{L}_j| = |\vec{R}_j - \vec{R}|$. Здесь $\Delta \vec{u}_{1j} \equiv \Delta \vec{u}_j = \vec{u}_j - \vec{u}$ – смещение частицы dB_j относительно частицы $dB_1 \equiv dB$ (рис. 2).

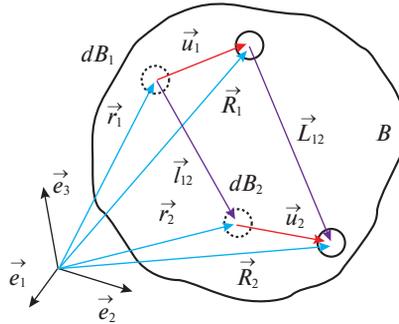


Рис. 2. Кинематика частиц $dB_1 \equiv dB$ и dB_2 .

В данной работе рассматриваются только малые деформации, когда

$$|\Delta \bar{u}/D| \ll 1, \quad \sqrt{\|\nabla \bar{u}\|} \ll 1, \quad D\sqrt{\|\nabla^2 \bar{u}\|} \ll 1 \quad (1.1)$$

Здесь $\|\nabla^n \bar{u}\|$ – сумма квадратов компонент n -го ($n = 1, 2$) градиента вектора \bar{u} ; D – характерный размер области, где необходим учет $\nabla^2 \bar{u}$.

В приближении малых деформаций (1.1) допускается представление вектора $\Delta \bar{u}$ в виде суммы

$$\Delta \bar{u} = (\nabla \bar{u})\bar{l} + (1/2)\nabla^2 \bar{u}\bar{l}^2 \quad (1.2)$$

В рамках (1.1) и (1.2) $\nabla = d/d\bar{r} = d/d\bar{l}$ – оператор Гамильтона, $\nabla^2 = \nabla \nabla$ и $\bar{l}^2 = \bar{l}\bar{l}$ – внешние произведения.

Считается, что тело B имеет внутреннюю потенциальную энергию W

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \max d_n^N \rightarrow 0}} \sum_{n=1}^N w_n^N \Delta V_n^N = \int_{\Lambda} w dV \quad (1.3)$$

Для упрощения рассуждений далее для интегральных сумм рассматриваются только такие N разбиения тела B на элементарные части ΔB_n^N , при которых объемы ΔV_n^N равны между собой. При этом $\Delta V_n^N = \Delta V^N = V/N$, где V – объем области Λ , занимаемой телом B .

Энергии $W_n^N = w_n^N \Delta V_n^N$ частиц ΔB_n^N рассматриваются как потенциальные энергии взаимодействия материальных точек b_n^N из некоторого дискретного тела $\hat{B}^N = \{b_n^N\}$ со всеми другими точками $b_m^N \in \hat{B}^N$ ($m \neq n$) того же тела. При этом энергия W тела B является потенциальной энергией W^N нелокального взаимодействия его частей ΔB_n^N .

Материальные точки b_n^N находятся в точках \bar{R}_n^N – в текущей конфигурации, и \bar{r}_n^N – в отсчетной конфигурации, занимаемых центрами инерции частиц ΔB_n^N . Для дискретного тела $\hat{B}^N = \{b_n^N\}$ его потенциальная энергия W^N , равная энергии W сплошного тела B ($W^N = W$), является функцией положения точек b_n^N : $W^N = W^N(\bar{R}_1^N, \dots, \bar{R}_N^N)$. В соответствии с [21], для этой функции справедливо представление в виде суммы

всех одно-, двух-, трех и так далее точечных функций. Рассматриваются только парные и тройные взаимодействия. Поэтому

$$W = W^N(\bar{R}_1^N, \dots, \bar{R}_N^N) = \sum_{i=1}^N W_i^N = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \left(W_{ij}^N + \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N W_{ijk}^N \right) \quad (1.4)$$

Здесь W_i^N – потенциальная энергия одной из частиц b_i^N со всеми другими частицами системы $\{b_n^N\}$, W_{ij}^N – потенциал взаимодействия пары частиц b_i^N и b_j^N , W_{ijk}^N – потенциал взаимодействия тройки частиц b_i^N , b_j^N и b_k^N .

Потенциалы W_{ij}^N и W_{ijk}^N (как и W_n^N) считаются пропорциональными объемам взаимодействующих частиц сплошного тела

$$\begin{aligned} W_{ij}^N &= \Phi^{N(2)} \Delta V_i^N \Delta V_j^N = \Phi^{N(2)} (\Delta V^N)^2 \\ W_{ijk}^N &= \Phi^{N(3)} \Delta V_m^N \Delta V_n^N = \Phi^{N(3)} (\Delta V^N)^3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Принято, что коэффициенты $\Phi^{N(2)}$ и $\Phi^{N(3)}$ (потенциалы) зависят только от межчастичных расстояний l – расстояния между парой частиц с любыми номерами в отсчетной конфигурации, и параметров $l_0^N = \sqrt[3]{\Delta V^N} = \sqrt[3]{V/N}$, $\beta^{(2)}$ и $\Phi_0^{(2)}$. Считаются справедливыми равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty, \\ d^N \rightarrow 0}} \Phi^{N(2)} &= \Phi^{(2)}(l) = \Phi_0^{(2)} \varphi^{(2)}(\xi^{(2)}), \quad (\xi^{(2)} = \beta^{(2)} l) \\ \Phi_0^{(2)} &= \left| \min \Phi^{(2)} \right| > 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

При $\xi_0 = \beta^{(2)} l_0 \rightarrow 0$ функция $\varphi^{(2)}(\xi^{(2)})$ имеет вид:

$$\varphi^{(2)}(\xi) = \begin{cases} \varphi^{(21)}(\xi), & 0 \leq \xi \leq \xi_0 \\ \varphi^{(22)}(\xi - \xi_0), & \xi_0 < \xi < +\infty \end{cases} \quad (1.7)$$

Для непрерывных и дифференцируемых необходимое число раз функции $\varphi^{(21)}(\xi)$ и $\varphi^{(22)}(\xi)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varphi^{(21)}(\xi_0) &= \varphi^{(22)}(\xi_0) = -1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi^{(22)}(\xi) = 0 \\ \frac{d\varphi^{(21)}}{d\xi} &\leq 0, \quad \frac{d\varphi^{(22)}}{d\xi} \geq 0, \quad \varphi^{(22)}(\xi) < 0 \\ \frac{d\varphi^{(21)}(\xi_0)}{d\xi} &= \frac{d\varphi^{(22)}(\xi_0)}{d\xi} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Эти выражения соответствуют требованию устойчивой дискретной системы, свидетельствующей о наличии в ней отталкивательной “сердцевины” и стремящимся к нулю “хвоста”, описывающим притяжение [21, 22]. Гарантией устойчивости [21] является положительность и ограниченность суммы всех парных взаимодействий частиц. Это получится, если

$$\int_{\Lambda_1^N} \varphi^{(21)} dV_2 = 2 \left| \int_{\Lambda_\infty \setminus \Lambda_1^N} \varphi^{(22)} dV_2 \right| \quad (1.9)$$

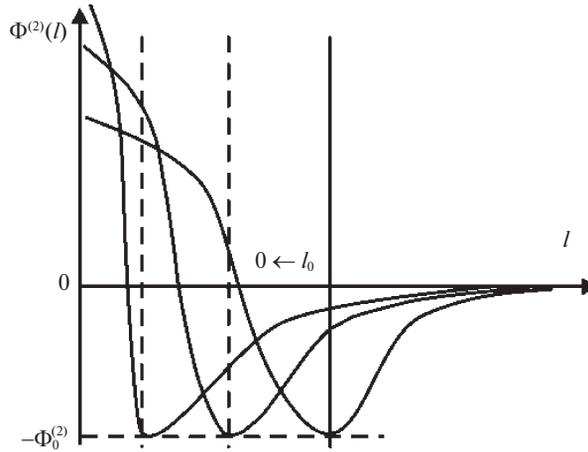


Рис. 3. Схема преобразования потенциала парных взаимодействий при переходе от дискретного описания к непрерывному.

Здесь Λ_1^N – область вокруг одной из материальных точек b_1^N , которая взаимодействует с другими точками b_2^N системы $\{b_n^N\}$ с характерным межчастичным расстоянием $l_0 \equiv l_0^N$; $\varphi^{(22)}(\xi) = e^{-2(\xi-\xi_0)} - 2e^{-(\xi-\xi_0)}$ ($\xi_0 < \xi < +\infty$) – потенциал Морзе [18]; функция $\varphi^{(21)}(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq \xi_0$) может быть любой, удовлетворяющей перечисленным свойствам.

При $l_0 \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) область Λ_1^N стягивается к точке – центру инерции частицы dB . Зависимость $\Phi^{(2)}(l)$ становится похожей на дельта-функцию Дирака (рис. 3). Получающееся при этом равенство

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \varphi^{(21)}(0) = \infty \tag{1.10}$$

является условием отсутствия взаимного проникания бесконечно малых частиц сплошного материала при их неограниченном сближении (рис. 3).

Существует целый ряд способов описания тройных потенциальных взаимодействий (например [23–26]). В данной работе трехчастичный потенциал выбирается в виде, который учитывает, что (следующие за парными в схеме Майера [27]) одна частица $dB \equiv dB_1$ взаимодействует сразу с двумя другими не взаимодействующими между собой частицами dB_2 и dB_3

$$\Phi^{N(3)} = \Phi^{N(3)}(l_2, l_3) \tag{1.11}$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d^N \rightarrow 0}} \Phi^{N(3)}(l_2, l_3) = \Phi_0^{(3)} \varphi^{(3)}(\xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}) = \Phi_0^{(3)} \varphi^{(2)}(\xi_2^{(3)}) \varphi^{(2)}(\xi_3^{(3)}) \tag{1.12}$$

Здесь $\xi_j^{(3)} = \beta^{(3)} l_j$, $0 < \xi_j^{(3)} < \infty$; $\beta^{(3)}$ и $\Phi_0^{(3)}$ – параметры, характеризующие механические свойства материала.

Трехчастичные взаимодействия влияют на характер потенциальных взаимодействий [23, 28, 29]. При их учете необходима проверка устойчивости систем частиц. Для дискретной системы $\{b_n^N\}$ можно использовать методы статистической механики [21].

Для сплошной среды условием устойчивости является положительная определенность квадратичной формы для энергии малых упругих деформаций линейной теории упругости, полученной на основании рассматриваемой нелокальной модели.

При $l_0 \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) выражение (1.4), записанное для дискретных систем, преобразуется в свой аналог для сплошных сред. В текущей конфигурации Λ тела B оно приобретает вид

$$W = \int_{\Lambda} w(\bar{R}) dV = \int_{\Lambda} \left\{ \Phi_0^{(2)} \int_{\Lambda} \phi^{(2)}(Y^{(2)}) dV_2 + \Phi_0^{(3)} \int_{\Lambda} dV_2 \int_{\Lambda} \phi^{(3)}(Y_2^{(3)}, Y_3^{(3)}) dV_3 \right\} dV \quad (1.13)$$

$$w(\bar{R}) = \left\{ \Phi_0^{(2)} \phi \int_{\Lambda} \phi^{(2)}(Y) dV_2 + \Phi_0^{(3)} \int_{\Lambda} dV_2 \int_{\Lambda} \phi^{(3)}(Y_2, Y_3) dV_3 \right\} \quad (1.14)$$

Здесь $Y^{(2)} = \beta^{(2)} L$, L – расстояние между двумя произвольными частицами, $Y_j^{(3)} = \beta^{(3)} L_j$ ($j = 2, 3$), L_j – расстояние между частицей $dB \equiv dB_1$ и частицами dB_2 и dB_3 .

Выражения (1.13) и (1.14) позволяют вычислить потенциальную энергию всего твердого деформируемого тела B , а также объемную плотность ее распределения путем суммирования потенциальных энергий всех пар и троек бесконечно его малых частиц как в отсчетной конфигурации, когда $w = w_0 = w(\bar{r})$, так и в текущей конфигурации. Это используется далее для построения локальных моделей тела B .

2. Локальные модели. Связь нелокальных и локальных характеристик механических свойств. Для выбора модели, в рамках которой предлагается определять характеристики механических свойств упругих материалов на основании экспериментальных данных, сначала вводятся характеристики кинематики произвольной бесконечно малой частицы $dB \subset B$ [30]. Используются первый $\nabla \bar{u}$ и второй $\nabla^2 \bar{u}$ градиенты ее перемещений. Искомая модель предполагается линейной. В ее рамках изменение объемной плотности Δw потенциальной энергии, вызванное внешними воздействиями, является полиномом второй степени относительно обобщенных перемещений $\nabla \bar{u}$ и $\nabla^2 \bar{u}$ частицы $dB \subset B$, а обобщенные силы – тензоры внутренних напряжений $P^{(1)} = \partial w / \partial (\nabla \bar{u})$ и $P^{(2)} = \partial w / \partial (\nabla^2 \bar{u})$, которые совершают работу на вариациях $\nabla \bar{u}$ и $\nabla^2 \bar{u}$, – полиномы их первой степени. Коэффициенты этих полиномов должны быть определены экспериментально. Вместе с тем, те же коэффициенты с помощью допущений (1.1) и (1.2) выражаются через параметры $(\Phi_0^{(2)}, \beta^{(2)}, \Phi_0^{(3)}, \beta^{(3)})$ потенциалов $\Phi^{(2)}$ и $\Phi^{(3)}$ следующими действиями.

В текущей конфигурации используются потенциалы $\Phi^{(2)} = \Phi_0^{(2)} \phi^{(2)}(\beta^{(2)} L)$ и $\Phi^{(3)} = \Phi_0^{(3)} \phi^{(3)}(\beta^{(3)} L_2, \beta^{(3)} L_3)$. Они получаются путем замены в функциях $\phi^{(2)}(\beta^{(2)} l)$ и $\phi^{(3)}(\beta^{(3)} l_2, \beta^{(3)} l_3)$, определенных равенствами (1.7)–(1.9), (1.12), аргументов $l \equiv l_2$ и l_3 на $L \equiv L_2 = |\bar{L}_2|$ и $L_3 = |\bar{L}_3|$, в которых $\bar{L}_j = \bar{l}_j + \Delta \bar{u}_j$. Для $\Delta \bar{u}_j$ справедлива оценка (1.1). Поэтому зависимости $\phi^{(2)}(\bar{L})$ и $\phi^{(3)}(\bar{L}_2, \bar{L}_3)$ представлены полиномами второй внешней степени относительно $\Delta \bar{u} \equiv \Delta \bar{u}_2$ и $\Delta \bar{u}_3$. Их коэффициенты – это коэффициенты разложения $\phi^{(2)}(\bar{L})$ и $\phi^{(3)}(\bar{L}_2, \bar{L}_3)$ по внешним степеням $\Delta \bar{u} \equiv \Delta \bar{u}_2$ и $\Delta \bar{u}_3$ в окрестности $\bar{L}_j = \bar{l}_j$. Вследствие этого выражение (1.14) также окажется полиномом второй степени относительно $\Delta \bar{u}_j$ (представлено в [31]). Подстановка в полученное выражение вектора $\Delta \bar{u}_j$ в виде полинома (1.2) второй степени по внешним степеням вектора \bar{l}_j приводит его к виду, который соответствует представлению о линейной модели упругого материала второго порядка.

$$w - w_0 = \Delta w = \sum_{n=1}^2 P^{0(n)} \cdot \dots \cdot (\nabla^n \bar{u})^T + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^2 (\nabla^m \bar{u}) \cdot \dots \cdot C^{(n,m)} \cdot \dots \cdot (\nabla^n \bar{u})^T \quad (2.1)$$

Тензоры напряжений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ при этом определяются равенством

$$P^{(n)} = P^{0(n)} + \sum_{m=1}^2 (\nabla^m \bar{u}) \cdot \overbrace{\dots}^{m \text{ раз}} \cdot C^{(m,n)} \quad (n = 1, 2) \quad (2.2)$$

Коэффициенты полиномов (2.1) и (2.2) выражаются через параметры $(\Phi_0^{(2)}, \beta^{(2)}, \Phi_0^{(3)}, \beta^{(3)})$ путем интегрирования соответствующих выражений, содержащих первый и второй градиенты потенциалов $\Phi^{(2)} = \Phi_0^{(2)} \varphi^{(2)}(\beta^{(2)} l)$ и $\Phi^{(3)} = \Phi_0^{(3)} \varphi^{(3)}(\beta^{(3)} l_2, \beta^{(3)} l_3)$ по области, занимаемой телом B в отсчетной конфигурации Λ_0

$$P^{0(n)} = \int_{\Lambda} (\nabla_2 \Phi^{(2)}) \bar{l}^n dV_2 + \sum_{j=2}^3 \int_{\Lambda} \left[\int_{\Lambda} (\nabla_j \Phi^{(3)}) \bar{l}_j^n dV_2 \right] dV_3 \quad (2.3)$$

$$C^{(n,m)} = \int_{\Lambda} \bar{l}^n (\nabla_2^2 \Phi^{(2)}) \bar{l}^m dV_2 + \sum_{p,q=2}^3 \int_{\Lambda} \left[\int_{\Lambda} \bar{l}_p^n (\nabla_p \nabla_q \Phi^{(3)}) \bar{l}_q^m dV_2 \right] dV_3 \quad (2.4)$$

Здесь $\nabla_j \equiv d \dots / d\bar{l}_j = \nabla$, $P^{0(n)}$ и $C^{(m,n)}$ – тензоры начальных напряжений и характеристик механических свойств.

Для бесконечно протяженного тела Ω , когда влиянием близости границ области интегрирования на их значения можно пренебречь, тензоры $P^{0(2)}$, $C^{(1,2)}$ и $C^{(2,1)}$ обращаются в нуль. Выражение (2.1) приобретает вид $\Delta w = \Delta^* w + P^{0(1)} \cdot (\nabla \bar{u})^T$, характерный для модели Джеремилло [30], в рамках которой прирост $\Delta^* w$ величины Δw определяется равенствами:

$$\Delta^* w = \Delta w - P^{0(1)} \cdot (\nabla \bar{u})^T = \varepsilon \cdot C^{J(1,1)} \cdot \varepsilon^T + (\nabla \varepsilon) \cdot C^{J(2,2)} \cdot (\nabla \varepsilon)^T \quad (2.5)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left((\nabla \bar{u}) + (\nabla \bar{u})^T \right) \quad (2.6)$$

$$C^{J(1,1)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} C^{J(2,2)} = & C_1^J (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{nk} + \delta_{mn} \delta_{jl} \delta_{ik} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \\ & + \delta_{ml} \delta_{jk} \delta_{in} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{mj} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{kl} \delta_{ij}) + C_2^J (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{il} \delta_{kn} + \\ & + \delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} + \delta_{jn} \delta_{kl} \delta_{im} + \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом получаются равенства матриц компонент соответствующих тензоров: $C_{ijkm}^{J(1,1)} = C_{ijkm}^{(1,1)}$, $C_{ijkml}^{J(2,2)} = C_{ijkml}^{(2,2)}$. В этих равенствах правые части определяются выражениями (2.4) (при условии $C^{(1,2)} = C^{(2,1)} = 0$), зависящими от $(\Phi_0^{(2)}, \beta^{(2)}, \Phi_0^{(3)}, \beta^{(3)})$, а левые части – зависящими от $(\lambda, \mu, C_1^J, C_2^J)$ выражениями (2.7) и (2.8). В каждой из матриц линейно независимыми компонентами оказываются только две. Так что, приравняв выбранные пары соответственных компонент тензоров $C_{ijkm}^{J(1,1)}$ и $C_{ijkm}^{(1,1)}$, $C_{ijkml}^{J(2,2)}$ и $C_{ijkml}^{(2,2)}$, можно построить систему четырех уравнений для неизвестных $(\Phi_0^{(2)}, \beta^{(2)}, \Phi_0^{(3)}, \beta^{(3)})$, считая $(\lambda, \mu, C_1^J, C_2^J)$ известными.

Из равенств $C_{1212}^{(1,1)} = C_{1212}^{J(1,1)}$ и $C_{1122}^{(1,1)} = C_{1122}^{J(1,1)}$ следует система уравнений:

$$\Psi_{11}Z^{(2)} + \Psi_{12}Z^{(3)} = \mu, \quad \Psi_{21}Z^{(2)} + \Psi_{22}Z^{(3)} = \lambda, \quad (2.9)$$

где неизвестными величинами являются

$$Z^{(2)} = \Phi_0^{(2)}/\beta^{(2)3}, \quad Z^{(3)} = \Phi_0^{(3)}/\beta^{(3)6} \quad (2.10)$$

Коэффициенты Ψ_{ij} ($i, j = 1, 2$) определяются с помощью расчета в сферической системе координат необходимых компонент тензора $C^{(1,1)}$ [32].

$$\begin{aligned} \Psi_{11} = \Psi_{21} &= \frac{\pi}{15} \int_0^\infty \xi^{(2)4} \frac{d^2\varphi^{(2)}}{d\xi^{(2)2}} d\xi^{(2)}, & \Psi_{12} &= \frac{8\pi^2}{45} \int_0^\infty \xi_3^{(3)2} d\xi_3^{(3)} \int_0^\infty \xi_2^{(3)4} \frac{\partial^2\varphi^{(3)}}{\partial\xi_2^{(3)2}} d\xi_2^{(3)} \\ \Psi_{22} &= \frac{16\pi^2}{27} \int_0^\infty \xi_2^{(3)} d\xi_3^{(3)} \int_0^\infty \xi_2^{(3)3} \frac{\partial^2\varphi^{(3)}}{\partial\xi_2^{(3)}\partial\xi_3^{(3)}} d\xi_3^{(3)} + \frac{8\pi^2}{45} \int_0^\infty \xi_3^{(3)2} d\xi_3^{(3)} \int_0^\infty \xi_2^{(3)4} \frac{\partial^2\varphi^{(3)}}{\partial\xi_2^{(3)2}} d\xi_2^{(3)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Видно, что учет только парных взаимодействий приводит к условию: $\lambda = \mu$.

Компоненты $C_{111111}^{(2,2)}$ и $C_{112211}^{(2,2)}$ связаны с параметрами $(\Phi_0^{(2)}, \beta^{(2)}, \Phi_0^{(3)}, \beta^{(3)})$ соотношениями

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}Z^{(2)}) \frac{1}{\beta^{(2)2}} + (\Gamma_{12}Z^{(3)}) \frac{1}{\beta^{(3)2}} &= C_{111111}^{(2,2)} \\ (\Gamma_{21}Z^{(2)}) \frac{1}{\beta^{(2)2}} + (\Gamma_{22}Z^{(3)}) \frac{1}{\beta^{(3)2}} &= C_{112211}^{(2,2)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь неизвестными являются $(1/\beta^{(2)2})$ и $(1/\beta^{(3)2})$. Величины $Z^{(2)}$ и $Z^{(3)}$ определены при решении системы (2.9). Коэффициенты Γ_{km} являются результатом вычислений в сферической системе координат с началом в центре инерции частицы $dB \equiv dB_1$ компонент тензора $C^{(2,2)}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{\pi}{14} \int_0^\infty \xi^{(2)6} \frac{d^2\varphi^{(2)}}{d\xi^{(2)2}} d\xi^{(2)}, & \Gamma_{12} &= \frac{4\pi^2}{21} \int_0^\infty \xi_2^{(3)6} \frac{d^2\varphi^{(3)}}{d\xi_2^{(3)2}} d\xi_2^{(3)} \\ \Gamma_{21} &= \frac{\pi}{70} \int_0^\infty \xi^{(2)6} \frac{d^2\varphi^{(2)}}{d\xi^{(2)2}} d\xi_{12}^{(2)}, & \Gamma_{22} &= \frac{4\pi^2}{105} \int_0^\infty \xi_2^{(3)6} \frac{d^2\varphi^{(3)}}{d\xi_2^{(3)2}} d\xi_2^{(3)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

В то же время компоненты $C_{111111}^{J(2,2)}$ и $C_{112211}^{J(2,2)}$ (на основании (2.8)) связаны с C_1^J и C_2^J равенствами $C_{111111}^{J(2,2)} = 9C_1^J + 6C_2^J$, $C_{112211}^{J(2,2)} = C_1^J + 2C_2^J$. Следствием этого и (2.13) является приведение системы (2.12) к виду

$$\begin{aligned} (\Gamma_{21}Z^{(2)}) \frac{5}{\beta^{(2)2}} + (\Gamma_{22}Z^{(3)}) \frac{5}{\beta^{(3)2}} &= 9C_1^J + 6C_2^J \\ (\Gamma_{21}Z^{(2)}) \frac{1}{\beta^{(2)2}} + (\Gamma_{22}Z^{(3)}) \frac{1}{\beta^{(3)2}} &= C_1^J + 2C_2^J \end{aligned} \quad (2.14)$$

Очевидно, что система имеет решение лишь тогда, когда $C_1^J = C_2^J = C^J$ в предположении о том, что $\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta$. Значит, нелокальная модель соответствует такому варианту модели Джеремилло, в котором неклассические свойства материала характеризуются только одним параметром. При этом совпадают параметры $\beta^{(2)}$ и $\beta^{(3)}$, характеризующие “скорость” изменения потенциалов парного и тройного взаимодействий.

Предполагается, что λ , μ и C^J определяются на основании данных экспериментов по определению классических механических свойств однородных, изотропных, линейно упругих материалов, а также экспериментов по описанию нелинейности акустических ветвей дисперсионного закона для плоских продольных волн высокой частоты, в однородных, изотропных, линейно упругих материалах [32, 33].

Результатом проделанных рассуждений является аналитическая связь параметров λ , μ и C^J локальной модели с параметрами $\Phi_0^{(2)}$, $\Phi_0^{(3)}$ и β нелокальной модели того же материала. Видна также необходимость использования второго градиента перемещений.

3. Метод определения параметров межчастичных потенциалов из разных материалов. Явление адгезии связано с нелокальным потенциальным взаимодействием частиц из разных материалов. Вместе с тем изложенная выше возможность определения параметров межчастичных потенциалов взаимодействия через значения классических характеристик локального упругого состояния относится только к однородным по своим свойствам материалам. Для определения параметров потенциалов взаимодействия разных материалов через характеристики каждого из них проведены следующие рассуждения.

Предполагается, что независимо от того, рассматриваются взаимопроникающие материалы или каждый из этих материалов сконцентрирован в двух разных, не имеющих общих частей объемах, частицы этих материалов взаимодействуют между собой по одним и тем же законам, не зависящим от того, каким материалом окружены соответствующая пара или тройка. Значит вид потенциалов парных и тройных взаимодействий в обоих случаях один и тот же. Характеристики твердого раствора, создаваемого взаимопроникающими материалами, могут быть измерены или рассчитаны, например, по модели Рейсса. Это дает возможность определить характеристики потенциалов взаимодействия частиц разных материалов.

Рассматривается материал, являющийся объединением двух взаимно проникающих сред (их смесь [34]), моделирующих реальные материалы тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$. Пусть $B_{(s)} = B_{(1)} \cup B_{(2)}$ – тело, получившееся за счет взаимного проникновения тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$; $\Lambda_{(1)} = \Lambda_{(2)} = \Lambda_{(s)}$ – общая конфигурация $B_{(s)}$, $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$. Пусть $dB_s = dB_{(1)} \cup dB_{(2)}$ – частица рассматриваемого объединенного тела. Она имеет объем $dV_{(s)}$. Часть его $dV_{(1)} = c_{(1)}dV_s$ занимает материал частицы $dB_{(1)}$, а часть $dV_{(2)} = c_{(2)}dV_{(s)}$ – материал частицы $dB_{(2)}$. Здесь $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ – объемные концентрации материалов $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ в материале $B_{(s)}$, $c_{(1)} + c_{(2)} = 1$.

Материал тела $B_{(s)}$ считается однородным, изотропным, линейно упругим. Вид потенциалов парных и тройных межчастичных взаимодействий в материале $B_{(s)}$ описывается зависимостями (1.6)–(1.12). При любых $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ справедливы установленные для таких материалов связи между группами параметров $(\lambda_{(s)}, \mu_{(s)}, C_{(s)}^J)$ и $(\Phi_{0(s)}^{(2)}, \Phi_{0(s)}^{(3)}, \beta_{(s)})$. Концентрационные зависимости для модулей Юнга $E_{(s)}$ и сдвига $G_{(s)}$ этого материала определяются экспериментально или теоретически. Один из вариантов соответствует модели Рейсса.

$$\frac{1}{E_{(s)}} = \frac{c_{(1)}}{E_{(1)}} + \frac{c_{(2)}}{E_{(2)}}, \quad \frac{1}{G_{(s)}} = \frac{c_{(1)}}{G_{(1)}} + \frac{c_{(2)}}{G_{(2)}} \quad (3.1)$$

Допускается, что частицы $dB_{(1)}$ и $dB_{(2)}$, входящие в состав частиц $dB_{(s)}$, испытывают адгезионное взаимодействие. Оно характеризуется потенциалами

$$\begin{aligned} \Phi_{(\alpha\beta)}^{(2)} &= \Phi_{0(\alpha\beta)}^{(2)} \Phi_{(\alpha\beta)}^{(2)} (\beta_{(12)} L_{(\alpha\beta)2}) \\ \Phi_{(\alpha\beta\gamma)}^{(3)} &= \Phi_{0(\alpha\beta\gamma)}^{(3)} \Phi_{(\alpha\beta\gamma)}^{(3)} (\beta_{(12)} L_{(12)2}, \beta_{(12)} L_{(12)3}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь греческие буквы в скобках нижнего индекса являются перечнем номеров взаимодействующих материалов – первого или второго: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, при этом, хотя бы два номера не совпадают; цифры вне скобок – номера взаимодействующих частиц, так что $L_{(12)j}$ – расстояние между частицами $dB_{(1)} \equiv dB_{(1)1}$ и $dB_{(2)j}$ ($j = 2, 3$) в текущей конфигурации.

Неизвестные параметры $(\Phi_{0(12)}^{(2)}, \Phi_{0(112)}^{(3)}, \Phi_{0(122)}^{(3)}, \beta_{(12)})$ потенциалов (3.2) выражены через параметры $(\Phi_{0(s)}^{(2)}, \beta_{(s)}, \Phi_{0(s)}^{(3)})$.

Потенциальная энергия взаимодействия двух бесконечно близких друг к другу частиц $dB_{(s)j}$ ($j = 1, 2$), имеющих объемы $dV_{(s)j} = dV_{(\alpha)j} + dV_{(\beta)j} = c_{(\alpha)}dV_{(s)j} + c_{(\beta)}dV_{(s)j}$, с одной стороны, равна $\Phi_{(s)0}^{(2)}dV_{(s)1}dV_{(s)2}$. С другой стороны эта величина равна потенциалу взаимодействия частиц однородных материалов, входящих в состав частицы твердого раствора $\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Phi_{(\alpha\beta)0}^{(2)}dV_{(\alpha)1}dV_{(\beta)2}$. Поэтому справедливо равенство

$$\Phi_{(s)0}^{(2)} = c_{(1)}^2 \Phi_{(1)0}^{(2)} + 2c_{(1)}c_{(2)} \Phi_{(12)0}^{(2)} + c_{(2)}^2 \Phi_{(2)0}^{(2)} \quad (3.3)$$

Для трех бесконечно близких друг к другу частиц $dB_{(s)p}$ ($p = 1, 2, 3$) аналогично можно получить:

$$\Phi_{(s)0}^{(3)} = c_{(1)}^3 \Phi_{(111)0}^{(3)} + 3c_{(1)}c_{(2)}^2 \Phi_{(112)0}^{(3)} + 3c_{(1)}^2c_{(2)} \Phi_{(122)0}^{(3)} + c_{(2)}^3 \Phi_{(222)0}^{(3)} \quad (3.4)$$

Вычисление объемной плотности потенциальной энергии всех парных и тройных взаимодействий произвольной частицы $dB_{(s)} \equiv dB_{(s)1}$ с ее окружением внутри $\Omega_{(s)}$ приводит к равенствам

$$\left(\frac{\Phi_{(s)0}^{(2)}}{\beta_{(s)}^3} \right) = c_{(1)}^2 \left(\frac{\Phi_{(1)0}^{(2)}}{\beta_{(1)}^3} \right) + 2c_{(1)}c_{(2)}^2 \left(\frac{\Phi_{(12)0}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3} \right) + c_{(2)}^2 \left(\frac{\Phi_{(2)0}^{(2)}}{\beta_{(2)}^3} \right) \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\Phi_{(s)0}^{(3)}}{\beta_{(s)}^6} \right) = c_{(1)}^3 \left(\frac{\Phi_{(1)0}^{(3)}}{\beta_{(1)}^6} \right) + 3c_{(1)}^2c_{(2)} \left(\frac{\Phi_{(112)0}^{(3)}}{\beta_{(1)}^3\beta_{(12)}^3} \right) + 3c_{(1)}c_{(2)}^2 \left(\frac{\Phi_{(122)0}^{(3)}}{\beta_{(2)}^3\beta_{(12)}^3} \right) + c_{(2)}^3 \left(\frac{\Phi_{(2)0}^{(3)}}{\beta_{(2)}^6} \right) \quad (3.6)$$

Один из возможных способов решения системы (3.3)–(3.6) опирается на аппроксимацию концентрационных зависимостей для $(\Phi_{(s)0}^{(2)}, \Phi_{(s)0}^{(2)}/\beta_{(s)}^3)$ и $(\Phi_{(s)0}^{(3)}, \Phi_{(s)0}^{(3)}/\beta_{(s)}^6)$, полученных с использованием выражений (2.9), (2.14) и (3.1), полиномами для (3.5) второй и для (3.6) третьей степени относительно концентраций $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$.

4. Адгезионное взаимодействие двух тел. Одной из характеристик адгезионного взаимодействия твердых тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ является энергия адгезии. Суммарная энергия адгезии равна изменению их свободной энергии $\Delta f_{(12)}$, произошедшему в изотермическом обратимом процессе вступления их в адгезионное взаимодействие. Если $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ полубесконечны, ограничены параллельными плоскостями, то говорят об энергии адгезии F_a , приходящейся на единицу площади их противоположных участков [35]. При отсутствии контакта говорят о зависимости энергии адгезии от расстояния между $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ (например [36]). Предлагается способ расчета энергии адгезии, который удобно использовать в случаях, когда участки поверхностей $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$, вдоль которых тела $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ вступают в адгезионный контакт, конгруэнтны, так что добиваться этой конгруэнтности путем соответствующего деформирования не требуется.

Допускается, что тела $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ выделяются мысленно в бесконечно протяженных средах $\Omega_{(1)}$ и $\Omega_{(2)}$, имеющих одинаковые температуры $\Theta_{(1)}$ и $\Theta_{(2)}$, поверхностями $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$. В момент $t = 0$ они выделяются реально и мгновенно. Также одновременно в момент времени $t = 0 + 0$ они вступают вдоль поверхности $A_{(12)}$ в адгезионный контакт. Это допущение равносильно мгновенной замене тела $C_{(1)} = \Omega_{(1)} \setminus B_{(1)}$, контактирующей с мысленно выделенным телом $B_{(1)}$ вдоль $A_{(1)}$, состоящим из другого материала телом $B_{(2)}$, контактирующим с $B_{(1)}$ вдоль части $A_{(12)}$ поверхности $A_{(1)}$.

Мгновенность такой замены сохраняет в момент $t = 0 + 0$ положения всех частиц $dB_{(1)}$ и $dB_{(2)}$ относительно центров инерции тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$. Однако при этом в каждом из этих тел нарушается равновесие и начинается их деформирование в общем случае сопровождаемое тепловыми изменениями. Если ими пренебречь, а процесс образования тела $B = B_{(1)} \cup B_{(2)}$ и последующего деформирования до установления равновесия будет адиабатическим, то возникшее в момент $t = 0 + 0$ изменение $\Delta f_{(12)}$ свободной энергии тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ с течением времени меняться не будет. Следовательно, значение $\Delta f_{(12)}$, вычисленное в момент $t = 0 + 0$ с использованием расчета нелокальных потенциальных взаимодействий для отсчетных конфигураций тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$, будет равно энергии упругих деформаций, возникших в объединенном теле $B_{(12)} = B_{(1)} \cup B_{(2)}$ к моменту перехода его в равновесное состояние.

Пусть $W_{(\alpha)}$ и $W_{(12)}$ потенциальные энергии взаимодействия частиц тел $B_{(\alpha)}$ (с номерами $\alpha = 1, 2$) и $B_{(12)}$ соответственно. Тогда равное суммарной энергии адгезии изменение свободной энергии (в соответствии с ее определением [35])

$$\Delta f_{(12)} = f_{(12)} - f_{(1)} - f_{(2)}, \quad (4.1)$$

где $f_{(12)}$, $f_{(1)}$ и $f_{(2)}$ соответственно свободные энергии объединенного тела $B_{(12)}$ и его составляющих $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ до вступления в адгезионный контакт.

Если это равенство записывается для момента времени $t = 0 + 0$, то для проведения конкретных расчетов в соответствии с изложенными в разделе 1 допущениями можно получить следующее выражение [37]

$$\Delta f_{(12)} = \int_{\Lambda_{(\alpha)}} dV_{(\alpha)} \left[\int_{\Lambda_{(\beta)}} \Phi_{(\alpha\beta)}^{(2)} dV_{(\beta)2} + \int_{\Lambda_{(\alpha)}} dV_{(\alpha)2} \int_{\Lambda_{(2)}} \Phi_{(\alpha\alpha\beta)}^{(3)} dV_{(\beta)3} + \int_{V_{(\beta)}} dV_{(\beta)2} \int_{V_{(\beta)}} \Phi_{(\alpha\beta\beta)}^{(3)} dV_{(\beta)3} \right] \quad (4.2)$$

Сказанное свидетельствует о том, что при сделанных допущениях об изотермичности и обратимости адгезионного взаимодействия тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ энергия этого взаимодействия при их фиксированной конфигурации зависит от потенциалов межчастичных взаимодействий, параметры которых, как следует из результатов первого и второго разделов, определяются механическими свойствами материалов $B_{(\alpha)}$ — параметрами $\lambda_{(\alpha)}$, $\mu_{(\alpha)}$, $C_{(\alpha)}^J$. Очевидно, что при одинаковых конфигурациях тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ и их взаимной ориентации, но разных их материалах, то есть разных наборах значений $\lambda_{(\alpha)}$, $\mu_{(\alpha)}$, $C_{(\alpha)}^J$ энергия адгезии, как и ее распределение, окажутся разными.

Приводимый далее пример иллюстрирует использование оценки потенциальной энергии парных и тройных взаимодействий, соответствующих моменту $t = 0 + 0$, на основании выражения (4.2).

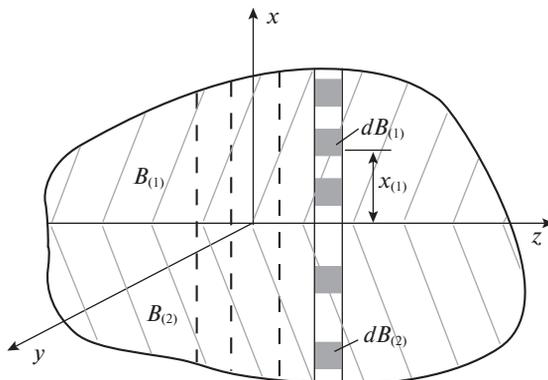


Рис. 4. Расчетная схема адгезионного взаимодействия полубесконечных тел.

5. Пример оценки влияния механических свойств материалов на их адгезионные свойства. Для исключения “схватывания” скользящих друг относительно друга деталей различных устройств используются твердые смазки. Актуальным является теоретически обоснованные рекомендации по выбору их материала на основании информации о механических свойствах трущихся материалов. Предлагаемый пример иллюстрирует возможность получения такой рекомендации в рамках предложенной модели адгезии.

Вывод о наличии или отсутствии адгезии строится, как и в теории взаимодействий Ван-дер-Ваальса [23], на результатах сопоставления величины и знака сил парных и тройных взаимодействий.

Выражение (3.2) свидетельствует о том, что воздействие одного из тел на другое тело является суммой двух видов воздействий слагающих их частиц. Одно из них обусловлено парными взаимодействиями, а другое – тройными. На примере анализа взаимодействия тел $B_{(1)} : 0 < x \equiv x_{(1)} < +\infty$, $B_{(2)} : -\infty < x_{(2)} < 0$ (рис. 4) предлагается оценка роли каждого из видов взаимодействия тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ в ответе на вопрос о наличии или отсутствии адгезии между ними в зависимости от их механических свойств.

Для упрощения математических рассуждений считается, что силы адгезии со стороны тела $B_{(2)}$ на частицы $dB_{(1)} \subset B_{(1)}$ ориентированы перпендикулярно плоскости адгезионного контакта $A_{(12)} : x \equiv x_{(1)} = x_{(2)} = 0$ тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ и зависят только от расстояния $x \equiv x_{(1)}$ от $A_{(12)}$. Предположение аналогично предположению работ [39, 40].

Учитывая это, взаимодействующие тела можно мысленно разделить на цилиндрические части одинакового бесконечно малого сечения, перпендикулярные плоскости контакта $A_{(12)} : x = 0$. Так что учитываются только те силы взаимодействия, которые возникают между частицами разных материалов, принадлежащих соосным цилиндрам (рис. 4).

На основании выражения (4.2), с учетом сделанных допущений, получено выражение, которое определяет значение приходящейся на единицу объема частицы $dB_{(1)}$, величины $w_{(1)} = w_{(1)}^{(2)} + w_{(1)}^{(3)}$ потенциальной энергии ее парных $w_{(1)}^{(2)}$ и тройных $w_{(1)}^{(3)}$ взаимодействий с частицами тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$

$$w_{(1)} = w_{(1)}^{(2)} + w_{(1)}^{(3)} = \int_{\Lambda_{(2)}} \Phi_{(12)}^{(2)} dV_{(2)2} + \int_{\Lambda_{(1)}} dV_{(1)2} \int_{\Lambda_{(2)}} \Phi_{(112)}^{(3)} dV_{(2)3} + \int_{\Lambda_{(2)}} dV_{(2)2} \int_{V_{(2)}} \Phi_{(122)}^{(3)} dV_{(2)3} \quad (5.1)$$

Параметры потенциалов $\Phi_{(12)}^{(2)}$, $\Phi_{(112)}^{(3)}$, $\Phi_{(122)}^{(3)}$ и $\beta_{(12)}$ определены выражениями (3.3)–(3.6).

В соответствии с принятым предположением об их цилиндрической структуре расстояние между частицами отсчитывается вдоль нормали к поверхности контакта $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$. В примере рассматривается взаимодействие только одной частицы $dB_{(1)}$ со всеми частицами $dB_{(2)}$ из находящегося напротив нее цилиндра бесконечно малого сечения в теле $B_{(2)}$ (рис. 4). Поэтому в расчетах первое слагаемое в выражении $w_{(1)}^{(3)}$, определяющее взаимодействие частицы $dB_{(1)} \equiv dB_{(1)1}$ с другими частицами $dB_{(1)2} \in B_{(1)}$, отсутствует. Частица $dB_{(1)}$ находится на расстоянии $x \equiv x_{(1)}$ от поверхности контакта. С ней взаимодействуют все частицы $dB_{(2)}$, расстояние от которых до $dB_{(1)}$ не менее $x \equiv x_{(1)}$. Несмотря на то, что координаты частиц $dB_{(2)2}$ и $dB_{(2)2}$ отсчитываются вдоль одной оси – оси цилиндра, которому они принадлежат, интегралы в последнем слагаемом выражения (4.1) вычисляются независимо друг от друга. В результате получена зависимость $w_{(1)}$ от безразмерного расстояния $\xi = \beta_{(12)}x$ между частицей $dB_{(1)}$ и телом $B_{(2)}$

$$w_{(1)}(\xi) = \left(\frac{\Phi_{0(12)}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3} \right) \left(2e^{-\xi} - \frac{1}{2}e^{-2\xi} \right) + \left(\frac{\Phi_{0(122)}^{(3)}}{\beta_{(12)}^6} \right) \left(2e^{-\xi} - \frac{1}{2}e^{-2\xi} \right)^2 \quad (5.2)$$

Для частицы $dB_{(1)}$, которая контактирует с цилиндром, $\xi = \beta_{(12)}x \rightarrow 0$. Поэтому

$$w_{(1)} \rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi_{0(12)}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3} + \frac{3}{2} \frac{\Phi_{0(122)}^{(3)}}{\beta_{(12)}^6} \right) \quad (5.3)$$

Сила, действующая на частицу $dB_{(1)} \equiv dB_{(1)1}$ со стороны других частиц $dB_{(1)2} \subset B_{(1)}$, а также частиц $dB_{(2)}$ определяется равенством

$$\begin{aligned} \bar{F}_{(1)} = \bar{F}_{(1)}^{(2)} + \bar{F}_{(1)}^{(3)} = & \int_{\Lambda_{(2)}} \left(-\frac{d\Phi_{(12)}^{(2)}}{d\vec{l}_{(21)}} \right) dV_{(2)2} + \\ & + \int_{\Lambda_{(1)}} dV_{(1)2} \int_{\Lambda_{(2)}} \left(-\frac{d\Phi_{(112)}^{(3)}}{d\vec{l}_{(21)}} \right) dV_{(2)3} + \int_{\Lambda_{(2)}} dV_{(2)2} \int_{V_{(2)}} \left(-\frac{d\Phi_{(122)}^{(3)}}{d\vec{l}_{(21)}} \right) dV_{(2)3} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь $\vec{l}_{(21)}$ – радиус-вектор частицы $dB_{(1)}$ относительно $dB_{(2)}$. Векторы $\vec{l}_{(21)}$ и $\vec{F}_{(21)}$ параллельны и направлены в одну сторону (значение $F_{(21)}$, $\bar{F}_{(21)}^{(2)}$, $\bar{F}_{(21)}^{(3)} > 0$) в случае отгаливания, направлены в разные стороны (значение $F_{(21)}$, $\bar{F}_{(21)}^{(2)}$, $\bar{F}_{(21)}^{(3)} < 0$) в случае притяжения.

При отсутствии учета $\Phi_{(112)}^{(3)}$ выражение для расчета значения $F_{(21)}$ в рассматриваемом примере приобретает следующий вид

Объемная плотность силы воздействия цилиндра на частицу определяется равенством:

$$\begin{aligned} F_{(1)} = F_{(1)}^{(2)} + F_{(1)}^{(3)} = & -\beta_{(12)} \left(\frac{\Phi_{0(12)}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3} \right) \left(2e^{-\xi} - e^{-2\xi} \right) - \\ & - 2\beta_{(12)} \left(\frac{\Phi_{0(122)}^{(3)}}{\beta_{(12)}^6} \right) \left(2e^{-\xi} - e^{-2\xi} \right) \left(2e^{-\xi} - \frac{1}{2}e^{-2\xi} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Просуммировав воздействие стержня из $B_{(2)}$ на все частицы стержня из $B_{(1)}$, контактирующего с ним, можно получить приходящуюся на единицу площади $A_{(12)}$ силу $\sigma_{(1)}$ действия тела $B_{(2)}$ на тело $B_{(1)}$

$$\sigma_{(1)} = \frac{1}{\beta_{(12)}} \int_0^{+\infty} F_{(1)}(\xi) d\xi = \sigma_{(1)}^{(2)} + \sigma_{(1)}^{(3)} = \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{\Phi_{0(12)}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3} + \frac{3}{2} \frac{\Phi_{0(122)}^{(3)}}{\beta_{(12)}^6} \right) \quad (5.6)$$

В выражениях (5.2), (5.3), (5.5), (5.6) слагаемые, содержащие параметр $\Phi_{0(122)}^{(3)}$, характеризуют влияние тройных взаимодействий. Поэтому при $\Phi_{0(122)}^{(3)} = 0$ и $\Phi_{0(12)}^{(2)} > 0$ – тройные взаимодействия не учитываются, а парные взаимодействия таковы, что находясь на любых расстояниях $x \equiv x_{(1)}$ от тела $B_{(2)}$ частица $dB_{(1)}$ притягивается к нему, так как $\sigma_{(1)}(\xi) < 0$. Если $\Phi_{0(12)}^{(2)} > 0$ и $\Phi_{0(122)}^{(3)} > 0$, это утверждение сохраняется.

При $\Phi_{0(12)}^{(2)} > 0$, $\Phi_{0(122)}^{(3)} < 0$ видно, что составляющая силы $\sigma_{(1)}^{(3)} = (9/4)(-\Phi_{0(122)}^{(3)}/\beta_{(12)}^6) = (9/4) \left| \Phi_{0(122)}^{(3)}/\beta_{(12)}^6 \right| > 0$, порожденная тройными взаимодействиями, уменьшает действие силы притяжения $\sigma_{(1)}^{(2)} = (-3/2)(\Phi_{0(12)}^{(2)}/\beta_{(12)}^3) < 0$, порожденной парными взаимодействиями, и при выполнении неравенства

$$\left(\frac{\Phi_{0(12)}^{(2)}}{\beta_{(12)}^3} \right) < \frac{3}{2} \left| \frac{\Phi_{0(122)}^{(3)}}{\beta_{(12)}^6} \right| \quad (5.7)$$

окажется, что сила $\sigma_{(1)} = \sigma_{(1)}^{(2)} + \sigma_{(1)}^{(3)}$ становится отталкивающей. Значит, между телом $B_{(2)}$ частицей $dB_{(1)}$ адгезии нет.

Выразив параметры $\left(\Phi_{0(12)}^{(2)}/\beta_{(12)}^3 \right)$ и $\left(\Phi_{0(122)}^{(3)}/\beta_{(12)}^6 \right)$ потенциалов межчастичных взаимодействий, входящие в выражения (5.2)–(5.7), через модули Юнга и сдвига контактирующих материалов методами данной работы, можно получить условия, связывающие эти модули, как в случае хорошей адгезии материалов, так и при ее отсутствии.

С помощью этой величины сделана оценка возможности адгезии некоторых пар материалов. Результат сопоставляется с имеющейся информацией о взаимодействии материалов этих пар.

Существует целый ряд анизотропных материалов, у которых в одном из направлений $\nu \leq 0$ (определяется методами работы [41]), обладающих антиадгезионными свойствами: тальк, графит, дисульфиды молибдена (MoS_2) и вольфрама (WS_2) и т.д. [42]. Это учтено в расчете приходящейся на единицу площади поверхности контакта тел $B_{(1)}$ и $B_{(2)}$ силы взаимодействия $\sigma_{(1)}$ для пар: Тальк – Cu, Тальк – Fe, Cu – Fe. Для первой пары получено: $\sigma_{(1)} = 65 \times 10^9 \text{ Н/м}^2 > 0$. Медь отталкивает тальк, адгезии между ними нет. Для второй пары: $\sigma_{(1)} = 523 \times 10^9 \text{ Н/м}^2 > 0$. Железо отталкивает тальк, адгезии нет. Для третьей пары: $\sigma_{(1)} = -53 \times 10^9 \text{ Н/м}^2 < 0$. Медь притягивает сталь, адгезия есть.

В качестве исходных приняты следующие значения модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν характеристик упругого состояния контактирующих материалов: тальк [42]: $E = 0.16 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0$; медь [43]: $E = 1.10 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.31$; железо [43]: $E = 2.12 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0.26$.

Полученные выводы соответствуют известным из технической и технологической практики выводам об адгезионном взаимодействии рассмотренных пар материалов.

Заключение. В работе представлены рассуждения, позволяющие выразить характеристики адгезионного взаимодействия однородных, изотропных, линейно упругих материалов через их классические характеристики упругого состояния – параметры Ламэ, а также неклассические – параметры полностью симметричной модели материалов второго порядка Джеремилло, которые можно определить с помощью экспериментов по исследованию нелинейности дисперсионного закона плоских акустических волн. Представленные результаты позволяют теоретически подобрать такие сочетания материалов с известными механическими свойствами, которые будут обладать заданными адгезионными свойствами, в том числе и антиадгезионными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Об одном подходе к решению задач о взаимодействии упругих тел при наличии адгезии // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. С. 323–327.
2. Солдатенков И.А. Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: функция влияния для неоднородного упругого полупространства // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 358–371.
3. Белов П.А., Лурье С.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий // Мех. комп. мат. констр. 2007. Т. 13. № 4. С. 519–536.
4. Турусов Р.А. Адгезионная механика. М.: НИУ МГСУ, 2015. 232 с.
5. Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смилга В.П. Адгезия твердых тел. М.: Наука, 1973. 280 с.
6. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Y.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 67. P. 378–326.
7. Johnson K.L. Adhesion and friction between a smooth elastic spherical asperity and plane surface // Proc. Roy. Soc. London. 1997. A. V. 453. P. 163–179.
8. Maugis D. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Berlin: Springer, 2000. 425 p.
9. McMeeking R.M. A Maxwell stress for material interactions // J. Colloid Interface Sci. 1998. V. 199. № 2. P. 187–196.
10. Hamaker H.C. The London – van der Waals attraction between spherical particles // Phys. 1937. V. 4. № 10. P. 1058–1072.
11. Cappella B., Dieltier G. Force-distance curves by atomic force microscopy // Surf. Sci. Rep. 1999. V. 34. P. 1–104.
12. Лифшиц Е.М. Теория межмолекулярных сил притяжения между твердыми телами // Труды Е.М. Лифшица / Под ред. Пятаевского Л.П., Рудого Ю.Г. М.: Физматлит, 2004. 648 с.
13. Партенский М.Б. Самосогласованная электронная теория металлической поверхности // УФН. 1979. Т. 128. Вып. 1. С. 69–106.
14. Yu N., Polycarpou A.A. Adhesive contact based on the Lenard – Jones potential: a correction to the value of the equilibrium distance as used in the potential // J. Colloid Interface Sci. 2004. V. 278. P. 428–435.
15. Физический энциклопедический словарь. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1960. 664 с.
16. Борн М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решеток. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 488 с.
17. Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 312 с.
18. Каплан И.Г. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий. М.: Наука, 1982. 312 с.
19. Кривцов А.М., Кривцова Н.В. Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела // Дальневост. матем. журн. 2002. Т. 3. № 2. С. 254–276.
20. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
21. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971. 362 с.
22. Уленбек Г. Фундаментальные проблемы статистической механики // УФН. 1971. Т. 103. Вып. 2. С. 275–318.
23. Бараш Ю.С. Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988. 344 с.

24. Tersoff J. New empirical approach for the structure and energy of covalent system // Phys. Rev. 1988. V. 37. № 12. P. 6991–6999.
25. Erkoç S. Empirical many-body potential energy functions used computer simulations of condensed matter properties // Phys. Reports. 1997. V. 278. P. 79–105.
26. Poluektov Yu.M., Soroka A.A. The equation of state and the quasiparticle mass in the degenerate Fermi system with an effective interaction // East Europ. J. Phys. 2015. V. 2. № 3. P. 40–49.
27. Майер М. Статистическая механика. М.: Мир, 1980. 544 с.
28. Бараиш Ю.С., Гинзбург В.Л. Некоторые вопросы теории сил Ван-дер-Ваальса // УФН. 1984. Т. 143. Вып. 3. С. 345–389.
29. Векилов Ю.Х., Вернер В.Д., Самсонова М.Б. Электронная структура поверхностей непериодических металлов // УФН. 1987. Т. 151. Вып. 2. С. 341–373.
30. Лурье С.А., Белов П.А. Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурой // Мат. мод. сист. и проц. 2006. № 14. С. 114–132.
31. Шоркин В.С., Фроленкова Л.Ю., Азаров А.С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел // Материаловедение. 2011. № 2. С. 2–8.
32. Шоркин В.С. Нелинейные дисперсионные свойства высокочастотных волн в градиентной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 104–121.
33. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.
34. Рушицкий Я.Я. Элементы теории смеси. Киев: Наук. думка, 1991. 158 с.
35. Физический энциклопедический словарь / Под ред. Введенского Б.А. М.: Сов. энциклопедия, 1960. Т. 1. С. 19.
36. Вакилов А.Н., Мамонова М.В., Прудников В.В. Адгезия металлов и полупроводников в рамках диэлектрического формализма // Физика твердого тела. 1997. Т. 39. № 6. С. 964–967.
37. Presnetsova V.Yu., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S., Yakushina S.I. A variant of describing adhesion interaction in the probe sample system of an atomic-force microscope // Nanosci.&Technol. 2018. V. 9. № 4. P. 299–323.
38. Фроленкова Л.Ю., Шоркин В.С. Поверхностная энергия и энергия адгезии упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 77–92.
39. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 279–289.
40. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Y.P. Effect of contact deformations on adhesion particles // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 53. P. 314–326.
41. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Об отрицательности коэффициента Пуассона для анизотропных материалов // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 5. С. 614–616.
42. Вахромеев Г.С., Ерофеев Л.Я., Канайкин В.С., Номоконова Г.Г. Петрофизика. Томск: Изд-во Том. ун.-та, 1997. 462 с.
43. Андреев Т.В. и др. Свойства элементов / Под ред. Самсонова Г.В. Ч. 1: Физические свойства. М.: Металлургия, 1976. 599 с.

Variant of Connection of Mechanical and Adhesive Properties of Solid Materials

S. N. Romashin^{a,#} and V. S. Shorkin^{a,##}

^a Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

[#] e-mail: sromashin@yandex.ru

^{##} e-mail: vshorkin@yandex.ru

The paper presents a variant of the relationship between the mechanical and adhesive properties of linearly elastic, homogeneous, isotropic materials of the second order. The bonds were established using nonlocal models of an elastic medium, which is based on the idea of pair and triple interactions of infinitesimal particles of solid bodies. It is shown that mechanical properties affect the ability to enter or not to enter the state of adhesion.

Keywords: adhesion, mechanical properties, nonlocal potential interactions, gradient theory of elasticity

REFERENCES

1. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Approach to solving the problems on interaction between elastic bodies in the presence of adhesion // *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 9, pp. 534–538.
2. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces: the influence function for an elastic ‘layer–half-space’ system // *JAMM*, 2016, vol. 80, no. 4, pp. 351–358.
3. *Belov P.A., Lurie S.A.* Theory of ideal adhesion interaction // *Mekh. Komp. Mater i Konstr.*, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 519–536. (in Russian)
4. *Turusov R.A.* Adhesive Mechanics. (Adgezionnaya mekhanika) Moscow: NRU MGSU, 2015. 232 p. (in Russian)
5. *Derjaguin B.V., Krotova N.A., Smilga V.P.* Adhesion of Solids. (Adgeziya tverdykh tel) Moscow: Nauka, 1973. 280 p. (in Russian)
6. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Y.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.*, 1975, vol. 67, pp. 378–326.
7. *Johnson K.L.* Adhesion and friction between a smooth elastic spherical asperity and plane surface // *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1997, vol. 453, pp. 163–179.
8. *Maugis D.* Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Berlin: Springer, 2000. 425 p.
9. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.*, 1998, vol. 199, pp. 187–196.
10. *Hamaker H.C.* The London – van der Waals attraction between spherical particles // *Physica*, 1937, vol. 4, no. 10, pp. 1058–1072.
11. *Cappella B., Dietler G.* Force-distance curves by atomic force microscopy // *Surf. Sci. Rep.*, 1999, vol. 34, pp. 1–104.
12. *Lifshits E.M.* The theory of molecular attractive forces between solids // *Sov. Phys. JETP*, 1956, vol. 2, no. 1, pp. 73–83.
13. *Partenskii M.B.* Self-consistent electron theory of a metallic surface // *Sov. Phys. Uspekhi*, 1979, vol. 22, no. 5, pp. 330–351.
14. *Yu N., Polycarpou A.A.* Adhesive contact based on the Lenard – Jones potential: a correction to the value of the equilibrium distance as used in the potential // *J. Colloid Interface Sci.*, 2004, vol. 278, pp. 428–435.
15. *Physical Encyclopedic Dictionary. (Fizicheskii entsiklopedicheskiy slovar)* Moscow: Sov. Entsikl., 1960, vol. 1, 664 p. (in Russian)
16. *Born M., Huang K.* Dynamical Theory of Crystal Lattices. Oxford: Clarendon Press, 1954. 488 p.
17. *Lejbfriid G.* A Microscopic Theory of the Mechanical and Thermal Properties of Crystals. (Mikroskopicheskaya teoriya mekhanicheskikh i teplovykh svoystv kristallov) Moscow; Leningrad: Fizmatlit., 1963. 312 p. (in Russian)
18. *Kaplan I.G.* Introduction to the Theory of Intermolecular Interactions. (Vvedeniye v teoriyu mezhmolekulyarnykh vzaimodeystviy) Moscow: Nauka, 1982. 312 p. (in Russian)
19. *Krivtsov A.M., Krivtsova N.V.* Method of particles and its use in the mechanics of a deformable solid body // *Daln. Mat. Zhurn. Daln. Otd. RAN*, 2002, vol. 3, no. 2, pp. 254–276. (in Russian)
20. *Krivtsov A.M.* Deformation and Fracture of Solids with Microstructure. (Deformirovanie i rasrusheniye tverdykh tel s mikrostrukturoy) Moscow: Fizmatlit, 2007. 304 p. (in Russian)
21. *Ruelle D.* Statistical Mechanics: Rigorous Results. N.Y.: Benjamin, 1969.
22. *Ulenbek G.* Fundamental problems of statistical mechanics // *Sov. Phys. Uspekhi*, 1971, vol. 103, no. 2, pp. 275–318. (in Russian)
23. *Barash Yu.S.* Van der Waals Forces. (Sily van der Waalsa) Moscow: Nauka, 1988. 344 p. (in Russian)
24. *Tersoff J.* New empirical approach for the structure and energy of covalent system // *Phys. Rev.*, 1988, vol. 37, no. 12, pp. 6991–6999.
25. *Erkoc S.* Empirical many-body potential energy functions used computer simulations of condensed matter properties // *Phys. Rep.*, 1997, vol. 278, pp. 79–105.

26. *Poluektov Yu.M., Soroka A.A.* The equation of state and the quasiparticle mass in the degenerate Fermi system with an effective interaction // East Europ. J. Phys., 2015, vol. 2, no. 3, pp. 40–49.
27. *Mayer M.* Statistical Mechanics. N.Y.: Wiley, 1940. 495 p.
28. *Barash Yu.S., Ginzburg V.L.* Some problems in the theory of van der Waals forces // Sov. Phys. Usp., 1984, vol. 27, pp. 467–491.
29. *Vekilov Yu.Kh., Verner V.D., Samsonova M.B.* Electron structure of surfaces of nontransition metals // Sov. Phys. Usp., 1987, vol. 30, pp. 172–192.
30. *Lur'e S.A., Belov P.A.* Variational formulation of mathematical models of media with microstructure // PNRPU. 2006, no 14. pp. 114–132. (in Russian)
31. *Shorkin V.S., Frolenkova L.Yu., Azarov A.S.* Study of influence of triple interaction of medium particles on surface and adhesion properties of solids // Materialoved., 2011, no. 2, pp. 2–7.
32. *Shorkin V.S.* Nonlinear dispersion properties of high-frequency waves in the gradient theory of elasticity // Mech. Solids, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 898–912.
33. *Kittel Ch.* Introduction to Solid State Physics. N.Y.: Wiley, 2004.
34. *Rushitskiy Ya. Ya.* Elements of the Mixture Theory. (Elementy teorii smesey) Kiev: Nauk. Dumka, 1991. 158 p. (in Russian)
35. Physical Encyclopedic Dictionary. (Fizicheskiy entsyklopedicheskiy slovar) Moscow: Sov. Entsikl., 1960, vol. 1, p. 19. (in Russian)
36. *Vakilov A.N., Mamonova M.V., Prudnikov A.P.* Adhesion of metals and semiconductors analyzed by a dielectric formalism // Phys. Solid State, 1997, vol. 39, no. 6, pp. 864–867.
37. *Presnetsova V.Yu., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S., Yakushina S.I.* A variant of describing adhesion interaction in the probe sample system of an atomic-force microscope // Nanosci.&Technol., 2018, vol. 9, no. 4, pp. 299–323.
38. *Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* Surface energy and adhesion energy of elastic bodies // Mech. Solids, 2017, vol. 52, pp. 62–74.
39. *Goryacheva, I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // JAMM, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 273–282.
40. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Y.P.* Effect of contact deformations on adhesion particles // J. Colloid Interface Sci., 1975, vol. 53, pp. 314–326.
41. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* About negativity of the Poisson's ratio for anisotropic materials // Doklady Phys., 2009, vol. 54, no. 12, pp. 546–548.
42. *Vahromeev G.S., Erofeev L.Ya., Kanaykin V.S., Nomokonova G.G.* Petrophysics. (Petrofizika) Tomsk: Tomsk Univ. Publ., 1997. 462 p. (in Russian)
43. *Andreev T.V. et al.* Properties of Elements. (Svoystva elementov) / Ed. by *Samsonov G.V.* Part 1: Physical Properties. Moscow: Metallurgiya, 1976. 599 p. (in Russian)