

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 67, номер 5, 2022

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Электродинамическое моделирование многолучевой антенны на основе двухслойной линзы Моргана

*С. Е. Банков, М. Д. Дупленкова* 419

Функциональные особенности мета-интерферометра с пространственно разнесенными и независимо электрически управляемыми метаструктурами на основе киральных и дипольных электропроводящих элементов

*Г. А. Крафтмахер, В. С. Бутылкин, Ю. Н. Казанцев, Д. С. Каленов, В. П. Мальцев* 430

Связанные плазмонные колебания и резонансы в треугольном кластере из трех серебряных наноцилиндров

*А. П. Анютин* 440

---

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Исследование геодезических линз с плавным переходом

*А. С. Венецкий, В. А. Калошин, Т. Т. Чан* 447

---

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Оптимальный и квазиоптимальный прием ВОС-сигналов на основе алгоритмов с переприсвоением в перспективных глобальных навигационных спутниковых системах

*М. С. Ярлыков* 454

Оптимальное комплексирование измерителей в условиях противодействия среды

*А. Н. Детков* 485

Метод оценки производительности вычислительного комплекса при мониторинге технического состояния радиолокационных станций и сенсорных платформ

*Н. С. Акиншин, А. А. Потапов, Е. И. Минаков, А. В. Тимошенко, А. Ю. Перлов* 493

---

## ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Моделирование оптического волокна на основе фазоконтурных схем замещения

*С. А. Иванов, П. В. Закалкин, И. Ю. Смирнов* 500

---

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

О сингулярности решения уравнений плотного электронного пучка при эмиссии в  $T$ -режиме

*Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой* 509

---

## **ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

Диагностика состояния блоков микроконтроллера с помощью встроенных средств отладки при воздействии нейтронного и тормозного излучений

*А. С. Пилипенко*

514

---

## **ХРОНИКА**

К 75-летию Вадима Анатольевича Калошина

520

---

---

---

---

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

---

---

УДК 621.396.67

**ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОЛУЧЕВОЙ  
АНТЕННЫ НА ОСНОВЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ЛИНЗЫ МОРГАНА**© 2022 г. С. Е. Банков<sup>а</sup>, \*, М. Д. Дупленкова<sup>а</sup><sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: sbankov@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.03.2021 г.

После доработки 17.10.2021 г.

Принята к публикации 25.10.2021 г.

Рассмотрена многолучевая антенна на основе двухслойной линзы Моргана в виде двух связанных диэлектрических пластин с переменной толщиной и расстоянием между ними. Антенна содержит двухслойную линзу и кольцевую решетку облучателей в виде антенн Вивальди, а также дополнительные элементы: согласующий слой и корректирующее кольцо. Кольцевая решетка облучателей замкнута. Рассмотрены вопросы проектирования и выбора параметров элементов многолучевой антенны. Электродинамическое моделирование выполнено в системе HFSS. Показано, что в двухслойной линзе существенно ослаблен эффект ее затенения облучателями, что позволяет сформировать систему лучей с верными диаграммами направленности, обеспечивающую обзор пространства в секторе азимутальных углов 360°. Продемонстрирована возможность формирования узких лучей с низким уровнем бокового и заднего излучения.

DOI: 10.31857/S0033849422050035

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Планарные квазиоптические устройства активно используются в антенной технике и технике СВЧ для формирования заданного распределения поля. Среди них мы можем отметить планарное зеркало [1] и линзу [2], предложенные в середине XX столетия.

Интерес к планарным квазиоптическим структурам повысился в последние десятилетия благодаря развитию технологии печатных схем СВЧ. Комбинация этой технологии с оптическими принципами преобразования поля порождает новые типы планарных линз, зеркал, фильтров и т.д. [3]. Можно отметить ряд планарных рефлекторов на основе технологии substrate integrated waveguides (SIW) [4–6]. Офсетное параболическое зеркало этого типа было рассмотрено в [4]. Более сложная двухзеркальная планарная система Грегори представлена в [5]. Перспективным решением является применение многослойных структур, таких как исследованная в работе [6].

Применение двухслойных зеркал открывает возможность для синтеза и проектирования нового класса зеркальных оптических систем, которые не могут быть реализованы традиционным трехмерным путем из-за эффекта затенения. В планарных многослойных системах падающие и отраженные волны распространяются на разных

слоях и поэтому рефлекторы, формирующие оптическую систему не затеняют друг друга.

Трехслойная двухзеркальная система такого типа представлена в работе [7]. Она состоит из двух зеркал одинаковых размеров. При этом субрефлектор не затеняет главное зеркало из-за отмеченной выше причины. Специальная форма зеркал обеспечивает уникальные сканирующие свойства такой системы.

В последнее время печатные планарные линзы с метаповерхностями [8] являются объектом интенсивного исследования. Интерес к ним обусловлен возможностью создания эффективных и технологичных планарных линз. Теоретические исследования и практические разработки планарных линз с метаповерхностями представлены в работах [9–14]. Среди них можно упомянуть интересные для практических применений линзы Люнебурга.

Как указано выше, популярность структур с метаповерхностями обусловлена их технологичностью. Однако мы должны также отметить большие успехи в области 3D-печати [15], которые существенно расширяют класс интересных для практики объектов. Многие структуры, которые ранее оценивались как неперспективные из-за их низкой технологичности сейчас находят применение. Следует отметить, что параметры поверхностных

волн могут контролироваться не только с помощью метаповерхностей, но также путем изменения толщины и проницаемости диэлектрической пластины, в которой они распространяются. Такие способы управления полностью соответствуют возможностям трехмерной печати. Линзы данного типа имеют большие преимущества в силу существенно меньших тепловых потерь по сравнению с линзами на метаповерхностях. Среди квазиоптических структур перспективных для 3D-печати можно отметить анизотропную линзу Люнебурга, исследованную в работе [16].

Линза Люнебурга традиционно используется в качестве базового элемента для построения многолучевых антенн (МА). Благодаря своей симметрии она не имеет оптических aberrаций, что потенциально позволяет создавать МА с сектором обзора в  $360^\circ$ , что весьма важно для систем связи с пространственным разделением сигналов. Однако возможности традиционных градиентных линз (частный случай – линза Люнебурга) существенно ограничены эффектом затенения. Многолучевая антенна кроме линзы содержит систему облучателей, которые препятствуют нормальному излучению в свободное пространство, когда они заполняют сектор углов в  $360^\circ$ . Во многих случаях для устранения эффекта затенения сектор обзора приходится уменьшать до  $90^\circ$ . Таким образом, возможности градиентных линз используются далеко не полностью.

Применение двух одинаковых градиентных линз, соединенных с помощью системы направленных трехдецибелных (3 дБ) ответвителей, было предложено в работе [17]. Эта структура получила название двухлинзовой МА. Линзы изолированы друг от друга, а связь между ними обеспечивается с помощью кольцевой решетки направленных ответвителей. Двухлинзовая МА преобразует цилиндрическую волну, создаваемую облучателем в одной из линз, например в нижней, в волну с плоским фазовым фронтом в верхней линзе, из которой происходит излучение в свободное пространство. По этой причине облучатели МА не мешают излучению и, таким образом, устраняется эффект затенения. Потенциально двухлинзовая МА обеспечивает одновременный обзор пространства в полном секторе азимутальных углов, равном  $360^\circ$ .

Двухслойная линза Люнебурга, предложенная в работе [18], является развитием двухлинзовой МА [17]. Планарные линзы в этой структуре имеют распределенную связь. Эта связь обеспечивает передачу электромагнитной энергии с одного слоя структуры на другой. Благодаря этому необходимость в использовании решетки направленных 3 дБ-ответвителей отпадает, что значительно упрощает конструкцию МА.

Идея двухслойной линзы была развита в работе [19], в которой рассмотрен синтез двухслойной линзы Моргана. Линза Моргана является обобщением линзы Люнебурга. Ее синтез описан в [20]. В работе [19] показано, что с точки зрения удобства практической реализации линза Моргана имеет ряд преимуществ перед линзой Люнебурга. Там же показано, что двухслойная линза Моргана обеспечивает точное выполнение фазовых условий синтеза для поля излучения. Условие полной передачи энергии с одного слоя на другой выполняется приближенно. Однако возникающие при этом потери могут быть уменьшены до пренебрежимо малых значений, 0.2 дБ.

Цель данной работы – развитие исследований, представленных в [19, 20], т.е. получение результатов электродинамического моделирования МА на основе двухслойной линзы Моргана, которое выполнено с использованием системы High Frequency System Simulator (HFSS).

## 2. СИНТЕЗ ДВУХСЛОЙНОЙ ЛИНЗЫ МОРГАНА

Двухслойная градиентная линза схематично показана на рис. 1а, 1б. Она состоит из двух связанных планарных волноводов (ПВ). Под ПВ мы понимаем произвольную изотропную двумерную волноведущую структуру, направляющую волны в любом направлении в горизонтальной плоскости. Двухслойная линза имеет плоскость симметрии, проходящую посередине между ПВ, что позволяет нам использовать для ее анализа метод симметрии [21]. В рамках этого метода рассматриваются две парциальные структуры, соответствующие размещению в плоскости симметрии магнитной и электрической стенок. Поле в парциальных структурах принято называть соответственно четными и нечетными волнами.

Синтез линзы, описанный в работе [20], приближенный. Приведем допущения, в рамках которых он выполняется. Первое допущение предполагает, что изменения параметров градиентной линзы происходят достаточно медленно. Данное обстоятельство позволяет пренебречь эффектами отражения и взаимной связи волн разных типов волн на неоднородных участках. В рамках такого приближения мы ограничиваемся анализом возбуждения и независимого распространения основных четной и нечетной волн системы связанных ПВ.

Вторым важным допущением является допущение слабой связи ПВ. Данное понятие является стандартным для теории связанных волн [22], поэтому раскрывать его подробно не имеет смысла. Отметим только, что в этом режиме поля четной и нечетной волн приближенно представляются как сумма и разность полей уединенных ПВ.

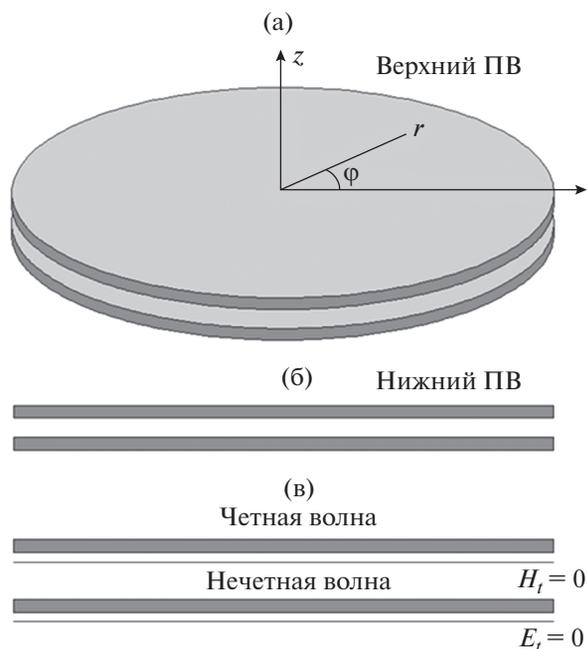


Рис. 1. Градиентная двухслойная линза: а – общий вид, б – вид сбоку, в – парциальные структуры.

Следует сказать, что градиентная линза имеет, как правило, весьма большие электрические размеры, необходимые для создания излучения с узкой диаграммой направленности (ДН). Поэтому участок взаимодействия волн ПВ также имеет большие размеры и, следовательно, даже слабой связи достаточно для полной перекачки энергии с одного слоя на другой.

Принятые допущения позволяют свести общую задачу синтеза к синтезу двух парциальных линз Моргана для четных  $U_e$  и нечетных  $U_o$  волн, названных в работе [20] четной и нечетной линзами. Отличие их друг от друга состоит в том, что они окружены и излучают соответственно в среды с разными коэффициентами преломления  $n_{v,o} = 1 \pm \Delta n$ . Разность коэффициентов преломления  $\Delta n$  является одним из начальных условий синтеза. Как показано в работе [20], оно определяет потери в линзе, обусловленные неполной перекачкой энергии с одного слоя на другой.

Структура слоев линзы Моргана показана на рис. 2. Она состоит из оболочки с постоянным коэффициентом преломления  $n_0$  и центральной части с переменным коэффициентом преломления, зависящим от радиальной координаты  $n(r)$ . Под коэффициентом преломления мы понимаем коэффициент замедления четной и нечетной волн системы связанных ПВ:  $U_e, U_o$ .

Отметим также, что принятые допущения позволяют осуществить первый этап синтеза двухслойной линзы в общем виде, не конкретизируя

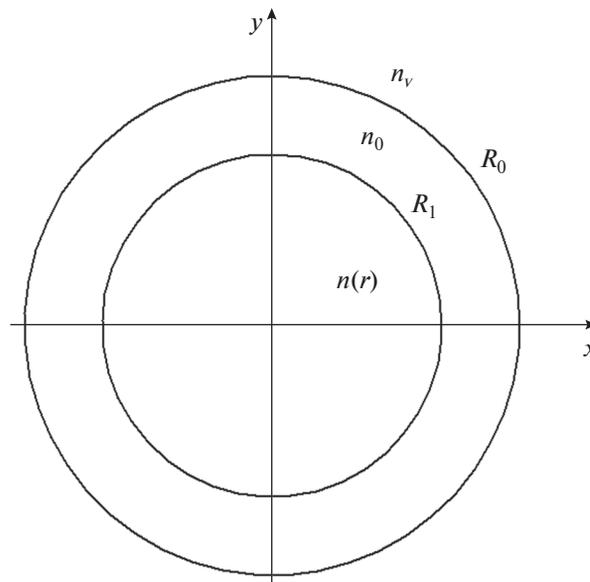


Рис. 2. Структура слоев линзы Моргана.

вид ПВ. На этом этапе определяем функции  $n_{e,o}(r)$ , где индексы  $e,o$  соответствуют четной и нечетной линзам. Пример синтеза коэффициентов преломления показан на рис. 3. Кривые получены при  $R_0 = 1.41, \Delta n = 0.019, n_{0e} = 1.447, n_{0o} = 1.393$ . На рис. 3 использована нормированная радиальная координата, равная единице на внутренней границе оболочки. Синтез линз Моргана проводили по методике, описанной в [19].

Отметим, что полученные кривые не имеют разрывов. Наличие скачков коэффициента преломления на внутренней границе оболочки связано с выбором параметра  $R_0$ . Мы специально выбирали его так, чтобы скачки отсутствовали, так как разрывы коэффициента преломления являются источником появления нежелательных отраженных волн и волн излучения.

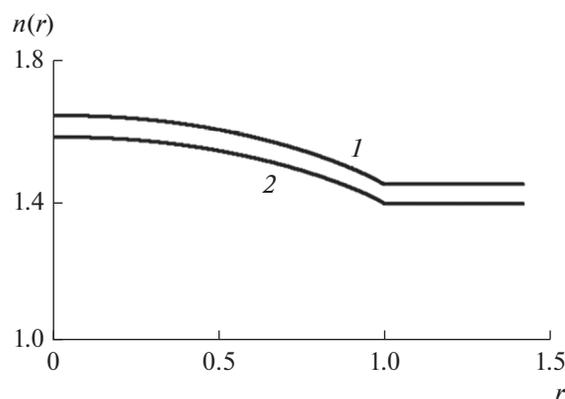


Рис. 3. Зависимость коэффициентов преломления четной (1) и нечетной (2) линз от нормированного радиуса.

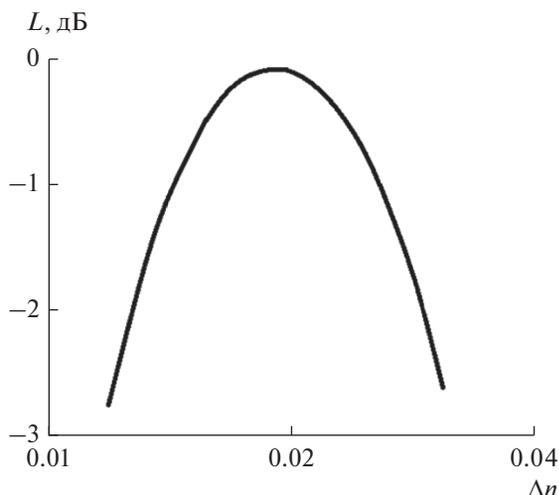


Рис. 4. Зависимость потерь в двухслойной линзе Моргана от параметра  $\Delta n$ .

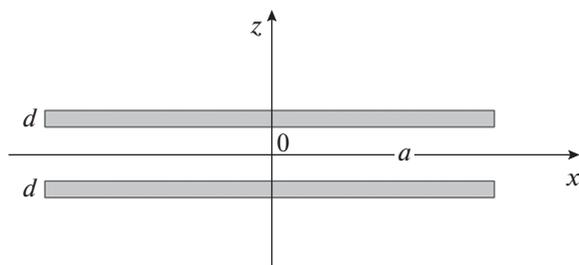


Рис. 5. Связанные диэлектрические пластины.

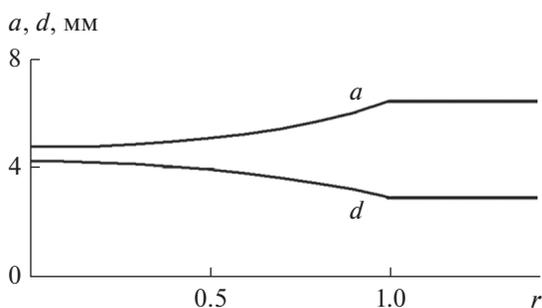


Рис. 6. Зависимость параметров диэлектрических пластин от нормированного радиуса.

Оценка потерь в двухслойной линзе Моргана невозможна без задания параметров источника поля, облучающего линзу. В работе [20] рассматривался идеализированный источник, который создает в выходной апертуре линзы равномерное амплитудное распределение. Для такого источника была получена зависимость потерь  $L$  от параметра  $\Delta n$  (рис. 4). Нетрудно увидеть, что при  $\Delta n = 0.019$  потери достигают минимального значе-

ния, равного 0.2 дБ. Возможность получения столь низкого уровня потерь свидетельствует о практически полной перекачке энергии из одного ПВ в другой.

Второй этап синтеза требует конкретизации типа ПВ. В качестве ПВ мы использовали диэлектрические пластины (рис. 5) с относительной проницаемостью  $\epsilon$ , переменными толщиной  $d$  и расстоянием между ними  $a$ .

Известно [22], что в диэлектрической пластине могут распространяться  $E$ - и  $H$ -волны, имеющие нулевые компоненты магнитного  $H_z$  и электрического  $E_z$  полей соответственно. В рамках принятой модели они распространяются независимо друг от друга. Мы дополнительно допускаем, что источник поля, облучающий линзу, селективно возбуждает волны одного типа.

Рассмотрим магнитные волны, имеющие вектор электрического поля, ориентированный в горизонтальной плоскости. Коэффициенты преломления четной и нечетной линз определим из решения дисперсионных уравнений для четных и нечетных магнитных волн двух одинаковых связанных пластин. Они хорошо известны в литературе. Поэтому приведем их без вывода:

$$q_e p_e \cos q_e d (\operatorname{ch} p_e a + \operatorname{sh} p_e a) - \sin q_e d (q_e^2 \operatorname{ch} p_e a - p_e^2 \operatorname{sh} p_e a) = 0, \quad (1)$$

$$q_o p_o \cos q_o d (\operatorname{ch} p_o a + \operatorname{sh} p_o a) + \sin q_o d (q_o^2 \operatorname{ch} p_o a - p_o^2 \operatorname{sh} p_o a) = 0, \quad (2)$$

$$p_{e,o} = k \sqrt{n_{e,o}^2 - 1},$$

$$q_{e,o} = k \sqrt{\epsilon - n_{e,o}^2}.$$

Здесь  $k$  – волновое число свободного пространства. Уравнения (1), (2) решаются относительно переменных  $a$ ,  $d$ . При этом значения коэффициентов преломления считаются заданными.

На рис. 6 показаны типичные зависимости толщины пластины и расстояния между ними от нормированного радиуса. Обобщенные параметры линзы приведены выше. Уравнения (1), (2) были решены для частоты  $f = 10$  ГГц и  $\epsilon = 5$ .

### 3. КОНСТРУКЦИЯ МА И ВЫБОР ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Общая структура МА на основе двухслойной линзы Моргана показана на рис. 7, она состоит из следующих элементов:

- нижний слой, на котором выполнена замкнутая кольцевая решетка из 72 антенн Вивальди;
- верхний (излучающий) слой, содержащий согласующий четвертьволновый трансформатор;
- корректирующее кольцо, расположенное над верхним слоем.

Нижний и верхний слои выполнены из материала с  $\epsilon = 5$ . Толщина слоев и расстояние между ними выбраны в соответствии с результатами синтеза (см. рис. 6).

Элемент кольцевой решетки показан на рис. 8. Он представляет собой плавно расширяющуюся по экспоненциальному закону щелевую линию передачи. Слева она нагружена на сосредоточенный порт, к которому присоединен короткозамкнутый шлейф. Ширина щелевой линии в месте включения порта  $w = 1$ . Все размеры здесь и далее приводятся в миллиметрах.

Многолучевая антенна была рассчитана для работы в диапазоне с центром на частоте  $f_0 = 10$  ГГц. Выбор параметров облучающей решетки требует пояснения механизма формирования излучения. Отметим, что решетка расположена на нижнем слое в области, где распределенная связь с верхним слоем отсутствует. Таким образом, на первом этапе она излучает в уединенную пластину. Ее коэффициент преломления  $n_p$  при выбранных параметрах равен 1.425. Излученное в пластину поле доходит до границы двухслойной линзы и возбуждает четные и нечетные волны. Их показатели преломления в оболочке равны 1.45 и 1.4. Таким образом, на границе линзы имеется небольшой скачок коэффициента преломления.

Задача облучателя – сформировать в плоскости  $XOY$  расходящийся двумерный пучок поверхностных волн, падающий на линзу Моргана. Этот пучок принято описывать в терминах ДН  $F(\alpha)$ , которая выражает зависимость интенсивности поля пучка от угла  $\alpha$  (рис. 9). На рис. 9 источник имеет фазовый центр в точке  $\varphi = \pi$ .

Типовым требованием к ДН облучателя является ее уменьшение до уровня  $-10$  дБ на краях оптической системы. В нашем случае линза видна под углом  $45^\circ$ . Следовательно, ее облучатель должен создавать ДН, спадающую при  $\alpha = \pm\pi/4$  на 10 дБ относительно максимума при  $\alpha = 0$ .

Оценим ДН облучателя в рамках двумерной модели, показанной на рис. 10. Считаем, что поле реального облучателя с размером  $2a$  близко к полю плоской волны, распространяющейся слева направо вдоль оси  $Ox$  в среде с показателем преломления  $n_p$ . Используя теорему эквивалентности, заменим ее эквивалентными электрическим и магнитным токами и найдем ДН поля создаваемого этими токами в среде с коэффициентом преломления  $n$ . Полагаем, что структура двумерная, т.е. поле в ней не зависит от координаты  $z$ . В частном случае, когда  $n = n_p$ , нормированная ДН имеет следующий простой вид:

$$F(\alpha) = \frac{\sin(kn_p a \sin \alpha)}{2kn_p a \sin \alpha} (1 + \cos \alpha). \quad (3)$$

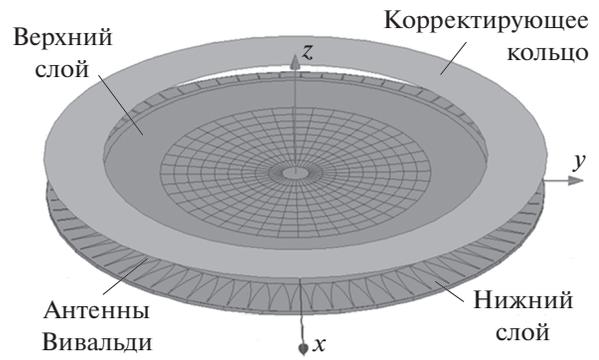


Рис. 7. Многолучевая антенна на основе двухслойной линзы Моргана.

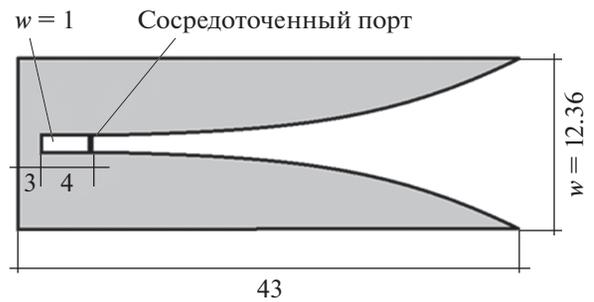


Рис. 8. Антенна Вивальди.

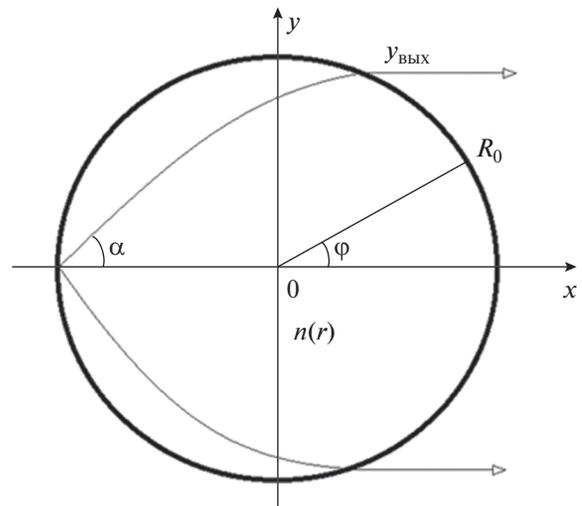


Рис. 9. Формирование поля в линзе Моргана.

На рис. 11 представлена рассчитанная по формуле (3) ДН для  $f = 10$  ГГц и  $a = 12.3$ . Нетрудно заметить, что при  $\alpha = \pm\pi/4$  ДН спадает на  $-13$  дБ, т.е. сформулированное выше требование выполняется с запасом.

Следует отметить, что из-за разницы в коэффициентах преломления четная и нечетная вол-

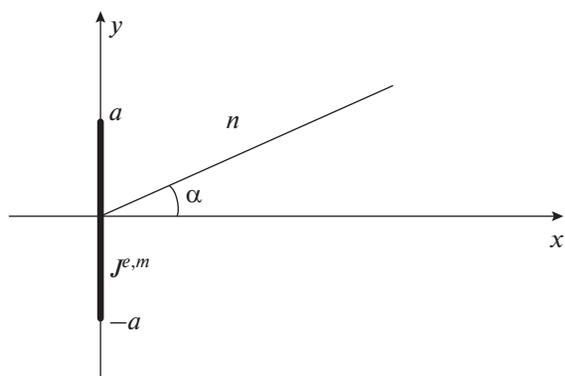


Рис. 10. Двумерная модель.

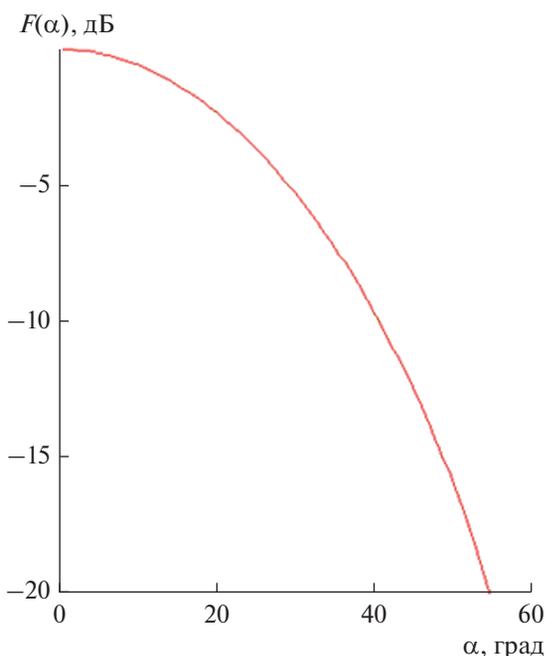


Рис. 11. Диаграмма направленности облучателя линзы Морган.

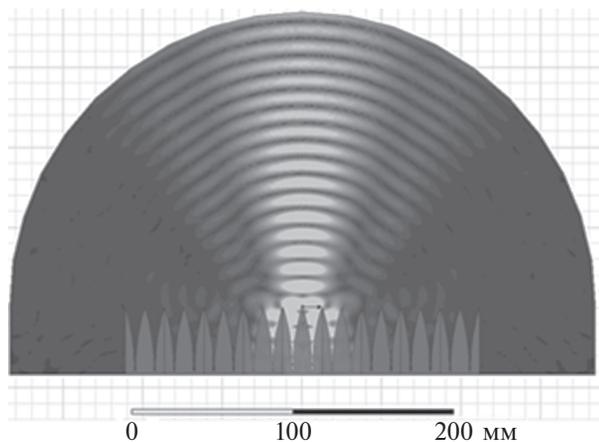


Рис. 12. Тестовая линейная решетка и создаваемое ею поле в диэлектрической пластине.

ны имеют разные ДН. Однако это отличие весьма мало и несущественно сказывается на ширину ДН, поэтому в рамках предварительной оценки их можно считать одинаковыми и совпадающими с ДН (рис. 11).

Таким образом, мы предварительно определили размер облучателя линзы, который равен 24.7. Переходя к выбору периода решетки, необходимо отметить, что, как показано в работе [23], он не должен существенно превышать половину длины волны в среде, в которую решетка излучает. При нарушении этого условия в решетке наблюдаются паразитные резонансные эффекты. В нашем случае на частоте 10 ГГц длина волны равна 21.1, поэтому выбирать период решетки 24.7 нецелесообразно. Лучше взять период равным 12.35 и использовать в качестве облучателя пару возбужденных синфазно антенн Вивальди. В этом случае мы имеем требуемую ширину ДН и период решетки, незначительно превышающий его предельное значение.

Для проверки приближенной двумерной модели был проведен в системе HFSS электродинамический расчет тестовой структуры в виде линейной решетки антенн Вивальди, излучающих в пластину с параметрами, приведенными выше. Тестовая структура и распределение создаваемого ею поля в пластине показаны на рис. 12. Период решетки равен 12.35, а распределение поля получено при синфазном возбуждении двух каналов решетки.

Из рис. 12 видно, что основная часть потока мощности поля в пластине сконцентрирована в секторе углов  $\pm 45^\circ$ , что подтверждает правильность выбора параметров облучателя, сделанного с помощью приближенной модели.

Проектирование решетки облучателей требует также выбора сопротивления порта  $R_p$  и длины шлейфа  $L_s$ . Для решения этой задачи рассматривалась еще одна тестовая структура (рис. 13).

Данная структура представляет собой отрезок щелевой линии передачи, нагруженный слева на волновой порт, а справа на входную часть антенны Вивальди в виде сосредоточенного порта со шлейфом. Параметры входной части выбирались



Рис. 13. Тестовая структура для выбора параметров входной части антенны Вивальди.

таким образом, чтобы минимизировать коэффициент отражения тестовой структуры в окрестности частоты 10 ГГц. В результате оптимизации сопротивление порта было взято равным 100 Ом, а длина  $L_s = 4$ . Частотная зависимость коэффициента отражения для выбранных параметров показана на рис. 14.

Еще один оптимизированный элемент МА – четвертьволновый трансформатор, расположенный на верхнем слое. Непосредственное излучение поверхностной волны из пластины с проницаемостью  $\epsilon = 5$  связано с ее отражением от обрыва пластины. Четвертьволновый трансформатор предназначен для улучшения согласования верхнего слоя. Он представляет собой кольцо толщиной  $t$  и длиной  $L$ .

Модель, которая использовалась в системе HFSS для оптимизации трансформатора, показана на рис. 15. Она представляет собой волновод, внутри которого расположена диэлектрическая пластина с трансформатором. Боковые стенки волновода идеально проводящие. В этом случае основная волна имеет вектор электрического поля, ориентированный в плоскости  $XOY$ , так же как поверхностная волна ПВ. В силу принципа зеркального изображения волновод на рис. 15 эквивалентен бесконечной по оси  $Ox$  пластине, на границу которой по нормали, т.е. вдоль оси  $Oy$ , падает поверхностная волна.

Параметры  $t$  и  $L$  были выбраны из условия минимизации коэффициента отражения в тестовой структуре (см. рис. 15). В результате оптимизации они были выбраны равными 1.5 и 7 соответственно. Частотная зависимость трансформатора с такими размерами показана на рис. 16.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЛУЧЕВОЙ АНТЕННЫ

В ходе численного моделирования программа HFSS рассчитывала электромагнитное поле в многолучевой антенне, которая возбуждалась облучателями в виде пар антенн Вивальди, расположенными на противоположных сторонах линзы Моргана при  $\phi = 0.180^\circ$ . Далее находились вторичные характеристики устройства в виде его ДН, коэффициента направленного действия и коэффициента усиления.

На рис. 17а, 17б соответственно изображены распределения интенсивности электрического поля в МА на нижнем и верхнем слоях. Картины поля получены для возбуждателя расположенного при  $\phi = 0^\circ$  на частоте 10 ГГц. Из рис. 17а хорошо видно ослабление поля при удалении от точки возбуждения, а из рис. 17б – увеличение интенсивности при движении в том же направлении,

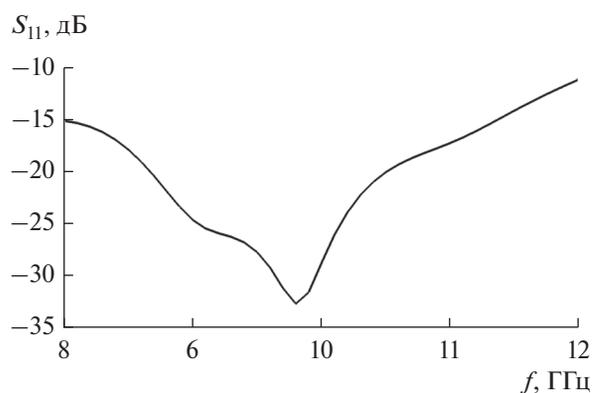


Рис. 14. Частотная зависимость коэффициента отражения тестовой структуры.

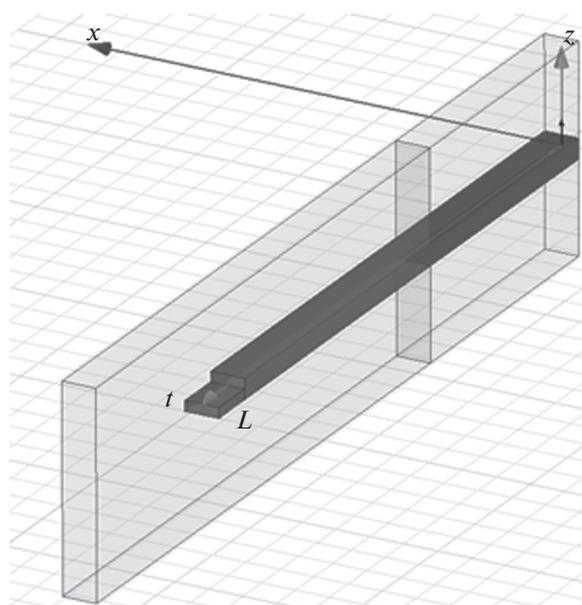


Рис. 15. Модель четвертьволнового трансформатора.

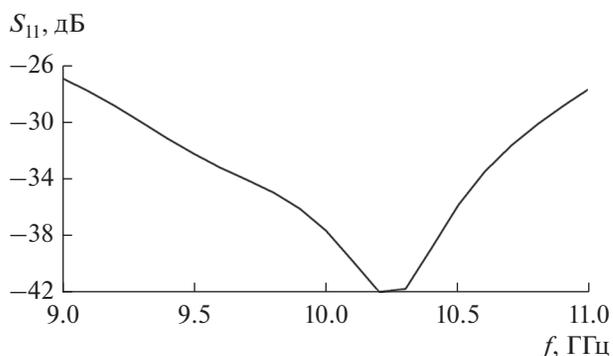


Рис. 16. Частотная характеристика четвертьволнового трансформатора.

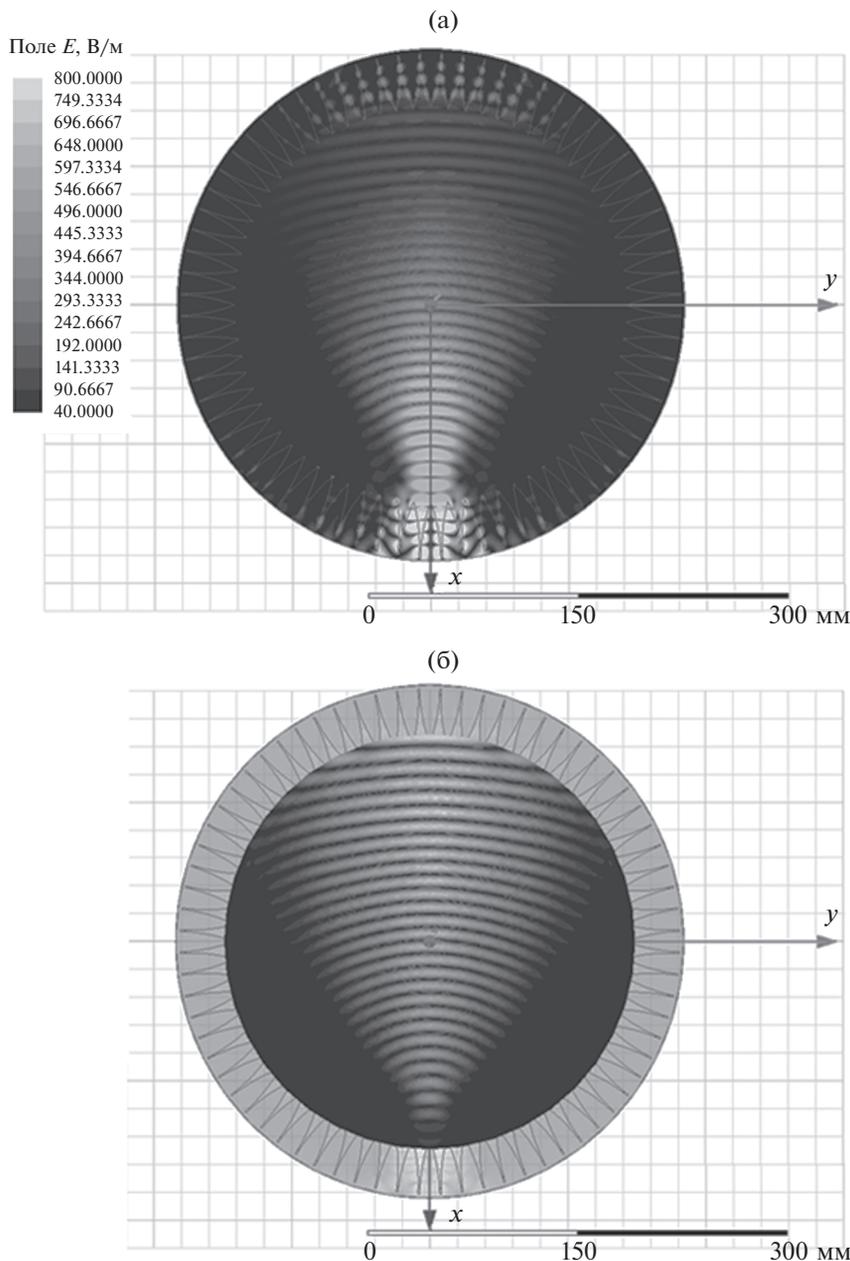


Рис. 17. Распределение интенсивности электрического поля на нижнем (а) и верхнем (б) слое.

что свидетельствует о передаче энергии с нижнего слоя на верхний.

На рис. 18 представлено распределение интенсивности электрического поля в обоих слоях структуры в продольной плоскости  $XOZ$ . Данное распределение наглядно демонстрирует процесс передачи электромагнитной энергии с нижнего слоя на верхний. Видно, что по мере распространения волны, возбужденной на нижнем слое в направлении слева направо, ее амплитуда уменьшается и на правой границе слоя становится достаточно малой. В то же время амплитуда волны на верх-

нем слое, наоборот, монотонно нарастает и на правой его границе достигает максимума. Далее волна излучается в свободное пространство.

Первые расчеты ДН проводились в МА без корректирующего кольца (см. рис. 7). В результате было обнаружено, что антенна имеет остронаправленную ДН в азимутальной плоскости и широкую ДН в угломерной плоскости. Однако максимум ДН в угломерной плоскости был приподнят примерно на  $7^\circ \dots 9^\circ$ . Данный эффект связан с негативным влиянием облучателей, которое существенно ослаблено благодаря двухслойной структуре линзы

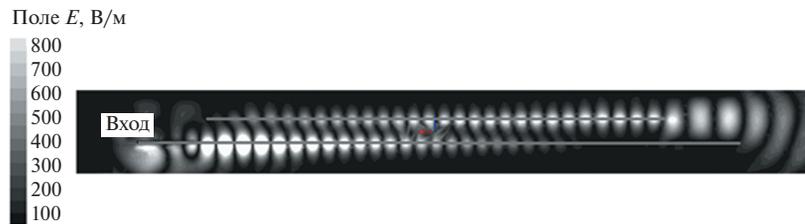


Рис. 18. Распределение интенсивности электрического поля в продольной плоскости XOZ.

Моргана, но полностью не устранено. Для восстановления симметрии ДН в конструкцию антенны было введено металлическое корректирующее кольцо. Смысл его использования в том, что между кольцом и металлизацией антенн Вивальди образуется плоский волновод, основная волна которого имеет симметричное распределение поля по оси  $Oz$ . Указанная симметрия должна обеспечивать симметрию ДН в угломестной плоскости, а ее максимум должен располагаться при  $\theta = 90^\circ$ .

В целом использование корректирующего кольца оправдало себя. На рис. 19 представлена полученная зависимость коэффициента усиления от угла места. Некоторая несимметрия ДН сохранилась, однако ее максимум находится в горизонтальной плоскости при  $\theta = 90^\circ$ .

Диаграмма направленности в азимутальной плоскости показана на рис. 20. Более подробно главный ее луч представлен на рис. 21, из которого следует, что ширина ДН по уровню  $-3$  дБ равна  $7.5^\circ$ . При этом уровень первых боковых лепестков близок к значению  $-20$  дБ относительно максимума ДН. Такой уровень боковых лепестков соответствует косинусоидальному амплитудному распределению в раскрыве антенны с нулями на краях. Размер излучающей апертуры равен 280. Известная [21] оценка для ширины ДН дает значение  $7.34^\circ$ , которое весьма близко к результату, полученному численно.

В заднем полупространстве наблюдается рост интенсивности излучения. Однако уровень дальних боковых лепестков не превосходит значения  $-15$  дБ.

Следует отметить, что распределения полей, показанные на рис. 17а и 18 не позволяют однозначно оценить уровень энергии, оставшейся на нижнем слое. Этот параметр во многом определяет коэффициент полезного действия антенны и, следовательно, ее коэффициент усиления. Если исходить из рис. 17а, то, по крайней мере визуально, можно сделать вывод о том, что существенная часть энергии осталась на нижнем слое и поглотилась согласованными нагрузками, расположенными в антеннах Вивальди. В то же время из

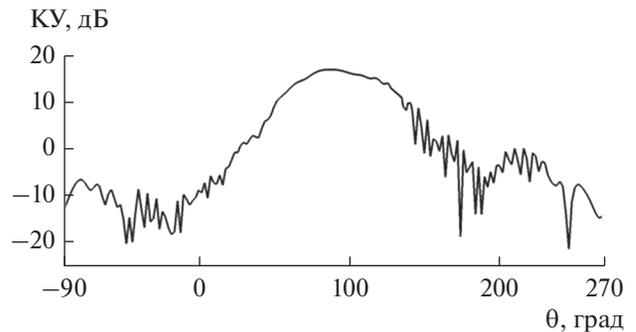


Рис. 19. Диаграмма направленности МА в угломестной плоскости.

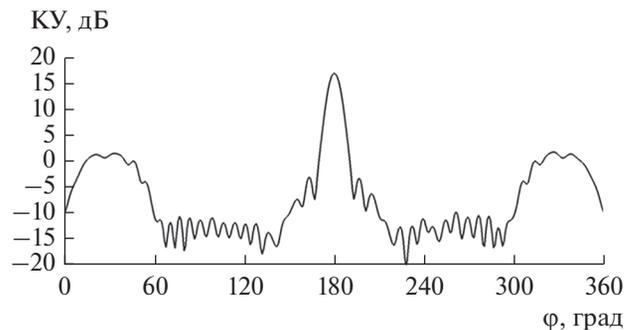


Рис. 20. Диаграмма направленности МА в азимутальной плоскости.

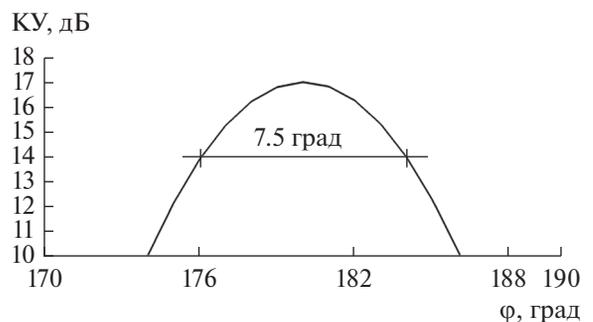


Рис. 21. Главный луч ДН в азимутальной плоскости.

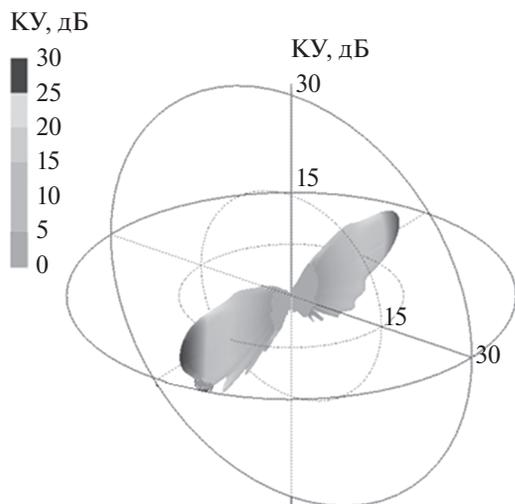


Рис. 22. Диаграмма направленности МА при одновременной работе двух каналов.

рис. 18 следует, что поле на нижнем слое пренебрежимо мало, т.е. энергия практически полностью перешла на верхний слой. Видимо, для однозначного ответа на этот вопрос необходимы дополнительные исследования, выходящие за рамки данной статьи.

Кроме того, была исследована трехмерная ДН МА при одновременной работе двух облучателей, расположенных при  $\varphi = 0^\circ$  и  $180^\circ$  (рис. 22). Картина на рис. 22 показывает возможность параллельной работы каналов, находящихся на противоположных сторонах линзы Моргана, т.е. каналов в наибольшей степени “мешающих” друг другу.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы была проверить путем численного эксперимента принципы построения двухслойных градиентных линз, изложенных в [18, 20]. Представленные результаты показывают, что двухслойная линза Моргана действительно в существенной степени ослабляет эффект затенения, за счет чего расширяется сектор обзора МА на ее основе. Тем не менее следует отметить и выявленные проблемы. С нашей точки зрения, они связаны с конкретным видом облучателя исследованной линзы в виде антенны Вивальди. Оказалось, что влияние кольцевой решетки ослабляется, но устраняется не полностью. Ее негативное влияние сказалось преимущественно на форме ДН, которая стала несимметричной относительно плоскости  $\theta = 90^\circ$ . Для устранения данного эффекта пришлось ввести в конструкцию антенны корректирующее кольцо, использование которого изначально не планировалось.

Следует также отметить, что указанное влияние возбуждающей линзы решетки не привело к радикальному искажению ДН, какое имеет место в традиционных однослойных вариантах МА на основе градиентных осесимметричных линз. Оно проявилось лишь в нарушении симметрии формы ДН, которое удалось устранить путем использования простого дополнительного элемента. Тем не менее проблема оптимизации конструкции возбуждателя двухслойной линзы остается актуальной задачей, которая может быть предметом дальнейших исследований.

Также необходимо отметить, что полученные в работе результаты в целом подтверждают предложенную ранее приближенную методику синтеза двухслойной линзы [20], основанную на теории связанных волн и геометрической оптике.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке бюджетного финансирования в рамках государственного задания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rotman W. // IRE Trans. 1958. V. AP-6. № 1. P. 96.
2. Adachi S., Rudduck R., Walter C. // IRE Trans. 1961. V. AP-9. № 4. P. 353.
3. Банков С.Е. Интегральная СВЧ-оптика. М.: Физматлит, 2018.
4. Cheng Y.J., Hong W., Fan Ke Wu Y. // IEEE Trans. 2011. V. AP-59. № 1. P. 40.
5. Albani M., Ettorre M., Maci S. et al. // 2006 First European Conf. on Antennas and Propagation. Nice. 6–10 Nov. N.Y.: IEEE, 2006. P. 4585023, <https://doi.org/10.1109/eucap.2006.4585023>
6. Ettorre M., Sauleau R., Le Coq L. // IEEE Trans. 2011. V. AP-59. № 4. P. 1093.
7. Банков С.Е., Фролова Е.В. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 489.
8. Wan X., Shen X., Luo Y., Cui T.J. // Laser & Photonics Review. 2014. V. 8. № 5. P. 757.
9. Yao K., Jiang X., Chen H. // New J. Phys. 2012. V. 14. № 2. P. 023011.
10. Kwon D.-H., Werner D.H. // New J. Phys. 2008. V. 10. № 11. P. 115023.
11. Quevedo-Teruel O., Tang W., Hao Y. // Opt. Lett. 2012. V. 37. № 23. P. 4850.
12. Kong F., Wu B.-I., Kong J.A. et al. // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 91. № 25. P. 253509. <https://doi.org/10.1063/1.2826283>
13. Rahm M., Cummer S.A., Schurig D. et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. V.100. № 6. P. 063903.
14. Prado D.R., Osipov A.V., Quevedo-Teruel O. // Opt. Lett. 2015. V.40. № 6. P. 926.

15. *Tehrani B.K., Bahr R.A., Su W. et al.* // IEEE MTT-S Int. Microwave Symp., Honolulu. 4–9 Jun. 2017. N.Y.: IEEE, 2017. P. 1756. <https://doi.org/10.1109/MWSYM.2017.8058985>
16. *Ахияров В.В., Калошин В.А., Никитин Е.А.* // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/18/text.pdf>.
17. *Clapp R.E.* // IEEE Trans. 1984. V. AP-32. № 7. P. 661.
18. *Банков С.Е.* // Журн. радиоэлектроники. 2012. № 12. <http://jre.cplire.ru/jre/dec12/6/text.html>.
19. *Morgan S.P.* // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 9. P. 1358.
20. *Банков С.Е.* // 2020 7th All-Russian Microwave Conf. (RCM). Moscow. 25–27 Nov. N.Y.: IEEE, 2020. P. 171.
21. *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ. М.: Высш. школа, 1988.
22. *Унгер Г.Г.* Оптическая связь. М.: Связь, 1979.
23. *Банков С.Е., Курушин А.А.* // Журн. радиоэлектроники. 2013. № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun13/4/text.html>.

---

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

---

УДК 537.874;621.396

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕТА-ИНТЕРФЕРОМЕТРА  
С ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗНЕСЕННЫМИ И НЕЗАВИСИМО  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМЫМИ МЕТАСТРУКТУРАМИ НА ОСНОВЕ  
КИРАЛЬНЫХ И ДИПОЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ****© 2022 г. Г. А. Крафтмахер<sup>а</sup>, \*, В. С. Бутылкин<sup>а</sup>, Ю. Н. Казанцев<sup>а</sup>,  
Д. С. Каленов<sup>а</sup>, В. П. Мальцев<sup>а</sup>**<sup>а</sup>*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация**\*E-mail: gaarkr139@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.05.2021 г.

После доработки 12.05.2021 г.

Принята к публикации 12.06.2021 г.

Экспериментально исследованы в диапазоне 3...6 ГГц функциональные особенности мета-интерферометра с пространственно разнесенными и независимо электрически управляемыми от разных источников метаструктурами на основе киральных и дипольных кольцевых электропроводящих элементов с варакторами: с метаструктурой  $M1$  в качестве разделителя пучка и с  $M2$  в закороченном  $h$ -плече как отражателе резонатора Фабри–Перо. Применены планарные спирали, двойные разомкнутые кольца и одинарные дважды разомкнутые кольца. Измерены резонансные отклики метаструктур и динамика интерферограммы. Пр продемонстрирована возможность независимого управления глубиной и шириной, а также частотой и шириной индивидуальной полосы запрета в зависимости от выбора метаструктур.

DOI: 10.31857/S0033849422050084

**ВВЕДЕНИЕ**

Интерес к метаматериалам, содержащим электропроводящие киральные разомкнутые резонансные кольцевые элементы, совместимые с элементами магнитного, электрического и оптического управления, сохраняется и в настоящее время [1–4]. Метаструктуры, мета-атомы и мета-поверхности находят применение в разнообразных СВЧ-устройствах, среди которых важное место занимают многополосные фильтры [5]. В качестве основных компонентов в динамических коммуникационных системах востребованы независимо электрически управляемые многополосные фильтры, в которых изменения амплитудно-частотных характеристик одной полосы не затрагивали бы и другие полосы, что связано с определенными трудностями [6]. Актуальным является независимое управление амплитудой, частотой и шириной внутри индивидуальной полосы, так как при этом расширяются функциональные возможности систем [7, 8]. Многополосные микроволновые реконфигурируемые фотонные фильтры, обладающие возможностью переключения конфигурации полос пропускания в СВЧ-отклике, предложены в [9].

Учитывая актуальность и сложность проблемы, важным являются новые методы и подходы. В [10–13] показано, что применение метаструктур в интерферометрии открывает новые функциональные возможности в многополосной фильтрации микроволн. В [10, 11] продемонстрировано воздействие резонансов, ферромагнитного в феррите (при управлении магнитостатическим полем) и дипольного в метаструктуре (управляемого электрическим напряжением на варакторе) на интерферограмму мета-интерферометра при использовании метаструктуры в качестве разделителя пучка. В [12, 13] исследованы закономерности, наблюдаемые, если метаструктура расположена в закороченном  $h$ -плече на некотором расстоянии от короткозамыкателя, образуя резонатор Фабри–Перо.

В [14] впервые был предложен и исследован волноводный тройниковый мета-интерферометр, содержащий две пространственно разнесенные метаструктуры ( $M1$  и  $M2$ ) на основе линейных проводов, нагруженные варакторами с независимым управлением от разных внешних источников. Было показано независимое воздействие на интерферограмму резонансных откликов  $M1$  и  $M2$ , которое позволяет независимо изменять ширину и частоту индивидуальной полосы запрета.

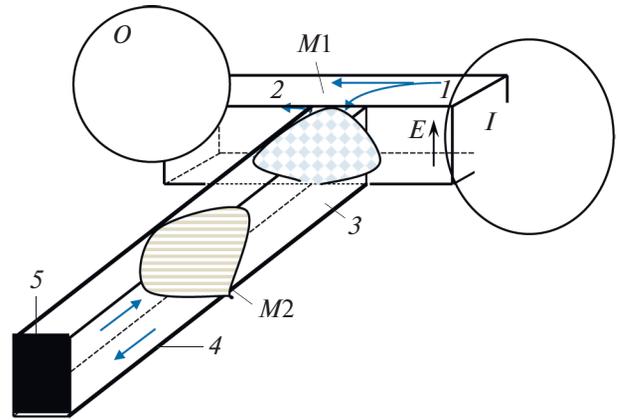
Представляет интерес исследовать и другие пространственно разнесенные метаструктуры, отличающиеся динамикой резонансных откликов, с целью изучения влияния на интерферограмму и функциональные возможности метаинтерферометра.

В данной работе исследуется волноводный тройниковый метаинтерферометр, который содержит метаструктуры на основе планарных киральных и дипольных электропроводящих элементов, нагруженных варакторами с независимым управлением от разных внешних источников. Одну из метаструктур ( $M1$ ) поместили в интерферометр в качестве разделителя пучка, а другую ( $M2$ ) – в закороченное  $h$ -плечо на расстоянии  $s$  от короткозамыкателя, в результате образовался резонатор Фабри–Перо. Исследовано совместное воздействие управляемых резонансных эффектов при использовании разных  $M1$  (на основе киральных планарных спиралей ПС, планарных двойных разомкнутых колец ПДРК и дипольного кольца ДК1) и разных  $M2$  (на основе планарных дважды разомкнутых одинарных колец ОК и дипольного кольца с двумя разрывами ДК2).

### 1. МЕТА-ИНТЕРФЕРОМЕТР. МЕТАСТРУКТУРЫ

Метаинтерферометр (рис. 1), выполненный на базе  $h$ -плоскостного волноводного тройника, содержит различные комбинации двух пространственно разнесенных и независимо электрически управляемых метаструктур с дипольным и киральными электропроводящими элементами:  $M1$  в качестве отражателя пучка и  $M2$  в закороченном  $h$ -плече на расстоянии  $s = 110$  мм от короткозамыкателя 5 как отражатель резонатора Фабри–Перо. Фото метаструктур представлены на рис. 2: это резонансные неуправляемые метаструктуры (ряд из шести ПС и ряд из шести ПДРК) и метаструктуры, резонансные свойства которых управляются электрическим напряжением обратного смещения  $V_{OC}$  на варакторе (ряд из шести планарных двойных разомкнутых колец с дополнительным разрывом во внешнем кольце, нагруженном варактором ПДРК\*; ряд из трех планарных ОК с двумя разрывами, нагруженными варакторами; ДК с двумя разрывами, нагруженными варакторами, как два встречных полуволновых диполя).

В метаструктурах были использованы варакторы МА46Н120 и ВВ857, емкость которых меняется в пределах 1.15...0.1 пФ и 6.5...0.55 пФ при изменении напряжения обратного смещения на варакторе  $V_{OC}$  от 0 до 30 В. В отсутствие метаструктуры тройник трансформируется в интерферометр и обладает свойствами многополосного фильтра. Увеличивая длину  $h$ -плеча, можно увеличить число интерференционных полос. Метаструктуры располагали вдоль оси прямоугольного волновода  $48 \times 24$  мм.



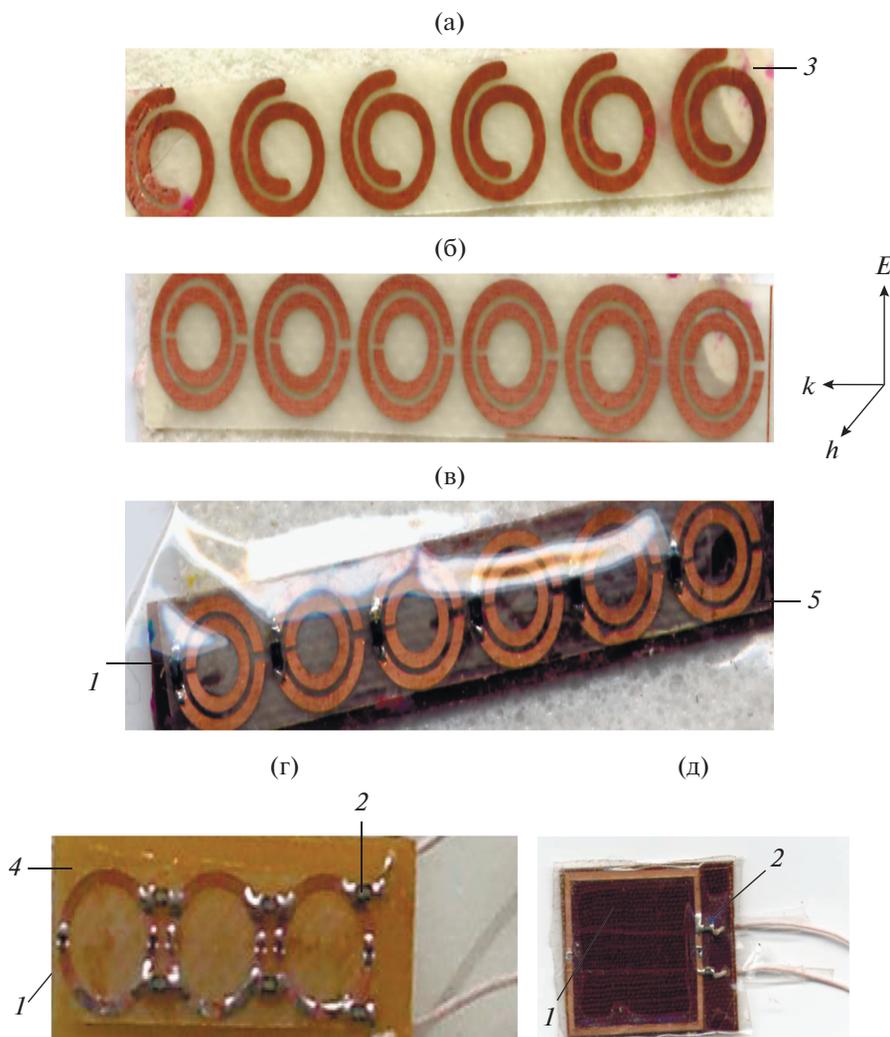
**Рис. 1.** Схема метаинтерферометра:  $I$  и  $O$  – вход и выход,  $1$  и  $2$  – входное и выходное плечи,  $M1$  – метаструктура (разделитель пучка),  $M2$  – метаструктура в закороченном  $h$ -плече (отражатель резонатора Фабри–Перо),  $3$  и  $4$  – полые отрезки короткозамкнутого  $h$ -плеча до передней границы  $M2$  и между задней границей  $M2$  и короткозамыкателем 5.

Исследовали динамику состояния интерферограммы, измеряя частотную зависимость коэффициента прохождения  $T$  на выходе интерферометра в зависимости от резонансных свойств метаструктур. Подача  $V_{1OC}$  приводила к перестройке интерферограммы в частотной области, соответствующей области возбуждения резонанса в метаструктуре  $M1$ , а подача  $V_{2OC}$  влияет на интерферограмму в частотной области, соответствующей области возбуждения резонанса в  $M2$ . Информацию о величинах напряжений представляем в виде  $(V1-V2)$ , например,  $(0-0)$  означает, что  $V_{1OC} = 0$  и  $V_{2OC} = 0$  В, а  $(0-10)$  означает, что  $V_{1OC} = 0$ , а  $V_{2OC} = 10$  В. Размеры элементов выбраны так, чтобы резонансные эффекты проявлялись в заданном диапазоне 3...6 ГГц. Исследовали возможность независимого управления амплитудно-частотными характеристиками интерферограммы при совместном наложении напряжений  $V_{1OC}$  и  $V_{2OC}$  на варакторы  $M1$  и  $M2$ .

### 2. МНОГОПОЛОСНАЯ УПРАВЛЯЕМАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ С ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗНЕСЕННЫМИ МЕТАСТРУКТУРАМИ

#### 2.1. Метаструктуры $M1-M2$ ( $V_{2OC}$ )

В данном разделе рассмотрены функциональные возможности метаинтерферометра для случая, когда  $M1$  представляет собой ряд из шести ПС в полтора оборота (резонанс возбуждается микроволновым полем вблизи  $f = 3.9$  ГГц), а  $M2$  содержит ряд из трех планарных ОК с двумя разрывами, нагруженными варакторами (далее – 6ПС\_3ОК), что обеспечивает управление резонансной частотой в широкой полосе частот.



**Рис. 2.** Фото метаструктур: а – ряд из шести планарных киральных спиралей в полтора оборота; б – ряд из шести киральных двойных разомкнутых колец; в – ряд из шести киральных двойных разомкнутых колец с дополнительным разрывом во внешнем кольце, нагруженном варактором; г – ряд из трех планарных киральных дважды разомкнутых одинарных колец, нагруженными двумя варакторами в каждом кольце; д – дипольное кольцо с двумя разрывами, нагруженными варакторами, 1 – варактор, 2 – резистор  $R_L$ , 3, 4, 5 – подложки (полиамидная пленка, текстолит, гетинакс).

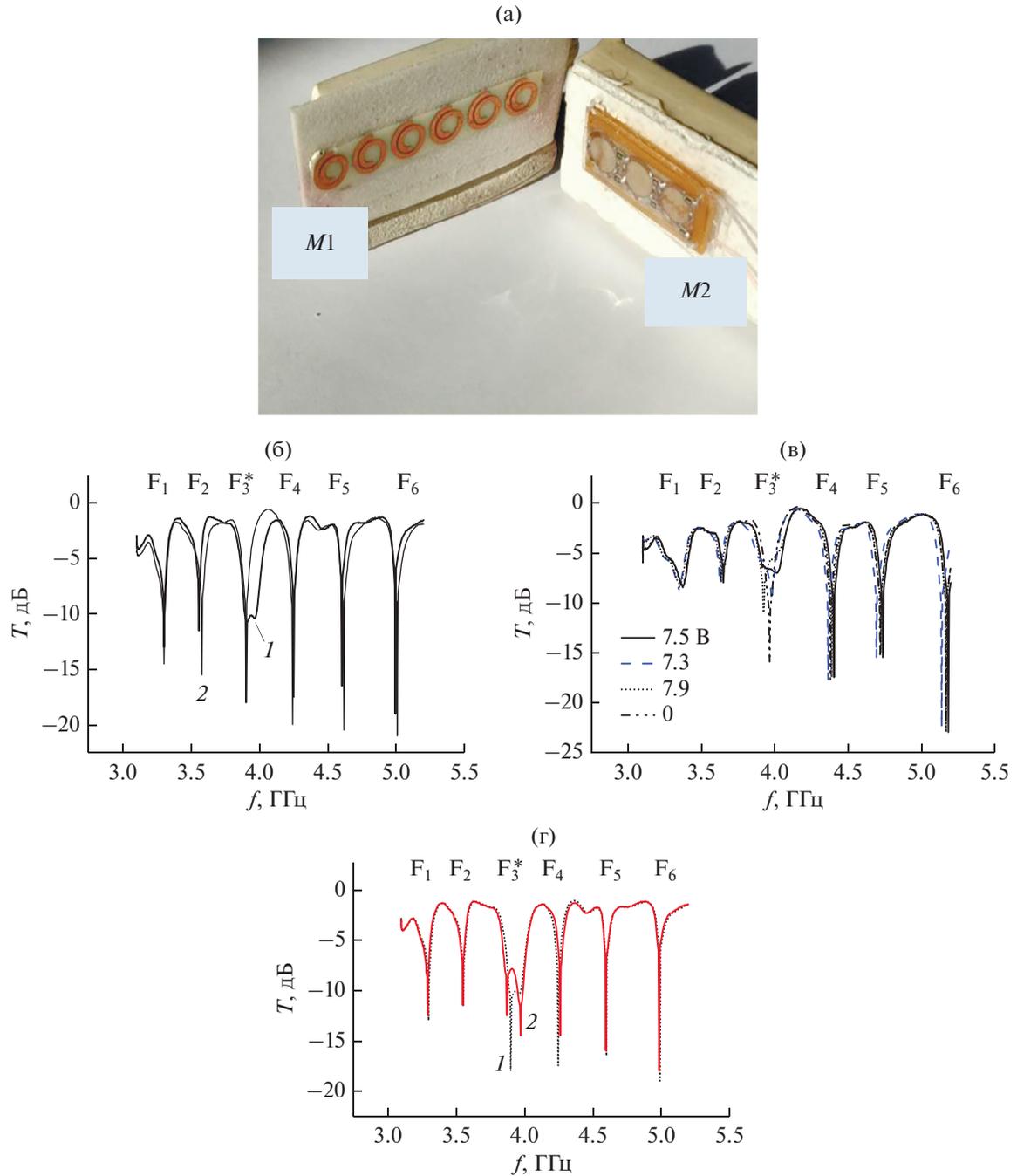
Исследован также случай, когда  $M1$  содержит ряд из шести планарных двойных разомкнутых колец ПДРК, а в качестве  $M2$  по-прежнему использован ряд из трех ОК (6ПДРК-3ОК).

I. Взаимное расположение  $M1$  и  $M2$  в интерферометре наглядно показано на рис. 3а.

Интерферограмма с  $M1$  (интерференционная зависимость  $T$  от частоты с полосами запрета  $F_i$ ) представлена на рис. 3б в сравнении с интерферограммой пустого интерферометра. Из рисунка видно, что внедрение  $M1$  не приводит к нарушению периодичности и изменению вида  $F_i$  пустого интерферометра за исключением полосы  $F_3^*$ ,  $f^* = 3.9$  ГГц ( $F_i^*$  – полосы с особенностями в результате воздействия резонанса  $M1$ ).

На рис. 3в представлена динамика интерферограммы с  $M2$  при изменении напряжения  $V_{2OC}$  от 7.3 до 7.9 В, которое позволяет управляемому резонансу в ОК возбуждаться в частотной области полосы  $F_3^*$ .

Воздействие резонансов  $M1$  и  $M2$  при совмещении их характеристик в одной и той же частотной области полосы  $F_3$  продемонстрировано на рис. 3г. Из рисунка видно, что при  $V_{2OC} = 0$  (кривая 1) изменения в интерферограмме связаны с резонансом  $M1$ , который приводит к особенности  $F_3^*$ . С наложением и увеличением  $V_{2OC} = 8$  В (кривая 2) наблюдаем раздвоение полосы  $F_3^*$  при небольшом изменении ее глубины в результате влияния резонанса  $M2$ .

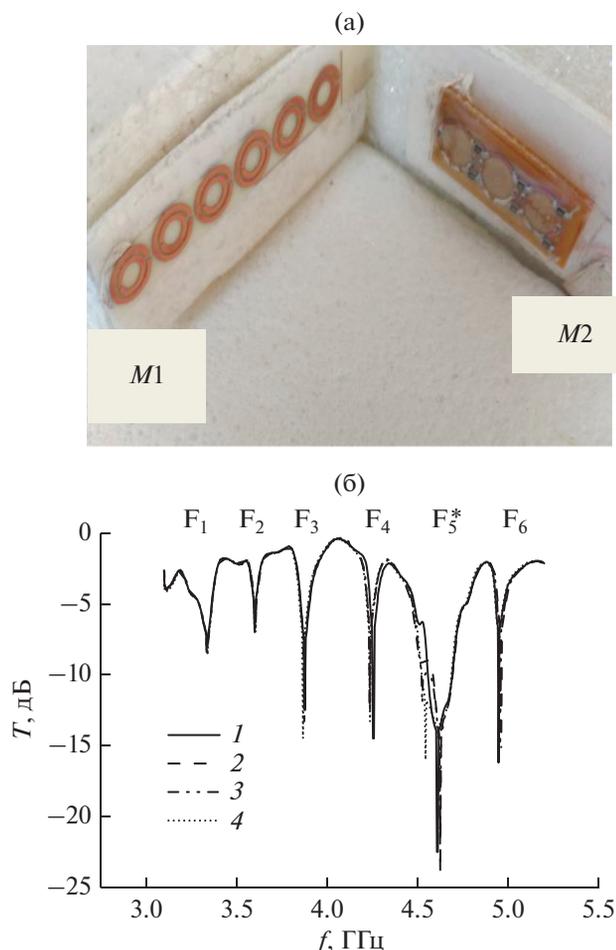


**Рис. 3.** Измеренные частотные зависимости прохождения  $T$  в интерферометре с метаструктурами ( $M1-M2$ ) – (6ПС\_ЗОК) в условиях  $M1-V_{OC}$ : а – взаимное расположение в интерферометре; б – без  $M2$  кривая 1 (с  $M1$ ) и кривая 2 (без  $M1$ ); в – без  $M1$  с  $M2$  ( $V_{OC2}$ ); г – с ( $M1-M2$ ) в условиях ( $M1-0$ ) (кривая 1) и ( $M1-8$  В) (кривая 2).

Меняя  $M1$  и подбирая необходимые величины  $V_{OC}$ , можно управлять и другими частотными полосами интерферограммы  $F_i^*$ .

II. Метаструктуры  $M1$  и  $M2$  и их взаимное расположение в интерферометре наглядно показано на рис. 4а.

Динамика интерферограммы с  $M1$  и  $M2$  продемонстрирована на рис. 4б. Как видим, при  $V_{OC} = 0$ , когда влияние  $M2$  не сказывается, существует особенность интерференционной полосы  $F_5^*$  (4.6 ГГц) с изменением ее вида и ширины относительно других полос и полосы  $F_5$  пустого интерферометра. В этом случае проявляется влияние



**Рис. 4.** Измеренные частотные зависимости прохождения  $T$  в интерферометре с метаструктурами (6 ПДРК\_3 ОК) в условиях ( $M1-V_{OC}$ ): а – взаимное расположение в интерферометре; б – результаты измерений в условиях  $V_{OC} = 0$  (1), 12.7 (2), 13 (3) и 14 В (4).

резонансных свойств ПДРК, возбуждаемых микроволновым полем вблизи 4.6 ГГц, в виде особенностей в интерферограмме при сравнении с пустым интерферометром.

Варьируя величину напряжения  $V_{OC}$ , можно менять состояние полосы  $F_5^*$ . Так, при  $V_{OC} = 12.7$  В наблюдаем сужение, а при  $V_{OC} = 14$  В – раздвоение.

## 2.2. Метаструктуры $M1(V_{OC})-M2(V_{OC})$

Исследуем случай, когда резонансы  $M1$  и  $M2$  управляются электрическими напряжениями  $V_{OC}$  и  $V_{OC}$ , подаваемыми на варакторы. Метаструктура  $M1$  содержит ряд из шести ПДРК\* с дополнительным разрывом во внешнем кольце, нагруженным варактором, а в качестве  $M2$  по-прежнему используем ряд из трех ОК с варакторами (далее – 6ПДРК\*-3ОК).

Также были рассмотрены представляющие интерес функциональные возможности мета-интерферометра, когда в качестве  $M1$  и  $M2$  использовали два дипольных кольца ДК1 и ДК2 с двумя разрывами и двумя варакторами в каждом кольце (ДК1–ДК2).

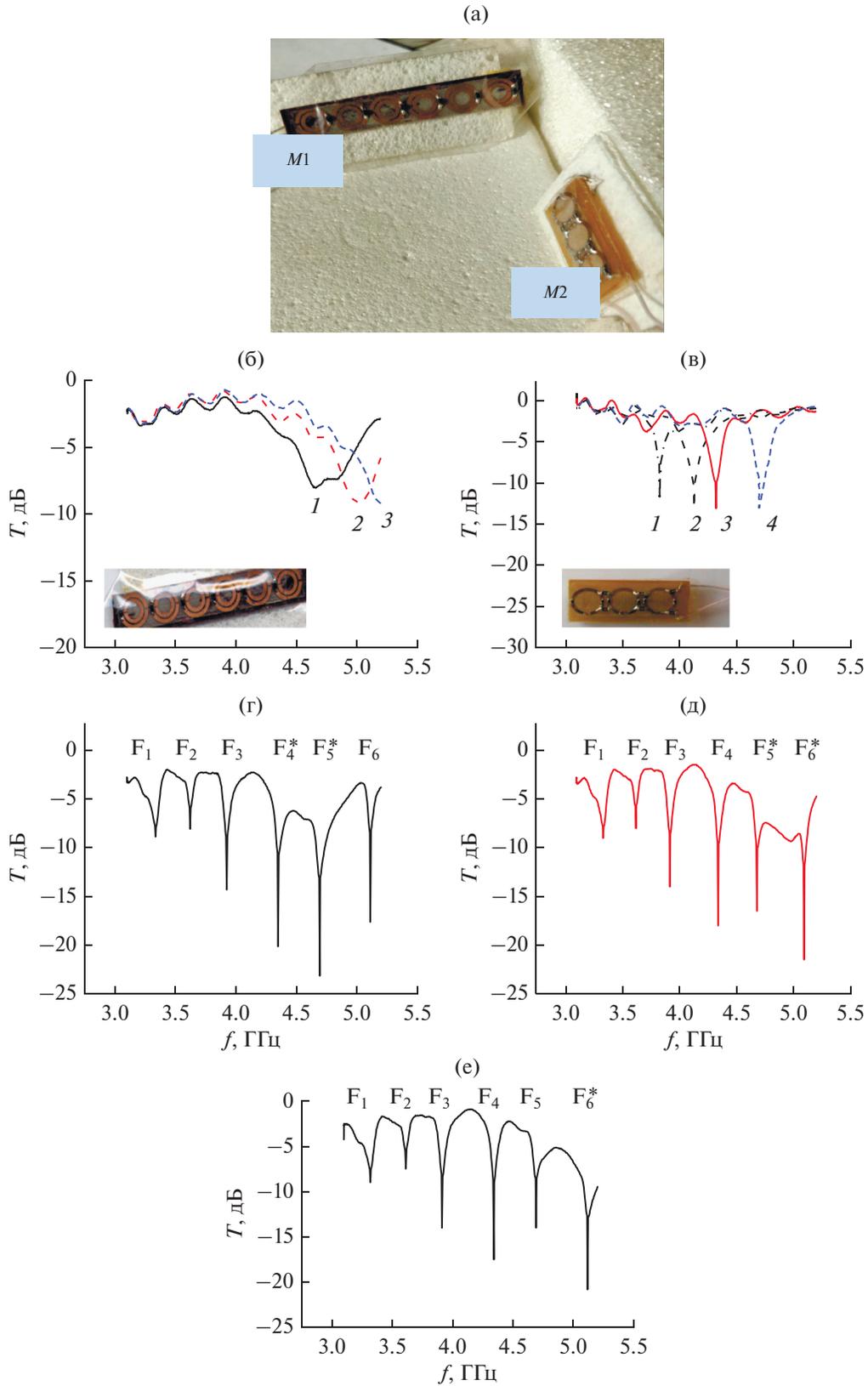
I. Метаструктуры  $M1$  и  $M2$  и их взаимное расположение в интерферометре наглядно показано на рис. 5а.

Частотные зависимости коэффициента прохождения ПДРК\* и ОК при возбуждении резонанса, измеренные в прямоугольном волноводе при разных величинах  $V_{OC}$ , представлены на рис. 5б, 5в. Видим, что резонансы, возбуждаемые в ПДРК электрическим микроволновым полем, а в ОК магнитным микроволновым полем, которые проявляются в виде резонансных минимумов на кривой  $T$ , плавно смещаются к высоким частотам с увеличением  $V_{OC}$  в результате уменьшения емкости варактора. Как при этом меняется интерферограмма с ПДРК\* ( $M1$ ) и с ОК ( $M2$ ), продемонстрировано на рис. 5г–5е; 6а, 6б и 7а, 7б.

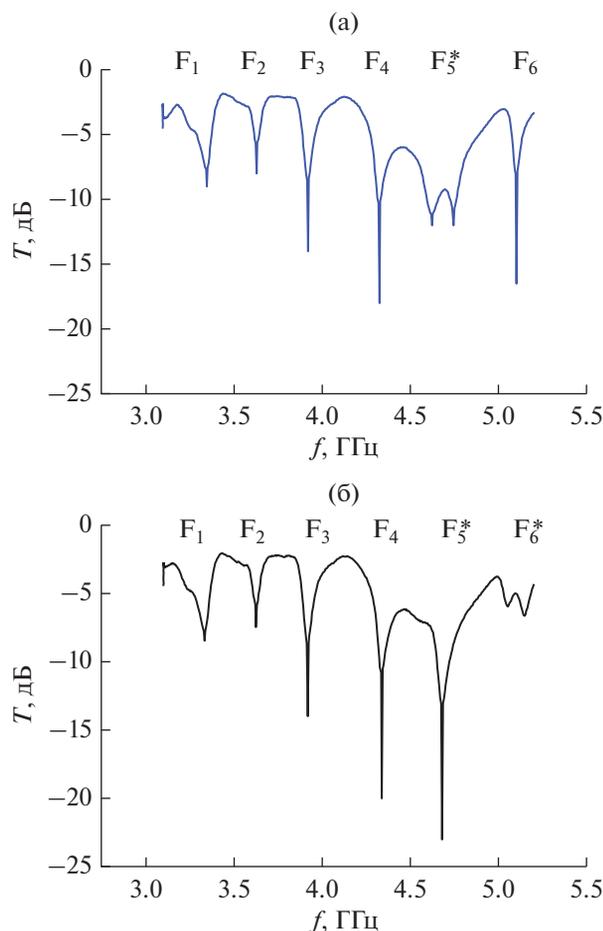
На рис. 5г–5е приведены результаты измерений динамики интерферограммы с  $M1$  и  $M2$  при управлении резонансом  $M1$  наложением напряжения  $V_{OC}$ . Видим особенность в полосе  $F_4^*$  и  $F_5^*$  при  $V_{OC} = 0$ , которая постепенно смещается к высоким частотам, затрагивая полосы  $F_5^*$  и  $F_6^*$  при  $V_{OC} = 10$  В, и удаляется к полосе  $F_6^*$  при  $V_{OC} = 20$  В в соответствии с изменением частот резонанса  $M1$ .

На рис. 6а, 6б показано, что, управляя резонансом  $M2$ , можно изменить интерферограмму в частотной области воздействия резонанса  $M1$ , затрагивая полосы запрета  $F_5^*$  и  $F_6^*$  (уменьшение глубины), приложив  $V_{OC} = 12.7$  и 32 В.

Далее были исследованы функциональные возможности мета-интерферометра при совместном воздействии резонансов метаструктур  $M1$  и  $M2$ . Было выяснено, что, подбирая необходимое условие ( $V_{OC}-V_{OC}$ ), можно управлять состоянием полосы  $F_6^*$ , практически не затрагивая другие полосы интерферограммы при совмещении резонансных характеристик  $M1$  и  $M2$  в одной и той же частотной области (в полосе запрета  $F_6^*$ , см. рис. 5е и 6б). Так, на рис. 7а, 7б показано, что, изменяя условия ( $V_{OC}-V_{OC}$ ), можно управлять глубиной ( $T_{\min}$ ) и шириной  $\delta$  данной полосы без изменения частоты  $f$ . В условиях (20–0) наблюдаем следующее состояние полосы  $F_6^*$ :  $f = 5.11$  ГГц;  $T_{\min} = -20.8$  дБ;  $\delta = 0.1$  ГГц (на уровне  $-10$  дБ). При (0–32) меняется глубина ( $T_{\min} = -6$  дБ), а (20–32) приводит к раздвоению и увеличению ширины  $\delta = 0.16$  ГГц относительно первоначаль-



**Рис. 5.** Измеренные частотные зависимости прохождения  $T$  с метаструктурами (6ПДРК\*\_ЗОК): а – взаимное расположение в интерферометре; результаты измерений в волноводе: б – с 6ПДРК\* при  $V_{OC} = 0$  (1), 10 (2), 20 В (3), в – с ЗОК при  $V_{OC} = 7$  (1), 8 (2), 10 (3), 15 В (4); г–е – в интерферометре в условиях  $V_{2OC} = 0$  при  $V_{1OC} = 0$  (г), 10 (д), 20 В (е).

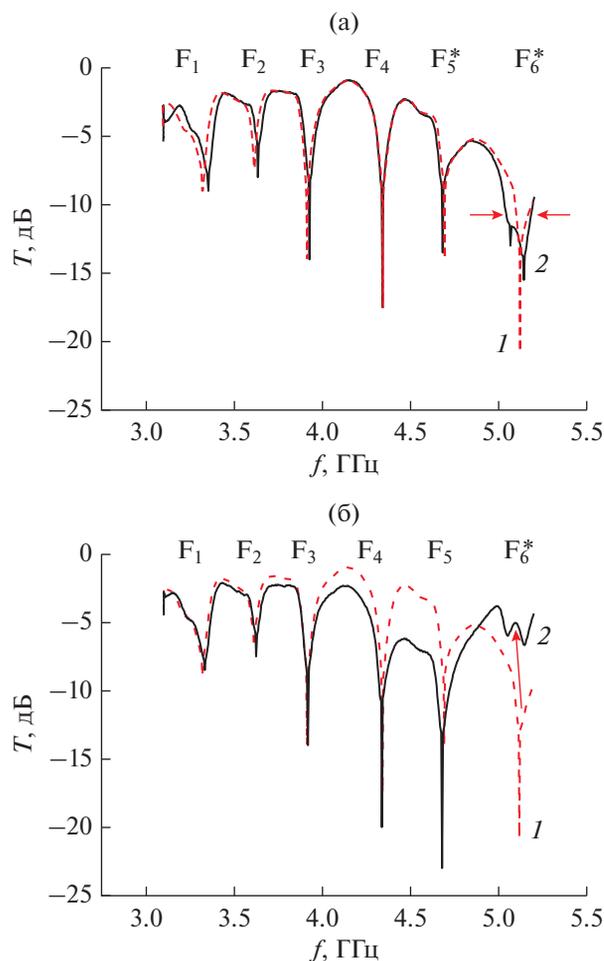


**Рис. 6.** Измеренные частотные зависимости прохождения  $T$  в интерферометре с метаструктурами (6ПДРК\*\_3ОК) в условиях  $V_{1OC} = 0$  при  $V_{2OC} = 12.7$  (а) и 32 В (б).

ного (20–0) при некотором изменении глубины ( $T_{\min} = -13$  дБ...–15 дБ).

II. Динамика резонансов ДК1 и ДК2, которые проявляются в одной и той же частотной области заданного диапазона частот как резонансные минимумы коэффициента прохождения  $T_{\min}$  показана на рис. 8а, 8б. Результаты получены на основании измерений в прямоугольном волноводе частотных зависимостей прохождения  $T$ , изменяющихся при внешнем воздействии  $V_{OC}$ . Видим, что резонансы плавно смещаются к высоким частотам с увеличением  $V_{OC}$  в результате уменьшения емкости варакторов.

Состояние интерферограммы с ДК1 и ДК2 отражено на рис. 9–11 (взаимное расположение ДК1 и ДК2 в интерферометре наглядно показано на рис. 9а). Видим, что при наложении ( $V_{1OC} = 0$ ) интерферограмма теряет периодичность по сравнению с пустым интерферометром и происходят существенные амплитудно-частотные изменения (рис. 9б). Наблюдаем изменения интенсивностей

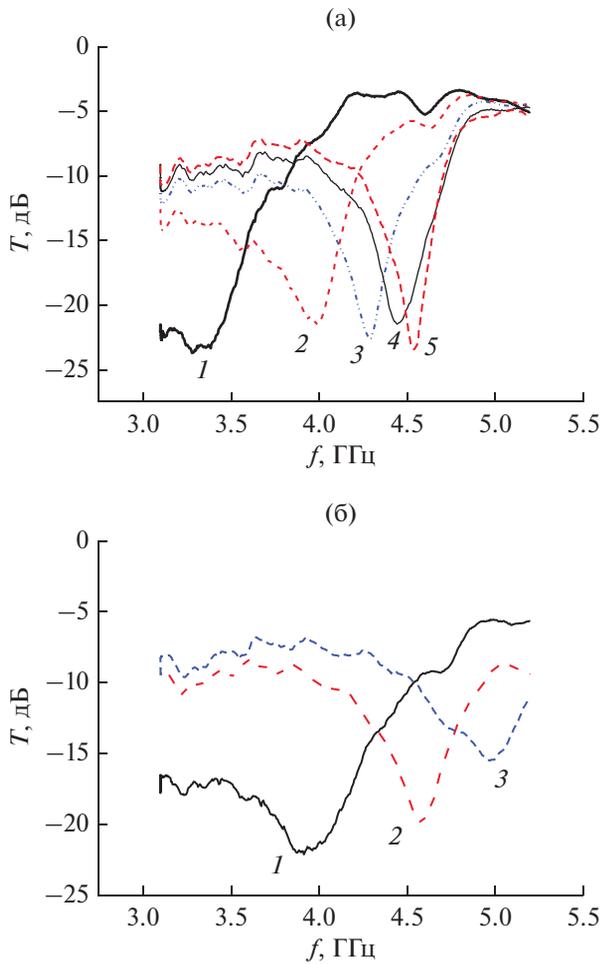


**Рис. 7.** Динамика интерферограммы при изменении условий внешнего воздействия на метаструктуры (6ПДРК\*\_3ОК): а – из условий (20–0) (кривая 1) на (20–32) (кривая 2); б – из (20–0) (кривая 1) на (0–32) (кривая 2).

и частот полос запрета в условиях (4–0) и (15–0), охватывающих, в отличие от ПДРК\* и ОК, почти весь измеряемый диапазон в результате воздействия довольно широкого резонанса ДК1.

Изменения интерферограммы при наложении ( $0 - V_{2OC}$ ) в условиях (0–10) и (0–20) приведены на рис. 10а. Наблюдаем увеличение числа полос запрета при небольших амплитудно-частотных изменениях. Состояние интерферограммы при совместном воздействии управляемых резонансных эффектов ДК1 и ДК2 при ( $V_{1OC} - V_{2OC}$ ) в условиях (20–20) продемонстрировано на рис. 10б.

Было показано, что, варьируя условиями ( $V_{1OC} - V_{2OC}$ ), можно управлять частотой и шириной  $\delta$  полосы запрета. На рис. 11а видно, что полоса  $F^*$  смещается на 0.09 ГГц (от 4.275 до 4.366 ГГц) при изменении условий от (0–20) к (29–20). Меняя условие (0–20) на (10–0), наблюдаем уширение полосы  $F^*$  в несколько раз (на



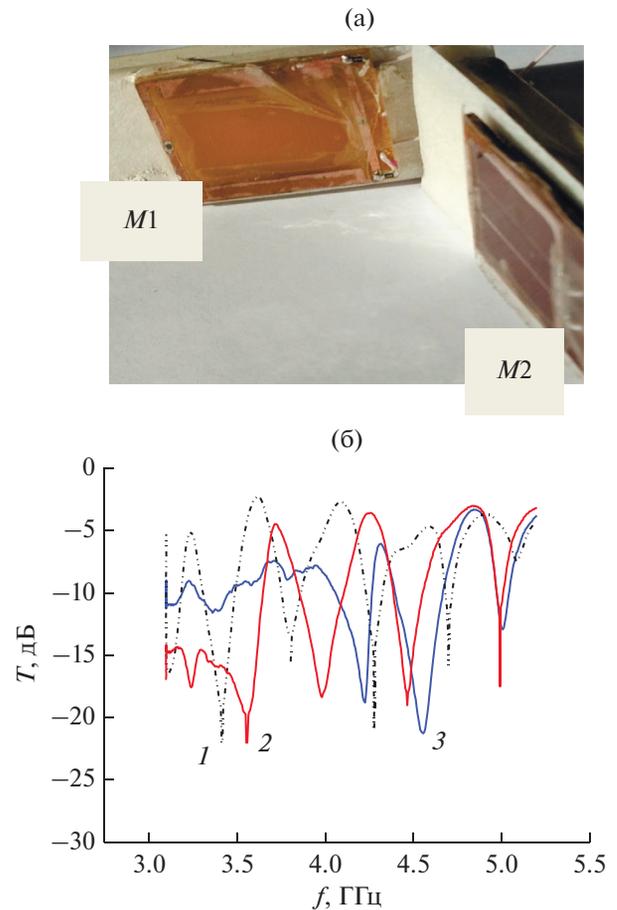
**Рис. 8.** Измеренные частотные зависимости прохождения  $T$  в волноводе: а – с ДК1 при  $V_{OC} = 0$  (1), 5 (2), 10 (3), 15 (4), 29 В (5); б – с ДК2 при  $V_{OC} = 0$  (1), 10 (2), 20 В (3).

уровне  $-15$  дБ от 0.01 до 0.08 ГГц, как показано на рис. 11б). Отметим, что изменения полосы  $F^*$  затрагивают, к сожалению, и другие полосы.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Исследованы функциональные свойства управляемой микроволновой интерферометрии с применением резонансных метаструктур на основе киральных и дипольных кольцевых электропроводящих элементов, резонансные отклики которых оказывают воздействие на интерферограмму в зависимости от того, какими обладают свойствами и как расположены в мета-интерферометре.

Исследованы функциональные особенности мета-интерферометра с пространственно разнесенными и независимо электрически управляемыми от разных источников метаструктурами на основе киральных и дипольных элементов: с метаструктурой  $M1$  в качестве разделителя пучка и с

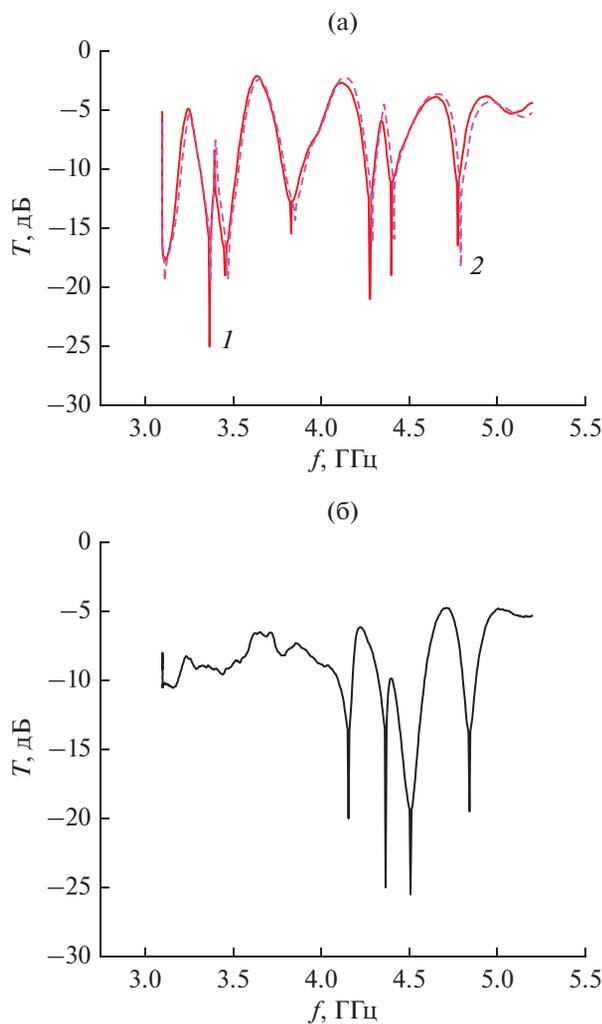


**Рис. 9.** Динамика интерферограммы при изменении условий внешнего воздействия на метаструктуры (ДК1\_ДК2): а – взаимное расположение в интерферометре; б – при ( $V_{1OC} = 0$ ) в условиях (0–0) (кривая 1), (4–0) (кривая 2) и (15–0) (кривая 3).

$M2$  в закороченном  $h$ -плече как отражателе резонатора Фабри–Перо. Метаструктуры выполнены на основе планарных спиралей и двойных разомкнутых колец, обладающих резонансными откликами на определенных частотах, а также управляемых электрическим напряжением двойных разомкнутых колец с дополнительным разрывом во внешнем кольце, нагруженном варактором, одинарных дважды разомкнутых колец с варакторами и нагруженного варакторами дипольного кольца с двумя разрывами. Исследованы их разные комбинации.

Измерена динамика резонансных откликов метаструктур в прямоугольном волноводе в зависимости от напряжения обратного смещения на варакторах  $V_{OC}$  и интерферограмма при разных комбинациях ( $M1-M2$ ).

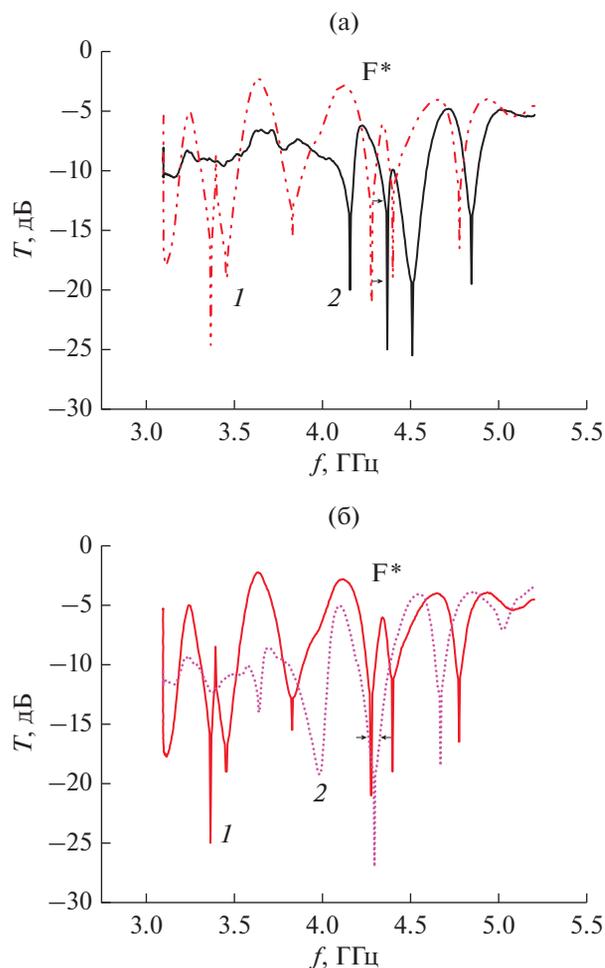
Показано, что при совместном наложении напряжений  $V_{1OC}$  и  $V_{2OC}$  на варакторы  $M1$  и  $M2$  с воздействием на интерферограмму динамиче-



**Рис. 10.** Динамика интерферограммы при изменении условий внешнего воздействия на метаструктуры (ДК1\_ДК2): а – при  $(0-V_{2OC})$  в условиях  $(0-20)$  (кривая 1),  $(0-10)$  (кривая 2), б – при  $(V_{1OC}-V_{2OC})$  в условиях  $(20-20)$ .

ских характеристик метаструктур в одной и той же частотной области появляется возможность независимого управления амплитудно-частотными характеристиками интерферограммы.

Показано также, что функциональные возможности мета-интерферометра зависят от выбора метаструктур. Так, с метаструктурами (6ПДРК\*-3ОК), варьируя величинами  $(V_{1OC}-V_{2OC})$ , можно управлять глубиной ( $T_{мин}$ ) и шириной ( $\delta$ ) индивидуальной полосы запрета без изменения частоты  $f$  при незначительном влиянии на соседние полосы, при этом частотный спектр интерферограммы мало отличается от пустого интерферометра. С комбинацией (ДК1–ДК2) можно управлять частотой  $f$  и шириной  $\delta$ , затрагивая и соседние интерференционные полосы при существенном от-



**Рис. 11.** Динамика интерферограммы при изменении условий внешнего воздействия на метаструктуры (ДК1\_ДК2): а – из условий  $(0-20)$  (кривая 1) на  $(29-20)$  (кривая 2); б – из  $(0-20)$  (кривая 1) на  $(10-0)$  (кривая 2).

личии спектра интерферограммы от пустого интерферометра.

Полученные результаты могут служить мотивацией для дальнейших исследований с применением других разнообразных метаструктур и быть полезны при разработке многополосных фильтров с независимым управлением амплитудно-частотными характеристиками, востребованных в многоканальных многофункциональных телекоммуникационных системах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания ИРЭ РАН по теме 0030-2019-0014.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Hou-Tong, O'Hara John F., Azad Abul K., Taylor Antoinette J.* // *Laser Photonics Rev.* 2011. V. 5. № 4. P. 513.
2. *Xiao Shuyuan, Wang Tao, Liu Tingting et al.* // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2020. V. 53. № 50. P. 503002.
3. *Крафтмахер Г.А., Бутылкин В.С., Казанцев Ю.Н., Мальцев В.П.* // *РЭ.* 2018. Т. 63. № 7. С. 641.
4. *Butylkin V., Kazantsev Y., Kraftmakher G., Mal'tsev V.* // *Appl. Phys. A.* 2017. V. 123. № 1. P. 57.
5. *Cameron R., Kudsia C., Mansour R.* *Microwave Filters for Communication Systems: Fundamentals, Design, and Applications.* Hoboken: John Wiley & Sons, 2018.
6. *Lin Y.C., Hong T.S., Huang H.H.* // *IEEE Trans.* 2014. V. MTT-62. № 12. Pt. 2. P. 3351.
7. *Chaudhary G., Jeong Y., Lim J.* // *IEEE Trans.* 2013. V. MTT-61. № 1. P. 107.
8. *Xiu Yin Zhang, Li Gao, Yunfei Cao et al.* // *Progress in Electromagnetics Research C.* 2013. V. 42. P. 55.
9. *Liu Q., Ge J., Fok M.P.* // *Opt. Lett.* 2018. V. 43. № 22. P. 5685.
10. *Крафтмахер Г.А., Бутылкин В.С., Казанцев Ю.Н., Мальцев В.П.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2019. Т. 109. № 4. С. 224.
11. *Крафтмахер Г.А., Бутылкин В.С., Казанцев Ю.Н., Мальцев В.П.* // *РЭ.* 2019. Т. 64. № 11. С. 1179.
12. *Крафтмахер Г.А., Бутылкин В.С., Казанцев Ю.Н., Мальцев В.П.* // *РЭ.* 2021. Т. 66. № 1. С. 3.
13. *Крафтмахер Г.А., Бутылкин В.С., Казанцев Ю.Н., Мальцев В.П.* // *РЭ.* 2021. Т. 66. № 2. С. 105.
14. *Крафтмахер Г.А., Бутылкин В.С., Казанцев Ю.Н. и др.* // *РЭ.* 2021. Т. 66. № 12. С. 1147.

---

---

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

---

---

УДК 538.566.2;621.372.8

**СВЯЗАННЫЕ ПЛАЗМОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
И РЕЗОНАНСЫ В ТРЕУГОЛЬНОМ КЛАСТЕРЕ  
ИЗ ТРЕХ СЕРЕБРЯНЫХ НАНОЦИЛИНДРОВ**

© 2022 г. А. П. Аниютин\*

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация**\*E-mail: anioutine@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.05.2021 г.

После доработки 28.05.2021 г.

Принята к публикации 17.07.2021 г.

Рассмотрена двумерная задача дифракции плоской волны светового диапазона  $300 \text{ нм} < \lambda < 900 \text{ нм}$  ( $\lambda$  — длина волны) на треугольном кластере, состоящем из трех одинаковых серебряных наночилиндров, расположенных в углах равностороннего треугольника. Строгими численными методами рассчитаны частотные характеристики поперечника рассеяния и пространственное распределение поля плазмонов вблизи цилиндров. Исследовано влияние угла падения плоской волны *TM*-типа, радиуса цилиндра, расстояния между цилиндрами и потерь серебра на спектры поперечника рассеяния и структуру плазмонов. Обнаружены эффекты “вырождения” резонансов в кластере, образовании локальных и связанных резонансов плазмонов, а также перехода резонанса плазмонов в резонанс внутренней области кластера.

DOI: 10.31857/S0033849422050023

**ВВЕДЕНИЕ**

Как известно, в таких одиночных рассеивателях, как наночилиндр из серебра или золота, в оптическом диапазоне волн  $300 \text{ нм} < \lambda < 900 \text{ нм}$  ( $\lambda$  — длина волны) существуют не только поверхностные волны (плазмон-поляритоны) с высокой степенью локализации поля вблизи поверхности цилиндра, но и их резонансы [1]. Эффект локализации и существование резонансов поля используется в спектроскопии, а также при создании сенсоров волн оптического диапазона [1]. Отметим, что спектры рассеяния и поглощения на одиночных цилиндрах с круглой, эллиптической и прямоугольной формой поперечного сечения анализировались в работах [2–6]. Оптические резонаторы из двух серебряных цилиндров прямоугольного сечения исследовались в [3, 4], а для случая двух эллиптических цилиндров — в [7]. Достоинством таких резонаторов является возможность управлять резонансной частотой путем изменения расстояния между цилиндрами. Случаи линейных кластеров, образованных двумя одинаковыми сплошными сферами из карбида кремния, (полыми) цилиндрами из метаматериала, а также двух (трех) одинаковых наночилиндров или цилиндров разного диаметра из серебра рассматривались в [1, 8–12].

Цель данной работы состоит в строгом электродинамическом исследовании особенностей связанных резонансов плазмонов, образующихся при рассеянии плоской волны светового диапазона длин волн треугольным кластером, образованным тремя одинаковыми цилиндрами из реального серебра, расположенных в углах равностороннего треугольника.

**1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ.  
МЕТОД РЕШЕНИЯ**

Рассмотрена двумерная задача дифракции плоской электромагнитной волны на кластере (структуре), состоящем из трех одинаковых серебряных наночилиндров, расположенных в углах равностороннего треугольника. Считается, что все цилиндры имеют одинаковый радиус  $a_l = a$  ( $l = 1, 2, 3$ ) и одинаковое расстояние  $h = 2a + d \equiv 2a + \chi a$  между их центрами ( $d = \chi a$  — расстояние между их поверхностями, рис. 1). Предполагается, что длина волны  $\lambda$  падающей электромагнитной принадлежит световому диапазону длин волн  $\lambda \approx 300 \dots 900 \text{ нм}$ .

Геометрия исследуемой задачи представлена на рис. 1. Относительная диэлектрическая проницаемость серебра  $\epsilon_{\text{Ag}} = \epsilon' - i\epsilon'' \equiv \text{Re}(\epsilon_{\text{Ag}}) - i \text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}})$  в световом диапазоне длин волн определялась путем аппроксими-

мации кубичными сплайнами экспериментальных данных работы [13]. Отметим, что использование результатов работы [13], так же как и теории Друде [1], накладывает ограничение на минимальный диаметр  $2a$  серебряных цилиндров  $2a \geq 10$  нм, так как при  $2a < 10$  нм необходимо учитывать явления пространственной дисперсии [1].

Таким образом, с точки зрения классической электродинамики речь идет о решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на трех однородных диэлектрических цилиндрах.

Исследован случай *TM*-поляризации, когда в электромагнитном поле присутствуют компоненты  $H_z(x, y)$ ,  $E_x(x, y)$ ,  $E_y(x, y)$ . Задача дифракции в этом случае сводится к нахождению скалярной функции  $U(x, y) = H_z(x, y)$ , а волновое поле падающей плоской волны задается выражением

$$U^0(x, y) = \exp(-ikx \cos \varphi_0 -iky \sin \varphi_0), \quad (1)$$

где угол  $\varphi_0$  определяет направление распространения волны. Использована гауссовская система физических единиц, зависимость от времени выбрана в виде  $\exp(i\omega t)$ ,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$  – волновое число вакуума,  $\omega$  – круговая частота,  $c$  – скорость света в вакууме.

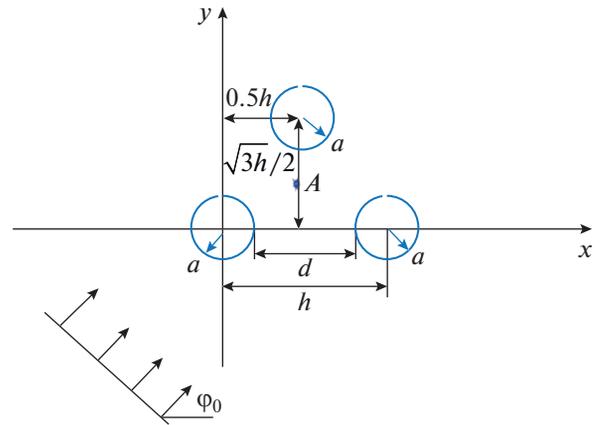


Рис. 1. Геометрия задачи.

Полное поле  $U(x, y)$  в кусочно-однородной среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \varepsilon(x, y) U(x, y) = 0, \quad (2)$$

где диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(x, y)$  среды определяется выражением

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \varepsilon_{Ag}, & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leq 1, \quad \left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leq 1, \quad \left(\frac{x-0.5h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\sqrt{3}h/2}{a}\right)^2 \leq 1, \\ 1, & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 > 1, \quad \left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 > 1, \quad \left(\frac{x-0.5h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\sqrt{3}h/2}{a}\right)^2 > 1, \end{cases} \quad (3)$$

$\varepsilon_{Ag}$  – относительная диэлектрическая проницаемость серебра.

Уравнение (2) необходимо дополнить условием непрерывности величин

$$U(x, y), \quad \frac{1}{\varepsilon(x, y)} \frac{\partial U(x, y)}{\partial N} \quad (4)$$

на границах цилиндров, где  $N$  обозначает нормаль к границам цилиндров.

Полное поле вне цилиндров состоит из падающего  $U^0$  и рассеянного  $U^s$  полей

$$U = U^0 + U^s, \quad (5)$$

где рассеянное поле  $U^s$  представляет собой сумму полей, рассеянных каждым цилиндром:

$$U^s = U_1^s + U_2^s + U_3^s. \quad (6)$$

Численное исследование сформулированной дифракционной задачи удобнее проводить в цилиндрической системе координат ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y =$

$r \sin \varphi$ ). В такой системе координат падающее поле (1) имеет вид

$$U^0(r, \varphi) = \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (7)$$

При этом рассеянное поле (6) должно удовлетворять в дальней зоне условию излучения

$$U^s \approx \Phi(\varphi) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp(-ikr + i\pi/4), \quad kr \rightarrow \infty, \quad (8)$$

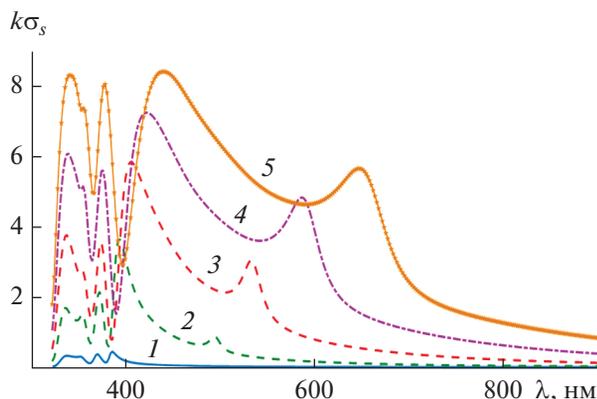
где  $\Phi(\varphi)$  – диаграмма рассеяния кластера.

Полное сечение рассеяния кластера  $\sigma_s$  выражается через решение сформулированной выше краевой задачи по формуле

$$\sigma_s = \frac{2}{\pi k} \int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (9)$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное решение краевой задачи проводили методом дискретных источников [14–18]. Точность численного решения оценивалась невязкой гра-



**Рис. 2.** Спектр нормированного поперечника рассеяния для кластера при углах падения плоской волны:  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\chi = 0.1$  и значениях радиуса цилиндров  $a = 10$  (1), 20 (2), 30 (3), 40 (4) и 50 нм (5).

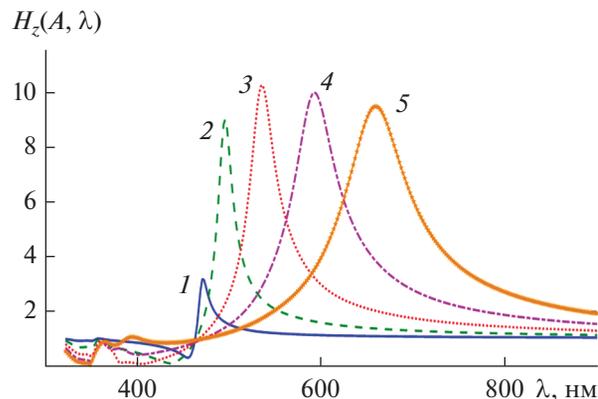
ничных условий  $\Delta$  в линейной норме на цилиндрах и во всех расчетах была не хуже чем  $\Delta = 10^{-3}$ .

Рассмотрим сначала случай, когда плоская волна с углом падения  $\varphi_0 = \pi/4$  рассеивается треугольным кластером, в котором фиксировано расстояние  $d = 0.1a$  ( $\chi = 0.1$ ) между цилиндрами.

На рис. 2 представлены результаты расчетов спектра нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  для пяти различных значений радиусов цилиндров:  $a = 10, 20, 30, 40, 50$  нм. Из рис. 2 следует, что каждая кривая содержит несколько максимумов (резонансов). При этом увеличение радиусов цилиндров сопровождается как увеличением значений нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$ , так и смещением его резонансов в сторону больших значений длин волн.

На рис. 3 представлена зависимость модуля поля  $H_z(A, \lambda)$  от длины волны в пространственной точке  $A$  с координатами  $x = h/2$ ,  $y = \sqrt{3}/4$ , соответствующей центральной точке внутренней области кластера (см. рис. 1). Значения радиусов цилиндров  $a = 10, 20, 30, 40, 50$  нм. Из рис. 3 видно, что каждая кривая имеет ярко выраженный максимум, расположение которого совпадает с расположением первого (правого) максимума нормированного поперечника рассеяния (см. рис. 2). При этом изменение радиуса цилиндров в пределах  $20 \text{ нм} < a < 50 \text{ нм}$  приводит к изменению значений максимума поля  $H_z(A, \lambda)$  в пределах  $9 < H_z(A, \lambda) < 10$ , в то время как при  $a = 10$  нм максимум поля  $H_z(A, \lambda)$  принимает значение  $H_z(A, \lambda) \approx 3$ , т.е. в три раза меньше.

На рис. 4а–4г представлены результаты расчетов спектра нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  для кластеров, у которых расстояние между цилиндрами  $d = \chi a$  равнялось соответственно

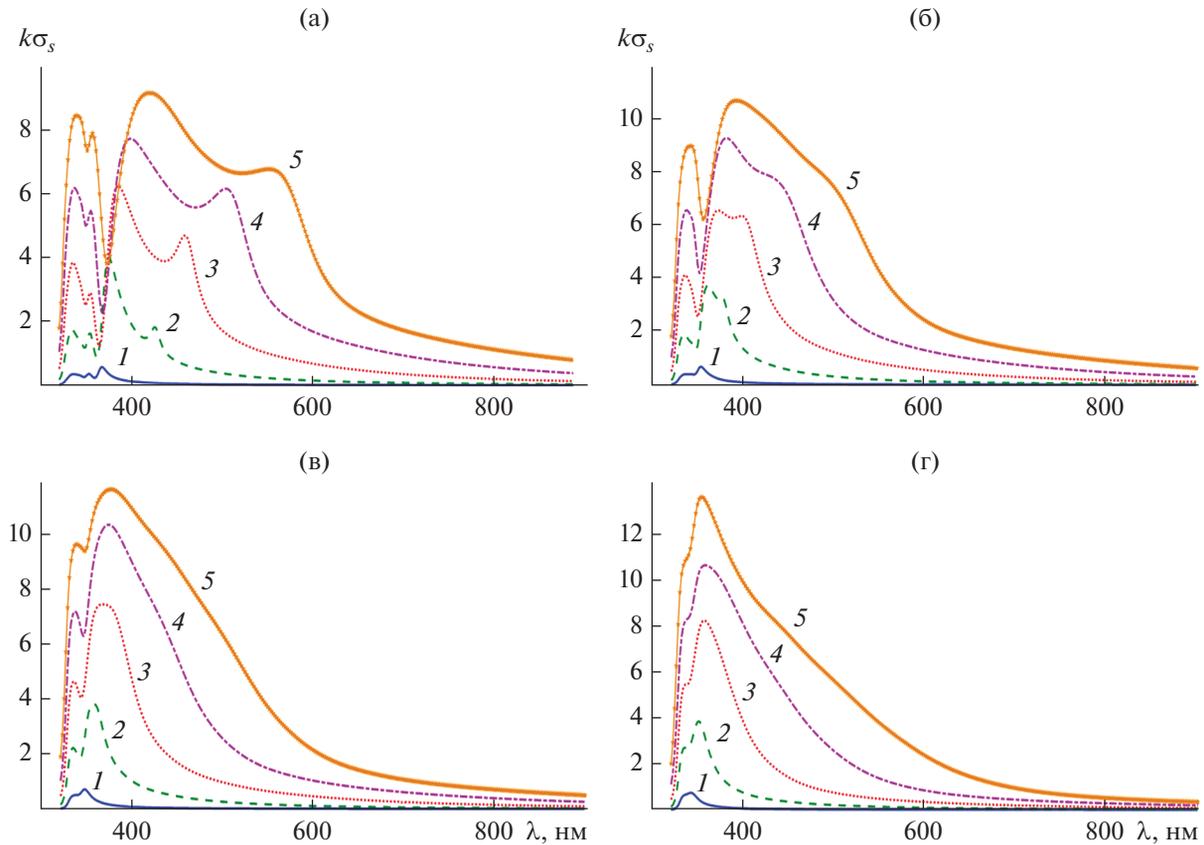


**Рис. 3.** Зависимость модуля поля  $H_z(A, \lambda)$  от длины волны в пространственной точке кластера  $A$  с координатами  $x = h/2$ ,  $y = \sqrt{3}/4$  при углах падения плоской волны:  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\chi = 0.1$  и значениях радиуса цилиндров  $a = 10$  (1), 20 (2), 30 (3), 40 (4) и 50 нм (5).

$d = \chi a = 0.2a, 0.5a, 1.0a, 2.0a$  при пяти различных значениях радиусов цилиндров:  $a = 10, 20, 30, 40, 50$  нм. Из результатов, представленных на этих рисунках, следует, что увеличение расстояние между цилиндрами  $d = \chi a$  приводит к смещению максимумов (резонансов) нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  в сторону меньших значений длин волн и слиянию (уменьшению числа резонансов) максимумов (резонансов) поперечника рассеяния  $k\sigma_s$ . Отметим, что процессу слияния максимумов поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  соответствует процесс вырождения резонансов плазмонов.

Рисунок 5 посвящен исследованию влияния угла падения  $\varphi_0$  плоской волны на нормированный поперечник рассеяния  $k\sigma_s$ . Кластер характеризовался следующими параметрами:  $\chi = 2.0$ ,  $a = 40$  нм, а угол падения  $\varphi_0$  плоской волны принимал значения  $0, \pi/6, \pi/4$  и  $\pi/2$ . Из рисунка видно, что изменение угла падения  $\varphi_0$  в пределах  $0 < \varphi_0 < \pi/2$  слабо сказывается на положении максимума (резонанса) нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$ . Отметим, что при меньших расстояниях между цилиндрами  $\chi < 2.0$  изменение угла падения  $\varphi_0$  в пределах  $0 < \varphi_0 < \pi/2$  сказывается еще меньше (результаты мы не приводим).

Исследовано также влияние потерь серебра  $\text{Im}(\epsilon)$  цилиндров кластера на значения нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  (рис. 6). Кластер имел следующие параметры:  $\chi = 0.1$ ,  $a = 40$  нм, угол падения  $\varphi_0$  плоской волны был равен  $\varphi_0 = \pi/6$ , потери серебра  $\text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}}) = 0, 0.1\text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}})$  и  $\text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}})$ . Из данных, представленных на рис. 6, следует что потери наиболее сильно ска-



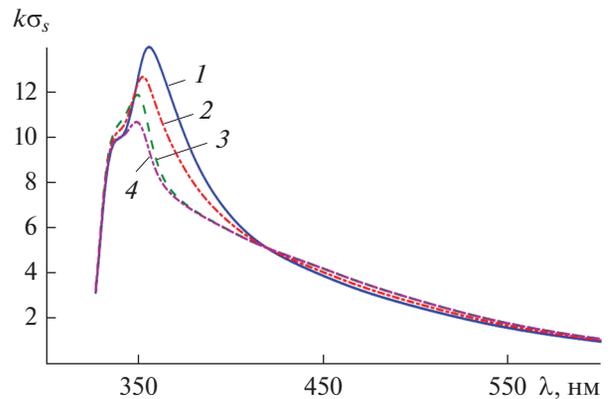
**Рис. 4.** Спектр нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  для кластеров, у которых расстояние между цилиндрами  $d = \chi a$  равнялось соответственно  $d = \chi a = 0.2a$  (а),  $0.5a$  (б),  $1.0a$  (в),  $2.0a$  (г) при значениях радиуса цилиндров  $a = 10$  (1), 20 (2), 30 (3), 40 (4) и 50 нм (5).

зываются в области длин волн  $\lambda < 400$  нм, соответствующей мультипольным резонансам плазмонов. Отметим, что в случае реальных потерь резонансы поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  области длин волн  $\lambda \ll 360$  нм сливаются, приводя к общему увеличению значений поперечника рассеяния.

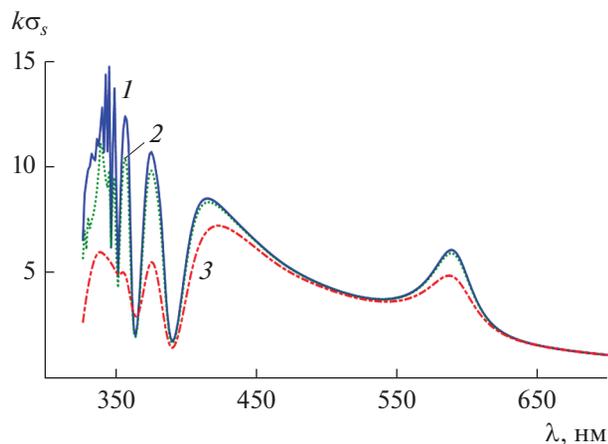
Рассмотрим случай, когда плоская волна с углом падения плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  рассеивается треугольным кластером, в котором фиксирован радиус цилиндров  $a = 40$  нм (или  $a = 10$  нм), а параметр  $\chi$ , определяющий расстояние между ними, изменяется, принимая значения  $\chi = 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 3.0$ . На рис. 7а представлены результаты расчетов спектра нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  в случае радиуса цилиндра  $a = 40$  нм и указанных шести значений параметра  $\chi$ . Случай цилиндра радиусом  $a = 10$  нм изображен на рис. 7б.

Из этих рисунков видно, что увеличение расстояния между цилиндрами, как и уменьшение радиуса цилиндра, приводит к уменьшению числа резонансных максимумов спектра нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$ .

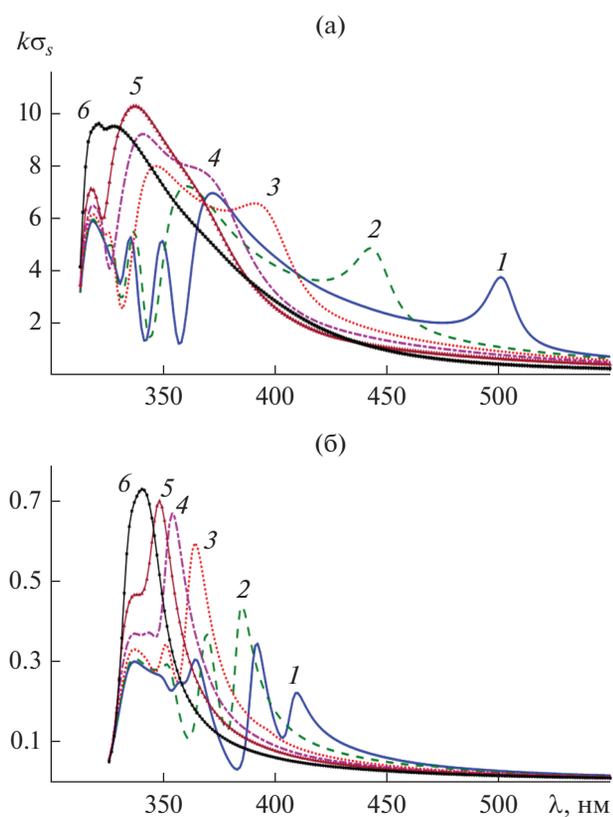
Теперь рассмотрим структуру ближнего поля  $H_z$  вблизи кластера, которая имеет место в случае резонансов поперечника рассеяния  $k\sigma_s$ .



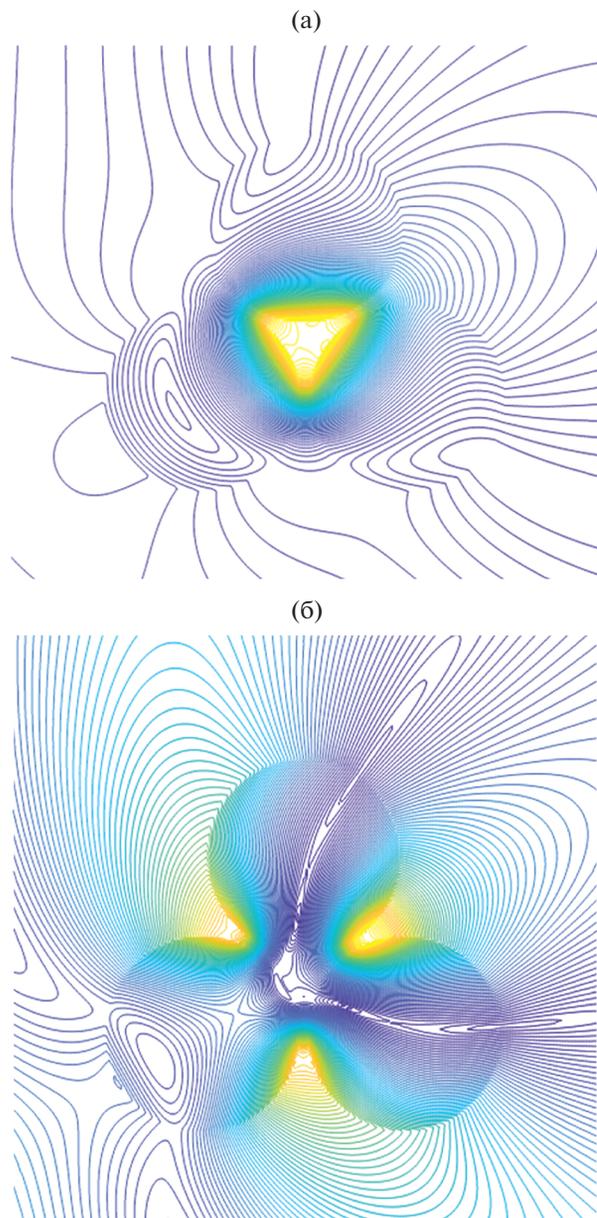
**Рис. 5.** Спектр нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  для кластера при углах падения плоской волны  $\varphi_0 = 0$  (1),  $\pi/6$  (2),  $\pi/4$  (3),  $\pi/2$  (4),  $\chi = 2$  и значении радиуса цилиндра  $a = 40$  нм.



**Рис. 6.** Спектр нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  для кластера из трех серебряных наночилиндров с параметрами  $\chi = 0.1$ ,  $a = 40$  нм, при угле падения  $\varphi_0$  плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  для разных потерь серебра цилиндров: кривая 1 –  $\text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}}) = 0$ , кривая 2 –  $0.1\text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}})$ , кривая 3 –  $\text{Im}(\epsilon_{\text{Ag}})$ .

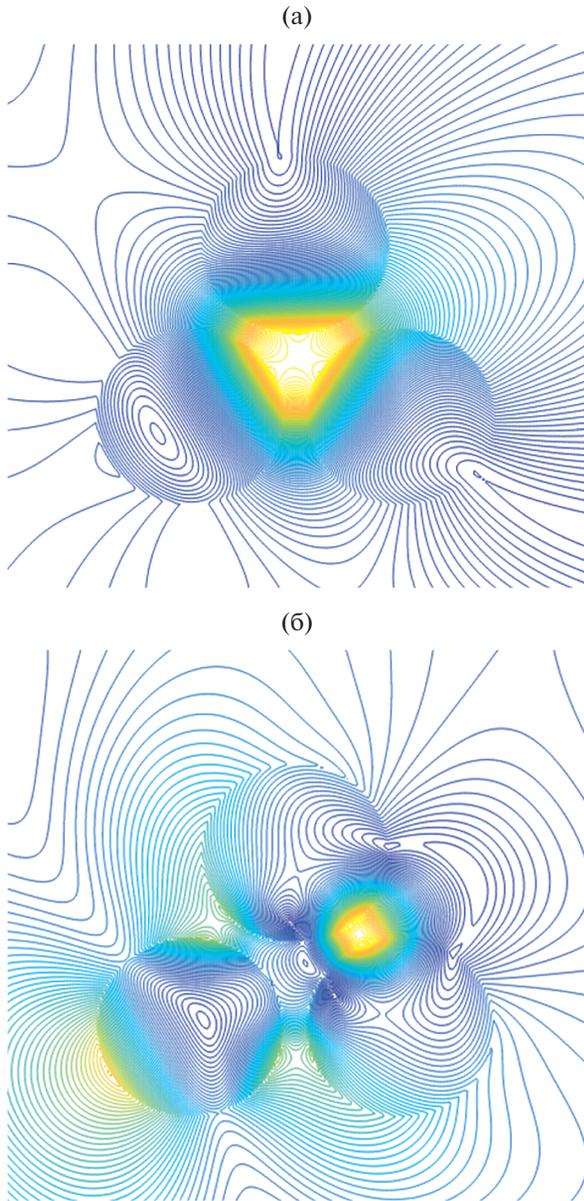


**Рис. 7.** Спектр нормированного поперечника рассеяния  $k\sigma_s$  для кластера при значениях радиуса цилиндров  $a = 40$  нм (а),  $a = 10$  нм (б), угле падения плоской волны:  $\varphi_0 = \pi/6$  и различных значениях параметра  $\chi = 0.05$  (1), 0.1 (2), 0.25 (3), 0.5 (4) 1.0 (5) и 3.0 (6).

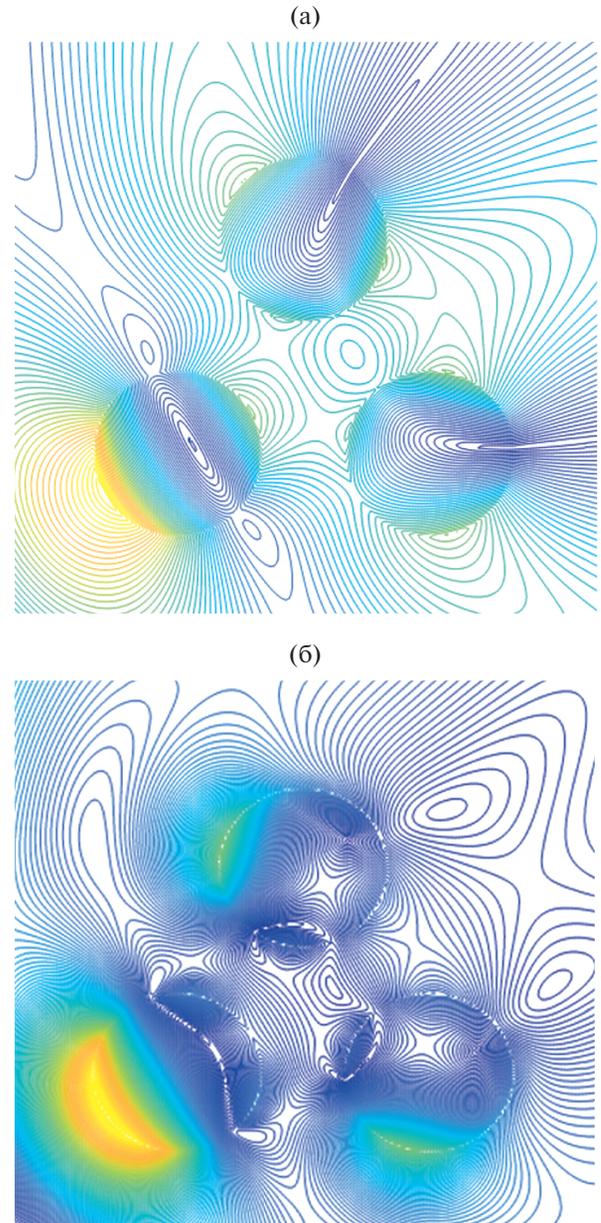


**Рис. 8.** Распределение линий равных амплитуд компоненты поля  $H_z$  вблизи треугольного кластера с параметрами  $a = 40$  нм,  $\chi = 0.1$ , при угле падения плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  и двух резонансных длинах волн  $\lambda = 386.623$  (а) и  $422.525$  нм (б).

На рис. 8а, 8б представлено пространственное распределение линий равных амплитуд компоненты поля  $H_z$  вблизи треугольного кластера с параметрами  $a = 40$  нм,  $\chi = 0.1$ , углом падения плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  и двух резонансных длинах волн  $\lambda = 386.623$  (а),  $422.525$  нм (б) (см. кривую 2 на рис. 7а). Как видим, при резонансной длине волн  $\lambda = 386.623$  нм связанные резонансы поверхностных волн (плазмонов) фактически



**Рис. 9.** Распределение линий равных амплитуд компоненты поля  $H_z$  вблизи треугольного кластера с параметрами  $a = 40$  нм,  $\chi = 0.25$ , при угле падения плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  и двух резонансных длинах волн  $\lambda = 500$  (а),  $360$  нм (б).



**Рис. 10.** Распределение линий равных амплитуд компоненты поля  $H_z$  вблизи треугольного кластера с параметрами  $a = 40$  нм,  $\chi = 1.0$ , при угле падения плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  и двух резонансных длинах волн  $\lambda = 375$  (а),  $340$  нм (б).

приводят к резонансу всей области между цилиндрами (см. рис. 8а), в случае резонансной длины волны  $\lambda = 422.525$  нм (б) связанные резонансы поля наблюдаются только между соседними частями двух цилиндров (см. рис. 8б)!

Аналогичные явления наблюдаются и при увеличении расстояния между цилиндрами до значений  $\chi = 0.25$  и длинах волн  $\lambda = 500$  (а),  $360$  нм (б) (см. кривую 3 на рис. 7а). Эти случаи пространственного

распределения линий равных амплитуд компоненты поля  $H_z$  изображены на рис. 9а, 9б.

Дальнейшее увеличение расстояния между цилиндрами приводит к исчезновению резонанса во внутренней области между цилиндрами и появлению резонансов на частях каждого цилиндра. Это можно увидеть на рис. 10а, 10б, где представлены картины пространственного распределения линий равных амплитуд компоненты поля  $H_z$  для

кластера с параметрами  $a = 40$  нм,  $\chi = 1$ , углом падения плоской волны  $\varphi_0 = \pi/6$  и двух резонансных длинах волн  $\lambda = 375$  (а), 340 нм (б) (см. кривую 5 на рис. 7а).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно исследована двумерная задача дифракции ТМ-поляризованной плоской волны на треугольном кластере, состоящем из трех одинаковых серебряных круговых цилиндров. Показано слабое влияние угла падения плоской волны на положение максимумов относительного поперечника рассеяния. Установлено, что реальные потери серебра относительно слабо влияют в области дипольного резонанса и сильно сказываются на мультипольных резонансах, что приводит к слиянию полей мультипольных резонансов в один общий резонанс. Обнаружены эффекты “вырождения” резонансов в кластере, образования локальных и связанных резонансов плазмонов, а также перехода резонанса плазмона в резонанс внутренней области кластера.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет частичного бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов В.В.* Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2009.
2. *Sondergaard T., Bozhevolnyl S.I.* // Phys. Stat. Sol. (b). 2008. V. 245. № 1. P. 9.
3. *Sondergaard T.* // Phys. Stat. Sol. (b). 2007. V. 244. № 10. P. 3448.
4. *Giannini V., Sánchez-Gil J. A.* // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. V. 24. № 9. P. 2822.
5. *Александров Д.В., Анютин А.П., Коршунов И.П., Шатров А.Д.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60. № 2. С. 210.
6. *Анютин А.П., Коршунов И.П., Шатров А.Д.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 1. С. 67.
7. *Анютин А.П., Коршунов И.П., Шатров А.Д.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 12. С. 1197.
8. *Анютин А.П., Коршунов И.П., Шатров А.Д.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 5. С. 513.
9. *Li K., Stockman M.I., Bergman D.J.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 22. P. 22401.
10. *Анютин А.П.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 10. С. 962.
11. *Анютин А.П.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1088.
12. *Анютин А.П.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 3. С. 240.
13. *Johnson P.B., Christy R.W.* // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. № 12. P. 4370.
14. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666.
15. *Anyutin A.P., Stasevich V.I.* // J. Quant. Spectroscopy and Radiation Transfer. 2006. V. 100. № 1-3. P. 16.
16. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: Медиа Паблишер, 2014.
17. *Doicu A., Wriedt T., Eremin Y.* Acoustic and electromagnetic scattering analysis using discrete sources. L.: Academic Press, 2000.
18. *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991.

---

**АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ  
СИСТЕМЫ**

---

УДК 621.396.67

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНЗ С ПЛАВНЫМ ПЕРЕХОДОМ**© 2022 г. А. С. Венецкий<sup>а</sup>, В. А. Калошин<sup>а, \*</sup>, Т. Т. Чан<sup>б</sup><sup>а</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125007 Российская Федерация<sup>б</sup> Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),  
Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация

\*E-mail: vak@cplire.ru

Поступила в редакцию 17.05.2021 г.

После доработки 17.05.2021 г.

Принята к публикации 25.06.2021 г.

Рассмотрены задачи синтеза и анализа геодезических линз с осевой симметрией и плавным переходом к планарному волноводу, ортогональному оси линзы. В приближении геометрической оптики найдено аналитическое решение для образующей поверхности геодезической линзы с кусочно-линейной образующей поверхности плавного перехода. Проведен анализ фазовых aberrаций и электродинамическое моделирование метало-воздушных геодезических линз с различными формами плавного перехода с использованием приближения Кирхгофа и метода конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0033849422050102

**ВВЕДЕНИЕ**

Впервые задача о синтезе волноводной линзы в виде двух параллельных искривленных проводящих поверхностей была поставлена в статье [1]. Задача синтеза такой линзы заключается в нахождении формы ее поверхности, обеспечивающего преобразование поля источника цилиндрической волны в основную моду планарного волновода с заданным двумерным фазовым фронтом. В работе [2] было найдено явное геометрооптическое решение задачи синтеза образующей поверхности линзы, являющейся телом вращения и преобразующей цилиндрический фронт источника на границе линзы в линейный фронт в планарном волноводе, ортогональном ее оси. Синтезированная поверхность линзы при этом ортогональна планарному волноводу в точках стыка.

Поскольку лучи в такой линзе совпадают с геодезическими линиями, такие линзы получили название геодезические.

В работе [3] решение [2] было обобщено на случай источника, расположенного в планарном волноводе на расстоянии от границы линзы. В работе [4] предложена метало-воздушная геодезическая линза с плавным согласующим переходом к планарному волноводу.

В работах [5–8] исследовались диэлектрические геодезические линзы с плавным переходом, в которых наличие ортогонального соединения с планарным волноводом приводит не только к появлению отраженной моды, как в метало-воздушных линзах, но и к существенным потерям на излучение. Наличие у линзы плавного перехода в

этих работах приводит к фазовым aberrациям, т.е. искажению выходного фронта по сравнению с заданным.

В работах [9, 10] описаны методики численного решения задачи синтеза геодезической линзы с плавным переходом, обеспечивающие точную фокусировку лучей основной частью линзы (за исключением плавного перехода). В работах [11–13] найдены аналитические решения задачи синтеза геодезической линзы с плавным переходом частного вида и получены формулы для образующей поверхности линзы в виде однократного интеграла.

Цель данной работы – найти образующую осесимметричной геодезической линзы, которая обеспечивает точную фокусировку цилиндрической волны источника, расположенного внутри планарного волновода, ортогонального оси линзы, в линейный фронт при наличии между линзой и планарным волноводом перехода с кусочно-линейной образующей, а также провести электродинамический анализ метало-воздушных геодезических линз с различными плавными переходами и сопоставить результаты моделирования.

**1. СИНТЕЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ  
С ПОЛИКОНИЧЕСКИМ ПЕРЕХОДОМ**

В приближении геометрической оптики задача синтеза метало-воздушной линзы сводится к нахождению образующей поверхности, расположенной посередине между двумя металлическими поверхностями линзы. Для луча, распростра-

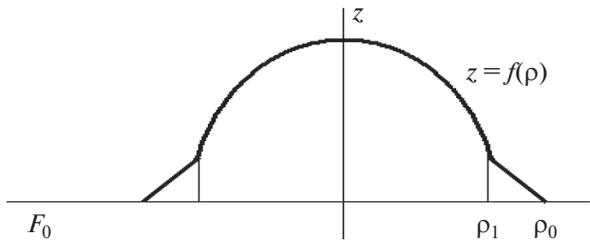


Рис. 1. Образующая линзы с коническим переходом.

нящегося вдоль этой (средней) поверхности, справедлив принцип Ферма, т.е. эйконал (оптический путь) луча, соединяющего две точки поверхности, должен быть минимален по сравнению со всеми другими кривыми, соединяющими эти точки, и лучи, таким образом, являются геодезическими линиями данной поверхности.

Используя принцип Ферма, нетрудно получить уравнение  $z = f(\rho)$  геодезической кривой на поверхности тела вращения в цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Учитывая, что элемент дуги произвольной кривой на поверхности тела вращения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + [1 + (\rho'(z))^2] dz^2 \quad (1)$$

и с учетом принципа Ферма, можно получить

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где  $L = \sqrt{\rho^2 \dot{\varphi}^2 + [1 + (\rho'(z))^2] \dot{z}^2}$  – эйконал луча,  $\dot{\varphi} = d\varphi/ds$ ,  $\dot{z} = dz/ds$ .

В силу осевой симметрии задачи  $\partial L / \partial \varphi = 0$  и из уравнения (2) с учетом (1) следует:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{ds} = \gamma \text{ (const)}. \quad (4)$$

С учетом (4) уравнение (1) можно свести к уравнению

$$\left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = \frac{\rho^2 - \gamma^2}{\rho^2 [1 + (\rho'(z))^2]}. \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения первого порядка (4), (5) описывают семейство лучей (геодезических кривых), где  $\gamma$  – лучевой параметр.

Для определения константы  $\gamma$  найдем угол пересечения соответствующего луча с линией меридиана в произвольной точке поверхности. Используя уравнения (4), (5), можно привести ком-

поненты касательного вектора к траектории луча

$\vec{\tau} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$  к виду

$$\frac{dx}{ds} = \rho'(z) Q \cos \varphi - \sin \varphi \frac{\gamma}{\rho}, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{ds} = \rho'(z) Q \sin \varphi + \cos \varphi \frac{\gamma}{\rho}, \quad \frac{dz}{ds} = Q,$$

$$\text{где } Q = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - \gamma^2}{1 + [\rho'(z)]^2}}.$$

Искомый угол пересечения  $\beta$  можно найти из соотношения

$$(\vec{\tau}, \vec{l}) = \cos \beta, \quad (7)$$

где  $\vec{l} = (\cos \mu \cos \varphi, \cos \mu \sin \varphi, \sin \mu)$  – единичный вектор, касательный к меридиану в точке пересечения с траекторией луча,

$$\cos \mu = \frac{\rho'(z)}{\sqrt{1 + \rho'^2}}, \quad \sin \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho'^2}},$$

Из (7) следует, что  $\cos \beta = \sqrt{\rho^2 - \gamma^2} / \rho$ ,

$$\gamma = \rho \sin \beta. \quad (8)$$

Соотношение (8) для геодезических линий на поверхностях вращения известно как теорема Клеро [17]. Из этого соотношения в частности следует, что в точке, где геодезическая кривая ортогональна меридиану ( $\beta = \pi/2$ ), значение  $\rho$  минимально и, следовательно,  $\gamma = \rho_{\min}$ .

Выведем уравнение, которому должна удовлетворять поверхность с коническим согласующим переходом (рис. 1), чтобы лучи, выходящие из точки  $F_0$  с декартовыми координатами  $x = -F_0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  (рис. 2) после прохождения линзы были параллельны оси  $x$ .

Рассмотрим луч, выходящий из источника в точке  $F_0$  (рис. 2), который идет в плоскости  $XOY$  до точки  $A$ , преломляется, проходит вдоль плавного перехода до точки  $A_1$ , преломляется, проходит вдоль поверхности линзы до точки  $B_1$ , преломляется, проходит вдоль плавного перехода до точки  $B$ , снова преломляется и идет в плоскости  $XOY$  параллельно оси  $x$ . При этом поверхность перехода ( $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_0$ ) является частью поверхности конуса, а поверхность линзы ( $0 \leq \rho \leq \rho_1$ ) подлежит определению.

Из (8) для угла  $\varphi_0$  входа и выхода луча следует

$$\sin \varphi_0 = \gamma / \rho_0. \quad (9)$$

Из уравнений (4), (5) для функции  $z = f(\rho)$  следует

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\gamma \sqrt{1 + f'^2(\rho)}}{\rho \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}}.$$

Интегрируя последнее уравнение и используя симметрию луча, можно найти приращение угла  $\varphi = 2\Delta\Phi$  для луча между точками  $A_1$  и  $B_1$  (см. рис. 2):

$$2\Delta\Phi = 2 \int_{\gamma}^{\rho_1} \frac{\gamma \sqrt{1+z'^2}}{\rho \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} d\rho.$$

Для каждого луча, исходящего из фокуса в точке  $F_0$  и выходящего из линзы в точке  $B$  параллельно оси  $x$ , можно записать

$$\theta + 2\Delta\varphi + 2\Delta\Phi + \varphi_0 = \pi. \quad (10)$$

Зададим образующую на отрезке  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_0$  линейной функцией  $z = A(\rho_0 - \rho)$  и тогда получим

$$\Delta\varphi = \int_{\rho_1}^{\rho_0} \frac{\gamma \sqrt{1+z'^2}}{\rho \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} d\rho = k \left( \arcsin \frac{\gamma}{\rho_1} - \arcsin \frac{\gamma}{\rho_0} \right), \quad (11)$$

где  $k = \sqrt{1+A^2}$ .

Из теоремы синусов для треугольника  $F_0AO$  (см. рис. 2) следует

$$\frac{\sin \alpha}{\rho_0} = \frac{\sin \varphi}{f_0}, \quad f_0 = |OF_0|,$$

откуда с учетом (9) получаем  $\alpha = \arcsin \frac{\gamma}{f_0}$ .

Уравнение (10) может быть записано в виде

$$\int_{\gamma}^{\rho_1} \frac{1 \sqrt{1+f'^2(\rho)}}{\rho \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} d\rho = \frac{1}{2\gamma} \left( \pi - 2 \arcsin \frac{\gamma}{\rho_0} + \arcsin \frac{\gamma}{f_0} - 2\Delta\varphi \right).$$

Заменой переменных  $t = 1/\rho$ ,  $G = 1/\gamma$ ,  $a_1 = 1/\rho_1$ ,  $a_0 = 1/\rho_0$ ,  $u(t) = \sqrt{1+f'^2(\rho)}$  это уравнение приводится к виду

$$\int_{a_1}^G \frac{u(t) dt}{\sqrt{G^2 - t^2}} = F(G), \quad (12)$$

где  $F(G) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a_0}{G} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{f_0 G} - k \left( \arcsin \frac{a_1}{G} - \arcsin \frac{a_0}{G} \right)$ .

Уравнение (12) сводится к интегральному уравнению Абеля. Его решение имеет вид [18]

$$u(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{a_1}^x \frac{sF(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по частям, дифференцируя по  $x$  и полагая  $x = 1/\rho$ ,  $a_1 = 1/\rho_1$ ,  $a_0 = 1/\rho_0$ , получаем

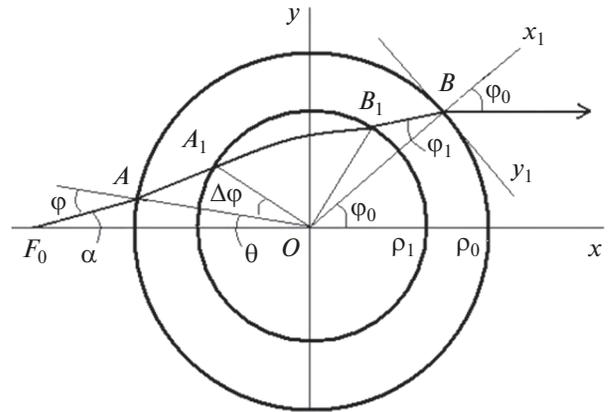


Рис. 2. Проекция луча на плоскость  $z = 0$ .

$$u(\rho) = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\rho_1}{f_0} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_1^2}{\rho_0^2 - \rho^2} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\rho^2 + f_0^2 - 2\rho_1^2}{f_0^2 - \rho^2} + k \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}} \arcsin \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_1^2}{\rho_0^2 - \rho^2} \right) - k \left( \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}} - 1 \right). \quad (14)$$

Полученное решение задачи синтеза нетрудно обобщить на случай кусочно-линейной образующей плавного перехода:  $z = z_{i-1} + A_i(\rho - \rho_{i-1})$ , где  $i = 1, \dots, N$ ,  $\rho_N \leq \rho \leq \rho_0$ . В этом случае выражение для  $\Delta\varphi$  в (12) принимает вид

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N k_i \left( \arcsin \frac{\gamma}{\rho_i} - \arcsin \frac{\gamma}{\rho_{i-1}} \right), \quad k_i = \sqrt{1+A_i^2}.$$

При этом вместо формулы (14) имеем

$$u(\rho) = \frac{\rho_N}{\sqrt{\rho_N^2 - \rho^2}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\rho_N}{\rho_0} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\rho_N}{f_0} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_N^2}{\rho_0^2 - \rho^2} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\rho^2 + f_0^2 - 2\rho_N^2}{f_0^2 - \rho^2} + \sum_{i=0}^{N-1} b_i \left( \frac{2}{\pi \sqrt{\rho_N^2 - \rho^2}} \arcsin \frac{\rho_N}{\rho_i} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho_N^2}{\rho_i^2 - \rho^2} \right) + b_N \left( \frac{\rho_N}{\sqrt{\rho_N^2 - \rho^2}} - 1 \right), \quad (15)$$

где  $b_i = k_{i+1} - k_i$  при  $0 < i < N$ ,  $b_0 = k_1$ ,  $b_N = -k_N$ .

Так как  $u(\rho) = \sqrt{1 + f'^2(\rho)}$ , то при выполнении условия  $u(\rho) \geq 1$  в области  $0 \leq \rho < \rho_N$ , образующая описывается формулой

$$f(\rho) = -\int_0^\rho \sqrt{u^2(\rho) - 1} d\rho + C_0,$$

а константа  $C_0$  находится из уравнения

$$-\int_0^{\rho_N} \sqrt{u^2(\rho) - 1} d\rho + C_0 = z_N,$$

где  $z_N$  – значение координаты поверхности на границе линзы и плавного перехода.

Полагая  $\rho_1 = \rho_0$  в формуле (14), получаем известное [3] уравнение образующей геодезической линзы без согласующего перехода:

$$u(\rho) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2}} \arcsin\left(\frac{\rho_0}{f_0}\right) + \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{\rho^2 + f_0^2 - 2\rho_0^2}{f_0^2 - \rho^2}\right), \quad (16)$$

$$u(\rho) = \sqrt{1 + f'^2(\rho)}, \quad f(\rho) = -\int_0^\rho \sqrt{u^2(\rho) - 1} d\rho + C_0,$$

где константа  $C_0$  находится из уравнения

$$\int_0^{\rho_0} \sqrt{u^2(\rho) - 1} d\rho = C_0.$$

Из формулы (16) следует, что  $f'(\rho_0) = \infty$ . Это означает, что поверхность линзы пересекает плоскость  $XOY$  под прямым углом. Для реализации плавного перехода от линзы к планарному волноводу можно использовать различные вари-

анты образующей: рассмотренную выше линейно-ломаную, в виде окружности или описываемую интегралом [10, 13].

## 2. АНАЛИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНЗ С ПЛАВНЫМ ПЕРЕХОДОМ

Проведем исследование aberrаций эйконала для пяти вариантов линз с радиусом  $\rho_0 = 1.05$  и фокусным расстоянием  $f_0 = 1.5$ , содержащих плавный переход с внутренним радиусом  $a = 1$ .

1. Линза с поликоническим переходом (из трех конусов), синтезированная выше. Образующая представляет собой кусочно-ломаную непрерывную линию с тремя отрезками равной длины, аппроксимирующими четверть окружности.

2. Линза, синтезированная в [3], с образующей плавного перехода в виде дуги окружности

$$z(\rho) = -\sqrt{z_2^2 - (\rho - \rho_2)^2} + z_2,$$

где

$$z_2 = \frac{d\sqrt{a^2c^2 - b^2c^2 + c^2 - bc + c + cd^2}}{b^2 - 2b + 1},$$

$$\rho_2 = \frac{bz_2 - z_2 + c}{d} + a.$$

– координаты центра окружности, найденные из условия совпадения образующих линзы и плавного перехода в точке  $M$  с координатами  $(\rho_2, z_2)$ ,  $d = f'(a)$ ,  $c = f(a)$ ,  $b = \sqrt{1 + f'^2(a)}$ .

3. Линза, синтезированная в [3], с образующей плавного перехода в виде четверти окружности.

4. Линза с плавным переходом, синтезированная в работе [13], образующая которой определяется формулами

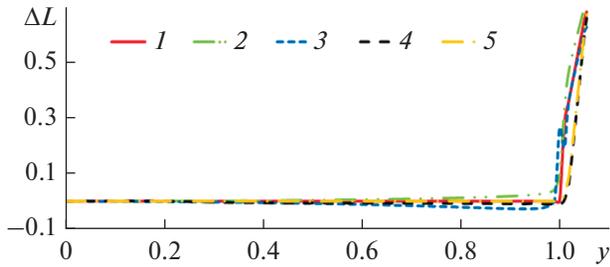
$$z(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\rho \sqrt{\left( \arccos\left(\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\sqrt{f_0^2 - \rho^2}}\right) + \frac{\pi}{2} + a \frac{\arcsin\left(\frac{a}{f_0}\right)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \Omega(\rho, a) \right)^2 - \pi^2} d\rho,$$

$$\Omega(\rho, a) = 2\rho \frac{d}{d\rho} \left[ \int_a^{\rho_0} \frac{(\rho_0 - R)}{Rh^2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\right) dR \right], \quad 0 \leq \rho \leq a,$$

$$z(\rho) = z(a) + \frac{1}{2} \left\{ h^2 \ln \left( \frac{\sqrt{(\rho_0 - \rho)^2 + 2h^2(\rho_0 - \rho)} + \rho_0 + h^2 - \rho}{\sqrt{(\rho_0 - a)^2 + 2h^2(\rho_0 - a)} + \rho_0 + h^2 - a} + \Phi(\rho, a) \right) \right\},$$

$$\Phi(\rho, a) = -\frac{\rho_0 + h^2 - \rho}{h^2} \sqrt{(\rho_0 - \rho)^2 + 2h^2(\rho_0 - \rho)} + \frac{\rho_0 + h^2 - a}{h^2} \sqrt{(\rho_0 - a)^2 + 2h^2(\rho_0 - a)},$$

$$h^2 = \frac{2 \left[ \arccos\left(\frac{a}{\rho_0}\right) - \frac{a}{\rho_0} \ln\left(\frac{\rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 - a^2}}{a}\right) \right]}{\arcsin(a/f_0)}, \quad a \leq \rho \leq \rho_0.$$



**Рис. 3.** Аберрации эйконала в линзах с образующей плавного перехода: 1 – кусочно-линейной, 2 – в виде сопряженной части окружности, 3 – в виде четверти окружности, 4 – из работы [13], 5 – из работы [11].

5. Линза с плавным переходом, синтезированная в работе [10], формула образующей которой имеет вид

$$z(\rho) = \int_0^\rho \left\{ \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{h^2} \right) + \frac{2}{\pi h^2} \times \sqrt{a^2 - \rho^2} \sqrt{\rho_0^2 - a^2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \left( \frac{\rho^2 + f_0^2 - 2a^2}{f_0^2 - \rho^2} \right) - \frac{1}{4} + \frac{(\rho^2 - \rho_0^2)}{h^2} \arcsin \left( \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - 2a^2}{\rho_0^2 - \rho^2} \right) \right]^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} d\rho,$$

$$0 \leq \rho \leq a,$$

$$z(\rho) = z(a) + \int_a^\rho \sqrt{\left( \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{h^2} \right)^2 + 2 \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{h^2}} d\rho,$$

$$a \leq \rho \leq \rho_0,$$

$$h = \sqrt{\rho_0 \left( \frac{\pi - \gamma_{12} - \sin 2\gamma_{12}}{\gamma_{13}} \right)}, \quad \frac{a}{\rho_0} = \sin \gamma_{12},$$

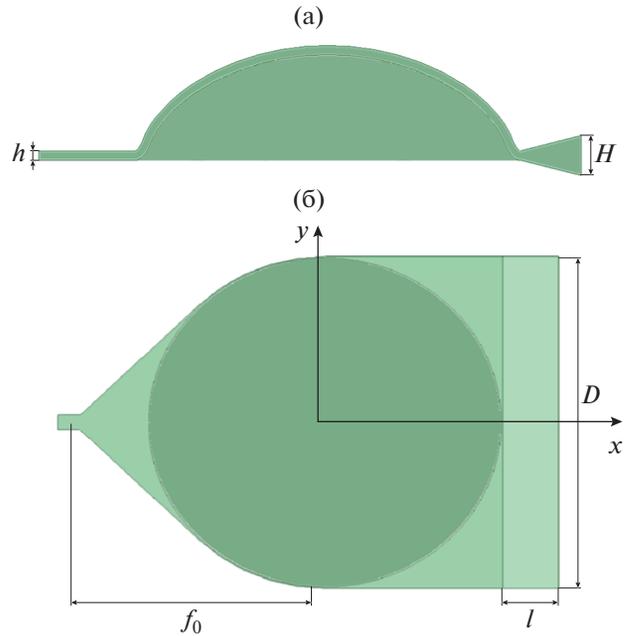
$$\frac{a}{f_0} = \sin \gamma_{13}, \quad f_0 = 1.5, \quad r_0 = 1.05, \quad a = 1.$$

Перейдем к вычислению величины эйконала на выходе линз, которая определяются формулой

$$L = |FA| + 2 \int_\gamma^a \rho \frac{\sqrt{1 + f'^2(\rho)}}{\sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} d\rho + 2 \int_a^{\rho_0} \rho \frac{\sqrt{1 + z'^2(\rho)}}{\sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} d\rho + |BC|, \tag{17}$$

где  $|FA| = \sqrt{\rho_0^2 + f_0^2 - 2\rho_0 f_0 \cos \theta}$ ,  $|BC| = \rho_0 - \rho_0 \cos \theta$ , первый интеграл выражает оптический путь луча в линзе, а второй – в плавном переходе.

На рис. 3 приведены рассчитанные по формуле (17) аберрации эйконала на выходе линзы (отличие эйконала произвольного луча от эйконала центрального луча) для описанных выше вариантов



**Рис. 4.** Геодезическая линза с плавным переходом: а) сечение, б) вид сверху.

1–5 геодезических линз с плавным переходом. Как видно из рисунка, величина аберрации существенна только в части выходной апертуры, соответствующей плавному переходу ( $1 < y < 1.05$ ). При этом величина аберрации строго равна нулю при  $y < 1$  только для вариантов 1 и 5.

Для анализа исследуемых геодезических линз было проведено электродинамическое моделирование характеристик излучения соответствующих линзовых антенн в приближении Кирхгофа и методом конечных элементов (МКЭ) с использованием программного продукта Ansys HFSS.

На рис. 4 приведены сечение и вид сверху линзовых антенн радиусом  $\rho_0 = 79.125$  мм с возбуждающим  $H$ -секториальным рупором в горизонтальной плоскости и излучающим  $E$ -секториальным рупором в вертикальной плоскости. Высота вертикальных стенок  $E$ -секториального рупора  $h = 3.5$  мм совпадает с расстоянием между проводящими поверхностями линзы. Внутренний радиус плавного перехода линзы равен 75 мм, фокусное расстояние  $f_0 = 112.5$  мм. Длина  $E$ -секториального рупора  $l = 25$  мм.

Угол раствора  $H$ -секториального рупора равен  $\alpha = 86^\circ$ , угол раствора  $E$ -секториального рупора  $\beta = 26^\circ$ , размер его апертуры в  $H$ -плоскости  $H = 15$  мм.

Диаграмма направленности (ДН) плоской апертуры в приближении Кирхгофа имеет вид [19]

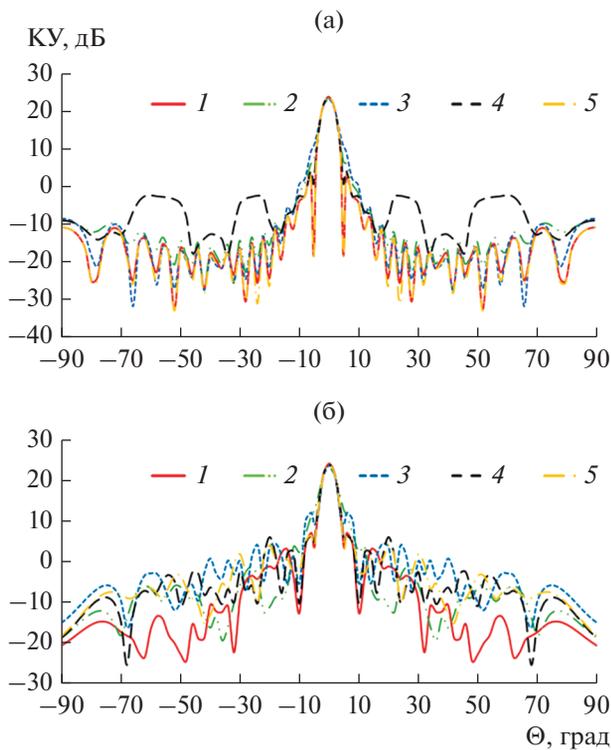


Рис. 5. Диаграммы направленности линзовой антенны при  $\varphi = 0$ : а) приближение Кирхгофа; б) МКЭ; номера кривых соответствуют номеру варианта 1–5.

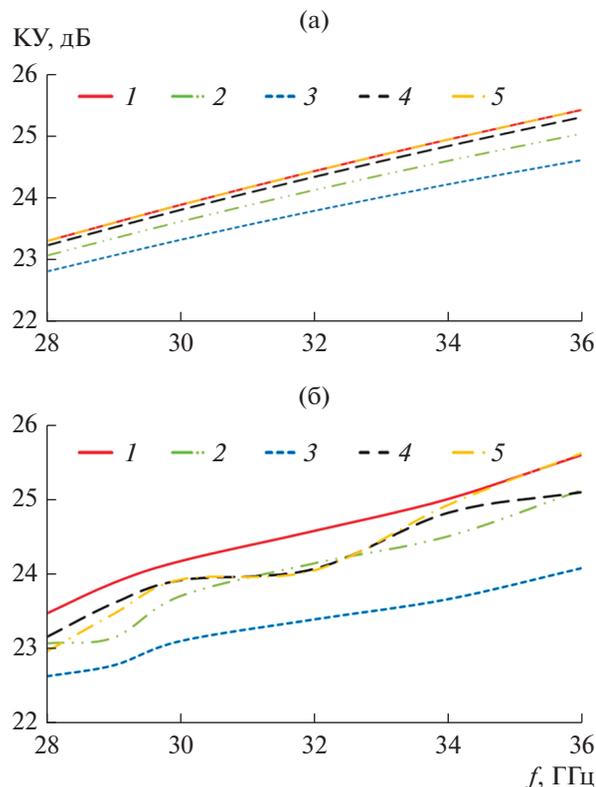


Рис. 6. Зависимости КУ от частоты при  $\varphi = 0, \theta = 0$ : а) приближение Кирхгофа; б) МКЭ; номера кривых соответствуют номеру варианта 1–5.

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \times \frac{\left| \int_A E_y(y, z) \exp[jk \sin \theta (y \cos \varphi + z \sin \varphi)] dx dy \right|^2}{\int_A |E_y(y, z)|^2 dx dy} \quad (18)$$

где  $E_y(y, z) = |E_y(y, z)| \exp[j\Phi(y, z)] = |E_y(y, z)| \times \exp[jkL(y, z)]$ .

В нашем случае

$$|E_y(y, z)| = \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha(y)}{2\alpha_0}\right)}{\sqrt{\cos\alpha(y)}}$$

– амплитудное распределение (изменением амплитуды в  $H$ -плоскости мы пренебрегаем),  $\alpha(y) = \arcsin(y/f_0)$ , а  $\Phi(y, z) = kL(y, z) = k(L(y) + L(z))$  – фазовое распределение поля на выходе, где  $L(y)$  определяется формулой (17), а  $L(z) = \sqrt{(l + \Delta l)^2 + z^2}$ , где  $\Delta l = \frac{h/H}{1 - h/H} l$ .

На рис. 5а, 5б соответственно приведены ДН, рассчитанные на частоте 30 ГГц по формуле (18) и с использованием МКЭ. (Номер кривой соответствует номеру варианта линзы.)

Видно, что результаты расчета ДН в приближении Кирхгофа вблизи главного лепестка близки к результатам, полученным с использованием МКЭ.

На рис. 6а, 6б в тех же обозначениях, что и на рис. 5, приведены частотные зависимости коэффициента усиления (КУ), рассчитанные по формуле (18) и с использованием МКЭ. Видно, что при расчете обоими методами наибольшее усиление обеспечивает антенна на базе геодезической линзы с поликоническим плавным переходом (вариант 1), а наименьшая величина КУ у антенны на базе линзы с образующей плавного перехода в виде четверти окружности (вариант 3). При расчете разных вариантов линз в приближении Кирхгофа отличия КУ меньше, чем при моделировании с использованием МКЭ. При этом максимальные отличия величины КУ, рассчитанные двумя методами, наблюдаются у антенны с вариантом линзы 3 на высоких частотах (более 0.8 дБ).

На рис. 7 в тех же обозначениях приведены частотные зависимости величины КИП, рассчитанные с использованием результатов КУ, полученных МКЭ (см. рис. 5б). Как видно из рисунка, величина КИП максимальная у варианта линзы 1, минимальная – у варианта 3. При этом все линзы обеспечивают уровень КИП выше 0.6.

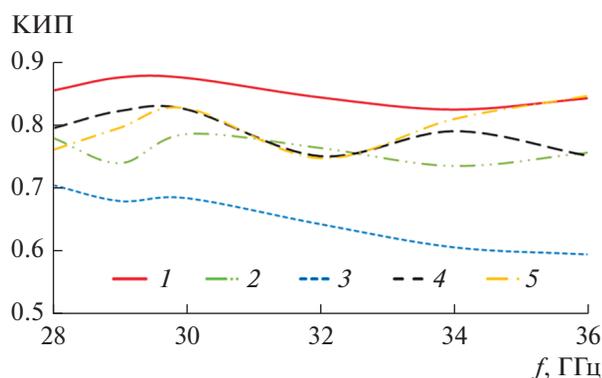


Рис. 7. Зависимости КИП от частоты, номера кривых соответствуют номеру варианта 1–5.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Все металло-воздушные линзы с различными вариантами плавного перехода к планарному волноводу в исследованном частотном диапазоне (28...36 ГГц) обеспечивают уровень КИП антенны более 0.6.

2. Максимальный КИП (более 0.8) обеспечивает синтезированная в работе линза с поликоническим плавным переходом, минимальный – линза с образующей плавного перехода в виде четверти окружности.

3. Приближение Кирхгофа дает завышенную (до 0.6 дБ) величину коэффициента усиления, что можно объяснить отсутствием учета отражения.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания 0030-2019-006.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Myers S.B. // J. Appl. Phys. 1947. V. 18. № 2. P. 221.
2. Rinehart R.F. // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. № 9. P. 860.
3. Rinehart R.F. // Proc. IRE. 1952. V. 40. № 6. P. 686.
4. Kunz K.S. // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 5. P. 642.
5. Toraldo di Francia G. // Optica Acta. 1955. V. 1. № 4. P. 157.
6. Spiller E., Harper J.S. // Appl. Opt. 1974. V. 13. № 9. P. 2105.
7. Wood V.E. // Appl. Opt. 1976. V. 15. № 11. P. 2817.
8. Southwell W.H. // J. Opt. Soc. Amer. 1977. V. 67. № 10. P. 1293.
9. Kassai D., Marom E. // J. Opt. Soc. Amer. 1979. V. 69. № 9. P. 1242.
10. Jiang W.Y., Dubois G.R., Ristic V.M. // Can. Elec. Eng. J. 1984. V. 9. № 4. P. 160.
11. Sottini S., Russo V., Righini G.C. // J. Opt. Soc. Amer. 1979. V. 69. № 9. P. 1248.
12. Sottini S., Giorgetti E. // J. Opt. Soc. Amer. A. 1987. V. 4. № 2. P. 346.
13. Sochacki J. // Appl. Optics. 1986. V. 25. № 2. P. 235.
14. Shimano T., Arimoto A., Muraoka K. // Appl. Optics. 1990. V. 29. № 34. P. 5062.
15. Miñano J.C., Benítez P., Parkyn B. et al. // Int. Optical Design Conf. 2006. SPIE-OSA. V. 6342. P. 634214.
16. Nelson J., Fonseca G., Qingbi Liao, Quevedo-Teruel O. // IEEE Trans. 2020. V. AP-68. № 5. P. 3410.
17. Мохов О.И. Классическая дифференциальная геометрия, Курс лекций, МГУ им. М.В. Ломоносова. [https://teach\\_in.ru/differential-geometry-M.pdf](https://teach_in.ru/differential-geometry-M.pdf).
18. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
19. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ. М.: Высш. школа, 1988.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

ОПТИМАЛЬНЫЙ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ ВОС-СИГНАЛОВ  
НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ  
В ПЕРСПЕКТИВНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ  
СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2022 г. М. С. Ярлыков\*

*Редакция журнала “Радиотехника и электроника”,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация**\*E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 24.10.2021 г.

После доработки 12.11.2021 г.

Принята к публикации 15.11.2021 г.

На базе марковской теории оценивания случайных процессов методом переприсвоения параметров вектора непрерывных процессов решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки  $\sin$ ВОС-сигналов и  $\cos$ ВОС-сигналов, предназначенных для применения в глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). Задача оптимальной нелинейной фильтрации решена применительно к векторному дискретно-непрерывному марковскому случайному процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторный диффузионный марковский процесс, а дискретная часть характеризуется простой цепью Маркова на несколько положений. Принято, что полезные ВОС-сигналы наблюдаются на фоне аддитивного белого гауссовского шума. На основе поэтапного решения уравнения Стратоновича получены аналитические соотношения оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов ГНСС. Представлена структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов с переприсвоением параметров применительно к перспективным ГНСС. Примененная в работе методика решения задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема ВОС-сигналов полностью применима и для тех режимов функционирования ГНСС, при которых ВОС-сигналы (т.е. меандровые шумоподобные сигналы (ШПС)) не используются, а используются традиционные ШПС.

DOI: 10.31857/S003384942204012X

## ВВЕДЕНИЕ

В современных и перспективных глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай) используются шумоподобные сигналы (ШПС) [1, 2]. Расширение круга решаемых ГНСС задач и ужесточение требований, предъявляемых к системам по точности и надежности навигационных определений, а также при работе в условиях помех и многолучевости, обусловили все более широкое применение нового класса ШПС – ВОС-сигналов (binary offset carrier modulated signals) [3–5].

Характерной особенностью ВОС-сигналов, выделяющей их из традиционных ШПС, является наличие в составе модулирующей функции (МФ) ВОС-сигналов меандрового поднесущего колебания (МПК), длительность меандровых им-

пульсов которого в несколько раз (коэффициент кратности меандровых импульсов  $N_M$ ) короче длительности элемента псевдослучайной последовательности (ПСП) [3–5].

Приведем примеры использования ВОС-сигналов и их разновидностей в ГНСС. У американской ГНСС GPS радиосигналы M code (military code signals) диапазонов частот L1 и L2 представляют собой ВОС-сигналы с меандровой модуляцией типа ВОС(10,5) и L1C сигналы являются ВОС-сигналами с меандровой модуляцией типа  $\sin$ ВОС(1, 1) [5, 6]. В модернизированной системе GPS предусматривается применение ТМВОС-сигналов с мультиплексированной меандровой модуляцией типа МВОС(6,1,1/11) [5, 7].

В европейской ГНСС Galileo L1OS сигналы являются ВОС-сигналами с меандровой модуляцией типа  $\sin$ ВОС(1,1). В системе Galileo при использовании PRS-сигналов (сигналы с ограни-

ченным доступом, предназначенные для правительственных служб) диапазона E6 на несущей частоте  $f_H = 1278.75$  МГц применяется косинусная меандровая модуляция типа  $\cos\text{BOC}(10,5)$ . В ГНСС Galileo в диапазоне частот E1 для L1-A сигналов (PRS-сигналов) используется косинусная меандровая модуляция типа  $\cos\text{BOC}(15, 2.5)$  [5, 7–10]. В ГНСС Galileo предусматривается применение полных восьмикомпонентных Alt-ВОС-сигналов с модуляцией типа  $\text{AltBOC}(15,10)$  на несущей частоте  $f_H = 1191.795$  МГц диапазона E5 [5, 10, 11]. Применение MBOC-сигналов реализуется при использовании E1-сигналов в ГНСС Galileo [5, 12].

В связи с этим важны исследования по созданию приемников ГНСС на основе оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов.

Для определенности рассуждений далее в работе всюду при конкретизации положений полагаем, что приемник ГНСС установлен на высокодинамичном подвижном объекте, в частности, летательном аппарате (ЛА), таком как самолет, вертолет, беспилотный ЛА и т.д. В таких случаях авиационные бортовые приемники ГНСС, как правило, входят в состав пилотажно-навигационных комплексов ЛА.

По сложности технических решений приемники ГНСС подразделяются на одноканальные и многоканальные. Одноканальный приемник ГНСС в каждый текущий момент времени ведет прием и обработку радиосигнала только от одного навигационного космического аппарата (НКА). Многоканальный приемник ГНСС позволяет одновременно принимать и обрабатывать радиосигналы от нескольких НКА. В настоящее время в авиации в основном применяются многоканальные приемники ГНСС.

Прием радиосигналов приемниками ГНСС происходит одновременно на разных частотах (L1, L2, L2C, L5, E1, E2 и др.) применительно к разным НКА и навигационным системам. Приемники, способные принимать сигналы только по одной частоте, называют одночастотными, а на разных частотах – многочастотными.

Кроме того, приемники ГНСС подразделяются на односистемные и многосистемные (двухсистемные). Односистемный приемник ГНСС принимает радиосигналы от какой-либо одной спутниковой навигационной системы (например, GPS). Многосистемный приемник ГНСС принимает радиосигналы от нескольких систем (например, GPS, ГЛОНАСС и Galileo).

В работе рассматривается односистемный многоканальный и многочастотный приемник ГНСС.

Примерами российских авиационных приемников ГНСС могут быть авиационный приемник-индикатор А-737, бортовой приемник спутниковой навигации БПСН-2 и др. [2, 13].

Полезный ШПС (ВОС-сигнал, в частности), наблюдаемый на входе приемника ГНСС от  $j$ -го НКА, где  $j = \overline{1, J}$ , является нелинейной функцией от случайного векторного дискретно-непрерывного процесса (ДНП) [1–5]. При этом дискретно-непрерывный (смешанный) вектор состояния (ВС)  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , порожденный ДНП, содержит дискретную часть, представляющую собой скалярный дискретный процесс (ДП)  $\Theta_j(t)$  в виде цепи Маркова на  $M$  положений, и непрерывную часть, образующую векторный диффузионный марковский процесс  $\mathbf{X}(t)$  (или его выборку). Здесь и далее  $T$  – символ транспонирования.

В принимаемом от  $j$ -го НКА ВОС-сигнале ДП  $\Theta_j(t)$  является манипулируемой фазой и содержит навигационную служебную информацию (СИ) от  $j$ -го НКА,  $j = \overline{1, J}$ . Компоненты непрерывной части ДНП  $\mathbf{X}(t)$  представляют собой запаздывание принимаемого ВОС-сигнала, его фазу, доплеровский сдвиг частоты и т.д.

Задачи оптимальной нелинейной фильтрации таких ДНП позволяет успешно решать марковская теория оценивания (МТО) случайных процессов [14–19].

Чтобы на основе МТО разработать оптимальные (квазиоптимальные) алгоритмы нелинейной фильтрации ДНП  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , используется один из двух методов: метод синтеза с переприсвоением параметров вектора непрерывных процессов (НП) и метод синтеза с обратными связями по ДП [14–21].

Эти методы базируются на различном разложении совместной апостериорной плотности вероятности (АПВ) смешанного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  по одному из двух следующих вариантов [18, 20, 21].

Первый вариант разложения (определяющий метод синтеза с переприсвоением) основан на представлении совместной АПВ (АПВ смешанного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в виде произведения безусловной апостериорной вероятности (АВ) состояния ДП  $\Theta_j(t)$  и условной АПВ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ . При другом варианте разложения совместной АПВ (характеризующем метод синтеза с обратными связями по ДП) условной принимается АВ состояния ДП  $\Theta_j(t)$ , тогда как вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  описывается безусловной АПВ. Синтезированные алгоритмы, которые основаны на первом или втором варианте разложения АПВ смешанного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , соответственно получили назва-

ние алгоритмов с переприсвоением параметров условных АПВ вектора НП и алгоритмов с обратными связями по ДП [14–21].

Оба варианта разложения АПВ дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в соответствии с теоремой Байеса полностью эквивалентны. В то же время квазиоптимальные алгоритмы и соответствующие структурные схемы устройств для приема и обработки радиосигналов, синтезированные указанными методами, отличаются заметными особенностями.

Применительно к ГНСС задача синтеза оптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов методами МТО на основе алгоритмов с обратной связью по ДП решена в [20].

Представляет интерес решить подобную задачу и на основе алгоритмов с переприсвоением параметров вектора НП. Это обусловлено, в частности, тем, что алгоритмы с переприсвоением свободны от ограничения, накладываемого на скорость изменения компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ . Как известно, алгоритмы с обратной связью по ДП требуют, чтобы время корреляции компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  было много больше шага цепи Маркова, характеризующей ДП  $\Theta_j(t)$  [18, 19], в то время как алгоритмы с переприсвоением не требуют выполнения этого условия, хотя и отличаются несколько большей сложностью (многоканальностью) структурной схемы приемника ГНСС.

Решить изложенную задачу синтеза оптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов конструктивно, т.е. довести алгоритмы до практически реализуемой структурной схемы приемника ГНСС, удастся благодаря применению метода поэтапного (двухэтапного) решения уравнения Стратоновича [22]. При этом на первом этапе обработки применительно к каждому такту производится аппроксимация вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  векторным квазислучайным процессом, что дает возможность получить точное решение уравнения Стратоновича [18–20].

Цель данной работы – на основе метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП получить аналитические соотношения для оптимальных и квазиоптимальных оценок дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  и матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ , а также на этой основе разработать соответствующую структурную схему квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов приемников ГНСС.

В работе всюду каждый вектор представляет собой вектор-столбец; производная от скалярной функции по вектору-столбцу понимается как вектор-строка, а выражения вида  $\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}_{jk}^*} \right]$  рас-

сматриваются как операторы, действующие на функции, расположенные после них.

## 1. ВОС-СИГНАЛЫ НА ВХОДЕ ПРИЕМНИКА ГНСС

Вектор наблюдения (ВН)  $\Xi(t)$  на входе приемника ГНСС от всех одновременно видимых в данный момент времени НКА спутниковой группировки имеет вид

$$\Xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_j(t), \dots, \xi_J(t)]^T, \quad (1)$$

$$j = \overline{1, J}, \quad t \in [t_0, t),$$

и определяется соотношением

$$\Xi(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{G}_{\Xi}(t)\mathbf{N}(t), \quad t \in [t_0, t), \quad (2)$$

$$j = \overline{1, J},$$

где

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_j(t), \dots, s_J(t)]^T \quad (3)$$

– вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов от всей совокупности  $J$  одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС,

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_j(t), \dots, n_J(t)]^T$$

– вектор аддитивных независимых стандартных белых гауссовских шумов (БГШ) с известными характеристиками,  $J$  – общее число всех одновременно видимых в данный момент времени НКА,  $j$  – номер НКА.

Входящая в (2) переходная матрица  $\mathbf{G}_{\Xi}(t)$  определяет матрицу интенсивностей помех  $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$ :

$$\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t) = \mathbf{G}_{\Xi}(t)\mathbf{G}_{\Xi}^T(t), \quad (4)$$

где матрица  $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$  – невырожденная, т.е.  $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1}(t)$  существует.

Наблюдение от  $j$ -го НКА  $\xi_j(t)$  на входе приемника ГНСС представляет собой согласно (2) аддитивную смесь полезного сигнала и шума:

$$\xi_j(t) = s_j(t) + n_j(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \quad (5)$$

где  $s_j(t)$  – принимаемый полезный ВОС-сигнал от  $j$ -го НКА на входе приемника ГНСС;  $n_j(t)$  – аддитивная флуктуационная помеха в наблюдении  $\xi_j(t)$  от  $j$ -го НКА.

Флуктуационная помеха  $n_j(t)$ , аппроксимируемая стационарным БГШ, имеет статистические характеристики:

$$M[n_j(t)] = 0; \quad M[n_j(t)n_j(t + \tau)] = \frac{1}{2}N_{0j}\delta|\tau|, \quad (6)$$

где  $N_{0j}$  – интенсивность БГШ,  $M[\cdot]$  – символ усреднения по множеству реализаций.

На входе приемника ГНСС принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  с использованием двоичной фазовой манипуляции (ФМ) для передачи СИ имеет вид [5, 20]

$$s_j(t) = A_j d_j(t - \tau_{3j}) \cos[(\omega_{Hj} + \Delta\omega_{Dj} + \Delta\omega_j) \times (t - \tau_{3j}) + \Theta_j(t_k - \tau_{3j})\pi + \varphi_j(t)], \quad j = \overline{1, J}, \quad (7)$$

где  $A_j$  – амплитуда ВОС-сигнала от  $j$ -го НКА на входе приемника ГНСС,  $d_j(t)$  – МФ ВОС-сигнала  $s_j(t)$ , отражающая специфику навигационных ШПС и собственно ВОС-сигналов,  $\tau_{3j}$  – запаздывание принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$  на трассе от  $j$ -го НКА до приемника ГНСС,  $\omega_{Hj} = 2\pi f_{Hj}$  – круговая несущая частота ВОС-сигнала;  $f_{Hj}$  – несущая частота ВОС-сигнала;  $\Theta_j(t_k)$  – ДП, содержащий СИ от  $j$ -го НКА,  $\Delta\omega_{Dj}$  – доплеровский сдвиг несущей частоты принимаемого радиосигнала  $s_j(t)$  на трассе от  $j$ -го НКА до приемника ГНСС,  $\Delta\omega_j$  – медленный сдвиг несущей частоты  $\omega_{jH}$ , возникающий в канале распространения радиосигнала  $s_j(t)$  и в приемнике ГНСС,  $\varphi_{jH}(t)$  – фаза принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$ . Начало отсчета в (7) принято равным  $t_0 = 0$ .

Как обычно, полагаем, что МФ  $d_j(t)$  ВОС-сигналов  $s_j(t)$  (7) образуется путем перемножения взаимно синхронизированных последовательно-стей: собственно ПСП дальномерного кода  $g_j(t)$  и МПК  $r_j(t)$  [5, 20].

Каждая из последовательностей состоит из чередующихся единичных видеоимпульсов соответствующей длительности, меняющих свою полярность по определенным законам согласно кодовым коэффициентам, значения которых на каждом такте равны +1 или –1.

В таком случае МФ  $d(t)$  ВОС-сигнала  $s(t)$  (7) описывается следующим выражением [5, 20]:

$$d(t - t_0) = g(t - t_0)r(t - t_0), \quad (8)$$

где  $g(t)$  – собственно ПСП дальномерного кода,  $r(t)$  – МПК, отражающее специфику ВОС-сигналов  $s(t)$ .

Отметим, что в работе применительно к принимаемому от  $j$ -го НКА ВОС-сигналу  $s_j(t)$  в обозначениях типа (7), (8) и далее индекс  $j$  там, где это не затрудняет понимания, не приводится.

В зависимости от относительного фазирования ПСП дальномерного кода и МПК ВОС-сигналы делятся на синусные ВОС-сигналы (sinВОС) и косинусные ВОС-сигналы (cosВОС) [3–5].

Формула МФ (8) применительно к sinВОС- и cosВОС-сигналам соответственно записывается в следующем виде [5, 8–10]:

$$d_{\sin \text{ВОС}}(t - t_0) = g(t - t_0)r_{\sin}(t - t_0), \quad (9)$$

где  $d_{\sin \text{ВОС}}(t - t_0)$  – МФ sinВОС-сигналов,  $r_{\sin}(t - t_0)$  – синусное МПК;

$$d_{\cos \text{ВОС}}(t - t_0) = g(t - t_0)r_{\cos}(t - t_0), \quad (10)$$

где  $d_{\cos \text{ВОС}}(t - t_0)$  – МФ cosВОС-сигналов,  $r_{\cos}(t - t_0)$  – косинусное МПК.

Выражение, определяющее ПСП дальномерного кода  $g(t)$  на одном ее периоде, имеет традиционный вид [1–5]

$$g(t - t_0) = \sum_{k=0}^{L-1} v_k \text{rect}_{\tau_c}[t - k\tau_c - t_0], \quad (11)$$

где  $L$  – коэффициент расширения спектра, т.е. число элементов на периоде ПСП  $g(t)$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, (L - 1)$  – номер элемента ПСП на периоде,  $\tau_c$  – длительность элемента ПСП  $g(t)$ ;  $t_0$  – начало отсчета.

Функция  $\text{rect}_{\tau_c}[\cdot]$  в (11) представляет собой импульс единичной амплитуды длительностью  $\tau_c$ :

$$\text{rect}_{\tau_c}[t - k\tau_c] = \begin{cases} 1 & \text{при } k\tau_c \leq t < (k+1)\tau_c, \\ 0 & \text{при } k\tau_c > t \geq (k+1)\tau_c, \end{cases} \quad (12)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, (L - 1)$ .

Длительность периода ПСП  $g(t)$  (11) равна

$$T_L = L\tau_c. \quad (13)$$

Кодовые коэффициенты  $v_k = v(t_k)$ , где  $t_k = k\tau_c$  – дискретное время, формируют ПСП дальномерного кода  $g(t)$  (11). Они принимают на каждом элементе ПСП длительностью  $\tau_c$  значения +1 или –1 согласно закону чередования элементов на периоде, определяемому кодом.

Так, например, в ГНСС типа GPS дальномерный С/А код является периодической последовательностью Голда с периодом  $T_L = 1$  мс и частотой следования символов  $f_c = 1.023$  МГц. В ГНСС типа ГЛОНАСС дальномерный код стандартной точности представляет собой периодическую последовательность максимальной длины (М – последовательность, или последовательность Хаффмена) с периодом  $T_L = 1$  мс и частотой следования символов  $f_c = 511$  кГц [1, 2, 7].

Согласно (8)–(13) на рис. 1а и 1б представлены графики ПСП  $g(t)$  (при произвольно заданной в примере реализации), МПК  $r(t)$  и МФ  $d(t)$  соответственно для sinВОС- и cosВОС-сигналов при коэффициенте кратности меандровых импульсов  $N_M = 4$ .

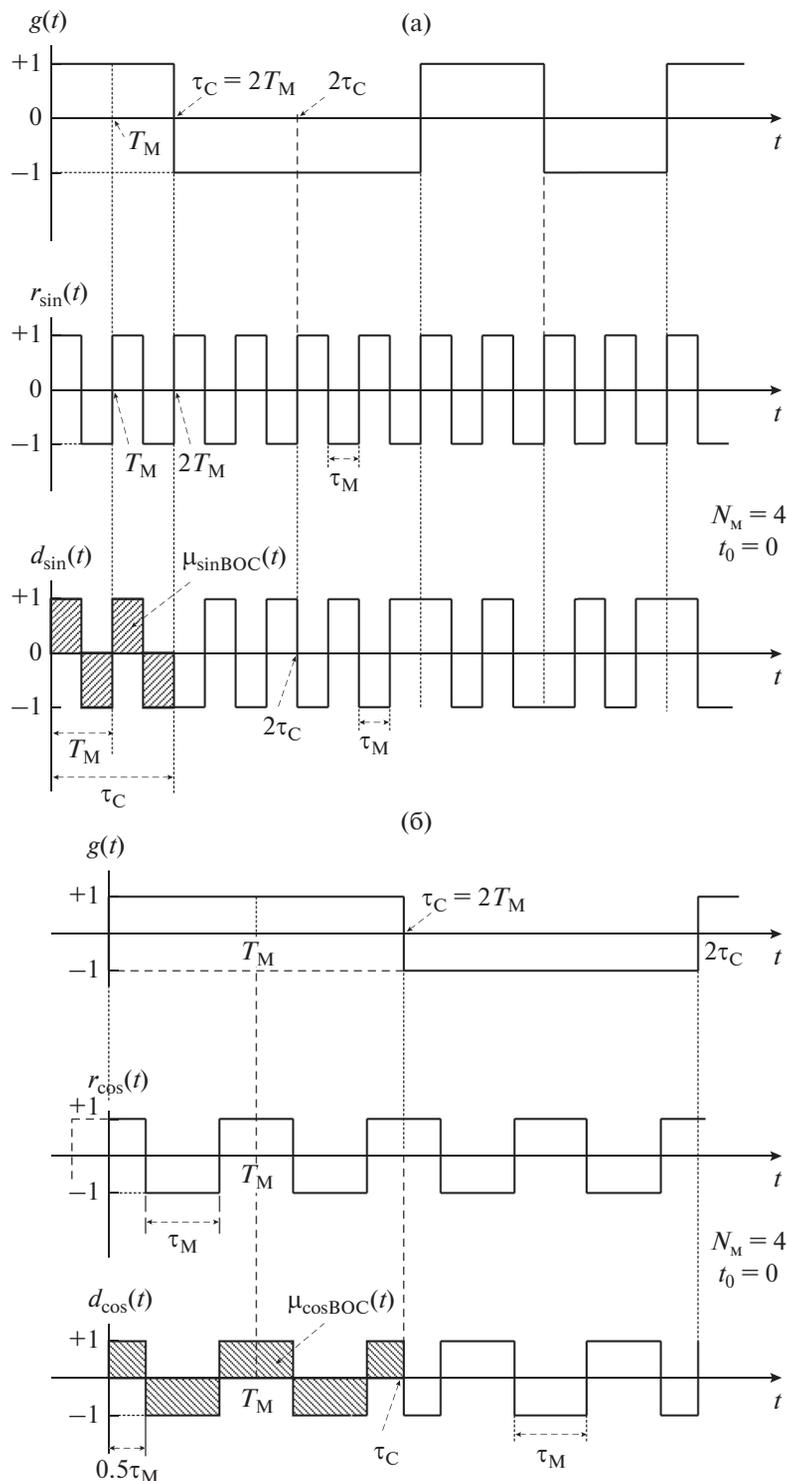


Рис. 1. Формирование модулирующей функции sinBOC-сигнала (а) и cosBOC-сигнала (б).

Коэффициент кратности меандровых импульсов  $N_M$  представляет собой число импульсов МПК  $r(t)$ , которые укладываются на длительности  $\tau_C$  одного элемента ПСП  $g(t)$ , и характеризуется соотношением [3–5]

$$N_M = 2\tau_C/T_M = 2f_M/f_C = 2\alpha/\beta, \quad (14)$$

где  $\alpha = f_M/f_{OP}$  и  $\beta = f_C/f_{OP}$  – параметры меандровой модуляции ВОС-сигналов,  $f_{OP}$  – базовая (опорная) частота,  $f_C = 1/\tau_C$  – частота следования символов ПСП  $g(t)$ . Например, для ГНСС GPS и Galileo  $f_{OP} = 1.023$  МГц. Отметим, что  $N_M = 4$  со-

ответствует, в частности, типу меандровой модуляции ВОС(10, 5) [5, 6].

На рис. 1а и 1б обозначено:  $\tau_C$  – длительность элемента ПСП  $g(t)$ ,  $T_M$  – длительность периода МПК  $r(t)$ ,  $\tau_M$  – длительность меандрового импульса МПК  $r(t)$ . При этом длительность периода МПК  $T_M$  равна  $T_M = 2\tau_M$ . Частота МПК  $r(t)$  равна  $f_M = 1/T_M$ . В виде заштрихованных фигур на рис. 1а и 1б соответственно выделены синусный символ МФ  $\mu_{\sin\text{ВОС}}(t)$  и косинусный символ МФ  $\mu_{\cos\text{ВОС}}(t)$ . Принято, что начало отсчета  $t_0 = 0$ .

Вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов  $\mathbf{S}(t)$  (3) от всей совокупности  $J$  одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС может быть записан в виде

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}[t, \Theta_k, \mathbf{X}(t)], \quad (15)$$

где  $\Theta_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \dots, \Theta_{jk}, \dots, \Theta_{Jk}]^T$  – вектор ДП применительно ко всей совокупности  $J$  одновременно видимых НКА;  $\Theta_{jk} = \Theta_j(t_k)$  – ДП, представляющий собой манипулируемую фазу принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (7) от  $j$ -го НКА, с помощью которой передается навигационная СИ.

Информационный ДП  $\Theta_{jk}$  в (7) характеризует двоичную ФМ (BPSK – binary phase-shift keying) ВОС-сигнала  $s_j(t)$ .

При двоичной ФМ в сигнале  $s_j(t)$  (7) используются два значения фазы несущего колебания,  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . В таком случае ДП  $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_{ji}\}$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) принимает значения  $\vartheta_{j1} = 0$  или  $\vartheta_{j2} = 1$ .

Дискретный процесс  $\Theta_{jk}$  содержит сведения об эфемеридах, альманахе, поправках к бортовой шкале времени (ШВ) и т.д. для  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) группировки ГНСС [1, 2]. Смена значений ДП  $\Theta_j(t_k)$  может происходить в моменты  $t_k = t_0 + k\tau_{\text{СИ}}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau_{\text{СИ}}$  – длительность информационной посылки СИ от  $j$ -го НКА.

В современных ГНСС для передачи СИ применяются полезные сигналы  $s_j(t)$  с двоичной ФМ (7). Наряду с этим в ряде технических приложений навигации и связи (например, в спутниковой системе связи Globalstar) используется также четверичная (квадратурная) ФМ (QPSK – Quadrature Phase Shift Keying), что позволяет более эффективно использовать предоставленную полосу частот. Поэтому ДП  $\Theta_j(t_k)$  для передачи СИ характеризуем в данной работе более общей моделью с использованием многопозиционной ФМ [20, 21].

Тогда в соответствии с (7) на входе приемника ГНСС принимаемый от  $j$ -го НКА полезный

ВОС-сигнал  $s_j(t)$  с использованием многопозиционной ФМ для передачи СИ (без учета каких-либо технических особенностей) описывается следующим выражением:

$$s_j(t) = A_j d_j(t - \tau_{3j}) \cos \left[ (\omega_{Hj} + \Delta\omega_{Dj} + \Delta\omega_j) \times \right. \\ \left. \times (t - \tau_{3j}) + \Theta_j(t_k - \tau_{3j}) \frac{2\pi}{M} + \varphi_j(t) \right], \quad (16) \\ j = \overline{1, J}.$$

Характеризующий в принимаемом сигнале  $s_j(t)$  многопозиционную ФМ ДП  $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}$  применительно к  $j$ -му НКА определяется соотношением

$$\vartheta_i = i - 1, \quad \Theta_j(t_k) = \{i - 1\}, \quad (17)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ,  $i$  – номер состояния ДП  $\Theta_j(t_k)$ .

Таким образом, ДП  $\Theta_j(t_k)$  представляет собой простую цепь Маркова на  $M$  положений, и на каждом такте он принимает одно из значений  $\vartheta_i = i - 1$ , где  $i = \overline{1, M}$ .

В формуле (16)  $M = 2^n$  – показатель многопозиционности ФМ,  $n$  – целое положительное число. Так, например, при  $M = 2$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) имеем двоичную ФМ и сигнал (16) принимает вид (7), при  $M = 4$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) – квадратурную ФМ.

Запаздывание  $\tau_{3j}$  принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) на трассе от  $j$ -го НКА до входа приемника ГНСС может быть записано в виде [1, 2, 20, 23]

$$\tau_{3j} = \tau_{Dj} + \Delta\tau_\Sigma, \quad (18)$$

где  $\tau_{Dj}(t)$  – задержка принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$ , обусловленная дальностью трассы между  $j$ -м НКА и объектом (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС;  $\Delta\tau_\Sigma$  – суммарная задержка ВОС-сигнала  $s_j(t)$ , вызванная сдвигами ШВ  $j$ -го НКА и приемника ГНСС, задержкой радиосигнала за счет неточного прогноза эфемерид, ионосферной и тропосферной задержками сигнала  $s_j(t)$  и т.п.

Задержка  $\tau_{Dj}(t)$  принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$ , обусловленная дальностью трассы между  $j$ -м НКА и объектом (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС, характеризуется выражением

$$\tau_{Dj}(t) = D_j(t)/c, \quad (19)$$

где  $D_j(t)$  – дальность трассы между  $j$ -м НКА и объектом, на котором установлен приемник ГНСС,  $c$  – скорость распространения радиоволн.

Связь между дальностью  $D(t)$  и прямоугольными координатами в геоцентрической системе ко-

ординат  $j$ -го НКА и объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС, имеет вид [1, 2, 23]

$$D_{\text{изм}}(t) = D(t) + \delta D = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} + \delta D, \quad (20)$$

где  $x, y, z$  – прямоугольные координаты объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС,  $x_j, y_j, z_j$  – прямоугольные координаты  $j$ -го НКА,  $D_{\text{изм}}(t)$  – измеренное значение дальности  $D(t)$  (псевдодальность),  $\delta D$  – неизвестная постоянная на время измерения ошибка (например, за счет расхождения ШВ  $j$ -го НКА и приемника ГНСС).

В соответствии с (19) и (20) радиальная псевдоскорость  $V_{\text{изм}}(t)$  применительно к  $j$ -му НКА характеризуется следующим выражением [1, 2, 23]:

$$V_{\text{изм}}(t) = \frac{d}{dt} D_{\text{изм}}(t) = K_x(V_x - W_{jx}) + K_y(V_y - W_{jy}) + K_z(V_z - W_{jz}), \quad (21)$$

где

$$V_x(t) = \frac{d}{dt} x(t), \quad V_y(t) = \frac{d}{dt} y(t), \quad V_z(t) = \frac{d}{dt} z(t)$$

– проекции скорости объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС,

$$W_{jx}(t) = \frac{d}{dt} x_j(t), \quad W_{jy}(t) = \frac{d}{dt} y_j(t), \\ W_{jz}(t) = \frac{d}{dt} z_j(t)$$

– проекции скорости  $j$ -го НКА;

$$K_x = \frac{x_j - x}{D_{\text{изм}}(t)}, \quad K_y = \frac{y_j - y}{D_{\text{изм}}(t)}, \quad K_z = \frac{z_j - z}{D_{\text{изм}}(t)} \quad (22)$$

– направляющие косинусы применительно к  $j$ -му НКА.

Обычно значения направляющих косинусов  $K_x, K_y$  и  $K_z$  (22) на тактовых интервалах времени принимают постоянными.

Значения координат  $x_j, y_j, z_j$  каждого  $j$ -го НКА и их производные  $W_{jx}, W_{jy}, W_{jz}$  в приемнике ГНСС являются известными в результате обработки СИ. Они при решении задач синтеза относятся к вектору управления  $\mathbf{U}_{\text{упр}}(t)$ .

Доплеровский сдвиг несущей частоты  $\omega_H$  принимаемого от  $j$ -го НКА ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) имеет вид [1, 23]

$$\Delta\omega_D(t) = \omega_H \frac{V(t)}{c}, \quad (23)$$

где  $V(t) = dD(t)/dt$  – радиальная скорость перемещения объекта (например, ЛА), на котором

установлен приемник ГНСС, относительно  $j$ -го НКА.

Случайная фаза  $\varphi(t)$  принимаемого от  $j$ -го НКА ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) достаточно полно описываются следующей системой стохастических дифференциальных уравнений [18, 23]:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta\omega(t) - \frac{\omega_H}{c} \frac{dD(t)}{dt} + \sqrt{\frac{N_\varphi}{2}} n_\varphi(t), \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ \frac{d\Delta\omega(t)}{dt} = -\gamma_\omega \Delta\omega(t) + \sqrt{2\gamma_\omega \sigma_\omega^2} n_{\delta\omega}(t), \\ \Delta\omega(t_0) = \Delta\omega, \end{cases} \quad (24)$$

где  $n_\varphi(t)$  и  $n_{\delta\omega}(t)$  – взаимонезависимые стандартные БГШ (с нулевыми математическими ожиданиями (МО) и единичными интенсивностями),  $\Delta\omega(t)$  – медленный сдвиг несущей частоты  $\omega_H$  ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) из-за нестабильности задающих генераторов  $j$ -го НКА и приемника ГНСС, а также в связи с изменением внешних условий функционирования,  $\sigma_\omega^2$  – дисперсия нестабильности частоты,  $\gamma_\omega$  – коэффициент, характеризующий ширину спектра уходов частоты  $\Delta\omega(t)$ ;  $N_\varphi$  – интенсивность собственных фазовых флуктуаций приемника ГНСС.

Таким образом, принимаемый от  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (16) согласно (17)–(24) (без учета каких-либо технических особенностей) является функцией ДП  $\Theta_j(t_k)$  и вектора непрерывных параметров радиосигнала (ПРС)  $\mathbf{Y}_j(t)$ :

$$s_j(t) = s_j[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)], \quad (25)$$

где

$$\mathbf{Y}_j(t) = \left[ D_{j\text{изм}}(t) \frac{d}{dt} D_{j\text{изм}}(t) \varphi_j(t) \Delta\omega_j(t) \right]^T$$

–  $j$ -й вектор ПРС,  $j = \overline{1, J}$ .

Компоненты вектора ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$  представляют собой параметры, от которых непосредственно зависит принимаемый от  $j$ -го НКА ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (псевдодальность объекта, на котором установлен приемник ГНСС, его псевдоскорость, фаза сигнала и т.п.).

Для  $j$ -го вектора ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$  и вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  выполняется соотношение [1, 7, 13]

$$\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{L}_j \{ \mathbf{X}(t) \}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{L}_j \{ \mathbf{X}(t) \}$  – известная нелинейная векторная функция, вектор-столбец  $\mathbf{Y}_j(t)$  имеет размер  $(m \times 1)$ , вектор-столбец  $\mathbf{X}(t)$  имеет размер  $(n \times 1)$ .

Число векторов ПРС  $Y_j(t)$  равно  $J$  – числу всех одновременно видимых НКА.

Из рассмотрения (26) видно, что совокупность векторов ПРС  $Y_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , содержит необходимую информацию о положении и динамике движения объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС, а также об условиях распространения радиоволн и стабильности несущих частот принимаемых ВОС-сигналов.

Далее рассмотрим вектор НП  $X(t)$  и его взаимосвязь с векторами ПРС  $Y_j(t)$  (25), где  $j = \overline{1, J}$ .

Вектор НП  $X(t)$  описываем с использованием типовой математической модели (ММ) динамики объектов навигации на основе прямоугольной гринвичской системы координат (СК), характеризующей положение объекта, на котором установлен приемник ГНСС, в пространстве и его движение применительно к небольшим отрезкам времени. В таком случае вектор НП  $X(t)$  может быть представлен в следующем виде [20, 23]:

$$X(t) = [X_c^T(t), V^T(t), A^T(t), \Phi^T(t), \Delta\Omega^T(t), \Delta D^T(t)]^T, \quad (27)$$

где

$$X_c(t) = [x, y, z]^T$$

– вектор прямоугольных координат объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС,

$$V(t) = [V_x, V_y, V_z]^T \quad \text{и} \quad A(t) = [A_x, A_y, A_z]^T$$

– векторы земной скорости и ускорения объекта (например, ЛА) на оси прямоугольной гринвичской СК,

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_j(t), \dots, \varphi_J(t)]^T$$

– вектор случайных фаз принимаемых полезных ВОС-сигналов  $s_j(t)$  (16), где  $j = \overline{1, J}$ , от всей совокупности одновременно видимых в данный момент НКА,

$$\Delta\Omega(t) = [\Delta\omega_1(t), \Delta\omega_2(t), \dots, \Delta\omega_j(t), \dots, \Delta\omega_J(t)]^T$$

– вектор медленных уходов несущих частот принимаемых полезных ВОС-сигналов  $s_j(t)$  (16), где  $j = \overline{1, J}$ , от всей совокупности одновременно видимых в данный момент НКА,

$$\Delta D(t) = [\delta d_1(t), \delta d_2(t), \dots, \delta d_j(t), \dots, \delta d_J(t)]^T$$

– вектор сдвигов ШВ приемника ГНСС относительно ШВ каждого видимого НКА, выраженный в единицах дальности.

Динамика компонент вектора НП  $X(t)$  (27) применительно к высокодинамичным объектам (например, ЛА) достаточно полно описывается

ММ в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений [20, 23]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_c(t) = V(t), & X_c(t_0) = X_{c0}; \\ \frac{d}{dt} V(t) = A(t), & V(t_0) = V_0; \\ \frac{d}{dt} A(t) = -[\alpha + \beta]A(t) - \alpha\beta V(t) + \\ + \sqrt{2(\alpha + \beta)\sigma_A^2} N_A(t), & A(t_0) = A_0; \\ \frac{d}{dt} \Phi(t) = \Delta\Omega(t) - \frac{\omega_H}{c} \frac{d}{dt} D(t) + \\ + G_\Phi N_\Phi(t), & \Phi(t_0) = \Phi_0; \\ \frac{d}{dt} \Delta\Omega(t) = -\Gamma_\omega \Delta\Omega(t) + \\ + G_{\Delta\Omega} N_{\Delta\Omega}(t), & \Delta\Omega(t_0) = \Delta\Omega_0; \\ \frac{d}{dt} \Delta D = 0, & \Delta D(t_0) = \Delta D_0; \end{cases} \quad (28)$$

где  $\sigma_A^2$  – дисперсия флуктуаций ускорения,  $N_A(t), N_\Phi(t), N_{\Delta\Omega}(t)$  – векторы формирующих стандартных БГШ,  $\alpha$  и  $\beta$  – размерные коэффициенты, определяющие спектр флуктуаций ускорения,  $D(t) = [D_1(t), D_2(t), \dots, D_j(t), \dots, D_J(t)]^T$  – вектор дальностей применительно ко всей совокупности одновременно видимых в данный момент НКА,  $D_j(t)$  – дальность между  $j$ -м НКА и объектом (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС;  $\Gamma_\omega, G_\Phi, G_{\Delta\Omega}$  – диагональные матрицы, у которых на главных диагоналях соответственно находятся элементы  $\gamma_{\omega j}, \sqrt{N_{\varphi j}}/2, \sqrt{2\gamma_{\omega j}\sigma_{\omega j}^2}$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

Как видно из (27) и (28), вектор НП  $X(t)$  представляет собой многокомпонентный диффузионный гауссовский марковский процесс, который описывается линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением вида [18, 23]

$$\frac{d}{dt} X(t) = A_X(t)X(t) + C_X(t)U_{\text{упр}}(t) + G_X(t)N_X(t), \quad (29)$$

$$X(t_0) = X_0,$$

где  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  – вектор-столбец НП размером  $(n \times 1)$ ;  $n$  – число компонент вектора НП  $X(t)$ ;  $A_X(t)$  – матрица состояния размером  $(n \times n)$ ;  $U_{\text{упр}}(t)$  – детерминированный вектор управления;  $C_X(t)$  – матрица управления;  $N_X(t) = [N_A^T(t)N_\Phi^T(t)N_{\Delta\Omega}^T(t)]$  – вектор стандартных БГШ;  $G_X(t)$  – матрица интенсивностей шумов;  $B_{XX}(t) = G_X(t)G_X^T(t)$  – матрица коэффициентов диффузии вектора НП  $X(t)$ .

Применительно к (29) матрица  $\mathbf{G}_X(t)$  имеет вид

$$\mathbf{G}_X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2(\alpha + \beta)\sigma_A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_\Phi & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{\Delta\Omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Взаимосвязь вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  (27) и  $j$ -го вектора ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , (26) в типовом случае (25) характеризуется соотношением [20, 23]

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_j(t) &= \mathbf{L}_j \{\mathbf{X}(t)\} = \\ &= [l_{j1} \{\mathbf{X}(t)\} \ l_{j2} \{\mathbf{X}(t)\} \ l_{j3} \{\mathbf{X}(t)\} \ l_{j4} \{\mathbf{X}(t)\}]^T, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\mathbf{Y}_j(t) = [y_{j1}(t) \ y_{j2}(t) \ y_{j3}(t) \ y_{j4}(t)]^T$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

Компоненты нелинейной векторной функции  $\mathbf{L}_j \{\mathbf{X}(t)\}$  в (30) применительно к типовому случаю (25) определяются следующими соотношениями: согласно (20) –

$$y_{j1}(t) = l_{j1} \{\mathbf{X}(t)\} = D_{jизм}(t); \quad (31)$$

согласно (21) –

$$y_{j2}(t) = l_{j2} \{\mathbf{X}(t)\} = \frac{d}{dt} D_{jизм}; \quad (32)$$

согласно (24) –

$$y_{j3}(t) = l_{j3} \{\mathbf{X}(t)\} = \varphi_j(t) \text{ и } y_{j4}(t) = l_{j4} \{\mathbf{X}(t)\} = \Delta\omega_{Dj}.$$

Векторы ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , и взаимосвязанный с ними вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  (26) и (30) подлежат оцениванию на основе решения задачи синтеза.

Таким образом, как следует из рассмотрения (17), (25), (27) и (28)–(31), принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (16) является функцией ДП  $\Theta_j(t_k)$  и вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ :

$$s_j(t) = s[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{X}(t)]. \quad (33)$$

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

При постановке задачи синтеза оптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов на основе МТО следует в пространстве состояний выбрать и обосновать ВН и ВС, а также описать динамику этих векторов, используя соответствующие ММ. При этом необходимо задать критерий оптимальности в соответствии с физическим смыслом и целью решаемой задачи синтеза [14–19].

Полагаем, что ВН  $\Xi(t)$  на входе авиационного приемника ГНСС имеет вид (1) и определяется

соотношениями (2)–(4). Полезные ВОС-сигналы  $s_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , (16) на входе приемника ГНСС рассмотрены в разд. 1.

Обосновывая компоненты ВС, исходим из того, что решается основная задача навигации: определение пространственных координат объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС, и их производных (компоненты скорости полета и ускорения). Как обычно, сопутствующими компонентами ВС при этом являются параметры, характеризующие флуктуации фазы принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$ , нестабильность частоты задающего генератора и т.п. [20, 23].

Как отмечали, применительно к решаемой задаче синтеза ВС представляет собой ДНП  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$ , где  $\Theta_j(t_k)$  – ДП (17), содержащий СИ от  $j$ -го НКА ( $j = \overline{1, J}$ );  $\mathbf{X}(t)$  – вектор НП (27), содержащий информацию о положении в пространстве и динамике движения объекта (например, ЛА), на котором установлен приемник ГНСС, а также сведения об условиях распространения радиоволн и стабильности несущей частоты ВОС-сигнала  $s_j(t)$ .

У излучаемого от  $j$ -го НКА полезного ВОС-сигнала  $s_{jin}(t)$  возможные моменты перехода ДП  $\Theta_j(t_k)$  из одного состояния в другое являются дискретными и определяются выражением  $t_k = t_0 + kT$ , где  $T = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Для ГНСС типа ГЛОНАСС, GPS и Galileo длительность такта  $T = t_{k+1} - t_k$  ДП  $\Theta_j(t_k)$  равна длительности информационной посылки СИ:  $T = \tau_{си} = 20$  мс [1, 2].

На входе приемника ГНСС у принимаемого от  $j$ -го НКА полезного ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) моменты времени перехода  $(t_k - \tau_{3j})$  ДП  $\Theta_j(t_k - \tau_{3j})$  из одного состояния в другое являются случайными, поскольку они зависят от случайного запаздывания принимаемого сигнала  $\tau_{3j}$  (18).

Напомним, что далее применительно к ДП  $\Theta_j(t_k)$  в принимаемом от  $j$ -го НКА ВОС-сигнале  $s_j(t)$  (16) индекс  $j$  там, где это не затрудняет понимания, не приводим.

На всех тактовых полуинтервалах времени  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , ДП  $\Theta(t_k)$  остается постоянным, и он может быть описан соответствующим априорным уравнением вида

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = 0, \text{ где } t \in [t_k, t_{k+1}), \ k = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

Матрица одношаговых вероятностей перехода и вектор вероятностей начального состояния ДП  $\Theta(t_k)$  соответственно имеют вид [18, 19]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}(t_k) &= [\pi_{il}(t_k)], \text{ где } \pi_{il}(t_k) = \\ &= P\{\Theta(t_k + 0) = \vartheta_i | \Theta(t_k - 0) = \vartheta_l\}, \\ & \quad i, l = \overline{1, M}; \\ \mathbf{P}_\Theta(t_0) &= \{P_{\vartheta_i}(t_0)\}, \text{ где } i = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (35)$$

В начале  $k$ -го такта  $[t_k, t_{k+1})$  вероятности состояний ДП  $\Theta(t_k)$

$$P_{\vartheta_i}(t_k + 0) \triangleq P(t_k + 0, \Theta(t_k + 0) = \vartheta_i)$$

определяются формулой [18, 19]

$$P_{\vartheta_i}(t_k + 0) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{\vartheta_m}(t_k - 0), \quad i = \overline{1, M}, \quad (36)$$

где  $P_{\vartheta_m}(t_k - 0)$  – вероятность состояния ДП  $\Theta(t_k)$  в конце  $(k - 1)$ -го такта  $[t_{k-1}, t_k)$ .

При использовании методов МТО с целью повышения конструктивности решения задач синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ДНП применяется поэтапное решение уравнения Стратоновича [18, 22]. С учетом специфики непрерывных (27)–(29) и дискретных (34)–(36) компонент ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , где  $j = \overline{1, J}$ , появляется возможность в два этапа решить уравнение Стратоновича для АПВ оцениваемых ДНП.

Применяя метод поэтапного решения уравнения Стратоновича, удастся обоснованно упростить ММ оцениваемого ВС и тем самым повысить конструктивность решения задачи синтеза.

Суть такого упрощения ММ оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$  заключается в возможности описания на характерных полуинтервалах времени  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $t_k = t_0 + k\tau_{\text{СИ}}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $\tau_{\text{СИ}}$  – длительность посылки СИ от  $j$ -го НКА, динамики компонент вектора  $\mathbf{X}(t)$  квазислучайными процессами. Применительно к ГНСС  $\tau_{\text{СИ}} = 20$  мс [1, 2]. При этом выполняется двухэтапная обработка ВН  $\Xi(t)$  (1)–(4).

На первом этапе применительно к каждому  $k$ -му такту  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , обрабатывается только вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  (27) оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , поскольку ДП  $\Theta_j(t)$  при этом остаются постоянными. В таком случае для первого этапа обработки удастся найти точное решение уравнения Стратоновича как решение нелинейной задачи оценки параметров в силу аппроксимации ММ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  (28) векторным квазислучайным процессом.

На втором этапе обработка осуществляется в дискретном времени в точках  $t_k + 0$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , т.е. точках (с учетом запаздывания  $\tau_{3j}$  принимаемого ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) на трассе) возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$ . При этом оценки компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ , полученные на первом этапе обработки, используются в качестве начальных значений для второго этапа обработки ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

В дискретные моменты времени  $t_k$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , вектор НП  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$ , характеризуемый соотношениями (27) и (28), описывается эквивалентным применительно к (29) линейным векторно-матричным стохастическим разностным уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \Phi_{XX}(t_k, t_{k-1})\mathbf{X}_{k-1} + \\ &+ \Psi_{XU}(t_k, t_{k-1})U_{\text{упрк}} + \Gamma_X(t_k, t_{k-1})\mathbf{N}_{Xk}, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\mathbf{N}_{Xk} = \mathbf{N}_X(t_k)$  – вектор формирующих стандартных дискретных БГШ,  $\Phi_{XX}$ ,  $\Psi_{XU}$  и  $\Gamma_X$  – известные матрицы,  $U_{\text{упрк}}$  – дискретный вектор управления.

Полагаем, что длительность тактового интервала (информационной посылки СИ)  $T = t_{k+1} - t_k$  ДП  $\Theta(t_k)$  ( $T = \tau_{\text{СИ}} = 20$  мс) достаточно мала, чтобы в (33) вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  на каждом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , можно было с требуемой для оценивания степенью точности аппроксимировать векторным квазислучайным процессом [18, 20, 22]:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0), \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\mathbf{f}(\cdot)$  – детерминированная векторная функция;  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$ ,  $\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{X}_k)$  – начальное значение на  $k$ -м такте.

Входящая в линейное векторно-матричное стохастическое разностное уравнение (36) функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)$  равна [18, 20, 22]

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k) = \Phi_{XX}(t, t_k)\mathbf{X}_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (39)$$

где  $\Phi_{XX}(t, t_k)$  – переходная матрица состояния, характеризуемая (37).

В соответствии с (38) принимаемый от  $j$ -го НКА полезный ВОС-сигнал  $s_j(t)$  (33) в пределах одного тактового полуинтервала принимает вид

$$\begin{aligned} s_j(t) &= s_j[t, \Theta_{jk}, \mathbf{f}(t_k, \mathbf{X}_k)], \text{ где} \\ \Theta_{jk} &= \Theta_j(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ & \quad j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (40)$$

Задача синтеза заключается в том, чтобы на  $k$ -м такте  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , имея ВН (1)–(4) и располагая априорными сведениями (27)–(29), (30) и (34)–(36) об оцениваемом ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$ , с использованием метода переприсвоения параметров НП получить оптимальную оценку  $\hat{X}_{k+1}$  выборки вектора НП  $X(t)$  и оптимальные оценки  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$  ДП  $\Theta_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

Оптимальная оценка  $\hat{X}_{k+1}$  выборки вектора НП  $X(t)$  должна удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь [17–19]

$$\hat{X}(t) = \tilde{X}(t) : \min \left\{ \int c(X, \tilde{X}) p_{ps}(t, X) dX \right\},$$

где  $c(X, \tilde{X}) = (X - \tilde{X})^T C_X (X - \tilde{X})$  – квадратичная функция потерь,  $C_X$  – заданная неотрицательно определенная матрица,  $p_{ps}(t, X) \triangleq p(t, X | \Xi'_{t_0})$  – АПВ вектора НП  $X(t)$ ;  $\Xi'_{t_0} = \{\Xi(\tau) : \tau \in [t_0, t]\}$  – реализация ВН  $\Xi(t)$  на полуинтервале  $t \in [t_0, t]$ ;  $\tilde{X}(t)$  – оценка вектора НП  $X(t)$ ;  $\hat{X}(t)$  – оптимальная оценка вектора НП  $X(t)$ .

Как известно [18, 19], оптимальной оценкой  $\hat{X}_{k+1}$ , удовлетворяющей этому критерию, является апостериорное математическое ожидание  $M_{ps}[X_{k+1}]$  выборки вектора НП  $X(t)$ :

$$\hat{X}_{k+1} = M_{ps}[X_{k+1}] = \int_{X_{k+1}} X_{k+1} p_{ps}(t, X_{k+1}) dX_{k+1}, \quad (41)$$

где  $p_{ps}(t, X_{k+1}) \triangleq p(t, X_{k+1} | \Xi'_{t_0})$  – АПВ выборки  $X_{k+1}$ ;  $\Xi'_{t_0} = \{\Xi(\tau) : \tau \in [t_0, t_{k+1}]\}$  – реализация ВН  $\Xi(t)$  (1) на входе приемника ГНСС на отрезке  $[t_0, t_{k+1}]$ ; индекс “ $ps$ ” означает соответствующую АПВ.

Если АПВ  $p_{ps}(t, X_{k+1})$  является унимодальной и гауссовской, то оптимальная оценка  $\hat{X}(t)$  согласно критерию (41) и согласно критерию максимума АПВ совпадают [16–19], что и используем в дальнейшем.

Оптимальные оценки  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$  компонент вектора ДП  $\Theta_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \dots, \Theta_{jk}, \dots, \Theta_{Jk}]^T$ , где  $j = \overline{1, J}$ , применительно ко всей совокупности  $J$  одновременно видимых НКА должны удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при простой функции потерь, что эквивалентно критерию максимума АВ компонент вектора ДП  $\Theta_k$  [16–19]:

$$\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0) = \vartheta_j : \max_{\vartheta_1 \leq \vartheta_j \leq \vartheta_M} \{P_{ips}(t_{k+1} - 0)\}, \quad (42)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  – АВ состояния ДП  $\Theta_j(t)$  в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ .

### 3. УРАВНЕНИЯ СТРАТОНОВИЧА ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ И АПОСТЕРИОРНЫХ СМЕШАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$

Основной характеристикой, которая дает возможность согласно выбранному критерию при решении задач синтеза методами МТО получить общие выражения для оптимальных оценок вектора НП  $X(t)$  и ДП  $\Theta_j(t)$  применительно ко  $j$ -му НКА ( $j = \overline{1, J}$ ), является совместная АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j(t), X(t))$  оцениваемого ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$ .

Чтобы решить поставленную задачу синтеза, необходимо получить аналитические соотношения, связывающие совместную АПВ или, что эквивалентно, соответствующую совокупность апостериорных смешанных распределений (АСР) оцениваемого ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$  в соседние тактовые моменты времени  $t_k + 0$  и  $t_{k+1} + 0$  применительно ко всем  $k = 0, 1, 2, \dots$

С учетом требований метода поэтапного решения уравнения Стратоновича обработка ВН  $\Xi(t)$  (1)–(3) на каждом такте организуется, как отмечали, в два этапа [18, 22].

На первом этапе обработка ВН  $\Xi(t)$  (1)–(3) происходит применительно к каждому тактовому полуинтервалу  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

На втором этапе этого же такта обработка ВН  $\Xi(t)$  осуществляется в точке  $t_{k+1} + 0$ , когда происходит смена такта и возможное изменение состояния ДП  $\Theta_j(t_{k+1} + 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Совместная АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j(t), X(t))$  (или соответствующая совокупность АСР) векторного ДНП, вычисленная на первом этапе обработки, рассматривается как начальное условие для второго этапа обработки на этом же такте.

Повторяя такую процедуру вычислений для каждого такта последовательно, получим эволюцию совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j(t), X(t))$  (или совокупности АСР) оцениваемого ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$  во времени [17–19].

Применительно к  $j$ -му НКА ( $j = \overline{1, J}$ ) совместная АПВ  $p_{ps}(t, X(t), \Theta_j(t))$  оцениваемого ВС  $[X^T(t), \Theta_j(t)]^T$  записывается в виде

$$p_{ps}(t, \Theta_j(t), X(t)) \triangleq p(t, \Theta_j(t), X(t) | \Xi'_{t_0}).$$

В соответствии с теоремой умножения плотностей вероятности совместная АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j(t), \mathbf{X}(t))$  может быть представлена в одном из следующих эквивалентных видов [18, 19, 21]:

$$p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X}) = \begin{cases} p_{ps}(t, \mathbf{X}) p_{ps}(t, \Theta_j | \mathbf{X}); & (43) \\ p_{ps}(t, \Theta_j) p_{ps}(t, \mathbf{X} | \Theta_j). & (44) \end{cases}$$

Здесь и далее в формулах для краткости там, где это не затрудняет понимания сути, в записи функций аргумент  $t$  не приводится.

Каждое из этих разложений совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$  определяет соответствующий метод синтеза алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ .

Разложение совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$  вида (43) определяет метод синтеза с обратными связями по ДП и приводит к соответствующим алгоритмам обработки сигналов [18–21]. Представление совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$  в виде (44) характеризует метод синтеза с переприсвоением параметров вектора НП и позволяет разработать соответствующие алгоритмы обработки сигналов [18, 19, 21, 24].

Разложение совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$  вида (43), приводящее к алгоритмам обработки сигналов с обратными связями по ДП, применительно к ВОС-сигналам ГНСС рассмотрено в [20].

Далее применительно к ВОС-сигналам ГНСС остановимся на представлении совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$  в виде (44), которое приводит к алгоритмам с переприсвоением значений параметров условных АПВ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ . Как известно [18, 19], алгоритмы с переприсвоением свободны от ограничений, накладываемого на скорость изменения компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

Таким образом, на каждом тактовом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , для ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  применительно к  $j$ -му НКА совместная АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  при использовании метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП (44) имеет вид

$$p_{ps}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) = p_{ps}(t, \Theta_{jk}) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | \Theta_{jk}), \quad (45)$$

где  $p_{ps}(t, \Theta_{jk})$  – АПВ ДП  $\Theta_{jk}$ ;

$$\begin{aligned} p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | \Theta_{jk}) &= \\ &= p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | \Theta_{jk} = \vartheta_i) \triangleq p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i) \end{aligned} \quad (46)$$

– условная ( $i$ -я) по  $\Theta_{jk}$  АПВ выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$ , соответствующая состоянию ДП  $\Theta_{jk} = \vartheta_i$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $j$  – номер НКА;  $j = \overline{1, J}$ ;  $J$  – общее число

всех одновременно видимых в данный момент времени НКА.

Выразив АПВ ДП  $\Theta_{jk}$  через соответствующие АВ, получим [17–20]

$$p_{ps}(t, \Theta_{jk}) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t) \delta(\Theta_{jk} - \vartheta_i), \quad (47)$$

где  $P_{ips}(t) \triangleq P_{ps}(t, \Theta_{jk} = \vartheta_i)$  – АВ состояния ДП  $\Theta_{jk} = \vartheta_i$ ;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака.

На каждом такте, т.е. на полуинтервале времени  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , в течение которого ДП  $\Theta_j(t)$  является постоянным, совместную АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  удобно выражать через соответствующую совокупность (в числе, равном  $M$ ) АСР, представляющую собой характеристику эквивалентную совместной АПВ [18, 21, 24]:

$$w_{ips}(t, \mathbf{X}_k) \triangleq w(t, \Theta_k = \vartheta_i, \mathbf{X}_k | \Xi_{t_0}^{t_k}), \quad (48)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

В точках возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$ , т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , соотношения для АСР имеют вид [18]

$$\begin{aligned} w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) &= \\ &= \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) w_{mps}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_{k+1}), \end{aligned} \quad (49)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ;  $\pi_{mi}(t_{k+1})$  – одношаговые вероятности перехода (35).

Формула связи между совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  и соответствующими АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  определяется следующим соотношением [18, 21]:

$$p_{ps}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^M w_{ips}(t, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_{jk} - \vartheta_i), \quad (50)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

При использовании метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}_k$  (45) выражение для АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  с учетом (47) и (49) принимает вид [18, 21]

$$w_{ips}(t, \mathbf{X}_k) = P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | \Theta_{jk}), \quad (51)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

Согласно (51) для формирования оптимальных оценок  $\hat{\mathbf{X}}_k$  и  $\hat{\Theta}_{jk}$  на основе метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}_k$  необходимо знать условные АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | \Theta_{jk})$  и АВ  $P_{ips}(t)$ , где  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , на каждом такте на

первом и втором этапах обработки принимаемых ВОС-сигналов ГНСС.

### 3.1. Первый этап обработки

На первом этапе обработки на каждом  $k$ -м тактовом полуинтервале (т.е. при  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) согласно (34) выполняется соотношение  $\Theta_{jk} = \vartheta_i = \text{const}$ , и в соответствии с (38) производится аппроксимация вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  квазислучайным процессом:  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)$ .

Применительно к  $j$ -му НКА, где  $j = \overline{1, J}$ , совместную АПВ оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  на первом этапе обработки  $k$ -го такта обозначим как

$$p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) \triangleq p_1(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}}), \quad (52)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , индекс 1 означает первый этап обработки.

Тогда с учетом (34) и (38) на  $k$ -м такте уравнение Стратоновича для совместной АПВ  $p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  в симметризованной форме записи стохастических интегралов имеет вид [13–15, 20, 25]

$$\frac{\partial p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)}{\partial t} = [F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) - M_{ps}\{F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\}] p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k), \quad (53)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $j = \overline{1, J}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Производная по времени от логарифма функционала правдоподобия (ЛФП)  $F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  и ее апостериорное среднее  $M_{ps}\{F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\}$  в уравнении Стратоновича (53) согласно (2), (3), (29) и (38)–(40) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов  $\mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  (2)–(4), (15) от всех одновременно видимых  $J$  НКА равны [17, 18, 20, 25]:

$$F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) = F_\Sigma[t, \Theta_k, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)] = \mathbf{S}^T[t, \Theta_k, \mathbf{X}_k] \mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1} \left[ \Xi(t) - \frac{1}{2} \mathbf{S}[t, \Theta_k, \mathbf{X}_k] \right], \quad (54)$$

$$M_{ps}\{F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\} = \iint_{\Theta_k, \mathbf{X}_k} \{F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)\} \times p_{psl}(t, \mathbf{X}_k, \Theta_{jk}) d\Theta_k d\mathbf{X}_k, \quad (55)$$

где  $\Theta_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \dots, \Theta_{jk}, \dots, \Theta_{Jk}]^T$  – вектор ДП для всей совокупности  $J$  одновременно видимых НКА.

Как известно, формула связи между производной по времени от ЛФП  $F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  (54) применительно к совокупности принимаемых ВОС-

сигналов  $\mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  от всех одновременно видимых  $J$  НКА и производной по времени от ЛФП  $F_j(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  применительно к ВОС-сигналу  $s_j(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  (16), принимаемому от какого-либо одного  $j$ -го НКА, имеет вид [25]

$$F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k) = \sum_{j=1}^J F_j(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k), \quad (56)$$

где согласно (1)–(3) и (54)

$$F_j(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) = F_j[t, \Theta_{jk}, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)] = s_j(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) b_{jj}^{-1} \left[ \xi_j(t) - \frac{1}{2} s_j(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) \right].$$

Уравнение Стратоновича (53) для совместной АПВ  $p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  на  $k$ -м такте в соответствии с (38) имеет аналитическое решение [17–19]:

$$p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) = C_1 p_{ps}(t_k, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_\Sigma(\tau, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (57)$$

где

$$C_1 = \left[ \iint_{\Theta_k, \mathbf{X}_k} p_{ps}(t_k, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) \times \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_\Sigma(\tau, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\Theta_k d\mathbf{X}_k \right]^{-1}$$

– нормировочный коэффициент,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Начальное значение  $p_{ps}(t_k, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  для (57) представляет собой совместную АПВ оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$ , полученную после второго этапа обработки на предыдущем такте, т.е. в момент времени  $t_k + 0$ .

Искомая совместная АПВ оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте  $[t_k, t_{k+1})$ , т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , применительно к  $j$ -му НКА согласно (57) равна

$$p_{psl}(t_{k+1} - 0, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) = C_1 p_{ps}(t_k, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) \times \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1} - 0} F_\Sigma(\tau, \Theta_k, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (58)$$

где  $F_\Sigma(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  определяется выражением (54);  $j = \overline{1, J}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$

В соответствии с формулой связи между АПВ и АСР (50) на основании уравнения Стратоновича для АПВ  $p_{psl}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  (53) находим, что уравнение Стратоновича применительно к  $j$ -му НКА

для соответствующего АСР  $w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k)$  на первом этапе потактовой обработки может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k)}{\partial t} = [F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Sigma \Theta X}(t)]w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k), \quad (59)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

В уравнении (59) производная по времени от парциального ( $i$ -го) ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующего значению ДП  $\Theta_{jk} = \vartheta_i$ )  $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$  и ее апостериорное среднее  $F_{\Sigma \Theta X}(t)$  в соответствии с (38), (50), (54) и (55) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов  $\mathbf{S}(t, \Theta_k, \mathbf{X}_k)$  (2)–(4), (15) от всех одновременно видимых  $J$  НКА имеют вид [17–20, 25]:

$$F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) \triangleq F_{\Sigma} [t, \Theta_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)] = \mathbf{S}^T(t, \Theta_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k) \times \quad (60)$$

$$\times \mathbf{B}_{\Xi \Xi}^{-1} \left[ \Xi(t) - \frac{1}{2} \mathbf{S}(t, \Theta_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k) \right],$$

$$F_{\Sigma \Theta X}(t) \triangleq M_{psX_k, \Theta_k} \{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\} = \int_{\mathbf{X}_k} \sum_{i=1}^M F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k. \quad (61)$$

Уравнение (59) справедливо там, где  $d\Theta(t)/dt = 0$  (34), т.е. для всех  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Соотношение для  $i$ -го АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  в точках разрыва между соседними тактами, т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , когда происходит возможная смена состояний компонент вектора ДП  $\Theta(t_{k+1} + 0)$ , определяется (49).

Отметим, что в (49) не учитываются (как малые) разрывы 1-го рода выборки  $\mathbf{X}_k$ , обусловленные аппроксимацией вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  на каждом такте квазислучайным процессом (38).

Решение уравнения Стратоновича для  $i$ -го АСР применительно к  $j$ -му НКА на первом этапе обработки  $w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k)$  (59) имеет вид [20, 25]

$$w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k) = C_2 w_{ips}(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (62)$$

где

$$C_2 = \left[ \int_{\mathbf{X}_k} \sum_{i=1}^M w_{ips}(t_k, \mathbf{X}_k) \times \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\mathbf{X}_k \right]^{-1}$$

– нормировочный коэффициент;  $i = \overline{1, M}$ ;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Начальным значением для (62) является АСР  $w_{ips}(t_k, \mathbf{X}_k)$ , которое получено в конце второго этапа обработки на предыдущем такте, т.е. на  $(k-1)$ -м.

В соответствии с (62)  $i$ -е АСР  $w_{ips1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , равно

$$w_{ips1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) = C_2 w_{ips}(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}, \quad (63)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

### 3.2. Второй этап обработки

Второй этап обработки характерен тем, что вычисления производятся в дискретном времени в точках перехода от одного такта к другому, т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , когда происходит возможная смена состояний компонент вектора ДП  $\Theta(t_{k+1} + 0)$ .

Цель вычислений при этом состоит в том, чтобы на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , применительно к  $j$ -му НКА получить соотношения, характеризующие совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1})$  или соответствующую совокупность АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$ , где  $i = \overline{1, M}$ , оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ .

Чтобы получить искомые соотношения на втором этапе обработки, рассмотрим совместную АПВ

$$p_2 \triangleq p(t_{k+1}, \Theta_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}, \Theta_k, \mathbf{X}_k | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}+0})$$

для двух соседних дискретных моментов времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$  [20, 26].

С учетом (51) совместная АПВ  $p_2$  согласно теореме умножения может быть представлена в следующем виде:

$$p_2 = p(t_{k+1}, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1} | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}+0}, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) \times \times p(t_{k+1} - 0, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}+0}) = v_{\Theta} v_X p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k), \quad (64)$$

где

$$v_{\Theta} = v(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk}) \triangleq p(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)} | t_{k+1} - 0, \Theta_{jk})$$

и

$$v_X = v(\mathbf{X}_{k+1} | \mathbf{X}_k) \triangleq p(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) \quad (65)$$

– плотности вероятностей переходов (ПВП) случайных процессов  $\Theta_j(t)$  и  $\mathbf{X}(t)$ .

При получении (64) учитывали, что процессы  $\Theta_j(t)$  и  $\mathbf{X}(t)$  априорно независимы, а совместный случайный процесс  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  в дискретные моменты времени  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) представляет собой марковскую последовательность.

Проинтегрировав обе части равенства (64) по всем областям существования процессов  $\Theta_{jk}$  и  $\mathbf{X}_k$ , находим

$$p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\Theta_{jk}} \int_{\mathbf{X}_k} v_{\Theta} v_X p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k) d\Theta_{jk} d\mathbf{X}_k, \quad (66)$$

где

$$p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1}) \triangleq p(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1} | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}+0})$$

– искомая совместная АПВ на втором этапе обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Соотношение (66) представляет собой рекуррентное уравнение Стратоновича, которое позволяет при заданном начальном распределении вычислять совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1}, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1})$  на втором этапе обработки  $k$ -го такта, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , последовательно для  $k = 0, 1, 2, \dots$

Входящие в (66) ПВП  $v_{\Theta}$  и  $v_X$  определяются моделями ДП  $\Theta_{jk}$  (35) и вектора НП  $\mathbf{X}_k$  (37), а совместная АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$  вычисляется согласно (58) в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$  при обработке принимаемых ВОС-сигналов  $s_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$  (см. (16)), на первом этапе.

Для дискретного процесса  $\Theta_j(t)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , формула связи между ПВП  $v(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk})$  и соответствующими вероятностями перехода (35) имеет вид [18, 20]

$$v_{\Theta} = v(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk}) = \begin{cases} v_1(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk} = \vartheta_1) = \sum_{l=1}^M \pi_{1l}(t_{k+1}) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_l) \text{ при } \Theta_{jk} = \vartheta_1, \\ v_2(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk} = \vartheta_2) = \sum_{l=1}^M \pi_{2l}(t_{k+1}) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_l) \text{ при } \Theta_{jk} = \vartheta_2, \\ v_i(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk} = \vartheta_i) = \sum_{l=1}^M \pi_{il}(t_{k+1}) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_l) \text{ при } \Theta_{jk} = \vartheta_i, \\ v_M(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk} = \vartheta_M) = \sum_{l=1}^M \pi_{Ml}(t_{k+1}) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_l) \text{ при } \Theta_{jk} = \vartheta_M, \end{cases} \quad (67)$$

где  $i = \overline{1, M}$ .

Далее получим основное соотношение для вычисления АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_{k+1}^T, \Theta_{j(k+1)}]^T$  на втором этапе обработки ВОС-сигналов  $s_j(t)$  на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ .

Выражение (66), характеризующее совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1})$ , с учетом формулы связи между АПВ и АСР (50) для момента времени  $t_{k+1} + 0$  принимает вид

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_X \left[ \int_{\Theta_{jk}} v_{\Theta} \sum_{m=1}^M w_{m ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) \times \delta(\Theta_{jk} - \vartheta_m) d\Theta_{jk} \right] d\mathbf{X}_k. \quad (68)$$

Согласно (67) формула связи между ПВП  $v_{\Theta} = v(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk})$  и вероятностями перехода (35) при  $\Theta_{jk} = \vartheta_m$  характеризуется следующим выражением:

$$v_{\Theta m} = v(\Theta_{j(k+1)} | \Theta_{jk} = \vartheta_m) = \sum_{l=1}^M \pi_{ml}(t_{k+1}) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_l). \quad (69)$$

С учетом (69) для совместной АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1})$ , внося ПВП  $v_{\Theta}$  в (68) под знак суммы, находим:

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_X \left\{ \int_{\Theta_{jk}} \sum_{m=1}^M \left[ \sum_{l=1}^M \pi_{ml}(t_{k+1}) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_l) \right] \times w_{m ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_{jk} - \vartheta_m) d\Theta_{jk} \right\} d\mathbf{X}_k. \quad (70)$$

На втором этапе обработки в точках возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$ , т.е. в моменты времени  $t_{k+1} + 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , для АСР согласно (49) выполняется соотношение

$$w_{ips\text{ПРДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) w_{m\text{ps}1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k), \quad (71)$$

где  $w_{ips\text{ПРДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$  – промежуточное АСР, которое учитывает на втором этапе обработки на  $k$ -м такте воздействие только одного фактора: возможную смену состояния ДП  $\Theta_{jk}$  в момент времени  $t_{k+1} + 0$ .

После преобразований запишем формулу (70), определяющую совместную АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1})$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_{k+1}^T, \Theta_{j(k+1)}]^T$  на втором этапе обработки ВОС-сигналов  $s_j(t)$  на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , с учетом (71) в следующем виде:

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \Theta_{j(k+1)}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} \times \sum_{i=1}^M w_{ips\text{ПРДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) \delta(\Theta_{j(k+1)} - \vartheta_i) d\mathbf{X}_k. \quad (72)$$

Далее, выразив левую часть (72) по формуле связи между АПВ и АСР (50) и проинтегрировав обе части этого равенства по всей области существования ДП  $\Theta_{j(k+1)}$ , получаем:

$$\sum_{i=1}^M w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^M \left[ \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{ips\text{ПРДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \right], \quad (73)$$

где  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  – итоговое АСР на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, которое учитывает воздействие обоих факторов: возможную смену состояния ДП  $\Theta_{jk}$  в момент времени  $t_{k+1} + 0$  и априорное изменение на  $k$ -м такте вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$ .

Полученное равенство выполняется для любого члена суммы.

В соответствии с (72) и (73) находим, что окончательное соотношение, представляющее собой рекуррентное уравнение Стратоновича для итогового АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки ВС  $[\mathbf{X}_{k+1}^T, \Theta_{j(k+1)}]^T$  применительно к  $j$ -му НКА на вто-

ром этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , имеет вид

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{ips\text{ПРДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (74)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}$ .

Входящее в (74) АСР  $w_{ips\text{ПРДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$  характеризуется согласно (71).

Итоговая формула (74) позволяет при известном начальном распределении последовательно для  $k = 0, 1, 2, \dots$  вычислить АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  выборки ВС  $[\mathbf{X}_{k+1}^T, \Theta_{j(k+1)}]^T$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , и на этой основе получить искомые оптимальные оценки вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  и ДП  $\Theta_{jki}$ .

#### 4. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СИНТЕЗА С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРА НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Чтобы на основе метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП (51) сформировать оптимальные оценки  $\hat{\Theta}_{jk}$  и  $\hat{\mathbf{X}}_k$ , опираясь на соотношения для АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  (63), (71) и (74), получим выражения, характеризующие АВ  $P_{ips}(t)$  и условные АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | \Theta_{jk})$  на первом и втором этапах обработки принимаемых ВОС-сигналов.

##### 4.1. Алгоритмы первого этапа обработки

###### А. Апостериорные вероятности состояния дискретного процесса $\Theta_{jk}$

Уравнение для АВ  $P_{ips}(t)$  состояния дискретного процесса  $\Theta_{jk}$  на первом этапе обработки может быть получено на основании уравнения Стратоновича для АСР  $w_{ips1}(t, \mathbf{X}_k)$  (59).

Подставив (51) с учетом (46) в (59) и выполнив интегрирование обеих частей равенства по всей области существования  $\mathbf{X}_k$ , находим

$$\int_{\mathbf{X}_k} \frac{\partial}{\partial t} [P_{ips}(t) p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k | j, i)] d\mathbf{X}_k = \int_{\mathbf{X}_k} F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Sigma \Theta X}(t) P_{ips}(t) p_{ps1}(t, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k, \quad (75)$$

где  $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$  и  $F_{\Sigma \Theta X}(t) \triangleq M_{p_{\Sigma \mathbf{X}_k, \Theta_k}} \{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\}$  определяются согласно (60) и (61) соответственно.

Учитывая в (75) условие нормировки

$$\left( \int_{\mathbf{X}_k} p_{psl}(t, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k = 1 \right)$$

и вынося за знак интеграла сомножитель, который не зависит от  $\mathbf{X}_k$ , получим

$$\frac{\partial P_{ips}(t)}{\partial t} = [M_{ps\mathbf{X}_k} \{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\} - F_{\Sigma \Theta X}(t)] P_{ips}(t), \quad (76)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $i = \overline{1, M}$  и принято обозначение

$$M_{ps\mathbf{X}_k} \{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\} \triangleq \int_{\mathbf{X}_k} F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) p_{psl}(t, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k. \quad (77)$$

Начальные условия для уравнения (76)  $P_{ips}(t_k + 0)$  формируются на втором этапе обработки предыдущего  $(k - 1)$ -го такта, т.е. в момент времени  $t = t_k + 0$ . Они рассчитываются на основании (49) и представлены среди алгоритмов второго этапа обработки.

Дифференциальные уравнения (76) имеют аналитическое решение.

Применив к уравнению (76) метод разделения переменных, получим

$$\int_{t_k}^t \frac{\partial P_{ips}}{P_{ips}} = \int_{t_k}^t [M_{ps\mathbf{X}_k} \{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\} - F_{\Sigma \Theta X}(t)] d\tau + c.$$

Выполнив потенцирование, находим

$$P_{ips}(t) = c \exp \left\{ \int_{t_k}^t [M_{ps\mathbf{X}_k} \{F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)\} - F_{\Sigma \Theta X}(t)] d\tau \right\}, \quad (78)$$

где  $c = P_{ips}(t_k + 0)$ .

С учетом условия нормировки

$$\left( \sum_{i=1}^M P_{ips}(t) = 1 \right)$$

соотношение (78), характеризующее АВ  $P_{ips}(t)$  состояния ДП  $\Theta_{jk}$  на первом этапе обработки, окончательно принимает вид

$$P_{ips}(t) = \frac{P_{ips}(t_k + 0) \exp\{\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t)\}}{\sum_{l=1}^M P_{ips}(t_k + 0) \exp\{\Phi_{\mathbf{X}_k l}(t)\}}, \quad (79)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t) \triangleq \int_{t_k}^t M_{ps\mathbf{X}_k} \{F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k)\} d\tau \quad (80)$$

– усредненный по  $\mathbf{X}_k$  парциальный ( $i$ -й) ЛФП вектора НП  $\mathbf{X}_k$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Входящая в  $\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t)$  (80) функция  $F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k)$  вычисляется в соответствии с (60), а ее усредненное по  $\mathbf{X}_k$  значение  $M_{ps\mathbf{X}_k} \{F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}_k)\}$  определяется согласно (77).

Начальное условие для (79)  $P_{ips}(t_k + 0)$  определяется на втором этапе обработки на предыдущем  $(k - 1)$ -м такте.

При формировании оптимальной оценки ДП  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$  на  $k$ -м такте все АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , вычисляются в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Поскольку в течение всего полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$  ДП  $\Theta_j(t)$  не меняет своего значения, то к окончанию полуинтервала точность оценивания АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  ДП  $\Theta_j(t)$  максимальна.

Таким образом, на  $k$ -м такте в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), на основе (42) в соответствии с (79) формируются оптимальные оценки ДП  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

*Б. Условные и безусловная апостериорные плотности вероятности выборки вектора непрерывных процессов  $\mathbf{X}_k$*

При разработке оптимальных алгоритмов приема ВОС-сигналов на основе метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}_k$  согласно (51) необходимо на первом этапе обработки вычислить условные АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$  (46), где  $i$  – состояние ДП  $\Theta_{jk}$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $j$  – номер НКА;  $j = \overline{1, J}$ ;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Получим уравнение Стратоновича для условной АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$  (46).

Подставив (51) в уравнение Стратоновича для АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  (59), получим

$$\frac{\partial [P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)]}{\partial t} = [F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Sigma \Theta X}(t)] [P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)], \quad (81)$$

где функции  $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$  и  $F_{\Sigma \Theta X}(t)$  определяются (60) и (61) соответственно.

На основании (81) с учетом (76) можем записать

$$\begin{aligned} & [M_{psX_k} \{F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)\} - F_{\Sigma_{\Theta X}}(t)] \times \\ & \times P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i) + P_{ips}(t) \frac{\partial p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)}{\partial t} = \\ & = [F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Sigma_{\Theta X}}(t)] [P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)]. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $P_{ips}(t) \neq 0$ , получим

$$\begin{aligned} & [M_{psX_k} \{F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)\} - F_{\Sigma_{\Theta X}}(t)] p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i) + \\ & + \frac{\partial p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)}{\partial t} = \end{aligned} \quad (82)$$

$$= [F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k) - F_{\Sigma_{\Theta X}}(t)] p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i).$$

Таким образом, уравнение Стратоновича для условной АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$  на первом этапе обработки для  $k$ -го такта согласно (82) после преобразований окончательно принимает вид

$$\frac{\partial p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)}{\partial t} = \quad (83)$$

$$= [F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k) - M_{psX_k} \{F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)\}] p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i),$$

где функции  $F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)$  и  $M_{psX_k} \{F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)\}$  определяются согласно (60) и (77) соответственно;  $j = \overline{1, J}$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Число уравнений Стратоновича (83) равно числу возможных состояний ДП  $\Theta_{jk}$ , т.е. равно  $M$ .

Начальное условие  $p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  для уравнения Стратоновича (83) вычисляется в конце второго этапа обработки (т.е. в момент  $t = t_k + 0$ ) на предыдущем  $(k - 1)$ -м такте  $[t_{k-1}, t_k)$ .

Подставив (51) в соотношение (71), получим, что условная АПВ  $p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  характеризуется следующим выражением:

$$\begin{aligned} & p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \\ & = \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k | j, m)}{P_{ips}(t_k + 0)}, \end{aligned} \quad (84)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$

Согласно (84) находим, что начальное условие  $p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  для уравнения Стратоновича (83) окончательно имеет вид

$$\begin{aligned} & p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \\ & = \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k | j, m)}{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0)}, \end{aligned} \quad (85)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$

Уравнение Стратоновича (83) для условной АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$  имеет аналитическое решение.

Процедура решения уравнения Стратоновича (83) для условной АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$  во многом подобна процедуре решения уравнения (76) для АВ  $P_{ips}(t)$ .

Применив к уравнению (83) метод разделения переменных и проинтегрировав обе части полученного равенства, можем записать

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^t \frac{\partial p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)}{p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)} = \\ & = \int_{t_k}^t [F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k) - M_{psX_k} \{F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k)\}] d\tau + c, \end{aligned} \quad (86)$$

где видно, что

$$\int_{t_k}^t \frac{\partial p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)}{p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)} = \ln p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i).$$

Выполнив потенцирование (86) и вычислив постоянную интегрирования  $c$ , находим, что с учетом выполнения условия нормировки —

$$\int_{\mathbf{X}_k} p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k = 1$$

решение уравнения Стратоновича (83) для условной АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$  имеет вид

$$\begin{aligned} & p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i) = \\ & = \frac{p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}}{\int_{\mathbf{X}_k} p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) \exp \left\{ \int_{t_k}^t F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\mathbf{X}_k}, \end{aligned} \quad (87)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ;  $i = \overline{1, M}$ ;  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , равна

$$\begin{aligned} & p_{ps}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \\ & = \frac{p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\}}{\int_{\mathbf{X}_k} p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau \right\} d\mathbf{X}_k}, \end{aligned} \quad (88)$$

где начальное условие  $p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  для (88) определяется согласно (85); производная по времени от парциального ( $i$ -го) ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующего значению ДП  $\Theta_k = \{\vartheta_i\}$ )  $F_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)$  характеризуется выражением (60);  $j = \overline{1, J}$ ;

$i = \overline{1, M}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Сам парциальный ЛФП  $\Phi_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k)$ , представляющий собой вектор-столбец размером  $(n \times 1)$ , записывается в виде

$$\Phi_{\Sigma_i}(t, \mathbf{X}_k) = \int_{t_k}^t F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}_k) d\tau.$$

Условная (по  $\Theta_j(t)$ ) АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}|j, i)$  вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  в точках  $t_k + 0$  возможной смены состояний ДП  $\Theta_j(t)$  согласно (85) терпит разрывы первого рода, что является особенностью алгоритмов с переприсвоением параметров вектора НП (в сравнении с алгоритмами с обратными связями по ДП). По этой причине возникает необходимость пересчета в моменты времени  $t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) условных АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}|j, i)$ , где  $j = \overline{1, J}$ ,  $i = \overline{1, M}$ , с учетом новых для каждого последующего такта начальных условий (85). Необходимость такого пересчета и обуславливает название этих алгоритмов обработки оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  алгоритмами с потактовым переприсвоением значений параметров условных АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}|j, i)$  вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

Заметим, что, как видно из рассмотрения соотношений (79), (80) и (84), даже в случае априорно независимых  $\Theta_j(t)$  и  $\mathbf{X}(t)$ , апостериорно они являются статистически взаимосвязанными.

Получим формулу связи между безусловной АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k)$  и условными АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k|j, i)$  (87) выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$ .

Видно, что применительно к  $j$ -му НКА АСР  $w_{ips}(t, \mathbf{X}_k)$  оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  на каждом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , в соответствии с (43), (44), (50) и (51) может быть представлено в виде

$$w_{ips}(t, \mathbf{X}_k) = p_{ps}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t|\mathbf{X}_k) = P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k|j, i), \tag{89}$$

где  $j = \overline{1, J}$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

Просуммировав обе части равенства (89) по всем значениям  $i$ , находим

$$\sum_{i=1}^M p_{ps}(t, \mathbf{X}_k) P_{ips}(t|\mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k|j, i). \tag{90}$$

Вынося в соотношении (90) АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k)$  за знак суммы и учитывая условие нормировки ( $\sum_{i=1}^M P_{ips}(t|\mathbf{X}_k) = 1$ ) получим, что формула, определяющая безусловную АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k)$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$ , имеет вид

$$p_{ps}(t, \mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t) p_{ps}(t, \mathbf{X}_k|j, i), \tag{91}$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $j = \overline{1, J}$ ;  $P_{ips}(t)$  и  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k|j, i)$  определяются согласно (79) и (87) соответственно.

Покажем, что безусловная АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k)$  (91) непрерывна на всей оси времени  $t$ , т.е.

$$p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k) = p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k). \tag{92}$$

Для момента времени  $t = t_k + 0$  согласно (91) запишем

$$p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_k + 0) p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k|j, i). \tag{93}$$

Подставив (84) в (93), имеем

$$p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_k + 0) \times \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k|j, m)}{P_{ips}(t_k + 0)}. \tag{94}$$

Изменив порядок суммирования в (94) и вынося за знак суммы множитель, который не зависит от  $i$ , находим

$$p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{i=1}^M \{P_{ips}(t_k + 0)\} \frac{\pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k|j, m)}{P_{ips}(t_k + 0)} \right\} = \sum_{m=1}^M P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k|j, m) \sum_{i=1}^M \pi_{mi}(t_k).$$

С учетом условия нормировки ( $\sum_{i=1}^M \pi_{mi}(t_k) = 1$ ) в соответствии с (91) получим, что равенство (92) выполняется:

$$p_{ps}(t_k + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{m=1}^M P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k|j, m) = p_{ps}(t_k - 0, \mathbf{X}_k).$$

4.2. Алгоритмы второго этапа обработки

На втором этапе обработки на  $k$ -м такте применительно к  $j$ -му НКА каждое АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$ , где  $i = \overline{1, M}$ , оцениваемого ВС  $[\mathbf{X}_k^T, \Theta_{jk}]^T$  формируется под воздействием двух факторов. Один фактор, определяемый формулой (74), учитывает априорное изменение на  $k$ -м такте вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$  в соответствии с (37). Другой фактор обусловлен возможной сменой состояния ДП  $\Theta_{jk}$  на  $k$ -м такте в момент времени  $t_{k+1} + 0$  согласно (71).

Для удобства при выкладках на втором этапе обработки на  $k$ -м такте вводим в рассмотрение промежуточную условную АПВ  $p_{ps}$  пр НП  $(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ , которая учитывает только один фактор – априорное изменение на  $k$ -м такте вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$ . Итоговая на втором этапе обработки на  $k$ -м такте условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  учитывает воздействие обоих факторов.

В ряде случаев при вычислениях удобнее рассматривать другую промежуточную условную АПВ  $p_{ps}$  пр дп  $(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ , которая учитывает тоже только один, но второй фактор – возможную смену состояния ДП  $\Theta_{jk}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте. Итоговая на втором этапе обработки на  $k$ -м такте условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  учитывает воздействие обоих факторов. Естественно, что итоговые соотношения на втором этапе обработки для обоих вариантов представления условных АПВ эквивалентны друг другу. Аналогичные соотношения при необходимости вводятся в рассмотрение и для соответствующих АСР.

При использовании метода синтеза с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}_k$  выражение для АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t_{k+1} + 0$ , согласно (51) имеет вид

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i). \quad (95)$$

Применительно к методу синтеза с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}_k$  на основании формул (71) и (74), используя разложение АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  (95), получим соотношения для АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  и условных АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте.

Соотношение (71) с учетом (51), (63) и (95) может быть представлено в виде

$$P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i). \quad (96)$$

Проинтегрировав обе части (96) по всей области существования  $\mathbf{X}_k$ , получим

$$\int_{\mathbf{X}_k} P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k = \int_{\mathbf{X}_k} \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k.$$

Вынося сомножители, которые не зависят от  $\mathbf{X}_k$ , за знак интеграла, с учетом выполнения условия нормировки

$$\int_{\mathbf{X}_k} p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k = 1$$

находим

$$P_{ips}(t_{k+1} + 0) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0), \quad (97)$$

где  $i = \overline{1, M}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Формула (97) отражает изменение АВ  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  на втором этапе обработки за счет возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$  в момент  $t_{k+1} + 0$ .

Выражение (97) представляет собой начальное условие для расчета соответствующих АВ  $P_{ips}(t)$  согласно (79) ДП  $\Theta_j(t)$  на первом этапе обработки следующего, т.е.  $(k + 1)$ -го такта.

Рассмотрим условные АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ , где  $j = \overline{1, J}$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Сначала оценим влияние только одного фактора за счет возможной смены состояния ДП  $\Theta_j(t)$  на условные АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ . Подставив (97) в (96), запишем

$$\left[ \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) \right] p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i). \quad (98)$$

Согласно (98) получим

$$p_{ps \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)}{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0)}, \quad (99)$$

где

$$p_{ps \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) \triangleq p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$$

– промежуточная условная АПВ, которая учитывает на втором этапе обработки воздействие только одного фактора: возможную смену состояния ДП  $\Theta_j(t)$  в момент  $t = t_{k+1} + 0$ .

Далее рассмотрим влияние на условные АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  также и другого фактора на втором этапе обработки, т.е. оценим их изменение за счет априорного изменения вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$  в соответствии с (37) на  $k$ -м такте в момент  $t = t_{k+1} + 0$ .

Подставив разложение АСР (51) и (95) в рекуррентное уравнение Стратоновича (74), находим

$$P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k.$$

После преобразований с учетом того, что  $P_{ips}(t_{k+1} + 0) \neq 0$ , выражение для итоговых условных АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте в момент  $t = t_{k+1} + 0$  может быть записано в следующем виде:

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k, \quad (100)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ,  $i = \overline{1, M}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Итоговая безусловная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент  $t_{k+1} + 0$ , согласно формуле связи (91) с соответствующими итоговыми условными АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (100), характеризуется следующим выражением:

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i), \quad (101)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  определяется согласно (97);  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $j = \overline{1, J}$ .

Таким образом, полученные аналитические соотношения для АВ  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  (79) и для итоговой безусловной АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  (101) поз-

воляют найти в соответствии с правилами (41) и (42) на каждом такте оптимальные оценки  $\hat{\Theta}_j(t_{k+1} - 0)$  и  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ .

Для алгоритмов обработки с переписыванием параметров получим соотношения, определяющие условные АПВ (и соответствующие им АСР), эквивалентные (99) и (100), но в которых факторы, характеризующие воздействие изменений ДП и НП на втором этапе обработки, отражались в противоположном порядке. В связи с этим рассмотрим промежуточную условную АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ , которая учитывает на втором этапе обработки только один фактор – априорное изменение на  $k$ -м такте вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$ .

Итоговая условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  на втором этапе обработки учитывает воздействие обоих факторов. Применительно к  $j$ -му НКА итоговая условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте в момент времени  $t_{k+1} + 0$  характеризуется соотношением (100).

В соответствии с (100) при учете (74) и (89) выражение для соответствующих итоговых АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  применительно к  $j$ -му НКА на втором этапе обработки для метода синтеза с переписыванием параметров имеет вид

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{ips \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (102)$$

где  $w_{ips \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$  – промежуточное АСР, которое учитывает возможную смену состояния ДП  $\Theta_{jk}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте в момент времени  $t_{k+1} + 0$ ;  $i = \overline{1, M}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Промежуточное АСР  $w_{ips \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$  применительно к  $j$ -му НКА определяется на основе (71) и имеет вид

$$w_{ips \text{ ПР ДП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k), \quad (103)$$

где АСР  $w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)$  характеризуется согласно (63),  $i = \overline{1, M}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Соответствующая промежуточная условная АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  определяется согласно (97) и (99).

Далее преобразуем (102) и (103) так, чтобы сформировать другое промежуточное АСР  $w_{ips \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k)$ , учитывающее только априорное изменение вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$  на  $k$ -м такте. Подставив (103) в (102) и вынося за знак

интеграла сомножитель, который не зависит от  $\mathbf{X}_k$ , получим

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) \times \left[ \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \right]. \quad (104)$$

Формула (104) при использовании метода синтеза с переприсвоением параметров согласно (89) после преобразований может быть записана в виде

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) \times \left[ \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, m) d\mathbf{X}_k \right] = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) \times \left[ \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, m) d\mathbf{X}_k \right], \quad (105)$$

где учтено, что

$$w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) = P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, m).$$

Выражение в квадратных скобках в (105) представляет собой промежуточную условную АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m)$ , учитывающую только априорное изменение на  $k$ -м такте вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$ . С учетом этого (105) для итогового АСР принимает вид

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) \times p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m), \quad (106)$$

где

$$p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, m) d\mathbf{X}_k \quad (107)$$

— промежуточная условная АПВ.

Промежуточная безусловная АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте согласно формуле связи (91) с соответствующими промежуточными условными

АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (107) характеризуется следующей формулой:

$$p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} + 0) p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i), \quad (108)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  определяется согласно (97);  $k = 0, 1, 2, \dots; j = \overline{1, J}$ .

Видно, что согласно (89) применительно к (106) можно записать

$$w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m).$$

Тогда выражение для итогового АСР  $w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  (106) применительно к  $j$ -му НКА на втором этапе обработки на  $k$ -м такте в момент времени  $t_{k+1} + 0$  окончательно принимает вид

$$w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}), \quad (109)$$

где  $w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$  — промежуточное условное АСР, учитывающее только априорное изменение на  $k$ -м такте вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$ ;  $i = \overline{1, M}, k = 0, 1, 2, \dots$

Получим формулу промежуточного условного АСР  $w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$ , которое учитывает априорное изменение вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте.

Подставив в (108) соотношение (107), находим, что промежуточное условное АСР  $w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$  может быть представлено в виде

$$w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = P_{mps}(t_{k+1} - 0) \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, m) d\mathbf{X}_k.$$

После преобразования этого выражения с учетом (105) находим, что окончательное выражение, характеризующее промежуточное АСР  $w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1})$ , которое учитывает априорное изменение вектора НП от  $\mathbf{X}_k$  до  $\mathbf{X}_{k+1}$  на втором этапе обработки на  $k$ -м такте, применительно к  $j$ -му НКА записывается как

$$w_{mps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1}) = \int_{\mathbf{X}_k} v_{\mathbf{X}} w_{mps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (110)$$

где  $i = \overline{1, M}, k = 0, 1, 2, \dots$

Итоговая условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  в соответствии с (95) и (109) может быть представлена в следующем виде:

$$p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) = \frac{w_{ips}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})}{P_{ips}(t_{k+1} + 0)} = \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps\text{ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m)}{P_{ips}(t_{k+1} + 0)}, \quad (111)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  и  $p_{ps\text{ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m)$  рассчитываются согласно (97) и (107).

Реализация полученных оптимальных алгоритмов практически затруднена, так как требует знания АПВ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ . Как обычно, в таких случаях истинное АПВ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  аппроксимируется гауссовским законом. Особенностью применения метода гауссовской аппроксимации применительно к алгоритмам с переприсвоением параметров вектора НП является то, что гауссовским законом [14–19] аппроксимируются условные по ДП  $\Theta(t)$  АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (100).

### 5. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРА НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

С целью повышения конструктивности синтезированных оптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов, как обычно, приме-

ним метод гауссовской аппроксимации и получим квазиоптимальные оценки ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t_k)]^T$  [14–19].

Особенностью применения метода гауссовской аппроксимации в случае алгоритмов с переприсвоением является то, что нормальным законом описываются условные АПВ  $p_{ps}(t, \mathbf{X}_k | j, i)$ , где  $j = \overline{1, J}, i = \overline{1, M}$ .

#### 5.1. Квазиоптимальные алгоритмы первого этапа обработки

Применяя метод гауссовской аппроксимации [17–19], полагаем, что условные АПВ  $p_{ps1}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$ , характеризующиеся (88), в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, при  $t = t_{k+1} - 0$ , описываются кривой Гаусса и имеют вид

$$p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0); \mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_{k+1} - 0)\right\} = \left[(2\pi)^n \det \mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_{k+1} - 0)\right]^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0)\right]^T \mathbf{K}_{j,i}^{-1} \times (\mathbf{X}_k | t_{k+1} - 0) \left[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0)\right]\right\}, \quad (112)$$

где

$$p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i) \triangleq p_1^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | \Xi_{t_0}^{t_{k+1}-0}; \Theta_{jk} = \vartheta_j; j - \text{номер НКА}); \quad (113)$$

$$\mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) \triangleq \mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0; \Theta_{jk} = \vartheta_j) = M_{psj,il} \{\mathbf{X}_k\} = \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k$$

— условная (по ДП  $\Theta_{jk}$ ) квазиоптимальная оценка выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  (первый момент условной АПВ) в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , при приеме ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) от  $j$ -го НКА;

$$\mathbf{K}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) \triangleq \mathbf{K}(t_k | t_{k+1} - 0; \Theta_{jk} = \vartheta_j; j - \text{номер НКА}) = M_{psj,il} \left\{ \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0) \right] \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0) \right]^T \right\} = \int_{\mathbf{X}_k} \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0) \right] \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0) \right]^T p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k \quad (114)$$

— матрица ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0) \right]$  (второй момент условной АПВ) в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент вре-

мени  $t = t_{k+1} - 0$ , при приеме ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) от  $j$ -го НКА;  $\mathcal{N}$  — символ гауссовского распределения;  $\mathbf{X}_k^*$  — квазиоптимальная оценка вектора НП  $\mathbf{X}_k$ ;  $j = \overline{1, J}, i = \overline{1, M}$ .

Согласно постановке задачи вектор НП  $\mathbf{X}_k$  является гауссовским (37), поэтому при выполнении требования гауссовской аппроксимации (112) условная АПВ на втором этапе обработки на предыдущем, т.е.  $(k - 1)$ -м такте,  $p_{ps}^*(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$ , входящая в (88) в качестве начального условия, также является гауссовской [18]:

$$p_{ps}^*(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) = \mathcal{N} \left\{ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_k + 0); \mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_k + 0) \right\}, \quad (115)$$

где  $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_k + 0)$  – условная (по ДП  $\Theta_{jk}$ ) квазиоптимальная оценка выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце второго этапа обработки на предыдущем  $(k - 1)$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_k + 0$ , при приеме ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) от  $j$ -го НКА;  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_k + 0)$  – матрица ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_k + 0)]$  в конце второго этапа обработки на предыдущем  $(k - 1)$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_k + 0$ , при приеме ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) от  $j$ -го НКА.

При использовании метода гауссовской аппроксимации условные АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  полностью описываются первыми двумя моментами.

Следуя по существу [18], в соответствии с уравнением Стратоновича (83) применительно к (37)–(39) в гауссовском приближении первого порядка для первых двух моментов условной АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  получим соответствующие рекуррентные соотношения.

Условная квазиоптимальная оценка (1-й момент условной АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$ ) согласно (83), (112) и (113) в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , характеризуется следующим рекуррентным соотношением [18]:

$$\mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) = \mathbf{X}' + \mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_{k+1} - 0) \int_{t_k}^{t_{k+1} - 0} \left[ \frac{\partial F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}')}{\partial \mathbf{X}'} \right]^T d\tau, \quad (116)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &\triangleq \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0) = \\ &= \mathbf{X}^*(t_k + 0 | \Theta_{jk} = \vartheta_j; j - \text{номер НКА}) = \\ &= M_{psj,i} \{ \mathbf{X}_k \} = \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p_{ps}^*(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k \end{aligned} \quad (117)$$

– условная квазиоптимальная оценка выборки вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце второго этапа обработки

на предыдущем  $(k - 1)$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_k + 0$ , при приеме ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) от  $j$ -го НКА; функция  $F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}')$  в (116) определяется согласно (60);  $k = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, J}, i = \overline{1, M}$ .

Матрица ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания (2-й момент условной АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$ ) на основании (83), (112) и (114) в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , определяется рекуррентным соотношением вида [18]

$$\mathbf{K}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) = \left[ [\mathbf{K}']^{-1} - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}'} \right)^T \int_{t_k}^{t_{k+1} - 0} \frac{\partial F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}')}{\partial \mathbf{X}'} d\tau \right]^{-1}, \quad (118)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &\triangleq \mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0) = \\ &= \mathbf{K}(t_k + 0 | \Theta_{jk} = \vartheta_j; j - \text{номер НКА}) = \\ &= M_{psj,i} \{ [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}'] [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}']^T \} = \\ &= \int_{\mathbf{X}_k} [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}'] [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}']^T p_{ps}^*(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k \end{aligned} \quad (119)$$

– матрица ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_k + 0)]$  в конце второго этапа обработки на предыдущем  $(k - 1)$ -м такте, т.е. в момент времени  $t = t_k + 0$ , при приеме ВОС-сигнала  $s_j(t)$  (16) от  $j$ -го НКА; функция  $F_{\Sigma_i}(\tau, \mathbf{X}')$  в (118) определяется согласно (60);  $k = 0, 1, 2, \dots, j = \overline{1, J}, i = \overline{1, M}$ .

Отметим, что в (118) и далее производная от скалярной функции по вектору-столбцу всюду, как обычно, понимается как вектор-строка, а выражение  $(\partial/\partial \mathbf{X}')^T$  представляет собой дифференциальный оператор, действующий на функцию, расположенную от него справа.

Как видно из (116) и (118), в случае алгоритмов с переписыванием (в отличие от алгоритмов с обратными связями по ДП) для вычисления условных квазиоптимальных оценок  $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$  и матрицы ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_{k+1} - 0)$  знания АВ ДП  $\Theta_{jk}$  не требуется.

В случае алгоритмов с переписыванием функции условных квазиоптимальных оценок  $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$  (116) и матрицы ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k | t_{k+1} - 0)$  (118) на каждом такте по оси времени  $t$  терпят разрывы первого рода в моменты возможной смены состояния ДП  $\Theta_{jk}$ , т.е.  $t_k + 0$ , где

$k = 0, 1, 2, \dots$  По этой причине необходимо пере-  
считывать (переприсваивать) значения этих двух  
параметров условных АПВ  $p_{ps}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$   
(112) выборки вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

Чтобы получить на  $k$ -м такте начальные условия  
 $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$  и  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$  для уравне-  
ний (116) и (118), подставим в исходные определе-  
ния (113) и (114) выражение для начального значе-  
ния условной АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  (99):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) &= \\ &= \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p_{ps}^*(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k = \end{aligned} \quad (120)$$

$$= \int_{\mathbf{X}_k} \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}^*(t_k - 0, \mathbf{X}_k | j, m)}{P_{ips}(t_k + 0)} d\mathbf{X}_k;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) &= \int_{\mathbf{X}_k} \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) \right]^T \times \\ &\times p_{ps}^*(t_k + 0, \mathbf{X}_k | j, i) d\mathbf{X}_k = \\ &= \int_{\mathbf{X}_k} \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) \right]^T \times \\ &\times \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) p_{ps}^*(t_k - 0, \mathbf{X}_k | j, m)}{P_{ips}(t_k + 0)} d\mathbf{X}_k. \end{aligned} \quad (121)$$

Вынося в (120) и (121) за знак интеграла сомножи-  
тели, которые не зависят от  $\mathbf{X}_k$ , и учитывая усло-  
вие нормировки, после преобразований оконча-  
тельно получим, что начальные значения услов-  
ных квазиоптимальных оценок  $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$   
и матрицы ковариаций условных квазиоптималь-  
ных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$  для ре-  
куррентных соотношений (116) и (118) характери-  
зуются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) &= \\ &= \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) \mathbf{X}_{j,m}^*(t_k - 0 | t_{k+1} - 0)}{P_{ips}(t_k + 0)}, \end{aligned} \quad (122)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{j,m}^*(t_k - 0 | t_{k+1} - 0) &= \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p_{ps}^*(t_k - 0, \mathbf{X}_k | j, m) d\mathbf{X}_k; \\ \mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) &= \\ &= \sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0) \left\{ \mathbf{K}_{j,m}(t_k - 0 | t_{k+1} - 0) + \right. \\ &+ \left[ \mathbf{X}_{j,m}^*(t_k - 0 | t_{k+1} - 0) - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{X}_{j,m}^*(t_k - 0 | t_{k+1} - 0) - \mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0) \right]^T \left. \right\} \times \\ &\times P_{ips}^{-1}(t_k + 0), \end{aligned} \quad (123)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

Второе слагаемое в фигурных скобках в (123)  
характеризует факт, что условные квазиопти-  
мальные оценки  $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$  и матрицы ко-  
вариаций условных квазиоптимальных ошибок  
оценивания  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$  терпят разрывы  
первого рода в моменты  $t_k + 0$  возможной смены  
состояния ДП  $\Theta_{jk}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Хотя в рекуррентные соотношения (116) и (118)  
АВ  $P_{ips}(t)$  непосредственно не входят, тем не ме-  
нее согласно (122) и (123) в моменты  $t_k$  знание АВ  
 $P_{ips}(t)$  необходимо для пересчета начальных зна-  
чений  $\mathbf{X}_{j,i}^*(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$  и  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k + 0 | t_{k+1} - 0)$ .

Соответствующие соотношения для безуслов-  
ной квазиоптимальной оценки  $\mathbf{X}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$   
и безусловной матрицы ковариаций квазиопти-  
мальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$  в  
конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е.  
при  $t = t_{k+1} - 0$ , согласно (91) применительно к  
(116) и (118) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) &= \\ &= \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} - 0) \mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0); \\ \mathbf{K}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) &= \\ &= \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} - 0) \left\{ \mathbf{K}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) + \right. \\ &+ \left[ \mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) - \mathbf{X}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) - \mathbf{X}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) \right]^T \left. \right\}, \end{aligned} \quad (124)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{1, J}$ .

Квазиоптимальные оценки ДП  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  
 $j = \overline{1, J}$ , формируются по тем же формулам, что и

оптимальные оценки ДП, согласно (42), (79) и (80) в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. при  $t = t_{k+1} - 0$ , но с учетом выполнения требования о гауссовости АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  (112).

5.2. Квазиоптимальные алгоритмы второго этапа обработки

Цель формирования квазиоптимальных алгоритмов с переприсвоением параметров на втором этапе обработки состоит в том, чтобы при выполнении требования о гауссовости условных АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  в конце первого этапа обработки (112) получить аналитические соотношения для 1-го и 2-го моментов промежуточной условной АПВ  $p_{ps \text{ ПР НП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (107) и итоговой условной АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (111).

При выполнении требования о гауссовости условных АПВ  $p_{ps1}^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | j, i)$  (112) с учетом аппроксимации вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  квазислучайным процессом и вида используемых ММ (37)–(39) промежуточная условная АПВ  $p_{ps \text{ ПР НП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m)$  (107) и итоговая условная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (111) также представляют собой кривые Гаусса.

Как известно [18], в такой постановке задачи удастся получить точные алгоритмы квазиоптимальной обработки.

А. Первый и второй моменты промежуточной и итоговой условных АПВ

При выполнении требования о гауссовской аппроксимации промежуточной условной АПВ  $p_{ps \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  (107) промежуточная условная квазиоптимальная оценка (1-й момент промежуточной условной АПВ)  $\mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  определяется как

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) \triangleq \\ & \triangleq \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \mathbf{X}_{k+1} p_{ps \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) d\mathbf{X}_{k+1}. \end{aligned} \quad (126)$$

С учетом того, что вектор НП  $\mathbf{X}(t)$  на каждом полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , аппроксимирован квазислучайным процессом (37)–(39), соотношение для промежуточной условной квазиопти-

мальной оценки  $\mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  на втором этапе обработки согласно (107) имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) = \\ & = \Phi_{XX}(t_{k+1} | t_k) \mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0), \end{aligned} \quad (127)$$

где  $\Phi_{XX}(t_{k+1} | t_k)$  – переходная матрица состояния размером  $(n \times n)$ , характеризующаяся (37);

$\mathbf{X}_{j,i}^*(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$  – условная квазиоптимальная оценка вектора НП  $\mathbf{X}_k$  в конце первого этапа обработки на  $k$ -ом такте, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , определяемая (113).

Соответствующая квазиоптимальной оценке  $\mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  матрица ковариаций промежуточных условных квазиоптимальных ошибок оценивания (второй момент промежуточной условной АПВ)  $\mathbf{K}_{j,i \text{ ПР НП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{j,i \text{ ПР НП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) \triangleq \\ & \triangleq \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) \right] \times \\ & \times \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) \right]^T \times \\ & \times p_{ps \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) d\mathbf{X}_{k+1}. \end{aligned} \quad (128)$$

Соотношение для вычисления матрицы ковариаций промежуточных условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{j,i \text{ ПР НП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  на втором этапе обработки согласно (37)–(39) и (107) имеет вид [18, 24]

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{j,i \text{ ПР НП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) = \\ & = \Phi_{XX}(t_{k+1} | t_k) \mathbf{K}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0) \Phi_{XX}^T(t_{k+1} | t_k), \end{aligned} \quad (129)$$

где  $\mathbf{K}_{j,i}(t_{k+1} - 0 | t_{k+1} - 0)$  – матрица ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания в конце первого этапа обработки на  $k$ -м такте, характеризующаяся (118).

Связь 1-го и 2-го условных моментов  $\mathbf{X}_{j,i \text{ ПР НП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  и  $\mathbf{K}_{j,i \text{ ПР НП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  с соответствующими безусловными моментами выполняется по формулам весового суммирования, аналогичным (124) и (125).

Рассмотрим 1-й и 2-й моменты итоговой условной АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  при применении метода гауссовской аппроксимации.

Формулы, определяющие 1-й и 2-й моменты итоговой условной АПВ  $p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. при  $t = t_{k+1} + 0$ , соответственно имеют вид

$$\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* \triangleq \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \mathbf{X}_{k+1} p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) d\mathbf{X}_{k+1} \quad (130)$$

– итоговая условная квазиоптимальная оценка АПВ  $p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ ;

$$\mathbf{K}_{j,i(k+1)} \triangleq \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* \right] \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* \right]^T \times p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) d\mathbf{X}_{k+1} \quad (131)$$

– матрица ковариаций итоговых условных квазиоптимальных ошибок оценивания АПВ  $p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i)$ .

Итоговая условная квазиоптимальная оценка  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. при  $t = t_{k+1} + 0$ , вычисляется в соответствии с формулой переприсвоения (111):

$$\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* = \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) \mathbf{X}_{j,m \text{ ПРНП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)}{P_{ips}(t_{k+1} + 0)}, \quad (132)$$

где  $\mathbf{X}_{j,m \text{ ПРНП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  и  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  определяются согласно (126) и (97).

Выражение для вычисления матрицы ковариаций итоговых условных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{j,i(k+1)}$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте, т.е. при  $t = t_{k+1} + 0$ , на основании (111) после преобразований записывается в следующем виде:

$$\mathbf{K}_{j,i(k+1)} = \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0)}{P_{ips}(t_{k+1} + 0)} \times \left\{ \mathbf{K}_{j,i \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) + \left[ \mathbf{X}_{j,i \text{ ПРНП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) - \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* \right] \times \left[ \mathbf{X}_{j,i \text{ ПРНП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0) - \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* \right]^T \right\}, \quad (133)$$

где  $\mathbf{K}_{j,i \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0)$  и  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  определяются согласно (127) и (97).

*Б. Формулы связи 1-го и 2-го моментов итоговых безусловной и условных АПВ*

Рассмотрим формулы связи итоговой безусловной квазиоптимальной оценки

$$\mathbf{X}_{(k+1)}^* \triangleq \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \mathbf{X}_{k+1} p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) d\mathbf{X}_{k+1} \quad (134)$$

и матрицы ковариаций итоговых безусловных квазиоптимальных ошибок оценивания

$$\mathbf{K}_{(k+1)} \triangleq \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{(k+1)}^* \right] \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{(k+1)}^* \right]^T p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) d\mathbf{X}_{k+1} \quad (135)$$

с соответствующими условными характеристиками (130) и (131).

Согласно (101) итоговая безусловная квазиоптимальная оценка  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$  (134) связана с итоговыми условными квазиоптимальными оценками  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$  (132) в конце второго этапа обработки на  $k$ -ом такте, т.е. при  $t = t_{k+1} + 0$ , следующим выражением:

$$\mathbf{X}_{(k+1)}^* = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} + 0) \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*, \quad (136)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$  определяется согласно (97),  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}$ .

Формула (135), определяющая матрицу ковариаций итоговых безусловных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{(k+1)}$ , согласно (97) и с учетом выполнения требования о гауссовской аппроксимации (112) может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{K}_{(k+1)} = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} + 0) \times \left\{ \int_{\mathbf{X}_{k+1}} \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{(k+1)}^* \right] \left[ \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_{(k+1)}^* \right]^T \times p_{ps}^*(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1} | j, i) d\mathbf{X}_{k+1} \right\}. \quad (137)$$

Прибавив к выражению в квадратных скобках и вычтя из него величину  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$ , находим, что после преобразований матрица ковариаций итоговых безусловных квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{(k+1)}$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -ом такте, т.е. при  $t = t_{k+1} + 0$ , окончательно записывается в виде

$$\mathbf{K}_{(k+1)} = \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} + 0) \times \left\{ \mathbf{K}_{j,i(k+1)} + \left[ \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* - \mathbf{X}_{(k+1)}^* \right] \left[ \mathbf{X}_{j,i(k+1)}^* - \mathbf{X}_{(k+1)}^* \right]^T \right\}, \quad (138)$$

где  $\mathbf{K}_{j,i(k+1)}$  – матрица ковариаций итоговых условных квазиоптимальных ошибок оценивания в конце второго этапа обработки на  $k$ -ом такте, характеризуемая согласно (131) и (133);  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}$ .

Покажем, что на втором этапе обработки на  $k$ -м такте промежуточная безусловная АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  и итоговая безусловная АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  совпадают:

$$p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) = p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}), \quad (139)$$

Подставив в выражение (101) соотношение (111), согласно (108) после преобразований с учетом выполнения условия нормировки ( $\sum_{i=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) = 1$ ) получим

$$\begin{aligned} p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}) &= \sum_{i=1}^M P_{ips}(t_{k+1} + 0) \times \\ &\times \frac{\sum_{m=1}^M \pi_{mi}(t_{k+1}) P_{mps}(t_{k+1} - 0) p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m)}{P_{ips}(t_{k+1} + 0)} = \\ &= \sum_{m=1}^M P_{mps}(t_{k+1} + 0) p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m) = \\ &= p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1}). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

В соответствии с (139) выполняются равенства для первого и второго моментов безусловных АПВ  $p_{ps}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  и  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$ :

$$\mathbf{X}_{(k+1)}^* = \mathbf{X}_{\text{ПРНП}}^*(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0), \quad (140)$$

$$\mathbf{K}_{(k+1)} = \mathbf{K}_{\text{ПРНП}}(t_{k+1} + 0 | t_{k+1} + 0), \quad (141)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Видно, что переприсвоение параметров, применяемое к условным АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1}, \mathbf{X}_{k+1} | j, m)$  на втором этапе обработки на каждом такте, не изменяет безусловную АПВ  $p_{ps \text{ ПРНП}}(t_{k+1} + 0, \mathbf{X}_{k+1})$  (139) и соответствующие безусловные 1-й и 2-й моменты (140) и (141).

### 6. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА КВАЗИОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ С ПЕРЕПРИСВОЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРА НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Построение структурной схемы выполнено согласно основным соотношениям (34), (42), (45), (79), (80) и (97) для формирования квазиоптимальных оценок ДП  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ , и (41), (45), (116), (118) и (132)–(138) для формиро-

вания квазиоптимальной оценки вектора НП  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$  и матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{(k+1)}$ .

Структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  (28), выполненная в соответствии с указанными алгоритмами, представлена на рис. 2.

В составе синтезированной системы применительно к  $j$ -му НКА, где  $j = \overline{1, J}$ , можно выделить две основные составные части: устройство формирования квазиоптимальных оценок вектора НП (УФОНП $_j$ )  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$  и устройство формирования квазиоптимальной оценки ДП (УФОДП $_j$ )  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ . Обе составные части охвачены соответствующими перекрестными связями, что отражает факт совместной обработки вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  и ДП  $\Theta_j(t)$  на основе метода синтеза с переприсвоением параметров.

На схеме рис. 2 отдельно выделен модуль формирования опорных ВОС-сигналов применительно к  $j$ -му НКА (МФОС $_j$ )  $S_{ji}(t, \mathbf{X}_k^*)$ , где  $j = \overline{1, J}, i = \overline{1, M}$ .

Отметим, что на структурной схеме рис. 2 во избежание излишней громоздкости у составных частей системы (УФОНП $_j$  и УФОДП $_j$ ) показаны связи, относящиеся только к какому-либо одному  $j$ -му НКА, а не ко всей совокупности  $J$  одновременно видимых НКА. Векторные связи на рис. 2 показаны двойными линиями.

На вход синтезированной системы поступают радиосигналы от всех одновременно видимых НКА, характеризуемые ВН  $\Xi(t)$  в соответствии с (1)–(3).

Выходные сигналы системы представляют собой квазиоптимальные оценки  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$  и  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

Показанное на рис. 2 УФОНП $_j$  содержит  $M$  параллельных каналов обработки сигналов и модуль формирования безусловной оценки (МФБО)  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$ .

Каждый из параллельных каналов обработки сигналов представляет собой модуль формирования условной оценки (МФУО $_{ji}$ )  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$  в соответствии с алгоритмами второго этапа обработки (132) и (133).

Важной составной частью каждого МФУО $_{ji}$  является многомерный дискриминатор МД $_i$ , на выходе которого образуется вектор парциальных (по  $i$ ) сигналов ошибки  $U_{ji}(t, \mathbf{X}')$ , характеризующий согласно (116) следующим соотношением:

$$U_{ji}(t, \mathbf{X}') \triangleq \int_{t_k}^t \left[ \frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}')}{\partial \mathbf{X}'} \right]^T d\tau, \quad (142)$$

где  $t \in [t_k, t_{k+1} - 0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}$ .

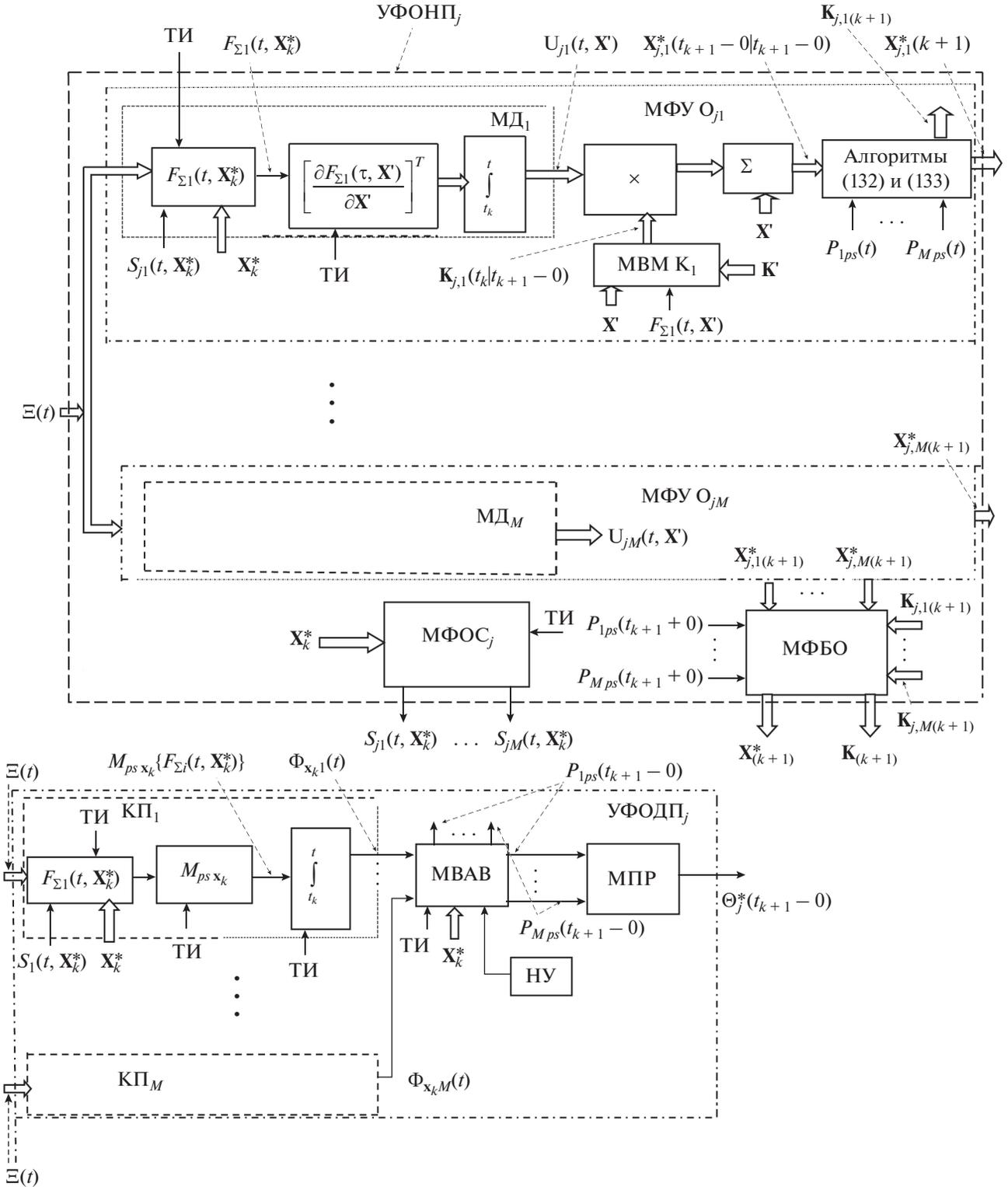


Рис. 2. Структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов с переприсвоением параметров.

Мерность  $MD_i$  определяется числом компонент вектора НП  $X(t)$  и равна  $n$ .

В каждом  $MFUO_{ji}$  сигнал с выхода  $MD_i$  согласно (116) подается на вход умножителя, на другой

вход которого поступает сигнал  $K_{j,i}(t_k | t_{k+1} - 0)$  (114), представляющий собой матрицу ковариаций условных квазиоптимальных ошибок оценивания на первом этапе обработки на  $k$ -м такте. Сиг-

нал  $\mathbf{K}_{j,i}(t_k|t_{k+1} - 0)$  снимается с выхода модуля вычисления матрицы ковариаций (МВМК<sub>1</sub>) (118). Блок, реализующий алгоритмы (132) и (133), отражает факт преобразования сигналов на втором этапе обработки на  $k$ -м такте. С выхода этого блока снимается сигнал  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$  – итоговая условная квазиоптимальная оценка  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$  в конце второго этапа обработки на  $k$ -м такте.

Все условные оценки  $\mathbf{X}_{j,i(k+1)}^*$ , где  $i = \overline{1, M}$ , поступают на входы МФБО, в котором реализуется алгоритм весового суммирования (136). На другие входы МФБО подаются сигналы  $P_{ips}(t_{k+1} + 0)$ , снимаемые с выходов модуля вычисления апостериорных вероятностей (МВАВ).

Выходной сигнал МФБО представляет собой итоговую безусловную квазиоптимальную оценку  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$  вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

Синтезированное применительно к  $j$ -му НКА УФОДП <sub>$j$</sub>  является  $M$ -канальным, что соответствует каждому возможному значению состояния ДП  $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_{ji}\}$ , где  $j = \overline{1, J}$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Основой каждого  $i$ -го канала в составе УФОДП <sub>$j$</sub>  является корреляционный приемник КП <sub>$i$</sub> , где  $i = \overline{1, M}$ .

В состав каждого КП <sub>$i$</sub>  входят модуль формирования функции  $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$ , реализующий алгоритм (60), модуль  $M_{ps\mathbf{X}_k}$  – модуль усреднения по  $\mathbf{X}_k$  согласно (77) и интегратор (80).

Используемый при вычислении функции  $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$  (60) опорный ВОС-сигнал  $S_{ji}(t, \mathbf{X}_k^*)$  регистрируется с соответствующего выхода МФОС <sub>$j$</sub> .

На выходе корреляционного приемника КП <sub>$i$</sub>  согласно (80) наблюдается сигнал  $\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t)$ , который представляет собой усредненный по  $\mathbf{X}_k$  парциальный ( $i$ -й) ЛФП вектора НП  $\mathbf{X}_k$ . Запуск и сброс интеграторов каждого КП <sub>$i$</sub>  производится тактовым импульсом (ТИ) в моменты времени  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

С выхода каждого КП <sub>$i$</sub>  сигналы  $\Phi_{\mathbf{X}_k i}(t)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , поступают на МВАВ, в котором реализуется алгоритм (79) при начальных условиях (97). МВАВ имеет  $M$  входов и две группы выходов. Каждая группа содержит  $M$  выходов. Выходные сигналы одной группы, представляющие собой АВ  $P_{ips}(t_k)$ , где  $i = \overline{1, M}$ , поступают на УФОНП <sub>$j$</sub> , в которых реализуются алгоритмы (132) и (133). Выходные сигналы другой группы  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  подаются на модуль принятия решения (МПР), функционирующий согласно алгоритму (42). На выходе МПР в конце первого этапа обработки,

т.е. в момент времени  $t_{k+1} - 0$ , на каждом такте  $[t_k, t_{k+1})$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) формируется квазиоптимальная оценка ДП  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ .

При практической реализации синтезированных алгоритмов и предложенной структурной схемы входящие в их состав многомерные дискриминаторы и корреляционные приемники, как правило, уместно выполнять применительно к соответствующим векторам ПРС  $\mathbf{Y}_j(t)$ , а не к вектору НП  $\mathbf{X}(t)$  и тем самым, в частности, переходя от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным [25].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базе МТО дискретно-непрерывных случайных процессов методом синтеза с переприсвоением параметров вектора НП рассмотрены прием и обработка навигационных ШПС и, в частности, быстро развивающихся sinВОС- и cosВОС-сигналов (меандровых ШПС), которые предназначены для применения в современных и перспективных ГНСС, таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай).

Основной научный результат работы состоит в том, что путем решения задачи синтеза получены аналитические выражения для квазиоптимальной оценки выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{(k+1)}^*$  и матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания  $\mathbf{K}_{(k+1)}$  выборки вектора НП  $\mathbf{X}_{k+1}$ , а также для квазиоптимальных оценок ДП  $\Theta_j^*(t_{k+1} - 0)$ , где  $j = \overline{1, J}$ . При решении задачи синтеза в алгоритмах для разложения совместной АПВ  $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$  дискретно-непрерывного ВС  $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j]^T$  был применен метод переприсвоения значений параметров условных АПВ вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ . Алгоритмы с переприсвоением свободны от ограничения, накладываемого на скорость изменения компонент вектора НП  $\mathbf{X}(t)$ .

На этой основе разработана соответствующая структурная схема квазиоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов с переприсвоением параметров вектора НП  $\mathbf{X}(t)$  применительно к приемникам перспективных ГНСС.

Использованная в работе методика решения задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема ВОС-сигналов полностью применима и для тех режимов функционирования ГНСС, при которых используются не ВОС-сигналы (т.е. не меандровые ШПС), а традиционные ШПС.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. М.: Радио и связь, 1993.
2. *Соловьев Ю. А.* Спутниковая навигация и ее приложения. М.: Эко-Трендз, 2003.
3. *Betz J.W.* // Proc. 12th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 1999). Nashville. 15–17 Sept. Fairfax: ION, 1999. P. 639.
4. *Betz J.W.* // Navigation J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
5. *Ярлыков М.С.* Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
6. *Betz J.W.* // Proc. 13th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 2000). Salt Lake City. 19–22 Sept. Fairfax: ION, 2000. P. 2140.
7. Global Positioning Systems Directorate. Systems Engineering and Integration. Interface Specification IS–GPS–800. – Navstar GPS Space Segment/User Segment L1C Interface, IS–GPS–800C, 05 September 2012.
8. *Hein G.W., Godet J., Issler J.-L. et al.* // Proc. 15th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 2002). Portland. 24–27 Sep. 2002. Fairfax: ION, 2002. P. 266.
9. European GNSS (Galileo) Open Service Signal In Space Interface Control Document (OS SIS ICD), Iss. 1.1. Revision 1. Paris: European Space Agency, September 2010.
10. *Julien O., Macabiau C., Issler J.-L.* // The Radio Science Bull. 2009. № 330. P. 32.
11. *Lestarquit L., Artaud G., Issler J.-L.* // Proc. 21st Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2008). Savannah. 16–19 Sep. Fairfax: ION, 2008. P. 961.
12. *Hein G.W., Avila-Rodriguez J.A., Wallner S. et al.* // Proc. IEEE/ION Position, Location and Navigation Symp. of the Institute of Navigation (ION– PLANS 2006). San Diego. 25–27 Apr. Fairfax: ION, 2006. P. 883.
13. *Воскобойников А.А., Стулов А.В.* // Новости навигации. 2007. № 2. С. 8.
14. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
15. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
16. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
17. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
18. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
19. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991.
20. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 1. С. 39.
21. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // Радиотехника. 2010. № 1. С. 11.
22. *Ярлыков М.С., Шишкин В.Ю.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 2. С. 260.
23. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
24. *Ярлыков М.С., Скогорев К.К.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 9. С. 1136.
25. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 733.
26. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 8. С. 933.
27. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // Радиотехника. 2004. № 7. С. 18.

---

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

---

---

УДК 621.396.96

**ОПТИМАЛЬНОЕ КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ  
В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ<sup>1</sup>**

© 2022 г. А. Н. Детков\*

*Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,  
ул. Викторенко, 7, Москва, 125319 Российская Федерация**\*E-mail: detkov@gosniias.ru*

Поступила в редакцию 01.12.2021 г.

После доработки 02.12.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2021 г.

Методами марковской теории оценивания случайных процессов решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов комплексной обработки информации при двухканальном векторном наблюдении с нарушениями в условиях противодействия среды. Задача решена применительно к дискретно-непрерывному марковскому процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторную марковскую последовательность, а дискретная часть характеризуется двухкомпонентным дискретным марковским процессом, каждая компонента которого описывается цепью Маркова на несколько положений. Приведена структурная схема квазиоптимальной комплексной обработки информации. На простом примере методом имитационного моделирования показана эффективность комплексирования активного и пассивного угломерных каналов бортовой радиолокационной станции в условиях противодействия среды.

DOI: 10.31857/S0033849422050047

**ВВЕДЕНИЕ**

Наблюдения в различных физических полях расширяют возможности информационно-управляющих систем (ИУС) бортовых радиоэлектронных комплексов навигации и прицеливания, повышают их живучесть, эффективность навигации и наведения летательного аппарата (ЛА) на цель. В связи с этим актуальным является использование информации о пространственно энергетических характеристиках целей и фонов, получаемой как различными способами при наблюдении собственных и/или отраженных излучений цели, так и в различных участках спектра электромагнитного излучения — оптическом и радиоволновом [1–3].

При работе в условиях противодействия среды [4], под которыми понимаются интенсивные естественные и искусственные помехи, велика вероятность перерывов в поступлении информации о цели. Причины их возникновения могут быть весьма разнообразными [5]:

- прекращение излучения целей или резкое внезапное изменение характеристик излучения;
- подавление приемного устройства средством противодействия;

- наличие облаков, дымов и аэрозолей как искусственного, так и естественного происхождения;
- перенацеливание на “ложные цели” и т.д.

Возникающие при этом перерывы информации носят случайный скачкообразный характер. При синтезе помехоустойчивых алгоритмов обработки информации в ИУС необходимо предусматривать защиту от информационных “отказов” измерителей, поэтому для повышения достоверности и надежности обработки информации особенно эффективно их комплексирование в условиях противодействия среды [4, 6].

Развитие средств вычислительной техники позволяет реализовать комплексную обработку информации (КОИ) в цифровой форме при достаточно большом числе уровней квантования аналого-цифровых преобразователей и разрядов для представления чисел [7]. Оптимальность работы алгоритма предполагает наилучшее использование априорной и апостериорной информации о вероятности пропадания и восстановления полезного сигнала и оптимизацию оценок признаков различия цели и помех [6].

Потребность в одновременном измерении одних и тех же параметров с помощью устройств и систем, работающих на различных физических принципах, обусловлена тем, что каждый измеритель в отдельности не удовлетворяет всем тре-

---

<sup>1</sup> Посвящается памяти Михаила Аркадьевича Миронова.

бованиям, которые предъявляются к измерению этих параметров. Целью комплексирования обору- дования является объединение различных измерителей в единый комплекс, обладающий существенно более высокими характеристиками точности, помехоустойчивости и надежности измерений по сравнению с отдельными измерителями. Максимального выигрыша от комплексирования можно достичь, решив задачу синтеза, что позволяет определить оптимальную структуру и характеристики системы комплексной обработки информации.

Для решения задачи КОИ в условиях противодействия среды может быть использован математический аппарат дискретно-непрерывных марковских процессов (ДНМП) в дискретном времени, адекватный решаемой задаче при реализации синтезированных алгоритмов на ЭВМ.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Пусть в дискретные моменты времени  $t_k = t_0 + k\Delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , разделенные постоянным интервалом  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ ,  $t_k \in [t_0, T_n]$ , разностное уравнение вектора состояния  $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(k)$  и уравнения измерений  $\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{y}(k)$  имеют вид

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_{xx}(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma_{xx}(k, k-1)\xi(k-1), \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(a_j(k), b_m(k))\mathbf{x}(k) + \Gamma_{yy}(a_j(k), b_m(k))\zeta(k), \quad (2)$$

где  $\mathbf{y}(k) = [\mathbf{y}_1^T(k), \mathbf{y}_2^T(k)]^T$ ,  $\mathbf{y}_1$  –  $n_{y1}$ -мерный вектор измерений активной (полуактивной) системы наведения, использующей отраженное от цели излучение;  $\mathbf{y}_2$  –  $n_{y2}$ -мерный вектор измерений пассивной системы наведения, использующей собственное электромагнитное излучение целей;  $\xi(k)$ ,  $\zeta(k) = [\xi_1^T(k), \xi_2^T(k)]^T$  – выборки независимых векторных белых гауссовских шумов (БГШ) с нулевыми математическими ожиданиями и единичными матрицами соответствующей размерности;  $T_n$  – интервал наблюдения,

$$\mathbf{h}(a_j(k), b_m(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(a_j(k)) \\ \mathbf{h}_2(b_m(k)) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{yy}(a_j(k), b_m(k)) = \begin{bmatrix} \Gamma_{yy1}(a_j(k)) & 0 \\ 0 & \Gamma_{yy2}(b_m(k)) \end{bmatrix}$$

– матрица известных коэффициентов и матрица диагональных элементов, характеризующих погрешности измерений соответственно.

Применительно к решаемой задаче синтеза вектор состояния представляет собой ДНМП  $[\mathbf{x}^T(k), a_j(k), b_m(k)]^T$ , где  $\mathbf{x}(k)$  – непрерывная  $n_x$ -мерная компонента ДНМП, описывающий в пространстве состояний динамику фазовых координат объекта (например, ЛА на котором установлены измерители),  $\mathbf{s}(k) = [a_j(k), b_m(k)]^T$  – дискретная компонента ДНМП – двухкомпонентный дискретный марковский процесс, каждая компонента которого описывается цепью Маркова на  $M_1$  и  $M_2$  положений соответственно, с матрицами вероятностей переходов

$$\Pi_1(k-1, k) = \{\pi_{ij}^a(k-1, k)\} = \{P(a_j(t_k)|a_i(t_{k-1}))\},$$

$$i, j = \overline{1, M_1},$$

$$\Pi_2(k-1, k) = \{\pi_{nm}^b(k-1, k)\} = \{P(b_m(t_k)|b_n(t_{k-1}))\},$$

$$n, m = \overline{1, M_2}$$

смена состояний которой может происходить только в фиксированные моменты времени  $k = 1, 2, \dots$ ;  $M_1, M_2$  – число значений дискретных параметров  $a_j, b_m$  соответственно;  $T$  – знак транспонирования.

По условию задачи известны матрицы  $\Phi_{xx}$ ,  $\Gamma_{xx}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\Gamma_{yy}$ , а также начальные распределения марковского вектора, причем компоненты марковской цепи  $a_j(k)$  и  $b_m(k)$ , характеризующие нарушения в каналах измерений, не зависят друг от друга.

Цель работы – на основе марковской теории оценивания случайных процессов [8–13] разработать оптимальные (квазиоптимальные) алгоритмы комплексной обработки ДНМП  $[\mathbf{x}^T(k), a_j(k), b_m(k)]^T$  по наблюдаемым в дискретном времени выходным сигналам измерителей  $\mathbf{y}(k) = [\mathbf{y}_1^T(k), \mathbf{y}_2^T(k)]^T$  в условиях противодействия среды.

## 2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СМЕШАННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

На основании свойств марковских процессов в дискретном времени запишем рекуррентные уравнения, описывающие апостериорное распределение ДНМП по наблюдаемой последовательности измерений  $\mathbf{Y}_1^k \triangleq \mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k)$ :

$$f(\mathbf{x}(k), a_j, b_m | \mathbf{Y}_1^k) = f^*(\mathbf{x}(k), a_j, b_m) = \frac{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k))}{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{k-1})} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \int f(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1)) f^*(\mathbf{x}(k-1), a_i, b_n) d\mathbf{x}(k-1), \quad (3)$$

где  $f^*(\mathbf{x}(k), a_j, b_m) = f(\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m | \mathbf{Y}_1^k)$  – апостериорная плотность вероятности непрерывного процесса ДНМП,  $f(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1))$  – условная плотность вероятности, определяемая на основании уравнения (1);  $f^*(\mathbf{x}(k-1), a_i, b_n) = f(\mathbf{x}(k-1), a_i, b_n | \mathbf{Y}_1^{k-1})$  – апостериорная плотность вероятности, полученная на предыдущем  $k-1$  шаге;  $f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k))$  – одношаговая функция правдоподобия,  $f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{k-1})$  – условная плотность вероятности, которая является нормирующим коэффициентом,  $\sum_i \triangleq \sum_{i=1}^{\Delta M_1}$ ,  $\sum_n \triangleq \sum_{n=1}^{\Delta M_2}$ . В (3) и далее для простоты записи аргументы  $k, k-1$  всех функций, где это возможно и не вызывает сомнений, не приводим, а интегрирование по переменной  $\mathbf{x}$  ведется в области  $\mathfrak{X}^{n_x}$ .

Представим апостериорную плотность вероятности вектора непрерывных компонент ДНМП  $f^*(\mathbf{x}(k), a_j, b_m)$  (3) в виде системы рекуррентных уравнений

$$f_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = f^*(\mathbf{x}(k), a_j, b_m) = \frac{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k))}{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{k-1})} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)), \quad (4)$$

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1) \times \int f(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1), a_j, b_m) f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \quad (5)$$

где  $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}(k) | a_j, b_m, \mathbf{Y}_1^{k-1})$  – условная апостериорная плотность вероятности непрерывного процесса.

Апостериорная вероятность дискретной компоненты ДНМП  $P_{jm}^*(k)$  описывается системой рекуррентных уравнений:

$$P_{jm}^*(k) = P^*(a_j(k), b_m(k)) = \frac{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{Y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{k-1})} \tilde{P}_{jm}(k), \quad (6)$$

$$\tilde{P}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1), \quad (7)$$

где  $P_{in}^*(k-1)$  – апостериорная вероятность дискретной компоненты ДНМП на предыдущем  $k-1$  шаге;

$f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{Y}_1^{k-1}) = \int f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k)) f_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k)$  – условная плотность вероятности одношагового предсказания наблюдаемых сигналов; выражение  $f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{k-1})$  определяется как

$$f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{k-1}) = \sum_i \sum_n \sum_j \sum_m \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{Y}_1^{k-1}) P_{jm}^*(t_k), \sum_j \triangleq \sum_{j=1}^{M_1}, \sum_m \triangleq \sum_{m=1}^{M_2}.$$

### 3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ КОМПЛЕКСИРОВАНИИ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Большие вычислительные затраты при практической реализации оптимального алгоритма (3)–(5) вынуждают ограничиться приближенным нахождением компонент ДНМП. Для этого необходимо выполнить двухмоментную параметрическую гауссовскую аппроксимацию условной плотности вероятности  $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k))$ . Эта аппроксимация состоит в замене неизвестных функций  $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k))$  некоторыми известными функциями, в частности  $\tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m)$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m)$  – математического ожидания и корреляционной функции условной плотности вероятности  $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k))$  соответственно [14]. Применяя, таким образом, на каждом  $k$ -м шаге гауссовскую аппроксимацию для условной плотности вероятности  $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k))$ , можно показать, что квазиоптимальный алгоритм фильтрации непрерывного компонента ДНМП описывается системой рекуррентных уравнений:

– вектор оценки  $\mathbf{x}^*(k, a_j, b_m)$  и корреляционная матрица погрешностей оценки  $\mathbf{R}_{xx}^*(k, a_j, b_m)$  непрерывных компонент ДНМП при условии  $A(k) = a_j, B(k) = b_m$  определяются по результатам измерений  $\mathbf{y}_1(k)$  и  $\mathbf{y}_2(k)$ :

$$\mathbf{x}^*(k, a_j, b_m) = \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) + \mathbf{K}_1(k, a_j, b_m) \times (\mathbf{y}_1(k) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m)) + \mathbf{K}_2(k, a_j, b_m) (\mathbf{y}_2(k) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m)), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}^*(k, a_j, b_m) &= \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) - \\ &- \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \mathbf{h}_1^T(a_j) \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \mathbf{h}_2^T(b_m) \right] \times \\ &\times \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) & \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) & \tilde{\mathbf{R}}_{22}(k, a_j, b_m) \end{array} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[ \begin{array}{c} \mathbf{h}_1(a_j) \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \\ \mathbf{h}_2(b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \end{array} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$\mathbf{K}_1(k, a_j, b_m)$  и  $\mathbf{K}_2(k, a_j, b_m)$  – оптимальные коэффициенты передачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(k, a_j, b_m) &= \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \mathbf{h}_1^T(a_j) \times \\ &\times \left( \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) - \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \times \right. \\ &\times \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) \left. \right)^{-1} - \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \mathbf{h}_2^T(b_m) \times \\ &\times \left( \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) \left( \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(k, a_j, b_m) &= -\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \mathbf{h}_1^T(a_j) \times \\ &\times \left( \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) - \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \times \right. \\ &\times \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) \left. \right)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) + \\ &+ \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) \mathbf{h}_2^T(b_m) \left( \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) + \right. \\ &+ \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) \times \\ &\times \left( \left( \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) - \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m) \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{-1}(k, a_j, b_m); \end{aligned} \quad (11)$$

$\tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m)$  – экстраполяционная оценка и  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m)$  – экстраполяционная корреляционная матрица погрешностей предсказания:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \Phi_{xx}(k, k-1) \mathbf{x}^*(k-1, a_i, b_n), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \Phi_{xx} \mathbf{R}^*(k-1, a_i, b_n) \Phi_{xx}^T + \Gamma_{xx} \Gamma_{xx}^T + \right. \\ &+ \left[ \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) \right] \times \\ &\times \left[ \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) \right]^T \left. \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$\tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m)$  – прогнозируемые значения векторов измерений и  $\tilde{\mathbf{R}}_{yy}(k, a_j, b_m)$  – условная блочная корреляционная матрица погрешностей экстраполяции измерений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(k-1, a_i, b_n), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(k-1, a_i, b_n), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{yy}(k, a_j, b_m) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) & \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) & \tilde{\mathbf{R}}_{22}(k, a_j, b_m) \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{R}_{xx}^*(k-1, a_i, b_n) \Phi_{xx}^T \mathbf{h}_1^T(a_j) + \right. \\ &+ \Gamma_{yy1}(a_j) \Gamma_{yy1}^T(a_j) + \\ &+ \left[ \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) \right]^T \left. \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{R}_{xx}^*(k-1, a_i, b_n) \Phi_{xx}^T \mathbf{h}_2^T(b_m) + \right. \\ &+ \left[ \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) \right]^T \left. \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{R}_{xx}^*(k-1, a_i, b_n) \Phi_{xx}^T \mathbf{h}_1^T(a_j) + \right. \\ &+ \left[ \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{h}_1(a_j) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) \right]^T \left. \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{22}(k, a_j, b_m) &= \sum_i \sum_n \frac{\pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{R}_{xx}^*(k-1, a_i, b_n) \Phi_{xx}^T \mathbf{h}_2^T(b_m) + \right. \\ &+ \Gamma_{yy2}(b_m) \Gamma_{yy2}^T(b_m) + \\ &+ \left[ \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) \right] \times \\ &\times \left[ \mathbf{h}_2(b_m) \Phi_{xx} \mathbf{x}^*(a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) \right]^T \left. \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом начальные условия для квазиоптимального алгоритма КОИ (6)–(20):

$$\mathbf{x}^*(0, a_i, b_n) = \mathbf{x}^*(0), \quad \mathbf{R}_{xx}^*(0, a_i, b_n) = \mathbf{R}_{xx}^*(0),$$

$$P_{in}^*(0) = P(0), \quad i = \overline{1, M_1}, \quad n = \overline{1, M_2}.$$

Уравнения оценивания апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП (6), (7)

остаются без изменения, а условная плотность вероятности одношагового предсказания наблюдаемых сигналов имеет вид [15]

$$f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{Y}_1^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{(n_{y1}+n_{y2})} \det\{\tilde{\mathbf{R}}_{yy}\}}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(k) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) \\ \mathbf{y}_2(k) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{11}(k, a_j, b_m) & \tilde{\mathbf{R}}_{12}(k, a_j, b_m) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{21}(k, a_j, b_m) & \tilde{\mathbf{R}}_{22}(k, a_j, b_m) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(k) - \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m) \\ \mathbf{y}_2(k) - \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m) \end{bmatrix}^T\right\}. \quad (21)$$

Задача фильтрации считается решенной, если на выходе оптимального фильтра на каждом  $k$ -м шаге формируется оптимальная оценка, соответствующая определенному критерию оптимальности. Байесовское решение может быть получено на основе минимизации апостериорного риска [11], который применительно к решаемой задаче имеет вид

$$\gamma(\mathbf{u}^*(k), \mathbf{Y}(k)) = \min_{\mathbf{u}(k)} \sum_{\mu=1}^{M_1} \sum_{\nu=1}^{M_2} \int_{-\infty}^{\infty} g_{j\mu\nu}(\mathbf{x}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k)) \times f(\mathbf{x}(k), A(k) = a_\mu, B(k) = b_\nu) d\mathbf{x}(k), \quad (22)$$

где  $g_{j\mu\nu}(\mathbf{x}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k))$  – функция потерь;  $\tilde{\mathbf{u}}(k) = (\tilde{\mathbf{x}}(k), A(k) = \tilde{a}_\mu, B(k) = \tilde{b}_\nu)$  – принимаемое решение,  $\mathbf{u}^*(k) = (\mathbf{x}^*(k), A(k) = a_j^*, B(k) = b_m^*)$  – оптимальное решение.

При решении многих практических задач малым ошибкам непрерывного компонента соответствуют меньшие потери. В таких случаях применяется функция потерь [11], простая по дискретному и квадратичная по непрерывному компонентам

$$g_{j\mu\nu}(\mathbf{x}(k), \tilde{\mathbf{x}}(k)) = \alpha(1 - \delta_{j\mu\nu}) + \beta \delta_{j\mu\nu} (\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k))^T (\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)), \quad (23)$$

где  $\alpha, \beta$  – коэффициенты потерь;  $\delta_{j\mu\nu}$  – символ Кронекера:

$$\delta_{j\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{если } j = \mu, m = \nu \\ 0 & \text{если } j \neq \mu, m \neq \nu \end{cases} \\ \mu = \overline{1, M_1}, \quad \nu = \overline{1, M_2}.$$

Функция потерь (23) означает, что при любом неправильном определении значений дискретного компонента потери равны коэффициенту  $\alpha$ , а при правильном принятии решения потери пропорциональны сумме квадратов ошибок оценки непрерывного компонента. Подставляя выражение (23) в (22) и выполняя минимизацию апостериорного риска, можно показать, что решающее правило имеет вид [16]

$$\text{если } P_{jm}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr}\{\mathbf{R}^*(k, a_j, b_m)\} \geq P_{\mu\nu}^*(k) \times \{ \alpha + \beta \text{Tr}\{\mathbf{R}^*(k, a_\mu, b_\nu)\} \}, \quad (24)$$

то  $\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{x}^*(k, a_j, b_m), A(k) = a_j^*, B(k) = b_m^*$ ,

где  $\text{Tr}\{\mathbf{A}\}$  – след матрицы  $\mathbf{A}$ .

Таким образом, в качестве безусловной оценки непрерывного компонента ДНМП выступает условное апостериорное математическое ожидание  $\mathbf{x}_{jm}^*(k)$ . Из (24) следует, что принятие решения сводится к максимизации взвешенных апостериорных вероятностей дискретных компонент ДНМП. При этом следует отметить, что с увеличением погрешности оценки непрерывного компонента ДНМП уменьшаются веса погрешностей оценки дискретных компонент ДНМП. В результате может приниматься гипотеза с меньшей апостериорной вероятностью, но и с меньшими погрешностями оценки непрерывного компонента ДНМП, т.е. может отвергаться гипотеза с большей апостериорной вероятностью.

Условная корреляционная матрица  $\mathbf{R}^*(k, a_j, b_m)$  характеризует качество оценки при правильном определении значений дискретных компонент  $a_j$  и  $b_m$ . Безусловная корреляционная матрица  $\mathbf{R}^*(k)$  погрешностей оценки непрерывного компонента ДНМП определяется по формуле

$$\mathbf{R}^*(k) = \sum_{j=1}^{M_1} \sum_{m=1}^{M_2} P_{jm}^*(k) (\mathbf{R}^*(k, a_j, b_m) + (\mathbf{x}^*(k, a_j, b_m) - \mathbf{x}^*(k)) \times (\mathbf{x}^*(k, a_j, b_m) - \mathbf{x}^*(k))^T). \quad (25)$$

Квазиоптимальный цифровой фильтр КОИ (рис. 1), реализующий алгоритм (6)–(21), (23)–(25), является многоканальным с числом каналов  $M = M_1 \times M_2$  и в основном сохраняет структуру и все обратные связи, присущие оптимальному устройству. Каждый канал состоит из многоканальных блоков вычисления коэффициента усиления КУ<sub>1</sub> и КУ<sub>2</sub>;  $\mathbf{K}_1(k, a_j, b_m), \mathbf{K}_2(k, a_j, b_m)$ ; блока оценки БО, в котором вычисляются  $\mathbf{x}^*(k, a_j, b_m), \mathbf{x}^*(k-1, a_i, b_n)$ ; блоков прогноза БП<sub>1</sub> и БП<sub>2</sub>, в которых вычисляются  $\tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m), \tilde{\mathbf{y}}_1(k, a_j, b_m), \tilde{\mathbf{y}}_2(k, a_j, b_m)$ ; блока апостериорных вероятностей БАВ, в котором вычисляются  $P_{jm}^*(k), P_{in}^*(k-1), \tilde{P}_{jm}^*(k)$ , и блоков вычисления корреляционных матриц БКМ<sub>1</sub> и БКМ<sub>2</sub>, в которых вычисляются  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m), \tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k, a_j, b_m), \tilde{\mathbf{R}}_{yy}(k, a_j, b_m), \mathbf{R}_{xx}^*(k, a_j, b_m)$  и  $\mathbf{R}_{xx}^*(k-1, a_i, b_n)$ . Окончательное решение о принятии безусловных оценок  $\mathbf{x}^*(k), a_j^*(k), b_m^*(k)$  производится в решающем устройстве РУ.

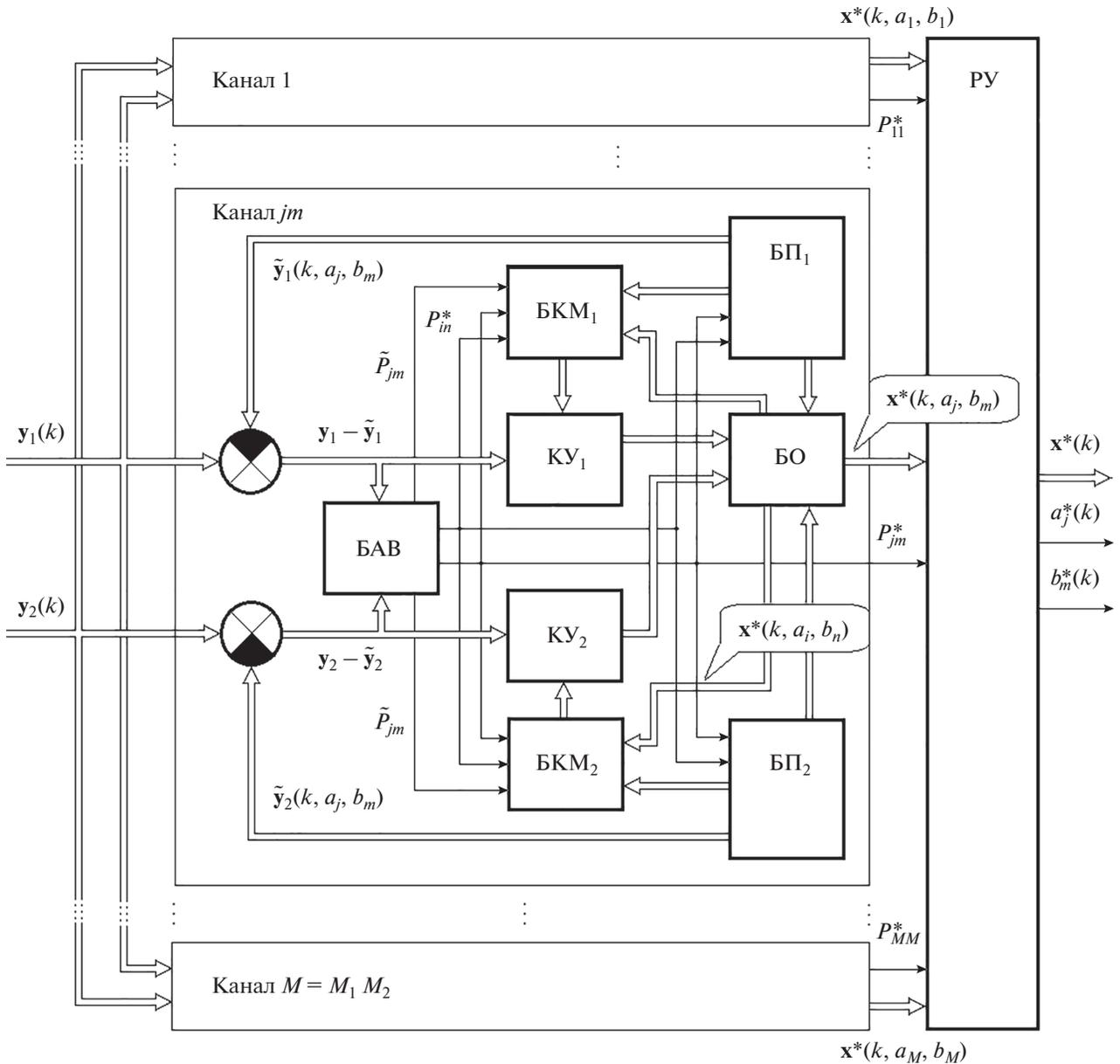
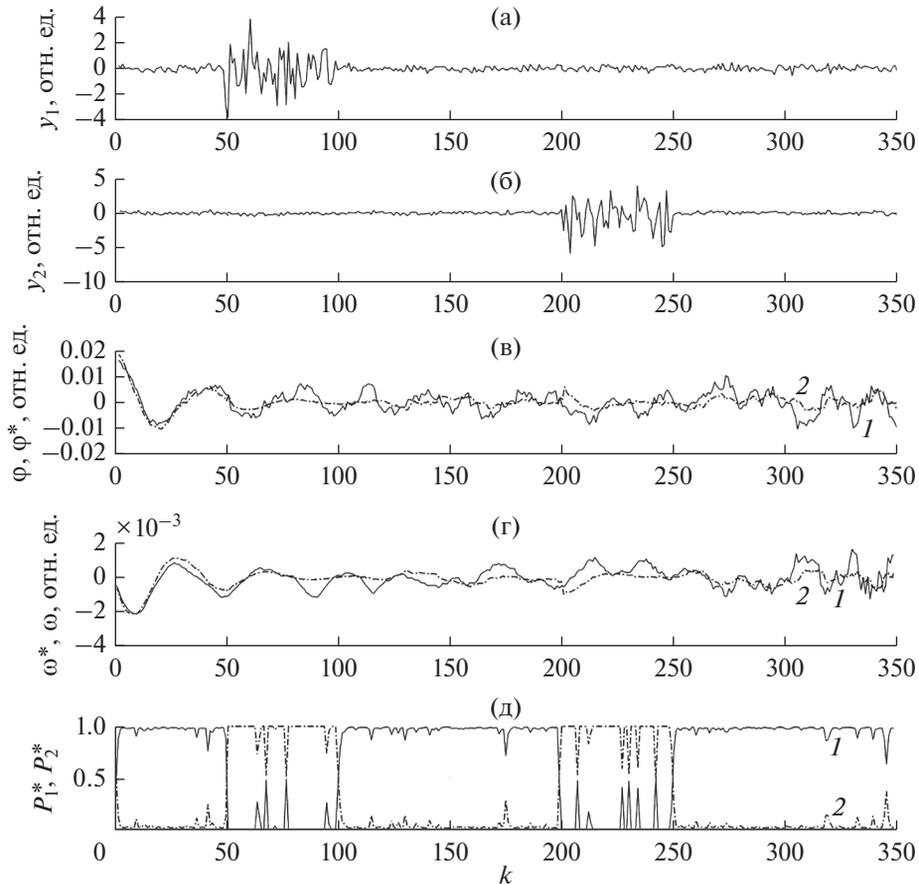


Рис. 1. Структурная схема цифрового фильтра комплексной обработки информации.

*Пример.* В качестве примера использования синтезированного квазиоптимального алгоритма КОИ рассмотрим задачу наведения ЛА на цель в горизонтальной плоскости в условиях нарушений в каналах измерений. При этом исходные вектор состояния и матрицы априорных уравнений (1), (2) имеют вид

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \Phi_{xx}(\Delta) = \exp\{-\alpha\Delta\} \begin{bmatrix} \cos\mu\Delta + \frac{\alpha}{\mu} \sin\mu\Delta & \frac{1}{\mu} \sin\mu\Delta \\ -\mu \sin\mu\Delta & \cos\mu\Delta - \frac{\alpha}{\mu} \sin\mu\Delta \end{bmatrix}, \\
 \Gamma_{xx}(\Delta) = \sqrt{D_x (1 - \exp\{-2\alpha\Delta\})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \sqrt{\mu^2 - \alpha^2} \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(a_j(k), b_m(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_m(k) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{yy}(a_j(k)) = \begin{bmatrix} \sqrt{a_j(k)D_{y1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{D_{y2}} \end{bmatrix}; \tag{26}$$



**Рис. 2.** Результаты моделирования и оценивания в дискретном времени: а) измерения угла пеленга активным каналом РЛС; б) измерения угла пеленга пассивным каналом РЛС; в) зависимость угла пеленга  $\phi$  (1) и оценки угла пеленга  $\phi^*$  (2) от дискретного времени наведения  $k$ ; г) зависимость угловой скорости линии визирования  $\omega$  (1) и оценки угловой скорости линии визирования  $\omega^*$  (2) от дискретного времени наведения  $k$ ; д) – зависимость вероятности отсутствия нарушений в каналах измерений  $P_1^*$  (1) и  $P_2^*$  (2) от дискретного времени наведения  $k$ .

где  $\phi$  – угол пеленга на цель;  $\omega$  – угловая скорость линии визирования;  $1/\alpha = \tau = D^*/2V_{сб}$  – время, оставшееся до конца наведения [5],  $\mu$  – коэффициент, характеризующий математическое ожидание флуктуаций угловой скорости линии визирования;  $V_{сб}$  – скорость сближения с целью;  $D^*$  – текущая оценка дальности до цели (считается, что измеряется активным каналом бортовой РЛС или оценивается другими бортовыми датчиками без погрешностей даже в условиях противодействия среды).

Проверка качества квазиоптимального алгоритма проведена с помощью статистического моделирования на ЭВМ для случая, когда параметры уравнений (26) имеют значения:  $\mu = 0.16$  рад/с,  $\Delta = 1$  с,  $\sqrt{D_x/D_{y1}} = 1$ ;  $\sqrt{D_x/D_{y2}} = 0.5$ ; а цепи Маркова принимают значения  $a_1 = 1, a_2 = 100; b_1 = 1, b_2 = 0$ . Вероятности перехода  $\pi_{11}^1 = \pi_{11}^2 = 0.8; \pi_{12}^1 = \pi_{12}^2 = 0.2$ . В целях повышения наглядности функционирования алгоритма была сформирована тестовая реализация для дискретных компонент  $A(k), B(k)$ .

При этом было принято, что длина реализации  $k = \overline{1,350}$ , а цепь Маркова принимает значения

$$A(k) = \begin{cases} a_1, & 1 \leq k < 50, 101 \leq k < 350 \\ a_2, & 51 \leq k < 100 \end{cases},$$

$$B(k) = \begin{cases} b_1, & 1 \leq k < 200, 251 \leq k < 350 \\ b_2, & 201 \leq k < 250 \end{cases}.$$

Определение статистических характеристик квазиоптимальных алгоритмов КОИ проводили методом Монте-Карло, при этом тестовая реализация дискретной цепи Маркова  $A(k)$  сохранялась неизменной, а независимые гауссовские последовательности  $\xi_1(k), \xi_2(k), \zeta_1(k), \zeta_2(k)$  сформированы с помощью датчика случайных чисел [14]. Для определения оценок дискретного и непрерывного компонентов было использовано решающее правило (23)–(24), в котором  $\alpha = 1, \beta = 0$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 2 и в табл. 1.

**Таблица 1.** Среднеквадратическое отклонение (СКО) погрешности оценивания угла пеленга в условиях нарушения измерений

Алгоритм оценки	Оценка по измерениям только $y_1$	Оценка по измерениям только $y_2$	КОИ по измерениям $y_1$ и $y_2$
Квазиоптимальный алгоритм (6)–(22)	0.14	0.22	0.09
Квазиоптимальный алгоритм по методу переприсвоения параметров условных АПВ вектора $x(k)$ [5]	0.23	0.28	0.19
Псевдобайесовский алгоритм 2-го порядка [6]	0.92	1.06	0.79

Данные табл. 1 показывают эффективность комплексирования активного и пассивного радиолокационных угломерных каналов на основе квазиоптимального алгоритма (6)–(21), (23)–(25) в условиях скачкообразных нарушений в каналах измерений. Необходимо отметить, что при реализации квазиоптимального алгоритма отсутствует рост числа каналов фильтра, как в случае байесовского алгоритма адаптивного оценивания [6], что обусловлено марковским свойством ДНМП.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами теории условных марковских процессов решена задача оптимального оценивания ненаблюдаемых компонент векторной марковской последовательности дискретно-непрерывного марковского процесса при двухканальном векторном наблюдении. Синтезированные алгоритмы основаны на разложении смешанной апостериорной плотности вероятности вектора состояния  $[x^T(k), a_j(k), b_m(k)]^T$  и являются алгоритмами с обратными связями по дискретному процессу  $s(k) = [a_j(k), b_m(k)]^T$ . На основе квазиоптимального алгоритма разработана соответствующая структурная схема цифрового фильтра КОИ.

Особенность синтезированного квазиоптимального алгоритма комплексирования состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов ДНМП между собой, что потребует дополнительных вычислительных затрат по сравнению с известными алгоритмами. Однако современная высокопроизводительная вычислительная техника позволяет построить практически реализуемый цифровой фильтр КОИ в условиях противодействия среды.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярлыков М.С., Богачев А.С., Меркулов В.И., Дрогалин В.В. Радиоэлектронные комплексы навигации, прицеливания и управления вооружением. Т. 1. Теоретические основы. М.: Радиотехника, 2012.
2. Верба В.С., Меркулов В.И., Попов Е.В., Чернов В.С. // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2014. Т. 12. № 2. С. 32.
3. Верба В.С., Меркулов В.И., Миляков Д.А., Чернов В.С. // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 4. <http://jre.cplige.ru/koi/apr15/7/text.pdf>.
4. Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С. Системы управления ко-нечным положением в условиях противодействия среды. М.: Наука, 1989.
5. Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А. Алгоритмическая помехозащита беспилотных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2018.
6. Гришин Ю.П., Казаринов Ю.М. Динамические системы, устойчивые к отказам. М.: Радио и связь, 1985.
7. Евланов П.А., Жук С.Я. // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1990. Т. 33. № 7. С. 49.
8. Миронов М.А. // РЭ. 1985. Т. 30. № 5. С. 973.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
10. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
11. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
12. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
13. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
14. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
15. Детков А.Н. // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 748.
16. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1978.

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

---

УДК 004.02+004.8

**МЕТОД ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО  
КОМПЛЕКСА ПРИ МОНИТОРИНГЕ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ  
РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СТАНЦИЙ И СЕНСОРНЫХ ПЛАТФОРМ**© 2022 г. Н. С. Акиншин<sup>а</sup>, А. А. Потапов<sup>б, \*</sup>, Е. И. Минаков<sup>с</sup>, А. В. Тимошенко<sup>д</sup>, А. Ю. Перлов<sup>д</sup><sup>а</sup>Центральное конструкторское бюро аппаратостроения,  
ул. Демонстрации, 36, Тула, 300034 Российская Федерация<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация<sup>с</sup>Тульский государственный университет,  
просп. Ленина, 92, Тула, 300012 Российская Федерация<sup>д</sup>НИУ «МИЭТ»,  
пл. Шокина, 1, Зеленоград, 124498 Российская Федерация

\*E-mail: potapov@cplire.ru

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.

После доработки 22.10.2021 г.

Принята к публикации 16.11.2021 г.

Предложен метод оценки производительности вычислительного комплекса, осуществляющего сбор, хранение и обработку данных о техническом и функциональном состоянии компонент радиолокационных станций и сенсорных сетей в интересах прогнозирования их характеристик. Показано, что решение задачи оперативного и высокоточного прогноза значений функциональных характеристик радиолокационных станций наиболее эффективно решать на специализированном вычислительном комплексе, который должен не только осуществлять прогноз технического состояния функциональных систем станций, но и обеспечивать решение задач информационной поддержки принятия решений обслуживающим персоналом по обеспечению заданных характеристик радиолокационных станций и сенсорных платформ.

DOI: 10.31857/S0033849422050011

**ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время одной из важных задач при создании платформ для сбора, анализа, интерпретации сенсорной информации для большого числа одновременных подключений сенсоров, включая робототехнические комплексы, с ограничением времени интеграции в систему является определение требований к производительности вычислительного комплекса, входящего в состав таких платформ. В зависимости от их назначения данные требования могут иметь жесткие ограничения как по стоимости, так и по массогабаритным характеристикам, что не позволяет применять вычислители с “большим запасом” по производительности.

Одним из примеров таким платформ является автоматизированная информационная система поддержки управления эксплуатацией современных цифровых радиолокационных систем (РЛС), предназначенная для совершенствования процессов управления эксплуатацией, одной из основных задач которой является высокоточный и

оперативный анализ и прогноз изменения функциональных характеристик систем, входящих в состав РЛС, с горизонтом прогнозирования не менее 30 мин.

Актуальность разработки технологий и методов управления эксплуатацией подтверждается также Национальной стратегией развития искусственного интеллекта на период до 2030 г. [1], в числе приоритетных направлений которой определено прогнозирование отказов оборудования и его превентивное техническое обслуживание.

Высокоточный и оперативный анализ и прогноз функциональных характеристик сложных систем, к которым относятся современные радиолокационные станции дальнего обнаружения (РЛС ДО), в значительной мере определяется применяемыми алгоритмами, а также возможностями соответствующего специализированного вычислительного комплекса, входящего в состав контрольно-диагностической системы РЛС, являющейся частью информационной системы поддержки управления эксплуатацией. Возможности вычислительного

комплекса определяются в первую очередь его производительностью, под которой следует понимать объем информации, обрабатываемый с заданной вероятностью по заданным алгоритмам за определенное время.

## 1. ОЦЕНКА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

Вопросы оценки производительности вычислительных комплексов исследуются еще с 70-х годов XX в. [2, 3], но несмотря на то, что получены основательные методические и теоретические результаты, далеко не все вопросы, возникающие в практической реализации методик оценки быстродействия сложных систем управления, являются успешно разрешенными. Поэтому и в настоящее время задача оценки производительности вычислительных комплексов важна и актуальна.

Под производительностью понимается [4, 5] характеристика вычислительного комплекса, определяющая количество вычислительной работы, выполняемой комплексом за единицу времени. В настоящее время отсутствует как единая общепринятая единица измерения вычислительной работы, так и методика оценки производительности, на которую влияет ряд факторов, объединяемых в пять групп [6, 7]:

- аппаратные средства;
- сетевые протоколы;
- программные средства;
- широкополосный трафик;
- ошибочные ситуации.

С точки зрения цели определение производительности сводится к сравнительной оценке существующих систем и прогнозированию производительности, а любой метод [8, 9] можно представить как последовательность отдельных шагов, зависящих от ряда факторов.

**Шаг 1.** Выбор параметров, по которым вычисляется оценка.

**Шаг 2.** Анализ структуры системы, ее загрузки и определение связи с производительностью. В рамках данного шага строится модель вычислительного комплекса, позволяющая смоделировать потребление прикладным процессом отдельных ресурсов.

**Шаг 3.** Выбор параметров рабочей нагрузки вычислительного комплекса, а также построение модели производительности, для чего используются модели рабочей нагрузки и вычислительного комплекса.

Рассчитаем значение системной производительности. Для количественных оценок используются понятия номинальной и системной производительности [10].

Номинальная производительность – потенциальные возможности отдельных устройств, которые не могут быть использованы полностью, определяется:

$$V_H = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (1)$$

где  $v_i$  – быстродействие  $i$ -го устройства вычислительного комплекса.

Показателем использования  $i$ -го устройства в процессе работы системы является загрузка, которая может быть определена следующим отношением [11]:

$$p_i = T_i/T, \quad (2)$$

где  $T_i$  – время, в течение которого  $i$ -е устройство работало,  $T$  – общая продолжительность работы системы.

Системная производительность  $V_C$  учитывает совместную работу устройств под управлением операционной системы для определенного класса задач:

$$V_C = (p_1V_1, p_2V_2, \dots, p_nV_n). \quad (3)$$

Оценка значений показателей  $p_i$  может быть получена на основе статистических данных по результатам моделирования. Поэтому показатель системной производительности для вычислительных машин используется редко [12]. Чаще всего он используется как средство для количественного сопоставления производительности вычислительных машин.

До настоящего времени не разработаны универсальные методы оценки производительности вычислительных комплексов [13–16]. Существующие методы оценки производительности опираются на архитектуру вычислительного комплекса, где каждый системный компонент имеет свое выражение в переменных и в структурах ядра операционной системы. Набор значений переменных характеризует состояние системы в определенный момент времени. Исследуя изменение этих характеристик, можно определить ее поведение на любом временном интервале [17–21].

Анализ работ [22–24] показал, что в настоящее время методический аппарат по обоснованию требований к характеристикам вычислительных комплексов диагностических систем зачастую излишне теоретизирован и учитывает множество факторов, которые при решении инженерных задач учесть либо затруднительно, либо вовсе невозможно [25].

В данной работе предлагается метод оценки производительности вычислительного комплекса контрольно-диагностической системы автоматизированной информационной системы поддержки управления эксплуатацией современных цифровых РЛС, в основу которого положен анализ потока данных.

## 2. ОПИСАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Основой контрольно-диагностической системы (КДС) РЛС ДО является аппаратно-программный комплекс (АПК) сбора, обработки, анализа, отображения и хранения информации о функционировании изделия и его составных частей. Кроме того, в состав КДС входят каналы связи, элементы контроля (ЭК) и др.

Основным назначением КДС является контроль технических характеристик составных частей РЛС ДО всех уровней разукрупнения (от типового элемента замены до частотно-зависимой части (ЧЗЧ)) с целью их непрерывного поддержания в заданных пределах.

Перечислим основные задачи КДС.

1. Оперативное и непрерывное получение достоверной информации об изменении основных параметров РЛС ДО, влияющих на ее потенциал, для решения задачи прогнозирования энергетического потенциала РЛС ДО.

2. В автоматизированном режиме поиск места и определение причин возможного отказа (неисправности) всех составных частей РЛС.

3. Информирование обслуживающего персонала о текущем техническом состоянии изделия и его составных частей.

Основным источником информации для КДС является ЭК, который представляет собой датчик (двоичный, цифровой, аналоговый), размещаемый на составных частях РЛС и постоянно измеряющий соответствующий параметр.

АПК КДС представляет собой распределенную информационную систему, включающую следующие структурные элементы: модули ввода/вывода (МВВ); программируемые логические контроллеры (ПЛК), вычислительный комплекс (ВК), автоматизированное рабочее место оператора (АРМ) оператора. Структура КДС в общем виде представлена на рис. 1.

Уровень сбора данных, как следует из названия, предназначен для сбора первичных данных с элементов контроля. Основная задача данного уровня – обеспечение согласования между полевым и уровнем контроля и анализа данных. Здесь также можно проводить предварительный анализ поступающих данных, но данная функция не является обязательной.

Анализ данных осуществляется на верхнем уровне системы. Основным элементом данного уровня является вычислительный комплекс, производительность которого определяет вычислительные возможности КДС.

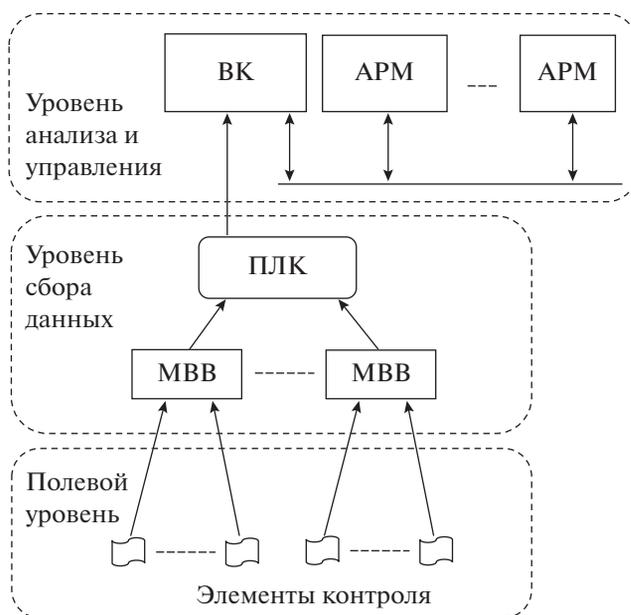


Рис. 1. Структура контрольно-диагностической системы РЛС ДО: модули ввода/вывода (МВВ), программируемые логические контроллеры (ПЛК); вычислительный комплекс (ВК); автоматизированное рабочее место оператора (АРМ).

Под производительностью в данном случае понимается объем данных, который должен быть гарантированно обработан за заданное время:

$$p(f_t(A(M)) < \tau) \geq p_0, \tag{4}$$

где  $p$  – вероятность;  $f_t$  – функция определения времени обработки объема данных  $M$  некоторым заданным алгоритмом  $A$ ,  $p_0$  – заданная вероятность (как правило,  $p_0 \geq 0.95$ ).

Поток информации от ЭК является основной нагрузкой на каналы связи и вычислительные узлы и формирует массив данных для обработки. Каждое сообщение от ЭК является кодограммой универсального формата и занимает около 100 байт. При этом число ЭК в изделии может быть более 50000 единиц, что обуславливает большой поток информации, поступающей в реальном времени в АПК.

Предварительные оценки объемов данных о техническом состоянии систем современных РЛС показали, что в среднем за сутки объем собираемых данных составляет около 20 Гбайт.

## 3. МЕТОД ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

Для оценки производительности вычислительного комплекса на основе анализа функциональной схемы РЛС, как правило, требуется разрабо-

тывать структурно-логическую схему выполнения необходимых операций вычисления, оценивать потенциальную нагрузку и трудоемкость каждой из операций, выполняемых на вычислительном комплексе.

Как отмечено выше, в настоящее время не существует единых подходов к оценке производительности, равно как и не существует единых единиц измерения, но, тем не менее, производительность любой вычислительной системы может быть определена двумя основными характеристиками:  $v$  – быстродействие вычислительного комплекса;  $s$  – пропускная способность каналов связи.

Следует отметить, что не зависимо от сложности топологии сети передачи данных, определяющей каналы связи, оценка параметра  $s$  должна осуществляться для наиболее сложного (нагруженного) случая.

Как известно, одной из основных единиц измерения быстродействия любого вычислительного устройства является MIPS – million instruction per second (миллион операций в секунду) или FLOPS – floating point operation per second (количество операций с плавающей точкой в секунду).

В данном случае в качестве единицы измерения быстродействия предлагается принять количество элементарных операций в единицу времени. В качестве элементарной операции целесообразно использовать любую, сколь угодно малую часть алгоритма, время выполнения которой на вычислительном комплексе постоянно. Для перехода к иным единицам измерения, необходимо это значение умножить на соответствующий коэффициент.

В качестве единицы измерения пропускной способности каналов связи предлагается использовать количество байт, передаваемых по линиям связи в единицу времени. Единицей времени для обеих величин является секунда.

Для простоты рассуждений и вычислений предлагается следующее допущение: быстродействие вычислительного комплекса определяется с учетом времени обращения к памяти, необходимое для выполнения вычислительных операций. Пропускная способность каналов связи рассчитывается с учетом времени обращения к дисковым устройствам.

Таким образом, для определения требуемой производительности АПК КДС, т.е. выполнения требования (4), необходимо рассчитать значения параметров  $v$  и  $s$  для наиболее сложного (нагруженного) режима эксплуатации.

В общем случае для расчета требуемой пропускной способности канала связи можно воспользоваться выражением

$$S = M/kT, \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент загрузки каналов связи,  $M$  – передаваемый объем данных,  $T$  – время.

Коэффициент загрузки каналов связи определяется топологией сети, используемыми протоколами, методом доступа к каналам связи. В среднем для сетей, построенных по топологии “Звезда”, использующей протокол канального уровня Ethernet, коэффициент  $k = 0.5$ , что соответствует высокому уровню загрузки сети и характеризует наиболее нагруженный режим работы.

Пусть обрабатываемый алгоритм представляет собой множество элементарных операций  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_M\}$  с временем выполнения  $T_1 = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M\}$ , при этом отдельные операции могут выполняться циклически  $q$  раз.

Тогда требуемое быстродействие вычислительного комплекса может быть рассчитано по следующей формуле:

$$v = \frac{n + \sum_{j=1}^m q_j}{T_1 + T_2}, \quad (6)$$

где  $n$  – количество операций без циклов,  $m$  – количество циклических операций,  $q_j$  – кратность выполнения  $i$ -й циклической операции,

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \tau_i, \quad T_2 = \sum_{j=1}^m \frac{p_j^c}{1 - p_j^c} \tau_j$$

– время выполнения операций без циклов и время выполнения циклических операций соответственно,  $p_j^c = [0, 1)$  – вероятность выполнения  $j$ -й циклической операции. Следует отметить, что  $p_j^c = 1$  соответствует бесконечному циклу и приведет к закликиванию программы.

Для моделирования работы АПК КДС предлагается использовать теорию систем массового обслуживания [26, 27]. КДС представляется в виде сети массового обслуживания (СМО), в узлах которой находятся элементы контроля, характеризующиеся следующим множеством:

$$h^j = \{\lambda^j, p^j, m^j\}, \quad (7)$$

где  $h^j$  – поток данных элемента контроля  $j$ -го типа,  $\lambda^j$  – интенсивность потока данных (количество пакетов данных, передаваемых в единицу времени) элемента контроля  $j$ -го типа,  $m^j$  – объем данных (в байтах), передаваемых в одном пакете данных от элемента контроля  $j$ -го типа,  $p^j$  – вероятность передачи данных элементом контроля  $j$ -го типа.

На рис. 2 представлена структура аппаратно-программного комплекса в виде СМО.

Как сказано выше, объем данных, подлежащих обработке в АПК КДС формируется ЭК, которых, в общем случае, может быть нескольких

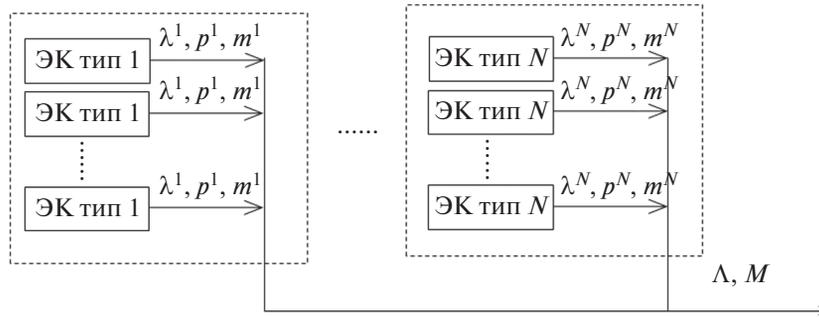


Рис. 2. Представление аппаратно-программного комплекса как сети массового обслуживания (ЭК – элемент контроля).

различных типов, определяемых структурой и назначением контролируемого объекта.

Учитывая, что количество различных типов ЭК конечно, то для расчета полного объема данных, подлежащих обработке в АПК КДС, можно воспользоваться выражением

$$M = T \sum_{j=1}^N \sum_i^{n^j} p^j \lambda_i^j m_i^j, \quad (8)$$

где  $M$  – объем данных, который необходимо обработать в АПК КДС за интервал времени  $T$ ;  $N$  – количество типов элементов контроля;  $n^j$  – количество элементов контроля  $j$ -го типа.

Тогда выражение (5) примет вид

$$s = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^N \sum_i^{n^j} p^j \lambda_i^j m_i^j. \quad (9)$$

Очевидно, что поступающие данные должны обрабатываться с интенсивностью не ниже чем

$$\lambda^v = \max \{ \lambda^j | \forall j = 1, \dots, N \}. \quad (10)$$

В итоге предложенная математическая модель позволяет сформулировать метод оценки производительности вычислительного комплекса, включающий следующие этапы.

*Этап 1.* Описание параметров элементов контроля каждого типа в виде множества (7).

*Этап 2.* Расчет общего объема поступающих данных за заданный промежуток времени с использованием выражения (8).

*Этап 3.* Определение требуемой пропускной способности каналов связи с использованием выражения (9). Определение интенсивности обработки данных.

*Этап 4.* Расчет требуемой производительности вычислительного комплекса с использованием выражения (6).

*Этап 5.* Обобщение полученных результатов расчета. Формирование требований к АПК КДС.

#### 4. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Приведем пример оценки производительности вычислительного комплекса на основании предложенного метода.

Пусть имеется пять типов элементов контроля со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} h^1 &= \{5 \ 0.9 \ 100\}, \quad n^1 = 1000, \\ h^2 &= \{7 \ 0.85 \ 200\}, \quad n^2 = 1500, \\ h^3 &= \{9 \ 0.95 \ 300\}, \quad n^3 = 1000, \\ h^4 &= \{6 \ 0.85 \ 200\}, \quad n^4 = 2000, \\ h^5 &= \{7 \ 0.9 \ 500\}, \quad n^5 = 4000. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда общее количество данных, поступивших за период, например,  $T = 1$  с и подлежащих обработке, будет равно (8):

$$\begin{aligned} M &= 100(1500 \times 7 \times 0.85 \times 200 + \\ &+ 1500 \times 9 \times 0.95 \times 300 + \\ &+ 1000 \times 9 \times 0.95 \times 300 + 2000 \times 6 \times 0.85 \times 200 + \\ &+ 4000 \times 7 \times 0.9 \times 500) = \\ &= 22837500 \text{ байт} \approx 21.78 \text{ Мбайт}. \end{aligned}$$

Пропускная способность каналов связи определяется по выражению (9):

$$s = 43.56 \text{ Мбайт/с} = 348.48 \text{ Мбит/с}.$$

Данный результат показывает, что сеть с пропускной способностью 100 Мбит/с не сможет гарантированно передать поток данных с заданными характеристиками. Соответственно, необходимо организовывать каналы связи с гарантированной пропускной способностью 500 Мбит/с и выше.

Пусть алгоритм расчета содержит 10 элементарных операций, из которых семь операций без циклов и их время выполнения рассчитывается по формуле

$$T_i = \{5 \times 10^{-6} \ 3 \times 10^{-6} \ 4 \times 10^{-6} \ 2 \times 10^{-6} \ 1 \times 10^{-6} \ 1 \times 10^{-6} \ 2 \times 10^{-6}\}.$$

В табл. 1 представлены параметры выполнения циклических операций при  $m = 3$ .

Тогда требуемая производительность может быть определена с помощью выражения (6):

$$v = \frac{7 + 5 + 7 + 6}{18 \times 10^{-6} + \frac{0.8}{0.2} \times 4 \times 10^{-6} + \frac{0.9}{0.1} \times 2 \times 10^{-6} + \frac{0.85}{0.15} \times 1 \times 10^{-6}} = \frac{23}{58 \times 10^{-6}} = 0.4 \times 10^6.$$

Для получения значения производительности в FLOPS, необходимо значение производительности умножить на соответствующий коэффициент. Пусть для данного примера этот коэффициент равен 1000, тогда требуемая производительность вычислительного комплекса равна  $0.4 \times 10^9$  FLOPS или 0.4 GFLOPS.

Таким образом, для данного примера можно сформулировать следующие требования к вычислительному комплексу:

– пропускная способность каналов связи не ниже 500 Мбит/с;

– производительность не ниже  $0.4 \times 10^6$  элементарных операций в секунду (для данного алгоритма) либо 0.4 GFLOPS при условии, что одна элементарная операция выполняется не более чем за 1000 операций с плавающей точкой.

На основании сказанного можно сделать вывод, что для корректного определения требований к вычислительному комплексу необходимо знать параметры потока данных, а также параметры алгоритма обработки, которые являются исходными данными для расчетов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод оценки производительности вычислительного комплекса, который использует параметры потока данных и не требует знаний о структуре вычислительного комплекса.

Показано, что решение задачи оперативного и высокоточного прогноза значений функциональных характеристик радиолокационных станций наиболее эффективно решать на специализированном вычислительном комплексе, который должен не только осуществлять прогноз технического состояния функциональных систем станций, но и обеспечивать решение задач информационной поддержки принятия решений обслуживающим персо-

**Таблица 1.** Параметры выполнения циклических операций при  $m = 3$

$j$	Кратность выполнения $q_j$	Вероятность выполнения $p_j^c$	Время выполнения $\tau_j$
1	5	0.8	$4 \times 10^{-6}$
2	7	0.9	$2 \times 10^{-6}$
3	6	0.85	$1 \times 10^{-6}$

налом по обеспечению заданных характеристик радиолокационных станций.

Отказ от глубокого анализа структуры комплекса позволил значительно упростить математическую модель, положенную в основу метода, что делает его удобным в практическом применении.

На конкретном примере проведена оценка производительности вычислительного комплекса на основании предложенного метода, что позволило сформировать требования к вычислительному комплексу в части пропускной способности каналов связи.

Предложенный метод может быть использован при решении прогнозирования технического состояния сложных радиоинформационных комплексов и сенсорных платформ в режиме реального времени.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Выполнение работы (А.Ю. Перлов) поддержано финансово Советом по грантам Президента для молодых кандидатов наук (грант МК-241.2021.4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Указ Президента РФ от 10.10.2019 N 490 “О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации” (вместе с “Национальной стратегией развития искусственного интеллекта на период до 2030 года”). [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_335184/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_335184/).
2. Мельник М.А., Насонов Д.А., Бухановский А.В. // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 2. С. 191. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42544098>.
3. Костров Б.В., Мартышкин А.И. // Изв. Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. № 2. С. 152. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32869270>.
4. Забузов В.С., Казанцев Д.И. // Тр. Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. СПб., 2016. № 655. С. 24. <https://elibrary.ru/item.asp?id=28422679>.
5. Демин А.В., Дмитриева С.П. // Матер. VII Междунар. науч.-технич. конф. “Низкотемпературные и пищевые технологии в XXI веке”. СПб, 17-20 ноября, 2015. С. 364. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25481722>.
6. Климанова Е.Ю., Субханкулова А.Р., Зеленко Б.В., Леонтьева О.Ю. // Вестник Технол. ун-та. Матер. конф. 2015. Т. 18. № 24. С. 102. [РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА том 67 № 5 2022](https://cyberlenin-</a></li>
</ol>
</div>
<div data-bbox=)

- ka.ru/article/n/otsenka-proizvoditelnosti-vychislitelnyh-sistem-2/viewer.
7. *Баитанник Н.А.* Оценка производительности вычислительного комплекса информационно-измерительной и управляющей системы специального назначения. Дис. ... канд. техн. наук. Астрахань: Астраханский гос. ун-т, 2010. 176 с.
  8. *Ларионов А.М., Майоров С.А., Новиков Г.И.* Вычислительные комплексы, системы и сети. Л.: Энергоатомиздат, 1987.
  9. *Комаров И.В.* // Тр. СПИИРАН. СПб.: Наука, 2005. Вып. 2. Т. 2. С. 155.
  10. *Martyshkin A.I.* // ARPN J. Engineering Appl. Sci. 2016. V. 11. № 23. P. 13526.
  11. *Salnikov I.I., Babich M.Yu., Butaev M.M., Martyshkin A.I.* // Intern. J. Appl. Engineering Research. 2016. V. 11. № 19. P. 9846.
  12. *Hoekstra A.G., Chopard B., Coster D. et al.* // Philos. Trans. R. Soc. A – Math. Phys. Eng. Sci. 2019. V. 377. № 2142. Article number 20180144. <https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0144>
  13. *Ben Belgacem M., Chopard B.* // Futur. Gener. Comput. Syst. 2017. V. 67. P. 72.
  14. *Almigheerbi T.S., Ramsey D., Lamek A.* // Proc. 11th Int. Joint Conf. on Knowledge Discovery, Knowledge Engineering and Knowledge Management. Vienna. 17–19 Sept. 2019. Setubal: Science and Technology Publications, Lda, 2019. V. 3. P. 203. <https://doi.org/10.5220/0008119902030211>
  15. *Prathibha S., Latha B., Sumathi G.* // J. Internet Technol. 2017. V. 18. № 3. P. 589. <https://doi.org/10.6138/JIT.2017.18.3.20161101>
  16. *Kuzmenko N.S., Ostroumov I.V.* // IEEE First Int. Conf. on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC). Kyiv. 08–12 Oct. 2018. N.Y.: IEEE, 2018. P. 8516790. <https://doi.org/10.1109/SAIC.2018.8516790>
  17. *Xu K., Zhong Y.* // Operations Research. 2020. V. 68. № 6. P. 1698. <https://doi.org/10.1287/OPRE.2019.1940>
  18. *Chen X., Li Z., Chen Y. et al.* // Concurrency Computat. Pract. Exper. 2020. V. 32. № 16. P. e5145. <https://doi.org/10.1002/cpe.5145>
  19. *Wang X., Zhang S., Zhang M. et al.* // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2017. 10393 LNCS. P. 331. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-65482-9\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-319-65482-9_22)
  20. *Zhang K., Lyu Y., Zhang L.* // Chinese Control Conf. CCC, 2020-July. P. 4290. <https://doi.org/10.23919/CCC50068.2020.9189017>
  21. *Markova E., Satin Y., Kochetkova I. et al.* // Mathematics. 2020. V. 8. № 5. Article № 800. <https://doi.org/10.3390/math8050800>
  22. *Vasquez-Toledo L.A., Borja-Benítez B., Marcelin-Jiménez R. et al.* // AEU – Int. J. Electronics and Communications. 2020. P. 127. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2020.153406>
  23. *Turovska A., Ostroumov I.* // Proc. 10th Int. Conf. Advanced Computer Information Technol. (ACIT). Degendorf. 16–18 Sept. 2020. N.Y.: IEEE, 2020. P. 250. <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208984>
  24. *Jiang G., Fan Y.* // Sensors. 2019. V. 19. № 2. Article № 348. <https://doi.org/10.3390/s19020348>
  25. *Gorbatenko N.I., Scoba A.N., Mikhaylov V.K.* // Proc. 2020 Int. Conf. RusAutoCon. P. 400. <https://doi.org/10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208044>
  26. *Gaitonde J., Tardos É.* // Proc. EC 2020 - 21st ACM Conf. Economics and Computation. Budapest. 13–17 Jul. 2020. N.Y.: ACM, 2020. P. 319. <https://doi.org/10.1145/3391403.3399491>
  27. *Martyshkin A.I., Pashchenko D.V., Trokoz D.A. et al.* // Bull. Electrical Engineering and Informatics. 2020. V. 9. № 3. P. 1106. <https://doi.org/10.11591/eei.v9i3.1714>

---

---

**ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

---

---

УДК 621.39

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА НА ОСНОВЕ  
ФАЗОКОНТУРНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ**

© 2022 г. С. А. Иванов<sup>а</sup>, П. В. Закалкин<sup>а</sup>, И. Ю. Смирнов<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного,  
Тихорецкий пр., 3, Санкт-Петербург, 194064 Российская Федерация

\*E-mail: sensemile.nic@mail.ru

Поступила в редакцию 24.11.2020 г.

После доработки 24.11.2020 г.

Принята к публикации 01.11.2021 г.

Рассмотрен новый подход к моделированию оптического волокна. Исследован вопрос распространения положений теории цепей на элементы с рассредоточенными элементами – оптическое волокно. Показано, что основой решения задачи синтеза параметров оптического волокна в теории цепей является метод моделирования четвертьволнового отрезка линии схемой фазового контура первого порядка.

DOI: 10.31857/S0033849422050072

### ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития оптических технологий оптическое волокно (ОВ) нашло широкое применение не только в телекоммуникации, но и во многих других отраслях [1]. В зависимости от целевого приложения различаются необходимые масштабы производства требуемого типа ОВ – от крупносерийного до штучного производства специализированных ОВ.

Производство ОВ сложный и дорогостоящий процесс, поэтому на этапе его разработки требуется предварительное моделирование. В известных программных продуктах, позволяющих моделировать ОВ (например, Code V, ZEMAX, Opal, TracePro), преимущественно используются имитационные методы. Имитационные модели удобно применять при моделировании существующих объектов для определения их показателей в переменных условиях. Это требует проведения множества экспериментов, ограниченных точностью выходных данных, с последующей аппроксимацией и повторением. Для разработки новых типов специализированных ОВ требуются строгие методы моделирования, позволяющие находить оптимальные значения показателей волокна без проведения аппроксимационных этапов на физическом объекте. В данных методах используется аналитическое моделирование, ограниченное детерминированными процессами, требующее меньше вычислительной мощности, математически проверяемое в прямой и обратной постановке.

Методы аналитического моделирования в области связи хорошо проработаны положениями

теории цепей, применяемой для расчетов фильтров, корректоров, трансформаторов, линий связи и т.п. в различных диапазонах частот – от сверхнизких до сверхвысоких.

Наличие у ОВ избирательности волновой характеристики затухания, подобной имеющейся у оптических фильтров (ОФ), дает основания поиска модели ОВ в виде оптического фильтра, частотные характеристики которого полностью (или максимально приближенно) отображают частотные характеристики затухания ОВ. В основе распространения оптического сигнала (ОС) по ОВ лежит многократно повторяющееся явление полного внутреннего отражения (ПВО) (рис. 1) [1, 2]. При отражении ОС проникает во вторую среду, проходит там расстояние порядка длины волны распространяющегося ОС и возвращается в первую среду. Таким образом возникает сдвиг точки выхода сигнала относительно точки входа [3–5]. Данное явление получило название эффекта Гуса–Хенхена, а факт его существования дает основание для отнесения ОВ к оптическим гетероструктурам (ОГС) – направляющим системам, предназначенным для передачи сигналов оптического диапазона длин волн: инфракрасного, видимого, ультрафиолетового и рентгеновского [6]. Гетероструктуры как системы, составленные из чередующихся пар элементов с отличающимися значениями однотипных параметров, обладают спектральной избирательностью. В данной статье теория и расчет ОГС основаны на общем подходе к структурам как к цепям с распределенными па-

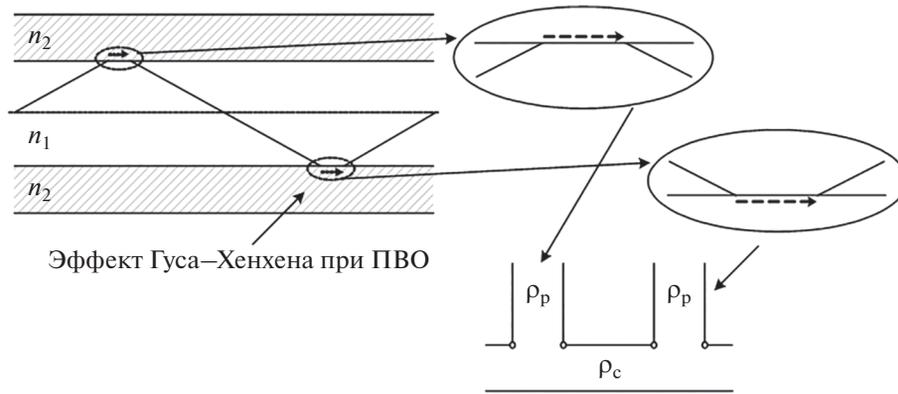


Рис. 1. Моделирование эффекта Гуса–Хенхена резонансным контуром.

раметрами, состоящими из отрезков передающих линий, исследуемых методами теории цепей.

Применение теории цепей было распространено и на оптический диапазон в части элементов с сосредоточенными элементами (оптических многослойных фильтров и корректоров) [6].

Цель данной работы – решить задачу распространения положений теории цепей на элементы с рассредоточенными элементами – ОВ, что позволит аналитически, с применением апробированных на практике научных методов и методик, рассчитывать параметры волокна в прямой и обратной постановке.

### 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗВЕНА ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

В различных учебниках, научных изданиях и отчета приводится множество волновых характеристик затухания ОВ [7–9], которые имеют существенные отличия по форме и величине при прочих равных условиях. Производители ОВ и оптических кабелей (ОК) также, производя измерения волновой характеристики затухания одного и того же ОВ при различных условиях, получают существенно отличающиеся результаты, хотя типы ОВ стандартизованы и их характеристики производители приводят справочно. Этот факт объясняется тем, что при изменении радиуса изгиба ОВ изменяется и количество переотражений ОС и чем больше этих переотражений, тем больше затухание сигнала и уже полоса пропускания.

Но сами по себе многократные переотражения не дали бы такого эффекта без распространения ОС во второй среде. В однородной среде сигнал практически не претерпевает затухания [10]. Отсюда следует, что именно нарастание количества сдвигов ОС и его суммарного пути распространения во второй среде при многократном ПВО определяет изменение волновой характеристики затухания ОВ, а также угол падения ОС и материа-

лы, из которых изготовлены сердцевина и оболочка ОВ. Таким образом, явление сдвига Гуса–Хенхена дает основание для рассмотрения и расчета оптических направляющих систем с точки зрения теории цепей.

В данной статье это явление моделируется резонансным контуром (рис. 1), включенным в оптический путь прохождения сигнала. В этом случае ОВ, состоящее из сердцевины с показателем преломления  $n_1$  и оболочки с  $n_2$ , моделируется схемой фильтра в виде длинной линии, с волновым сопротивлением  $\rho_c$ , с упорядоченно включенными в нее резонансными контурами с волновым сопротивлением  $\rho_p$ . Таким образом, задача расчета оптических характеристик ОВ сводится к расчету характеристик оптического многошлейфного фильтра (ОМШФ).

Для расчета параметров резонансного контура необходимо оценивать величину сдвига Гуса–Хенхена в различных средах распространения. Для оценки величины сдвига были проведены расчеты по формулам, полученным Ренардом в результате исследования эффекта Гуса–Хенхена [11].

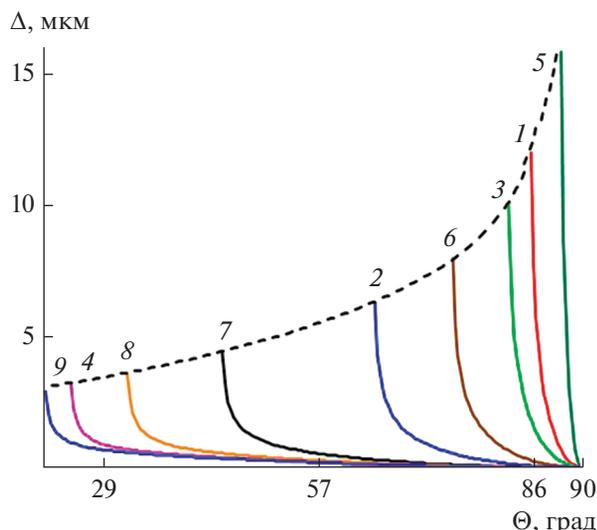
Величина сдвига в случае  $s$ -поляризации с учетом того, что  $\mu = 1$ , рассчитывается по формуле:

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Theta_1 \cos^2 \Theta_1}{1 - (n_2/n_1)^2} \frac{\lambda}{(\sin^2 \Theta_1 - (n_2/n_1)^2)^{1/2}}. \quad (1)$$

Величина сдвига в случае  $p$ -поляризации определяется по формуле

$$\Delta_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \frac{K \sin \Theta_1 \cos^2 \Theta_1}{K^2 \cos^2 \Theta_1 + \sin^2 \Theta_1 - (n_2/n_1)^2} \times \frac{\lambda}{(\sin^2 \Theta_1 - (n_2/n_1)^2)^{1/2}}, \quad (2)$$

где  $\Theta_1 \in [\Theta_{кр}; \pi/2]$ ,  $\Theta_{кр}$  – критический угол ПВО.



**Рис. 2.** Характеристика сдвига Гуса–Хенхена вдоль границы раздела сред в ОВ для *s*-поляризации на длине волны  $\lambda = 1.55$  мкм при различных отношениях ПП и его материалов (кривые 1–9, пояснения см. в тексте); штриховая кривая – зависимость максимального сдвига  $\Delta_{\max}$  от предельного угла ПВО  $\Theta_{\text{кр}}$ .

Все параметры среды с большим показателем преломления (ПП) обозначаются нижним индексом 1, а с меньшим показателем – индексом 2;  $K$  – диэлектрическая постоянная. Из формул (1) и (2) видно, что величина сдвига Гуса–Хенхена прямо пропорциональна длине волны  $\lambda$ .

Для сравнительного анализа изменения сдвига при различных свойствах сред были взяты девять различных соотношений ПП сред (рис. 2, кривые 1–9 соответственно):

- 1)  $n_1 = 1.47, n_2 = 1.46$  (стандартное кварцевое ОВ);
- 2)  $n_1 = 1.47, n_2 = 1.32$  (ОВ с кварцевой сердцевиной и полимерной оболочкой);
- 3)  $n_1 = 1.47, n_2 = 1.45$  (кварцевое ОВ с экспериментальным ПП оболочки);
- 4)  $n_1 = 3.22, n_2 = 1.32$  (полимерное ОВ с экспериментальным ПП);

- 5)  $n_1 = 1.47, n_2 = 1.46$  (кварцевое ОВ с экспериментальным ПП оболочки);
- 6)  $n_1 = 1.47, n_2 = 1.41$  (кварцевое ОВ с экспериментальным ПП оболочки);
- 7)  $n_1 = 1.87, n_2 = 1.32$  (кварцевое ОВ с экспериментальным ПП сердцевины);
- 8)  $n_1 = 2.47, n_2 = 1.32$  (кварцевое ОВ с экспериментальным ПП сердцевины);
- 9)  $n_1 = 3.4, n_2 = 1.32$  (полимерное ОВ с экспериментальным ПП).

Результаты расчетов сдвига Гуса–Хенхена для *s*-поляризации представлены на рис. 2.

Из полученных характеристик видно, что при увеличении отношения показателей преломления оптических сред:

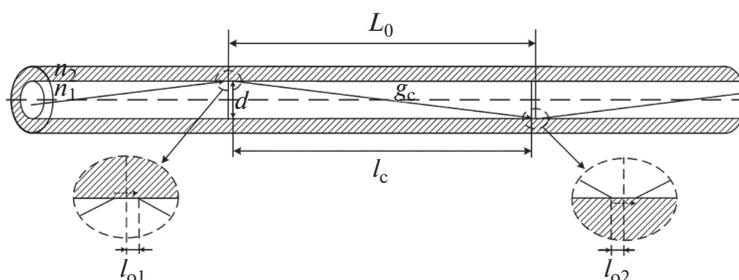
- предельный угол ПВО уменьшается, а сектор ПВО увеличивается (закон Снеллиуса);
- максимум смещения ( $\Delta_{\max}$ ) убывает (см. рис. 2);
- избирательные свойства единицы длины ОВ усиливаются:

$$\Delta_{\max} = \lambda \left( \frac{3}{2} \exp\left(\Theta_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3 \cos \Theta_1} \right). \quad (3)$$

Для моделирования ОВ необходимо ввести новое понятие – звено ОВ (рис. 3). Звено оптического волокна – линейный участок ОВ длиной  $L_0$ , состоящий из трех участков.

1. Участка ОВ длиной  $l_{o1}$ , в котором ОС распространяется в оболочке ОВ при первом ПВО, составляющего половину сдвига Гуса–Хенхена.
2. Участка ОВ длиной  $l_c$ , в котором ОС прямолинейно распространяется в сердцевине ОВ между первой и второй точками отражения ОС от граничных противоположных слоев ОВ.
3. Линейного участка ОВ длиной  $l_{o2}$ , в котором ОС распространяется в оболочке ОВ при втором ПВО, составляющего половину сдвига Гуса–Хенхена.

При этом участки  $l_{o1} = l_{o2} = l_o$  имеют смысл введенных лучом квантовых ям [12, 13], которые обладают ярко выраженными свойствами резонаторов с резонансными частотами  $f_p$ .



**Рис. 3.** Графическое представление звена оптического волокна.

Количество звеньев  $N_{зв}$  на ОВ длиной 1 м исчисляется десятками тысяч. И при таком большом количестве звеньев затухание ОВ остается невысоким. Это объясняется, во-первых, высокой добротностью материала участка звена ОВ (кварцевое стекло), во-вторых, широкой полосой пропускания (ППр) звеньев ОВ и, в-третьих, тем, что все звенья ОВ имеют одинаковые конструктивные и материальные параметры, а это обеспечивает согласованное (без отражений) включение всех звеньев ОВ между собой.

Выделим на рис. 3 треугольник, размер одного катета которого – это диаметр сердцевины  $d$ , гипотенуза – длина пути ОС на участке звена  $g_c$ , второй катет – проекция гипотенузы на ось волокна  $l_c$ . Угол между первым катетом и гипотенузой изменяется в пределах

$$\Theta_{кр} < \Theta_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Выразим длину гипотенузы треугольника  $g_c$  через значения диаметра сердцевины ОВ  $d$  и угла  $\Theta_1$  в виде

$$g_c = d / \cos \Theta_1. \quad (5)$$

Из (5) следует, что длина  $g_c$  изменяется от критической величины, соответствующей критическому углу ПВО  $g_c = g_{c_{кр}} = d / \cos \Theta_{кр}$ , до бесконечности. Последнее означает, что ОС свободно распространяется в сердцевине параллельно границам раздела двух сред, не касаясь граничных слоев. Из теории цепей известно, что в однородном участке линии без потерь могут распространяться сигналы с любыми длинами волн, при этом количество укладываемых четвертьволновых отрезков на участке звена зависит от длины волны сигнала

$$N_{\lambda/4} = 4g_c / \lambda. \quad (6)$$

Необходимо особо выделить случай  $N_{\lambda/4} = 1$ , когда на длине  $g_c$  укладывается только один четвертьволновый отрезок с частотой, равной

$$f_c = c / g_c. \quad (7)$$

В таком звене при  $N_{\lambda/4} = 1$  длина участка в сотни (тысячи) раз длиннее средней длины волны полосы прозрачности звена ОВ и, следовательно, частота  $f_c$  будет во столько же раз меньше средней частоты звена ОВ.

На рис. 4 показано расположение характерных частот звена ОВ: граничные частоты заданной ППр звена ОВ ( $f_1$  и  $f_2$ ), частота участка  $l_c$  ОВ  $f_c$ , частота наведенного резонатора  $f_p$  и средняя частота ППр  $f_{ср}$ . Указанное несимметричное расположение характерных частот является особенностью звена ОВ, и при построении его модели эта особенность должна быть учтена.

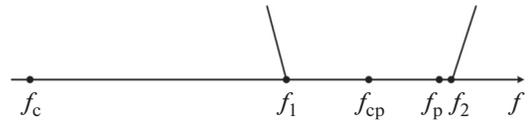


Рис. 4. Расположение характерных частот звена ОВ на оси частот.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА НА ОСНОВЕ ФАЗОКОНТУРНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ

В данной работе теория и расчет ОГС основаны на общем подходе к структурам, как к цепям с распределенными параметрами, состоящими из отрезков передающих линий. Так как для ОВ характерен шлейфный способ соединения резонатора со связкой, то оно относится к определенному типу ОГС – ОМШФ [6, 14].

Основой моделирования является установление условий, при которых существует подобие между оригиналом и моделью. Определенные явления оригинала и модели считаются подобными, если они описываются одинаковыми по форме уравнениями.

Рассмотрим уравнения передачи оригинала – отрезка электрической линии без потерь (рис. 5б) на оси частот распределенных систем  $f$ . Обобщенная матрица передачи для нее имеет вид [15–18]

$$[A_{л}] = \begin{bmatrix} \cos \omega & j\rho \sin \omega \\ j \sin \omega & \cos \omega \\ \rho & \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $\omega = \beta l = \pi f / 2f_0$  – волновая длина отрезка линии;  $\beta = 2\pi / \lambda = 2\pi f / v$  – коэффициент фазы отрезка линии;  $v$  – скорость распространения волны в линии;  $\lambda$  – длина волны в линии;  $f_0$  – первая резонансная частота отрезка линии при длине  $l = \lambda_0 / 4$ ;  $\rho$  – нормированное волновое сопротивление линии без потерь.

На резонансной частоте  $f_0$  входное сопротивление четвертьволнового отрезка ( $\lambda/4$ -отрезка) линии при нагрузочном сопротивлении  $W_{н} = 0$  (короткое замыкание отрезка) равно бесконечности, а при  $W_{н} = \infty$  (холостой ход отрезка) – нулю.

Аналогичными свойствами на оси частот сосредоточенных систем  $x = f / f_0$  обладает фазовый контур первого порядка – ФК1П (рис. 5в) [6, 19]. Коэффициенты обобщенной матрицы ФК1П выражаются через сопротивления его плеч  $Z_a$  и  $Z_b$ :

$$[A_{ФК}] = \begin{bmatrix} \frac{Z_b + Z_a}{Z_b - Z_a} & \frac{2Z_b Z_a}{Z_b - Z_a} \\ \frac{2}{Z_b - Z_a} & \frac{Z_b + Z_a}{Z_b - Z_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} & \frac{j\rho' 2x}{1 + x^2} \\ \frac{j}{\rho' 1 + x^2} & \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

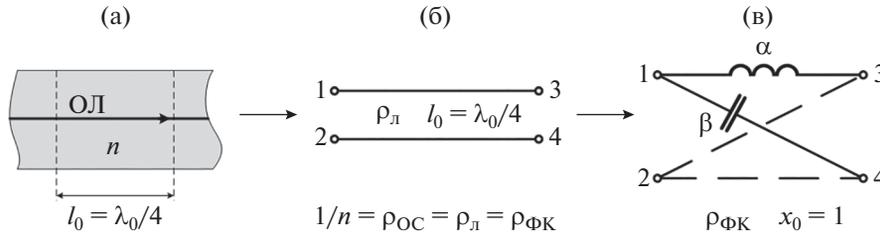


Рис. 5. Четвертьволновой оптический слой и его модели: а – четвертьволновой оптический слой, б – модель в виде четвертьволнового отрезка линии; в – модель в виде ФК1П без потерь.

где  $Z_a = jx_a$  – индуктивное сопротивление продольного плеча;  $Z_b = 1/jx\beta$  – емкостное сопротивление поперечного плеча;  $\alpha$  – нормированная индуктивность ФК1П;  $\beta$  – нормированная емкость ФК1П;  $x_0 = 1/(\alpha\beta)^{1/2}$  – резонансная и антирезонансная частоты на оси частот  $x$  систем с сосредоточенными параметрами ФК1П при сопротивлениях нагрузки соответственно  $Z_H = \infty$  и  $Z_H = 0$ ;  $\rho' = (\alpha\beta)^{1/2}$  – нормированное волновое сопротивление ФК1П, без потерь. Из равенства матриц (8) и (9) [6, 19]

$$[A_{\text{Л}}] = [A_{\text{ФК}}] \quad (10)$$

следуют соотношения

$$\cos \omega = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin \omega = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \rho = \rho', \quad (11)$$

откуда определяются прямое и обратное преобразования частоты ФК1П и волновой длины отрезка линии:

$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad [A_{\text{ОС}}] = \begin{bmatrix} \cos \omega & j \sin \omega \\ jn \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Следовательно, при изменении частоты  $x$  от 0 до  $\infty$  фазовый контур как модель повторяет частотные характеристики отрезка линии как оригинала, если переменная волновая длина  $\omega$  изменяется при этом от 0 до  $\pi$ .

Рассмотрим оптический слой (рис. 5а). Его матрица передачи, матрица Абея [6, 14], имеет вид

$$[A_{\text{ОС}}] = \begin{bmatrix} \cos \omega & j \sin \omega \\ jn \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Сравнение матриц передачи отрезка линии, ФК1П и оптического слоя обнаруживает их идентичность, которая дает основание сделать вывод о том, что ОГС относятся к классу волновых аналоговых фильтров (ВАФ). Следовательно, оптический слой толщиной  $l = \lambda_0/4$  может быть представлен моделью в виде четвертьволнового отрезка двухпроводной электрической линии с распределенными элементами и моделью в виде ФК1П с сосредото-

ченными элементами. Это означает, что дальнейшее рассмотрение принципов построения ОВ в виде ОГС можно заменить рассмотрением принципов построения фильтров на фазовых контурах (ФФК) или ВАФ. Все результаты исследований будут справедливы для всего класса ВАФ и для их общей модели ФФК.

Одними из основных расчетных параметров оригинала (отрезка линии) и его модели (ФК1П) являются текущие частоты оригинала  $f$  и нормированной модели  $x$ , связанные между собой соотношением

$$x = \operatorname{tg} \frac{\pi f}{4f_0}, \quad (14)$$

где  $x_0 = 1$  – нормированная резонансная частота модели,  $f_0$  – первая резонансная частота оригинала.

Вторым основным расчетным параметром является нормированное значение волнового сопротивления отрезка линии  $\rho_{\text{Л}}$  и равное ему значение волнового сопротивления ФК1П  $\rho_{\text{ФК}}$ , т.е.

$$\rho_{\text{Л}} = \rho_{\text{ФК}}. \quad (15)$$

Так как в ОВ и слоях магнитная проницаемость равна единице ( $\mu = 1$ ), то в качестве волнового параметра в них принят показатель преломления, выражаемый через значение диэлектрической проницаемости материала  $\epsilon$  или через нормированное значение волнового сопротивления линии  $\rho_{\text{Л}}$ .

$$\rho_{\text{Л}} = \sqrt{\mu/\epsilon}, \quad n = \sqrt{\mu\epsilon}, \quad \mu = 1, \quad n = 1/\rho_{\text{Л}}. \quad (16)$$

Таким образом, используя метод моделирования, можно перевести задачу синтеза ВАФ в области частот  $f$  ( $0 < f < 2f_0$ ) в задачу синтеза его модели – ФФК в области частот  $x$  ( $0 < x < \infty$ ). Решение задачи синтеза ФФК рассматривается в [6, 14, 19] для некоторых видов топологий ФФК, совпадающих с топологией ОМШФ. Там же показано, что с помощью определенных преобразований частоты требования к частотной характеристике затухания LC-ФФК пересчитываются в требования к низкочастотному (НЧ)  $\alpha\beta$ -фильтру – НЧ-прото-

типу с текущей частотой  $\eta$  и резонансной частотой  $\eta_0 = 1/\sqrt{\alpha\beta}$ . В соответствии с алгоритмом

$$f \rightarrow x \rightarrow \eta. \quad (17)$$

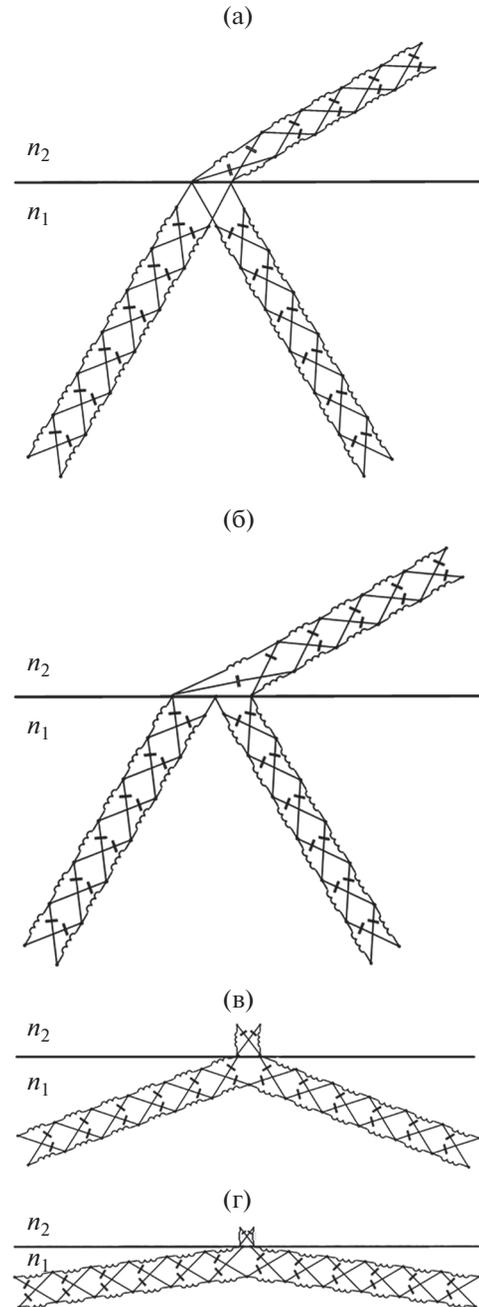
В современной теории и практике проектирования фильтров нижних частот существуют фундаментально разработанные многочисленные аналитические методы анализа, синтеза, преобразования и оптимизации схем НЧ-прототипов с различными частотными характеристиками: Чебышёва, Баттерворта, Лежандра, Бесселя и др. [15–18, 21]. Метод моделирования позволяет полностью использовать весь арсенал наработанных методов при решении задач синтеза ОМШФ и, таким образом, сложнейшие задачи синтеза ОМШФ могут быть точно решены методами общей теории фильтров и теории цепей. По найденным требованиям к частотным характеристикам НЧ-прототипа определяются количество элементов в схеме и их значения. Значения элементов НЧ-прототипа с применением обратных преобразований частоты пересчитываются в значения вторичных параметров ВАФ, знание которых позволяет перейти к конструктивному расчету элементов ВАФ с учетом используемых в них видов колебаний в соответствии с алгоритмом:

$$\eta \rightarrow x \rightarrow f. \quad (18)$$

Таким образом, ФК1П является моделью оптического слоя толщиной  $l = \lambda_0/4$ . Теперь необходимо определить модель участка сдвига Гуса–Хенхена для режима ПВО. В случае превышения падающего на границу раздела сред ОС критического значения ПВО он разделяется на преломленный и отраженный. На границе двух сред три луча соединены в один узел. Заменяем каждый участок лучей схемами многосвязных фазоконтурных цепочек для параллельного соединения (рис. 6а) и для последовательного соединения (рис. 6б). Вариант последовательного соединения выходов трех фазоконтурных четырехполосников (ФЧП) представляет особый интерес для построения модели резонатора.

При  $\Theta_1 = \Theta_2$  угол равен  $\pi/2$ , и тогда преломленный ФЧП заменяется двухполосником с одним разомкнутым ФК1П, включенным только в одну ветвь. Необходимое соединение падающей и отраженной ФЧП происходит через неполный четырехполосник с разомкнутым ФК1П в одной ветви, как это показано на рис. 6в. Таким образом, моделью сдвига Гуса–Хенхена является ФК1П в режиме двухполосника с холостым ходом, который в цепи каскадно включенных ФЧП является резонатором.

Далее, при увеличении угла падения ОС на границу раздела сред величина сдвига Гуса–Хен-



**Рис. 6.** Моделирование ОВ ФФК при падении оптического луча на границу раздела сред в секторе углов: а – превышающих критический для ПВО для последовательного соединения фазоконтурных моделей; б – превышающих критический для ПВО для параллельного соединения фазоконтурных моделей; в – ПВО  $\Theta_{кр} = \Theta_1$ ; г – ПВО  $\Theta_1 > \Theta_{кр}$ .

хена уменьшается, что объясняется увеличением резонансной частоты ФК1П, которая в пределе переходит в частоту  $x = \infty$ , и уменьшением его волнового сопротивления (рис. 6г).

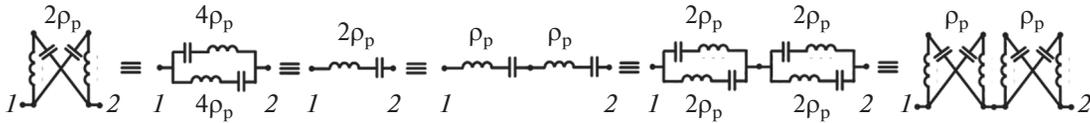


Рис. 7. Преобразование одного ФК1П с волновым сопротивлением  $2\rho_p$  в два ФК1П с волновым сопротивлением  $\rho_p$  каждый. 1 – Вход, 2 – выход.

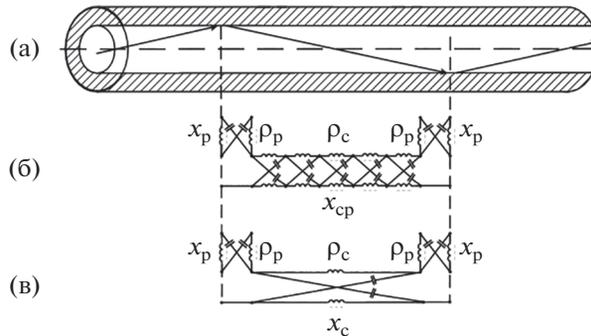


Рис. 8. Звено ОВ (а) и его модели: звено ФФК со связкой из  $N$  ФК1П с частотой  $x_{cp}$  (б) и со связкой из одного ФК1П с частотой  $x_c$  (в).

Для удобства моделирования ОВ при разбиении его на звенья необходимо иметь резонаторы по краям каждого из звеньев, поэтому модель сдвига Гуса–Хенхена, ФК1П в режиме двухполюсника с холостым ходом, необходимо разбить на два последовательно включенных ФК1П. При этом волновое сопротивление каждого из двух таких ФК1П будет в два раза меньше изначального. Порядок этого преобразования приведен на рис. 7.

Для удобства дальнейшего моделирования ОВ разделим резонатор на два последовательно включенных ФК1П. Каждый такой резонатор моделирует половину сдвига Гуса–Хенхена с волновым сопротивлением, равным половине волнового сопротивления модели полного сдвига Гуса–Хенхена. Тогда модель звена ОВ будет состоять из трехэлементного звена ФФК (рис. 8).

1. ФК1П в режиме холостого хода, т.е. четырехполюсник с разомкнутым выходом, включенный в последовательную ветвь каскадно включенных ФК1П – модели участка ОВ длиной  $l_{o1}$ , в котором ОС распространяется в оболочке ОВ при первом ПВО, составляющего половину сдвига Гуса–Хенхена, перед прямолинейным распространением оптического луча в сердцевине.

2. Цепи  $N_{\lambda/4}$  каскадно-включенных ФК1П – модели участка ОВ, в котором ОС прямолинейно распространяется в сердцевине ОВ между первым и вторым явлениями ПВО ( $l_c$ ).

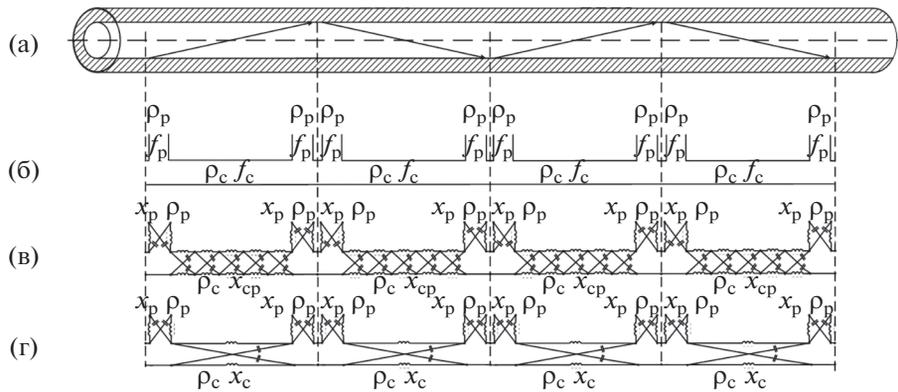
3. ФК1П в режиме холостого хода, т.е. с разомкнутым выходом, включенный в последовательную ветвь каскадно-включенных ФК1П – модели участка ОВ длиной  $l_{o2}$ , в котором ОС распространяется в оболочке ОВ при втором ПВО, составляющего половину сдвига Гуса–Хенхена, после прямолинейного распространения ОС в сердцевине.

Модель следующего звена ОВ начинается снова неполным ФЧП-резонатором, продолжается цепочкой ФЧП-связкой и заканчивается неполным четырехполюсником-резонатором. Окончательная модель многозвенного ОВ представлена схемой многозвенного фильтра на фазовых контурах шлейфного типа со связками из  $N$  ФК1П (ФФК- $N$ -Ш) (рис. 9).

Для этих фильтров в [6, 14, 19, 20] предложена следующая терминология: резонатор (двухполюсник) с волновым сопротивлением  $\rho_p$  и резонансной частотой  $x_p$ , связка с количеством ФК1П, равным  $N$ , и волновым сопротивлением  $\rho_c$ , коэффициент отношения волновых сопротивлений соседних связки и резонатора

$$v = \rho_c / \rho_p. \quad (30)$$

Фильтры на фазовых контурах относятся к классу электрических цепей с сосредоточенными элементами; цепи выполняют роль моста, соединяющего теорию и расчет фильтров на сосредото-



**Рис. 9.** Моделирование ОВ: а – ОВ; б – ОМШФ; в – многозвенный ФФК со связками из  $N$  ФК1П с частотой  $x_p$ ; г – многозвенный ФФК со связками из одного ФК1П с частотой  $x_c$ .

ченных элементах (ФСЭ) и ВАФ на отрезках передающих линий (см. рис. 9), к которым по признаку избирательности можно отнести и ОВ. Принадлежность ФФК к классу ФСЭ позволяет воспользоваться соответствующими преобразованиями частоты для пересчета его характеристик в характеристики фундаментально изученных типов LC-фильтров и свести, таким образом, задачу синтеза ВАФ к задаче аналитического синтеза соответствующего известного НЧ- или полосового LC-прототипа.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Разработанная математическая модель волокна в отличие от известных построена на основе фазоконтурных схем замещения и позволяет установить взаимозависимости параметров материалов, геометрических параметров и параметров передачи ОВ. Представленный подход к моделированию ОВ за счет последовательных и обоснованных преобразований и формирования структуры модели позволяет сделать принципиальное обобщение: ОВ, по физической сущности модели, является распределенным фильтром на отрезках передающих линий и относится к классу волновых аналоговых гетероструктур. Таким образом, применение положений теории цепей получает расширение на моделирование оптических направляющих систем с рассредоточенными элементами, что позволяет аналитически, с применением апробированных на практике научных методов и методик, решать задачи расчета параметров волокна в прямой и обратной постановке.

Практическое применение представленного подхода требует решения ряда частных задач: определение типа ОМШФ, к которому относится модель ОВ, и типа его характеристики затухания;

апробация разработанной модели ОВ путем сравнения расчетных характеристик с характеристиками производимых волокон.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Стрекалов А.В., Тенякова Н.А.* Физические основы волоконной оптики. М.: РИОР ИНФРА-М, 2018.
2. *Haija A.I., Numan M.Z., Freeman W.L.* Concise Optics: Concepts, Examples and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.
3. *Xiangmin Liu, Qingfen Yang* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2010. V. 27. № 11. P.2190.
4. *Farmani A., Miri M., Sheikhi M.H.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2017. V. 34. № 6. P. 1097.
5. *Xiao-Jun Zhang, Hai-Hua Wang, Chun-Liang Wang et al.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2015. V. 32. № 11. P. 2281.
6. *Ланшин Б.А.* Оптические гетероструктуры. Новая теория и расчет. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
7. *Dakin J.P., Brown R.G.W.* Handbook of Optoelectronics: Enabling Technologies. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2019.
8. *Мендес А., Морзе Т.Ф.* Справочник по специализированным оптическим волокнам / Пер. с англ. М.: Техносфера, 2012.
9. *Дубнищев Ю.Н.* Теория и преобразование сигналов в оптических системах. СПб.: Лань, 2011.
10. *Агравал Г.П.* Применение нелинейной волоконной оптики. СПб.: Лань, 2011.
11. *Renard R.H.* // J. Opt. Soc. Amer. 1964. T. 54. № 10. P. 1190.
12. *Федоров А.В.* Физика и технология гетероструктур, оптика квантовых наноструктур. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009.
13. *Fischer-Cripps A.C.* Waves, Particles and Fields: Introducing Quantum Field Theory. Abingdon: CRC Press, 2019.

14. *Иванов С.А., Иванов Н.А., Лапшин Б.А. и др.* Способ моделирования линии связи с распределенными параметрами. Пат. РФ № 2583740. Оpubл. офиц. бюл. “Изобретения. Полезные модели” № 13 от 10.05.2016.
15. *Матвиенко В.А.* Основы теории цепей. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
16. *Коган С.С.* Теория и расчет фильтров для установок дальней связи. М.: Связьиздат, 1950.
17. *Ланнэ А.А.* Оптимальный синтез линейных электронных схем. М.: Связь, 1978.
18. *Попов В.П.* Основы теории цепей. М.: Юрайт, 2017. Ч. 1.
19. *Лапшин Б.А.* Синтез фильтров и трансформаторов на отрезках передающих линий на основе фазо-контурных моделей // Дис. ... докт. технич. наук. СПб.: Военный университет связи, 2001. 246 с.
20. *Lapshin B.A., Petrakov V.A., Fedorov A.V.* // Proc. 7th IEEE Emerging Technologies Workshop: Circuits and Systems for 4G Mobile Communications, ETW'05. St. Petersburg. 2005. N.Y.: IEEE, 2005. P. 36.
21. *Bird J.* Electrical Circuit Theory and Technology. L.: Routledge, 2017.

## О СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ПРИ ЭМИССИИ В $T$ -РЕЖИМЕ

© 2022 г. Т. М. Сапронова<sup>а</sup>, \*, В. А. Сыровой<sup>а</sup>

<sup>а</sup>ВЭИ – филиал “РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина”,  
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

\*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 03.08.2021 г.

После доработки 03.08.2021 г.

Принята к публикации 16.09.2021 г.

Проанализировано поведение регулярных функций в двучленной формуле для потенциала с выделением особенности для одномерных диода и магнетрона при эмиссии в  $T$ -режиме.

DOI: 10.31857/S0033849422040088

### ВВЕДЕНИЕ

Предположение о нулевой начальной скорости электронов в гидродинамической модели плотного электронного пучка приводит к бесконечному значению плотности пространственного заряда  $\rho$  на стартовой поверхности при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом или температурой. Математическим следствием этого факта является появление особой точки на катоде, характер которой зависит от режима эмиссии и наличия магнитного поля  $\vec{H}$ . В работе [1] показано, что при эмиссии в  $\rho$ -режиме и  $\vec{H} \neq 0$  структура особенности может быть представлена в виде трехчленной формулы, описывающей “линейную комбинацию” двух точек ветвления, коэффициентами в которой являются аналитические функции продольной координаты  $l$ , нормальной к катоду.

Для потенциала электрического поля  $\Phi$  формула имеет вид

$$\Phi = l^{4/3}\Phi_1(l) + l^{6/3}\Phi_2(l) + l^{8/3}\Phi_3(l). \quad (1)$$

Зависимости от тангенциальных к катоду координат  $u$  функций  $\Phi_k$  для упрощения записи не приводим.

При эмиссии в  $T$ -режиме структура особенности описывается более простым выражением

$$\Phi = l^{2/2}\Phi_1(l) + l^{3/2}\Phi_2(l). \quad (2)$$

Коэффициенты в зависимостях (1), (2) не могут быть выражены в элементарных функциях даже в случае одномерных течений, описываемых точными решениями.

Для электростатических пучков в  $\rho$ -режиме эмиссии особенность факторизуется:

$$\Phi = l^{4/3}\Phi(l). \quad (3)$$

Цель работы – изучение функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  в (2) для наиболее простой задачи о классическом варианте плоского магнетрона [2, 3] с магнитным полем, направленным параллельно электродам, и его частном случае – плоском диоде. В отличие от работ [2, 3] рассмотрение относится к случаю эмиссии, ограниченной температурой, когда критический и за критический режимы с двухпетлевыми траекториями не могут иметь места.

*Выделение особенности в одномерных задачах.* Потенциал в плоском магнетроне при переходе от системы СИ к безразмерным переменным (символы с чертой), устраняющим из уравнений пучка все физические постоянные используемой системы единиц, описывается соотношением

$$\frac{d^2\bar{\Phi}}{d\bar{x}^2} = \frac{\bar{J}}{\sqrt{2\bar{\Phi} - \bar{H}^2\bar{x}^2}}, \quad \bar{\Phi} = \bar{x}\bar{\Phi}_1(\bar{x}) + \bar{x}^{3/2}\bar{\Phi}_2(\bar{x}), \quad (4)$$

где нормировка проведена в соответствии с правилами

$$\bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_*}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_*}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_*}, \quad \bar{J} = \frac{J}{J_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_*}; \quad (5)$$

$$\eta\Phi_* = V_*^2, \quad E_* = \frac{\Phi_*}{L_*}, \quad H_* = \frac{V_*}{\eta\mu_0 L_*}, \quad J_* = \frac{\epsilon_0 V_*^3}{\eta L_*^2},$$

причем звездочками отмечены характерные величины длины  $L_*$ , потенциала  $\Phi_*$ , скорости  $V_*$ , электрического поля  $E_*$ , напряженности магнит-

ного поля  $H_*$ , плотности тока  $J_*$ ;  $\eta = e/m$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  – удельный заряд электрона, диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Введем дополнительную нормировку искомым функций и аргумента в (4):

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_1 &= \bar{E}\hat{\Phi}_1, & \bar{\Phi}_2 &= \frac{\bar{J}}{2\sqrt{2\bar{E}}}\hat{\Phi}_2, \\ \bar{\varphi} &= \frac{8\bar{E}^4}{\bar{J}^2}\hat{\varphi}, & \bar{x} &= \frac{8\bar{E}^3}{\bar{J}^2}\hat{x},\end{aligned}\quad (6)$$

где  $\bar{E}$  – поле на катоде.

В новых переменных соотношения (4) примут вид

$$\frac{d^2\hat{\varphi}}{d\hat{x}^2} = \frac{2}{\sqrt{\hat{\varphi} - 4\gamma^2\hat{x}^2}}, \quad \hat{\varphi} = \hat{x}\hat{\Phi}_1 + \hat{x}^{3/2}\hat{\Phi}_2; \quad \gamma = \frac{\bar{E}\bar{H}}{\bar{J}}. \quad (7)$$

Возведем обе части дифференциального уравнения для  $\hat{\varphi}$  в квадрат и будем искать решение в форме (7)

$$\left(\frac{d^2\hat{\varphi}}{d\hat{x}^2}\right)^2 (\hat{\varphi} - 4\gamma^2\hat{x}^2) = 4. \quad (8)$$

Сепарация регулярных функций и функций с факторизованной особенностью, справедливая вблизи стартовой поверхности, приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x})(\hat{x}\Psi_1^2 + \Psi_2^2) + 2\hat{x}\hat{\Phi}_2\Psi_1\Psi_2 &= 4, \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}\Psi_1^2 + \Psi_2^2) + 2(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x})\Psi_1\Psi_2 &= 0,\end{aligned}\quad (9)$$

где через  $\Psi_1, \Psi_2$  обозначены дифференциальные комплексы

$$\Psi_1 = 2\hat{\Phi}_1' + \hat{x}\hat{\Phi}_1'', \quad \Psi_2 = \frac{3}{4}\hat{\Phi}_2 + 3\hat{x}\hat{\Phi}_2' + \hat{x}^2\hat{\Phi}_2'', \quad (10)$$

штрих означает производную по  $\hat{x}$ .

Разрешая уравнения (9) относительно комбинаций  $(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1)^2 + \Psi_2^2$ ,  $(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1)\Psi_2$ , имеем

$$\begin{aligned}(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1)^2 + \Psi_2^2 &= \frac{4}{\delta}(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}), \\ (\sqrt{\hat{x}}\Psi_1)\Psi_2 &= -\frac{2}{\delta}\sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2; \\ \delta &= (\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x})^2 - \hat{x}\hat{\Phi}_2^2.\end{aligned}\quad (11)$$

Дополним левую часть первого соотношения (11) до квадрата суммы функций  $\sqrt{\hat{x}}\Psi_1$  и  $\Psi_2$  и выразим первую из них через вторую при помощи второго

соотношения. Результатом будет квадратное уравнение относительно  $\Psi_2$

$$\begin{aligned}(\sqrt{\hat{x}}\Psi_1) + \Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2\right]^{1/2}, \\ \sqrt{\hat{x}}\Psi_1 &= -\frac{2}{\delta}\sqrt{\hat{x}}\frac{\hat{\Phi}_2}{\Psi_2};\end{aligned}\quad (12)$$

$$\Psi_2^2 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2\right]^{1/2}\Psi_2 - \frac{2}{\delta}\sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2 = 0.$$

Регулярные фрагменты  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$  потенциала в форме (7) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &\equiv \hat{x}\hat{\Phi}_1'' + 2\hat{\Phi}_1' = \frac{1}{\sqrt{\hat{x}}}\times \\ &\times \left[ \frac{1}{\sqrt{(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}) + \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}} - \frac{1}{\sqrt{(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}} \right], \\ \Psi_2 &\equiv \hat{x}^2\hat{\Phi}_2'' + 3\hat{x}\hat{\Phi}_2' + \frac{3}{4}\hat{\Phi}_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}) + \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}} + \frac{1}{\sqrt{(\hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x}) - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2}}.\end{aligned}\quad (13)$$

Обратим внимание на тот факт, что уравнения (13), определяющие в окрестности  $\hat{x} = 0$  регулярные функции  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ , имеют правые части, образованные неаналитическими слагаемыми. Кроме того, выполнение равенства

$$F = \hat{\Phi}_1 - 4\gamma^2\hat{x} - \sqrt{\hat{x}}\hat{\Phi}_2 = 0 \quad (14)$$

приводит к появлению особенности, не связанной с режимом эмиссии. Само это равенство, явившееся следствием сепарации членов разного порядка малости вблизи  $\hat{x} = 0$ , может иметь смысл при значительном удалении от  $\hat{x} = 0$ , где  $\sqrt{\hat{x}}$  можно рассматривать как регулярную функцию. Корень  $\hat{x}_*$  уравнения (14) определяет интервал, на котором уравнение (7) имеет решение приведенной в (7) формы.

Построение разложений для функций  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$  из (13) вблизи  $x = 0$  приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1 &= f_0 + f_1\hat{x} + f_2\hat{x}^2 + \dots, \\ \hat{\Phi}_2 &= g_0 + g_1\hat{x} + g_2\hat{x}^2 + \dots; \\ f_0 &= 1, \quad f_1 = -\frac{4}{3}, \quad g_0 = \frac{8}{3}, \\ g_1 &= \frac{16}{9} + \frac{16}{15}\gamma^2, \quad f_2 = -\frac{256}{81} - \frac{128}{45}\gamma^2, \\ g_2 &= \frac{176}{27} + \frac{352}{45}\gamma^2 + \frac{48}{35}\gamma^4, \\ \hat{\varphi} &= \hat{x}\hat{\Phi}_1 + \hat{x}^{3/2}\hat{\Phi}_2.\end{aligned}\quad (15)$$

В дальнейшем при рассмотрении численных примеров в качестве базисных значений параметров пучка примем величины, близкие к указанным в

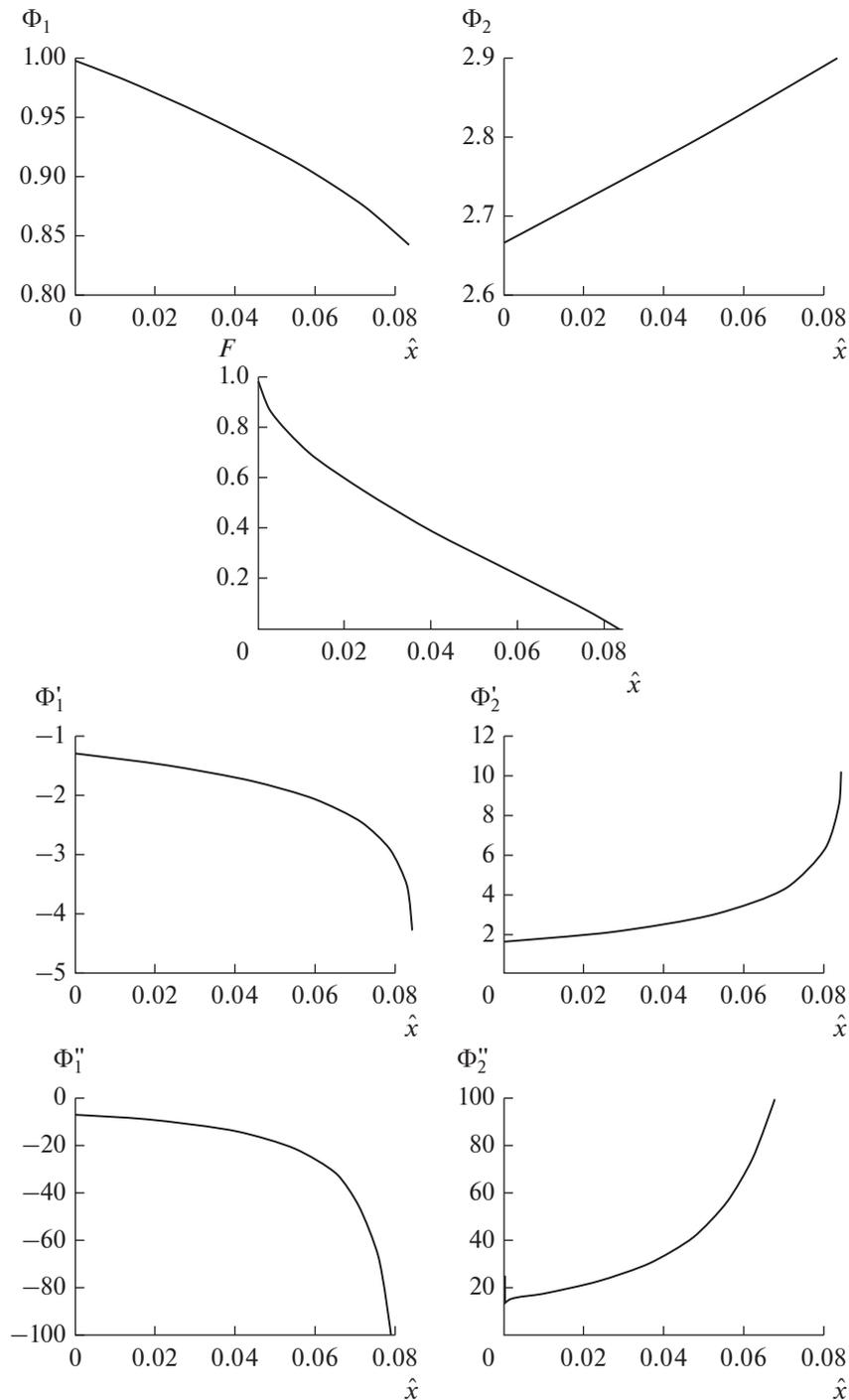


Рис. 1. Функции  $\Phi_1, \Phi_2$  с первыми и вторыми производными и функция  $F$  для диода.

работе [4], посвященной описанию электронно-оптической системы планарного гиротрона

$$\begin{aligned} \varphi_* &= 50 \text{ кВ}, \quad V_* = 9.4 \times 10^7 \text{ м/с}, \\ H_* &= 4.24 \times 10^4 \text{ А/м}, \quad J_* = 41.5 \text{ А/см}^2; \quad (16) \\ \bar{E} &= 0.6, \quad \bar{H} = 2.9, \quad \bar{J} = 0.1, \end{aligned}$$

где  $\bar{H}$  – поле на катоде.

*Плоский диод.* На рис. 1 приведены функции  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}'_1, \hat{\Phi}''_1; \hat{\Phi}_2, \hat{\Phi}'_2, \hat{\Phi}''_2$  и  $F$ , полученные при интегрировании уравнений (13). Значение  $\hat{x}_*$  при этом составляет

$$\hat{x}_* = 0.083877. \quad (17)$$

Для плоского диода в  $T$ -режиме существует аналитическое решение в параметрической форме,

**Таблица 1.** Возможные параметры диода при  $\alpha = 2$ 

$\bar{E}$	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.15
$\bar{J}$	0.509	0.354	0.226	0.127	0.0566	0.0318
$\bar{x}$	0.899	1.079	1.348	1.798	2.697	3.596
$J, \text{A}/\text{cm}^2$	21	14.7	9.4	5.3	2.4	1.3

описываемое не содержащими значений  $\bar{J}$ ,  $\bar{E}$  универсальными зависимостями от  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{J}^2}{\bar{E}^3} \bar{x}^{\text{ex}} &= \hat{x}^{\text{ex}} = \frac{1}{2} \tau^2 \left( \frac{1}{3} \tau + 1 \right), \\ \frac{\bar{J}^2}{\bar{E}^4} \bar{\varphi}^{\text{ex}} &= \hat{\varphi}^{\text{ex}} = \frac{1}{2} \tau^2 \left( \frac{1}{2} \tau + 1 \right)^2, \\ \frac{1}{\bar{E}} \frac{d\bar{\varphi}^{\text{ex}}}{d\bar{x}^{\text{ex}}} &= \frac{\tau^2 + 3\tau + 2}{\tau + 2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Нормировав потенциал  $\varphi$  на потенциал анода  $\varphi_A$  ( $\bar{\varphi}_A = 1$ ), получим значения параметра  $\tau_A$ , расстояния  $\bar{x}_A^{\text{ex}}$  между электродами и поля  $\bar{E}_A^{\text{ex}}$  на аноде:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{J}^2}{\bar{E}^4} \times 1 &= \frac{1}{2} \tau_A^2 \left( \frac{1}{2} \tau_A + 1 \right)^2, \quad \tau_A = \sqrt{1 + 2\alpha} - 1, \\ \alpha &= \frac{\bar{J} \sqrt{2}}{\bar{E}^2}, \quad \bar{x}_A^{\text{ex}} = \frac{\bar{E}^3}{\bar{J}^2} \hat{x}_A^{\text{ex}}, \\ \hat{x}_A^{\text{ex}} &= \frac{1}{3} \left[ 1 + (\alpha - 1) \sqrt{1 + 2\alpha} \right], \\ \frac{1}{\bar{E}} \bar{E}_A^{\text{ex}} &= \sqrt{1 + 2\alpha}. \end{aligned} \quad (19)$$

Нормировки (6) для решения в форме (7) с выделенной особенностью отличаются от нормировок точного решения (18) множителем 8 в знаменателе:

$$\hat{x} = \hat{x}^{\text{ex}} / 8, \quad \hat{\varphi} = \hat{\varphi}^{\text{ex}} / 8. \quad (20)$$

Выполнение условия (14) вводит ограничение на величину параметра  $\alpha$  и связь составляющих его физических параметров  $\bar{J}$ ,  $\bar{E}$ .

Значению  $\hat{x}_*$  из (17) соответствует величина  $\alpha_*$ , удовлетворяющая уравнению

$$(\alpha_* - 1) \sqrt{1 + 2\alpha_*} + 1 = 24\hat{x}_*, \quad \alpha_* = 1.5058. \quad (21)$$

Из формул (19) находим прочие параметры диода в этом случае:

$$\begin{aligned} \tau_{A*} &= \sqrt{1 + 2\alpha_*} - 1 = 1.002898, \\ \hat{x}_{A*}^{\text{ex}} &= \frac{1}{3} \left[ 1 + (\alpha_* - 1) \sqrt{1 + 2\alpha_*} \right] = 0.671022, \\ \hat{x}_* &= \hat{x}_{A*}^{\text{ex}} / 8 = 0.083877, \\ \hat{\varphi}_*^{\text{ex}} &= \frac{1}{2} \tau_{A*}^2 \left( \frac{1}{2} \tau_{A*} + 1 \right)^2 = 1.133717, \end{aligned} \quad (22)$$

причем в силу того, что величина  $\hat{x}_*$  взята из условия (14), а не из нормировки на  $\varphi_A$  в (19), потенциал при  $\tau_{A*}$  получился большим единицы.

Хотя соотношения (13) при  $\hat{x} > \hat{x}_*$  не имеют смысла, однако ошибку  $\delta$  их приближенного решения в этой области можно оценить, сравнивая величины  $\hat{\varphi}$  из (15) и  $\hat{\varphi}^{\text{ex}}$  из (18):

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \hat{x} (f_0 + f_1 \hat{x} + f_2 \hat{x}^2) + \hat{x}^{3/2} (g_0 + g_1 \hat{x} + g_2 \hat{x}^2), \\ \hat{\varphi} &= \hat{\varphi}^{\text{ex}} / 8, \quad \delta = \left| (\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^{\text{ex}}) / \hat{\varphi}^{\text{ex}} \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

Ниже приведены значения этой характеристики при разных величинах  $\alpha$ :

$\alpha$	1.5058	2	3	4
$\delta, \%$	0.3	1.06	5.63	17.7

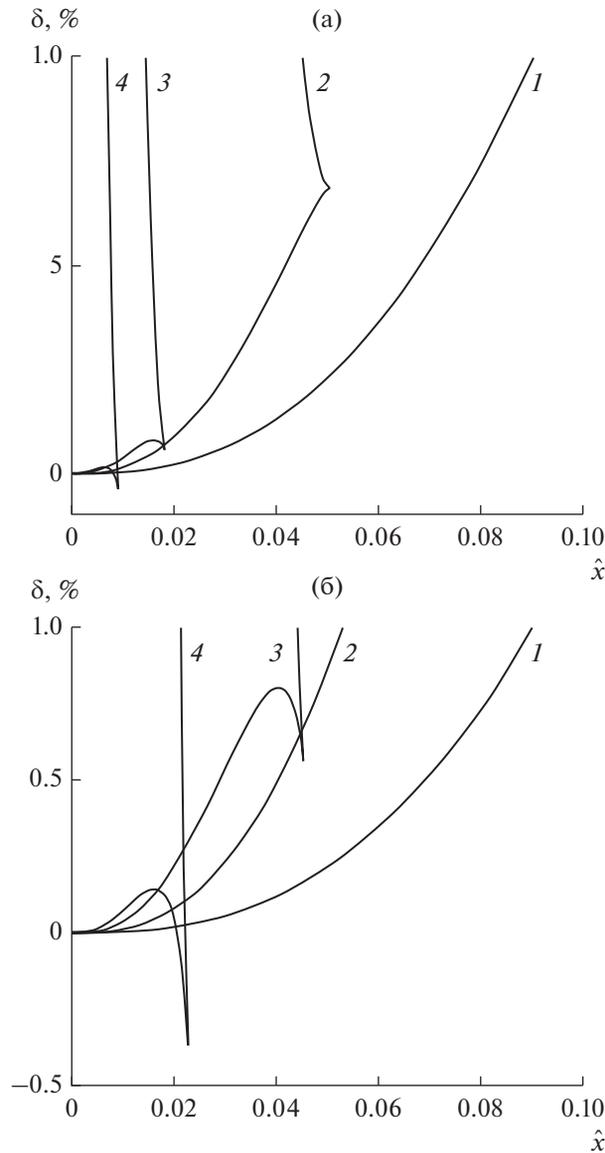
Для  $\alpha = 2$  при ошибке порядка 1% межэлектродный интервал простирается до  $\hat{x}^{\text{ex}} = 1.08$  вместо  $\hat{x}^{\text{ex}} = 0.671022$  из (22). В табл. 1 приведены возможные значения величин  $\bar{J}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{x}$  для этого случая в исходных нормировках (5), а также размерная плотность тока в  $\text{A}/\text{cm}^2$ . Для вычисления  $\bar{x}$  использованы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{E}^3}{\bar{J}^2} \hat{x}_A = \frac{\bar{E}^3}{\bar{J}^2} \frac{1}{3} \left[ 1 + (\alpha - 1) \sqrt{1 + 2\alpha} \right], \\ \alpha = 2, \quad \bar{x} &= \frac{\bar{E}^3}{\bar{J}^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}, \quad \bar{J} = \frac{\alpha \bar{E}^2}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\bar{E}^3}{\bar{J}^2} &= \frac{1}{2\bar{E}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{6} \frac{1 + \sqrt{5}}{\bar{E}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Малое значение ошибки  $\delta$  при  $\alpha = 1.5058$  (см. выше) позволяет вычислить величину  $\hat{x}_*$  на основе асимптотик для функций  $\hat{\Phi}_1$ ,  $\hat{\Phi}_2$  из (15). Оно оказывается равным  $\hat{x}_* = 0.0887$  и отличается от значения, полученного в результате интегрирования системы (13), на 5.75%.

*Плоский магнетрон.* Точное решение в параметрической форме приведено в [5] и содержит величину  $\gamma$ , образованную комбинацией физических параметров  $J$ ,  $E$ ,  $H$  задачи:

$$\begin{aligned} \hat{x}^{\text{ex}} &= 8\gamma^3 \hat{x} = \tau - \sin \tau + \gamma(1 - \cos \tau), \quad \gamma = \bar{E} \bar{H} / \bar{J}, \\ \hat{\varphi}^{\text{ex}} &= 16\gamma^4 \hat{\varphi} = (1 - \cos \tau + \gamma \sin \tau)^2 + (\hat{x}^{\text{ex}})^2. \end{aligned} \quad (25)$$



**Рис. 2.** Относительная ошибка  $\delta$  приближенного решения для магнетрона при  $\gamma = 1, 2, 3, 4$  в диапазоне  $\delta = 0 \dots 10\%$  (а) и  $\delta = -0.4 \dots 1\%$  (б).

На рис. 2а, 2б представлено соотношение (значения  $\delta$ ) точного решения (25) и приближенного решения

$$\hat{\phi} = \hat{x}\hat{\Phi}_1 + \hat{x}^{3/2}\hat{\Phi}_2, \quad \hat{\Phi}_1 = f_0 + f_1\hat{x} + f_2\hat{x}^2, \quad (26)$$

$$\hat{\Phi}_2 = g_0 + g_1\hat{x} + g_2\hat{x}^2$$

с параболической аппроксимацией функций  $\hat{\Phi}_1$ ,  $\hat{\Phi}_2$  при разных значениях  $\gamma$ . Ниже приведена оценка величины  $\hat{x}$ , при котором ошибка формы (26) не превышает 1%:

$\gamma$	1	2	3	4
$\hat{x}$	0.09	0.054	0.043	0.02

При наличии магнитного поля параболическая аппроксимация в форме (26) обеспечивает ошибку, не превышающую 1%, на незначительной ча-

сти  $\Delta$  межэлектродного пространства. Так, для  $\gamma = 1$ ,  $\bar{J} = 0.764$ ,  $\bar{H} = 1.27$  при  $\hat{x}_A^{ex} = 1.788$  эта часть составляет  $\Delta = 5\%$ ; при  $\gamma = 3$ ,  $\bar{J} = 0.34$ ,  $\bar{H} = 2.55$  величина  $\Delta$  составляет 0.16%.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В.А. // РЭ. 2005. Т. 50. № 7. С. 875.
2. Брауде С.Я. // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. № 7. С. 621.
3. Брауде С.Я. // ЖТФ. 1940. Т. 10. № 3. С. 217.
4. Manuilov V.N., Zaslavsky V.Yu., Ginzburg N.S. et al. // Phys. of Plasmas. 2014. V. 21. № 2. P. 023106.
5. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.

---

---

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

---

---

УДК 621.382

**ДИАГНОСТИКА СОСТОЯНИЯ БЛОКОВ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА  
С ПОМОЩЬЮ ВСТРОЕННЫХ СРЕДСТВ ОТЛАДКИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ  
НЕЙТРОННОГО И ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЙ**

© 2022 г. А. С. Пилипенко\*

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики  
им. акад. Е.И. Забабахина, ул. Васильева, 13, Снежинск, 456770 Российская Федерация**\*E-mail: pilipenko\_anatol@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.06.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принята к публикации 10.09.2021 г.

Для сложно-функционального устройства типа микроконтроллера (МК) исследована возможность использования встроенных средств отладки для контроля внутренних блоков при воздействии ионизирующего излучения. Оценены значения сечений одиночных сбоев в различных блоках МК, возникающих при облучении нейтронами с энергией 14 МэВ. Определены характерные области нарушения функционирования МК при воздействии импульса тормозного излучения.

DOI: 10.31857/S0033849422050096

**ВВЕДЕНИЕ**

Современные микроконтроллеры (МК) содержат в своем составе помимо вычислительного ядра большое число различных по назначению периферийных блоков (порты ввода-вывода, интерфейсы, таймеры и др.). Задача контроля состояния такого функционально сложного объекта при воздействии ионизирующих излучений (ИИ) в общем случае заключается в том, чтобы зафиксировать факт сбоя, определить причину его возникновения и блок МК, в котором он произошел [1]. Задача является методически и экспериментально сложной, поскольку необходимо решить целый ряд вопросов: определить состав и режим работы контролируемых блоков, организовать доступ и обмен информацией с ними в условиях удаленности объекта исследований и контрольного оборудования и т.д. Сюда же следует отнести учет особенностей конкретного источника ИИ и/или вида воздействия. К примеру, вследствие высокой проникающей способности нейтронов расположение промежуточных блоков управления и согласования вблизи объекта исследований если и является принципиально возможным, то требует применения мер снижения воздействия на такие блоки (например, экранирования).

В настоящее время контроль встроенных блоков при воздействии ИИ обычно выполняется с помощью микропрограммы, исполняемой самим объектом исследования (т.е. МК) [2]. При этом диагностическая информация (в виде результатов выполнения вычислительных операций, содер-

жимого внутренних блоков данных и т.п.) передается внешнему контрольному оборудованию непосредственно через какой-либо интерфейс, который входит в состав МК [3].

Другим способом для контроля сбоев при выполнении программы является использование встроенных средств отладки, которые поддерживаются большинством современных МК. Так, например, авторы [4] используют блок трассировки МК с ядром ARM для анализа сбоев, возникающих при статическом облучении нейтронами атмосферного спектра. МК был реализован на базе системы-на-кристалле, анализ диагностической информации осуществляется блоком в составе системы и вывод информации производится через последовательный интерфейс в составе МК.

Описанные способы не лишены недостатков. Получение диагностической информации от МК становится невозможным в случае его зависания, что часто происходит при воздействии импульсного ИИ [5]. Кроме того, объем такой информации сильно зависит от функционала исполняемой программы.

Выбор встроенных средств отладки для контроля состояния внутренних блоков МК в данной работе обусловлен несколькими причинами.

Во-первых, подобные средства МК с ядром ARM посредством прямой адресации предоставляют доступ к адресному пространству МК (в которое отображаются все регистры встроенных периферийных блоков). Дополнительно из области

управления системой посредством косвенной адресации доступны регистры ядра, такие как регистры общего назначения (РОН), регистр флагов, регистр стека и др. Другими словами, через встроенные средства отладки возможно контролировать состояние всех внутренних регистров МК. Данный способ контроля внутренних регистров МК не зависит от функционала исполняемой МК программы и в предельном случае может осуществляться даже при ее отсутствии.

Во-вторых, доступ к встроенным средствам отладки может осуществляться несколькими способами, например, с помощью методологии граничного сканирования. При такой организации доступа может возникнуть вопрос о возможных сбоях в работе средств отладки при воздействии ИИ. Предварительный анализ показывает, что:

а) регистры контроллера интерфейса обмена данными и системы отладки содержат точно такие же запоминающие ячейки, как и, к примеру, оперативное запоминающее устройство (ОЗУ). При воздействии нейтронов в них, вообще говоря, могут возникать обратимые локальные эффекты типа одиночных сбоев (ОС) – инвертирование ячеек памяти. Однако общее число чувствительных к эффекту ячеек в этих регистрах много меньше суммарного числа ячеек в ОЗУ и регистрах периферийных блоков, следовательно, вероятностью появления ОС в них можно пренебречь (так как эта вероятность пропорциональна объему рассматриваемой памяти). К тому же регистры средств отладки сами не хранят данные, а работают в режиме “запрос-выборка из памяти МК-передача контроллеру”, поэтому в случае сбоя данных после воздействия или в паузе между периодами облучения эффект ОС вообще не влияет на результат эксперимента;

б) при воздействии импульса ИИ считывание информации, т.е. основная работа средств отладки, происходит после воздействия, в установившемся режиме. Поэтому непосредственно на процесс сбора данных импульс ИИ не может оказывать влияния. В сам момент воздействия контроллер интерфейса обмена данными находится в режиме ожидания и возникающая при протекании радиационно-наведенного тока импульсная помеха не должна приводить к нарушениям в его функционировании. Кроме того, в средствах отладки предусмотрена функция отключения питания основных схем поддержки отладки, которую можно использовать на время действия импульса ИИ, что еще больше снизит вероятность сбоя в работе.

Таким образом, цель данной работы – определить возможности встроенных средств отладки МК с ядром ARM по контролю состояния внутренних блоков МК при воздействии нейтронного и тормозного излучений.

## 1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В качестве объекта исследования был использован МК с ядром ARMv7, изготовленный по технологии “объемный кремний” с топологической нормой 0.18 мкм. Для организации обмена данными со встроенными средствами отладки МК использовались аппаратный контроллер интерфейса отладки (ИО) на базе микросхемы FT2232H и программное обеспечение собственной разработки, предоставляющее наиболее полный и гибкий доступ к компонентам отладочного интерфейса МК.

Контроль состояния внутренних блоков МК осуществляли при облучении нейтронами с энергией 14 МэВ и при воздействии импульса тормозного излучения. В зависимости от вида ИИ ставились разные цели экспериментов.

При облучении нейтронами с энергией 14 МэВ целью была демонстрация возможности прямой экспериментальной оценки чувствительности управляющих регистров и массивов памяти различных функциональных блоков МК к ОС. Особенностью постановки эксперимента является то, что в данном случае в памяти программ МК отсутствовала исполняемая программа и МК находился в режиме ожидания. Это позволило проводить оценку именно одиночных, а не функциональных сбоев, которые имели бы место в случае работы МК на штатной частоте в процессе облучения. Эксперимент проводили при облучении в статическом режиме с плотностью потока нейтронов порядка  $10^9$  н/(см<sup>2</sup>с) с периодическим чтением данных из управляющих регистров и массивов памяти функциональных блоков МК. Чтение информации происходило с накоплением, т.е. после чтения информация не перезаписывалась. Подсчет числа ОС осуществлялся путем сравнения информации до и после облучения. Обобщенная структурная схема эксперимента приведена на рис. 1. Для подключения МК использовались четыре сигнальные линии ИО и одна линия питания (общая для МК и буферного повторителя). Измерение флюенса нейтронов осуществляли с помощью активационной методики (погрешность  $\pm 20\%$ ).

При воздействии импульса тормозного излучения целью была проверка возможности контроля состояния внутренних блоков МК в случае его зависания и, в случае успешности контроля, определение причин такой реакции по анализу полученной диагностической информации. В данном случае МК работал в режиме исполнения программы из внутренней памяти программ с подключенным ИО. Функционал программы заключался в формировании периодического сигнала (меандра) с частотой 0.5 МГц на одном из выводов МК. Источник тактирования МК – встроенный RC-генератор на частоте 8 МГц, частота работы ядра 80 МГц. Используемые функ-

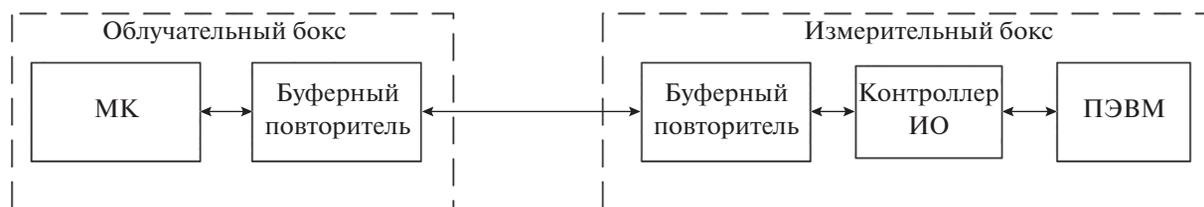


Рис. 1. Структурная схема эксперимента.

циональные блоки: блок умножителя частоты PLL, порт ввода-вывода PORTA, блок управления тактовыми частотами, таймер общего назначения. Для определения факта сбоя (зависания) МК в момент воздействия импульса тормозного излучения с помощью осциллографа контролировался меандр, генерируемый МК. Под сбоем в данных экспериментах понимается кратковременное прекращение генерации меандра, под зависанием – прекращение генерации до момента переинициализации МК (переключение питания). Структурная схема эксперимента в целом повторяет приведенную на рис. 1. Отличием является использование независимых линий питания МК и буферного повторителя, а также наличие выделенной сигнальной линии для контроля меандра. Обобщенная схема включения МК приведена на рис. 2.

В качестве параметра, характеризующего отклик объекта на импульс тормозного излучения, часто используется ток потребления. Для его контроля проводили отдельные эксперименты, в которых представленная на рис. 2 схема дополнялась токоизмерительным резистором в цепи питания номиналом  $\sim 1$  Ом. Напряжение на этом резисторе контролировали с помощью осциллографа.

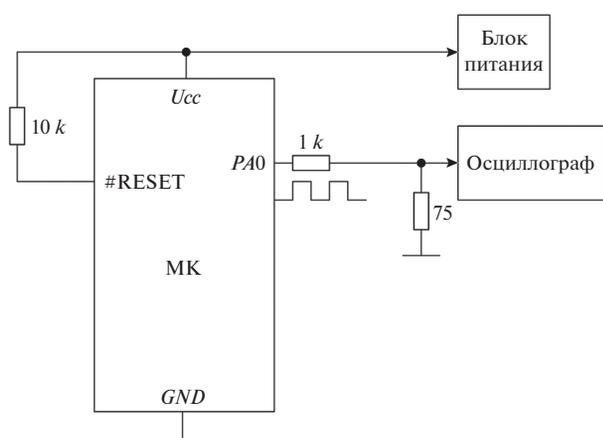


Рис. 2. Обобщенная схема включения МК (линии связи с ИО и буферные повторители не показаны).

В экспериментах также контролировался факт наличия/отсутствия доступа к ИО после воздействия. Измерение экспозиционной дозы в импульсе осуществляли с помощью термолюминисцентной методики (погрешность  $\pm 20\%$ ).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рис. 3 представлены зависимости числа ОС ( $N$ ) от флюенса нейтронов  $F$  с энергией 14 МэВ, полученные при облучении МК. Данные по числу ОС представлены отдельно для встроенного ОЗУ МК (линия 1) и для периферии (линия 2). В периферию здесь включены РОН и другие регистры ядра, регистры блока управления тактовыми сигналами, портами ввода-вывода, таймерами, интерфейсами приема-передачи и др. (в общей сложности регистры порядка 30 блоков). Во всех исследованных блоках наблюдаются ОС, однако ввиду статистически малозначимого числа ОС в

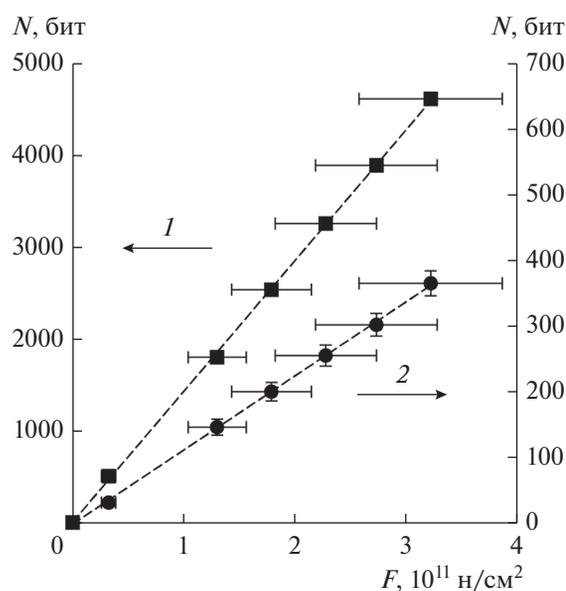
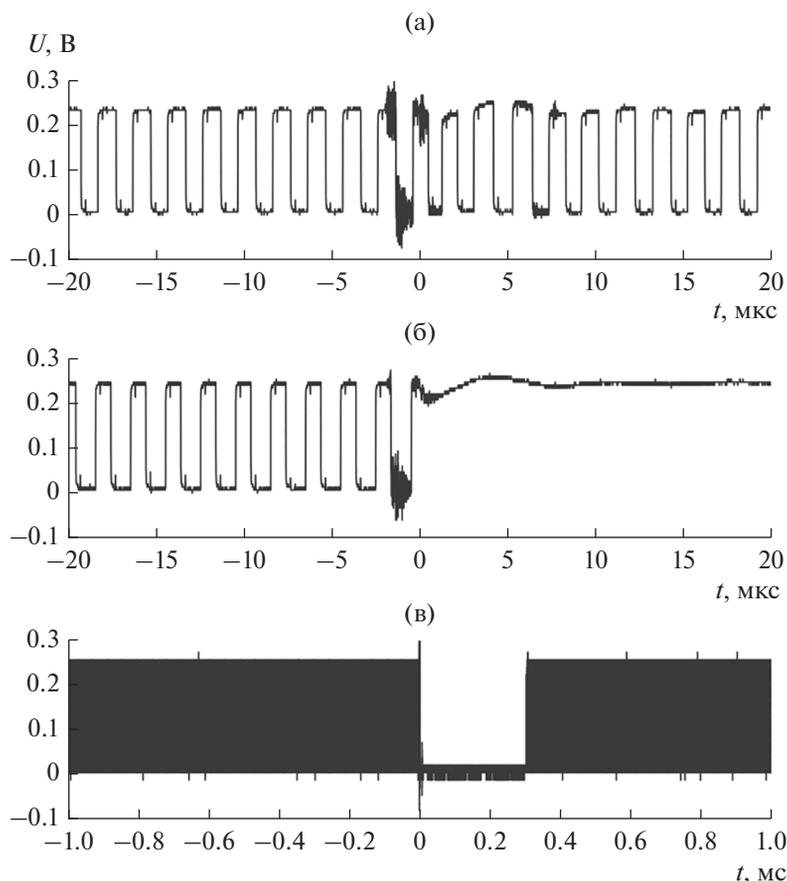


Рис. 3. Зависимости числа ОС ( $N$ ) от флюенса нейтронов  $F$  в блоках МК: квадраты – ОЗУ (1); кружочки – периферийные блоки (2); штриховые линии – линейная аппроксимация.



**Рис. 4.** Осциллограммы с выхода МК при различных значениях мощности экспозиционной дозы:  $1.2 \times 10^9$  (а),  $2 \times 10^9$  (б) и  $3 \times 10^9$  Р/с (в).

отдельных блоках на рис. 3 приведено общее число ОС во всех блоках.

Как видно из рис. 3, зависимости  $N(F)$  имеют характерный вид – прямая, пересекающая начало координат. Такой вид зависимостей позволяет оценить основную характеристику чувствительности МК к эффекту ОС – сечение  $\sigma$ , которое является отношением общего числа ОС к флюенсу частиц:  $\sigma = N/F$ . Определяемое по данному выражению значение сечения ОС составляет  $(1.4 \pm 0.3) \times 10^{-8}$  см<sup>2</sup> для ОЗУ и  $(1.0 \pm 0.2) \times 10^{-9}$  см<sup>2</sup> для периферийных блоков.

В экспериментах по исследованию воздействия импульса тормозного излучения на МК наблюдается четыре типа реакции, каждая в своем диапазоне уровней воздействия. Типы описаны ниже в порядке их проявления при возрастании уровня нагружения.

**Реакция типа 1.** Отсутствие сбоев в функционировании либо кратковременное изменение (порядка  $10^{-5}$  с) частоты/амплитуды меандра без срыва генерации.

**Реакция типа 2.** Зависание (прекращение генерации тестового сигнала), при этом доступен

ИО, позволяющий получить информацию о состоянии функциональных блоков МК.

**Реакция типа 3.** Кратковременный сбой в функционировании (срыв генерации меандра) длительностью порядка 300 мкс с последующим восстановлением работоспособности, ИО доступен.

**Реакция типа 4.** Зависание, ИО недоступен.

Получены типовые осциллограммы контролируемого сигнала (рис. 4), иллюстрирующие наблюдаемые типы реакций (импульс воздействия длительностью 30 нс в момент времени  $t = 0$ ).

Определена зависимость амплитуды ионизационного тока МК от мощности экспозиционной дозы (рис. 5). Видно, что зависимость имеет тенденцию к насыщению при мощности дозы порядка  $5 \times 10^9$  Р/с.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сечения ОС, оцененные по результатам экспериментов при облучении МК нейтронами, для ОЗУ и периферии отличаются примерно на порядок. Однако чувствительность к ОС напрямую за-

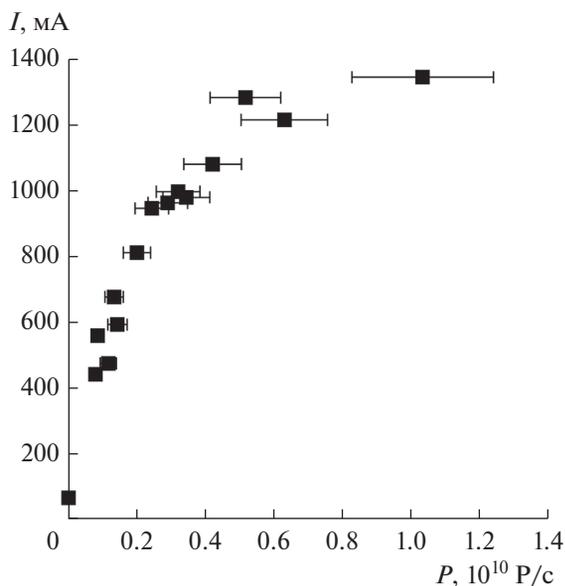


Рис. 5. Зависимость амплитуды ионизационного тока  $I$  от мощности экспозиционной дозы  $P$ .

висит от числа рассматриваемых элементов (ячеек памяти), в которых может возникнуть эффект. Поэтому на практике для сравнения чувствительностей различных объектов используют приведенную величину – сечение на 1 бит. В результате пересчета получаются значения  $(5.4 \pm 1.1) \times 10^{-14}$  см<sup>2</sup>/бит для ОЗУ и  $(5.3 \pm 1.1) \times 10^{-14}$  см<sup>2</sup>/бит для периферийных блоков.

По результатам можно сделать следующие выводы об объекте исследований:

1) линейный вид зависимости  $N(F)$  для ОЗУ на рис. 3 указывает на то, что ОЗУ не защищено от ОС помехоустойчивым (избыточным) кодированием, поскольку в таком случае зависимость  $N(F)$  была бы нелинейной на начальном участке [6];

2) близкие значения сечений/бит ОС для ОЗУ и периферии позволяют предположить, что запоминающие ячейки ОЗУ и управляющих регистров периферийных блоков, включая регистры ядра процессора, схемотехнически одинаковы. То есть их чувствительность к эффекту ОС определяется главным образом топологическими нормами, по которым изготовлен МК.

Данные выводы получены только из экспериментальных данных, однако довольно точно характеризуют исследуемый МК, в котором действительно не применяется никаких специальных мер для повышения стойкости к ИИ. Это свидетельствует о возможности применения рассматриваемого метода контроля состояния внутренних блоков МК при облучении нейтронами.

На рис. 6 представлены зависимости времени потери работоспособности (ВПР) МК от мощно-

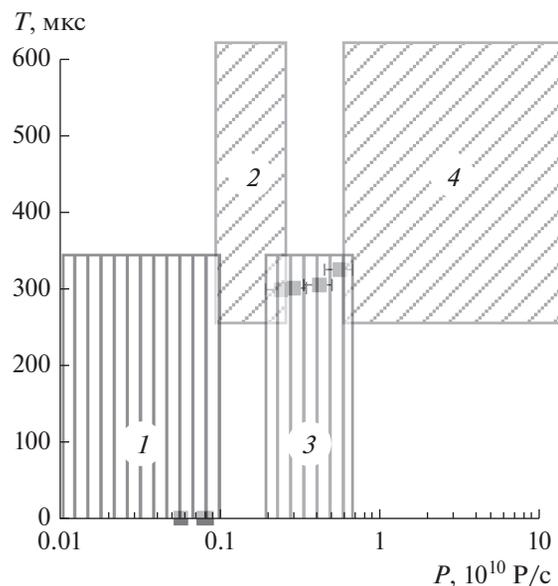


Рис. 6. Зависимость ВПР  $T$  от экспозиционной дозы  $P$ ; 1–4 – области разных типов реакции МК.

сти экспозиционной дозы  $P$ , где ВПР оценивалось по осциллограммам выходного меандра, генерируемого МК. Цифрами обозначены области разных типов реакции МК (типы реакций описаны выше).

Использование ИО МК позволяет получить информацию о состоянии внутренних блоков, которая может быть использована для поиска причин сбоев в работе (области 2 и 3 на рис. 6).

В области 2 МК зависит и получение информации о его состоянии возможно только через ИО. Анализ содержимого регистров процессорного ядра, ОЗУ (как хранилища стека) и блока управления системой указывает на то, что контроллер пытается выполнить недопустимую инструкцию. Это приводит к вызову обработчика исключения типа тяжелого отказа, из которого контроллер выйти не может. При этом примерно в половине случаев в стек успевает записаться содержимое регистров процессора, необходимых для корректного выхода из обработчика исключения. Такая реакция МК может быть обусловлена либо возникновением радиационно-наведенной импульсной помехи на внутренних токопроводящих дорожках ИС, либо превышением максимально допустимой скорости изменения напряжения питания (что приводит к сбоям тактирования).

В области 3 генерация меандра восстанавливается примерно через 300 мкс после воздействия. Поскольку в момент воздействия возникает просадка напряжения питания (это подтверждается насыщением зависимости тока от мощности экспозиционной дозы [7], рис. 5), то такая реакция могла бы означать активацию внутреннего сигнала

ла сброса Power-On-Reset при снижении напряжения питания ниже минимально допустимого. Однако в этом случае время восстановления функционирования для данного МК составляло бы порядка 4 мс. Для определения факта возможного перезапуска МК в некоторых неиспользуемых в основной программе регистрах с помощью ИО устанавливались биты-маркеры. В случае сброса при последующем чтении эти биты были бы сброшены в начальное состояние. Как показали эксперименты, МК действительно входит в состояние сброса. По-видимому, такая реакция вызвана формированием импульса сброса на выводе RESET, который подтянут к питанию через резистор сопротивлением 10 кОм.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, отработан метод контроля состояния внутренних блоков МК с ядром ARM с помощью встроенных средств отладки, который позволяет считывать информацию из регистров различных блоков памяти и периферии и проводить анализ изменения информации.

В экспериментах по облучению исследуемого МК нейтронами с энергией 14 МэВ оценены чувствительности различных блоков МК к эффекту ОС. Совпадающая в пределах погрешности чувствительность ОЗУ и регистров периферийных блоков подтверждает предположение об одинаковой схемотехнической организации запоминающих ячеек отдельных блоков. Продемонстрирована возможность применения метода для МК, работающего без исполняемой программы, что позволяет исключить влияние на результаты экспериментов функционала исполняемой программы.

При воздействии импульса тормозного излучения в зависимости от уровня воздействия наблюдается несколько типов реакции МК: временные сбои функционирования и зависания. Применение средств отладки позволяет в ряде случаев получить дополнительную информацию для объяснения такого поведения МК, что зачас-

тую невозможно при использовании методов контроля, в которых сам МК является источником диагностической информации о состоянии встроенных блоков.

В качестве преимущества предлагаемого метода следует указать высокую степень его унификации. Это обусловлено тем, что структура и алгоритмы доступа к встроенным средствам отладки определяются только спецификацией на процессорное ядро ARM. Поэтому при смене исследуемого объекта могут потребоваться минимальные изменения аппаратной (переназначение контактов разъема) и программной части (переназначение базовых адресов и размеров периферийных блоков).

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрасов П.В. Методы и средства прогнозирования радиационной стойкости микропроцессорных СБИС. Дис. ... канд. техн. наук. Москва: Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 2010. 120 с.
2. Кравченко Н.Д., Лоскутов И.О., Некрасов П.В. и др. // Тр. 23-й Всерос. научн.-техн. конф. "Стойкость-2020". Лыткарино. 22–23 сентября 2020. М.: НИИП, 2020. С. 146.
3. Марфин В.А., Бойченко Д.В. // Тр. 20-й Всерос. научн.-техн. конф. "Стойкость-2017". Лыткарино. 6–7 июня 2017. М.: НИИП, 2017. С. 194.
4. Peña-Fernandez M., Lindoso A., Entrena L., Garcia-Valderas M. // IEEE Trans. 2020. V. NS-67. № 1. P. 126.
5. Ахметов А.О., Бобровский Д.В., Калашников О.А., Некрасов П.В. // Тр. Рос. научн.-техн. конф. "Радиационная стойкость электронных систем – Стойкость-2011". Лыткарино. 7–8 июня 2011. М.: НИИП, 2011. С. 34.
6. Кустов А.С., Пилипенко А.С., Сильянов Н.В. // ВАНТ, Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. 2020. № 2. С. 24.
7. Чумаков А.И. // Микроэлектроника. 2006. Т. 35. № 3. С. 184.

**К 75-ЛЕТИЮ ВАДИМА АНАТОЛЬЕВИЧА КАЛОШИНА**

DOI: 10.31857/S0033849422050126



13 мая 2022 г. исполнилось 75 лет со дня рождения известного ученого в области электродинамики, заведующего лабораторией ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, доктора физико-математических наук, профессора, члена редколлегии журнала “Радиотехника и электроника” Вадима Анато́льевича Калошина.

В.А. Калошин родился в Москве. В 1964 г. после окончания средней школы он поступил на радиотехнический факультет Московского энергетического института. После окончания института и прохождения службы в Советской армии в 1972 г. Вадим Анато́льевич был принят на работу в Институт радиотехники и электроники АН СССР (ныне – ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН), в отдел которым руководил Б.З. Каценеленбаум. В 1976 г. В.А. Калошин защитил диссертацию на соискание ученой

степени кандидата физико-математических наук, а в 1989 г. – доктора физико-математических наук. С 1991 г. и по настоящее время он возглавляет лабораторию электродинамики композиционных сред и структур ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

В.А. Калошиным опубликовано более 260 печатных трудов, он автор 20 изобретений. Вместе с Р. Миттрой В.А. Калошин является автором спектральной теории дифракции, вместе с А.С. Венецким – теории аббераций зеркальных и линзовых систем с большой угловой апертурой, вместе с Луу Дук Тхо – нового гибридного метода решения задач рассеяния волн на сложных объектах.

В.А. Калошиным был предложен и исследован ряд новых типов антенн и линий передач, в частности, самофильтрующий волновод со стенками из ускоряющего метаматериала, поликоническая антенна, несимметричный петлевой *ТЕМ*-рупор, вместе с Б.Л. Коганом – новая двухзеркальная система, которая получила название система Калошина–Когана и нашла широкое применение в качестве многолучевой антенны для приема спутникового телевидения.

Вадим Анато́льевич много времени уделяет подготовке кадров. Он читает лекции в Московском физико-техническом институте (МФТИ) и руководит аспирантами. Под его руководством более защищено более 10 кандидатских диссертаций. За большую работу в этом направлении он удостоен звания “Почетный профессор МФТИ”.

В.А. Калошин ведет большую научно-организационную деятельность. Он является соорганизатором ряда всероссийских и международных конференций, членом Национального комитета URSI, руководителем Московского отделения IEEE по антеннам и распространению волн, членом Президиума РНТОРЭС им. А. Попова, членом бюро Совета по распространению радиоволн ОФН РАН. Вадим Анато́льевич является членом редколлегии журналов “Радиотехника и электроника” и “Успехи радиоэлектроники”.

Редколлегия и редакция журнала “Радиотехника и электроника”, коллеги и друзья поздравляют Вадима Анато́льевича с юбилеем и желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.