Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

8
август
Москва
2020

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

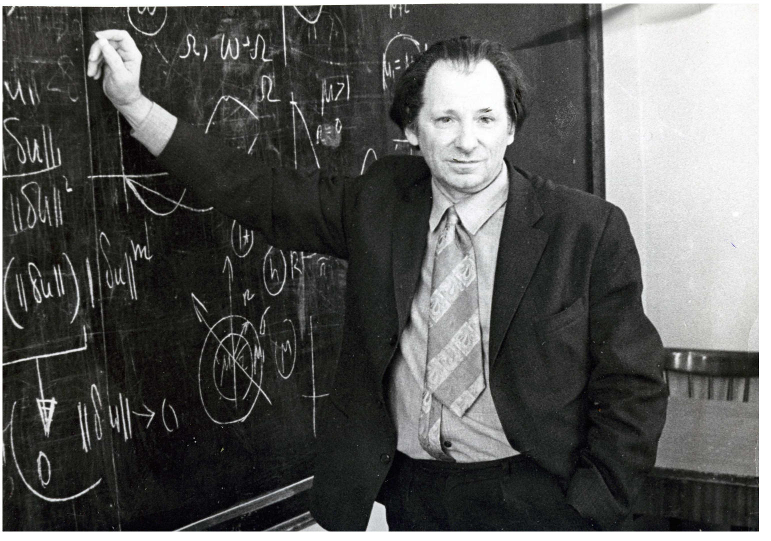
Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

Автоматика и телемеханика № 8, 2020

Тематический выпуск

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Ю.И. НЕЙМАРКА



DOI: 10.31857/S0005231020080012

Юрий Исаакович Неймарк родился 24 ноября 1920 г. в г. Амур-Нижнеднепровске, закончил физико-математический факультет Горьковского государственного университета в 1944 г. Здесь же начал научную деятельность в качестве аспиранта под руководством академика Александра Александровича Андронова. Первая научная статья "О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель до-галилеевых часов" в соавторстве с А.А. Андроновым была опубликована в 1946 г. в журнале "Доклады АН СССР". Впоследствии именно Ю.И. Неймарк возглавил научную школу А.А. Андронова, связанную с изучением нелинейной динамики систем.

Вклад Ю.И. Неймарка в науку и высшее образование поистине огромен. Он оставил заметный след в качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории адаптивного и робастного управления, в распознавании образов, неголономной механике и механике гироскопических систем, поисковой оптимизации и математическом моделировании. Ю.И. Неймарк является основателем первого в СССР факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) и научно-исследовательского института прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК). Академик РАЕН, лауреат премии АН СССР им. А.А. Андронова, международной премии им. Н. Винера, награжден орденом "Знак Почёта" и медалями К.Э. Циолковского, А.С. Попова, В.М. Келдыша за заслуги в развитии отечественной космонавтики.

Ю.И. Неймарк и Я.З. Цыпкин

Первые значительные научные результаты были получены Ю.И. Неймарком уже к концу 40-х гг. XX в. и защищены в виде кандидатской диссертации в 1947 г. В 1949 г. в Ленинграде им была опубликована монография “Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных)”, в которой изложен теперь уже всемирно известный метод D-разбиения. Этот метод позволяет выделить области на плоскости параметров линейных непрерывных или дискретных систем, соответствующие определенному числу корней характеристического полинома или квазиполинома, принадлежащих заданной области комплексной плоскости. Одно из первых применений этого метода к исследованию области устойчивости ультрацентрифуги, используемой для разделения изотопов урана в советском атомном проекте, в котором Ю.И. Неймарк принимал участие, позволило предотвратить аварии и разрушения центрифуг. В 50-е гг. XX в. Ю.И. Неймарк обращается к новой тематике: им исследуются релейные системы автоматического регулирования, и в 1956 г. он защищает в Институте автоматики и телемеханики (Институт проблем управления РАН) докторскую диссертацию.

После защиты докторской диссертации Ю.И. Неймарк занялся разработкой метода точечных отображений и его многообразных приложений в теории колебаний и теории динамических систем. Именно здесь он видел возможность существенного прогресса в исследовании нелинейных многомерных систем, перехода от двумерных, хорошо изученных, к системам трехмерным и большей размерности. Основанием для этого служили исследования А. Пуанкаре и Д. Биркгофа в области теории динамических систем и успехи, достигнутые в исследовании нелинейных трехмерных кусочно-линейных систем в работах А.А. Андронова, Н.Н. Баутина и А.Г. Майера. В 1964–1965 гг. Ю.И. Неймарк применил новый подход к исследованию точечных отображений, названный им методом вспомогательных отображений, и понял, что механизмом возникновения сложных установившихся движений динамических систем, названных позднее хаотическими и стохастическими, являются гомоклинические структуры А. Пуанкаре. Результаты этих исследований были опубликованы в двух монографиях: "Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний" в 1972 г. и "Стохастические и хаотические колебания" в 1987 г. (совместно с П.С. Ландой).

Со временем область научных интересов Ю.И. Неймарка значительно расширяется и включает в себя различные разделы кибернетики (теории управления): адаптивное управление, идентификация и фильтрация, робастная устойчивость, глобальная поисковая оптимизация с адаптивной стохастической моделью оптимизируемой функции, автоматная поисковая оптимизация, теория массового обслуживания, распознавание образов и медицинская диагностика. Интерес к проблемам кибернетики был инициирован А.А. Андроновым, который говорил, что "кибернетика родилась не на пустом месте, что она базируется на теории колебаний и автоматическом регулировании, что за ней будущее, за ее спиной вычислительная техника, новый могучий инструмент точного познания мира".

В адаптивном управлении Ю.И. Неймарком был изобретен и обоснован принцип синтеза алгоритмов настройки параметров, обеспечивающих устойчивость динамической системы: вектор скорости изменения параметров должен быть направлен в сторону максимального убывания скорости функции Ляпунова. В задаче синтеза управления неопределенными объектами на основе идентификации неизвестных параметров классическим методом наименьших квадратов им было показано, что адаптивное управление возможно и в условиях неидентифицируемости объекта. В монографии "Новые технологии применения метода наименьших квадратов" (совместно с Л.Г. Теклиной) представлена универсальная рекуррентная форма метода наименьших квадратов как управляемой динамической системы и изложены разнообразные способы применения этой формы. Занимаясь общими проблемами теории массового обслуживания, Ю.И. Неймарк разработал ряд конкретных математических моделей управления уличным движением транспорта на перекрестке. Результаты исследований 60–70 гг. XX в. в области теории управления отражены в монографии "Динамические системы и управляемые процессы". В 1972 г. вышла в свет книга Ю.И. Неймарка "Распознавание образов и медицинская диагностика" (совместно с З.С. Баталовой, Ю.Г. Васиным и М.Д. Брейдо), в которой подведен итог многолетнего сотрудничества математиков и врачей по применению математических моделей распознавания образов к созданию автоматизированной системы диагностики различных заболеваний.

В развитие метода D-разбиения Ю.И. Неймарк в конце 80-х гг. XX в. обратился к проблеме робастной устойчивости, в том числе и при нелинейном вхождении параметров в характеристическое уравнение, и предложил способ нахождения меры робастной устойчивости как расстояния от точки в многомерном пространстве параметров, отвечающей их номинальным значениям, до границы области устойчивости. За результаты по исследованию проблемы робастной устойчивости Ю.И. Неймарк был удостоен в 1994 г. Международ-

Ю.И. Неймарк с учениками: М.М. Коган, Д.В. Баландин,
В.А. Брусин и В.П. Савельев

ной премии им. Норберта Винера. В течение всей своей научной деятельности Юрий Исаакович уделял значительное внимание проблемам математического моделирования. Процесс построения математических моделей реальных явлений он считал, скорее, искусством, чем наукой. Не будет преувеличением сказать, что вся современная техника, определяющая образ жизни людей, основана на успехах фундаментальной науки и является детищем математического моделирования. Одной из первых математических моделей, созданных Ю.И. Неймарком, была модель вибропогружения металлического шпунта в мерзлый грунт. Техническая проблема состояла в том, что вибраторы, применяемые при строительстве плотины Горьковской ГЭС в 1951 г., быстро выходили из строя. Эта модель позволила установить, что в режиме резонанса, т.е. при совпадении частоты вибратора и собственной частоты колебаний шпунта, происходит "смягчение" грунта. Дальнейшее совершенствование метода вибропогружения привело к переходу от центробежных вибраторов к виброударным механизмам. Впоследствии простейшая модель виброударника рассматривалась Ю.И. Неймарком с использованием метода точечных отображений, а более полные модели изучались И.И. Блехманом.

Большое внимание Ю.И. Неймарк уделял корректности математических моделей. Одна из интересных задач, которой он занимался, — парадокс Пенлеве и автоколебания при кулоновском трении. В самом конце XIX в. французский механик П. Пенлеве, стремясь к созданию общей теории, обнаружил, что уравнения движения некоторых простых механических систем с трением неразрешимы. Эта проблема вызвала бурную дискуссию с участием выдающихся ученых того времен: Р. Мизеса, Л. Прандтля, Ф. Клейна и др. Ю.И. Неймарк привнес новое понимание силового взаимодействия в случае сухого трения и предложил схему направленных связей с замкнутым циклом, подобно той, что имеет место в релейных системах автоматического регулирования. Таким образом, он установил, что сухое кулоновское трение может вызвать автоколебания, которые при увеличении жесткости входящих в систему твердых тел и связей между ними переходят в разрывные периодические автоколебания.

Позднее у него появились статьи, посвященные построению и исследованию простых математических моделей, имеющих исключительную роль в познании мира. Это и модель сообщества "производители–продукт–управленцы", и модель автоколебательной ходьбы, и загадка Каспийского моря, и модель ГЭС, и модель иммунного ответа организма на вторжение инфекции, и энергетическая модель работы сердца, и потоковая модель экономической динамики, и игровая модель человеческого общества. Несмотря на простоту, все они выделяют в описании сложных технических, биологических и социальных явлений и процессов самое существенное и основное. Эта идеология явно прослеживалась в его пленарном докладе "Математическое моделирование как наука и искусство и роль простых моделей в познании мира", сделанном на VI-м Международном конгрессе по математическому моделированию, который проходил в 2004 г. в Нижегородском государственном университете.

Около 70 лет своей жизни Ю.И. Неймарк отдал обучению студентов и аспирантов в Нижегородском (Горьковском) государственном университете им. Н.И. Лобачевского. Под его руководством было защищено 55 кандидатских диссертаций, 16 его учеников защитили докторские диссертации. Им были разработаны уникальные учебные курсы по теории управления и математическому моделированию. Он автор 580 научных публикаций и 12 монографий, многие из которых изданы за рубежом.

Список монографий и учебников Ю.И. Неймарка

1. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949.
2. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.
3. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений. М.: Наука, 1972.
4. *Неймарк Ю.И., Баталова З.С., Васин Ю.Г., Брейдо М.Д.* Распознавание образов и медицинская диагностика. М.: Наука, 1972.
5. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
6. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
7. *Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П.* Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985.
8. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
9. *Неймарк Ю.И.* Сухой остаток: к истории в лицах научной школы А.А. Андронова. Н. Новгород: Изд-во Нижегородский гуманитарный центр, 2000.
10. *Neimark Ju.I.* Mathematical Models in Natural Science and Engineering. Berlin: Springer, 2003.
11. *Неймарк Ю.И., Теклина Л.Г.* Новые технологии применения метода наименьших квадратов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2003.
12. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010.

Д.В. Баландин, М.М. Коган

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. **Д.В. БАЛАНДИН, д-р физ.-мат. наук (dbalandin@yandex.ru)**
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ[1]

Показано, что множеством достижимости линейной нестационарной непрерывной или дискретной системы, в которой сумма квадратичной формы начального состояния и интеграла или суммы квадратичных форм возмущения на конечном интервале времени ограничена сверху заданной величиной, является эволюционирующий эллипсоид. Матрица эллипсоида удовлетворяет линейному матричному дифференциальному или разностному уравнению соответственно. Синтезированы оптимальные эллипсоидальные наблюдатель и алгоритм идентификации, обеспечивающие наилучшие эллипсоидальные оценки состояния системы и неизвестных параметров, а также оптимальные регуляторы, обеспечивающие попадание состояния системы в целевое множество или удержание траектории системы в эллипсоидальной трубке. Установлено соответствие между оптимальным эллипсоидальным наблюдателем и фильтром Калмана. Приведены иллюстрирующие примеры для уравнения Матье, описывающего параметрические колебания линейного осциллятора.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, эллипсоидальное множество достижимости, оптимальное управление, оптимальное оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231020080024

1. Введение

Авторы посвящают эту статью памяти Ю.И. Неймарка, учениками которого (прямыми или косвенными) они являются. Хочется повторить слова, которые Юрий Исаакович написал в эпиграфе своей последней монографии "Математическое моделирование как наука и искусство" [1, 2]: "В науке и ее приложениях, как и в жизни, самое главное – понимание. Оно всегда просто, но добывается трудно."

В монографии [3] Ю.И. Неймарк изложил результаты широкого круга своих исследований, касающихся вопросов устойчивости, управления и оптимизации в динамических системах. Одна из важных тем этих исследований относилась к задачам управления в условиях неопределенности математической модели объекта управления и действующих возмущений. Эта тема развивалась в последующих работах Ю.И. Неймарка (см., например, [4–7]) и изучается в настоящей работе.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-41-520002, 19-01-00289), проекта № 0729-2020-0055 и научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего".

В задачах оценивания и управления в динамических системах при отсутствии полной информации о начальных условиях, возмущениях и помехах в измерениях важную роль играет множество достижимости системы, понимаемое как множество всех состояний, в которых система может оказаться в данный момент времени при всевозможных допустимых значениях неопределенных факторов. Характеризация множеств достижимости и их зависимости от параметров системы позволяет проектировать оптимальные системы оценивания и управления, при которых множества достижимости синтезированной системы в данный момент времени или в течение некоторого интервала времени включены в желаемые целевые множества с оптимальными характеристиками.

Классическая задача Б.В. Булгакова о влиянии ограниченных возмущений на линейную динамическую систему была поставлена и решена в [8]. Проблема нахождения или оценивания множеств достижимости активно изучается с конца 60-х г. прошлого века и до сих пор продолжает привлекать внимание специалистов в области теории управления и ее приложений [9–19]. В силу линейности системы состояние в данный момент времени есть сумма двух векторов: состояния невозмущенной системы с неопределенным начальным состоянием и состояния возмущенной системы с нулевым начальным состоянием. Если множество начальных состояний выбрать эллипсоидальным и множество достижимости возмущенной системы аппроксимировать эллипсоидом, то возникает задача описания геометрической суммы двух эллипсоидов, которая является выпуклым множеством, но не эллипсоидом. В задачах рекуррентного оценивания возникает необходимость в нахождении эллипсоида наименьшего размера, включающего пересечение двух эллипсоидов. Для описания таких множеств обычно стараются получать их верхние и нижние эллипсоидальные аппроксимации. Все это привело к развитию техники оперирования с эллипсоидами. Несмотря на значительный прогресс в этом направлении, связанный с применением линейных матричных неравенств и соответствующего программного обеспечения, проблема остается открытой в силу того, что методы, основанные на эллипсоидальных аппроксимациях множеств достижимости, трудно применить для синтеза оптимальных систем оценивания и управления за исключением очень простых случаев.

В недавних работах [20–23] было введено понятие максимального уклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном интервале времени при неопределенных начальном состоянии и возмущении. Посуществу, это — индуцированная норма оператора, порожденного системой и отображающего пару, состоящую из вектора начального состояния и векторфункции возмущения, в целевой выход, где квадрат “величины” пары измеряется суммой квадратичной формы начального состояния и интеграла от квадратичной формы возмущения, а “величина” выхода измеряется максимальным по времени значением его евклидовой нормы. Для линейной стационарной системы на бесконечном интервале времени при нулевых начальных условиях подобная характеристика была введена в [24] и названа обобщенной H_2-нормой системы. В [20–23] максимальное уклонение выхода характеризуется в терминах решений линейного матричного дифференциального уравнения или неравенств и на основе этого синтезируется оптимальное управление, минимизирующее максимальное уклонение выхода. Эти результаты навели авторов на мысль о том, что когда сумма квадратичной формы начального состояния и интеграла от квадратичной формы возмущения ограничена сверху заданной величиной, состояние системы принадлежит эллипсоиду с матрицей, удовлетворяющей указанному линейному дифференциальному уравнению. Подтверждение такого предположения было найдено в работах [11, 13], в последней из которых методом динамического программирования показано, что при аналогичном ограничении множеством достижимости системы является эллипсоид, матрица которого является решением дифференциального уравнения Риккати. На этой основе в [13] был построен оптимальный наблюдатель, обеспечивающий эллипсоидальную оценку состояния системы. Однако указанные результаты получены при достаточно жестких условиях невырожденности квадратичных форм начального состояния и возмущений, которые означают, что начальное состояние должно принадлежать невырожденному эллипсоиду, а возмущения должны присутствовать в уравнении для каждой компоненты состояния и в измерении каждой компоненты выхода.

В данной работе эти результаты развиваются в нескольких направлениях одновременно как для непрерывных (см. также [25]), так и для дискретных линейных нестационарных систем. Во-первых, показано, что в случае вырожденных квадратичных форм в совместном ограничении на начальное состояние и возмущение и, в частности, в крайних случаях, когда возмущение отсутствует или когда начальное состояние нулевое, множествами достижимости системы также являются эллипсоиды, в том числе и вырожденные. Необходимость в изучении множеств достижимости в случае вырожденной квадратичной формы начального состояния возникает, например, в задачах управления механическими системами с ударными воздействиями, когда некоторые переменные состояния известны, а некоторые испытывают мгновенные неопределенные изменения. Рассмотрение этого вопроса потребовало применить иной подход для обоснования результата, который привел к линейным матричным дифференциальному или разностному уравнениям Ляпунова, описывающим динамику эллипсоидального множества достижимости в непрерывном и дискретном случаях. Установлено, что величина максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы действительно совпадает с обобщенной H_2-нормой системы при ненулевых начальных условиях. Во-вторых, получено уравнение оптимального эллипсоидального наблюдателя, обеспечивающего оценку состояния в виде эллипсоида минимального размера в том числе и в вырожденном случае, когда возмущения в системе и помехи в измерениях могут отсутствовать в некоторых уравнениях. Выявлена связь оптимального эллипсоидального наблюдателя в задачах фильтрации и идентификации неизвестных параметров с фильтром Калмана и рекуррентным алгоритмом метода наименьших взвешенных квадратов соответственно. В-третьих, показано, как синтезировать ограниченное управление, при котором состояние системы попадает в целевое эллипсоидальное множество или траектория системы удерживается в заданной эллипсоидальной трубке. Все результаты иллюстрируются на примере линейного нестационарного осциллятора, описываемого уравнением Матье.

2. Эллипсоидальные множества достижимости

Рассмотрим динамический объект, описываемый нестационарной системой линейных дифференциальных или разностных уравнений

$$\partial x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \tag{2.1}$$

где ∂ – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае при $t = t_0, t_0 + 1, \ldots, t_f$, $x \in \mathrm{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v \in \mathrm{R}^{n_v}$ – возмущение, действующее на объект. Введем обозначения, позволяющие в дальнейшем рассматривать параллельно непрерывный и дискретный случаи: для вектора a и для непрерывной или дискретной вектор-функции $b(t)$ на интервале $[t_0, t]$ обозначим:

$$|a|_Q^2 = a^{\mathrm{T}} Q^{-1} a, \quad \|b\|_{M\,[t_0,t]}^2 = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b^{\mathrm{T}}(\sigma) M^{-1}(\sigma) b(\sigma)\, d\sigma, \\ \displaystyle\sum_{i=t_0}^{t-1} b_i^{\mathrm{T}} M_i^{-1} b_i \end{cases}$$

для обратимых матриц Q, $M(\sigma)$ и M_i. Если обозначение матрицы у нормы отсутствует, это значит матрица единичная.

Предположим, что начальное состояние $x(t_0)$ и возмущение $v = v(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$ принадлежат множеству допустимых пар начальных состояний и возмущений, определяемому как

$$\begin{gathered} \mathcal{S}(t, t_0; R, G) = \\ = \Big\{(x, v(\sigma)) : \, x = R^{1/2} w_1, \, v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma) w_2(\sigma), \, |w_1|^2 + \|w_2\|_{[t_0,t]}^2 \leqslant 1\Big\} \end{gathered} \tag{2.2}$$

для заданных матрицы $R^{\mathrm{T}} = R \geqslant 0$ и матричной функции $G^{\mathrm{T}}(\sigma) = G(\sigma) \geqslant 0$, $\sigma \in [t_0, t]$. Если $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то, выражая w_1 и $w_2(\sigma)$ из первых двух равенств в (2.2) и подставляя в последнее неравенство, получим, что в невырожденном случае допустимые начальные условия и возмущения удовлетворяют неравенству

$$|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2 \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Левую часть этого неравенства можно интерпретировать как квадрат меры неопределенности в системе для текущего момента времени, а само условие (2.3) — как то, что мера неопределенности в системе не превышает известной величины, которую, не умаляя общности, можно принять единицей. Другими словами, начальное состояние находится внутри заданного эллипсоида, а "энергия" возмущения ограничена величиной, зависящей от начального состояния. Смысл этого совместного ограничения на начальное состояние и возмущение можно пояснить следующим образом. Состояние линейной системы в текущий момент времени зависит линейно от начальных условий и возмущения и их увеличение приводит к соответствующему увеличению переменных состояния. Для того чтобы характеризовать поведение системы при неопределенных начальных условиях и возмущениях, имеет смысл нормировать текущее значение евклидовой нормы состояния величиной, равной указанной сумме, или, что то же самое для линейных систем, ограничить указанную сумму единицей.

Весовая матрица R при заданной $G(\sigma)$ отражает относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешнего возмущения: чем "больше" R, тем больший вес придается неопределенности в начальных условиях. Из (2.2) следует, что множество начальных состояний системы совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(R) = \{x = R^{1/2}w : |w| \leqslant 1\}$. Если $R > 0$, то приходим к стандартному представлению эллипсоида $\mathcal{E}(R) = \{x : x^{\mathrm{T}}R^{-1}x \leqslant 1\}$. Если $R \geqslant 0$, то $\mathcal{E}(R)$ – вырожденный эллипсоид, аффинная размерность которого совпадает с рангом матрицы R [26, с. 30]. Обозначим через $\varphi(t;\tau,x,v)$ решение уравнения (2.1) с начальным условием $\varphi(\tau) = x$ при соответствующей функции $v = v(\sigma)$, $\sigma \in [\tau, t]$.

Задача состоит в описании множества состояний, в которых система может оказаться в определенный момент времени при всевозможных начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$.

Определение 1. Множеством достижимости $\mathcal{D}(t,\tau,\mathcal{E}(R))$ системы (2.1) *в момент времени $t \geqslant \tau$ называется совокупность концов траекторий $\varphi(t;\tau,x_\tau,v)$ при всех допустимых начальных состояниях $x_\tau \in \mathcal{E}(R)$ в момент времени τ и возмущениях $v(\sigma)$, $\sigma \in [\tau, t]$, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t,\tau;R,G)$.*

Теорема 2.1. Множеством достижимости системы (2.1) *в момент времени $t \geqslant t_0$ при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t,t_0;R,G)$, $t \in [t_0, t_f]$ с $R \geqslant 0$ и $G(\sigma) \geqslant 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, является эллипсоид*

$$\mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(P(t)), \tag{2.4}$$

матрица $P(t) \geqslant 0$ которого в непрерывном случае — решение линейного матричного дифференциального уравнения

$$\dot{P} = A(t)P + PA^{\mathrm{T}}(t) + B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) \tag{2.5}$$

и в дискретном случае — решение линейного матричного разностного уравнения

$$P(t+1) = A(t)P(t)A^{\mathrm{T}}(t) + B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) \tag{2.6}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$.

Доказательство теоремы 2.1. В непрерывном случае решение уравнения (2.5) имеет вид

$$P(t) = \Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)G(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)d\tau, \tag{2.7}$$

где $\Phi(t,\tau)$ – решение уравнения

$$\frac{d\Phi(t,\tau)}{dt} = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,\tau) = I.$$

Рассмотрим сначала регулярный случай $R > 0$ и $G(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Так как $\Phi(t, \tau)$ – невырожденная матрица, то тогда $P(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму $V(t, x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1}(t) x$ с матрицей $P(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.5). Вычислим ее производную в силу системы (2.1), принимая во внимание, что $d(P^{-1})/dt = -P^{-1}(\dot{P})P^{-1}$:

$$\dot{V} = v^{\mathrm{T}} G^{-1} v - (v - v_*)^{\mathrm{T}} G^{-1} (v - v_*), \tag{2.8}$$

где $v_*(t) = G(t) B^{\mathrm{T}}(t) P^{-1}(t) x(t)$, а $x(t)$ – решение уравнения

$$\dot{x} = \left[A(t) + B(t) G(t) B^{\mathrm{T}}(t) P^{-1}(t)\right] x. \tag{2.9}$$

Интегрируя (2.8) на интервале $[t_0, t]$, имеем

$$x^{\mathrm{T}}(t) P^{-1}(t) x(t) = |x(t_0)|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]} - \|v - v_*\|^2_{G\,[t_0,t]}. \tag{2.10}$$

Так как $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, то для $(x_0, v(\sigma)) \in \mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ выполняется неравенство (2.3). Следовательно,

$$x^{\mathrm{T}}(t) P^{-1}(t) x(t) \leqslant 1, \tag{2.11}$$

т.е. $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$.

Покажем, что для любой точки $\bar{x} \in \mathcal{E}(P(t))$ найдется точка $\bar{x}_0 \in \mathcal{E}(R)$ и возмущение $\bar{v}(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$, принадлежащие $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, такие что выполняется $\varphi(t; t_0, \bar{x}_0, \bar{v}) = \bar{x}$. Возьмем $\bar{v}(\sigma) = v_*(\sigma)$, где $x(\sigma)$ – решение уравнения (2.9) с конечным условием $x(t) = \bar{x}$. Очевидно, что в качестве искомой точки следует взять начальную точку $\bar{x}_0 = x(t_0)$ этой траектории. С учетом (2.10) получим

$$|\bar{x}_0|_R^2 + \|v_*\|^2_{G\,[t_0,t]} = \bar{x}^{\mathrm{T}} P^{-1}(t) \bar{x} \leqslant 1.$$

Следовательно, $|\bar{x}_0|_R^2 \leqslant 1$, т.е. $\bar{x}_0 \in \mathcal{E}(R_0)$.

Рассмотрим теперь вырожденный случай $R \geqslant 0$ и $G(t) \geqslant 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Введем матрицы

$$R_\varepsilon = R + \varepsilon I > 0, \quad G_\varepsilon(t) = G(t) + \varepsilon I > 0.$$

Решение уравнения (2.5), в котором матрица $G(t)$ заменена матрицей $G_\varepsilon(t)$ и начальное условие есть $P(t_0) = R_\varepsilon$, имеет вид $P_\varepsilon(t) = P(t) + \varepsilon P_1(t) > 0$, где $P_1(t) > 0$ – решение уравнения (2.5) при $G(\sigma) \equiv I$ и $R = I$. Согласно доказанному невырожденный эллипсоид $\mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ есть множество достижимости системы при начальных состояниях и возмущениях из множества $\mathcal{S}(t, t_0; R_\varepsilon, G_\varepsilon)$.

Покажем, что множество достижимости системы при начальных состояниях и возмущениях из множества $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ в случае $R \geqslant 0$ и $G(t) \geqslant 0$ также представляется в виде вырожденного эллипсоида $\mathcal{E}(P(t)) = \left\{x = P^{1/2}(t) w,\ |w| \leqslant 1\right\}$. Для этого сначала покажем, что для произвольной пары из $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ конец траектории в момент t будет принадлежать эллипсоиду $\mathcal{E}(P(t))$. Зафиксируем начальное состояние $x_0 \in \mathcal{E}(R)$ и выберем некоторое малое $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathcal{S}(t, t_0; R, G) \subset \mathcal{S}(t, t_0; R_\varepsilon, G_\varepsilon)$, то для данного начального состояния и некоторого допустимого возмущения конец фазовой траектории $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, v)$ в момент t будет принадлежать эллипсоиду $\mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ для любого сколь угодно малого ε. Это значит, что $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$.

Покажем теперь, что для любого состояния $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$ найдется пара $(x_0^*, v^*(\sigma)) \in \mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, для которой $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0^*, v^*)$. Так как $x(t) \in \in \mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ и $\mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ – область достижимости системы в регулярном случае при $R_\varepsilon > 0$ и $G_\varepsilon(\sigma) > 0$, то найдется пара $(x_0^\varepsilon, v^\varepsilon(\sigma)) \in \mathcal{S}(t, t_0; R_\varepsilon, G_\varepsilon)$, где $x_0^\varepsilon = (R + \varepsilon I)^{1/2} w_1^\varepsilon$, $v^\varepsilon(\sigma) = (G + \varepsilon I)^{1/2} w_2^\varepsilon(\sigma)$, $|w_1^\varepsilon|^2 + \|w_2^\varepsilon(\sigma)\|^2 \leqslant 1$, для которой $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0^\varepsilon, v^\varepsilon)$. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как последовательность $(w_1^{\varepsilon_n}, w_2^{\varepsilon_n}(\sigma))$ ограничена в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$< \Big(w_1^{(1)}, w_2^{(1)}(\sigma)\Big), \Big(w_1^{(2)}, w_2^{(2)}(\sigma)\Big) >= w_1^{(1)\mathrm{T}} w_1^{(2)} + \int\limits_{t_0}^{t} w_2^{(1)\mathrm{T}}(\sigma) w_2^{(2)}(\sigma)\, d\sigma,$$

то она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность [27, теорема 1.8.1]. Согласно [27, теорема 1.8.4] из указанной подпоследовательности можно извлечь такую подпоследовательность $(w_1^{\varepsilon_{n_k}}, w_2^{\varepsilon_{n_k}}(\sigma))$, что последовательность ее средних арифметических $\sum_{k=1}^{m} (w_1^{\varepsilon_{n_k}}, w_2^{\varepsilon_{n_k}}(\sigma))/m$ сильно сходится к $(w_1^*, w_2^*(\sigma))$ при $m \to \infty$. Так как множество $\{(w_1, w_2(\sigma))\colon |w_1|^2 + \|w_2(\sigma)\|^2 \leqslant 1\}$ выпукло и замкнуто, то все члены последней последовательности принадлежат этому множеству и $|w_1^*|^2 + \|w_2^*(\sigma)\|^2 \leqslant 1$. В силу принципа суперпозиции для линейной системы траектории с начальными состояниями и возмущениями, соответствующими каждой паре указанной последовательности средних арифметических, в момент времени t попадают в $x(t)$. Так как $\widehat{\varepsilon}_m = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{n_k}/m \to 0$ при $m \to \infty$, то $R + \widehat{\varepsilon}_m I \to R$, $G(\sigma) + \widehat{\varepsilon}_m I \to G(\sigma)$, $P(t) + \widehat{\varepsilon}_m P_1(t) \to P(t)$ при $m \to \infty$. Следовательно, $(x_0^*, v^*(\sigma))$ с $x_0^* = R^{1/2} w_1^*$ и $v^*(\sigma) = G^{1/2} w_2^*(\sigma)$ есть искомая пара.

Замечание 1. Возможно альтернативное доказательство утверждения теоремы, основанное на понятии опорной функции множества достижимости [11], вычисление которой сводится к максимизации скалярного произведения на шаре[2].

Переходим к дискретному случаю. Начнем со вспомогательного утверждения, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 2.1. Пусть S – $(m \times n)$-матрица, причем $m \leqslant n$. Следующие два множества совпадают:

$$\mathcal{S}_1 = \{x = Sg \quad \forall\, g \in \mathrm{R}^n : \, |g| \leqslant 1\} =$$
$$= \Big\{x = (SS^{\mathrm{T}})^{1/2} w \quad \forall\, w \in \mathrm{R}^m : \, |w| \leqslant 1\Big\} = \mathcal{S}_2,$$

где $\mathcal{S}_2$ – эллипсоид, матрица которого SS^{T}.

[2] Это доказательство любезно предоставил авторам А.И. Матасов.

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$x(t) = \Psi(t,t_0)x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Psi(t,i+1)B(i)v(i), \quad t \geqslant t_0+1, \tag{2.12}$$

где переходная матрица

$$\Psi(t,t_0) = \begin{cases} A(t-1)A(t-2)\cdots A(t_0), & t \geqslant t_0+1, \\ I, \quad t=t_0, \end{cases}$$

является решением разностного уравнения

$$\Psi(t+1,t_0) = A(t)\Psi(t,t_0), \quad \Psi(t_0,t_0) = I, \quad t \geqslant t_0. \tag{2.13}$$

С учетом (2.2) запишем (2.12) в виде

$$x(t) = S_t g_t, \quad g_t^{\mathrm{T}} g_t \leqslant 1, \tag{2.14}$$

где

$$S_t = \big(\Psi(t,t_0)R^{1/2} \quad \Psi(t,t_0+1)B(t_0)G^{1/2}(t_0) \ \cdots \ \Psi(t,t)B(t-1)G^{1/2}(t-1)\big),$$
$$g_t = \operatorname{col}\big(w_1, w_2(t_0), \cdots, w_2(t-1)\big).$$

Заметим, что $S_t S_t^{\mathrm{T}} = P(t) \geqslant 0$, где

$$P(t) = \Psi(t,t_0)R\Psi^{\mathrm{T}}(t,t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Psi(t,i+1)B(i)G(i)B^{\mathrm{T}}(i)\Psi^{\mathrm{T}}(t,i+1),$$

т.е. матрица $P(t)$ является решением разностного уравнения (2.6). Таким образом, множество достижимости в момент времени t образуют все векторы вида (2.14). В силу леммы 2.1 это множество совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(P(t))$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Множество достижимости системы (2.1) *при начальных состояниях и возмущениях из множества* $\mathcal{S}(t,t_0;R,G)$ *обладает эволюционным свойством*

$$\mathcal{D}(t,t_0,\mathcal{E}(R)) = \mathcal{D}(t,\tau,\mathcal{D}(\tau,t_0,\mathcal{E}(R))),$$

так как $\mathcal{D}(\tau,t_0,\mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(P(\tau))$ *и* $\mathcal{D}(t,\tau,\mathcal{E}(P(\tau))) = \mathcal{D}(t,t_0,\mathcal{E}(R))$ *для любого* $\tau \in [t_0,t]$.

Замечание 2. Заметим, что уравнения (2.5) и (2.6) в теореме 2.1 совпадают с уравнениями для ковариационных матриц $Ex(t)x^{\mathrm{T}}(t)$ состояния системы (2.1) в непрерывном и дискретном случаях, когда начальное состояние и возмущения являются случайными независимыми процессами с нулевыми математическими ожиданиями и заданными ковариационными матрицаами $Ex(t_0)x^{\mathrm{T}}(t_0) = R$, $Ev(t)v^{\mathrm{T}}(t) = G(t)$ [28].

Замечание 3. Непосредственно, но достаточно громоздко проверяется, что в дискретном случае при условии $\det A(t) \neq 0$, $R > 0$ и $G(t) > 0$ для приращения функции $V(t) = x^{\mathrm{T}}P^{-1}(t)x$, где $P(t) > 0$, $t \in [t_0,t_f]$ — решение уравнения (2.6), в силу системы тождественно выполняется

$$\Delta V(t) = v^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)v(t) - \tag{2.15}$$
$$-(v(t)-v_*(t))^{\mathrm{T}}[G^{-1}(t) - B^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}(t+1)B(t)](v(t)-v_*(t)),$$

где $v_*(t) = [G^{-1}(t) - B^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}(t+1)B(t)]^{-1}B^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}(t+1)A(t)x(t)$. Неравенство $G^{-1}(t) - B^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}(t+1)B(t) > 0$ по лемме Шура эквивалентно неравенству $P(t+1) - B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) > 0$, которое выполняется в силу уравнения (2.6). Следовательно, суммируя тождества (2.15) и учитывая начальное условие $P(t_0) = R$, а также (2.3), получим

$$x^{\mathrm{T}}(t_f)P^{-1}(t_f)x(t_f) \leqslant 1,$$

т.е. $x(t_f) \in \mathcal{E}(P(t_f))$ для всех допустимых начальных состояний и возмущений.

В частном случае, когда возмущения отсутствуют и начальное состояние принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(R)$, $R \geqslant 0$, т.е. множеством допустимых начальных состояний и возмущений является $\mathcal{S}(t, t_0; R, 0)$, множество достижимости системы (2.1) есть эллипсоид $\mathcal{E}(P_0(t))$, матрица которого $P_0(t) \geqslant 0$ – решение уравнения (2.5) или (2.6) при $G(t) \equiv 0$ с начальным условием $P_0(t_0) = R$. В другом частном случае при нулевом начальном состоянии, когда множество допустимых начальных состояний и возмущений составляет $\mathcal{S}(t, t_0; 0, G)$, множеством достижимости является эллипсоид $\mathcal{E}(P_v(t))$, матрица которого $P_v(t) \geqslant 0$ – решение уравнения (2.5) или (2.6) с нулевым начальным условием $P_v(t_0) = 0$. Так как решение неоднородного уравнения представимо в виде

$$P(t) = P_0(t) + P_v(t), \tag{2.16}$$

то $\mathcal{E}(P_0(t)) \subseteq \mathcal{E}(P(t))$ и $\mathcal{E}(P_v(t)) \subseteq \mathcal{E}(P(t))$.

Замечание 4. Обратим внимание на возможность определения множества достижимости с помощью решения обратной задачи: для заданной матрицы $S > 0$ найти матрицу $R > 0$ такую, что множество достижимости системы (2.1) в момент времени $t \geqslant t_0$ при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(S)$. Действительно, запишем уравнения

$$\dot{Q} = -A^{\mathrm{T}}(t)Q - QA(t) - QB(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t)Q \tag{2.17}$$

для непрерывного случая и

$$Q(t) = A^{\mathrm{T}}(t)Q(t+1)A(t) - A^{\mathrm{T}}(t)Q(t+1)B(t)M^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)Q(t+1)A(t) \tag{2.18}$$

с $M(t) = G^{-1}(t) - B^{\mathrm{T}}(t)Q(t+1)B(t) > 0$ для дискретного случая, которые являются сопряженными к уравнениям (2.5) и (2.6). Задавая $Q(t_f) = S^{-1}$ в уравнениях (2.17) и (2.18) и находя $Q(t_0)$, получим, что заданный эллипсоид $\mathcal{E}(S)$ является областью достижимости системы (2.1) при всех начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; Q^{-1}(t_0), G)$.

Далее, пусть $z = C_z(t)x$ – некоторый выход системы (2.1). Если $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$, т.е. $x(t) = P^{1/2}(t)\,w$, где $|w| \leqslant 1$, то $z(t) = C_z(t)P^{1/2}(t)\,w$. Согласно лемме 2.1 множество всех таких векторов составляет эллипсоид

$\mathcal{E}\left(C_z(t)P(t)C_z^{\mathrm{T}}(t)\right) = \left\{z : z = \left(C_z(t)P(t)C_z^{\mathrm{T}}(t)\right)^{1/2} g,\ |g| \leqslant 1\right\}$, а максимальное значение евклидовой нормы выхода совпадает с величиной максимальной полуоси этого эллипсоида, т.е.

$$\max_{(x_0,v)\in\mathcal{S}(t,t_0;R,G)} |z(t)| = \lambda_{\max}^{1/2}\left(C_z(t)P(t)C_z^{\mathrm{T}}(t)\right). \tag{2.19}$$

Если $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то максимальное значение этой величины на заданном отрезке времени $[t_0, t_f]$

$$\sup_{t\in[t_0,t_f]} \max_{(x_0,v)\in\mathcal{S}(t,t_0;R,G)} |z(t)| = \max_{x(t_0)\neq 0, v\not\equiv 0} \frac{\sup\limits_{t\in[t_0,t_f]} |z(t)|}{\left(|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2\right)^{1/2}} = \\ = \sup_{t\in[t_0,t_f]} \lambda_{\max}^{1/2}(C_z(t)P(t)C_z^{\mathrm{T}}(t)) \tag{2.20}$$

совпадает с максимальным уклонением выхода, которое при $G(\sigma) \equiv I$ является обобщенной H_2-нормой системы при ненулевых начальных условиях [20–23].

Полученный в теореме 2.1 результат непосредственным образом переносится на случай, когда область неопределенности начального состояния есть эллипсоид с центром не в нуле, а в заданной точке x_*. Действительно, пусть начальное состояние и возмущение системы $(x_0, v(\sigma))$ представимы в виде

$$x_0 = x_* + R^{1/2}w_1, \quad v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma)w_2(\sigma), \quad |w_1|^2 + \|w_2\|_{[t_0,t]}^2 \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что начальное состояние принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(R, x_*)$ с центром в x_* и матрицей R. В силу линейности системы представим ее решение в виде двух слагаемых: решения возмущенной системы с начальным состоянием, принадлежащим соответствующему эллипсоиду с центром в начале координат, и решения невозмущенной системы с начальным состоянием x_*, т.е.

$$\varphi(t; t_0, x_0, v) = \varphi(t; t_0, x_0 - x_*, v) + \varphi_*(t), \quad \varphi_*(t) = \varphi(t; t_0, x_*, 0).$$

Тогда из теоремы 2.1 следует, что в этом случае множество достижимости системы в момент времени t представляет собою эллипсоид с центром в точке $\varphi_*(t)$ и матрицей $P(t)$, т.е.

$$\mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R, x_*)) = \mathcal{E}(P(t), \varphi_*(t)).$$

Для иллюстрации теоремы 2.1 рассмотрим известное уравнение Матье, описывающее параметрические колебания линейного осциллятора. Представим это уравнение в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \omega t)x_1 + v, \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где ω_0, ω и ε – заданные параметры, $v = v(t)$ – внешнее возмущение, действующее на осциллятор. Известно [1, с. 162], что при определенном соотношении параметров в рассматриваемой системе возможен параметрический

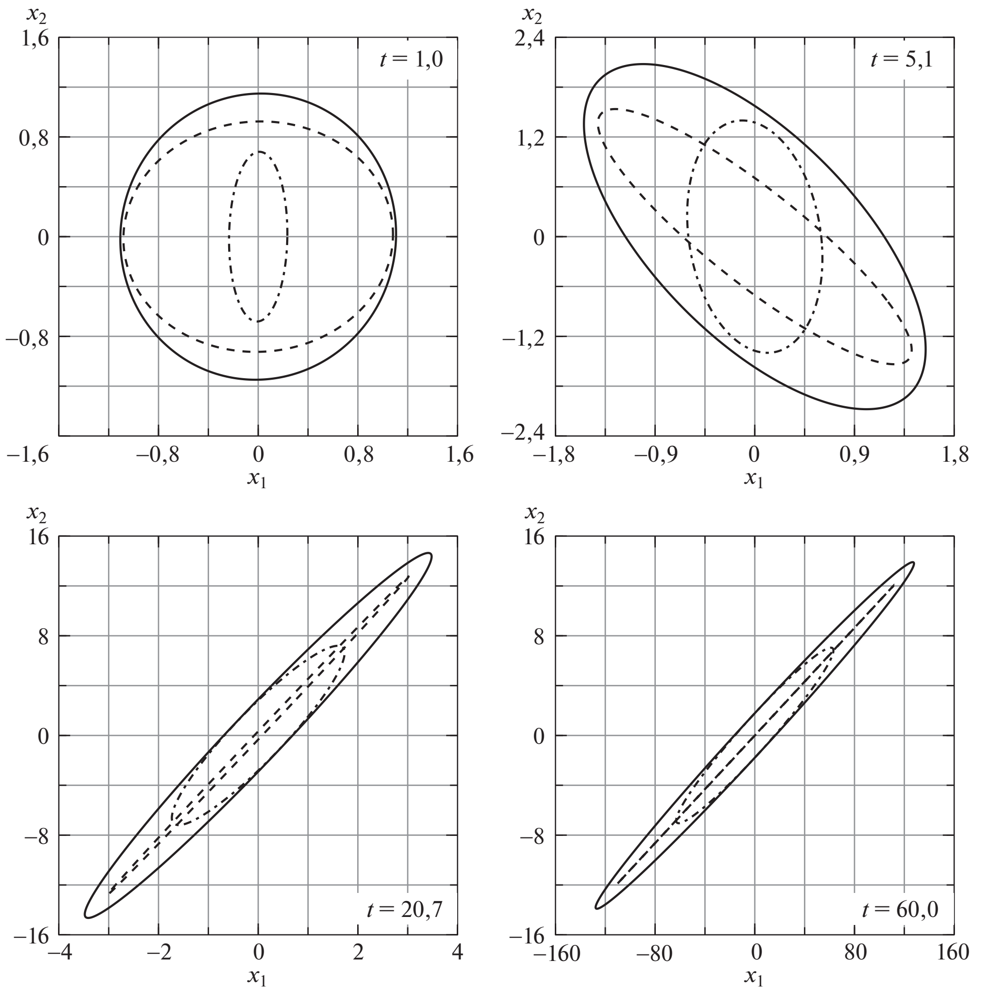


Рис. 1. Динамика множеств достижимости уравнения Матье в регулярном случае.

резонанс. Основной резонанс возникает при соотношении $\omega_0/\omega = 1/2$. Далее при проведении вычислительных экспериментов будем полагать, что $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0{,}1$.

На рис. 1 для моментов времени 1, 5,1, 20,7, 60 показаны множества достижимости для регулярного случая, когда $R = \operatorname{diag}(1,\ 1)$, $G(\sigma) \equiv 1$ (сплошная линия), для вырожденного случая, когда отсутствует внешнее возмущение $G(\sigma) \equiv 0$ (пунктирная линия), и для вырожденного случая, когда начальное состояние нулевое $R = 0$ (штрих-пунктирная линия). Заметим, что при $t = 60$ эллипс, обозначенный пунктирной линией, имеет длины полуосей, равные 0,0093 и 111,75 соответственно.

Далее рассмотрим вырожденный случай, когда внешнее возмущение отсутствует ($G(\sigma) \equiv 0$), а в качестве матрицы R выбрана вырожденная диагональная матрица $R = \operatorname{diag}(0,\ 1)$. Другими словами, в качестве допустимых начальных условий полагается $x_{10} = 0$, $x_{20} \in [-1, 1]$. Для этого случая на рис. 2 показана эволюция во времени величины L, определяющей длину по-

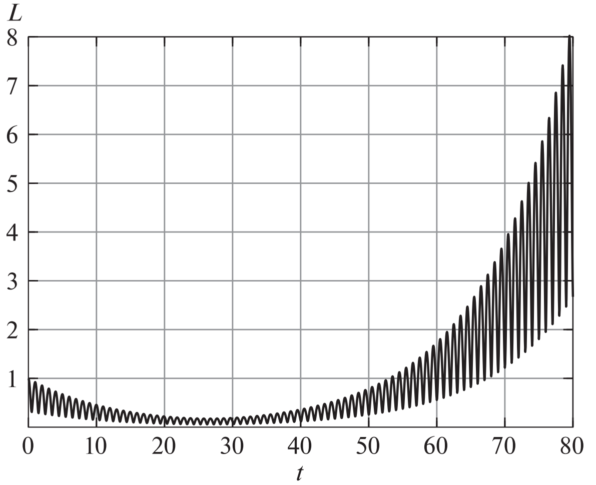


Рис. 2. Динамика “размера” множества достижимости уравнения Матье в вырожденном случае.

ловины отрезка — множества достижимости. Заметим, что эта зависимость носит колебательный характер с частотой, близкой к 2π.

3. Оптимальное эллипсоидальное оценивание состояния и параметров

Рассмотрим задачу оценивания состояния $x(t)$ линейной нестационарной системы

$$\begin{aligned} \partial x(t) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

с неизвестным начальным состоянием $x(t_0)$ по измерениям выхода $y(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$. Предположим, что начальное состояние системы и возмущения представимы в виде

$$\begin{gathered} x(t_0) - x_* = R^{1/2} w_1, \quad v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma) w_2(\sigma), \\ |w_1|^2 + \|w_2\|^2_{[t_0,t]} \leqslant 1, \quad t \in [t_0, t_f] \end{gathered} \tag{3.2}$$

для заданных матрицы $R^{\mathrm{T}} = R \geqslant 0$ и матричной функции $G^{\mathrm{T}}(\sigma) = G(\sigma) \geqslant 0$, $\sigma \in [t_0, t]$. Построим наблюдатель полного порядка

$$\partial \widehat{x}(t) = A(t)\widehat{x}(t) + L(t)[y(t) - C(t)\widehat{x}(t)], \quad \widehat{x}(t_0) = x_*, \tag{3.3}$$

где $\widehat{x}(t)$ – оценка состояния $x(t)$, а $L(t)$ – матрица параметров наблюдателя, подлежащая определению. Обозначим ошибку оценивания: $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\partial e(t) = A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t), \quad e(t_0) = x(t_0) - x_*, \tag{3.4}$$

где $A_c(t) = A(t) - L(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - L(t)D(t)$. Тогда множество достижимости системы (3.4) в момент времени t согласно теореме 2.1 есть эллипсоид $\mathcal{E}(P(t))$, матрица которого в непрерывном случае удовлетворяет уравнению

$$\dot{P} = A_c(t)P + PA_c^{\mathrm{T}}(t) + B_c(t)G(t)B_c^{\mathrm{T}}(t) \tag{3.5}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$, а в дискретном случае – уравнению

$$P(t+1) = A_c(t)P(t)A_c^{\mathrm{T}}(t) + B_c(t)G(t)B_c^{\mathrm{T}}(t) \tag{3.6}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Это означает, что состояние $x(t)$ системы (3.1) находится внутри соответствующего эллипсоида $\mathcal{E}(P(t), \widehat{x}(t))$ с центром в точке $\widehat{x}(t)$, определяемой уравнением наблюдателя (3.3). Это множество естественно назвать эллипсоидальной оценкой состояния $x(t)$ в момент времени t, а наблюдатель с матрицей $L_*(t)$, при которой, например, след матрицы $P(t)$ будет минимальным, назвать оптимальным.

Согласно замечанию 2 динамика матрицы эллипсоидального множества достижимости уравнения (3.4) описывается тем же уравнением, что и динамика ковариационной матрицы ошибки $Ee(t)e^{\mathrm{T}}(t)$ в стохастическом случае, когда ковариация начального состояния равна $Ex(t_0)x^{\mathrm{T}}(t_0) = R$, а ковариация возмущения равна $Ev(t)v^{\mathrm{T}}(t) = G(t)$. Так как след матрицы эллипсоидальной оценки равен дисперсии ошибки оценивания, то уравнение оптимального наблюдателя совпадает с уравнением фильтра Калмана для оценки состояния системы (3.1), в которой возмущения $\xi_1(t) = B(t)v(t)$ и $\xi_2(t) = D(t)v(t)$, входящие аддитивно в уравнение состояния и в уравнение измерения, являются коррелированными

$$E\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} \left(\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\, \xi_2^{\mathrm{T}}(t)\right) = \begin{pmatrix} B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) & * \\ D(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) & D(t)G(t)D^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где $*$ замещает матрицу, транспонированную к симметрично расположенному блоку. Принимая во внимание стандартное требование в контексте калмановской фильтрации о невырожденности ковариационной матрицы возмущений в измерениях [28, с. 404], приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 3.1. *Если* $\det[D(\sigma)G(\sigma)D^{\mathrm{T}}(\sigma)] \neq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, *то оптимальный наблюдатель* (3.3), *обеспечивающий наилучшую эллипсоидальную оценку* $\mathcal{E}(P_*(t), \widehat{x}(t))$ *состояния системы* (3.1) *в момент времени* $t \geqslant t_0$ *при любых начальных состояниях и возмущениях, удовлетворяющих условию* (3.2) *при* $R \geqslant 0$ *и* $G(\sigma) \geqslant 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, *определяется в непрерывном случае матрицей* $L(t)$, *равной*

$$L^{(c)}(t) = \left[D(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) + C(t)P_*(t)\right]^{\mathrm{T}} \left[D(t)G(t)D^{\mathrm{T}}(t)\right]^{-1}, \tag{3.8}$$

где матрица $P_*(t) \geqslant 0$ *является решением уравнения* (3.5) *при* $L(t) = L^{(c)}(t)$, *а в дискретном случае – матрицей* $L(t)$, *равной*

$$L^{(d)}(t) = \tag{3.9}$$

$$= \left[A(t)P_*(t)C^{\mathrm{T}}(t) + B(t)G(t)D^{\mathrm{T}}(t)\right] \left[C(t)P_*(t)C^{\mathrm{T}}(t) + D(t)G(t)D^{\mathrm{T}}(t)\right]^{-1},$$

где $P_*(t) \geqslant 0$ *– решение уравнения* (3.6) *при* $L(t) = L^{(d)}(t)$.

Замечание 5. Если $z(t) = C_z(t)x(t) \in \mathrm{R}^{n_z}$ – некоторый выход системы (3.1), то оптимальной эллипсоидальной оценкой выхода в момент времени t является эллипсоид $\mathcal{E}(C_z(t)P_*(t)C_z^{\mathrm{T}}(t), \widehat{z}(t))$, где $\widehat{z}(t) = C_z(t)\widehat{x}(t)$, а $\widehat{x}(t)$ – оценка состояния, определяемая оптимальным наблюдателем (3.3).

Замечание 6. Установленное соответствие между оптимальным наблюдателем и фильтром Калмана позволяет выявить важное свойство последнего. Пусть $\widehat{x}(t)$ – оценка состояния системы (3.1), определяемая фильтром Калмана при заданных ковариационных матрицах начального состояния $K_x(t_0) = R$ и возмущения $K_v(t) \equiv G(t)$, а $P_*(t)$ – ковариация ошибки этой оценки. Тогда при любых детерминированных начальных состояниях и возмущениях вида (3.2) состояние системы $x(t)$ принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(P_*(t), \widehat{x}(t))$.

Представим теперь задачу оценивания неизвестных параметров линейной регрессии

$$\chi(t) = \Phi(t)\zeta_0 + v(t), \quad t = t_0, \ldots, t_f, \tag{3.10}$$

где $\chi(t)$ – вектор измерений, $\Phi(t)$ – матрица регрессоров, ζ_0 – вектор неизвестных параметров, $v(t)$ – вектор помех измерений, как задачу оптимального эллипсоидального оценивания состояния системы

$$\zeta(t+1) = \zeta(t), \quad \zeta(t_0) = \zeta_0 \tag{3.11}$$

по измерениям зашумленного выхода $\chi(t)$. Предположим, что неизвестные параметры и возмущения удовлетворяют ограничению

$$(\zeta_0 - \zeta_*)^{\mathrm{T}} R^{-1} (\zeta_0 - \zeta_*) + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]} \leqslant 1, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{3.12}$$

при $R > 0$ и $G(t) > 0$, где ζ_* – заданный вектор. Согласно теореме 3.1 оптимальный наблюдатель описывается уравнениями, которые приводятся к следующему виду:

$$\begin{gathered} \widehat{\zeta}(t+1) = \widehat{\zeta}(t) + P(t+1)\Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], \quad \widehat{\zeta}(t_0) = \zeta_*, \\ P(t+1) = P(t) - P(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t)[\Phi(t)P(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t) + G(t)]^{-1}\Phi(t)P(t), \;\; P(t_0) = R. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Нетрудно убедиться в том, что эти уравнения описывают рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов [29], а также согласно [30, с. 56], и фильтр Калмана при ковариациях $E\zeta_0\zeta_0^{\mathrm{T}} = R$ и $Ev(t)v^{\mathrm{T}}(t) = G(t)$, а оценка $\widehat{\zeta}(t)$ минимизирует функционал

$$J_t(\zeta) = (\zeta - \zeta_*)^{\mathrm{T}} R^{-1} (\zeta - \zeta_*) + \sum_{i=0}^{t-1} \big(\chi(i) - \Phi(i)\zeta\big)^{\mathrm{T}} G^{-1}(i) \big(\chi(i) - \Phi(i)\zeta\big).$$

Таким образом, в предположениях (3.12) метод наименьших взвешенных квадратов обеспечивает оптимальную эллипсоидальную оценку неизвестных параметров, т.е. гарантирует в момент времени t, что неизвестный вектор ζ_0 принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(P(t), \widehat{\zeta}(t))$.

Для иллюстрации утверждения теоремы 3.1 обратимся к уравнению Матье, представленному в виде системы (2.21). Будем полагать, что измеряемый

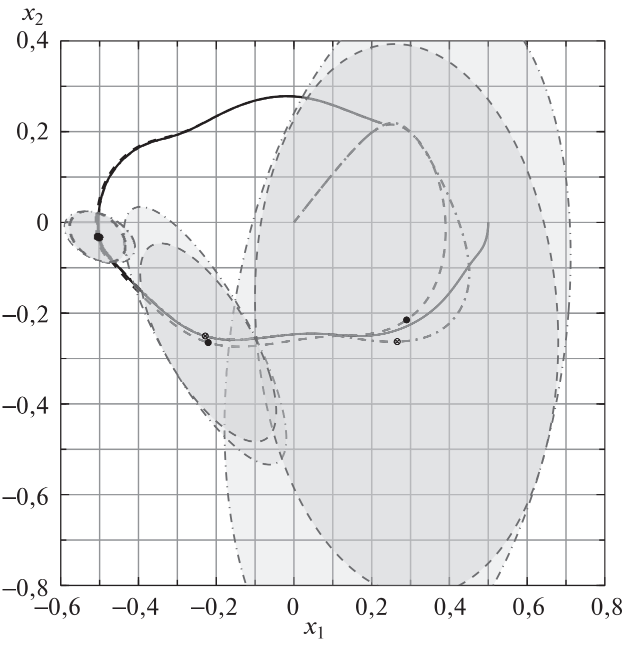


Рис. 3. Динамика оптимальной эллипсоидальной и обобщенной H_∞-оптимальной оценок состояния для уравнения Матье.

выход этой системы

$$y = x_1 + x_2 + v.$$

При проведении вычислительных экспериментов будем считать, что $\omega_0 = \pi/6$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0{,}1$, $R = 10{,}5I$, $G(\sigma) \equiv 1$. На рис. 3 на плоскости (x_1, x_2) представлены траектория системы (сплошная линия) $x(t)$, отвечающая начальным условиям $x_{10} = 0{,}5$, $x_{20} = 0$ и возмущению $v(t) = 0{,}05 \sin \pi t$, а также траектория оптимальной оценки $\widehat{x}(t)$ (пунктирная линия) и соответствующие эллипсы $\mathcal{E}(P_*(t), \widehat{x}(t))$ в моменты времени $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t_3 = 6$. На этом же рисунке для сравнения приведена траектория обобщенной H_∞-оптимальной оценки (штрих-пунктирная линия), при которой обобщенная H_∞-норма системы (3.4) [31] является минимальной, а также соответствующие эллипсоидальные оценки состояния. Эксперимент показывает, что “размеры” эллипсов с течением времени заметно уменьшаются и что эллипсы, получаемые в соответствии с обобщенной H_∞-нормой ошибки, “больше” эллипсов, отвечающих оптимальным эллипсоидальным оценкам.

4. Оптимальные эллипсоидальные управления

Выше было установлено, что состояние линейной системы при неопределенных начальных условиях и возмущениях, связанных общим ограничением, в каждый момент времени находится внутри эволюционирующего эллипсоида. Покажем, что это позволяет синтезировать ограниченное управление вида нестационарной обратной связи по состоянию $u = \Theta(t)x$, обеспечивающее выполнение одной из следующий целей: (i) попадание состояния или выхода замкнутой системы в заданное эллипсоидальное множество в определенный момент времени, (ii) нахождение в заданной эллипсоидальной трубке в каждый момент времени. Такие законы управления будем называть эллипсоидальными.

Уравнение замкнутой системы имеет вид

$$
\begin{aligned}
\partial x(t) &= [A(t) + B_u(t)\Theta(t)]x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \\
z(t) &= [C_z(t) + D(t)\Theta(t)]x(t),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где $z(t)$ – управляемый выход системы. Предполагается, что допустимые начальные состояния и возмущения принадлежат множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, вектор управления в любой момент времени должен принадлежать эллипсоиду $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$ с $Q_u(t) > 0$, а целевое множество есть эллипсоид $\mathcal{E}_z(Q(t)) = \{z : z^{\mathrm{T}} Q^{-1}(t) z \leqslant 1\}$ с $Q(t) > 0$.

Далее потребуется вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 4.1. *Для заданной матрицы $\Theta(t)$ имеет место $u(t) = \Theta(t)x(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$ с $Q_u(t) > 0$ при всех $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$ с $P(t) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда линейное матричное неравенство*

$$
\begin{pmatrix} P(t) & * \\ \Theta(t)P(t) & Q_u(t) \end{pmatrix} \geqslant 0
\tag{4.2}
$$

разрешимо относительно $P(t)$.

Согласно теореме 2.1 состояние замкнутой системы (4.1) в непрерывном случае в каждый момент времени находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(P(t))$, матрица которого удовлетворяет уравнению

$$
\dot{P} = A(t)P + PA^{\mathrm{T}}(t) + B_u(t)Z(t) + Z^{\mathrm{T}}(t)B_u^{\mathrm{T}}(t) + B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t)
\tag{4.3}
$$

с начальным условием $P(t_0) = R$, в котором $Z(t) = \Theta(t)P(t)$. Тогда при всех допустимых начальных условиях и возмущениях целевой выход замкнутой системы будет находиться внутри эллипсоида $\mathcal{E}_z(Q_z(t))$, где $Q_z(t) = [C(t) + D(t)\Theta(t)]P(t)[C(t) + D(t)\Theta(t)]^{\mathrm{T}}$, и будет содержаться внутри целевого множества, если $\mathcal{E}_z(Q_z(t)) \subseteq \mathcal{E}(Q(t))$, т.е. $Q_z(t) \leqslant Q(t)$. Подставляя в это неравенство выражение для $Q_z(t)$ и применяя лемму Шура, а также учитывая лемму 4.1, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Закон управления $u = \Theta(t)x$ с параметрами $\Theta(t) = Z(t)P^{-1}(t)$ удовлетворяет ограничению $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$, $Q_u(t) > 0$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$ и обеспечивает выполнение $z(t_f) \in \mathcal{E}_z(Q(t_f))$ для цели* (i) *($z(t) \in \mathcal{E}_z(Q(t))$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$ для цели* (ii)*) при всех начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, если существуют матричные функции $P(t) > 0$ и $Z(t)$, удовлетворяющие матричному дифференциальному уравнению* (4.3)*, неравенствам* (4.2) *и $Q_z(t_f) \leqslant Q(t_f)$ для цели* (i) *($Q_z(t) \leqslant Q(t)$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$ для цели* (ii)*).*

Для вычисления искомых параметров обратной связи проведем дискретизацию указанной задачи. Введем на отрезке $[t_0, t_f]$ равномерную сетку $t_k = t_{k-1} + h$, $k = 1, \ldots, N$, где $h = (t_f - t_0)/N$, и запишем дискретный аналог рассматриваемой задачи в виде следующих соотношений при $k = 0, \ldots, N$:

$$
\begin{aligned}
&Y(k+1) - Y(k) - h\left(A(k)Y(k) + Y(k)A^{\mathrm{T}}(k)\right) - \\
&- h\left(B_u(k)Z(k) + Z^{\mathrm{T}}(k)B_u^T(k) + B(k)G(k)B^{\mathrm{T}}(k)\right) = 0, \quad k \neq N, \\
&\begin{pmatrix} Y(k) & * \\ Z(k) & Q_u(k) \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad Y(k) > 0, \quad Y(0) = R, \\
&\text{(i)}: \begin{pmatrix} Y(N) & * \\ C(N)Y(N) + D(N)Z(N) & Q(N) \end{pmatrix} \geqslant 0, \\
&\text{(ii)}: \begin{pmatrix} Y(k) & * \\ C(k)Y(k) + D(k)Z(k) & Q(k) \end{pmatrix} \geqslant 0,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где аргумент k указывает на значение соответствующей переменной в момент времени t_k. Решив эту задачу полуопределенного программирования относительно неизвестных $Y(k)$, $Z(k)$, найдем матрицы $\Theta(k) = Z(k)Y^{-1}(k)$.

В теореме 4.1 и в процедуре (4.4) вычисления параметров регулятора сделаны дополнительные предположения о положительной определенности матриц $P(t) > 0$ и $Y(k) > 0$, которые обеспечивают возможность вычисления параметров регулятора. Заметим, что имеются различные возможности для оптимизации в рассматриваемой задаче. В частности, можно искать оптимальное эллипсоидальное управление, обеспечивающее попадание в целевой эллипсоид, матрица которого имеет минимальный след. В таком случае матрица $Q(N)$ становится переменной и решается задача $\min \operatorname{tr} Q(N)$ при ограничениях, определенных в (4.4).

В дискретном случае имеет место следующий результат.

Теорема 4.2. *Закон управления* $u(t) = \Theta(t)x(t)$ *с параметрами* $\Theta(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ *удовлетворяет ограничению* $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$, $Q_u(t) > 0$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$ *и обеспечивает выполнение* $z_{t_f} \in \mathcal{E}_z(Q(t_f))$ *для цели* (i) ($z_t \in \mathcal{E}_z(Q(t))$, $\forall\, t \in [t_0, t_f]$ *для цели* (ii)) *при всех начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству* $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, *если разрешимы линейные матричные неравенства при* $t = t_0, \ldots, t_f$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} Y(t) & * & * \\ A(t)Y(t) + B_u(t)Z(t) & Y(t+1) & * \\ 0 & B^{\mathrm{T}}(t) & G^{-1}(t) \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad t \neq t_f, \\
&\begin{pmatrix} Y(t) & * \\ Z(t) & Q_u(t) \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad Y(t_0) \geqslant R, \\
&\text{(i)}: \begin{pmatrix} Y(t_f) & * \\ C(t_f)Y(t_f) + D(t_f)Z(t_f) & Q(t_f) \end{pmatrix} \geqslant 0, \\
&\text{(ii)}: \begin{pmatrix} Y(t) & * \\ C(t)Y(t) + D(t)Z(t) & Q(t) \end{pmatrix} \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

относительно неизвестных матриц $Y(t) > 0$, $Z(t)$.

Доказательство теоремы 4.2 приведено в Приложении.

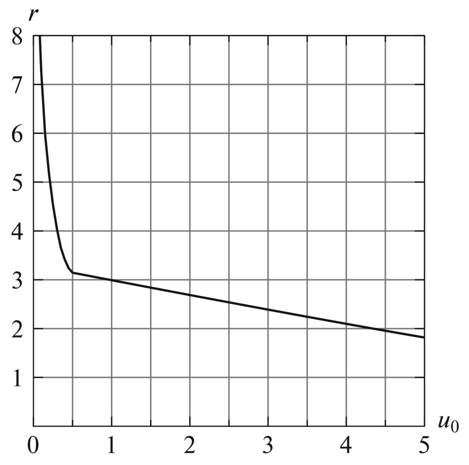


Рис. 4. Зависимость минимального радиуса трубки от максимальной величины управления.

Для иллюстрации приведенных в данном разделе результатов обратимся к системе

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \\
&\dot{x}_2 = -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \omega t)x_1 + u + v, \\
&x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

описывающей параметрические колебания управляемого линейного осциллятора. Зададим параметры осциллятора точно такие же, как и разделе 2, т.е. $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0{,}1$. Рассмотрим задачу синтеза нестационарного управления по состоянию в виде $u = \theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_2$ при заданном ограничении $|u| \leqslant u_0$, обеспечивающего на конечном отрезке времени $[0,\, 60]$ удержание траекторий системы (4.6) при неопределенных начальных условиях и возмущениях, связанных общим ограничением с матрицей $R = \mathrm{diag}(1,\, 1)$ и $G(\sigma) \equiv 1$, в круглой трубке $x_1^2(t) + x_2^2(t) \leqslant r^2$, $t \in [0,\, 60]$ с минимально возможным радиусом r. На рис. 4 показана зависимость минимального радиуса трубки от параметра u_0.

5. Заключение

Показано, что при наличии совместного ограничения на неточно заданные начальное состояние и возмущение множествами достижимости линейной нестационарной непрерывной или дискретной системы являются эволюционирующие эллипсоиды, матрицы которых удовлетворяют линейному матричному дифференциальному или разностному уравнению. Применение этого результата позволяет синтезировать оптимальный наблюдатель неизмеряемого состояния системы, обеспечивающий эллипсоидальную оценку с минимальным следом матрицы эллипсоида, а также линейные нестационарные регуляторы для приведения состояния системы в заданное эллипсоидальное множество. Доказано, что фильтр Калмана в задаче оценивания состояния и рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов в задаче идентификации неизвестных параметров обеспечивают оптимальные эллипсоидальные оценки состояния и параметров при детерминированных начальном состоянии системы и возмущении с заданной мерой неопределенности. Тем самым устанавливается связь между стохастическим и детерминированным подходами к задачам фильтрации и идентификации. Иллюстративные примеры для уравнения Матье демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Авторы признательны А.И. Матасову за полезные обсуждения и конструктивные предложения по доказательству теоремы 2.1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1. В соответствии с полярным разложением [32, с. 490] представим матрицу S в виде $S = (SS^{\mathrm{T}})^{1/2}U$, где $UU^{\mathrm{T}} = I$. Тогда $x = Sg = (SS^{\mathrm{T}})^{1/2}Ug = (SS^{\mathrm{T}})^{1/2}w$, где $w = Ug$. Так как $w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1$ и для каждого такого w найдется $g = U^{\mathrm{T}}w$ такой, что $g^{\mathrm{T}}g = w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1$, то лемма доказана.

Доказательство леммы 4.1. Запишем эквивалентные условия

$$u \in \mathcal{E}(Q_u) \quad \forall\, x \in \mathcal{E}(P) \Leftrightarrow \max x^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}Q_u^{-1}\Theta x \leqslant 1, \quad x = P^{1/2}w \quad \forall\, w:\, w^{\mathrm{T}}w \leqslant 1.$$

Вводя функцию Лагранжа

$$L = w^{\mathrm{T}}P^{1/2}\Theta^{\mathrm{T}}Q_u^{-1}\Theta P^{1/2}w + \mu\left(1 - w^{\mathrm{T}}w\right),$$

приходим к условию

$$\mu = \lambda_{\max}\left(P^{1/2}\Theta^{\mathrm{T}}Q_u^{-1}\Theta P^{1/2}\right) = \lambda_{\max}\left(Q_u^{-1/2}\Theta P\Theta^{\mathrm{T}}Q_u^{-1/2}\right) \leqslant 1,$$

которое эквивалентно неравенству $\Theta P\Theta^{\mathrm{T}} \leqslant Q_u$. Согласно характеризации псевдообратной матрицы представим $P = PP^{+}P$ и запишем последнее неравенство как $\Theta PP^{+}P\Theta^{\mathrm{T}} \leqslant Q_u$. С учетом варианта леммы Шура для вырожденных матриц, доказанного в [29, с. 190], приходим к (4.2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Замкнутая система описывается уравнением

$$x(t+1) = A_c(t)x(t) + B(t)v(t), \quad A_c(t) = A(t) + B_u(t)\Theta(t).$$

Множества достижимости этой системы – эллипсоиды $\mathcal{E}(P_c(t))$ с матрицами $P_c(t)$, определяемыми согласно теореме 2.1. Введем матрицы $Y(t) = Y^{\mathrm{T}}(t) > 0$, $t = t_0, \cdots, t_f$, удовлетворяющие неравенствам

$$Y(t+1) \geqslant A_c(t)Y(t)A_c^{\mathrm{T}}(t) + B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t), \quad Y(t_0) \geqslant R. \tag{П.1}$$

Если обозначить $\Theta(t)Y(t) = Z(t)$ и применить лемму Шура, то это неравенство превратится в первое неравенство в (4.5). Из (П.1) следует, что соотношения

$$Y(t+1) - P_c(t+1) = A_c(t)[Y(t) - P_c(t)]A_c^{\mathrm{T}}(t) + M(t), \quad Y(t_0) - P_c(t_0) \geqslant 0$$

выполняются при некоторых матрицах $M(t) = M^{\mathrm{T}}(t) \geqslant 0$. Тогда

$$Y(t) - P_c(t) = \Phi(t,t_0)[Y(t_0) - P_c(t_0)]\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1}\Phi(i,t_0)M(i)\Phi^{\mathrm{T}}(i,t_0) \geqslant 0,$$

где $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица замкнутой системы. Следовательно, $P_c(t) \leqslant Y(t)$ и $\mathcal{E}(P_c(t)) \subseteq \mathcal{E}(Y(t))$, т.е. состояние замкнутой системы находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, а значит, целевой выход находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}_z(Q_z(t))$, где $Q_z(t) = [C(t) + D(t)\Theta(t)]Y(t)[C(t) + D(t)\Theta(t)]^{\mathrm{T}}$. Тогда выполнение неравенства $Q_z(t) \leqslant Q(t)$, которое при $Z(t) = \Theta(t)Y(t)$ с помощью леммы Шура приводится к третьему и четвертому неравенствам в (4.5), обеспечит выполнение соответствующей цели управления. Второе неравенство в (4.5) согласно лемме 4.1 означает, что $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$. Таким образом, если неравенства (4.5) выполняются, то управление обеспечивает выполнение цели. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. уни-та, 2010.
2. *Neimark Ju.I.* Mathematical Models in Natural Science and Engineering. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2003.
3. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
4. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и D-разбиение // АиТ. 1992. № 7. С. 10–18.

   Neimark Ju.I. Robust stability and D-partition // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 7. P. 957-965.
5. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость по нелинейным параметрам // Дифференц. уравнения. 1992. № 12. С. 2185–2187.

   Neimark Ju.I. Robust stability under nonlinear parameters // Differen. Equat. 1992. V. 28. No. 12. P. 1829–1831.
6. *Коган М.М., Неймарк Ю.И.* Об оптимальности локально-оптимальных решений линейно-квадратичных задач управления и фильтрации // АиТ. 1992. № 4. С. 101–110.

   Kogan M.M., Neimark Ju.I. On Optimality of Locally-Optimal Solutions to Linear-Quadratic Control and Filtering Problems // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 4. P. 561–569.
7. *Kogan M.M., Neimark Ju.I.* Locally optimal adaptive control without persistent excitation // Automatica. 1996. V. 32. No. 10. P. 1463–1467.
8. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 51. № 5. С. 339-342.
9. *Schweppe F.C.* Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
10. *Bertsekas D.P., Rhodes I.P.* On the Minimax Reachability of Target Sets and Target Tubes // Automatica. 1971. V. 7. P. 233–247.
11. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
12. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
13. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
14. *Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.* Reach Set Computation and Control Synthesis for Discrete-Time Dynamical Systems with Disturbances // Automatica. 2011. V. 47. P. 1414–1426.

15. *Kuntsevich V.M., Volosov V.V.* Ellipsoidal and Interval Estimation of State Vectors for Families of Linear and Nonlinear Discrete-Time Dynamic Systems // Cybernet. Syst. Anal. 2015. V. 51. No. 1. P. 64–72.
16. *Filippova T.F.* Ellipsoidal Estimates of Reachable Sets for Control Systems with Nonlinear Terms // IFAC PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 15355–15360.
17. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
18. *Chernousko F.L., Ovseevich A.I.* Properties of the Optimal Ellipsoids Approximating the Reachable Sets of Uncertain Systems// J. Optim. Theory Appl. 2004. V. 120. No. 2. P. 223–246.
19. *Wang Z., Shen X., Zhu Y.* On Equivalence of Major Relaxation Methods for Minimum Ellipsoid Covering Intersection of Ellipsoids // Automatica. 2019. V. 103. P. 337–345.
20. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // АиТ. 2019. № 10. С. 37–61.

    Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.
21. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–24.

    Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Minimax Control of Deviations for the Outputs of a Linear Discrete Time-Varying System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 345–359.
22. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Generalized H_2 Control // Automatica. 2019. V. 99. No. 1. P. 317–322.
23. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized H_2 Control with Transients // Automatica. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
24. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems //IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. P. 94–97.
25. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах управления и оценивания // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1485–1498.
26. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge Univ. Press, 2004.
27. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
28. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
29. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
30. *Kailath T., Sayed A.N., Hassibi B.* Linear Estimatiom. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2000.
31. *Nagpal K.M., Khargonekar P.P.* Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 2. P. 152–166.
32. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 03.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. В.Н. БЕЛЫХ, д-р физ.-мат. наук (belykh@unn.ru),
Н.В. БАРАБАШ (barabash@itmm.unn.ru)
(Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород;
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
И.В. БЕЛЫХ, канд. физ.-мат. наук (ibelykh@gsu.edu)
(Государственный университет Джорджии, Атланта, США)

БИФУРКАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА[1]

Изучается динамика кусочно-гладкой системы дифференциальных уравнений, для которой ранее было строго доказано существование странного аттрактора лоренцевского типа и получены бифуркационные механизмы его рождения. В настоящей статье обсуждается вопрос о разрушении этого аттрактора за счет появления в его структуре скользящих движений. Качественно-численными методами изучается сложная последовательность бифуркаций аттрактора, в результате которой в системе остается глобально устойчивый предельный цикл. Показано, что основой этой последовательности являются C-бифуркации и бифуркации многообходных гомоклинических траекторий.

Ключевые слова: динамическая система, бифуркации, предельный цикл, скользящие движения, странный аттрактор, хаос.

DOI: 10.31857/S0005231020080036

1. Введение

Настоящая статья выполнена в русле одного из главных научных направлений Ю.И. Неймарка — бифуркационной теории динамических систем. Широко известный метод D-разбиений можно рассматривать как один из первых результатов Ю.И. Неймарка по теории бифуркаций корней характеристических уравнений линеаризованных динамических систем. Другой значимый результат — это бифуркация рождения тора или сложного неблуждающего множества из периодического движения при смене его устойчивости. Это хорошо известная специалистам бифуркация Неймарка–Сакера [1]. Теория кусочно-гладких (релейных) систем, начатая Ю.И. Неймарком в 50–60 гг. XX в. [2, 3], продолжает успешно развиваться в настоящее время [4, 5]. Настоящую статью можно рассматривать как развитие теории бифуркаций в кусочно-гладких динамических системах.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00556 и № 18-31-20052), а также Национального научного фонда США (проект DMS-1909924). Численные результаты получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00367).

Кусочно-линейные и кусочно-гладкие системы широко использовались в теории динамических систем в различных контекстах и приложениях [4, 6–8]. Их потенциальное преимущество перед их нелинейными аналогами заключается в возможности получать явные решения в заданных областях фазового пространства системы и “склеивать” решения на границах этих областей.

Широкий класс кусочно-гладких динамических систем [4–6] в настоящее время широко используется в технике в качестве релейных, автоматических систем управления и систем с переключениями [9–12].

Интересным примером такой кусочно-гладкой системы является биомеханическая модель баланса пешехода, идущего по мосту [13], в которой переключения между двумя системами [14] соответствуют переносу веса пешехода с одной ноги на другую. Траектория такой кусочно-гладкой системы определяется двумя склеенными решениями интегрируемых подсистем, что позволяет получить точные формы периодического движения пешехода [15].

Кусочно-гладкие динамические системы могут использоваться для построения потоков, обладающих основными свойствами хаотических нелинейных систем и допускающих строгое аналитическое исследование. В недавней статье [16] авторами был предложен новый подход построения кусочно-гладких моделей, заменяющих нелинейные неинтегрируемые хаотические системы. Эти модели имеют качественно ту же бифуркационную структуру и позволяют аналитически доказывать существование странных аттракторов и их бифуркаций.

Этот подход был применен к известной системе Лоренца [17], вместо которой была построена кусочно-линейная система как ее простейший аналог. Для этой системы авторам удалось провести строгое доказательство существования сингулярно-гиперболического аттрактора и бифуркаций его рождения. Полученные бифуркации и аттракторы качественно совпадают с бифуркационной картиной и структурой аттрактора самой системы Лоренца, детально изученными качественно-численными методами [18–20]. Из численных результатов известно, что аттрактор Лоренца разрушается при потере инвариантного слоения [19, 21] с последующими сложными бифуркациями. В силу сложности сценарий разрушения аттрактора Лоренца теоретически изучен слабо.

В настоящей статье рассматривается этот вопрос, т.е. бифуркационная картина гибели сингулярно-гиперболического аттрактора, но не в системе Лоренца, а в ее аналоге — в модели из [16]. Это разрушение начинается с разрушения инвариантного слоения и после бесконечной последовательности бифуркаций заканчивается рождением единственного устойчивого предельного цикла.

Статья устроена следующим образом. В разделе 2 дано описание предложенной кусочно-линейной модели, в разделе 3 приведена характеристика скользящих движений, в разделе 4 представлен основной результат [16], в разделе 5 приведен качественно-численный анализ разрушения странного аттрактора.

2. Описание модели

Рассматривается кусочно-линейная система, склеенная из трехмерных линейных подсистем A_s, A_l, и A_r

$$
\begin{aligned}
&A_s \; : \quad \begin{aligned} &\dot{x} = x,\\ &\dot{y} = -\alpha y, \qquad (x,y,z) \in G_s,\\ &\dot{z} = -\nu z, \end{aligned}\\
(1) \qquad &A_l \; : \quad \begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda(x+1) + \omega(z-b),\\ &\dot{y} = -\delta(y+1), \qquad\qquad (x,y,z) \in G_l,\\ &\dot{z} = -\omega(x+1) - \lambda(z-b), \end{aligned}\\
&A_r \; : \quad \begin{aligned} &\dot{x} = -\lambda(x-1) - \omega(z-b),\\ &\dot{y} = -\delta(y-1), \qquad\qquad (x,y,z) \in G_r,\\ &\dot{z} = \omega(x-1) - \lambda(z-b), \end{aligned}
\end{aligned}
$$

где α, δ, ν, ω, λ и b — положительные параметры. Эти подсистемы определены на следующем разбиении фазового пространства G_s, G_l, и G_r соответственно:

$$
\begin{aligned}
&G_s : |x| < 1, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad z < b,\\
&G_l : \begin{cases} x \leqslant -1 \quad \text{при} \quad z \leqslant b,\\ x \leqslant -1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y \geqslant 0,\\ x < 1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y < 0, \end{cases}\\
(2) \qquad &\\
&G_r : \begin{cases} x \geqslant 1 \quad \text{при} \quad z \leqslant b,\\ x \geqslant 1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y < 0,\\ x > -1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y \geqslant 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Векторные поля подсистем A_s, A_l и A_r будем обозначать соответственно F_s, F_l и F_r в виде системы $\dot{X} = F_i(X)$, где индекс $i = (s, l, r)$ и вектор $X = (x, y, z)$.

Эта система моделирует известную систему Лоренца [17]. Она, как и система Лоренца, имеет три состояния равновесия и инвариантность относительно замены $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$.

Линейная подсистема A_s управляет динамикой системы (1) в области G_s. Эта система имеет седловое состояние равновесия O_s в начале координат, поэтому будем называть G_s седловой областью. Подсистемы $A_{r,l}$ определены в областях $G_{r,l}$ и имеют симметричные равновесия $e_{r,l} = \{\pm 1, \pm 1, b\}$ соответственно. Эти равновесия являются устойчивыми трехмерными фокусами в подсистемах $A_{r,l}$. В полной системе эти равновесия становятся склеенными и поэтому могут менять устойчивость. Заметим, что линии склейки $w_l = \{x = -1, z = b, y \in \mathbb{R}^1\}$ и $w_r = \{x = 1, z = b, y \in \mathbb{R}^1\}$ являются устойчивыми многообразиями фокусов e_l и e_r соответственно (см. рис. 1). Будем называть G_r и G_l правой и левой фокусными областями.

Седловая область G_s ограничена справа и слева вертикальными полуплоскостями $S_1 = \{x = 1,\ y \in \mathbb{R}^1,\ z < b\}$ и $S_2 = \{x = -1,\ y \in \mathbb{R}^1,\ z < b\}$ (см.

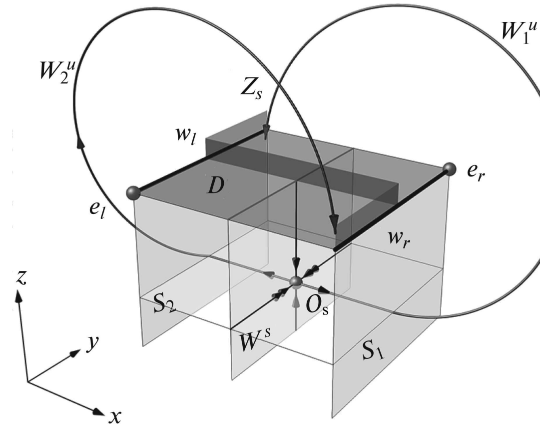


Рис. 1. Схема построения кусочно-линейной системы (1). Фазовое пространство разделено на три области: G_s, G_l и G_r (не указаны на рисунке). Седловая область G_s образована вертикальными полуплоскостями $S_{1,2}$ и горизонтальной поверхностью D. Фокусные области G_l и G_r разделены седловой областью и вертикальной Z-образной границей Z_s. Седло O_s имеет двумерное устойчивое многообразие W^s и одномерное неустойчивое многообразие (W_1^u и W_2^u его правая и левая ветви соответственно). Отрезки w_l и w_r принадлежат одномерным устойчивым многообразиям фокусов e_l и e_r соответственно.

рис. 1). Область G_s также ограничена сверху частью плоскости $D = \{|x| \leqslant 1,\ y \in \mathbb{R}^1,\ z = b\}$ (темно-серая горизонтальная плоскость на рис. 1). Ниже плоскости D фокусные области G_l и G_r расположены слева и справа от вертикальных полуплоскостей S_2 и S_1 соответственно. Выше плоскости D фокусные области разделены Z-образной границей Z_s (см. рис. 1).

Седло O_s имеет двумерное устойчивое многообразие, определенное в седловой области как $W^s_{saddle} = \{x = 0,\ y \in \mathbb{R}^1,\ z < b\}$ (центральная вертикальная плоскость на рис. 1) и одномерное неустойчивое многообразие, определенное в седловой области как $W^u_{1saddle} = \{0 < x < 1,\ y = z = 0\}$ и $W^u_{2saddle} = \{-1 < x < 0,\ y = z = 0\}$. Эти многообразия и их продолжения по траекториям систем $A_{r,l}$ в фокусных областях образуют глобальные многообразия седла W^s, W_1^u и W_2^u седла O_s в полном фазовом пространстве системы (1).

Предполагается, что выполняется условие

$$\frac{1}{2} < \nu < 1 < \alpha. \tag{3}$$

Часть неравенства (3) $\nu < 1$ означает, что седловая величина равновесия O_s положительна. В силу неравенства $1 < \alpha$ плоскость $W^{lead} = ((x, z) \in G_s,\ y = 0)$ является частью ведущего многообразия, что аналогично системе Лоренца.

3. Скользящие движения

Система (1) диссипативна, т.е. в ее фазовом пространстве существует поглощающая область G такая, что любая траектория с начальной точкой в области $\mathbb{R}^3 \setminus G$ попадает в область G и остается в ней навсегда. Эта область задана неравенствами [16]

$$
(4) \qquad G = \begin{cases} |y| \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 2b & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ V_l \leqslant b^2 & \text{при} \quad x < -1, \\ V_r \leqslant b^2 & \text{при} \quad x > 1, \end{cases}
$$

где $V_{l,r} = (x \pm 1)^2 + (z - b)^2$. Очевидно, что в этой области находятся все траектории системы (1). Система (1) имеет две поверхности устойчивых скользящих движений $S^+{}_1 = \{x = 1,\ z > b^+ = b + \frac{2\lambda}{\omega},\ y < 0\}$ и $S^+{}_2 = \{x = -1,\ z > b^+ = b + \frac{2\lambda}{\omega},\ y > 0\}$. На поверхностях S_1^+ и S_2^+ векторное поле системы A_l ориентировано в сторону увеличения x, а системы A_r — в сторону уменьшения x (векторные поля систем A_l и A_r “встречаются” на этих поверхностях). Скользящие движения на этих поверхностях задаются двумерными системами, которые получаются по доопределению А.Ф. Филиппова [22], аналогичного одному из доопределений Ю.И. Неймарка [2]. Это доопределение в рассматриваемом случае приобретает вид

$$
(5) \qquad \dot{X} = \alpha F_r(X) + (1 - \alpha) F_l(X).
$$

Здесь коэффициент α определен скалярным произведением

$$
(6) \qquad (\alpha F_r(X) + (1 - \alpha) F_l(X), \bigtriangledown s) = 0,
$$

где градиент функции $s(X)$, определяющей поверхность скользящих движений $s(X) = 0$, в рассматриваемом случае есть вектор $\bigtriangledown s(1, 0, 0)$. Из (1), (2), (5), (6) получаем, что система скользящих движений имеет вид

$$
(7) \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= -\delta y + \frac{\lambda\delta}{\omega(z - b) - \lambda}, \\ \dot{z} &= -\omega - \lambda(z - b) - \frac{\lambda\omega}{\omega(z - b) - \lambda}. \end{aligned}
$$

Из системы (7) получаем простую динамику скользящих движений. Поскольку в (7) $\dot{z}\big|_{S^+_{1,2}} < 0$, координата z уменьшается и любая траектория покидает $S^+_{1,2}$ через линии срыва $z = b^+$. В зависимости от параметров системы (1) роль скользящих движений в динамике системы (1) разная. Рассмотрим два основных случая.

4. Аттракторы без скользящих движений

В [16] доказано, что в области параметров

$$
(8) \qquad \begin{gathered} \delta > \delta_{cr} = \frac{\omega \ln 2}{\pi}, \\ b < b_{cr} = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda} + \pi \right) \right\} \end{gathered}
$$

аттракторы системы (1) не содержат скользящих движений. При условиях (8) строго доказано следующее утверждение [16].

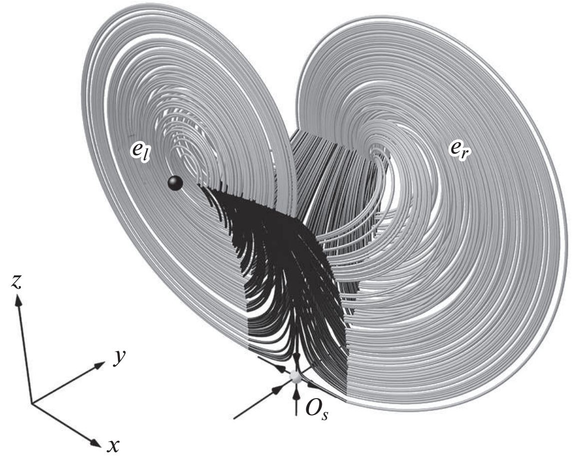


Рис. 2. Аттрактор лоренцевского типа, существующий в системе (1) при значениях параметров $b = 3{,}8$, $\alpha = 2$, $\nu = 0{,}75$, $\delta = 0{,}588$, $\omega = 2$ и $\lambda = 0{,}294$ из области (9). Траектории аттрактора склеены из траекторий седловой системы A_s (изображены черным) и траекторий фокусных систем $A_{l,r}$ (изображены серым).

Т е о р е м а 1 [16]. 1. *В области параметров*

$$b_{het} = \gamma_{het} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \leqslant b < \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega},$$

где $\gamma_{het}(\nu)$ *– обратная функция функции* $\nu = 1 + \frac{\ln 2 - \ln \gamma}{\ln(\gamma - 1)}$*, существует странный хаотический аттрактор лоренцевского типа, родившийся в результате гетероклинической бифуркации при* $b = b_{het}$ *и сосуществующий с двумя устойчивыми фокусами* e_l *и* e_r*;*

2. *Поверхность*

$$b_{AH} = \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}$$

соответствует бифуркации Андронова–Хопфа, при которой два симметричных седловых цикла влипают в устойчивые состояния равновесия e_l *и* e_r*;*

3. *В области параметров*

$$b_{AH} \leqslant b \leqslant b_{cr} \tag{9}$$

странный сингулярно-гиперболический аттрактор является единственным аттрактором системы (1) (см. рис. 2).

5. Аттракторы, содержащие скользящие движения

При $b > b_{cr}$ траектории аттрактора системы (1) могут попадать на поверхности скользящих движений. При этом любая периодическая орбита, содержащая участок скользящих движений, становится устойчивой. Дело в том, что неустойчивость периодических движений системы определена направлением оси x (см. систему A_s в (1)). Ось x перпендикулярна плоскости скользящих движений, вдоль которой траектории попадают на них не асимптотически. Тем самым неустойчивость вдоль седловых орбит компенсируется суперустойчивостью скользящих плоскостей. Если же траектории неблуждающего множества системы не попадают на поверхности скользящих движений, то они продолжают оставаться седловыми, такими же, как и при $b < b_{cr}$ в случае гиперболического аттрактора. Возможность существования аттракторов, содержащих как устойчивые траектории со скользящими движениями, так и седловые траектории, усложняет решение задачи о разрушении странного аттрактора и приводит к необходимости использования качественно-численных методов. При численном исследовании системы (1), проводимом далее, обращаем внимание на следующие возможные эффекты.

1. Стабилизация седловых траекторий, попадающих на плоскости скользящих движений, т.е. эффект появления устойчивых орбит. При малом отклонении параметра b от критического значения $\mu = 1 - b_{cr}/b > 0$, $\mu \ll 1$, устойчивые орбиты имеют большие периоды, а их области притяжения (basins) малы настолько, что их сложно найти при численном моделировании. Таким образом, при малых $\mu > 0$ аттрактор перестает быть гиперболическим и становится так называемым квазистранным аттрактором [23].

2. Бифуркация рождения устойчивого цикла из гомоклинической орбиты седла с положительной седловой величиной. Этот эффект является неожиданным, поскольку в случае гладких или даже кусочно-гладких непрерывных систем цикл должен рождаться неустойчивым.

3. Возможность C-бифуркации [11], при которой из устойчивого предельного цикла рождаются два симметричных устойчивых цикла того же периода, а сам цикл, покидая поверхность скользящих движений, становится седловым. В гладких системах аналогом такой бифуркации является бифуркация раздвоения коразмерности два (pitchfork bifurcation), происходящая в симметричных системах, при которой из предельного цикла, теряющего устойчивость через мультипликатор $m = +1$, рождаются два устойчивых цикла того же периода. Далее для простоты такую C-бифуркацию в системе (1) будем называть бифуркацией раздвоения.

5.1. Бифуркации аттракторов, содержащих скользящие движения

Последовательность бифуркаций в области параметров $b > b_{cr}$, для точек которой аттрактор содержит скользящие движения, удобнее рассматривать при уменьшении параметра b, начиная с больших значений $b \approx 300$.

На рис. 3 изображена бифуркационная диаграмма системы (1). При каждом фиксированном значении параметра b по оси ординат указаны точки пересечения установившихся движений системы с секущей плоскостью D. Горизонтальные линии вблизи линий $x = \pm 1$ являются крайним следом предельных циклов.

На рис. 3,*a* бифуркационная диаграмма построена для всего интервала значений параметра $b \in [0, 300]$. При $b > 283$ на диаграмме существуют только следы двухобходного глобально устойчивого предельного цикла (см. рис. 4,*a*).

Вертикальная штриховая линия в точке $b = 283$ соответствует первой C-бифуркации раздвоения цикла. В этой точке от крайних следов отходят

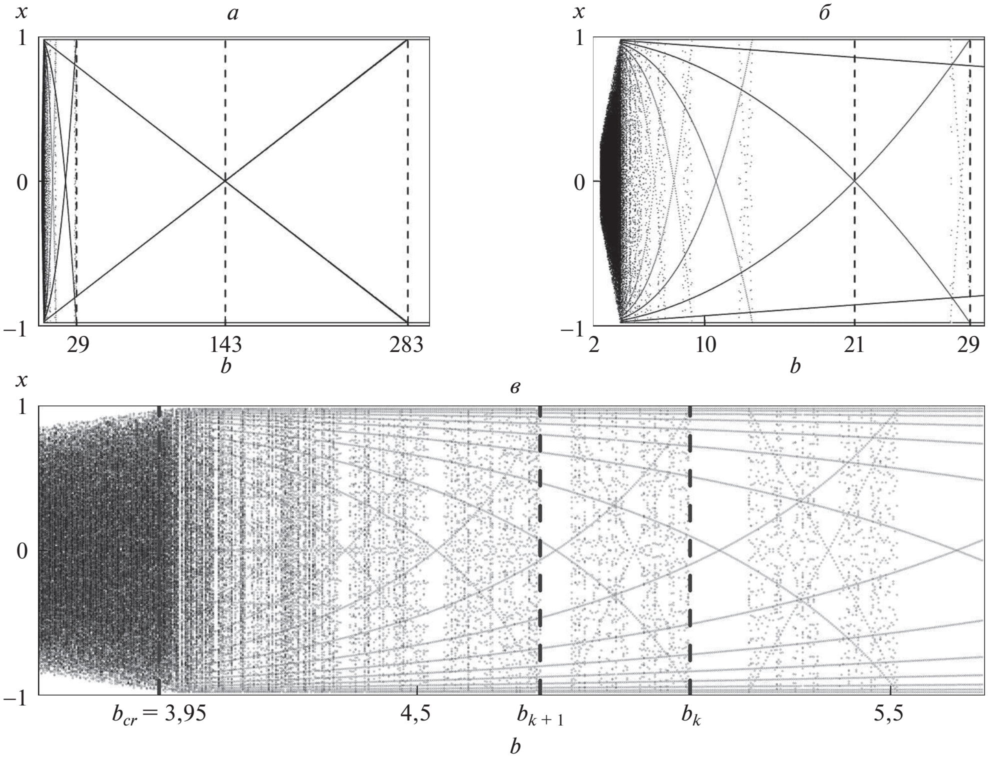


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы (1) при $\alpha = 2$, $\omega = 2$, $\delta = 0{,}588$, $\lambda = 0{,}294$. По оси ординат изображены точки пересечения установившихся движений системы (1) с секущей плоскостью D.

две кривые. Вместе с горизонтальными линиями они соответствуют следам двух устойчивых предельных циклов, родившихся в результате бифуркации раздвоения (см. рис. 4,*б*).

Вертикальной штриховой линией в точке $b = 143$ отмечена первая гомоклиническая бифуркация, при которой два устойчивых цикла сливаются, попадая в линию ($x = 0$, $|y| < 1$, $z = b$) на устойчивом многообразии седла W^s, и образуют гомоклиническую бабочку (см. рис. 4,*в*). Этому соответствует пересечение кривых в точке ($b = 143$, $x = 0$).

При дальнейшем уменьшении b гомоклническая бабочка разрушается и рождается глобально устойчивый предельный цикл удвоенного периода (см. рис. 4,*г*). Все четыре кривые бифуркационной диаграммы на интервале $b \in (29, 143)$ являются следом этого цикла до следующей бифуркации раздвоения, наступающей при $b = 29$.

Рисунки 3,*б* и 3,*в* являются увеличенными фрагментами рис. 3,*а*. На рис. 3,*б* изображена вторая пара бифуркаций “раздвоение ($b = 29$) – бифуркация гомоклинической бабочки ($b = 21$)”.

При дальнейшем уменьшении параметра b пары бифуркаций “раздвоение-гомоклиническая бабочка” повторяются, удваивая период (обходность) устой-

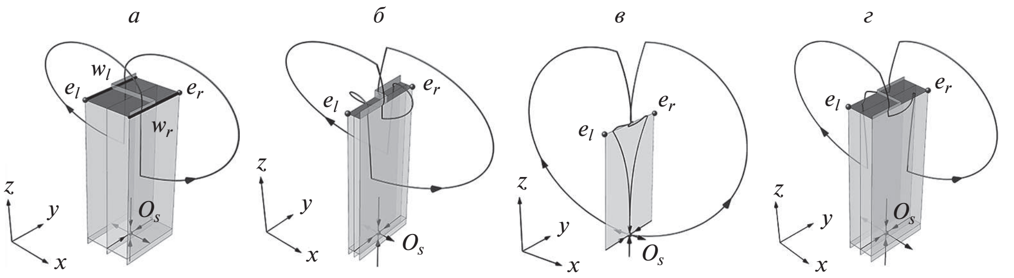


Рис. 4. Первая последовательность смены фазовых картин системы (1) при уменьшении параметра b. *а* — При $b = 300$ в системе существует двухобходный глобально устойчивый предельный цикл, огибающий устойчивые одномерные многообразия $w_{l,r}$ фокусов $e_{l,r}$ по одному разу. *б* — При $b = 270$ сосуществуют два устойчивых предельных цикла того же периода. *в* — При $b = 143{,}07$ эти предельные циклы влипают в гомоклиническую бабочку и при дальнейшем уменьшении параметра образуют глобально устойчивый предельный цикл удвоенного периода. *г* — Фазовый портрет этого четырехобходного цикла при $b = 40$. Траектория цикла огибает каждое из многообразий $w_{l,r}$ по два раза. Остальные параметры: $\alpha = 2$, $\omega = 2$, $\delta = 0{,}588$, $\lambda = 0{,}294$.

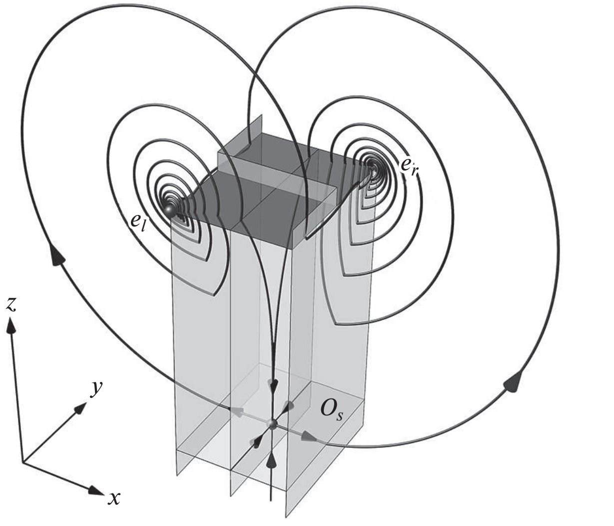


Рис. 5. Пример гомоклинической бабочки, образованной двумя симметричными многообходными гомоклиническими орбитами при $b = 4{,}075$. Остальные параметры: $\alpha = 2$, $\omega = 2$, $\delta = 0{,}588$, $\lambda = 0{,}294$.

чивых циклов (см. рис. 5). Эти пары накапливаются при $b \to b_{cr}$, образуя последовательность, которая служит скелетом бифуркационного множества. Из рис. 3,*в*, видно, что каждый интервал (b_{k+1}, b_k), где b_k – предыдущая, а b_{k+1} – последующая бифуркации раздвоения, содержит хаотическое окно. Бифуркационное множество в хаотических окнах усложняется с увеличением k. По-видимому, это связано с тем, что участки скользящих движений на неблуждающих траекториях уменьшаются с ростом k, т.е. при приближении к области существования странного аттрактора.

Область слева от вертикальной штриховой линии $b_{cr} = 3{,}95$ на рис. 3,*в* соответствует сингулярно-гиперболическому аттрактору.

Следует отметить, что по известному сценарию перехода к хаосу для лоренцеподобных гладких потоков с отрицательной седловой величиной [24, 25] при увеличении бифуркационного параметра происходит удвоение периода устойчивых предельных циклов через каскад бифуркаций гомоклинических орбит.

Существенное отличие сценария, полученного в настоящей статье, состоит в том, что у системы (1) седловая величина положительна. Однако циклы, рождающиеся из гомоклинических орбит, в отличие от случая гладких систем [26] устойчивы из-за наличия скользящих движений. Кроме того, в рассматриваемом случае присутствуют окна хаотических движений наряду с окнами устойчивых периодических орбит.

6. Заключение

В статье проведено качественно-численное исследование сложного бифуркационного множества, соответствующего разрушению сингулярно-гиперболического аттрактора в кусочно-линейной системе, являющейся аналогом известной системы Лоренца. Это разрушение связано с тем, что в структуре аттрактора появляются скользящие движения. Бифуркационное множество представляет собой последовательность паттернов, сходящуюся к критическому значению параметра, соответствующему началу разрушения странного аттрактора. Основу бифуркационных паттернов составляют C-бифуркации, при которых происходят раздвоения многообходных предельных циклов, и бифуркации многообходных гомоклинических орбит, приводящих к рождению устойчивых предельных циклов с удвоенным периодом. Эти паттерны содержат хаотические окна, структура которых усложняется вдоль последовательности. Нетривиальная задача строгого анализа, кратко описанного в работе сложного бифуркационного перехода от устойчивого предельного цикла к странному аттрактору, требует построения точечных отображений, учитывающих скользящие движения, и выходит за рамки настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuznetsov Y.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 2004.
2. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
3. *Неймарк Ю.И.* О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования // АиТ. 1957. № 1. С. 27–33.
4. *Champneys A.R., di Bernardo M.* Piecewise Smooth Dynamical Systems // Scholarpedia. 2008. V. 3. No. 9. P. 4041.
5. *di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P.* Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer, 2008.
6. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. M.: Fizmatgiz, 1959.
7. *Zhusubaliyev Z.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.

8. *Luo A.C.J., Chen L.* Periodic Motions and Grazing in a Harmonically Forced, Piecewise, Linear Oscillator with Impacts // Chaos Soliton. Fract. 2005. V. 24. No. 2. P. 567–578.
9. *Gubar' N.A.* Investigation of a Piecewise Linear Dynamical System with Three Parameters // J. Appl. Math. Mech. 1961. V. 25. No. 6. P. 1011–1023.
10. *Matsumoto T., Chua L.O., Komoro M.* Birth and Death of the Double Scroll // Physica D. 1987. V. 24. No. 1–3. P. 97–124.
11. *di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E.* Local Analysis of C-Bifurcations in n-Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // Chaos Soliton. Fract. 1999. V. 10. No. 11. P. 1881–1908.
12. *Simpson D.J.W., Hogan S.J., Kuske R.* Stochastic Regular Grazing Bifurcations // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2013. V. 12. No. 2. P. 533–559.
13. *Belykh I., Jeter R., Belykh V.* Foot Force Models of Crowd Dynamics on a Wobbly Bridge // Sci. Adv. 2017. V. 3. No. 11. P. e1701512.
14. *Macdonald J.H.G.* Lateral Excitation of Bridges by Balancing Pedestrians // Proc. Royal Society of London. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2008. V. 465. No. 1. P. 1055–1073.
15. *Belykh I.V., Jeter R., Belykh V.N.* Bistable Gaits and Wobbling Induced by Pedestrian-Bridge Interactions // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci. 2016. V. 26. No. 11. P. 116314.
16. *Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V.* A Lorenz-type Attractor in a Piecewise-Smooth System: Rigorous Results // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci. 2019. V. 29. No. 10. P. 103108.
17. *Lorenz E.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. No. 2. P. 130–141.
18. *Sparrow C.* The Lorenz Equations; Bifurcations, Chaos and Strange Attractors. N.Y.: Springer, 1982.
19. *Bykov V.V., Shilnikov A.L.* On Boundaries of the Region of Existence of the Lorenz Attractor // Selecta Math. Sovietica. 1992. V. 11. No. 4. P. 375–382.
20. *Doedel E.J., Krauskopf B., Osinga H.M.* Global Bifurcations of the Lorenz Manifold // Nonlinearity. 2006. V. 19. No. 12. P. 2947.
21. *Creaser J.L., Krauskopf B., Osinga H.M.* Finding First Foliation Tangencies in the Lorenz System // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2017. V. 16. No. 4. P. 2127–2164.
22. *Filippov A.F.* Differential Equations with Discontinuous Righthand sides. Dordrecht: Kluwier Acad. Press, 1988.
23. *Белых В.Н.* Странный аттрактор // Большая российская энциклопедия. 2016. Т. 31. С. 285–286.
24. *Arneodo A., Coullet P., Tresser C.* A Possible New Mechanism for the Onset of Turbulence // Physics Lett. A. Elsevier Publ. 1981. V. 81. No. 4. P. 197–201.
25. *Lyubimov D.V., Zaks M.A.* Two Mechanisms of the Transition to Chaos in Finite-Dimensional Models of Convection // Physica D Nonlinear Phenomena. 1983. V. 8. No. 1–2. P. 52–64.
26. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 18.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. **Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (biryukovrs@gmail.com)**
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

ОБОБЩЕННОЕ $\mathcal{H}_2$-УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ ОБЪЕКТОМ НА КОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ[1]

На конечном горизонте рассматривается линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений. Вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы непрерывно-дискретного объекта как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Получена ее характеризация как в терминах разностных уравнений Ляпунова, так и в терминах рекуррентных линейных матричных неравенств. Синтезированы дискретные нестационарные оптимальные законы управления, в том числе и многокритериальные, при которых обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы принимает минимальное значение.

Ключевые слова: линейная нестационарная гибридная система, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма, оптимальное управление, многокритериальная задача.

DOI: 10.31857/S0005231020080048

1. Введение

Современные системы управления, как правило, реализуются в цифровом виде, в то время как реальные объекты функционируют в непрерывном времени. Подобное разделение приводит к тому, что регулятор использует значения непрерывного сигнала, поступающего с объекта, лишь в дискретные моменты времени. По этой причине становится важной задача синтеза дискретного регулятора, максимально полно учитывающего поведение объекта в моменты времени между измерениями. Одним из показателей качества функционирования системы управления является максимальное отклонение целевого выхода системы от некоторого номинального значения по отношению к внешнему возмущению.

В [10] для непрерывных систем, а в [5] для дискретных, было введено понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, как максимальное отношение максимального по времени значения евклидовой нормы выхода к L_2-норме неопределенного внешнего возмущения системы. В [1, 9, 11] были получены условия существования оптимального регулятора по выходу на бесконечном горизонте как в терминах уравнения Риккати, так и в терминах линейных матричных неравенств. В работах [2–4] для непрерывных и дискретных систем было введено

[1] Работа выполнена по теме государственного задания (№ 0729-2020-0055) при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-41-520002, 19-01-00289) и научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего”.

понятие максимального уклонения как естественное расширение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы на системы с ненулевым начальным состоянием.

Для непрерывно-дискретных систем на бесконечном горизонте, описываемых совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, в [6–8] были получены оценки обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы и синтезированы законы управления, минимизирующие верхнюю оценку нормы, в терминах линейных матричных неравенств [7, 8] и в терминах дифференциальных уравнений Риккати [6].

В данной статье рассматривается непрерывно-дискретный объект с дискретным целевым выходом на конечном горизонте при ненулевых начальных условиях. Следуя работам [2–4, 10] вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Подобно тому как это делалось в работах [3, 10], получена ее характеризация как в терминах разностных уравнений Ляпунова, так и в терминах рекуррентных линейных матричных неравенств, что позволяет синтезировать оптимальные законы управления.

2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма непрерывно-дискретного объекта

Рассмотрим линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k, \\ z_k &= C_{c,k}x(t_k) + C_{d,k}\xi_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ — векторы состояния непрерывной и дискретной частей системы соответственно, $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ — непрерывное внешнее возмущение — кусочно-непрерывная справа вектор-функция, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ — дискретное внешнее возмущение и $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ — целевой выход. Будем считать, что

$$v \in L_2\big([t_0, t_N], \mathbb{R}^{n_v}\big), \quad w = \{w_k\} \in l_2\big([0, N-1], \mathbb{R}^{n_w}\big), \quad z = \{z_k\} \in l_\infty\big([0, N], \mathbb{R}^{n_w}\big),$$

нормы в соответствующих пространствах определяются стандартным образом:

$$\|v\|_{L_2}^2 = \int\limits_{t_0}^{t_N} |v(t)|_2^2 dt, \qquad \|w\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|_2^2, \qquad \|z\|_\infty = \max_{k=0,\ldots,N} |z_k|_2, \tag{2}$$

здесь через $|\cdot|_2$ обозначена евклидова норма вектора. Кроме этого предположим, что начальные условия $x(t_0) = x_0$ и ξ_0 в общем случае ненулевые и неизвестны, а их влияние на поведение объекта интерпретируется как начальное возмущение. Матричные функции $A_c(t)$, $B_c(t)$ и $\Delta_c(t)$ таковы, что при выбранных начальных условиях и возмущениях решение системы на рассматриваемом отрезке существует и единственно.

Система (1) порождает линейный оператор $\mathcal{S}$ вида

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\xi} \times L_2\big([t_0, t_N], \mathbb{R}^{n_v}\big) \times l_2\big([0, N-1], \mathbb{R}^{n_w}\big) \to l_\infty\big([0, N], \mathbb{R}^{n_w}\big), \tag{3}$$

отображающий начальные состояния x_0, ξ_0 и внешние возмущения v, w в целевой выход z. Определим норму элемента (x_0, ξ_0, v, w) формулой

$$\|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)} \triangleq \sqrt{x_0^\top R_x^{-1} x_0 + \xi_0^\top R_\xi^{-1} \xi_0 + \|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}, \tag{4}$$

где $R_x = R_x^\top > 0$ и $R_\xi = R_\xi^\top > 0$ — весовые матрицы, отражающие относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешних возмущений.

Определение. Обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормой непрерывно-дискретного объекта (1) *назовем индуцированную норму оператора $\mathcal{S}$, то есть*

$$\|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \sup \left\{ \frac{\|z\|_\infty}{\|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)}} : \|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)} \neq 0 \right\}. \tag{5}$$

Перепишем соотношение (5) в развернутом виде:

$$\|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \sup_{(x_0,\xi_0,v,w)} \frac{\max\limits_{n=0,\dots,N} |z_n|_2}{\left(x_0^\top R_x^{-1} x_0 + \xi_0^\top R_\xi^{-1} \xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t_N} |v(t)|_2^2 dt + \sum\limits_{k=0}^{N-1} |w_k|_2^2 \right)^{1/2}}, \tag{6}$$

где точная верхняя грань берется по всем таким наборам (x_0, ξ_0, v, w) для которых знаменатель не обращается в ноль. Поскольку величина $|z_n|_2$ для каждого $n = 0, \dots, N$ зависит от внешних возмущений, определенных на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$, то соотношение (6) можно переписать как

$$\begin{gathered} \|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \\ = \max_{n=0,\dots,N} \sup_{(x_0,\xi_0,v,w)} \frac{|z_n|_2}{\left(x_0^\top R_x^{-1} x_0 + \xi_0^\top R_\xi^{-1} \xi_0 + \int\limits_{t_0}^{t_n} |v(t)|_2^2 dt + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |w_k|_2^2 \right)^{1/2}}, \end{gathered} \tag{7}$$

здесь точная верхняя грань берется, фактически, только по всем возмущениям из отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$. Таким образом, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма объекта (1) представляет собой максимум из максимальных относительных значений модуля целевого выхода. Заметим, что в частном случае, когда в системе (1) отсутствует непрерывная часть, то есть когда $x(t) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$, то введенная таким образом обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма совпадает с определенным в [3] максимальным уклонением выхода дискретной системы.

Обозначим через $\Phi(t, s)$ фундаментальную матрицу Коши системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\,\Phi(t, s) = A_c(t)\Phi(t, s), \qquad \Phi(s, s) = I,$$

и определим матрицы

$$A_{c,k} = \Phi(t_{k+1}, t_k), \qquad \Delta_{c,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)\Delta_c(s)ds,$$

$$Q_{c,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)B_c(s)B_c^\top(s)\Phi^\top(t_{k+1}, s)ds.$$

Справедливо утверждение.

Т е о р е м а 1. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма для непрерывно-дискретного объекта* (1) *на заданном горизонте* $[t_0, t_N]$ *находится как*

$$\|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \max_{k=0,\dots,N} \lambda_{\max}^{1/2}\big(\widehat{C}_k P_k \widehat{C}_k^\top\big), \qquad \widehat{C}_k = \big(C_{c,k},\, C_{d,k}\big), \tag{8}$$

где через $\lambda_{\max}(\cdot)$ *обозначено максимальное собственное значение соответствующей матрицы, а* $P_k = P_k^\top \geqslant 0$ *— решение разностного уравнения Ляпунова*

$$P_{k+1} = \widehat{A}_k P_k \widehat{A}_k^\top + \widehat{Q}_k, \quad \widehat{A}_k = \begin{bmatrix} A_{c,k} & \Delta_{c,k} \\ \Delta_{d,k} & A_{d,k} \end{bmatrix}, \quad \widehat{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{c,k} & 0 \\ 0 & B_{d,k}B_{d,k}^\top \end{bmatrix}, \tag{9}$$

с начальными условиями $P_0 = R = \operatorname{diag}(R_x, R_\xi)$.

Доказательства этого и последующих утверждений содержатся в Приложении. Отметим, что в частном случае, когда начальные состояния объекта (1) нулевые, для вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы в рекуррентных уравнениях (9) необходимо взять в качестве начальных условий $P_0 = 0$. В другом частном случае, когда внешние возмущения отсутствуют, а начальные состояния неизвестны, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма определяется соотношениями (8) и (9), в которых следует положить $\widehat{Q}_k = 0$.

Следующая теорема позволяет ответить на вопрос о наихудших начальных условиях x_0^*, ξ_0^* и внешних возмущениях v^*, w^* для которых достигается (5). Сразу отметим, что поскольку система (1) линейна, а обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма представляет собой однородный функционал, то наихудшие начальные состояния и внешние возмущения определяются неоднозначно, с точностью до постоянного множителя.

Т е о р е м а 2. *Если для непрерывно-дискретного объекта* (1) *на заданном горизонте* $[t_0, t_N]$ *обобщенная* $\mathcal{H}_2$*-норма равна* γ^* *и это значение достигается при* $k = k^*$, *то наихудшие начальные состояния и внешние возмущения определяются как*

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} x_0^* \\ \xi_0^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^*} R^{-1} \Psi_{k^*,0}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top e, \\ \begin{bmatrix} v^*(t) \\ w_k^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^*} \begin{bmatrix} B_c^\top(t)\Phi^\top(t_{k+1}, t)x \\ B_{d,k}^\top \xi \end{bmatrix} \Psi_{k^*,k+1}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top e, \end{gathered} \tag{10}$$

здесь через $e = e_{\max}\big(\widehat{C}_{k^*}Y_{k^*}\widehat{C}_{k^*}^\top\big)$ обозначен нормированный собственный вектор матрицы $\widehat{C}_{k^*}Y_{k^*}\widehat{C}_{k^*}^\top$, соответствующий ее максимальному собственному числу, а через $\Psi_{i,j}$ — переходная матрица дискретной системы $\zeta_k = \widehat{A}_k\zeta_k$, то есть

$$\Psi_{0,0} = I, \quad \Psi_{i,j} = \widehat{A}_{i-1}\widehat{A}_{i-2}\ldots\widehat{A}_j, \quad i \geqslant j+1.$$

Из теоремы 2 следует, что обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма на горизонте $[t_0, t_N]$ зависит от значений, принимаемых возмущениями v^*, w^* на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_{k^*}$, и не зависит от значений вне этого отрезка.

Переформулируем теорему 1 в терминах линейных матричных неравенств, символом $*$ обозначен соответствующий симметрический блок.

Т е о р е м а 3. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма для непрерывно-дискретного объекта (1) на заданном горизонте $[t_0, t_N]$ находится из решения задачи $\|\mathcal{S}\|_{\infty,2}^2 = \inf\gamma^2$, при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$\begin{bmatrix} Y_k & * \\ \widehat{A}_kY_k & Y_{k+1} - \widehat{Q}_k \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} Y_l & * \\ \widehat{C}_lY_l & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad Y_0 \geqslant R, \quad \begin{matrix} k = 0,\ldots,N-1, \\ l = 0,\ldots,N, \end{matrix} \tag{11}$$

точная нижняя грань берется по переменной γ и симметрическим неотрицательно определенным матрицам $Y_0,\ldots,Y_N$.

Доказательство теоремы 3 в настоящей работе опущено, поскольку дословно повторяет основные шаги доказательства теоремы 2.2 из [3]. Также сделаем замечания, аналогичные тем, что были сделаны к теореме 1. В случае, если начальные состояния объекта (1) нулевые, для вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы в неравенствах (11) необходимо положить $Y_0 \geqslant 0$, а в случае, когда внешние возмущения отсутствуют, а начальные состояния неизвестны, в неравенствах (11) следует положить $\widehat{Q}_k = 0$.

3. Синтез обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления

Рассмотрим линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект с управлением, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v + H_c(t)u(t), \\ \xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k + H_{d,k}u(t_k), \\ z_k &= C_{c,k}x(t_k) + C_{d,k}\xi_k + D_ku(t_k), \\ & t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0,\ldots,N-1, \end{aligned} \tag{12}$$

где $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, а остальные переменные имеют тот же смысл, что и ранее. Поставим задачу синтеза на конечном интервале времени $[t_0, t_N]$ управления в виде нестационарной линейной обратной связи по состоянию

$$u(t) = u_k = \Theta_{c,k}x(t_k) + \Theta_{d,k}\xi_k, \qquad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0,\ldots,N-1, \tag{13}$$

обеспечивающего минимальное значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Параметры оптимального обобщенного $\mathcal{H}_2$-регулятора вида (13) для непрерывно-дискретного объекта (12) находятся как $\widehat{\Theta}_k = \big(\Theta_{c,k},\, \Theta_{d,k}\big) = Z_k Y_k^{-1}$, где матрицы $Y_k = Y_k^\top \geqslant 0$ и Z_k являются решением задачи $\inf \gamma^2$ при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$\begin{bmatrix} Y_k & \star \\ \widehat{A}_k Y_k + \widehat{H}_k Z_k & Y_{k+1} - \widehat{Q}_k \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} Y_l & \star \\ \widehat{C}_l Y_l + D_l Z_l & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad Y_0 \geqslant R, \tag{14}$$

в которых $k = 0, \ldots, N-1$, $l = 0, \ldots, N$ и матрицы $\widehat{H}_k$ определены соотношениями

$$\widehat{H}_k = \begin{bmatrix} H_{c,k} \\ H_{d,k} \end{bmatrix}, \qquad H_{c,k} = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) H_c(s) ds.$$

Предположим теперь, что объект управления имеет несколько целевых выходов

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v + H_c(t)u(t), \\ \xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k + H_{d,k}u(t_k), \\ z_k^{(j)} &= C_{c,k}^{(j)}x(t_k) + C_{d,k}^{(j)}\xi_k + D_k^{(j)}u(t_k), \qquad j = 1, \ldots, m, \\ & t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k = 0, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{15}$$

и требуется синтезировать управление вида (13) при котором значения обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы по каждому целевому выходу замкнутой системы будут минимальными. В общем случае указанные критерии являются противоречивыми, поэтому оптимальность следует понимать в смысле Парето. Обозначим через $\Theta = \{\widehat{\Theta}_1, \ldots, \widehat{\Theta}_{N-1}\}$ матрицы обратной связи, а через $\gamma_j(\Theta)$ значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы j-го целевого выхода системы (15), замкнутой регулятором Θ. Скажем, что регулятор Θ^* является оптимальным в смысле Парето, если не существует другого регулятора Θ такого, что справедливы неравенства $\gamma_j(\Theta) \leqslant \gamma_j(\Theta^*)$, $j = 1, \ldots, m$, в которых по крайней мере одно выполняется строго. Необходимые условия оптимальности по Парето формулируются следующим образом [1].

Т е о р е м а 5. *Пусть $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ — оптимальная по Парето точка в пространстве критериев и Θ_α — минимум свертки Гермейера, скалярной функции вида*

$$G(\Theta) = \max_{j=1,\ldots,m} \frac{\gamma_j(\Theta)}{\alpha_j}, \qquad \alpha_j = \frac{\gamma_j}{\max\limits_{j=1,\ldots,m} \gamma_j}. \tag{16}$$

Тогда точка Θ_α принадлежит множеству Парето и $\gamma_j(\Theta_\alpha) = \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$.

В соответствии с теоремой 5, оптимальные по Парето решения в рассматриваемой многокритериальной задаче следует искать среди оптимальных решений для свертки Гермейера. Применим теорему 3 к выражению (16), тогда:

$$G(\Theta) = \max_{j=1,\dots,m} \max_{k=0,\dots,N} \alpha_j^{-1} \lambda_{\max}^{1/2} \big(\widehat{C}_k^{(j)} Y_k \widehat{C}_k^{(j)\top}\big), \tag{17}$$

здесь $Y_k = Y_k^\top \geqslant 0$ – решения уравнения (9) для замкнутой системы. Представление (17) позволяет свести поиск оптимального решения для свертки Гермейера к решению задачи выпуклого полуопределенного программирования.

Теорема 6. *Параметры оптимальных по Парето обобщенных $\mathcal{H}_2$-регуляторов вида* (13) *для непрерывно-дискретного объекта* (15) *находятся как $\widehat{\Theta}_{\alpha,k} = Z_k Y_k^{-1}$, где матрицы $Y_k = Y_k^\top \geqslant 0$ и Z_k являются решением задачи* $\inf \gamma^2$ *при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} Y_k & \star \\ \widehat{A}_k Y_k + \widehat{H}_k Z_k & Y_{k+1} - \widehat{Q}_k \end{bmatrix} \geqslant 0, \\ \begin{bmatrix} Y_l & \star \\ \widehat{C}_l^{(j)} Y_l + D_l^{(j)} Z_l & \alpha_j^2 \gamma^2 I \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad Y_0 \geqslant R, \end{gathered} \tag{18}$$

в которых $k = 0, \dots, N-1$, $l = 0, \dots, N$ и $j = 1, \dots, m$.

4. Пример

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, состоящую из основания «1» и объекта «2», связанного с основанием через виброизолятор (рис. 1). Математическая модель изоляции объекта от основания, совершающего поступательное движение, описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} = u + v + \sum_{k=0}^{N-1} w_k \delta(t - t_k), \qquad x(0) = x_{10}, \qquad \dot{x}(0) = x_{20}, \tag{19}$$

где x — координата защищаемого объекта, u — управляющее силовое воздействие, порождаемое виброизолятором, v — непрерывное внешнее воздействие, с точностью до знака совпадающее с ускорением основания, и w_k — дискретное внешнее возмущение, представляющее собой импульсы, приложенные к основанию. Моменты времени t_k, $k = 0, \dots, N-1$, в которые происходят удары по основанию, считаются заданными и образуют монотонно возрастающую последовательность.

Перепишем уравнение (19) в матрично-векторном виде (12). Для этого определим переменную x_2 формулой

$$x_2 = \dot{x} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k \eta(t - t_k),$$

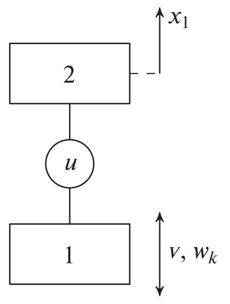


Рис. 1. Схематическое изображение модели защиты от ударов и вибрации.

где через $\eta(t)$ обозначена функция Хевисайда. Полагая теперь $x = x_1$ и вводя дискретную переменную ξ_k, равную суммарному импульсу, сообщенному основанию за время t_{k+1}, приходим к системе

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \xi_k, \qquad t_k \leqslant t < t_{k+1},\\
\dot{x}_2 &= u + v,\\
\xi_{k+1} &= \xi_k + w_k,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$ и $\xi_0 = 0$.

Введем в рассмотрение два функционала, характеризующих качество виброизоляции:

$$
\begin{aligned}
J_1(u) &= \sup \frac{\max\limits_{k=0,\ldots,N} \left|x_1(t_k)\right|}{\sqrt{\zeta_0^\top R\,\zeta_0 + \|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}},\\
J_2(u) &= \sup \frac{\max\limits_{k=0,\ldots,N} \left|u(t_k)\right|}{\sqrt{\zeta_0^\top R\,\zeta_0 + \|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

здесь $\zeta_0 = \mathrm{column}\,(x_{10}, x_{20}, \xi_0)$ и точная верхняя грань берется по всем начальным условиям ζ_0 и внешним возмущениям v, w при которых знаменатель не обращается в ноль. Нетрудно видеть, что функционал J_1 характеризует максимальные смещения защищаемого тела относительно основания, а функционал J_2 определяет максимальное управляющее усилие. Введенные критерии являются противоречивыми в том смысле, что чем меньше первый функционал, то есть чем меньше смещается тело, тем большее управляющее воздействие порождается изолятором, что соответствует большему значению второго функционала, и наоборот. Требуется синтезировать кусочно-постоянное управление вида $u_k = u(t_k) = \theta_{1,k}x_1(t_k) + \theta_{2,k}x_2(t_k) + \theta_{3,k}\xi_k$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, минимизирующее в смысле Парето оба критерия J_1 и J_2.

Для численного решения указанной задачи, положим $R_x = 10I$, $R_\xi = 1$, $N = 5$ и рассмотрим два множества моментов времени, в которые происходят удары по основанию: $\mathfrak{S}_1 = \{0; 2; 4; \ldots; 20\}$ и $\mathfrak{S}_2 = \{0{,}5; 1{,}5; 2{,}0; 6{,}0; 10{,}0; 14{,}0; 18{,}0; 18{,}5; 19{,}5; 20{,}0\}$. Используя теорему 6 были синтезированы оптимальные в смысле Парето регуляторы $\widehat{\Theta}_{\alpha,k}$ и вычислены соответствующие им опти-

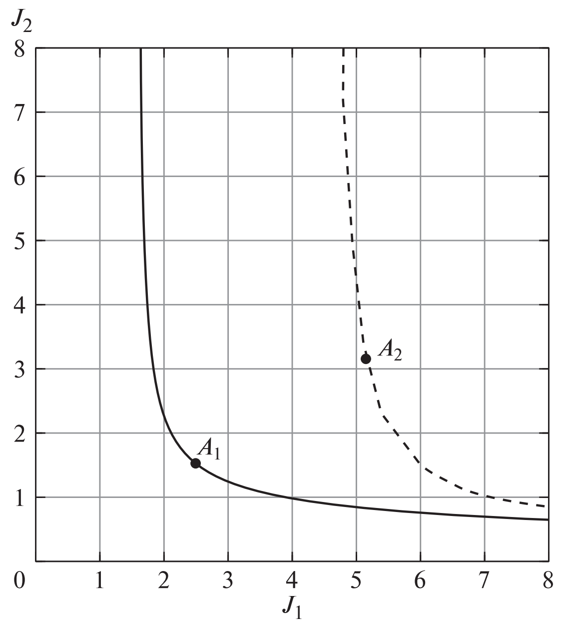


Рис. 2. Парето-фронт.

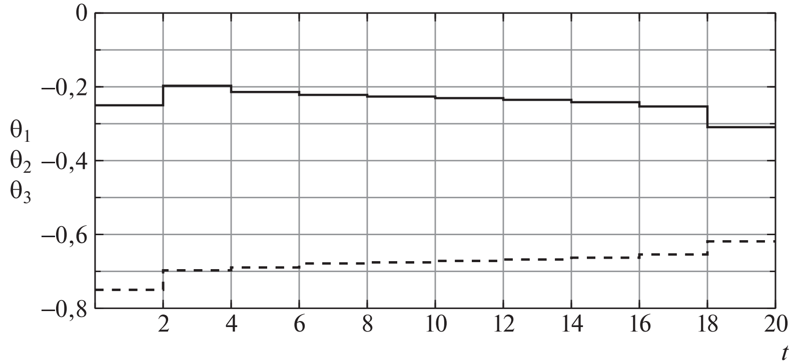


Рис. 3. Графики зависимостей от времени оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи.

мальные значения функционалов. На рис. 2 на плоскости критериев $(J_1,\ J_2)$ сплошной кривой изображен Парето-фронт для множества $\mathfrak{S}_1$, а пунктирной — для множества $\mathfrak{S}_2$. Точки $A_1(2{,}493; 1{,}528)$ и $A_2(5{,}148; 3{,}156)$ соответствуют параметру свертки $\alpha = 0{,}62$. Для сравнения приведем значение первого функционала в случае отсутствия управления: для множества $\mathfrak{S}_1$ получается $J_1 = 65{,}167$, а для $\mathfrak{S}_2$ — $J_1 = 67{,}021$. Отметим следующую особенность, замеченную при численных экспериментах: чем сильнее моменты времени t_k «отличаются» от равномерной сетки, тем сильнее Парето-фронт сдвигается вправо. На рис. 3 приведены графики зависимости от времени оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи $\widehat{\Theta}_{\alpha,k}$, соответствующих точке A_1:

сплошная кривая соответствует коэффициенту $\theta_{1,k}$, штриховая — коэффициентам $\theta_{2,k}$ и $\theta_{3,k}$, которые, как оказалось при численных расчетах, совпадают.

5. Заключение

В работе для линейного непрерывно-дискретного нестационарного объекта с дискретным целевым выходом вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного этим объектом. Показано, что эта характеристика есть максимальное отношения максимального по времени значения евклидовой нормы выхода к смешанной норме неизвестных начальных условий и внешних возмущений. Установлено, что вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы сводится к решению задачи выпуклого полуопределенного программирования, это позволяет решить задачу синтеза оптимальных законов управления, обеспечивающих минимально возможное значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы одного или нескольких выходов. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована результатами численных экспериментов, проведенных для задачи активной виброзащиты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим оператор $\mathcal{S}^*$, двойственный к оператору (3)

$$\mathcal{S}^* : \{z_k\} \mapsto \big(x_0, \xi_0, v(t), \{w_k\}\big), \tag{П.1}$$

здесь

$$z \in l_1([0,N],\mathbb{R}^n), (x_0,\xi_0,v,w) \in \mathbb{R}_2^{n_x} \times \mathbb{R}_2^{n_\xi} \times L_2([t_0,t_N],\mathbb{R}^{n_v}) \times l_2([0,N-1],\mathbb{R}^{n_w}).$$

Норма оператора $\mathcal{S}^*$ задается выражением

$$\big\|\mathcal{S}^*\big\|_{(R,2)/1} = \sup\Big\{\big\|\big(x_0,\xi_0,v,w\big)\big\|_{(R,2)} : \|z\|_{l_1} \le 1\Big\}$$

и, согласно двойственности, справедливо следующее свойство:

$$\big\|\mathcal{S}\big\|_{\infty/(E,2)} = \big\|\mathcal{S}^*\big\|_{(E,2)/1}. \tag{П.2}$$

Таким образом, вместо вычисления нормы оператора $\mathcal{S}$ можно вычислять норму двойственного оператора $\mathcal{S}^*$, что, как будет видно позднее, существенно проще.

Для определения выражения оператора $\mathcal{S}^*$, рассмотрим элемент $z \in l_1([0,N],\mathbb{R}^n)$, тогда

$$\langle z, \mathcal{S}y\rangle = \langle \mathcal{S}^* z, y\rangle_{(R,2)}, \tag{П.3}$$

где $y = (x_0,\xi_0,v,w)$ и скалярное произведение, стоящее в левой части, определяется выражением:

$$\langle z, \zeta\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z_k^\top \zeta_k.$$

Скалярное произведение, стоящее в правой части, имеет вид

$$\langle y_1, y_2\rangle_{(R,2)} = x_{0,1}^\top R_x^{-1}\, x_{0,2} + \xi_{0,1}^\top R_\xi^{-1}\, \xi_{0,2} + \sum_{k=0}^{N-1} w_{1,k}^\top w_{2,k} + \int_{t_0}^{t_N} v_1^\top(\tau) v_2(\tau) d\tau,$$

и согласуется с определением нормы (4).

Перепишем систему (1) в полудискретной форме, последнее означает дискретизацию только непрерывной переменной x, в то время как непрерывное внешнее возмущение v остается неизменным, то есть

$$\text{(П.4)} \qquad \begin{aligned} \zeta_{k+1} &= \widehat{A}_k \zeta_k + \mathcal{B}_k \omega_k, \\ z_k &= \widehat{C}_k \zeta_k, \end{aligned}$$

где $\omega_k = \mathrm{column}\,(v(t), w_k)$ и

$$\text{(П.5)} \qquad \begin{aligned} &\mathcal{B}_k : L_2\big([t_k, t_{k+1}), \mathbb{R}^{n_v}\big) \times \mathbb{R}^{n_w} \to \mathbb{R}^{n_x+n_\xi} \\ &: \begin{bmatrix} v(t) \\ w_k \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) B_c(\tau) v(\tau) d\tau \\ B_{d,k} w_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь, запишем замкнутое выражение, связывающее векторы $\widetilde{y} = \mathrm{column}\,(\zeta_0, \omega_0, \ldots, \omega_{N-1})$ и $\widetilde{z} = \mathrm{column}\,(z_0, \ldots, z_N)$. Для этого воспользуемся соотношением (П.4), тогда

$$\text{(П.6)} \qquad \widetilde{z} = \widetilde{C}\widetilde{A}\widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{y},$$

здесь

$$\widetilde{C} = \mathrm{diag}\,\big(\widehat{C}_0, \widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_N\big), \quad \widetilde{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}\,\big(I, \mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_{N-1}\big),$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \widehat{A}_0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \widehat{A}_1\widehat{A}_0 & \widehat{A}_1 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{A}_{N-1}\ldots\widehat{A}_0 & \widehat{A}_{N-1}\ldots\widehat{A}_1 & \widehat{A}_{N-1}\ldots\widehat{A}_2 & \cdots & I \end{bmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ может быть представлен в виде $\mathcal{S} = \widetilde{C}\widetilde{A}\widetilde{\mathcal{B}}$. Используя выражение (П.3), легко увидеть, что двойственный оператор $\mathcal{S}^*$ может быть записан как

$$\text{(П.7)} \qquad \mathcal{S}^* = \widetilde{\mathcal{B}}^* \widetilde{A}^\top \widetilde{C}^\top,$$

где $\widetilde{\mathcal{B}}^* = \mathrm{diag}\,\big(R^{-1}, \mathcal{B}_0^*, \ldots, \mathcal{B}_{N-1}^*\big)$ и

$$\mathcal{B}_k^* : \mathbb{R}^{n_x+n_\xi} \to L_2\big([t_k, t_{k+1}), \mathbb{R}^{n_v}\big) \times \mathbb{R}_2^{n_w} : \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} B_c^\top(t)\Phi^\top(t_{k+1}, t)x \\ B_{d,k}^\top \xi \end{bmatrix}.$$

Далее, с помощью представления (П.7), нетрудно проверить справедливость следующего выражения

$$\|\mathcal{S}^* z\|^2_{(R,2)} = \|\mathcal{S}^* \widetilde{z}\|^2_{(R,2)} = \widetilde{z}^\top \widetilde{C}\, W \widetilde{C}^\top \widetilde{z},$$

где

$$W = \widetilde{A}\widetilde{Q}\widetilde{A}^\top, \quad \widetilde{Q} = \operatorname{diag}\big(R^{-1}, \widehat{Q}_0, \ldots, \widehat{Q}_{N-1}\big).$$

Поскольку матрица $\widetilde{C}$ является блочно-диагональной, рассмотрим вспомогательную блочно-диагональную матрицу $\widetilde{Y} = \operatorname{diag}\big(Y_0, \ldots, Y_N\big)$, имеющую те же самые блоки на главной диагонали, что и матрица W. Блоки Y_k удовлетворяют линейному рекуррентному уравнению

$$Y_0 = R^{-1}, \quad Y_{k+1} = \widehat{A}_k Y_k \widehat{A}_k^\top + \widehat{Q}_k,$$

совпадающему с уравнением (9) и, кроме того, справедливы следующие преобразования

$$\begin{aligned} \big\|\mathcal{S}^*\big\|^2_{(R,2)/1} &= \sup\Big\{\big\|\mathcal{S}^* z\big\|^2_{(R,2)} : \|z\|_{l_1} \leqslant 1\Big\} = \\ &= \sup\Big\{\widetilde{z}^\top \widetilde{C}\, W \widetilde{C}^\top \widetilde{z} : \|z\|_{l_1} \leqslant 1\Big\} = \\ &= \sup\Big\{\widetilde{z}^\top \widetilde{C}\, \widetilde{Y} \widetilde{C}^\top \widetilde{z} : \|z\|_{l_1} \leqslant 1\Big\} = \max_{k=0,\ldots,N} \lambda_{\max}\big(\widehat{C}_k Y_k \widehat{C}_k^\top\big). \end{aligned} \tag{П.8}$$

Последнее выражение совпадает с (8), что и завершает доказательство теоремы

Доказательство теоремы 2. Для доказательства выражения (10), предположим, что значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы равно γ^* и достигается на шаге $k = k^*$. В этом случае существует элемент

$$\widetilde{z}^* = \operatorname{column}(0, \ldots, 0, z_{k^*}, 0, \ldots, 0), \quad \|\widetilde{z}^*\|_{l_1} = 1$$

такой, что

$$\gamma^* = \big\|\mathcal{S}^* \widetilde{z}^*\big\|_{(R,2)}.$$

Равенство $\|\widetilde{z}^*\|_{l_1} = 1$ означает, что $z_{k^*} = e_{\max}\big(\widehat{C}_{k^*} Y_{k^*} \widehat{C}_{k^*}^\top\big)$, здесь $\widetilde{y}^* = \mathcal{S}^* \widetilde{z}^* = \operatorname{column}(\zeta^*, \omega_0^*, \ldots, \omega_{N-1}^*)$ это вектор, составленный из наихудших начальных условий и внешних возмущений, кроме этого, $\|\widetilde{y}^*\|_{(R,2)} = \gamma^*$. Заметим, что для вычисления $\widetilde{y}^*$ следует выбрать k^* столбец из матричного представления оператора $\mathcal{S}^*$:

$$\widetilde{y}^* = \begin{bmatrix} \zeta^* \\ \omega_0^* \\ \vdots \\ \omega_{k^*}^* \\ \vdots \\ \omega_{N-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1}\widehat{A}_0^\top \ldots \widehat{A}_{k^*}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \mathcal{B}_0 \widehat{A}_1^\top \ldots \widehat{A}_{k^*}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k^*} \widehat{A}_{k^*}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1}\Psi_{k^*,0}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \mathcal{B}_0 \Psi_{k^*,1}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{k^*} \Psi_{k^*,k^*}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, чтобы получить выражение (10), нужно умножить вектор $\widetilde{y}^*$ на $1/\gamma^*$, поскольку в определении обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы (5) вектор наихудших начальных условий и внешних возмущений удовлетворяет условию $\|\widetilde{y}^*\|_{(R,2)} = 1$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Запишем уравнение системы (12), замкнутой обратной связью вида (13), тогда:

$$
\begin{aligned}
\zeta_{k+1} &= \big(\widehat{A}_k + \widehat{H}_k\widehat{\Theta}_k\big)\zeta_k + \mathcal{B}_k\omega_k,\\
z_k &= \big(\widehat{C}_k + D_k\widehat{\Theta}_k\big)\zeta_k.
\end{aligned}
\tag{П.9}
$$

Согласно теореме 3, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (П.9) может быть вычислена как решение задачи (11), в которой матрицы $\widehat{A}_k$ и $\widehat{C}_k$ следует заменить на $\widehat{A}_k + \widehat{H}_k\widehat{\Theta}_k$ и $\widehat{C}_k + D_k\widehat{\Theta}_k$ соответственно. Вводя новые переменные $Z_k = \widehat{\Theta}_k Y_k$, приходим к неравенствам (14). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 6. Для доказательства теоремы заметим, что равенство (17) может быть записано как

$$
\begin{aligned}
G(\Theta) &= \max_{j=1,\ldots,m}\max_{k=0,\ldots,N}\alpha_j^{-1}\lambda_{\max}^{1/2}\big(\widehat{C}_k^{(j)}Y_k\widehat{C}_k^{(j)\top}\big) =\\
&= \max_{j=1,\ldots,m}\max_{k=0,\ldots,N}\lambda_{\max}^{1/2}\big(\alpha_j^{-2}\widehat{C}_k^{(j)}Y_k\widehat{C}_k^{(j)\top}\big),
\end{aligned}
$$

следовательно, в неравенствах (14) достаточно заменить матрицы $\widehat{C}_k$ и $\widehat{D}_k$ на $\alpha_j^{-1}\widehat{C}_k^{(j)}$ и $\alpha_j^{-1}\widehat{D}_k$, после чего получим неравенства (18). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное по Парето обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.

   Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto Optimal Generalized $\mathcal{H}_2$-Control and Vibroprotection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.
2. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // АиТ. 2019. № 10. С. 37–61.

   Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.
3. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–23.

   Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Minimax Control of Deviations for the Outputs of a Linear Discrete Time-Varying System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 2091–2107.
4. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized $\mathcal{H}_2$ Control with Transients // Automatica. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
5. *Chellabonia V., Haddad W.M., Bernstein D.S., Wilson D.A.* Induced convolution operator norms for discrete-time linear systems // Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control. 1999. P. 487–492.

6. *Khargonekar P.P., Sivashankar N.* $\mathcal{H}_2$ optimal control for sampled-data systems // Systems Control Lett. 1991. V. 17. No. 6. P. 425–436.
7. *Kim J.H., Hagiwara T.* Extensive theoretical/numerical comparative studies on $\mathcal{H}_2$ and generalized $\mathcal{H}_2$ norms in sampled-data systems // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 11. P. 2538–2553.
8. *Kim J.H., Hagiwara T.* Upper/lower bounds of generalized $\mathcal{H}_2$ norms in sampled-data systems with convergence rate analysis and discretization viewpoint // Systems Control Letters. 2017. V. 107. P. 28–35.
9. *Rotea M.A.* The generalized $\mathcal{H}_2$ control problem // Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 373–385.
10. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. P. 94–97.
11. *Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D.* An LQR weight selection approach to the discrete generalized $\mathcal{H}_2$ control problem // Int. J. Control. 1998. V. 71. No. 1. P. 93–101.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 05.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. **И.И. БЛЕХМАН, д-р физ.-мат. наук (iliya.i.blekhman@gmail.com)**
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

ЧАСТОТНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И ЕЕ ВОЗМОЖНАЯ РОЛЬ В ЯВЛЕНИЯХ МИКРОМИРА

Отмечается активный интерес Ю.И. Неймарка к исследованиям частотной синхронизации, а также его существенная поддержка исследований в этой области. Обсуждаются основные, еще не вполне установившиеся, определения и понятия теории частотной синхронизации. Рассматриваются существенные различия между явлениями синхронизации, самосинхронизации и захватывания. Подчеркивается часто игнорируемая принадлежность самосинхронизации к явлениям самоорганизации. Перечисляются некоторые актуальные нерешенные проблемы теории частотной синхронизации. В их числе вопрос о возможной фундаментальной роли синхронизации в микромире, который обсуждается подробно. Высказывается мнение о целесообразности попытки описания физической реальности едиными детерминированными законами физики с учетом перечисленных в статье и других новых достижений нелинейной динамики.

Ключевые слова: синхронизация, самосинхронизация, захватывание, тенденция к синхронизации, самоорганизация, синергетика, устойчивость, квантование, универсальность, явления микромира, нерешенные проблемы.

DOI: 10.31857/S000523102008005X

1. Введение. Ю.И. Неймарк и проблемы синхронизации

Юрий Исаакович Неймарк активно интересовался проблемой частотной синхронизации. Этой проблеме посвящена обстоятельная публикация [1]; см. также [2].

Посвящая эти строки светлой памяти Юрия Исааковича, хотелось бы рассказать о нескольких встречах с ним, которые сыграли существенную роль в развитии работ по синхронизации и повлияли на научную судьбу автора.

Мое первое знакомство с Ю.И. Неймарком относится к 50–60-м гг. XX в. По приглашению А.И. Лурье Юрий Исаакович выступал на городском семинаре в Ленинградском политехническом институте. Это был яркий и очень интересный доклад, касающийся гомоклинических структур. Мне помнится, что Юрий Исаакович уже тогда говорил об эффектах сложного (“хаотического”) поведения простых динамических систем, т.е. несколько ранее, чем появилась знаменитая статья Лоренца о странном аттракторе [3]. А.И. Лурье и другие участники слушали доклад с большим вниманием и интересом, было много вопросов.

Второе воспоминание относится к более позднему периоду. Во время пребывания в Горьком на одной из защит диссертаций Юрий Исаакович пригласил меня прокатиться на катере по Волге. Во время поездки в свободной непринужденной форме Юрий Исаакович говорил о разных проблемах теории нелинейных колебаний и, в частности, о том, что следует относить к нелинейным явлениям, и о простых моделях нелинейных явлений. Он высказал соображение, что, с определенной точки зрения, таких явлений всего четыре — захватывание, синхронизация, затягивание и асинхронное возбуждение колебаний.

Третье воспоминание относится к обсуждению заявки сотрудников института Механобр на открытие явления синхронизации вращающихся тел в Институте проблем механики РАН (Москва). Руководитель семинара академик А.Ю. Ишлинский был исключительно нейтрален по отношению к рассматриваемым вопросам. В то же время среди участников семинара были видные ученые, выступавшие против регистрации заявки. Их доводы состояли в том, что открытие Х. Гюйгенсом синхронизации маятников уже покрывает собой проблему, а также что самосинхронизация, в сущности, уже рассмотрена в работах А.А. Андронова и его учеников, относящихся к проблеме захватывания. Мои возражения заключались в том, что самосинхронизация вращающихся тел существенным образом отличается от синхронизации колебаний маятников и, кроме того, в отличие от маятников имеет существенные технические приложения. Что же касается захватывания, то оно, скорее, относится к вынужденным колебаниям в нелинейных системах при заданной фиксированной частоте, в то время как синхронизация представляет собой выработку единого, заранее неизвестного ритма движения системы. Юрий Исаакович убедительно поддержал эту точку зрения, что и обеспечило одобрение заявки Советом.

Четвертое воспоминание относится к последним дням жизни Юрия Исааковича, когда автор статьи с профессором П.С. Ландой посетили его, уже тяжело больного в его квартире на улице Пискунова. Юрий Исаакович тогда высказал предположение о том, что явления синхронизации играют существенную роль в процессе эволюции. В частности, он обратил внимание на то, что значительный интерес представляют не только случаи устойчивой самосинхронизации, но и выпадение из ритма вследствие неустойчивости. Можно надеяться, что эти соображения получат свое продолжение в дальнейших исследованиях.

Юрий Исаакович сказал также, что изменил свои взгляды на паранормальные явления, в частности на опыты с нагревом и сгибанием ложек. “Возможно, — сказал он, — в этом есть что-то, чего мы не понимаем, может быть, здесь проявляется та же синхронизация”. Автор вспомнил об этих словах, когда узнал недавно, что таких же взглядов на паранормальные явления придерживается Нобелевский лауреат Брайан Джозефсон, причастный к теме настоящей заметки [4].

Автор считает большой удачей близкое знакомство с этим выдающимся ученым, его внимание, поддержку и дружеское расположение. Каждая беседа и встреча с Юрием Исааковичем вызывала желание заниматься наукой и наталкивала на новые плодотворные размышления. Глубокая благодарность этому замечательному ученому и человеку — продолжателю знаменитой Горьковской школы теории нелинейных колебаний.

2. Синхронизация, самосинхронизация, захватывание

Частотная (гюйгенсова) самосинхронизация — удивительное свойство динамических объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм движения, несмотря на различие индивидуальных ритмов.

Частотная синхронизация состоит в том, что два или несколько объектов, совершающих при отсутствии взаимодействия периодические колебания или вращения с различными средними частотами, при наличии подчас весьма слабых связей между ними движутся с одинаковыми средними частотами, причем устанавливаются определенные фазовые соотношения между колебаниями или вращениями [5].

При этом под средними частотами понимаются величины $\omega = 2\pi/T$, где T – период колебаний или время одного полного оборота. Таким образом, можно говорить не о совпадении средних частот при синхронизации, а о совпадении соответствующих периодов колебаний или вращений. При частотной самосинхронизации координаты объектов могут отличаться. Совпадают лишь их средние частоты или периоды движения.

Приведенное вербальное определение относится к случаю, который может быть назван простой самосинхронизацией. Под кратной самосинхронизацией понимается случай, когда между средними частотами колебаний или вращений устанавливаются линейные однородные соотношения с целочисленными коэффициентами.

Явление захватывания существенно отличается от явления самосинхронизации. При самосинхронизации синхронная частота вырабатывается всеми объектами как равноправными. Обычно эта частота является некоторой средней между частотами объектов — она меньше наибольшей и больше наименьшей из частот объектов (парциальных частот). Система в целом при этом является автономной. Захватывание может относиться к одному единственному объекту. Частота же задается внешним объектом, она считается заданной и неизменной. Эта частота "навязывается" внешним источником и она может быть как больше, так и меньше частоты объекта. Система при этом является неавтономной.

Расширение неавтономной системы за счет включения в нее источника возмущения "ограниченной мощности" необходимо при решении задач о самосинхронизации, что и было выполнено в первой публикаци по теории синхронизации вибровозбудителей, а также в теории эффекта Зоммерфельда [6]. Позднее соответствующее расширение на задачи о вынужденных колебаниях было инициировано В.О. Кононенко [7, 8].

Вместе с тем захватывание может рассматриваться как предельный частный случай частотной самосинхронизации, а именно когда один из объектов является значительно более мощным, чем остальные, и генерируемая им частота может считаться заданной и неизменной. Таким образом, захватывание в определенном смысле подобно вынужденным колебаниям. Обнаружению и исследованию эффектов захватывания посвящены исследования классической горьковской школы, возглавляемой А.А. Андроновым [9].

Иногда под синхронизацией некоторые исследователи имеют в виду захватывание. В дальнейшем, говоря о синхронизации, будем иметь в виду именно частотную самосинхронизацию, если только не оговаривается иное. Заметим также, что известное явление вибрационного поддержания вращения представляет собой не что иное, как захватывание вращательного движения.

Самосинхронизации можно противопоставить принудительную синхронизацию, когда последняя осуществляется не за счет имеющихся в системе "естественных" связей, а путем введения некоторых синхронизирующих элементов или использования системы управления. К принудительной синхронизации можно отнести и захватывание. Частотная самосинхронизация – природное явление, а принудительная синхронизация – результат управления.

Под тенденцией к синхронизации понимается наличие у системы связанных объектов по крайней мере одного устойчивого в том или ином смысле синхронного движения, т.е. движения, в котором объекты движутся с равными или кратными средними частотами (угловыми скоростями).

Самосинхронизация, несомненно, относится к явлениям самоорганизации. При этом она была открыта и исследована значительно раньше, чем другие такие явления [10]. Это обстоятельство, как правило, не отмечается исследователями, относящими свои публикации к синергетике (Г. Хакен).

Частотная самосинхронизация является частным случаем значительно более общего понятия о синхронизации как согласованного во времени функционирования двух или нескольких объектов. Соответствующее математическое определение такого более общего (энциклопедического) понятия о синхронизации предложено в публикациях [11, 12], а также в [5] (2-е изд.). Обзор ситуации, относясящейся к этому более широкому понятию, приведен в [4].

Как и в случае частотной синхронизации, в общем случае термин "синхронизация" допускает двойственное толкование — и как явление (в этом случае уместно говорить о самосинхронизации), так и действие по обеспечению нужного синхронного движения (когда речь идет об управляемой (принудительной) синхронизации).

Открытая Христианом Гюйгенсом во второй половине XVII-го столетия синхронизация маятниковых часов в дальнейшем была обнаружена при колебаниях камертонов и органных труб. Были известны также целочисленные соотношения в орбитальных движениях небесных тел. Толчком к взрывному интересу к синхронизации и появлению значительного числа исследований послужило обнаружение в 1947 г. в институте Механобр (Ленинград) явления самосинхронизации неуравновешенных роторов (механических вибровозбудителей). Оно стало основой создания нового класса серийно выпускаемых вибрационных машин.

С одной стороны, синхронизация является даром природы, поскольку лежит в основе многочисленных полезных приложений. Однако с другой стороны, она может приводить к вредным и опасным последствиям (неуравновешенные машины на общем фундаменте, синхронизация при движении многих людей по мостам и перекрытиям).

Коллективы ученых, занимающиеся проблемами синхронизации, существуют не только в России, но и в Германии, Испании, Китае, Литве, Нидерландах, Польше, Сербии, США, Турции, Украине, Франции, Японии. Опубликовано и продолжает публиковаться большое число статей, содержащих термин “синхронизация”. При этом наблюдается определенное различие в используемой терминологии. Появился также ряд книг по синхронизации, каждая из которых, однако, естественным образом дает несколько одностороннее представление о проблеме в соответствии с научными интересами авторов. Необходимо отметить, что отдельные исследователи работают изолированно, повторяя известные результаты без надлежащих ссылок.

К настоящему времени возникло понимание всеобщности синхронизации как физического явления, свойственного не только механическим, но и электрическим, химическим, биологическим и даже социальным объектам. Оно свойственно маятниковым часам, органным трубам, небесным телам, электрическим и квантовым генераторам, возбудителям механических колебаний, лопаткам турбомашин, химическим объектам, сообществам клеток и другим элементам живых организмов, живым организмам в коллективах. Человеческий организм – средоточие огромного числа ритмов, многие из которых синхронизированы. В частности, это относится к ритмам работы легких и сердца. Ряд патологий связан именно с нарушением синхронизации их ритмов.

Таким образом, в настоящее время несомненна универсальность явления синхронизации макроскопических объектов. Относительно квантовых систем известны лишь отдельные случаи использования синхронизации.

3. Некоторые актуальные нерешенные проблемы теории частотной синхронизации

1. Общие вопросы теории.

а) Исследование эффективных способов повышения робастности требуемых режимов самосинхронизации и подавления нежелательных режимов.

б) Исследование подавления или использования колебаний объектов с кратными по отношению к частоте синхронного движения частотами. Такие колебания сопровождают синхронные движения объектов со средними частотами колебаний или вращений.

в) Исследование самосинхронизации сложных объектов, описываемых системой со многими степенями свободы или с распределенными параметрами.

2. Продолжение исследований явлений синхронизации в биологии, физиологии, медицине (в частности, гипотеза Винера о механизме роста раковых клеток, распространение инфекций, эпидемии).

3. Исследование явлений синхронизации в экономике (теория кризисов).

4. Исследование синхронизации в поведении коллективов и групп людей, животных (например, поведение толпы, массовый психоз, полет птиц и плавание рыб).

5. Изучение возможной роли синхронизации в так называемых паранормальных явлениях (телепатия и другие).

6. Роль явлений синхронизации в микромире (см. пп. 4 и 5).

4. О некоторых явлениях синхронизации в микромире и их использовании

Упомянем некоторые известные приложения синхронизации в квантовых системах:

1. Синхронизация квантовых генераторов [13, 14] (см. также [15–18]);

2. Синхронизация мод при генерации лазерных импульсов сверхкороткой длительности и высокой мощности [19];

3. Синхронизация в сазерах [20];

4. Синхронизация контактов Джозефсона [21].

Под контактом Джозефсона понимается тонкий слой изолятора, разделяющего два сверхпроводника. Под эффектом Джозефсона понимают квантовый эффект, определяющий закономерность протекания сверхпроводящего тока через такой контакт. Оказалось, что динамика контакта Джозефсона при определенных условиях описывается уравнением движения неуравновешенного ротора (маятника, “ротатора”). В связи с этим к проблеме самосинхронизации контактов Джозефсона применимы результаты теории самосинхронизации вибровозбудителей [5, 12, 22–24].

5. О возможной фундаментальной роли синхронизации в микромире

При рассмотрении данного вопроса обращают на себя внимание следующие результаты теории частотной синхронизации:

1. Колебательные или вращательные движения свойственны всем фундаментальным объектам микромира, а явления синхронизации имеют место везде, где встречаются колебания и вращения [5, 24];

2. Устойчивые синхронные движения так называемых орбитальных систем квантованы по энергиям и частотам. Эти движения обладают ярко выраженными экстремальными свойствами — они отвечают максимальным или минимальным значениям функций, имеющих четкий физический смысл [5, 25] (см. также [26–28]);

Этот результат соответствует мысли Н.Г. Четаева об устойчивости “элитных” движений динамических систем. Н.Г. Четаеву принадлежит также высказывание о том, что такое фундаментальное понятие как устойчивость движения должно находить отражение в законах природы [29, 30] (см. также [31]);

3. Движение системы при самосинхронизации может быть весьма сложным, практически неотличимым от хаотического. Это относится, в частности, к случаю самосинхронизации нескольких одинаковых или почти одинаковых объектов. В этом случае в ограниченной области фазового пространства существует большое число устойчивых в малом синхронных движений с различным набором фаз, причем каждому такому движению соответствует малая область притяжения. В результате движение системы воспринимается как хаотическое ([5] – 2-е изд., [32]).

К настоящему времени очевидно всеобщее фундаментальное значение явлений синхронизации макроскопических динамических объектов самой разной природы.

Вопрос о фундаментальной роли самосинхронизации в микромире только начинает обсуждаться. Ему посвящено сравнительно небольшое число публикаций, частично, на уровне гипотез [5, 33–36]. К этой категории относятся и разделы 4 и 5 настоящей статьи.

6. Играет ли Бог в кости?

Приведенные выше соображения наводят на мысль — не стоит ли вновь рассмотреть возможность единого детерминистического описания явлений макро- и микромира, т.е. к мысли Эйнштейна, что "Бог не играет в кости" ("God does not play dice".).

Представляется, что определенную надежду на успех такой попытки дают рассмотренные выше результаты теории самосинхронизации, а также наличие достижений нелинейной динамики.

Быть может, дело не в различных законах, а в том, что в одних случаях целесообразно моделировать явления как детерминированные, а в других вследствие сложности — как случайные?

Разумеется, речь идет о принципиальной возможности такого единого описания, а не о целесообразном способе моделирования. Примером является та же игральная кость: каждый ее бросок описывается законами Ньютона, но результаты бросания целесообразно описывать в вероятностной форме.

7. Заключение

Не вызывает сомнения, что частотная самосинхронизация — "притяжение частот" представляет собой универсальное явление, характерное для всех процессов, в которых встречаются колебания или вращения. Захватывание может рассматриваться как предельный частный случай самосинхронизации. Вместе с тем как само явление самосинхронизации, так и его отдельные аспекты еще требуют размышления и исследования. Некоторые актуальные проблемы остаются нерешенными. Это относится, в частности, к вопросу о роли самосинхронизации в микромире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* О синхронизации динамических систем // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 749–758.
2. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.; изд. 2-е, дополн. М.: URSS, 2009.

   Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.
3. *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. of the Atmos. Sci. 1963. V. 20. No. 2. P. 130–141.
4. *Strogatz S.H.* SYNC: how order emerges from chaos in the universe, nature, and daily lif. N.Y.: Penguin Group, 2004.

   Строгац Стивен. Ритм Вселенной. Как из хаоса возникает порядок в природе и в повседневной жизни. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017.
5. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.

   Blekhman I.I. Synchronization in Science and Technology. N.Y.: ASME Press, 1988.; 2-е рус. изд., доп.: М.: URRS, Ленанд, 2015.
6. *Блехман И.И.* Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // Инженерный сб. 1953. Т. 16. С. 49–72.

7. *Кононенко В.О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964.
8. *Краснопольская Т.З., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. М.-Ижевск: НИИ “Регулярная хаотическая динамика”, 2008.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959.
10. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
11. *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijemeier H., Pogromsky A.Yn.* On self-synchronization and controlled synchronization // J. Syst. Control Lett. 1997. No. 31. P. 299–305.
12. Selected Topics in Vibrational Mechanics (Ser. on Stability, Vibration and Control of Systems: Series A, V. 11). 2004. N.J.: World Scientific.
13. *Климонтович Ю.Л.* Квантовые генераторы света и нелинейная оптика. М.: Просвещение, 1966.
14. *Манешин П.К., Хохлов Р.В.* Взаимная синхронизация двух молекулярных генераторов при малой связи // Науч. докл. высш. шк. Сер. Радиотехника и электроника. 1958. № 3. С. 74–83.
15. *Ораевский А.Н.* Молекулярные генераторы. М.: Наука, 1964.
16. *Любимов Г.П., Хохлов Р.В.* О поляризации молекулярного пучка переменным полем с изменяющейся амплитудой и фазой // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 6. № 12. С. 1396–1402.
17. *Maiman T.* Stimulated Optical Radiation in Ruby // Nature. 1960. Vol. 187. Iss. 4736. P. 493–494. https://doi.org/10.1038/187493a0.
18. *Миловский Н.Д., Ястребова Г.В.* О работе кольцевого ОКГ, синхронизированного внешней силой // Квантовая электроника. 1974. Т. 1. № 11. С. 2333–2339.
19. *Прохоров А.М., Анисимов С.И., Паншин П.П.* Лазерный термоядерный синтез // Успехи физич. наук. 1976. Т. 119. Вып. 401. С. 401–424.
20. *Завтрак С.Т., Волков И.В.* Сазер (Sound Amplification by stimulated emission of radiation) // Журн. технич. физики. 1997. Т. 67. № 4. С. 92–100.
21. *Лихарев К.К., Ульрих Б.Т.* Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. М.: Изд-во МГУ, 1978.
22. *Barone A., Paterno G.* Physics and applications of the Josephson effect. N.Y.: Wiley, 1982.
23. *Watanabe S., Strogatz S.H.* Constants of Motion for Superconducting Josephson Arrays // Phisica D. 1994. V. 74. No. 3–4. P. 197–253.
24. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.

    Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization. A universal concept in nonlinear science. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2001.
25. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Резонансные вращения небесных тел. Нижний Новгород: Нижегород. гуманитарный центр, 1995.
26. *Чечельницкий А.М.* Экстремальность, устойчивость, резонансность в астродинамике и космонавтике. М.: Машиностроение, 1980.
27. *Чечельницкий А.М.* Волновая структура, квантование, мегаспектроскопия Солнечной системы // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. М.: Машиностроение, 1986.

28. *Молчанов А.М.* О резонансной структуре Солнечной системы // Современные проблемы небесной механики и астродинамики. М.: Наука, 1973.
29. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Гостехиздат, 1955.
30. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
31. *Блехман И.И., Вайсберг Л.А.* Адаптивные свойства динамических объектов // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2006. № 3. С. 23–29.
32. *Blekhman I.I.* Multimode Character of Dynamical Systems as a Cause of Their Complex ("Chaotic") Behaviour // Proc. 4th Int. Conf. on Computation Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN 2013). Cos Island, Greece, June, 2013.
33. *Блехман И.И., Довгеля Е.Г., Дрогуш С.Я., Кремер Е.Б., Сазонов Г.Т., Семешкин С.С.* Гипотеза о механизме квантования частот обращения тел в орбитальных системах. Ассоциация авторов научных открытий. № А-043 от 15.02.1995.
34. *Губарь Ю.Н.* Резонансные соотношения между комптоновскими частотами и соизмеримость масс элементарных частиц. М.: МГУ, НИИ Ядерной физики, 1983.
35. *Гареев Ф.А.* Геометрическое квантование микро- и макросистем. Планетарно-волновая структура адронных резонансов // Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996.
36. *Рабинович Б.И.* Суперэлитные плазменные кольца и орбиты планет и спутников, изоморфные орбиты электронов в водородоподобных атомах. М.: Институт космич. исследований, 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 24.09.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. **С.П. ГОРБИКОВ, д-р физ.-мат. наук(gorby50@yandex.ru)**
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СКОЛЬЗЯЩИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

В системах управления движением известны режимы с учащающимися переключениями. Для систем с ударами (своеобразного класса импульсных систем) аналогом этих режимов являются движения с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечное время. Для таких движений предлагается описание с помощью гладких дифференциальных уравнений. Приводятся примеры применения подобного описания.

Ключевые слова: ударное взаимодействие, локальная особенность, бесконечноударные движения, вспомогательные скользящие движения, точечное отображение.

DOI: 10.31857/S0005231020080061

1. Введение

Ю.И. Неймарк еще в 1953 г. провел уникальное исследование [1], на которое авторы прикладных работ до сих пор ссылаются. Он выполнил характерное для него теоретическое исследование, которое имело сугубо практическое значение.

В [1] изучается процесс вибропогружения в случае упругого грунта; открыт новый эффект вибраций: они способны снижать сопротивление при внедрении в грунт. Результаты действия вибраций на технические системы описаны в монографии [2]. При изучении виброударных систем (когда к действию вибраций добавляются удары) исследователи занимаются:

методами расчета виброударных систем (например, [3, 4 и др.]);

разработкой моделей, методов синтеза и анализа динамики виброударных систем различного типа (например, [5–7 и др.]).

Более подробное представление о современном состоянии теории виброударных систем можно получить, например, из [8].

В то же время в теории виброударных систем известны движения, при которых за конечный промежуток времени траектория бесчисленное число раз попадает на многообразие разрыва. Это — *бесконечноударные движения* [9, с. 291; 10; 11], т.е. движения с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечное время.

В [12] предлагается наиболее общая модель динамических систем с ударными взаимодействиями (виброударных систем), включающая в том числе и системы, используемые в [11]. Для введенных систем (в одном общем случае) в [12] дается описание бесконечноударных движений с помощью гладких дифференциальных уравнений. Интегральные кривые этих уравнений получили название *вспомогательные скользящие движения*. В [13] предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения указанных систем на границе области существования бесконечноударных движений. В [14] описаны локальные особенности данных динамических систем. В [15, 16] устанавливается топологическая эквивалентность указанных локальных особенностей.

В настоящей работе предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения динамических систем с ударными взаимодействиями в окрестности локальной особенности шестого типа [14], т.е. такой точки на гиперповерхности $S = 0$ удара, в которой первая и вторая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от гиперповерхности удара равна нулю, а третья производная — отрицательна (движение системы происходит в области $S \geqslant 0$). Приводятся примеры применения таких уравнений. Даны также примеры использования дифференциальных уравнений, которые были приведены в [12] и действуют в окрестности локальной особенности четвертого типа, т.е. такой точки на гиперповерхности $S = 0$, в которой первая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от гиперповерхности удара равна нулю, а вторая производная — отрицательна.

При выполнении работы [12] Ю.И. Неймарк предложил идею об описании бесконечноударных движений с помощью дифференциальных уравнений. Эта идея сразу решала проблему о единственности предельной точки бесконечноударного движения и кривой, в которой начинаются, продолжаются бесконечноударные движения, заканчивающиеся в выделенной точке. Оказывается, что эта же идея работает и для локальной особенности пятого и шестого типа. Идеи Ю.И. Неймарка всегда благотворны и имеют далекое идущее будущее.

2. Рассматриваемый класс динамических систем

Далее предполагается [12], что мгновенные ударные взаимодействия происходят на гиперповерхности $x_n = 0$, по достижении которой фазовые переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ меняются скачкообразно (переменная x_n остается равной нулю) в соответствии с формулами

$$\begin{gathered}\bar{x}_1 = H_1\left(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-\right) = x_1^- H_{11}\left(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-\right), \\ \bar{x}_i = H_i\left(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-\right) = x_i^- + x_1^- H_{1i}\left(x_1^-, \ldots, x_{n-1}^-\right), \quad i = \overline{2, n-1},\end{gathered} \tag{1}$$

а при $x_n > 0$ изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{gathered}\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = \Phi_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_n) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \ldots, x_n).\end{gathered} \tag{2}$$

Фазовое пространство системы составляют точки $(x_1, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n \geqslant 0)$.

При этом выполняются следующие условия: $-1 < H_{11}(0, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-) < 0$; $H_{11}(x_1^-, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-) < 0$; $\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$; t – время. Здесь функции H_{1j}, $j = \overline{1, n-1}$, определены и являются гладкими класса C^m, $m \geqslant 5$, в малых окрестностях точек $(x_1^- \leqslant 0, x_2^-, \ldots, x_{n-1}^-)$ пространства R^{n-1}, а функции Φ_j, $j = \overline{1, n-1}$, Φ_{n1}, Φ_{nn} определены и являются гладкими класса C^m в малых окрестностях точек $(x_1, \ldots, x_{n-1},\, x_n \geqslant 0)$ пространства R^n.

Следует отметить, что специфический вид уравнений (2) и условие типа неравенства на функцию Φ_{n1} означает лишь, что на гиперповерхности $x_n = 0$ согласно (2), $\dot{x}_n = x_1\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Поэтому фазовые траектории системы (2) при $x_1 = 0$ касаются гиперповерхности $x_n = 0$, при возрастании времени t они выходят из точек $(x_1 > 0, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 0)$, а при уменьшении t — из точек $(x_1 < 0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

Указанный вид (1) ударных взаимодействий подразумевает лишь, что при достижении гиперповерхности $x_n = 0$ фазовой траекторией со скоростью изменения последней переменной, равной $\dot{x}_n = 0$, ударные взаимодействия не меняют (так как в этот момент $x_1 = 0$) значений фазовых переменных, а условия в виде неравенств на функцию H_{11} означают потерю абсолютной величины скорости изменения переменной x_n после ударных взаимодействий. Переменная x_n соответствует расстоянию (по нормали) между соударяющимися телами.

Если какая-то переменная x_j не изменяется при ударе, то соответствующая функция H_{1j} в формулах (1) равна нулю.

Далее на двух задачах показывается, как можно виброударные системы привести к виду (1)–(2).

Пример 1 (виброударный механизм [17, с. 263]). При изучении движения простейшего виброударного механизма уравнение движения (под действием синусоидальной $F\sin\omega t$ и постоянной P сил) ударной массы M, подвешенной на пружине (коэффициент ее упругости равен k), в промежутках между ударами (при $x < x_0$) имеет вид

$$Md^2x/dt^2 + kx = P + F\sin\omega t.$$

При $x = x_0$ происходит мгновенный удар массы M о неподвижный ограничитель, в результате чего меняется только скорость движения массы

$$dx/dt_+ = -Rdx/dt_-, \quad 0 \leqslant R \leqslant 1,$$

где dx/dt_- и dx/dt_+ – соответственно доударные и послеударные значения скорости.

Осциллятор с предварительным натягом. При $kx_0 - P < 0$ указанную выше систему заменой переменных и параметров

$$t = \omega\tau - \pi, \quad \lambda^2 = \frac{k}{M\omega^2}, \quad W = \frac{F}{P - kx_0}, \quad q = \frac{M\omega^2(x - x_0)}{kx_0 - P}$$

можно привести к следующему виду.

В трехмерном фазовом пространстве переменных q, $\dot{q} = dq/dt$, t при $q > 0$ уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = W\sin t - 1, \quad \ddot{q} = d^2q/dt^2, \quad W > 0, \quad 0 < \lambda.$$

Если при достижении поверхности $q = 0$ значение $dq/dt = \dot{q} = \dot{q}_- < 0$, то в системе происходит мгновенное ударное взаимодействие по формуле

$$\dot{q}_+ = -R\dot{q}_-,$$

где $\dot{q}_-$ и $\dot{q}_+$ – соответственно доударные и послеударные значения скорости.

Поэтому при $x_1 = \dot q$, $x_2 = t$, $x_3 = q$ эта система принимает вид (1)–(2), где уравнения (1) имеют вид

$$(\dot q_+) = \bar x_1 = -Rx_1^- = (-R\dot q_-),$$
$$(t_+) = \bar x_2 = x_2^- = (t_-),$$

а уравнения (2) – вид

$$\dot x_1 = -\lambda^2 x_3 + W\sin x_2 - 1,$$
$$\dot x_2 = 1,$$
$$\dot x_3 = x_1.$$

Осциллятор с зазором. При $kx_0 - P > 0$ заменой переменных и параметров

$$t = \omega\tau - \pi, \quad \lambda^2 = \frac{k}{M\omega^2}, \quad V = \frac{F}{kx_0 - P}, \quad q = \frac{M\omega^2(x_0 - x)}{kx_0 - P}$$

уравнение виброударного механизма можно привести к виду

$$\ddot q + \lambda^2 q = V\sin t + 1, \quad \ddot q = d^2q/dt^2, \quad V > 0, \quad 0 < \lambda,$$

который справедлив при $q > 0$. Условия удара в этом случае остаются прежними.

Поэтому при той же самой замене $x_1 = \dot q$, $x_2 = t$, $x_3 = q$ система принимает вид (1)–(2), где уравнения удара (1) остаются прежними, а уравнения (2) принимают вид

$$\dot x_1 = -\lambda^2 x_3 + V\sin x_2 + 1,$$
$$\dot x_2 = 1,$$
$$\dot x_3 = x_1.$$

Далее для описания поведения фазовых траекторий вводится точечное отображение $T = T_2T_1$ части многообразия $x_n = 0$, $x_1 \geqslant 0$ в себя. Отображение T_1 переводит точку $(x_1 \geqslant 0,\ x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ в точку $(x_1 \leqslant 0,\ x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ по траекториям системы (2); T_2 – отображение, задаваемое формулами (1) ударных взаимодействий.

В то же время для любой функции Z используются обозначения

$$Z = Z(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad Z(M_1) = Z(\bar x_1, \ldots, \bar x_{n-1}),$$

где $M_1 = T(M) = (\bar x_1, \ldots, \bar x_{n-1})$, $M = (x_1 \geqslant 0, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

3. Особенности четвертого типа

Здесь рассматривается четвертый тип [14] локальных особенностей, т.е. такая точка M^* на гиперповерхности $\mathrm{S} = 0$ удара, в которой первая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от гиперповерхности удара равна нулю, а вторая производная отрицательна (движение системы происходит в области $\mathrm{S} > 0$).

Тогда в точке M^* выполняются условия

$$(3) \qquad x_n = 0, \quad \dot x_n = \Phi_n(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ddot x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}\,\Phi_k < 0.$$

Прежде всего в [12] доказывается следующая лемма.

Лемма 3.1. Для любой точки M^* можно указать при $R = -H_{11}(0, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*) \neq 0$ такую малую окрестность на многообразии $x_n = 0$, из каждой точки которой при $x_1 > 0$ выходит фазовая траектория, соответствующая бесконечноударному движению. Это движение оканчивается в некоторой точке многообразия $x_1 = 0, x_n = 0$.

Затем доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для любой такой точки M^* существует окрестность на многообразии $x_n = 0$, из каждой точки M которой при $x_1 > 0$ выходит фазовая траектория, соответствующая бесконечноударному движению. Это движение оканчивается в некоторой точке многообразия $x_n = 0$, $x_1 = 0$. При этом все точки $M_j = T^j(M)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, лежат на одной и той же проходящей через M интегральной кривой ("вспомогательные скользящие движения") системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx_1} = f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{4}$$

где функции $f_i \in C^{m-2}$.

Для доказательства теоремы находится вид отображения T

$$\begin{gathered} \bar{x}_1 = Rx_1 + x_1\varphi_1 = g_1, \\ \bar{x}_i = x_i + x_1(c_i + \varphi_i) = g_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$R = -H_{11}(0, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*) \ (0 < R < 1), \quad c_i = -b_i - 2a_i a_1^{-1},$$

$$b_i = H_{1i}(0, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*), \quad \varphi_j(0, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*) = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad \varphi_j \in C^{m-1},$$

$$a_j = \Phi_j(0, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*, 0), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Функции f_i из (4) находятся из тождеств

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} f_j = f_i(M_1) \left[\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} f_j \right], \quad i = \overline{2, n-1}, \tag{6}$$

где $f_i = c_i/(R-1) + \tilde{f}_i$ и $\tilde{f}_i = 0$ при $M = M^*$.

Функциональные уравнения (6) составляются аналогично тому, как и соответствующие уравнения, используемые при доказательстве теоремы в [13].

Для нахождения при достаточно малых $x_1, x_i - x_i^*$, $i = \overline{2, n-1}$, решения уравнения (6) можно указать, используя (5), следующий итерационный процесс:

$$f_i^{s+1} = -c_i - \varphi_i - x_1 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} f_j^s \right) +$$

$$+ f_i^s(M_1) \left[R + \varphi_1 + x_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} f_j^s \right) \right], \quad i = \overline{2, n-1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на доказательство сходимости этого процесса и гладкости его решения.

Далее приводятся примеры применения полученного описания бесконечноударных движений.

3.1. Нахождение предельных значений бесконечноударных движений

Пусть траектория системы (1)–(2), выходящая из точки $M(x_1 > 0, x_2, \ldots, x_{n-1})$ многообразия $x_n = 0$, представляет собой бесконечноударное движение, оканчивающееся в точке $M^*(0, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*)$ многообразия (3). Тогда координаты точки M^* можно найти следующим образом.

Если x_1 достаточно мало, то в качестве точки M^* можно взять точку $(0, x_2, \ldots, x_{n-1})$, и уравнение (4) в силу (6) примет вид

$$\frac{dx_i}{dx_1} = f_i(0, x_2, \ldots, x_{n-1}) + x_1 \frac{\partial f_i(0, x_2, \ldots, x_{n-1})}{\partial x_1} + \ldots =$$

$$= \frac{c_i(x_2, \ldots, x_{n-1})}{R-1} + \ldots, \quad i = \overline{2, n-1},$$

где

$$c_i = -H_{1i}(0, x_2, \ldots, x_{n-1}) - 2\Phi_i(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)[\Phi_1(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)]^{-1},$$

$$R = -H_{11}(0, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

многоточие в формулах означает наличие членов более высокого порядка малости по x_1 относительно рядом стоящих. Отсюда

$$(7) \qquad x_i^* = x_i + \int_{x_1}^{0} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) dx_1 = x_i + \frac{c_i}{1-R} x_1 + \ldots, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Если t не входит в список переменных x_i, то для нахождения времени t^* окончания бесконечноударного движения достаточно, полагая $y_i = x_i$, $i = \overline{1, n-1}$, $y_{n+1} = x_n$, $y_n = t$, рассмотреть относительно переменных $y_1, \ldots$ $\ldots, y_{n+1}$ новую систему с ударными взаимодействиями, которая имеет вид (1)–(2). В новой системе уравнения (1) примут вид

$$\bar{y}_i = H_i\left(y_1^-, \ldots, y_{n-1}^-, y_{n+1}^-\right), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\bar{y}_n = y_n^-, \quad y_{n+1} = H_n\left(y_1^-, \ldots, y_{n-1}^-, y_{n+1}^-\right),$$

уравнения (2), определенные в области $y_{n+1} > 0$, — вид

$$\dot{y}_i = \Phi_i\ (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n+1}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\dot{y}_n = 1, \quad \dot{y}_{n+1} = \Phi_n\ (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n+1}),$$

а ударное взаимодействие происходит на гиперплоскости $y_{n+1} = 0$. В новой системе формула (7) применима для переменной y_n, откуда

$$t^* = t + \frac{2}{(R-1)\Phi_1(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)} x_1 + \ldots,$$

где t — время, соответствующее выходу фазовой траектории из точки M, многоточие означает наличие членов не ниже 2-го порядка по x_1.

На многообразии $x_n = 0$ могут существовать вспомогательные скользящие движения — гладкие кривые, проходящие через каждую точку M^* многообразия $x_1 = 0$, $x_n = 0$, $\ddot{x}_n < 0$. Из любой точки такой кривой выходят фазовые траектории бесконечноударных движений, оканчивающихся в одной и той же точке M^*. Чтобы приближенно отыскать эту кривую, достаточно найти при действии обратных отображений $T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, \ldots$ образы точки M, лежащей вблизи M^*, и ряда точек, лежащих на прямой, проходящей через точки M и $T^{-1}(M)$.

Например, при соответствующих предположениях в случае перемещения с подбрасыванием движение частицы по нормали к плоскости вибротранспортирования описывается, если только $q > 0$, в виде [18, с. 23]

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q} = W \sin t - 1, \quad W > 0.$$

Если при достижении многообразия $q = 0$ значение нормальной составляющей скорости равно $\dot{q} = \dot{q}^- < 0$, то в системе происходят мгновенные ударные взаимодействия по формулам [18, с. 24]

$$\dot{q}^+ = -R\dot{q}^-, \quad 0 < R < 1.$$

По аналогии с примером 1 при замене переменных $x_1 = \dot{q}$, $x_2 = t$, $x_3 = q$ данная система примет вид (1)–(2), где $\Phi_1 = W \sin x_2 - 1$, $\Phi_2 = 1$, $\Phi_3 = x_1$, $H_{11} = -R$, $H_{12} = 0$, $n = 3$. При значениях параметров $R = 0{,}5$, $W = 0{,}5$ все точки многообразия $x_1 = 0$, $x_n = x_3 = 0$ являются локальными особенностями, в силу (3), четвертого типа (так как в этом случае $x_n = q = 0$, $\dot{x}_n = \dot{q} = 0$, $\ddot{x}_n = \ddot{q} = W \sin t - 1 < 0$).

Часть фазовых кривых вспомогательных скользящих движений была получена в этом случае указанным выше способом. Две из них представлены на рис. 1, где точки $(\dot{q}, t = 0)$ и $(\dot{q}, t = 2\pi)$ предполагаются отождествленными. Все фазовые траектории, начинающиеся в точках одной кривой вспо-

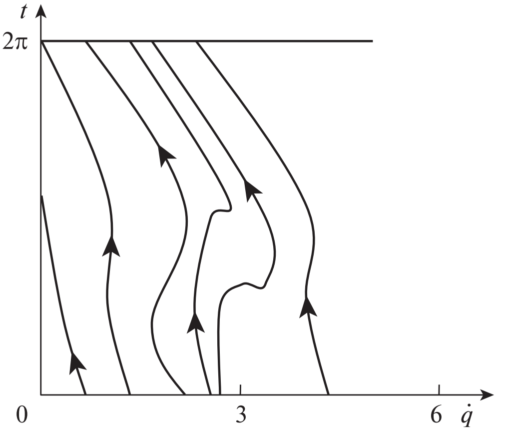


Рис. 1. Вид двух траекторий вспомогательных скользящих движений одной системы виброперемещения при $R = 0{,}5$, $W = 0{,}5$.

могательных скользящих движений, представляют собой бесконечноударные движения, оканчивающиеся в точке пересечения этой кривой с осью t. Стрелками (на кривой) указано направление движения (вдоль кривой) точек пересечения этой кривой с бесконечноударными движениями (при увеличении времени).

4. Особенности качественной структуры фазового пространства в малой окрестности локальной особенности шестого типа

В малой окрестности рассматриваемой локальной особенности M^* шестого типа общие уравнения движения виброударных систем могут быть заменой переменных приведены к следующему виду. Мгновенное ударное взаимодействие происходит на гиперповерхности $x_n = 0$, по достижении которой фазовые переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ меняются скачкообразно (переменная x_n остается равной нулю) согласно (1), а при $x_n > 0$ изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям

$$(8)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= dx_1/dt = x_1\Phi_{11}(x_1, \ldots, x_n) + x_2\Phi_{12}(x_1, \ldots, x_n) + \\ &\qquad + x_n\Phi_{1n}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1, \\ \dot{x}_i &= dx_i/dt = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n &= dx_i/dt = x_1\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_n) + x_n\Phi_{nn}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_n. \end{aligned}$$

Здесь: $\Phi_{n1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$, $\Phi_{12}(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$, $\Phi_2(0, \ldots, 0) < 0$, t – время. Функции Φ_i, $i = 2, \ldots, n-1$, $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{1n}, \Phi_{n1}, \Phi_{nn}$ принадлежат классу $C^m(\bar{\Omega})$, $m \geqslant 5$, где Ω – некоторая малая окрестность точки ($x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) в R^n, а функции $H_{1j} \in C^m(\bar{\Omega}_0)$, $j = 1, \ldots, n-1$, где Ω_0 – некоторая малая окрестность точки ($x_1^- = 0, \ldots, x_{n-1}^- = 0$) на многообразии $x_n = 0$, $x_1 \leqslant 0$. Точка $M^* = (0, \ldots, 0)$ является рассматриваемой здесь локальной особенностью.

В силу (8) в точках многообразия $x_1 = 0$, $x_n = 0$ при $x_2 > 0$ выполняются соотношения $\dot{x}_n = 0$, $\ddot{x}_n = x_2\Phi_{12}(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\Phi_{n1}(0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) > 0$, при $x_2 < 0$ – соотношения $\dot{x}_n = 0$, $\ddot{x}_n < 0$. В точке $M^* = (0, \ldots, 0)$ имеют место соотношения

$$(9)\qquad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = 0, \quad \dddot{x}_n = \Phi_2(0, \ldots, 0)\Phi_{12}(0, \ldots, 0)\Phi_{n1}(0, \ldots, 0) < 0.$$

Поведение фазовых траекторий системы (1), (8) в окрестности точки M^* показано на рис. 2.

В малой окрестности точки M^*, рассматриваемой локальной особенности шестого типа, фазовые кривые системы (8) определяют точечное отображение T_1 многообразия $x_n = 0$, $x_1 \geqslant 0$ в многообразие $x_n = 0$, $x_1 \leqslant 0$. Это происходит в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и в силу (9). Поэтому для точек ($x_1 \geqslant 0$, $x_2, \ldots, x_{n-1}$) из малой окрестности начала координат определено отображение $T = T_2T_1$ многообразия $x_n = 0$, $x_1 \geqslant 0$ в себя.

Используя формулу Тейлора для разложения по степеням t функций $x_i(t) = \varphi_i(t, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $i = \overline{1, n}$, представляющих решение системы (8), про-

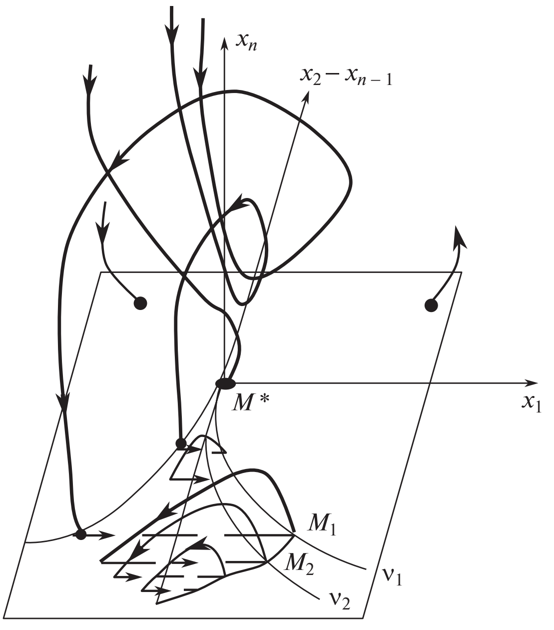


Рис. 2. Здесь сплошными линиями обозначены траектории системы (8), а штриховыми — соединены образы и прообразы фазовых точек при отображении (1).

ходящее при $t = 0$ через точку $(x_1 > 0,\ x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$, можно найти вид отображения T:

$$\begin{gathered}\bar{x}_1 = \Big[x_1 + t\Big(x_2(a_{12} + \ldots) + x_1(a_{11} + \ldots)\Big) + \\ + t^2\left(\frac{a_2 a_{12}}{2} + \ldots\right) + t^3 A_1\Big](-R + \ldots) = g_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, t), \\ \bar{x}_i = x_i + t(a_i + \ldots) + A_i t^2 + \Big[x_1 + t\Big(x_2(a_{12} + \ldots) + x_1(a_{11} + \ldots)\Big) + \\ + t^2\left(\frac{a_2 a_{12}}{2} + \ldots\right) + A_1 t^3\Big](b_i + \ldots) = g_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, t), \quad i = \overline{2, n-1},\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$b_i = H_{1i}(0, \ldots, 0), \qquad 0 < R = -H_{11}(0, \ldots, 0) < 1,$$

а величина $t > 0$ находится из уравнения

$$\begin{gathered}g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) = x_1(1 + \ldots) + t\left[x_1(\tilde{a} + \ldots) + x_2\left(\frac{a_{12}}{2} + \ldots\right)\right] + \\ + t^2\left(\frac{a_{12} a_2}{6} + \ldots\right) + t^3 A_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь: $a_i = \Phi_i(0,\dots,0)$, $a_{ij} = \Phi_{ij}(0,\dots,0)$, $i,j = \overline{1,n}$, $a_2 < 0$, $a_{12} > 0$; $\tilde{a}$ – некоторое число; $0 < \theta_i < t$, $i = \overline{1,n}$; A_j $(j = \overline{1,n})$ – некоторые функции, ограниченные на множестве $\sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leqslant r$, $|t| \leqslant r_1$ (числа $r, r_1 > 0$); $g_i \in C^m$, $i = \overline{1, n-1}$.

Теперь можно найти уравнение для множества ν_1(образ множества $x_n = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \geqslant 0$ при отображении T):

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \left(-\frac{3a_{12}}{8a_2} R + \dots \right) = \bar{x}_2^2 \tilde{\nu}_1(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}) = \nu_1, \tag{12}$$

$$\tilde{\nu}_1 \in C^{m-2}, \quad 0 < R = -H_{11}(0,\dots,0) < 1,$$

где $\bar{x}_2 = x_2(-2 + \dots) \leqslant 0$ при $\sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leqslant r_1$ и r_1 — достаточно мало.

Рассматривая множества

$$\sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leqslant r, \quad 0 < x_1 \leqslant x_2^2 \tilde{\nu}_N(x_2, \dots, x_{n-1}) = \nu_N, \quad x_2 < 0,$$

где $x_1 = \nu_N$ – образ многообразия $x_1 = 0$, $x_n = 0$, $x_2 \geqslant 0$ при действии отображения T^N, можно легко доказать следующее утверждение.

Л е м м а 4.1. *Существуют такие достаточно малые числа r и r^0 $(r,\ r^0 > 0)$, что из каждой точки множества G_r*

$$\sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leqslant r; \quad x_n = 0; \quad x_1 > 0 \quad \text{или} \quad x_1 = 0, \quad x_2 > 0, \tag{13}$$

выходит фазовая траектория системы (1), (8), *представляющая собой бесконечноударное движение, которое оканчивается в точках многообразия*

$$x_n = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leqslant r^0.$$

5. Описание бесконечноударных движений в случае локальной особенности шестого типа

Бесконечноударные движения, о которых говорится в теореме 4.1, допускают описание с помощью гладких дифференциальных уравнений. Их интегральные кривые — *вспомогательные скользящие движения*. (На рис. 1 кривая, проходящая через точки M_1 и M_2, изображает траекторию таких движений).

Для этого можно произвести замену координат

$$x_1 = y_1 y_2^2, \quad x_i = y_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \tag{14}$$

Для любого $y_1^0 > 0$ существуют такие величины $r^* = r^*(y_1^0) > 0$ и $\delta^* = \delta^*(y_1^0) > 0$, что при условиях

$$y_1^0 - \delta^* \leqslant y_1 \leqslant y_1^0 + \delta^*, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leqslant r^*, \quad y_2 < 0 \tag{15}$$

отображение T имеет вид

$$
\begin{gathered}
\bar{y}_1 = \left[G_1(y_1, \tilde{t}) + \tilde{q}_1(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})\right] \left[G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})\right]^{-2} = \\
= y_1 \tilde{g}_1(y_1, \dots, y_{n-1}) = q_1(y_1, \dots, y_{n-1}), \\
\bar{y}_2 = y_2 \left(G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})\right) = \\
= y_2 + y_2 y_1 \tilde{g}_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = q_2(y_1, \dots, y_{n-1}), \\
\bar{y}_i = y_i + y_2 \tilde{q}_i(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) = \\
= y_i + y_2 y_1 \tilde{g}_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = q_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 3, \dots, n-1,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

где $\tilde{t}$ находится из уравнения

$$
G_n(y_1, \tilde{t}) + \tilde{q}_n(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) = q_n(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0,
\tag{17}
$$

$\tilde{t} \in C^{m-2}$ и имеет в силу (17) вид

$$
\begin{gathered}
\tilde{t} = \tilde{t}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \quad \tilde{t}(y_1^0, 0, \dots, 0) = 3(y^0 - 1)(2a_2)^{-1}, \\
y^0 = \sqrt{1 - 8a_2 y_1^0 (3a_{12})^{-1}}.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\tilde{q}_j \in C^{m-2}, \quad j = 1, \dots, n; \quad \tilde{q}_k(y_1, 0, \dots, 0, \tilde{t}) \equiv 0, \quad k = 1, 2, n; \\
\tilde{q}_i(y_1, 0, \dots, 0, \tilde{t}) \equiv a_i \tilde{t}, \quad i = 3, \dots, n-1; \\
G_1 = -R\left(y_1 + a_{12}\tilde{t} + a_2 a_{12} \tilde{t}^2/2\right), \qquad G_2 = 1 + a_2 \tilde{t}, \\
G_n = y_1 + a_{12}\tilde{t}/2 + a_2 a_{12}\tilde{t}^2/6, \\
\tilde{g}_1(0, \dots, 0) = R, \quad \tilde{g}_2(0, \dots, 0) = -2a_2 a_{12}^{-1}, \quad \tilde{g}_i(0, \dots, 0) = -2a_i a_{12}^{-1}.
\end{gathered}
$$

Теорема 5.1. *Существуют и единственны такие функции f_i и существует такая величина $r_1^* > 0$, что при всех $0 < r \leqslant r_1^*$ для любой точки M множества D^r, задаваемого условиями*

$$
0 < x_1, \quad x_1 = a x_2^2, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leqslant r - a, \quad 0 < a \leqslant r, \quad x_n = 0,
\tag{19}
$$

справедливо следующее:

все точки $M_j = T^j(M)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, лежат на проходящей через M интегральной кривой системы дифференциальных уравнений

$$
\frac{dy_i}{dy_1} = f_i\left(y_1, \dots, y_{n-1}\right), \quad i = 2, \dots, n-1,
\tag{20}
$$

где

$$
f_i = y_2 \tilde{f}_i \in C^{m-4}(\bar{D}_1^r),
$$

D_1^r – *множество, задаваемое неравенствами*

$$\sum_{i=1}^{n-1} |y_i| \leqslant r, \quad y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \leqslant 0. \tag{21}$$

Пусть E^r обозначает множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leqslant r, \quad x_n = 0, \quad 0 < x_1 \leqslant \nu_1(x_2, \dots, x_{n-1}), \quad x_2 < 0, \tag{22}$$

где функция ν_1 определяется в (12).

Теорема 5.2. *Существуют и единственны такие функции f_i и существует такая величина $r_2^* > 0$, что для любой точки M множества $E^{r_2^*}$, задаваемого условиями (22) при $r = r_2^*$, справедливо следующее:*

все точки $M_j = T^j(M)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, лежат на проходящей через M интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (20), где $f_i \in \in C^{m-4}$, $f_i = y_2 \tilde{f}_i$, $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$.

Доказательство теорем см. в Приложении.

6. Применение полученного описания локальной особенности шестого типа

6.1. Нахождение предельных значений бесконечноударных движений

В силу (П.10) система (20) дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dy_i}{dy_1} = f_i(y_1, \dots, y_{n-1}) =$$

$$= y_2\Big(- 2a_i/\big[a_{12}(1-R)\big] + \dots\Big), \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Поэтому предельные значения бесконечноударных движений, начинающихся в точке $(y_1, \dots, y_{n-1})$, равны

$$y_i^* = y_i + \int\limits_{y_1}^{0} f_i(y_1, \dots, y_{n-1}) dy_1 =$$

$$= y_i + y_1 y_2 \left(\frac{2a_i}{a_{12}(1-R)} + \dots \right), \quad i = \overline{2, n-1},$$

многоточие в формулах означает наличие членов более высокого порядка малости по $y_2 \dots, y_{n-1}$ относительно рядом стоящих.

Время t^* окончания бесконечноударного движения, в силу рассуждений раздела 3.1, имеет вид

$$t^* = t + y_1 y_2 \left(\frac{2}{a_{12}(1-R)} + \dots \right).$$

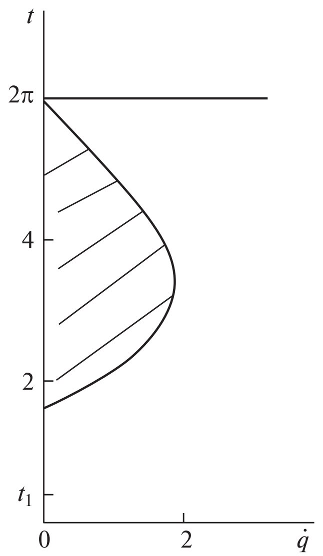


Рис. 3. Область бесконечноударных движений (заштрихована) одной системы виброперемещения.

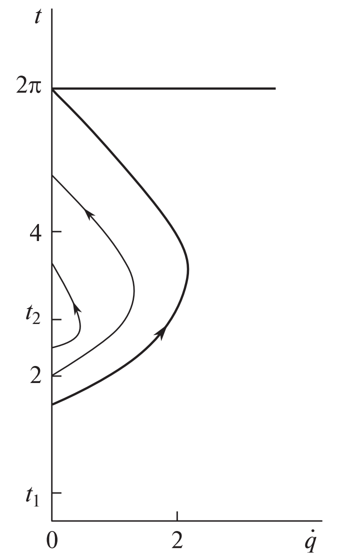


Рис. 4. Вид трех траекторий вспомогательных скользящих движений одной системы виброперемещения.

6.2. Численное исследование бесконечноударных движений

Здесь на примере конкретной задачи из раздела 3.2 показаны при $R = 0{,}5$, $W = 3$:

область бесконечноударных движений [14] (рис. 3), в которой реализуются указанные ниже траектории;

вспомогательные скользящие движения (рис. 4), включая траекторию, проходящую через точку $(\dot q = 0, t_1 = \arcsin(W^{-1}))$ – локальную особенность 5-го типа.

Стрелки на рис. 4 имеют тот же самый смысл, что и на рис. 1. Точка $(\dot q = 0, t_2), t_2 = \pi - t_1$, представляет собой локальную особенность 6-го типа, точки $(\dot q = 0, t_2 < t \leqslant 2\pi)$ – локальные особенности 4-го типа.

7. Заключение

В результате проведенного исследования предлагается описание движений виброударной системы наиболее общего вида, состоящих из ударных движений (разностные уравнения) и безударных движений (дифференциальные уравнения). Такой синтез движений разных типов представляет основную трудность для описания движений виброударных систем. Эти разнотипные движения чередуются бесчисленное число раз, а описанный здесь результат таких чередований — гладкие дифференциальные уравнения (хотя даже простейшие виброударные системы до сих пор не имеют полного описания).

Такое описание необходимо для *правильного и грамотного* вычисления протекающих процессов в виброударных системах, в частности бесконечноударных движений, для подсчета всевозможных характеристик движений в указанных системах (например, как это было сделано в [20] при расчете средней скорости виброперемещения, включая режимы, имеющие участки бесконечноударных движений). А для этого требуется знание момента (и времени) окончания бесконечноударных движений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 5.1. Далее для любой функции $\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1})$ используются обозначения

$$\varphi=\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1}),\quad \varphi(M_1)=\varphi(\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1}),$$

где

$$M_1=T(M)=(\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1}),\quad M=(y_1\geqslant 0,y_2,\ldots,y_{n-1}).$$

Для нахождения f_i, $i=2,\ldots,n-1$, составляются функциональные уравнения точно так же, как и при доказательстве теоремы в [13]. В данном случае соответствующие функциональные уравнения имеют вид

$$\text{(П.1)}\qquad \frac{\partial q_i}{\partial y_1}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\partial q_i}{\partial y_j}f_j=f_i(M_1)\left[\frac{\partial q_1}{\partial y_1}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\partial q_1}{\partial y_j}f_j\right],\quad i=2,\ldots,n-1,$$

а отображение T задается формулами (15). Уравнения (П.1) можно переписать в виде

$$\tilde q_2y_2+y_2y_1\frac{\partial\tilde q_2}{\partial y_1}+\sum_{j=3}^{n-1}y_2y_1\frac{\partial\tilde q_2}{\partial y_j}f_j+\left(1+y_1\tilde q_2+y_1y_2\frac{\partial\tilde q_2}{\partial y_2}\right)f_2=$$

$$=f_2(M_1)\left[\tilde q_1+y_1\frac{\partial\tilde q_1}{\partial y_1}+\sum_{j=2}^{n-1}y_1\frac{\partial\tilde q_1}{\partial y_j}f_j\right],$$

$$\text{(П.2)}\qquad \tilde q_iy_2+y_1y_2\frac{\partial\tilde q_i}{\partial y_1}+\sum_{j=3,j\neq i}^{n-1}y_2y_1\frac{\partial\tilde q_i}{\partial y_j}f_j+$$

$$+\left(y_1\tilde q_i+y_1y_2\frac{\partial\tilde q_i}{\partial y_2}\right)f_2+\left(1+y_2y_1\frac{\partial\tilde q_i}{\partial y_i}\right)f_i=$$

$$=f_i(M_1)\left[\tilde q_1+y_1\frac{\partial\tilde q_1}{\partial y_1}+\sum_{j=2}^{n-1}y_1\frac{\partial\tilde q_1}{\partial y_j}f_j\right],\quad i=3,\ldots,n-1.$$

Решение уравнений (П.2) можно искать в такой форме:

$$\text{(П.3)}\qquad f_i=y_2\tilde f_i,\quad i=2,\ldots,n-1.$$

Тогда (П.2) примут вид

$$\tilde{q}_2 + y_1\frac{\partial\tilde{q}_2}{\partial y_1} + \sum_{j=3}^{n-1} y_1 y_2 \frac{\partial\tilde{q}_2}{\partial y_j}\tilde{f}_j + \left(1 + y_1\tilde{q}_2 + y_1 y_2\frac{\partial\tilde{q}_2}{\partial y_2}\right)\tilde{f}_2 =$$
$$= \tilde{f}_2(M_1)(1 + y_1\tilde{q}_2)\left[\tilde{q}_1 + y_1\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} y_1 y_2\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial y_j}\tilde{f}_j\right],$$

(П.4)
$$\tilde{q}_i + y_1\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial y_1} + \sum_{j=3,\, j\neq i}^{n-1} y_1 y_2\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial y_j}\tilde{f}_j +$$
$$+ \left(y_1\tilde{q}_i + y_1 y_2\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial y_2}\right)\tilde{f}_2 + \left(1 + y_2 y_1\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial y_i}\right)\tilde{f}_i =$$
$$= \tilde{f}_i(M_1)(1 + y_1\tilde{q}_2)\left[\tilde{q}_1 + y_1\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} y_1 y_2\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial y_j}\tilde{f}_j\right], \quad i = 3, \ldots, n-1.$$

Уравнения (П.4) удобнее записать в виде

(П.5)
$$\psi_{i0} + \tilde{f}_i + \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{ij}\tilde{f}_j = \tilde{f}_i(M_1)\left[\psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{1j}\tilde{f}_j\right], \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

где

$$\psi_{10}(y_1 = 0, \ldots, y_{n-1} = 0) = R, \quad \psi_{k0}(0, \ldots, 0) = -2a_k a_{12}^{-1}, \quad k = 2, \ldots, n-1;$$
$$\psi_{ij}(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = 2, \ldots, n-1;$$
$$\psi_{ij} \in C^{m-4}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Теперь для нахождения при достаточно малых y_i, $i = 1, \ldots, n-1$, решения уравнений (П.5) можно указать следующий итерационный процесс:

(П.6)
$$\tilde{f}_i^{s+1} = -\psi_{i0} - \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{ij}\tilde{f}_j^s + \tilde{f}_i^s(M_1)\left[\psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{1j}\tilde{f}_j^s\right],$$
$$i = 2, \ldots, n-1, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

а) Сходимость процесса (П.6). Пусть норма непрерывных в D_1^r векторных функций $\tilde{f}^s = (\tilde{f}_2^s, \ldots, \tilde{f}_{n-1}^s)$ равна

(П.7)
$$\|\tilde{f}^s\| = \max_{M\in D_1^r}\left\{\sum_{i=2}^{n-1}|\tilde{f}_i^s|\right\},$$

где D_1^r – множество, задаваемое неравенствами (21); r – некоторая величина, подлежащая определению; $r \leqslant r^0$; r^0 – величина, определяемая в лемме 4.1.

Тогда для двух серий непрерывных векторных функций $\tilde{f}^s = (\tilde{f}_2^s, \dots, \tilde{f}_{n-1}^s)$ и $\tilde{h}^s = (\tilde{h}_2^s, \dots, \tilde{h}_{n-1}^s)$, получаемых из (П.6), имеет место

$$\tilde{f}_i^{s+1} - \tilde{h}_i^{s+1} = -\sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij}(\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_j^s) + \psi_{10}\left[\tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1)\right] +$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j}\left[\tilde{f}_i^s(M_1)\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_i^s(M_1)\tilde{h}_j^s + \tilde{h}_i^s(M_1)\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_i^s(M_1)\tilde{f}_j^s\right] =$$

$$= \sum_{j=2}^{n-1}\Big(-\psi_{ij} + \tilde{h}_i^s(M_1)\psi_{1j}\Big)(\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_j^s) +$$

$$+\left[\psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{1j}\tilde{f}_j^s\right]\Big(\tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1)\Big).$$

Отсюда,

$$\sum_{i=2}^{n-1}\left|\tilde{f}_i^{s+1} - \tilde{h}_i^{s+1}\right| \leqslant \sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\left|-\psi_{ij} + \tilde{h}_i^s(M_1)\psi_{1j}\right|\left|\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_j^s\right| +$$

$$+\left|\psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{1j}\tilde{f}_j^s\right|\sum_{i=2}^{n-1}\left|\tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1)\right|.$$

Поэтому

$$\left\|\tilde{f}^{s+1} - \tilde{h}^{s+1}\right\| \leqslant \max_{M\in D_1^r}\left\{\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1}\left|\psi_{ji} - \tilde{h}_j^s(M_1)\psi_{1i}\right|\left|\tilde{f}_i^s - \tilde{h}_i^s\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1}\psi_{1j}\tilde{f}_j^s\right|\sum_{i=2}^{n-1}\left|\tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1)\right|\right\}. \tag{П.8}$$

Используя (16), можно установить, что $M_1 = T(M) \in D_1^r$, если $M \in D_1^r$. Поэтому для любой непрерывной функции $\varphi(y_1, \dots, y_{n-1})$

$$\max_{M\in D_1^r}|\varphi(M_1)| \leqslant \max_{M\in D_1^r}|\varphi(M)|. \tag{П.9}$$

Если $\tilde{f}_i,\ \tilde{f}_i \in C^0(\bar{D}_1^r),\ i = 2, \dots, n-1$, удовлетворяют уравнениям (П.6), то справедливо

$$\tilde{f}_i = -2a_i[a_{12}(R-1)]^{-1} + \hat{f}_i,$$

где

$$\hat{f}_i(y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0) = 0.$$

Поэтому можно считать, что

$$\text{(П.10)}\qquad \tilde{f}_i^s = 2a_i[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_i^s, \quad \tilde{h}_i^s = 2a_i[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{h}_i^s,$$
$$i = 2,\dots,n-1, \quad s = 0,1,2,\dots,$$

где $\hat{f}_i^s$, $\hat{h}_i^s$ – непрерывные функции и $\hat{f}_i^s(y_1 = 0,\dots,y_{n-1} = 0) = \hat{h}_i^s(y_1 = 0,\dots$ $\dots, y_{n-1} = 0) = 0$.

Пусть при $M \in D_1^r$ имеют место неравенства

$$\text{(П.11)}\qquad |\hat{f}_i^s| < K, \quad |\hat{h}_i^s| < K, \quad i = 2,\dots,n-1,$$

где K – некоторая положительная величина, $s = 0$. Тогда, используя вытекающие из (П.6) равенства

$$\hat{f}_i^{s+1} = -\psi_{i0} + \psi_{i0}\Big|_{y_j=0, j=1,\dots,n-1} - \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij}\left(2a_j[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_j^s\right) +$$
$$+ \left(2a_i[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_i^s(M_1)\right)\Bigg[\psi_{10} - \psi_{10}|_{y_j=0,j=1,\dots,n-1} +$$
$$+ \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j}\left(2a_j[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_j^s\right)\Bigg] + R\hat{f}_i^s(M_1),$$
$$i = 2,\dots,n-1, \quad s = 0,1,2,\dots,$$

и уменьшая (при необходимости) в (21) величину r, можно добиться выполнения (П.11) во всем множестве D_1^r при любых s.

Возвращаясь теперь к (П.8), можно с помощью (П.9)–(П.11) так подобрать множество $D_1^{r^{**}} = D_1^{r^{**}}(\tilde{f}^0, \tilde{h}^0)$ (за счет уменьшения в (21) величины r), что в норме (П.7)

$$\text{(П.12)}\qquad \left\|\tilde{f}^{s+1} - \tilde{h}^{s+1}\right\| \leqslant 0{,}5(1+R)\left\|\tilde{f}^s - \tilde{h}^s\right\|, \quad s = 0,1,2,\dots.$$

Неравенство (П.12) гарантирует существование (в силу [19, с. 103] полноты пространства непрерывных в $\bar{D}_1^r$ функций) решения $\tilde{f}_i$, $i = 2,\dots,n-1$, уравнений (П.4) в классе C^0 (непрерывных функций) в замкнутом множестве $D_1^{r^{**}}(\tilde{f}^0, \tilde{h}^0)$.

б) Гладкость решения. Поскольку отображение (16) имеет вид (П.1) из [13], а роль множества D_r в формулировке и доказательстве теоремы в [13] может играть множество D_1^r, задаваемое неравенствами (21) данной работы и обладающее аналогичным свойством ($T(D_1^r) \subset D_1^r$), то имеют место установленные при доказательстве теоремы [13] единственность решения уравнений (П.1) данной работы и следующее свойство

$$f_i \in C^{m-4}(\bar{D}_1^{r_*}), \quad i = 2,\dots,n-1,$$

при соответствующем значении r_*, где в силу единственности и (П.3) $f_i = y_2\tilde{f}_i$.

Поэтому значение $r_1^* = \min\{r^*, r^{**}, r_*\}$ удовлетворяет заключению теоремы.

Теорема 5.1 доказана.

Доказательство теоремы 5.2. Как было сказано ранее, для любого $y_1^0 > 0$ существуют такие величины $r^* = r^*(y_1^0)$, $\delta^* = \delta^*(y_1^0)$, что при условиях (15) отображение T принимает вид (16), (17). Составляя, как и ранее [13], функциональные уравнения для нахождения правых частей дифференциальных уравнений (20), можно прийти к (П.1). По теореме 5.1 решение этих уравнений при $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in D_1^{r_1^*}$ существует и имеет вид $f_i = y_2\tilde{f}_i \in C^{m-4}$, $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$, $i = 2, \ldots, n-1$, причем отображение T принимает вид (16).

Из (П.1) при $f_i = y_2\tilde{f}_i$, $i = 2, \ldots, n-1$, следует

$$\sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{\partial q_i}{\partial y_j} - \bar{y}_2 \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_j} \right) \tilde{f}_j = y_2^{-1}\, \bar{y}_2 \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_1} - y_2^{-1} \frac{\partial q_i}{\partial y_1}, \quad i = 2, \ldots, n-1. \tag{П.13}$$

Отсюда, используя (16), можно получить

$$\begin{gathered}
\sum_{j=2}^{n-1} \left[\frac{\partial q_2}{\partial y_j} - y_2 \Big(G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t}) \Big) \tilde{f}_2(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_j} \right] \tilde{f}_j = \\
= \Big(G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t}) \Big) \tilde{f}_2(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_1} - \\
- \left(\frac{\partial G_2(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\, \tilde{t}'_{y_1} + \frac{\partial \tilde{q}_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{q}_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\, \tilde{t}'_{y_1} \right), \\
\sum_{j=2}^{n-1} \left[\frac{\partial q_i}{\partial y_j} - y_2 \left(G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t}) \right) \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_j} \right] \tilde{f}_j = \\
= \Big(G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t}) \Big) \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_1} - \\
- \left(\frac{\partial \tilde{q}_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{q}_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\, \tilde{t}'_{y_1} \right), \quad i = 3, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{П.14}$$

На (П.14), т.е. и на (П.13), можно смотреть как на линейную систему относительно неизвестных $\tilde{f}_i$, $i = 2, \ldots, n-1$, при условии, что величины $\tilde{f}_i(M_1)$, $i = 2, \ldots, n-1$, известны.

В силу (16)–(18) в точке $M^0 = (y_1 = y_1^0, y_2 = 0, \ldots, y_{n-1} = 0)$ соответствующие производные имеют значения

$$\left.\frac{\partial q_2}{\partial y_2}\right|_{M^0} = 1 + a_2 \tilde{t}\Big|_{M^0} = (3y^0 - 1)/2, \quad \left.\frac{\partial q_2}{\partial y_j}\right|_{M^0} = 0, \quad j = 3, \ldots, n-1,$$

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial y_i}\right|_{M^0} = 1, \quad \left.\frac{\partial q_i}{\partial y_j}\right|_{M^0} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, i-1, \quad i+1, i+2, \dots, n-1,$$

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial y_2}\right|_{M^0} = a_i \tilde{t}\Big|_{M^0} = 3a_i(y^0 - 1)(2a_2)^{-1}, \quad i = 3, \dots, n-1,$$

где

$$y^0 = \sqrt{1 - 8a_2 y_1^0 (3a_{12})^{-1}} > 1.$$

Отсюда, главный определитель Δ системы (П.13), который является непрерывной функцией переменных $y_1, \dots, y_{n-1}$, в точке M^0 имеет значение

$$\Delta\Big|_{M^0} = (3y^0 - 1)/2 \neq 0.$$

Поэтому при достаточно малых r^* и δ^* для всех значений переменных $y_1, \dots, y_{n-1}$, удовлетворяющих неравенствам (15), имеет место неравенство

$$\Delta \neq 0, \tag{П.15}$$

т.е. из системы (П.13) можно однозначно найти $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$, $i = 2, \dots, n-1$, зная $\tilde{f}_i(M_1) \in C^{m-5}$.

С другой стороны, согласно сказанному в разделе 4, существует такое малое $\tilde{r}^* > 0$, что при

$$0 < x_1 \leqslant \tilde{r}^* x_2^2, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leqslant \tilde{r}^*$$

отображение T в координатах (14) имеет вид (16). Отсюда главный определитель Δ системы (П.13) в точке $M_0^0 = (y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_{n-1} = 0)$ равен $\Delta\Big|_{M_0^0} = 1 \neq 0$.

Поэтому при достаточно малых $\tilde{r}^{**}$ и $\tilde{\delta}^*$ для всех значений переменных $y_1, \dots, y_{n-1}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant y_1 \leqslant \tilde{\delta}^*, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leqslant \tilde{r}^{**}, \quad y_2 \leqslant 0,$$

имеет место неравенство (П.15).

В силу компактности отрезка $A = \left[\tilde{\delta}^*,\ -3a_{12}R(4a_2)^{-1}\right]$ найдется конечное число точек y_1^0 этого отрезка таких, что совокупность интервалов $(y_1^0 - \delta^*(y_1^0), y_1^0 + \delta^*(y_1^0))$, определяемых условиями (П.15) и (15), образует конечное подпокрытие отрезка A. Поэтому существуют такое малое значение $r_1^{**} > 0$, минимальное из значений $r^* = r^*(y_1^0)$ из (15) и значения $\tilde{r}^{**}$, что при выполнении условий

$$0 \leqslant y_1 \leqslant -3a_{12}R(4a_2)^{-1}, \quad y_2 \leqslant 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leqslant r_1^{**} \tag{П.16}$$

имеет место неравенство (П.15).

Имеет место следующее.

Утверждение П.1. Существует такое целое $P > 0$ и такое малое $r_2^* > 0$, что образ $T^P(E^{r_2^*})$ множества $E^{r_2^*}$, задаваемого неравенствами (22) *при $r = r_2^*$, лежит внутри множества $D_1^{r_1^*}$.*

Здесь величина r_1^* определяется в теореме 5.1, множество D_1^r задается условиями (21), $r_2^* \leqslant r_1^{**}$, причем при $\sum\limits_{i=2}^{n-1} |y_i| \leqslant r_2^*$, $y_2 \leqslant 0$ имеет место

$$\tilde{\nu}_1(y_2, \ldots, y_{n-1}) \leqslant -3a_{12}R(4a_2)^{-1}.$$

При этом, все образы $T(E^{r_2^*})$, $T^2(E^{r_2^*}), \ldots, T^P(E^{r_2^*})$ множества $E^{r_2^*}$ и само множество $D_1^{r_1^*}$ лежат внутри множества (П.16).

Тогда в силу справедливости (П.15) и теоремы 5.1 в любой точке множества $E^{r_2^*}$ можно найти из системы (П.13) значения функций $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$, $i = 2, \ldots, n-1$.

Теперь можно доказать, что функции $f_i = y_2\tilde{f}_i$, единственное решение уравнений (П.1), являются более гладкими (единственность функций f_i устанавливается от противного с использованием утверждения П.1 и теоремы 5.1). Точнее, используя соотношения $f_i = y_2\tilde{f}_i$, можно повторить проведенные выше рассуждения (но уже относительно функций f_i, $i = 2, \ldots, n-1$) и получить, что при достаточно малом $r = r_2^*$ в любой точке множества $E^{r_2^*}$ можно найти из системы (П.1) значения функций $f_i \in C^{m-4}$.

Теорема 5.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания. Инженерн. сб. М.: АН СССР, 1953. Т. 16. С. 13–48.
2. *Блехман И.И.* Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
3. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов: учебник / В.К. Асташев, В.Л. Крупенин; Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова. М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016.
4. *Бурд И.Ш., Крупенин В.Л.* Усреднение в квазиконсервативных системах: маятниковые и виброударные системы. Библиотека ВНТР. М.: Белый ветер, 2016.
5. *Блехман И.И., Блехман Л.И., Васильков В.Б. и др.* Об износе оборудования в усовиях вибрации и ударных нагрузок // Вестн. научн.-техн. развития. 2018. № 11 (135). С. 3–14.
6. *Вульфсон И.И.* Устранение возникающих из-за зазоров виброударных режимов при учете характеристик электродвигателя // Вестн. научн.-техн. развития. 2019. № 2 (138). С. 9–14.
7. *Маркеев А.П., Сухоручкин Д.А.* Об устойчивости поступательного движения твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость // ДАН. 2016. Т. 466. № 5. С. 550–554.
8. Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем. XVIII Междунар. симпоз. посв. 100-летию со дня рождения д-ра техн. наук А.Е. Кобринского / Под ред. В.К. Асташева, В.Л. Крупенина, Г.Я. Пановко, К.Б. Саламандра. М. 2015. Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. 332 с.

9. *Мак-Миллан В.А.* Динамика твердого тела: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951.
10. *Фейгин М.И.* Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями // Прикл. математика и механика. 1967. Вып. 3. С. 533–536.
11. *Нагаев Р.Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985.
12. *Горбиков С.П., Неймарк Ю.И.* Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями / Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвуз. сб. Горький, 1981. С. 59– 64.
13. *Горбиков С.П.* Дифференциальные уравнения, определяемые динамическими системами с ударными взаимодействиями на границе области существования бесконечноударных движений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 18–23.
14. *Горбиков С.П.* Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 3. С. 23–26.
15. *Горбиков С.П.* Локальные особенности динамических систем с ударными взаимодействиями // Мат. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 4. С. 531–542.
16. *Горбиков С.П.* Топологическая эквивалентность одного типа локальных особенностей динамических систем с ударными взаимодействиями // Мат. заметки. 2001. Т. 70. Вып. 2. С. 181–194.
17. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
18. *Нагаев Р.Ф.* Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978.
19. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
20. *Горбиков С.П., Неймарк Ю.И.* Результаты расчета средней скорости вибротранспортирования // Машиноведение АН СССР. 1987. № 4. С. 39–42.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 10.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. С.Ю. ГОРОДЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (gorosyu@gmail.com)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ДИАГОНАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА DIRECT НА ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Метод DIRECT решает задачи липшицевой глобальной оптимизации в гиперинтервале при неограниченном диапазоне значений констант Липшица. Предложено расширение принципов DIRECT на задачи с многоэкстремальными ограничениями при использовании в гиперинтервалах сразу двух измерений функций на концах выбираемых главных диагоналей. Представлены вычислительные иллюстрации, включая решение задачи с разрывами. Выполнен анализ сходимости.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, липшицевы функции, метод DIRECT, многоэкстремальные ограничения, функции с разрывами, двухточечная диагональная схема, вычислительные эксперименты.

DOI: 10.31857/S0005231020080073

1. Введение

Статья продолжает исследования, начатые в [1], и посвящена разработке специального DIRECT-подобного метода условной глобальной оптимизации для задач

$$Q^* = \min Q(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

$$X = \{x \in D = [a,b] \subset \mathbb{R}^N : g(x) \leqslant 0\}, \tag{2}$$

где векторы a и b конечны, целевая функция Q и функция ограничения g могут сложно зависеть от x и считаются многоэкстремальными. Конкретные требования на них будут указаны далее, но считаем, что минимум в (1)–(2) существует в обычном или расширенном смысле согласно [1], где под расширенной понимается трактовка (1)–(2) при $X = \varnothing$ как задачи минимизации невязки $g(x)$ на D. Если ограничений неравенств в (2) несколько, то в (1)–(2) они заменяются одним ограничением с функцией вида $g(x) = \max\{g_1(x), \ldots, g_m(x)\}$. Предполагается алгоритмическая форма задания функций и существенность времени их вычисления. Это делает оправданным разработку для (1)–(2) методов, основанных на планировании новых точек испытаний, исходя из принятых требований оптимальности к их размещению.

Потребность в таких методах возникает в различных областях, включая разработку систем управления. Действительно, формальное применение современных методов синтеза оптимальных регуляторов по заданным (как правило, линейным) целевым выходам (например, [2–6]) могут еще не полностью удовлетворять конструктора-разработчика, так как его еще часто интересует уменьшение или ограничение содержательных нелинейных показателей качества (таких как время окончательного вхождения откликов нелинейной системы в желаемую окрестность входного задающего сигнала, величины

[1] Работа выполнена при поддержке научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего”.

перерегулирований и т.п.). Оптимальная настройка таких критериев может быть выполнена численно в форме решения задач вида (1)–(2) по оставшимся свободным параметрам первичного алгоритма синтеза регулятора. Заметим, что нелинейные критерии в таких задачах часто имеют разрывы либо за счет эффекта бифуркаций, либо из-за самого вида критерия (например, разрывы характерны для указанного выше критерия "времени вхождения"). В [7] использование прямой численной оптимизации продемонстрировано на модельном примере, причем методов локальной оптимизации оказалось недостаточно.

Применение к таким задачам различных методов липшицевой глобальной оптимизации, использующих оценки констант Липшица по результатам измерений функций (не претендуя на общность, укажем лишь несколько методов из [8–12]), вызовет неограниченный рост этих оценок при появлении разрывов в окрестностях глобальных минимумов. Это приведет к вырождению методов в почти равномерный перебор.

Задачами указанного выше типа еще в период 1978–90 гг. занималась группа в отделе Ю.И. Неймарка в НИИ Прикладной математики и кибернетики при ГГУ (ныне ННГУ) им. Н.И. Лобачевского. Это были крупные хоздоговорные работы по заказу ряда предприятий. Для решения задач вида (1)–(2), связанных с оптимальной настройкой следящих систем по 4–5 основным параметрам, применялись методы условной глобальной оптимизации с адаптивными стохастическими моделями, разработанные в [13] для некоторых подклассов кусочно-непрерывных функций. Методы основывались на общей концепции, первоначально предложенной Ю.И. Неймарком в [14, гл. VIII, § 7], первый вариант реализации которой представлен в [15]. Методы обладали сходимостью за счет всюду плотного в пределе размещения точек испытаний. Однако в [13] для этих методов были получены аналитические оценки относительной плотности размещения испытаний, доказывающие существенную неравномерность такого размещения. Недостатком этих методов являлась невозможность их точной вычислительной реализации, а наличие лишь приближенной.

Методы с несколько похожим поведением могут быть получены на основе совершенно другого подхода, лежащего в основе оригинального метода DIRECT (от **Di**viding **Rect**angles), предложенного в [16] 1993 г. Этот метод, хотя и относится к липшицевой оптимизации, в действительности применим и к задачам с наличием разрывов. Исходная версия метода построена в [16] для задач на гиперинтервале D без функциональных ограничений

$$f^* = f(x^*) = \min f(x), \quad x \in D = [a, b] \subset \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Целевая функция предполагается липшицевой с константой $L^f = L$. Однако значение L считается неизвестным, не оценивается и может быть любым числом из диапазона $[0, \infty)$. DIRECT принципиально отличается от других методов липшицевой оптимизации именно отказом от возможного оценивания и использования конкретных значений константы L. Он относится к компонентным методам, использует адаптивное разбиение начального множества D на компоненты-гиперинтервалы $D_i = [a^i, b^i]$, в центральных точках c^i которых проводятся измерения функции f.

Кратко поясним принцип работы. При известном значении константы Липшица $L^f = L$ легко вычислить нижнюю оценку значений f для каждого гиперинтервала с центром в c^i

$$f_i^-(L) = f^-(L, D_i) = f_i - L\, d_i/2, \quad f_i = f(c^i),$$

где $d_i = \mathrm{diam}(D_i) = \|b^i - a^i\|$. В этом случае наиболее приоритетным для новых измерений следует считать гиперинтервал D_t с наименьшим значением нижней оценки функции. Поскольку в методе DIRECT значение $L^f = L$ неизвестно, он использует иное правило отбора делимых гиперинтервалов D_t. Оно основано на двух принципах. Первый — недоминируемость

$$(4) \qquad \exists L \in [0, \infty) : f^-(L, D_t) = \min\Big\{f^-(L, D_i) : i = 1, \ldots, M_k\Big\},$$

где M_k — количество гиперинтервалов после k итераций, т.е. недоминируемым является гиперинтервал, являющийся "лучшим" хотя бы при одном из значений L. Второй — достаточная улучшаемость достигнутого минимального значения целевой функции. Это значит, что хотя бы при некоторых значениях L из (4) и заданных $\eta_k > 0$ должно выполняться условие

$$(5) \qquad f^-(L, D_t) \leqslant f_*^k - \eta_k, \quad f_*^k = \min\Big\{f(x^i) : i = 1, \ldots, n_k\Big\},$$

где x^i — точки выполненных измерений, n_k — их число (в оригинальном DIRECT всегда $n_k = M_k$).

Гиперинтервалы, удовлетворяющие условиям (4) и (5), называют потенциально оптимальными. Именно такие гиперинтервалы DIRECT выделяет для деления на очередной итерации. В [16] найдено простое геометрическое представление, позволяющее легко находить множество гиперинтервалов D_t, удовлетворяющих (4)–(5). Если сопоставить гиперинтервалам D_i точки на плоскости $(d/2, f)$ с координатами $(d_i/2, f_i)$, где $d_i = \|b^i - a^i\|$, $f_i = f(c^i)$, и добавить к ним точку $(0, f_*^k - \eta_k)$, то множеству точек $(d_t/2, f_t)$ потенциально оптимальных гиперинтервалов D_t соответствуют вершины правой-нижней части границы выпуклой линейной оболочки множества всех точек $(d_i/2, f_i)$, включая дополнительную. Для вычислительно эффективного выделения $(d_t/2, f_t)$ и, следовательно, нахождения делимых гиперинтервалов D_t используют правило Грэхема [17].

Для дробления выбранных гиперинтервалов метод применяет схему их деления на три равные части по большему ребру (см. описание в [18]). С использованием центральной схемы измерений при делении одного D_t достаточно провести только два новых измерения $f(x)$ в центрах крайних из трех новых гиперинтервалов, поскольку в центре среднего результат уже известен.

Заметим, что сама схема деления на три в рекурсивной реализации использовалась в глобальной оптимизации для задач (1)–(2) и (3) значительно раньше, еще в программной разработке Compromiss Solver ВЦ АН СССР 80-х гг. XX в. (предтече метода деления на три является метод деления на два, который был опубликован в [19]).

К настоящему времени известны различные обобщения DIRECT. Обширная библиография приведена в [8]. Укажем на некоторые. Оригинальный DIRECT относительно медленно уточняет найденные оценки решения, в [20] предложена достаточно удачная локально-ориентированная модификация. В [21] построен, а также описан в [8] более эффективный вариант метода [16] для задач (3), работающий по диагональной схеме деления на три (в каждом гиперинтервале проводится не одно, а два измерения на концах специально ориентируемых главных диагоналей, образующих вместе эффективную диагональную кривую, построение которой было ранее предложено в [22]). В [21] кроме двухточечной диагональной схемы измерений применен также специальный механизм балансировки локальной и глобальной стратегий поиска за счет искусственных усечений множеств потенциально оптимальных гиперинтервалов, что улучшило сходимость к глобальному решению. В [23] получено нетривиальное обобщение метода DIRECT на задачи с вычислимой липшицевой производной, константа Липшица которой неизвестна и может изменяться на промежутке $[0, \infty)$; метод построен для задач (3) с размерностью $N = 1$. В [24] метод из [23] распространен на многомерные задачи с использованием специальной нецентральной одноточечной схемы разбиения множества D в задаче (3). Также в 2001 г. получен концептуально близкий к DIRECT метод для задач (1)–(2) с несколькими ограничениями, второе издание 2009 г. этой публикации приведено в [18]. Представленный в [18] метод в отличие от [1] использует специально сконструированный на случай наличия ограничений подход к выделению делимых гиперинтервалов. Принцип их выделения существенно отличается от оригинального DIRECT.

Заметный интерес к DIRECT-подобным методам привел к проведению в [25] представительного экспериментального сравнительного исследования нескольких методов [16, 20, 21] этого семейства в сопоставлении с группой эвристических методов, включая эволюционно-генетические алгоритмы. Тестирование проведено на задачах без функциональных ограничений размерности $N = 5$, представляющих простой и сложный классы из 100 тестовых функций GKLS генератора (его описание приведено, например, в [8]). Результаты, представленные в [25], показали, что при достаточно большом числе измерений n_k решение с наибольшей надежностью обеспечивается именно диагональной реализацией DIRECT, представленной в [21], и особенно на классе сложных тестовых задач. Это актуализирует разработку диагональной версии одноточечного варианта метода [1] в задачах с функциональными ограничениями.

В [1] предложено два подхода к обобщению метода DIRECT на задачи с ограничениями. Оба существенно отличаются от представленного в [18]. Первый подход сводит исходную задачу с ограничениями к последовательности задач без ограничений с перестраиваемой целевой функцией. Второй основан на непосредственном распространении принципов построения DIRECT на задачи с ограничениями. В обоих подходах в [1] применена схема деления на три с измерением функций в центральных точках (далее измерения функций задачи называем испытанием). Данная статья обобщает второй из подходов, предложенных в [1], на двухточечную диагональную схему измерений [22], использованную в [21]. При этом испытания задачи в гиперинтервалах D_t проводятся в двух точках a^t, b^t, расположенных на концах одной из главных диагоналей. Ориентация этой диагонали определяется специальным образом согласно безызбыточной стратегии разбиения, предложенной в [22] (описана также в [8, 21]). Прежде чем перейти к формальной постановке задачи, поясним основы подхода и терминологию, использованную в [1] и далее применяемую.

Поскольку в задачах с ограничением (1)–(2) добавляется фактор допустимости или недопустимости точек измерений, возможна ситуация пустоты допустимого множества X. При $X \neq \varnothing$ целью является определение элементов x^* из множества X^* глобальных минимумов задачи. В случае пустоты ($X = \varnothing$), следуя [1], неявно трактуем решение в расширенном смысле, как определение глобального минимума x^* невязки в ограничениях (предполагается что этот минимум существует):

$$g^* = g(x^*) = \min g(x), \quad x \in D = [a, b] \subset \mathbb{R}^N.$$

Множество таких минимумов по-прежнему обозначаем через X^*.

Далее удобно трактовать эту задачу как задачу с добавленным функциональным ограничением $\widetilde{g}(x) \leqslant 0$, заданным фиктивной функцией $\widetilde{g}(x) \equiv -1$.

Заметим, что в (1)–(2) при $X \neq \varnothing$ и наличии допустимых и недопустимых подмножеств точек различия значений $Q(x)$ на подмножествах с нарушением ограничений не оказывают влияния на X^* — множество глобальных минимумов задачи. Однако наличие слишком малых значений Q в недопустимых областях может существенно повлиять на процесс численного решения. Поэтому целевую функцию в (1) при $X \neq \varnothing$ целесообразно заменить функцией вида

$$f(x) = \max\{Q(x); Q^* - \xi\}, \quad \xi \geqslant 0.$$

Поскольку значение в условном глобальном минимуме Q^* неизвестно, заменим его текущей оценкой Q^*_k. В результате метод с учетом ограничений далее будет применен не к решению задачи в форме (1)–(2), а к специально модифицированной, возникающей из указанных выше замен

$$\min f_k(x), \quad x \in X_k, \tag{6}$$

$$X_k = \left\{x \in D = [a, b] \subset \mathbb{R}^N : g_k(x) \leqslant 0\right\}, \tag{7}$$

где k — номер итерации. Ее точный вид приведен в разделе 2. Чтобы не усложнять обозначения, далее будем опускать индексы k у f_k и g_k, записывая их как f и g. Предположения о функциях далее примем по отношению к задаче (6)–(7). Они будут отличаться от требований в [1].

В [1] предположения о функциях следующие: f и g липшицевы в евклидовой норме с неизвестными константами Липшица: $L^f = L \in [0, \infty)$ и $L^g \in [0, \alpha L)$ (где $\alpha > 0$ — введенный параметр класса задач). При неограниченном L значение L^g также может быть сколько угодно большим. Принцип потенциальной оптимальности при отборе делимых на итерации гиперинтервалов D_t в [1] заменен на модифицированную потенциальную оптимальность, которая состоит в одновременном выполнении для D_t трех основных принципов.

Первый назовем принципом наименьшего нарушения, а именно: из множества $\mathfrak{D}^k$ всех гиперинтервалов текущего разбиения выделим на итерации k сокращенное подмножество $\widetilde{\mathfrak{D}}^k$ гиперинтервалов, для которых выполнены требования:

$\nexists\, D', D'' \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k$, что если с учетом измерений $f' = f(c')$, $f'' = f(c'')$ выполнено:

$$(8) \quad D' \neq D'', \quad \mathrm{diam}(D') = \mathrm{diam}(D''), \quad f' = f'', \quad g' = g(c') > 0, \quad g'' = g(c'') > 0,$$

то $g' \neq g''$ и, кроме того, если гиперинтервал текущего разбиения $D'' \notin \widetilde{\mathfrak{D}}^k$, а $D' \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k$, то из выполнения для них условий (8) должно следовать неравенство $g' < g''$.

Второй принцип — модифицированной недоминируемости. К модифицированно недоминируемым отнесем все $D_t \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k$, удовлетворяющие следующим условиям

$$\exists\, L \in [0, \infty):$$

$$(9) \quad f^-(L, D_t) = \min\left\{ f^-(L, D_i) : D_i \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k, \exists L^g \in [0, \alpha L] : g^-(L^g, D_i) \leqslant 0 \right\},$$

$$(10) \qquad \exists\, L^g \in [0, \alpha L] : g^-(L^g, D_t) \leqslant 0.$$

Очевидно, что эти условия — прямое обобщение принципа недоминируемости метода DIRECT, описанного, например, в [8].

Третий принцип — достаточная улучшаемость. Пусть f_*^k — текущая оценка минимального значения в (6)–(7) по результатам испытаний, тогда для D_t из $\widetilde{\mathfrak{D}}^k$ при некотором значении L, когда выполнены условия (9)–(10), должно также для заданного η_k соблюдаться неравенство

$$(11) \qquad f^-(L, D_t) \leqslant f_*^k - \eta_k, \quad \eta_k > 0.$$

Здесь нижние оценки функций имеют вид:

$$(12) \quad f_i^-(L) = f^-(L, D_i) = f_i - L\, d_i/2; \quad g_i^-(L^g) = g^-(L^g, D_i) = g_i - L^g\, d_i/2.$$

В [1] предложен конструктивный алгоритм выделения гиперинтервалов D_t с указанными свойствами (9)–(11). В примененной для этого технике существенно использована удобная структура нижней оценки значения ограничения при центральном измерении из (12). Важным оказалось то, что знак первого элемента g_i в $g^-(L^g, D_i)$ однозначно определяет допустимость или недопустимость измерения, выполненного в центре D_i.

В двухточечном диагональном обобщении [21] стандартного метода DIRECT (в задачах без ограничений) использован другой вид нижних оценок функции f. В двухточечной схеме целевая функция f в D_i измерена в двух точках a^i, b^i на концах выбранной главной диагонали D_i. Нижнюю оценку функции f строим на этой диагонали. При обычных для DIRECT предположениях о липшицевости $f(x)$ с константой $L^f = L \in [0, \infty)$ получим минимальное значение оценки на диагонали

$$f_i^-(L) = f^-(L, D_i) = \frac{f_i^a + f_i^b}{2} - L\,\frac{d_i}{2}.$$

Такой вид оценки не подходит для функции $g(x)$ при наличии ограничений, если строить двухточечное обобщение метода из [1]. Действительно, в оценке такого вида для $g(x)$ первым элементом будет $(g_i^a + g_i^b)/2$. Очевидно, знак этой суммы однозначно не выделяет ситуации наличия допустимой точки среди двух испытаний в a^i, b^i.

Поэтому в данной статье применен другой вид нижних оценок, вытекающий из измененных предположений относительно свойств f и g в задаче (6)–(7). Поясним это на примере $g(x)$. Пусть получены измерения g_i^a, g_i^b на концах a^i, b^i главной диагонали длины d_i гиперинтервала D_i. Вычислим значение $L_i^g = |g_i^a - g_i^b|/d_i$. Очевидно, что в D_i должно выполняться неравенство $L^g \geqslant L_i^g$. Примем значение L^g для D_i в виде $L^g = L_i^g + \Delta L^g$, где ΔL^g будем считать одинаковым для всех гиперинтервалов. Тогда нижняя оценка значений функции g на диагонали от a^i до b^i примет вид

$$g_i^-(\Delta L^g) = g^-(\Delta L^g, D_i) = \frac{g_i^a + g_i^b}{2} - (L_i^g + \Delta L^g)\frac{d_i}{2} = G_i - \Delta L^g\,\frac{d_i}{2}; \quad \Delta L^g \geqslant 0, \tag{13}$$

где $G_i = \min\{g_i^a; g_i^b\}$. При этом знак G_i однозначно определит наличие допустимого испытания на концах используемой диагонали. Это позволит непосредственно обобщить результаты [1] на случай двухточечных диагональных измерений.

2. Предварительные замечания и постановка задачи

2.1. Преобразование исходной задачи

Пусть выполнено k итераций некоторого метода и проведено n_k испытаний (измерений функций задачи) в точках $x^i \in D$ с сохранением в памяти значений Q_i, g_i $(i = 1, \ldots, n_k)$. Определим рекордное значение Q_k^* в (1)–(2):

$$Q_k^* = \begin{cases} \min\{Q_i : g_i \leqslant 0, i = 1, \ldots, n_k\}, & \text{если } \exists\, g_i \leqslant 0, \\ +\infty, & \text{если } \forall i = 1, \ldots, n_k : g_i > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Если еще не найдено ни одной допустимой точки, значение $Q_k^* = +\infty$, и с учетом расширенной трактовки решения выполним переход от решения (1)–(2) к задаче поиска минимума невязки $g(x)$ на D до тех пор, пока не встретится первая допустимая точка. Для единообразного рассмотрения алгоритмов решения перейдем от исходной формы задачи (1)–(2) к ее измененному представлению в форме (6)–(7), где функции $f_k(x)$ и $g_k(x)$ имеют вид:

$$f_k(x) = \begin{cases} \max\{Q(x); Q_k^* - \xi_k\}, & Q_k^* \neq +\infty, \\ g(x), & Q_k^* = +\infty; \end{cases} \tag{15}$$

$$g_k(x) = \begin{cases} g(x), & Q_k^* \neq +\infty, \\ -1, & Q_k^* = +\infty. \end{cases} \tag{16}$$

При проведении испытаний этой задачи в точках x^i вычисляются и сохраняются значения Q^i и g^i исходной задачи, а величины вспомогательных функций $f_k(x^i)$ и $g_k(x^i)$ восстанавливаются согласно (15), (16) по сохранившимся в памяти результатам измерений исходных функций. Численный метод решает задачу (6)–(7), (15), (16), которая на итерациях сама изменяет свою структуру в зависимости от рекордного значения (14). Такая форма представления задачи удобна для построения метода. Текущее минимальное значение вспомогательной целевой функции (15) обозначим

$$f_*^k = \min \left\{ f_k(x^i) : g_k(x^i) \leqslant 0,\, i = 1, \ldots, n_k \right\}. \tag{17}$$

Значение f_*^k всегда конечно. Далее, как уже было указано выше, обычно будем опускать у вспомогательных функций f_k и g_k нижний индекс k.

2.2. Использование безызбыточной диагональной стратегии разбиения

Поясним правила размещения точек испытаний при использовании безызбыточной диагональной стратегии разбиения [22] (см. также [8]). Перед началом поиска проводим два начальных испытания в вершинах a и b исходного гиперинтервала D, соответствующих минимальным и максимальным значениям координат. В последующем каждый из делимых гиперинтервалов разделяется на три равные части по первому из его больших ребер. У очередного делимого гиперинтервала D_t перед делением всегда имеется пара вершин a^t и b^t (назовем их активными), в которых испытания уже проведены. Эти вершины лежат на одной из главных диагоналей (далее будем называть ее активной). Эти диагонали могут иметь разные ориентации. Пусть r — длина делимого ребра, а e — нормированный вектор, направленный из вершины a^t вдоль этого ребра так, чтобы $e^\top \left(b^t - a^t\right) > 0$. Согласно [22] при делении D_t выбираются две точки u и v, в которых могут проводиться новые испытания:

$$u = a^t + \frac{2}{3} r\, e; \qquad v = b^t - \frac{2}{3} r\, e.$$

Три новых гиперинтервала порождаются из D_t по следующим парам активных вершин (см. рис. 1): a^t и v, v и u, u и b^t.

В [22] показано, что при описанном способе выбора точек новых измерений некоторые из них могут являться активными и для других смежных гиперинтервалов (см. правую часть рис. 1). Поэтому в некоторых из новых точек u или v испытания задачи могут быть уже проведены ранее и повторно их

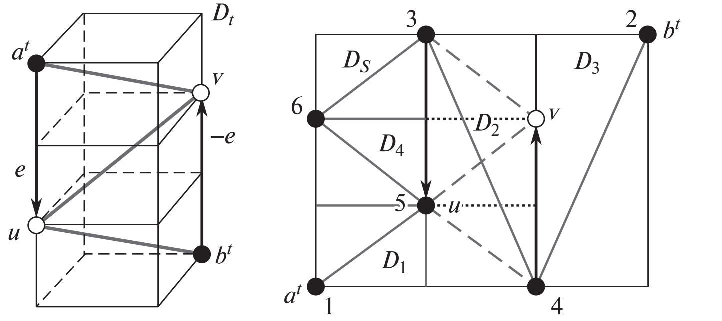


Рис. 1. Слева — выбор новых точек измерений и ориентаций активных диагоналей при делении на три выбранного гиперинтервала по безызбыточной диагональной стратегии в $\mathbb{R}^3$; справа — пример возможного разбиения начального D в $\mathbb{R}^2$: при делении D_2 новая точка u совпала с точкой прежнего испытания с номером 5.

выполнять не следует — можно извлечь готовые результаты из памяти, экономя на количестве испытаний. Быстрое выполнение операции поиска для последующего извлечения обеспечено созданием специально организованной структуры хранения результатов испытаний.

2.3. Новая модель поведения функций задачи и диагональное обобщение DIRECT-подобного принципа отбора делимых гиперинтервалов с учетом ограничений

Пусть на итерации k имеется текущее разбиение $\mathfrak{D}^k = \left\{D_i^k\right\}_{i=1}^{M_k}$ начального множества D на гиперинтервалы $D_i = D_i^k$, полученное по безызбыточной диагональной стратегии разбиения [8, 22]. В каждом D_i, в вершинах a^i и b^i, оканчивающих активную диагональ, проведены испытания задачи. Пусть $f_i^a = f(a^i)$, $f_i^b = f(b^i)$, $g_i^a = g(a^i)$, $g_i^b = g(b^i)$ — результаты испытаний. Введем обозначения:

$$L_i = L_i^f = \left|f_i^a - f_i^b\right| / d_i, \quad L_i^g = \left|g_i^a - g_i^b\right| / d_i. \tag{18}$$

Примем, что функции f и g, определяемые соотношениями (15) и (16), липшицевы в D с нормой $\|\cdot\|$ и константами $L^f = L$ и L^g, причем в гиперинтервале D_i значения этих констант с использованием (18) представимы в виде:

$$L = L_i + \Delta L, \quad L^g = L_i^g + \Delta L^g.$$

Приращения ΔL и ΔL^g неотрицательны и одинаковы для всех гиперинтервалов разбиения. Таким образом, гиперинтервалам разбиения назначаются разные по величине минимально возможные значения констант и одинаковые приращения к ним. Введем следующие предположения. Считаем, что приращение ΔL неизвестно и его величина может быть сколь угодно большой, т.е. $\Delta L \in [0, \infty)$; значение ΔL^g также неизвестно, но $\Delta L^g \in [0, \alpha\, \Delta L]$, где $\alpha > 0$ — постоянный параметр метода. Заметим, что указанные выше предположения применительно к функции f впервые были использованы и экспериментально исследованы в [26] при построении методов для задач без ограничений в $\mathbb{R}^1$.

Выполнив преобразования, аналогичные (13), получим следующий вид минимальных значений нижних оценок функций f и g на активных диагоналях гиперинтервалов D_i:

$$\begin{aligned} f_i^-(\Delta L) &= f^-(\Delta L, D_i) = F_i - \Delta L\, d_i/2, \\ g_i^-(\Delta L^g) &= g^-(\Delta L^g, D_i) = G_i - \Delta L^g\, d_i/2, \end{aligned} \tag{19}$$

$$F_i = \min\left\{f_i^a; f_i^b\right\}, \quad G_i = \min\left\{g_i^a; g_i^b\right\}. \tag{20}$$

Значения F_i и G_i из (20) назовем базовыми характеристиками функций f и g на гиперинтервале D_i. Следует обратить внимание на то, что нижние оценки (19), (20) двухточечной диагональной схемы отличаются от аналогичных оценок центральной схемы заменой прежних значений f_i, L, g_i, L^g новыми F_i, ΔL, G_i, ΔL^g. Это позволяет доказать ряд фактов и разработать алгоритмы, близкие к полученным в [1].

Введем необходимые определения.

Определение 1. Подмножеством гиперинтервалов с наименьшим нарушением (ограничений) назовем подмножество $\widetilde{\mathfrak{D}}^k$ множества всех гиперинтервалов текущего разбиения $\mathfrak{D}^k$, в которое из каждой группы гиперинтервалов $\{D\} \subseteq \mathfrak{D}^k$ одинакового диаметра, с одинаковыми значениями базовых характеристик F и положительными значениями G базовых характеристик ограничений включены только гиперинтервалы с наименьшим значением G в этой группе.

Проводимое сокращение $\mathfrak{D}^k$ до подмножества $\widetilde{\mathfrak{D}}^k$ является значимым при решении преобразованной задачи (6)–(7), когда уже обнаружены допустимые точки, т.е. $Q_k^* \neq +\infty$. Именно в этом случае в силу (15)–(16) может возникать значительное количество гиперинтервалов D_i с одинаковыми значениями $F_i = Q_k^* - \xi_k$ и $G_i > 0$.

Определение 2. Гиперинтервал $D_t \in \mathfrak{D}^k$ назовем модифицировано недоминируемым на итерации k, если $D_t \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k$ и $\exists\, \Delta L \in [0, \infty)$ такое, что для нижних оценок на активных диагоналях из (19) *функций $f_k(x)$, $g_k(x)$ из* (15)–(16) *выполнено*:

$$\begin{gathered} f^-(\Delta L, D_t) = \\ = \min\left\{ f^-(\Delta L, D_i) : D_i \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k,\ \exists\, \Delta L^g \in [0, \alpha\, \Delta L] : g^-(\Delta L^g, D_i) \leqslant 0 \right\}, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\exists\, \Delta L^g \in [0, \alpha\, \Delta L] : g^-(\Delta L^g, D_t) \leqslant 0. \tag{22}$$

Определение 3. Гиперинтервал D_t назовем модифицированно потенциально оптимальным (на итерации k), если он модифицированно недоминируемый на этой итерации и хотя бы для некоторых ΔL, при которых для него соблюдены требования (21)–(22)*, выполняется также условие достаточной улучшаемости с заданным $\eta_k > 0$ и f_*^k из* (17):

$$f^-(\Delta L, D_t) \leqslant f_*^k - \eta_k. \tag{23}$$

Следуя [1], сформулируем простое утверждение, позволяющее записать требования (21)–(22) в эквивалентной, но более простой форме.

Утверждение 1 (об эквивалентности). *Условия* (21)–(22) *модифицированной недоминируемости $D_t \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k$ в диапазоне $\Delta L \in [\Delta L', \Delta L'')$ эквивалентны следующим условиям: $\exists\, \Delta L \in [\Delta L', \Delta L'')$ такое, что*

$$\begin{gathered} f^-(\Delta L, D_t) = \min\left\{ f^-(\Delta L, D_i) : D_i \in \widetilde{\mathfrak{D}}^k, g^-(\alpha \Delta L, D_i) \leqslant 0 \right\}; \\ g^-(\alpha \Delta L, D_t) \leqslant 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Заметим, что по отношению к определению 2 утверждение применяем, положив $[\Delta L', \Delta L'') = [0, \infty)$.

Основная задача ставится следующим образом. Для получения диагонального варианта DIRECT-подобного метода условной глобальной оптимизации требуется определить подходы к построению и структуру алгоритмов выделения на итерации k подмножества (обозначим его $\widehat{\mathfrak{D}}_k$) всех модифицированно потенциально оптимальных гиперинтервалов с учетом упрощающего утверждения 1. Также необходимо провести анализ сходимости построенного метода и выполнить его экспериментальную апробацию. В данной статье описаны указанные выше подходы к обработке информации в алгоритмах формирования $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ и их структура, выполнен анализ сходимости, а также представлены вычислительные иллюстрации работы метода на двумерных задачах. Детальное описание и аналитическое обоснование алгоритмов выделения $\widehat{\mathfrak{D}}_k$, а также вычислительный эксперимент на задачах разных размерностей не являются целью данной статьи, а составляют предмет отдельной публикации.

3. О построении алгоритмов отбора делимых гиперинтервалов при двухточечной диагональной схеме измерений

Множество $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ гиперинтервалов, делимых на текущей k-й итерации, является множеством всех модифицированно потенциально оптимальных гиперинтервалов. Поясним правила их выделения и реализующие их алгоритмы, используя иллюстративные примеры.

Заметим, что в обычном методе DIRECT для задач без ограничений отбор делимых гиперинтервалов происходит сравнением на плоскости $(d/2, f)$ их изображающих точек, где первая координата — половина диаметра гиперинтервала, а вторая — значение целевой функции в его центре. При наличии ограничений и использовании одноточечной центральной схемы гиперинтервалы D_i в [1] представлены трехмерными изображающими точками $(d_i/2, f_i, g_i)$, включающими результат вычисления функций f и g в центре D_i. В рассматриваемой двухточечной схеме значения f_i, g_i в центральных точках заменим базовыми характеристиками этих функций F_i, G_i из (20). После такой замены выделение искомого подмножества $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ может быть выполнено по двухэтапной процедуре, похожей на описанную в [1].

Поясним характер возникающей при этом обработки накопленной поисковой информации. На первом этапе на множестве трехмерных точек $(d_i/2, F_i, G_i)$ выделим подмножества, соответствующие гиперинтервалам D_i^d

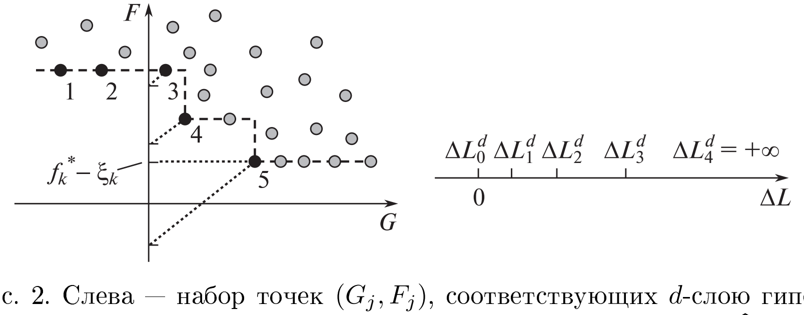


Рис. 2. Слева — набор точек (G_j, F_j), соответствующих d-слою гиперинтервалов с $\mathrm{diam}(D_j) = d$, черные точки отвечают группам $\{\widehat{D}_s^d\}$ отобранных гиперинтервалов; справа — порождаемые для $\{\widehat{D}_s^d\}$ границы диапазонов $[\Delta L_s^d, \Delta L_{s+1}^d)$ приращений ΔL: значение $s = 0$ соответствует точкам 1 и 2, $s = 1, 2, 3$ соответствуют точкам 3, 4, 5.

одинакового диаметра с $d_i = d$ (назовем такие подмножества d-слоями). В каждом d-слое выполним предварительный отбор гиперинтервалов за счет сравнения соответствующих им точек на плоскости (G, F) при выбранном d. Сравнения выполним так, чтобы выделенные в результате отбора группы гиперинтервалов (обозначим их $\{\widehat{D}_s^d\}$, $s = 0, \ldots, S(d)$) удовлетворяли определениям 1 и 2, но только в пределах множества гиперинтервалов своего d-слоя. Проводя рассуждения аналогично [1], но с учетом особенностей диагональных испытаний, можно показать, что в достаточно общей ситуации, представленной на рис. 2 слева, отобранными на плоскости $(G,\ F)$ будут точки, выделенные черным. Аналогично [1] для групп гиперинтервалов $\{\widehat{D}_s^d\}$, соответствующих выделенным точкам, наборы значений ΔL, при которых для $\widehat{D}_s^d$ в пределах d-слоя выполнены условия (21), (22), образуют диапазоны вида $[\Delta L_s^d, \Delta L_{s+1}^d)$, где при $G_s \leqslant 0$ значение $\Delta L_s^d = 0$, а при $G_s > 0$ $\Delta L_s^d = 2G_s/(\alpha d)$. В последнем диапазоне $\Delta L_{S(d)+1}^d = +\infty$. Показанные на рис. 2 наклонные точечные линии, имеют коэффициент наклона $1/\alpha$, где α — введенный ранее параметр класса функций ограничений. Прересечения этих линий с осью F порождают указанные значения ΔL_s^d, при которых впервые выполняются условия неположительности $g^-(\alpha\,\Delta L_s^d, \widehat{D}_s^d) \leqslant 0$, а ординаты точек пересечения совпадают с $f^-(\Delta L_s^d, \widehat{D}_s^d)$. Легко видеть, что в каждом d-слое будет существовать хотя бы одна точка, соответствующая группе отбираемых гиперинтервалов.

В начале второго этапа происходит объединение множеств значений ΔL_s^d по всем d и по всем s с формированием общего упорядоченного ряда значений:

$$0 \leqslant \Delta L_1 < \Delta L_2 < \ldots < \Delta L_{m_k} < \Delta L_{m_k+1} = +\infty. \tag{25}$$

Далее, при продолжении второго этапа обработки для каждого промежутка $[\Delta L_j, \Delta L_{j+1})$ приращений ΔL выделяются для различных d-слоев из групп $\{\widehat{D}_s^d\}_{s=0}^{S(d)}$ отобранных гиперинтервалов те, для которых не пусто пересечение:

$$[\Delta L_j, \Delta L_{j+1}) \cap [\Delta L_s^d, \Delta L_{s+1}^d) \neq \varnothing.$$

Обозначим множество таких гиперинтервалов через $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^j$, а его элементы через $\widetilde{D}_k^j$. Каждое из множеств $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^j$ отдельно представим набором изображающих точек с координатами $(d/2, F)$.

Заметим, что аналогично геометрической интерпретации правил метода DIRECT, минимальное значение нижней оценки функции $f_k(x)$ на активной диагонали одного из гиперинтервалов $\widetilde{D}_k^j$, соответствующего некоторой изображающей точке $(d/2, F)$, можно получить как ординату пересечения с осью F прямой, проведенной с коэффициентом наклона ΔL через эту изображающую точку. В оригинальном методе DIRECT сравнение гиперинтервалов происходит по значениям аналогичных нижних оценок для целевой функции при условии, что диапазон изменения константы Липшица есть $[0, +\infty)$. В рассматриваемом случае диапазон изменения ΔL ограничен промежутком $[\Delta L_j, \Delta L_{j+1})$, что требует новых алгоритмов обработки. Их точное описание и обоснование выходят за рамки данной статьи.

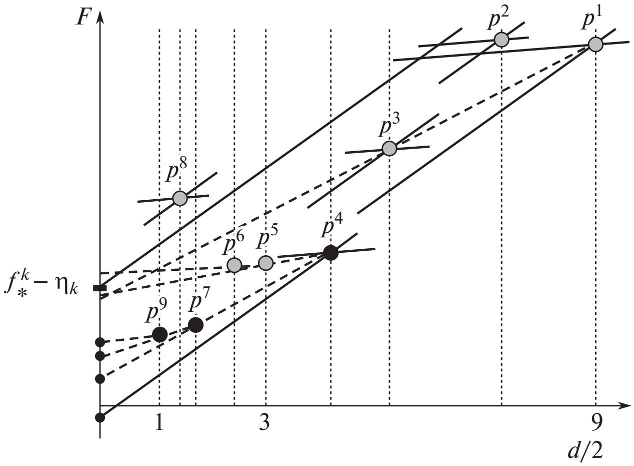


Рис. 3. Пример отбора в множество $\widehat{\mathfrak{D}}_k^j$ гиперинтервалов, делимых на k-й итерации, из множества $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^j$, сформированного для значений ΔL из $[\Delta L_j, \Delta L_{j+1})$; если гиперинтервалам из $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^j$ соответствует множество точек $P_k^j = \{p^1, \ldots, p^9\}$, то отобранным для деления гиперинтервалам будут отвечать точки $p^9; p^7; p^4$, выделенные черным.

На полученном множестве точек эти алгоритмы должны проводить дополнительный отбор так, чтобы для гиперинтервалов, соответствующих оставшимся точкам, оказались выполнены определения 2 и 3, причем условия из определения 2 должны выполняться для отобранных гиперинтервалов только в пределах множества $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^j$ и только для значений ΔL из $[\Delta L_j, \Delta L_{j+1})$. Пример отбора показан на рис. 3. Он иллюстрирует результат выделения подмножества $\widehat{\mathfrak{D}}_k^j$ из $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^j$ на конкретном примере. Вертикальные точечные линии на рис. 3 соответствуют диаметрам возможных существующих d-слоев после 9 итераций на примере исходного множества в виде некоторого четырехмерного гиперинтервала. Границам промежутка $[\Delta L_j, \Delta L_{j+1})$ на рисунке соответствуют коэффициенты наклона сплошных линий, проведенных через точки. Наклонные штриховые линии отражают процесс отбора. Черным выделены те изображающие точки, которым соответствуют гиперинтервалы, отобранные в этом примере в множество $\widehat{\mathfrak{D}}_k^j$ для их последующего включения в полный набор $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ гиперинтервалов, делимых на итерации k.

Повторяя процедуру выделения $\widehat{\mathfrak{D}}_k^j$ для $j = 1, \ldots, m_k$ и включая (с устранением повторов) все отобранные таким образом гиперинтервалы в искомое множество $\widehat{\mathfrak{D}}_k$, получим полный набор $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ гиперинтервалов, делимых на шаге. Нетрудно видеть, что полученное $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ совпадает со множеством всех модифицированно потенциально оптимальных на итерации k гиперинтервалов.

Л е м м а 1 (о наибольшем гиперинтервале). *Построенное множество гиперинтервалов $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ всегда содержит хотя бы один гиперинтервал наибольшего диаметра из гиперинтервалов текущего разбиения $\mathfrak{D}^k$.*

Лемма используется при доказательстве теоремы о сходимости в разделе 4. Доказательства леммы и последующей теоремы приведены в Приложении.

4. Структурное описание диагонального метода с учетом ограничений, анализ сходимости

4.1. Описание построенного метода

На каждой итерации метод должен выделить очередной набор $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ делимых гиперинтервалов D_t, реализуя принципы, предложенные в разделе 2. Краткое описание структуры возникающей при этом обработки накопленной поисковой информации приведено в разделе 3. Алгоритмы этой обработки являются центральной частью построенного метода и в отличие от [1] учитывают специфику двухточечных диагональных измерений в гиперинтервалах. Из материала разделов 2 и 3 следует, что выполнение алгоритмов обработки зависит от значения ряда величин, а именно: η_k из условия (23); α — параметр, введенный в начале подраздела 2.3 при описании требований к диапазону значений ΔL^g — приращений константы Липшица функции ограничения; а также ξ_k из (15). Значения η_k и ξ_k выберем пропорциональными некоторой величине Δf_k, которая в [1] была названа базовым значением целевой функции решаемой задачи, а именно примем: $\eta_k = \Delta f_k \varepsilon$; $\xi_k = \Delta f_k \delta$. Способ вычисления Δf_k предложен и подробно описан в [1, раздел 3] (в подразделе Новое базовое значение). Единственное отличие, применительно к рассматриваемому диагональному варианту метода, состоит в том, что здесь для вычисления Δf_k вместо набора измерений целевой функции в центрах гиперинтервалов текущего разбиения используется набор имеющихся измерений целевой функции $f_k(x)$ из (15) на концах активных диагоналей этих гиперинтервалов. При вычислении Δf_k каждое такое измерение учитывается только один раз, хотя почти каждая точка измерения входит в несколько гиперинтервалов. Значение Δf_k содержательно можно трактовать как грубую оценку разности $f_k^\mu - f_*^k$, где f_*^k определяется в (17), а f_k^μ — значение, при котором относительная мера множества точек $\{x \in D : f_k(x) \leqslant f_k^\mu\}$ в D равна заданной величине μ из интервала $(0,1)$. f_k^μ формируется в [1] приближенно по результатам проведенных испытаний. Принятый в [1] алгоритм вычисления Δf_k предполагает задание еще одного параметра $\widetilde{n}$, который определяет пороговое число измерений. А именно если после очередной k-й итерации число измерений n_k впервые превысит заданное $\widetilde{n}$ (обозначим этот номер k через $\widetilde{k}$), то после этой итерации происходит обновление $\Delta f_{\widetilde{k}}$, и далее при всех $k > \widetilde{k}$ используется $\Delta f_k = \Delta f_{\widetilde{k}}$.

Таким образом, имеем набор параметров: μ, $\widetilde{n}$, а также ε, α, δ. Параметры ε и δ всегда неотрицательны и влияют на работу метода следующим образом. Увеличение ε, как правило, увеличивает равномерность размещения точек измерений, а его уменьшение увеличивает тенденцию к делению гиперинтервалов малого диаметра. Уменьшение δ, как правило, приводит к уменьшению доли измерений в недопустимых областях, а его увеличение повышает долю недопустимых измерений. Метод управляет этими тенденциями за счет использования трех наборов значений ε, α, δ. Набор ε_0, α_0, δ_0 метод применяет на первой стадии поиска, пока число измерений меньше заданного $\widetilde{n}$, а далее использует два других (ε_1, α_1, δ_1, либо ε_2, α_2, δ_2), попеременно применяя их в зависимости от номера итерации k. Если k кратно дополнительному параметру $\overline{K}$, применяется первый набор, а если не кратно, — второй. Значения параметров двух последних наборов, как правило, выбираются так, чтобы первый соответствовал стратегии уточнения найденных оценок решения, а второй — поиску в менее исследованных областях. Начальный набор должен способствовать достаточной равномерности размещения начальных точек.

Одноточечный метод, построенный в [1], имеет маркировку ExDIR (от **DIR**ECT **Ex**tention), его двухточечное диагональное обобщение обозначим как ExDIR-diag.

Поскольку DIRECT-подобные методы не оценивают константы Липшица, останов по точности невозможен, поэтому указывают ресурс по количеству испытаний.

Алгоритм 1 (принципиальное описание метода ExDIR-diag).

1. Задаем параметры μ, $\widetilde{n}$, $\overline{K}$, ε_s, α_s, δ_s, $(s = 0, 1, 2)$ и $n_{\max}$ — максимальное количество испытаний.

2. Проводим два начальных испытания в вершинах a и b исходного гиперинтервала D из (1), соответствующих минимальным и максимальным значениям координат, полагаем номер итерации $k = 1$, количество испытаний $n_k = 2$ и множество гиперинтервалов $\mathfrak{D}^k = \{D\}$, количество гиперинтервалов $M_k = 1$.

3. С учетом проведенных на k-й итерации испытаний обновляем Q_k^* из (14), при необходимости корректируем текущий вид функций (15), (16) решаемой задачи (6)–(7). Если задача изменилась, пересчитываем значения функций $f_k(x)$ и $g_k(x)$ на концах a^i, b^i активных диагоналей всех гиперинтервалов D_i текущего множества $\mathfrak{D}^k$ гиперинтервалов. При этом функции исходной задачи повторно не вычисляются, используются их ранее сохраненные в памяти значения. При необходимости корректируем f_*^k из (17) и x_k^* — точку испытания, соответствующую значению f_*^k. Если одинаковое рекордное значение f_*^k наблюдается в точках нескольких испытаний, то в качестве x_k^* принимаем последнее. Вычисляем базовое значение Δf_k согласно [1] с учетом замечаний и описания, приведенного выше.

4. Если $n_k \geqslant n_{\max}$, то останавливаем поиск и выдаем значения Q_k^*, f_*^k, x_k^* в качестве оценки решения. При $n_k < n_{\max}$, в зависимости от превышения числом испытаний n_k порогового значения $\widetilde{n}$ и от кратности k значению $\overline{K}$ выбираем, как описано выше, один из трех наборов значений ε_s, α_s, δ_s, $(s = 0, 1, 2)$ в качестве параметров ε, α, δ.

5. Выполняя двухэтапную обработку информации, структурно описанную в разделе 3, из множества $\mathfrak{D}^k$ всех гиперинтервалов разбиения выделяем подмножество $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ всех модифицированно потенциально оптимальных.

6. Полагаем $n_{k+1} = n_k$. Для каждого гиперинтервала $\widehat{D}_t^k$ из $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ согласно описанию из подраздела 2.2 определяем потенциальные точки новых испытаний u^t и v^t для его деления на три по большему ребру. Для каждой из этих двух точек выполняем поиск в базе проведенных испытаний. В точках u^t и v^t, не найденных в базе, проводим новые испытания, увеличивая при этом счетчик n_{k+1}. Каждый гиперинтервал $\widehat{D}_t^k$ разделяем на три по большему ребру, $\widehat{D}_t^k$ исключаем из множества $\mathfrak{D}^k$, добавляем в него три новых гиперинтервала. Полагаем $M_{k+1} = M_k + 2$. Принимаем измененное множество $\mathfrak{D}^k$ в качестве $\mathfrak{D}^{k+1}$. Полагаем $k = k + 1$ и переходим к выполнению п. 3.

4.2. Анализ сходимости

Исследование сходимости метода ExDIR-diag проведем при более слабых предположениях о свойствах функций задачи (1)–(2), чем было принято при построении метода. Как и в [1], решение исходной задачи (1)–(2) понимаем в расширенном смысле. А именно если в (2) допустимое множество $X \neq \varnothing$, то предполагаем существование глобального минимума в (1)–(2), целью решения считаем определение элементов x^* из множества X^* глобальных минимумов задачи: $X^* \subseteq X$, $x^* \in X^*$, $Q(x^*) = Q^*$. В случае пустоты допустимого множества ($X = \varnothing$) неявно трактуем решение для (1)–(2) в расширенном смысле как обеспечение минимума невязки в ограничениях, предполагая, что минимум существует:

$$g^* = \min g(x), \quad x \in D = [a, b] \subset \mathbb{R}^N.$$

При этом целью решения задачи (1)–(2) при $X = \varnothing$ является определение элементов x^* из множества X^*, которое в данном случае понимается как множество глобальных минимумов $g(x)$ на D: $X^* \subseteq D$, $x^* \in X^*$, $g(x^*) = g^*$.

При анализе сходимости не будем предполагать липшицевость функций, но наложим следующие дополнительные требования.

А. Значения функций Q и g ограничены на D.

В. При непустоте допустимого множества X для всякого решения x^* существует открытое подмножество $\chi \subset X$, замыкание которого $\overline{\chi}$ содержит x^*, а функции Q и g непрерывны на этом замыкании. Если $X = \varnothing$, то для всякого расширенного решения x^* существует открытое подмножество $\chi \subset D$, замыкание которого $\overline{\chi}$ содержит x^*, а функция g непрерывна на этом замыкании.

С. Множество решений X^*, понимаемое в обычном или расширенном варианте, замкнуто и является глобально устойчивым (по аналогии с терминологией [27]) в том смысле, что для любой минимизирующей последовательности x_k, т.е. последовательности, удовлетворяющей при $X \neq \varnothing$ условиям $x_k \in X$, $Q(x_k) \to Q^*$ при $k \to \infty$, а при $X = \varnothing$ условиям $x_k \in D$, $g(x_k) \to g^*$ при $k \to \infty$, выполняется требование $\rho(x_k, X^*) \to 0$, где

$$\rho(x_k, X^*) = \inf\{\|x_k - x^*\| : x^* \in X^*\}.$$

Теорема 1 (о сходимости). *Пусть для задачи с ограничениями неравенствами* (1)–(2), *решение которой понимается в расширенном смысле, выполняются требования A, B и C, тогда двухточечный диагональный метод ExDIR-diag, расширяющий принципы метода DIRECT на задачи с ограничениями, порождает на множестве поиска D последовательность испытаний со всюду плотным в пределе характером размещения, при этом все предельные точки последовательности оценок решения x_k^* принадлежат множеству решений X^*.*

Заметим, что всюду плотный характер размещения точек испытаний не означает их равномерного расположения на множестве поиска D. Хотя для DIRECT-подобных методов, в отличие от методов из [13], до сих пор не получено аналитических оценок относительной плотности размещения испытаний, приведенные в разделе 5 вычислительные иллюстрации показывают существенно неравномерное распределение точек измерений в зависимости от поведения функций Q и g задачи (1)–(2). При достаточно большом количестве измерений наиболее высокая концентрация испытаний наблюдается в окрестностях глобальных минимумов.

5. Вычислительные иллюстрации

В качестве вычислительных иллюстраций работы построенного двухточечного диагонального метода ExDIR-diag приведем примеры размещения испытаний на трех задачах с номерами № 1, № 3 и № 7 из тестового набора, использованного в [1]. Там же представлены постановки и описания этих задач. Здесь укажем лишь общие характеристики: число ограничений неравенств m, число условных локальных минимумов n_{loc}, параметры глобального минимума Q^* и x^*, Q^o — наименьшее значение в локальном минимуме, не совпадающем с глобальным.

В задаче № 1 $m = 3$ и функции ограничений сильно разномасштабные, $n_{loc} = 5$, $Q^* = -1{,}48968$, $x^* = (0{,}94248; 0{,}94526)$, $Q^o = -1{,}0$; в задаче № 3 $m = 1$, $n_{loc} = 8$, $Q^* = -0{,}81911$, $x^* = (1{,}30499; 2{,}27249)$, $Q^o = -0{,}81814$, эта задача характеризуется малым отличием в значениях глобального и следующего по значению локального минимума ($Q^o - Q^* = 0{,}00097$).

Численные эксперименты проведены с использованием двух групп значений параметров, которые для удобства обозначены $E1$ и $E3$. Набор параметров $E1$ включает: $\mu = 0{,}3$, $\widetilde{n} = 100$, $\overline{K} = 2$; $\varepsilon_0 = 0{,}5$, $\alpha_0 = 1{,}0$, $\delta_0 = 0{,}0$; $\varepsilon_1 = 0{,}0001$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\delta_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 2{,}0$, $\delta_2 = 0{,}1$. Набор $E3$ отличается изменением части параметров: $\varepsilon_1 = 0{,}00001$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\delta_1 = 0{,}01$; $\varepsilon_2 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 2{,}0$, $\delta_2 = 0{,}01$.

Представленные на рис. 4 и рис. 5 результаты тестирования соответствуют следующей постановке эксперимента.

Для задачи вводим желаемую погрешность ϵ определения глобально минимального значения Q^*. Вычисления проводим до первого испытания, в результате которого текущая оценка Q^*_k значения Q^* окажется меньшей или равной $Q^* + \epsilon$. В этот момент определяем n^* — количество проведенных испытаний, k^* — номер итерации и M^* — количество гиперинтервалов. Значения n^*, k^* и M^* указываем наряду с видами размещения испытаний. Допустимое множество на всех рисунках выделено серым. Результаты рис. 4 показывают размещения испытаний в одноточечном методе ExDIR из [1] в сравнениии с его диагональным обобщением — ExDIR-diag для задачи № 1. Использована группа параметров $E1$. Размещение выглядит более рациональным у диагонального варианта метода (на рисунке справа). Для достижения точности $\epsilon = 0{,}002$ по значению функции ему понадобилось провести $n^* = 111$ испытаний (выполнено $k^* = 15$ итераций, $M^* = 157$). У метода ExDIR испытаний $n^* = 219$ за $k^* = 43$ итерации, $M^* = n^*$. Число делимых в среднем на итерации гиперинтервалов для ExDIR-diag оказалось примерно в два раза больше, чем у ExDIR.

В задаче № 3 малое отличие значений глобального и следующего по глубине локального минимума увеличивает число испытаний, необходимых для определения глобального минимума с заданной точностью $\epsilon = 0{,}00051$. Методу ExDIR потребовалось $n^* = 577$ испытаний (выполнена $k^* = 61$ итерация, $M^* = n^*$), а диагональному методу ExDIR-diag потребовалось $n^* = 369$ испы-

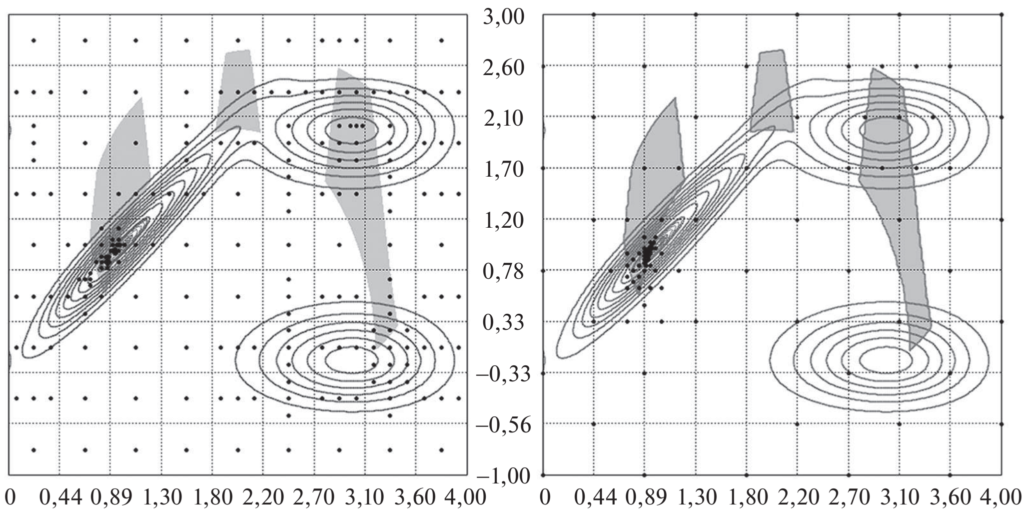


Рис. 4. Размещение испытаний методами ExDIR (слева) и ExDIR-diag (справа) в задаче № 1 до момента определения решения с погрешностью $\epsilon = 0{,}002$.

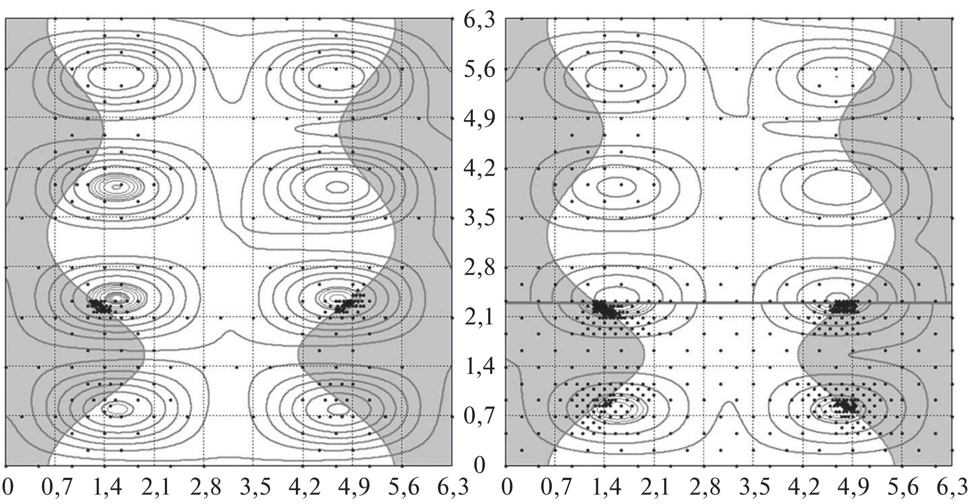


Рис. 5. Размещение испытаний в ExDIR-diag до момента получения решения с погрешностью $\epsilon = 0{,}00051$ в задаче № 3 без разрыва (слева) и задаче № 7 с разрывом.

таний (выполнено $k^* = 30$ итераций, $M^* = 547$). В обоих методах использовалась группа параметров $E3$. Размещение испытаний в диагональном методе ExDIR-diag показано на рис. 5 слева.

Дополнительно на рис. 5 справа представлена задача № 7 из [1] для иллюстрации влияния разрывов на поведение метода. Она отличается от задачи № 3 только добавленным разрывом в целевую функцию $Q(x)$ вдоль прямой $x_2 = 2{,}3$ за счет вычитания из $Q(x)$ значения $\Delta = 1$ на множестве точек с $x_2 \leqslant 2{,}3$. Линия разрыва проходит в непосредственной близости от точки глобального минимума с $x_2^* = 2{,}27249$. Общие характеристики задачи № 7 отличаются от задачи № 3 лишь тем, что для нее $Q^* = -1{,}81911$ и $Q^o = -1{,}81814$.

Поскольку метод ExDIR-diag не оценивает константы Липшица, то несмотря на разрывы в областях концентрации точек не происходит вырождения этого метода в равномерный перебор. Видно, что метод ExDIR-diag на задаче с разрывом сохраняет целесообразное поведение. В процессе решения правильное распознавание области глобального минимума происходит достаточно быстро, однако наличие разрывов заметно замедляет уточнение найденного решения. В результате для достижения той же точности $\epsilon = 0{,}00051$ методу потребовалось $n^* = 707$ испытаний (выполнено $k^* = 53$ итерации, $M^* = 1137$). Вычисления проведены с группой параметров $E1$.

Следует отметить, что представленную в статье версию двухточечного диагонального метода следует рассматривать как базовую, которую можно использовать для его дальнейшего развития.

6. Заключение

Оригинальный метод DIRECT, построенный в [16] для решения задач многоэкстремальной оптимизации без функциональных ограничений, привлекателен тем, что сохраняет способность поиска глобального экстремума при наличии конечных (умеренной величины) разрывов целевой функции в непосредственной близости от решений. Эта особенность связана со специальными принципами отбора делимых гиперинтервалов, входящих в текущее покрытие множества поиска. Эти принципы не используют оценок констант Липшица, хотя липшицевость целевой функции (при неограниченности диапазона возможных значений константы) предполагается.

В данной статье впервые предложено обобщение принципов DIRECT с учетом сразу двух дополнительных факторов: наличия функциональных ограничений и использования испытаний функций в гиперинтервале не в одной центральной точке, а в двух на концах специально ориентируемых главных диагоналей. Для одновременного учета пар измерений потребовалось изменить традиционные для DIRECT предположения о свойствах функций решаемой задачи. Введенные обобщенные принципы отбора можно рассматривать как прямое развитие и расширение принципов построения метода DIRECT. В статье показана лишь структура двухэтапной обработки информации при отборе делимых гиперинтервалов. Детальное описание и обоснование алгоритмов реализации обобщенных принципов требует отдельной публикации.

Проведенный анализ показывает, что сходимость оценок решения построенного метода (как и в методе DIRECT) достигается за счет всюду плотного в пределе размещения точек испытаний, но выполненная численная апробация демонстрирует существенную неравномерность их размещения с преимущественной концентрацией в окрестностях решений, что определяет эффективность метода. Метод рассчитан на использование в прикладных задачах, где значения функций определяются в результате затратных по времени вычислений, а сами функции могут иметь разрывы. Функции качества такого вида могут возникать, например, в нелинейных задачах управления при оптимальной настройке свободных параметров по численно рассчитываемым для замкнутой системы дополнительным нелинейным критериям.

Построенная реализация метода является последовательной, но вычисления функций на наборе гиперинтервалов, выделенных для деления на очередной итерации, можно выполнять параллельно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Если условия (24) выполнены при некотором ΔL из указанного промежутка, то (21)–(22), очевидно, будут справедливы при том же ΔL и при $\Delta L^g = \alpha\,\Delta L$. Пусть теперь выполнены (21)–(22) и для D_t нашлась соответствующая пара $\widetilde{\Delta L}$, $\widetilde{\Delta L}^g$. Но поскольку $g^-(\Delta L^g, D_i)$ монотонно убывает с возрастанием ΔL^g, то (21)–(22) тем более будут выполнены при значениях $\widetilde{\Delta L}$, $\Delta L^g = \alpha\,\widetilde{\Delta L}$, что и требовалось. Утверждение доказано.

Доказательство леммы 1. На первом этапе обработки поисковой информации на итерации k согласно описанию в разделе 3 в каждом d-слое выделяется хотя бы один модифицированно недоминируемый гиперинтервал $\widehat{D}_s^d$ этого слоя. Последний из выделенных имеет связанный диапазон $[\Delta L_s^d, \Delta L_{s+1}^d)$ с наибольшим номером $s = S_k(d)$, где $\Delta L^d_{S_k(d)+1} = +\infty$. Это верно, в частности, и для d-слоя гиперинтервалов, имеющих на текущей k-й итерации наибольший диаметр $d = d_k^{\max}$.

Далее, при построении разбиения (25) оси приращений ΔL в последнем промежутке $[\Delta L_j, \Delta L_{j+1})$ с номером $j = m_k$ значение $\Delta L_{m_k+1} = +\infty$. Этому промежутку соответствует множество гиперинтервалов $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^{m_k}$, которое по построению обязательно включает в себя хотя бы один гиперинтервал $\widehat{D}_s^d$ d-слоя с $d = d_k^{\max}$ (т.е. максимального диаметра), соответствующий диапазону $[\Delta L_s^d, \Delta L_{s+1}^d)$ значений ΔL с номером $s = S_k(d_k^{\max})$. На плоскости сравнения $(d/2, F)$ при сопоставлении гиперинтервалов из $\widetilde{\mathfrak{D}}_k^{m_k}$ этому гиперинтервалу будет соответствовать самая правая точка в полученном множестве точек $P_k^{m_k}$. Поскольку сравнение происходит для промежутка $[\Delta L_{m_k}, +\infty)$, точка с наибольшим $d = d_k^{\max}$ при достаточно большом ΔL обязательно будет доминировать остальные и для нее также выполнится условие (17). Следовательно, гиперинтервал наибольшего диаметра будет включен в множество $\widehat{\mathfrak{D}}_k$ гиперинтервалов, делимых на итерации k. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу предположения о глобальной устойчивости множества решений X^* (требование C), а также требований B к структуре множества глобальных минимумов X^* и функциям задачи, для доказательства теоремы достаточно обосновать всюду плотное в пределе размещение точек испытаний. Действительно, множество поиска D компактно. При выполнении требований A и B всюду плотное в пределе размещение испытаний приведет к появлению подпоследовательностей точек измерений, сходящихся к каждому из решений x^*. Каждое x^* принадлежит замыканию некоторого открытого подмножества χ из X, если $X \neq \varnothing$, или из D в противном случае. При всюду плотном в пределе размещении испытаний сколь угодно близко от x^* найдутся точки, являющиеся центрами открытых шаров, включенных в χ. В каждом из таких шаров в какой-то момент метод разместит точку испытания. Поэтому найдутся подпоследовательности допустимых точек из подмножеств χ, сходящиеся к x^* при неограниченном возрастании числа итераций. Функции Q, g или (при $X = \varnothing$) функция g непрерывны на замыканиях $\overline{\chi}$. Таким образом, последовательность рекордных измерений x_k^* будет минимизирующей и в силу требования C ее предельные точки будут являться решениями задачи.

Остается обосновать всюду плотное в пределе размещение испытаний. Приведем лишь схему рассуждения. Нужное поведение следует из леммы 1, которая устанавливает, что в построенном методе на каждой итерации обязательно делится по крайней мере один из гиперинтервалов наибольшего диаметра. Поскольку деление гиперинтервалов происходит на три равные части по наибольшему ребру, это обеспечивает строгое убывание диаметра с некоторым коэффициентом, отделенным от единицы. Этих двух факторов достаточно. Более подробное рассуждение можно построить аналогично доказательству теоремы 5.6 из [8] с учетом леммы 1. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Городецкий С.Ю.* Несколько подходов к обобщению метода DIRECT на задачи с функциональными ограничениями // Математическое моделирование. Оптимальное управление. 2013. № 6 (1). С. 189–215. Нижний Новгород: Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т. 2. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н.Е. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
4. *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического управления. М.: Физматкнига, 2008.
5. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* H_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems. London: Springer, 2005.
6. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное по Парето обобщенное H_2-оптимальное управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.

   Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto Optimal Generalized H_2-control and Vibroprotection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.
7. *Городецкий С.Ю., Сорокин А.С.* Построение оптимальных регуляторов по нелинейным критериям качества на примере одной динамической системы // Математическое моделирование. Оптимальное управление. 2012. № 2 (1). С. 165–176. Нижний Новгород: Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского.
8. *Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008.
9. *Strongin R.G., Sergeyev Ya.D.* Global optimization with non-convex constraints: Sequential and parallel algorithms. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000.
10. *Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.А.* Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 2. С. 255–269.
11. *Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А.* Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации / Предисл.: В.А. Садовничий. М.: Изд-во МГУ, 2013.

12. *Городецкий С.Ю.* Триангуляционные методы параболоидов в задачах многоэкстремальной оптимизации с ограничениями для класса функций с липшицевыми производными по направлениям // Математическое моделирование. Оптимальное управление. 2012. № 1 (1). С. 144–155. Нижний Новгород: Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского.
13. *Городецкий С.Ю.* Исследование процедур глобальной оптимизации с адаптивными стохастическими моделями. Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1984.
14. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
15. *Городецкий С.Ю., Неймарк Ю.И.* О поисковых характеристиках алгоритма глобальной оптимизации с адаптивной стохастической моделью // Пробл. случайного поиска. Рига: Зинатне, 1981. С. 83–105.
16. *Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E.* Lipschitzian Optimization without the Lipschitz Constant // J. Optim. Theory Appl. 1993. V. 79. No 1. P. 157–181.
17. *Препарата Ф.Ф., Шеймос М.И.* Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989.
18. *Jones D.R.* The DIRECT global optimization algorithm / Encyclopedia of optimization. 7 Vols. 2nd revised and expanded ed., ed. by C.A. Floudas, P.M. Pardalos. Springer, 2009. P. 725–735.
19. *Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А.* Метод половинных делений для глобальной оптимизации функций многих переменных // Изв. АНСССР. Технич. кибернетика. 1987. № 1. С. 119–127.
20. *Gablonsky J.M., Kelley C.T.* A Locally-Biased from of the DIRECT Algorithm // J. Global Optim. 2001. V. 21. No. 1. P. 27–37.
21. *Sergeyev Ya.D., Kvasov D.E.* Global Search Based on Efficient Diagonal Partitions and a Set of Lipschitz Constants // SIAM J. Optim. 2006. V. 16. No. 3. P. 910–937.
22. *Sergeyev Ya.D.* An Efficient Strategy for Adaptive Partition of N-dimensional Intervals in the Framework of Diagonal Algorithms // J. Optim. Theory Appl. 2000. V. 107. No. 1. P. 145–168.
23. *Sergeyev Ya.D., Kvasov D.E.* A Univariate Global Search Working with a Set of Lipschitz Constants for the First Derivative// Optimization Lettes. 2009. No. 3. P. 303–318.
24. *Kvasov D.E., Sergeyev Ya.D.* Lipschitz Gradients for Global Optimization in a One-Point-Based Partitioning Scheme // J. Comput. Appl. Math. 2012. V. 236. P. 4042–4054.
25. *Sergeyev Ya.D., Mukhametzhanov M.S., Kvasov D.E.* On the Efficiency of Nature-Inspired Metaheuristics in Expensive Global Optimization with Limited Budget // Sci. Reports. 8, 453 (2018).
26. *Городецкий С.Ю.* О новой модели поведения целевой функции для диагональной реализации DIRECT-подобных методов // Научное периодическое издание CETERIS PARIBUS. М.: РИЦ ЭФИР, 2016. № 1. С. 4–16.
27. *Карманов В.Г.* Математическое программирование: Уч. пос. М.: Физматлит, 2008.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 06.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. **Н.В. ДЕРЕНДЯЕВ, д-р физ.-мат. наук (derendyaevnic@rambler.ru)**
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКОСТЬЮ[1]

Изложен новый метод исследования устойчивости, в котором, в отличие от традиционного метода D-разбиения, знание характеристического уравнения не требуется. Метод эффективен в широком классе задач динамики тел с полостями, содержащими жидкость.

Ключевые слова: роторная система, полость, содержащая вязкую жидкость, режим стационарного вращения, устойчивость и автоколебания.

DOI: 10.31857/S0005231020080085

1. Введение

И.А. Вышнеградский (1871–1876) обратился к задаче об устойчивости режима работы паровой машины, снабженной регулятором Уатта. В знаменитой работе 1876 г. И.А. Вышнеградский впервые установил условия устойчивости движения паровой машины, а также получил необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения (полинома) третьей степени и дал геометрическую интерпретацию этих условий в виде диаграмм Вышнеградского. Д.К. Максвелл в задаче, близкой к той, которой занимался И.А. Вышнеградский, пришел к тем же математическим требованиям отрицательности действительных частей корней характеристического полинома (1868), но не сделал отчетливых инженерных выводов. Критерий отрицательности действительных частей всех корней полинома n-й степени получил Раус (1877). А.М. Ляпунов в своей диссертации (1892) дал математическое обоснование исследованиям устойчивости при помощи линеаризованных уравнений. А. Стодола (1893) распространил линеаризованную теорию И.А. Вышнеградского на непрямое регулирование и, не зная о работах Д.К. Максвелла и Рауса, предложил А. Гурвицу задачу о нахождении критерия отрицательности действительных частей всех корней полинома n-й степени с действительными коэффициентами. А. Гурвиц нашел решение этой задачи в изящной форме детерминантных неравенств (1895). Заметим, что из условий Рауса–Гурвица следует положительность всех коэффициентов полинома, корни которого располагаются в левой полуплоскости. Но тогда, как было показано Льенаром и Шипаром (1914), количество детерминантных неравенств сокращается почти вдвое, т.е. необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей всех корней полинома степени n с положительными коэффициентами записываются в виде

[1] Работа выполнена в порядке личной инициативы.

детерминантых неравенств

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ldots,$$

где Δ_k, $k = \overline{1, n}$ — определители из условий Гурвица [1].

В дальнейшем руководящим стимулом стало стремление дать в руки прикладников практически пригодные приемы исследования устойчивости. На практике обычно речь идет не столько о том, что устойчива или неустойчива данная система, сколько о таком подборе параметров системы, чтобы система удовлетворяла ряду технических требований, оставаясь при этом устойчивой. Фактически задача сводится к разбиению пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости. Существенным шагом в решении этой задачи стало появление частотных критериев Найквиста (1932) и Михайлова (1938), новая трактовка критерия Найквиста и метод D-разбиения Ю.И. Неймарка (1949) [2]. В методе D-разбиения рассматривается плоское сечение пространства комплексных полиномов, точками которого являются полиномы степени n, а их коэффициенты зависят либо от одного комплексного, либо от двух действительных параметров; значения параметров, таким образом, принадлежат плоскости параметров. Поскольку корни полиномов непрерывно зависят от их коэффициентов, то кривая на плоскости параметров (D-кривая), точкам которой соответствуют полиномы, имеющие хотя бы один корень на мнимой оси, разбивает, в общем случае, плоскость параметров на области с различной степенью неустойчивости, т.е. с различным числом корней справа от мнимой оси. D-кривая, по сути, является отображением мнимой оси плоскости корней полиномов на плоское сечение пространства полиномов. Метод D-разбиения был обобщен на квазиполиномы и другие целые функции, что позволило применять его к исследованию устойчивости некоторых распределенных систем.

Идея построения отображения мнимой оси плоскости характеристических чисел на плоское сечение пространства параметров оказалась очень плодотворной. Удалось построить области устойчивости в случае таких систем, для которых само выписывание конечного уравнения для характеристических чисел часто оказывается проблематичным. При этом оказалось, что рассмотрение всевозможных возмущенных движений излишне, а достаточно лишь рассмотреть условия осуществимости возмущенных движений определенного типа. Далее речь пойдет об устойчивости режимов стационарного вращения роторных систем, содержащих жидкость. Именно для них при исследовании устойчивости в линейном приближении удалось развить эффективный метод [3, 4], в котором, в отличие от метода D-разбиения, знание характеристического уравнения не требуется. В то же время исследование возмущенных движений типа круговой прецессии позволяет с минимальными затратами построить D-кривую и выделить области устойчивости.

Проиллюстрируем оригинальный метод исследования устойчивости на примере задачи об устойчивости (в линейном приближении) стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Отличительная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что скорость вращения тела, содержащего жидкость, поддерживается постоянной за счет внешнего источника энергии, вследствие чего кинетическая энергия содержащейся в полости жидкости может возрастать во времени благодаря взаимодействию со стенками полости. Для таких задач представляет большую трудность использование методов, связанных с построением функции Ляпунова.

2. Постановка задачи

Пусть круговой цилиндр радиуса a совершает стационарное вращение вокруг своей оси (совпадающей с осью Oz неподвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$), которая находится в вязкоупругом осесимметричном закреплении. Вязкая несжимаемая жидкость, частично заполняющая цилиндр, при стационарном вращении расположена в слое постоянной толщины h на боковой поверхности цилиндра и вращается вместе с ним как твердое тело. Ограничимся рассмотрением задачи об устойчивости в линейном приближении и в рамках плоской модели, т.е. в предположении, что точки цилиндра могут перемещаться лишь параллельно плоскости Oxy, а поле скоростей жидкости имеет лишь x- и y-компоненты, которые, как и давление жидкости, не зависят от z. Плоская модель применима, если осевые перемещения цилиндра и угловое перемещение его оси пренебрежимо малы (например, ось цилиндра в подшипниках), а сам цилиндр достаточно длинный (концевые эффекты несущественны). Система линеаризованных уравнений плоской модели и граничных условий к ним, используемая в данной работе, содержит:

1. Уравнения поступательного движения цилиндра параллельно плоскости Oxy, линеаризованные вблизи состояния цилиндра при стационарном вращении

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_0 + H\dot{x}_0 + Kx_0 &= F_x,\\
M\ddot{y}_0 + H\dot{y}_0 + Ky_0 &= F_y,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где x_0, y_0 — координаты точки пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy; F_x, F_y — компоненты силы, с которой жидкость действует на единицу длины цилиндра; M — масса единицы длины цилиндра; H, K — соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости закрепления оси цилиндра, деленные на его длину;

2. Условие постоянства абсолютной угловой скорости вращения цилиндра вокруг оси Oz: $\Omega = \mathrm{const}$;

3. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости Oxy, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси Oz:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + v_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} v_j^0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \Delta v_j,\\
\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \quad v_1^0 = -\Omega x_2; \quad v_2^0 = \Omega x_1;
\end{gathered}
\tag{2}
$$

4. Условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра, условие непрерывности напряжений и кинематическое условие на свободной поверхности, перенесенные в линейном приближении по отклонениям от состояния стацио-

нарного вращения на поверхности $x^2+y^2=a^2$ и $x^2+y^2=(a-h)^2$ соответственно:

$$v_1=\dot{x}_1^0+\Omega\dot{x}_2^0;\quad v_2=\dot{x}_2^0-\Omega\dot{x}_1^0,$$
$$x_1^2+x_2^2=a^2,$$
$$\sigma'_{ik}n_k^0=-\rho\Omega^2 bSn_i^0,$$
$$\sigma'_{ik}=-p'\delta_{ik}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$

(3) $$\frac{\partial S}{\partial t}+\Omega\left(-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)S=v_jn_j^0;\quad x_1^2+x_2^2=b^2,$$

здесь n_j^0 — внешняя нормаль к поверхности жидкости, S — отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенной поверхности $x^2+y^2=b^2$ в направлении нормали к ней;

5. Формулы, определяющие F_x, F_y через отклонения давления и компонент поля скоростей жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении:

(4) $$F_j=-\int\sigma'_{ik}n_k dl+\rho\frac{\Omega^2a^2}{2}x_j^0,$$
$$x_1^2+x_2^2=a^2.$$

Интеграл вычисляется по окружности $x^2+y^2=a^2$, dl — элемент длины дуги.

3. Свойства симметрии и круговая прецессия

Перечисленные уравнения и граничные условия линейны и однородны относительно отклонений от состояния стационарного вращения цилиндра и частично заполняющей его жидкости и обладают двумя очевидными свойствами симметрии: а) инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени, т.е. преобразования $t'=t-t_0$; б) инвариантны относительно поворота системы координат вокруг Oz на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. преобразования $x'=y$, $y'=-x$, $z'=z$. В силу свойства симметрии а) система уравнений (1)–(4) допускает частные решения, пропорциональные $e^{\lambda t}$, где λ — характеристическое число. Будем считать стационарное вращение цилиндра с жидкостью устойчивым в малом, если все λ имеют отрицательные действительные части, и неустойчивым, если хотя бы одно λ имеет положительную действительную часть. Если характеристические числа λ непрерывно зависят от параметров задачи, то изменение степени неустойчивости в системе происходит при появлении мнимого $\lambda=i\omega$. При этом наряду с решением уравнений (1)–(4)

$$\Big(x^*\mathbf{e}_x+y^*\mathbf{e}_y, v_x^*(x,y)\mathbf{e}_x+v_y^*(x,y)\mathbf{e}_y, p^*(x,y)\Big)e^{i\omega t}.$$

В силу свойства симметрии б) существует также решение

$$\Big(-y^*\mathbf{e}_x+x^*\mathbf{e}_y, -v_y^*(y,-x)\mathbf{e}_x+v_x^*(y,-x)\mathbf{e}_y, p^*(y,-x)\Big)e^{i\omega t},$$

где x^*, y^* — комплексные амплитуды компонент радиуса-вектора точки пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy; v_x^*, v_y^*, p^* — комплексные амплитуды отклонений компонент поля скоростей и давления жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — орты координатных осей. Умножая первое из этих решений на i и складывая со вторым, получим в силу линейности уравнений (1)–(4) частное решение, описывающее так называемую круговую прецессию цилиндра с жидкостью, т.е. такое движение, в котором точка пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy описывает окружность, а отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений изменяются во времени $\sim e^{i\omega t}$. Обратно: если при некоторых значениях параметров уравнения (1)–(4) допускают решение типа круговой прецессии, то существует мнимое характеристическое число λ. Таким образом, значения параметров, при которых происходит изменение степени неустойчивости в системе (существует хотя бы одно мнимое характеристическое число), могут быть найдены из условия существования круговой прецессии цилиндра с жидкостью. Приведенное соображение определяет ход решения задачи в данной статье. Именно сначала рассматривается гидродинамическая задача о движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающийся цилиндр, совершающий круговую прецессию. Затем вычисляется сила, с которой жидкость действует на вращающийся цилиндр в случае круговой прецессии. Далее, на основании полученных выражений для гидродинамической силы из уравнений поступательного движения цилиндра (1) находятся условия, при которых возможна круговая прецессия. Эти условия в соответствии со сказанным выше определяют границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи.

4. Гидродинамическая задача

Пусть бесконечно длинный круговой цилиндр с внутренним радиусом a вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 и прецессирует с частотой ω таким образом, что его ось описывает цилиндрическую поверхность радиуса ε (рис. 1). Абсолютная угловая скорость цилиндра Ω складывается из угловой скорости собственного вращения цилиндра ω_0 и скорости прецессии ω $(\Omega = \omega_0 + \omega)$.

Выберем неинерциальную систему отсчета $O\xi\eta$ (см. рис. 1), жестко связанную с так называемой линией центров, проходящей через центр прецессии O_1 и центр сечения цилиндра O. Эта система поступательно двигается по окружности радиуса ε со скоростью $\omega\varepsilon$ и вращается вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω. В пространстве отсчета $O\xi\eta$ введем полярную систему координат r, φ с центром в точке O. В этой системе компоненты поля сил инерции, действующих в пространстве отсчета $O\xi\eta$ на частицу единичной массы, имеют вид:

$$\begin{aligned} f_r &= \omega^2 r + 2\omega v + \omega^2\varepsilon\cos\phi, \\ f_\phi &= -2\omega u - \omega^2\varepsilon\sin\phi. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим задачу о плоском движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающийся цилиндр, в случае круговой прецес-

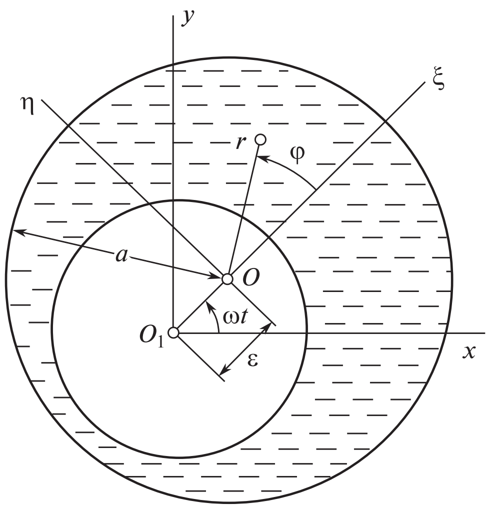


Рис. 1. Неинерциальная система отсчета $O\xi\eta$.

сии с малым радиусом ε, при которой отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений малы и в неподвижной системе отсчета изменяются во времени $\sim e^{i\omega t}$. Используя закон изменения энергии вязкой жидкости, можно показать, что в случае круговой прецессии с малым радиусом движение жидкости относительно системы отсчета $O\xi\eta$ установившееся, т.е. не зависит от времени. Уравнения установившегося движения жидкости относительно системы $O\xi\eta$ и граничные условия, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси цилиндра

$$u = 0, \quad v = \omega_0 r \tag{6}$$

записываются в виде:

$$\begin{gathered}
\omega_0 \frac{\partial u'}{\partial \varphi} = \Omega^2 r + \omega^2 \varepsilon \cos\varphi + 2\Omega v' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} + \nu\left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v'}{\partial \varphi}\right), \\
\omega_0 \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = -\omega^2 \varepsilon \sin\varphi - 2\Omega u' - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u'}{\partial \varphi}\right), \\
\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad r = a, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
-p - \rho\Omega^2 r\eta + 2\mu\frac{\partial u'}{\partial r} = -p_0, \\
i\frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{v'}{r} = 0, \\
\omega_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = u'; \quad r = a - h.
\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь u', v' — малые отклонения компонент поля скоростей от (6), p — давление, ρ — плотность, ν, μ — кинематическая и динамическая вязкость жидкости, $r = a - h + \eta(\varphi)$ — уравнение свободной поверхности жидкости, p_0 — давление на свободной поверхности. Введем потенциалы Ламба θ, ψ и функцию χ

$$u' = \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$v' = \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\chi = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \omega^2 \varepsilon r \cos\varphi - 2\Omega\psi + \mathrm{const}$$

и запишем систему (7) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r}F + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}G = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}F - \frac{\partial}{\partial r}G = 0, \quad \Delta\theta = 0,$$

$$F = \chi - \frac{p}{\rho} - \omega_0\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad G = \nu\Delta\psi + 2\Omega\theta - \omega_0\frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \tag{10}$$

Неоднозначностью в выборе потенциалов Ламба (калибровкой потенциалов) можно распорядиться так, что (10) сведется к системе:

$$F = 0, \quad G = 0, \quad \Delta\theta = 0. \tag{11}$$

Граничные условия (8) и (9) после введения потенциалов Ламба принимают вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r = a, \tag{12}$$

$$2\nu\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi}\right) - \frac{p}{\rho} - \Omega^2 r\eta = -\frac{p_0}{\rho},$$

$$r^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2\frac{\partial \theta}{\partial \phi} - r\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \tag{13}$$

$$\omega_0\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad r = a - h.$$

Уравнения (11) с граничными условиями (12), (13) содержат лишь следующие размерные параметры: ω_0, Ω, ν, a, $a - h$, ε (параметр p_0 несуществен, так как жидкость несжимаема). В силу линейности сформулированной краевой задачи параметр ε войдет в решение в первой степени. Этим параметром определяется лишь масштаб скорости движения жидкости, вызванного прецессией цилиндра. Оставшиеся пять параметров образуют всего три независимые безразмерные комбинации:

$$\frac{\omega}{\Omega}, \quad \frac{a-h}{a}, \quad \frac{\nu}{\Omega a^2}, \tag{14}$$

которые и будут критериями подобия в рассматриваемой задаче.

5. Вычисление гидродинамической силы

Перейдем к решению краевой задачи (11)–(13). Будем искать решение системы (11) в виде:

$$\theta = 2\mathrm{Re}\left[\Theta(r)e^{i\phi}\right], \quad \psi = 2\mathrm{Re}\left[\Psi(r)e^{i\phi}\right], \quad i^2 = -1.$$

Из третьего уравнения системы (11) найдем

$$\theta = 2\mathrm{Re}\left[\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right)e^{i\phi}\right], \tag{15}$$

после чего второе уравнение сведется к виду

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} - \left(\frac{i\omega_0}{\nu} + \frac{1}{r^2}\right)\Psi = -\frac{2\Omega}{\nu}\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right). \tag{16}$$

Интегрируя (16), получим

$$\begin{gathered}
\psi = 2\mathrm{Re}\left(\left[-\frac{2\Omega}{\omega_0}i\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right) + c_3 L_1(kr) + c_4 M_1(kr)\right]e^{i\phi}\right), \\
L_1 = e^{-\kappa a}H_1^{(2)}(kr), \quad M_1 = e^{\kappa b}H_1^{(1)}(kr), \\
k = \kappa\left(-\frac{\omega_0}{|\omega_0|} + i\right), \quad \kappa = \sqrt{\frac{|\omega_0|}{2\nu}}, \quad b = a - h.
\end{gathered} \tag{17}$$

где $H_n^{(1,2)}(kr)$ — функции Ганкеля.

Выражение для давления найдем из первого уравнения (11):

$$\frac{p}{\rho} = 2\mathrm{Re}\left(\left[-i\omega_0\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right) + \frac{\omega^2\varepsilon r}{2}\right]e^{i\phi}\right) - 2\Omega\psi + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C. \tag{18}$$

Радиальное отклонение свободной поверхности жидкости $\eta(\phi)$ ищем в виде

$$\eta(\phi) = 2\mathrm{Re}\,(\eta^* e^{i\phi}). \tag{19}$$

Подставляя (15), (17)–(19) в граничные условия (12), (13), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных

c_1, c_2, c_3, c_4, выражения для η^* и аддитивной постоянной в (18):

$$\frac{3-\tau}{1-\tau}c_1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{c_2}{a^2} + \frac{i}{a}Z_1(ka) = 0,$$

$$\frac{3-\tau}{1-\tau}ic_1 - \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{ic_2}{a^2} - kZ_0(ka) + \frac{1}{a}Z_1(ka) = 0,$$

$$\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{4i}{b^3}c_2 + \frac{2k}{b}Z_0(kb) + \left(k^2 - \frac{4}{b^2}\right)Z_1(kb) = 0, \tag{20}$$

$$-\frac{\tau^2(3-\tau)}{(1-\tau)^2}ibc_1 + \frac{i}{b}(1+\tau)\left[\frac{2-4\tau+\tau^2}{(1-\tau)^2} - \frac{4}{k^2b^2}\right]c_2 -$$

$$-2\frac{1-\tau}{kb}Z_0(kb) + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + 4\frac{1-\tau}{k^2b^2}\right)Z_1(kb) = -\frac{1}{2}\tau^2\Omega\varepsilon b,$$

$$i\omega_0\eta^* = \frac{3-\tau}{1-\tau}c_1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{c_2}{b^2} + \frac{i}{b}Z_1(kb), \quad C = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\Omega^2b^2}{2},$$

где

$$\tau = \frac{\omega}{\Omega}, \quad Z_n(kr) = c_3L_n(kr) + c_4M_n(kr), \tag{21}$$

$$L_n(kr) = e^{-\kappa a}H_n^{(2)}(kr), \quad M_n(kr) = e^{\kappa b}H_n^{(1)}(kr).$$

При выводе (20) были использованы известные формулы для производных от цилиндрических функций [5]. В ряде интересных случаев значение kr $(b \leqslant r \leqslant a)$ очень велико, что позволяет также использовать в (20) асимптотические разложения для этих функций. Применение перенормированных функций Ганкеля $L_n(kr)$ и $M_n(kr)$ оказывается при этом очень удобным. После того как найдены постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, краевая задача (11)–(13), в принципе, решена. Обратимся к вычислению силы, с которой жидкость действует на цилиндр. Интегрируя напряжения, приложенные к внутренней поверхности цилиндра, получим для компонент силы, действующей на единицу его длины:

$$F_\xi = 2\pi a\rho \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\omega^2\varepsilon a + 2i(\Omega+\omega)\frac{c_2}{a}\right], \tag{22}$$

$$F_\eta = -4\pi\rho(\Omega+\omega)\mathrm{Re}\, c_2.$$

В случае когда частота прецесси $\omega \to \Omega$, можно сравнительно просто выразить c_2 из (20), воспользовавшись асимптотическими разложениями для цилиндрических функций при малых значениях аргумента [5], и записать (22) в виде:

$$F_\xi = \pi\rho\Omega^2a^2\varepsilon + O(\omega_0),$$

$$F_\eta = \frac{8\pi\varepsilon\mu\omega_0(\delta^4+1)}{\delta^4 - 1 - 2(\delta^4+1)ln\delta} + O\Big(\omega_0^2 ln|ka|\Big), \quad \delta = \frac{b}{a}. \tag{23}$$

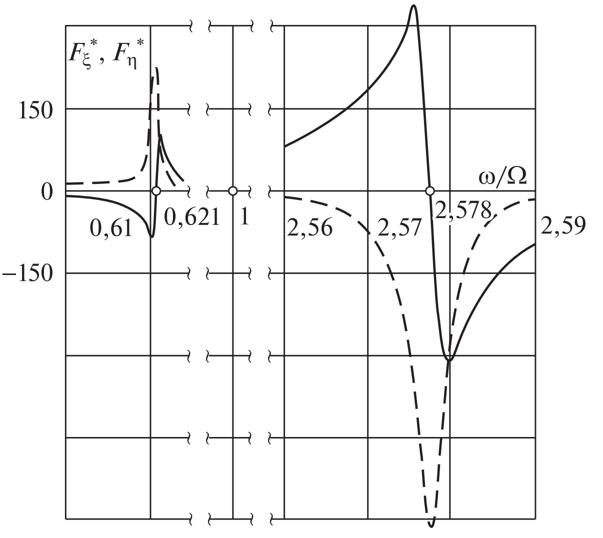


Рис. 2. Зависимости безразмерных компонент гидродинамической силы от параметра τ.

Из выражений (23) видно, что в окрестности резонанса $\omega = \Omega$ проекция силы на линию центров $F_\xi > 0$, т.е. гидродинамическая сила стремится увести ось цилиндра от оси прецессии (на рис. 1 точка пересечения оси прецессии плоскостью рисунка — центр прецессии O_1). Далее, компонента силы F_η может быть отлична от нуля только в случае вязкой жидкости. Знаменатель в выражении для F_η при $0 < \delta < 1$ положителен, следовательно, при $\omega < \Omega$ имеем $F_\eta > 0$, т.е. гидродинамическая сила стремится увеличить угловую скорость прецессии цилиндра, а при $\omega > \Omega$ получаем, что $F_\eta < 0$ и эффект действия силы обратный. Эти выводы согласуются с так называемой концепцией вращающегося трения [6], распространенной в прикладных исследованиях. Отметим также, что момент гидродинамической силы (23) относительно оси цилиндра равен нулю. На рис. 2 изображены в качестве примера зависимости безразмерных компонент гидродинамической силы $F_{\xi *} = F_\xi / F^0$ (сплошные линии) и $F_{\eta *} = F_\eta / F^0$ (штриховые линии) от ω/Ω, полученные в соответствии с (20), (22) в случае $\delta = 0{,}5$; $\nu/(\Omega a^2) = 10^{-5}$. Масштаб силы $F^0 = m\omega^2\varepsilon$, где $m = \pi\rho(a^2 - b^2)$ — масса жидкости, приходящаяся на единицу длины цилиндра. Зависимость силы от отношения частот имеет четко выраженный резонансный характер, что обусловлено резонансным возбуждением волн, распространяющихся по свободной поверхности вращающейся жидкости, заполняющей цилиндр.

Сравнение результатов вычисления гидродинамической силы с силой, полученной в рамках консервативной модели ($\mu = 0$), показывает хорошее количественное совпадение ξ-компонент вне окрестностей резонансных значений ω/Ω. Вместе с этим в окрестностях резонансов, в отличие от того, что дает консервативная модель, ξ-компонента гидродинамической силы конечна и сравнима по величине с η-компонентой. Важно также отметить, что в окрестностях резонансов, даже при весьма малых значениях параметра $\nu/(\Omega a^2)$ волновое движение, вызванное прецессией цилиндра, всюду в жидкости сильно отличается от того движения, которое дает консервативная модель.

6. Построение области устойчивости стационарного вращения в плоскости параметров закрепления оси цилиндра

Подставим вычисленную гидродинамическую силу, действующую на единицу длины цилиндра, в уравнения движения цилиндра, положив в правых частях (1):

$$F_x = F_\xi \cos(\omega t) - F_\eta \sin(\omega t),$$
$$F_y = F_\xi \sin(\omega t) + F_\eta \cos(\omega t).$$

Положив затем в (1) $x_0 = \varepsilon \cos \omega t$; $y_0 = \varepsilon \sin \omega t$, что соответствует круговой прецессии с частотой ω и радиусом ε, получим соотношения, связывающие ω и параметры задачи в случае круговой прецессии:

$$K^* - \frac{M}{m}\tau^2 = F_\xi^* \tau^2, \quad H^* \tau = F_\eta^* \tau^2, \quad K^* = \frac{K}{m\Omega^2}, \quad H_* = \frac{H}{m\Omega}, \tag{24}$$

где K^*, H^* — соответственно, безразмерные коэффициенты жесткости и демпфирования закрепления оси цилиндра. Безразмерные компоненты силы F_ξ^*, F_η^* зависят только от параметров (14). При фиксированных значениях этих параметров соотношения (24) задают в плоскости H^*, K^* кривую, точкам которой соответствуют такие значения параметров, при которых возможна круговая прецессия цилиндра. Эта кривая в соответствии со сделанными выше замечаниями разбивает плоскость параметров закрепления оси цилиндра H^*, K^* на области с различной степенью неустойчивости. Следуя [2], будем называть ее D-кривой. На рис. 3 приведено разбиение плоскости H^*, K^*, осуществляемое D-кривой, в случае $\delta = 0{,}9$, $\nu/(\Omega a^2) = 10^{-6}$,

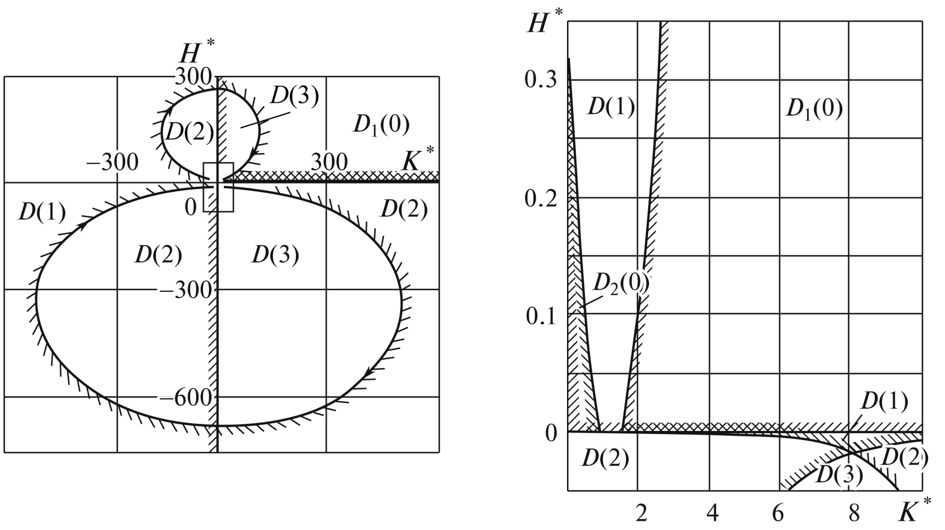


Рис. 3. D-кривая.

$M/m = 1{,}68$. Стрелкой вдоль D-кривой указано направление возрастания параметра τ. D-кривая на рис. 3 образована регулярной ветвью, вдоль которой параметр τ изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, и каждому значению параметра τ соответствует одна точка кривой и особой прямой $K^* = 0$, соответствующей $\tau = 0$. Наличие особой прямой вызвано тем, что при $\tau = 0$ компоненты гидродинамической силы обращаются в нуль.

D-кривую принято штриховать так, что переход в плоскости параметров со штрихованной стороны кривой на нештрихованную соответствует увеличению степени неустойчивости. Штриховка может переходить с одной стороны D-кривой на другую в тех точках, где нарушается однозначность отображения мнимой оси плоскости λ в точки D-кривой [2]. В рассматриваемой здесь задаче штриховка D-кривой меняется в точке регулярной ветви, соответствующей значению $\tau = 0$, поскольку при этом значении τ нарушается однозначность вышеназванного отображения (точке $\tau = 0$ на мнимой оси плоскости λ соответствует особая прямая в плоскости параметров закрепления оси цилиндра).

Область устойчивости всегда должна содержать точку, соответствующую достаточно большим положительным значениям коэффициента демпфирования H^*. Исходя из этого, на рис. 3 указана область с нулевой степенью неустойчивости $D_1(0)$. Указаны также области $D(n)$ со степенью неустойчивости n. Интересно отметить, что наряду с $D_1(0)$ существует еще одна область устойчивости — $D_2(0)$ — в окрестности нулевых значений H^*, K^* (разбиение этой окрестности приведено в правой части рис. 3). Отметим также, что при $H^* = 0$ точке на границе области устойчивости соответствует $\tau = 1$, что согласуется с известным результатом, установленным в [6] путем феноменологического введения сил внутреннего трения во вращающемся роторе.

7. Заключение

Предложенный метод исследования устойчивости был успешно применен при решении ряда задач об устойчивости вращения роторных систем, содержащих жидкость [7–12]. При этом одни задачи ставились впервые, а решение других было, по сути дела, получено заново. Исследование поведения режима стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, вблизи границы области устойчивости в пространстве параметров проведено в [13] впервые. Показано, что при переходе через эту границу происходит бифуркация Андронова–Хопфа — от режима стационарного вращения рождается периодическое движение типа круговой прецессии. В предложенном методе, в отличие от традиционного метода D-разбиения, знание характеристического уравнения вообще не требуется. Более того, при исследовании устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением лишь возмущений специального вида — типа круговой прецессии. Последнее связано с учетом свойств симметрии уравнений движения рассматриваемой системы.

Выражаю благодарность Д.Н. Дерендяеву за помощь в оформлении статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
2. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
3. *Дерендяев Н.В., Сандалов В.М.* Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578–586.
4. *Дерендяев Н.В., Сеняткин В.А.* Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной вязкой несжимаемой жидкостью // ПМТФ. 1984. № 1. С. 34–44.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
6. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Дерендяев Н.В., Сандалов В.М.* Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. 1986. № 1. С. 19–26.
8. *Сандалов В.М.* Динамическая неустойчивость турбомашин, обусловленная радиальными зазорами в подшипниках скольжения и жидкостным наполнением полостей роторов // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Горький, 1983.
9. *Сеняткин В.А.* Неустойчивость роторных систем, обусловленная содержащейся в них вязкой жидкостью // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Горький, 1985.
10. *Солдатов И.Н.* Устойчивость и автоколебания роторных систем, содержащих проводящую вязкую жидкость в магнитном поле // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1994.
11. *Derendyaev N.V., Vostrukhov A.V., Soldatov I.N.* Stability and Andronov-Hopf Bifurcation of Steady-State Motion of Rotor System Partly Filled with Liquid: Continuous and Discrete Models // ASME. J. Appl. Mech. 2006. V. 73. No. 4. P. 580–589.
12. *Дерендяев Н.В.* Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород.: Изд-во Нижегород. гос ун-та, 2014.
13. *Дерендяев Н.В., Сандалов В.М., Солдатов И.Н.* О рождении периодического движения в задаче об устойчивости стационарного вращения вертикального ротора на гидродинамических подшипниках // Машиноведение. 1988. № 4. С. 98–103.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 16.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. **П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),**
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

В статье рассматриваются дискретные линейные системы с переключением параметров в повторяющемся режиме. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением. Метод основан на построении вспомогательной 2D-модели в форме дискретного повторяющегося процесса, устойчивость которой гарантирует сходимость процесса обучения. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Вводится понятие среднего времени ожидания относительно повторений. Приводится пример, демонстрирующий возможности и особенности нового метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, дискретные системы, системы с переключениями, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, диссипативность, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231020080097

1. Введение

В современной теории управления под системами с переключениями обычно понимают класс моделей динамических систем, состоящих из конечного числа подсистем, из которых в текущий момент времени функционирует лишь одна, называемая активной подсистемой, при этом выбор активной подсистемы определяется некоторым логическим правилом. Простейшим примером может служить многорежимная система, в которой подсистемы интерпретируются как отдельные режимы этой системы. Обычно подсистемы описываются индексированным множеством дифференциальных или разностных уравнений. Класс систем с переключениями интенсивно изучался в последние десятилетия и продолжает активно изучаться, что мотивировано, как многочисленными приложениями в технике, физике, биологии, экономике и других областях, так и открытыми в этом направлении теоретическими задачами. Как и для других классов систем управления первоочередной интерес здесь представляет развитие теории устойчивости и стабилизации, где получен целый ряд интересных и важных результатов. Для первоначального знакомства с этими результатами можно, в первую очередь, рекомендовать монографию [1], обзорные статьи [2, 3] и недавние монографии [4, 5].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00528_а).

Начиная с 60-х годов прошлого века начала активно развиваться теория 2D систем. Ее появление мотивировали задачи обработки изображений и многомерных электрических цепей, где появились ставшие в настоящее время классическими 2D модели Роессера и Форназини-Маркезини [6] и список литературы в [6]. Существенный всплеск развития теории 2D систем стимулировали работы Аримото [7], в которых впервые было представлено теоретическое обоснование алгоритмов управления с итеративным обучения (УИО) для роботов, выполняющих повторяющиеся операции и выявлен естественный 2D характер процесса управления (он включает динамический процесс на отдельном повторении и динамический процесс перехода от повторения к повторению). Естественным описанием процессов УИО служат 2D модели в виде повторяющихся процессов [6, 8]. Теория повторяющихся процессов успешно применялась к синтезу УИО в [9, 10], где были получены результаты, подтвержденные экспериментально. В настоящее время теория и приложения УИО продолжают интенсивно развиваться, им посвящены многочисленные публикации. Для первоначального знакомства можно рекомендовать обзорные статьи [11, 12]. Из недавних работ отметим [13], где УИО применяется для высокоточного лазерного напыления металла и приводятся результаты экспериментального подтверждения. Очень важным представляется применение УИО в медицинских роботах для реабилитации больных перенесших инсульт. Известные разработки в этом направлении прошли клинические испытания [14, 15].

Повторяющиеся процессы с переключениями рассматривались в [16, 17]. Эти работы мотивированы задачей проката металла, где металлическая полоска конечной длины приобретает желаемую форму проходя через систему валков, так что выходная форма предыдущей группы валков является входной для следующей группы. В [16] такие системы моделировались линейными повторяющимися процессами с переключаемой динамикой. В обеих цитированных статьях рассматриваются специальные правила переключения. Конечными результатами этих исследований являются алгоритмы синтеза закона управления, которые могут быть реализованы с использованием вычислений на основе линейных матричных неравенств.

Отметим ряд совсем недавних работ [18–21]. В статье [18] рассматривается класс дискретных систем с переключениями, состоящих из линейной части и статической нелинейности, удовлетворяющей ограничениям специального вида. Вводятся определения экспоненциальной устойчивости и среднего времени ожидания и устанавливаются достаточные условия экспоненциальной устойчивости с использованием методов общей и множественной 2D функции Ляпунова соответственно. Полученные результаты далее применяются для синтеза управления с итеративным обучением. В [19] предлагается управление с итеративным обучением высокого порядка для линейных дискретных систем с переключениями при различных начальных условия на повторениях и воздействии ограниченных по норме возмущений. Дискретные линейные системы с переключениями рассматривались также в [20] где начальные условия на повторениях предполагались одинаковыми. Полученный здесь закон управления с итеративным обучением предполагает доступность полного вектора состояния и обеспечивает монотонную сходимость ошибки обучения.

В [21] рассматриваются системы состоящие из переключаемой непрерывной линейной части и липшицевой нелинейности. Предложен адаптивный закон управления с итеративным обучением, предполагающий доступность полного вектора состояния. Во всех перечисленных работах эффективно используется техника линейных матричных неравенств.

В данной работе рассматриваются линейные дискретные системы с переключениями. В отличие от цитированных и других известных работ доступным для измерения является только вектор выхода и закон управления с итеративным обучением формируется на основе ошибки и оценки вектора состояния. Предлагаемый подход развивает результаты авторов [22–25] для систем с переключениями и его отличие от известных состоит в том, что он эффективно использует оценки переменных состояния для улучшения характеристик процесса обучения и открывает возможность синтеза нелинейных законов управления, переключаемых в зависимости от достигнутой точности. Дается пример, в котором рассматривается динамическая модель гибкого поворотного звена в повторяющемся режиме [26]. Получены переключаемые и непереключаемые законы управления с итеративным обучением и приводится их сравнение.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему в повторяющемся режиме, описываемую линейной моделью с переключениями

$$
\begin{aligned}
&x_k(p+1) = A(k)x_k(p) + B(k)u_k(p), \quad (A(k), B(k)) \in \mathcal{F}, \\
&y_k(p) = Cx_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \ldots,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

где T — число шагов на каждом повторении, $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор выходных переменных, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управления, $\mathcal{F} = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_N, B_N)\}$ — множество пар матриц согласованных размеров.

Следуя понятиям, принятым в теории систем с переключениями [1], рассмотрим кусочно постоянное отображение множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+ \to \mathcal{F}$. Такое отображение задается кусочно постоянной функцией $\sigma: \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ так, что $A(k) = A_{\sigma(k)}$ и $B(k) = B_{\sigma(k)}$, $k = 0, 1, 2 \ldots.$

Функцию σ можно рассматривать как *сигнал переключения относительно повторений*. Предположим, что переключения происходят в начале каждого повторения и определим моменты переключения $k_1, k_2, \ldots$ как номера повторений, на которых в системе (2.1) происходят переключения. Таким образом, сигнал переключения определяет на каждом повторении k индекс $\sigma(k) = i \in \mathcal{N}$ активной подсистемы, динамика которой описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&x_k(p+1) = A_i x_k(p) + B_i u_k(p), \quad i \in \mathcal{N}, \\
&y_k(p) = Cx_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Будем предполагать, что моменты переключений наблюдаемы и импульсные эффекты отсутствуют, т.е. значение вектора состояния в момент переключения не меняется скачком, и остается неизменным.

Выходная переменная системы (2.1) на каждом повторении должна воспроизводить желаемую траекторию $y_{ref}(p)$, $0 \leqslant p \leqslant T-1$. Для достижения этой цели можно использовать управление с обратной связью. Обозначим через $e_k(p)$ ошибку воспроизведения желаемой траектории на k-м повторении

$$e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p), \quad 0 \leqslant p \leqslant T-1. \tag{2.3}$$

Если начальные условия на каждом повторении одинаковы управление с обратной связью будет обеспечивать одинаковую ошибку воспроизведения желаемой траектории на всех шагах, причем может оказаться, что величина этой ошибки не соответствует требованиям по точности. Поставим задачу найти такую последовательность входных переменных $u_k(p)$, $k = 0, 1, \ldots$, которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения профиля за конечное число повторений k_{fin} и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$|e_k(p)| \leqslant e^*, \quad k \geqslant k_{fin}, \quad 0 \leqslant p \leqslant T-1. \tag{2.4}$$

Для решения используем подход на основе управления с итеративным обучением, при котором на очередном повторении входная переменная определяется соотношением

$$u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p), \tag{2.5}$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ — корректирующая поправка. Поставленная задача будет решена, если эта поправка обеспечит выполнение условий,

$$\lim_{k\to\infty} |e_k(p)| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} |u_k(p) - u_\infty(p)| = 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant T-1 \tag{2.6}$$

где $u_\infty(p)$ — ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

3. Дискретная 2D модель

Для формирования корректирующей поправки, следуя [25], будем использовать ошибку обучения и оценку вектора состояния $\hat{x}_k(p)$, которая получается с помощью наблюдателя полного порядка.

$$\hat{x}_k(p+1) = A_i\hat{x}_k(p) + B_i u_k(p) + F_i(y_k(p) - C\hat{x}_k(p)), \quad i \in \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение ошибку оценивания и приращения оценки и ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(p) &= x_k(p) - \hat{x}_k(p), \\ \hat{\xi}_{k+1}(p+1) &= \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \\ \tilde{\xi}_{k+1}(p+1) &= \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p), \end{aligned} \tag{3.2}$$

тогда динамику системы с наблюдателем относительно приращений можно описать уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\xi}_{k+1}(p+1) = (A_i - F_i C)\tilde{\xi}_{k+1}(p),\\
&\hat{\xi}_{k+1}(p+1) = F_i C\tilde{\xi}_{k+1}(p) + A_i\hat{\xi}_{k+1}(p) + B_i v_{k+1}(p),\\
&e_{k+1}(p) = -CA_i\tilde{\xi}_{k+1}(p) - CA_i\hat{\xi}_{k+1}(p) + e_k(p) - CB_i v_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где

$$
v_{k+1}(p) = \Delta u_{k+1}(p-1).
$$

Обозначим

$$
\eta_k(p) = [\tilde{\xi}_k(p)^{\mathrm{T}} \;\; \hat{\xi}_k(p)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad A_{i11} = \begin{bmatrix} A_i - F_i C & 0 \\ F_i C & A_i \end{bmatrix}, \quad B_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix},
$$

$$
A_{i12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{i21} = [-CA_i \;\; -CA_i], \quad A_{22} = I, \quad B_{i2} = -C_i B
$$

и запишем (3.3) в виде стандартной модели дискретного повторяющегося процесса [6]:

$$
\begin{aligned}
\eta_{k+1}(p+1) &= A_{i11}\eta_{k+1}(p) + A_{i12}e_k(p) + B_{i1}v_{k+1}(p),\\
e_{k+1}(p) &= A_{i12}\eta_{k+1}(p) + A_{i22}e_k(p) + B_{i2}v_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Корректирующую поправку будем искать в виде закона обратной связи по приращениям

$$
\Delta u_{k+1}(p-1) = v_{k+1}(p) = \varphi(\eta_{k+1}(p), e_k(p)), \quad \varphi(0,0) = 0. \tag{3.5}
$$

Если для всех $0 \leqslant p \leqslant T-1$ $|e_k(p)| \to 0$ при $k \to \infty$, то существует k_{fin}, при котором выполняются условия (2.4). Таким образом, поставленная задача будет решена, если найдется последовательность $v_k(p)$, такая что

$$
\lim_{k\to\infty} |e_k(p)| = 0, \quad |u_\infty(p)| < \infty, \quad 0 \leqslant p \leqslant T-1, \tag{3.6}
$$

при условии, что норма ошибки ограничена сверху монотонно убывающей функцией, где $u_\infty(p) = \lim_{k\to\infty} u_k(p)$. Ясно, что в этом случае существует k_{fin}, начиная с которого будет выполнено условие (2.4).

4. Основные результаты

4.1. Условия устойчивости

Обозначим число переключений сигнала σ на интервале (k_s, k_f) через $N_\sigma(k_f, k_s)$ и введем в рассмотрение *среднее время ожидания* в соответствии со следующим определением

Определение 1. Положительное число $\kappa_a \in \mathbb{Z}^+$ называется средним временем ожидания для сигнала переключения относительно повторений σ, если для некоторого $N_0 \geqslant 0$

$$N_\sigma(k_f, k_s) \leqslant N_0 + \frac{k_f - k_s}{\kappa_a}, \quad k_f \geqslant k_s \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Неравенство (4.1) означает, что в среднем число шагов между любыми двумя последовательными переключениями на рассматриваемом интервале не меньше чем κ_a.

Решение будем искать на основе развития теории устойчивости и диссипативности повторяющихся процессов [22].

Определение 2 [22]. *Система* (3.4), (3.5) *называется экспоненциально устойчивой, если существуют числа $\kappa > 0$ и $0 < \varrho < 1$, такие что*

$$|\eta_k(p)|^2 + |e_k(p)|^2 \leqslant \kappa\varrho^{k+p}, \tag{4.2}$$

где ϱ не зависит от T.

Заметим, в случае выполнения (4.2) гарантируется указанная в предыдущем разделе ограниченность нормы ошибки монотонно убывающей функцией, что, в свою очередь, обеспечивает достижение заданной точности.

Система (3.4), (3.5) в общем случае нелинейна. Универсальным методом анализа устойчивости нелинейных систем является второй метод Ляпунова. Однако уравнения рассматриваемой системы не разрешены относительно полных приращений переменных состояния, и применить этот метод непосредственно невозможно. Для преодоления этой трудности авторами разработан так называемый дивергентный метод векторных функций Ляпунова, в котором, в отличие от классической версии, устойчивость устанавливается на основе свойств дивергенции (дискретного аналога дивергенции) указанных векторных функций. В рассматриваемом случае введем векторную функцию Ляпунова так:

$$V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_{2i}(e_k(p)) \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.3}$$

где $V_1(x_{k+1}(p)) > 0$, $x_{k+1}(t) \neq 0$, $V_{2i}(e_k(p)) > 0$, $y_k(p) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_{2i}(0) = 0$, $i \in \mathcal{N}$. Аналог дивергенции этой функции определим как

$$\mathcal{D}V(\eta_{k+1}(p), y_k(p)) = \Delta_p V_1(\eta_{k+1}(p)) + \Delta_k V_2(e_k(p)), \tag{4.4}$$

где $\Delta_p V_1(\eta_{k+1}(p)) = V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p))$, $\Delta_k V_2(e_k(p)) = V_2(e_{k+1}(p)) - -V_2(e_k(p))$.

Теорема 1. Дискретный повторяющийся процесс (3.4), (3.5) *является экспоненциально устойчивым для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания*

$$\kappa_a > \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\ln\left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right)\right)^{-1} \tag{4.5}$$

и произвольным N_0, если существует векторная функция (4.3) *и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3, такие что*

$$c_1|\eta|^2 \leqslant V_1(\eta) \leqslant c_2|\eta|^2, \tag{4.6}$$

$$c_1|e|^2 \leqslant V_{2i}(e) \leqslant c_2|e|^2, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leqslant -c_3\left(|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2\right). \tag{4.8}$$

Доказательство. Рассмотрим интервал $(0, k_f)$ и обозначим через $N_\sigma = N_\sigma(k_f, 0)$ число переключений на этом интервале. Из неравенства (4.8) следует

$$\mathcal{D}V_{\sigma(k)}(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leqslant -c_3\left(|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2\right). \tag{4.9}$$

Используя (4.6), (4.7) и (4.8), неравенство (4.9) можно переписать как

$$\begin{gathered} V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p)) + V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(p)) - V_{2\sigma(k)}(e_k(p)) \leqslant \\ \leqslant -c_3\left(|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2\right) \leqslant -\frac{c_3}{c_2}(V_1(\eta_{k+1}(p) + V_{2\sigma(k)}(e_k(p)))), \end{gathered} \tag{4.10}$$

или

$$\begin{gathered} V_1(\eta_{k+1}(p+1)) + V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(p)) \leqslant \\ \leqslant \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)\Big(V_1(\eta_{k+1}(p)) + V_{2\sigma(k)}(e_k(p))\Big). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Левая часть (4.11) является положительно определенной, следовательно $0 < < 1 - \frac{c_3}{c_2} < 1$. Обозначим $\lambda = 1 - \frac{c_3}{c_2}$ и перепишем (4.11) в виде

$$V_1(\eta_{k+1}(p+1)) \leqslant \lambda V_1(\eta_{k+1}(p)) + \lambda V_{2\sigma(k)}(e_k(p)) - V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(p)). \tag{4.12}$$

Решая неравенство (4.12) относительно $V_1(x_{k+1}(p))$ получим

$$\begin{gathered} V_1(\eta_{k+1}(p)) \leqslant V_1(\eta_{k+1}(0))\lambda^p + \\ + \sum_{h=0}^{p-1}\Big[\lambda V_{2\sigma(k)}(e_k(h)) - V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(h))\Big]\lambda^{p-1-h}. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Обозначим $H_{k,\sigma(k)}(p) = \sum_{h=0}^{p-1} V_{2,\sigma(k)}(e_k(p))\lambda^{p-1-h}$, тогда из (4.13) следует что

$$H_{k+1,\sigma(k+1)}(p) \leqslant \lambda H_{k,\sigma(k)}(p) + \lambda^p V_1(\eta_{k+1}(0)) - V_1(\eta_{k+1}(p)). \tag{4.14}$$

Пусть на некотором повторении k_n активный режим i переключается на режим j. Из условия (4.7) следует, что

$$V_{2j}(e) \leqslant \mu V_{2i}(e), \quad i, j \in \mathcal{N}, \tag{4.15}$$

где $\mu = \frac{c_2}{c_1} \geqslant 1$. Решая неравенство (4.14) с учетом (4.15) получим

$$\begin{gathered} H_{k,\sigma(k)}(p) \leqslant \mu^{N_\sigma}\lambda^k H_{0,\sigma(0)}(p) + \\ + \mu^{N_\sigma}\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}\Big(\lambda^p V_1(\eta_{n+1}(0)) - V_1(\eta_{n+1}(p))\Big), \end{gathered} \tag{4.16}$$

или

$$\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}V_1(\eta_{n+1}(p))+\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_{2\sigma(k)}(e_k(h))\leqslant$$

$$\leqslant\mu^{N_\sigma}\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}V_1(\eta_{n+1}(p))+\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_{2\sigma(k)}(e_k(h))\leqslant \tag{4.17}$$

$$\leqslant\mu^{N_\sigma}\left(\lambda^p\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}V_1(\eta_{n+1}(0))\;+\;\lambda^k\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_{2,\sigma(0)}(e_0(h))\right).$$

Из неравенства (4.17) следует, что

$$\lambda^{-(p-1)}\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{-n}V_1(\eta_{n+1}(p))+\lambda^{-(k-1)}\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{-h}V_{2\sigma(k)}(e_k(h))\leqslant \tag{4.18}$$

$$\leqslant\mu^{N_\sigma}\left(\lambda^{-(k-1)}\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}V_1(\eta_{n+1}(0))+\right.$$

$$\left.+\lambda^{-(p-1)}\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_{2,\sigma(0)}(e_0(h))\right).$$

По условию все повторения начинаются с одними и теми же начальными условиями, следовательно $V_1(\eta_{n+1}(0))=0$. Кроме того, поскольку $y_{ref}(p)$ ограничена для всех p, то $|e_o(p)|^2=f(p)\leqslant M_f$. Тогда левую часть (4.18) можно оценить следующим образом:

$$\mu^{N_\sigma}\left(\lambda^{-(k-1)}\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}V_1(\eta_{n+1}(0))+\right. \tag{4.19}$$

$$\left.+\lambda^{-(p-1)}\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_{2,\sigma(0)}(e_0(h))\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mu^{N_\sigma}c_2M_f\sum_{h=0}^{T}\lambda^{-h}\leqslant\mu^{N_\sigma}\frac{c_2M_f(\lambda^{-T}-1)}{\lambda^{-1}-1}=C_f\mu^{N_\sigma}$$

для всех $k\leqslant k_f$ и $p\in[0,T]$. С учетом (4.19) из (4.18) следует

$$C_f\mu^{N_\sigma}\geqslant\lambda^{-(p-1)}\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_2(y_0(p))\geqslant c_1\lambda^{-(k-1)}\lambda^{-(p-1)}|\eta_k(p)|^2, \tag{4.20}$$

$$C_f\mu^{N_\sigma}\geqslant\lambda^{-(p-1)}\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}V_2(y_0(h))\geqslant c_1\lambda^{-(k-1)}\lambda^{-(p-1)}|e_k(p-1)|^2 \tag{4.21}$$

для всех $k \leqslant k_f$ и $p \in [0,T]$. Полагая $k = k_f$ с учетом (4.5) из (4.18)–(4.21) получим

$$|\eta_{k_f}(p)|^2 + |e_{k_f}(p)|^2 \leqslant \frac{C\mu^{N_0}}{c_1\lambda}\lambda_0^{k_f+p}$$

для любых k_f и $p \in [0,T]$, где $\lambda_0 = \mu^{\kappa_a^{-1}} = (c_2/c_1)^{\kappa_a^{-1}} < 1$. Это доказывает справедливость утверждения теоремы.

Из доказательства теоремы вытекает следующий результат.

Следствие 1. Дискретный повторяющийся процесс (3.4), (3.5) *является экспоненциально устойчивым для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ, если существует векторная функция*

$$V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = [V_1(\eta_{k+1}(p))\ V_2(e_k(p))]^T \tag{4.22}$$

и положительные скаляры c_1, c_2, c_3, такие что

$$\begin{gathered} c_1|\eta|^2 \leqslant V_1(\eta) \leqslant c_2|\eta|^2, \\ c_1|e|^2 \leqslant V_2(e) \leqslant c_2|e|^2, \\ \mathcal{D}V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leqslant -c_3\left(|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2\right). \end{gathered} \tag{4.23}$$

4.2. Синтез на основе теории диссипативности

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор

$$z_{k+1}(p) = C_1\eta_{k+1}(p) + C_2 e_k(p) + Dv_{k+1}(p), \tag{4.24}$$

где C_1, C_2 и D — постоянные матрицы согласованных размеров. Следуя [22] введем следующее определение.

Определение 3. Дискретный повторяющийся процесс (3.4) *называется экспоненциально диссипативным относительно входной переменной $v_{k+1}(t)$ и выходной переменной $z_{k+1}(t)$, определенной в* (4.24), *если существуют векторная функция* (4.3) *и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 такие, что*

$$\begin{gathered} c_1|\eta_{k+1}(p)|^2 \leqslant V_1(\eta_{k+1}(p)) \leqslant c_2|\eta_{k+1}(p)|^2, \\ c_1|e_k(p)|^2 \leqslant V_{2i}(e_k(p)) \leqslant c_2|e_k(p)|^2, \\ \mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(t), e_k(t)) \leqslant S_i(z_{k+1}(p), v_{k+1}(p)) - c_3\left(|\eta_{k+1}(t)|^2 + |e_k(t)|^2\right), \quad i \in \mathcal{N}, \end{gathered}$$

где S_i – скалярная функция, такая что $S_i(0,0) = 0$.

В теории диссипативности по Виллемсу функции S_i и V_i называются функцией запаса и функцией накопления. Нетрудно видеть, что если при некотором выборе z последовательность (3.5) удовлетворяет условию $S_i(z_{k+1}(p), v_{k+1}(p)) \leqslant 0$, $i \in \mathcal{N}$, то система (3.4), (3.5) в соответствии с теоремой 1 будет экспоненциально устойчива для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания (4.5). Таким образом, задача сводится к нахождению *стабилизирующей тройки* $\{V, z, v\}$. Обозначим

$$\zeta_{k+1}(p) = \begin{bmatrix} \eta_{k+1}(p) \\ e_k(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Определим блочно-диагональную матрицу $P_i = \mathrm{diag}[P_1\ P_{2i}] \succ 0$ как решение неравенства Риккати

$$\bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A} - (1-\sigma)P_i - \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i + Q \preccurlyeq 0, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.25}$$

где $0 < \sigma < 1$ – положительный скаляр, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ — весовые матрицы. Нетрудно видеть, что если система линейных матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} (1-\sigma)X_i & X\bar{A}^T & X_i \\ \bar{A}_i X_i & X_i + \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T & 0 \\ X_i & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad X_i \succ 0, \quad i \in \mathcal{N} \tag{4.26}$$

разрешима относительно $X_i = \mathrm{diag}[X_1\ X_{2i}] \succ 0$, то $P_i = X_i^{-1}$, $i \in \mathcal{N}$.

Следующая теорема предлагает одно из возможных множеств стабилизирующих троек.

Теорема 2. *Дискретный повторяющийся процесс* (3.4) *является экспоненциально диссипативным с функцией запаса*

$$\begin{gathered} S_i(v_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) = z_{k+1}^{\mathrm{T}}(p) \left(\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right)^{-1} z_{k+1}(p) + \\ + 2z_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} v_{k+1}(p) + v_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right] v_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N} \end{gathered} \tag{4.27}$$

относительно входной переменной $v_{k+1}(p)$ *и выходной переменной*

$$z_{k+1}(p) = \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.28}$$

где $P_i = X_i^{-1}$, $X_i = \mathrm{diag}[X_1\ X_2 i] \succ 0$ $i \in \mathcal{N}$, *— решение* (4.25). *Множество последовательностей корректирующих поправок* (3.5), *обеспечивающих экспоненциальную устойчивость системы* (3.4), (3.5) *определяется соотношением*

$$v_{k+1}(p) = -\left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P \bar{A}_i \Theta_i(\zeta_{k+1}(p)) \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.29}$$

где $\Theta(\zeta)$ *— симметричная матричная функция, удовлетворяющая соотношению*

$$M_i - M_i\Theta_i(\zeta) - \Theta_i(\zeta)M_i + \Theta_i(\zeta)M_i\Theta_i(\zeta) - Q - (\sigma - \mu)P_i \prec 0, \quad i \in \mathcal{N} \tag{4.30}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2n_x+n_y}$, *где* $M_i = \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i$, $0 < \mu < \sigma$, $i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции накопления (4.3) в виде квадратичных форм:

$$V_1(\eta_{k+1}(p)) = \eta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} P_1 \eta_{k+1}(p), \quad V_{2i}(e_k(p)) = e_k(p)^{\mathrm{T}}(t) P_2 e_k(p), \quad i \in \mathcal{N},$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ — диагональные блоки матрицы P, представляющей собой решение (4.25). Вычисляя аналог дивергенции (4.3) вдоль траекторий (3.4), получим, что

$$\mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \tag{4.31}$$
$$= \zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}}\Big(\bar{A}_i^{\mathrm{T}} P \bar{A}_i - (1-\sigma)P_i - \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}\left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i + Q\Big)\zeta_{k+1}(p) +$$
$$+ \zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}\left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p) - \zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}}(Q + \sigma P_i)\zeta_{k+1}(p) +$$
$$+ 2\zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i v_{k+1}(p) + v_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i v_{k+1}(p) \leqslant$$
$$\leqslant \zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A} \zeta_{k+1}(p) + 2\zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i v_{k+1}(p) +$$
$$+ v_{k+1}(p)^{\mathrm{T}}\left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R\right] v_{k+1}(p) - \zeta_{k+1}(p)^{\mathrm{T}}(Q + \sigma P_i)\zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}.$$

Из (4.31) следует, что (3.4) экспоненциально диссипативна относительно входной переменной $v_{k+1}(p)$ и выходной переменной (4.28) с функцией запаса (4.27). Из (4.31) также следует, что если последовательность (3.5) определяется соотношением (4.29), то

$$\mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leqslant -\mu\lambda_{\min}(P_i)\left(|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2\right)$$

и в соответствии с теоремой 1 система (4.29), (3.4) является экспоненциально устойчивой для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания (4.5). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Поскольку приращение ошибки оценивания $\tilde{\xi}_{k+1}(p)$ недоступно для формирования корректирующей поправки, матрица Θ_i всегда должна иметь иметь вид $\Theta_i(\zeta) = \mathrm{diag}[0_{n_x}\ \Theta_{i1}(\zeta)]$. В простейшем случае матрица Θ_{i1} может быть выбрана не зависящей от ζ и тогда, после того, как матрица P_i найдена, условие (4.30) сводится к системе линейных матричных неравенств, при этом теорема 2 дает линейную последовательность корректирующих поправок. В общем случае $\Theta_i(\zeta)$ зависит от изменения ошибки относительно повторений и можно пытаться уменьшать значения коэффициентов корректирующих поправок после достижения требуемой точности и, наоборот, увеличивать эти коэффициенты, когда ошибка велика, другими словами, вводить адаптацию к величине ошибки. Такой подход позволит найти разумный компромисс между скоростью обучения и энергозатратами на управление. Наиболее просто это можно сделать за счет кусочно-постоянного изменения Θ, в зависимости от достигнутой точности. Такое решение для систем без переключений рассмотрено в [24].

4.3. Альтернативный подход

В ряде случаев представляет интерес построить управление без переключений. Здесь более эффективным представляется другой подход к решению.

Рассмотрим функцию Ляпунова (4.22) с компонентами

$$V_1(\xi_{k+1}(p)) = \xi_{k+1}^T(p)P_1\xi_{k+1}(p), \quad V_2(e_k) = e_k^T(p)P_2e_k(p),$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$. Закон коррекции будем искать в виде линейной обратной связи по приращениям доступных для измерения переменных и по ошибке

$$v_{k+1}(p) = K_1\hat{\xi}_{k+1}(p) + K_2e_k(p) = KH\zeta_{k+1}(p), \tag{4.32}$$

где $K = [K_1\ K_2]$, $H = [0\ I_{n_x+n_y}]$. Вычисляя дивергенцию (4.22) вдоль траекторий (3.4), (4.32) получим

$$\mathcal{D}V = \bar{x}^T\left(\bar{A}_{ci}^T P_i \bar{A}_{ci} - P\right)\bar{x}, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.33}$$

где

$$P_i = \mathrm{diag}[P_1\ P_{2i}], \quad \bar{A}_{ci} = \begin{bmatrix} A_i - F_iC & 0 & 0 \\ F_iC & A_i + B_iK_1 & B_iK_2 \\ -CA_i & -C(A_i + B_iK_1) & I - CB_iK_2 \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Предположим, что матрицы $P \succ 0$ и K удовлетворяют системе неравенств

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_iKH)^T P(\bar{A}_i + \bar{B}_iKH) - P_i + Q + H^TK^TRKH \preccurlyeq 0, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.34}$$

где $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ — матрицы аналогичные весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора. Поскольку выполняется (4.33) то согласно следствию теоремы 1 система (3.4), (4.32) является экспоненциально устойчивой для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ. Неравенства (4.34) с помощью известной леммы о дополнении Шура сводятся к линейным матричным неравенствам и уравнению относительно переменных $X = \mathrm{diag}[P_1^{-1}\ P_2^{-1}]$, Y, Z

$$\begin{bmatrix} X & (\bar{A}_iX + \bar{B}_iYH)^T & X & (YH)^T \\ \bar{A}_iX + \bar{B}_iYH & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ YH & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{4.35}$$

$$X \succ 0, \quad HX = ZH, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Если неравенства и уравнение (4.35) совместны, то $K = [K_1\ K_2] = YZ^{-1}$, поскольку, в силу структуры матрицы H, матрица Z является невырожденной.

5. Пример

Рассмотрим модель манипулятора с одним гибким звеном [26], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения. Динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\dot{x}_k(t) = A_0x_k(t) + B_0u_k(t), \quad y_k(t) = Cx_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_f, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.1}$$

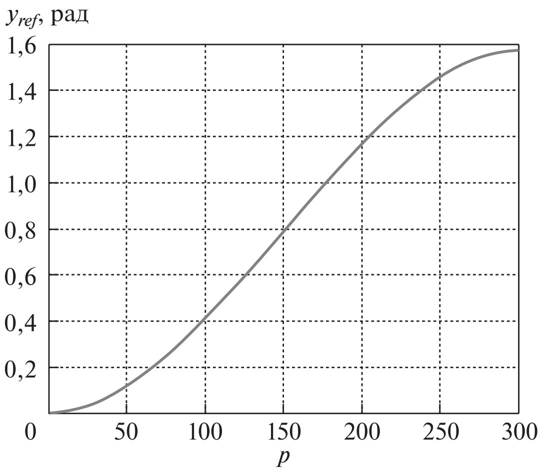


Рис. 1. Желаемая траектория изменения угла поворота вала сервомотора.

где $x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & \alpha(t) & \dot{\theta}(t) & \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\theta(t)$ — угол поворота сервопривода, $\alpha(t)$ — угол отклонения гибкого звена,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{K_s}{J_{eq}} & -\dfrac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \dfrac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J_{eq}} \\ -\dfrac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

B_{eq} – коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s – жесткость гибкого звена, J_l – момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} – момент инерции сервопривода. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная $y(t) = \theta(t)$ воспроизводила бы желаемую траекторию $y_{ref}(t)$ с заданной точностью e^*. Непосредственному измерению доступен только угол θ.

Для расчетов и моделирования были приняты следующие номинальные значения параметров из [26]: $B_{eq} = 0{,}004$ Н·м/(рад/с), $K_s = 1{,}3$ Н·м/рад, $J_l = 0{,}0038$ кг·м^2, $J_{eq} = 2{,}08 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2. Продолжительность цикла повторения T_f составляет 3 с, требуемая точность $e^* = 0{,}5$ град. $= 0{,}00873$ рад.

Желаемая траектория изменения выходной переменной описывается уравнением и представлена на рис. 1

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0; T_f].$$

Предположим, что алгоритм управления реализуется на компьютере с периодом дискретности $T_s = 0{,}01$ с. Эквивалентная дискретная модель (5.1), связывающая значения переменных в моменты $0,\ T_s,\ 2T_s,\ \ldots$ запишется в виде

$$x_k(p+1) = Ax_k(p) + Bu_k(p), \quad p = 0, 1, \ldots, N_{T_f}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

где $A = \exp(A_0 T_s)$, $B = \left(\int\limits_0^{T_s} \exp(A_0\tau)d\tau\right) B_0$, N_{T_f} — число периодов дискретности на отрезке $[0,\ T_f]$.

При начале работы манипулятора несколько первых повторений проходят без нагрузки для предварительной настройки, при этом значения параметров соответствуют номинальным. После трех повторений манипулятор нагружается, при этом $J_l = 0{,}0076$ кг $\cdot$ м^2, $J_{eq} = 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг $\cdot$ м^2. Исходя из физического смысла переменных состояния зададим весовые матрицы $Q = \mathrm{diag}[10^{-3} I_8\ 10^6]$, $R = 0{,}01$. Рассматривая скачкообразное изменение нагрузки на манипулятор как переключение, воспользуется результатами раздела 4.3, которые удобны для сравнительного анализа. Обозначим матрицы ненагруженного манипулятора через A_1, B_1 и матрицы нагруженного манипулятора A_2, B_2. Переключаемый алгоритм управления с итеративным обучением имеет вид

$$\hat{x}_k(p) = A_i\hat{x}_k(p-1) + B_i u_k(p-1) + F_i(y_k(p-1) - C\hat{x}_k(p-1)),$$
$$i = \begin{cases} 1 & \text{если } k < 3, \\ 2 & \text{если } k \geqslant 3, \end{cases}$$
$$F_i = \begin{cases} F_1 = [1{,}9199\ \ -1{,}8415\ 91{,}1151\ \ -84{,}9936]^T & \text{если } k < 3, \\ F_2 = [1{,}7575\ \ -1{,}7001\ 81{,}2812\ \ -78{,}3325]^T & \text{если } k \geqslant 3, \end{cases}$$
$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1\left(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)\right) + K_{2i}\left(y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)\right),$$
$$K_1 = [-31{,}0300\ \ -0{,}3018\ \ -0{,}4530\ \ -0{,}0444], \quad K_{2i} = \begin{cases} 9{,}5140 & \text{если } k < 3, \\ 27{,}1609 & \text{если } k \geqslant 3. \end{cases}$$

При использовании алгоритма без переключений

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1\left(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)\right) + K_2\left(y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)\right),$$
$$K_1 = [-28{,}1965\ \ -0{,}2408\ \ -0{,}4345\ \ -0{,}0395], \quad K_2 = 12{,}8135.$$

В качестве меры точности воспроизведения желаемой траектории удобно выбрать среднеквадратическую ошибку обучения

$$E(k) = \sqrt{\frac{1}{N_{T_f}} \sum_{p=0}^{N_{T_f}} |e_k(p)|^2}. \tag{5.3}$$

На рис. 2, 3 показано изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением и без переключения соответственно.

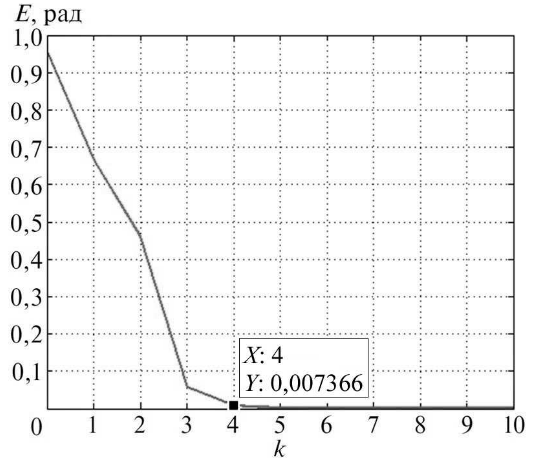


Рис. 2. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением.

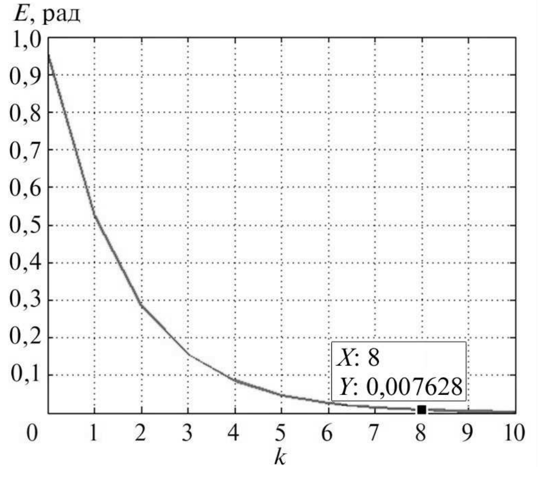


Рис. 3. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления без переключения.

Анализ полученных зависимостей показывает, что в случае управления с переключением требуемая точность достигается сразу же после настроечных повторений, в то время как в случае управления без переключений для достижения нужной точности требуются дополнительные шаги в рабочем режиме, что, очевидно, нежелательно.

6. Заключение

В данной работе предложен метод синтеза управления с итеративным обучением с использованием наблюдателя состояния для систем с переключениями на основе теории 2D-систем в форме дискретных повторяющихся процессов. Приведенный пример показывает, что в случае, когда переключения наблюдаемы, управление с переключением позволяет ускорить сходимость процесса обучения. Дальнейшее развитие исследований в данном направлении авторы связывают с развитием теории для дифференциальных повторяющихся процессов с переключениями и ее последующим применением к задачам синтеза управления с итеративным обучением. Дальнейшего исследования требует вопрос выбора нелинейной функции $\Theta_i(\zeta)$ в методе синтеза на основе диссипативности (теорема 2 и замечание 1 к ней). Значительный интерес представляют сетевые задачи управления с итеративным обучением, где переключения являются естественной моделью изменений информационной структуры сети. Комбинация управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
2. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulff K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Review 2007. V. 49. P. 545–592.
3. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V. 54. P. 308–321.
4. *Sun Z., Ge S.S.* Stability Theory of Switched Dynamical Systems. London: Springer-Verlag, 2011.
5. *Alwan M.S, Liu X.* Theory of Hybrid Systems:Deterministic and Stochastic. Beijing: Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Higher Education Press, 2018.
6. *Rogers E., Gałkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 349. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
7. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering operation of robots by learning // J. Robotic Systems. 1984. V. 1. No. 2. P. 123–140.
8. *Bolder J., Oomen T.* Iterative learning control: A 2D system approach // Automatica. 2016. V. 71. P. 247–253.
9. *Hladowski L., Gałkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C.T., Lewin P.L.* Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance // Control Engineering Practice. 2010. V. 18. P. 339–348.
10. *Paszke W., Rogers E., Gałkowski K., Cai Z.* Robust finite frequency range iterative learning control design with experimental verification // Control Engineering Practice. 2013. V. 23. P. 1310–1320.
11. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.* A survey of iterative learning control // IEEE Control Systems Magazine. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
12. *Ahn H.-S., Chen Y.-Q., Moore K.L.* Iterative learning control: Brief survey and categorization // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
13. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive process control of additive manufacturing with application to laser metal deposition // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.

14. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burridge J.H., Meadmore K.L.* Iterativel learning control in health care: electrical stimulation and robotic-assisted upper-limb stroke rehabilitation // IEEE Control Systems Magazine. 2012. 2012. V. 32. No. 1. P. 18–43.
15. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burridge J.H.* The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // J. Neuro Engineering Rehabil. 2014. V. 11. No. 105. https://doi.org/10.1186/1743-0003-11-105.
16. *Bochniak J., Gałkowski K., Rogers E.* Multi-machine operations modelled and controlled as switched linear repetitive processes // Int. J. Control. 2008. V. 81. P. 1549–1567.
17. *Bochniak J., Gałkowski K., Rogers E., Mehdi D., Bachelier O., Kummert A.* Stabilization of discrete linear repetitive processes with switched dynamics // Multidim. Syst. Sign. Process. 2006. V. 17. P. 271–295.
18. *Shao Z., Xiang Z.* Iterative learning control for non-linear switched discrete-time systems // IET Control Theory Appl. 2017. V. 11. No. 6. P. 883–889.
19. *Shao Z., Duan Z.* A High-order Iterative Learning Control for Discrete-time Linear Switched Systems // Proc. 57th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE). Nara, Japan. 2018. P. 354–361.
20. *Ouerfelli H., Ben Attia S., Salhi S.* Switching-iterative learning control method for discrete-time switching system // Int. J. Dynamics Control. 2018. V. 6. P. 1755–1766.
21. *Shao Z., Xiang Z.* Adaptive iterative learning control for switched nonlinear continuous-time systems // Int. J. Syst. Sci. 2019. V. 50. No. 5. P. 1028–1038.
22. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Gałkowski K., Rogers E.* Dissipivity and stabilization of nonlinear repetitive processes // Systems & Control Letters. 2016. V. 91. P. 14–20.
23. *Pakshin P., Emelianova J., Gałkowski K., Rogers E.* Stabilization of two-dimensional nonlinear systems described by Fornasini-Marchesini and Roesser models //SIAM J. Control Optim. 2018. V. 56. P. 3848–3866.
24. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Gałkowski K., Rogers E.* Passivity based stabilization of repetitive processes and iterative learning control design // Systems & Control Letters. 2018. V. 122. P. 101–108.
25. *Емельянова Ю.П., Пакшин П.В.* Синтез управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния // АиТ. 2019. № 9. С. 9–24.

    Emelianova J.P., Pakshin P.V. Iterative Learning Control Design Based on State Observer // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 9. P. 1561–1573.
26. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 21.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

**© 2020 г. Р.Г. СТРОНГИН, д-р физ.-мат. наук (strongin@unn.ru),
В.П. ГЕРГЕЛЬ, д-р техн. наук (gergel@unn.ru),
К.А. БАРКАЛОВ, канд. физ.-мат. наук (barkalov@vmk.unn.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)**

АДАПТИВНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ БЛОЧНО-РЕКУРСИВНОЙ СХЕМЫ РЕДУКЦИИ РАЗМЕРНОСТИ[1]

Рассматриваются задачи многомерной многоэкстремальной оптимизации и численные методы их решения. Об оптимизируемой функции делается лишь общее предположение, что она удовлетворяет условию Липшица с априори неизвестной константой (задачи такого типа часто встречаются в приложениях). Рассмотрено два способа редукции размерности в задачах многомерной оптимизации: использование кривых Пеано (разверток) и рекурсивная многошаговая схема. Предложена обобщенная схема, комбинирующая эти два подхода. В новой схеме решение многомерной задачи сводится к решению семейства задач меньшей размерности, в которых в свою очередь используются развертки. Реализован адаптивный алгоритм, в котором все возникающие подзадачи решаются одновременно. Проведены численные эксперименты на нескольких сотнях тестовых задач, подтверждающие эффективность предложенной схемы редукции размерности.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, многоэкстремальные функции, редукция размерности, кривые Пеано, рекурсивная оптимизация.

DOI: 10.31857/S0005231020080103

1. Введение

В статье рассматриваются задачи глобальной оптимизации вида

$$\begin{gathered}\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y) : y \in D\}, \\ D = \left\{y \in \mathrm{R}^N : a_i \leqslant y_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant N\right\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Предполагается, что целевая функция может быть многоэкстремальной, задана неявно (функция вида “черный ящик”), а вычисление ее значений связано с решением задачи численного моделирования и является трудоемкой операцией.

Любая возможность достоверно оценить глобальный оптимум в многоэкстремальной задаче с функциями вида “черный ящик” принципиально основана на априорной информации, позволяющей связать возможные значения

[1] Работа выполнена по теме государственного задания (0729-2020-0055) при частичной поддержке научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1).

целевой функции с ее известными значениями в точках проведенных испытаний. Для многих прикладных задач типичной является ситуация, когда ограниченное изменение вектора параметров y вызывает ограниченное изменение значений $\varphi(y)$. Математической моделью, описывающей указанное предположение, является условие Липшица

$$\left|\varphi(y') - \varphi(y'')\right| \leqslant L \left\|y' - y''\right\|, \quad y', y'' \in D, \quad 0 < L < \infty.$$

Предположение липшицевости целевой функции типично для многих подходов к разработке оптимизационных алгоритмов. Первые методы липшицевой оптимизации были предложены в начале 70-х гг. XX в. [1–3]; с тех пор данное направление продолжает активно развиваться [4–8]. Например, многие известные методы основаны на различных способах разбиения области поиска на систему подобластей и последующего выбора наиболее перспективной подобласти для размещения очередного испытания (вычисления целевой функции). Результаты, полученные в данном направлении, представлены в публикациях [9–13].

В настоящее время для решения задач оптимизации с функциями вида "черный ящик" широко используются генетические и популяционные алгоритмы (см., например, [14, 15]), которые так или иначе основаны на идеях случайного поиска. В силу простоты реализации и использования они получили большую популярность, однако по качеству работы (численной оценкой которого может служить число корректно решенных задач из некоторого набора) они существенно уступают детерминированным алгоритмам [16, 17].

Одним из эффективных детерминированных методов решения задач многоэкстремальной оптимизации является *информационно-статистический алгоритм глобального поиска*. Основы информационно-статистического подхода были заложены Ю.И. Неймарком [18, 19] и развиты Р.Г. Стронгиным [20, 21]. Впоследствии метод, изначально предложенный для решения безусловных задач, был успешно обобщен для решения задач с невыпуклыми ограничениями [22, 23] и многокритериальных задач [24]. Для различных вариантов алгоритма были предложены способы распараллеливания, учитывающие особенности архитектуры современных вычислительных систем [25].

Разработанные методы основаны на редукции исходной многомерной задачи к эквивалентной одномерной или к системе одномерных подзадач с последующим решением одномерных задач эффективными методами оптимизации функций одной переменной. Предложено две такие схемы: редукция на основе кривых, заполняющих пространство (кривых Пеано, или *разверток*) [26, 27], и схема рекурсивной вложенной оптимизации (*многошаговая схема*) [28, 29]. В [30] предложена адаптивная многошаговая схема, существенно повышающая эффективность оптимизации по сравнению с базовым прототипом. В данной статье предлагается обобщение адаптивной схемы редукции размерности, комбинирующее использование вложенной оптимизации и кривых Пеано. При таком подходе вложенные подзадачи в адаптивной схеме могут быть как одномерными, так и многомерными; в последнем случае для редукции размерности вложенных подзадач используются развертки.

2. Базовый алгоритм глобального поиска

В качестве базовой задачи рассмотрим одномерную задачу многоэкстремальной оптимизации

$$\varphi^* = \varphi(x^*) = \min\{\varphi(x) : x \in [0, 1]\} \tag{2}$$

с целевой функцией, удовлетворяющей условию Липшица.

Приведем описание алгоритма глобального поиска (АГП) для решения базовой задачи в соответствии с [27]. В процессе своей работы АГП порождает последовательность точек x^i, в которых вычисляются значения целевой функции $z^i = \varphi(x^i)$. Будем называть процесс вычисления значения целевой функции *испытанием*.

В соответствии с алгоритмом первые два испытания проводятся в граничных точках отрезка $[0, 1]$, т.е. $x^0 = 0$, $x^1 = 1$. В этих точках вычисляются значения целевой функции $z^0 = \varphi(x^0)$, $z^1 = \varphi(x^1)$ и устанавливается значение счетчика $k = 1$. Точка очередного испытания x^{k+1}, $k \geqslant 1$, выбирается в соответствии со следующими правилами.

Шаг 1. Перенумеровать нижним индексом (начиная с 0) точки x^i, $0 \leqslant i \leqslant k$, проведенных испытаний в порядке возрастания координаты, т.е.

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 1.$$

Сопоставить точкам x_i, $0 \leqslant i \leqslant k$, вычисленные в них значения целевой функции $z_i = \varphi(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

Шаг 2. Вычислить максимальное абсолютное значение относительной первой разности

$$\mu = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{|z_i - z_{i-1}|}{\Delta_i}, \tag{3}$$

где $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Если вычисленное в соответствии с данной формулой значение равно нулю, то положить $\mu = 1$.

Шаг 3. Для всех интервалов (x_{i-1}, x_i), $1 \leqslant i \leqslant k$, вычислить значение

$$R(i) = r\mu\Delta_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{r\mu\Delta_i} - 2(z_i + z_{i-1}), \tag{4}$$

называемое *характеристикой* интервала; величина $r > 1$ является параметром алгоритма.

Шаг 4. Найти интервал (x_{t-1}, x_t) с максимальной характеристикой

$$R(t) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} R(i). \tag{5}$$

Если максимальная характеристика соответствует нескольким интервалам, то в качестве t выбрать минимальное число, удовлетворяющее (5).

Шаг 5. Провести новое испытание в точке

$$x^{k+1} = \frac{1}{2}(x_{t-1} + x_t) - \frac{z_t - z_{t-1}}{2r\mu}. \tag{6}$$

Алгоритм прекращает свою работу при выполнении условия $\Delta_t < \epsilon$; здесь t из (5), а $\epsilon > 0$ — заданная точность. В качестве оценки решения задачи выбираются значения

$$z_k^* = \min_{0 \leqslant i \leqslant k} \varphi(x^i), \quad x_k^* = \arg \min_{0 \leqslant i \leqslant k} \varphi(x^i).$$

Теоретические условия, определяющие сходимость алгоритма, представлены в [27].

3. Редукция размерности

3.1. Редукция размерности с помощью кривых, заполняющих пространство

Рассмотрим схему редукции размерности, основанную на использовании кривых, заполняющих пространство (кривых Пеано). Известно, что подобного типа кривые позволяют однозначно отобразить одномерный отрезок $[0, 1]$ на многомерную область, т.е.

$$\{y(x) : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = \left\{y \in \mathrm{R}^N : -2^{-1} \leqslant y_i \leqslant 2^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant N\right\}. \tag{7}$$

Отметим, что теоретическая кривая $y(x)$ определяется как предельный объект. Поэтому при практической реализации может быть построено лишь некоторое приближение к истинной кривой. Методы построения подобных аппроксимаций (называемых *развертками*) рассмотрены в [21, 27]. При этом точность приближения развертки к истинной кривой $y(x)$ зависит от *плотности* развертки m (являющейся параметром ее построения) и составляет величину порядка 2^{-m} по каждой координате.

Использование подобного рода отображений позволяет свести решение многомерной задачи (1) к решению эквивалентной ей одномерной

$$\varphi(y^*) = \varphi(y(x^*)) = \min \{\varphi(y(x)) : x \in [0, 1]\}. \tag{8}$$

Важным свойством при этом является сохранение ограниченности относительных разностей функции (см. [27]). Если функция $\varphi(y)$ в области D удовлетворяла условию Липшица, тогда редуцированная функция $\varphi(y(x))$, $x \in [0, 1]$, будет удовлетворять равномерному условию Гельдера

$$|\varphi(y(x_1)) - \varphi(y(x_2))| \leqslant H \, |x_1 - x_2|^{1/N}, \tag{9}$$

где константа Гельдера H связана с константой Липшица L соотношением

$$H = 2L\sqrt{N + 3}. \tag{10}$$

Условия (9), (10) позволяют легко обобщить "одномерный" алгоритм из раздела 2 для решения многомерных задач. Для этого достаточно заменить длины интервалов Δ_i в формулах (3), (4) на длины

$$\Delta_i = (x_i - x_{i-1})^{1/N}, \tag{11}$$

а также заменить формулу (6) для вычисления точки нового испытания на формулу

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \mathrm{sign}(z_t - z_{t-1})\frac{1}{2r}\left[\frac{|z_t - z_{t-1}|}{\mu}\right]^N. \tag{12}$$

3.2. Многошаговая схема редукции размерности

Многошаговая схема редукции размерности (схема вложенной оптимизации) основана на известном соотношении [21, 25]

$$\min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{y_1 \in [a_1, b_1]} \min_{y_2 \in [a_2, b_2]} \dots \min_{y_N \in [a_N, b_N]} \varphi(y), \tag{13}$$

которое позволяет свести решение исходной многомерной задачи (1) к решению семейства рекурсивно связанных одномерных подзадач.

Для формального описания многошаговой схемы введем семейство функций, определяемых в соответствии с соотношениями

$$\varphi_N(y_1, \dots, y_N) \equiv \varphi(y_1, \dots, y_N), \tag{14}$$

$$\varphi_i(y_1, \dots, y_i) = \min_{y_{i+1} \in [a_{i+1}, b_{i+1}]} \varphi_{i+1}(y_1, \dots, y_i, y_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1. \tag{15}$$

Тогда, в соответствии с (13), для решения многомерной задачи (1) достаточно решить одномерную задачу

$$\varphi^* = \min_{y_1 \in [a_1, b_1]} \varphi_1(y_1). \tag{16}$$

Однако каждое вычисление значения функции φ_1 в некоторой фиксированной точке y_1 предполагает решение одномерной задачи оптимизации второго уровня

$$\varphi_1(y_1) = \min_{y_2 \in [a_2, b_2]} \varphi_2(y_1, y_2). \tag{17}$$

Вычисление значений функции φ_2 в свою очередь требует одномерной минимизации функции φ_3 и т.д. вплоть до решения задачи

$$\varphi_{N-1}(y_1, \dots, y_{N-1}) = \min_{y_N \in [a_N, b_N]} \varphi_N(y_1, \dots, y_N) \tag{18}$$

на последнем уровне рекурсии.

Возникающие при этом подзадачи и взаимосвязи между ними отображены на рис. 1. Наглядно видно, что структура взаимосвязей имеет форму дерева, причем функции $\varphi_N(y_1, \dots, y_N)$ на N-м уровне являются листьями дерева задач, их значения вычисляются непосредственно.

Для описанной выше многошаговой схемы было предложено обобщение — *блочная многошаговая схема*, которое комбинирует использование разверток и вложенной оптимизации [31].

Рассмотрим y как вектор, состоящий из векторов (блочных переменных)

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N) = (u_1, u_2, \dots, u_M), \tag{19}$$

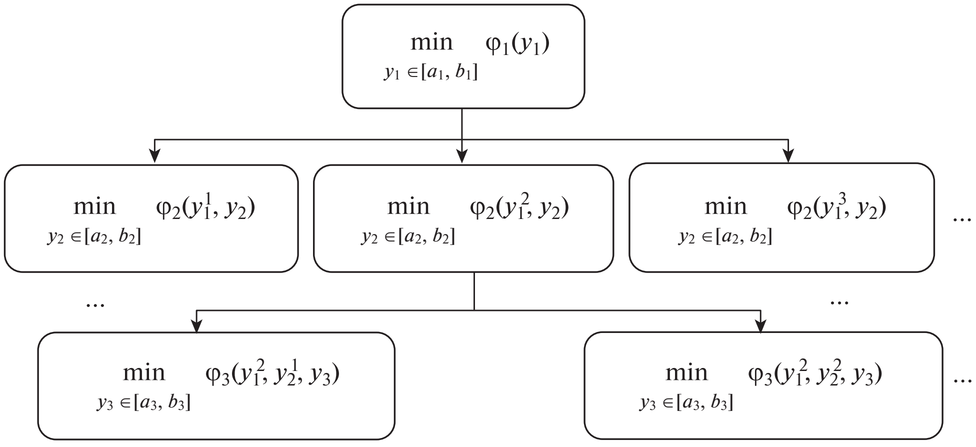


Рис. 1. Взаимосвязи между подзадачами в многошаговой схеме.

где i-я блочная переменная, т.е. вектор u_i, состоит из взятых последовательно компонент вектора y, т.е. $u_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_{N_1})$, $u_2 = (y_{N_1+1}, y_{N_1+2}, \ldots \ldots, y_{N_1+N_2}), \ldots, u_M = (y_{N-N_M+1}, y_{N-N_M+2}, \ldots, y_N)$, а $N_1 + N_2 + \ldots + N_M = N$.

Используя введенные обозначения, основное соотношение многошаговой схемы (13) может быть переписано в форме

$$\min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{u_1 \in D_1} \min_{u_2 \in D_2} \ldots \min_{u_M \in D_M} \varphi(y), \tag{20}$$

где подобласти D_i, $1 \leqslant i \leqslant M$, являются проекциями исходной области поиска D на подпространства, соответствующие переменным u_i, $1 \leqslant i \leqslant M$.

Способ решения задачи (1) на основе соотношения (20) будет в целом повторять (14)–(16). Необходимо лишь заменить исходные переменные y_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, на блочные переменные u_i, $1 \leqslant i \leqslant M$.

При этом вложенные подзадачи

$$\varphi_i(u_1, \ldots, u_i) = \min_{u_{i+1} \in D_{i+1}} \varphi_{i+1}(u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant M-1, \tag{21}$$

будут многомерными, что является основным отличием от исходной многошаговой схемы. Для решения многомерных подзадач может быть использована схема редукции размерности на основе кривых Пеано.

3.3. Блочная адаптивная схема редукции размерности

Решение возникающего множества подзадач вида (15) (для многошаговой схемы) или вида (21) (для блочной многошаговой схемы) может быть организовано различными способами. Очевидный способ (детально проработанный в [28, 32, 33] для многошаговой схемы и в [31, 34] для блочной многошаговой схемы) основан на решении подзадач в соответствии с рекурсивным порядком их порождения. Однако здесь возникает потеря значительной части информации о целевой функции.

Иным подходом является адаптивная схема, в которой все подзадачи решаются одновременно, что позволяет более полно учитывать информацию о многомерной задаче и за счет этого ускорять процесс ее решения. Для случая одномерных подзадач данный подход был теоретически обоснован и апробирован в [30, 35, 36]. Настоящая статья предлагает обобщение адаптивной схемы для случая многомерных подзадач.

Перед изложением новой схемы организации вычислений еще раз отметим, что в рамках исходной многошаговой схемы (или же ее блочного варианта) порождаемые подзадачи решаются строго последовательно; получаемая в результате иерархическая схема порождения и решения подзадач (в виде дерева) представлена на рис. 1. Построение этого дерева происходит динамически в процессе решения исходной задачи (1). При этом вычисление одного значения функции $\varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_i)$ на i-м уровне требует полного решения всех задач одного из поддеревьев уровня $i+1$.

Адаптивная многошаговая схема редукции размерности изменяет порядок решения подзадач: они будут решаться не по одной (в соответствии с их иерархией в дереве задач), а одновременно, т.е. будет существовать некоторое множество подзадач, находящихся в процессе решения. В рамках новой схемы:

- для вычисления значения функции i-го уровня из (21) порождается новая задача уровня $i+1$, в которой проводится только одно испытание, после чего новая порожденная задача включается в множество уже имеющихся задач, подлежащих решению;
- итерация глобального поиска состоит в выборе одной (наиболее перспективной) задачи из множества имеющихся задач, в которой проводится одно испытание; точка проведения нового испытания определяется в соответствии с алгоритмом из подраздела 3.1;
- в качестве минимальных значений функций из (21) используются их текущие оценки, полученные на основе накопленной поисковой информации.

Краткое описание основных шагов блочной адаптивной схемы редукции размерности состоит в следующем. Пусть вложенные подзадачи вида (21) решаются с помощью алгоритма глобального поиска, описанного в подразделе 3.1. Тогда каждой подзадаче (21) можно присвоить некоторое числовое значение, называемое характеристикой этой задачи. В качестве такой характеристики можно взять значение $R(t)$ из (5), т.е. максимальную характеристику интервалов, сформированных в данной задаче. В соответствии с правилом вычисления характеристик (4) чем выше значение характеристики, тем более перспективной является подзадача для продолжения поиска в ней глобального минимума исходной задачи (1). Поэтому на каждой итерации выбирается подзадача с максимальной характеристикой для проведения в ней очередного испытания. Это испытание либо приводит к вычислению значения целевой функции $\varphi(y)$ (если выбранная подзадача принадлежала уровню $j = M$), либо порождает новые подзадачи согласно (21) при $j \leqslant M-1$. В последнем случае новые порожденные задачи добавляются к текущему множеству задач, вычисляются их характеристики и процесс повторяется. Завершение процесса оптимизации происходит, когда в корневой задаче выполняется условие остановки алгоритма, решающего эту задачу.

Отметим новые элементы предлагаемой схемы редукции размерности:

- В адаптивной многошаговой схеме все порождаемые задачи решаются совместно – на каждой итерации выбирается одна (наиболее перспективная) подзадача из множества подзадач, в которой проводится одно испытание. Такой подход, с одной стороны, требует одновременного хранения поисковой информации во всех решаемых подзадачах. С другой стороны, он позволяет (при необходимости) увеличивать необходимую точность решения задачи (1) без проведения повторного решения всех подзадач (21). Например, начальная стадия оптимизации может быть выполнена с достаточно грубой точностью, что позволит быстро получить некоторую оценку решения; далее (после анализа результатов) точность может быть повышена и процесс глобального поиска может быть продолжен;
- В исходной многошаговой схеме редукции размерности решение каждой возникающей подзадачи проводится "до конца", т.е. порождения новой подзадачи не произойдет, пока не будет решена текущая подзадача. Но точка $\overline{u_i}$ ее решения, вообще говоря, не будет совпадать с i-й компонентой вектора решения $y^* = (u_1^*, \ldots, u_i^*, \ldots, u_M^*)$ исходной многомерной задачи. В адаптивной схеме подобные бесперспективные подзадачи могут быть отбракованы уже на начальном этапе их решения;
- Наличие правила выбора подзадачи при выполнении очередной итерации в рамках адаптивной схемы позволяет получать различные ее варианты, соответствующие разным правилам выбора подзадачи. Например, как исходная многошаговая схема редукции размерности, так и схема редукции размерности с помощью единственной кривой Пеано могут быть получены как частные случаи нового подхода;
- Существование множества одновременно решаемых подзадач позволяет организовать их параллельное решение и эффективно задействовать ресурсы современных вычислительных систем. Некоторые результаты в данном направлении представлены в [37].

4. Результаты экспериментов

Стандартный подход к сравнению алгоритмов глобальной оптимизации основан на решении указанными методами серии задач, выбранных случайно из некоторого класса. Будем использовать два класса многоэкстремальных тестовых функций (GKLS *Simple*, GKLS *Hard*), описанных в [38].

В [36, 39] было экспериментально установлено, что алгоритм глобального поиска (АГП) как с использованием разверток, так и в сочетании с адаптивной схемой редукции размерности превосходит многие известные алгоритмы глобальной оптимизации, включая методы DIRECT и DIRECT*l*. Поэтому в данном исследовании ограничимся сравнением вариантов АГП в сочетании с различными схемами редукции размерности.

Для сравнения эффективности работы алгоритмов будем использовать два критерия: среднее число испытаний и операционные характеристики. Операционной характеристикой алгоритма называется функция $P(k)$, определяемая как доля задач из рассматриваемой серии, для решения которых потребовалось не более чем k испытаний. Задачу будем считать решенной,

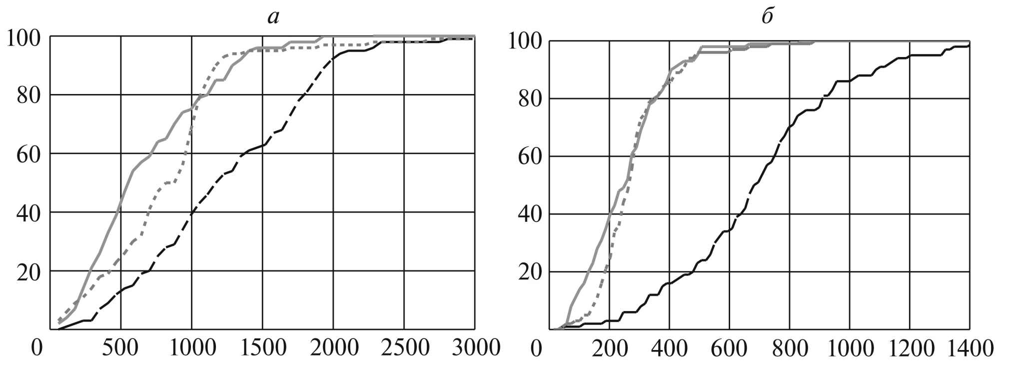


Рис. 2. Операционные характеристики на классах GKLS *Simple* (а) и *Hard* (б), $N = 2$.

если алгоритм сгенерировал точку y^k очередного испытания в окрестности решения y^*, т.е. $\left\|y^k - y^*\right\| < \delta \left\|b - a\right\|$, где $\delta = 10^{-2}$, a и b — границы области поиска D.

Первая серия экспериментов была проведена на двумерных задачах классов GKLS *Simple* и GKLS *Hard* (100 функций каждого класса). В табл. 1 представлено среднее число испытаний, выполненных АГП с использованием разверток (K_e), многошаговой схемы (K_n) и адаптивной многошаговой схемы (K_a). На рис. 2 приведены операционные характеристики алгоритмов, полученные на указанных классах задач. Сплошная линия соответствует алгоритму с использованием разверток, точечная линия — адаптивной многошаговой схеме, штриховая линия — многошаговой схеме. Результаты экспериментов показывают, что АГП с использованием адаптивной многошаговой схемы демонстрирует примерно одинаковое быстродействие по сравнению с развертками и оба они значительно превосходят алгоритм, использующий многошаговую схему. Поэтому в дальнейших экспериментах ограничимся сравнением различных вариантов адаптивной схемы редукции размерности.

Вторая серия экспериментов была проведена на четырехмерных задачах классов GKLS *Simple* и GKLS *Hard* (100 функций каждого класса). В табл. 2 представлено среднее число испытаний, выполненных АГП с ис-

Таблица 1. Среднее число испытаний на классах GKLS *Simple* и *Hard*, $N = 2$

	GKLS *Simple*	GKLS *Hard*
K_e	252	674
K_n	697	1252
K_a	279	815

Таблица 2. Среднее число испытаний на классах GKLS *Simple* и *Hard*, $N = 4$

	GKLS *Simple*	GKLS *Hard*
K_a	21 747	35 633
K_{ba}	15 942	33 206

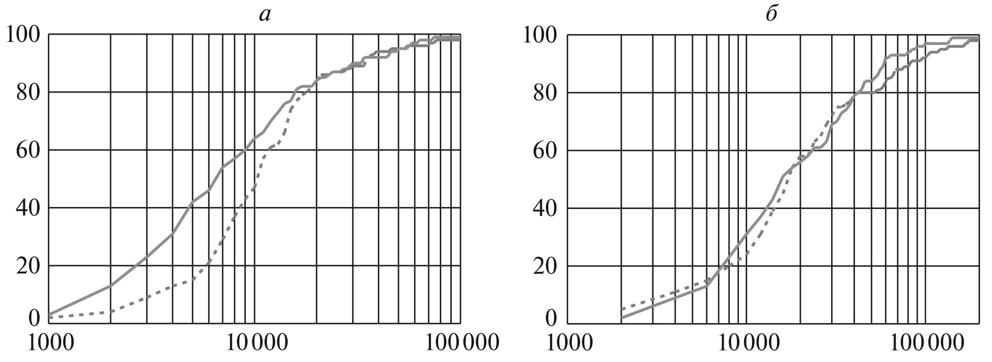


Рис. 3. Операционные характеристики на классах GKLS *Simple* (*а*) и *Hard* (*б*), $N = 4$.

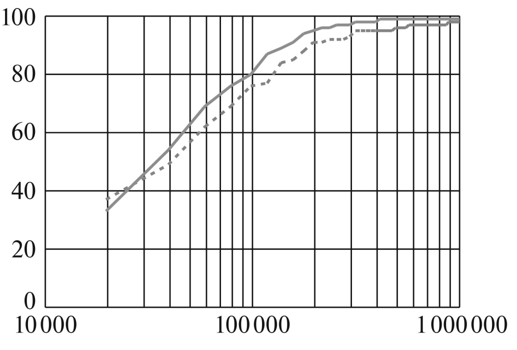


Рис. 4. Операционные характеристики на классе GKLS *Simple*, $N = 6$.

пользованием адаптивной многошаговой схемы (K_a) и блочной адаптивной схемы (K_{ba}) с формированием двух уровней подзадач одинаковой размерности $N_1 = N_2 = 2$. Отметим, что при использовании исходного варианта адаптивной многошаговой схемы при решении задачи размерности $N = 4$ формируется четыре уровня одномерных подзадач, что усложняет их обработку.

На рис. 3 приведены операционные характеристики алгоритмов, полученные на классах GKLS *Simple* и GKLS *Hard*. Точечная линия соответствует алгоритму с использованием адаптивной, а сплошная — блочной адаптивной схемы. Результаты экспериментов показывают, что использование блочной адаптивной схемы дает ощутимый выигрыш по числу испытаний (до 35 %) по сравнению с исходной схемой редукции размерности.

Последняя серия экспериментов была проведена на шестимерных задачах класса GKLS *Simple* (100 функций). Сравнивалась работа АГП с использованием разверток и блочной адаптивной схемы с формированием двух уровней подзадач одинаковой размерности $N_1 = N_2 = 3$. Среднее число испытаний, выполненных АГП с использованием разверток, составило 102 987, тогда как с использованием блочной адаптивной схемы — 75 390. На рис. 4 приведены операционные характеристики алгоритмов. Точечная линия соответствует алгоритму с использованием разверток, а сплошная — блочной адаптивной схемы.

5. Заключение

В данной статье предложена обобщенная адаптивная схема редукции размерности для задач глобальной оптимизации, комбинирующая использование кривых Пеано и схему вложенной (рекурсивной) оптимизации. Для решения редуцированных подзадач используется алгоритм глобального поиска. Приведена вычислительная схема алгоритма, рассмотрены основные вопросы, связанные с использованием адаптивной схемы редукции размерности. Проведены вычислительные эксперименты на серии тестовых задач с целью сравнения эффективности различных схем редукции размерности. Результаты экспериментов показывают, что использование блочной адаптивной схемы редукции размерности может значительно сократить число испытаний, необходимое для решения задачи с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтушенко Ю.Г.* Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 6. С. 1390–1403.
2. *Пиявский С.А.* Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 888–896.
3. *Shubert B.O.* A Sequential Method Seeking the Global Maximum of a Function // SIAM J. Numer. Anal. 1972. V. 9. P. 379-388.
4. *Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E.* Lipschitzian Optimization without the Lipschitz Constant // J. Optim. Theory Appl. 1993. V. 79. No. 1. P. 157–181.
5. *Pinter J.D.* Global Optimization in Action (Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications). Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996.
6. *Žilinskas J.* Branch and Bound with Simplicial Partitions for Global Optimization // Math. Model. Anal. 2008. V. 13. No. 1. P. 145–159.
7. *Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.-И.А.* Распараллеливание процесса поиска глобального экстремума // АиТ. 2007. № 5. С. 46–58.

   Evtushenko Yu.G., Malkova V.U., Stanevichyus A.A. Parallelization of the Global Extremum Searching Process // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 5. P. 787–798.
8. *Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.-И.А.* Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 2. С. 255–269.
9. *Jones D.R.* The DIRECT global optimization algorithm / Floudas C.A., Pardalos P.M. (eds.) The Encyclopedia of Optimization. Second Edition. Springer, 2009. P. 725–735.
10. *Paulavičius R., Žilinskas J., Grothey A.* Investigation of Selection Strategies in Branch and Bound Algorithm with Simplicial Partitions and Combination of Lipschitz Bounds // Optim. Lett. 2010. V. 4 (1). P. 173–83.
11. *Evtushenko Y.G., Posypkin M.A.* A Deterministic Approach to Global Box-Constrained Optimization // Optim. Lett. 2013. V. 7 (4). P. 819–829.
12. *Квасов Д.Е., Сергеев Я.Д.* Методы липшицевой глобальной оптимизации в задачах управления // АиТ. 2013. № 9. С. 3–19.

    Kvasov D.E., Sergeyev Ya.D. Lipschitz Global Optimization Methods in Control Problems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 9. P. 1435–1448.

13. *Paulavičius R., Žilinskas J.* Advantages of Simplicial Partitioning for Lipschitz Optimization Problems with Linear Constraints // Optim. Lett. 2016. V. 10 (2). P. 237–246.
14. *Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Генетические алгоритмы. Уч. пос. М.: Физматлит, 2004.
15. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. Уч. пос. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
16. *Kvasov D.E., Mukhametzhanov M.S.* Metaheuristic vs. Deterministic Global Optimization Algorithms. The Univariate Case // Appl. Math. Comput. 2018. V. 318. P. 245–259.
17. *Sergeyev Y., Kvasov D., Mukhametzhanov M.* On the Efficiency of Nature-Inspired Metaheuristics in Expensive Global Optimization with Limited Budget // Sci. Rep. V. 8 (1). Art. No. 435.
18. *Неймарк Ю.И., Стронгин Р.Г.* Поиск экстремума функций по принципу максимума информации // АиТ. 1966. № 11. С. 113–118.

    Neimark Yu.I., Strongin R.G. Function Extremum Search with the Use of Information Maximum Principle // Autom. Remote Control. 1966. V. 27. No. 1. P. 101–105.
19. *Неймарк Ю.И., Стронгин Р.Г.* Информационный подход к задаче поиска экстремума функций // Изв. АН СССР, Технич. кибернетика. 1966. № 1. С. 17–26.
20. *Стронгин Р.Г.* Многоэкстремальная минимизация // АиТ. 1970. № 7. С. 63–67.

    Strongin R.G. Multiextremal Minimization // Autom. Remote Control. 1970. V. 31. No. 7. P. 1085–1088.
21. *Стронгин Р.Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). М.: Наука, 1978.
22. *Стронгин Р.Г., Маркин Д.Л.* Минимизация многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях // Кибернетика. 1986. № 4. С. 63–69.
23. *Маркин Д.Л., Стронгин Р.Г.* Метод решения многоэкстремальных задач с невыпуклыми ограничениями, использующий априорную информацию об оценках оптимума // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 1. С. 52–61.
24. *Маркин Д.Л., Стронгин Р.Г.* О равномерной оценке множества слабоэффективных точек в многоэкстремальных многокритериальных задачах оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 2. С. 195–205.
25. *Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А.* Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013.
26. *Стронгин Р.Г.* Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 8. С. 1173–1185.
27. *Strongin R.G., Sergeev Ya.D.* Global Optimization with Non-Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000.
28. *Grishagin V.A., Sergeyev Y.D., Strongin R.G.* Parallel Characteristical Algorithms for Solving Problems of Global Optimization // J. Glob. Optim. 1997. V. 10 (2). P. 185–206.
29. *Sergeyev Y., Grishagin V.* Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // J. Comput. Anal. Appl. 2001. V. 3 (2). P. 123–145.
30. *Gergel V., Grishagin V., Gergel A.* Adaptive Nested Optimization Scheme for Multidimensional Global Search // J. Glob. Optim. 2016. V. 66 (1). P. 35–51.
31. *Barkalov K., Gergel V.* Multilevel Scheme of Dimensionality Reduction for Parallel Global Search Algorithms / OPT-i 2014 — 1st Int. Conf. on Engineering and Applied Sciences Optimization. Proc. 2014. P. 2111–2124.

32. *Sergeyev Y., Grishagin V.* Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // J. Comput. Anal. Appl. 2001. V. 3 (2). P. 123–145.
33. *Gergel V., Grishagin V., Israfilov R.* Local Tuning in Nested Scheme of Global Optimization // Procedia Computer Sci. 2015. V. 51 (1). P. 865–874.
34. *Barkalov K., Lebedev I.* Solving Multidimensional Global Optimization Problems using Graphics Accelerators // CCIS. 2016. V. 687. P. 224–235.
35. *Grishagin V., Israfilov R., Sergeyev Y.* Comparative Efficiency of Dimensionality Reduction Schemes in Global Optimization // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1776. Art. No. 060011.
36. *Grishagin V., Israfiov R., Sergeyev Y.* Convergence Conditions and Numerical Comparison of Global Optimization Methods Based on Dimensionality Reduction Schemes // Appl. Math. Comput. 2018. V. 318. P. 270–280.
37. *Gergel V., Grishagin V., Israfilov R.* Parallel Dimensionality Reduction for Multiextremal Optimization Problems // LNCS. 2019. V. 11657. P. 166–178.
38. *Gaviano M., Lera D., Kvasov D.E., Sergeyev Ya.D.* Software for Generation of Classes of Test Functions with Known Local and Global Minima for Global Optimization // ACM Trans. Math. Software. 2003. V. 29. P. 469–480.
39. *Sovrasov V.* Comparison of Several Stochastic and Deterministic Derivative-Free Global Optimization Algorithms // LNCS. 2019. V. 11548. P. 70–81.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 29.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. М.А. ФЕДОТКИН, д-р физ.-мат. наук (fma5@rambler.ru), А.М. ФЕДОТКИН, канд. физ.-мат. наук (fandr@vmk.unn.ru), Е.В. КУДРЯВЦЕВ (evgkudryavcev@gmail.com) (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА ТРАНСПОРТА НА МАГИСТРАЛЯХ[1]

Рассматривается кибернетический метод описания и анализа реальных потоков, когда интервалы между последовательными моментами поступления требований являются статистически зависимыми и имеют разные распределения. Предложены эвристические алгоритмы, которые позволяют выделить в потоке два класса неоднородных требований. В качестве описания предлагается использовать только интервалы между соседними требованиями первого класса и количество всех требований в каждом таком интервале. Целесообразность предлагаемого описания продемонстрирована не только на примере транспортного потока движущихся автомобилей на магистрали, но и при определении вероятностных законов распределения реальных потоков другой физической природы.

Ключевые слова: неоднородные требования, управляющая кибернетическая система, уравнения Колмогорова, нелокальное описание, алгоритм разбиения потока, статистические гипотезы, критерий Валлиса–Мура.

DOI: 10.31857/S0005231020080115

1. Введение

В теории массового обслуживания известно [1], что классическое описание входного потока систем массового обслуживания выполняется в виде векторной случайной последовательности $\{(\tau'_j, \eta'_j);\ j = 1, 2, \ldots\}$, в которой через η'_j обозначено число поступивших требований в момент времени τ'_j с номером j. Классическое описание входных потоков успешно применил Ю.И. Неймарк для изучения динамики процесса управления транспортом на перекрестке [2, 3]. Ю.И. Неймарк внес фундаментальный вклад в теорию управления конфликтными пуассоновскими потоками в классе циклических алгоритмов [4]. При классическом описании потоков предполагается независимость и одинаковое распределение как величин $\tau'_{j+1} - \tau'_j$, $j = 1, 2, \ldots$, так и независимость и одинаковое распределение величин η'_j, $j = 1, 2, \ldots$ Из-за увеличения интенсивности входных потоков в современных реальных системах это предположение отсутствует [5]. Поэтому классический способ описания входного потока для таких систем не является удобным, так как требует задания сложных конечномерных распределений последовательности $\{(\tau'_j, \eta'_j);$ $j = 1, 2, \ldots\}$. Задача остается сложной, если даже $\eta'_j(\omega) \equiv 1$ при $j = 1, 2, \ldots$

В данной статье предлагается описание входного потока в виде последовательности $\{(\tau_{i+1} - \tau_i, \chi_i);\ i = 0, 1, \ldots\}$. Здесь $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ — строго возрас-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-413-520005).

тающая последовательность случайных точек на оси времени Ot, и χ_i определяет случайное число требований на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ или в группе с номером i. Проблема заключается в том, чтобы по наблюдению за конечной реализацией случайной последовательности $\{(\tau'_j, \eta'_j);\ j = 1, 2, \ldots\}$ и по алгоритму выбора последовательности $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ найти распределение последовательностей случайных интервалов $\{\tau_{i+1} - \tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ и размеров групп $\{\chi_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ в некоторых классах вероятностных распределений, для которых ряд распределения или плотность можно выписать в явном виде. В теории маркированных случайных потоков каждое требование потока отображается точкой или интервалом на оси времени Ot. В этом предположении для определения распределения последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ можно применять известные тестовые распределения, в том числе смещенные. Способ описания потока предполагает наблюдение только за группами требований, а не за каждым требованием потока сложной вероятностной структуры. Такой принцип описания потоков требований можно назвать нелокальным [6, 7]. Поэтому необходимо предложить не только механизм формирования каждой группы реального потока, но и на этом основании выбрать алгоритм выбора последовательности $\{\tau_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$. В силу этого определение и выбор тестовых распределений для последовательности $\{\chi_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ вызывает большие трудности.

Процесс образования величины χ_i группы с номером i потока рассматривается как функционирование по возможности простой управляющей системы обслуживания [6, 7]. Это обстоятельство позволяет предложить адекватный механизм образования группы (пачки) с номером i для сложного реального потока. Интерпретация такого механизма образования группы дается на примере потока пачек автомобилей на бесконечной или кольцевой магистрали с однополосным движением, либо на магистрали с многополосным движением, если рассматривать образование пачек только на одной из полос. При этом в потоке будем различать требования с медленным движением и требования с быстрым движением. Значит, в потоке имеется два класса (типа) требований, что и означает их неоднородность. При многополосном движении с возможностью перестроения интенсивность потока автомобилей с быстрым движением для конкретной полосы изменяется за счет требований из других полос, которые будут осуществлять обгон по этой полосе. В этом случае следует предположить, что поток автомобилей с быстрым движением является пуассоновским. Только требования с быстрым движением имеют возможность обгона требований с медленным движением. Предлагаемый в статье подход дает возможность генерировать различные и неизвестные ранее законы распределения реальных входных потоков, не используя предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики.

2. Представление механизма формирования потока в виде процесса функционирования управляющей кибернетической системы обслуживания

В статье предполагается существование основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, которое является математической моделью изучаемого случайного эксперимента E. Здесь Ω есть достоверный исход или множество

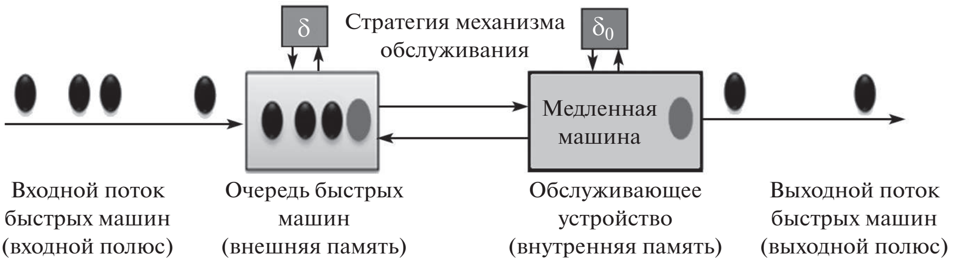


Схема управляющей системы.

описаний всех элементарных исходов эксперимента E. Вероятностная функция $\mathbf{P}(A)\colon \mathfrak{F} \to [0,1]$ задана на σ-алгебре $\mathfrak{F}$, элементами которой являются наблюдаемые исходы $A \subset \Omega$ случайного эксперимента E. В некоторых случаях не будем явно фиксировать символ ω как аргумент каких-либо функций. При этом будем помнить о том, что все случайные события, случайные величины и случайные элементы рассматриваются на указанном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Типичным примером эксперимента E может служить процесс движения разнотипных автомобилей на магистрали с однополосным движением или временной процесс прибытия автомобилей к стоп-линии некоторого управляемого перекрестка.

Модель механизма формирования размера χ_i каждой транспортной пачки реального потока неоднородных и точечных движущихся автомобилей будем представлять в виде эволюции управляющей кибернетической системы обслуживания [6, 7] из некоторого класса. Для такой системы на рисунке представлены следующие ее блоки: входной полюс, внешняя память, устройство δ по переработке информации внешней памяти, внутренняя память, устройство δ_0 по переработке информации внутренней памяти и выходной полюс.

Рассмотрим математическое описание каждого из указанных блоков. Входной полюс есть пуассоновский поток требований с быстрым движением. Интенсивность этого потока равна $\lambda_0 > 0$. Интенсивность $\lambda' > 0$ потока из требований с медленным движением достаточно мала и такова, что расстояние между любыми соседними требованиями с медленным движением велико. Это обеспечивает восстановление пуассоновского потока требований с быстрым движением после процесса обгона [8, 9]. Пусть здесь и далее символ $o(\Delta t)$ обозначает неотрицательную бесконечно малую величину по сравнению с величиной $\Delta t > 0$ и пусть за промежуток времени $[t, t+\Delta t)$ в очередь из требований для обгона медленного требования поступает случайное число $\xi(\omega; t, \Delta t)$ требований с быстрым движением. Тогда для пуассоновского потока с параметром λ_0 при $\Delta t \to 0$ хорошо известны следующие формулы:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t), \\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = \lambda_0 \Delta t - o(\Delta t), \\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \xi(\omega; t, \Delta t) \geqslant 2\}) = o(\Delta t).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Соотношение (1) является математическим описанием входного полюса.

По наблюдениям за реальными потоками оказалось, что каждое требование с быстрым движением догоняет требование с медленным движением и поступает в некоторую очередь. При этом группа состоит из требований с быстрым движением, которые ожидают возможности обгона, и обязательно из требования с медленным движением. Возможны ситуации, когда размер очереди равен нулю. В этом случае группа состоит только из требования с медленным движением. Итак, физически внешняя память есть очередь из требований с быстрым движением и единственного требования с медленным движением. Если случайная величина $\chi(\omega; t) \in \{1, 2, \ldots\}$ измеряет число требований всех типов в группе в момент времени $t \geqslant 0$, то случайный процесс $\{\chi(t)\colon t \geqslant 0\}$ является математическим описанием блока внешней памяти.

Блок внутренней памяти отвечает за процесс обгона требований с быстрым движением требования с медленным движением. Каждое требование с медленным движением можно интерпретировать как обслуживающий прибор для требований с быстрым движением. При этом под временем обслуживания, естественно, понимается случайное время обгона. Для такого класса систем не задается интегральная функция распределения случайного времени обслуживания, так как времена обгона быстрыми машинами медленной являются зависимыми случайными величинами и имеют различные законы распределения. Более того, из реальных наблюдений нет возможности найти статистические законы распределения указанных величин. Поэтому вместо семейства многомерных интегральных функций распределения времен обслуживания для такого рода систем удобно задавать так называемый поток насыщения [6, 7] в виде семейства $\{\kappa(t, t_0)\colon t \geqslant 0, t_0 > 0\}$ случайных величин. Здесь через $\kappa(\omega; t, t_0)$ обозначено случайное число требований с быстрым движением, которые могут обогнать требование с медленным движением за промежуток времени $[t, t + t_0)$. Тогда семейство случайных величин вида $\{\kappa(t, t_0)\colon t \geqslant 0, t_0 > 0\}$ определяет математическое описание блока внутренней памяти.

Так как в потоке не происходит потеря требований, то при $\Delta t > 0$ устройство δ по переработке информации внешней памяти можно математически описать с помощью функционального соотношения

$$\chi(\omega; t + \Delta t) = \chi(\omega; t) + \xi(\omega; t, \Delta t) - \kappa(\omega; t, \Delta t). \tag{2}$$

В силу физического смысла величин $\chi(\omega; t)$, $\xi(\omega; t, \Delta t)$, $\kappa(\omega; t, \Delta t)$ должно выполняться соотношение $0 \leqslant \kappa(\omega; t, \Delta t) \leqslant \chi(\omega; t) + \xi(\omega; t, \Delta t) - 1$. Отсюда с учетом (2) получаем, что $\chi(\omega; t + \Delta t) \geqslant 1$. Устройство δ по переработке внешней памяти реализует функциональный закон (2) отбора требований с быстрым движением из очереди для обгона требования с медленным движением. Для процесса обгона в транспортном потоке механизм отбора естественно должен происходить в порядке поступления (FIFO). Для потоков другой физической природы можно допустить другую дисциплину обслуживания, но соотношение (2) есть условие модели и оно должно выполняться.

На практике распределение времени обслуживания (обгона) существенно зависит от величины очереди из требований с быстрым движением. Вполне естественно предположить, что при малых значениях $\Delta t > 0$ условные вероятности событий, которые порождаются дискретной случайной величиной $\kappa(\omega; t, \Delta t)$, определяются соотношениями

$$(3)\quad \begin{gathered} \mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega;t,\Delta t)=0\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m, \xi(\omega;t,\Delta t)=0\}) = 1-\mu_{m-1}\Delta t + o(\Delta t),\\ \mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega;t,\Delta t)=1\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m, \xi(\omega;t,\Delta t)=0\}) = \mu_{m-1}\Delta t - o(\Delta t),\\ m=2,\dots,q;\\ \mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega;t,\Delta t)=0\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m, \xi(\omega;t,\Delta t)=0\}) = 1-\mu_{q}\Delta t + o(\Delta t),\\ \mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega;t,\Delta t)=1\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m, \xi(\omega;t,\Delta t)=0\}) = \mu_{q}\Delta t - o(\Delta t),\\ m=q+1,q+2,\dots \end{gathered}$$

В (3) параметры $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_{q-1}^{-1}$ задают условное среднее время обгона, когда число требований всех типов в группе равно $2, 3, \dots, q$ соответственно. Здесь величина $q > 1$ — заданное натуральное число. Аналогично параметр μ_q^{-1} в соотношении (3) определяет условное среднее время обгона, если транспортная пачка состоит из $q+1$ и более требований. Параметры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ будем называть условными интенсивностями обгона. Таким способом моделируется зависимость распределения времени обгона от числа требований всех типов в очереди. Условные вероятности в (3) задают математическое описание блока δ_0 или устройства по переработке внутренней памяти. Другими словами, соотношение (3) определяет изменение вероятностного закона для обгона требований с быстрым движением.

В указанных предположениях относительно всех блоков управляющей системы обслуживания, которая моделирует процесс образования групп, требуется найти нелокальное описание [6, 7] входного потока. При этом на входной поток неоднородных требований следует смотреть как на поток групп, которые осуществляют перемещение. Следует иметь в виду, что каждое требование с медленным движением является источником образования очереди движущихся требований. Соотношения типа (1), (2), (3) и управляющие параметры λ_0, q, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ — это удобный способ задания класса математических моделей управляющих систем обслуживания. Это класс систем с ожиданием, неограниченной очередью, одним прибором с переменной структурой и с некоторой заданной стратегией механизма отбора требований.

Пусть величина $Q(t, m) = \mathbf{P}(\{\omega\colon \chi(\omega, t) = m\})$ при фиксированных значениях $t \geqslant 0$ и $m = 1, 2, \dots$ Для вероятностей $Q(t, m)$ в [10] получена бесконечная система линейных дифференциальных уравнений вида

$$(4)\quad \begin{gathered} dQ(t,1)/dt = -\lambda_0 Q(t,1) + \mu_1 Q(t,2),\\ dQ(t,m)/dt = \lambda_0 Q(t,m-1) - (\lambda_0+\mu_{m-1})Q(t,m) + \mu_m Q(t,m+1),\\ m=2,\dots,q;\\ dQ(t,m)/dt = \lambda_0 Q(t,m-1) - (\lambda_0+\mu_{q})Q(t,m) + \mu_q Q(t,m+1),\\ m\geqslant q+1. \end{gathered}$$

В [11] рассмотрены различные динамические системы, в том числе детерминированные и случайные. Для каждой задачи предложен метод описания состояния системы и уравнения или соотношения, задающие динамику изменения состояния. Так, для одной из задач в качестве состояния динамической системы выбрано вероятностое распределение случайной величины.

При этом динамика изменения состояний системы может задаваться в виде системы дифференциальных уравнений для вероятностого распределения. Используя описанный подход для рассматриваемой задачи, состоянием блока внешней памяти в момент t является не конкретное значение случайной величины $\chi(t) \in \{1, 2, \dots\}$, а ее распределение $(Q(t, 1), Q(t, 2), \dots)$. Соотношение (4) определяет функционирование динамической системы. В [10] доказано, что эргодическое распределение $\lim_{t\to\infty} Q(t, m) = Q(m)$, $m \geqslant 1$, существует при $\lambda_0 < \mu_q$. При $q = 3$ и обозначениях $\alpha = \lambda_0\mu_1^{-1}$, $\beta = \lambda_0\mu_2^{-1}$, $\gamma = \lambda_0\mu_3^{-1}$ получены формулы для эргодического распределения в виде

$$\begin{gathered} Q(1) = p = (1 + \alpha + \alpha\beta/(1 - \gamma))^{-1}, \\ Q(2) = \alpha(1 + \alpha + \alpha\beta/(1 - \gamma))^{-1}, \\ Q(m) = \alpha\beta\gamma^{m-3}(1 + \alpha + \alpha\beta/(1 - \gamma))^{-1}, \quad m \geqslant 3. \end{gathered} \tag{5}$$

Будем считать, что соотношение (5) является распределением случайного числа $\chi(\omega)$ требований в группе в установившемся режиме движения транспорта по магистрали. В этом случае каждая из случайных величин χ_i, $i = 1, 2, \dots$, имеет также распределение (5). Для случайной величины $\chi(\omega)$ получены математическое ожидание $\mathbf{M}\chi(\omega)$ и дисперсия $\mathbf{D}\chi(\omega)$ в следующем виде:

$$\begin{gathered} \mathbf{M}\chi(\omega) = p\left(1 + 2\alpha + \alpha\beta\left(\frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2}\right)\right), \\ \mathbf{D}\chi(\omega) = p^2\left[\alpha + \alpha\beta\left(\frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3}\right) + \right. \\ \left. + \alpha^2\beta\left(-\frac{1}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3}\right) + \alpha^2\beta^2\left(-\frac{1}{(1-\gamma)^3} + \frac{1}{(1-\gamma)^4}\right)\right]. \end{gathered}$$

Сделаем одно важное замечание. При $\beta = \gamma$ предельное распределение (5) для числа $\chi(\omega)$ требований всех типов в каждой группе входного потока совпадает с распределением Бартлетта [12]. Это возможно только при $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_q$. Другими словами, среднее время обгона остается постоянным, если число требований всех типов в каждой группе равно $3, 4, \dots$ Наконец, при $\alpha = \beta = \gamma$ распределение (5) совпадает с геометрическим распределением. Это возможно при $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$, когда среднее время обгона не зависит от числа требований всех типов в каждой группе входного потока. Свойства таких потоков подробно изучены в [9].

Для реальных потоков другой вероятностной структуры можно допустить несколько иные соотношения (1), (2), (3) и управляющие параметры. Для этого в следующем абзаце рассмотрим другой класс динамических моделей неоднородных потоков.

Пусть условные интенсивности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ обгона в транспортном потоке достаточно высоки и интенсивность λ_0 быстрых машин мала. Тогда будем наблюдать образование величины пачек не более целого числа $N \geqslant 2$. В этом случае $\chi(\omega; t) \in \{1, 2, \dots, N\}$. Если $\chi(\omega; t) = N$ и на малом промежутке $[t, t + \Delta t)$ в группу поступает требование, то мгновенно происходит обгон и, значит, в потоке не происходит потеря требований. В этих предположениях для потока неоднородных требований имеет место соотношение (1), равенство (2) при $\chi(\omega; t) \in \{1, 2, \ldots, N\}$ и соотношения

$$
(6) \quad \begin{gathered}
\mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega\colon \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 1 - \mu_{m-1}\Delta t + o(\Delta t), \\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega\colon \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \mu_{m-1}\Delta t - o(\Delta t), \\
m = 2, \ldots, N; \\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \kappa(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega\colon \chi(\omega; t) = N, \xi(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = 1 - o(\Delta t).
\end{gathered}
$$

Соотношения (6) задают математическое описание блока δ_0 или устройства по переработке внутренней памяти в случае образования пачек величины не более N. Динамическая модель механизма образования транспортной пачки величины не более N была подробно изучена в [13]. В частности, для вероятностей $Q(t, m)$, $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$, в данной модели получена система линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
dQ(t, 1)/dt = -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_1 Q(t, 2), \\
dQ(t, m)/dt = \lambda_0 Q(t, m-1) - (\lambda_0 + \mu_{m-1}) Q(t, m) + \mu_m Q(t, m+1), \\
m = 2, \ldots, N-1; \\
dQ(t, N)/dt = \lambda_0 Q(t, N-1) - \mu_{N-1} Q(t, N).
\end{gathered}
$$

Данная система имеет решение при любых параметрах. Для эргодического распределения $(Q(1), Q(2), \ldots, Q(N))$ при $\mu_3 = \mu_4 = \ldots = \mu_{N-1}$ получены формулы

$$
\begin{gathered}
Q(1) = \left(1 + \alpha + \alpha\beta(1 - \gamma^{N-2})/(1 - \gamma)\right)^{-1}, \\
Q(2) = \alpha \left(1 + \alpha + \alpha\beta(1 - \gamma^{N-2})/(1 - \gamma)\right)^{-1}, \\
Q(m) = \alpha\beta\gamma^{m-3} \left(1 + \alpha + \alpha\beta(1 - \gamma^{N-2})/(1 - \gamma)\right)^{-1}, \quad m = 3, 4, \ldots, N.
\end{gathered}
$$

3. Алгоритмы получения нелокального описания потоков неоднородных требований

Ради сокращения записи в дальнейшем при $\eta'_j(\omega) \equiv 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots$ обозначим τ'_j через θ_j. В этом случае θ_j определяет момент появления требования с номером j. В этом разделе по информации о конечной реализации потока $\{\theta_j; j = 1, 2, \ldots\}$ предлагаются различные алгоритмы определения последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i = 0, 1, \ldots\}$ такого типа, чтобы можно было считать ее элементы одинаково распределенными и независимыми случайными величинами. Эффективность предложенных алгоритмов показана в разделе 4 статьи. Приведем два алгоритма выделения моментов τ_i, $i = 0, 1, \ldots$, поступления первых требований групп из последовательных моментов θ_i, $i = 0, 1, \ldots$, поступления всех требований.

Согласно первому алгоритму требования объединяются в группы по следующему принципу близости. Предположим, что $\theta_1 = 0$. Это означает, что начинаем наблюдать систему с момента прихода первого требования (этот случай называется синхронным [8]). Зададим некоторый параметр близости $h_0 = \mathrm{const} > 0$ и коэффициенты $0 < a < 1$ и $b > 0$. Тогда величины τ_i, $i \geqslant 0$, будут определяться из следующих соотношений:

$$\tau_i = \theta_{k_i}, \quad k_0 = 0, \quad k_{i+1} = \inf\left\{k \colon k > k_i, \theta_k - \theta_{k-1} \geqslant h_i a^{k-k_i-1}\right\},$$
$$h_{i+1} = h_i a^{k_{i+1}-k_i-1} b.$$

Если при некотором $i \geqslant 0$ множество $\{k \colon k > k_i, \theta_k - \theta_{k-1} \geqslant h_0\}$ окажется пустым, то будем считать, что $\tau_{i+1} = +\infty$. Заметим, что при таком разбиении моменту τ_i, $i \geqslant 0$, будет соответствовать поступление i-й группы требований, или i-й транспортной пачки. Длина каждой такой пачки будет равна $\eta_i = k_{i+1} - k_i$. Данный алгоритм подстраивается под интенсивность поступающих требований, изменяя параметр близости требований h_i. Выбирая параметры a и b, можно регулировать математическое ожидание размера группы.

Согласно второму алгоритму исходный поток делится на группы поэтапно. На этапе с номером m $(m = 0, 1, \ldots)$ будем получать векторную случайную последовательность $\{(\tau_i^m, \eta_i^m); i \geqslant 0\}$, которую для краткости будем называть далее последовательностью (или потоком) m-го уровня. Как и раньше, для любого m моменты τ_i^m, $i \geqslant 0$, совпадают с моментами поступлений некоторых требований исходного потока в систему, т.е. $\tau_i^m = \theta_{k_{m,i}}$, $k_{m,i} \geqslant 1$. Далее, количество требований в i-й группе потока m-го уровня определяется как $\eta_i^m = k_{m,i+1} - k_{m,i}$. Также введем величину $\delta_i^m = \theta_{k_{m,i+1}} - \theta_{k_{m,i+1}-1}$, которая определяет интервал между i-й и $(i+1)$-й пачками исходного процесса при его нелокальном описании с помощью последовательности m-го уровня. Параметрами данного способа являются натуральное число d и постоянные величины h_0, h_1, удовлетворяющие соотношению $0 < h_0 < h_1$. Итак, рекуррентные формулы для определения моментов τ_i^m при $m \geqslant 0$, $i \geqslant 0$ имеют следующий вид:

$$k_{0,0} = 1, k_{0,i+1} = \inf\left\{k \colon k > k_{0,i}, \theta_k - \theta_{k-1} \geqslant h_0\right\},$$
$$s_m = \inf\left\{k \colon k \geqslant 0, \eta_k^m \leqslant d, \eta_{k+1}^m \leqslant d, \delta_k^m < h_1, \eta_k^m = \eta_{k-1}^m\right\},$$
$$\tau_i^{m+1} = \begin{cases} \tau_i^m, i \leqslant s_m, \\ \tau_{i+1}^m, i > s_m. \end{cases}$$

Здесь полагается $\eta_{-1}^m = 0$ при любом $m \geqslant 0$. Две группы из последовательности предыдущего уровня объединяются, когда каждая из них содержит не больше d требований, интервал между пачками меньше, чем h_1, а также размер первой группы в рассматриваемой паре совпадает с размером группы, ей предшествующей. Отметим, что $\{\omega \colon \lim_{m\to\infty} \tau_i^m \text{ существует}\} = \Omega$, поэтому, определив $\tau_i = \lim_{m\to\infty} \tau_i^m$ и $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ для любого $i \geqslant 0$, получим нелокальное описание $\{(\tau_i, \eta_i); i \geqslant 0\}$ исходного потока требований.

Получим оценку параметров распределения (5) для модели с неограниченным размером группы. Пусть есть выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n реализаций случайной величины χ. Обозначим через m_k число значений в выборке, равных k (число пачек размера k). Неизвестные параметры α, β и γ будем оценивать методом максимального правдоподобия [14, 15]. Для применения данного метода удобно перейти от параметров α и β к новым параметрам p и f, где $p = Q(1)$ и $f = \sum_{k=3}^{\infty} Q(k)$. В новых обозначениях выражения для $Q(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, примут вид:

$$Q(1) = p,$$
$$Q(2) = 1 - f - p,$$
$$Q(k) = f(1-\gamma)\gamma^{k-3}, \quad k \geqslant 3.$$

Функция правдоподобия равна

$$L(x_1, \ldots, x_n, p, f, \gamma) = Q(x_1)Q(x_2)\ldots Q(x_n) =$$
$$= p^{m_1}(1-f-p)^{m_2} \prod_{k=3}^{\infty} \left(f(1-\gamma)\gamma^{k-3}\right)^{m_k}.$$

Далее найдем натуральный логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(x_1, \ldots, x_n, p, f, \gamma) = m_1 \ln p + m_2 \ln(1-f-p) + \sum_{k=3}^{\infty} m_k \ln\left(f(1-\gamma)\gamma^{k-3}\right). \tag{7}$$

Согласно методу максимального правдоподобия необходимо найти аргументы функции, при которых она достигает максимума. Для этого приведем систему уравнений правдоподобия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p} \ln L(x_1, \ldots, x_n, p, f, \gamma) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial f} \ln L(x_1, \ldots, x_n, p, f, \gamma) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \gamma} \ln L(x_1, \ldots, x_n, p, f, \gamma) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Используя соотношения (7) и (8), получим окончательную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{p} - \dfrac{m_2}{1-f-p} = 0, \\ -\dfrac{m_2}{1-f-p} + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{m_k}{f} = 0, \\ -\dfrac{m_3}{1-\gamma} + \sum\limits_{k=4}^{\infty} \dfrac{m_k}{(1-\gamma)\gamma^{k-3}} \left((k-3)\gamma^{k-4}(1-\gamma) - \gamma^{k-3}\right) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

для нахождения оценок методом максимального правдоподобия. Решая систему уравнений (9), получим оценки для параметров p, f и γ:

$$p^* = m_1/n,$$
$$f^* = (n - m_1 - m_2)/n,$$
$$\gamma^* = \sum_{k=3}^{\infty}(k-3)m_k \Big/ \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)m_k.$$

Данный результат является ожидаемым, так как p — это вероятность получить группу из одной машины, а f — из трех или более машин. Оценки для исходных параметров α^*, β^* и γ^* выражаются так:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{1-f-p}{p} = \frac{m_2}{m_1}, \\ \beta^* &= \frac{f(1-\gamma)}{1-f-p} = \frac{n-m_1-m_2}{m_2} \sum_{k=3}^{\infty} m_k \Big/ \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)m_k, \\ \gamma^* &= \sum_{k=3}^{\infty}(k-3)m_k \Big/ \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)m_k. \end{aligned} \tag{10}$$

4. Нелокальное описание реальных потоков

В [16] было проведено исследование транспортного потока. Покажем эффективность предложенного подхода для анализа данных другой физической природы. Исследуем данные BC-pAug89.TL (ftp://ita.ee.lbl.gov/html/contrib/BC.html) [17]. В файле содержатся моменты поступления и размеры пакетов в сети Ethernet. Общий объем данных составляет 1 млн пакетов. Проанализируем моменты поступления пакетов. Реализация $\{x_1, x_2, \ldots x_V\}$ объема $V = 96$ потока вида $\{\theta_{j+1} - \theta_j;$ $j = 1, 2, \ldots, V\}$ приведена в табл. 1. В этой таблице по строкам приведены значения интервалов между поступлениями пакетов.

Применяя фазово-частотный критерий Валлиса–Мура [9] о независимости и одинаковом распределении интервалов между соседними пакетами к статистическим данным табл. 1, получаем значение статистики

$$\begin{gathered} Z(V, x_1, x_2, \ldots, x_V) = \\ = \left[Z_1(V, x_1, x_2, \ldots, x_V) - (2V-7)3^{-1}\right] \times (90)^{1/2} \times (16V-29)^{-1/2} \end{gathered}$$

при $V = 10000$, равное 9,6221. Здесь функция $Z_1(V, x_1, x_2, \ldots, x_V)$ определяет так называемое число фаз по выборочным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_V$ случайных интервалов $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, V$, и вычисляется следующим образом.

Таблица 1. Значения интервалов $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, 80$

0,000168	0,002668	0,003964	0,002896	0,004036	0,00282	0,002712	0,001428
0,002268	0,000452	0,002604	0,001336	0,002148	0,000768	0,004236	0,002624
0,004056	0,00152	0,00128	0,001972	0,001952	0,001112	0,001824	0,001636
0,002536	0,002688	0,003984	0,002872	0,004132	0,002728	0,003968	0,002888
0,004116	0,002744	0,004008	0,002848	0,00416	0,00434	0,00392	0,00458
0,004008	0,004492	0,00392	0,00294	0,00408	0,00278	0,00396	0,002896
0,001104	0,002836	0,000712	0,002208	0,00084	0,003172	0,000088	0,002756
0,003932	0,002928	0,004128	0,002732	0,004056	0,0028	0,004016	0,002844
0,003324	0,00062	0,002912	0,000956	0,003688	0,00036	0,003496	0,001436
0,002592	0,002832	0,00128	0,002688	0,002892	0,001432	0,001956	0,000576

Для всех $j = 1, 2, \ldots, (V - 1)$ фиксируется знак разности $x_{j+1} - x_j$. При этом нулевые значения разностей не учитываются. Последовательность одинаковых знаков называют фазой. Далее вычисляют суммарное число плюсовых и минусовых фаз, причем начальная и конечная фазы исключаются. Тогда значение функции $Z_1(V, x_1, x_2, \ldots, x_V)$ равно такому суммарному числу фаз. В случае справедливости выдвинутой гипотезы последовательность случайных величин вида

$$\{Z(V, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_2, \ldots, \theta_{V+1} - \theta_V; V \geqslant 30)\}$$

сходится по распределению к стандартному нормальному закону. Пороговое значение на 5-процентном уровне значимости равно 1,96. Так как значение статистики Валлиса–Мура для данного потока удовлетворяет условию $9{,}6221 > 1{,}96$, то согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между последовательными пакетами следует отклонить.

По данным табл. 1 заметим, что интервалы имеют значительно отличающиеся длины. Так в первых 10000 наблюдений минимальный интервал имеет длину 0,000064, а максимальный — 0,11617. Данное поведение можно объяснить образованием групп. Разобьем описанные данные на пачки с помощью первого предложенного алгоритма. Подбирая управляющие параметры h_0, a и b, можно разбить первоначальный поток объема $V = 10000$ на группы. Например, при $h_0 = 0{,}001$, $a = 0{,}96$ и $b = 1{,}44$ получим $N = 1009$ значений интервалов $\tau_{i+1} - \tau_i$, где $i = 0, 1, \ldots, 1008$ между группами, и последовательность из 1009 значений для размеров $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{1008}$ групп пакетов. Часть обработанных данных приведены в табл. 2.

Статистика Валлиса–Мура вида $Z(1009, y_0, y_1, \ldots, y_{1008})$ для временны́х интервалов между первыми пакетами в группах равна 0,772. Значение статистики Валлиса–Мура для этих интервалов удовлетворяет условию $|Z(1009, y_0, y_1, \ldots, y_{1008})| = 0{,}772 < 1{,}96$. Тогда согласно фазово-частотному критерию [9] гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется. С помощью формул (13) из [16] при параметрах

$$\begin{gathered} s = 5, \quad a_1 = \min\{y_0, y_1, \ldots, y_{1008}\} + \\ + (\max\{y_0, y_1, \ldots, y_{1008}\} - \min\{y_0, y_1, \ldots, y_{1008}\})/(6(s-1)), \\ b_1 = (\max\{y_0, y_1, \ldots, y_{1008}\} - \min\{y_0, y_1, \ldots, y_{1008}\})/(s-1) \end{gathered}$$

получены следующие оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения h и σ: $h^* = 0{,}0042$ и $\sigma^* = 0{,}0198$. С помощью критерия хи-квадрат проверим гипотезу о том, что последовательность $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i \geqslant 0\}$ составлена из случайных величин, каждая из которых имеет смещенное экспоненциальное распределение. При $N = 1009$, $s = 5$, $a_1 = 0{,}0075$ и $b_1 = 0{,}0343$ из табл. 2 вычислим приближенное значение статистики хи-квадрат, равное 5,42. При двух степенях свободы и уровне значимости в 5 % пороговое значение хи-квадрат распределения равно 5,991. Отсюда видно, что принятое гипотетическое распределение для интервалов $\tau_{i+1} - \tau_i$, $i \geqslant 0$, между последовательными группами пакетов хорошо соответствует экспериментальным данным из табл. 2. Таким образом, можно принять, что распределение ин-

Таблица 2. Значения (z_i, y_i) вектора $(\chi_i; \tau_{i+1} - \tau_i)$, где $i = 0, 1, \ldots, 49$

(2; 0,002836)	(1; 0,003964)	(1; 0,002896)	(1; 0,004036)	(10; 0,020772)
(2; 0,00668)	(10; 0,020504)	(10; 0,034464)	(10; 0,03902)	(10; 0,020544)
(12; 0,035004)	(25; 0,038748)	(1; 0,004)	(2; 0,00684)	(15; 0,02566)
(6; 0,0146)	(1; 0,012168)	(9; 0,027832)	(4; 0,040048)	(6; 0,034612)
(1; 0,02306)	(4; 0,039592)	(11; 0,071748)	(7; 0,08092)	(9; 0,05648)
(50; 0,110752)	(6; 0,013856)	(11; 0,030088)	(10; 0,031168)	(9; 0,02788)
(16; 0,042356)	(2; 0,007064)	(18; 0,041292)	(4; 0,013376)	(10; 0,022272)
(11; 0,034268)	(9; 0,020552)	(5; 0,0218)	(2; 0,026012)	(13; 0,034444)
(2; 0,014516)	(2; 0,02656)	(8; 0,083952)	(4; 0,057936)	(21; 0,12668)
(34; 0,076308)	(21; 0,024744)	(13; 0,015112)	(6; 0,010656)	(3; 0,006644)

тервалов между последовательными группами в наблюдаемом потоке имеет вид

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \tau_{i+1} - \tau_i < t\}) = 1 - \exp\{-(t - 0{,}0042)/0{,}0198\}, \quad t > 0{,}0042;$$
$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \tau_{i+1} - \tau_i < t\}) = 0, \quad t \leqslant 0{,}0042.$$

Статистика Валлиса–Мура $Z(1009, z_0, z_1, \ldots, z_{1008})$ для количества пакетов в группе равна 1,694 и удовлетворяет условию $|Z(1009, z_0, z_1, \ldots, z_{1008})| = 1{,}694 < 1{,}96$. Значит, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. С помощью формулы (10) получены оценки для α, β и γ: $\alpha^* = 0{,}864$, $\beta^* = 0{,}688$, $\gamma^* = 0{,}9042$. При числе наблюдений $N = 1009$ и количестве разрядов $r = 5$ получим значение статистики хи-квадрат, равное 2,9234. Это значение меньше 5 % порогового значения хи-квадрат распределения с одной степенью свободы, равного 3,841. Таким образом, гипотеза о распределении вида (5) для количества требований в группе не отвергается. Используя соотношения (5) и оценки α^*, β^* и γ^*, получим распределение для количества пакетов в группе следующего вида: $Q(1) = 0{,}1238$, $Q(2) = 0{,}107$, $Q(k) = 0{,}0736 \times (0{,}9042)^{k-3}$, $k \geqslant 3$.

5. Получение дополнительных реализаций по одной выборке

При получении экспериментальных данных возможны ошибки или погрешности в полученных результатах. Это может быть связано с неточностью измерительных приборов (систематическая ошибка) или с ошибками наблюдателя (случайная ошибка). Необходимо проверить, могли ли ошибки получения данных значительно повлиять на результат анализа полученной выборки. Предлагается алгоритм получения дополнительных реализаций, близких к исходной. Если анализ измененных данных даст результат, близкий результату анализа исходных данных, то можно считать, что возможные неточности в данных не могли повлиять на выводы, сделанные по исходной выборке.

Предположим, что наблюдатель получает данные с относительной погрешностью, не превышающей величины δ. Обычно считают, что ошибка имеет нормальное распределение. Тогда полученное измерение также имеет нормальное распределение со средним, которое совпадает с реальным значением измеряемой величины. Для нормального распределения известно правило

Таблица 3. Модифицированные данные $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, 80$

0,000167	0,002651	0,003939	0,002877	0,004010	0,002802	0,002695	0,001419
0,002253	0,000449	0,002587	0,001327	0,002134	0,000763	0,004209	0,002607
0,004030	0,001510	0,001272	0,001959	0,001939	0,001105	0,001812	0,001625
0,002520	0,002671	0,003958	0,002854	0,004105	0,002710	0,003942	0,002869
0,004090	0,002726	0,003982	0,002830	0,004133	0,004312	0,003894	0,004551
0,003982	0,004463	0,003894	0,002921	0,004054	0,002762	0,003935	0,002877
0,001097	0,002818	0,000707	0,002194	0,000835	0,003152	0,000087	0,002738
0,003907	0,002909	0,004101	0,002714	0,004030	0,002782	0,003990	0,002825
0,003302	0,000616	0,002893	0,000950	0,003664	0,000358	0,003474	0,001427
0,002575	0,002814	0,001272	0,002671	0,002873	0,001423	0,001943	0,000572

Таблица 4. Значения (z_i, y_i) вектора $(\chi_i; \tau_{i+1} - \tau_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 49$

(2; 0,002818)	(1; 0,003939)	(1; 0,002877)	(1; 0,00401)	(10; 0,020638)
(2; 0,006637)	(10; 0,020372)	(10; 0,034242)	(10; 0,038769)	(12; 0,027423)
(10; 0,027768)	(25; 0,038499)	(1; 0,003974)	(2; 0,006796)	(15; 0,025495)
(6; 0,014506)	(1; 0,01209)	(9; 0,027653)	(4; 0,039791)	(6; 0,03439)
(1; 0,022912)	(4; 0,039338)	(11; 0,071287)	(7; 0,0804)	(9; 0,056117)
(50; 0,11004)	(6; 0,013767)	(11; 0,029895)	(10; 0,030968)	(9; 0,027701)
(16; 0,042084)	(4; 0,01364)	(16; 0,034405)	(4; 0,01329)	(10; 0,022129)
(11; 0,034048)	(9; 0,02042)	(5; 0,02166)	(2; 0,025845)	(13; 0,034223)
(2; 0,014423)	(2; 0,026389)	(8; 0,083412)	(4; 0,057564)	(21; 0,125866)
(34; 0,075817)	(21; 0,024585)	(13; 0,015015)	(6; 0,010588)	(3; 0,006601)

"трех сигма" — почти все значения случайной величины находятся на расстоянии не более величины 3σ от математического ожидания. Положим, что число 3σ равно абсолютной погрешности δX, где X — полученное измерение. Получаем среднеквадратическое отклонение $\sigma = \delta X/3$. Таким образом, с помощью исходной выборки $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ можно получить семейство выборок $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$, где Y_i — реализация случайной величины с нормальным распределением $N(X_i, (\delta X_i/3)^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примéним описанный алгоритм получения дополнительных выборок к данным, проанализированным в разделе 4. Пусть погрешность измерений не превышает $\delta = 0{,}05$. В табл. 3 приведена часть модифицированных данных.

Применяя фазово-частотный критерий Валлиса–Мура к статистическим данным табл. 3, получаем значение статистики $Z(10000, x_1, x_2, \ldots, x_{10000}) = 9{,}6221$. Значение статистики для данного потока превышает пороговое значение 1,96. Тогда согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между пакетами следует отклонить.

Примéним к модифицированным данным первый алгоритм с теми же самыми параметрами $h_0 = 0{,}001$, $a = 0{,}96$ и $b = 1{,}44$. Получим такое же число $N = 1009$ групп, но объединены другие пакеты. Часть обработанных данных приведена в табл. 4.

Статистика Валлиса–Мура $Z(1009, y_0, y_1, \ldots, y_{1008}) = 0{,}323$ для временны́х интервалов между первыми пакетами в группах не превышает критического

Таблица 5. Модифицированные данные $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, 80$

0,000166	0,002640	0,003860	0,002907	0,004025	0,002755	0,002736	0,001445
0,002261	0,000461	0,002654	0,001366	0,002158	0,000761	0,004396	0,002666
0,004114	0,001551	0,001272	0,001915	0,001956	0,001099	0,001836	0,001592
0,002563	0,002676	0,003965	0,002880	0,004134	0,002743	0,004014	0,002914
0,004083	0,002679	0,004020	0,002826	0,004167	0,004390	0,003877	0,004458
0,004023	0,004402	0,003939	0,002845	0,004101	0,002749	0,004068	0,002869
0,001082	0,002811	0,000730	0,002202	0,000851	0,003130	0,000087	0,002800
0,003907	0,002911	0,004188	0,002751	0,004113	0,002819	0,003987	0,002797
0,003299	0,000619	0,002894	0,000955	0,003637	0,000355	0,003541	0,001436
0,002686	0,002906	0,001271	0,002718	0,002960	0,001462	0,001970	0,000575

уровня 1,96. Поэтому гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется. Аналогичным способом получены оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения h и σ: $h^* = 0{,}0041$ и $\sigma^* = 0{,}0197$. Значение статистики хи-квадрат для распределения интервалов равно 5,8864. Это значение не превышает 5-процентное пороговое значение распределения хи-квадрат, равное 5,991. Отсюда следует, что гипотеза о смещенном экспоненциальном распределении интервалов между группами пакетов не отвергается.

Статистика Валлиса–Мура $Z(1009, z_0, z_1, \ldots, z_{1008})$ для количества пакетов в группе равна 1,684 и удовлетворяет условию $|Z(1009, z_0, z_1, \ldots, z_{1008})| < 1{,}96$. Значит, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. Аналогично с помощью формулы (10) получены оценки для α, β и γ: $\alpha^* = 0{,}9024$, $\beta^* = 0{,}6675$, $\gamma^* = 0{,}9043$. Значение статистики хи-квадрат, равное 3,293, меньше 5 % порогового значения хи-квадрат распределения с одной степенью свободы, равного 3,841. Таким образом, распределение вида (5) для количества требований в пачке хорошо описывает данные. Получено распределение для количества пакетов в группе следующего вида: $Q(1) = 0{,}1219$, $Q(2) = 0{,}11$, $Q(k) = 0{,}0734 \times (0{,}9043)^{k-3}$, $k \geqslant 3$.

Приведем также еще одну модифицированную выборку при случайном колебании, не превышающем относительной погрешности $\delta = 0{,}05$. В табл. 5 приведена часть модифицированных данных.

Применяя критерий Валлиса–Мура к модифицированным данным, получаем значение статистики $Z(10000, x_1, x_2, \ldots, x_{10000}) = 9{,}343 > 1{,}96$. Согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между пакетами следует отклонить. Обработаем модифицированные данные первым алгоритмом с параметрами $h_0 = 0{,}001$, $a = 0{,}96$ и $b = 1{,}44$. Часть обработанных данных приведена в табл. 6.

Гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется, так как статистика $Z(1009, y_0, y_1, \ldots, y_{1008}) = 0{,}274$ для временны́х интервалов между первыми пакетами в группах не превышает критического уровня 1,96. Оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения равны $h^* = 0{,}0043$ и $\sigma^* = 0{,}0194$. Значение 5,647 статистики хи-квадрат для распределения ин-

Таблица 6. Значения (z_i, y_i) вектора $(\chi_i; \tau_{i+1} - \tau_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 49$

(2; 0,002806)	(1; 0,00386)	(1; 0,002907)	(1; 0,004025)	(10; 0,020992)
(2; 0,00678)	(10; 0,020427)	(10; 0,03446)	(10; 0,038859)	(12; 0,027569)
(10; 0,027871)	(25; 0,039184)	(1; 0,004018)	(2; 0,006844)	(15; 0,02585)
(6; 0,014664)	(1; 0,012114)	(9; 0,027843)	(4; 0,039897)	(6; 0,03436)
(1; 0,023018)	(4; 0,040091)	(11; 0,071316)	(7; 0,080915)	(9; 0,056205)
(50; 0,110372)	(6; 0,013994)	(11; 0,030369)	(10; 0,031335)	(9; 0,027789)
(8; 0,022248)	(10; 0,027432)	(18; 0,04113)	(4; 0,013428)	(10; 0,022303)
(11; 0,034471)	(9; 0,020528)	(5; 0,021935)	(2; 0,026031)	(13; 0,034193)
(2; 0,014612)	(2; 0,026430)	(8; 0,083282)	(4; 0,05783)	(21; 0,126454)
(34; 0,07632)	(21; 0,024614)	(13; 0,015086)	(6; 0,010784)	(3; 0,006716)

тервалов не превышает 5-процентное пороговое значение распределения хи-квадрат. Поэтому гипотеза о смещенном экспоненциальном распределении интервалов между группами пакетов не отвергается.

Статистика $Z(1009, z_0, z_1, \ldots, z_{1008}) = 0{,}7971$ для количества пакетов в группе не превышает критического уровня 1,96. Таким образом, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. Получены следующие оценки параметров распределения: $\alpha^* = 0{,}8281$, $\beta^* = 0{,}6985$, $\gamma^* = 0{,}9044$. Значение статистики хи-квадрат равно 3,124 и оно меньше 5-процентного порогового значения, равного 3,841. Таким образом, можно считать, что количество требований в пачке имеет распределение вида (5). Итак, получаем распределение следующего вида: $Q(1) = 0{,}1268$, $Q(2) = 0{,}105$, $Q(k) = 0{,}0733 \times (0{,}9044)^{k-3}$, $k \geqslant 3$.

6. Заключение

В статье описана модель неоднородного потока транспорта. Неоднородность порождает зависимость и разное распределение интервалов между соседними требованиями. Таким образом, транспортный поток имеет сложную вероятностную структуры. Предложено транспортный поток рассматривать как поток групп (пачек) требований с определенным распределением размера группы. Представить исходный поток в виде потока групп можно с помощью одного из предложенных алгоритмов. Данный подход можно использовать для изучения любого реального потока неоднородных требований.

При изучении реальных потоков часто для исследования доступна только одна реализация данных. В статье предложен алгоритм получения дополнительных реализаций аналогичной вероятностной структуры. При этом использование распределения Гаусса позволяет получить любое количество дополнительных реализаций. Новые реализации можно исследовать теми же методами, что и исходную. Полученные результаты оказались близкими к результатам анализа исходных данных.

Итак, проведено численное исследование как исходных реальных данных, так и модифицированных. Предложенные алгоритмы определения вероятностной структуры потоков неоднородных требований показали свою эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
2. *Неймарк Ю.И., Федоткин М.А.* О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке // АиТ. 1966. № 3. Т. 27. С. 78–87.
3. *Неймарк Ю.И., Федоткин М.А., Преображенская А.М.* Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1968. № 5. С. 129–141.
4. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
5. *Дрю Д.* Теория транспортных потоков и управление ими. М.: Транспорт, 1972.
6. *Федоткин М.А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов / Сб. научн. работ "Математические вопросы кибернетики". М.: Физматлит, 1998. № 7. С. 333–344.
7. *Федоткин М.А., Федоткин А.М.* Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко // АиТ. 2009. № 12. С. 92–108.

   Fedotkin M.A., Fedotkin A.M. Analysis and Optimization of Output Processes of Conflicting Gnedenko-Kovalenko Traffic Streams under Cyclic Control // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. P. 2024–2038.

   https://doi.org/10.1134/S0005117909120108.
8. *Haight F.A.* Mathematical theories of traffic flow. N.Y.–London: Acad. press, 1963.
9. *Федоткин М.А.* Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М.: Физматлит, 2018.
10. *Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V.* Construction and Analysis of a Mathematical Model of Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // Autom. Control Comput. Sci. 2014. V. 48. No. 6. P. 358–367.
11. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
12. *Федоткин М.А.* Модели в теории вероятностей. М.: Физматлит, 2012.
13. *Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A.* Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Inform. Sci. 2014. V. 279. P. 154–169.
14. *Федоткин М.А.* Основы прикладной теории вероятностей и статистики. М.: Высш. шк., 2006.
15. *Федоткин М.А.* Лекции по анализу случайных явлений. М.: Физматлит, 2016.
16. *Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V.* Nonlocal Description of the Time Characteristic for Input Flows by Means of Observations // Autom. Control Comput. Sci. 2015. V. 49. No. 1. P. 29–36.
17. *Fowler H.J., Leland W.E.* Network Traffic Characteristics with Implications for Broadband Network Congestion Management // IEEE J. Sel. Area. Comm. 1991. No. 9(7). P. 1139–1149.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 26.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

Автоматика и телемеханика, № 8, 2020

© 2020 г. Д.С. ХОРЬКИН (dmitryhorkin@gmail.com),
М.И. БОЛОТОВ (maksim.bolotov@itmm.unn.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
Л.А. СМИРНОВ, канд. физ.-мат. наук (smirnov_lev@appl.sci-nnov.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского;
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород),
Г.В. ОСИПОВ, д-р физ.-мат. наук (osipov@vmk.unn.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ФАЗОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СВЯЗАННЫХ РОТАТОРОВ[1]

Исследована динамика вращательных движений в системе двух несимметрично связанных систем маятникового типа. Изучены механизмы потери устойчивости синфазного вращательного движения. Проанализирован сценарий возникновения хаотической динамики в зависимости от значений управляющих параметров.

Ключевые слова: ротатор, фазовое управление, синхронизация, вращательный режим, хаос.

DOI: 10.31857/S0005231020080127

1. Введение

Исследование коллективного поведения в сетях связанных элементов является одной из привлекательных и важных областей нелинейной динамики, актуальных с точки зрения теории и приложений [1–4]. Известно, что даже при слабой связи элементы ансамблей могут стремиться к достижению общего ритма функционирования, т.е. к синхронизации [1]. Достаточно широкий класс объектов, рассматриваемых в физике, радиотехнике, электронике и других областях естествознания, могут быть описаны с помощью моделей систем связанных маятников [5]. Несмотря на простоту этих моделей, они используются не только для описания механических объектов [6], но и для разнообразных процессов в молекулярной биологии [7–9], полупроводниковых структурах [10] и т.д. Данная модель также может рассматриваться как базовая при теоретических исследованиях связанных джозефсоновских контактов [11–13], а также систем фазовой синхронизации [3, 4, 14, 15].

2. Описание модели

В данной работе рассмотрено поведение ансамбля двух парциальных систем фазовой синхронизации, соединенных параллельно через сигналы фазовых рассогласований [3, 4]. Структурная схема ансамбля представлена на рис. 1. Математическую модель системы двух таких объектов можно представить в виде системы уравнений маятникового типа:

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 + \lambda\dot{\varphi}_1 + \sin\varphi_1 = \gamma + \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ &\ddot{\varphi}_2 + \lambda\dot{\varphi}_2 + \sin\varphi_2 = \gamma + \kappa_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 19-12-00367.

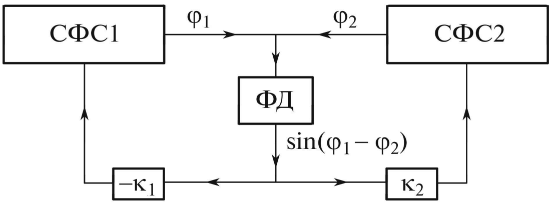


Рис. 1. Структурная схема пары систем фазовой синхронизации (СФС1 и СФС2), связанных параллельно через сигналы фазовых рассогласований (ФД — фазовый детектор).

Здесь λ — коэффициент затухания сигнала, γ — отношение начальной к максимальной расстройке частот, κ_1, κ_2 — параметры усиления сигнала, характеризующие силу связи между системами.

Ансамбль двух симметрично связанных идентичных маятников был рассмотрен в [16]. Динамика неидентичных маятников (с различными величинами γ) исследована в [17] . Заметим, что с помощью системы (1) возможно описание поведения ансамбля глобально связанных ротаторов, в котором образуются два кластера с различным числом взаимно синхронных элементов (N_1 и N_2) [18]. В силу различных N_1 и N_2 связь между кластерами естественным образом является асимметричной.

Исследуем зависимость поведения системы (1) от степени асимметричности связи. Для этого представим систему (1) в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 + \lambda\dot{\varphi}_1 + \sin\varphi_1 = \gamma + K\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ &\ddot{\varphi}_2 + \lambda\dot{\varphi}_2 + \sin\varphi_2 = \gamma + \beta K\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned} \tag{2}$$

где теперь K — параметр связи, β — параметр, характеризующий степень асимметричности связи. Такой вид связи является дополнительным средством управления динамическими режимами, в том числе синхронными режимами в различного рода технических устройствах, например в системах фазовой синхронизации [3, 4]. Как будет показано ниже, при определенном выборе управляющих параметров в такой системе могут устанавливаться как синфазные, так и несинфазные вращательные режимы.

3. Синфазный режим и его устойчивость

В системе (2) существует синфазное периодическое движение: координаты совпадают друг с другом, т.е. $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \phi_s(t)$. При этом $\phi_s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\phi}_s + \lambda\dot{\phi}_s + \sin\phi_s = \gamma.$$

Определим, при каких значениях управляющих параметров синфазный вращательный режим системы (2) теряет устойчивость. Для этого линеаризуем систему (2) относительно синфазного вращательного движения ϕ_s. Представим фазы ротаторов в виде

$$\varphi_1 = \phi_s + \delta\varphi_1,$$
$$\varphi_2 = \phi_s + \delta\varphi_2,$$

получим систему уравнений в вариациях

$$\delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos(\phi_s)\delta\varphi_1 = K(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1),$$
$$\delta\ddot{\varphi}_2 + \lambda\delta\dot{\varphi}_2 + \cos(\phi_s)\delta\varphi_2 = \beta K(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2).$$

Введем новую величину $\eta = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1$, представляющую собой расстройку приращений фаз в окрестности ϕ_s, и получим относительно η дифференциальное уравнение

$$\ddot{\eta} + \lambda\dot{\eta} + (\cos\phi_s + (1+\beta)K)\eta = 0. \tag{3}$$

Подробный анализ уравнения (3) представлен в [16, 19], где показано, что существует диапазон значений параметра K ($K_1 < K < K_2$), в котором имеет место неустойчивость синфазного вращательного движения. Значения K_1, K_2 в рассматриваемом случае определяются выражением

$$K_{1,2} = \frac{1}{1+\beta}\left[\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \pm 2\sqrt{1-\gamma^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\gamma^2}\right] + O\left(\frac{\lambda^4}{\gamma^4}\right). \tag{4}$$

Внутри интервала $\Delta K = K_2 - K_1$ возможно существование асинхронных периодических (разного периода) и хаотических движений. Из (4) следует, что увеличение асимметрии связи приводит к уменьшению области неустойчивости синфазного режима. При этом интервал неустойчивости ΔK смещается в область малых коэффициентов связи K.

4. Поиск регулярных вращательных режимов

Приведем описание численных методов, используемых для поиска регулярных вращательных движений, существующих в базовой модели (2), и определения их линейной устойчивости. Для начала отметим, что излагаемая ниже процедура является фактически модификацией схемы нахождения замкнутых предельных циклов в нелинейных динамических системах и использует методы, изложенные в [20]. Введем обозначение $\{\varphi_n(t)\}$ — здесь и далее вектор-строка, где $n = 1, 2$. Основная идея этого метода заключается в следующем. Любой представитель $\{\varphi_n(t)\}$, искомого класса траекторий характеризуется прежде всего своим периодом T (который, неизвестен и должен быть найден в конце вычислительной процедуры) и числом k, определяющим то, сколько раз каждая составляющая из набора циклических координат $\{\varphi_n(t)\}$ изменится на 2π за промежуток времени T. Основываясь на этом, рассмотрим отображение $\{\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n(0)\} \to \{\varphi_n(T), \dot{\varphi}_n(T)\}$ и сконструируем следующий вектор:

$$p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) = \{\varphi_n(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) - \varphi_{0n} - 2\pi k, \dot{\varphi}_n(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) - \dot{\varphi}_{0n}\},$$

где $\{\varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t)\}$ — решение системы (2) с начальными условиями $\{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}$, т.е. $\{\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n(0)\} = \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}$.

Используя определенную подобным путем многомерную функцию $p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\})$, можно сформулировать условие, дающее возможность найти $\{\varphi_n(t)\}$ и T. Оно состоит в равенстве нулю всех компонент вектора $p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\})$. В итоге приходим к тому, что необходимо подобрать такие значения T и $\{\varphi_n(t)\}$, которые позволят удовлетворить требованию

$$p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) = 0. \tag{5}$$

Другими словами можно сказать, что задача теперь состоит в поиске неподвижной точки отображения $\{\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n(0)\} \to \{\varphi_n(T), \dot{\varphi}_n(T)\}$ с учетом цикличности $\{\varphi_n(t)\}$ [20]. В силу инвариантности системы (2) относительно трансляции во времени одну из величин $\{\varphi_{0n}\}$ можно приравнять нулю без потери общности и сделать тем самым количество неизвестных и число соотношений в (3) одинаковым. Для отыскания корней совокупности уравнений (3) целесообразно использовать метод Ньютона, так как он обладает высокой эффективностью. Продолжая эти решения по параметру β в интервале неустойчивости синфазного режима, можно проследить все семейство нетривиальных периодических движений и проанализировать их бифуркации.

Для изучения линейной устойчивости произвольных (2π-, 4π-, 8π- и т.д.) периодических вращательных движений (с учетом цикличности) динамической системы (2) введем малые возмущения $\delta\varphi_n(t)$: $\{\varphi_n(t) = \phi_n(t) + \delta\varphi_n(t)\}$, где $\phi_n(t)$ — рассматриваемое периодическое движение. В результате процедуры линеаризации получим следующие уравнения для возмущений $\{\delta\varphi_n(t)\}$:

$$\begin{aligned}
\delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos(\phi_1)\delta\varphi_1 &= K\cos(\phi_2 - \phi_1)(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1),\\
\delta\ddot{\varphi}_2 + \lambda\delta\dot{\varphi}_2 + \cos(\phi_2)\delta\varphi_2 &= \beta K\cos(\phi_1 - \phi_2)(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2).
\end{aligned}$$

Дальнейший анализ может быть проведен в рамках теории Флоке. Устойчивость рассматриваемых движений определяется спектром собственных значений матрицы монодромии (оператора Флоке) $M(T)$, которая задается выражением

$$\{\delta\varphi_n(T), \delta\dot{\varphi}_n(T)\}^T = M\,\{\delta\varphi_n(0), \delta\dot{\varphi}_n(0)\}^T.$$

Собственные значения μ_m (здесь и далее $m = \overline{1,4}$) матрицы $M(T)$ являются мультипликаторами Флоке, которые связаны с показателями Флоке q_m периодического решения $\{\phi_n(t)\}$ соотношениями $m = \exp(iq_m)$. Таким образом, для определения устойчивости каждого обсуждаемого движения достаточно вычислить μ_m. Если $|\mu_m| \le 1$ для всех m, тогда вращательный режим линейно устойчив. Стоит отметить, что одно из собственных значений μ_m всегда должно быть строго равным единице, так как $\{\dot{\varphi}_n(t)\}$ принадлежит семейству периодических движений (с учетом цикличности). Следовательно, появляется дополнительная возможность проверки того, что найденное с помощью описанной выше процедуры решение $\{\phi_n(t)\}$ принадлежит обсуждаемому классу предельных вращений. Если хотя бы один из мультипликаторов Флоке μ_m расположен на комплексной плоскости за пределами единичной окружности, то вращательный режим является линейно неустойчивым.

5. Несинфазные регулярные и хаотические вращательные режимы

В результате численного моделирования в области параметров, где нет устойчивости синфазного вращательного движения (см. выражение (4)), были исследованы устанавливающиеся вращательные движения и их бифуркации.

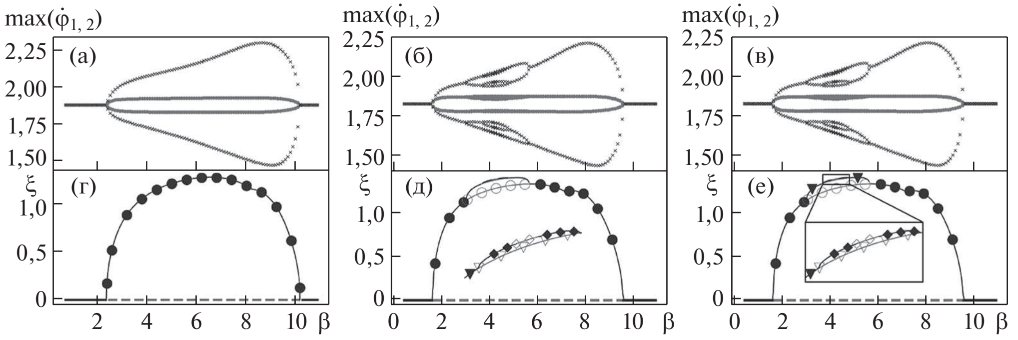


Рис. 2. *а, б, в* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *г, д, е* — Бифуркационные диаграммы вращательных режимов.

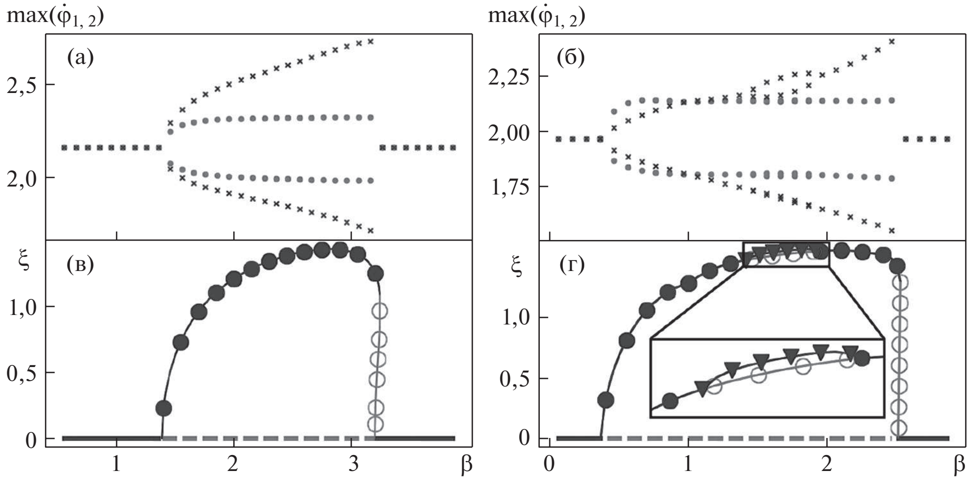


Рис. 3. *а, б* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *в, г* — Бифуркационные диаграммы вращательных режимов.

Для того чтобы характеризовать степень отклонения от синфазного режима, введем величину $\xi = \max\limits_{0<t<T} |\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)|$, где T — период вращательных движений. Здесь и далее параметр внешнего воздействия выберем равным $\gamma = 0{,}97$.

На рис. 2,*а*–2,*в* и рис. 3,*а*, 3,*б* изображены локальные максимумы мгновенных частот осцилляторов $\dot{\varphi}_1(t)$ и $\dot{\varphi}_2(t)$. Круглыми маркерами отмечены значения $\max(\dot{\varphi}_1(t))$, крестообразными маркерами отмечены $\max(\dot{\varphi}_2(t))$. На рис. 2,*г*–2,*е* и рис. 3,*в*, 3,*г* изображены зависимости параметра ξ от параметра β. Закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращательным движениям, полые маркеры — неустойчивым. При этом круговыми, треугольными и четырехугольными маркерами показаны 4π-, 8π-, 16π-периодические вращательные режимы соответственно. Линия без маркеров соответствует синфазному 2π-периодическому вращательному режиму, сплошная — устойчивому, пунктирная — неустойчивому. Для $K = 0{,}06$, $\lambda = 0{,}77$ (рис. 2,*а*, 2,*г*) при увеличении параметра β синфазное периодическое вращательное движе-

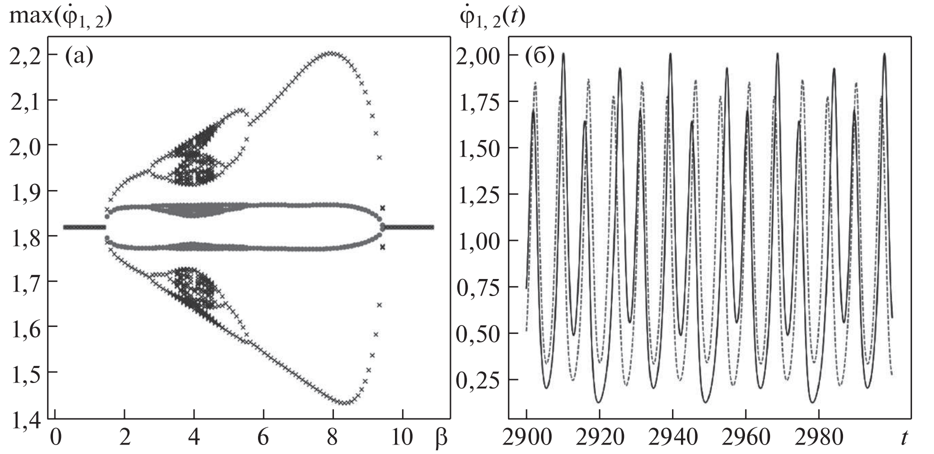


Рис. 4. *а* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *б* — Режим динамического хаоса при $\beta = 3{,}977$.

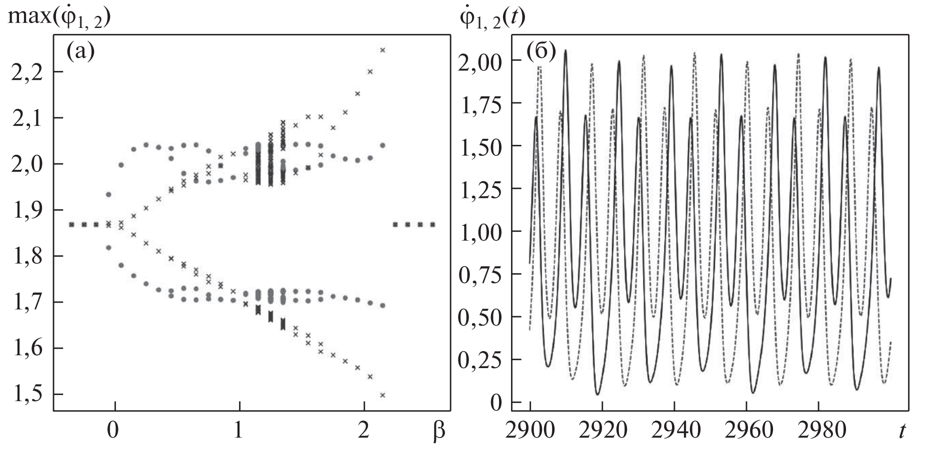


Рис. 5. *а* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *б* — Режим динамического хаоса при $\beta = 1{,}25$.

ние претерпевает бифуркацию удвоения периода при $\beta \approx 2{,}3$. При этом из устойчивого синфазного 2π-периодического движения рождается устойчивое 4π-периодическое движение, а 2π-периодическое движение теряет свою устойчивость. Затем при $\beta \approx 10{,}2$ в результате обратной бифуркации удвоения устойчивое 4π-периодическое движение сливается с неустойчивым синфазным 2π-периодическим движением, синфазное вращательное движение вновь становится устойчивым. При $\lambda = 0{,}8$ (рис. 2,*б*, 2,*д*) теперь уже несинфазное 4π-периодическое движение претерпевает бифуркацию удвоения периода, при этом рождается 8π-периодическое вращательное движение, а 4π-периодическое движение теряет свою устойчивость. Далее при большем значении параметра диссипации $\lambda = 0{,}81$ (рис. 2,*в*, 2,*е*) при увеличении параметра β система претерпевает несколько бифуркаций удвоения периода, в результате которых увеличивается количество неустойчивых вращательных движений. На рис. 4, 5 изображены локальные максимумы мгновенных частот $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$. Круглыми (крестообразными) маркерами отмечены значения $\max(\dot{\varphi}_1(t))$ ($\max(\dot{\varphi}_2(t))$) (рис. 4,*а*, 5,*а*) и временные реализации $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$ (рис. 4,*б*, 5,*б*). Пунктирная линия — $\dot{\varphi}_1(t)$, сплошная линия — $\dot{\varphi}_2(t)$. При $\lambda = 0{,}816$ (рис. 4) наблюдаем, что в результате каскада бифуркаций удвоения периода появляется диапазон значений параметра β $(3,53 < \beta < 4,53)$, внутри которого в системе наблюдается режим динамического хаоса [21]. Теперь рассмотрим случай, когда $K = 0{,}21$ и $\lambda = 0{,}6$ (рис. 3,*а*, 3,*в*). В результате бифуркации удвоения периода синфазное вращательное движение здесь также теряет устойчивость при $\beta \approx 1{,}39$. При этом рождается устойчивое 4π-периодическое движение, отличие которого от синфазного режима возрастает с увеличением параметра β. Однако при $\beta > 3{,}22$ система (2) вновь возвращается к той ситуации, когда устанавливается состояние $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. На бифуркационной диаграмме (рис. 3,*в*) видно, что такое изменение в поведении модели (2) происходит резким образом при переходе через точку с $\beta = 3{,}22$. Данный эффект жесткого исчезновения обусловлен существованием неустойчивого вращательного движения в интервале $3{,}199 < \beta < 3{,}24$.

Чтобы проанализировать происходящие смены режимов, рассмотрим зависимость параметра ξ от параметра β (рис. 3,*а*, 3,*в*). Видно, что кроме устойчивых периодических движений, существует также неустойчивое несинфазное 4π-периодическое движение, которое рождается из синфазного неустойчивого 2π-периодического движения в результате субкритической бифуркации удвоения периода ($\beta \approx 3{,}199$), при этом синфазное 2π-периодическое движение вновь становится устойчивым. Далее при увеличении параметра β устойчивое и неустойчивое 4π-периодические вращательные движения сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации. При дальнейшем увеличении параметра β в системе (2) возможен только синфазный вращательный режим. Таким образом, в системе наблюдается эффект бистабильности вращательных режимов. При $\lambda = 0{,}71$ (рис. 3,*б*, 3,*г*) ситуация аналогична предыдущему случаю: существует 4π-периодическое движение и происходит бифуркация удвоения периода ($\beta \approx 1{,}38$), в результате которой рождается устойчивое 8π-периодическое движение, при этом 4π-периодическое движение теряет свою устойчивость. При $\lambda = 0{,}779$ (рис. 5) в результате каскада бифуркаций удвоения периода появляется диапазон значений параметра β $(1{,}15 < \beta < 1{,}35)$, при которых в системе наблюдается режим динамического хаоса.

На рис. 6 изображены карты вращательных режимов, показывающие тип установившегося вращательного движения, реализующегося в системе в зависимости от параметров K и β. Рассмотрим случай $\lambda = 0{,}67$ (рис. 6,*а*), при этом помимо синфазного вращательного движения в рассматриваемой области параметров существует только устойчивый несинфазный 4π-периодический вращательный режим. При увеличении λ до значения 0,73 (рис. 6,*б*) кроме устойчивого 4π-вращательного режима, при некоторых K и β наблюдается 8π-периодический несинфазный вращательный режим, при этом 4π-вращательное движение теряет устойчивость. При $\lambda = 0{,}82$ (рис. 6,*в*) в системе может наблюдаться режим динамического хаоса, возникающий в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

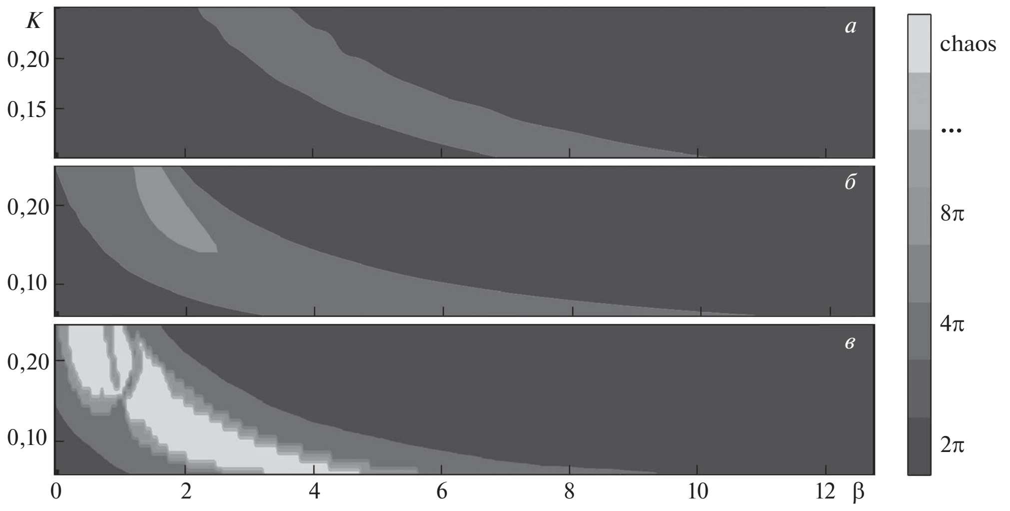


Рис. 6. Тип вращательных периодических режимов в зависимости от значений параметров K, β при $\gamma = 0{,}97$. *а* — $\lambda = 0{,}67$, *б* — $\lambda = 0{,}73$, *в* — $\lambda = 0{,}82$.

Заметим, что при малых значениях параметра связи K неустойчивость синфазного режима возникает при большем значении параметра асимметричности связи β.

6. Заключение

В работе рассмотрена вращательная динамика в связанных системах фазовой синхронизации. Показано, что в системе с асимметричной связью существует область значений параметров, в которой синфазное вращательное движение является неустойчивым, при этом реализуются несинфазные периодические и хаотические вращения. Аналитически получено, что увеличение асимметрии связи приводит к уменьшению области неустойчивости синфазного режима $\Delta K = K_2 - K_1$. При этом интервал неустойчивости ΔK смещается в область малых коэффициентов связи K. Для возникновения неустойчивости при малых значений параметра связи необходима большая степень ее асимметричности.

Потеря устойчивости происходит в результате бифуркации удвоения периода (прямой и обратной). При обратной бифуркации удвоения периода в системе наблюдается жесткий переход к несинфазному режиму. В случае больших значений параметра затухания в результате каскада бифуркаций удвоения периода возникают хаотические вращения.

Описаны численные методы, позволяющие находить и определять линейную устойчивость регулярных вращательных режимов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. England: Cambridge Univer. Press, 2001.
2. *Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Germany: Springer Verlag, 2007.

3. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Sci., 1994.
4. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Монография. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. госуниверситета, 2013.
5. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Учебник. – 2-е изд., испр. и доп. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010.
6. *Kecik K., Warminski J.* Dynamics of an Autoparametric Pendulum-Like System with a Nonlinear Semiactive Suspension // Math. Probl. Engineer. 2011. V. 2011. No. 451047. P. 1–15.
7. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. Germany: Wiley-VCH., 2004.
8. *Homma S., Takeno S.* A Coupled Base-Rotator Model for Structure and Dynamics of DNA: Local Fluctuations in Helical Twist Angles and Topological Solitons // Progr. Theoret. Physics. 1984. V. 72. No. 4. P. 679–693.
9. *Takeno S., Homma S.* Kinks and Breathers Associated with Collective Sugar Puckering in DNA // Progr. Theoret. Physics. 1987. V. 77. No. 3. P. 548–562.
10. *Barone A., Paterno G.* Physics and Applications of the Josephson Effect. United States: John Wiley and Sons Inc., 1982.
11. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. No. 3. P. 2190–2195.
12. *Qian M., Wang J.-Z.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators // Ann. Physics. 2008. V. 323. No. 8. P. 1956–1962.
13. *Zheng Z., Hu B., Hu G.* Spatiotemporal dynamics of discrete sine-Gordon lattices with sinusoidal couplings // Phys. Rev. 1998. V. 57. No. 1. P. 1139–1144.
14. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении / Под ред. Ю.Н. Бакаева, М.В. Капранове. М: Сов. радио, 1978.
15. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М: Радио и связь, 1982.
16. *Smirnov L.A., Kryukov A.K., Osipov G.V., Kurths J.* Bistability of rotational modes in a system of coupled pendulums // Regul. Chaotic Dyn. 2016. V. 21. No. 7–8. P. 849–861.
17. *Хрисанфова С.О., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Коган Л.В., Осипов Г.В.* Динамика системы двух нелинейно связанных маятников // Прикладная нелинейная динамика. 2016. № 3. С. 4–20.
18. *Kemeth F.P., Haugland S.W., Krischer K.* Cluster singularity: The unfolding of clustering behavior in globally coupled Stuart-Landau oscillators // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci. 2019. V. 29. No. 2. P. 023107.
19. *Bolotov M.I., Munyaev V.O., Kryukov A.K., et al.* Variety of rotation modes in a small chain of coupled pendulums // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci. 2019. V. 29. No. 3. P. 033109.
20. *Неймарк Ю.И.* Метод точеченых отображений в теории нелинейных колебаний. М: Наука, 1972.
21. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 18.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS