

ВТОМАТИКА И ЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году Выходит 12 раз в год

> 5 2022

Москва

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65 Тел./факс: (495) 334-87-70 Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией Е.А. Мартехина

Москва ООО «Тематическая редакция»

[©] Российская академия наук, 2022

[©] Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2022

Тематический выпуск

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО ПРОГРАММНОГО КОМИТЕТА КОНФЕРЕНЦИИ «УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ»

DOI: 10.31857/S0005231022050014, **EDN:** ABGIUG

В специальном выпуске представлены избранные статьи 14-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2021)», проходившей с 27 по 29 сентября 2021 г.

Конференция служит ежегодно проводимым начиная с 2007 г. научным форумом, призванным содействовать диалогу между учеными академических кругов, исследователями из университетов, представителями разных направлений отраслевой науки и государственного сектора. Организатором является Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук.

Программа конференции непрерывно расширяется. На текущий момент она охватывает 16 секций. Среди них 10 секций ориентированы на проблемы отраслевого уровня:

- ТНК, Госхолдинги и Госкорпорации;
- цифровая экономика;
- банковские и финансовые системы;
- топливно-энергетические и инфраструктурные системы;
- транспортные системы;
- авиационно-космические и аналогичные комплексы;
- региональные и муниципальные системы;
- атомная энергетика;
- здравоохранение и медико-биологические системы;
- социальные системы.

Еще 6 секций посвящены вопросам развития инструментальных средств:

- имитация и оптимизация;
- управление инвестиционными проектами и программами;
- нелинейные процессы и вычислительные методы;
- информационное и программное обеспечение;
- обработка и интеллектуальный анализ больших массивов информации;
- мониторинг в управлении развитием.

Начиная с 2017 г., конференция проходит при информационной поддержке IEEE Russia section. Публикационная политика MLSD предусматривает электронное издание трудов, индексируемых в РИНЦ, а также размещение

избранных работ в электронной библиотеке IEEE Xplore, индексируемой в библиографической базе данных Scopus.

В труды конференции MLSD 2021 вошло 255 докладов, 153 статьи проиндексированы в библиографической базе данных Scopus.

Тематический выпуск посвящен проблемам управления развитием крупномасштабных систем в современных условиях глобализации и цифровизации управления. Выпуск включает статьи авторов, которые неоднократно выступали с пленарными и секционными докладами на этой конференции.

Программный комитет конференции уделяет особое внимание рассмотрению фундаментальных проблем математического моделирования развития крупномасштабных систем и построения комплексов взаимодополняющих моделей на основе агрегативно-декомпозиционного и проектно-программного подходов. Данный выпуск представляет ряд наиболее интересных результатов, относящихся к разным прикладным областям и обеспечивающих достижение значительных социально-экономических эффектов. Статья И.Б. Ядыкина, И.А. Галяева, Ю.А. Вершинина посвящена исследованию матричного непрерывного дифференциального и алгебраического уравнения Ляпунова, которое играет важную роль в теории управления. Авторы представляют новое решение обобщенного матричного уравнения Ляпунова для непрерывной билинейной нестационарной системы управления со многими входами и многими выходами. Принципиальная новизна подхода состоит в диагонализации матрицы динамики билинейной системы и в переносе итеративных вычислений с матрицы решения на вычисление последовательностей ее элементов на каждом шаге итерации. Данное решение позволяет получить достаточное условие устойчивости билинейной системы.

Статья А.Д. Цвиркуна, А.Ф. Резчикова, А.А. Самарцева, В.А. Иващенко, А.С. Богомолова, В.А. Кушникова, Л.Ю. Филимонюка посвящена исследованию актуальной и активно разрабатываемой в России и за рубежом проблемы блокировки распространения пожара и эвакуации людей из помещений. Авторы поставили задачу формирования обобщенной математической модели разнофакторных процессов с их последующей взаимоувязкой для получения траекторий самоорганизованного перемещения людей в сложных одно- и многоэтажных помещениях.

Основными составляющими моделями приняты:

- плоские клеточные структуры пространственного и временного распространения огня, в ячейках которых располагаются горючие и негорючие материалы;
- распространение тепла и дыма с учетом локальных процессов горения;
- сложные модели движения отдельных людей и потоков людей в помещениях на разных этажных уровнях.

Работа С.А. Гаха, С.П. Подковальникова, О.В. Хамисова исследует использование двойственных оценок развития электроэнергетических систем в виде множителей Лагранжа. В отличие от ставшего классическим подхода,

в рамках которого рассчитываются краткосрочные оценки, авторы делают упор на расчет долгосрочных двойственных оценок. Новый взгляд является исключительно важным для анализа развития динамично изменяющихся интеллектуальных энергосистем. В частности, получаемые на двойственной модели долгосрочные оценки позволяют анализировать не только эффективность рассматриваемых генерирующих источников и линий электропередачи, но и определять, насколько они работоспособны без проведения дополнительных специальных исследований каждого из них.

В статье А.В. Ахметзянова и А.В. Самохина изложены новые важные теоретические результаты для нелинейных уравнений гидродинамики, которые имеют большие практические перспективы в управлении процессами нефтедобычи. В работе представлены пространственно одномерные и двумерные нелинейные математические модели пилообразных волн. Это бегущие волны возмущения, профиль которых содержит как разрывы, так и гладкие участки. В среде без дисперсии любое периодическое возмущение на больших расстояниях превращается в "пилу с треугольными зубцами". Каждый период содержит разрыв и почти прямолинейный участок профиля. При дальнейшем распространении изменяются лишь пиковые значения возмущений. Обнаружение и управление пилообразными процессами могут привести к увеличению нефтеотдачи до 10–15% даже на уже истощенных месторождениях за счет доизвлечения остаточных запасов. Применение таких технологий в будущем будет равносильно открытию новых крупных месторождений.

Работа В.В. Цурко и А.И. Михальского посвящена оценке статистической связи случайных величин через взаимную информацию. В основной части статьи приводятся математическая постановка задачи и несколько способов ее решения. Перспективы предложенной математической техники связаны с ее возможным использованием для отбора информативных признаков на предварительном этапе анализа данных и обучения. В качестве примера применения указанного метода представлены результаты отбора признаков при прогнозе стабильности пространственной конфигурации белков, образованных пятью аминокислотами.

В статье Д.А. Губанова исследуется проблема анализа распространения информационного влияния в сетевых структурах. Автор развивает акциональный подход, предусматривающий такие действия участников сети, как написание поста, комментария к нему, репоста, лайка и т.д. Каждое действие характеризуется тремя параметрами: участником сети, видом действия и моментом совершения действия, что позволяет автору определить влиятельность действий агентов в сети с точки зрения некоего управляющего органа. Приведены три примера практического использования предложенной технологии. Первый пример связан с оценкой влияния и информационной защищенности пользователей социальной сети ВКонтакте. Второй посвящен исследованию влияния связей между агентами на основе понятий сетевой и индивидуальной значимости. Третий ориентирован на выявление информационных сообществ.

Статья Ф.И. Ерешко, А.Ю. Мушкова, Н.И. Турко, А.Д. Цвиркуна посвящена проблемам проектного управления многоукладной экономикой. Следуя системному подходу к разработке крупномасштабных проектов, авторы предлагают концептуальные математические модели, описывающие процедуру синтеза структуры управления Центра в иерархических системах. Приводятся формальные описания механизмов, лежащих в основе процедур согласованного принятия решений Центром и подчиненными системами. Излагаются принципы использования агрегированных математических моделей и их адаптации к конкретным отраслевым проблемам. Опираясь на формализованные представления теории игр и исследования операций, предлагается проанализировать опыт создания холдинговых структур и выявить преимущества их функционирования. К сильной стороне работы относится прикладная часть, связанная с анализом правовых основ стратегического планирования.

В статье И.В. Чернова рассматриваются результаты исследований по формализации и разработке сценарного подхода к анализу уязвимости при управлении сложной системой, в частности для предотвращения чрезвычайных ситуаций. Рассмотрена иерархия понятий, характеризующих уязвимость сложной системы. Развиваются формальные постановки задач анализа уязвимости сложной системы в условиях распространения возмущений при реализации угроз. На основе математического исследования выделяются базовые сценарии развития динамической системы и принятия эффективных решений по управлению сложными социально-экономическими системами.

Сценарная система, рассматриваемая автором, представляет собой комплекс взаимосвязанных компонентов, что позволяет перейти к формализованным описаниям важнейших элементов сложной системы: предметной области, в которой выявляются значимые события, модели преобразования состояний, модели формирования неопределенностей, правила выбора сценарных элементов. В целом сценарная модель описывает совместное поведение объекта и его окружения.

Председатель Программного комитета MLSD'2007–MLSD'2021 Академик РАН $C.H.\ Bacuльев$

© 2022 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru), И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru), Ю.А. ВЕРШИНИН, д-р техн. наук (oo295og@mail.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ¹

Разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова для широкого класса непрерывных нестационарных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, предложенного ранее для таких уравнений. Предложенный подход заключается в диагонализации исходной системы, получении сепарабельного спектрального разложения грамиана стационарной линейной части по комбинационному спектру матрицы динамики линейной части, применении на каждом шаге итерации спектрального разложения матрицы ядра решения на предыдущем шаге и последующего агрегирования элементов матриц. Получено спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Разработаны новый метод и алгоритм поэлементного вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем. Принципиальная новизна подхода состоит в переносе вычислений с матрицы решения на вычисление последовательности ее элементов на каждом шаге итерации.

Ключевые слова: спектральные разложения, обобщенное уравнение Ляпунова, билинейные системы, нестационарные системы, итеративные алгоритмы, матричные уравнения Вольтерра.

DOI: 10.31857/S0005231022050026, **EDN:** ABGUUO

1. Введение

Исследования в области нелинейных и "слабо нелинейных" систем управления, описываемых рядами Вольтерра, насчитывают больше полувека [1–10]. Матричное непрерывное дифференциальное и алгебраическое уравнение Ляпунова играет важную роль в современной теории управления [1, 3–10]. Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных систем с простым спектром были получены на основе спектрального

 $^{^{-1}}$ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра [1]. В публикациях [5-6] получены аналитические решения дискретных и непрерывных уравнений Ляпунова на основе приведения матрицы динамики к форме Жордана. В [11-13] разработана теория реализации и исследованы структурные разложения грамианов для матриц динамики линейных систем с простым спектром, исследованы свойства грамианов билинейных систем, получены явные представления грамиана билинейной системы в виде ряда Вольтерра и исследованы условия его сходимости [14–16]. Интерес к этим исследованиям стимулировался тем, что появилось их достаточно полное описание на основе частотных методов, основанных на обобщении преобразования Лапласа на функции многих переменных в форме многомерного преобразования Лапласа [17-19]. В [18] было предложено использовать многомерное преобразование Лапласа для построения решения в нелинейных системах с гладкими нелинейностями, к которым относятся и билинейные системы. В [20] был предложен метод итеративного вычисления многомерной передаточной функции, в которой на каждой итерации решается уравнение Ляпунова для линейной подсистемы с изменяющейся матрицей правой части, в качестве которой используется решение уравнения, полученное на предыдущей итерации.

Исследования в области билинейных систем тесно связаны с задачей понижения порядка модели путем построения аппроксимирующей модели меньшей размерности. Даже в случае линейных систем большой размерности применение проекционных методов позволяет существенно уменьшить размерность аппроксимирующей модели [10, 13, 20]. Среди этих методов отметим сбалансированное отсечение, сингулярную декомпозицию, метод подпространств Крылова, методы синтеза упрощенной модели, оптимальные по критерию H_2 -нормы грамианов, а также гибридные методы. Для большинства методов разработаны итеративные алгоритмы их реализации. Введены определения квадрата H_2 -нормы грамианов билинейной системы, получены их спектральные разложения на спектрах линейной подсистемы и сопряженной антиустойчивой подсистемы [10, 21]. Получены решения обобщенных уравнений Ляпунова с применением произведений Кронекера и метода векторизации. Введены энергетические функционалы и выявлены условия существования и единственности решения обобщенных уравнений Ляпунова. Получены формулы для вычисления решения с применением метода произведений Кронекера и метода векторизации [13, 20, 21]. Билинейные системы являются частным случаем систем координатно-параметрического управления, исследованию которых посвящена монография [16]. Работы в области исследования грамианов билинейных систем тесно связаны с анализом их структурных свойств управляемости и наблюдаемости [8, 14, 20]. Последние публикации по решению дифференциальных и алгебраических уравнений Ляпунова и Сильвестра во временной и комплексной областях и их приложения к анализу устойчивости сложных энергетических систем можно найти в [22–26].

2. Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную билинейную динамическую систему с многими входами и многими выходами

(2.1)
$$\Sigma_2 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^m N_\gamma x(t) u_\gamma(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$.

Определим линейную стационарную часть системы в виде

(2.2)
$$\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Определим грамиан управляемости билинейной системы с помощью матричного ряда Вольтерра вида [10], а именно:

(2.3)
$$P_{1}(t_{1}) = e^{At_{1}}B,$$

$$P_{1}(t_{1}, \dots, t_{i}) = e^{At_{i}} \left[N_{1}P_{i-1}N_{2}P_{i-1} \dots N_{m}P_{i-1} \right], \quad i = 2, 3, 4, \dots,$$

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \dots \int_{0}^{\infty} P_{i}(t_{1}, \dots, t_{i}) P_{i}^{T}(t_{1}, \dots, t_{i}) dt_{1} \dots t_{i}.$$

Для системы (2.1) можно определить обобщенное уравнение Ляпунова ОУЛ в виде

(2.4)
$$AP + PA^{T} + \sum_{j=1}^{m} N_{j} P N_{j}^{T} = -BB^{T}$$

или в виде

(2.5)
$$A^{\mathrm{T}}Q + QA + \sum_{j=1}^{m} N_{j}QN_{j}^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C.$$

Ряд Вольтерра (2.3) является решением уравнения (2.4) в том случае, когда это решение существует. Матрицу решения в этом случае можно назвать грамианом управляемости билинейной системы [11–13].

Теорема 1 [21]. Если матрица динамики линейной части А устойчива, а грамиан управляемости билинейной системы является единственным решением обобщенного уравнения Ляпунова, тогда решение является матрицей, определяемой с помощью итеративной процедуры:

(2.6)
$$AP_{1} + P_{1}A^{T} = -BB^{T},$$

$$AP_{i} + P_{i}A^{T} + \sum_{j=1}^{m} N_{j}P_{i}N_{j}^{T} = 0, \quad i = 2, 3, 4, \dots,$$

$$P = P_{1} + \sum_{j=2}^{\infty} P_{i}.$$

Грамиан наблюдаемости билинейной системы является предельным решением, получаемым в результате реализации аналогичной итеративной процедуры.

Следуя [13], рассмотрим задачу вычисления грамиана управляемости для одного класса билинейных нестационарных систем вида

(2.7)
$$\Sigma_3: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^H A_{\gamma}x(t)f_{\gamma}(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $f_{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^1$. Матрица динамики билинейной системы является суммой постоянной матрицы A и суммы произведений постоянных матриц A_{γ} на переменные параметры $f_{\gamma}(t)$, которые можно назвать параметрическими входами в отличие от координатных входов $u_{\gamma}(t)$. Система (2.7) может быть преобразована в систему (2.1) путем расширения вектора управления и введения новых обозначений [13]

(2.8)
$$u_{\eta}^{\mathrm{T}} = [u_{1} \ u_{2} \ \dots \ u_{m} \ f_{1} \ \dots \ f_{H}], \ B_{bl} = [B \ 0_{n \times H}],$$
$$N_{\eta} = \begin{cases} 0_{n \times n}, & \eta = 1, 2, \dots, m, \\ A_{\eta}, & \eta = m + 1, m + 2, \dots, m + H; \end{cases}$$

(2.9)
$$\Sigma_{3}: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\eta=1}^{m+H} N_{\gamma}x(t)u_{\eta}(t) + B_{bl}u(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Грамиан управляемости (2.2) системы (2.8) удовлетворяет расширенному уравнению Ляпунова вида (2.7) и может быть вычислен с помощью итеративной процедуры (2.6). Цель статьи — получение итеративного спектрального разложения решения обобщенного уравнения Ляпунова вида (2.7), или, что то же самое, решения матричного уравнения Вольтерра с ядрами вида интеграла свертки.

3. Сепарабельные спектральные разложения грамианов управляемости линейной части билинейной системы

В публикации [14] были получены следующие спектральные разложения грамианов линейной части билинейной системы по простому спектру матрицы A при предположениях, что матрица устойчива и все ее собственные числа различны:

$$P^{l} = -\sum_{r=1}^{n} \left[(Is_{r} + A^{*})^{-1} Q \operatorname{Res} \left((Is_{r} - A)^{-1}, s_{r} \right) \right].$$

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную часть можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

(3.1)
$$x = Tx_d, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d,$$

$$A_d = T^{-1} A T, \quad B_d = T^{-1} B, \quad C_d = C T, \quad Q_d = T^{-1} B B^{\mathrm{T}} T^{-\mathrm{T}}$$

или

$$A_{d} = \begin{bmatrix} u_{1} & u_{2} & \dots & u_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & s_{2} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & s_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1}^{*} \\ \nu_{2}^{*} \\ \vdots \\ \nu_{n}^{*} \end{bmatrix},$$

где матрица T^{-1} составлена из правых собственных векторов u_i , а матрица T=V — из левых собственных векторов ν_i^* , соответствующих собственному числу s_i . Грамиан диагонализованной линейной части является решением уравнения Ляпунова вида

$$A_d P_d + P_d A_d^* = -Q_d,$$

которое определится из формулы [14]:

(3.2)
$$P_d^l = -\sum_{r=1}^n \left[(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d \operatorname{Res} \left((Is_r - A_d)^{-1}, s_r \right) \right].$$

Грамиан управляемости P_d^{cl} связан с грамианом P^{cl} соотношением вида [23, 24]

$$(3.3) P^{cl} = TP_d^{cl} T^T.$$

Грамиан наблюдаемости P_d^{ol} связан с грамианом P^{ol} аналогичным соотношением

$$(3.4) P^{ol} = T^{-T} P_d^{ol} T^{-1}.$$

Заметим, что в диагонализованной линейной части матрица Q_d зависит не только от матрицы B, как в исходной системе, но и от собственных чисел матрицы A. Произведение первых двух сомножителей в (3.1) образует матрицу вида

$$-(Is_r + A_d^*)^{-1}Q_d =$$

$$= -\begin{bmatrix} (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d11} & (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d12} & \vdots & (s_1^* + s_r)^{-1}q_{d1n} \\ (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d21} & (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d22} & \vdots & (s_2^* + s_r)^{-1}q_{d2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dn1} & (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dn2} & \vdots & (s_n^* + s_r)^{-1}q_{dnn} \end{bmatrix}.$$

Введем новое обозначение $\mathbf{1}_{ij}$ для матрицы, все элементы которой равны нулю за исключением элемента "ij", который равен единице. Для диагональной матрицы A справедливы соотношения

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} R_i (s - s_i)^{-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{ii} (s - s_i)^{-1} \operatorname{Res} \left[\left((Is - A)^{-1}, s_i \right) \right].$$

Заметим, что матрица R_i обладает замечательным свойством: умножение любой квадратной матрицы на нее справа вырезает из первой i-й столбец, а умножение этой матрицы на нее слева вырезает из первой i-ю строку. При этом все пустые места заполняются нулями. Применим это свойство при умножении матрицы $(Is_r + A_d^*)^{-1}Q_d$ на матрицу $\mathbf{1}_{ii}$ справа. Введем обозначение

$$[p_r^l]_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & (s_2^* + s_r)^{-1} q_{d2i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & (s_n^* + s_r)^{-1} q_{dni} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Это позволяет записать формулу решения в компактном виде

(3.5)
$$P_d^l = [p_1^l]_0 + [p_2^l]_0 + \ldots + [p_n^l]_0.$$

Назовем разложение вида (3.2) сепарабельным спектральным разложением грамиана линейной части билинейной системы в виде суммы субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости линейной части по простому спектру матрицы динамики. Для практических приложений использование спектральных разложений означает возможность вычислять отдельные субграмианы доминантных мод, не вычисляя весь грамиан. Кроме

того, видно, что каждый элемент вектора p_r^l субграмиана обратно пропорционален комбинации собственного числа "r" матрицы динамики с другими ее собственными числами. Это наблюдение позволяет предположить, что парные комбинации собственных чисел играют важную роль в формировании сепарабельного разложения грамиана. Рассмотрим спектральное разложение грамиана линейной части билинейной системы по парному комбинационному спектру матрицы A. В соответствии с [14] оно имеет вид [27]:

(3.6)
$$P_d^l = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{dij}^l,$$

$$P_{dij}^l = -(s_i + s_j)^{-1} \left(\text{Res} \left((Is_i - A_d)^{-1} \right), s_i \right) Q_d \text{Res} \left((Is_j - A_d)^{-1}, s_j \right).$$

Формулу (3.6) можно переписать в виде [9]

(3.7)
$$P_{dij}^{l} = -(s_i + s_j)^{-1} \mathbf{1}_{ii} Q_d \mathbf{1}_{jj}.$$

Эта простая и компактная формула сводит вычисление матрицы комбинационного субграмиана линейной части к вычислению последовательности элементов. Она проще формулы (3.2) вычисления матрицы субграмиана разложения по простому спектру. Получено сепарабельное спектральное разложение грамианов линейной части билинейной системы в виде суммы n^2 субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости по парному комбинационному спектру матрицы динамики.

4. Сепарабельные спектральные разложения грамианов билинейных нестационарных систем

Перейдем к рассмотрению спектральных разложений грамиана билинейной системы, считая выполненным преобразование линейной части к диагональному виду. На каждом шаге итераций в (2.5) происходит решение обычного матричного уравнения Ляпунова. Левая часть уравнения совпадает с левой частью такого же уравнения линейной части, а правая часть $\sum_{\gamma=1}^H A_\gamma P^{bl(k)} A_\gamma^{\rm T}$ меняется на каждом шаге. Применим к матрице $P^{bl(k)}$ спектральное разложение по парному комбинационному спектру матрицы динамики. Без ограничения общности предположим, что правая часть (2.5) принята равной единственному слагаемому $A_\gamma P^{bl(k)} A_\gamma^{\rm T}$:

$$P_{dij}^{bl(k)} = -(s_i + s_j)^{-1} \mathbf{1}_{ii} P_{dij}^{bl(k-1)} \mathbf{1}_{jj},$$

$$P_{dij}^{bl(k)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -(s_i + s_j)^{-1} p_{dij}^{bl(k-1)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование матричного произведения $A_{\gamma}P_{dij}^{bl(k)}A_{\gamma}^{\mathrm{T}}$. При умножении матрицы A_{γ} на матрицу $\mathbf{1}_{ij}$ справа получим матрицу, все элементы которой кроме столбца "j" равны нулю, а столбец "j" имеет вид

$$[e_i (A_{\gamma} \mathbf{1}_{ij})]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{\gamma 1i} & a_{\gamma 2i} & \dots & a_{\gamma ni} \end{bmatrix}.$$

При этом элемент " ν " столбца равен $a_{\gamma\nu i}$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте " $\nu\mu$ " произведения матриц $A_{\gamma}\mathbf{1}_{ij}A_{\gamma}^{\mathrm{T}}$. При умножении матрицы $\mathbf{1}_{ij}$ на матрицу A_{γ}^{T} справа получим матрицу, все элементы которой кроме строки "i" равны нулю, а строка "i" имеет вид

$$\left[\left(\mathbf{1}_{ij} A_{\gamma}^{\mathrm{T}} \right) e_{j}^{\mathrm{T}} \right] = \left[\begin{array}{ccc} a_{\gamma 1j} & a_{\gamma 2j} & \dots & a_{\gamma nj} \end{array} \right].$$

При этом элемент " μ " строки равен $a_{\gamma\mu j}$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте " $\nu\mu$ " произведения матриц $A_{\gamma}\mathbf{1}_{ij}A_{\gamma}^{\mathrm{T}}$. Отсюда следует, что

(4.1)
$$A_{\gamma} \mathbf{1}_{ij} A_{\gamma}^{\mathrm{T}} p_d^{bl(k-1)ij} = [\alpha_{\nu\mu}], \quad \alpha_{\nu\mu} = a_{\gamma\nu i} a_{\gamma\mu j} p_d^{bl(k-1)ij}.$$

Запишем решение уравнения (2.5) для каждого шага итерации с учетом формулы (3.4), в которой матрицу Q_d следует заменить матрицей $P_{dij}^{bl(k)}$

(4.2)
$$P_d^{bl(k)ij} = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n -(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \mathbf{1}_{\nu\mu} a_{\gamma\nu i} a_{\gamma\mu j} p_d^{bl(k-1)ij},$$
$$k = 2, 3, \dots, \infty.$$

Teopema~2~[11,20]. Рассмотрим MIMO (multiple input multiple output) непрерывную билинейную стационарную систему вида (2.7). Пусть матрица A – гурвицева, имеет простой спектр, а пара (A,B) управляема. Рассмотрим обобщенное уравнение Ляпунова вида

$$AP^{cbln} + P^{cbln}A^{\mathrm{T}} + \sum_{\gamma=1}^{H} A_{\gamma}P^{cbln}A_{\gamma}^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}.$$

Преобразуем это уравнение и уравнение линейной части в диагонализованную каноническую форму (3.1). Предположим, что матрица A устойчива, имеет простой спектр. Пусть справедливы неравенства

(4.3)
$$n^{2} \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu,i,j,\gamma} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right| < 1$$
$$\forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \ \forall \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Тогда решение обобщенного уравнения Ляпунова (2.4) существует и единственно. Элементы матрицы решения могут быть определены с помощью

итеративной процедуры вида:

$$\begin{split} P_d^c &= P_d^{cln} + P_d^{cbln}, \\ P_d^{cln(1)} &= -\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu} \mathbf{1}_{\nu\mu} \quad \forall \nu, \mu = 1, 2, \dots, n, \\ P_d^{cbln(k)ij\gamma} &= \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu\mu}, \quad r^{(k)ij\gamma} = -\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} \, a_{d\gamma,\mu j} \right], \\ k &= 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H, \\ p_d^{cbln(k)ij\gamma} &= -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) \left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} \, a_{d\gamma,\mu j} \right], \\ \left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) &= p_d^{cbln(k-1)ij\gamma}. \end{split}$$

Исходный грамиан управляемости P^{cbln} билинейной системы связан с матрицей P_d^{cbln} уравнением (3.3):

$$P^{cbln} = TP_d^{cbln}T^T.$$

 \mathcal{A} о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. В соответствии с теоремой построение матрицы решения сводится к построению последовательности элементов "ij" и последующему агрегированию элементов в единую матрицу. Все отдельные последовательности в общем случае являются комплекснозначными. Для доказательства сходимости последовательности частичных сумм применим признак сравнения и построим мажорирующую последовательность из модулей членов последовательностей. Для каждого шага "k" и каждой матрицы A_{γ} имеют место итеративные соотношения (4.2). Построим ряд сравнения для элементов субграмиана " $ij\gamma$ " для шага "k". Из формул (4.2) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ее элементов на предыдущем шаге.

Первый шаг. Рассмотрим формирование правой части обобщенного уравнения Ляпунова на первом шаге для случая $\gamma=1$. Для этого потребуется не сама матрица решения уравнения Ляпунова линейной части, а сепарабельное спектральное разложение этого решения по парному спектру матрицы

$$P_d^{cln(1)} = -\sum_{\gamma=1}^{H} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_{\nu} + s_{\mu}} \mathbf{1}_{\nu\mu},$$

где $q_{d,\gamma\nu\mu}$ – элемент " $\nu\mu\gamma$ " матрицы Q_d .

Второй шаг. Рассмотрим формирование правой части обобщенного уравнения Ляпунова на втором шаге на примере матрицы $A_{\gamma} \mathbf{1}_{ij} A_{\gamma}^{\mathrm{T}}$. Выше было

доказано (4.1), что

$$A_{\gamma} \mathbf{1}_{ij} A_{\gamma}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\alpha}_{d\gamma,\nu\mu}]_{(nxn)},$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_{d\gamma,\nu\mu}]_{(nxn)} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

В соответствии с формулой (3.6) решение уравнения Ляпунова на 2-м шаге принимает вид

(4.4)
$$P_d^{cbln(2)ij} = -\sum_{\gamma=1}^{H} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{p_d^{cln(1)ij}}{s_{\nu} + s_{\mu}} \left(a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right) \mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

Формула (4.4) выражает сепарабельное спектральное разложение ядра Вольтерра 2-го порядка на шаге 2. Для фиксированного элемента "ij" матрицы $P_d^{bln(2)ij}$ получаем формулу

(4.5)
$$p_d^{cbln(2)ij} = -\sum_{\gamma=1}^{H} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{p_d^{cln(1)ij}}{s_{\nu} + s_{\mu}} (a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}).$$

"k"- \check{u} was. Поступая аналогичным образом и учитывая суммирование субграмианов по индексу " γ ", получим формулу для вычисления матрицы ядра грамиана порядка "k" на шаге "k":

$$P_{d}^{cbln(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu\mu},$$

$$(4.6) \qquad r^{(k)ij\gamma} = -\left[(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right],$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H,$$

$$p_{d}^{cbln(k)ij\gamma} = -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) \left[(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right],$$

$$\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \right) = p_{d}^{(k-1)ij\gamma},$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Формула (4.7) выражает алгоритм поэлементного вычисления матрицы грамиана билинейной системы. На каждом шаге алгоритм дает возможность вычислить матрицу ядра грамиана порядка "k". Анализ формулы (4.7) позволяет разбить множество элементов матрицы субграмиана $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}$ на три подмножества:

подмножество ведущих элементов: $\frac{a_{d\gamma,\nu\nu}a_{d\gamma,\mu\mu}}{s_{\nu}+s_{\mu}}p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu},\quad k=2,3,\ldots,\infty,$

подмножество ведомых элементов: $\frac{a_{d\gamma,\nu i}a_{d\gamma,\mu j}}{s_{\nu}+s_{\mu}}p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij}, \quad \nu \neq i, \quad \mu \neq j,$ $k=2,3,\ldots,\infty,$

подмножество элементов: $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}=0.$

Справедливы тождества вида

$$P_{\nu\mu\gamma}^{cbln(k)ij} = \left(\frac{(s_i + s_j)}{(s_\nu + s_\mu)}\right) \left(\frac{a_{\nu i\gamma}}{a_{ii\gamma}}\right) \left(\frac{a_{\mu j\gamma}}{a_{jj\gamma}}\right) P_{\gamma}^{cbln(k)ij},$$

$$a_{ii\gamma} \neq 0, \quad a_{jj\gamma} \neq 0,$$

которые определяют связь ведущих и ведомых элементов. Для ведущих элементов справедливы формулы:

(4.8)
$$p_d^{(k)ij\gamma} = -p_d^{(k-1)ij\gamma} \left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj} \right], \\ k = 2, 3, \dots, \infty; \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Отсюда следует, что " $ij\gamma$ " ведущие элементы образуют геометрические прогрессии с начальными членами $p_d^{cbln(1)ij\gamma}$ и знаменателями $\left[(s_i+s_j)^{-1}a_{d\gamma,ii}a_{d\gamma,jj}\right]$. В [20] доказано, что итеративный алгоритм решения обобщенного уравнения Ляпунова гарантирует существование и единственность матрицы решения при сходимости последовательности ядер Вольтерра. Если линейная часть устойчива и все собственные числа ее матрицы динамики различны, то на каждом шаге алгоритм (4.6) гарантирует существование и единственность решения. Очевидно, что необходимым и достаточным условием сходимости матриц решения является поэлементная сходимость матриц, что обеспечивают алгоритмы (4.6)–(4.7), сходимость которых неочевидна. Покажем, что при выполнении условий теоремы 2 сходимость последовательностей (4.6)–(4.7) является абсолютной и равномерной.

Для каждого шага "k" и каждой матрицы A_{γ} имеют место итеративные соотношения (4.6)–(4.7). Построим ряд сравнения для элементов субграмиана " $ij\gamma$ " для шага "k". Из формул (4.6)–(4.7) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ведущих элементов на предыдущем шаге. Из формулы (4.5) для шага 2 получаем неравенство

$$(4.9) \left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right| \leqslant n^2 \left| p_{dij\gamma}^{cbln(1)} \right| \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right|,$$

которое дает оценку модуля члена последовательности " $ij\gamma$ " для шага 2. Введем обозначение

$$\max_{i,j} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(1)} \right| = M_{\text{max}}.$$

Тогда неравенство (4.9) приобретает вид

$$\left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right| \leqslant n^2 M_{\max} \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right| \quad \forall \gamma, i, j, \nu, \mu.$$

Проводя аналогичные преобразования для той же числовой последовательности на шаге "k", получим неравенство

$$\left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \left| p_{d\nu\mu\gamma}^{cbln(k-1)} \right| \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right| \leqslant$$

$$\leqslant n^{2} \left| p_{d\nu\mu\gamma}^{cbln(k-1)} \right| \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right|.$$

Отсюда следует оценка

$$(4.10) \qquad \frac{\left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right|}{\left| p_{dij\gamma}^{cbln(k-1)} \right|} \leqslant n^2 \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right|.$$

Полученные неравенства позволяют сформировать $M_{ij\gamma}$ локальных и одну M глобальную мажоранты:

$$\begin{split} M_{ij\gamma}^{(k)}: M_{ij\gamma}^{(1)} &= \left| p_{dij\gamma}^{cbln(1)} \right|, M_{ij\gamma}^{(2)} = \left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right|, \dots, M_{ij\gamma}^{(k)} = \left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right|, \\ M^{(k)}: M^{(1)} &= M_{\max}, M^{(2)} = \max_{i,j,\gamma} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(2)} \right|, \dots, M^{(k)} = \max_{i,j,\gamma} \left| p_{dij\gamma}^{cbln(k)} \right|. \end{split}$$

В соответствии с оценкой (4.10) локальные $M_{ij\gamma}$ мажоранты сходятся при выполнении условий

(4.11)
$$n^{2} \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}| < 1$$
$$\forall \nu, \mu = 1, 2, \dots, n; \forall \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Глобальная мажоранта $M^{(k)}$ сходится, если выполнено условие

(4.12)
$$n^{2} \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu,i,j,\gamma} \left| a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right| < 1$$
$$\forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \ \forall \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Поскольку линейная часть устойчива, то существует точная верхняя грань для обратной величины модулей суммы любых собственных чисел ее матрицы, равная

$$\max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right|.$$

Для любых элементов матриц A_{γ} существует точная верхняя грань произведений модулей ее элементов, равная

$$\max_{\nu,\mu} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}|.$$

Следовательно, при выполнении условий теоремы 2 выполняются неравенства (4.3) и признаки сходимости рядов с положительными членами. Следовательно, комплекснозначные последовательности (4.6)—(4.7) сходятся равномерно и абсолютно по признаку Вейерштрасса. Теорема 2 доказана.

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\exists i, j, \gamma : |q_{ij\gamma}| \geqslant 1,$$

то матричный ряд Вольтерра (2.3) расходится и обобщенное уравнение Ляпунова не имеет решения.

 $Teopema\ 3\ [11,\ 20].$ Рассмотрим МІМО непрерывную билинейную стаиионарную систему (2.7). Пусть матрица A – гурвицева, имеет простой спектр, а пара $(A,\ C)$ наблюдаема. Рассмотрим обобщенное уравнение Ляпунова вида

$$A^{\mathrm{T}}P^{obln} + P^{obln}A + \sum_{\gamma=1}^{H} A_{\gamma}P^{obln}A_{\gamma}^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C.$$

Преобразуем это уравнение и уравнение линейной части в диагонализованную каноническую форму (3.1). Предположим, что матрица А устойчива, имеет простой спектр. Пусть справедливы неравенства

(4.13)
$$n^{2} \max_{\nu,\mu} \left| (s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} \right| \max_{\nu,\mu,i,j,\gamma} |a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}| < 1$$
$$\forall \nu,\mu,i,j = 1,2,\dots,n; \forall \gamma = 1,2,\dots,H.$$

Тогда решение обобщенного уравнения Ляпунова (2.5) существует и единственно. Элементы матрицы решения могут быть определены с помощью итеративной процедуры вида:

$$P_{d}^{o} = P_{d}^{oln} + P_{d}^{obln},$$

$$P_{d}^{oln(1)} = -\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_{\nu} + s_{\mu}} \mathbf{1}_{\nu\mu} \quad \forall \nu, \mu = 1, 2, \dots, n,$$

$$P_{d}^{obln(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{obln(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu\mu},$$

$$r^{(k)ij\gamma} = -\left[(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right],$$

$$k = 2, 3, \dots, \infty \quad \forall \nu, \mu, i, j = 1, 2, \dots, n; \gamma = 1, 2, \dots, H,$$

$$p_{d}^{obln(k)ij\gamma} = -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{obln(k-1)ij\gamma} \right) \left[(s_{\nu} + s_{\mu})^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \right],$$

$$\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{obln(k-1)ij\gamma} \right) = p_{d}^{obln(k-1)ij\gamma}.$$

$$(4.15)$$

Исходный грамиан наблюдаемости P^{obln} билинейной системы связан с матрицей P_d^{obln} уравнением (3.4)

$$P^{obln} = T^{-T} P_d^{obln} T^{-1}.$$

Доказательство теоремы 3 почти полностью повторяет доказательство теоремы 2, поэтому из-за ограниченности объема статьи не приводится.

5. Достаточные условия BIBO устойчивости билинейных нестационарных систем

 \mathcal{A} емма 1 (следствия теорем 2 и 3). \mathcal{A} усть выполнены условия теоремы 2 и 3 и выполнены условия [11–13, 20]:

1. Вектор u(t) ограничен по норме

$$||u(t)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2} < M_u, \quad M_u > 0;$$

2. Найдутся такие положительные числа α , β , что справедливо неравенство

3. Если кроме того выполнены неравенства

(5.2)
$$\Gamma < \frac{\sqrt{2\alpha}}{\beta}, \quad \Gamma = \sqrt{\left\| \sum_{\gamma=1}^{m} A_{\gamma} A_{\gamma}^{\mathrm{T}} \right\|};$$

4. Если либо пара (A, B) управляема, либо пара (A, C) наблюдаема.

Тогда нестационарная билинейная система (2.7) BIBO (bounded-input bounded-output) устойчива при выполнении условий (4.3). Грамианы управляемости и наблюдаемости существуют и единственны, определяются формулами (4.6)–(4.7), (4.14)–(4.15) и являются положительно определенными матрицами.

Доказательство леммы 1. Утверждения следствий для обобщенных уравнений Ляпунова, заданных в векторно-матричной форме (2.7), доказаны в [10–13, 20, 21]. Осталось доказать, что на каждом шаге итераций сепарабельные алгоритмы теорем 2 и 3 дают решение, совпадающее с итеративной процедурой (2.6).

Первый шаг. Решение обычного уравнения Ляпунова для линейной части на основе предлагаемых сепарабельных спектральных алгоритмов предложено и доказано в [9]. В силу условий теорем это решение единственно и не может отличаться от решений уравнений (2.7) на первом шаге.

"k"-й шаг. Решение обычного уравнения Ляпунова с измененной правой частью остается единственным вследствие устойчивости и простого спектра матрицы A_d , а также симметричности правой части уравнения на шаге "k". Это дает возможность применить сепарабельный алгоритм [9] и доказать тождество (4.2) между элементами (ij) матрицы решения на шагах "k" и "k-1", что является основой алгоритма поэлементного вычисления матрицы решения уравнения Ляпунова с измененной правой частью. Алгоритм агрегирования самих матриц решения на каждом шаге доказан в [20]. Лемма доказана.

Как известно [1], необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем в терминах ограниченности квадрата H_2 -нормы ее передаточной функции $\mathbf{G}(s)$ имеют вид

(5.3)
$$\|\mathbf{G}(s)\|_{2}^{2} = \operatorname{tr}\left(CP^{c}C^{T}\right) = \operatorname{tr}\left(B^{T}P^{o}B\right) < +\infty.$$

Таким же образом определим функционал риска потери устойчивости билинейной системы в форме

(5.4)
$$J(s_1, s_2, \dots, s_n) = \operatorname{tr}\left(CP^{cbln}C^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}}P^{obln}B\right).$$

Если корни характеристического уравнения приближаются к мнимой оси, функционал риска потери устойчивости (5.4) стремится к бесконечности. Определим приемлемый функционал риска потери устойчивости билинейной системы в виде

(5.5)
$$J^{(\gamma)}(s_1, s, \dots, s_n, \gamma) = M_{\gamma perm}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, m.$$

Будем считать систему как условно неустойчивую, если все корни ее характеристического уравнения линейной части лежат в левой полуплоскости, но функционал риска потери устойчивости (5.4) превышает установленное приемлемое значение. Подобным образом будем считать данную систему условно устойчивой, если функционал риска потери устойчивости (5.4) не превышает установленного приемлемого значения

(5.6)
$$J^{(\gamma)}(s_1, s_2, \dots, s_n, \gamma) < M_{\gamma perm}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, m.$$

Подстановка в формулы (5.3)–(5.4) спектральных разложений соответствующих грамианов дает спектральные разложения соответствующих энергетических функционалов. Неравенства (5.6) определяют набор энергетических функционалов, ограниченность которых гарантирует ВІВО устойчивость билинейной системы. Условия 1–4 леммы являются достаточными условиями ВІВО устойчивости билинейной системы и одновременно достаточными условиями ограниченности энергетических функционалов $J^{(\gamma)}$. Анализ выражений (5.4), (5.5) показывает, что элементы числовых последовательностей грамиана билинейной системы сходятся с различной скоростью, гарантирующая оценка которой дается выражениями (4.11)–(4.12).

Сходимость числовых последовательностей является необходимым условием применения методов линейной теории управления на область слабонелинейных режимов функционирования, которая может быть описана билинейными моделями вида (2.7). "Маркером" расходимости последовательностей является расходимость последовательностей ведущих элементов матриц решений обобщенных уравнений Ляпунова (2.4)–(2.5). При подсчете на каждом шаге вычисления n^2 числовых последовательностей $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}$ только одна последовательность $p_{d\gamma ij}^{cbln(k-1)ij\gamma}$, как было показано выше, оказывается геометрической прогрессией. Достаточное условие расходимости прогрессий имеет вид

(5.7)
$$\left| \left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj} \right] \right| \geqslant 1,$$
$$\exists i = 1, 2, \dots, n; \exists j = 1, 2, \dots, n; \exists \gamma = 1, 2, \dots, H.$$

Это условие является достаточным условием BIBO неустойчивости нестационарных билинейных систем (2.7).

6. Заключение

В статье разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова для широкого класса непрерывных нестационарных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, предложенного ранее в [10–14, 20]. Предложенный подход заключается в диагонализации исходной системы, получении сепарабельного спектрального разложения грамиана стационарной линейной части по комбинационному спектру матрицы динамики линейной части, применении на каждом шаге итерации спектрального разложения матрицы ядра решения на предыдущем шаге и последующего агрегирования элементов матриц решения. Получены спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Разработаны новый метод и алгоритм поэлементного вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем. Принципиальная новизна подхода состоит в переносе вычислений с матрицы решения на вычисление последовательности ее элементов на каждом шаге итерации. Это позволило упростить вычисления и получить компактное аналитическое выражение для матрицы решения обобщенного уравнения Ляпунова. Алгоритмы вычисления последовательностей включают операции сложения, умножения и деления на отличное от нуля число. Установлены новые достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости элементов матриц решений для широкого класса билинейных нестационарных систем. Эти условия являются достаточными условиями ВІВО устойчивости непрерывной билинейной системы. Полученные результаты можно использовать для решения следующих задач управления [26–30]:

- для построения наблюдателя пониженного порядка в задачах модального управления,
- для проектирования систем энергосберегающего управления,
- для выбора управляющих входов и мест размещения датчиков на выходах для систем управления многомерных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Antoulas A.C. Approximation of Large-Scale Dynamical Systems // SIAM J. Control Optim. Philadelphia, 2005. https://doi.org/10.1137/1.9780898718713
- 2. Васильев С.Н., Косов А.А. Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // АиТ. 2011. № 6. С. 27–47.
 - Vasiliev S.N., Kosov A.A. Analysis of the Dynamics of Hybrid Systems Using General Lyapunov Functions and Multiple Homomorphisms // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 6. https://doi.org/10.1134/S000511791106004X
- 3. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- 4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
- 5. Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
- 6. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
- 7. *Афанасъев В.Н.*, *Колмановский В.Б.*, *Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989.
- 8. *Коровин С.К.*, *Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
- 9. Ядыкин И.Б., Галяев А.А. О методах вычисления граммианов и их использование в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74. Yadykin I.B., Galyaev A.A. On the Methods for Calculation of Grammians and Their Use in Analysis of Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 2. P. 207–224. https://doi.org/10.1134/S0005117913020045
- 10. Al-Baiyat S.A., Bettayeb M. A New Model Reduction Scheme for k-power Bilinear Systems // Proc. 32nd IEEE Conf. on Decision and Control. 1993. P. 22–27. https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325196
- 11. Siu T., Schetzen M. Convergence of Volterra Series Representation and BIBO Stability of Bilinear Systems // Int. J. Systems Science. V. 22. No. 12. P. 2679–2684. 1991. https://doi.org/10.1080/00207729108910824
- 12. D'Alessandro P., Isidori A., Ruberti A. Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamic Systems // SIAM J. Control Optim. 1974. V. 12. P. 517–535.
- 13. Benner P., Cao X., Schilders W. A Bilinear H2 Model Order Reduction Approach to Linear Parameter-Varying Systems // Advances in Computational Mathematics. 2019. V. 45 No. (5–6). P. 2241–2271. https://doi.org/10.1007/s10444-019-09695-9

- 14. *Ядыкин И.Б.*, *Искаков А.Б.* Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова для билинейных динамических систем // ДАН. 2019. Т. 488. № 6. С. 599–603. https://doi.org/10.31857/S0869-56524886599-603
- 15. *Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Гольдин Д.А., Вершинин Ю.А.* Субоптимальная анизотропийная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с нецентрированным внешним возмущением // AuT. 2019. № 1. С. 3–20. https://doi.org/10.1134/S000523101901001X
 - $\label{eq:limin_v.n.} \begin{tabular}{ll} Timin & V.N., & Kustov & A.Y., & Kurdyukov & A.P., & Goldin & D.A., & Vershinin & Y.A. \\ Suboptimal & Anisotropic & Filtering for Linear Discrete Nonstationary & Systems with Uncentered & External Disturbance & Autom. & Remote Control. 2019. V. 80. No. 1. \\ P. 1-15. & https://doi.org/10.1134/S0005117919010016 \\ \end{tabular}$
- 16. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980.
- 17. Lubbock J., Bansal V. Multidimensional Laplace Transforms for Solution of Nonlinear Equation // Proc. IEEE. 1969. V. 116. No. 12. P. 2075–2082.
- 18. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
- 19. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Кн. 3. Ч. II. Гл. XVIII. Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных спектров. М.: Машиностроение, 1969. С. 223–256.
- 20. Zhang L., Lam J. On H2 Model Order Reduction of Bilinear Systems // Automatica. 2002. V. 38. P. 205–216. https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1740945
- Benner P., Damm T. Lyapunov Equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. No. 2. P. 680–711. https://doi.org/10.1137/09075041X
- 22. *Мироновский Л.А.*, *Соловъева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.
 - $\it Mironovsky~L.A.,~Solovyeva~T.N.$ Analysis and Synthesis of Modally Balanced Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 4. P. 588–603.
- 23. Hauksdottir A.S., Sigurdsson S.P. The Continuous Closed Form Controllability Gramian and Its Inverse // Amer. Control Conf. Hyatt Regency St. Louis Riverfront. St. Louis, MO, USA, June 10–12, 2009. P. 5345–5351.
- 24. Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M. On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc.-D. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290.
- 25. *Фаддеев Д.К.*, *Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
- 26. Воропай Н.И., Голуб И.И., Ефимов Д.Н., Искаков А.Б., Ядыкин И.Б. Спектральный и модальный методы в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управлении ими // АиТ. 2020. № 10. С. 3–34.
 - $\rm https://doi.org/10.31857/S0005231020100013$
 - Voropai N.I., Golub I.I., Efimov D.N., Iskakov A.B., Yadykin I.B. Spectral and Modal Methods for Studying Stability and Control of Electric Power Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 10. P. 1751–1774.
 - https://doi.org/10.1134/S000511792010001X

- 27. Искаков А.Б., Ядыкин И.Б. Lyapunov Modal Analysis and Participation Factors Applied to Small-Signal Stability of Power Systems // Automatica. 2021. V. 132. No. C. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109814
- 28. *Бойченко В.А.*, *Курдюков А.П.*, *Тимин В.Н.*, *Чайковский М.М.*, *Ядыкин И.Б.* Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами. 2007. Вып. 19. С. 23–126.
- 29. Yadikin I., Galyaev I. On the Solution of Matrix Generalized Lyapunov Equations for a Class of Bilinear and Linear Dynamical Systems with Variable Parameters // 13th Int. Conf. "Management of large-scale system development" (MLSD). 2020. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/MLSD49919.2020.9247687
- 30. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А.В. Ушакова. Изд. 2-е, расширенное и дополненное. СПб.: НИУ ИТМО, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 16.09.2021

После доработки 05.11.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. А.Д. ЦВИРКУН, д-р техн. наук (tsvirkun@ipu.rssi.ru), А.Ф. РЕЗЧИКОВ, чл.-корр. РАН (rw4cy@mail.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва), А.А. САМАРЦЕВ (samaand@yandex.ru), В.А. ИВАЩЕНКО, д-р техн. наук (info@iptmuran.ru), А.С. БОГОМОЛОВ, д-р техн. наук (bogomolov@iptmuran.ru), В.А. КУШНИКОВ, д-р техн. наук (kushnikoff@iptmuran.ru) (Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской академии наук»), Л.Ю. ФИЛИМОНЮК, д-р техн. наук (filimonyukleonid@mail.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИСТЕМА ИНТЕГРИРОВАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПАСНЫХ ФАКТОРОВ ПОЖАРА И ЭВАКУАЦИИ ЛЮДЕЙ ИЗ ПОМЕЩЕНИЙ

Представлены разработанная интегрированная математическая модель и реализующий ее программно-информационный комплекс для совместного моделирования распространения опасных факторов пожара и стихийной эвакуации людей из помещений сложной конфигурации. Распространение огня, тепла и дыма моделируется на основе принципа клеточных автоматов. Для моделирования процесса эвакуации используется разработанная мультиагентная модель, учитывающая физические характеристики и поведение людей при столкновениях.

Ключевые слова: мультиагентная модель, интеллектуальный агент, эвакуация людей, чрезвычайные ситуации, пожар, клеточный автомат.

DOI: 10.31857/S0005231022050038, **EDN:** ABHDTO

1. Введение

Значительное количество пострадавших при пожарах в помещениях обуславливается сочетанием повышенной концентрации продуктов горения и ограничения возможности эвакуации. Эти ограничения связаны с особенностями строений и недостатками в их подготовке к эксплуатации. Необходимой частью подготовки помещений к безопасной эксплуатации является моделирование возможных опасных ситуаций с использованием современных вычислительных средств. Для анализа процессов эвакуации и распространения опасных факторов пожара (ОФП) разработано достаточно много математических моделей. В частности, распространение ОФП — огня, тепла, дыма и др. анализируется в [1–7], процессы эвакуации людей из помещений — в [8–16]. При этом в используемых в настощее время решениях для моделирования пожара, как правило, применяются полевые модели, для моделирования эвакуации — модели индивидуально-поточного типа. В [17] рассмотрен комплекс

аппаратно-программных средств FDS+Evac, использующих полевую модель эвакуации на основе концепции социальных сил. Такая модель достаточно сложна с вычислительной точки зрения в случае помещений больших размеров и ограниченно применима к анализу такого стихийного процесса, как эвакуация при пожаре. Другим недостатком модели в FDS+Evac является ограничение на ширину проемов — не менее 0,7 м. Кроме того, конфигурация помещения во время эвакуации рассматривается как постоянная, что не всегда соответствует действительности.

Модель эвакуации [9] также основана на концепции социальных сил, но при этом предполагает, что люди пытаются избегать столкновений друг с другом и с препятствиями. Тем не менее, остальные недостатки модели социальных сил сохраняются. Также не рассматривается влияние пожара на процесс эвакуации из помещений сложной конфигурации.

В целом, как показывает анализ известных систем, они имеют следующие основные ограничения:

- не учитываются физические аспекты поведения людей при эвакуации;
- не учитываются сложная конфигурация и возможность ее изменения во время пожара;
- математическое моделирование с использованием этих систем оказывается достаточно ресурсоемким.

При этом следует отметить, что процессы эвакуации и распространения ОФП оказывают друг на друга определенное влияние, которым нельзя пренебрегать. Поэтому для достижения более точной и адекватной оценки результатов возможной эвакуации при пожаре требуется совместное использование моделей распространения пожара и эвакуации в единых программно-информационных комплексах.

2. Постановка задачи, предлагаемые модели и методы решения

Для более адекватного моделирования процесса эвакуации при пожаре в помещении предлагается разработать новые модели развития пожара и процесса эвакуации, интегрированную модель этих процессов и построить программный комплекс, реализующий разработанные модели.

2.1. Модель распространения огня

Процесс распространения огня будем моделировать с использованием аппарата клеточных автоматов. Предположим, что помещение в декартовой системе координат xOy разбито сетью C на клетки со стороной dl (для моделирования бралось dl=0.05 м). Тогда $C=\{c_{ij}|0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant m\}$ — разбивка помещения на клетки в количестве $n,\ m$ по горизонтали и вертикали; c_{ij} — клетка с координатами (i,j).

Введем в рассмотрение следующие множества: NC — клетки, в которых невозможно горение (негорючий материал); I_t — клетки, в которых горение

возможно (горючий материал), но в данный момент t не началось; B_t — горящие клетки; F_t — клетка выгорела и больше не будет гореть. Множество NC не зависит от времени, остальные множества меняются со временем. Полагаем, что в любой момент модельного времени каждая рассматриваемая клетка входит ровно в одно из перечисленных множеств.

Распространение пожара в момент t+1 зависит от вероятности P_{ij}^t возгорания внутри клетки, находящейся в состоянии I_t , с учетом ее характеристик и горения соседних клеток. Вероятность возгорания клетки может быть определена по [18]

$$P_{ij}^t = v_{ij} f_{ij}^t dt / 4dl,$$

где v_{ij} — линейная скорость распространения огня для клетки c_{ij} ; f_{ij}^t — параметр горения соседних клеток в момент t; dt — шаг времени. Параметр f_{ij}^t рассчитывается как

$$f_{ij}^t = 2n_{ij+}^t + n_{ijx}^t,$$

где

 $n_{ij+}^t = |\{c_{i-1,j}, c_{i,j-1}, c_{i,j+1}, c_{i+1,j}\} \cap B_t|$ — количество ортогональных к c_{ij} клеток, в которых имеет место горение в момент t,

 $n_{ijx}^t = |\{c_{i-1,j-1}, c_{i-1,j+1}, c_{i+1,j-1}, c_{i+1,j+1}\} \cap B_t|$ — количество ортогональных к c_{ij} клеток.

Характеристика f_{ij}^t может принимать значение от 1 до 12 по количеству ортогональных и диагональных соседей у каждой некрайней клетки. Коэффициент для горящих ортогональных клеток положим равным 2, так как расстояние между центрами диагональных соседей больше, чем между центрами ортогональных. Для крайних клеток характеристика f_{ij}^t может принимать значение от 0 до 8, для угловых — от 0 до 5.

Клетка переходит из состояния B_t в состояние F_{t+1} , если в клетке заканчивается горючая масса. Пусть для каждой клетки c_{ij} задана горючая нагрузка m_{ij} в кг, ψ_{ij} — скорость выгорания нагрузки, выраженная в кг/с. С момента возгорания масса горючего вещества m_{ij} меняется по закону

(1)
$$m_{ij}^{t+1} = m_{ij}^t - \psi_{ij} dt,$$

где m_{ij}^t — масса горючей нагрузки клетки c_{ij} в момент времени $t,\,dt$ — прошедшее время. Таким образом, с момента возгорания до прекращения горения в клетке c_{ij} проходит время m_{ij}/ψ_{ij} . Далее клетка переходит из множества B_t в множество F_{t+1} . Таким образом, для каждой клетки c_{ij} в модели возможны три варианта ее эволюции: постоянная принадлежность состоянию NC, постоянная принадлежность состоянию I_t либо последовательное прохождение через состояния I_t , B_t и F_t .

На рис. 1 показано распространение огня в трехкомнатном помещении. Черным выделены клетки из NC (негорючие стены), темно-серым — из F_{t0} ,

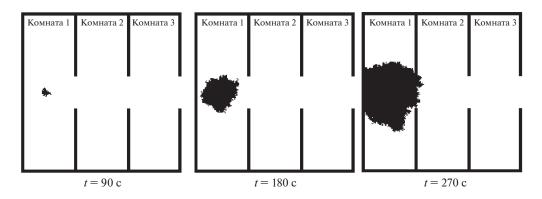


Рис. 1. Динамика распространения огня в помещении из трех комнат.

светло-серым — из B_{t0} , белым — из I_{t0} . Источник возгорания находился в центре комнаты 1.

Если B_t пусто, то распространение пожара прекращается. Действительно, если $B_t = \emptyset$, то $(\forall i \in [0,n))(\forall j \in [0,m))(n_{ij+}^t = 0 \& n_{ijx}^t = 0)$, следовательно, $(\forall i \in [0,n))(\forall j \in [0,m))(P_{ij}^{t+1} = 0)$, поэтому $B_{t+1} = \emptyset$. По индукции $(\forall i > 0)B_{t+n} = \emptyset$. В силу того, что пожар не возобновляется, при всех n имеем $I_{t+n} = I_t$, а также для выгоревших клеток $F_{t+n} = F_t$. В итоге разбиение C перестает изменяться и распространение огня завершается [19, 20].

2.2. Модель распространения тепла

Опишем модель распространения тепла, которая будет использоваться в предлагаемом комплексе. Пусть θ_{ij} — повышение температуры полностью теплоизолированной клетки при сгорании в ней 1 кг горючего вещества. Тогда

$$\theta_{ij} = \lambda_{ij}/C_{ij},$$

где λ_{ij} — удельная теплота сгорания нагрузки внутри клетки c_{ij} ; C_{ij} — теплоемкость клетки c_{ij} (сумма теплоемкости воздуха и перекрытий).

Воздух над горящей клеткой нагревается по закону

$$T_{ij}^{t+1} = T_{ij}^t + \psi_{ij}\theta_{ij}dt,$$

где T_{ij}^t — температура внутри клетки c_{ij} в момент времени t, dt — шаг модельного времени, ψ_{ij} — скорость выгорания горючей нагрузки [21]. Температура в клетке зависит от горения внутри и распространения тепла вне клетки. Пусть k_{ij} — характеристика теплопроводности клетки c_{ij} . Когда клетка обменивается теплом со связанными клетками, температура внутри клетки определяется соотношением

(2)
$$T_{ij}^{t+1} = T_{ij}^t + \frac{k_{ij}}{C_{ij}} \sum_{s \in S_{ij}} k_s (T_s^t - T_{ij}^t),$$

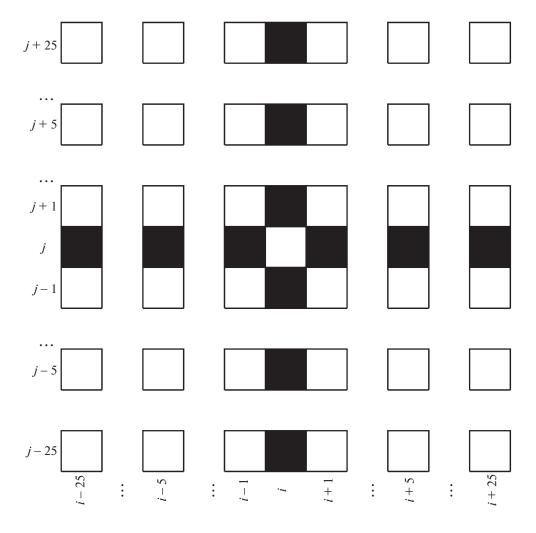


Рис. 2. Множество клеток, связанных с клеткой c_{ij} .

где T_s^t — температура внутри клетки s из S_{ij} в момент $t,\,k_s$ — коэффициент, задающий теплопроводящие характеристики этой клетки.

Для определения множества клеток, связанных с рассматриваемой, в предлагаемой модели используется граф G = (V, E).

Пусть $W \in C$ — множество клеток, соответствующих стене, и для каждой клетки c_{ij} есть вершина G=(V,E), где $v_{ij}\in V$, $e_{ijkl}\in E$ — ребро с вершинами v_{ij} и v_{kl} . Тогда множество ребер E задается как

$$E = \left\{ e_{ijkl} | [((i = k)\&(|j - l| \in \{5; 25\})) \lor ((j = l)\&(|i - k| \in \{5; 25\}))] \& \\ \& [\forall a, b(a \in [\min(i, k); \max(i, k)]\&b \in [\min(j, l); \max(j, l)]) \to c_{ab} \notin W] \lor \\ \lor [((i = k)(|j - l| = 1)) \lor ((j = l)(|i - k| = 1))] \right\}.$$

Если в графе G присутствует ребро e_{ijkl} , то клетки c_{ij} и c_{kl} будем считать связанными. Каждая клетка имеет от 4 до 12 связанных клеток. На рис. 2 показан случай, когда это количество максимально, они выделены цветом.

Пользователь может задавать скорость распространения огня и тепла, модифицируя алгоритм выбора множества ребер G, значения ψ_{ij} , θ_{ij} , v, C_{ij} , k_{ij} , T^0_{ij} . Возможно также добавление в модель третьего измерения, в этом случае граф G будет иметь ребра, содержащие клетки из различных слоев.

Температуру в крайних и угловых клетках предположим равной температуре окружающей среды. За счет таких клеток происходит теплообмен с окружающей средой.

Введение ребер, соединяющих далеко отстоящие клетки, позволяет ускорить процесс вычислений, увеличить шаг модельного времени и учесть различные способы распространения тепла.

2.3. Модель распространения дыма

Используемая модель аналогична модели распространения тепла. Масса горючей нагрузки внутри каждой горящей клетки изменяется по закону (1). При горении образуется дым, количество которого зависит от дымообразующей способности вещества. Оптическая плотность дыма μ_{ij} в клетке c_{ij} из множества B_t изменяется по закону

$$\mu_{ij}^{t+1} = \mu_{ij}^t + D_m \psi_{ij} dt / (h^2 z),$$

где D_m — дымообразующая способность вещества.

Зададим граф G'=(V,E') на том же множестве вершин V. Множество ребер задается как

$$E' = \left\{ e_{ijkl} | [((i = k)\&(|j - l| \in \{15; 50\})) \lor ((j = l)\&(|i - k| \in \{15; 50\}))] \& \\ \& [\forall a, b(a \in [\min(i, k); \max(i, k)]\&b \in [\min(j, l); \max(j, l)]) \to c_{ab} \notin W] \lor \\ \lor [((i = k)\&(|j - l| = 1)) \lor ((j = l)\&(|i - k| = 1))] \right\}.$$

Так как дым распространяется быстрее тепла, для G' выбраны более длинные ребра, связывающие более далекие клетки. Аналогично определяется множество S'_{ij} клеток, связанных с клеткой c_{ij} . Распространение дыма задается аналогичным (2) соотношением

$$\mu_{ij}^{t+1} = \mu_{ij}^{t} + k'_{ij} \sum_{s \in S'_{ij}} k'_{s}(\mu_{s}^{t} - \mu_{ij}^{t}),$$

где $k^{'}$ — коэффициент, регулирующий скорость распространения дыма: $k_{ij}^{'}$ — для клетки $c_{ij},\,k_s^{'}$ — для одной из клеток из множества $S_{ij}^{'};\,\mu_s^t$ — оптическая

плотность дыма для клетки из множества $S_{ij}^{'}$ [19, 20]. Дальность видимости l_{ij}^{t} в клетке c_{ij} в момент t можно вычислить по приведенному в [22] соотношению

$$l_{ij}^t = \frac{2,38}{\mu_{ij}^t}.$$

2.4. Математическая модель и алгоритм моделирования эвакуации

Будем рассматривать следующие объекты.

- 1. Множество стен, заданных координатами левого нижнего угла (x_W, y_W) , а также длиной и шириной x_{WW} и y_{WW} .
- 2. Множество выходов, представленных координатами левого нижнего угла (x_E, y_E) , шириной и длиной проема x_{WE} и y_{WE} . Полагаем, что человек, попавший в любую зону выхода, эвакуирован. При этом зона выхода должна быть отдалена от дверного проема достаточно для того, чтобы вышедшие не мешали эвакуации остальных [23].
- 3. Множество людей, подлежащих эвакуации. Каждого из них представляем как проекцию на плоскость xOy в виде круга. В качестве координат данных людей примем центры этих кругов.
- 4. Множество зон начального положения людей, заданных координатами левого нижнего угла (x_Z, y_Z) , длиной и шириной x_{WZ} и y_{WZ} . Так, учитывается то, что в некоторых помещениях в начальный момент эвакуации может не быть людей. Рассматриваемые параметры людей: координаты $\mathbf{x}(t)$ центра проекции на xOy; радиус проекции r; масса человека m; его скорость $\mathbf{v}(t)$ и ускорение $\mathbf{a}(t)$; максимально возможная скорость v_{max} и ускорение a_{max} движения (в момент начала эвакуации равны нулю). Закон движения людей принимаем следующий:

(3)
$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t,$$
$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t,$$

где Δt — шаг модельного времени.

Принимаем предположение, что скорости людей изменяются при столкновениях как при частично упругих ударах. Для описания частично упругого столкновения вводится коэффициент восстановления $0 \le \epsilon \le 1$. Нормальные составляющие u_{1n} и u_{2n} скорости движения к общей плоскости касательной к поверхностям тел в точке контакта после такого удара рассчитываются по формулам

(4)
$$u_{1n} = -\epsilon v_{1n} + (1+\epsilon) \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2};$$
$$u_{2n} = -\epsilon v_{2n} + (1+\epsilon) \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

Здесь v_{1n} и v_{2n} — нормальные проекции скоростей движения агентов к плоскости соударения до удара, m_1 и m_2 — массы агентов. Тангенциальные проекции скоростей не меняются [24]. После столкновения со стеной у скорости меняется только проекция, перпендикулярная стене (меняется знак, значение модуля уменьшается в зависимости от ϵ).

Определим направление ускорения $\mathbf{a}(t)$ для каждого агента в предположении, что он стремится как можно быстрее попасть к ближайшему выходу, не сталкиваясь со стенами и другими агентами. Обозначим оптимальную с этой точки зрения скорость $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}(t)$. Будем полагать, что модуль ускорения $\mathbf{a}(t)$ агента зависит от его физических возможностей: $|\mathbf{a}(t)| = a_{\mathrm{max}}$, а направление совпадает с $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}(t) - \mathbf{v}(t)$. Полагаем, что если скорость агента не оптимальна, то модуль ускорения максимален в силу его желания как можно быстрее покинуть помещение.

Если по направлению движения агента нет стен или других агентов, то $|\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}(t)| = v_{\mathrm{max}}$. При попытке не столкнуться с другими агент может уменьшать модуль $\mathbf{v}(t)$. Будем выбирать вектор $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}(t)$ следующим образом. Если \mathbf{e} — вектор направления к ближайшему выходу, l_{α} — расстояние от агента до ближайшего препятствия при движении под углом α к \mathbf{e} , L — заданное критическое расстояние, а r — радиус проекции агента, то модуль соответствующего вектора оптимальной скорости $v_{\alpha\mathrm{opt}}(\alpha)$ можно вычислить как

(5)
$$v_{\alpha \text{opt}}(\alpha) = \begin{cases} v_{\text{max}}, \ l_{\alpha} \geqslant L + r, \\ \frac{v_{\text{max}}(l_{\alpha} - r)}{L}, \ r \leqslant l_{\alpha} \leqslant L + r, \\ 0, \ l_{\alpha} \leqslant r. \end{cases}$$

В общем случае для достижения необходимой точности моделирования значения $v_{\rm max}$ и $a_{\rm max}$ нужно задавать для каждого агента индивидуально.

Введем в рассмотрение функцию

(6)
$$f(\alpha) = v_{\alpha \text{opt}}(\alpha) \cos(\alpha), \quad \alpha \in [-\pi/2; \pi/2].$$

Тогда угол γ векторов $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}$ и \mathbf{e} — это угол, при котором $f(\alpha)$ достигает максимума. Модуль $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}$ можно определить, подставив $\alpha = \gamma$

(7)
$$|v_{\text{opt}}| = v_{\alpha \text{opt}}(\gamma).$$

Данный способ определения $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}$ учитывает способность агента к маневру на пути к ближайшему выходу, который, как мы предполагаем, ему известен.

Вектор $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}$ пересчитывается для всех агентов на каждом шаге. Агенты могут проявлять дополнительные свойства: неоднородность (за счет различной массы и радиуса проекции), а также индивидуальную направленность на выход из помещения [25].

В предлагаемой модели учитываются угол и дальность обзора агента, момент инерции и угол поворота его головы. Направление приближения агента

к выходу определяется вектором **e**. Угол обзора полагаем равным 180° , так как $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (анализируются все альтернативы дальнейшего движения).

Полагаем, что дальность обзора агента не меньше L.

Также полагаем, что часть энергии при ударе переходит во вращение и в модели эта потеря учитывается с использованием коэффициента восстановления.

Использование разработанного алгоритма моделирования эвакуации состоит из следующих основных шагов.

- 1. Исходные данные: размеры, координат стен, выходов из помещения, параметры агентов.
 - 2. Задание сети C: граф G, множества значений d и \mathbf{e} .
 - 3. Генерация агентов в зонах эвакуации.
 - 4. Вычисление для всех агентов \mathbf{v}_{opt} по формулам (5)–(7).
 - 5. Расчет а для всех агентов.
 - 6. Вычисление **v** для всех агентов по формуле (3).
 - 7. Вычисление \mathbf{x} для всех агентов по формуле (3).
- 8. Пересчет скоростей агентов в случае их столкновений друг с другом и со стенами.
- 9. Проверка достижения выхода для всех агентов и исключение попавших в зону выхода.
 - 10. Сбор статистики.
 - 11. Отображение положения агентов и стен на экране в окне программы.
 - 12. Переход к следующему шагу модельного времени.
- 13. Если необходимое количество промежуточных экспериментов не выполнено, то переход к шагу 3.
 - 14. Отображение результатов эксперимента в виде графиков, таблиц.
 - 15. Переход к шагу 1 (по запросу пользователя) [26].

Важным условием эвакуации является максимально возможное снижение вреда здоровью людей. Решение в данной работе позволяет получить оценку этого вреда за счет выделения мест с высокой температурой и задымленностью.

Задымленность помещений при пожаре влечет за собой понижение дальности видимости l_v , так как интенсивность света I при прохождении через задымление уменьшается в зависимости от начального значения, пройденного пути dl и оптической плотности дыма: $I = I_0 e^{-\int \mu(l) dl}$. Если область задымления небольшая (несколько метров), то можно полагать оптическую плотность дыма постоянной и тогда $I = I_0 e^{-\mu l}$. При известной задымленности дальность видимости определяется в виде расстояния, после прохождения которого интенсивность ослабевает на порядок. Это достигается при $l = \frac{ln10}{\mu}$ [27, 28].

Для учета влияния задымленности на скорость агентов используем в формуле (5) вместо l_{α} величину $l_{\alpha}' = \min(l_{\alpha}, \max(l_{v}, 3r))$ — расстояние до ближайшего препятствия l_{α} в направлении движения агента под углом α , ограниченное $\max(l_{v}, 3r)$ — величиной l_{v} при $l_{v} > 3r$ или 3r при $l_{v} < 3r$. Таким образом,

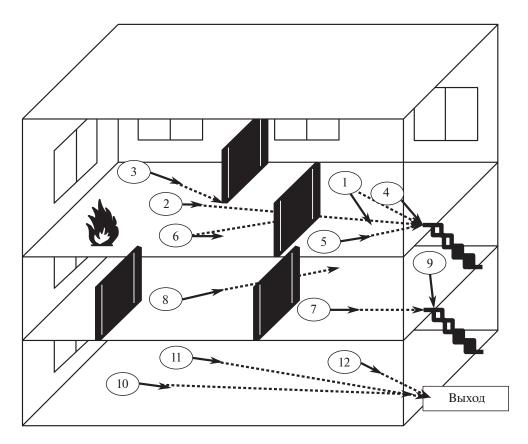


Рис. 3. Эвакуация при возгорании на третьем этаже здания.

при $l_v > L$ задымленность не меняет значительно ориентацию и скорость эвакуируемых. Если $3r < l_v \le L$, то агенты затрудняются при ориентировании и снижают скорость, формула (5). При $l_v \le 3r$ агенты практически не видят окружающих объектов и вынуждены двигаться на ощупь [29].

Предлагаемая концепция передвижения агентов при эвакуации схематично представлена на рис. 3, где возгорание началось на третьем этаже. На этом рисунке пунктирными стрелками обозначены направления, в которых желают двигаться агенты 1–12 (кратчайший путь к выходу), сплошными стрелками — векторы скорости, скорректированные агентами на данный момент с учетом препятствий и столкновений с другими агентами. Например, агент 1 меняет направление вектора скорости, пытаясь обойти агента 4.

2.5. Программно-информационный комплекс

По разработке программно-информационного комплекса решались следующие задачи.

1. Программно реализовать разработанные модели с возможностью совместного и отдельного моделирования распространения опасных факторов пожара и эвакуации.

- 2. Обеспечивать взаимодействие с пользователем через графический и консольный интерфейсы.
- 3. Отображать визуально положения агентов и препятствий, фронт огня, распределение тепла и дыма в помещении.
- 4. Позволять работать с широким классом помещений, карту которых пользователь может задавать.
- 5. Позволять пользователю проводить вычислительные эксперименты с различными начальными условиями и визуализировать их результаты.
- 6. Обеспечить возможность проведения кратных численных экспериментов с различными начальными условиями расположения агентов и источников огня в помещении. Цель таких экспериментов анализ обстановки при пожарах в помещениях и построение усредненных зависимостей, между процессами распространения $О\Phi\Pi$ и эвакуации для выработки рекомендаций по обеспечению эвакуации.
- 7. Поддерживать многопоточную организацию решения задач, что позволит реализовывать кратные эксперименты, обладающие значительной вычислительной сложностью. Поддержка многопоточности необходима для эффективного управления комплексом через графический и консольный интерфейсы.

3. Пример использования программно-информационного комплекса

С использованием разработанного программно-информационного комплекса было проведено моделирование эвакуации из 10-этажного здания одновременно на всех этажах в режиме реального времени. Размер каждого этажа 38×32 м. План нулевого этажа, основанный на реальном расположении объектов в торговом центре, представлен на рис. 4.

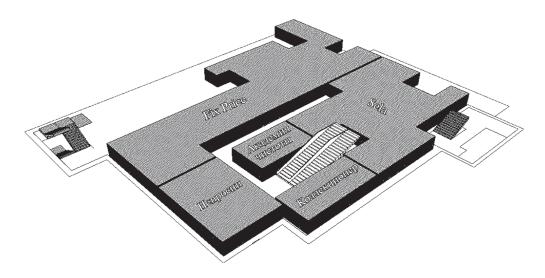


Рис. 4. План нулевого этажа торгового центра.

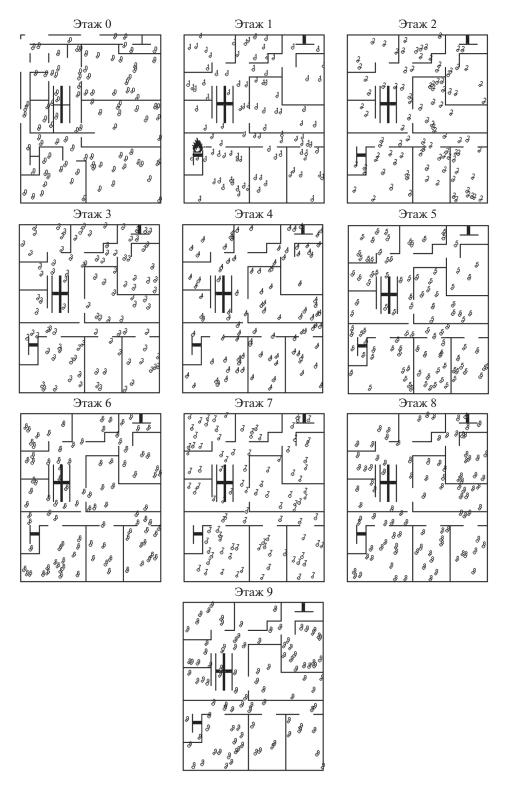


Рис. 5. Эвакуация на этажах 0–9 торгового центра.

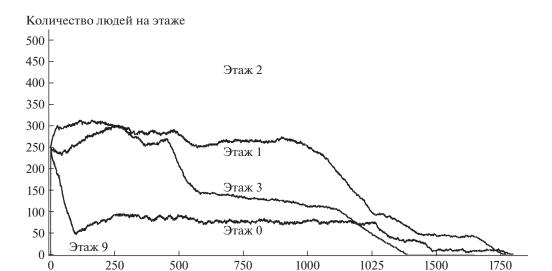


Рис. 6. Количество людей на этажах в процессе эвакуации из здания при условии $a_0(0) = a_1(0) = \ldots = a_9(0) = 250$.

Время, сек

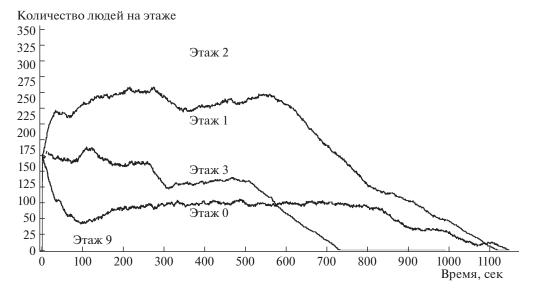


Рис. 7. Количество людей на этажах в процессе эвакуации из здания при условии $a_0(0) = a_1(0) = \ldots = a_9(0) = 150$.

Промоделируем возникновение возгорания на 1 этаже и последующую эвакуацию людей со всех этажей здания. На рис. 5 представлен пример работы модуля визуализации расположения людей на 0–9 этажах здания в процессе эвакуации.

Обозначим через $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_9(t)$ количество людей на этажах 0, 1, ..., 9 соответственно в моменты времени $t = 0, \ldots, T$, где t = 0 и t = T

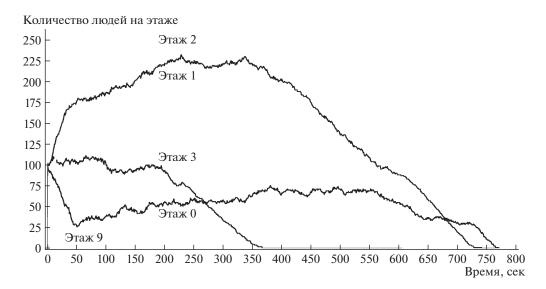


Рис. 8. Количество людей на этажах в процессе эвакуации из здания при условии $a_0(0)=a_1(0)=\ldots=a_9(0)=100.$

время начала и завершения эвакуации из здания. На рис. 6 представлены графики значений $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ и $a_9(t)$, полученные в ходе вычислительного эксперимента при условии $a_0(0)=a_1(0)=\ldots=a_9(0)=250$. Графики $a_4(t)$, $a_5(t)$, $a_6(t)$, $a_7(t)$, $a_8(t)$ при всех проведенных вычислительных экспериментах оказывались расположены между графиками для $a_3(t)$ и $a_9(t)$ и на рис. 6, 7 и 8 не приведены.

Как видно из представленного графика, наибольшее скопление людей будет на первом и втором этажах. Там же наблюдается наибольшее время эвакуации из-за прибытия людей с верхних этажей. Данная ситуация оказывается потенциально опасной по причине возможной давки, а также превышения предельного времени пребывания людей в помещении с учетом его площади, расположения и свойств горючих материалов. Ниже будет показано, как модельные эксперименты с разработанным комплексом позволят определять максимальное наполнение этажей людьми при посещении торгового центра таким образом, чтобы при эвакуации их количество на «критических» первом и втором этажах не превышало допустимого.

Давка при эвакуации может возникнуть в случае, если для передвижения эвакуирующихся недостаточно свободного пространства. На основании анализа санитарно-эпидемиологических правил и норм будем полагать в модельном примере, что требования безопасности предписывают наличие не менее $4\ \mathrm{M}^2$ площади на человека. С учетом того, что размеры этажей составляют $38\times32\ \mathrm{M}$, максимально допустимое количество людей на каждом этаже равно 304. Из рис. 6 видно, что при начальном количестве людей на каждом этаже, равном 250, число людей на втором этаже в процессе эвакуации превышает $500\ \mathrm{B}$ рассматриваемом вычислительном эксперименте. При

снижении начального количества посетителей до 150 перегрузка этажа 2 также наблюдается, рис. 7. Как показала серия вычислительных экспериментов, максимальное значение количества людей на втором этаже становится существенно меньше трехсот в случае, когда их начальное количество на этажах не превышает 100, рис. 8.

Таким образом, для предупреждения давки при эвакуации в условиях задачи можно рекомендовать ограничить посещение торгового центра: не более 100 человек на этаже единовременно.

Приведенный пример показывает, что разработанный программно-информационный комплекс может быть использован для получения количественных и качественных рекомендаций по мероприятиям и воздействиям для уменьшения времени эвакуации из помещений сложной формы. Эти рекомендации могут касаться как организации пребывания людей в уже используемых помещениях, так и устройства самих помещений на стадии их планирования или модернизации.

4. Заключение

Разработан многопоточный программно-информационный комплекс, позволяющий имитировать и анализировать динамику распространения опасных факторов пожара и эвакуацию людей в условиях распространения этих факторов.

Построенный комплекс базируется на разработанной интегрированной математической модели динамики распространения опасных факторов пожара и эвакуации. Модель разрабатывалась с использованием принципов клеточного автомата и мультиагентных систем с учетом физических столкновений людей при эвакуации. Программа позволяет в ходе моделирования изменять множество параметров исследуемой сложной системы как со стороны агентов, так и со стороны процессов пожара. Поэтому результаты работы обладают высокой функциональностью в исследованиях по противопожарной подготовке помещений, а также при анализе распространения опасных факторов пожара и процессов эвакуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Свирин И.С. Обзор моделей распространения пожара в зданиях // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2013. № 6. С. 114–129.
- 2. Apiecionek L., Zarzycki H., Czerniak J. et al. The Cellular Automata Theory with Fuzzy Numbers in Simulation of Real Fires in Buildings // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. V. 559. P. 169–182.
- 3. 3533-41-РП-1 СИТИС: ВИМ 4.11 Руководство пользователя, редакция 1 от 10.03.17 / Строительные информационные технологии и системы OOO «Ситис». Екатеринбург, 2017. 122 с.
- 4. Φ едосов С.В., Ибрагимов А.М., Соловьев Р.А. u др. Математическая модель развития пожара в системе помещений // Вестник МГСУ. 2013. № 4. С. 121–128.

- 5. *Кошмаров Ю.А.* Прогнозирование опасных факторов пожара в помещении. М.: Академия ГПС МВД России, 2000. 118 с.
- 6. Дектерев А.А., Гаврилов А.А., Литвинцев К.Ю. и др. Моделирование динамики пожаров в спортивных сооружениях // Пожарная безопасность. 2007. № 4. С. 49–58.
- 7. Драйэдел Д. Введение в динамику пожаров. М.: Стройиздат, 1990. 424 с.
- 8. *Аптуков А.М.*, *Брацун Д.А.*, *Люшнин А.В.* Моделирование поведения паникующей толпы в многоуровневом разветвленном помещении // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 3. С. 491–508.
- 9. Moussaida M., Helbing D., Theraulaza G. How Simple Rules Determine Pedestrian Behavior and Crowd Disasters // PNAS. 2011. V. 108. № 17. P. 6884–6892.
- 10. *Самошин Д.А.* Состав людских потоков и параметры их движения при эвакуации: Монография. М.: Академия ГПС МЧС России, 2016. 210 с.
- 11. Kirik E., Yurgeliyan T., Krouglov D. Artificial Intelligence of Virtual People in CA FF Pedestrian Dynamics Model // LNCS. V. 6068/2010. 2010. P. 513–520.
- 12. $\it Cамошин\ {\it Д.A.}$ Расчет времени эвакуации людей. Проблемы и перспективы // Пожаровзрывобезопасность. 2004. № 1. С. 33–46.
- 13. Alizadeh R. A dynamic cellular automaton model for evacuation process with obstacles // Safet. Sci. 2011. V. 49(2). P. 315–323.
- 14. Bosse T., Hoogendoorn M., Klein M. et al. Modelling Collective Decision Making in Groups and Crowds: Integrating Social Contagion and Interacting Emotions, Beliefs and Intentions // Auton Agnts Mult-Agnt Syst. 2013. V. 27. P. 52–84.
- 15. Van der Wal C.N., Formolo D., Robinson M.A. Simulating crowd evacuation with socio-cultural, cognitive, and emotional elements // In Transactions on Computational Collective Intelligence XXVII. Springer, Cham. 2017. P. 139–177.
- 16. Zheng X., Zhong T., Liu M. Modeling crowd evacuation of a building based on seven methodological approaches // Building and Environment. 2009. V. 44(3). P. 437–445.
- 17. Korhonen T., Hostikka S. Fire Dynamics Simulator with Evacuation: FDS + Evac. Technical Reference and User's Guide (FDS 6.5.2, Evac 2.5.2, DRAFT) M.: VTT Technical Research Centre of Finland. 2016. 115 p.
- 18. 3533-41-РП-1 СИТИС: ВИМ 4.11 Руководство пользователя, редакция 1 от 10.03.17 / Строительные информационные технологии и системы ООО «Ситис». Екатеринбург, 2017. 122 с.
- 19. Цвиркун А.Д., Резчиков А.Ф., Самарцев А.А. и др. Математическая модель динамики развития пожара в помещениях // Управление большими системами. Выпуск 74. 2018. С. 42–62.
- 20. Samartsev A.A., Rezchikov A.F., Kushnikov V.A. et al. Fire and Heat Spreading Model Based on Cellular Automata Theory // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1015. 2018. 032120 p.
- 21. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика М.: Физматлит, 2005. 544 с.
- 22. Методика определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов функциональной пожарной опасности. Приложение к приказу МЧС России от 30.06.2009 № 382.
- 23. Бекларян A.Л. Фронт выхода в модели поведения толпы при чрезвычайных ситуациях // Вест. Тамбов. ун-та. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 4. С. 851–856.

- 24. *Путилов К.А.* Курс общей физики. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика. Изд. 11. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 560 с.
- 25. Winter H. Modelling Crowd Dynamics During Evacuation Situations Using Simulation M.: Lancaster University. 2012. 20 p.
- 26. Самарцев А.А., Иващенко В.А., Резчиков А.Ф. и др. Мультиагентная модель процесса эвакуации людей из помещений при возникновении чрезвычайных ситуаций // Управление большими системами. Выпуск 72. 2018. С. 217–244.
- 27. Савельев И.В. Курс общей физики: в 4-х т. Т. 3. Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: Наука, 1989. 528 с.
- 28. Об утверждении методики определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов функциональной пожарной опасности: приказ МЧС РФ от 30 июня 2009 г. № 382 (с изменениями и дополнениями) [Электронный ресурс]. URL: http://base.garant.ru/12169057/ (дата обращения: 11.12.2021).
- 29. *Цвиркун А.Д.*, *Резчиков А.Ф.*, *Самарцев А.А. и др.* Интегрированная модель динамики распространения опасных факторов пожара в помещениях и эвакуации из них // Вест. компьют. и информ. технологий. 2019. № 2 (176). С. 47–56.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 02.08.2021

После доработки 01.12.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. С.А. ГАХ (svetagah@inbox.ru), О.В. ХАМИСОВ, д-р физ.-мат. наук (khamisov@isem.irk.ru), С.П. ПОДКОВАЛЬНИКОВ, д-р. техн. наук (spodkovalnikov@isem.irk.ru) (Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск)

ДВОЙСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Статья посвящена двойственному анализу модели ОРИРЭС (оптимизация развития и режимов электроэнергетической системы). Для этого строится двойственная модель, позволяющая провести более глубокий анализ развития генерирующих мощностей и сети, чем прямая модель. При этом используется существенно более широкий набор двойственных переменных и соотношений.

Kлючевые слова: развитие и функционирование электроэнергетической системы, линейное программирование, двойственная задача, анализ двойственных соотношений, узловые цены.

DOI: 10.31857/S000523102205004X, **EDN:** ABKGLX

1. Введение

В ИСЭМ СО РАН разработана оптимизационная линейная статическая математическая модель развития установленных генерирующих и передающих мощностей и режимов их работы в рамках электроэнергетических систем (ЭЭС) и/или их объединения ОРИРЭС [1, 2]. Данная модель представляет разреженную, структурированную задачу линейного программирования большой размерности и активно используется в исследовании развития Единой энергосистемы России и ее роли в составе потенциального Азиатского энергообъединения [1, 3]. Полученные в результате оптимизации решения позволяют оценить эффективные параметры как всего энергообъединения в целом, так и его российской части, а также соединяющих их электрических связей.

При решении задач развития, хотя и не столь активно, как при решении задач функционирования ЭЭС [4–7] используются двойственные оценки. В частности, в модели развития ЭЭС EMMA (electricity market model) [8] формируются долгосрочные двойственные оценки, являющиеся индикаторами узловых цен на электроэнергию.

 $^{^1}$ Исследования выполнены в рамках проектов государственного задания № FWEU-2021-01 (регистрационный номер AAAA-A21-121012190027-4) и № FWEU-2021-06 (регистрационный номер AAAA-A21-121012090034-3).

Применение долгосрочных двойственных оценок может иметь перспективы в задачах обоснования решений по развитию ЭЭС в дополнение к традиционным результатам, получаемым на прямой модели развития ЭЭС. Двойственные оценки являются очень чувствительными динамичными индикаторами, характеризующими ценность генерирующих и передающих ресурсов электроэнергетической системы и в итоге эффективность различных мероприятий по развитию ЭЭС.

Долгосрочные двойственные оценки (ДО) могут использоваться в различных задачах развития электроэнергетики таких, как оценка эффективности объединения ЭЭС, в том числе для участвующих сторон; выбор эффективных мероприятий по развитию ЭЭС, включая вводы новых генерирующих мощностей и развитие электрических сетей; оценка эффективности развития распределенной генерации и использования активных потребителей; оценка сегментированности электроэнергетических рынков и выявление сегментов с потенциалом рыночной власти; прогнозирование узловых цен на электроэнергию и мощность; экономическая оценка гидроэнергетических ресурсов и др.

В ИСЭМ была разработана двойственная модель ОРИРЭС, в которой определяются долгосрочные двойственные оценки.

2. Модель ОРИРЭС

В математическом описании модели ОРИРЭС используются следующие обозначения.

Множества:

J — множество узлов;

 $J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^S \subset J$ — множество узлов, в которых находятся $\Gamma \ni \mathbf{C}$ с ограничениями на сезонную выработку;

 $J^Y_{\Gamma \ni \mathrm{C}} \subset J$ — множество узлов, в которых находятся $\Gamma \ni \mathrm{C}$ с ограничениями на годовую выработку;

I — множество типов мощностей;

S — множество сезонов;

 $S^\sharp \subset S$ — множество сезонов с максимальной нагрузкой;

T — множество учитываемых часов;

 $T_s^\sharp \subset T$ — множество часов с максимальной в сезон $s \in S^\sharp$.

Константы:

 c_{ji} — издержки на генерацию мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (\$/МВт·ч);

 γ_{ji} — капвложения в развитие мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (\$/МВт);

 κ_{ji} — постоянные издержки мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (\$/MBt);

 $\rho_{jj'}$ — капвложения в развитие линии $j-j', j \in J, j' \in J \ (\$/\text{MBt});$

 $b_{jj'}$ — постоянные издержки линии $j-j', j \in J, j' \in J \ (\$/\mathrm{MBr});$

 au_s^{w} — количество рабочих дней в сезоне $s \in S;$

 $\tau_s^{\rm h}$ — количество выходных дней в сезоне $s \in S$;

 $a_{jj'}$ — элементы матрицы смежности, задающие наличие или отсутствие связи $j-j',\ j\in J,\ j'\in J$:

$$a_{jj'} = egin{cases} 1, & \text{если есть связь между узлами} j \ \text{и} \ j', \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

 $\delta_{jj'}$ — потери на линии $j - j', j \in J, j' \in J$ (число из интервала (0,1));

 $d_{ist}^{ ext{w}}$ — нагрузка в узле $j \in J$ в сезон $s \in S$ в час $t \in T$ в рабочие дни (МВт);

 d_{jst}^{h} — нагрузка в узле $j\in J$ в сезон $s\in S$ в час $t\in T$ в выходные дни (МВт);

 r_{jst} — максимальная нагрузка с учетом резервирования в узле $j \in J$ в час $t \in T_s^{\sharp}$ в сезон $s \in S^{\sharp}$ (МВт);

 α_{jis}^{w} — коэффициент минимально допустимой мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в рабочие дни (число из интервала (0,1));

 $\alpha_{jis}^{\rm h}$ — коэффициент минимально допустимой мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в выходные дни (число из интервала (0,1));

 $eta_{jis}^{\mathbf{w}}$ — коэффициент максимальной готовности мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в рабочие дни (число из интервала (0,1));

 $\beta_{jis}^{\rm h}$ — коэффициент максимальной готовности мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в выходные дни (число из интервала (0,1));

 z_{ii}^0 — существующая мощность типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (МВт);

 \overline{z}_{ji} — максимально возможная мощность типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (MBT);

 $v_{jj'}^0$ — существующая пропускная способность связи $j-j',\ j\in J,\ j'\in J$ (МВт);

 $\overline{v}_{jj'}$ — максимально возможная пропускная способность связи $j-j', j \in J, j' \in J$ (МВт);

 $H^S_{j\Gamma \ni \mathrm{C}s}$ — максимальное количество часов использования Г \ni С с сезонным регулированием в узле $j \in J$ в сезоне $s \in S$;

 $H_{j\Gamma \ni \mathrm{C}}^{Y}$ — максимальное количество часов использования гидроэлектростанций (ГЭС) с годовым регулированием в узле $j \in J$;

 $G_{js}^{\Gamma A \ni C}$ — коэффициент максимальной готовности гидроаккумулирующих электростанций ($\Gamma A \ni C$) в узле $j \in J$ в сезоне $s \in S$;

 q_j — КПД цикла "заряд-разряд" ГАЭС в узле $j \in J;$

 $H_j^{\Gamma \! A \ \! D \ \! C}$ — суточное число использования мощности ГА $\ \! D \ \! C$ в узле $j \in J; f$ — коэффициент возврата капитала.

Переменные:

 x_{jist}^{w} — генерация мощности типа $i\in I$ в узле $j\in J$ в сезон $s\in S$ в час $t\in T$ в рабочие дни (МВт);

 x_{jist}^{h} — генерация мощности типа $i\in I$ в узле $j\in J$ в сезон $s\in S$ в час $t\in T$ в выходные дни (МВт);

 z_{ji} — мощность типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (МВт);

 $v_{jj'}$ — пропускная способность связи $j - j', j \in J, j' \in J$ (МВт);

 $\widetilde{y}_{jj'st}$ — резервный переток по связи $j-j',\ j\in J,\ j'\in J$ в пиковый час $t\in T_s^\sharp$ пикового сезона $s\in S^\sharp$ (МВт);

 $y_{jj'st}^{\text{w}}$ — переток по связи $j-j',\ j\in J,\ j'\in J$ в час $t\in T$ в сезон $s\in S$ в рабочие дни (МВт);

 $y_{jj'st}^{\rm h}$ — переток по связи $j-j',\ j\in J,\ j'\in J$ в час $t\in T$ в сезон $s\in S$ в выходные дни (МВт);

 u_{jst}^{w} — зарядная мощность ГАЭС в узле $j \in J$ в час $t \in T$ в сезон $s \in S$ в рабочие дни (МВт);

 $u_{jst}^{\rm h}$ — зарядная мощность ГАЭС в узле $j\in J$ в час $t\in T$ в сезон $s\in S$ в выходные дни (МВт). Все переменные модели неотрицательны.

Целевая функция:

(2.1)
$$\mathsf{TC} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\mathsf{w}} c_{ji} x_{jist}^{\mathsf{w}} + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\mathsf{h}} c_{ji} x_{jist}^{\mathsf{h}} +$$

(2.2)
$$+ f \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \gamma_{ji} \left(z_{ji} - z_{ji}^{0} \right) + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \kappa_{ji} z_{ji} +$$

$$(2.3) + \frac{1}{2}f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} \left(v_{jj'} - v_{jj'}^{0} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} b_{jj'} v_{jj'} \to \min_{(x^{\mathbf{w}}, x^{\mathbf{h}}, z, u^{\mathbf{w}}, u^{\mathbf{h}}, v, \widetilde{y}, y^{\mathbf{w}}, y^{\mathbf{h}})}.$$

Составляющими целевой функции являются: суммарные (годовые) издержки на генерацию (2.1), издержки на ввод новых мощностей и постоянные издержки на их содержание (2.2), издержки на расширение пропускных способностей связей и соответствующие постоянные издержки (2.3).

Далее приводится система ограничений модели ОРИРЭС с указанием соответствующих двойственных переменных.

Ограничения на мощности в пиковые часы:

(2.4)
$$\sum_{i \in I} z_{ji} + \sum_{j' \in J} a_{jj'} \left(1 - \delta_{jj'} \right) \widetilde{y}_{j'jst} - \sum_{j' \in J} a_{jj'} \widetilde{y}_{jj'st} \geqslant r_{jst},$$
$$j \in J, \ t \in T_s^{\sharp}, \ s \in S^{\sharp},$$

двойственные переменные ν_{jst} . Установленных мощностей во всей энергосистеме с учетом баланса перетоков должно хватить на покрытие максимальной нагрузки в каждом узле с учетом нормативного резерва (например, в случае аварии). Фактически, ограничения (2.4) — это требования, предъявляемые к установленной суммарной мощности.

Балансовые ограничения в рабочие дни:

$$\sum_{i \in I} x_{jist}^{w} + \sum_{j' \in J} a_{jj'} \left(1 - \delta_{jj'} \right) y_{j'jst}^{w} - \sum_{j' \in J} a_{jj'} y_{jj'st}^{w} = d_{jst}^{w} + u_{jst}^{w},$$
$$j \in J, \ s \in S, \ t \in T,$$

двойственные переменные $\lambda_{ist}^{\mathrm{w}}$.

Балансовые ограничения в выходные дни:

$$\sum_{i \in I} x_{jist}^{h} + \sum_{j' \in J} a_{jj'} (1 - \delta_{jj'}) y_{j'jst}^{h} - \sum_{j' \in J} a_{jj'} y_{jj'st}^{h} = d_{jst}^{h} + u_{jst}^{h},$$
$$j \in J, \ s \in S, \ t \in T,$$

двойственные переменные $\lambda_{ist}^{\mathrm{h}}.$

Ограничения на генерацию с учетом коэффициентов готовности и минимально допустимой мощности в рабочие и выходные дни:

(2.5)
$$\alpha_{jis}^{\mathbf{w}} z_{ji} \leqslant x_{jist}^{\mathbf{w}} \leqslant \beta_{jis}^{\mathbf{w}} z_{ji}, \quad \alpha_{jis}^{\mathbf{h}} z_{ji} \leqslant x_{jist}^{\mathbf{h}} \leqslant \beta_{jis}^{\mathbf{h}} z_{ji},$$
$$j \in J, \ i \in I, \ s \in S, \ t \in T,$$

двойственные переменные $\underline{\mu}_{iist}^{\mathrm{w}}, \ \overline{\mu}_{jist}^{\mathrm{w}}, \ \underline{\mu}_{iist}^{\mathrm{h}}, \ \overline{\mu}_{jist}^{\mathrm{h}}$

Ограничения на развитие мощностей:

$$(2.6) z_{ii}^0 \leqslant z_{ji} \leqslant \bar{z}_{ji}, \quad j \in J, \ i \in I,$$

двойственные переменные $\underline{\sigma}_{ij}, \ \overline{\sigma}_{ij}.$

Ограничения на резервные перетоки: $\widetilde{y}_{jj'st} \leqslant v_{jj'}, j \in J, j' \in J, t \in T_s^{\sharp}, s \in S^{\sharp}$, двойственные переменные $\widetilde{\eta}_{jj'st}$.

Ограничения на перетоки в рабочие и выходные дни:

$$y_{jj'st}^{w} \leq v_{jj'}, \ y_{jj'st}^{h} \leq v_{jj'}, \ j \in J, \ j' \in J, \ s \in S, \ t \in T,$$

двойственные переменные $\eta_{ij'st}^{w}$.

Ограничения на развитие связей: $v^0_{jj'}\leqslant v_{jj'}\leqslant \bar{v}_{jj'},\,j\in J,\,j'\in J$, двойственные переменные $\underline{\omega}_{jj'},\,\overline{\omega}_{jj'}$.

Ограничения на сезонную выработку ГЭС (для узлов из $J_{\Gamma \supset C}^{S}$):

$$\begin{split} \tau_s^{\mathbf{w}} \sum_{t \in T} x_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} + \tau_s^{\mathbf{h}} \sum_{t \in T} x_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} \leqslant H_{j\Gamma \ni \mathbf{C}s}^S z_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})}, \\ j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^S, \ s \in S, \end{split}$$

двойственные переменные ξ_{js} .

Ограничения на годовую выработку ГЭС (для узлов из $J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{Y}$):

$$\begin{split} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\mathbf{w}} x_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\mathbf{h}} x_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} \leqslant H_{j\Gamma \ni \mathbf{C}}^{\mathbf{Y}} z_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})}, \\ j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{Y}, \end{split}$$

двойственные переменные ξ_j^Y .

Ограничения на величину заряда ГАЭС в рабочие и выходные дни:

$$u_{jst}^{\text{W}} \leqslant G_{js}^{\Gamma \text{A} \ni \text{C}} z_{j(\Gamma \text{A} \ni \text{C})}, \quad u_{jst}^{\text{h}} \leqslant G_{js}^{\Gamma \text{A} \ni \text{C}} z_{j(\Gamma \text{A} \ni \text{C})},$$

$$j \in J, \quad s \in S, \quad t \in T,$$

двойственные переменные $\theta_{jst}^{\mathrm{w}},\ \theta_{jst}^{\mathrm{h}}.$

Ограничения на суточную выработку ГАЭС в рабочие и выходные дни в зависимости от накопленного заряда:

$$\sum_{t \in T} x_{j(\Gamma A \ni C)st}^{w} - q_{j} \sum_{t \in T} u_{jst}^{w} \leqslant 0, \quad \sum_{t \in T} x_{j(\Gamma A \ni C)st}^{h} - q_{j} \sum_{t \in T} u_{jst}^{h} \leqslant 0,$$
$$j \in J, \quad s \in S,$$

двойственные переменные ψ_{js}^{w} , ψ_{js}^{h} .

Ограничения на суточную мощность ГАЭС в рабочие и выходные дни в зависимости от числа часов использования ГАЭС:

$$\begin{split} \sum_{t \in T} x_{j(\Gamma \mathbf{A} \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} \leqslant H_{j}^{\Gamma \mathbf{A} \ni \mathbf{C}} z_{j(\Gamma \mathbf{A} \ni \mathbf{C})}, & \sum_{t \in T} x_{j(\Gamma \mathbf{A} \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} \leqslant H_{j}^{\Gamma \mathbf{A} \ni \mathbf{C}} z_{j(\Gamma \mathbf{A} \ni \mathbf{C})}, \\ j \in J, & s \in S, \end{split}$$

двойственные переменные $\varphi_{js}^{\mathrm{w}}, \ \varphi_{js}^{\mathrm{h}}$.

Технические условия эквивалентности пропускных способностей связей в обоих направлениях: $v_{ij'} = v_{j'j}, j \in J, j' \in J$, двойственные переменные $\pi_{jj'}$.

Модели, подобные ОРИРЭС, исследовались и в других работах [9–13]. Модель ОРИРЭС обладает следующими преимуществами:

- более детально моделируются режимы ГЭС с ограничениями на годовую и сезонную выработку;
- моделируются режимы ГАЭС;
- более детально учитываются графики нагрузки.

3. Двойственная модель

Вывод двойственной постановки основан на методике, использованной в [14]. Сначала стандартным образом записывается функция Лагранжа, в которой все слагаемые сгруппированы относительно двойственных переменных. Затем функция Лагранжа переписывается так, чтобы все слагаемые были сгруппированы относительно прямых переменных. Для записи двойственной задачи необходимо минимизировать функцию Лагранжа по прямым переменным. При этом ограничения на прямые переменные либо отсутствуют, либо являются ограничениями на знак прямой переменной. В первом случае получаем ограничения-равенства, а во втором случае — ограничения-неравенства двойственной задачи. К первой группе переменных относятся переменные x_{jist}^{w} , x_{jist}^{h} , поскольку в силу двусторонних ограничений (2.5) неотрицательность этих переменных учитывается автоматически и

в задаче минимизации функции Лагранжа по этим переменным ограничения на знак отсутствуют. То же самое можно сказать о переменных z_{ij} и $v_{jj'}$. Для остальных переменных ограничения на знак должны явно учитываться. Часть выражения функции Лагранжа, не содержащая прямых переменных, есть максимизируемая целевая функция двойственной задачи. В итоге получаем следующую постановку двойственной задачи.

Целевая функция

(3.1)
$$TR = -f \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \gamma_{ji} z_{ji}^{0} - \frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0} +$$

$$(3.2) + \sum_{j \in J} \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_{s}^{\sharp}} r_{jst} \nu_{jst} + \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{w} \lambda_{jst}^{w} + \sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h} +$$

$$(3.3) \qquad + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} z_{ji}^0 \underline{\sigma}_{ji} - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \overline{z}_{ji} \overline{\sigma}_{ji} + \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} v_{jj'}^0 \underline{\omega}_{jj'} - \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \overline{v}_{jj'} \overline{\omega}_{jj'}.$$

Ограничения, соответствующие переменным z_{ij} , без ГЭС и ГАЭС (т.е. $i \neq \Gamma$ ЭС и $i \neq \Gamma$ АЭС):

$$(3.4) \quad f\gamma_{ji} + \kappa_{ji} - \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_s^{\sharp}} \nu_{jst} + \sum_{s \in S} \alpha_{jis}^{\mathsf{w}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{jist}^{\mathsf{w}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{jis}^{\mathsf{w}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{jist}^{\mathsf{w}} \right) +$$

$$(3.5) \qquad + \sum_{s \in S} \alpha_{jis}^{h} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{jist}^{h} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{jis}^{h} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{jist}^{h} \right) - \underline{\sigma}_{ji} + \overline{\sigma}_{ji} = 0,$$
$$j \in J, i \in I \setminus \{ \Gamma \ni C, \Gamma A \ni C \}.$$

Ограничения, соответствующие переменным $z_{j(\Gamma \ni C)}$ для $\Gamma \ni C$ сезонного регулирования:

$$\begin{split} &f\gamma_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} + \kappa_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_{s}^{\sharp}} \nu_{jst} + \\ &+ \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{w}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}}\right) - \sum_{s \in S} \beta_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{w}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}}\right) + \\ &+ \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{h}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}}\right) - \sum_{s \in S} \beta_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{h}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}}\right) + \\ &+ \overline{\sigma}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \underline{\sigma}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \sum_{s \in S} H_{j\Gamma \ni \mathbf{C}s}^{S} \xi_{js} = 0, \ j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{S}. \end{split}$$

Ограничения, соответствующие переменным $z_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})}$ для $\Gamma \ni \mathbf{C}$ годового регулирования:

$$\begin{split} f\gamma_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} + \kappa_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_{s}^{\sharp}} \nu_{jst} + \\ + \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{w}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{w}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} \right) + \\ + \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{h}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})s}^{\mathbf{h}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} \right) + \\ + \overline{\sigma}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \underline{\sigma}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - H_{j\Gamma \ni \mathbf{C}}^{\mathbf{Y}} \xi_{j}^{\mathbf{Y}} = 0, \ j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{\mathbf{Y}}. \end{split}$$

Ограничения, соответствующие переменным $z_{j(\Gamma A \ni C)}$:

$$f\gamma_{j(\Gamma A \ni C)} + \kappa_{j(\Gamma A \ni C)} - \sum_{s \in S} \sum_{t \in T_s^{\sharp}} \nu_{jst} + \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma A \ni C)s}^{\mathsf{w}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma A \ni C)st}^{\mathsf{w}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{j(\Gamma A \ni C)s}^{\mathsf{w}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{j(\Gamma A \ni C)st}^{\mathsf{w}} \right) + \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma A \ni C)s}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma A \ni C)st}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{j(\Gamma A \ni C)s}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \overline{\mu}_{j(\Gamma A \ni C)st}^{\mathsf{h}} \right) + \sum_{s \in S} \alpha_{j(\Gamma A \ni C)s}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \underline{\mu}_{j(\Gamma A \ni C)st}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{s \in S} \beta_{js}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \right) - \sum_{t \in T} \beta_{jst}^{\mathsf{h}} \left(\sum_{t \in T} \beta$$

Ограничения, соответствующие переменным $x_{jist}^{\rm w}$ и $x_{jist}^{\rm h}$ без ГЭС и ГАЭС (т.е. $i \neq \Gamma$ ЭС и $i \neq \Gamma$ АЭС):

(3.6)
$$\tau_s^{\mathbf{w}} c_{ji} - \lambda_{jst}^{\mathbf{w}} - \underline{\mu}_{jist}^{\mathbf{w}} + \overline{\mu}_{jist}^{\mathbf{w}} = 0, \quad \tau_s^{\mathbf{h}} c_{ji} - \lambda_{jst}^{\mathbf{h}} - \underline{\mu}_{jist}^{\mathbf{h}} + \overline{\mu}_{jist}^{\mathbf{h}} = 0,$$
$$j \in J, \quad i \in I \setminus \{ \Gamma \ni \mathbf{C}, \Gamma A \ni \mathbf{C} \}, \quad s \in S, \quad t \in T.$$

Ограничения, соответствующие переменным $x_{j(\Gamma \ni C)st}^{w}$ и $x_{j(\Gamma \ni C)st}^{h}$ для ГЭС с сезонным регулированием:

$$(3.7) \quad \tau_s^{\mathbf{w}} c_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \lambda_{jst}^{\mathbf{w}} - \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} + \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} + \tau_s^{\mathbf{w}} \xi_{js} = 0, \quad j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^S, \quad s \in S, \quad t \in T,$$

$$\tau_s^{\mathbf{h}} c_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \lambda_{jst}^{\mathbf{h}} - \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} + \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} + \tau_s^{\mathbf{h}} \xi_{js} = 0, \quad j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^S, \quad s \in S, \quad t \in T.$$

Ограничения, соответствующие переменным $x_{j(\Gamma \ni C)st}^w$ и $x_{j(\Gamma \ni C)st}^w$ для $\Gamma \ni C$ с годовым регулированием:

$$\begin{array}{ll} (3.8) & \tau_{s}^{\mathbf{w}}c_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \lambda_{jst}^{\mathbf{w}} - \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} + \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}} + \tau_{s}^{\mathbf{w}}\xi_{j}^{Y} = 0, \ j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{Y}, \ s \in S, \ t \in T, \\ & \tau_{s}^{\mathbf{h}}c_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})} - \lambda_{jst}^{\mathbf{h}} - \underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} + \overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{h}} + \tau_{s}^{\mathbf{h}}\xi_{j}^{Y} = 0, \ j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{Y}, \ s \in S, \ t \in T. \end{array}$$

Ограничения, соответствующие переменным $x_{j(\Gamma A \ni C)st}^{w}$ и $x_{j(\Gamma A \ni C)st}^{h}$:

$$\begin{split} &\tau_{s}^{\mathbf{w}}c_{j(\Gamma\mathbf{A}\ni\mathbf{C})}-\lambda_{jst}^{\mathbf{w}}-\underline{\mu}_{j(\Gamma\mathbf{A}\ni\mathbf{C})st}^{\mathbf{w}}+\overline{\mu}_{j(\Gamma\mathbf{A}\ni\mathbf{C})st}^{\mathbf{w}}+\psi_{js}^{\mathbf{w}}+\varphi_{js}^{\mathbf{w}}=0, \quad j\in J, \ s\in S, \ t\in T, \\ &\tau_{s}^{\mathbf{h}}c_{j(\Gamma\mathbf{A}\ni\mathbf{C})}-\lambda_{jst}^{\mathbf{h}}-\underline{\mu}_{j(\Gamma\mathbf{A}\ni\mathbf{C})st}^{\mathbf{h}}+\overline{\mu}_{j(\Gamma\mathbf{A}\ni\mathbf{C})st}^{\mathbf{h}}+\psi_{js}^{\mathbf{h}}+\varphi_{js}^{\mathbf{h}}=0, \quad j\in J, \ s\in S, \ t\in T. \end{split}$$

Ограничения, соответствующие переменным $v_{ij'}$:

(3.9)
$$\frac{1}{2}f\rho_{jj'} + \frac{1}{2}b_{jj'} - \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T^{\sharp}} \widetilde{\eta}_{jj'st} - \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{jj'st}^{w} -$$

$$(3.10) \qquad -\sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{jj'st}^{h} + \overline{\omega}_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'} + \pi_{jj'} - \pi_{j'j} = 0, \quad j \in J, \quad j' \in J.$$

Ограничения, соответствующие переменным $\widetilde{y}_{jj'st}$:

$$a_{jj'}\left(\nu_{jst}-(1-\delta_{jj'})\nu_{j'st}\right)+\widetilde{\eta}_{jj'st}\geqslant 0,\ j\in J,\ j'\in J,\ s\in S^{\sharp},\ t\in T_s^{\sharp}.$$

Ограничения, соответствующие переменным $y_{jj'st}^{w}$ и $y_{jj'st}^{h}$:

$$a_{jj'}\left(\lambda_{jst}^{\mathbf{w}} - (1 - \delta_{jj'})\lambda_{j'st}^{\mathbf{w}}\right) + \eta_{jj'st}^{\mathbf{w}} \geqslant 0, \quad a_{jj'}\left(\lambda_{jst}^{\mathbf{h}} - (1 - \delta_{jj'})\lambda_{j'st}^{\mathbf{h}}\right) + \eta_{jj'st}^{\mathbf{h}} \geqslant 0,$$
$$j \in J, \ j' \in J, \ s \in S, \ t \in T.$$

Ограничения, соответствующие переменным u_{jst}^{w} и u_{jst}^{h} :

$$\lambda_{jst}^{\mathbf{w}} + \theta_{jst}^{\mathbf{w}} - q_j \psi_{js}^{\mathbf{w}} \geqslant 0, \quad \lambda_{jst}^{\mathbf{h}} + \theta_{jst}^{\mathbf{h}} - q_j \psi_{js}^{\mathbf{h}} \geqslant 0, \quad j \in J, \quad s \in S, \quad t \in T.$$

Все двойственные переменные неотрицательны, за исключением $\lambda^{\rm w}_{jst},~\lambda^{\rm h}_{jst}$ и $\pi_{jj'}.$

4. Анализ двойственной модели

Поскольку все переменные в прямой задаче имеют двусторонние ограничения, допустимое множество прямой задачи ограничено. Будем предполагать, что это множество не пусто. Тогда прямая и двойственная задачи имеют решения \mathfrak{P}^* и \mathfrak{D}^* , где \mathfrak{P}^* — набор оптимальных значений прямых переменных,

$$\mathfrak{P}^* = \left\{ x_{jist}^{\text{w},*}, \ x_{jist}^{\text{h},*}, \ z_{ji}^*, v_{jj'}^*, \ \widetilde{y}_{jj'st}^*, \ y_{jj'st}^{\text{w},*}, \ y_{jj'st}^{\text{h},*}, \ u_{jst}^{\text{w},*}, \ u_{jst}^{\text{h},*} \right\},$$

 \mathfrak{D}^* — набор оптимальных значений двойственных переменных,

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ \begin{aligned} \nu_{jst}^*, \ \lambda_{jst}^{\text{w},*}, \ \lambda_{jst}^{\text{h},*}, \ \underline{\mu}_{jist}^{\text{w},*}, \ \overline{\mu}_{jist}^{\text{w},*}, \ \underline{\mu}_{jist}^{\text{h},*}, \ \overline{\mu}_{jist}^{\text{h},*}, \ \widehat{\eta}_{jj'st}^{\text{h},*}, \ \eta_{jj'st}^{\text{w},*}, \ \eta_{jj'st}^{\text{h},*}, \ \underline{\sigma}_{ji}^{*}, \ \underline{\sigma}_{ji}^{*}, \ \overline{\sigma}_{ji}^{*}, \\ \overline{\omega}_{jj'}^*, \ \underline{\omega}_{jj'}^*, \ \xi_{js}^*, \ \xi_{j}^{Y,*}, \ \theta_{jst}^{\text{w},*}, \ \theta_{jst}^{\text{h},*}, \ \psi_{js}^{\text{w},*}, \ \psi_{js}^{\text{h},*}, \ \varphi_{js}^{\text{w},*}, \ \varphi_{js}^{\text{h},*}, \ \pi_{jj'}^{*} \end{aligned} \right\}.$$

Обозначим: $TC^* = TC(\mathfrak{P}^*)$ — оптимальное значение прямой задачи (см. (2.1)—(2.3)), $TR^* = TR(\mathfrak{D}^*)$ (см. (3.1)—(3.3)) — оптимальное значение двойственной задачи. Из равенства $TC^* = TR^*$ после перегруппировки слагаемых получаем следующее:

$$\underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_{s}^{\sharp}} r_{jst} \nu_{jst}^{*}}_{P_{reserv}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{w} \lambda_{jst}^{w,*}}_{P^{w}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{h}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{h}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}}}_{P^{w}} = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \sum_{t \in T} d_{jst}^{h} \lambda_{jst}^{h,*}}_{P^{w}}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_{P^{w}}_$$

$$(4.2) = \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{w}} c_{ji} x_{jist}^{\text{w,*}}}_{C_{generation}^{\text{w}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h}} c_{ji} x_{jist}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h}}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^{\text{h,*}}}_{C_{generation}^$$

$$(4.3) \qquad + f \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \gamma_{ji} \left(z_{ji}^* - z_{ji}^0 \right) + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \kappa_{ji} z_{ji}^* + \underbrace{C_{appacity}^{capacity}}_{C_{fined}^{capacity}}$$

$$(4.4) \qquad \qquad +\underbrace{\frac{1}{2}f\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\rho_{jj'}\left(v_{jj'}^*-v_{jj'}^0\right)}_{C_{expansion}^{network}} +\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}b_{jj'}v_{jj'}^*}_{C_{ijred}^{network}} +$$

$$(4.5) \qquad + \underbrace{f \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \gamma_{ji} z_{ji}^{0}}_{C_{repau}^{capacity}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{jj'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{jj'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J} \sum_{j' \in J} \rho_{j'} v_{j'}^{0}}_{C_{repau}^{network}} + \underbrace{\frac{1}{2} f \sum_{j' \in J}$$

$$(4.6) \qquad + \sum_{\substack{j \in J \ i \in I}} \sum_{\substack{i \in I}} \overline{z}_{ji} \overline{\sigma}_{ji}^* - \sum_{\substack{j \in J \ i \in I}} \sum_{\substack{i \in I}} z_{ji}^0 \underline{\sigma}_{ji}^* + \sum_{\substack{j \in J \ j' \in J}} \sum_{\substack{j' \in J \ j' \in J}} \overline{v}_{jj'} \overline{\omega}_{jj'}^* - \sum_{\substack{j \in J \ j' \in J}} \sum_{\substack{j' \in J \ inefficiency}}} \underbrace{L_{network}^{network}}_{inefficiency}.$$

Традиционно величина $\lambda_{jst}^{\text{w},*}$ — это так называемая «узловая цена» в рабочие дни, т.е. цена, по которой электроэнергия покупается потребителями в рабочие дни в узле j в сезон s в час t, аналогичная интерпретация применима и к $\lambda_{jst}^{\text{h},*}$ — «узловым ценам» в выходные дни. Величина ν_{jst}^* — стоимость резервной мощности. В итоге сумма трех слагаемых в (4.1) представляет собой суммарную плату потребителей за электроэнергию.

Содержательный смысл отдельных выражений в (4.1)–(4.6) следующий:

• P_{reserv} — плата потребителей за резерв электроэнергии;

- P^w плата потребителей за электроэнергию в рабочие дни;
- P^h плата потребителей за электроэнергию в выходные дни;
- $C^w_{generation}$ издержки производителей на генерацию в рабочие дни;
- $C^h_{generation}$ издержки производителей на генерацию в выходные дни;
- $C_{expansion}^{capacity}$ издержки производителей на развитие установленных мощностей;
- $C_{fixed}^{capacity}$ издержки производителей постоянные (на поддержание установленных мощностей);
- $C_{expansion}^{network}$ издержки на развитие сети;
- $C_{fixed}^{network}$ издержки сети постоянные (на поддержание сети);
- $C_{repay}^{capacity}$ издержки имеющихся до развития мощностей (возврат начальных мощностных издержек);
- $C_{repay}^{network}$ издержки имеющейся до развития сети (возврат начальных сетевых издержек);
- $R_{stimulation}^{capacity}$ бонус (поощрение) эффективных мощностей;
- $L_{inefficiency}^{capacity}$ убытки неэффективных мощностей;
- $R_{stimulation}^{network}$ бонус (поощрение) эффективных участков сети;
- $L_{inefficiency}^{network}$ убытки неэффективных участков сети.

Равенства (4.1)–(4.6) можно пояснить следующим образом: суммарная плата, взимаемая с потребителей в виде трех указанных в (4.1) составляющих, расходуется на

- покрытие издержек на годовую генерацию (4.2);
- покрытие суммарных издержек на мощность (4.3);
- покрытие суммарных сетевых издержек (4.4);
- восстановление издержек на ввод ранее существовавших мощностей и участков сети (4.5);
- суммарную прибыль (убыток) мощностей и сети (4.6).

Остановимся на результатах анализа основных двойственных соотношений.

Двойственные переменные $\lambda_{jst}^{\mathrm{w}}$ и $\lambda_{jst}^{\mathrm{h}}$. Из (3.6) получаем

$$(4.7) \quad \frac{\lambda_{jst}^{\mathbf{w}}}{\tau_{s}^{\mathbf{w}}} = c_{ji} - \frac{\underline{\mu}_{jist}^{\mathbf{w}}}{\tau_{s}^{\mathbf{w}}} + \frac{\overline{\mu}_{jist}^{\mathbf{w}}}{\tau_{s}^{\mathbf{w}}}, \quad j \in J, \ i \in I \setminus \{\Gamma \ni \mathbf{C}, \Gamma A \ni \mathbf{C}\}, \ s \in S, \ t \in T.$$

Следовательно, $\lambda_{jst}^{\rm w}$ имеет размерность "плата за МВт-ч за весь сезон" s. Кроме того, как видно из (4.7), узловая цена одна и та же для всех типов мощностей i, находящихся в данном узле ($\lambda_{jst}^{\rm w}$ не зависит от i). Предположим, что для некоторой мощности $i=\hat{i}$ в сезон s, час t в узле j оптимальное значение прямой переменной $x_{j\hat{i}st}^{\rm w,*}$ удовлетворяет строгому двустороннему неравенству

(4.8)
$$\alpha_{\hat{\eta}\hat{i}s}^{w} z_{\hat{\eta}\hat{i}}^{*} < x_{\hat{\eta}\hat{i}st}^{w,*} < \beta_{\hat{\eta}\hat{i}s}^{h} z_{\hat{\eta}\hat{i}}^{*},$$

т.е. генерация $x_{j\hat{i}st}^{\text{w},*}$ не достигает своего минимального или максимального значения. В этом случае из условий дополняющей нежесткости

(4.9)
$$\underline{\mu}_{jist}^{w,*} \left(\alpha_{jis}^{w} z_{ji}^{*} - x_{jist}^{w,*} \right) = 0, \quad \overline{\mu}_{jist}^{w,*} \left(x_{jist}^{w,*} - \beta_{jis}^{w} z_{ji}^{*} \right) = 0,$$

которые выполняются для любого i и (4.8), следует

$$\underline{\mu}_{\hat{j}\hat{i}st}^{\mathbf{w},*} = 0, \quad \overline{\mu}_{\hat{j}\hat{i}st}^{\mathbf{w},*} = 0.$$

Тогда для оптимального значения $\lambda_{jst}^{\mathrm{w},*}$ из (4.7) и (4.10) имеем

(4.11)
$$\frac{\lambda_{jst}^{\text{w,*}}}{\tau_s^{\text{w}}} = c_{j\hat{i}}.$$

Для другой мощности i такой, что

$$(4.12) c_{ji} < c_{\hat{j}\hat{i}},$$

получаем

$$\frac{\lambda_{jst}^{\text{w},*}}{\tau_s^{\text{w}}} = c_{j\hat{i}} > c_{ji} = \frac{\lambda_{jst}^{\text{w},*}}{\tau_s^{\text{w}}} + \frac{\underline{\mu}_{jist}^{\text{w},*}}{\tau_s^{\text{w}}} - \frac{\overline{\mu}_{jist}^{\text{w},*}}{\tau_s^{\text{w}}}$$

или, после упрощения,

$$(4.13) 0 > \underline{\mu}_{jist}^{w,*} - \overline{\mu}_{jist}^{w,*}.$$

При выполнении условия $\alpha_{jis}^{\rm w} < \beta_{jis}^{\rm w}$, которое просто предполагается очевидным, из условий дополняющей нежесткости (4.9) следует, что $\underline{\mu}_{jist}^{\rm w,*}$ и $\overline{\mu}_{jist}^{\rm w,*}$ не могут быть одновременно отличными от нуля. Тогда в силу неотрицательности $\underline{\mu}_{jist}^{\rm w,*}$, $\overline{\mu}_{jist}^{\rm w,*}$ и строго неравенства (4.13) получаем $\underline{\mu}_{jist}^{\rm w,*} = 0$ и $\overline{\mu}_{jist}^{\rm w,*} > 0$. Снова из условия дополняющей нежесткости получаем

$$(4.14) x_{jist}^{\mathbf{w},*} = \beta_{jis}^{\mathbf{w}} z_{ji}^*.$$

Мощность i, удовлетворяющая условию (4.12), более экономичная (издержки на генерацию одного МВт меньше), чем мощность \hat{i} , и в силу равенства (4.14) такая мощность используется максимально.

Если же предположить, что для мощности i (отличной от \hat{i}) выполняется строгое неравенство

$$(4.15) c_{ji} > c_{\hat{j}\hat{i}},$$

то, проводя аналогичные рассуждения, получаем, что в этом случае анализируемая мощность i менее экономична, чем \hat{i} , и поэтому используется минимальным образом:

$$(4.16) x_{jist}^{\mathbf{w},*} = \alpha_{jis}^{\mathbf{w}} z_{ji}^*.$$

Подведем некоторые итоги. Все типы мощностей в данном узле j распадаются на не более, чем три группы. Если для некоторых мощностей справедливы неравенства (4.8), то все они имеют одинаковые предельные издержки c_{ji} , и в соответствии с этими издержками устанавливается узловая цена по формуле (4.11). Такие мощности принято называть замыкающими. Если в данном узле есть мощности с меньшими издержками, то они загружаются полностью. Их издержки не обязаны быть равными, лишь бы выполнялось условие (4.12). Если в узле есть мощности с большими, чем у замыкающих, издержками (4.15), то эти мощности загружаются по минимуму, т.е. в соответствии с (4.16). Их вообще лучше было бы не загружать, но этому могут препятствовать условия $\alpha_{jis}^w > 0$ и $z_{ji}^0 > 0$. Если для некоторых i коэффициенты минимальной готовности $\alpha_{jis}^w = 0$, то, как следует из (4.16), такие мощности не загружаются.

Анализ двойственных переменных $\lambda_{ist}^{\mathrm{h}}$ проводится аналогичным образом.

Двойственные переменные $\underline{\mu}_{jist}^{\mathrm{w},*}$ и $\overline{\mu}_{jist}^{\mathrm{w},*}$. Ранее уже было установлено, что для замыкающих мощностей значения этих переменных равны нулю. Для более экономичных мощностей имеем (как это было определено выше) $\overline{\mu}_{jist}^{\mathrm{w},*}>0$ и $\overline{\mu}_{iist}^{\mathrm{w},*}=0$. Из (4.7) получаем

$$\frac{\lambda_{jst}^{\mathrm{w},*}}{\tau_{\mathrm{s}}^{\mathrm{w}}} = c_{ji} + \frac{\overline{\mu}_{jist}^{\mathrm{w},*}}{\tau_{\mathrm{s}}^{\mathrm{w}}}.$$

Экономичные мощности несут издержки на генерацию одного МВт·ч в объеме c_{ji} , а продают по узловым ценам, равным $\frac{\lambda_{jst}^{w,*}}{\tau_s^w}$, т.е. за каждый МВт·ч получают доход $\frac{\overline{\mu}_{jist}^{w,*}}{\tau_s^w}$ (имеют излишек производителя). Для неэкономичных мощностей, т.е. для тех мощностей i, для которых выполняются неравенства (4.15), аналогичным образом получаем

(4.17)
$$\frac{\lambda_{jst}^{\mathrm{w},*}}{\tau_{\mathrm{s}}^{\mathrm{w}}} = c_{ji} - \frac{\underline{\mu}_{jist}^{\mathrm{w},*}}{\tau_{\mathrm{s}}^{\mathrm{w}}}.$$

Эти мощности не покрывают издержки на генерацию за счет продажи. Как следует из (4.17), убыток с каждого МВт равен $\frac{\underline{\mu}_{jist}^{w,*}}{\tau_s^w}$.

Двойственные переменные ξ_{js} и ξ_{j}^{Y} . Учитывая, что $c_{j(\Gamma \ni C)}=0,$ из (3.7) получаем

(4.18)
$$\frac{\lambda_{jst}^{\mathbf{w}}}{\tau_{s}^{\mathbf{w}}} = \frac{\underline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}}}{\tau_{s}^{\mathbf{w}}} - \frac{\overline{\mu}_{j(\Gamma \ni \mathbf{C})st}^{\mathbf{w}}}{\tau_{s}^{\mathbf{w}}} + \xi_{js}, \quad j \in J_{\Gamma \ni \mathbf{C}}^{S}, \quad s \in S, \quad t \in T.$$

Сравнивая (4.18) и (4.7), видим, что хотя издержки на генерацию непосредственно ГЭС нулевые, роль издержек выполняют двойственные переменные ξ_{js} . Напомним, что эти двойственные переменные соответствуют ограничениям на сезонное использование ГЭС водных ресурсов и оценивают именно

стоимость этих ресурсов в каждый сезон s. Другими словами, ξ_{js} можно рассматривать как ренту за использование гидроэнергетических ресурсов ГЭС сезонного регулирования.

Аналогичным образом из (3.8) получаем, что двойственные переменные ξ_j^Y — рента за использование гидроэнергетических ресурсов ГЭС с годовым регулированием.

Разделение расходов на строительство новой линии между двумя соседними узлами. Для линии j-j' проанализируем вклад каждого узла в расходы, связанные с функционированием и развитием этой линии. Запишем равенства (3.9)–(3.10), поменяв местами индексы j и j',

(4.19)
$$\frac{1}{2}f\rho_{j'j} + \frac{1}{2}b_{j'j} - \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T^{\sharp}} \widetilde{\eta}_{j'jst} - \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{w} -$$

$$(4.20) -\sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{h} + \overline{\omega}_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j} + \pi_{j'j} - \pi_{jj'} = 0, \quad j \in J, \quad j' \in J.$$

Суммируя (3.9)–(3.10) и (4.19)–(4.20) и учитывая $\rho_{j'j}=\rho_{jj'}$ $b_{j'j}=b_{jj'}$, получаем

$$f \rho_{j'j} + b_{j'j} = \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_{s}^{\sharp}} \widetilde{\eta}_{jj'st} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{jj'st}^{w} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'j'st}^{h} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \widetilde{\eta}_{j'jst}^{h} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{h} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{h} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{h} + \overline{\omega}_{jj'} - \underline{\omega}_{j'j}.$$

Умножая последние равенства $v_{jj'}$ и учитывая $v_{jj'} = v_{j'j}$, получим

(4.21)
$$f \rho_{jj'} v_{jj'} + b_{jj'} v_{jj'} =$$

$$= \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_s^{\sharp}} \widetilde{\eta}_{jj'st} v_{jj'} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{jj'st}^{\mathsf{w}} v_{jj'} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{jj'st}^{\mathsf{h}} v_{jj'} +$$

$$(4.22) + \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T_{s}^{\sharp}} \widetilde{\eta}_{j'jst} v_{j'j} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{w} v_{j'j} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta_{j'jst}^{h} v_{j'j} +$$

$$(4.23) + \overline{\omega}_{jj'}v_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'}v_{jj'} + \overline{\omega}_{j'j}v_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j}v_{j'j}.$$

В силу условия дополняющей нежесткости

$$\begin{split} \widetilde{\eta}_{jj'st}v_{jj'} &= \widetilde{\eta}_{jj'st}\widetilde{y}_{jj'st}, & \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st}v_{jj'} &= \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st}y^{\mathrm{w}}_{jj'st}, \\ \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st}v_{jj'} &= \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st}y^{\mathrm{h}}_{jj'st}, & s \in S, \quad t \in T, \\ \widetilde{\eta}_{j'jst}v_{j'j} &= \widetilde{\eta}_{j'jst}\widetilde{y}_{j'jst}, & \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst}v_{j'j} &= \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst}y^{\mathrm{w}}_{j'jst}, \\ \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st}v_{j'j} &= \eta^{\mathrm{h}}_{j'jst}y^{\mathrm{h}}_{j'jst}, & s \in S, \quad t \in T, \end{split}$$

из условий (4.21)-(4.23) имеем

$$(4.24) f\rho_{jj'}v_{jj'} + b_{jj'}v_{jj'} =$$

$$= \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \widetilde{\eta}_{jj'st} \widetilde{y}_{jj'st} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\text{w}}_{jj'st} y^{\text{w}}_{jj'st} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\text{h}}_{jj'st} y^{\text{h}}_{jj'st} +$$

$$(4.25) \qquad + \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T^{\sharp}} \widetilde{\eta}_{j'jst} \widetilde{y}_{j'jst} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst} y^{\mathrm{w}}_{j'jst} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{j'jst} y^{\mathrm{h}}_{j'jst} +$$

$$(4.26) + \overline{\omega}_{jj'}v_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'}v_{jj'} + \overline{\omega}_{j'j}v_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j}v_{j'j}.$$

Выражение $f \rho_{jj'} v_{jj'} + b_{jj'} v_{jj'}$ слева от знака равенства в (4.24) означает полные затраты в линию на участке j-j'. Первое слагаемое $f \rho_{jj'} v_{jj'}$ — расходы на ввод линии, второе слагаемое $b_{jj'} v_{jj'}$ — постоянные расходы (издержки) с учетом установившейся пропускной способности $v_{jj'}$. Справа от знака равенства в (4.24) стоят суммарные выплаты узла j' в линию. Первое слагаемое $\sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T^\sharp_s} \widetilde{\eta}_{jj'st} \widetilde{y}_{jj'st}$ — плата узла j' за годовой переток из узла j в

узел j' в пиковые сезоны и часы; второе слагаемое $\sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} y^{\mathrm{w}}_{jj'st}$ — плата

узла j' за годовой переток из узла j в узел j' в рабочие дни; третье слагаемое $\sum\limits_{s\in S}\sum\limits_{t\in T}\eta_{jj'st}^{\rm h}y_{jj'st}^{\rm h}$ — плата узла j' за годовой переток из узла j в узел j' в

выходные дни. Двойственные переменные $\widetilde{\eta}_{jj'st}$, $\eta^{\rm w}_{jj'st}$, $\eta^{\rm h}_{jj'st}$ — цены за мегаватт перетока из j в j' в сезон s час t соответственно в "пиковые" периоды, рабочие и выходные дни. Аналогично интерпретируются перетоки из узла j' в узел j в выражении (4.25). В итоге получаем, что суммарные выплаты узла j' (правая часть (4.24)) плюс суммарные выплаты узла j (три слагаемых в (4.25)) идут на покрытие расходов на ввод линии плюс постоянные издержки (левая часть от знака равенства в (4.24)) плюс излишки (или доход) линии (выражение (4.26), перенесенное влево от знака равенства).

Анализ эффективности мощностей. Умножим равенства (3.4)–(3.5) на z_{ij} и, учитывая (4.9), получим

$$(4.27) \qquad \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \lambda_{jst}^{\mathbf{w}} x_{jist}^{\mathbf{w}} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \lambda_{jst}^{\mathbf{h}} x_{jist}^{\mathbf{h}} + \sum_{s \in S^{\sharp}} \sum_{t \in T^{\sharp}} \nu_{jst} z_{ji} =$$

$$(4.28) \qquad = \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\mathsf{w}} c_{ji} x_{jist}^{\mathsf{w}} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_s^{\mathsf{h}} c_{ji} x_{jist}^{\mathsf{h}} +$$

$$(4.29) +f\gamma_{ji}(z_{ji}-z_{ji}^{0}) + \kappa_{ji}z_{ji} +$$

$$(4.30) + f\gamma_{ji}z_{ji}^0 + \overline{\sigma}_{ji}z_{ji} - \underline{\sigma}_{ji}z_{ji}.$$

Соотношения (4.27)–(4.30) выполняются для всех мощностей i в узлах j за исключением ГЭС и ГАЭС. Двойственные переменные: $\overline{\sigma}_{ji}$ — оценка значимости ограничений сверху в (2.6) на ввод мощности i в узле j (чем больше

эта величина, тем эффективнее ввод именно этой мощности); $\underline{\sigma}_{ji}$ — оценка ограничений на мощность снизу в (2.6) (чем больше эта величина, тем неэффективнее, убыточнее эта мощность).

Выражение (4.27) есть годовой доход, получаемый мощностью i в узле j: первое слагаемое — доход от генерации в рабочие дни, второе слагаемое — доход от предоставления услуги по резервированию. Выражение (4.28) — годовые топливные издержки мощности i в узле j, первое слагаемое в (4.29) — затраты на развитие мощности i в узле j в объеме z_{ji} , второе слагаемое в (4.29) — постоянные издержки на содержание мощности z_{ji} . Первое слагаемое в выражении (4.30) — затраты на введение данной мощности в объеме z_{ji}^0 . На первый взгляд это кажется странным, поскольку мощность эта уже существует и не требуется повторных затрат на ее введение. Объяснение этому эффекту можно дать следующее. Неравенство $z_{ji}^0 \leqslant z_{ji}$ в (2.6) модель интерпретирует как обязательное (т.е. не зависящее от эффективности) введение мощности z_{ji}^0 . Поэтому и возникают соответствующие обязательные затраты $f\gamma_{ji}z_{ji}^0$. Второе слагаемое в (4.30) — возможная прибыль. Третье слагаемое — возможный убыток.

Перейдем к более детальному анализу (4.27)–(4.30). Необходимо только помнить, что одновременно двойственные переменные $\overline{\sigma}_{ji}$ и $\underline{\sigma}_{ji}$ отличными от нуля быть не могут.

- 1. Если $\overline{\sigma}_{ji} > 0$, $\underline{\sigma}_{ji} = 0$, то $z_{ji} = \overline{z}_{ji}$, т.е. данная мощность вводится максимально. Более того, желательно, чтобы она вводилась еще больше. Владелец такой мощности получает "стимулирующую надбавку" в размере $\overline{\sigma}_{ji}$ за единицу мощности. В итоге владелец компенсирует годовые топливные затраты, затраты на развитие мощности, постоянные затраты на поддержание мощности и в дополнение имеет *стимулирующую* прибыль в размере $\overline{\sigma}_{ji}z_{ji}$. Величина $f\gamma_{ji}z_{ji}^0$ также может рассматриваться как *прибыль-восстановление* затрат на ранее введенную мощность.
- 2. Если $\overline{\sigma}_{ji} = 0$, $\underline{\sigma}_{ji} = 0$, то компенсируются все затраты, без стимулирующей прибыли, но с прибылью-восстановлением.
- 3. Если $\overline{\sigma}_{ji} = 0$, $\underline{\sigma}_{ji} > 0$, то $z_{ji} = z_{ji}^0$, т.е. ввод отсутствует. Более того, данная мощность неэффективна. За единицу мощности фирма несет убыток в размере $\underline{\sigma}_{ji}$. Годовой доход данной мощности идет на покрытие всех издержек минус убыток в размере $\underline{\sigma}_{ji}z_{ji}^0$ в случае $z_{ji}^0 > 0$. Именно в этом случае сказывается то, что модель воспринимает левую часть неравенства (2.6) как обязательный (в данном случае неэффективный, убыточный) ввод. Перепишем (4.27)–(4.30) в следующем виде:

$$\sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \lambda_{jst}^{\mathbf{w}} x_{jist}^{\mathbf{w}} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \lambda_{jst}^{\mathbf{h}} x_{jist}^{\mathbf{h}} =$$

$$= \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_{s}^{\mathbf{w}} c_{ji} x_{jist}^{\mathbf{w}} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \tau_{s}^{\mathbf{h}} c_{ji} x_{jist}^{\mathbf{h}} + \kappa_{ji} z_{ji}^{0} + f \gamma_{ji} z_{ji}^{0} - \underline{\sigma}_{ji} z_{ji}^{0}.$$

Убыток мощность терпит только в том случае, если $f\gamma_{ji}z_{ji}^0 - \underline{\sigma}_{ji}z_{ji}^0 < 0$. Если данная разность равна нулю, то доход в точности компенсирует затраты, а если эта разность положительна, то мощность даже получает прибыль.

Анализ эффективности сети производится аналогично анализу мощностной эффективности.

5. Заключение

Главным результатом проведенного анализа является равенство (4.1)—(4.6). На вход модели поступает спрос на электроэнергию в рабочие и выходные дни, и норматив на резерв. Полученные цены, с одной стороны, соответствуют минимуму суммарных затрат, с другой стороны, устанавливаются так, что суммарная плата, взимаемая с потребителей за электроэнергию, позволяет оптимальным образом ввести новые мощности и новые линии (или увеличить пропускные способности существующих). Двойственный анализ ясно показывает, как суммарная плата распределяется между издержками на генерацию, издержками на мощность и сетевыми издержками. При этом определяется, в каких узлах и какие мощности вводить и какие линии расширять, что играет центральную роль при анализе долгосрочного развития ЭЭС. Кроме того, определяется рента за использование водных ресурсов и выявляются неэффективные мощности, также как и неэффективные участки сети (возможно, подлежащие демонтажу).

Вместе с тем следует отметить, что полученные результаты являются предварительными и требуют дальнейшего уточнения, осмысления и приложения к конкретным задачам развития электроэнергетических систем и объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Беляев Л.С., Подковальников С.В., Савельев В.А., Чудинова Л.Ю. Эффективность межгосударственных электрических связей. Новосибирск: Наука, 2008.
- 2. Подковальников С.В., Савельев В.А., Хамисов О.В., Чудинова Л.Ю. Обоснование эффективности межгосударственных энергообъединений с разделением эффектов между участниками // АиТ. 2018. № 10. С. 26–38.
 - Podkoval'nikov S.V., Savel'ev V.A., Khamisov O.V. et al. Justification of Effectiveness of International Power Interconnections with Separation of Effects between Participants// Autom. Remote Control. 2018. V. 79. P. 1756–1766.
- 3. Подковальников С.В., Савельев В.А., Чудинова Л.Ю. Исследование системной энергоэкономической эффективности формирования межгосударственного энергообъединения Северо-Восточной Азии // Известия РАН. Энергетика. 2015. \mathbb{N} 5. С. 16–32.
- 4. Давидсон М.Р., Селезнев А.В. Математическая модель расчета ценовых индикаторов в задаче выбора состава генерирующего оборудования в условиях конкурентного рынка электроэнергии в России // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 61–70.

- 5. *Васьковская Т.А.* Вопросы формирования равновесных узловых цен оптового рынка электроэнергии // Электрические станции. 2017. № 1. С. 25–32.
- 6. Chen L., Suzuki H., Wachi T., Shimura Y. Components of Nodal Prices for Electric Power Systems // IEEE Transactions on Power Systems. 2002. V. 17. No. 1. P. 41–49.
- Bjørndal E., Bjørndal M., Cai H. Nodal Pricing in a Coupled Electricity Market // Bergen, Norway: Norwegian school of economics. 2014. https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/217640/1/DiscussionPaper.pdf
- 8. *Hirth L.* The European electricity market model EMMA. Model documentation. Version 2017-07-12. https://neon-energie.de/emma-documentation.pdf
- 9. Bowen B.H., Sparrow F.N., Yu Z. Modelling electricity trade policy rof the twelve nations of the Southen African Power Pool (SAPP) // Utilities Policy. 1999. V. 8. No. 3. P. 183–197.
- 10. Chang Y., Li Y. Power generation and cross-border grid planning for the integrated ASEAN electricity market: a dynamic linear programming model // Energy Strategy Reviews. 2013. V. 2. P. 153–160.
- 11. Otsuki T., Isa A.B.M., Samuelson R.D. Electric power grid interconnection in Northeasst Asia: a quantitative analysis of opprtunities and challenges // Energy Policy. 2016. V. 89. P. 311–329.
- 12. Schaber K., Steinke F., Hamcher Y. Transmission grid extensions for the integration of variable renewable energies in Europe: who benefits where? // Policy Energy. 2012. V. 43. P. 123–135.
- 13. Watcharejyothin M., Shrestha R.M. Effects of cross-border power trade between Laos and Thailand: energy security and environmental implications // Energy Policy. 2009. V. 37. P. 1782–1792.
- 14. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 10.07.2021

После доработки 23.12.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. А.В. АХМЕТЗЯНОВ, канд. техн. наук (awa@ipu.ru), A.В. САМОХИН, д-р техн. наук (samohinalexey@gmail.com) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕОТДАЧИ ПРИРОДНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ¹

В процессе разработки месторождений нефти применяются волновые периодические возмущения для увеличения дебита скважин и повышения конечной нефтеотдачи пластов. В неоднородной среде, при наличии диссипации и/или дисперсии, гармонические колебания, создаваемые в забоях скважин, превращаются в пилообразные волны с периодическими ударными фронтами. В статье описаны и исследованы одномерные и двумерные нелинейные математические модели таких процессов.

Ключевые слова: волновые воздействия, уравнения Кортвега-де Фриза-Бюргерса, цилиндрические волны, сферические волны, пилообразные волны, развитие паттернов.

DOI: 10.31857/S0005231022050051, **EDN:** ABKKSK

1. Введение

Пилообразные волны — периодические затухающие волны возмущения, профиль которых содержит слабые разрывы. В вязкой среде без дисперсии любое периодическое возмущение на больших расстояниях превращается в "пилу" с треугольными зубцами. Каждый период содержит слабый разрыв и почти прямолинейный участок профиля. При дальнейшем распространении изменяются лишь пиковые значения амплитуды возмущений. Профили пилообразных волн довольно устойчивы и мало изменяются при парном взаимодействии и при слабом воздействии дополнительных факторов — дифракции, дисперсии, низкочастотной модуляции и т.п. [1]. Такая устойчивость связана с сильным проявлением нелинейных свойств насыщенной углеводородами пористой среды.

Пилообразные волны аналогичны ударным волнам, но распространяются в средах с вязкостью. Стандартные ударные волны представляет собой пример сильного разрыва гидродинамических параметров, когда функции, их описывающие, претерпевают конечные разрывы. Слабый разрыв — это когда сами параметры непрерывны, а разрывы претерпевают те или иные пространственные производные (пилообразные волны являются слабо разрывными). Поверхности слабого разрыва распространяются относительно среды со скоростью, равной скорости звука, см. обзор [1].

 $^{^{1}}$ Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-20034).

Исследования и приложения теории нелинейных пилообразных волн связаны сейчас с распространением волн в неоднородных средах, см. обзор [2]. Соответствующие задачи можно условно разделить на две группы: задачи, связанные с проблемой формирования интенсивных воздействий (ударов), и обратные задачи нелинейного неразрушающего контроля и диагностики (восстановление параметров источника, рассеивателей или трассы распространения сигнала).

В настоящей статье описаны и частично исследованы пространственно одномерные и двумерные нелинейные математические модели таких процессов. Использование этих нелинейных свойств в управлении нефтедобычей приведет к увеличению доли извлекаемых запасов месторождений, поскольку создаваемые опускным источником колебаний внешние гармонические возмущения, преобразованные в диссипативной среде в пилообразные ударные волны, вызывают кавитацию в жидкой среде, и вторичные ударные волны, которые преодолевают капиллярные силы, удерживающие остаточные запасы нефти на поверхностях поровых каналов и трещин.

Скорость затухания сигнала, переносимая слабыми разрывами, зависят от свойств среды и параметров сигнала; они поддаются разрабатываемым эффективным численным оценкам, которые в настоящее время разрабатываются авторами статьи и будут предметом последующих публикаций.

2. Одномерные модели

Для описания пилообразных волн необходимо правильно определить положение и форму ударного фронта, а также величины возмущений при переходе через фронт ударной волны. С этой целью используются уравнения Бюргерса

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx}$$

и Кортвега-де Фриза-Бюргерса

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \lambda u_{xxx},$$

приводящие к принципиально верному описанию характерных эффектов в пространственно одномерной ситуации. Различие между этими уравнениями состоит в том, учитывается дисперсия среды или не учитывается (ε , λ – коэффициенты, постоянные для однородных сред и связанные с вязкостью/диссипацией и дисперсией среды, u – приведенная величина возмущения). Начально-граничная задача выглядит так:

$$u\left(x,0\right)=a,\quad u\left(0,t\right)=a+b\sin\left(kt\right),\quad u\left(L,t\right)=a,\quad u_{x}\left(L,t\right)=0,\quad L\gg0.$$

Волновая картина определяется отношением $\gamma=\varepsilon^2/\sqrt{\lambda}$. На рис. 1 изображена трансформация синусоиды в пилу при небольшой диссипации. С увеличением расстояния x, пройденного волной, мелкие детали исходного временного профиля постепенно исчезают на удалении от источника порядка нескольких характерных длин [3, 4]. На всех рисунках движение вправо.

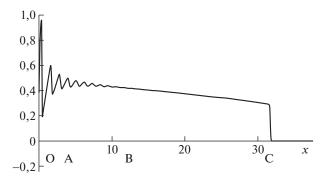


Рис. 1. Типичный вид графика решения Кортвега-де Фриза—Бюргерса. Участок [0,A] — пилообразная волна, [A,B] — квазигармонические затухающие колебания, [B,C] — монотонная часть, в точке C передний (головной) ударный фронт.

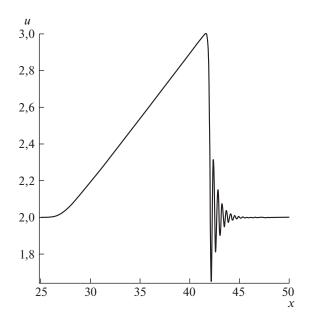


Рис. 2. Уравнение Кортвега-де Фриза–Бюргерса, трансформированный солитон, $\gamma=0,22.$

На рис. 2 показана трансформация одинокого импульса, солитона для $\gamma = 0; 22.$

Для полупрямой $x\in[0;\infty)$ и периодического возмущения в точке x=0 вида $u\left(0,t\right)=u_{0}+b\sin\left(\omega t\right)$ асимптотика соответствующих решений уравнения Бюргерса такова:

$$u = \frac{a}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\sinh(n(1+X)/(2R))}.$$

Здесь R — число Рейнольдса, $\theta = \omega \left(t - x/u_0 \right)$.

Благодаря значительному набору симметрий уравнение имеет значительный запас автомодельных решений (в том числе типа бегущих ударных волн, что следует из наличия галилеевой симметрии), а благодаря наличию линеаризующего преобразования Коула—Хопфа известны многие точные решения. По этой причине уравнение также использовалось для сравнения нескольких численных алгоритмов. В последние несколько лет численное решение системы многомерных уравнений Бюргерса привлекло большое внимание и привело к различным методам конечных разностей, конечно-элементных и граничных элементов.

2.1. Плоские, цилиндрические и сферические волны

Уравнение КдФ-Бюргерса для плоских волн имеет вид

$$(1) u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx}.$$

Его цилиндрические и сферические аналоги [5-7]:

(2)
$$u_t + \frac{1}{2t}u = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx}$$

И

(3)
$$u_t + \frac{1}{t}u = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx}$$

соответственно [5].

Отметим, что плоские волны — решения уравнения Бюргерса (1) — ранее подвергались детальному анализу, в то время как сферические и цилиндрические волны изучены пока недостаточно. В статье приводятся новые результаты, касающиеся этих решений.

Рассмотрим начально-краевую задачу:

(4)
$$u(x,0) = f(x)$$
, $u(a,t) = l(t)$, $u(b,t) = L(t)$, $u_x(b,t) = R(t)$, $x \in [a,b]$.

В случае $\delta=0$ (т.е. для уравнения Бюргерса) получается

(5)
$$u(x,0) = f(x), \quad u(a,t) = l(t), \quad u(b,t) = R(t), \quad x \in [a,b].$$

Случай граничных условий $u(a,t) = A\sin(\omega t), u(b,t) = 0$ и связанная с ним асимптотика представляют для авторов особый интерес. Для численного моделирования будем использовать $x \in [0,b]$ для достаточно больших b вместо \mathbb{R}^+ .

Для $t \gg 1$ уравнения (2) и (3) стремятся к (1); то же происходит с их решениями. Напомним, что явный вид решений типа бегущей волны для плоского

КдФ-Бюргерса (1) выглядит так:

(6)
$$u_{\text{tws}}(x,t) = \frac{3\varepsilon^4 \, \text{th}^2 \left(\frac{\varepsilon^2 (x - Vt - s)}{10\delta}\right)}{50\delta} - \frac{3\varepsilon^4 \, \text{th} \left(\frac{\varepsilon^2 (x - Vt - s)}{10\delta}\right)}{25\delta} + \frac{V}{2} - \frac{3\varepsilon^4}{50\delta}.$$

Потребуем, чтобы $u|_{x=+\infty}=0$; тогда бегущая волна должна иметь скорость $V=\frac{6\varepsilon^4}{25\Lambda}.$

Обратите внимание, что уравнения (1)–(3) можно записать в виде $w_t+\frac{n}{2t}w=\gamma w_{xx}-2ww_x+w_{xxx}$ заменой переменных $t\to t\sqrt{\delta},\ x\to x\sqrt{\delta},\ u\to -\frac{u}{2}$. Здесь $\gamma=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\delta}}$ и n=0,1/2,1 для плоских, цилиндрических и сферических волн соответственно.

В случае $\delta=0$ уравнение Бюргерса также имеет множество решений типа бегущей волны, исчезающей в точке $x\to +\infty$. Они даются формулой

(7)
$$u_{\text{Btws}}(x,t) = \frac{V}{2} \left[1 - \text{th} \left(\frac{V}{2\varepsilon^2} (x - Vt + s) \right) \right].$$

Далее показано, что в случае вышеуказанного начально-граничного условия возмущение состояния равновесия (2), (3) в конечном итоге становится очень похожим на форму этого скачка.

- Более высокая вязкость эффективно гасит колебания и может привести к отсутствию пилообразных эффектов.
- Большие частоты начальных возмущений затухают намного быстрее.
- Возмущение большей амплитуды приводит к увеличению скорости и амплитуды волны.
- После затухания начальных колебаний графики превращаются в монотонно падающие выпуклые линии, оканчивающиеся ударом.
- Цилиндрическое возмущение движется быстрее и медленнее затухает по сравнению со сферическим.

2.2. Симметриии, инвариантные решения

Поскольку цилиндрические и сферические уравнения явно зависят от времени, их запас симметрии невелик.

Алгебры классических симметрий порождаются векторными полями:

$$X = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Z = \sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$W = \ln(t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Симметрии и инвариантные решения

| Уравнения | Симметрии | Инвариантные решения |
|-------------------------|-----------|---|
| Cylindrical Burgers | X,Y,Z | $\frac{C}{\sqrt{(t)}}, \frac{(x+4C)}{4t}, x^{-1}f\left(\frac{t}{x^2}\right)$ |
| | | для некоторых f |
| Cylindrical KdV-Burgers | X, Z | $\frac{C}{\sqrt(t)}, \frac{(x+4C)}{4t}$ |
| Spherical Burgers | X, Y, W | $\frac{C}{t}, \frac{x+2C}{2t\ln(t)}, x^{-1}f\left(\frac{t}{x^2}\right)$ для некоторых f |
| Spherical KdV-Burgers | X, W | $\frac{C}{t}, \frac{x+2C}{2t\ln(t)}$ |

Найти инвариантные решения для симметрий X, Z и W несложно. Результаты собраны в таблице.

Для Y инвариантное решение должно иметь вид $x^{-1}f(\frac{t}{x^2})$, где $f(\xi)$ — решение нелинейного дифференциального уравнения

$$f'' + \frac{1}{\varepsilon^2 \xi} f f' + \left(\frac{5}{2\xi} - \frac{1}{4\xi^2 \varepsilon^2} \right) f' + \frac{1}{2\xi^2 \varepsilon^2} f^2 + \left(\frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{4\xi^3 \varepsilon^2} \right) f = 0,$$

решения которого пока не найдены.

2.3. Законы сохранения

Сначала перепишем уравнения (1)–(3) в подходящую форму законов сохранения:

(8)
$$[t^n \cdot u]_t = [t^n \cdot (-u^2 + \varepsilon^2 u_x + \delta u_{xx})]_x,$$

 $n=0,\ 1/2,\ 1$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно.

Следовательно, для решений приведенных выше уравнений имеем:

(9)
$$\oint_{\partial \mathcal{D}} t^n \cdot \left[u \, dx + \left(\varepsilon^2 u_x - u^2 + \delta u_{xx} \right) \, dt \right] = 0.$$

Выражение (5) преобразовывается до

(10)
$$\frac{1}{T} \int_{0}^{+\infty} u(x,T) dx = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \frac{1}{T^n} t^n \left(-\varepsilon^2 u_x(0,t) + u^2(0,t) - \delta u_{xx}(0,t) \right) dt.$$

Правая часть (10) — это среднее значение.

Возьмем u(0,t)=M. Далее приводятся графики решений для M=1.

Для получившейся волны сжатия $u_x(0,t)=0$ правая часть (10) равна

(11)
$$\frac{1}{T} \int_{0}^{T} \frac{M^2}{T^n} t^n dt = \frac{M^2}{n+1}.$$

Как видно на рис. 1, для периодического граничного условия после затухания начальных колебаний графики становятся монотонными выпуклыми линиями, которые начинаются приблизительно на высоте A/2 и заканчиваются при $x = V \cdot T$ и на высоте V. Эти монотонные линии очень похожи на графики решений с постоянным условием на границе.

2.4. Центральная аппроксимация

Глядя на форму графика решения, можно ясно увидеть, что монотонная часть и ее головной удар развиваются как гомотетическое преобразование исходной конфигурации. Итак, ищем решения вида u(x,t) = y(x/t). Подставляя его в уравнения (1)–(3), получаем уравнение

(12)
$$-y'\frac{x}{t^2} + \frac{ny}{t} = \frac{2yy'}{t} + \frac{\varepsilon^2 y''}{t^2} + \frac{\delta y'''}{t^3}$$

или

(13)
$$-\xi y' + ny = 2yy' + \frac{\varepsilon^2 y''}{t} + \frac{\delta y'''}{t^2}$$

для $y = y(\xi)$ и n = 0, 1/2, 1.

При достаточно большом t можно опустить два последних слагаемых. Отсюда следует, что подходящими решениями вышеуказанных обыкновенных дифференциальных уравнений являются:

$$u_1(x,t)=C_1,\quad C_1\in\mathbb{R},\quad n=0$$
 для плоских волн, $u_2(x,t)=-rac{2+\sqrt{C_2\xi+4}}{C_2},\quad C_2\in\mathbb{R},\quad n=rac{1}{2}$ для цилиндрических и $u_3(x,t)=\exp\left(\mathrm{LambertW}\left(-rac{\xi}{2}e^{-rac{C_3}{2}}
ight)+rac{C_3}{2}
ight),\quad C_3\in\mathbb{R},\quad n=1$

для сферических.

Пусть V — скорость распространения сигнала в среде. Поскольку для передней ударной волны x=Vt и u=V, имеем условие нахождения C_i . Это y(V)=V. Отсюда следует, что $C_1=V$, $C_2=-\frac{3}{V}$, $C_3=\ln(V)+\frac{1}{2}$. Для плоских волн это соответствует решению бегущей волны классического уравнения Бюргерса.

Для цилиндрических волн монотонная часть задается как

$$u_2 = \frac{1}{3} \left(2V + V\sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}} \right).$$

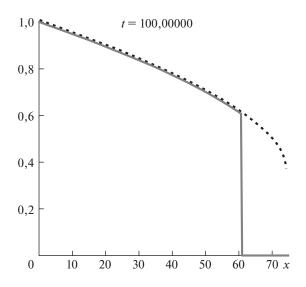


Рис. 3. Сплошная линия — решение (15), точки — его u_2 приближение.

Для сферических волн

(14)
$$u_3 = V\sqrt{e} \exp\left(\text{LambertW}\left(-\frac{x}{2Vt\sqrt{e}}\right)\right),$$
$$u_2|_{x=0} = \frac{4V}{3}, \quad u_3|_{x=0} = V\sqrt{e} \approx 1,65V.$$

Эти формулы показывают, что скорость пропорциональна амплитуде в начале колебаний и не зависит от частоты, которая вместе с амплитудой определяет колеблющуюся часть решений; подробнее об этом далее.

Соответствующие графики идеально совпадают с графиками, полученными путем численного моделирования; например, см. сравнение с решением в (t=100) для проблемы

(15)
$$u_t = 0.01u_{xx} - 2uu_x - u/t$$
, $u(0,t) = 1$, $u(75,t) = 0$, $u(x,0) = 0$

на графике рис. 3.

Однако монотонная гладкая часть периодического граничного решения заканчивается скачком, который движется с постоянной скоростью и амплитудой, подобно передней части бегущей волны Бюргерса на рис. 1.

Довольно естественная идея — усечь гомотетическое решение, умножив его на (нормализованную) бегущую волну Бюргерса, (7). А именно положить:

• для цилиндрических волн

(16)
$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{th} \left(\frac{V}{\varepsilon^2} (x - Vt) \right) \right] \cdot \frac{1}{3} \left(2V + V \sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}} \right);$$

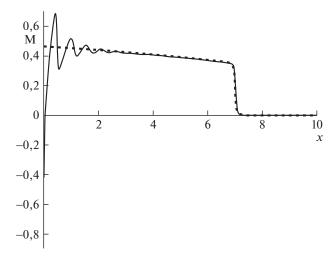


Рис. 4. Сплошная линия — решение (18), точки — его \tilde{u}_2 приближение, t=20.

• для сферических

(17)
$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{2} \left[1 - \text{th} \left(\frac{V}{\varepsilon^2} (x - Vt) \right) \right] \cdot V \sqrt{e} \exp \left(\text{LambertW} \left(-\frac{x}{2Vt\sqrt{e}} \right) \right).$$

Эта конструкция дает приближение с поразительной точностью, см. рис. 4, который соответствует цилиндрической задаче Бюргерса.

(18)
$$\varepsilon = 0,1, \quad u(0,t) = \sin 10t, \quad u(10,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$$

Более того, очевидно, что графики \tilde{u}_2 , \tilde{u}_3 аккуратно представляют медианные линии приближенных решений на всем их диапазоне. Напомним, что эти медианы можно вычислить независимо с помощью правой части (10).

Теперь оценим площадь трапеций под графиками $\tilde{u}_2, \, \tilde{u}_3$:

• для цилиндрического уравнения

$$\int_{0}^{Vt} \left[\frac{\left[1 - \operatorname{th}\left(\frac{V}{\varepsilon^{2}}(x - Vt)\right) \right]}{2} \frac{1}{3} \left(2V + V\sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}} \right) \right] dx = \frac{32}{27} V^{2} t;$$

• для сферического

(19)
$$\int_{0}^{Vt} \left[\frac{\left[1 - \operatorname{th} \left(\frac{V}{\varepsilon^{2}} (x - Vt) \right) \right]}{2} V \sqrt{e} \exp \left(\operatorname{LambertW} \left(\frac{-x}{2Vt \sqrt{e}} \right) \right) \right] dx = \frac{V^{2}t \cdot e}{2}.$$

Следовательно, среднее значение левой части (10) можно оценить следующим образом. Поскольку сигнал от x=0 после затухания колебаний распространяется вправо с постоянной скоростью V и с той же постоянной амплитудой V на ударе и очень хорошо аппроксимируется подходящим гомотетическим решением, получим

(20)
$$\frac{1}{T} \int_{0}^{+\infty} u(x,T) dx = \frac{1}{T} \int_{0}^{VT} u(x,T) dx \approx \begin{cases} \frac{32}{27} V^2 & \text{цилиндр}; \\ \frac{V^2 \cdot e}{2} & \text{сфера.} \end{cases}$$

Это среднее значение можно также оценить численно. В случае, показанном на рис. 1, непосредственная численная оценка отличается от оценки (20) на 1%. Таким образом, полученная центральная аппроксимация действительно является надежной и эффективной.

3. Пространственно двумерные модели

Приведенные выше уравнения Бюргерса и Кортвега-де Фриза–Бюргерса соответствуют простейшей модели с одной пространственной переменной. Они позволяют оценить принципиальные эффекты, но для адекватного описания волн в плоских слоях, характерных для нефтегазовых месторождений, следует использовать двумерные уравнения.

Когда вследствие сильной неоднородности параметров среды отсутствует сферическая или цилиндрическая симметрия распространения волн, ситуация становится намного сложнее. Далее дано краткое описание двух возможных подходов.

3.1. Двумерное уравнение Бюргерса

Двумерное уравнение Бюргерса представляет собой особую форму несжимаемого уравнения Навье—Стокса, не включающее давления и уравнения неразрывности. Оно является распространенным уравнением в частных производных гидродинамики и часто используется для различных физических приложений, таких как моделирование газовой динамики и ударных волн, исследование малых волн на воде, при рассмотрении модели химических реакций — диффузии и т.д.

Двумерное уравнение Бюргерса — стандартное обобщение (1) — имеет вид

(21)
$$u_{t} = -uu_{x} - vu_{y} + \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$v_{t} = -uv_{x} - vv_{y} + \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{yy}).$$

Здесь неизвестные функции u, v являются компонентами вектора скорости распространения волны и зависят от x, y, t; R — число Рейнольдса.

Начально-граничная задача на области D формулируется так:

$$u|_{\partial D} = f(x, y, t)|_{\partial D}, \quad v|_{\partial D} = g(x, y, t)|_{\partial D},$$

где f и g — известные функции. Конкретно, для задачи, моделирующей опускной вибратор, область представляет собой кольцо, а границей является пара концентрических окружностей; на меньшей окружности задается гармоническое колебание, а на внешней окружности (как и внутри) — изначально нулевые значения.

Эта модель ближе к реальным задачам, однако не учитывает вероятных неоднородностей пластов, которые превращают постоянные коэффициенты уравнений в функции пространственных переменных (или даже в динамически изменяющиеся функции). Принципиальные эффекты, возникающие в неоднородной среде, изучались в [3, 4].

Для описания распространения нелинейных волн в неоднородных относительно тонких газо/нефтеносных слоях в 7–9 используется уравнение Хохлова—Заболотской.

(22)
$$U_t(U_x - UU_t) = \frac{N}{4} \left(U_{yy} - \frac{1}{y} U_y \right).$$

Здесь x — координата вдоль пучка, y — поперечная координата в слое и $N \in [15,17]$ — отношение нелинейной и диффракционных длин.

Для (22) ранее получены решения стационарных волн в неодномерном случае, которые, сформировавшись на каком-то расстоянии от источника, далее при распространении пучка не меняют своей характерной формы. В одномерном случае такая асимптотическая универсальность была уже отмечена для пилообразных плоских волн. Однако в отличие от слабо-разрывных пилообразных волн, для уравнения (22) существуют гладкие решения в случае взаимной компенсации дифракционной расходимости и нелинейной рефракции. Эти точные решения, описывающие характерные профили волны в пучке, могут служить основой для практической реализации явления самофокусировки.

Самофокусировка проявляется в том, что пучок под ее воздействием обладает малой пространственной расходимостью вдоль оси y, что позволяет на значительных расстояниях сохранять высокую, близкую к изначальной фокусировку энергии. Этот эффект важен для управляемого воздействия в процессе нефтедобычи.

Начально-краевая задача для уравнения Хохлова–Заболоцкой соответствует физическому требованию

$$p|_{x=0} = F(r)G(t),$$

где p — давление на поверхности x=0, излучающей волну, на которой задается начальная амплитуда F колебаний, происходящих во времени по закону G(t), т.е. для создания сфокусированного пучка исходный фронт полагается плоским или слабо искривленным (сферическим). При этом краевое условие ставится на границе при x=0 для кругового в поперечном сечении пучка и обычно имеет вид

$$F(r) = -A \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad G(t) = \sin(\omega t),$$

при этом U = p/A.

4. Возможности применения в нефтедобыче

В процессе традиционных способов добычи нефти (вытеснения нефти водой, закачиваемой через нагнетательные скважины) часть углеводородов удерживается в поровом пространстве пласта капиллярными силами и силами адгезии, поскольку в зависимости от типа смачиваемости породы нефть может образовать тонкую пленку, удерживаемую на стенках пор. Кроме того, в насыщенной пористой среде возможно образование мелкодисперсных капель углеводородов, занимающих поровое пространство и блокирующих фильтрационное течение.

Эти эффекты приводят к существенному снижению проницаемости коллектора и величины конечной нефтеотдачи пластов природных залежей. В настоящее время основным методом повышения нефтеотдачи пластов является закачка вытесняющих реагентов (воды или водных растворов активных примесей и других физико-химических воздействий) с применением гармонических волновых технологий при значительных величинах сил адгезии, капиллярных и других сил, возникающих в насыщенных пористых средах. Внешние гармонические возмущения преобразуются в насыщенной флюидами диссипативной пористой среде в пилообразные ударные волны. Они вызывают в среде акустическую кавитацию и вторичные ударные волны создают в свою очередь благоприятные условия для преодоления сил адгезии, капиллярных и других сил, удерживающих остатки нефти на поверхностях пор и трещин [10].

В результате применения волновых технологий в сочетании с физико-химическими и другими воздействиями может быть достигнуто увеличение конечной нефтеотдачи до 15% даже на уже истощенных месторождениях за счет извлечения остаточных запасов нефти. Это эквивалентно открытию новых крупных месторождений. При этом требуемые затраты на достижение эквивалентного объема дополнительной добычи нефти будут минимальны, поскольку на старых месторождениях основная инфраструктура уже существует и не нужно бурить и осваивать скважины, сооружать нефтегазосборные сети, дороги и другие необходимые промышленные объекты.

5. Актуальные проблемы, теоретические и вычислительные

Процесс распространения ударных пилообразных волн в жидкостях имеет ряд особенностей: при высоких температурах, плотностях и больших градиентах различных параметров происходят сильные межмолекулярные взаимодействия, возможны разрывы химических связей, фазовые превращения и т.п. В частности, это касается воды, параметры которой имеют сложные зависимости от температуры и давления. Создано много структурных моделей воды, однако не существует единой теории, которая объяснила бы все разнообразие физических свойств, образования и распространения ударных волн в воде.

Для расчета параметров на фронте ударной пилообразной волны необходимо пользоваться зависимостью между давлением и плотностью в ударном фронте. В отличие от газов для конденсированных сред, включая жидкость, получить уравнения состояния нелегко. Поэтому их определяют экспериментально и пользуются эмпирическими формулами, см. [1].

Отметим, что рисунки соответствуют процессам в однородной среде, для которой получены аналитические оценки величин скачков в разрывах. В стратифицированных средах, характерных для месторождений, модели значительно усложняются, и, по-видимому, потребуется создание эффективной и скоростной компьютерной модели.

Проблема численного решения таких уравнений состоит в том, чтобы достичь достаточной точности одновременно в разрывных областях (для ударных волн) и на относительно гладких участках. Для этого необходимо устранить дефекты классических схем, иногда приводящие к паразитным осцилляциям вблизи разрывов (отметим, впрочем, что для моделей с дисперсией похожие осцилляции имеют внутренние причины!), и нелинейным неустойчивостям на гладких участках, порождаемым значительными градиентами.

Для устранения перечисленных трудностей необходимо применять схемы, для которых: порядок точности для гладкой части не ниже второго; при этом расчет разрывов происходит без порождения фиктивных осцилляций и без введения искусственной вязкости при отсутствии дисперсии. Так, обнадеживающие результаты получены в публикации [8], где применялась конечно-разностная схема Кранка—Николсона для решения двумерных нелинейных уравнений Бюргерса и представлены расчеты двух численных примеров для иллюстрации эффективности метода.

6. Заключение

В данной статье, в отличие от [11], проведены исследования одномерных и двумерных нелинейных математических моделей процессов распространения волн в насыщенной флюидами диссипативной пористой среде. В частности, найдены явные эффективные асимптотические формулы для цилиндрических и сферических волн в моделях Кортвега-де Фриза-Бюргерса. Основные результаты касаются скорости затухания сигнала, длины пилообразного

участка и энергии, переносимой слабыми разрывами. Эти параметры поддаются разрабатываемым эффективным численным оценкам и зависят от свойств насыщенной флюидами пористой среды резервуаров нефтяных месторождений.

Широкое применение волновых технологий в нефтяной промышленности началось в 80-х гг. XX в. в Центре нелинейной волновой механики и технологий [12] Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (под руководством акад. РАН Р.Ф. Ганиева). В частности, проводились обработки пласта в призабойных зонах скважин волновыми генераторами, с целью очистки призабойной зоны от кольматационных загрязнений пор. В процессе очистки призабойных зон скважин наблюдалось увеличение дебитов не только в скважине, подвергнутой обработке, но и в окружающих ее скважинах наблюдались повышение содержания нефти и снижение обводненности. При этом неоднократно наблюдалось увеличение дебитов не только в скважине, которая подвергалась обработке, но и в окружающих ее скважинах. В этих удаленных скважинах наблюдались также повышение содержания нефти и снижение обводненности. Таким образом, была показана возможность охвата волновым воздействием систем, связанных гидродинамическим влиянием скважин.

Повышение нефтеотдачи было зафиксировано при обработке месторождений волнами, возбуждаемыми в процессе очистки призабойных зон скважин; наблюдалось увеличение дебитов не только в скважине. Повышение нефтеотдачи было зафиксировано и при обработке месторождений волнами, возбуждаемыми с применением гидроударов.

Приведенные результаты свидетельствуют, что волновые воздействия на пласт способны создать в поровом пространстве силы, значительно превышающие силы, существующие при стационарной фильтрации, что создает предпосылки для вовлечения в фильтрационный процесс вытеснения удерживаемой в застойных пластах нефти и повышения конечной нефтеотдачи пластов. В настоящее время исследование механизмов воздействия волн на смеси флюидов (нефти, воды и др.), удерживаемых в поровом пространстве, находится в начальной стадии. По существу, научные основы этого важного направления еще не созданы. Более того, недостаточно изучены волноводные свойства пластов, обусловленные их природными неоднородностями: вертикальной слоистостью и горизонтальной зональной неоднородностью, а также наличием трещин и разломов.

В дальнейших исследованиях планируется применить теорию пилообразных ударных волн к следующим задачам/целям:

- повышению конечной нефтеотдачи при разработке неоднородных (трещиноватых и трещиновато-пористых) резервуаров месторождений углеводородов с учетом условий взаимодействия между породой и фильтрующимися флюидами;
- 2) сейсмическим исследованиям для выявления застойных зон, не охваченных процессами фильтрации;

вытеснению остаточных запасов нефти и других углеводородов (не извлекаемых традиционными методами заводнения) с применением различных комбинаций физико-химических, тепловых и волновых управляющих воздействий.

Рисунки в статье созданы при помощи пакета PDETools программы Maple.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Шарфарец Б.П.* О динамике ударных волн в жидкости // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 43–55.
- Руденко О.В. Нелинейная пилообразные волны // УМН. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
- 3. Samokhin A.V. Soliton Transmutations in KdV—Burgers Layered Media // J. Geometry and Physics. 148. Elsevier Publ. 2020.
- 4. Samokhin A.V. Nonlinear Waves in Layered Media: Solutions of the KdV—Burgers Equation // J. Geometry and Physics. 2018. V. 130. P. 33–39.
- 5. Blacktock D.T. On Plane, Cylindrical and Spherical Sound Waves of Finite Amplitude in Lossless Fluids // Techn. Rep. AF. 1965. V. 49 (638). General Dynamics. Rochester. N.Y.
- 6. Church C.C., Crum L.A. Physical Processes for Single Bubble Sonoluminescence // Proc. of 13 Int. Congress of Acoust. 1985. V. 4. Belgrade. P. 205.
- 7. Musanov A.G., Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A. Advances of Nonlinear Acoustics. Singapore: World Scientific, 1993. P. 321.
- 8. Srivastava V.K., Tamsir M, Bhardwaj U., Sanyasiraju Y.V.S.S. Crank-Nicolson Scheme for Numerical Solutions of Two-dimensional Coupled Burgers' Equations // Int. J. of Scientific & Engineering Research. 2011. V. 2. No. 5. P. 1–7.
- 9. *Шарфарец Б.П.* О волноводном распространении звуковых пучков в нелинейной среде. Обзор. // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 3. С. 95–107.
- 10. Сиротнок М.Г. Акустическая кавитация. М.: Наука, 2008.
- 11. Γ аниев $P.\Phi$., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технология. М.: R&C Dynamics, 2011.
- 12. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Резонансная макро- и микромеханика нефтяного пласта. Интенсификация добычи нефти и повышение самоотдачи. Наука и практика. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 14.07.2021

После доработки 19.09.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. В.В. ЦУРКО, канд. техн. наук (v.tsurko@gmail.com), А.И. МИХАЛЬСКИЙ, д-р биол. наук, канд. техн. наук (ipuran@yandex.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ЧЕРЕЗ ВЗАИМНУЮ ИНФОРМАЦИЮ

Рассматривается использование непараметрической оценки взаимной информации для выяснения связи между случайными величинами. Показано, что при наличии нелинейной связи между случайными величинами коэффициент корреляции может давать неверный результат. Предложен метод построения оценки взаимной информации по эмпирическим данным в абстрактном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром. С использованием обобщенной теоремы о представителе предложен метод непараметрической оценки взаимной информации. Работоспособность метода продемонстрирована на примерах анализа искусственных данных. Описано применение метода при прогнозировании устойчивости пентапептидов.

Ключевые слова: коэффициент корреляции, непараметрическая оценка взаимной информации, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, прогнозирование устойчивости пентапептидов.

DOI: 10.31857/S0005231022050063, **EDN:** ABOPYY

1. Введение

Оценка взаимосвязи случайных величин является одной из центральных задач анализа данных. Наличие статистической зависимости между факторами приводит к плохой обусловленности матрицы плана при построении регрессионных зависимостей [1] и к получению статистически ненадежных оценок влияния этих факторов. При этом часто делается неверный вывод о характере существующей зависимости. Особенно часто такой эффект возникает при анализе медико-биологических данных [2].

Широко используемая мера связи случайных величин — коэффициент корреляции, который эффективен при линейной зависимости. В случае наличия нелинейной зависимости коэффициент корреляции дает неверное значение и даже может свидетельствовать об отсутствии зависимости.

Пример дает пара случайных величин X и Y, связанных через третью случайную величину U, имеющую равномерное распределение на отрезке $[0,2\pi]$. Положив $X=\sin(U)$ и $Y=\cos(U)$, получим случайные величины, связанные соотношением $X^2+Y^2=1$. Между тем коэффициент корреляции между X

и Y равен нулю:

$$cor(X,Y) = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \sin(u)\cos(u) du = \frac{1}{4} \int_{0}^{2\pi} \sin(2u) du = 0.$$

Другой характеристикой зависимости случайных величин является величина взаимной информации, которую можно интерпретировать как среднее количество информации относительно случайной величины X, содержащейся в случайной величине Y [3, 4]. В [5, 6] рассматриваются вопросы оценивания величины взаимной информации на основании эмпирических данных, обсуждаются трудности и ограничения, возникающие при этом. Использование точных формул для вычисления взаимной информации требует знания совместного распределения случайных величин, оценка которого по эмпирическим данным даже в случае нормального закона распределения требует использования большого числа данных. Та же проблема существует и при попытке оценить по данным непосредственно совместное распределение и применить точные формулы для полученной оценки. В [6] оценка распределения рассматривается как вспомогательная, промежуточная задача и предлагается метод оценки непосредственно взаимной информации.

Отказ от вычисления взаимной информации через оценку совместного распределения рассматривается в [4]. При этом задача ставится как задача минимизации квадратичного функционала, косвенно связанного с взаимной информацией, в многомерном линейном пространстве. Решение этой задачи находится через решение регуляризованной системы линейных алгебраических уравнений.

Предлагаемый в настоящей работе метод оценки взаимной информации также не использует оценку взаимного распределения. Квадратичный функционал, используемый вместо этого, минимизируется в бесконечномерном функциональном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром. Показано, что решение такой задачи представимо в виде разложения по значениям воспроизводящего ядра в экспериментальных точках. Коэффициенты разложения находятся из регуляризованной системы линейных алгебраических уравнений.

2. Оценка взаимной информации через решение интегрального уравнения

Формально взаимная информация между случайными величинами X и Y, имеющими совместное распределение P(x,y), определяется соотношением

$$I(X,Y) = \int \ln \frac{dP(x,y)}{dP(x) dP(y)} dP(x,y).$$

Если распределение случайных величин имеет плотность p(x,y), то взаимная информация представима в виде

$$I(X,Y) = \int p(x,y) \ln \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} dxdy.$$

Из определения следует, что для независимых случайных величин взаимная информация равна нулю.

Простой метод оценки взаимной информации состоит в замене интегрирования усреднением по выборочным значениям

$$\hat{I}(X,Y) = \frac{1}{km} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \ln \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)},$$

где $p(x_i), p(y_j)$ и $p(x_i, y_j)$ – оценки плотностей по экспериментальным данным.

Недостатком прямой замены интегрирования суммированием является требование большого числа экспериментальных данных для получения точных оценок плотностей. Другой подход к оценке взаимной информации без необходимости решения промежуточной задачи — оценки плотностей, предложенный в [6] для случая бинарной классификации. Пусть Y — признак класса, случайная величина, принимающая значения 0 или 1, X — случайный вектор признаков. Выражение для взаимной информации в этом случае записывается в виде

$$I\left(X,Y\right) = \sum_{t=\left\{0,1\right\}} \int p\left(x,y=t\right) \ln \frac{p\left(x,y=t\right)}{p\left(x\right)p\left(y=t\right)} dx.$$

Пусть $x_1^y,\dots,x_{l_y}^y$ – выборка из класса $y,\,l_y$ – число элементов, принадлежащих классу с меткой y. Запишем эмпирическую оценку взаимной информации в виде

$$I_{e}\left(X,Y\right) = \frac{1}{l_{0} + l_{1}} \sum_{t = \{0,1\}} p\left(y = t\right) \left(\sum_{i=1}^{l_{0}} r_{t}\left(x_{i}^{0}\right) \ln r_{t}\left(x_{i}^{0}\right) + \sum_{i=1}^{l_{1}} r_{t}\left(x_{i}^{1}\right) \ln r_{t}\left(x_{i}^{1}\right)\right),$$

где $r_t\left(x\right)=p(x,y=t)/p\left(x\right)$ – отношение плотностей. Связь между отношением плотностей и распределением X задается интегральным соотношением

$$F_{t}(x) = \int I\{x \geqslant u\} r_{t}(u) dF(u),$$

где $F_t(x)$ – функция распределения X в классе с меткой t, F(x) – маргинальная функция распределения X. Данное уравнение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $r_t(x)$. Эмпирическим аналогом интегрального уравнения является плохо обусловленная система линейных уравнений

$$\frac{1}{l_{t}} \sum_{i=1}^{l_{t}} \mathbf{I} \left\{ x \geqslant x_{i}^{t} \right\} = \frac{1}{l_{0} + l_{1}} \left(\sum_{i=1}^{l_{0}} \mathbf{I} \left\{ x \geqslant x_{i}^{0} \right\} r_{t} \left(x_{i}^{0} \right) + \sum_{i=1}^{l_{1}} \mathbf{I} \left\{ x \geqslant x_{i}^{1} \right\} r_{t} \left(x_{i}^{1} \right) \right),$$

для решения которой в [6] предложен метод регуляризации, использующий специальную V-матрицу, сохраняющую геометрические свойства выборки. При этом, как отмечалось, нет необходимости оценивать плотности распределении вероятностей p(x), p(x,y) и вероятность p(y).

3. Оценка взаимной информации через минимизацию квадратичного функционала

3.1. Memod LSMI

Другая оценка взаимной информации, не требующая предварительной оценки плотностей распределения, предложена в [4]. Отношение плотностей распределения двух случайных величин X и Y

$$w(x,y) = p(x,y)/p(x)/p(y)$$

ищется в виде разложения $\hat{w}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{i}\varphi_{i}\left(x,y\right)$ по базисным функциям $\varphi_{i}\left(x,y\right)$.

Коэффициенты разложения ищутся путем минимизации функционала

$$J(\hat{w}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} (\hat{w}(x_i, y_j) - 1)^2,$$

где n — число элементов в эмпирической выборке $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, число членов разложения m является параметром алгоритма. В качестве базисных функций в [4] предлагается использовать гауссианы, за центры которых принимается набор экспериментальных точек. Коэффициенты разложения определяются путем решения регуляризованной системы линейных уравнений. Метод получил название Least-Squares Mutual Information (LSMI). Оценка величины взаимной информации вычисляется как среднее значение оценки $\hat{w}(x,y)$ по эмпирическим данным

$$\hat{I}(X,Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \hat{w}(x_i, y_i).$$

3.2. Оценка взаимной информации в RKHS

В настоящей работе рассматривается оценка взаимной информации, получающаяся путем минимизации в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром (RKHS) [7] регуляризованного квадратичного функционала

$$J_{\lambda}(\hat{w}) = \frac{1}{2} \iint (w(x,y) - \hat{w}(x,y))^{2} p(x) p(y) dxdy + \frac{\lambda}{2} ||\hat{w}||_{L}^{2},$$

где $\|.\|_L$ обозначает норму в гильбертовом пространстве L с воспроизводящим ядром, λ — неотрицательный параметр регуляризации.

Построение оценок случайных процессов в RKHS рассматривалось в [6–8]. Привлекательность гильбертова пространства с воспроизводящим ядром состоит в том, что результат минимизации эмпирического функционала в бесконечномерном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром находится в конечномерном функциональном пространстве, базисные функции в

котором задаются воспроизводящим ядром гильбертова пространства. В этом заключается суть обобщенной теоремы о представителе [9].

Наиболее нагляден результат использования RKHS в задаче непараметрической оценки регрессионной зависимости по выборке экспериментальных значений $\{x_1, y_1, \dots x_n, y_n\}$ путем минимизации эмпирического функционала

$$I_{\lambda}(f) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 + \lambda ||f||_L$$

в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром K(x,t). В силу обобщенной теоремы о представителе минимум функционала $I_{\lambda}(f)$ достигается на функции вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(x, x_i).$$

Коэффициенты разложения a_i являются решением регуляризованной нормальной системы метода наименьших квадратов.

Выбор ядра K(x,t) осуществляется исходя из требуемых свойств решения. Так, если априори известно, что искомая зависимость принадлежит пространству одномерных функций, имеющих ограниченный спектр, то эмпирический функционал надо искать в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром вида [10]

$$K(x,t) = \frac{\sin(a(x-t))}{\pi(x-t)},$$

где a — граница спектра. Если же искомая зависимость принадлежит пространству одномерных функций, определенных на отрезке [0,1] и имеющих непрерывную вторую производную, то квадратичный эмпирический функционал надо минимизировать в пространстве кубических полиномиальных сплайнов, которое является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром вида [6]

$$K(x,t) = \int_{0}^{1} (t-\tau)_{+} (x-\tau)_{+} d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2} tx^{2} - \frac{1}{6}x^{3}, & x \leq t \\ \frac{1}{2} xt^{2} - \frac{1}{6}t^{3}, & t \leq x. \end{cases}$$

Чтобы применить обобщенную теорему о представителе для минимизации эмпирической оценки функционала $J_{\lambda}\left(\hat{w}\right)$, перепишем его в виде

$$J_{\lambda}(\hat{w}) = \frac{1}{2} \iint \hat{w}^{2}(x,y) p(x) p(y) dx dy - \iint \hat{w}(x,y) p(x,y) dx dy + \frac{\lambda}{2} \|\hat{w}\|_{L}^{2} + \frac{1}{2} \iint w^{2}(x,y) p(x) p(y) dx dy.$$

Последнее слагаемое не зависит от $\hat{w}(x,y)$, обозначим его через C. Подставляя вместо пар (x,y) эмпирические значения (x_i,y_i) , $i=1,\ldots,n$, запишем эмпирическую оценку функционала:

$$J_{\lambda}^{e}\left(\hat{w}\right) = \frac{1}{2n^{2}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{w}^{2}\left(x_{i}, y_{j}\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{w}\left(x_{i}, y_{i}\right) + \frac{\lambda}{2} \left\|\hat{w}\right\|_{L}^{2} + C.$$

Минимизация $J^e_{\lambda}(\hat{w})$ в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром K(z,t) приводит к оценке вида

$$\hat{w}(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(z, t_i),$$

здесь $z = (x, y), t_i(x_i, y_i)$, коэффициенты a_i ищутся из условия минимизации функционала $J_{\lambda}^e(\hat{w})$ путем решения регуляризованной системы линейных алгебраических уравнений [11]

$$(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{K}) a = h,$$

где элементы матрицы К вычисляются по формуле

$$K_{ij} = K(x_i, y_i, x_j, y_j),$$

элементы матрицы Н вычисляются по формуле

$$H_{lm} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(x_i, y_j, x_l, y_l) K(x_i, y_j, x_m, y_m),$$

h – вектор с элементами $h_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K(x_i, y_i, x_j, y_j).$

Для оценки взаимной информации на практике популярным является гаусовское ядро вида $K(z,t) = \exp\left(-\sigma^{-2} \|z-t\|^2\right)$. Величины λ и σ являются параметрами метода и выбираются методом кросс-валидации [11].

4. Исследование точности оценки взаимной информации с использованием искусственных данных

Для демонстрации эффективности оценки статистической зависимости через оценку взаимной информации были проведены два статистических эксперимента по сравнению оценки величины взаимной информации с оценкой коэффициента корреляции для пары независимых случайных величин и пары зависимых случайных величин.

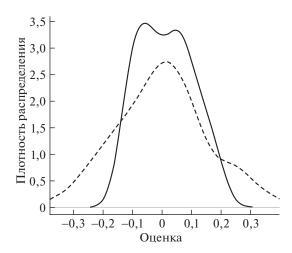


Рис. 1. Плотность распределения оценки взаимной информации двух независимых случайных величин, нормированной на минимальную энтропию (сплошная линия), и оценки по тем же данным коэффициента корреляции (пунктир) при 50 независимых испытаниях.

4.1. Случай независимых случайных величин

Генерировалась независимая выборка из 50 пар независимых нормально распределенных случайных величин X,Y с нулевым средним и единичной дисперсией. По выборке вычислялись оценка коэффициента корреляции и оценка величины взаимной информации. Для нормировки оценка величины взаимной информации делилась на минимальную из оценок для энтропии X и для энтропии Y. Такие выборки независимо генерировались 50 раз. Было получено 50 оценок для коэффициента корреляции и для взаимной информации. Сглаженные распределения оценок представлены на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что оценка взаимной информации в среднем ближе к нулю, чем оценка величины коэффициента корреляции.

4.2. Случай зависимых случайных величин

Воспроизводилась описанная выше схема эксперимента с той разницей, что случайные величины X и Y формировались по правилу $X=\sin(U),\,Y=\cos(U),\,U$ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0,2\pi].$ Пример реализаций значений X и Y в 50 независимых испытаниях приведен на рис. 2.

Выборки, состоящие из 50 независимо сгенерированных пар X и Y, независимо генерировались 50 раз. Было получено 50 оценок для коэффициента корреляции и для взаимной информации. Сглаженные распределения оценок представлены на рис. 3. Из рис. 3 видно, что оценка взаимной информации существенно отлична от нуля, в то время как оценка величины коэффициента корреляции сосредоточена возле нуля.

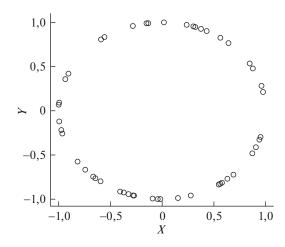


Рис. 2. 50 реализаций значений двух зависимых случайных величин.

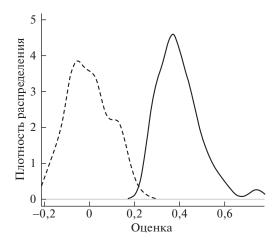


Рис. 3. Плотность распределения оценки взаимной информации двух зависимых случайных величин, нормированной на минимальную энтропию (сплошная линия), и оценки по тем же данным коэффициента корреляции (пунктир) при 50 независимых испытаниях.

В таблице приведены результаты вычисления средних значений и среднеквадратичных уклонений для взаимной информации, нормированной на минимальную энтропию, и трех коэффициентов корреляции Пирсона, Спирмена и Кендалла.

Оценки средних значений и среднеквадратичных уклонений для взаимной информации, коэффициентов корреляции Пирсона, Спирмена, Кендалла

| | Взаимная информация | Коэффициент | Коэффициент | Коэффициент |
|--------------------|------------------------|-------------|-------------|-------------|
| | | корреляции | корреляции | корреляции |
| | | Пирсона | Спирмена | Кендалла |
| Среднее значение | 0,40 | -0,0014 | -0,0026 | -0,00069 |
| Среднеквадратичное | 0,10 | 0,094 | 0,076 | 0,024 |
| уклонение | | | | |

5. Применение оценки взаимной информации при оценке стабильности пентапептидов

Описанный в статье метод применялся при решении практической задачи фундаментальной биологии для отбора признаков при прогнозе стабильности конформации коротких белков, состоящих из пяти аминокислот — пентапептидов [11]. Интерес к этой задаче возник после появления публикации [12], в которой исследовалась энтропия белковых последовательностей и было показано, что пентапептиды соответствуют оптимальному размеру структурных блоков, из которых состоят молекулы белков. При увеличении размера структурного блока наблюдался рост информационной энтропии. В [13] методами молекулярной динамики расчетным путем были найдены конформационно-устойчивые пентапептиды и сделано предположение, что такие пептиды играют важную роль в формировании белками нативной пространственной структуры. Такие структурно-устойчивые пептиды могут служить основой формирования элементов вторичной структуры белков и, таким образом, обеспечивать правильную конформацию полипептидной цепи.

Теоретически возможно существование 20^5 разных последовательностей пентапептидов — наборов из пяти аминокислот. Исследование такого количества пентапептидов на устойчивость конформации численными методами молекулярной динамики требует существенного времени и расчетных ресурсов, поэтому прогноз устойчивости конформации пентапептидов методами машинного обучения для последующего изучения методами молекулярной динамики является перспективным.

В [11] для прогноза устойчивости пентапептидов на основании результатов молекулярно-динамического моделирования 49 745 различных пентапептидов применялись два метода классификации: метод ближайших соседей с отбором признаков по величине взаимной информации, оцениваемой в RKHS, как это описано выше, и метод построения случайного леса без предварительного отбора признаков [14]. Результат вычислений показал, что выбор информативных признаков по величине взаимной информации позволил в простом методе ближайших соседей достигнуть качества классификации, близкого к качеству классификации более сложного и ресурсоемкого алгоритма случайного леса, содержащего в себе отбор признаков при построении решающих деревьев.

6. Заключение

Предложенный метод оценки величины взаимной информации случайных величин является существенным дополнением метода оценки коэффициента корреляции. При решении задачи классификации оценка взаимной информации между признаками и меткой класса позволяет находить признаки, связанные с меткой класса не только простыми, близкими к линейным соотношениями, но и сложными нелинейными. Концентрация на таких признаках не только позволяет сократить размерность задачи — число учитываемых признаков, но и учесть влияние признаков, для которых оценка коэффици-

ента корреляции с меткой класса близка к нулю из-за нелинейного характера взаимовлияния.

Основным преимуществом описанного метода является отсутствие необходимости задания априори структуры зависимости между случайными величинами в случае параметрического оценивания либо расположения центров ядерных функций и их числа при непараметрической оценке. Это достигается за счет рассмотрения задачи оценивания взаимной информации в специальном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром, в котором центры ядерных функций располагаются в экспериментальных точках. Этот факт вытекает из фундаментальной теоремы о представителе [9], следствие которой существенно упрощает построение многих непараметрических оценок.

Для построения непараметрической оценки взаимной информации в статье используется минимизация квадратичного регуляризованного функционала в гильбертовом пространстве с гауссовым воспроизводящим ядром. Параметр ширины ядра выбирался методом кросс-валидации. Приведен симуляционный пример и описана практическая задача из области фундаментальной биологии, демонстрирующие применение предложенного метода оценки взаимной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1988.
- 2. Погожев И.Б. Применение математических моделей заболеваний в клинической практике. М.: Наука, 1988.
- 3. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974.
- 4. Suzuki T., Sugiyama M., Kanamori T., and Sese J. Mutual information estimation reveals global associations between stimuli and biological processes // BMC Bioinformatics. 2009. V. 10(Suppl 1):S52.
- 5. Vergara J.R., Estevez P.A. A review of feature selection methods based on mutual information // Neural Comput & Applic. 2014. V. 24. P. 175–186.
- 6. Vapnik V., Izmailov R. Statistical inference problems and their rigorous solutions / Gammerman A., Vovk V., Papadopoulos H. (eds) Statistical Learning and Data Sciences. SLDS 2015. Lecture Notes in Computer Science. V. 9047. P. 33–75.
- 7. Gine E., Nickl R. Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Model. Cambridge Academ., 2015.
- 8. Manton J.H., Amblard P.-O. A Primer on Reproducing Kernel Hilbert Spaces // Foundations and Trends in Signal Processing. 2014. V. 8. Is. 1. P. 1–26.
- 9. Scholkopf B., Herbrich R., and Smola A.J. A generalized representer theorem // Proceedings of the 14th Annual Conference on Computational Learning Theory and 5th European Conference on Computational Learning Theory, COLT'01/EuroCOLT'01. 2001. P. 416–426.
- 10. Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М.: Наука, 1970.

- 11. Mikhalskii A.I., Petrov I.V., Tsurko V.V., et al. Application of mutual information estimation for predicting the structural stability of pentapeptides // RUSS J NUMER ANAL M. 2020. V. 35. No. 5. P. 263–271.
- 12. Nekrasov A. Entropy of Protein Sequences: An Integral Approach // J. Biomolec. Structur. Dynam. 2002. V. 20. P. 87–92.
- 13. Nekrasov A., Alekseeva L., Pogosyan R., et al. A minimum set of stable blocks for rational design of polypeptide chains // Biochimie. 2019. V. 160. P. 88–92.
- 14. Breiman L. Random Forests // Machin. Learning J. 2001. V. 45. No. 1. P. 5–32.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 12.07.2021

После доработки 03.08.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. Д.А. ГУБАНОВ, канд. техн. наук (dmitry.a.g@gmail.com) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННОГО ВЛИЯНИЯ В АКТИВНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ¹

Рассмотрен ряд методов и примеров, обосновывающих возможность и целесообразность использования акционального подхода для решения прикладных задач анализа информационных процессов в активных сетевых структурах.

Ключевые слова: активная сетевая структура, информационное влияние, акциональная модель, методы анализа активных сетевых структур.

DOI: 10.31857/S0005231022050075, **EDN:** ABSYZX

1. Введение

В данной статье рассматриваются построение и применение прикладных методов анализа информационных процессов в активных сетевых структурах, которые основываются на предложенном ранее оригинальном акциональном подходе к расчету информационного влияния [1, 2]. Активная сетевая структура (ACC) — это социальная структура, которая состоит из множества агентов и заданного на нем множества отношений [3]. В АСС отсутствует иерархия, а агенты АСС обладают внутренней активностью и проявляют ее в самостоятельно выбираемых действиях. Частными случаями АСС являются социальные сети, организационные и экономические сети.

К настоящему времени разработан ряд методов анализа сетевых структур (см., например, публикации [4–8]), базирующихся на результатах теории моделирования процессов в сложных сетях, теории социально-сетевого анализа, теории статистического анализа и машинного обучения, в частности: методы анализа сетевой центральности (network centrality), методы выявления сообществ (community detection), методы классификации и кластерного анализа. Акциональный подход позволяет решать эти же прикладные задачи поновому, он имеет прочное концептуальное основание в виде наблюдаемых минимальных элементов информационного взаимодействия в сети — действий агентов — и учитывает как специфику решаемой практической задачи, так и предпочтения лица принимающего решения.

Структура статьи следующая. В разделе 2 кратко изложена модель информационного влияния в активной сетевой структуре — акциональная модель. В разделе 3 рассмотрена технология анализа информационных процес-

 $^{^1}$ Разделы 3 и 4 выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 20-11-20059).

сов в активных сетевых структурах на основе акционального подхода. Раздел 4 содержит примеры, в которых рассматриваются различные прикладные задачи и предлагаются методы их решения: в подразделе 4.1 рассмотрены методы расчета влияния и влиятельности агентов АСС, а также анализа защищенности агентов АСС от информационных воздействий; в подразделе 4.2 приведены методы расчета влияния связей в АСС, а также выявления структур и устойчивых каналов распространения активности; в подразделе 4.3 приведен метод выявления информационных сообществ в АСС.

2. Модель информационного влияния в активной сетевой структуре

Кратко опишем модель информационного влияния, в основном следуя работам [1, 2] (обзоры моделей и методов влияния см. в [9-12]). В основе этой модели лежит действие, совершенное участником сети (агентом). Вводятся обозначения:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ множество агентов, входящих в АСС,
- $K = \{1, 2, \dots, k\}$ фиксированное множество видов действий агентов АСС (в онлайновой социальной сети видом действия, в частности, может быть создание связи подписки или выставление лайка комментарию),
- Δ конечное множество выполненных агентами действий (например, создание конкретной связи подписки) в заданный период времени T, каждое действие $a \in \Delta$ задается его автором $i \in N$, видом $j \in K$ и моментом совершения $t \in T$.

На множестве Δ задается бинарное отношение частичного порядка $a \to b$ (действие a является причиной действия b), которое обладает свойством рефлексивности (для любого $a \in \Delta$ выполняется $a \to a$), антисимметричности (если $a \to b$ и $b \to a$, то a = b) и транзитивности (если $a \to b$ и $b \to c$, то $a \to c$). Если $a \to b$ и $a \ne b$, но в то же время не существует такого $c \in \Delta$, что $a \to c$ и $c \to b$, то $a \downarrow b$ (a является непосредственной причиной b). В этом случае бинарные отношения называются однозначными. Пример такого отношения в социальных медиа: a — создание учетной записи, b — создание связи подписки на учетную запись.

Для заданного множества $A\subseteq \Delta$ множество всех его последствий определяется следующим образом:

$$\pi(A) = \{b \in \Delta \mid \exists a \in A \ a \to b\}.$$

Кроме того, выделяется множество начальных действий $\Delta^0 \subseteq \Delta$:

$$\Delta^0 = \{a \in \Delta \mid \forall b \in \Delta \ (b \to a) \Rightarrow (a = b)\}.$$

В рамках акционального подхода проблема расчета влиятельности рассматривается с точки зрения некоторого управляющего субъекта — *центра*. Центр задает значимость действий участников сети исходя из своих предпочтений, для формализации которых вводится функция значимости множества действий

$$\Phi: 2^{\Delta} \to [0, +\infty).$$

Считается, что, во-первых, значимость множества действий является монотонно возрастающей функцией

$$\Phi(A) \le \Phi(B)$$
, если $A \subseteq B$,

а во-вторых, по крайней мере некоторые действия в ACC имеют положительную значимость ($\Phi(\Delta) > 0$). Для решения задач на практике эта функция должна быть корректно определена.

Далее на основе акциональной модели можно определить влияние и влиятельность мета-агентов. Mema-агентом называется любое непустое подмножество агентов ACC. Для мета-агента $I\subseteq N$ определяется как множество всех выполненных им действий

$$\delta_I = \{ a \in \Delta | \alpha(a) \in I \},\$$

так и множество выполненных им начальных действий

$$\delta_I^0 = \{ a \in \Delta^0 | \alpha(a) \in I \},\$$

где функция $\alpha(a)$ каждому действию $a\in \Delta$ ставит в соответствие его автора $\alpha\in N.$

Если деятельность агентов из множества $J\subseteq N$ в достаточно большой степени вызвана деятельностью агентов из множества $I\subseteq N$, то считается, что информационное влияние мета-агента I на мета-агента J велико. Это понимание формализуется с учетом поставленной практической задачи (возможные варианты формализации приведены в [13]). В частности, функцию влияния можно определить так:

$$\chi(I,J) = \begin{cases} \frac{\Phi\left(\pi\left(\delta_I^0\right) \cap \delta_J\right)}{\Phi\left(\delta_J\right)}, & \Phi(\delta_J) > 0; \\ 0, & \Phi(\delta_J) = 0. \end{cases}$$

При совпадении мета-агента J со всем множеством агентов (J=N) функция влияния характеризует влияние мета-агента I на всю ACC. В этом случае влияние называется *влиятельностью* $\varepsilon(I)$.

3. Технология анализа активных сетевых структур

Расчет информационного влияния одних агентов сети на других агентов позволяет ставить и решать задачи мониторинга, анализа, прогноза и информационного управления в ACC [14]. Опишем кратко технологию анализа

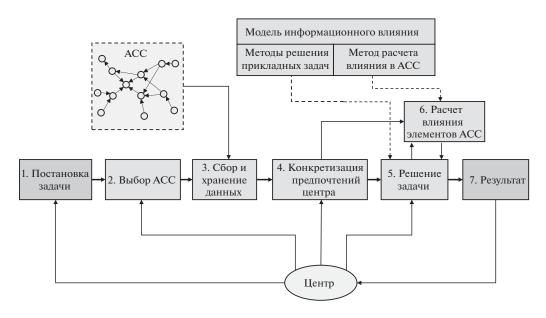


Рис. 1. Технология анализа АСС.

информационных процессов в АСС, которая включает в себя модель информационного влияния (см. рис. 1).

На этапе 1 происходит постановка задачи; на этапе 2 — выбор АСС, на этапе 3 осуществляются сбор данных АСС, структурирование и интеграция данных в хранилище данных; на этапе 4 выполняется конкретизация предпочтений центра (конкретизация функции значимости действий в АСС; выбор варианта формализации функции влияния); на этапе 5 происходит решение прикладной задачи при помощи разработанных на основе модели информационного влияния методов; на этапе 6 выполняется расчет влияния одних элементов АСС на другие; на этапе 7 результаты анализа в подходящем представлении предоставляются центру, который их оценивает и корректирует свои решения.

Приведем наиболее востребованный в прикладных проектах вариант конкретизации предпочтений центра, называемый стандартным в примерах раздела 4 (возможны, конечно, и другие варианты, выбираемые на этапе 4). В этом варианте для центра значимы посты (репосты) и комментарии, в которых упоминается определенный объект (организация, персона и т.п.), а также лайки к таким постам и комментариям. Причем действия должны быть совершены в течение заданного периода времени T. Значимость для центра каждого вида действия определяется известной положительной константой. Рассматриваются следующие виды действий: (1) публикация поста или репоста, (2) выставление лайка посту, (3) публикация комментария к посту или комментарию, (4) выставление лайка комментарию. Таким образом, множество видов действий $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение причинности $a \to b$ выполнено в следующих случаях: a – пост, b – комментарий к нему; a – пост

или комментарий, b – лайк посту или комментарию; a – пост, b – его репост; a – комментарий, b – комментарий к нему; a и b совпадают. Значимость множества действий определяется как $\Phi\left(S\right) = \sum_{a \in S} \Phi\left(a\right)$, где $\Phi(a) = 1$, если a – совершенное в течение периода T действие, которое является либо постом с упоминанием заданного объекта, либо комментарием к такому посту, либо лайком такому посту/комментарию, иначе $\Phi(a) = 0$. В качестве подходящего для центра варианта формализации влияния используется приведенный ранее в разделе 2 пример.

Такая технология (и соответственно реализующий ее программный комплекс сбора, структурирования и хранения разнородных данных, а также программный комплекс анализа данных) применяется для исследований онлайновых социальных сетей LiveJournal, Facebook, VKontakte и Reddit.

4. Примеры решения прикладных задач

Приведем примеры решения прикладных задач анализа информационных процессов в ACC на основе предлагаемого подхода:

- расчет влияния и влиятельности агентов АСС, анализ защищенности агентов АСС от информационных воздействий;
- расчет влияния связей между агентами ACC, а также выявление структур и устойчивых каналов распространения активности в ACC;
- выявление информационных сообществ в АСС.

4.1. Расчет влияния и влиятельности агентов, анализ защищенности от информационных воздействий

Вопрос оценки влиятельности участников АСС (в частности, онлайновых социальных сетей) представляет практический интерес, поскольку влиятельные индивиды во многом определяют тематику обсуждений в сети и отношение к обсуждаемым темам. Например, мнения участников сетей можно наблюдать, отслеживая реакцию "лидеров мнений" на актуальные для центра события. Также информация о наиболее влиятельных участниках сети полезна для решения задачи информационного управления — формирования в сети полезной для центра информированности.

Рассмотрим расчет влиятельности пользователей онлайновой социальной сети ВКонтакте [2] (в публикации [1] представлен пример расчета влиятельности на основе акциональной модели для сети Facebook, а в [13] для сети Reddit). Значимыми являются действия за 2015 г. (период T): посты, в которых содержится слово "Назарбаев", а также их репосты, комментарии и лайки к ним. Предположения о действиях и их взаимосвязи принимаются согласно стандартной конкретизации предпочтений центра (см. раздел 3), однако помимо введенного в его рамках варианта значимости отдельных действий для центра (будем называть его ненормированным) рассмотрим и нормированный вариант [15]. В этом варианте значимость множества действий каждого агента должна быть равна единице. Считается, что $\Phi(a) = 1/|\delta_{\alpha(a)}|$, если a

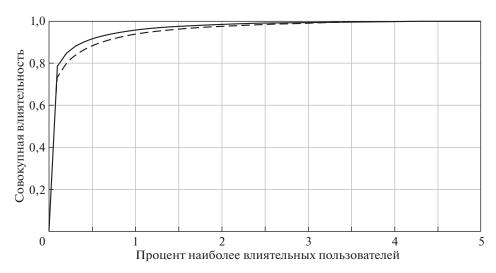


Рис. 2. Зависимость совокупной влиятельности участников сети от их числа.

совершенное в течение периода T действие, которое является либо постом с упоминанием заданного объекта, либо комментарием к такому посту, либо лайком такому посту/комментарию, иначе $\Phi(a)=0$. Следовательно, влияние отдельного агента на расчет влиятельности не зависит от степени его активности. Такая значимость приводит к нормированному способу расчета влиятельности.

Расчет влиятельности пользователей, выполнивших значимые действия, показал, что ненулевую влиятельность имеет всего 38 тысяч участников сети. Совокупная влиятельность всего одного процента наиболее влиятельных участников составляет около 95% влиятельности всей сети, совокупная влиятельность двух процентов наиболее влиятельных составляет 98% влиятельности всей сети (на рис. 2 штриховой линией показано распределение по нермированной влиятельности, сплошной линией показано распределение по ненормированной влиятельности).

Результаты оценки влиятельности показывают, что предложенный метод позволяет с учетом предпочтений центра эффективно находить относительно небольшое число участников сети, оказавших наибольшее влияние на остальную сеть.

Рассмотрим теперь метод оценки информационной защищенности в АСС. Следует отметить, что информация самым существенным образом влияет на жизнь современного общества. Некоторые его ключевые группы являются особенно уязвимыми к целенаправленным информационным воздействиям. При этом высокая защищенность от информационных воздействий может быть как позитивным (например, защищенность от экстремистских идеологий), так и негативным фактором (например, защищенность от пропаганды вакцинации). Поэтому оценка того, насколько те или иные группы населения "защищены" от информационного влияния заданного множества источников воздействий, представляет практический интерес.

Метод информационной защищенности позволяет рассчитать степень защищенности одного мета-агента сети от информационных воздействий другого мета-агента. Мета-агент T (цель) информационно защищен от мета-агента S (источник), если действия S не влияют (прямо или косвенно) на действия T.

Будем придерживаться стандартной конкретизации предпочтений центра. Функция влияния мета-агента S на мета-агента T определяется так:

$$\chi\left(S,T\right) = \begin{cases} \frac{\Phi\left(\pi(\delta_S) \cap \delta_T\right)}{\Phi\left(\delta_T\right)}, & \Phi\left(\delta_T\right) > 0, \\ 0, & \Phi\left(\delta_T\right) = 0 \end{cases}$$

(в [13] это вариант формализации 1).

Тогда информационная защищенность мета-пользователя T от мета-пользователя S определяется следующим образом:

$$\xi(S,T) = 1 - \chi(S,T).$$

Приведем простейший модельный пример расчета. Пусть множество агентов $N=\{1,2,3\}$, источник $S=\{1\}$, цель $T=\{2\}$, множество конкретных действий одного вида $\Delta=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ $(\alpha(a_1)=1,\ \alpha(a_2)=2,\ \alpha(a_3)=3,\ \alpha(a_4)=2)$, причинно-следственные связи между действиями $a_1\downarrow a_2,\ a_3\downarrow a_4$. Тогда информационная защищенность цели равна 0,5.

4.2. Расчет влияния связей между агентами, выявление структур и устойчивых каналов распространения активности

Во многих случаях представляет практический интерес оценка значимости не только отдельных участников, но и связей между участниками АСС. Для распространения информации может оказаться важной регулярная реакция одного участника сети на сообщения другого участника. Вызывают интерес также такие связи между участниками (или их подмножествами), которые значимы не только для самих этих участников, но и играют существенную роль в распространении информации в сети в целом. Эти связи образуют каналы распространения информации. На практике анализ значимых связей и каналов позволяет оценить информационный ландшафт АСС в заданной предметной области. Информация о таких связях полезна и для решения задачи информационного управления, например формирования в АСС полезной для центра информированности путем точечного воздействия на связи для ускорения или замедления распространения нужной информации в сети.

Формализуем используемые понятия при помощи акциональной модели [16].

Сетевая значимость непосредственной связи от агента i к агенту j определяется как нормированная значимость последствий действий, выполнен-

ных агентом j под непосредственным влиянием агента i:

$$\xi_{ij} = \frac{\Phi(\pi(\delta_{ij}))}{\Phi(\Delta)},$$

где $\delta_{ij} = \{b \in \delta_j | \exists a \in \delta_i a \downarrow b\}$ — совокупность действий агента j, выполненных под непосредственным влиянием агента i. Сетевая значимость непосредственной связи показывает, насколько большую роль с точки зрения центра играет наличие этой связи для распространения информации в сети.

Uндивидуальную значимость для агента j его непосредственной связи с агентом i можно определить как долю значимости последствий действий агента j, которые обусловлены непосредственной связью с агентом i, по отношению к значимости всех действий агента j:

$$\eta_{ij} = \frac{\Phi(\pi(\delta_{ij}))}{\Phi(\pi(\delta_j))}.$$

Выделяются три различных случая связи между агентами.

 $\mathit{Cлучай}\ 1.\ \mathrm{Малоe}\ \xi_{ij}$ — связь не представляет интереса для рассмотрения.

Случай 2. Большое ξ_{ij} , малое η_{ij} – связь имеет значение для формирования информационной картины в сети, а агент j является влиятельным безотносительно к связи с агентом i.

Cлучай 3. Большое ξ_{ij} , большое η_{ij} – связь имеет значение для формирования информационной картины в сети, а влияние агента j в большой степени обусловлено его информационной связью с агентом i.

Каналом распространения считается такая последовательность агентов $i_1, i_2, \ldots i_m$, в которой: (1) агенты не повторяются (уникальны), (2) сетевая значимость связей между соседями является довольно большой, т.е. для некоторого параметра h>0 выполняется $\xi_{12}\geq h, \xi_{23}\geq h,\ldots,\xi_{m-1,m}\geq h$. Интенсивностью канала $i_1,i_2\ldots,i_m$ называется величина $H=\min\{\xi_{12},\xi_{23},\ldots,\xi_{m-1,m}\}$. Каналы распространения с высокой интенсивностью можно находить, увеличивая значение параметра h и выявляя соответствующие связи между агентами.

Каналы распространения информации в сети могут образовывать связные подграфы. Связной структурой каналов с интенсивностью H называется максимальное по включению множество агентов сети, в котором каждая пара агентов включена в некоторый канал с интенсивностью, большей или равной H.

Представляют особый интерес такие каналы распространения информации, связи в которых имеют большую индивидуальную значимость. Совместное выполнение двух неравенств $\xi_{ij} \geq h, \, \eta_{ij} \geq h'$ для достаточно больших порогов h и h' означает, что агент j фактически является своеобразным ретранслятором действий агента i, вместе с тем являясь достаточно популярным для прочих агентов.

Приведем пример нахождения связных структур каналов в ВКонтакте [16], для которого применяется стандартная конкретизация предпочтений

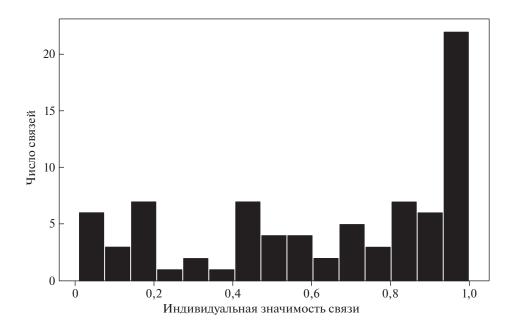


Рис. 3. Гистограмма связей по их индивидуальной значимости.

центра по объекту "Назарбаев". Значимость каждого из действий для центра одна и та же.

Рассчитаем сетевую значимость связей и рассмотрим связи с большими $\xi_{ij} \geq h = 250^2$, т.е. интересуют указанные выше случаи 2 и 3. Оказывается, значимость 99,995% связей сети меньше данного h. На рис. 3 показана гистограмма распределения найденных связей по их индивидуальной значимости.

Как можно видеть, среди связей с большой сетевой значимостью высока доля связей с большой индивидуальной значимостью (превалирует случай 3 "большое ξ_{ij} и большое η_{ij} "). Таким образом, для связей, являющихся значимыми для формирования информационной картины в сети, популярность агентов, находящихся на конце связей, во многих случаях обусловлена их информационной связью с агентами в начале связи (они являются ретрансляторами).

Для интенсивности h=250 выявлены связные структуры каналов ВКонтакте (рис. 4,a), а затем связные структуры каналов, в которых связи дополнительно имеют большую индивидуальную значимость (h'=0.8) (рис. 4,6).

Центральными узлами таких структур являются открытые страницы ВКонтакте (паблики) и группы, освещающие различные стороны жизни общества. Публикуемая ими информация ретранслируется как пабликами, так и активными пользователями сети. Даже для больших значений интенсивности h можно выделить устойчивые длинные цепочки пабликов, специализирующиеся на определенной тематике. Эти цепочки, однако, исчезают, если

 $^{^2}$ Здесь и далее значения h следует делить на $2,\!2\cdot 10^6.$

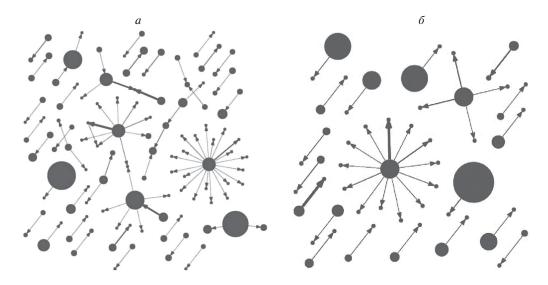


Рис. 4. Связные структуры каналов: $a-h=250,\, 6-h=250,\, h'=0.8.$ Размер вершины нелинейно соответствует влиятельности участника сети, а толщина ребра соответствует сетевой значимости ребра.

потребовать, чтобы в них все последующие узлы являлись ретрансляторами предыдущих узлов.

На рис. 4 показано, что найденные связные структуры каналов в целом имеют простые конфигурации: чаще всего это цепь из двух вершин. Более нетривиальные структуры можно найти, ослабляя ограничения h и h'. Поиск и содержательный анализ таких структур является перспективным направлением дальнейших прикладных исследований.

4.3. Выявление информационных сообществ

Одной из прикладных задач, представляющих научный и практический интерес, является задача выявления информационных сообществ в АСС [17]. Информационные сообщества состоят из индивидов со сходными представлениями и, как правило, слабо пересекаются по источникам информации, оказывающим на них влияние. Задача выявления информационных сообществ представляется довольно важной, поскольку можно предположить, что участники таких сообществ обладают сходными представлениями, а следовательно, и в ряде случаев и сходным поведением. Таким образом, типизация пользователей позволяет планировать и осуществлять управляющие информационные воздействия [3, 9, 18].

Для решения задачи выявления информационных сообществ предлагается метод, который основывается на выявлении наиболее влиятельных агентов АСС согласно акциональной модели. Здесь важным считается влияние, порождаемое оригинальными действиями (т.е. важно введение в сеть новой информации). Поскольку в онлайновых социальных сетях мала доля поль-

зователей с заметной влиятельностью (см. выводы подраздела 4.1), то для характеризации участника сети можно использовать влияния на него со стороны наиболее влиятельных участников (источников информации).

Опишем схему предлагаемого метода.

- *Шаг 1.* Расчет влиятельности участников сети в соответствии с акциональной моделью и отбор наиболее влиятельных участников.
- $\it HIas~2.$ Формирование стохастических векторов влияний на всех участников сети со стороны влиятельных индивидов (в результате данного шага каждый участник задается стохастическим вектором, характеризующим влияние на него).
 - Шаг 3. Введение расстояния между двумя участниками (метрики).
 - Шаг 4. Разбиение участников сети на заданное число сообществ.

На первом и втором шагах в соответствии со стандартной конкретизацией предпочтений центра рассчитывается влиятельность индивидов — источников оригинальных действий и влияние выбранных источников оригинальных действий на действия индивидов сети. Рассчитанные значения влияния представляются в виде стохастической по строкам матрицы $P=(p_{ij})$ размерностью $n\cdot l$, где l — число источников.

Для дальнейшей формализации задачи нахождения сообществ требуется для начала уточнить, что понимается под расстоянием между двумя стохастическими векторами влияния $p_1 = (p_{11}, \ldots, p_{1l})$ и $p_2 = (p_{21}, \ldots, p_{2l})$. Будем пользоваться следующим расстоянием, которое представляется более подходящим, чем евклидово расстояние [19, 20]:

(2)
$$d(p_1, p_2) = 1 - \sum_{j=1}^{l} \min(p_{1j}, p_{2j}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} |p_{1j} - p_{2j}|.$$

Справедливость второго равенства в (2) для стохастических векторов легко доказать [20].

На заключительном шаге ставится задача кластеризации индивидов сети. Если задано желаемое число кластеров k, то необходимо найти такие центры кластеров $a^{(r)} \in \mathfrak{R}^l, \ r=1,\ldots,k$, при которых достигается минимум целевой функции

$$F\left(a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \min_{r=1,\dots,k} d\left(P_{i*}, a^{(r)}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \min_{r=1,\dots,k} \frac{\mathbf{1}^{T} \left|P_{i*} - a^{(r)}\right|}{2}$$

при следующих ограничениях $\mathbf{1}^T a^{(r)} = 1, \ a^{(r)} \succeq 0, \ r = 1, \dots, k.$

Минимизация вогнутой функции на выпуклом множестве является вычислительно сложной задачей. На практике для поиска глобального минимума

применяют эвристические алгоритмы поиска локального минимума. Предлагается итерационный алгоритм кластеризации, в котором выделятся два шага.

- 1. Назначение *i*-го пользователя кластеру $u_i = \operatorname{argmin} d\left(P_{i*}, a^{(j)}\right);$
- 2. Поиск центра j-го кластера $a^{(j)}=\operatorname*{argmin}_{a:~\mathbf{1}^Ta=1,a\succeq 0}~\sum_{i:u_i=j}d\left(P_{i*},a\right).$

Поиск центроида с учетом заданных ограничений требует отдельного рассмотрения. В [20] для этой задачи приведен алгоритм получения точного решения.

Таким образом, продемонстрирована полная схема метода, реализацию которого можно использовать для выявления информационных сообществ — подмножеств пользователей, характеризующихся общими источниками информации.

Приведем пример выявления информационных сообществ для следующей имитационной модели социальной сети. Пусть в сети обсуждается конечное множество вопросов K. Предпочтения каждого пользователя сети $i \in N$ по этим вопросам задаются стохастическим вектором $\theta_i \sim \mathrm{Dir}(\alpha)$ (вероятностное распределение Дирихле), где вектор $\alpha \in R_{>0}^{|K|}$ определяет априорную значимость вопросов. Каждый вопрос $k \in K$ освещается теми или иными источниками информации из множества V с вероятностями, заданными стохастическим вектором $\phi_k \sim \mathrm{Dir}(\beta),$ где вектор $\beta \in R_{>0}^{|V|}$ определяет априорную значимость источников информации. Пусть пользователь сети i совершает множество действий δ_i за рассматриваемый период T. Каждое действие $a \in \delta_i$ с вероятностью $\theta_{i,k}$ посвящено вопросу k. Если действие пользователя связано с вопросом k, то с вероятностью $\phi_{k,v}$ оно связано с освещением вопроса в источнике $v \in V$. Используя такую имитационную модель, можно рассчитать влияние источников информации на пользователей сети (используется стандартная конкретизация предпочтений центра). Для расчета влияния абсолютное число действий, выполненных пользователем, не является существенным, поэтому предположим, что каждый из пользователей выполнил одно и то же число действий m. Для такой модели (параметры m=1000, |K|=5, |N| = 1000, |V| = 50, все компоненты вектора β равны 0,02, все компоненты вектора α равны 0,05) проведена серия вычислительных экспериментов, в каждом из которых выполнен поиск сообществ. Среднее значение качества кластеризации NMI (нормированная взаимная информация) при использовании стандартного метода K-means составило 0,91 (максимум качества, 1,0, достигается при совпадении кластеризации с эталонным разбиением), при использовании модифицированного метода – 0,98 (при этом используются одни и те же рассчитанные значения влияния). На рис. 5 представлена диаграмма рассеяния участников сети для одного запуска имитационной модели (размерность векторов влияний на участников сети снижена при помощи метода главных компонент), точки одного и того же сообщества обозначены одинаковыми символами.

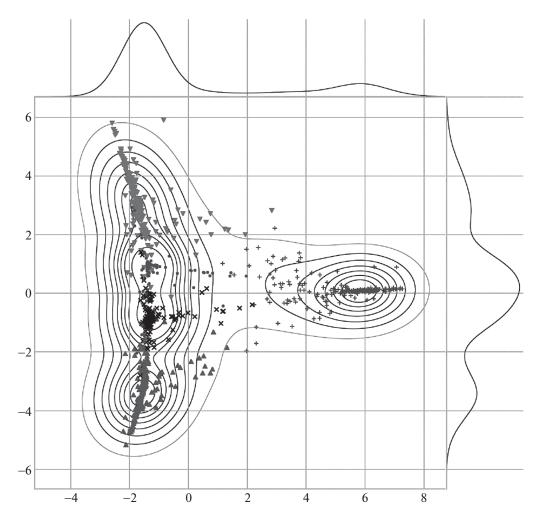


Рис. 5. Диаграмма рассеяния участников сети.

Конечно, возможны и иные сценарии использования акциональной модели для решения задач выявления информационных сообществ в АСС. В частности, в онлайновых социальных сетях для расчетов можно использовать следующие виды действий: создание учетной записи пользователя и подписка на пользователя.

5. Заключение

Настоящая статья посвящена демонстрации возможности применения акционального подхода для решения прикладных задач в активных сетевых структурах: кратко изложена акциональная модель, рассмотрена технология анализа информационных процессов в АСС на основе акциональной модели, в соответствии с которой приведен ряд примеров решения прикладных задач. Предложенный подход, несмотря на свою относительную просто-

ту, демонстрирует многообразие возможных постановок практических задач. Конкретная задача анализа информационных процессов в ACC должна формулироваться с учетом как специфики решаемой прикладной задачи, так и предпочтений лица, принимающего решения, — и акциональный подход для этого является достаточно гибким.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Губанов Д.А.*, *Чхартишвили А.Г.* Акциональная модель влиятельности пользователей социальной сети // Проблемы управления. 2014. № 4. С. 20–25.
- 2. Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // Проблемы управления. 2016. № 6. С. 12–17.
- 3. Breer V.V., Novikov D.A., Rogatkin A.D. Mob Control: Models of Threshold Collective Behavior. M.: Springer, 2017.
- 4. Aggarwal C.C. Social Network Data Analytics. N.Y. Heidelberg: Springer, 2011.
- 5. Fouss F., Saerens M., Shimbo M. Algorithms and Models for Network Data and Link Analysis. Cambridge University Press, 2016.
- Kozitsin I.V., Chkhartishvili A.G., Marchenko A.M., et al. Modeling Political Preferences of Russian Users Exemplified by the Social Network VKontakte. Math Models Comput Simul. 2020. V. 12. P. 185–194. https://doi.org/10.1134/S2070048220020088.
- 7. Temporal Network Theory / Под ред. Р. Holme, J. Saramдki. Cham: Springer International Publishing, 2019.
- 8. Wasserman S., Faust K. Social Network Analysis: Methods and Applications. 1-е изд. Cambridge University Press, 1994.
- 9. *Губанов Д.А.*, *Новиков Д.А.*, *Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. М.: МІЦНМО, 2018.
- 10. Flache A., et al. Models of Social Influence: Towards the Next Frontiers // J. of Artificial Societies and Social Simulation. 2017. No. 4 (20).
- 11. Proskurnikov A.V., Tempo R. A Tutorial on Modeling and Analysis of Dynamic Social Networks. Part I // Annual Reviews in Control. 2017. (43). P. 65–79.
- 12. Proskurnikov A.V., Tempo R. A Tutorial on Modeling and Analysis of Dynamic Social Networks. Part II // Annual Reviews in Control. 2018. (45). P. 166–190.
- 13. Gubanov D.A. A Study of Formalizations of User Influence in Actional Model // Proc. of the 13th Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). Moscow, Russia: IEEE, 2020.
- 14. Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. Концептуальный подход к анализу онлайновых социальных сетей // Управление большими системами. 2013. Вып. 45. С. 222–236.
- 15. Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A. Analysis of User Influence Types in Online Social Networks: An Example of VKontakte // Proc. of the 11th IEEE Int. Conf. on Application of Information and Communication Technologies (AICT2017, Moscow). M.: IEEE, 2017. V. 1.
- 16. Chkhartishvili A., Gubanov D. On Approaches to Identifying Information Spread Channels in Online Social Networks // Proc. of the 12th Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). Moscow, Russia: IEEE, 2019.

- 17. *Губанов Д.А.*, *Петров И.В.* Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч. 1. От основного понятия к математическим моделям формирования. // Проблемы управления. 2021. № 1. С. 15–23.
- 18. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey //Advances in Systems Science and Applications. 2014. V. 14. No. 3. P. 254–278.
- 19. Gubanov D., Petrov I. Multidimensional Model of Opinion Polarization in Social Networks // 2019 Twelfth Int. Conf. "Management of large-scale system development" (MLSD). IEEE, 2019. P. 1–4.
- 20. Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г. Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей // Проблемы управления. 2020.

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.4.x

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 12.07.2021

После доработки 25.08.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. Ф.И. ЕРЕШКО, д-р техн. наук (fereshko@yandex.ru) (Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, Москва), А.Ю. МУШКОВ, д-р экон. наук (moushkoff@mail.ru) (ФГУП "ВНИИ" Центр", Москва), Н.И. ТУРКО, д-р воен. наук (n.i.turko@rostec.ru) (Госкорпорация "Ростех", Академия военных наук, Москва), А.Д. ЦВИРКУН, д-р техн. наук (tsvirkun@ipu.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ В КРУПНОМАСШТАБНЫХ ПРОЕКТАХ МНОГОУКЛАДНОЙ ЭКОНОМИКИ

Работа продолжает исследования авторов по управлению промышленно-инфраструктурными системами в соответствии с мировым трендом по цифровизации экономики. Приводятся описание исходных фундаментальных оснований проводимых разработок и обзор отечественного опыта по использованию в управлении систем математических моделей, информационно-коммуникационных технологий и больших объемов информации. Рассматриваются вопросы централизации и децентрализации управления в сложных системах. Приводятся теоретические конструкции принятия решений для анализа перспектив развития партнерства государства и бизнеса в рамках заданных правовых норм. Приведен блок концептуальных моделей, соответствующих уровню планирования крупномасштабных организационных систем, рассматриваются вопросы подготовки данных и разработки алгоритмического обеспечения, сочетания макро- и микроописания экономических систем.

Ключевые слова: системный анализ, принятие решений, теория игр, директивное управление, экономический механизм, федеральный закон, концептуальные модели, согласование интересов государства и бизнеса, информационное обеспечение.

DOI: 10.31857/S0005231022050087, **EDN:** ABTTPH

1. Введение

Исследование направлено на разработку теоретико-методических проблем инструментального обеспечения для принятия решений в социально-экономических системах, в которых сочетаются директивные управление и рыночные механизмы, централизация и децентрализация.

Основной постулат работы — системные исследования должны базироваться на математическом моделировании. Вдохновляющим примером для авторов служил опыт [1] по открытию и расчету эффекта "ядерной зимы"

на основе построения моделей движения воздушных масс над земной и водной поверхностью. Расчеты показали, что разрушение столиц северного полушария ядерными взрывами погрузит полушарие на 25–50 лет в минусовые температуры, жизнь на территории будет уничтожена. Данный вычислительно-аналитический результат остановил мировую гонку ядерных вооружений и препятствует ее началу, став общемировым императивом сдерживания.

В настоящее время основной тренд в экономическом развитии определяется оцифровкой технологий и систем управления. Эти условия предопределяют особый подход к стратегическому планированию крупномасштабных систем.

Крупномасштабные системы — класс сложных (больших) систем, характеризующихся комплексным (межотраслевым, межрегиональным) взаимодействием элементов, распределенных на значительной территории, требующих для развития существенных затрат ресурсов и времени [2].

Авторы придерживаются определений и понятий, предложенных, в частности, ими в оригинальных публикациях [1–5] и вошедших в общий лексикон задач проектирования и управления.

В целом крупномасштабные комплексы обладают следующими свойствами:

- динамичность: системы непрерывно развиваются, поступают сырьевые ресурсы, идет рост знаний, осуществляются технологические операции, трансформируются основные фонды, происходит амортизация, не прерываются транспортные потоки и т.д.;
- наличие неопределенных и неконтролируемых факторов: многие параметры систем крупномасштабных комплексов носят неопределенный или неконтролируемый характер, что требует учета рисков. Это связано, с одной стороны, с неопределенностью в развитии технологий, а с другой с учетом особенностей поведения различных составных частей системы, имеющих иногда свои собственные, отличные от целей системы, подцели и задачи;
- многокритериальность: сложная хозяйственная система, кроме задачи выполнения заданных ограничений, имеет обычно еще целый набор формально и неформально заданных целей, четко и нечетко сформулированных критериев функционирования и развития;
- иерархичность: сложная система крупномасштабных комплексов структурно состоит из набора иерархически соподчиненных систем по территориальному и объектно-отраслевому признаку.

Объекты, принадлежащие каждому структурному уровню, могут рассматриваться и как системы, образованные из подсистем (объекты более низких уровней), и как подсистемы, входящие в состав некоторой системы (объект более высокого уровня).

Для иерархических систем характерны три важных свойства.

- 1. Каждый уровень иерархии имеет свой собственный язык, свою систему концепций или принципов.
- 2. На каждом уровне иерархии происходит обобщение свойств объектов более низких уровней. Закономерности, обнаруженные и описанные для последних, могут быть включены в объясняющую (функциональную) схему, обретая при этом связь с объектом высшего уровня. Таким образом, описание на уровне i способствует объяснению (пониманию) явлений, имеющих место на уровне i+1.
- 3. Взаимосвязи между уровнями не симметричны. Для нормального функционирования объектов высшего уровня необходимо, чтобы успешно "работали" объекты более низкого уровня, но не наоборот.

В экономических системах верхние уровни располагают приоритетом в действиях, но не располагают полной информацией о нижних уровнях.

Иерархическая структура крупномасштабных комплексов свойственна самым разнообразным системам — коммерческим предприятиям, комплексам вычислительных программ, социальному устройству, электронному оборудованию и т.п.

Разработка различных процедур согласования интересов и взаимодействий в иерархических системах ведется начиная с 60-х гг. XX в. в рамках таких разделов теории управления социально-экономическими системами как: теория активных систем, информационная теория иерархических систем, теория игр с непротивоположными интересами, теория контрактов, теория коллективного выбора, теория команд и т.д.

В частности, в информационной теории иерархических систем, созданной трудами отечественной школы [6], основное внимание уделяется двум важнейшим атрибутам иерархии: приоритету в действиях центра, информированности центра и нижних звеньев иерархии.

Впечатляющий прогресс в развитии систем управления в технической сфере был порожден значительными успехами естественнонаучных дисциплин, выработавших методологию познания на основе идеи моделирования. Была создана технология построения моделей управляемых процессов, их анализа, выработки на этом основании стратегий управления и процедур адаптации полученного результата к практическим потребностям.

Подобные технологии разработаны и в системах управления экономическими процессами. И так же, как и в технических системах, развитие представлений и успех базировались на развитии моделей управляемых процессов и методов их исследования, начиная от простейших экономических таблиц физиократов (Ф. Кенэ, 1758 г.) и моделей "невидимой руки", которая устанавливает равновесие спроса и предложения в стихийной экономике (А. Смит) до моделей межотраслевого баланса (В. Леонтьев), моделей государственного регулирования (Дж.М. Кейнс), технократических обоснований (Дж.К. Гелбрейт) и моделей рынка с совершенной конкуренцией (К. Эрроу),

основанных на теоремах о существовании неподвижных точек точечно-множественных отображений.

Большим продвижением в моделировании экономических процессов явилась теория линейных производственных процессов Канторовича–Купманса, которая совершенно и вполне инкорпорируется в процессы цифровизации, поскольку базируется на нормативной цифровой информации.

Согласно данному мнению, принятие решений в экономике будет базироваться на вычислительных платформах, отражающих отдельные функциональные отрасли, что близко к идеям А.И. Китова и В.М. Глушкова о создании общегосударственной автоматизированной системы управления экономикой (ОГАС) [7].

Основной тезис, который декларируется в настоящей статье, состоит в том, что исходным каркасом платформ являются модели взаимодействия активных элементов и к решению задач принятия согласованных решений необходимо привлечение теоретических конструкций механизмов управления.

Общая теория управления в настоящее время располагает мощными формальными средствами: модельным инструментарием, математическим аппаратом, вычислительными средствами, собственной методологией, составляющими которой выступают теория принятия решений, исследования операций, управления динамическими системами, теория игр, системный анализ. Данная методология будет востребована и составит основное содержание цифровых платформ.

Цифровая модель предприятия описывает развитие производства, динамику материальных (продукция, производственные фонды) и финансовых потоков (инвестиции, активы, обязательства, собственный капитал), содержит входящие и исходящие переменные, учитывает технологические связи, систему управления и экономические цели производства [8].

2. Опыт разработки крупномасштабных систем

Как и в предыдущих публикациях авторов, основной интерес статьи проявлен к крупномасштабным проектам [2, 9]. Типичные примеры крупномасштабных систем: топливно-энергетический комплекс и отдельные его отрасли, транспортные, аграрно-промышленные, оборонно-промышленные, территориально-промышленные, региональные и отраслевые системы, холдинги, концерны, финансово-промышленные группы, транснациональные корпорации, распределенные системы передачи и обработки информации и другие комплексы.

Излагаемые модели и методы планирования развития структуры крупномасштабных систем родились благодаря исследованиям, проведенным в Институте проблем управления РАН в области синтеза структур топливно-энергетических, отраслевых и региональных производственно-транспортных систем [3].

Основные особенности крупномасштабных систем.

Значительные затраты ресурсов и времени на развитие систем, заблаговременность инвестиционных мероприятий может составлять несколько лет.

Размытость границ (в процессе развития состав элементов системы и характер их взаимосвязи между собой и с внешней средой существенно изменяются; территория, охватываемая системой, может расширяться от региональных до глобальных масштабов).

Тесная взаимосвязь с другими крупномасштабными системами и с окружающей средой.

Комплексный характер управления (в частности, требуется согласование отраслевых, корпоративных и региональных интересов).

Грубость и устойчивость, небольшие отклонения в параметрах развития отдельных элементов и их взаимосвязей мало влияют на развитие систем в целом.

Имеется опыт разработок [4] программных комплексов для финансового анализа и разработки бизнес-планов инвестиционных проектов. Эти системы используются промышленными предприятиями, банками, проектными учреждениями и консалтинговыми центрами.

Усложнение структуры народнохозяйственных систем, обусловленное ростом размеров и сложности производственных процессов и процессов управления ими, выдвигает ряд проблем, связанных с научным обоснованием построения таких структур.

Под структурой крупномасштабной системы в статье понимается состав ее элементов с соответствующими взаимосвязями в динамике их развития и функционирования.

Непрерывность развития, выражающаяся в постоянном изменении структуры системы, является важнейшей особенностью крупномасштабных систем. Процесс развития крупномасштабных систем носит необратимый характер, т.е., как правило, интегральные характеристики, определяющие "продукт" на "выходе" системы, в процессе развития в целом не убывают, хотя характер изменения отдельных элементов системы может быть различен. При этом в процессе развития расширяется состав элементов крупномасштабной системы и усложняются их взаимосвязи.

При управлении развитием крупномасштабной системы необходимо получать взаимосвязанное решение двух групп вопросов. К первой относятся вопросы развития структуры управляемой производственно-транспортной системы, т.е. определение оптимального состава элементов и их взаимосвязей, распределение плановых заданий по элементам и т.п. Ко второй — вопросы развития структуры системы управления, включающие выбор иерархии управления, распределение выполняемых функций управления между уровнями и узлами системы.

Во многих отраслях народного хозяйства разрабатываются долгосрочные программы развития структур крупномасштабных систем. Примерами таких систем могут служить: топливно-энергетический комплекс в целом и отдель-

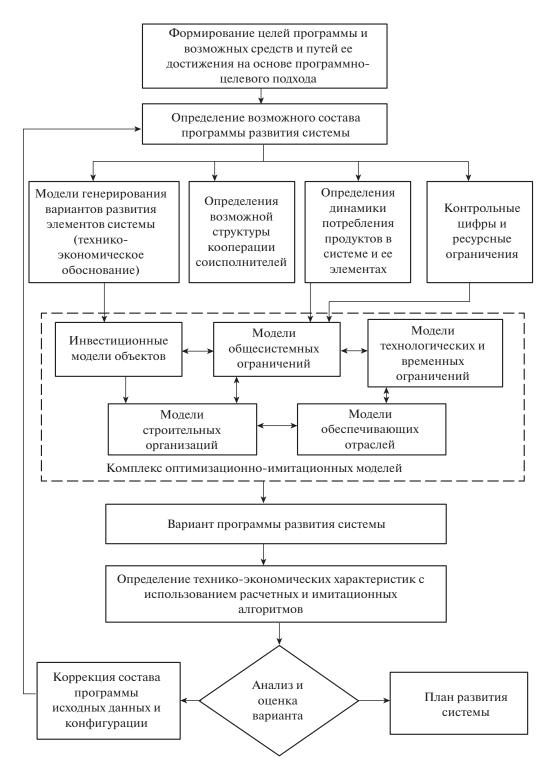


Рис. 1. Схема формирования и использования комплекса инвестиционных моделей.

ные его отрасли; комплекс атомных электростанций, газоснабжающая сеть страны и др.

Основное содержание предлагаемого подхода в [10] составляют методы планирования развития крупномасштабных систем, основанные на взаимодействии в процессе формирования плана развития крупномасштабных систем комплекса моделей, описывающего систему на различных уровнях детализации, в том числе на уровне агрегированных показателей и на уровне отдельных производственно-транспортных элементов.

Схема формирования и использования комплекса инвестиционных моделей приведена на рис. 1. Расчеты по оптимизации программ развития крупномасштабных систем начинаются с формирования цели программы и возможных путей и средств ее достижения. В результате этого определяется возможный состав программы (перечень объектов различного типа, логические и технологические связи между ними, варианты их строительства и т.п.).

На следующем этапе варианты развития отдельных элементов и комплексов подвергаются технологической проработке и технико-экономическому обоснованию. После подготовки необходимой информации и формирования моделей оптимизации проводятся соответствующие расчеты программ развития.

Следующий этап состоит в определении технико-экономических характеристик полученного варианта программ, используемых при анализе и принятии соответствующих решений.

Анализ специфики планирования, опыт общения с лицами, участвующими в выработке плановых решений на различных уровнях, показал большое разнообразие постановок задач оптимизации: от формирования одного глобального народнохозяйственного критерия до задач с векторными и локальными критериями оптимизации.

Поэтому представляется целесообразным такой подход к решению подобных задач, когда главное внимание уделяется разработке моделей, более близко моделирующих объект в интересующей пользователя области, созданию, по возможности, полного перечня (библиотеки) критериев, ограничений, функциональных связей, условий и других элементов описания рассматриваемого класса задач.

Это позволяет специалисту, подготавливающему решение, выбирать из перечня нужный в сложившейся ситуации набор критериев и ограничений. Таким образом, вопросы формирования структуры модели, комплектование модели критериями оптимизации, их содержательная трактовка, корректировка модели и исходных данных приближаются к специалисту, подготавливающему и принимающему плановые решения.

Использование результатов модельных экспериментов при подготовке управляющих решений не исключает возможности, а в ряде случаев и необходимости применения других, неформализованных средств оценки соответствующих аспектов решений. В одних случаях моделирование играет ве-

дущую роль, в других — вспомогательную как инструмент количественной оценки некоторых показателей исследуемой системы.

Как описано в публикациях авторов [2, 9], при разработке крупномасштабных систем возникает проблема взаимосвязанного описания, анализа и синтеза различных аспектов деятельности систем: процессов выбора целей и принятия решений, обработки информации, технологических процессов.

Обычно для крупномасштабных систем оказывается невозможным описание их структурных свойств и особенностей на одном уровне детализации, поэтому такие системы должны представляться в виде взаимосвязанной совокупности элементов различных уровней детализации и этапов развития: уровня целей функционирования подсистем и системы в целом; функций и задач элементов системы; звеньев организационной иерархии; производственных и транспортных объектов; технических средств и т.д. Причем на указанных этапах и уровнях описания структур крупномасштабных систем могут использоваться различные средства и языки — вербальные описания, теория множеств, аналитические и графоаналитические, алгоритмические процедуры, альтернативно-графовая формализация и т.п.

При синтезе структуры сложных систем эффективным является принцип последовательного синтеза моделей допустимых вариантов построения отдельных элементов, частей и системы в целом с последующим выбором с помощью синтезируемой модели структуры системы наилучшего варианта ее реализации и развития. Такой подход позволяет выделить типовые задачи синтеза структуры сложных систем, детализация которых определяется этапом и целями разработки.

Функциональная часть крупномасштабных систем формулируется в виде альтернативных графов на уровнях целей функционирования и выполняемых функций и функциональных задач. Организационная часть системы формулируется аналогичным образом на уровнях узлов управления (организационной иерархии), регионов, предприятий, отдельных объектов управления, производственных и технологических процессов, агрегатов, а также сетей ЦВМ и вычислительных центров.

На основе моделей крупномасштабной системы возможна разработка сценариев концентрации усилий и ресурсов в рамках программ развития и структурной перестройки систем. В [11] отмечается, что "в одной из таких программ возможна интеграция добывающих компаний и предприятий военно-промышленного комплекса в финансово-промышленные группы с целью завоевания (при поддержке государства) прочного места на мировых рынках, а также рационального использования полученных доходов для восстановления научно-технического потенциала страны, технологического обновления добывающих отраслей и особенно распространения высоких технологий из военно-промышленного комплекса во все отрасли народного хозяйства. Необходимо учесть возможные риски, потому что в конце 80-х гг. интересы ВПК и ТЭК были противоположными, а реформы проходят под знаком противоборства ОПК и ТЭК".

3. Стратегическое планирование в децентрализованных системах

Проблема сочетания централизации и децентрализации, в частности при анализе государственно-частного партнерства, относится к главенствующим вопросам в теории принятия решений и привлекала внимание многих исследователей [12].

К фундаментальным исследованиям крупномасштабных систем, взаимодействия в которых имеют иерархический характер, следует отнести работы Ю.Б. Гермейера и его учеников, обзор которых содержится в монографии [13] и в работах [14–17].

Опыт показывает, что на практике управление достаточно сложными организационными системами осуществляется по иерархическому децентрализованному принципу. Объяснение эффективности принципа предложено Ю.Б. Гермейером и Н.Н. Моисеевым [6]: если лицо, принимающее решения, передаст часть своих полномочий по выбору решений каким-то агентам, то совместными усилиями можно будет своевременно обработать большие объемы информации и за счет этого сделать управление более эффективным. Построить формальные математические модели, позволяющие описать этот эффект, удалось в [18], где рассматривается задача управления организационной системой в условиях внешней неопределенности.

В [19, 20] исследуется вопрос о целесообразности децентрализации управления в зависимости от доступного объема информации о неопределенных факторах, проведен сравнительный анализ при централизованном и децентрализованном способах управления и установлено базовое теоретическое утверждение. Доказана Теорема: если интересы Центра и управляемых систем плохо согласованы, то Центру всегда выгодно централизованное управление, если интересы хорошо согласованы, то при ограниченных мощностях обработки информации Центру выгоднее децентрализация, в ином случае — централизация.

Из рассмотрения содержательных экономических процессов проистекает вывод: рыночная экономика — это децентрализованная система управления взаимодействием экономических агентов в обществе, и она не может решить все проблемы социально-экономического развития общества. Необходимо рациональное государственное регулирование.

В аналитической среде Запада намечается сдвиг в понимании роли централизованного управления. Как отмечается в [21]: "ситуация должна измениться, потому что трудно представить, как можно справиться с экзогенным шоком такой силы, как тот, который вызван COVID-19, с помощью чисто рыночных решений... Уже и почти в мгновение ока коронавирусу удалось изменить представления о сложном и хрупком балансе между частной и общественной сферами в пользу последней... Все, что происходит в постпандемическую эпоху, заставит нас переосмыслить роль правительств... Они должны гарантировать, что партнерство с бизнесом и участием государственных средств руководствуется общественными интересами, а не прибылью".

Централизация и децентрализация проявляются в различных формах государственно-частного партнерства. В [22] предлагаются различные организации хозяйственного партнерства государства и бизнеса с использованием средств и методов теории принятия решений, теории управления и исследования операций.

В [23] предлагается в этих постановках наряду с предприятиями разной формы собственности рассматривать и участие координатора (используем далее для описания его деятельности термин Центр). Предметом его регулирования выступают общественные отношения, возникающие между органами государственной власти и субъектами промышленного сектора экономики при использовании различных инструментов государственного воздействия на деятельность компаний. В качестве инструментов государственного воздействия на субъекты промышленной деятельности могут быть как меры экономического стимулирования, так и меры государственного регулирования (императивные предписания и запреты).

Рассмотрим вопрос о деятельности совокупности предприятий [24], входящих в сферу комплекса крупномасштабных систем, и совокупное описание моделей предприятий (цифровых двойников), входящих в цифровую платформу комплекса при веерном технологическом графе. Прежде всего отметим, что модель отражает иерархическую структуру управления.

Ограничимся вопросами организационно-технологического характера: приведем описание модели для оценки возможности выполнения плана группой предприятий по выпуску конечных продуктов при заданных финансовых средствах. Модели такого типа ("грубые" модели) позволяют оценить качественные стороны принятия решений. Прежде всего они находят эффективное применение при разработке сценариев вычислительных экспериментов для имитационных систем на базе цифровых платформ при большой размерности модельных комплексов.

В [23] отмечается, что в рамках указанных положений и конструкций исследованы модели контрактов между активными экономическими системами. Нобелевская премия 2016 г. по экономике присуждена Оливеру Харту (Гарвардский университет, США) и Бенгту Хольстрему (Массачусетский технологический институт, США) за их вклад в теорию контрактов, которая базируется на моделях взаимодействия иерархического характера: принципал — агенты. Прикладной смысл таких исследований — с одной стороны, создание математического аппарата для анализа упрощенных моделей, позволяющих делать качественные выводы и, с другой стороны, формирование на модельном уровне представлений о предмете исследований у лиц, принимающих решения на всех организационных уровнях. Проведенный авторами анализ оптимальных контрактов закладывает интеллектуальный фундамент для разработки стратегий и институтов во многих областях, от законодательства о банкротстве до политических конституций.

3.1. Децентрализованная система при программах Центра

Рассмотрим здесь один из вариантов описания на основе отечественной теории иерархических игр [19, 20]. Предполагаем, что организационно система состоит из трех уровней: Центр — интегрированные структуры (холдинги) — предприятия. Оперирующую сторону в данной модели будем отождествлять с Центром.

Пусть имеется некоторое число предприятий, разбитых на K интегрированных структур. Предприятия будем нумеровать двойными индексами kn, где k ($k=1,\ldots,K$) — номер интегрированной структуры, n — номер предприятия ($n=0,1,\ldots,N$). Здесь, чтобы не использовать лишних индексов, считаем, что число предприятий в каждой интегрированной структуре одинаково. Если это не так, то можно считать, что N+1 — максимальное число предприятий в интегрированной структуре, а в те структуры, в которых предприятий меньше, добавлены фиктивные предприятия с очень большими затратами на производство (см. далее).

Каждую интегрированную структуру будем отождествлять с ее головным предприятием, за которым зарезервируем индекс n=0.

1. Технологические процессы. Будем рассматривать функционирование системы на отрезке времени $t=1,2,\ldots,T$.

Пусть система способна выпускать I видов продукции. Обозначим $U = \mathbb{R}^I_+$.

Центр выбирает *объемы* u *сроки* заказа выпусков, т.е. для каждой интегрированной структуры k задает набор (u_1^k,\ldots,u_T^k) векторов $u_t^k\in U,$ $t=1,2,\ldots,T.$

Кроме того, Центр устанавливает *цены продукции*, т.е. для каждого момента времени t выбирает вектор $p_t \in U$.

Таким образом, например, структура k в момент времени t получит от Центра за выполнение заказа сумму, равную $p_t u_t^k$.

2. Производственные мощности. Состояние производственных мощностей предприятия kn в момент времени t описывается вектором x_t^{kn} с неотрицательными компонентами. Множество всех таких векторов обозначим через X.

Опять же для простоты формул считаем, что размерности этих векторов для всех t и всех kn одинаковы, но в них могут быть нулевые компоненты.

В момент времени t предприятие kn выбирает вектор z_t^{kn} вновь создаваемых мощностей. Таким образом, динамика производственных мощностей задается формулой

$$x_{t+1}^{kn} = x_t^{kn} + z_t^{kn}, \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, K, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Начальное значение x_0^{kn} считается napamempom sadaчu.

За создание новых мощностей предприятие платит сумму $P_t z_t^{kn}$. Здесь вектор P_t с неотрицательными компонентами — параметр модели.

3. Выпуск продукции, затраты. В момент времени t предприятие kn выбирает объем выпуска продукции $v_t^{kn} \in U.$

Разумеется, производство продукции связано *с затратами*. Будем считать, что эта связь описывается функцией

$$\Phi = (\varphi, \phi) : X \times U \to U \times W.$$

Здесь $\varphi(x_t^{kn},v_t^{kn})\in U$ — затраты продукции, производимой внутри ОПК, на производство продукции в количестве v_t^{kn} при наличии мощностей x_t^{kn} , $\phi(x_t^{kn},v_t^{kn})\in W$ — затраты на приобретение продукции, закупаемой извне ОПК.

Здесь вновь для упрощения формул считаем, что каждое предприятие может выпускать полную номенклатуру продукции, но затраты на выпуск "непрофильных" товаров (т.е. не соответствующих имеющимся мощностям) принимаются значительными для их исключения при расчете.

Предположим, что предприятия, входящие в одну интегрированную структуру, могут обмениваться произведенной продукцией.

4. Обмены. Объем $\omega_t^{knm} \in U$ продукции, поставляемой предприятием n предприятию m в момент времени t, определяется головным предприятием интегрированной структуры.

Управления головного предприятия интегрированной структуры k должны удовлетворять ограничениям

$$v_t^{k0} + \sum_{n=1}^{N} \omega_t^{kn0} - \sum_{n=1}^{N} \omega_t^{k0n} - \sum_{n=1}^{N} \varphi(x_t^{kn}, v_t^{kn}) \ge u_t^k, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Обозначим через $U_t^{k0}(x_t^{k0},u_t^k)$ множество наборов (управлений)

$$\left(z_t^{k0}, v_t^{k0}, \omega_t^{k00}, \dots, \omega_t^{k0N}, \omega_t^{k10}, \dots, \omega_t^{kNN}\right) \in X \times U^{N^2+1},$$

удовлетворяющих ограничению

$$v_{t}^{k0} + \sum_{n=1}^{N} \omega_{t}^{kn0} - \sum_{n=1}^{N} \omega_{t}^{k0n} \ge u_{t}^{k} + \sum_{n=1}^{N} \varphi\left(x_{t}^{kn}, v_{t}^{kn}\right),$$

(здесь для простоты записи принято $\omega_t^{knn} = 0, n = 0, 1, \dots, N$).

Управления предприятия $n \ (n \neq 0)$, входящего в интегрированную структуру k, должны удовлетворять ограничениям

$$v_t^{kn} - \varphi\left(x_t^{kn}, v_t^{kn}\right) \ge \sum_{m=1}^{N} \omega_t^{knm} - \sum_{m=1}^{N} \omega_t^{kmn}, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Обозначим через $U_t^{kn}(x_t^{kn},\omega_t^{kn0},\dots,\omega_t^{knN},\omega_t^{k0n},\dots,\omega_t^{kNn})$ множество пар $(z_t^{kn},v_t^{kn})\in X\times U$, удовлетворяющих условию

$$v_t^{kn} - \varphi\left(x_t^{kn}, v_t^{kn}\right) \ge \sum_{m=1}^N \omega_t^{knm} - \sum_{m=1}^N \omega_t^{kmn}.$$

5. Интересы. Будем считать, что целью предприятий является максимизация прибыли.

Обозначим для краткости

$$\overline{z}^{kn} = (z_1^{kn}, \dots, z_T^{kn}), \quad \overline{v}^{kn} = (v_1^{kn}, \dots, v_T^{kn}), \quad \overline{p} = (p_1, \dots, p_T).$$

Для $n\ (n \neq 0)$ прибыль предприятия kn задается формулой

$$g^{kn}\left(\overline{p},\overline{z}^{kn},\overline{v}^{kn}\right) = \sum_{t=1}^{T} p_t v_t^{kn} - \sum_{t=1}^{T} P_t z_t^{kn} - \sum_{t=1}^{T} p_t \varphi\left(x_t^{kn}, v_t^{kn}\right) - \sum_{t=1}^{T} \pi_t \phi\left(x_t^{kn}, v_t^{kn}\right).$$

Здесь π_t – вектор цен на товары, закупаемые вне ОПК. Это – параметр модели.

Считаем, что головное предприятие интегрированной системы является $a\kappa uuonepom$ остальных предприятий этой системы. Поэтому его прибыль выражается формулой

$$\begin{split} g^{k0}\left(\overline{p},\overline{z}^{k0},\overline{z}^{k1},\ldots,\overline{z}^{kN},\overline{v}^{k0},\overline{v}^{k1},\ldots,\overline{v}^{kN}\right) &= \\ &= \sum_{t=1}^{T} p_t v_t^{k0} - \sum_{t=1}^{T} P_t z_t^{k0} - \sum_{t=1}^{T} p_t \,\varphi\left(x_t^{k0},v_t^{k0}\right) - \\ &- \sum_{t=1}^{T} \pi_t \,\phi\left(x_t^{k0},v_t^{k0}\right) + \sum_{n=1}^{N} \alpha^{kn} g^{kn}\left(\overline{z}^{kn},\overline{v}^{kn}\right). \end{split}$$

В этой формуле α^{kn} — доля головного предприятия в капитале предприятия kn. В модели — это параметры.

Как было изложено выше, в данной модели предполагается, что любое предприятие в принципе способно выпускать любую продукцию в любом количестве, только такой непрофильный выпуск может сопровождаться очень большими затратами. Поэтому в рамках данной модели реализуемость плана естественно трактовать как безубыточность всех предприятий. Таким образом, Центру приписывается функция выигрыша

6. Информированность и порядок ходов. Будем предполагать, что всем субъектам рассматриваемой системы точно известны ее параметры.

Считаем, что *первым* принимает решение *Центр*. Он выбирает управления $\overline{u}^k = (u_1^k, \dots, u_T^k), k = 1, \dots, K, \overline{p} = (p_1, \dots, p_T)$ и доводит до предприятий информацию о сделанном выборе.

Затем одновременно и независимо делают выбор головные предприятия.

Обозначим через $\overline{U}^{k0}(\overline{u}^k)$ множество всех наборов $u_t^{k0}=(z_t^{k0},v_t^{k0},\omega_t^{k00},\dots,\omega_t^{k0N},\omega_t^{k10},\dots,\omega_t^{kNN}),\,t=1,\dots,T$, удовлетворяющих условиям

$$u_t^{k0} \in U_t^{k0} \left(x_t^{k0}, u_t^k \right), \quad x_{t+1}^{k0} = x_t^{k0} + z_t^{k0}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Головное предприятие выбирает программу $\overline{u}^{k0} \in \overline{U}^{k0}(\overline{p}, \overline{u}^k)$ и сообщает о своем выборе предприятиям своей интегрированной структуры.

После этого одновременно и независимо производят свой выбор остальные предприятия. Предприятие kn выбирает свою программу $u_t^{kn}=(z_t^{kn},v_t^{kn}),$ $t=1,\ldots,T$, из множества $\overline{U}^{kn}(\overline{u}^{k0})$ программ, удовлетворяющих условиям

$$u_t^{kn} \in U_t^{kn} \left(x_t^{kn}, \omega_t^{kn0}, \dots, \omega_t^{knN}, \omega_t^{k0n}, \dots, \omega_t^{kNn} \right),$$
$$x_{t+1}^{kn} = x_t^{kn} + z_t^{kn}, \quad t = 1, \dots T.$$

7. Принцип оптимальности. Будем считать, что все субъекты осторожны к имеющейся у них неопределенности. При этом они рассчитывают на рациональное поведение своих партнеров.

При описанной выше схеме принятия решений предприятие kn (n>0), выбирая управления, находится в ситуации, когда его выигрыш зависит только от его решения. Поэтому естественно считать, что оно выберет программу \overline{u}^{kn} из множества

$$BR^{kn}\left(\overline{u}^{\,k0}\right) = \left\{\overline{u}^{\,kn} \in \overline{U}^{kn}\left(\overline{u}^{\,k0}\right): \ g^{kn}\left(\overline{p}, \overline{u}^{\,kn}\right) = \max_{w^{kn} \in \overline{U}^{\,kn}\left(\overline{u}^{\,k0}\right)} g^{kn}\left(\overline{p}, \overline{w}^{\,kn}\right)\right\}.$$

Головное предприятие k0 может оценить это множество. Поэтому для него естественно выбрать свою программу $\overline{u}^{\,k0}$ из множества

$$BR^{k0}\left(\overline{u}^{\,k}\right) = \\ = \left\{\overline{u}^{\,k0} \in \overline{U}^{\,k0}\left(\overline{u}^{\,k}\right) : \min_{\overline{u}^{\,k1} \in \overline{U}^{\,k1}(\overline{u}^{\,k0})} \dots \min_{\overline{u}^{\,kN} \in \overline{U}^{\,kN}(\overline{u}^{\,k0})} g^{k0}\left(\overline{p}, \overline{u}^{\,k0}, \overline{u}^{\,k1}, \dots, \overline{u}^{\,kN}\right) = \\ = \max_{\overline{w}^{\,k0} \in \overline{U}^{\,k0}(\overline{u}^{\,k})} \min_{\overline{u}^{\,k1} \in \overline{U}^{\,k1}(\overline{w}^{\,k0})} \dots \min_{\overline{u}^{\,kN} \in \overline{U}^{\,kN}(\overline{w}^{\,k0})} g^{k0}\left(\overline{p}, \overline{w}^{\,k0}, \overline{u}^{\,k1}, \dots, \overline{u}^{\,kN}\right) \right\}.$$

Можно показать, что если все параметры α^{kn} строго положительны, то при обычных предположениях о множествах выборов максимум в этой формуле достигается.

$$BR^{k}(\overline{u}^{k0}) = BR^{k0}(\overline{u}^{k}) \times \prod_{n=1}^{N} BR^{kn}(\overline{u}^{k0}).$$

Пусть Центр фиксировал программы $\overline{u}^k = (u_1^k, \dots, u_T^k), k = 1, \dots, K$, и $\overline{p} = (p_1, \dots, p_T)$. Тогда он может рассчитывать, что при рациональном поведении партнеров он получит выигрыш, не меньший

$$\min_{(\overline{u}^{10},\overline{u}^{11},\ldots,\overline{u}^{1N})\in BR^1(\overline{u}^1)}\cdots \min_{(\overline{u}^{K0},\overline{u}^{K1},\ldots,\overline{u}^{KN})\in BR^K(\overline{u}^K)}g\left(\overline{p},\overline{u}^{10},\overline{u}^{11},\ldots,\overline{u}^{K1},\ldots,\overline{u}^{KN}\right)$$

Теорема. Если величина

$$\sup_{\overline{p} \in U^T} \min_{(\overline{u}^{10}, \overline{u}^{11}, \dots, \overline{u}^{1N}) \in BR^1(\overline{u}^1)} \dots \min_{(\overline{u}^{K0}, \overline{u}^{K1}, \dots, \overline{u}^{KN}) \in BR^K(\overline{u}^K)} g\left(\overline{p}, \overline{u}^{10}, \overline{u}^{11}, \dots, \overline{u}^{K1}, \dots, \overline{u}^{KN}\right)$$

положительна или она неотрицательна и верхняя грань в формуле достигается, то Программа $(\overline{u}^1, \dots, \overline{u}^k)$ реализуема.

Замечание о смешанных механизмах. В изложении не акцентирован случай, когда Предприятие может реализовывать излишки продукции на внутреннем рынке по рыночным ценам. Формально это учитывается при описании выпусков продукции и интересов предприятий. Тем самым учитывается специфика по смешанным механизмам управления отрасли.

В результате на основе данного описания построена сетевая модель, которая учитывает технологические и организационные связи предприятий комплекса. Сформулированная сетевая модель имеет вид теоретико-игровой модели с иерархической структурой, с приоритетом действий Центра и учетом связей между агентами технологического графа комплекса.

Задача принятия решений Центра сформулирована с учетом неопределенностей и рисков, что соответствует построению общей системы математического обеспечения процедуры стратегического планирования производственным блоком крупномасштабного комплекса.

3.2. Децентрализованная система при аукционных схемах сборочного производства

В настоящее время наблюдается большой интерес к созданию систем, управление которыми осуществляется по сетевому принципу. Как отмечается К. Швабом [21], тренд развития современной экономики определяется оцифрованными технологиями и сетевыми системами. Это системы, состоящие из относительно автономных элементов, узлов, которые обмениваются между собой информацией и изменяют свое состояние по каким-то локальным правилам. В данном изложении содержится описание такого проекта

[25] — предлагается сетевая форма взаимодействия внутри ассоциации предприятий, занимающихся некоторым общим производством. Взаимодействие предполагает организацию множественных локальных аукционов, по результатам которых внутри ассоциации определяется распределение функций для выполнения очередного заказа на производство.

1. Исходное описание.

Предполагается, что ассоциация занимается производством, закупкой, монтажом, сборкой изделий из некоторого фиксированного набора. Множество изделий из этого набора обозначим через \widehat{P} . Предприятия, входящие в ассоциацию, будем называть участниками и их множество обозначим через L.

Предполагается, что участники — самостоятельные предприятия, деятельность которых не ограничена ассоциацией. Ее состав может меняться от заказа к заказу. Организация ассоциации — это способ расширить и упорядочить рынок сбыта продукции каждого из участников. Вход и выход предприятия из ассоциации — это свободный выбор предприятия. Участники предлагают свои услуги в выполнении заказов, принимают на себя обязательства по их выполнению, но их благополучие не зависит полностью от того, будут они выбраны для участия в очередном заказе или нет. Им важно занять свое место в потоке поступающих заказов. Участие в ассоциации накладывает на предприятия определенные требования, в частности необходимость интеграции в общую информационную сеть.

Помимо предприятий, составляющих множество участников L, есть еще один выделенный участник — это Центр, центральный участник ассоциации. Функции Центра в рамках модели и рассматриваемых далее аукционных схем — это координация аукционов и распределение заказа между изготовителями изделий ранга 1.

В реальности Центр также должен контролировать исполнение заказов, расшивать нестыковки, которые могут возникать по причине невыполнения участниками взятых на себя обязательств в плановые сроки, распределять выручку между участниками и т.п.

Введем необходимые обозначения.

Изделия будем именовать по индексу: $\widehat{P} = \{m\}_{m=1}^{M^0}$.

Будут рассматриваться поставки изделий от производителей друг другу. Все множество поставок по заказу описывается трехмерной матрицей $A=(a_{k,r}^n)$, здесь верхний индекс соответствует изделию, первый нижний индекс — поставщику, а второй — получателю изделия.

Произвольному набору изделий W из \widehat{P} сопоставим вектор $\overline{W} \subset \mathbb{R}^{M^0}$, в котором компоненты w_n соответствуют количеству (объему) изделий $n \in \widehat{P}$ из W. W, наоборот, для вектора изделий \overline{W} через W будем обозначать набор ненулевых индексов этого вектора.

Запись \bar{w}_n будет означать вектор $\bar{W} \subset \mathbb{R}^{M^0}$ с единственной ненулевой компонентой n, равной w_n . Часть изделий $n \in M^0$ монтируется из других изделий, производимых внутри ассоциации. Изделию n сопоставим множество

 $G(n)\subset \widehat{P}$ тех деталей, из которых оно монтируется. Для множества изделий $W\in \widehat{P}$ через G(W) обозначим набор деталей, из которых монтируются изделия из $W\colon G(W)=\bigcup_{n\in W}G(n).$

Заметим, что в множество G(W) может входить часть изделий из W, поскольку одни изделия из набора W могут использовать другие в качестве комплектующих. Через $\bar{G}(\bar{W})$ будем обозначать вектор комплектующих, необходимых для сборки всех компонент вектора \bar{W} . Подчеркнем, что в G(n) входят только детали финальной сборки изделия n. Если некоторая деталь $k \in G(n)$ сама является сборной, то объемы комплектующих $\bar{G}(\bar{v}_k)$ не входят в компоненты вектора $\bar{G}(\bar{v}_n)$.

Имеется набор изделий $\widehat{P}^1\subset \widehat{P}$, которые условно назовем товарами. Это те изделия, которые ассоциация производит по внешним заказам или на продажу. Они образуют первый, верхний уровень производства. Товары монтируются из деталей, составляющих множество $\widehat{P}\setminus \widehat{P}^1$.

Часть деталей, используемых при монтаже товаров, в свою очередь монтируются из деталей, входящих в \widehat{P} . Выделим в нем и отнесем к уровню 2 подмножество \widehat{P}^2 таких изделий, которые используются только в монтаже изделий из \widehat{P}^1 . Множество $\widehat{P}^2 \subset \widehat{P} \setminus \widehat{P}^1$.

Для монтажа изделий из \widehat{P}^2 в свою очередь могут потребоваться комплектующие. Это изделия из множества $\widehat{P}\setminus(\widehat{P}^1\bigcup\widehat{P}^2)$. Выделим из них те, которые используются только в монтаже изделий первых двух уровней. Отнесем их к уровню 3 и обозначим через \widehat{P}^3 . Множество $\widehat{P}^3\subset\widehat{P}\setminus(\widehat{P}^1\bigcup\widehat{P}^2)$. И так далее, всего будет выделено некоторое ограниченное число уровней.

2. Графическое представление производства.

Всю структуру производства наглядно можно представить в виде направленного ациклического графа, называемого технологическим графом. Узлы этого графа соответствуют изделиям $n \in M^0$, используем для них те же обозначения. На верхнем, корневом уровне графа узлы, соответствующие изделиям, которые названы товарами. Обозначим множество этих узлов, как и множество товаров, т.е. \widehat{P}^1 .

Дуги, исходящие из узла $n \in M^0$ технологического графа, направлены к узлам, соответствующим тем деталям, из которых монтируется изделие n.

Определение 1. Из двух смежных узлов назовем прямым предшественником тот узел, из которого исходит дуга, а тот, к которому она подходит, — прямым потомком.

Определение 2. Совокупность прямых потомков, составляющих некоторое подмножество узлов технологического графа W, соответствует определенному выше множеству G(W). Назовем его проекцией множества W.

Проекцией множества G(W) будет множество G(G(W)) и т.д. Понятно, что число таких проекций ограничено. Двигаясь по дугам от узла к узлу,

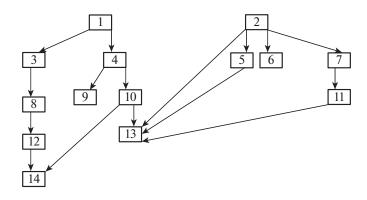


Рис. 2. Пример технологического графа.

неизбежно достигнем концевых узлов, которые разбросаны по разным множествам $G^n(W)$. Эти узлы соответствуют изделиям, производство которых не требует комплектующих из набора \widehat{P} . Они закупаются готовыми извне ассоциации или для их производства используются только комплектующие, произведенные вне ассоциации.

На рис. 2 представлен пример технологического графа. Узлы 1, 2 составляют корень графа множество \widehat{P}^1 . К множеству \widehat{P}^2 относятся узлы 3–7, 13. К множеству \widehat{P}^3 — узлы 8–10, 11, 13. Узлы 12, 13 принадлежат множеству \widehat{P}^4 , узел $14-\widehat{P}^5$. Концевыми узлами являются узлы 6, 9, 11, 13, 14.

Определение 3. Назовем рангом узла п технологического графа длину максимального пути (числа дуг) от корня графа до этого узла плюс 1.

В графе на рис. 2 у корневых узлов 1 и 2 ранг 1, узлы 3–7 имеют ранг 2, узлы 8–11 имеют ранг 3, узлы 12, 13 — ранг 4, а узел 14 — ранг 5.

Дугам технологического графа придадим веса.

Определение 4. Вектору изделий \bar{W} сопоставим $\bar{H}(\bar{W})$, вектор деталей всех уровней, необходимых для сборки \bar{W} . Набор деталей, составляющих вектор $\bar{H}(\bar{W})$, обозначим $H(\bar{W})$ и назовем полной проекцией вектора \bar{W} .

Вектор $\bar{H}(\bar{W})$ представляет собой сумму последовательных проекций $\bar{G}(\bar{W})+\bar{G}(\bar{G}(\bar{W}))+\bar{G}(\bar{G}(\bar{G}(\bar{W})))+\dots$ Продвигаясь по дугам вниз от узла n и используя веса дуг, легко посчитать, сколько всего комплектующих того или иного вида требуется для сборки изделия n.

3. Участники.

Каждое из предприятий производит некоторое подмножество продуктов из набора \widehat{P} . Участник $l \in L$ описывается одной из множества принятых моделей производства. В общей форме это выглядит так. Предприятие l располагает некоторым набором ресурсов, текущие объемы которых записаны в виде вектора $\overline{S}_l = (s_1^l, s_2^l, \dots, s_P^l)$. Задана вектор-функция $\overline{\Psi}^l(\overline{W}) : \mathbb{R}^{M^0} \to \mathbb{R}^p$, показывающая, сколько ресурсов каждого вида расходует предприятие при производстве вектора продукции \overline{W} .

Одним из ресурсов, составляющих набор S, являются финансы. Пусть для определенности это компонента s_1 . Расход ресурса s_1 отражает финансовые издержки предприятия на производство вектора продукции \bar{W} . В s_1 входят только собственные траты участника на сборку продукции, но не стоимость необходимых для этого комплектующих. Предполагается, что стоимость комплектующих, поставляемых участнику l, войдет в стоимость его изделий и вернется поставщикам после выполнения заказа.

4. Транспорт.

Осуществление поставок между участниками требует затрат и может осуществляться как силами производителей, так и специализированными транспортными компаниями. В данной статье для моделирования транспорта используется самое простое решение. Каждому предприятию l приписывается набор таблиц, $T_l = \begin{pmatrix} t_{l,r}^n \end{pmatrix}, n \in M^0$, в которых указаны цены доставки единицы продукции n от предприятия l другим предприятиям, т.е. r. Эти цены учитываются при взаиморасчетах участников.

Задача распределения производства по узлам технологического графа.

Центр входит в ассоциацию производителей под номером 0. Предположим, Центр принимает заказ Z на производство изделия $m\in \widehat{P}^{\,1}$ в объеме v_m . Производство объема v_m распределяется между теми участниками, которые специализируются на сборке этих изделий. После выполнения заказа Z готовые изделия m поступают в Центр в виде поставок $y_{l,0}^m$, $l\in L$.

Для выполнения заказа должны быть обеспечены поставки комплектующих по всем уровням технологического графа. Обозначим матрицу поставок как $Y=(y_{j,l}^n),\ n\in M^0,\ j,l\in L.$ Должны выполняться балансовые соотношения:

$$\forall l: \ \bar{G}(\bar{W}_l) = \sum_{j \in L} \bar{Y}_{j,l}.$$

Здесь \bar{W}_l – вектор продукции, производимый участником $l, \bar{Y}_{j,l}$ – вектор поставок изделий от участника j участнику l.

Кроме балансовых, должны выполняться ресурсные ограничения:

$$\forall j: \ \bar{\Psi}^{j}\left(\sum_{l\in L} \bar{Y}_{j,l}\right) \leq \bar{S}_{j}.$$

Пока в модели не рассматриваются запасы комплектующих. Все поставки формируются из изделий, произведенных на базе текущих ресурсов предприятий. Вектор поставок $\sum_{l\in L} \bar{Y}_{j,l}$ – это вектор изделий, произведенных предприятием j в рамках текущего заказа.

Согласно договоренности, компонента s_1 – это денежные средства, идущие на производство изделий. Суммировав величины $\psi_1^j\left(\sum_{l\in L} \bar{Y}_{j,l}\right)$ и транспортные расходы по всем поставкам, получим стоимость производства заказанно-

го объема изделий v_m . Ставится задача минимизировать эту стоимость:

$$\psi_1^l \left(\sum_{l \in L} \bar{Y}_{j,l} \right) + \sum_{n \in M^0} \sum_{j \in L} \sum_{l \in L} t_{j,l}^n \cdot y_{j,l}^n \to \min.$$

Ассоциация заинтересована в снижении себестоимости ее продукции, так как участвует в конкурентной борьбе за заказы. Разница между продажной стоимостью заказа и его себестоимостью формирует прибыль участников. Если вектор-функции 1—3 ресурсов линейны, то задача 1—3 является задачей линейного программирования.

5. Обзор схемы аукционов.

Современное развитие вычислительной техники и методов линейного программирования позволяет решать задачи очень большой размерности. Если сформулированная выше задача создания оптимального плана распределения заказа между производителями может быть адекватно представлена линейными соотношениями, то основная проблема формирования такого плана, вероятно, будет связана не с вычислениями, а с конструированием весьма громоздкой модели и наполнением ее конкретными данными. Для этого потребуется постоянный мониторинг ресурсов участников ассоциации, а также меняющихся технологических условий производства. Для достаточно большой ассоциации такой централизованный подход может оказаться слишком затратным, если вообще осуществимым. Поэтому естественно декомпозировать задачу, передав большую часть функций по оценке производственных мощностей предприятий и разработке общего плана производства самим предприятиям. Идея состоит в том, чтобы план производства вырабатывался в результате аукционов, на которых одни участники выбирают себе поставщиков из числа других участников.

Децентрализация с аукционной схемой — это способ декомпозировать представленную выше общую задачу распределения производства, поэтому для нее должны выполняться те же балансовые и ресурсные ограничения, и еще некоторые дополнительные, обусловленные декомпозицией. Переменные в рамках модели полагаем непрерывными.

Для иллюстрации схемы используем граф, изображенный на рис. 2.

Множество предприятий, производящих изделия из набора W, будем обозначать L(W).

Допустим, в Центр поступил заказ на производство некоторого объема w_m изделий m, пусть на рис. 2 — это будет изделие 1. У Центра имеются схемы технологических графов для всех изделий $n \in M^0$. Центр публикует этот заказ вместе с его полной проекцией, вектором $\bar{H}(\bar{w}_m)$. Участники на основании своих ресурсов решают, за производство каких объемов изделий n, составляющих вектор $\bar{H}(\bar{w}_m)$, они хотели бы и готовы взяться. Под эти объемы они публикуют заказы на поставки деталей из множеств G(n). Эти публикации суть объявление аукционов.

На заказы изделий G(n) должны отреагировать участники из множества L(G(n)). Они из предполагаемого ими объема производства выделяют какую-то его часть на поставки каждому участнику из L(n). Предприятия, производящие изделия, соответствующие концевым узлам, не нуждаются для их изготовления в поставках от других участников ассоциации и могут определять объемы их производства исходя только из своих ресурсов. Для планирования производства остальных изделий их изготовители должны знать, какими объемами комплектующих они располагают. Так, на рис. 2 участники $l \in L(4)$ должны сформировать пулы изделий 9 и 10, служащих деталями для изделия 4. Однако, прежде чем будет собран пул изделий 10, участники из L(10) должны определиться с объемом производства и поставок этих деталей производителям изделий 4. Чтобы аукционы были синхронизированы, они должны проводиться в определенном порядке. Этот порядок устанавливает Центр в соответствии с технологическим графом.

Определение 5. Назовем рангом проводимого участником $l \in L(n)$ аукциона на поставки комплектующих для изделия n ранг изделия n.

Условие 1. Аукционы более высокого ранга предшествуют аукционам более низкого ранга.

В рассматриваемом примере этот порядок выглядит так. Предприятия из множества L(12) суммируют предложения по комплектующим от участников из множества L(14). Эти предложения включают в себя объемы поставок и их цены с учетом транспортных расходов. Предложения ограничены объемами и сроками, объявленными в заказах. Если по каким-то позициям суммы предложений превосходят объем заказа, то участники из L(12) делают выбор между ними, отдавая предпочтение более дешевым вариантам. Сформировав пулы комплектующих, участники рассчитывают, какой объем изделий и по каким ценам они могут произвести из этих комплектующих в пределах объема, объявленного ими на аукционе. Так, в рамках примера, сформировав пулы из комплектующих 14, участники из множества L(12) рассчитывают, какой объем изделий 12 и по каким ценам они могут произвести. Определившись с объемом, производители изделий 12 делают предложения о поставках этих изделий участникам из L(8). На этом аукционы по изделиям 12 завершаются.

Далее по тому же сценарию проводят аукцион предприятия из L(8), выбирая между предложениями по комплектующим 12 и формируя свои предложения участникам из множества L(3). Затем такой же аукцион проводят предприятия из L(3) по комплектующим 8.

Предприятия из множества L(10) проводят отдельные аукционы по комплектующим от участников из множеств L(14), L(13) и определяются с объемом и ценами поставок изделий 10 предприятиям из L(4).

После этого проводят аукционы предприятия из множества L(4), отдельно по предложениям от участников из L(9) и L(10).

Наконец, предприятия из множества L(1) проводят аукционы по предложениям от участников из множеств L(3), L(4) по комплектующим 3 и 4. По

результатам этих аукционов они рассчитывают, какой объем изделий 1 и по каким ценам они могут произвести и объявляют результаты Центру. На этом заканчивается нисходящая (в смысле рангов изделий) волна аукционов.

Начинается завершающая фаза верстки плана по выполнению заказа. Центр назначает, какие доли от заказанных изделий m будут производить участники из множества L(m). Назначенные объемы, разумеется, не превосходят предложений участников. Участники из L(m) в соответствии с назначенными объемами распределяют задание на производство комплектующих между производителями из множества L(G(m)). И эти задания не превосходят те объемы, которые были предложены участниками из множества L(G(m)) на аукционах, проведенных участниками из L(m), и т.д. Восходящая волна заданий доходит до концевых узлов, и на этом формирование плана производства завершается.

6. Формализованное описание схемы аукционов.

Как выше, но в общем виде рассматриваем ситуацию, когда в Центр поступил заказ Z на производство изделия $m \in M^0$ в объеме w_m . Схема разбивается на несколько этапов.

Этап 1. Центр рассчитывает и объявляет участникам вектор всех необходимых для исполнения заказа деталей $\bar{H}(\bar{w}_m)$.

Этап 2. Участники выбирают векторы изделий $\bar{W}^{2,l}=(w_1^{2,l},w_2^{2,l},\dots,w_{M^0}^{2,l}),$ $l\in L$, которые они хотели бы произвести в рамках данного заказа. Цифра 2 в верхнем индексе указывает на этап, на котором выбирается этот вектор производства. Участник l выбирает точку на подмножестве пространства \mathbb{R}^{M^0} , ограниченном ресурсными неравенствами

$$\bar{\Psi}^l(\bar{W}^{2,l}) \le \bar{S}_l$$

и требованиями заказа Z, т.е. неравенствами

$$w_n^{2,l} \le h_n(\bar{w}_m) \ \forall n \in M^0.$$

Затем объявляют аукционы на поставки комплектующих, необходимых им для производства вектора $\bar{W}^{2,l}$, т.е. на поставки компонент вектора $\bar{G}(\bar{W}^{2,l})$. Аукционы, объявленные участником l, обозначим A^l .

Этап 3. Это этап собственно аукционов, которые проводятся последовательно от более высоких рангов к низшим. К моменту проведения аукциона по поставкам деталей G(n) для изделия $n \in W^{2,l}$ участником l собран весь пул предложений по поставкам ему этих деталей и их ценам от разных производителей.

Участник j на аукционе A^l по комплектующей k предлагает объем поставок, который будем обозначать $Y_{jl}^{3,k}$ (цифра 3 в верхнем индексе указывает на этап).

С поставкой связывается записанная в табличной форме функция цен $c_{j,l}^k(\varsigma),\,\varsigma\in[0,Y_{j,l}^{3k}],$ зависящих от объема поставки $\varsigma.$ В цену входят назначенная производителем j стоимость заданного объема изделий и транспортные расходы.

Множество предложений от участника j по аукционам всех участников образует матрицу $Y_j^3 = \left(y_{j,l}^{3,k}\right)$, где $l \in L \setminus j, k \in M^0$. Матрицу цен $c_{j,l}^k(\varsigma)$ участника j обозначим C_j .

Весь корпус предложений о поставках от всех участников вместе с таблицами цен обозначим как пару $(\hat{Y}^3,\hat{C}),\,\hat{Y}^3=\bigcup_{j\in L}Y_j^3,\,\hat{C}=\bigcup_{j\in L}C_j.$

Исходя из объемов и цен, предложенных ему комплектующих, участник l корректирует объем изделий n, который он желал бы произвести. Обозначим его $w_n^{3,l}$. Этот объем не должен превышать объявленный на этапе 2, т.е.

$$w_n^{3,l} \le w_n^{2,l} \ \forall n \in M^0.$$

Объем $w_n^{3,l}$ должен быть обеспечен поставками комплектующих, т.е.

$$g_k(\bar{w}_n^{3,l}) \le \sum_{i \in L} y_{j,l}^{3,k} \ \forall n, k \in M^0.$$

Выбрав объем производства $w_n^{3,l}$, участник l определяет объемы своих предложений по поставкам на аукционы более низких рангов, тех, где заявлена потребность в комплектующих n, т.е. он определяет вектор $\bar{Y}_l^{3,n} = \left(y_{lj}^{3,n}\right)$.

Предложения о поставках не должны превышать потребности, поэтому должны выполняться неравенства

$$y_{l,j}^{3,n} \le g_n(\bar{W}^{2,j}) \ \forall j \in L, \forall n \in M^0.$$

Таким образом, последовательно по аукционам формируется совокупность предложений (\hat{Y}^3, \hat{C}) .

Этап 4. На этом завершающем этапе по совокупности предложений (\hat{Y}^3,\hat{C}) верстается план производства, т.е. распределение производственных заданий и поставок. Это совокупность матриц $\hat{Y}^4(\hat{Y}^3,\hat{C}) = \left\{Y_l^4(\hat{Y}^3,\hat{C})\right\}_{l=1}^L$, где $Y_l^4(\hat{Y}^3,\hat{C})$ – матрица объемов комплектующих, которые участник l должен будет поставить другим участникам.

Для поставок должны выполняться неравенства

$$y_{i,l}^{4,n}(\hat{Y}^{3},\hat{C}) \leq y_{i,l}^{3,n} \ \forall l,j \in L, \ \forall n \in M^{0},$$

т.е. задания участнику j по плану не должны превышать его предложения.

Чтобы избежать неоднозначности при формировании плана, можно условиться, что при равенстве цен комплектующих от разных производителей предпочтение отдается поставщику с меньшим порядковым номером $j \in L$. Процедура выбора значений $y_{j,l}^{4,n}$ рекурсивная и организована в виде восходящей волны по технологическому графу.

Производитель j дожидается получения заданий на производство изделий n от всех участников l, которым он посылал предложения $y_{j,l}^{3,n}$. Предполагается, что ответ он должен получить от всех таких участников, даже если объем задания равен нулю.

После этого участнику j известен весь объем изделий n, который ему необходимо произвести. Это будет $w_n^{4,j} = \sum_{l \in L} y_{j,l}^{4,n}(\hat{Y}^3,\hat{C})$. Под этот объем участ-

ник j определяет вектор необходимых комплектующих $\bar{G}(\bar{w}_n^{4,j})$. Для каждой из компонент k этого вектора на аукционах A^j был создан пул комплектующих объемом $\pi_k^j = \sum_{l \in L} y_{l,j}^{3,k}$. Если предложения $y_{j,l}^{3,n}$ были корректны (см. пра-

вила 1–3 далее), то $w_n^{4,j} \leq w_n^{3,j} \ \forall n \in M^0$ и объемы этих пулов достаточны для того, чтобы обеспечить комплектующими k производство всех компонент вектора $\bar{W}^{3,j}$, т.е. выполняются неравенства

$$\sum_{n \in M^0} G_k(\bar{w}_n^{4,j}) \le \sum_{n \in M^0} G_k(\bar{w}_n^{3,j}) \le \pi_k^j.$$

Участник j выбирает из объема π_k^j объем $G_k(\bar{w}_n^{4,j})$, начиная с наиболее дешевых предложений. Затем j распределяет задания тем производителям, предложения которых вошли в объем $G_k(\bar{w}_n^{4,j})$, т.е. определяет для каждого из них компоненты $y_{l,i}^{4,k}(\hat{Y}^3,\hat{C})$ матрицы поставок $Y_l^4(\hat{Y}^3,\hat{C})$.

Комплектующие k могут входить в разные изделия производителя j. Для j можно рассчитать суммарную стоимость поставок деталей k от производителей l, получивших в ходе этапа 4 задание от j на их поставки. Обозначим ее d_i^k :

$$d_{j}^{k}(\hat{Y}^{4},\hat{C}) = \sum_{l \in L} c_{l,j}^{k} \left(y_{l,j}^{4,k}(\hat{Y}^{3},\hat{C}) \right).$$

Формирование плана производства заканчивается, когда волна заданий доходит до концевых узлов.

Для рассмотренной схемы установлено, что участникам аукционов целесообразно придерживаться следующих правил.

Правило 1. Участник j, определяя на этапе 2 желаемый вектор производства $\bar{W}^{2,j}$, делает выбор среди недоминируемых допустимых векторов, т.е. среди недоминируемых векторов, удовлетворяющих ограничениям 4 и 5.

Правило 2. Участник j на этапе 3 определяет объемы производства $w_n^{3,j}$, равные $\min[w_n^{2,j};\pi_n^j]$, где $\pi_n^j=\sum\limits_{l\in L}y_{l,j}^{3,n}$ – пул комплектующих n, собранных на аукционах A^j .

Правило 3. Участник j, определяя на этапе 3 свои предложения по поставкам изделия n, величины $y_{il}^{3,n}$, действует следующим образом:

если $w_n^{3,j} = H_n(\bar{w}_m)$, то $y_{jl}^{3,n} = G_n(\bar{W}^{2,l}) \ \forall l \in L$, т.е. если выбранный участником j объем производства $w_n^{3,j}$ равен общей потребности в изделиях n по заказу Z (больше $H_n(\bar{V}_m)$ он быть не может в силу условия 2), то j предлагает каждому производителю l тот объем изделий n, который объявлен l на аукционах A^l ;

если $w_n^{3,j} < H_n(\bar{V}_m)$, то j выбирает значения $y_{jl}^{3,n}$ такими, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\sum_{l \in L} y_{jl}^{3,n} = w_n^{3,j}$$

И

$$y_{il}^{3,n} \le G_n(\bar{W}^{2,l}) \ \forall l \in L.$$

Описанная схема представляется достаточно прозрачной и эффективной в смысле поиска допустимого плана, если число участников велико и их ресурсы производства значительно превосходят те, которые необходимы для исполнения заказа. Однако, как нетрудно видеть, аукционная схема не гарантирует формирования плана во всех тех случаях, когда допустимый план существует.

Рассмотрим ту же схему производства в предположении, что каждый участник производит не более одного изделия из множества изделий $\bar{H}(\bar{w}_m)$, необходимых для выполнения заказа Z. Это эквивалентно условию, что каждое предприятие l, получив от Центра сведения об очередном заказе, выделяет доли своих ресурсов под производство тех или иных изделий из множества $\bar{H}(\bar{w}_m)$. В результате определяется $w_{l,n}^{\max}$, максимальный допустимый объем производства каждого из изделий участником l, и неравенство $\bar{\Psi}^l(\bar{W}^{2,l}) \leq \bar{S}_l$ заменяется на неравенство

$$w_n^{2,l} \le w_{l,n}^{\text{max}}, \quad n \in M^0, \quad l \in L.$$

Тогда формально можно считать, что каждому предприятию l, желающему участвовать в выполнении заказа Z, сопоставлено ровно одно изделие $\tilde{n}(l) \in H(\bar{V}_m)$ и каждому изделию $n \in H(\bar{V}_m)$ соответствует множество готовых его производить участников $\tilde{L}(n)$.

Yсловие 2. Для каждого изделия $n\in H(\bar{w}_m)$ верно неравенство $\sum\limits_{l\in \tilde{L}}w_{l,n}^{\max}\geq h_n(\bar{w}_m).$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Данная схема аукционов приводит к допустимому решению тогда и только тогда, когда выполняется условие 2.

Замечание. Опишем компьютерную имитацию аукционной схемы.

Рассмотренные выше схемы проведения аукционов оставляют вопросы, на которые сложно искать ответы аналитическими методами, поэтому представляется целесообразным проведение исследований предложенных схем в режиме имитации на компьютерной модели. Такая модель должна строиться как сеть, состоящая из узлов, каждый из которых соответствует участнику ассоциации. В общих чертах имитационная система выглядит так. Для каждого узла создается своя модель производства, соответствующая описанию, сделанному выше в подразделе 3.2, п. 3. Выбираются набор изделий M^0 и производственные графы для них. Моделируются правила аукционов. Для каждого узла задается начальное состояние ресурсов, и системе предлагается последовательность заказов на производство изделий из множества \widehat{P}^1 .

Откликом системы на заказ будут план сборки (если аукционная схема его находит) и изменение состояния узлов по результатам выполнения заказов. Естественно, при исследовании желательно также реализовать решение общей задачи. Сравнивая результаты решений общей задачи и аукционных, удастся сделать выводы об эффективности аукционной схемы.

Предложенная модель может найти применение в задачах планирования хозяйственной деятельности при возможности конкурентных взаимодействий игроков.

4. Информационное обеспечение в крупномасштабных проектах многоукладной экономики

Как отмечалось, для использования описанных концептуальных построений необходима соответствующая инфраструктура. Вопросам разработки данных, на которых будет базироваться специализированный информационно-вычислительный комплекс и которые составляют один из важнейших разделов программы цифровизации, посвящается этот раздел. Что касается алгоритмического инструментария для проведения расчетов и вычислительных экспериментов, то научное и прикладное сообщество располагают общирным арсеналом методов оптимизации, решения теоретико-игровых задач и разработки имитационных систем [5].

В данном разделе изложение следует публикации соавторов [8].

Особое место среди крупномасштабных экономических систем страны занимает оборонно-промышленный комплекс (ОПК), где наряду с техническими и экономическими проблемами необходимо принимать чрезвычайно ответственные оперативные решения по организационным и технологическим инновациям.

Естественно, ОПК является частью экономического комплекса страны, но имеет и специфику, которую необходимо учесть в процессе моделирования. В организационном плане это проявляется прежде всего в формах управления. Управление носит смешанный децентрализованный характер, осуществляется как государственно-плановое, директивное, так и рыночное воздействия.

В основном упор делается на плановый характер государственных заказов через принятие решений в интересах государства на предприятиях с государственной собственностью, но учитываются и рыночные механизмы, в частности ценовые механизмы и спрос при производстве гражданской продукции и при поставках на экспорт.

Кроме того, имеется особенность в производимой продукции. Выпускаемая продукция подразделяется на три группы. Основная продукция военного назначения в экономической терминологии носит характер не прямого товарного характера для потребления на внутреннем рынке, а услуги, обеспечивающие защиту от внешнего воздействия. Потребление в ОПК перспективных научных достижений мира имеет приоритетный характер в силу указанной специфической услуги.

Основная военная продукция, поставляемая на внешний рынок, имеет характер рыночного товара. Продукция гражданского назначения является товаром прямого потребления и входит в состав товаров рыночного характера.

Термин "Развитие ОПК" подразумевает изменение во времени характеристик состояния комплекса и предполагает, что позитивное улучшение состояния происходят в направлении прогресса составляющих комплекса и связывается с новейшими технологиями. Управление развитием предполагает осуществление воздействий на процесс развития ОПК, обеспечивающих улучшение характеристик его состояния.

Вследствие этого при использовании математических моделей предполагается возможность выбора всех свободных переменных модели для улучшения по совокупности формально заданных целей. Таким образом, с методологической точки зрения для выработки и реализации рациональных управляющих воздействий необходимо построить модели изменения переменных состояния, определить параметры, могущие повлиять на развитие, определить цели и затем выработать стратегии в зависимости от наличной информации, ведущие к прогрессу управляемой системы.

Очевидно, что задача управления развитием ОПК является сложной задачей, требующей анализа большого объема данных при принятии решений по управлению, в том числе предполагает использование элементов математического моделирования в интересах принятия решений в процессе программно-целевого и ситуационного управления развитием ОПК.

С целью формирования эффективного инструмента информационного взаимодействия с заинтересованными органами Центра, интегрированными структурами и организациями ОПК при подготовке и решении широкого круга управленческих и производственных задач в сфере ОПК, начиная с 2012 г., Минпромторгом России разработана концепция и реализуются мероприятия по созданию и развитию Единого информационного пространства ОПК (далее — ЕИП ОПК) [24].

ЕИП ОПК представляет собой территориально распределенные автоматизированные информационные системы и информационные ресурсы, объединенные общими правилами обмена данными и телекоммуникационной системой с защищенными каналами связи.

Реализация концепции развития ЕИП ОПК осуществляется по четырем ключевым направлениям (см. рис. 3):

развитие нормативной базы и организационного обеспечения ЕИП ОПК; формирование инфраструктуры ЕИП ОПК;

развитие тематических баз данных и сервисов ЕИП ОПК;

создание интегрированного ресурса и организация информационного взаимодействия с внешними системами.

Создание и развитие тематических баз данных ЕИП ОПК основано на принципе сочетания централизованного и децентрализованного подходов к сбору, хранению и обработке информации.

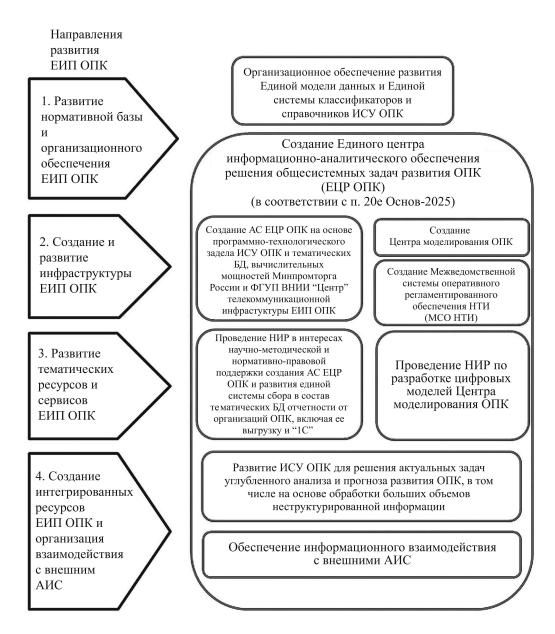


Рис. 3. Этапы создания и развития ЕИП ОПК.

5. Заключение

Изложен опыт разработки и приводятся примеры описания информационного пространства и комплекса математических моделей, которые обеспечивают в совокупности, на основе целостной и взаимоувязанной методологии системного подхода использование алгоритмов, программных комплексов прогнозирования и систем поддержки принятия решений на разных уровнях стратегического планирования развитием крупномасштабных проектов.

Комплекс концептуальных математических моделей управления развития включает:

- 1. Модели анализа и синтеза крупномасштабных проектов. Позволяют специалисту, подготавливающему решение, выбирать из перечня нужный в сложившейся ситуации набор критериев и ограничений. Таким образом, вопросы формирования структуры модели для плановых расчетов, комплектование модели критериями оптимизации, их содержательная трактовка, корректировка модели и исходных данных создают набор инструментов для стратегического планирования на базе цифровых платформ;
- 2. Базовая модель производства, цифровой двойник. Базовая модель предприятия описывает развитие производства, динамику материальных (продукция, производственные фонды) и финансовых потоков (инвестиции, активы, обязательства, собственный капитал) с учетом технологий и целей производства;
- 3. Сетевая модель отвечает на вопрос: какое распределение финансовых средств и ресурсов между предприятиями обеспечивает выполнение заданного стратегического плана при учете их экономических интересов на основе цифровых платформ.

Дальнейшие исследования в рамках представлений данной статьи соответствуют логике синтеза крупномасштабных проектов, описанной в [3]. Прежде всего необходима разработка системы показателей для построения производственных функций для отдельных предприятий и интегрированных структур. Эта процедура строится на идеях обработки нелинейных балансов финансовых потоков системы предприятий [26, 27].

Следующий шаг связан с анализом и проектированием экономических механизмов всей системы с учетом рыночных отношений и государственного регулирования, отношений собственности, системного подхода [9, 11, 23, 28].

В моделях общего равновесия рассматриваются максимально агрегированные агенты и проводится анализ влияния изменения экономических механизмов, который позволяет сделать выводы о степени и направлении влияния наборов механизмов на деятельность предприятий крупномасштабных проектов. К числу таких механизмов может быть отнесена программа инвестирования в национальные проекты и развития инфраструктуры за счет целевого кредитования, выпуска долгосрочных бумаг под проектную деятельность, изменение механизмов финансового взаимодействия с внешним миром. В перспективе может быть поставлен вопрос о выборе наиболее эффективных механизмов экономической деятельности отдельных агентов и системы в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
- 2. Васильев С.Н., Цвиркун А.Д. Проблемы управления развитием крупномасштабных систем в современных условиях // Управление развитием крупномасштабных систем. (Современные проблемы. Вып. 3). М.: Физматлит, 2018. С. 12–42.

- 3. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.
- 4. Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К., Соловьев М.М. Моделирование развития крупномасштабных систем. М.: Экономика, 1983.
- 5. *Ерешко Ф.И.* Математические модели и методы принятия согласованных решений в активных иерархических системах. Дисс. на соискание уч. степ. д-ра техн. наук. Специальность: 05.13.10 Управление в социальных и экономических системах. М.: ИПУ РАН, 1998.
- 6. *Гермейер Ю.Б.*, *Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем управления / Сб. Проблемы прикладной математики и механики. 1-е изд. М.: Наука, 1971.
- 7. *Глушков В.М.* Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС. М.: Статистика, 1975.
- 8. Довгучиц С.И., Мушков А.Ю., Ерешко Ф.И. Математическое моделирование в решении задач информационно-аналитического обеспечения управления развитием оборонно-промышленного комплекса // Научн. вестн. оборонно-промышленного комплекса России. 2021. № 1. С. 5–15.
- 9. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
- 10. *Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К.* Структура многоуровневых и крупномасштабных систем. Синтез и планирование развития. М.: Наука, 1993.
- 11. *Поспелов И.Г.* Системный анализ рыночной экономики. Уч. пос. М.: МФТИ, 2018.
- 12. Decentralization, Wikipedia article, https://en.wikipedia.org/wiki/Decentralization
- 13. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
- 14. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Игры с иерархической структурой // Математическая энциклопедия. М.: Сов. Энциклопедия, 1979. Т. 2. С. 478–482.
- 15. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание, 1973.
- 16. Ватель И.А., Ерешко Ф.И., Кононенко А.Ф. Игры с фиксированной последовательностью ходов и иерархические системы управления в экономике / Сб. Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ АН СССР, 1974. С. 86–99.
- 17. *Ерешко Ф.И.*, *Кононенко А.Ф.* Решение игры с правом первого хода при неточной информации о цели партнера // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 217–221.
- 18. Горелов М.А. Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // АиТ. 2011. № 3. С. 124–144. Gorelov M.A. Maximal Guaranteed Result for Limited Volume of Transmitted information // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 580–599.
- 19. *Горелов М.А.*, *Ерешко Ф.И.* О моделях централизации и децентрализации управления в цифровом обществе. Монография "Контуры цифровой реальности. Гуманитарно-технологическая революция и выбор будущего". Под ред. В.В. Иванова, Г.Г. Малинецкого, С.Н. Сиренко. М.: Ленанд, 2018.
- 20. Горелов М.А., Ерешко Ф.И. Информированность и децентрализация управления // АиТ. 2019. № 6. С. 156–172.
 - Gorelov M.A., Ereshko F.I. Awareness and Control Decentralization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 6. P. 1109–1122.

- 21. *Шваб Клаус, Маллере Тьерри.* COVID-19. Великая перезагрузка. ФОРУМ ИЗ-ДАТЕЛЬСТВО. Вып. 1.0. Всемирный экономический форум (ВЭФ), 2021.
- 22. *Ерешко Ф.И.*, *Турко Н.И.*, *Цвиркун А.Д.*, *Чурсин А.А.* Синтез организационных структур в крупномасштабных проектах цифровой экономики // АиТ. 2018. № 10. С. 121–142.
 - Ereshko F.I., Turko N.I., Tsvirkun A.D., Chursin A.A. Design of Organizational Structures in Large-scale Projects of digital Economy // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 10. P. 1836–1853.
- Ерешко Ф.И. Модельный взгляд на проблемы управления // Сб. трудов XIII Всеросс. совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. 2019. Москва, Россия, 2019. С. 63–69. https://doi.org/10.25728/vspu.2019.2074
- 24. *Ерешко Ф.И.*, *Мушков А.Ю.* Математическое моделирование в стратегическом планировании развития ОПК // Тр. XXI Межд. конф. "Информатика: проблемы, методы, технологии" (IPMT-2021). Воронеж, Россия, 2021. С. 9–18.
- 25. *Гасанов И.И.* Организация аукционов в сетевых моделях // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2021. М.: ИПУ РАН, 2021.
- 26. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986.
- 27. *Шананин А.А.* Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 81–85.
- 28. Васильев С.Н., Цвиркун А.Д. Проблемы управления развитием крупномасштабных систем // Тр. Второй Межд. конф. "Управление развитием крупномасштабных систем" (MLSD'2008). М.: ИПУ РАН, 2008. С. 9–18.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 02.09.2021

После доработки 12.11.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. И.В. ЧЕРНОВ, канд. техн. наук (ichernov@gmail.com) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СЦЕНАРНЫЙ АНАЛИЗ УЯЗВИМОСТИ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

Представлены результаты разработки методологии сценарного анализа уязвимости сложной системы. Рассмотрена иерархия понятий, характеризующих уязвимость сложной системы. Предложена система формальных моделей, которая представляет собой общую модель уязвимости. Выделены различные типы уязвимости, которые могут привести к нарушению целевого функционирования элементов системы и/или повреждению структуры системных отношений. Для имитационной модели представлено математическое исследование, которое дает возможность провести сценарный анализ обнаружения уязвимости изучаемой сложной системы.

Ключевые слова: управление безопасностью, сценарная система, модель уязвимости, сложная система, базисный сценарий.

DOI: 10.31857/S0005231022050099, **EDN:** ABWIDJ

1. Введение

К существенным отличительным чертам сложной системы (СС) как объекта управления можно отнести большое число ее элементов и не всегда очевидные связи между ними; зачастую большое количество различных исследуемых аспектов и связанных с ними показателей и параметров; наличие неопределенности; подвижность структуры, обусловленную высокой степенью вариативности элементов и их взаимосвязей; проблемы мониторинга и управления; принципиальную сложность построения точных математических моделей. Важнейшей особенностью систем рассматриваемого класса является также то, что их ключевым элементом является человек, одновременно выступающий и как субъект, и как объект управления. Характерным примером систем данного класса является социально-экономическая система в масштабах государства, административно-территориального образования, отрасли и т.д.

Исследователи выделяют ряд задач управления безопасностью, решаемых в зависимости от внутренней ситуации и влияния внешней среды на состояние и развитие СС [1]. Наиболее общие задачи на этапе принятия решений — задачи мониторинга, прямого управления и поиск решения обратной задачи управления. В настоящей статье СС рассматривается в качестве объекта управления, при этом используется его модельное описание как формальной системы [2–4].

Специфические задачи решаются на этапе исполнения решений, являющихся по сути управленческими воздействиями. Цель разработки предлагаемой методологии — синтез сценариев поведения СС как объекта управления, приводящих к достижению поставленной цели или желаемого результата. Поиск эффективного управления осуществляют на основе методологий системного и управленческого анализа; наиболее современными подходами являются сценарные модели и методы.

Сценарное исследование представляет собой современный метод изучения процессов функционирования и прогнозирование развития СС. При этом в качестве основного инструмента исследования выступают формализованные процедуры формирования и анализа сценарного множества в различных стратах СС, а целью исследования является синтез сценария с заданными свойствами [2–5].

Технология проведения сценарного исследования содержит три основные стадии: формирование сценарной системы, сценарный анализ сгенерированного с ее помощью спектра сценариев, сценарный синтез, т.е. выбор сценария по заданным критериям [4].

Сценарная система представляет собой комплекс взаимосвязанных компонентов. Сценарная система позволяет от экспертных перейти к формализованным описаниям важнейших элементов модели исследования СС: предметной области с определением экспертно-значимых событий, динамической модели преобразования состояний, модели учета неопределенности, правил выбора сценарных элементов. Центральным элементом сценарной системы является модель совместного поведения объекта исследования и внешней среды [4]. Каждая подобная модель отвечает за формализованное представление факторов, отражающих динамику развития и изменение состояния реального объекта. Основным инструментом являются методы формального конструирования сценария и операций над его составными частями. Подобные инструменты являются развитием классических схем исследования операций.

В качестве инструмента научного исследования и практического использования сценарная методология включает в себя следующие основные составляющие: сценарная система, система сценарного анализа и система сценарного синтеза. Результат применения указанного инструментария – спектр сценариев функционирования и развития изучаемого объекта, представленного в виде формальной СС.

Построение сценарной системы представляет собой ряд формализованных процедур: выделение системных элементов (СЭ) сценарной системы, в том числе активных; формирование метанабора описания СЭ; определение сценарных шкал и характеристик элементов сценария.

Система сценарного анализа реализует: определение цели и желательных с точки зрения заданных критериев характеристик сценариев достижения цели; формализацию и стратификацию предметной области; формирование

экспертно-значимых разбиений предметной области; определение различного рода неопределенностей, определение их влияния, стратегий построения сценариев, а также критериев их оценки; реализацию формальных действий со сценариями; интерпретацию результатов проведенного анализа на языке предметной области.

Система сценарного синтеза реализует: определение концепции формирования сценария; выбор сценарных характеристик; определение сценарных инструментов синтеза; применение формальных операций над сценариями; синтез оптимальных характеристик сценария в смежных сценарных пространствах; интерпретацию сформированного сценария.

Подсистема сценарного исчисления представляет собой операционную среду, посредством которой может быть определен и выполнен ряд формальных функциональных преобразований. Трансформации могут подвергнуться отдельные элементы сценариев, сценарий в целом, элементы сценарной системы. В рамках сценарного исчисления рассматриваются вопросы полноты, непротиворечивости, математические характеристики системы сценарных операций.

В статье представлены исходные теоретические результаты сценарного исследования уязвимости СС, развитие которых предполагается в дальнейших публикациях.

2. Концептуальная модель уязвимости сложной системы

Уязвимость сложной системы следует рассматривать с учетом как ее внутренних характеристик, так и характеристик внешней среды. По сути, необходимо исследовать степень открытости объекта управления, рассматриваемого как СС, комплексному спектру воздействий и структуре его взаимосвязей с внешней средой. С этой точки зрения в модель объекта управления целесообразно включать факторы внешней среды и соответствующие им взаимосвязи. Особую актуальность такой подход приобретает при стратегическом управлении, одним из основных направлений которого является процесс установления таких долгосрочных устойчивых связей объекта управления и внешней среды, которые делают возможным реализацию поставленных целей. Стратегическое управление может как способствовать созданию уязвимостей, так и оказывать на них компенсирующее влияние или даже купировать при помощи направленных воздействий. Другой стороной стратегического управления является создание возможностей для реализации целей. В статье предлагается рассматривать стратегическое управление как процесс, повышающий управляемость сложной системы и снижающий ее уязвимость. В качестве одного из основных инструментов стратегического управления должны использоваться методы изменения структуры взаимосвязей объекта управления.

Разработка методов исследования уязвимости требует пояснения иерархии понятий, определяющих ее сущность: опасность, безопасность, угроза.

Под опасностью обычно понимают возможность возникновения обстоятельств, при которых материя, поле, энергия, информация или их сочетание могут таким образом повлиять на СС, что влечет за собой ухудшение или даже невозможность ее функционирования и развития [1]. При этом безопасность существования СС можно определить как динамическое состояние исследуемой системы, при котором могут быть предотвращены опасные состояния. Под угрозой понимается потенциально возможное событие, действие (воздействие), процесс или явление, которые могут привести к нанесению ущерба чьим-либо интересам. Таким образом, при реализации угрозы система переходит в опасное состояние.

Весь спектр возможных сценариев поведения СС описывается динамическими изменениями выделенных факторов и определяется структурой системы. При этом подмножество нежелательных сценариев определяет уязвимость системы. Следовательно, при анализе уязвимости необходимо выделить множество возможных сценариев. Для этого на начальном этапе необходимо построить, а затем исследовать модель сложной системы.

Концептуальная модель сценарного исследования уязвимости CC содержит следующие основные компоненты:

- формальная модель сложной системы [4];
- модель безопасности функционирования и развития СС;
- модели угроз;
- общая модель уязвимости СС.

В основу формального аксиоматического определения модели СС как объекта организационного управления положено понятие системного элемента [4], которое содержит:

- подмножество элементов исходной системы, сгруппированных по критериям, зависящим от целей исследования системы (субстрат системного элемента);
- набор отношений (внутренняя структура системного элемента);
- набор свойств, приписываемых отношениям (внутренний концепт системного элемента).

Для каждого системного элемента $\alpha \in \hat{A}$ определим: $S_{\alpha} = (B_{\alpha}, r_{\alpha}, p_{\alpha}),$ $B_{\alpha} \subseteq A_s, r_{\alpha} \subseteq R_s, p_{\alpha} \subseteq P_s$, где A_s – субстрат системы; R_s – структура системы; P_s – внутренний концепт системы. Внутреннее состояние внешней среды системы обозначим $\chi = (B_E, r_E, p_E)$, при этом $B_E \subseteq A_E, r_E \subseteq R_E, p_E \subseteq P_E$, где A_E – субстрат внешней среды системы, R_E – структура внешней среды системы, P_E – внутренний концепт внешней среды системы.

Пусть Y(S) – множество внутренних состояний системы, тогда $\nu \in Y(S)$ – внутреннее состояние системы $\nu = \cup_{\alpha \in \hat{A}} S\alpha$. Обозначим $E(\nu)$ – внешняя среда, а X(S) – множество состояний внешней среды системы, так что каждое состояние $\chi \in X(S)$. Тогда каждое расширенное состояние системы z определяется как совокупность внутреннего состояния системы и состояния внешней среды $z = (\chi, \nu)$. При этом расширенный субстрат системы определяется

как $A_{SE}=A_S\times A_E$. Это дает возможность исследовать уязвимость сложной системы на единой модели, которая включает расширенную структуру системы $R_{SE}=R_S\times R_E$, а также расширенный концепт системы $P_{SE}=P_S\times P_E$. В таком случае исследованию подвергается множество расширенных состояний системы Z, так что $z\in Z$, а также совместные характеристики CC и внешней среды ζ_{AE} .

2.1. Модель безопасности функционирования и развития СС

Модель безопасности СС содержит условия безопасности, классификацию ситуаций опасности, а также возможности обеспечения безопасности функционирования и развития.

Множество Z расширенных состояний системы представим в виде

(1)
$$Z = Z^{(\text{nav})} \cup Z^{(\text{sec})},$$

где $Z^{(\mathrm{nav})}$ — множество недопустимых состояний. Тогда множество $Z^{(\mathrm{sec})}$ является множеством безопасности системы S.

Пусть задано расширенное состояние \mathbf{z} системы S, а также прогноз $\boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{\Xi}$ возможных ее переходов в следующее состояние $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u})$ при применяемом управлении $\mathbf{u} \in U$. Рассмотрим характеристику возможных состояний системы при применении управления $\mathbf{u} \in U$.

Штатная ситуация — ситуация, которая находится в заданных пределах целевого режима функционирования и развития (ЦРФ)

(2)
$$\theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{sec})} \ \forall \zeta \in \Xi.$$

Cumyauus ожидаемой опасности — ситуация, при которой лицо, принимающее решение (ЛПР), прогнозирует возможный выход за пределы безопасности СС (т.е. выход системы из безопасного состояния)

(3)
$$\exists \zeta \in \Xi$$
, что $\theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{nav})}$ при применяемом управлении $\mathbf{u} \in U$.

Кризисная ситуация — ситуация выхода системы за пределы безопасности, причем для обеспечения безопасного функционирования СС существуют несколько вариантов управленческих воздействий

(4)
$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{sec})}$$
 при $\mathbf{u} \in U^{(\text{sec})} \subseteq U$.

Критическая ситуация — ситуация выхода системы за пределы безопасности, причем для обеспечения безопасного функционирования системы существует единственный вариант управления

(5)
$$\theta = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}^{(\text{sec})}) \in Z^{(\text{sec})} \quad \text{при} \quad \mathbf{u}^{(\text{sec})} \in U,$$
$$\theta = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{nav})} \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{u}^{(\text{sec})} \in U.$$

Неконтролируемая ситуация — ситуация, которая возникает при обнаружении выхода значений ряда параметров СС за допустимые, с точки зрения обеспечения безопасности, пределы. При этом невозможно найти такие управленческие решения, которые позволят избежать выхода СС в целом из безопасного состояния и проявления связанных с ним негативных последствий (кризисов, чрезвычайных и критических ситуаций, аварий, катастроф и т.д., а также ущербов различного типа недопустимого масштаба).

(6)
$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{nav})} \quad \text{при} \quad \forall \mathbf{u} \in U.$$

4резвычайная ситуация (ЧС) — неблагоприятное сочетание факторов и обстоятельств, нарушающих условия безопасности, т.е. выполняется соотношение (6).

2.2. Модели угроз

Рассмотрим системный элемент S_{α} $\alpha \in \hat{A}$. Для этого системного элемента определим угрозу $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)} \subseteq \Xi$ как фактор или действие, активизация которого гипотетически может привести к реализации нежелательных ситуаций с точки зрения исследователя или ЛПР. Если рассматривается СС в качестве формальной системы, то угрозой является совокупность влияний факторов системы и внешней среды, которые способны привести к существенному ухудшению состояния параметров этой системы.

Модель "Угроза-возмущение".

Моделируется вызванное угрозами распространение возмущений по структуре СС, отражаемое изменением значений отдельных ее параметров. В этой модели множество возможных несанкционированных изменений расширенного состояния $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ системы S можно рассматривать в качестве множества возможных угроз $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma^{(\alpha)} \subseteq \Xi$. При этом для системных элементов исследуется возможность выхода за пределы безопасности.

Модель "Угроза-ЧС".

В качестве угрозы в модели "Угроза-ЧС" определим возможность возникновения нежелательных ситуаций $Z^{\zeta(\mathrm{nav})}\subseteq Z^{(\mathrm{nav})}$, т.е. возможность существования последовательности состояний (ситуаций) $W(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_N,N)$, при которой $\mathbf{z}_N\in Z^{(\mathrm{nav})}$ — области нежелательных ситуаций. Целью обнаружения угроз является идентификация нежелательных возмущений, которые генерируют множество недопустимых событий $Z^{\zeta(\mathrm{nav})}\subseteq Z^{(\mathrm{nav})}$. Таким образом, решается обратная задача управления.

2.3. Общая модель уязвимости СС

Пусть имеются:

- множество системных элементов S_{α} $\alpha \in \hat{\mathbf{A}}$ системы S в текущий момент времени t;
- множество реализуемых по отношению к компоненте S_{α} $\alpha \in \hat{A}$ угроз $\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma^{(\alpha)}$;

- целевой режим функционирования C_{α} компоненты S_{α} ;
- область безопасности функционирования и развития $Z^{(sec)}$;
- меры удаленности $\rho_{\alpha}\left(\mathbf{z}(t),C_{\alpha}\right)$ текущего состояния $\mathbf{z}_{\alpha}(t)$ от ЦРФ C_{α} ;
- допустимая граница удаленности ε_{α} ;
- мера удаленности $\rho_S(Z^{(\text{sec})}, \rho_\alpha)$ от области безопасности $Z^{(\text{sec})}$;
- величина ущерба $W\left(\rho_{\alpha}\left(\mathbf{z}(t),C_{\alpha}\right)\right)$ при удаленности текущего состояния $\mathbf{z}_{\alpha}(t)$ от ЦРФ C_{α} .

Определение 1. Системный элемент $S_{\alpha} \in S$ назовем уязвимым, если для его режима функционирования возможен выход из области безопасности $Z^{(\sec)}$ реализации существующей угрозы $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}$

(7)
$$\rho_S\left(Z^{(\text{sec})}, \rho_\alpha\right) > \varepsilon_\alpha.$$

Определение 2. Коэффициентом уязвимости $C_{\alpha}^{(\mathbf{z})}(\zeta,\Delta)$ системного элемента S_{α} назовем величину ущерба $D\left(\rho_{\alpha}\left(\mathbf{z}\left(t\right),C_{\alpha}\right)\right)$, который может возникнуть в случае осуществления угрозы $\zeta\in\Gamma^{(\alpha)}$ на временном отрезке Δ .

Следовательно, появляется возможность вычисления следующих величин [6]:

— минимального коэффициента уязвимости для множества угроз $\Gamma^{(lpha)}$

$$C_{\alpha}^{(\mathbf{z},\min)}(\zeta,\Delta) = \min_{\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}} C_{\alpha}^{(\mathbf{z})}(\zeta,\Delta);$$

— максимального коэффициента уязвимости для множества угроз $\Gamma^{(\alpha)}$

$$C_{\alpha}^{(\mathbf{z}, \max)}\left(\boldsymbol{\zeta}, \Delta\right) = \max_{\boldsymbol{\zeta} \in \Gamma^{(\alpha)}} C_{\alpha}^{(\mathbf{z})}(\boldsymbol{\zeta}, \Delta);$$

— минимального коэффициента уязвимости для компонентов СС

$$C^{(\mathbf{z},\min)}(\zeta,\Delta) = \min_{\alpha \in \hat{A}} C_{\alpha}^{(\mathbf{z},\min)}(\zeta,\Delta);$$

— максимального коэффициента уязвимости для компонентов СС

$$C^{(\mathbf{z}, \max)}(\zeta, \Delta) = \max_{\alpha \in \hat{A}} C_{\alpha}^{(\mathbf{z}, \max)}(\zeta, \Delta).$$

3. Исследование уязвимости методами сценарного анализа для графовой модели

Описание динамики поведения формальной системы проведем на основе аппарата операторных графов, в частности знаковых, взвешенных и функциональных графов [4].

3.1. Описание модели

Формальную систему (модель объекта управления и внешней среды) S представим в виде орграфа G(Z,A). Для каждой вершины подобной модели можно определить параметр z_j . Определим в качестве расширенного состояния СС пару (\mathbf{z},A) , в котором вектор-столбец $\mathbf{z}=\{z_j,1\leq j\leq n=\tilde{N}\}$ задает значения исследуемых параметров; расширенная структура R_{SE} системы задана матрицей смежности A: элемент a_{ij} $(i,j\in\tilde{N})$ определяет свойства (факт и характер) попарной взаимосвязи между элементами z_i и z_j .

Для сценарного исследования оперирующая сторона (субъект управления) располагает следующими средствами анализа на временном горизонте $\Delta = [0, T]$, зафиксированными в квазиинформационной гипотезе (КИГ) [4]:

- измерять состояния системы $(\mathbf{z}(\tau), A(\tau))$ в моменты времени $\tau \in \Delta$;
- на основе заданного критерия $Q^{(\mathrm{3H})}(\tau), \ \tau \in \Delta^{(\mathrm{3H})} \subseteq \Delta,$ сформулированного в КИГ, выделять экспертно-значимые состояния (события) $\mathfrak{I}^{(\mathrm{зн})}=$ фиксировать $= (\mathbf{z}^{(3H)}(\tau), A^{(3H)}(\tau))$ И ИХ избранную последовательность менную последовательности виле экспертно-значимых событий (93C) - сценария $\mathfrak{I}^{(3H)}(\tau) = \{ (\mathbf{z}^{(3H)}(\tau), A^{(3H)}(\tau)), \tau \in \Delta^{(3H)} \},$ $\Delta^{(3H)} = \Delta$ последовательность $\mathfrak{I}(\tau) = \{ (\mathbf{z}(\tau), A(\tau)) ,$ $\tau = 0, 1, \dots, T$ представляет собой пошаговую последовательность событий за период Δ (пошаговый детерминированный сценарий поведения системы) [4];
- в каждый момент времени $\tau \in \Delta$ определять мгновенные изменения состояния, в том числе:
 - выделять мгновенные изменения $\delta \mathbf{I}(\tau) \subseteq E^n$ значений параметров $\mathbf{v}(\tau)$ в вершинах X орграфа G(X,E) (мгновенные импульсы) и группировать их в виде k-шагового процесса импульсных возмущений, начатого в момент времени t: $\delta \mathbf{Im}(t,k) = (\delta \mathbf{I}_j(\tau), \ 1 \le j \le n; \ t \le \tau \le t+k)$, при этом процесс импульсных возмущений $\delta \mathbf{Ia}(t)$ с началом в момент времени t будем называть автономным, если $\delta \mathbf{Ia}(\tau) = 0, \ \tau > t$;
 - определять мгновенные изменения $\delta A(\tau) \subseteq E^{n \times n}$ структуры $A(\tau)$, т.е. элементов матрицы смежности орграфа G(X,E) (мгновенные изменения структуры) и группировать их в виде k-шагового процесса структурных возмущений, начатого в момент времени $t\colon \delta\Phi(t,k)==(\delta A(\tau),\ t\leq \tau\leq t+k);$ процесс структурных возмущений $\delta Aa(t),$ для которого $\delta Aa(\tau)=0,\ \tau>t,$ назовем автономным с началом в момент времени t;
 - регистрировать k-шаговый процесс комплексных возмущений, начатый в момент времени t: $\delta K(t,k)=(\delta {f Im}(t,k),\delta \Phi(t,k));$
- определять структуры неопределенности, в том числе:
 - на множествах $\delta \mathbf{I}(\tau) \subseteq \Omega \delta \mathbf{I}(\tau)$ в виде квазиинформационной гипотезы возможных мгновенных импульсов в моменты времени $t \geq \tau$;

- на множествах $\delta A(\tau) \in \Omega \delta A(\tau)$ в виде квазиинформационной гипотезы возможных структурных изменений в моменты времени $t \geq \tau$;
- на множествах $\delta K(\tau) \in \Omega \delta K(\tau)$ в виде квазиинформационной гипотезы возможных совместных изменений в моменты времени $t > \tau$.

Импульсные возмущения моделируют спонтанные возмущения или управленческие воздействия, вносимые в вершинах орграфа G(Z,A).

Структурные возмущения моделируют спонтанные изменения или управления элементов матрицы смежности, реализованные на дугах в момент времени τ .

Комплексные возмущения моделируют совместную реализацию обоих процессов.

Критерии выделения ЭЗС и структуры неопределенности позволяют определять условия формирования сценария, в том числе выбора эффективных сценариев в прикладных моделях системной динамики. Основные сценарные характеристики, которые определяют системные параметры устойчивости, стойкости и живучести, предложены в [3, 4, 7].

В зависимости от способа преобразования состояний, указанного в динамической модели системы, их изменение можно представить в каждый момент времени $\tau \in \Delta$ в виде:

- накопленных изменений значений параметров $\mathbf{I}(\tau) = \mathbf{z}(\tau) \mathbf{z}(\tau 1), t \le \le \tau \le t + k$, и фиксировать их в виде k-шагового импульсного процесса изменений (ИПИ) $\mathbf{Im}(t,k) = (\mathbf{I}(\tau), t \le \tau \le t + k)$;
- накопленных структурных изменений $aA(\tau) = A(\tau) A(\tau 1), t \le \tau \le t + k$, и фиксировать их в виде k-шагового процесса структурных изменений (СПИ) $\Phi(t,k) = (aA(\tau), t \le \tau \le t + k)$;
- накопленных комплексных изменений $K(\tau)$ и фиксировать их в виде комплексного процесса изменений (КПИ) $K(t,k) = (\mathbf{Im}(t,k), \Phi(t,k))$ [6].

Динамическую модель распространения возмущений и преобразования состояний определим следующими соотношениями при $\tau=1,2,\ldots$:

(8)
$$\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau - 1) + \mathbf{I}(\tau),$$

(9)
$$A(\tau) = A(\tau - 1) + \delta A(\tau),$$

причем накопленный импульс определяется выражением

(10)
$$\mathbf{I}(\tau) = A(\tau - 1)\mathbf{I}(\tau - 1) + \delta \mathbf{I}(\tau).$$

Здесь $\mathfrak{I}(\tau) = (\mathbf{z}(\tau), A(\tau))$ – текущее состояние системы в момент времени τ ;

— $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^{(0)}$ – начальные значения параметров,

- $\mathbf{z}(t)$ текущее расширенное состояние системы в момент времени t;
- $-A(\tau)$ матрица смежности в момент времени τ ;
- $\mathbf{I}(au)$ импульс, накопленный к моменту времени au,
- $\mathbf{Im}(0) = \delta \mathbf{Im}(0)$ начальный импульс;
- $-\delta \mathbf{I}(au)$ мгновенный импульс в момент времени $au=0,1,2\ldots$

Преобразование состояний системы происходит по следующему алгоритму в момент времени $\tau = 1, 2, \dots$:

- на вход алгоритма подаются состояние $\mathfrak{I}(\tau-1)$ и накопленный импульс $\mathbf{I}(\tau-1);$
- вносится текущий мгновенный импульс $\delta \mathbf{I}(\tau)$;
- вычисляется текущий накопленный импульс по правилу (10);
- по правилу (8) вычисляются текущие значения параметров $\mathbf{z}(\tau)$;
- вносится структурное аддитивное изменение (возмущение) $\delta A(\tau)$, и матрица смежности преобразуется по правилу (9);
- проверяется условие завершенности горизонта сценария t=T: в случае t < T проводится очередной шаг; в случае t=T процесс завершается.

Пусть задан комплексный процесс возмущений. Тогда в соответствии с указанным алгоритмом преобразования состояний системы (8)–(10) может быть получена последовательность состояний $\Im\left(\delta K\left(t,k\right)\right), \Im\left(\delta K\left(\tau,k\right)\right) = \{(\mathbf{z}\left(\tau\right),A\left(\tau\right))$ при $t\leq\tau\leq t+k\}$, которую назовем k-шаговым детерминированным сценарием развития системы (8)–(10), соответствующим комплексному процессу возмущений $\delta K(t,k)$.

3.2. Математическое исследование процессов на взвешенном орграфе

Рассмотрим математические свойства системы (8)–(10) при постоянной матрице смежности.

Сформулируем свойства преобразования состояний системы (8)–(10) при реализации импульсного процесса возмущений $\delta \mathbf{Im}(t,k)$.

- 1. Для любого импульсного процесса изменений $\mathbf{Im}(t,T)$ справедливо равенство $\mathbf{I}(t) = \mathbf{z}(t) \mathbf{z}(t-1) = \sum_{\tau=0}^t A^{t-\tau} \delta \mathbf{I}(0) = \mathbf{f}(A,t)$ для всех $t=1,2,\ldots,T$, $\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau-1) + \mathbf{I}(\tau)$, где $\delta \mathbf{Im}(t,k) = (\delta \mathbf{I}(\tau), t \leq \tau \leq t+k)$ импульсный процесс возмущений.
- 2. Пусть задан $\delta {f Ia}(t_0)$ автономный импульсный процесс возмущений (АИПВ).

Процессу $\delta \mathbf{Ia}(t_0)$ соответствуют:

- k-шаговый процесс изменений $\mathbf{Ia}(t_0,k)\,\mathbf{Ia}(t_0+\tau)=A^{\tau}\delta\mathbf{Ia}(t_0)$ для всех $\tau=1,2,\ldots,k,$
- пошаговый сценарий $\Re(\delta \mathbf{Ia}\left(t_{0}\right))$ с ЭЗС $\mathbf{z}(t)$

$$\Delta \mathbf{z}\left(t_{0},\tau\right) = \mathbf{z}\left(t_{0}+\tau\right) - \mathbf{z}\left(t_{0}\right) = \left[\sum_{i=1}^{\tau} A^{i}\right] \delta \mathbf{Ia}(t_{0}),$$

при этом выполнено: $(E-A)\Delta \mathbf{z}(t_0,\tau) = (E-A^{\tau+1})\delta \mathbf{Ia}(t_0), \ \tau=1,2,\ldots,k.$

3. Пусть существует матрица $(E-A)^{-1}$. Тогда для автономного импульсного процесса возмущений $\mathbf{Ia}(t_0)$ выполнено

$$\Delta \mathbf{z}(t_0, \tau) = (E - A)^{-1} (E - A^{\tau+1}) \delta \mathbf{Ia}(t_0), \quad \tau = 1, 2, \dots$$

Доказательство получаем методом математической индукции.

Накопленный импульс и текущее состояние могут быть получены с использованием приведенных выше выражений. Таким образом, можно перейти от разностных соотношений (8)–(10) к векторному уравнению изменения

состояний, что позволяет рассматривать величины $\delta \mathbf{I}(\tau)$ как внешние возмущения или управления. Поскольку в КИГ предполагается детерминированность преобразования состояний, то, налагая условия следования ЭЗС $\mathbf{z}(t)$ в виде ограничений на функцию изменения импульсов $\mathbf{f}(A,t)$ или иные условия осуществления импульсных процессов, можно получать различные сценарии функционирования СС, отражающие различные ситуации и внешние условия.

3.3. Представление импульсных процессов в экордановом базисе

Рассмотрим матрицу A как линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E^n . Выберем базис B в E^n , в котором матрица A представляется квазидиагональной верхней жордановой формой J_A :

$$J_A = \left\{ J_A^{(\xi)}, \xi = \overline{1, s} \right\}, \quad J_A^{(\xi)} = \lambda_{\xi} E_{p(\xi)} + H_{p(\xi)},$$

где $\lambda = \{\lambda_\xi\}$ — вектор собственных значений матрицы $A, p(\xi)$ — размерности соответствующих корневых подпространств $L^\xi, E_{p(\xi)}$ — единичные матрицы размерности $p(\xi), H_{p(\xi)}$ — матрица размерности $p(\xi)$ с единичными наддиагональными элементами, остальные ее элементы равны нулю [8]. Базис B можно выбрать как объединение базисов B_ξ корневых подпространств. Тогда выполнено соотношение

(11)
$$\sum_{k=1}^{s} n_k = n, \quad E^n = \sum_{k=1}^{S} L^{n_k}, \quad B = \bigcup_{k=1}^{S} B_k.$$

Пусть задано жорданово разложение матрицы смежности $A=Q_AJ_AQ_{A^{-1}}$, где система векторов $\mathbf{q}_A^{(\xi,p)}[\xi=\overline{1,s};p=\overline{1,p\left(\xi\right)}]$ является жордановым базисом (столбцы матрицы Q_A и строки матрицы $Q_{A^{-1}}$). Здесь J_A – жорданова форма матрицы $A,\ \xi$ – номер жордановой клетки, p – высота корневого вектора матрицы $A,\ p(\xi)$ – размерность ξ -й жордановой клетки, s – их количество, т.е.

$$(A-\lambda_{\xi}E)^p\mathbf{q}_A^{(\xi,p)}=\sum_{k=0}^pC_p^k\lambda_{\xi}^kA^{p-k}\mathbf{q}_A^{(\xi,p)}=0,\quad p=\overline{1,p(\xi)}\ \text{ для каждого }\ \xi=\overline{1,s}.$$

Положим

$$\mathbf{z}^{(A)}(t) = Q_A^{-1}\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{I}^{(A)}(t) = Q_A^{-1}\mathbf{I}(t), \quad \delta\mathbf{I}^{(A)}(t) = Q_A^{-1}\delta\mathbf{I}(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots,$$

т.е. введенные величины представляют собой текущее и исходное состояния, а также текущий накопленный и начальный импульсы, записанные в жордановом базисе матрицы A.

Рассчитаем суммарную матрицу $J_{\Sigma A}$ и вариацию изменений при различных вариантах жордановых клеток размерности $p(\xi)$:

 $C\pi y$ ч a й 1. $\delta_{\xi} \neq 1$, λ_{ξ} – действительное число.

Поскольку $\det{(E-J_{\xi d})}=(1-\lambda_{\xi})^{p(\xi)}\neq 0$, то $J_{\Sigma A}=(E-J_A)^{-1}\,(E-J_A^{t+1})$ при $J_A=J_{\xi d}$. По индукции можно показать, что

$$\left[(E - J_{\xi d})^{-1} \right]_{ik} = (-1)^{k-i+1} (\lambda_{\xi} - 1)^{i-k-1}, \quad i, k = 1, 2, \dots, p(\xi)$$

И

$$\left[-J_{\xi d}^{t+1} \right]_{kj} = -C_{t+1}^{j-k} \lambda_{\xi}^{t+1+j-k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, p(\xi),$$

следовательно,

$$-\left[(E - J_{\xi d})^{-1} J_{\xi d}^{t+1} \right]_{ij} = \sum_{k=1}^{p(\xi)} (-1)^{k-i} C_{t+1}^{j-k} \lambda_{\xi}^{t+1+j-k} (\lambda_{\xi} - 1)^{i-k-1} = f_{ij}(t, \lambda_{\xi}),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, p(\xi).$$

В частности, при $p(\xi) = 1$ получим $f_{11}(t,0) = \lambda_{\xi}^{t+1}(\lambda_{\xi} - 1)^{-1}$, а при $\lambda_{\xi} = 0$ $f_{ij}(t,0) = 0, i, j = 1, 2, \dots, p(\xi)$.

Таким образом, положив $\delta Ia_{j}\left(t_{0}\right)=\alpha_{j},\,j=1,2,\ldots,p(\xi),$ получим

$$\Delta v_i(t_0, t, \lambda, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \left\{ \left[(E - J_{\xi d})^{-1} \right]_{ij} + f_{ij}(t, \lambda) \right\} \alpha_j =$$

$$= B_i(\lambda, \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j=1}^{p(\xi)} f_{ij}(t, \lambda) \alpha_j,$$

где

$$B_i(\lambda, \alpha) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \left[(E - J_{\xi d})^{-1} \right]_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^{p(\xi)} (-1)^{j-i+1} (\lambda - 1)^{i-j-1} \alpha_j.$$

В частности,

$$B_i\left(0,\boldsymbol{\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \alpha_j.$$

Cлучай 2. $\lambda_{\xi}=1$.

Для поиска используем свойство биномиальных коэффициентов $\sum_{\tau=0}^t C_{\tau}^k = C_{t+1}^{k+1}$. Получим

$$\Delta v_i^{(A)}(t) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} [J_{\Sigma A}]_{ij} \left[\delta \mathbf{I}^{(A)}(t_0) \right]_j = t\alpha_i + \sum_{j=i+1}^{p(\xi)} C^{j-i} \alpha_j$$

Таблица

| $J_{\xi c} =$ | $\alpha = \mu_{\xi} \cos(\varphi_{\xi})$ | $\beta = \mu_{\xi} \sin(\varphi_{\xi})$ |
|---------------|--|--|
| | $-\beta = -\mu_{\xi}\sin(\varphi_{\xi})$ | $\alpha = \mu_{\xi} \cos(\varphi_{\xi})$ |

или при $t \to \infty$

$$\Delta v_i^{(A)}(t) = t\alpha_i + C^{k-i}\alpha_k + o\left(t^{-(k-i+1)}\right)$$
 при $k > i$,

где $k = \max_j \{\alpha_j \neq 0\}.$

Cлучай 3. λ_{ξ} – комплексное число:

(12)
$$\lambda_{\xi} = \mu_{\xi} \exp(i\varphi_{\xi}) = \mu_{\xi} (\cos \varphi_{\xi} + i \sin \varphi_{\xi})$$
 для всех $\xi = \overline{1, s}$,

где i – мнимая единица, μ_{ξ} – модуль, а φ_{ξ} – аргумент комплексного числа λ_{ξ} . Сопряженные комплексные собственные числа объединяют в обобщенную жорданову клетку размерности 2 (см. таблицу), чтобы избежать перехода в унитарное пространство. Жорданову форму с обобщенными жордановыми клетками назовем расширенной жордановой формой J_A матрицы A. Для такой клетки действительные собственные векторы строят из комплексносопряженных $\mathbf{x}_{\xi}^{(1)}$ и $\mathbf{x}_{\xi}^{(2)}$.

Вычисляя

$$D = \det \left[(E - J_{\xi c})^{-1} \right] = \left[(1 - \mu_{\xi} \cos \varphi_{\xi})^{2} + \mu_{\xi}^{2} \sin^{2} \varphi_{\xi} \right] =$$
$$= (1 - \mu_{\xi})^{2} + 2\mu_{\xi} (1 - \cos \varphi_{\xi}), \quad \xi = \overline{1, s},$$

получим, что матрица вырождена в случае: $\mu_{\xi}=1$ и $\varphi_{\xi}=0$, т.е. при действительном $\lambda_{\xi}=1$. Иначе D>0.

Вычисляя соотношение $J_{\Sigma 2c}$ для матрицы $J_{\xi c}$, получаем

$$(J_{\Sigma\xi c})_{11} = (J_{\Sigma\xi c})_{22} = \left\{1 - \mu\cos\varphi_{\xi} - \mu^{t+1}\cos[(t+1)\varphi_{\xi}] + \mu^{t+2}\cos(t\varphi_{\xi})\right\}/D$$

И

$$(J_{\Sigma\xi c})_{12} = -(J_{\Sigma\xi c})_{21} = \left\{\mu\sin\varphi_{\xi} - \mu^{t+1}\sin[(t+1)\varphi_{\xi}] + \mu^{t+2}\sin(t\varphi_{\xi})\right\}/D.$$

Матрица $J_{\Sigma \xi c}$ является кососимметрической. Получаем

$$\Delta v_i^{(A)}(t) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} [J_{\Sigma A}]_{ij} \, \delta I_j^{(A)}(t_0) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \left[(E - J_{\xi c})^{-1} \left(E - J_{\xi c}^{t+1} \right) \right]_{ij} \alpha_j,$$

$$\Delta v_1^{(A)}(t) = \left\{ \left[1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \cos (t \varphi_{\xi}) \right] \alpha_1 + \left[\mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \sin (t \varphi_{\xi}) \right] \alpha_2 \right\} / D,$$

$$\Delta v_2^{(A)}(t) = \left\{ \left[1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \cos (t \varphi_{\xi}) \right] \alpha_2 - \left[\mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \sin (t \varphi_{\xi}) \right] \alpha_1 \right\} / D.$$

Вектор α нормирован к 1. Следовательно, можно положить $\alpha_1 = \cos \psi$, $\alpha_2 = \sin \psi$, считая ψ варьируемой величиной (управлением). Тогда можно записать следующие функции от t и ψ :

$$\Delta v_{1}^{(A)}(t) = \left\{ \left[1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \cos (t \varphi_{\xi}) \right] \cos \psi + \right.$$

$$\left. + \left[\mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \sin (t \varphi_{\xi}) \right] \sin \psi \right\} / D,$$

$$\Delta v_{2}^{(A)}(\psi) = \left\{ \left[1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \cos (t \varphi_{\xi}) \right] \sin \psi + \right.$$

$$\left. + \left[\mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin \left[(t+1) \varphi_{\xi} \right] + \mu^{t+2} \sin (t \varphi_{\xi}) \right] \cos \psi \right\} / D.$$

Разработанная динамическая модель распространения возмущений и преобразования состояний СС на взвешенном орграфе является основой для решения задач синтеза альтернативных сценариев ее развития, приводящих к достижению поставленной цели с учетом выявленных уязвимостей.

4. Заключение

В соответствии с результатами математического исследования подраздела 3.2 представление (12) выделяет следующие типы базисных сценариев динамической системы (8)–(10):

- сценарий роста значения (резонанса): $\mu_{\xi} > 1$;
- сценарий уменьшения значения: $\mu_{\xi} < 1$;
- сценарий колебания значения: $\varphi_{\xi} \neq 0$.

Следующий набор сценариев может быть получен при совмещении базисных сценариев:

- сценарий возрастающего по амплитуде (резонансного) колебания (раскручивающаяся спираль): $\mu_{\xi} > 1, \, \varphi_{\xi} \neq 0;$
 - сценарий затухающего по амплитуде колебания: $\mu_{\xi} < 1, \, \varphi_{\xi} \neq 0;$
- сценарий с чередованием только максимального и минимального значения: $\lambda_{\mathcal{E}} = -1$.

Действительно, разложение (11) задает разбиение расширенного фазового пространства на элементарные экспертно-значимые разбиения [4], в каждом из которых реализуется один из указанных типов сценариев развития системы (8)–(10), соответствующий собственному значению λ_{ξ} . Любой результирующий сценарий развития с математической точки зрения является линейной комбинацией базисных сценариев.

Полученные результаты позволяют в дальнейшем развивать исследования по следующим направлениям: построение алгебры оперирования базисными сценариями; разработка методов выявления окон уязвимости модели (8)–(10); разработка методов управления параметрической уязвимостью CC; разработка методов

управления структурной уязвимостью СС; возможности и особенности применения предложенной методики сценарного исследования уязвимости для систем рассматриваемого класса.

Полученные результаты показали принципиальную возможность создания моделей и формальных методов сценарного анализа уязвимости сложных систем, формирования, анализа характеристик сценариев с целью принятия рациональных решений при управлении процессами их функционирования и развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Заплатинский В.М. Терминология науки о безопасности / В.М. Заплатинский [Электронный ресурс] // Zbornik prispevkov z medzinarodnej vedeckej konferencie "Bezhecnostna veda a bezpecnostne vzdelanie" Liptovsky Mikulas: AOS v Liptovskom Mikulasi. 2006 (CD nosic).
- 2. Kononov D.A., Kosyachenko S.A., Kul'ba V.V. A Scenario Methodology as Connectability from Strategy to Operation in Complex System // SIC J. December 30. 2001. V. 10. No. 4.
- 3. Кононов Д.А., Косяченко С.А., Кульба В.В. Модели и методы анализа сценариев развития социально-экономических систем в АСУ ЧС // АиТ. 1999. № 9. С. 122–136.
 - Kononov D.A., Kosyachenko S.A., Kul'ba V.V. Analysis of Scenarios of Development of Socioeconomic Systems in Emergency Control Systems: Models and Methods // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. Part 2. No. 9. P. 1303–1320.
- 4. Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем / Под. ред Шульца В.Л., Кульбы В.В. Книги 1, 2. М.: Наука, 2012.
- 5. *Кузнецов Н.А., Кульба В.В., Микрин Е.А. и др.* Информационная безопасность систем организационного управления. М.: Наука, 2006. Т. 1, 2.
- 6. Пономарев Н.О., Кононов Д.А., Швецов Д.А., Пономарев Р.О. Сценарное исследование уязвимости сложных организационно-технических систем // Тр. НИИСИ РАН. М.: НИИСИ РАН, 2014. Т. 4. № 2. С. 61–68.
- 7. Kul'ba V.V., Kofoed L.B., Kononov D.A., Zaikin O.A. Scenario Research of Complex Manufacturing Systems Vulnerability // IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control, Troyes. France. June 28–30. 2016. Preprints Volume. Paper ID: 400–405.
- 8. *Кононов Д.А., Косяченко С.А., Кульба В.В.* Формирование и анализ сценариев развития социально-экономических систем с использованием аппарата операторных графов // AuT. 2007. № 1. С. 121–136.
 - Kononov D.A., Kosyachenko S.A., Kul'ba V.V. Design and Analysis of Development Scenarios of Social Economic Systems with the Application of the Operator Graph Apparatus // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 1. P. 109–123.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 03.09.2021

После доработки 05.11.2021

Принята к публикации 26.01.2022

© 2022 г. Э.К. АРАКЕЛЯН, д-р техн. наук (ArakelianEK@mpei.ru), А.В. АНДРЮШИН, д-р техн. наук (AndriushinAV@mpei.ru), С.В. МЕЗИН, канд. техн. наук (MezinSV@mpei.ru), А.А. КОСОЙ, канд. техн. наук (KosoyAA@mpei.ru), Ю.Ю. ЯГУПОВА (YagupovaYY@mpei.ru), Д.А. ЮПАТОВ (YupatovDA@mpei.ru), (Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва), Ф.Ф. ПАЩЕНКО, д-р техн. наук (Pif-70@yandex.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПРОБЛЕМЫ УЧЕТА ФАКТОРА НАДЕЖНОСТИ ПРИ ВЫБОРЕ СОСТАВА ГЕНЕРИРУЮЩЕГО ОБОРУДОВАНИЯ ТЭЦ НА ОПТОВОМ РЫНКЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ¹

Проведен анализ применяемой в настоящее время методики выбора состава включенного генерирующего оборудования применительно к ТЭЦ со сложным составом оборудования на базе традиционных теплофикационных агрегатов и парогазовых установок (ПГУ). Выявлено, что указанная задача решается на базе экономического критерия без учета фактора надежности. Приведены особенности режимов эксплуатации ПГУ на примере ПГУ-450 и проблемы их учета при выборе вариантов состава оборудования ТЭЦ. Предложена методика учета фактора надежности при выборе и сокращении числа допустимых вариантов по критерию минимального обобщенного риска. Показано, что его применение позволяет определить приоритетный порядок рассмотрения допустимых вариантов с целью выбора оптимального из них, который обеспечит надежную работу на рынке электроэнергии и получение максимальной прибыли. Применительно к ТЭЦ с теплофикационными агрегатами ПТ-80 и ПГУ-450 рассмотрен алгоритм выбора возможных режимов работы ПГУ при прохождении провала нагрузки в зимний период работы станции. Рассмотрены общие подходы к решению поставленной задачи с учетом предложенного подхода к учету фактора надежности.

Ключевые слова: рынок электроэнергии, состав, генерирующее оборудование, учет, фактор надежности, обобщенный риск, ущерб, выбор, оптимальный вариант, максимальная прибыль.

DOI: 10.31857/S0005231022050105, **EDN:** ABWWKM

1. Введение

Подготовка и выход станции на рынок электроэнергии и мощности включает три взаимосвязанных этапа: выбор состава включенного генерирующего

 $^{^1}$ Исследование выполнено с финансовой поддержкой Российского научного фонда по гранту № 19-19-00601.

оборудования (этап ВСВГО) за 3–4 сут до оперативных суток, подготовка и представление станцией ценовых заявок на рынок «на сутки вперед» (этап РСВ) при известном составе генерирующего оборудования за одни сутки до оперативных; этап оперативного выполнения диспетчерского графика по выработке электроэнергии и поставке тепла. Третий этап включает также подэтап участия станции в конкурентном балансирующем рынке (БР) [1–4].

В [5] изложены методические подходы оптимального распределения тепловой и электрической нагрузки на базе многокритериального подхода применительно к теплоэлектроцентрали (ТЭЦ) со сложным составом оборудования с учетом факторов экономичности, надежности и экологии. Практическая реализация изложенного подхода при работе электростанций в рыночных условиях зависит как от конкретного состава генерирующего оборудования, так и на каком этапе выхода станции на рынок электроэнергии и мощности решается данная оптимизационная задача.

В предлагаемой статье рассматривается один из возможных методических подходов к решению данной сложной практической задачи на этапе ВСВГО применительно к теплоэлектроцентрали (ТЭЦ) со сложным составом оборудования в составе теплофикационных агрегатов и ПГУ, например одна ПГУ450, два теплофикационных агрегата типа ПТ-80 и несколько пиковых водогрейных котлов (ПВК) типа КВГМ-180. Выбор рассматриваемого состава генерирующего оборудования обусловлен тем, что в большинстве случаев ПГУ устанавливаются в пределах существующих тепловых электростанций (ТЭС) и, благодаря ряду их преимуществ по сравнению с традиционными энергоустановками, в том числе более высокой экономичности во всем регулировочном диапазоне нагрузок как в теплофикационном, так и в конденсационном режимах, наличие в составе ПГУ высокоманевренных газовых турбин, приспособленных к быстрому изменению нагрузки, способствуют эффективному участию станции в регулировании нагрузки и частоты энергосистемы. Отличие предлагаемого подхода от традиционных — учет фактора надежности на этапе решения задачи ВСВГО.

2. Особенности режимов работы ПГУ на пониженных нагрузках

Наличие ПГУ в составе генерирующего оборудования накладывает некоторые особенности на решение поставленной задачи. Электрическая нагрузка ПГУ и отпускаемое тепло зависят от температуры наружного воздуха. Поэтому абсолютная величина электрической нагрузки и количество отпускаемого тепла будут зависеть от температуры атмосферного воздуха, от выбранного состава и режимов работающего оборудования. Как показали предварительные расчеты применительно к ТЭЦ с традиционными теплофикационными агрегатами и теплофикационной ПГУ, учет температуры наружного воздуха вызывает изменению допустимых пределов изменения мощности ПГУ и эффективности ее работы, что приводит к перераспределению тепловой нагрузки между ПГУ и теплофикационной турбиной — при повышении тем-

пературы в пользу теплофикационной турбины, при снижении — в пользу $\Pi\Gamma \mathcal{Y}$.

При работе ПГУ по тепловому графику одинаковому количеству отпускаемого тепла могут соответствовать различные электрические нагрузки при различном составе оборудования и различной нагрузке газовой турбоустановки (ГТУ). При этом каждое сочетание тепловой и электрической нагрузки можно реализовать несколькими способами, отличающимися между собой по составу оборудования и расходу топлива. При наличии в составе оборудования второй ПГУ к этому еще добавится возможность работы второй ГТУ при нагрузке, отличающейся от нагрузки первой ГТУ, и, таким образом, понятна сложность выбора оптимальных состава и режимов работы оборудования при заданных значениях тепловой нагрузки и температуры атмосферного воздуха.

Помимо указанной зависимости мощности ПГУ от температуры наружного воздуха, при работе ПГУ на пониженных нагрузках, как показал опыт их эксплуатации, существует ряд ограничений, учет которых обязателен как при выборе состава генерирующего оборудования, так и при распределении нагрузки. Учитывая отличительную особенность режимов работы ПГУ от режимов работы традиционных теплофикационных агрегатов, кратко перечислим основные из них на примере теплофикационного энергоблока ПГУ-450.

- 1. Ограниченные пределы регулировочного диапазона, обусловленные несколькими факторами, в том числе:
- допустимой температурой пара высокого давления перед паровой турбиной (ПТ), обусловленной отсутствием регулирования температуры пара высокого давления (ВД), и, как следствие, ее снижение перед ПТ в процессе разгружения ПГУ и увеличение влажности пара на выхлопе цилиндра низкого давления (ЦНД), что недопустимо по условию надежности ее работы, так как это приводит к повышению опасности эрозийного износа рабочих лопаток. По этой причине в соответствии с эксплуатационной инструкцией завода-изготовителя ПТ не рекомендуется работа турбины при температуре пара ВД ниже 440°С. Такая температура достигается при нагрузке ПГУ-450 60% от ее максимальной мощности (при температуре наружного воздуха 15°С);
- экологические характеристики оказывают влияние на нижнюю границу регулировочного диапазона нагрузок ПГУ. При снижении нагрузки газовой турбины (ГТ) ниже 85 МВт изменяется режим горения газа, характеризующийся большими выбросами оксидов азота. Таким образом, для обеспечения запаса достижения данного режима нагрузка энергоблока не должна опускаться ниже 275–285 МВт при работе ПГУ с полным составом оборудования (2 ГТ+2 котла-утилизатора (КУ) и 1 ПТ) и 135–143 МВт с неполным составом (1ГТ+1КУ+ПТ).
- в регулировочном диапазоне электрических нагрузок выделяется экономический диапазон нагрузок, который практически определяется диапазоном работы внешнего направляющего аппарата (ВНА) компрессора ГТУ. Этот

диапазон нагрузок уже регулировочного и характеризуется меньшим изменением коэффициента полезного действия (КПД) по сравнению с диапазоном нагрузок при полностью прикрытом ВНА. При нагрузках ГТУ ниже 95 МВт КПД ПГУ-450Т снижается еще быстрее из-за уменьшения параметров пара ВД после КУ, что приводит к соответствующему снижению КПД ПТ, который до этого снижался медленно.

- нижняя граница экономичного диапазона нагрузок при работе двух ГТУ не «стыкуется» с верхней границей экономичного диапазона при работе одной ГТУ. Этот разрыв при работе ПГУ в конденсационном режиме составляет примерно 10% номинальной мощности одной ГТУ. При работе ПГУ в теплофикационном режиме величина разрыва зависит от тепловой нагрузки чем больше тепловая нагрузка, тем он больше и при максимальных тепловых нагрузках находится на уровне 35–45% от номинальной мощности блока. Эксплуатация блока в этом разрыве нежелательна, в первую очередь, из-за ухудшения экологических характеристик блока.
- 2. Зависимость соотношения «мощность ГТУ-мощность ПТ» в общей мощности ПГУ: доля мощности ГТУ в общей мощности ПГУ при снижении мощности ПГУ уменьшается с соответствующим увеличением доли мощности паровой турбины. Так, при максимальных нагрузках ПГУ доля ГТУ составляет 63–67% от мощности ПГУ, а при минимальных нагрузках она снижается до уровня 57–61%. Это особенно важно при работе ПГУ в теплофикационном режиме, так как при разгружении ПГУ по электрической мощности паровая турбина может обеспечить тепловую нагрузку на достаточно высоком уровне.
- 3. При переходе ПГУ в режим работы с остановом одной ГТ и КУ экономичность работы ПГУ возрастет, но при этом обратный пуск связан с потерями топлива, что необходимо учесть при решении задачи ВСВГО. В некоторых случаях режимы работы ПГУ с полным и неполным составом оборудования рассматриваются как режимы самостоятельных единиц генерирующего оборудования со своими экономическими и техническими параметрами. Такой подход позволяет исключить возможность работы ПГУ в зоне разрыва, указанной выше.

3. Традиционный подход к решению задачи ВСВГО

Как было указано выше, первым этапом организации выхода электрической станции на рынок электроэнергии на очередные оперативные сутки начинается за 3–4 сут решением задачи ВСВГО, которая является одной из важнейших функций при управлении режимами работы электростанции, а также одним из ключевых факторов, влияющих на работу генерирующих компаний и энергосистем в целом. Основная цель генерирующей компании (ГК) при постановке задачи ВСВГО — выбрать такой состав оборудования, который позволит получить максимальную прибыль при участии на рынке электроэнергии с учетом затрат на пуск остановленного генерирующего оборудования. Основная цель системного оператора (СО) — обеспечить на-

Таблица 1. Сценарии состава оборудования

| | ' 1 | | 1011 | | | | |
|----------|--|----------|----------|----------|--|--|--|
| Сценарии | ии Порядковый номер генерирующей единицы | | | | | | |
| (i) | 1 | 2 | | n | | | |
| 1 | P_{11} | P_{12} | | P_{1n} | | | |
| 2 | P_{21} | P_{22} | | P_{2n} | | | |
| | | | P_{ij} | | | | |
| m | P_{m1} | P_{m2} | | P_{mn} | | | |

дежную работу энергосистемы с учетом требуемого уровня и качества энергоснабжения. Во многих случаях интересы ГК и СО могут не совпадать, и основная цель данного этапа — выбрать решение, которое удовлетворяет обеим сторонам. Особенность и значимость этапа ВСВГО определяются тем, что полученные на этом этапе результаты служат основой для дальнейших расчетов. Основными параметрами, которые используются при решении задачи ВСВГО, являются: стоимость пуска генерирующего оборудования (цена за пуск 1 МВт) и цена 1 МВт ч вырабатываемой электроэнергии, которые заявляют еженедельно участники рынка — генерирующие компании [4].

В соответствии с Регламентом рынка электроэнергии [1,2] алгоритм подготовки и решения ВСВГО применительно к каждой групповой точке поставки $(\Gamma T\Pi)$ электроэнергии и тепла включает следующие этапы.

1. Генерирующая компания формирует заявки, в которые входят: предполагаемый состав генерирующего оборудования, включая останов и пуск, расчетные затраты на останов и пуск остановленного оборудования, цену за выработку электроэнергии в соответствующих объемах и другие данные, необходимые для решения задачи ВСВГО.

Для формирования заявки для каждой точки поставки электроэнергии и тепла применительно к характерным участкам прогнозных графиков электрических нагрузок (провалы, участки с постоянными или переменными нагрузками и т.д.), как правило, применяется сценарный подход. Для этого составляется матрица возможных допустимых сценариев состава и режимов работы агрегатов станции (табл. 1) с учетом эксплуатационных особенностей конкретной генерирующей единицы и станции в целом, характера их участия в покрытии нагрузок энергосистемы, включая режимы останова и последующего пуска, времени года, реального технического состояния оборудования и ряда других факторов.

В матрице: P_{ij} – режим работы (состояние) j-го агрегата станции при i-м сценарии состава оборудования, n – количество генерирующих единиц станции, включающие в себя паротурбинные энергоблоки, энергоблоки ПГУ и водогрейные котлы; m – количество допустимых вариантов (сценариев) состава оборудования для выработки требуемого количества электрической и тепловой энергии.

Так как на данном этапе решается задача состава включенного оборудования без конкретизации их мощности, матрица содержит сценарии работы оборудования по диапазонам нагрузок агрегатов согласно следующим условиям (применительно к составу ТЭЦ, приведенному выше):

(1)
$$\sum_{i=1}^{n_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}+n_{\Pi\Gamma}} N_i^{\min} \le N_{\Sigma} \le \sum_{i=1}^{n_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}+n_{\Pi\Gamma}} N_i^{\max},$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}+n_{\Pi\Gamma}}Q_{i}^{\min}+\sum_{j=1}^{n_{\Pi\mathsf{BK}}}Q_{\Pi\mathsf{BK}j}^{\min}\leq Q_{\Sigma}\leq \sum_{i=1}^{n_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}+n_{\Pi\Gamma}}Q_{i}^{\max}+\sum_{j=1}^{n_{\Pi\mathsf{BK}}}Q_{\Pi\mathsf{BK}\ j}^{\max},$$

где $N_{\min}^{\Pi Ti}$, $N_{\max}^{\Pi Ti}$, $Q_{\min}^{\Pi Ti}$, $Q_{\max}^{\Pi Ti}$ – границы регулирования электрической и тепловой нагрузок i-го блока ΠT ; $Q_{\min}^{\Pi BK\ i}$, $Q_{\max}^{\Pi BK\ i}$ – границы регулирования нагрузки i-го пикового водогрейного котла.

Следует отметить, что граничные значения диапазона изменения электрической нагрузки также зависят от значения текущей тепловой нагрузки блока и наоборот:

(3)
$$N_{\min}^{i} = f(Q_i), \quad N_{\max}^{i} = f(Q_i), \quad Q_{\min}^{i} = f(N_i), \quad Q_{\max}^{i} = f(N_i).$$

Зависимости (1)–(3) образуют область определения нагрузок для конкретного режима работы агрегата (ПГУ, ПТ, ПВК) [6].

2. При составлении сценариев перебираются все варианты режимов (конденсационные и теплофикационные) и состава агрегатов, различные режимы резервирования, удовлетворяющие выражениям (1) и (2). Однако матрица, составленная таким образом, с учетом вышеприведенных особенностей ПГУ содержит значительное количество строк m, требующих больших вычислительных затрат по оптимизации распределения нагрузок агрегатов для каждого из вариантов. Очевидно, что число возможных вариантов для конденсационных электростанций значительно меньше, чем для ТЭЦ со сложным составом оборудования, особенно при наличии в составе генерирующего оборудования ПГУ типа ПГУ-450.

Для сокращения рассматриваемых в дальнейших шагах сценариев производится отбор вариантов с помощью экспертов, оценивающих пригодность вариантов (строк матрицы). В результате оценки предварительной матрицы экспертами для каждого из характерных сочетаний суммарных электрических и тепловых нагрузок ТЭЦ выбираются несколько наиболее приемлемых вариантов состава и режимов работы агрегатов для последующей процедуры оптимизации распределения нагрузок между ними.

3. При прогнозном объеме отпуска тепла (на основании диспетчерского графика теплосети, в зависимости от прогноза погоды) оценивается предпочтительный объем выработки электроэнергии исходя из условий (1)–(3), при этом четко соблюдается следующее основное правило нагружения или разгружения: загрузка электростанции целесообразна (увеличение мощности),

если цена электроэнергии на рынке превышает цену в заявке; если цена в заявке выше цены на рынке, станция разгружается. Это означает, что выработка электростанции будет находиться в пределах, ограниченных минимальными и максимальными нагрузками $N_{\rm max}$ и $N_{\rm min}$. Уровень $N_{\rm max}$ определяется составом генерирующего оборудования, а уровень $N_{\rm min}$ в отопительный период определяется необходимостью обеспечения тепловых нагрузок, что актуально для ТЭЦ.

4. При известных объемах выработки электроэнергии и отпуска тепла в каждом сценарии проводится оптимальное распределение тепловой и электрической нагрузки при известном составе генерирующего оборудования. В качестве критерия с учетом рыночных условий работы станции принимается прибыль генерирующей компании от продажи электроэнергии на оптовом рынке электроэнергии и поставки тепла тепловым потребителям $S_{\rm CT}$, т.е.

(4)
$$S_{\text{CT}} = C_{\text{ЭРСВ}} \Theta_{\text{CT}} + C_{QT}(Q_{\text{T}}) - C_{\text{T}} B_{\text{CT}} (\Theta_{\text{CT}}, Q_{\text{T}}) - C_{3\Theta} \Theta_{\text{CH}} \pm \beta S_{\Pi} - S_{\text{OCT}} \Rightarrow \max,$$

где $C_{\mathrm{ЭPCB}}, C_{QT}$ — рыночная стоимость электроэнергии (она берется либо из анализа статистической информации, либо из существующих информационных систем прогнозирования цен на электроэнергию), (р/МВт · ч) и тариф на тепло, (р/Гкал); C_{T} — стоимость топлива, (р/тут); Θ_{CT} — выработка электроэнергии за рассматриваемый период, (МВт · ч); Q_{T} — суммарный отпуск тепла от паровых турбин и от пиковых водогрейных котлов за период оптимизации, (Гкал); B_{CT} ($\Theta_{\mathrm{CT}}, Q_{\mathrm{T}}$) — суммарный расход топлива на производство тепла и электроэнергии, (тут); $C_{\mathrm{3\Theta}}, \Theta_{\mathrm{CH}}$ — закупочная стоимость электроэнергии, (р/МВт · ч) и затраты электроэнергии на собственные нужды, (МВт · ч); $S_{\mathrm{OCT}}, S_{\mathrm{II}}$, — затраты на останов и пуск агрегата, предусмотренные в рассматриваемом варианте, (руб.); β — дискретный коэффициент, равный: нулю, если системный оператор принимает обоснование генерирующей компании для останова данного агрегата, и (—1), если станция останавливает рассматриваемый агрегат без согласия СО.

Для упрощения алгоритма оптимизации принимаются следующие условия:

- при постоянном тарифе на тепло и заданном (прогнозируемом) объеме его отпуска выручка от поставки тепла $C_Q\left(Q_T+Q_{GDR}\right)$ является постоянной величиной для всех рассматриваемых вариантов и ее исключение из рассмотрения не будет влиять как на результат оптимизации, так и на выбор рекомендуемых вариантов;
- принимается, что мощность механизмов собственных нужд, для которых генерирующая компания закупает электроэнергию на оптовом рынке, в основном, зависит от суммарной выработки электроэнергии и в первом приближении одинакова для всех рассматриваемых вариантов, и при оптимизации затраты $(C_{39} \ni_{\text{CH}})$ можно исключить из рассмотрения;
- затраты, связанные с пуском, если он присутствует в рассматриваемом варианте, при оптимальном распределении внутри рассматриваемого вари-

анта учитываются при сравнении сценариев между собой на этапе выбора оптимальных сценариев, в связи с чем при оптимизации внутри сценария ими можно пренебречь.

С учетом принятых условий критерий оптимизации (4) принимает вид

(5)
$$S_{\text{CT}} = C_{\text{9PCB}} \vartheta_{\text{CT}} - C_{\text{T}} B_{\text{CT}} \left(\vartheta_{\text{CT}}, Q_{\text{T}} \right) - S_{\text{OCT}} \Rightarrow \max.$$

В качестве иллюстрации вида функциональной зависимости (5) рассмотрим ее на примере состава генерирующего оборудования сценария 1 в табл. 2 (ПГУ-450+2ПТ-80+1ПВК), и так как останов в сценарии отсутствует, в (5) $S_{\rm OCT}=0$.

При длительности провала $\tau_{\Pi P}$ выражение (5) (при условии равномерного распределения тепловой и электрической нагрузок между турбинами типа ΠT -80) запишем в виде

$$(6) \quad S_{\mathrm{CT}} = \left\lceil C_{\mathrm{\Im PCB}} \left(N_{\mathrm{\Pi} \mathrm{\Gamma} \mathrm{Y}} + 2 N_{\mathrm{\Pi} \mathrm{T}} \right) - C_{\mathrm{T}} \left(B_{\mathrm{\Pi} \mathrm{\Gamma} \mathrm{Y}} + 2 B_{\mathrm{\Pi} \mathrm{T}} + B_{\mathrm{\Pi} \mathrm{BK}} \right) \right\rceil \tau_{\mathrm{\Pi} \mathrm{P}} \Rightarrow \max,$$

где $N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}$, $N_{\Pi\mathsf{T}}$ — мощности $\Pi\Gamma\mathcal{Y}$ -450 и турбины $\Pi\mathsf{T}$ -80, $MB\mathsf{T}$; $B_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}$, $B_{\Pi\mathsf{T}}$, $B_{\Pi\mathsf{B}\mathsf{K}}$ — часовые расходы условного топлива при заданных электрической и тепловой нагрузках на $\Pi\Gamma\mathcal{Y}$ -450 и турбин $\Pi\mathsf{T}$ -80 и тепловой нагрузки $\Pi\mathsf{B}\mathsf{K}$, рассчитываемые по их энергетическим характеристикам в форме регрессионных уравнений:

— для энергоблока ПГУ-450T, полученных на основании данных заводов-изготовителей оборудования и результатов расчета тепловой схемы ПГУ-450T,

(7)
$$B_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}(N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}, Q_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}) = 0.253N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}} - 5.084 \cdot 10^{-5}N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}^2 + 0.021Q_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}} - 2.72 \cdot 10^{-5}Q_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}^2 + 4.166 \cdot 10^{-5}N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}} \cdot Q_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}} + 7.496,$$

где $B_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}(N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}},Q_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}})$ — расход условного топлива ПГУ в тут/ч, $N_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}$ — электрическая нагрузка ПГУ в МВт, $Q_{\Pi\Gamma\mathcal{Y}}$ — тепловая нагрузка ПГУ в МВт; — для теплофикационной турбины ПТ-80 по данным [10]

(8)
$$B_{\Pi T80_T}(N,Q) = 0.001 \cdot (b_{\Pi T80_\Im\Im}(N,Q) \cdot N + b_{\Pi T80_T\Im}(N,Q) \cdot Q),$$

где

$$b_{\Pi T80_99}(N,Q) = -5.394 \cdot N + 0.039 \cdot N^2 - 8.34 \cdot 10^{-5} \cdot N^3 - 0.978 \cdot Q + 2.112 \cdot 10^{-3} \cdot Q^2 - 1.45 \cdot 10^{-3} \cdot N \cdot Q + 613.672,$$

$$b_{\Pi T80_T9}(N,Q) = -0.736 \cdot N + 3.597 \cdot 10^{-3} \cdot N^2 - 9.386 \cdot 10^{-6} \cdot N^3 - 0.258 \cdot Q - 3.355 \cdot 10^{-4} \cdot Q^2 + 2.057 \cdot 10^{-3} \cdot N \cdot Q + 206.098,$$

 $B_{\Pi T80_T}(N,Q)$ — расход топлива в теплофикационном режиме, тут/ч; N — электрическая мощность блока, МВт; Q — тепловая мощность блока, Γ кал/ч.

— для ПВК типа КВГМ-180, полученных на основании нормативных характеристик,

(9)
$$B_{BK}(Q) = 14,286 Q / (96,04 - 0,018Q - 1,19 \cdot 10^{-6}Q^2),$$

где $B_{\rm BK}(Q)$ – расход топлива на ПВК, тут/ч; Q – тепловая мощность ПВК, Гкал/ч.

Анализ показывает нелинейный характер приведенных зависимостей, нелинейность их ограничений, приведенных выше, а также нелинейность, овражность зависимости функции цели от оптимизируемых параметров. Поэтому следует, что решаемая оптимизационная задача относится к классу задач нелинейного программирования и поиск решения (5) необходимо провести с применением одного из известных математических методов оптимизации, позволяющих нахождение глобального оптимума, например предложенный в [10] методике.

В результате оптимизации по каждому сценарию:

- уточняется состав генерирующих единиц оборудования исключением из состава тех, у которых ожидаемая цена электроэнергии в заявке (цена по результатам оптимизации плюс рентабельность, не более 10%) больше, чем предполагаемая рыночная цена электроэнергии;
- с учетом уточненного состава генерирующих единиц повторяется процедура оптимизации, определяется величина выработки электроэнергии (при постоянном отпуске тепла), уточняется ожидаемая цена электроэнергии по каждой генерирующей единице и суммарная прибыль по рассматриваемому сценарию.
- 5. На основании оптимизационных расчетов ГК для каждой точки поставки электроэнергии и тепла применительно к характерным участкам прогнозных графиков электрических нагрузок формирует по определенной форме заявки в составе нескольких сценариев с максимальными значениями прибыли станции, которые отправляются системному оператору (СО) для согласования. Исходя из условий покрытия планируемого уровня потребления электроэнергии в энергосистеме, обеспечения необходимого резерва и надежности энергоснабжения потребителей электроэнергии СО осуществляет отбор оборудования с использованием специальной математической модели ВСВГО [1, 2]. При наличии замечаний СО может вернуть заявки или часть из них для исправления с последующим повторным согласованием. После согласования с СО выбранный вариант с учетом замечаний становится базисным для исполнения последующих процедур при выходе на рынок «на сутки вперед».

4. Предлагаемый подход к учету фактора надежности при решении задачи ВСВГО

Вышеприведенный краткий анализ традиционного подхода решения задачи ВСВГО показывает, что он базируется на экономическом критерии без

учета факторов надежности и экологии (в лучшем случае они учитываются в форме ограничений).

Очевидно, что при таком подходе обеспечить долгосрочную надежность работы выбранных составов оборудования практически невозможно даже при наличии опытных экспертов. На практике это приводит к тому, что некоторые режимы, в прошлом веке широко применяемые при прохождении провалов нагрузки (моторный, остановочно-пусковые), исключаются из рассмотрения даже при длительных провалах нагрузки без какого-либо обоснования. Вместо них широко применяется режим работы оборудования на нижних границах регулировочного диапазона, несмотря на их низкую экономическую эффективность.

Ниже предлагается один из возможных подходов значительного сокращения размерности табл. 1 путем учета фактора долгосрочной надежности при выборе состава генерирующего оборудования по обобщенному критерию минимального риска. Такой подход на этапе подготовки предложений генерирующей компанией по оптимальному составу оборудования позволит, помимо экономического фактора, учесть также фактор надежности, что может гарантировать надежную работу выбранного оборудования за указанное Регламентом рынка время (не менее 72 ч при наличии пуска).

Для достижения этой цели предлагается следующий алгоритм предварительной подготовки информации.

Принимается, что в рамках интеллектуальной автоматизированной системы управления технологическими процессами (АСУТП) станции присутствуют системы управления надежностью и технико-экономическими показателями оборудования с решением задачи выбора оптимальной стратегии проведения ремонтного обслуживания на длительный промежуток времени (месяц, сезон, год) на базе постоянного мониторинга и диагностики технического и экономического состояния оборудования станции. В результате проведения такой работы возможно составление приоритетного списка по долгосрочной надежности работы оборудования на основе обобщающего фактора риска R_i , рассчитываемого по выражению

(10)
$$R_i = k_{i\ni} p_{i\ni} Y_{i\ni} + k_{iH} p_{iH} Y_{iH}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $p_{i\ni}, p_{i\mathrm{H}}$ — оценки вероятности возникновения отказа (аварийного останова) и/или критического ухудшения экономического состояния i-го рассматриваемого элемента или единицы оборудования; $Y_{i\ni}, Y_{i\mathrm{H}}$ — ущербы от ухудшения экономичности и от отказа (аварийного останова) i-го рассматриваемого элемента или единицы оборудования; $k_{i\ni}, k_{i\mathrm{H}}$ — весовые коэффициенты значимости факторов экономичности и надежности,

(11)
$$k_{i\ni} + k_{i\mathrm{H}} = 1,0,$$

при $k_{i\ni}=0$ учитывается ущерб только по фактору надежности, при $k_{i\mathrm{H}}=0$ – только ущерб по экономичности. Промежуточные значения их оцениваются экспертами исходя из конкретных условий решения задачи ВСВГО.

Рассчитывается величина удельного риска рассматриваемого элемента или функционального узла

(12)
$$r_i = R_i / \left(\sum R_i\right)_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\sum R_i$ – суммарный риск-фактор для всех элементов j-го сценария.

Составляющая ущерба по экономичности учитывается для тех агрегатов, ухудшение экономичности которых во времени не удается устранить в ходе проведения технического обслуживания или текущих восстановительных ремонтных работ без длительного останова энергоблока.

Показатели надежности могут быть определены генерирующей компанией на основании разных способов: систем мониторинга и диагностики оборудования, статистическим подходом, контролем и мониторингом оборудования персоналом станции. Подробная методика оценки отказов оборудования и функциональных узлов и последствия их приведены в [3].

Для использования полученных результатов составляется приоритетная матрица сценариев рассматриваемых вариантов по величине удельного риска в порядке их убывания. Полученную матрицу условно можно разделить на три зоны: повышенного риска (красная зона) — варианты, в которых привлечение рассматриваемого оборудования или его части по техническому или экономическому состоянию (или по совокупности этих двух факторов) связано с повышенным риском; умеренного риска (желтая зона) — зона непрерывного контроля за работоспособностью и экономическими показателями; низкого риска (зеленая зона) — зона работоспособного состояния с минимальными отклонениями от нормативных показателей по экономичности с периодическим контролем технического состояния оборудования.

Естественно, что при выборе сценариев состава генерирующего оборудования по условию минимального риска необходимо выдержать принцип выбора вариантов по схеме «снизу-вверх» по строкам полученной матрицы. Сценарии вариантов, находящиеся в зоне матрицы с повышенным риск-фактором, на этапе сокращения числа сценариев желательно, по возможности, исключить из рассмотрения и таким образом уменьшить число рассматриваемых сценариев.

Принципиально возможно разделение приоритетной матрицы состояний на две части — по показателям надежности и по показателям экономичности, что позволит более целенаправленно следить за динамикой их изменения, но тогда возникает проблема их совместного учета, при этом число рассматриваемых вариантов в табл. 1 будет расти.

Одной из наиболее сложных проблем при подготовке исходных сценариев на станции является обоснование необходимости останова или перевода в моторный режим оборудования при прохождении провалов графиков электропотребления [4–8]. Сложность заключается в том, что условия значительной неопределенности информации (длительность провала и связанная с ней длительность пусковых операций, цена электроэнергии при прохождении прова-

ла, величина пусковых потерь и т.д.) затрудняют сравнение альтернативных вариантов по экономичности. С другой стороны, имеется и мотивация их применения, так как если СО принимает обоснованность применения, например, остановочно-пускового режима, то, как было указано выше, генерирующая компания (станция) получает соответствующую компенсацию, равную стоимости затрат на пуск.

Для иллюстрации рассмотрим возможные режимы работы ПГУ-450 при прохождении провала нагрузки в зимний период работы станции. Особенность зимнего провала заключается в том, что низкий уровень по электрической мощности сопровождается значительным ростом тепловой нагрузки, при этом при постоянном тарифе на отпускаемое тепло и минимальной цене на электроэнергию выработка последней не экономична. В этих условиях учет фактора надежности наряду с экономическим может стать определяющим при выборе режимов работы ПГУ.

Рассмотрим поставленную задачу при следующих исходных условиях:

- средняя температура наружного воздуха (-2.2° C);
- электрическая мощность станции 390 MBт (около 62% от номинальной мощности);
- тепловая нагрузка станции 460 Гкал/ч (около 85% от максимального отпуска).

Границы электрической мощности ПГУ при указанных выше ограничениях и допустимые области режимов работы ПГУ с полным и неполным составом оборудования определены на основе цифровой модели ПГУ, полученной на базе обработки данных заводов-изготовителей оборудования применительно к энергоблоку ПГУ-450Т [9, 10]. В соответствии с этими данными ограничения по минимальным и максимальным значениям электрической мощности и отпуску тепла приведены ниже:

- при работе с полным составом, MBт $288,4 \le N_{\Pi\Gamma Y2} \le 489,5$;
- при работе с неполным составом, MBт $96.4 \le N_{\Pi\Gamma V1} \le 245.0$.

Границы отпуска тепла, при указанной температуре наружного воздуха, Гкал/ч:

- при работе ПГУ в полным составе, Гкал/ч $51 \le Q_{\Pi\Gamma Y2} \le 318,0;$
- при работе ПГУ в неполным составе, Гкал/ч $51.0 \le Q \le 154.8$.

При работе ПГУ в режиме ГТУ-ТЭЦ, когда весь пар высокого и низкого давления сбрасывается в сетевые подогреватели помимо паровой турбины, снижение электрической мощности ПГУ, как следствие останова паровой турбины или перевода ее в моторный режим (МР), компенсируется соответствующим ростом отпуска тепла. В этих режимах ограничения по электрической мощности и отпуску тепла следующие:

- по мощности при работе ПГУ с полным составом, МВт 194,0 \leq $N_{\Pi \Gamma \rm Y3} \leq 332,0;$
- по мощности при работе ПГУ с неполным составом, МВт $98 \le N_{\Pi\Gamma Y3} \le 166.0$;

Таблица 2. Результаты расчетов

| $N_{\overline{0}}$ | | ПГУ | | | | | ПТ-80 | | | ПВК | Фактор риска | | | |
|--------------------|---|-----|---|---|-----|-----|-------|---|----|------------|--------------|----|-----------------|--------|
| | Γ | Т | К | У | | ПІ | ГУ | № | ПТ | ПТ ∑ ПТ-80 | | Q | \widehat{R}_i | r |
| | 1 | 2 | 1 | 2 | ПТ | Q | N | 1 | 2 | Q | N | | | |
| 1 | Γ | Γ | Γ | Γ | Γ | 245 | 290 | Γ | Γ | 200 | 100 | 15 | 0,343 | 0,1046 |
| 2 | Γ | О | Γ | 0 | Γ | 220 | 230 | Γ | Γ | 200 | 160 | 40 | 0,496 | 0,1512 |
| 3 | Γ | Γ | Γ | Γ | ОПР | 230 | 290 | Γ | Γ | 200 | 100 | 30 | 0,748 | 0,228 |
| 4 | Γ | О | Γ | О | ОПР | 230 | 250 | Γ | Γ | 200 | 140 | 30 | 1,0 | 0,305 |
| 5 | Γ | Γ | Γ | Γ | MP | 300 | 290 | Γ | Γ | 160 | 100 | 0 | 0,255 | 0,0778 |
| 6 | Γ | О | Γ | О | MP | 180 | 220 | Γ | Γ | 200 | 170 | 80 | 0,438 | 0,1336 |

Для турбины ПТ-80 действуют следующие ограничения: нижние и верхние границы по электрической мощности — 50 и 85 МВт, по отпуску тепла — 80 и 100 Гкал/ч соответственно.

Для паровой турбины в составе ПГУ-ТЭЦ рассматриваются два режима — останова (ОПР) и перевода ее в моторный режим (МР). Приняты следующие условия соблюдения балансовых уравнений по электрической мощности и отпуску тепла от станции.

Выбирается вариант работы ПГУ с минимальной электрической мощностью и определяется при этой мощности допустимый отпуск тепла от ПГУ. Определяется мощность турбин ПТ-80; если она выходит за пределы их допустимой мощности, то принимается их мощность на максимальном уровне и пересчитывается электрическая мощность ПГУ. Аналогичным образом распределяется отпуск тепла с учетом возможности выработки части тепла пиковыми водогрейными котлами.

Значение риска в иллюстрационном примере рассчитано только применительно к оборудованию ПГУ и только по фактору надежности, при этом вероятности отказа в различных режимах работы оборудования приняты на базе экспертных оценок, исходя из опыта эксплуатации ПГУ и с учетом рекомендаций, приведенных в [3]. Аналогично при оценке ущерба учитывались следующие его составляющие исходя из среднестатистической длительности отказов и длительности восстановительного ремонта рассматриваемого в вариантах оборудования: потери прибыли от недоотпуска электроэнергии или выработке электроэнергии на менее экономичном оборудовании и затраты, связанные с ремонтным обслуживанием [3]. Учитывая иллюстративный характер рассматриваемого примера, отметим, что достоверность приведенных данных авторами не гарантируется, хотя они отражают в какой-то степени реальную картину.

[—] по отпуску тепла при работе ПГУ с полным составом, Гкал — $51,0 \le \le Q \le 433,0;$

[—] при работе ПГУ с неполным составом, Гкал — $51,0 \le Q_{\Pi\Gamma Y} \le 261,0$.

В табл. 2 величина риска, абсолютные значения которой в данном случае не играют роли, приведена в относительных единицах, рассчитанных по выражению

(13)
$$\bar{R}_i = R_i / (\max R_i),$$

где R_i , $\max \widehat{R}_i$ – значение риска для i-го варианта и максимальное значение его среди рассматриваемых вариантов.

Сравнение фактора риска удобнее провести по величине удельного риска, рассчитанного по выражению

$$(14) r_i = \bar{R}_i / \sum_{1}^{n} \vec{R}_i.$$

Анализируя полученные результаты в рамках рассматриваемого тестового примера, можно из сценариев табл. 1 исключить варианты 3 и 4 как наиболее рискованные (величина удельного риска для них выше среднего значения, равного 0,167), причем оба варианта связаны с остановом паровой турбины в режиме ГТУ-ТЭЦ и в этом же режиме с остановом еще и одной газовой турбины. Очевидно, что при вынужденном применении этих режимов потребуется их дополнительное обоснование как по показателю надежности, так и по экономической целесообразности.

Таким образом, учет фактора долгосрочной надежности на этапе BCBГО позволяет сократить число рассматриваемых вариантов и способствует более обоснованному выбору сценариев для их дальнейшего рассмотрения.

Учет экологического фактора на данном этапе затруднителен из-за значительной неопределенности требуемой для расчетов выбросов информации [11]. При большой необходимости он может быть рассчитан упрощенной методикой [5] и учтен в виде ограничения на суммарные выбросы станции. Более основательно экологический критерий целесообразно рассмотреть на этапе подготовки предложений для выхода на рынок "на сутки вперед" (РСВ) при известном составе генерирующего оборудования.

Таким образом, при наличии прогнозов цен рынка и ценовых заявок становится возможным выбрать варианты состава оборудования на оперативные сутки с учетом надежности и экономичности с выходом на маржинальную прибыль и выбрать для электростанции оптимальный вариант, дающий максимальную маржинальную прибыль. Очевидно, что для успешного выполнения и завершения процедуры ВСВГО генерирующая компания должна обладать способностью, методами и специализированным программным обеспечением, позволяющими в течение достаточно короткого времени оценить варианты работы электростанции с различным составом генерирующего оборудования и выбрать такой состав, который, с одной стороны, будет удовлетворять всем техническим критериям и ограничениям, с другой — принесет максимальный маржинальный эффект от работы на рынке электроэнергии.

5. Заключение

Предложенный методический подход выбора оптимального состава включенного генерирующего оборудования с учетом факторов экономичности и риска позволяет выбирать для каждого из характерных сочетаний суммарных электрических и тепловых нагрузок ТЭЦ ограниченное число вариантов состава и режимов работы агрегатов для последующих процедур оптимизации распределения нагрузок между ними.

Применение критерия риска позволяет определить приоритетный порядок рассмотрения допустимых сценариев состава включенного генерирующего оборудования с целью выбора оптимальных вариантов, которые обеспечат надежную работу их на РСВ и получение максимальной прибыли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Системный оператор. Официальный сайт https://www.so-ups.ru/index.php?id=markets_Дата обращения 17.01.2022.
- 2. Приложение 3.1 к ДОП. Регламент проведения расчетов выбора состава генерирующего оборудования [Офиц. сайт]. https://www.np-sr.ru/ru/regulation/joining/reglaments/1960 (дата обращения 07.01.2022).
- 3. Об утверждении методических указаний по расчету вероятности отказов функционального узла и единицы технологического оборудования и оценки последствий такого отказа. Приложение к Приказу Минэнерго РФ от 19.02.2019 г. № 123 [Официальны сайт] https://docs.cntd.ru/document/542643279 (Дата обращения 18.01.2022 г.)
- 4. *Юпатов Д.А.* Общие подходы к выбору состава включенного генерирующего оборудования тепловых электрических станций на оптовом рынке электроэнергии // Новое в российской электроэнергетике: Ежемес. науч.-техн. электрон. журн. 2018. № 11. С. 20–29.
- 5. Arakelyan E.K., Andryushin A.V., Mezin S.V. et al. Formulation and Methodological Approaches to the Solution of the Multicriteria Problem of Selecting the Optimal Modes of Complex TPP Equipment // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 12. P. 2224–2238.
- 6. *Таран А.С.* Выбор состава включенного генерирующего оборудования ТЭС на оптовом рынке электроэнергии // Энергетика: эффективность, надежность, безопасность. 2013. № 1. С. 70–73.
- 7. *Филимонова В.А., Бобрицкая И.В.* Увеличение маржинальности работы ТЭС. Теория и практика // Энергорынок. Декабрь 2013. № 10 (115). С. 34–36.
- 8. Li Z., Zhao L., Du W., Qian F. Modeling and Optimization of the Steam Turbine Network of an Ethylene Plant // Process Systems Engineering And Process Safety. 2013. P. 520–528.
- 9. Arakelyan E.K., Andryushin A.V., Mezin S.V. et al. Features of the Multi-Criteria Optimization Mathematical Model of the Thermal and Electrical Loads Distribution at a Combined Heat and Power Plant with a Mixed Equipment Composition IC-MSQUARE 2021 // J. Physics: Conference Series 2090 (2021) 012012 IOP Publishing.

- 10. *Болонов В.О., Аракелян Э.К.* Оптимальное управление режимами работы оборудования ТЭЦ с ПГУ // Теплоэнергетика: Ежемес. теорет. и научн.-практ. журн. М.: Наука, 2007. № 11. С. 69–77.
- 11. Аракелян Э.К., Пикина Г.А. Оптимизация и оптимальное управление. Учебное пособие, 2-е изд. перераб. и доп. М.: Изд-во МЭИ, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 15.09.2021 После доработки 25.11.2021

Принята к публикации 26.01.2022

Заметки, хроника, информация



90 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ВАДИМА ФЕДОРОВИЧА КРОТОВА (14.02.1932–04.03.2015)

DOI: 10.31857/S0005231022050117, **EDN:** ABZPJH

Вадим Федорович Кротов — выдающийся советский и российский ученый, специалист в области теории оптимального управления и ее приложений, Заслуженный деятель науки Российской Федерации.

Вадим Федорович Кротов родился 14 февраля 1932 г. в Хабаровске.

Окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1956 г., с 1956 по 1958 гг. работал инженером-конструктором Центрального НИИ тяжелого машиностроения, в 1958—1961 гг. учился в аспирантуре МВТУ. Там он начал заниматься теорией оптимального управления. Его учителем и вдохновителем был Добронравов Владимир Васильевич (1901—1981) — доктор физико-математических наук, профессор, выдающийся ученый и педагог. Первая научная работа В.Ф. Кротова была опубликована в 1960 г. Она была посвящена разрывным решениям вариационных задач. В это же время В.Ф. Кротов получил совершенно новые общие достаточные условия оптимальности в задачах оптимального управления.

В 1961—1969 гг. В.Ф. Кротов преподавал в Московском авиационном институте, на кафедре динамики полета и управления, которой руководил И.В. Остославский.

В 1962 г. В.Ф. Кротов защитил кандидатскую диссертацию "Новый метод вариационного исчисления и некоторые его приложения" по физико-математическим наукам в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР, в 1963 г. — докторскую диссертацию "Некоторые новые методы вариационного исчисления и их приложение к динамике полета" по техническим наукам в МАИ.

В 1967 г. В.Ф. Кротов стал профессором.

С 1968 по 1972 гг. В.Ф. Кротов возглавлял кафедру высшей математики Московского авиационного технологического института (МАТИ).

В 1969 г. В.Ф. Кротов совместно с В.И. Гурманом и В.З. Букреевым опубликовал монографию "Новые методы вариационного исчисления в динамике полета", содержащую основы нового метода теории оптимального управления, основанного на достаточных условиях оптимальности В.Ф. Кротова, и приложения этого метода к задачам оптимизации движения летательных аппаратов.

На базе кафедры высшей математики МАТИ в то время под руководством В.Ф. Кротова работал Межинститутский научный семинар по оптимальному управлению, на котором выступали с докладами известные специалисты в этой и смежных областях математики, а также начинающие математики, которые приобрели известность в последующие годы. Тогда В.Ф. Кротовым, его последователями и учениками были заложены основы теории вырожденных задач для неограниченных дифференциальных включений и оптимального управления для гибридных (дискретно-непрерывных) систем, новых вычислительных методов, получены необходимые и достаточные условия терминальной инвариантности управляемых систем. На основе этих теоретических результатов был выполнен ряд крупных прикладных исследований, таких как оптимизация ориентационных маневров космических аппаратов, оптимизация стратегии взлета вертолета с уникальным результатом — сокращением взлетной дистанции на 40-50% и др. Вокруг этой тематики сформировался международный коллектив ученых, среди которых более 20 кандидатов наук, выполнивших диссертации под руководством В.Ф. Кротова (7 из них доктора наук).

С 1972 по 1996 гг. В.Ф. Кротов — профессор, заведующий (1974–1982) кафедрой экономической кибернетики в Московском экономико-статистическом институте (МЭСИ). Работая совместно с экономистами (в том числе из ЦЭМИ и ВНИИСИ), он применил теорию оптимального управления к нелинейным моделям развития многоотраслевой экономики, построенным на основе межотраслевого баланса В.В. Леонтьева. В результате были получены достаточные условия оптимальности макроэкономических процессов, описываемых системой нелинейных моделей типа затраты-выпуск, опубликованные в "Автоматике и телемеханике" в 1982–1983 гг.

С 1982 г. до конца жизни В.Ф. Кротов руководил созданной им лабораторией математических методов исследования оптимальных управляемых си-

стем Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, которая в настоящее время носит его имя.

В 2003 г. В.Ф. Кротову было присвоено звание Заслуженный деятель науки РФ.

Вадим Федорович был выдающимся российским ученым, опередившим свое время. Еще в первой серии работ, принесших Вадиму Федоровичу широкую известность, была разработана теория исследования разрывных решений задач вариационного исчисления, и в ее рамках был открыт новый класс решений — оптимальные скользящие режимы.

В дальнейших своих работах Вадим Федорович задался целью решить в теории оптимального управления в полном объеме проблему, поставленную великим Лагранжем, — свести задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум. И это ему удалось. Им был сформулирован общий принцип расширения — абстрактный вариант принципа Лагранжа. На его основе были получены чрезвычайно общие достаточные условия глобальной оптимальности управляемых динамических систем, внесшие фундаментальный вклад в теорию оптимального управления. Направление исследований на основе этих условий органично включает в себя практически все аспекты теории оптимального управления: аналитические способы исследования оптимальных процессов, включая доказательство их глобальной оптимальности; численные методы поиска оптимальных процессов, включая нелокальные методы; построение минимизирующих (максимизирующих) последовательностей, когда оптимальный процесс не существует; исследование анормальных и вырожденных процессов; построение простых субоптимальных решений с оценкой их степени оптимальности; синтез оптимальных стратегий управления с обратной связью и простых субоптимальных с оценкой их степени оптимальности. В настоящее время имеется обобщение достаточных условий оптимальности В.Ф. Кротова, для которого доказана не только достаточность, но и необходимость.

Предлагаемые подходы отличаются от других известных в публикациях тем, что решают проблему отыскания абсолютного оптимума, содержат продвинутые технологии отыскания аналитических решений, обладают алгоритмической простотой, во многих случаях отсутствием необходимости решения краевых задач.

С помощью методов В.Ф. Кротова (им самим и другими) получены решения большого количества существенно нелинейных важных прикладных задач (аэрокосмических, робототехнических, физико-технических, эколого-экономических), подтвердив высокую эффективность этих методов.

Полученные Вадимом Федоровичем, его последователями и учениками научные результаты и методы вошли в монографии и учебники математических и технических дисциплин, читаются в университетских курсах, используются в НИИ и КБ при исследовании прикладных задач и проектировании конкретных изделий. Разработанные методы исследования оптимальных процессов широко используются для оптимизации траекторий движущихся объектов, анализа и синтеза их систем управления, моделирования и анализа развития многоотраслевой экономики и т.д.

Методы В.Ф. Кротова активно используются физиками, и соответствующие его работы широко цитируются в ведущих профильных зарубежных журналах.

Метод глобального улучшения, предложенный В.Ф. Кротовым, нашел широкое применение в задачах квантовой механики.

В настоящее время существует обширная и бурно развивающаяся область новых физических технологий, базирующихся на управлении квантовым состоянием вещества за счет воздействия на него электромагнитного поля. Среди них — синтез новых материалов при помощи физических средств (вместо химических), разделение изотопов, фотохимия и др. Математические алгоритмы синтеза стратегий управления этими процессами являются важнейшей частью этих нанотехнологий.

По общему мнению физиков, адекватным аппаратом для осуществления подобного синтеза являются методы теории оптимального управления. Соответствующие задачи описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений, имеющими порядки в несколько тысяч. Были проведены исследования решений таких задач при помощи разработанных В.Ф. Кротовым методов последовательного глобального улучшения. Публикация этих методов породила в 90-е гг. волну исследований специалистов-физиков.

Например, член Международного консультативного Российского квантового центра, один из авторов и руководителей Европейской программы развития квантовых технологий Quantum Flagship, профессор Tommaso Calarco использовал метод глобального улучшения В.Ф. Кротова в ряде своих исследований.

Созданный В.Ф. Кротовым, его последователями и учениками математический аппарат оказался эффективным инструментом исследования не только в теории оптимального управления детерминированными системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Он был применен к задачам с распределенными параметрами, системам с дискретным временем, сложным многоуровневым системам, стохастическим системам, игровым задачам и задачам с неопределенностью, в теории терминальной инвариантности детерминированных и стохастических систем.

Научные интересы В.Ф. Кротова не ограничивались теорией оптимального управления. Им была предложена теория, развивающая общую теорию относительности Пуанкаре—Эйнштейна. Предложенная им теория мирового поля в рамках единой математической модели объединяет в себе релятивистскую механику, теорию гравитации, теорию электромагнитного поля Максвелла и квантово-механические явления.

Еще одно исследование В.Ф. Кротова посвящено абстрагированию понятия силы, в котором становится возможной формализация понятий: сила голода, сила воли, сила любви и т.д.

Эти последние два направления исследований В.Ф. Кротова далеки от завершенности и ждут своих продолжателей.

Удивительной особенностью Вадима Федоровича как ученого было умение видеть простое в сложном. В результате, к какой бы области науки он ни прикасался, он видел глубинную сущность проблемы и получал фундаментальные результаты.

От нас, к сожалению, слишком рано ушел человек большой души и необыкновенных творческих возможностей в науке.

Светлая память о Вадиме Федоровиче Кротове навсегда сохранится в сердцах сотрудников Института проблем управления, его учеников и последователей.

М.М. Хрусталев, д-р физ.-мат. наук

СОДЕРЖАНИЕ

| Вступительное слово Программного комитета конференции «Управление раз- |
|--|
| витием крупномасштабных систем» |
| Ядыкин И.Б., Галяев И.А., Вершинин Ю.А. О решении обобщенных уравне- |
| ний Ляпунова для одного класса непрерывных билинейных нестационар- |
| ных систем |
| Цвиркун А.Д., Резчиков А.Ф., Самарцев А.А., Иващенко В.А., |
| Богомолов А.С., Кушников В.А., Филимонюк Л.Ю. Система интегриро- |
| ванного моделирования распространения опасных факторов пожара и эва- |
| куации людей из помещений |
| Гах С.А., Хамисов О.В., Подковальников С.П. Двойственные оценки в модели |
| развития электроэнергетических систем |
| Ахметзянов А.В., Самохин А.В. Нелинейные волновые управляющие воздей- |
| ствия для увеличения нефтеотдачи природных залежей |
| Цурко В.В., Михальский А.И. Оценка статистической связи случайных ве- |
| личин через взаимную информацию |
| Губанов Д.А. Методы анализа информационного влияния в активных сете- |
| вых структурах |
| Ерешко Ф.И., Мушков А.Ю., Турко Н.И., Цвиркун А.Д. Управление в круп- |
| номасштабных проектах многоукладной экономики |
| Чернов И.В. Сценарный анализ уязвимости при управлении сложными си- |
| стемами |
| Аракелян Э.К., Андрюшин А.В., Мезин С.В., Косой А.А., Ягупова Ю.Ю., |
| Юпатов Д.А., Пащенко Ф.Ф. Проблемы учета фактора надежности при |
| выборе состава генерирующего оборудования ТЭЦ на оптовом рынке элек- |
| троэнергии и пути их решения |
| Заметки, хроника, информация |
| 90 лет со лня рождения Валима Фелоровича Кротова 164 |

CONTENTS

| Introductory Speech of the Program Committee of the Conference "Management of Large-scale System Development" |
|---|
| Yadikin I.B., Galyaev I.A., Vershinin Yu.A. A Method for the Solution of |
| Generalized Lyapunov's Equations for a Class of Continues-Time Bilinear Non- |
| Stationary Systems |
| Tsvirkun A.D., Rezchikov A.F., Samartsev A.A., Ivashchenko V.A., |
| Bogomolov A.S., Kushnikov V.A., Filimonyuk L.Yu. Integrated Simulation |
| System for the Spread of Fire Hazards and Evacuation of People from Premises 26 |
| Gakh S.A., Khamisov O.W., Podkovalnikov S.P. Dual Estimates in a Model of |
| Power Energy System Expansion |
| Akhmetzyanov A.V., Samokhin A.V. Nonlinear Wave Control Actions to Increase |
| Oil Recovery of Natural Reserves |
| Tsurko V.V., Mikhalskii A.I. Estimation of Random Variables Association Using |
| Mutual Information |
| Gubanov D.A. Methods of Analysis of Information Influence in Active Network |
| Structures |
| Ereshko F.I., Moushkoff A.Yu, Turko N.I., Tsvirkun A.D. Management of Large- |
| Scale Projects at Multi-Structures Economy |
| $\textbf{Chernov I.V.} \text{Scenario Analysis of Vulnerability in Managing Complex Systems} \ \dots \ 133$ |
| Arakelyan E.K., Andryushin A.V., Mezin S.V., Kosoy A.A., Yagupova Y.Y., |
| Yupatov D.A., Pashchenko F.F. Problems of Taking into Account the |
| Reliability Factor When Choosing the Composition of the Generating |
| Equipment of a CHP in the Wholesale Electricity Market and Ways to Solve |
| Them |
| Notes, Meetings, Information |
| On the 90th Anniversary of V.F. Krotov Rirth |