



*Российская Академия Наук*

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

**Журнал основан в 1936 году**

**Выходит 12 раз в год**

**Москва**

**Я Н В А Р Ь**

**2022**

Учредители журнала:  
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,  
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,  
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,  
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,  
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,  
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,  
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,  
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2022 г. А.Р. ДАНИЛИН, д-р физ.-мат. наук (dar@imm.uran.ru),  
А.А. ШАБУРОВ, канд. физ.-мат. наук (alexandershaburov@mail.ru)  
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского РАН, Екатеринбург)

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

Основное отличие статьи от предыдущих публикаций авторов заключается в том, что интегральная часть функционала качества имеет более общий вид и ограничения на управление определяются не шаром, а эллипсоидом. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида оптимального управления можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния  $l_\varepsilon$ , который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

DOI: 10.31857/S0005231022010019

### 1. Введение

Статья посвящена исследованию асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, гл. 3] и ограничениями на управление в виде эллипсоида.

В публикациях [5, 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7–9]. Отметим, что данный вид управляемой системы, но с терминальным критерием качества, зависящим только от медленных переменных, был рассмотрен в [8]. В [10] рассмотрена задача с функционалом качества, зависящим от медленных и быстрых переменных, но с верхнетреугольной матрицей системы.

В данной статье получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренной в [11] является более общий вид критерия управления и ограничивающего множества для допустимых управлений.

Отметим, что в отличие от [11] в рассматриваемом случае оптимальное управление определяется неявно заданной функцией и построение асимптотического разложения по сравнению с [11] существенно усложняется.

## 2. Постановка задачи

Пусть управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + \tilde{B}_1\tilde{u}, & t \in [0, T], \quad \|D\tilde{u}\| \leq 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + \tilde{B}_2\tilde{u}, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(\tilde{u}) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \langle \tilde{Q}\tilde{u}(t), \tilde{u}(t) \rangle dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

где  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^r$ ;  $A_{ij}$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $i, j = 1, 2$ , — постоянные вещественнозначные матрицы соответствующей размерности, квадратная вещественнозначная матрица  $D$  невырожденная, вещественнозначная матрица  $\tilde{Q}$  симметрическая и положительная, а  $\varphi(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая на  $\mathbb{R}^n$  строго выпуклая и кофинитная функция (в смысле выпуклого анализа) [12, § 13].

Нормы во всех рассматриваемых пространствах будем обозначать через  $\|\cdot\|$ , а скалярные произведения — через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Если  $M$  — матрица, то, как и в [1, с. 134, формула (5)],  $M^*$  — оператор, сопряженный к оператору  $M$ , т.е. оператор, определяемый матрицей, получающейся из матрицы  $M$  транспонированием.

Приведем задачу (1) к некоторому “каноническому” виду.

Обозначив  $v := D\tilde{u}$ , получим, что  $\|v\| \leq 1$ , а

$$\langle \tilde{Q}\tilde{u}(t), \tilde{u}(t) \rangle = \langle (D^{-1})^* \tilde{Q} D^{-1} v(t), v(t) \rangle.$$

Так как матрица  $\tilde{D} := (D^{-1})^* \tilde{Q} D^{-1} > 0$ , то существует ортогональная матрица  $P$  такая, что  $Q := P^{-1} \tilde{D} P = \text{diag}\{q_1, \dots, q_r\}$  (см., например, [13, гл. 4, § 7, теорема 2]).

Обозначив  $u := P^{-1}v$ , а  $B_i := \tilde{B}_i D^{-1} P$  ( $i = 1, 2$ ), в силу  $\|Pu\| = \|u\|$  получим следующую задачу оптимального управления

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \langle Qu(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

где  $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_r\} > 0$ .

Отметим, что функция  $\langle Qu, u \rangle$  строго выпукла по  $u$ .

В дальнейшем будем изучать задачу (2), при этом, не ограничивая общности, будем считать, что

$$(3) \quad 0 < q_1 \leq \dots \leq q_r.$$

При каждом фиксированном  $\varepsilon > 0$  управляемая система из (2) имеет вид:

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u,$$

где

$$z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0) = z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1} A_{21} & \varepsilon^{-1} A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1} B_2 \end{pmatrix}.$$

*Определение 1.* Будем говорить, что пара матриц  $(A, B)$  вполне управляема, если вполне управляема система  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

*Предположение 1.* При всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  пара матриц  $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$  вполне управляема, т.е.  $\text{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \dots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1} \mathcal{B}_\varepsilon) = n + m$ .

Отметим, что пара матриц  $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$  из (2) вполне управляема тогда и только тогда, когда вполне управляема пара матриц  $(\mathcal{A}_\varepsilon, \tilde{\mathcal{B}}_\varepsilon)$  из (1).

*Предположение 2.* Все собственные значения матрицы  $A_{22}$  имеют отрицательные вещественные части.

*Определение 2.* Вырожденной задачей для (2) называется задача

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_0 = A_0 x_0 + B_0 u, & A_0 := A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \\ x_0(0) = x^0, \quad t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, & B_0 := B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2, \\ J_0(u) := \varphi(x_0(T)) + \int_0^T \langle Qu(t), u(t) \rangle dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

которая определяется формальной подстановкой  $\varepsilon = 0$  в (2).

*Предположение 3.* Пары матриц  $(A_0, B_0)$  и  $(A_{22}, B_2)$  вполне управляемы.

Отметим, что выполнение предположений 2 и 3 влечет выполнение предположения 1 [6, теорема 1].

В рассматриваемом интегральном выпуклом функционале качества  $J_\varepsilon$  первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени  $T$ , а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Основная задача, которая ставится для (2), есть нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$  оптимального управления  $u$ , оптимального значения функционала качества  $J_\varepsilon$  и оптимального процесса  $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ .

### 3. Основное уравнение

При выполнении предположения 1 принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение задачи (2) [3, п. 3.5, теорема 14]. Для рассматриваемой задачи этот принцип имеет следующий вид: существует единственная пара  $(z, \eta)$  — решение системы уравнений

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u^{opt}, \\ \dot{\eta} = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \eta \end{cases}$$

с граничными условиями

$$(6) \quad \begin{cases} z_\varepsilon(0) = z^0, \\ \eta(T) = - \begin{pmatrix} \nabla \varphi(x(T)) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где единственное управление  $u^{opt}$  определяется из принципа максимума [3, с. 258]:

$$(7) \quad \begin{aligned} & - \langle Qu^{opt}(t), u^{opt}(t) \rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t), u^{opt}(t) \rangle = \\ & = \max_{\|u\| \leq 1} (-\langle Qu, u \rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t), u \rangle) = - \min_{\|u\| \leq 1} (\langle Qu, u \rangle - \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t), u \rangle) \end{aligned}$$

и является оптимальным управлением в задаче (2).

Здесь и далее  $\nabla \varphi(\cdot)$  — градиент выпуклой функции  $\varphi(\cdot)$ .

В общем случае оптимальное управление  $u^{opt}(t)$  зависит от параметра  $\varepsilon$  и в дальнейшем будет обозначаться как  $u_\varepsilon^{opt}(t)$ .

Применяя условие максимума (7), выразим оптимальное управление  $u_\varepsilon^{opt}(t)$  через функцию  $\mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t)$ .

Если при фиксированном значении  $t$  максимум в (7) достигается во внутренней точке, то согласно теореме Ферма градиент функции

$$(-\langle Qu, u \rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t), u \rangle)$$

по переменной  $u$  равен нулю. Откуда получаем:

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{1}{2} Q^{-1} \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t).$$

Из условия  $\|u_\varepsilon^{opt}(t)\| < 1$  получим, что  $\|Q^{-1} \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t)\| < 2$ .

Для нахождения значения оптимального управления, которое достигается на границе  $\|u_\varepsilon^{opt}(t)\| = 1$ , т.е. для нахождения соответствующего максимума в (7), можно применить теорему о достаточных условиях условного экстремума в форме множителей Лагранжа (или с учетом выпуклости  $\langle Qu, u \rangle$  и  $\|u\|^2$  — теорему Куна–Таккера о задаче выпуклого программирования, рассмотрев задачу на минимум в (7)). Функция Лагранжа в рассматриваемом случае имеет вид

$$L(u, \mu) = -\langle Qu, u \rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t), u \rangle - \mu (\|u\|^2 - 1).$$

Поскольку  $\frac{\partial}{\partial u} L(u, \mu) = -2Qu + \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t) - 2\mu u$ , то  $u$ , на котором достигается максимум, удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial}{\partial u} L(u, \mu) = 0$  и условию  $\|u_\varepsilon^{opt}(t)\| = 1$ .

Поэтому

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{1}{2}(Q + \mu I)^{-1} \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t)$$

и, следовательно,

$$(8) \quad \|(Q + \mu I)^{-1} \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t)\| = 2.$$

Так как  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} L(u, \mu) = -2Q - 2I\mu$ , то для локального максимума достаточно выполнения неравенства  $Q + \mu I > 0$ , т.е.  $\mu > -q_1$ . Но на интервале  $(-q_1, +\infty)$  уравнение (8) имеет единственное решение  $\mu$ , которое при условии  $\|Q^{-1} \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t)\| \geq 2$  неотрицательно.

Таким образом, оптимальное управление  $u_\varepsilon^{opt}(t)$  имеет вид

$$(9) \quad u_\varepsilon^{opt}(t) = S(\mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t)),$$

где функция  $S(\cdot)$  определена следующим образом:

$$(10) \quad S(\xi) := \begin{cases} \frac{1}{2} Q^{-1} \xi, & \|Q^{-1} \xi\| < 2, \\ \tilde{S}(\xi) := \frac{(Q + \mu(\xi)I)^{-1} \xi}{2}, & \|(Q + \mu(\xi)I)^{-1} \xi\| = 2, \\ & \|Q^{-1} \xi\| \geq 2, \mu(\xi) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть  $\lambda_\varepsilon := \eta(T)$ , тогда в силу (5) и (6):

$$\eta(t) = e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \lambda_\varepsilon, \quad \text{где } \lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим:

$$e^{A_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11}(t, \varepsilon) & \mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon) \\ \mathcal{W}_{21}(t, \varepsilon) & \mathcal{W}_{22}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$C_\varepsilon(t) := \mathcal{W}_{11}(t, \varepsilon) B_1 + \varepsilon^{-1} \mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon) B_2.$$

Тогда

$$\mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t) = \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \lambda_\varepsilon = C_\varepsilon^*(T-t) l_\varepsilon$$

и в силу (9)

$$(11) \quad u_\varepsilon^{opt}(t) = S(C_\varepsilon^*(T-t) l_\varepsilon).$$

Для нахождения асимптотического разложения вектора  $l_\varepsilon$  удобно продолжить функцию  $\tilde{S}(\xi)$  на более широкое множество. Поскольку функция

$$(12) \quad \tilde{F}(\xi, \mu) := \|(Q + \mu I)^{-1} \xi\|^2 - 4$$

по переменной  $\xi$  – непрерывна, строго убывает при  $\mu \in (-q_1, +\infty)$  и

$$\tilde{F}(\xi, +\infty) = -4 < 0,$$

то естественным расширением  $\tilde{S}(\xi)$  будет новая функция (обозначение этой функции оставим старое), определенная на множестве

$$D(\tilde{S}) := \left\{ \xi : \exists \tilde{\mu} > -q_1 \quad \tilde{F}(\xi, \tilde{\mu}) > 0 \right\},$$

и такая, что  $\tilde{S}(\xi)$  – единственное решение уравнения

$$\tilde{F}(\xi, \mu) = 0, \quad \mu > -q_1.$$

*Замечание 1.* Функция  $\tilde{S}(\xi)$  совпадает с  $S(\xi)$  только при  $\|Q^{-1}\xi\| \geq 2$ , поэтому функция  $\tilde{S}(\mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t))$ , вообще говоря, не есть оптимальное управление и не удовлетворяет (7).

*Утверждение 1.* Функция  $\tilde{S}(\xi)$  бесконечно дифференцируема на  $D(\tilde{S})$  и

$$(13) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \Delta \xi = \\ & = -\frac{1}{2} \left( \frac{\left\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi, \Delta \xi \right\rangle}{\left\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3} \xi, \xi \right\rangle} (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi - (Q + \mu(\xi)I)^{-1} \Delta \xi \right). \end{aligned}$$

*Утверждение 2.* При всех  $\xi \in D(\tilde{S})$  и при всех  $\Delta \xi$ :  $\left\langle \frac{\partial \tilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \Delta \xi, \Delta \xi \right\rangle \geq 0$ .

*Утверждение 3.* Функция  $S(\xi)$  бесконечно дифференцируема при  $\|Q^{-1}\xi\| \neq 2$  и липшицева на  $\mathbb{R}^r$ .

Из этого утверждения следует, что оптимальное управление непрерывно на  $[0, T]$ . Кроме этого, если  $l_\varepsilon$  – вектор, определяющий оптимальное управление, а  $l_{N,\varepsilon}$  – его приближение, которое удовлетворяет условию

$$\|l_\varepsilon - l_{N,\varepsilon}\| = O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$



то

$$\|u_\varepsilon^{opt}(t) - S(C_\varepsilon^*(T-t)l_{N,\varepsilon})\| = O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Поэтому асимптотическое разложение вектора  $l_\varepsilon$  дает асимптотическое разложение оптимального управления, следовательно, и состояния управляемой системы.

В силу формулы Коши, вида оптимального управления (11) и свойств кофинитных функций [12, теорема 26.6] второе равенство из (6) эквивалентно соотношению (в интеграле сделана замена переменной  $\tau := T - t$ )

$$(14) \quad \nabla\varphi^*(-l_\varepsilon) = \mathcal{W}_{11}(T, \varepsilon)x^0 + \mathcal{W}_{12}(T, \varepsilon)y^0 + \int_0^T C_\varepsilon(t)S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt,$$

где  $\varphi^*$  – сопряженная функция к функции  $\varphi$  в смысле выпуклого анализа.

Отметим, что свойства функции  $\tilde{S}(\xi)$  таковы, что построение и обоснование асимптотического разложения вектора  $l_\varepsilon$  можно проводить по стандартной схеме (см., например, [11]). Кратко эта схема описана в разделах 4–6.

#### 4. Асимптотика матричной экспоненты и основные соотношения

Рассматривая  $e^{A_\varepsilon t}$  как фундаментальную матрицу  $\mathcal{W}(t, \varepsilon)$  решения системы в задаче (2) в случае  $u_\varepsilon \equiv 0$  и следуя методу пограничных функций [14] при выполнении предположения 2, получаем для  $\mathcal{W}(t, \varepsilon)$  равномерное на отрезке  $[0, T]$  асимптотическое разложение при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$e^{A_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left( \mathcal{W}_k(t) + \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau) \right), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon},$$

где для блоков  $\mathcal{W}_{ij}(t, \varepsilon)$  справедливы асимптотические разложения, равномерные на  $t \in [0, T]$  при каждом фиксированном  $k \geq 0$ :

$$\mathcal{W}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathcal{W}_k(t)$ ,  $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$  – бесконечно дифференцируемые матричнозначные функции, которые определяются из равенства  $\frac{d}{dt}\mathcal{W}(t, \varepsilon) = A_\varepsilon\mathcal{W}(t, \varepsilon)$  и начальных условий  $\mathcal{W}(0, \varepsilon) = I$ . В [15, формулы (2.4)–(2.8), с. 125] приведены формулы для построения этих разложений. В частности (при  $\tau := t/\varepsilon$ ),

$$(15) \quad \begin{cases} \mathcal{W}_{11,0}(t) = e^{A_0 t}, & \mathcal{W}_{12,0}(t) \equiv 0, & \mathcal{W}_{21,0}(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}e^{A_0 t}, \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{11,0}(\tau) \equiv 0, & \widetilde{\mathcal{W}}_{12,0}(\tau) \equiv 0, & \widetilde{\mathcal{W}}_{21,0}(0) = e^{A_{22}\tau}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ \mathcal{W}_{22,0}(t) \equiv 0, & \widetilde{\mathcal{W}}_{22,0}(\tau) = e^{A_{22}\tau}, & \mathcal{W}_{12,1}(t) = -e^{A_0 t}A_{12}A_{22}^{-1}, \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau) = A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}. \end{cases}$$

Отметим, что все  $\widetilde{W}_{ij,k}(\tau)$  экспоненциально убывают при  $\tau \rightarrow +\infty$  (см., например, [15, утверждение 2.1]).

Из формул (15) простым вычислением получим, что при  $\varepsilon \rightarrow +0$  [15, формулы (2.19)–(2.21)]

$$(16) \quad \begin{aligned} C_\varepsilon(t) &= C_0(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t}B_2 + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}C_0(t) + \varepsilon^{-1}A_{12}e^{A_{22}t}B_2 + A_{12}e^{A_{22}t}A_{22}^{-1}A_{21}B_1 + \\ &+ \left( A_{11}A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t} + A_{12}\widetilde{B}_{22,1}(t) \right) B_2 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

*Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда*

$$l_\varepsilon \rightarrow l_0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

где  $l_\varepsilon$  – единственное решение уравнения (14), а  $l_0$  – единственное решение уравнения

$$(17) \quad \nabla\varphi^*(-l_0) = e^{A_0t}x^0 + \int_0^T C_0(t)S(C_0^*(t)l_0)dt.$$

Доказательство этой теоремы почти дословно (с соответствующими изменениями) повторяет доказательство теоремы 1 из [11].

Отметим также, что  $u_0^{opt}(t) = S(C_0^*(T-t)l_0)$  есть единственное оптимальное управление в вырожденной задаче (4).

## 5. Точки смены вида подынтегрального выражения

Если на промежутке  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  выполняется условие

$$\forall t \in [t_1, t_2] \quad \|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| < 2 \quad \text{либо} \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2,$$

то  $S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)$  на этом промежутке определяется одной из двух формул

$$(18) \quad \frac{Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{2} \quad \text{либо} \quad \widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon).$$

Интеграл из равенства (14) на этом промежутке будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} C_\varepsilon Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt \quad \text{либо} \quad \int_{t_1}^{t_2} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt.$$

*Определение 3. Точки  $t_{i,\varepsilon}$  – решения уравнения  $\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$  будем называть точками смены вида подынтегрального выражения в (14), а точки  $t_{i,0}$  – решения уравнения  $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$  будем называть точками смены вида подынтегрального выражения в (17).*

*Замечание 2.* В дальнейшем точки смены вида подынтегрального выражения будем называть просто *точками смены* в (14) или в (17) соответственно.

Отметим, что в силу формулы (14) решения уравнения  $\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$  не будут временами смены вида оптимального управления. Если  $t_\varepsilon$  — решение этого уравнения, то соответствующее ему время смены оптимального управления равно  $T - t_\varepsilon$ .

Из формул (16) следует, что при  $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$  справедливы асимптотические формулы

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При  $t \in [0, \sqrt{\varepsilon}]$  функция  $C_\varepsilon(t)$  после замены переменной  $\tau := t/\varepsilon$  переписывается как  $\tilde{C}_\varepsilon(\tau) := C_\varepsilon(\varepsilon\tau)$ , которая при  $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$  определяется асимптотической формулой

$$\tilde{C}_\varepsilon(\tau) = \psi(\tau) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{C}_\varepsilon(\tau) = A_{12}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$\psi(\tau) := B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2.$$

Таким образом, существуют  $K_1 > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$  такие, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и  $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$  справедливы неравенства

$$\|C_\varepsilon^*(t) - C_0^*(t)\| \leq K_1\varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon^*(t) - \frac{d}{dt}C_0^*(t) \right\| \leq K_1\varepsilon.$$

Следовательно, можно ожидать, что решения уравнения  $\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$  при  $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$  находятся вблизи решений уравнения  $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$ , т.е. вблизи точек смены в (17), а при  $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$  — вблизи решений уравнения

$$(19) \quad \|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\| = 2, \quad \text{где} \quad \psi^*(\tau) := B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*.$$

*Определение 4.* Решение  $t_*$  уравнения  $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$  будем называть *регулярным*, если  $\frac{d}{dt}\|Q^{-1}C_0^*(t_*)l_0\|^2 \neq 0$ .

Аналогично  $\tau_*$  — решение уравнения  $\|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\| = 2$  будем называть *регулярным*, если  $\frac{d}{d\tau}\|Q^{-1}\psi^*(\tau_*)l_0\|^2 \neq 0$ .

*Предположение 4.* Матрицы  $Q$ ,  $B_0^*$  и вектор  $l_0$  таковы, что выполняется следующее соотношение:  $\|Q^{-1}B_0^*l_0\| \neq 2$ .

*Утверждение 4.* При выполнении предположений 3, 4 уравнение  $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$  при  $t \in [0, T]$  и уравнение  $\|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\| = 2$  при  $\tau > 0$  имеют не более чем конечное число решений.

Доказательство утверждения следует из аналитичности функций

$$(20) \quad \|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|^2 - 4, \quad \|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\|^2 - 4, \quad \|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\|^2 - 4.$$

Как и в случае  $Q = I$  (см., [15, теорема 2.1]) справедлива теорема о количестве точек смены в (14).

*Теорема 2.* Пусть выполнены предположения 1–4,  $\{t_i\}_1^p \subset [0, T]$  – все решения уравнения  $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$ , а  $\{\tau_j\}_1^q \subset [0, +\infty)$  – все решения уравнения (19). Кроме того, при  $i = 1, \dots, p$  и  $j = 1, \dots, q$  все такие решения – регулярные.

Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существуют  $\{t_{i,\varepsilon}\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$  и  $\{\tau_{j,\varepsilon}\}_1^q \subset [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$  – точки смены в (14). Других точек смены в (14) нет, и при всех  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$  справедливы соотношения  $t_{i,\varepsilon} \rightarrow t_i$ ,  $\tau_{j,\varepsilon} \rightarrow \tau_j$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 интеграл из (14) разобьется в конечную сумму интегралов с подынтегральными функциями вида (18).

## 6. Построение асимптотики вектора $l_\varepsilon$

Для технического упрощения, и не ограничивая общности рассуждений, будем вести это построение в случае, когда имеется лишь одна точка  $t_0$  смены вида в (17), а в (19) таких точек две, т.е. выполнено предположение 5.

*Предположение 5.* Пусть  $t_1 = \varepsilon\tau_1$ ,  $t_2 = \varepsilon\tau_2$ , где  $\tau_1, \tau_2$  – все решения уравнения (19), а у уравнения  $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$  имеется единственное решение  $t_0$ . Решения  $t_0, \tau_1, \tau_2$  – регулярны.

Отметим, что все условия в предположении 5 есть условия общего положения.

В силу теоремы 2 у рассматриваемой управляемой системы будут три точки смены вида в (14):  $t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$ ,  $t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}$  и  $t_{0,\varepsilon}$ . При этом  $\tau_{1,\varepsilon} \rightarrow \tau_1$ ,  $\tau_{2,\varepsilon} \rightarrow \tau_2$  и  $t_{0,\varepsilon} \rightarrow t_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а интеграл  $\int_0^T C_\varepsilon(t)S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt$  разбивается в сумму четырех интегралов

$$\begin{aligned} & \int_0^T C_\varepsilon(t)S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt = \\ & = \int_0^{t_{1,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)\tilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt + \frac{1}{2} \int_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{2,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt + \\ & + \int_{t_{2,\varepsilon}}^{t_{0,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)\tilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt + \frac{1}{2} \int_{t_{0,\varepsilon}}^T C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0, \quad \Delta t_\varepsilon := t_{0,\varepsilon} - t_0, \quad \Delta \tau_{1,\varepsilon} := \tau_{1,\varepsilon} - \tau_1, \quad \Delta \tau_{2,\varepsilon} := \tau_{2,\varepsilon} - \tau_2.$$

Тогда

$$\Delta l_\varepsilon = o(1), \quad \Delta t_\varepsilon = o(1), \quad \Delta \tau_{1,\varepsilon} = o(1), \quad \Delta \tau_{2,\varepsilon} = o(1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Величины  $\Delta l_\varepsilon$ ,  $\Delta \tau_{1,\varepsilon}$ ,  $\Delta \tau_{2,\varepsilon}$  и  $\Delta t_\varepsilon$ , являются решением следующей системы уравнений, зависящей от параметра  $\varepsilon > 0$ :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = F(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2) := -\nabla \varphi^*(-l) + \nabla \varphi^*(-l_0) + \\ + \varepsilon \mathcal{W}_{11,1}(T, \varepsilon) x^0 + \varepsilon \mathcal{W}_{12,1}(T, \varepsilon) y^0 + \int_0^{\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1)} C_\varepsilon(t) \tilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1)}^{\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2)} C_\varepsilon(t) Q^{-1} C_\varepsilon^*(t) l dt + \int_{\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2)}^{t_0 + \Delta t} C_\varepsilon(t) \tilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0 + \Delta t}^T C_\varepsilon(t) Q^{-1} C_\varepsilon^*(t) l dt - \int_0^{t_0} C_0(t) \tilde{S}(C_0^*(t)l) dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T C_0(t) Q^{-1} C_0^*(t) l dt, \\ 0 = G_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) := \|Q^{-1} C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1))(l_0 + \Delta l)\|^2 - 4, \\ 0 = G_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) := \|Q^{-1} C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2))(l_0 + \Delta l)\|^2 - 4, \\ 0 = G_3(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) := \|Q^{-1} C_\varepsilon^*(t_0 + \Delta t)(l_0 + \Delta l)\|^2 - \|Q^{-1} C_0^*(t_0)l_0\|^2. \end{array} \right.$$

Здесь и в дальнейшем индекс  $\varepsilon$  у вектора  $l_\varepsilon$ , а также у величин  $\Delta l_\varepsilon$ ,  $\Delta \tau_{1,\varepsilon}$ ,  $\Delta \tau_{2,\varepsilon}$ ,  $\Delta t_\varepsilon$  опустим.

Согласно (20) функции  $F$  и  $G_i$  (при  $i = 1, 2, 3$ ) непрерывны, а  $G_i$  — бесконечно дифференцируемые. Рассмотрим их асимптотические разложения относительно бесконечно малых  $\Delta l$ ,  $\Delta \tau_1$ ,  $\Delta \tau_2$  и  $\Delta t$ .

Поскольку функции  $\varphi^*$  и  $G_i$  бесконечно дифференцируемые, то их степенные асимптотические разложения есть ряды Тейлора, построенные в окрестности точки  $(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2, \Delta t) = 0$ , в частности,

$$(22) \quad -\nabla \varphi^*(-l_0 - \Delta l) + \nabla \varphi^*(-l_0) \sim D^2 \varphi^*(-l_0) \Delta l + \sum_{k=2}^{\infty} \Phi_k(\Delta l),$$

где  $D^2\varphi^*(-l_0)$  — дифференциал второго порядка от  $\varphi^*$  в точке  $(-l_0)$ , а  $\Phi_k(\Delta l)$  — однородные степени  $k$  известные функции (многочлены от компонент вектора  $\Delta l$ ).

Степенное асимптотическое разложение интегральных слагаемых из (21) строится так же, как и в случае  $Q = I$  (см. [15, раздел 3]): в частности, используется представление интегралов из (21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)} C_\varepsilon(t)\tilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l)dt &= \int_0^{\varepsilon\tau_1} + \int_{\varepsilon\tau_1}^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}, \\ \int_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l dt &= \int_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon\tau_1} + \int_{\varepsilon\tau_1}^{\varepsilon\tau_2} + \int_{\varepsilon\tau_2}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}, \\ \int_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{t_0+\Delta t} C_\varepsilon(t)\tilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l)dt &= \int_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{\varepsilon\tau_2} + \int_{\varepsilon\tau_2}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}, \\ \int_{t_0+\Delta t}^T C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l dt &= \int_{t_0+\Delta t}^{t_0} + \int_{t_0}^T. \end{aligned}$$

Отметим, что продолжение функции  $\tilde{S}$  требовалось для возможности такого представления интегралов из (21).

Покажем, что оператор первого приближения в системе (21) обратим.

Обозначим линейную часть по  $\Delta l$  функции  $F$  как  $\mathcal{F}(\Delta l)$ . В силу представления (22) непосредственным вычислением (используя формулу (13), в которой нужно  $\xi$  заменить на  $C_0^*(t)l_0$ , а  $\Delta\xi$  — на  $C_0^*(t)\Delta l$ ), получаем равенство

$$\begin{aligned} &F(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta t) = \\ &= D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) + \\ (23) \quad &+ \int_0^{t_0} C_0(t)\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\xi}(C_0^*(t)l_0)C_0^*(t)\Delta l dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T C_0(t)Q^{-1}C_0^*(t)\Delta l dt =: \\ &=: \mathcal{F}(\Delta l) + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2), \end{aligned}$$

где

$$F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) = O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2 + (\Delta\tau_1)^2 + (\Delta\tau_2)^2\right),$$

а  $f_1$  — известная величина.

Аналогично для функций  $G_i$ :

$$\begin{aligned}
(24) \quad G_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) &= 2 \left\langle Q^{-1} \psi^*(\tau_1) l_0, Q^{-1} \psi^*(\tau_1) \Delta l + Q^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{12}^* \Delta \tau_1 l_0 \right\rangle + \\
&+ 2 \left\langle Q^{-1} \psi^*(\tau_1) l_0, \varepsilon Q^{-1} B_1^* \mathcal{W}_{11,1}^*(t_0) l_0 + \varepsilon Q^{-1} B_1^* A_{21}^* (A_{22}^{-1})^* e^{A_{22}^* \tau_1} (A_{22}^{-1})^* A_{12}^* l_0 \right\rangle + \\
&+ 2 \left\langle Q^{-1} \psi^*(\tau_1) l_0, \varepsilon Q^{-1} B_2^* \mathcal{W}_{12,2}^*(t_0) l_0 \right\rangle + G_{1,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1), \\
G_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) &= 2 \left\langle Q^{-1} \psi^*(\tau_2) l_0, Q^{-1} \psi^*(\tau_2) \Delta l + Q^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* \tau_2} A_{12}^* \Delta \tau_2 l_0 \right\rangle + \\
&+ 2 \left\langle Q^{-1} \psi^*(\tau_2) l_0, \varepsilon Q^{-1} B_1^* \mathcal{W}_{11,1}^*(t_0) l_0 + \varepsilon Q^{-1} B_1^* A_{21}^* (A_{22}^{-1})^* e^{A_{22}^* \tau_2} (A_{22}^{-1})^* A_{12}^* l_0 \right\rangle + \\
&+ 2 \left\langle Q^{-1} \psi^*(\tau_2) l_0, \varepsilon Q^{-1} B_2^* \mathcal{W}_{12,2}^*(t_0) l_0 \right\rangle + G_{2,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2), \\
G_3(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) &= 2 \left\langle Q^{-1} C_0^*(t_0) l_0, Q^{-1} C_0^*(t_0) \Delta l + Q^{-1} \frac{\partial}{\partial t} C_0^*(t_0) l_0 \Delta t \right\rangle + \\
&+ 2 \left\langle Q^{-1} C_0^*(t_0) l_0, \varepsilon Q^{-1} B_1^* \mathcal{W}_{11,1}^*(t_0) l_0 + \varepsilon Q^{-1} B_2^* \mathcal{W}_{12,2}^*(t_0) l_0 \right\rangle + G_{3,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{1,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta \tau_1)^2\right), \\
G_{2,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta \tau_2)^2\right), \\
G_{3,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2\right).
\end{aligned}$$

Согласно равенствам (23), (24) оператор первого приближения для системы (21) имеет вид

$$\mathcal{H} := \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\Delta l) \\ 2 \langle Q^{-1} \psi^*(\tau_1) l_0, Q^{-1} \psi^*(\tau_1) \Delta l \rangle + 2 \Delta \tau_1 \langle Q^{-1} \psi^*(\tau_1) l_0, Q^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{12}^* l_0 \rangle \\ 2 \langle Q^{-1} \psi^*(\tau_2) l_0, Q^{-1} \psi^*(\tau_2) \Delta l \rangle + 2 \Delta \tau_2 \langle Q^{-1} \psi^*(\tau_2) l_0, Q^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* \tau_2} A_{12}^* l_0 \rangle \\ 2 \langle Q^{-1} C_0^*(t_0) l_0, Q^{-1} C_0^*(t_0) \Delta l \rangle + 2 \Delta t \langle Q^{-1} C_0^*(t_0) l_0, Q^{-1} \frac{\partial}{\partial t} C_0^*(t_0) l_0 \rangle \end{pmatrix},$$

а система первого приближения для (21) запишется в виде

$$(25) \quad \begin{cases} \mathcal{F}(\Delta l_1) = -\varepsilon f_1, \\ 2 \langle Q^{-1} \psi^*(\tau_1) l_0, Q^{-1} \psi^*(\tau_1) \Delta l_1 + Q^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{12}^* l_0 \Delta \tau_{1,1} \rangle = \varepsilon g_{1,1}, \\ 2 \langle Q^{-1} \psi^*(\tau_2) l_0, Q^{-1} \psi^*(\tau_2) \Delta l_1 + Q^{-1} B_2^* e^{A_{22}^* \tau_2} A_{12}^* l_0 \Delta \tau_{2,1} \rangle = \varepsilon g_{2,1}, \\ 2 \langle Q^{-1} C_0^*(t_0) l_0, Q^{-1} C_0^*(t_0) \Delta l_1 + Q^{-1} \frac{\partial}{\partial t} C_0^*(t_0) l_0 \Delta t_1 \rangle = \varepsilon g_{3,1}, \end{cases}$$

где  $g_{i,1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — известные величины (в силу (24)).

В силу условий строгой выпуклости функции  $\varphi$  (из постановки задачи) линейный оператор  $D^2 \varphi^*(-l_0)$  — положительный, а в силу утверждения 2

остальные слагаемые в определении линейного оператора  $\mathcal{F}$  – неотрицательны (после скалярного умножения на вектор  $Q^{-1}C^*(t)\Delta l$  подынтегрального выражения в (23)). Поэтому оператор  $\mathcal{F} > 0$  и, таким образом, из первого уравнения в системе (25) однозначно находится значение  $\Delta l_1 = \varepsilon \mathcal{F}^{-1}(-f_1) =: \varepsilon l_1$ .

Поскольку в силу регулярности точек  $\tau_{j,0}$  при  $j = 1, 2$  и  $t_0$ :

$$\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_j)l_0, Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_j}A_{12}^*l_0 \rangle \neq 0,$$

то из второго и третьего уравнения в системе (25) по  $\Delta l_1$  однозначно находятся значения  $\Delta\tau_{1,1}$ ,  $\Delta\tau_{2,1}$  и они имеют вид  $\Delta\tau_{1,1} = \varepsilon\tau_1$ ,  $\Delta\tau_{2,1} = \varepsilon\tau_2$  и

$$\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0, Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0 \rangle \neq 0,$$

а из четвертого уравнения в (25) по  $\Delta l_1$  однозначно находится  $\Delta t_1$ , имеющее вид  $\Delta t_1 = \varepsilon t_1$ .

Таким образом, оператор первого приближения обратим. Построение и обоснование асимптотики величин происходит аналогично случаю  $Q = I$  [15, раздел 3]. Справедлива теорема 3.

*Теорема 3. Пусть выполнены предположения 2–5. Тогда вектор  $l_\varepsilon$  и моменты времени  $t_{i,\varepsilon}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{0,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{1,k},$$

$$t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{2,k}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

В общем случае оператор  $\mathcal{F}(\Delta l)$  (см. (23)) имеет вид

$$\mathcal{F}(\Delta l) = D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \mathcal{F}_0,$$

где

$$\mathcal{F}_0 := \int_{E_1} \frac{C_0(t)Q^{-1}C_{1,0}^*(t)\Delta l}{2} dt + \int_{E_2} C_0(t) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(C_0^*(t)l_0) \cdot C_0^*(t)\Delta l dt,$$

$$E_1 = \{t \in [0, T] : \|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| \leq 2\},$$

$$E_2 = \{t \in [0, T] : \|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| \geq 2\},$$

и  $\mathcal{F}_0 \geq 0$ .



*Теорема 4. Пусть выполнены предположения 2–4, условия теоремы 2. Тогда вектор  $l_\varepsilon$  и моменты времени  $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\}$  раскладываются в степенные асимптотические ряды на промежутке  $[\sqrt{\varepsilon}, T]$*

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

*и дополнительные точки  $\{\tau_{1,\varepsilon}, \tau_{2,\varepsilon}, \dots, \tau_{q,\varepsilon}\}$  раскладываются в степенные асимптотические ряды на промежутке*

$$\tau_{j,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \tau_j + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{j,k}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

*коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.*

В силу теоремы 4 в общем случае для нахождения асимптотического разложения указанных в теореме 4 величин можно сразу искать их в виде рядов с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты этих рядов находятся стандартным образом — приравниванием в формальном асимптотическом разложении основного уравнения слагаемых одного порядка малости по  $\varepsilon$ .

## 7. Заключение

Статья носит теоретический характер. Результаты статьи дополняют теорию асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления для системы с медленными и быстрыми переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление с интегрально выпуклым критерием качества. Терминальная часть функционала качества есть непрерывно дифференцируемая на  $\mathbb{R}^n$  строго-выпуклая и кофинитная функция, а интегральная часть содержит строго выпуклую функцию, зависящую от управления. Показано, что решение задачи с ограничениями на управление в виде эллипсоида сводится к решению задачи с ограничением на управление в виде шара.

В статье предложен алгоритм определения всех коэффициентов асимптотического разложения по малому параметру определяющего вектора  $l_\varepsilon$ , который задает вид оптимального управления. Главная особенность и сложность рассматриваемой задачи определяются тем, что оптимальное управление в ней определяется через неявно заданную функцию.

Авторы статьи выражают благодарность рецензенту, сделавшему ряд ценных замечаний, учет которых при подготовке статьи к печати позволил авторам улучшить ее текст.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Рассмотрим функцию  $\mu(\xi)$ . Она задана неявно уравнением  $\tilde{F}(\xi, \mu) = 0$ .

Функция  $\tilde{F}(\xi, \mu) \in D(\tilde{S})$ , определенная в (12), бесконечно дифференцируема на области  $\{(\xi, \mu) : \xi \in D(\tilde{S}), \mu > -q_1\}$ . При этом

$$(II.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F(\xi, \mu)}{\partial \xi} \Delta \xi &= 2 \langle (Q + \mu I)^{-2} \xi, \Delta \xi \rangle, \\ \frac{\partial F(\xi, \mu)}{\partial \mu} &= -2 \langle (Q + \mu I)^{-3} \xi, \xi \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

и

$$\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3} \xi, \xi \rangle \neq 0$$

при всех  $\xi \in D(\tilde{S})$  силу положительности  $(Q + \mu(\xi)I)$ . Поэтому по теореме о дифференцируемости функции, заданной неявно, функция  $\mu(\xi)$  — бесконечно дифференцируема при  $\xi \in D(\tilde{S})$  и в силу (II.1)

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi} \Delta \xi &= - \left( \frac{\partial F(\xi, \mu)}{\partial \mu} \right)^{-1} \left( \frac{\partial F(\xi, \mu)}{\partial \xi} \Delta \xi \right) = \\ &= \frac{\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi, \Delta \xi \rangle}{\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3} \xi, \xi \rangle} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\tilde{S}(\xi) = (Q + \mu(\xi)I)^{-1} \xi / 2$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \Delta \xi &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (Q + \mu(\xi + t \Delta \xi)I)^{-1} (\xi + t \Delta \xi) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{2} \left( -(Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi \left( \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi} \Delta \xi \right) + (Q + \mu(\xi)I)^{-1} \Delta \xi \right) \stackrel{(II.2)}{=} \\ &\stackrel{(II.2)}{=} -\frac{1}{2} \left( \frac{\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi, \Delta \xi \rangle}{\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3} \xi, \xi \rangle} (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi - (Q + \mu(\xi)I)^{-1} \Delta \xi \right). \end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано.

*Доказательство утверждения 2.* При любом  $\xi \in D(\tilde{S})$  в силу определения  $D(\tilde{S}) : (Q + \mu(\xi)I)^{-1} > 0$ , поэтому в  $\mathbb{R}^r$  можно ввести новое скалярное произведение  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_\mu := \langle (Q + \mu(\xi)I)^{-1} \xi_1, \xi_2 \rangle$ .

Тогда

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial \tilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \Delta \xi, \Delta \xi \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left( \langle (Q + \mu(\xi)I)^{-1} \Delta \xi, \Delta \xi \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi, \Delta \xi \rangle}{\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3} \xi, \xi \rangle} \langle (Q + \mu(\xi)I)^{-2} \xi, \Delta \xi \rangle \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3}\xi, \xi \rangle} \times \\ \times \left( \|\Delta\xi\|_{\mu}^2 \cdot \|(Q + \mu(\xi)I)^{-1}\xi\|_{\mu}^2 - \langle (Q + \mu(\xi)I)^{-1}\xi, \Delta\xi \rangle_{\mu}^2 \right).$$

Выражение в скобках неотрицательно в силу неравенства Коши–Буняковского.

Утверждение 2 доказано.

*Доказательство утверждения 3.* Справедливость первого утверждения следует из определения функции  $S(\cdot)$  из (10) и утверждения 1.

Пусть  $\|Q^{-1}\xi\| > 2$ , тогда  $\|(Q + \mu(\xi)I)^{-1}\xi\| = 2$  и  $\mu(\xi) > 0$ .

Теперь оценим знаменатель в первом слагаемом из (13):

$$\langle (Q + \mu(\xi)I)^{-3}\xi, \xi \rangle = \sum_{k=1}^r \frac{\xi_k^2}{(q_k + \mu(\xi))^3} \stackrel{(3)}{\geq} \frac{\|\xi\|^2}{(q_r + \mu(\xi))^3}.$$

Таким образом, в силу (13)

$$(П.3) \quad \left\| \frac{\partial \tilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \right\| \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\|(Q + \mu(\xi)I)^{-2}\|^2 \|\xi\|^2 (q_r + \mu(\xi))^3}{\|\xi\|^2} + \|(Q + \mu(\xi)I)^{-1}\| \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{(q_r + \mu(\xi))^3}{(q_1 + \mu(\xi))^4} + \frac{1}{(q_1 + \mu(\xi))} \right) \rightarrow 0 \text{ при } \mu(\xi) \rightarrow +\infty.$$

Поэтому существует такое  $K(\tilde{S})$ , что  $\left\| \frac{\partial \tilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \right\| \leq K(\tilde{S})$  при всех  $\xi: \|Q^{-1}\xi\| > 2$ .

Если  $\|Q^{-1}\xi\| = 2$ , то  $\mu(\xi) = 0$ , поэтому  $\tilde{S}(\xi) = \|Q^{-1}\xi\|$ . Таким образом, функция  $\tilde{S}$  непрерывна на  $\mathbb{R}^k$ .

Если  $\|Q^{-1}\xi_i\| < 2$  ( $i = 1, 2$ ), то  $\|S(\xi_2) - S(\xi_1)\| \leq \frac{1}{2}\|Q^{-1}\| \cdot \|\xi_2 - \xi_1\|$ .

Если  $\|Q^{-1}\xi_i\| > 2$  ( $i = 1, 2$ ), то в силу формулы конечных приращений Лагранжа из (П.3) получим

$$\|S(\xi_2) - S(\xi_1)\| = \|\tilde{S}(\xi_2) - \tilde{S}(\xi_1)\| \leq K(\tilde{S})\|\xi_2 - \xi_1\|.$$

Наконец, пусть  $\|Q^{-1}\xi_1\| < 2$  и  $\|Q^{-1}\xi_2\| \geq 2$ . Тогда найдется единственная точка  $\tilde{\xi} \in [\xi_1, \xi_2]$  такая, что  $\|Q^{-1}\tilde{\xi}\| = 2$ . Поэтому

$$\|S(\xi_2) - S(\xi_1)\| \leq \|S(\xi_2) - S(\tilde{\xi})\| + \|S(\tilde{\xi}) - S(\xi_1)\| \leq \\ \leq K(\tilde{S})\|\xi_2 - \tilde{\xi}\| + \frac{1}{2}\|Q^{-1}\| \cdot \|\tilde{\xi} - \xi_1\| \leq K_1(\|\xi_2 - \tilde{\xi}\| + \|\tilde{\xi} - \xi_1\|).$$

Но  $\|\xi_2 - \tilde{\xi}\| + \|\tilde{\xi} - \xi_1\| = \|\xi_2 - \xi_1\|$ .

Утверждение 3 доказано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ. 1982. Т. 20. С. 3–77. <https://doi.org/10.1007/BF01262406>.  
*Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G.* Singular perturbations in problems of optimal control // J. Soviet Math. 1986. V. 34. No. 3. P. 1579–1629.  
<https://doi.org/10.1007/BF01262406>.
5. *Дончев А.* Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
6. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and Time-Optimal Control of Systems with Slow and Fast Models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. No. 1. P. 111–113.
7. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451. № 6. С. 612–614. <https://doi.org/10.7868/S086956521325004X>.  
*Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O.* Time-Optimal Control of a Small Mass Point without Environmental Resistance // Doklady Mathematics. 2013. V. 88. No. 1. P. 465–467. <https://doi.org/10.7868/S086956521325004X>.
8. *Данилин А.Р., Парышева Ю.В.* Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 55–65.  
<https://doi.org/10.1134/S0081543807060053>.  
*Danilin A.R., Parysheva Yu.V.* The Asymptotics of the Optimal Value of the Performance Functional in a Linear Optimal Control Problem in the Regular Case // Proc. Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues). 2007. V. 259. suppl. 2. S83–S94. <https://doi.org/10.1134/S0081543807060053>.
9. *Калинин А.И., Семенов К.В.* Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 3. С. 432–443.  
*Kalinin A.I., Semenov K.V.* The Asymptotic Optimization Method for Linear Singularly Perturbed Systems with the Multidimensional Control // Comput. Math. Math. Phys. 2004. V. 44. No. 3. P. 407–417.
10. *Данилин А.Р., Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных // Уфимск. матем. журн. 2019. Т. 11. № 2. С. 83–98. <https://doi.org/10.13108/2019-11-2-82>.  
*Danilin A.R., Shaburov A.A.* Asymptotic Expansion of Solution to Singularly Perturbed Optimal Control Problem with Convex Integral Quality Functional with Terminal Part Depending on Slow and Fast Variables // Ufa Math. J. 2019. V. 11. No. 2. P. 82–96. <https://doi.org/10.13108/2019-11-2-82>.

11. *Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с интегральным выпуклым критерием качества // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 303–310. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310>.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
13. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
14. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
15. *Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Вестн. российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 125. С. 119–136. <https://doi.org/10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136>.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 19.02.2021

После доработки 16.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021

© 2022 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (strondutt@mail.ru),  
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
В.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (petrov.va@misis.ru)  
(Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)  
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический  
университет «МИСиС», Старый Оскол)

## НОРМАЛИЗАЦИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕГРЕССОРА В ПРОЦЕДУРЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ И СМЕШИВАНИЯ<sup>1</sup>

Предложен подход к нормализации возбуждения регрессора контура идентификации, построенного на основе процедуры динамического расширения и смешивания. Применение этого подхода позволяет при постоянном значении коэффициента усиления контура оценки иметь одинаковую верхнюю границу параметрической ошибки идентификации для скалярных регрессоров с различной степенью возбуждения, что является существенным преимуществом для практики. Выполнено сравнение разработанного подхода с известным методом амплитудной нормализации регрессора и показано, что классический метод нормализации не обладает указанным свойством. В качестве валидации полученных теоретических выводов приводятся результаты сравнительного математического моделирования классического градиентного контура оценки, контуров с амплитудной нормализацией регрессора и с предложенной нормализацией возбуждения регрессора.

*Ключевые слова:* идентификация, градиентный метод, параметрическая ошибка, коэффициент усиления контура оценки, степень возбуждения, нормализация.

DOI: 10.31857/S0005231022010020

### 1. Введение

Методы классической теории идентификации динамических объектов [1] получили широкое распространение в инженерной практике специалистов по автоматизации технологических процессов различных отраслей промышленности и, как правило, используются в процессе пусконаладочных работ для получения математической модели технологического агрегата. Полученная модель в дальнейшем обычно используется для расчета параметров промышленных ПИ и ПИД регуляторов. При этом точность модели является критически важным показателем, поскольку от нее напрямую зависит и точность

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-47-310003 p\_a).

параметров регуляторов, а значит, и экономические показатели технологического агрегата, зависящие от качества управления.

Классические методы теории идентификации, к которым прежде всего относятся рекурсивный метод наименьших квадратов и метод градиентного спуска, обеспечивают точную идентификацию параметров модели только при выполнении условия незатухающего возбуждения регрессора [2]. На практике это требует инъекции высокочастотного тестового сигнала в управляющий вход технологического агрегата [3]. Использование метода инъекции не всегда возможно в условиях реального промышленного производства. Поэтому для ослабления условия незатухающего возбуждения за последние несколько лет в публикациях были предложены новые методы [4–9], позволяющие так или иначе улучшить точность идентификации параметров модели и, следовательно, степень ее соответствия реальному промышленному агрегату. Главным достижением этих методов можно считать новые контуры оценки со сходимостью за конечное время [4–6] и различные алгоритмы фильтрации и предобработки регрессора [7–10], позволяющие исключить инъекцию тестовых сигналов и точно идентифицировать параметры модели в режиме работы технологического агрегата, близком к нормальному. В целом с некоторыми оговорками можно считать, что проблема точной идентификации стационарных параметров динамических объектов является развитой с ясными направлениями дальнейших исследований и перспективными практическими приложениями [11, 12] в промышленности.

Среди актуальных направлений исследований необходимо отметить перенос полученных результатов на регрессионные уравнения с нелинейной параметризацией [13] и интервально заданными и нестационарными параметрами [6, 9, 14].

Другой, менее проработанной проблемой как классических, так и современных контуров идентификации является задача выбора коэффициента усиления  $\gamma$  закона оценки [15].

Для контуров оценки, обеспечивающих сходимость оценок параметров модели за конечное время [4–6], данная проблема состоит в необходимости выбора коэффициента  $\gamma$  исходя из удовлетворения специальных условий.

Для классического градиентного контура оценки, а также для контуров оценки градиентного типа, построенных с использованием процедур предобработки регрессора [7–10], данную проблему можно условно разделить на технический и теоретический уровни.

На техническом уровне проблема заключается в невозможности численного решения средствами современной промышленной микроконтроллерной техники “жесткого” дифференциального уравнения контура оценки, получаемого при большом значении коэффициента усиления [15].

На теоретическом уровне упомянутая проблема состоит в: а) прямой зависимости от коэффициента усиления скорости сходимости оценок параметров модели и обратной зависимости точности получаемых оценок при наличии возмущений, б) необходимости использования различных коэффициентов усиления в зависимости от степени возбуждения регрессора [1].

В данной статье остановимся подробнее на п. (б) теоретического уровня проблемы выбора коэффициента усиления законов оценки градиентного типа.

Основная трудность выбора коэффициента усиления как для базового градиентного контура оценки, так и для его усовершенствованных путем предобработки регрессора аналогов [7–10] заключается в зависимости между величиной верхней оценки ошибки идентификации и произведением коэффициента усиления контура оценки  $\gamma$  на степень возбуждения регрессора  $\alpha$ . Здесь отметим, что для стандартного градиентного контура оценки зависимость ошибки идентификации от  $\gamma\alpha$  получена при некоторых допущениях [16], а для большинства современных контуров оценки с предобработкой регрессора эта зависимость имеет место без допущений.

Степень возбуждения регрессора  $\alpha$  в общем виде определяется длиной интервала возбуждения  $T$  и амплитудой регрессора  $A$ , поэтому упомянутая зависимость означает различную верхнюю оценку ошибки идентификации для регрессоров с различной степенью возбуждения. Другими словами, при выборе стационарного коэффициента усиления  $\gamma$  для одних регрессоров параметрическая ошибка может быть чрезвычайно большой, а для других напротив — чрезвычайно малой. С точки зрения практики применения современных методов теории идентификации в промышленности весьма желательным было бы иметь одинаковую верхнюю оценку параметрической ошибки для регрессоров с различной степенью возбуждения  $\alpha$ .

Для этого в публикациях были предложены: 1) метод масштабирования [17], позволяющий, изменяя коэффициент усиления контура оценки  $\gamma$  в зависимости от косвенной оценки степени возбуждения регрессора  $\alpha$ , поддерживать приблизительно одинаковую верхнюю оценку параметрической ошибки; 2) рекурсивный метод наименьших квадратов с экспоненциальным забыванием [14, 15, 17], который в пределе обеспечивает зависимость верхней оценки параметрической ошибки только от коэффициента экспоненциального забывания. Метод масштабирования требует ручного выбора целого ряда параметров масштабирования, а рекурсивный метод наименьших квадратов обеспечивает необходимое свойство пропорциональности верхней оценки параметрической ошибки и коэффициента забывания только в предельном случае и только в контурах оценки с регрессорами определенного вида.

Метод масштабирования и рекурсивный метод наименьших квадратов с экспоненциальным забыванием основаны на общей идее поддержания соотношения  $\gamma\alpha$  постоянным путем динамической коррекции коэффициента усиления  $\gamma$  в зависимости от оценки степени возбуждения регрессора  $\alpha$ . Однако, по мнению авторов настоящей статьи, такой подход, в конечном итоге, неизбежно приводит или к новому контуру настройки с новыми параметрами, требующими ручной настройки, или к различного рода эвристикам.

Поэтому в данной работе для получения одинаковой верхней оценки параметрической ошибки для регрессоров с различной степенью возбуждения предлагается не настраивать коэффициент усиления  $\gamma$ , а разработать процедуру нормирования возбуждения регрессора, позволяющую получить зави-



симось параметрической ошибки не от произведения  $\gamma\alpha$ , а от нового произведения  $\gamma\Delta$ , в котором  $\Delta$  – величина, в отличие от  $\alpha$ , не зависящая от амплитуды  $A$  регрессора.

Предлагаемый подход позволит использовать стационарный коэффициент усиления оценки  $\gamma$  и при этом иметь одинаковую верхнюю оценку параметрической ошибки для различных исходных регрессоров.

Построить контур идентификации, обладающий указанными свойствами, в статье предлагается, дополнив один из методов предобработки регрессора, а именно процедуру динамического расширения и смешивания [10].

## 2. Формальное описание проблемы и постановка задачи

Рассматривается задача идентификации параметров класса линейных объектов:

$$(2.1) \quad y(t) = \frac{b(p)}{a(p)}u(t),$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $y$  – выходная переменная,  $u$  – управляющее воздействие,  $b(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$  и  $a(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i$  – полиномы с квазистационарными ( $\dot{b}_i \approx 0$ ,  $\dot{a}_i \approx 0$ ) неизвестными параметрами.

Модель (2.1) известным методом [15] может быть представлена в виде линейной регрессии:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{z}(t) &= \theta^T \bar{w}(t) + \bar{\eta} = y(t) + \psi^T \bar{w}_2(t) + \bar{\eta}, \\ \theta &:= [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0]^T, \quad \bar{\eta} := \bar{\rho} e^{\Psi_c t}, \\ \bar{w}(t) &:= \left[ \frac{\alpha_m(p)}{\Psi(p)} u(t) \quad -\frac{\alpha_{n-1}(p)}{\Psi(p)} y(t) \right]^T = [\bar{w}_1^T(t) \quad \bar{w}_2^T(t)]^T, \end{aligned}$$

где  $\bar{z} \in \mathbb{R}$  – измеримая функция,  $\bar{w} \in \mathbb{R}^{m+n+1}$  – измеримый регрессор,  $\theta$  – вектор неизвестных параметров,  $\bar{\eta} \in \mathbb{R}$  – экспоненциально затухающее возмущение, вызванное несоответствием начальных условий в (2.1) и (2.2),  $\alpha_i(p) := [p^i, p^{i-1}, \dots, 1]^T$  – оператор дифференцирования,  $\Psi(p) = p^n + \psi^T \alpha_{n-1}(p)$  – устойчивый полином с  $\psi = [\psi_{n-1}, \psi_{n-2}, \dots, \psi_0]^T$ ,  $\Psi_c$  – матрица, соответствующая полиному  $\Psi(p)$ .

Относительно возмущения  $\bar{\eta}$  в статье принимается следующее предположение.

*Предположение 1.* Возмущение  $\bar{\eta} = 0 \forall t \geq 0$  или существует известное  $\bar{t}_0 \rightarrow 0$ , такое что  $\bar{\eta} = 0 \forall t \geq \bar{t}_0$ .

*Замечание 1.* В предположении 1 предполагается или полное отсутствие в регрессии (2.2) возмущения  $\bar{\eta}$ , или обеспечение для  $\bar{\eta}$  достаточно быстрой сходимости к нулю путем выбора характеристического полинома  $\Psi(p)$ .

В дальнейших рассуждениях также будем предполагать выполнение для регрессора  $\bar{w}$  условия конечного возбуждения на интервале  $[\bar{t}_s; \bar{t}_s + \bar{T}]$ .

*Определение 1.* Регрессор  $\bar{\omega}$  возбуждается конечно ( $\bar{\omega} \in \text{FE}$ ) на интервале  $[\bar{t}_s; \bar{t}_s + \bar{T}]$ , если существуют  $\bar{t}_s \geq \bar{t}_0 \geq 0$ ,  $\bar{T} > 0$  и  $\bar{\alpha} > 0$  такие, что верно неравенство

$$(2.3) \quad \int_{\bar{t}_s}^{\bar{t}_s + \bar{T}} \bar{\omega}(\tau) \bar{\omega}^T(\tau) d\tau \geq \bar{\alpha} I,$$

где  $\bar{\alpha}$  – степень возбуждения,  $I$  – единичная матрица.

Учитывая предположение 1, применим к регрессии (2.2) процедуру динамического расширения и смешивания [10]. Для этого  $\forall t \geq \bar{t}_0$  введем операторы запаздывания в количестве  $m + n$ :

$$(2.4) \quad (\cdot)_{f_i(t)} := [H_i(\cdot)](t) = (\cdot)(t - d_i); \quad i \in \{1, 2, \dots, m + n\},$$

где  $d_i$  – параметр, определяющий временное запаздывание  $i$ -го оператора (2.4).

Пропуская через (2.4) функцию  $\bar{z}$  и регрессор  $\bar{\omega}$ , сформируем  $\forall t \geq \bar{t}_0$  расширенное уравнение регрессии

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \bar{z}_f(t) &= \bar{\omega}_f(t) \theta, \\ \bar{z}_f(t) &:= [\bar{z}(t) \ \bar{z}_{f_1}(t) \ \dots \ \bar{z}_{f_{n+m}}(t)]^T; \\ \bar{\omega}_f(t) &:= [\bar{\omega}(t) \ \bar{\omega}_{f_1}(t) \ \dots \ \bar{\omega}_{f_{n+m}}(t)]^T. \end{aligned}$$

Домножив уравнение (2.5) слева на присоединенную матрицу алгебраических дополнений  $\text{adj}\{\bar{\omega}_f(t)\}$  матрицы расширенного регрессора  $\bar{\omega}_f(t)$ , а также пользуясь равенством  $\text{adj}\{\bar{\omega}_f(t)\} \bar{\omega}_f(t) = \det\{\bar{\omega}_f(t)\} I$ , получим  $\forall t \geq \bar{t}_0$  уравнение:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} z(t) &= \omega(t) \theta, \\ z(t) &:= \text{adj}\{\bar{\omega}_f(t)\} \bar{z}_f(t); \quad \omega(t) := \det\{\bar{\omega}_f(t)\}, \end{aligned}$$

где  $z \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Относительно параметров  $d_i$  принимается предположение 2.

*Предположение 2.* Параметры  $d_i$  выбраны так, что если  $\bar{\omega} \in \text{FE}$  на интервале  $[\bar{t}_s; \bar{t}_s + \bar{T}]$ , то  $\omega \in \text{FE}$  на интервале  $[t_s; t_s + T]$ , поэтому существуют  $t_s \geq t_0 > \bar{t}_s$ ,  $T > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что для  $\omega$  верно неравенство

$$(2.7) \quad \int_{t_s}^{t_s + T} \omega^2(\tau) d\tau \geq \alpha,$$

где  $\alpha$  – степень возбуждения скалярного регрессора,  $t_0$  – момент времени неравенства нулю выхода оператора (2.4) с максимальным значением параметра  $d_i$ .

*Замечание 2.* Предположение 2 необходимо, поскольку при неудачном выборе параметров  $d_i$ , матрица  $\bar{\omega}_f(t)$  может являться вырожденной  $\forall t$  [18]. Ослабить предположение 1 возможно, использовав вместо операторов запаздывания (2.4) устойчивые минимально-фазовые динамические фильтры или применив для генерации скаляризованной регрессии (2.6) вместо базовой процедуры DREM ее модифицированный аналог [19] или процедуру MREM [20].

В силу принятых предположений, уравнение стандартного градиентного контура оценки параметров регрессии (2.6) имеет вид

$$(2.8) \quad \dot{\hat{\theta}}_i(t) = \dot{\tilde{\theta}}_i(t) = -\gamma\omega \left( \hat{\theta}_i\omega - z \right) = -\gamma\omega^2\tilde{\theta}_i(t).$$

Получим решение скалярного дифференциального уравнения (2.8):

$$(2.9) \quad \tilde{\theta}_i(t) = e^{-\gamma \int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau} \tilde{\theta}_i(t_0).$$

С учетом предположения 1 из (2.9) получим выражение для ошибки  $\tilde{\theta}_i(t_s + T)$  на интервале  $[t_s; t_s + T]$ :

$$(2.10) \quad \tilde{\theta}_i(t_s + T) = e^{-\gamma \int_{t_s}^{t_s+T} \omega^2 d\tau} \tilde{\theta}_i(t_s) \leq e^{-\gamma\alpha} \tilde{\theta}_i(t_s).$$

Как следует из (2.10), параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i(t_s + T)$  ограничена сверху выражением, зависящим от произведения  $\gamma\alpha$ . С точки зрения практики применения контура оценки (2.8) полезно поддерживать одинаковую точность идентификации, а значит, иметь для различных регрессоров одинаковую верхнюю границу (2.10) на параметрическую ошибку. Однако, как следует из (2.7), параметр  $\alpha$  меняется от регрессора к регрессору и определяется длиной интервала возбуждения  $T$  и амплитудой регрессора  $A$ . Поэтому для поддержания одинакового соотношения  $\gamma\alpha$  при изменении параметров  $A$  и  $T$  в контуре оценки (2.8) требуется коррекция коэффициента  $\gamma$ . В противном случае при постоянном  $\gamma$  для регрессоров с  $\alpha \rightarrow 0$ , но  $\alpha > 0$  возможны значения параметрической ошибки, такие что  $\tilde{\theta}_i(t_s + T) \rightarrow \tilde{\theta}_i(t_s)$ , а для регрессоров с  $\alpha \rightarrow \infty$ , наоборот,  $\tilde{\theta}_i(t_s + T) \rightarrow 0$ .

В этой статье ограничимся решением задачи поддержания одинаковой верхней границы (2.10) параметрической ошибки (2.8) для класса регрессоров с различными амплитудами  $A$ , но возбуждаемыми конечно на интервалах одинаковой длины  $T$ .

*Определение 2.* Регрессоры  $\omega_j$  возбуждены конечно на одинаковом интервале времени  $[t_s; t_s + T]$ , если существуют  $t_s \geq t_0 > \bar{t}_s$ ,  $T > 0$  и  $\alpha_j > 0$  такие, что верны неравенства

$$(2.11) \quad \int_{t_s}^{t_s+T} \omega_j^2(\tau) d\tau \geq \alpha_j,$$

где  $\alpha_j$  – степень возбуждения  $j$ -го регрессора.

*Замечание 3.* В частности, классу (2.11) принадлежат регрессоры, полученные процедурой (2.2)–(2.6) при управляющих воздействиях различной амплитуды (например,  $u = 1$ ,  $u = 10$ ,  $u = 100$ ).

На частном численном примере продемонстрируем необходимость коррекции коэффициента усиления  $\gamma$  для регрессоров из класса (2.11).

*Пример 1.* Пусть  $t_s = 0$  с,  $T = 10$  с, тогда при  $\omega = Ae^{-1t}$  в (2.10) соответственно имеем:

$$(2.12) \quad \tilde{\theta}_i(10) = e^{-\gamma A^2 \int_0^{10} e^{-2t} dt} \tilde{\theta}_i(0) \approx e^{-\gamma A^2 0,5} \tilde{\theta}_i(0).$$

Откуда, устремив  $A$  к нулю при зафиксированном  $\gamma$ , получаем  $\tilde{\theta}_i(10) \rightarrow \tilde{\theta}_i(0)$ , что означает: 1) разную верхнюю границу на параметрическую ошибку для регрессоров из класса (2.11); 2) необходимость перевыбора коэффициента  $\gamma$  при изменении амплитуды  $A$  регрессора для поддержания одинаковой верхней границы параметрической ошибки.

Обойти необходимость перевыбора коэффициента  $\gamma$  можно было бы, имея для регрессоров из класса (2.11) вместо регрессора  $\omega$  в уравнениях контура оценки (2.8)–(2.10) некоторый нормированный регрессор  $\varphi = \frac{\omega}{f(\omega)}$ , такой что верно неравенство

$$(2.13) \quad \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau \geq \Delta > 0.$$

Тогда перевыбор коэффициента  $\gamma$  не требуется, а для всех регрессоров класса (2.11) обеспечивается одинаковая верхняя граница параметрической ошибки.

Таким образом, цель настоящей статьи — разработка функции нормализации  $f(\omega)$ , позволяющей для регрессоров из класса (2.11) получить одинаковую верхнюю границу параметрической ошибки без перевыбора коэффициента  $\gamma$ .

*Замечание 4.* В примере 1 экспоненциально затухающий регрессор был использован исключительно для наглядности, а продемонстрированная проблема характерна для всех регрессоров с различными амплитудами, но возбуждаемыми конечно на интервалах одинаковой длины  $T$ .

### 3. Основной результат

Определим нормирующую функцию для регрессора  $\omega$  в виде

$$(3.1) \quad f(\omega) := \text{sat}(\omega),$$

где  $\text{sat}(\omega)$  — функция насыщения:

$$(3.2) \quad \text{sat}(\omega) = \begin{cases} \text{sgn}(\omega) \omega_{\min}, & \text{если } |\omega| \leq \omega_{\min}, \\ \omega & \text{иначе.} \end{cases}$$

Разделим регрессию (2.6) на нормирующую функцию (3.1):

$$(3.3) \quad \Upsilon = \varphi\theta, \\ \Upsilon := \frac{z}{f(\omega)}; \quad \varphi := \frac{\omega}{f(\omega)} = \begin{cases} |\omega|\omega_{\min}^{-1}, & \text{если } |\omega| \leq \omega_{\min}, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $\varphi$  – нормированный скалярный регрессор.

*Замечание 5.* На данном этапе работы необходимо кратко отметить возможность аналитического вычисления из регрессии (3.3) оценки неизвестных параметров за конечное время. На основании определения регрессора  $\varphi$  в (3.3) неизвестные параметры  $\theta$  при отсутствии шумов измерения  $w$  могут быть найдены за конечное время  $t_k$  с помощью процедуры:

$$(3.4) \quad \theta = \Upsilon(t_k), \\ \text{если } \varphi(t) = 1, \quad \text{то } t_k = t.$$

Однако поскольку на практике в регрессии (3.3) неизбежно присутствуют шумовые составляющие  $w(t_k)$ , то  $\varphi(t_k) = 1$  может означать равенство  $\Upsilon(t_k) = \theta + w(t_k)$ , в котором в конкретный момент времени  $t_k$  может случиться так, что  $w(t_k) > \theta$ . Тогда оценка (3.3), полученная за конечное время, является недостаточно точной. В то же время применение градиентного контура идентификации для регрессии  $\Upsilon(t) = \varphi(t)\theta + w(t)$  позволяет получить оценку параметров не по одной точке  $t = t_k$ , а следовательно, уменьшить влияние на качество оценки возмущений в каждый конкретный момент времени  $t_k$  [15].

*Утверждение 1.* Нормированный регрессор  $\varphi \in [0; 1]$ .

*Утверждение 2.* Если для регрессора  $\omega$  выполняется условие конечного возбуждения (2.7) на интервале  $[t_s; t_s + T]$ , то для нормированного регрессора  $\varphi$  на интервале  $[t_s; t_s + T]$ :

1) при  $|\omega| \leq \omega_{\min}$  выполняется неравенство

$$(3.5) \quad \alpha\omega_{\min}^{-2} \leq \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau \leq T;$$

2) при  $|\omega| > \omega_{\min}$  выполняется неравенство

$$(3.6) \quad 0 < \Delta \leq \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau = T,$$

где  $\Delta \in (0; T]$  – одинаковая величина  $\forall \omega_j$ , для которых на интервале  $[t_s; t_s + T]$  верно  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ .

Доказательства утверждений 1 и 2 приведены в Приложении.

Градиентный контур оценки, построенный по нормированной регрессии (3.3), имеет вид:

$$(3.7) \quad \dot{\tilde{\theta}}_i(t) = -\gamma\varphi^2\tilde{\theta}_i(t).$$

Получим решение дифференциального уравнения (3.7) на интервале  $[t_s; t_s + T]$ :

$$(3.8) \quad \tilde{\theta}_i(t_s + T) = e^{-\gamma \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau} \tilde{\theta}_i(t_s).$$

Для решения (3.8), пользуясь утверждением 2, могут быть получены два важных следствия.

*Следствие 1. Для всех  $\omega_j$ , для которых на всем интервале  $[t_s; t_s + T]$  верно  $|\omega_j| \leq \omega_{\min}$ , параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i(t_s + T)$  ограничена в соответствии с выражением:*

$$(3.9) \quad e^{-\gamma T} \tilde{\theta}_i(t_s) \leq \tilde{\theta}_i(t_s + T) \leq e^{-\gamma \alpha_j \omega_{\min}^{-2}} \tilde{\theta}_i(t_s).$$

*Следствие 2. Для всех  $\omega_j$ , для которых на всем интервале  $[t_s; t_s + T]$  верно  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ , параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i(t_s + T)$  ограничена в соответствии с выражением:*

$$(3.10) \quad \tilde{\theta}_i(t_s + T) = e^{-\gamma T} \tilde{\theta}_i(t_s) \leq e^{-\gamma \Delta} \tilde{\theta}_i(t_s).$$

В следствиях 1 и 2 рассмотрены ситуации, когда на всем интервале возбуждения  $[t_s; t_s + T]$  выполняется либо условие  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ , либо условие  $|\omega_j| \leq \omega_{\min}$ . На практике такие ситуации обычно периодически чередуются на интервале возбуждения  $[t_s; t_s + T]$ , поэтому рассмотрим ситуацию, когда для  $\omega_j$  на интервале  $[t_s; t_s + T]$  хотя бы раз было выполнено условие  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ . Для этого введем утверждение 3.

*У т в е р ж д е н и е 3. Пусть  $\omega_j \in \text{FE}$  на интервале  $[t_s; t_s + T]$  и для  $\omega_j$  существуют моменты времени  $t_j \in (0; T)$  и  $T_j \in (t_j; T)$  такие, что  $\forall t \in [t_s + t_j; t_s + T_j]$  верно неравенство  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ .*

*Тогда:*

1. Для нормированного регрессора  $\varphi$  верно

$$(3.11) \quad 0 < \Delta_{\min} \leq \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau \leq T,$$

где  $\Delta_{\min}$  – одинаковая величина  $\forall \omega_j$ , соответствующий постановке утверждения 3.

2. Для всех  $\omega_j$ , соответствующих постановке утверждения 3, параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i(t_s + T)$  ограничена сверху в соответствии с выражением

$$(3.12) \quad \tilde{\theta}_i(t_s + T) \leq e^{-\gamma \Delta_{\min}} \tilde{\theta}_i(t_s).$$

Доказательство утверждения 3 и определение величины  $\Delta_{\min}$  приводятся в Приложении.

Таким образом, из утверждения 3 следует, что выбор параметра  $\omega_{\min}$  из условия выполнения неравенства  $|\omega_j| > \omega_{\min}$  хотя бы раз на интервале  $[t_s; t_s + T]$  является необходимым и достаточным для ограниченности параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i(t_s + T)$  сверху одинаковой величиной для различных регрессоров  $\omega_j$ , что позволяет в контуре оценки (3.7) использовать одинаковое значение коэффициента усиления  $\gamma$ .

*Замечание 6.* Выбор величины  $\omega_{\min}$  из класса (2.11) позволяет выделить некоторый подкласс регрессоров, для которых хотя бы раз на интервале возбуждения  $[t_s; t_s + T]$  выполняется  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ , и поэтому существует одинаковая верхняя оценка параметрической ошибки. Для регрессоров  $\omega_j$ , не входящих в этот подкласс, т.е. таких, для которых на всем интервале возбуждения  $[t_s; t_s + T]$   $|\omega_j| \leq \omega_{\min}$  будет осуществлена нормализация регрессора, но не нормализация его возбуждения (3.5). Поэтому на практике величину  $\omega_{\min}$  необходимо выбирать, исходя из априорных данных о минимально возможном регрессоре  $\omega_j$  и максимальной амплитуде шумов измерения. При неудачном выборе параметра  $\omega_{\min}$ , так что  $|\omega_j| \leq \omega_{\min} \forall t \in [t_s; t_s + T]$ , предложенная нормализация при  $\omega_{\min} < 1$  позволяет (3.9) увеличить в  $\omega_{\min}^{-2}$  раз исходную степень возбуждения регрессора, что свидетельствует о преимуществе выбора значений параметра  $\omega_{\min}$  из условия  $\omega_{\min} < 1$ .

Продемонстрируем описанные свойства нормированного контура оценки (3.7) на примере 2.

*Пример 2.* Пусть  $t_s = t_j = 0$  с,  $T = 10$  с,  $\omega_{\min} = 10^{-2}$ . Рассмотрим для примера регрессоры:  $\omega_1 = e^{-1t}$  и  $\omega_2 = 10e^{-1t}$ . Чтобы воспользоваться выводами утверждения 3, сначала определим моменты времени  $T_j$  для каждого регрессора:

$$(3.13) \quad T_1 = \frac{\ln(0,01)}{-1} \approx 4,61; \quad T_2 = \frac{\ln\left(\frac{0,01}{10}\right)}{-1} \approx 6,91.$$

Откуда, учитывая  $\omega_{\min} = 10^{-2}$ , можем получить функциональное описание регрессоров  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на соответствующих интервалах (см. таблицу).

**Таблица**

$t$	$\varphi_1$	$t$	$\varphi_2$
$[0; 4,61]$	1	$[0; 6,91]$	1
$[4,61; 10]$	$ \omega  \omega_{\min}^{-1} = e^{-1(t-4,61)}$	$[6,91; 10]$	$ \omega  \omega_{\min}^{-1} = e^{-1(t-6,91)}$

Пользуясь полученным описанием регрессоров  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , вычислим значение интеграла в (3.8):

$$(3.14) \quad \int_0^{10} \varphi_1^2(\tau) d\tau \approx \int_0^{4,61} 1^2 d\tau + \int_{4,61}^{10} e^{-2(t-4,61)} d\tau \approx 5,11 \geq \Delta_{\min},$$

$$\int_0^{10} \varphi_2^2(\tau) d\tau \approx \int_0^{6,91} 1^2 d\tau + \int_{6,91}^{10} e^{-2(t-6,91)} d\tau \approx 7,409 \geq \Delta_{\min}.$$

Зная моменты времени  $T_j$ , в соответствии с (П.7) для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можем выбрать общую  $\Delta_{\min}$  из интервала  $(0; 4,61]$ . Тогда параметрическая ошибка на интервале  $[0; 10]$  для регрессоров  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеет вид:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_i^{\varphi_1}(10) &\approx e^{-\gamma 5,11} \tilde{\theta}_i(t_s) \leq e^{-\gamma \Delta_{\min}} \tilde{\theta}_i(0), \\ \tilde{\theta}_i^{\varphi_2}(10) &\approx e^{-\gamma 7,409} \tilde{\theta}_i(t_s) \leq e^{-\gamma \Delta_{\min}} \tilde{\theta}_i(0). \end{aligned}$$

Как следует из (3.14) и (3.15), для параметрических ошибок, полученных контуром (3.7) с различными регрессорами, существует одинаковая оценка сверху, значение которой может быть отрегулировано с помощью выбора единого коэффициента усиления  $\gamma$ .

#### 4. Сравнение с нормализованным градиентным законом оценки

Сравним разработанный контур оценки с уже известным градиентным контуром с классической нормализацией регрессора [15]. Уравнение градиентного контура оценки с классической нормализацией имеет вид

$$(4.1) \quad \dot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} \tilde{\theta}_i.$$

При выполнении условия (2.7) для нормированного регрессора будет верным неравенство

$$(4.2) \quad 0 < \alpha_n \leq \int_{t_s}^{t_s+T} \frac{\omega^2(\tau)}{1 + \omega^2(\tau)} d\tau < T,$$

где  $\alpha_n < \alpha$  – степень возбуждения нормированного регрессора.

Как следует из (4.2), степень возбуждения  $\alpha_n$  нормированного регрессора в законе оценки (4.1) строго меньше степени возбуждения исходного  $\alpha$  и строго ограничена сверху величиной  $T$  для любого регрессора.

Однако в сравнении с предложенной в этой статье нормализацией возбуждения регрессора, во-первых, верхняя оценка возбуждения в (4.2) только строгая, во-вторых, в предложенном контуре оценки (3.7) в самом плохом



случае (3.5) возможно не уменьшить, а увеличить степень возбуждения путем выбора  $\omega_{\min} < 1$ .

С учетом (4.2) верхняя оценка на решение дифференциального уравнения (4.1) на интервале  $[t_s; t_s + T]$  имеет вид

$$(4.3) \quad \tilde{\theta}_i(t_s + T) \leq e^{-\gamma \alpha_n} \tilde{\theta}_i(t_s).$$

Из (4.3) по аналогии с (2.10) следует, что для контура оценки с классической нормализацией (4.1) также требуется перевыбор коэффициента усиления  $\gamma$  с целью поддержания соотношения  $\gamma \alpha_n$  постоянным для регрессоров с различной степенью возбуждения  $\alpha_n$ , в то время как в разработанном контуре оценки (3.7) этого не требуется.

## 5. Численный пример

В среде Matlab/Simulink сравним разработанный контур оценки (3.7) с нормализацией возбуждения регрессора с градиентным контуром (2.8) и градиентным контуром с нормализованным регрессором (4.1). Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации  $\tau_s = 10^{-2}$  с.

В качестве объекта, параметры которого необходимо идентифицировать, выберем следующее звено:

$$(5.1) \quad y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} u(t) = \frac{2p + 1}{p^2 + 1p + 2} u(t).$$

Параметры фильтров (2.2), величины задержек (2.4), а также параметр  $\omega_{\min}$  зададим следующим образом:

$$(5.2) \quad \psi_1 = 20; \quad \psi_0 = 100; \quad d_1 = 0,2; \quad d_2 = 0,4; \quad d_3 = 0,6; \quad \omega_{\min} = 10^{-12}.$$

Значения задержек были определены в соответствии с рекомендациями, данными в [18], а величина параметра  $\omega_{\min}$  была выбрана в соответствии с замечанием 6.

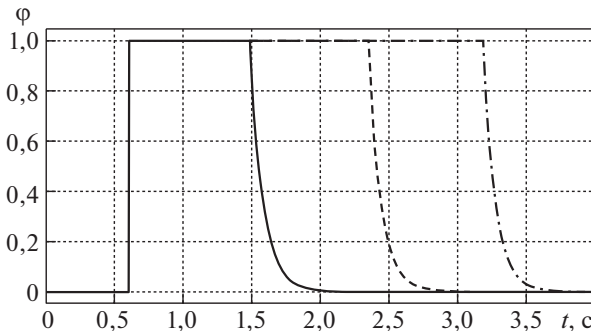


Рис. 1. Сравнение нормализованных регрессоров  $\varphi$  при различных  $u$  (сплошная линия —  $u = 1$ , штриховая линия —  $u = 10$ , штрихпунктирная линия —  $u = 100$ ).

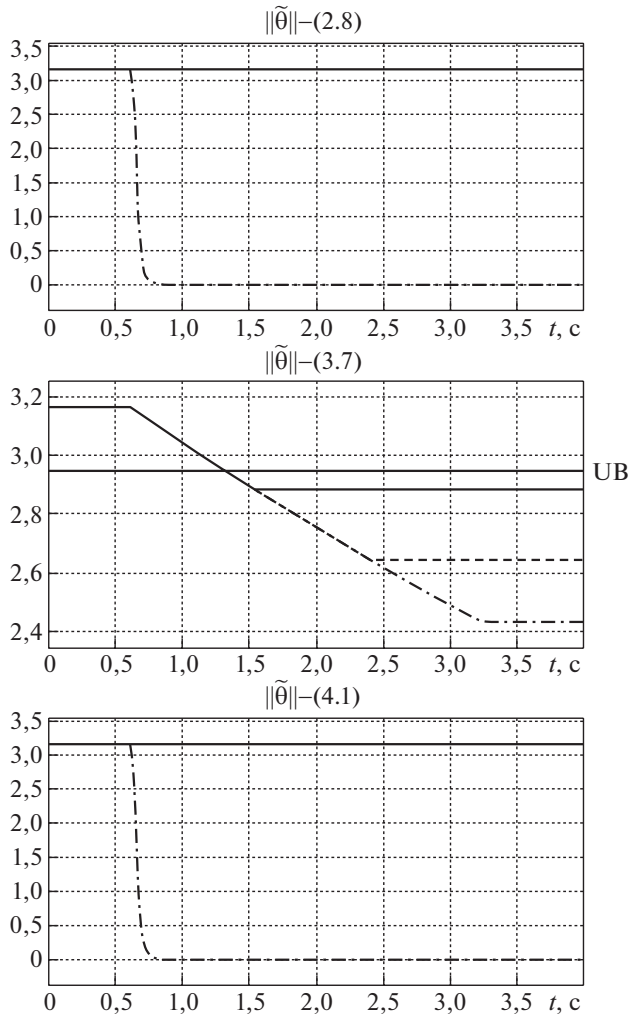


Рис. 2. Нормы параметрических ошибок контуров оценки (2.8), (3.7) и (4.1) (сплошная линия –  $u = 1$ , штриховая линия –  $u = 10$ , штрихпунктирная линия –  $u = 100$ , UB – Ultimate Bound (верхняя граница)).

В качестве сигнала управления  $u$  на вход объекта (2.1) в соответствии с замечанием 1 будем подавать постоянные сигналы различной амплитуды:

$$(5.3) \quad u = 1; \quad u = 10; \quad u = 100.$$

Начальную параметрическую ошибку примем  $\tilde{\theta}(0) = -\theta$ , а коэффициенты усиления моделируемых контуров оценки выберем следующим образом:

$$(5.4) \quad \gamma = 10^4; \quad \gamma_{NE} = 0,1; \quad \gamma_{NR} = 10^4,$$

где  $\gamma, \gamma_{NE}, \gamma_{NR}$  – коэффициенты усиления контуров оценки (2.8), (3.7) и (4.1) соответственно.

На рис. 1 приведено сравнение нормализованных регрессоров  $\varphi$ , полученных из регрессора  $\omega$  при сигналах управления различной амплитуды (5.3).

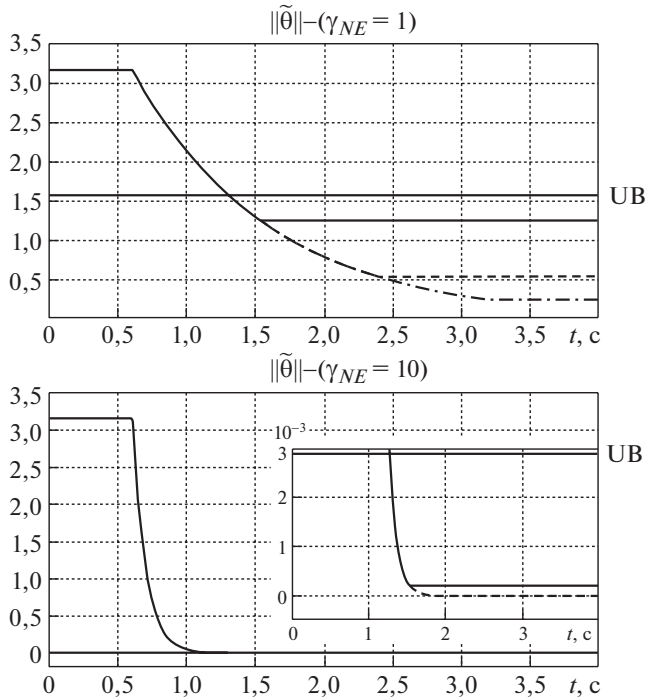


Рис. 3. Нормы параметрической ошибки контура (3.7) при различных  $\gamma$  (сплошная линия —  $u = 1$ , штриховая линия —  $u = 10$ , штрихпунктирная линия —  $u = 100$ , UB — Ultimate Bound (верхняя граница)).

Приведенные на рис. 1 переходные процессы подтверждают выводы, сделанные в утверждениях, и в терминах утверждения 3 позволяют определить величину  $\Delta_{\min} \in (0; 0,88]$ .

На рис. 2 приведено сравнение переходных процессов по  $\|\tilde{\theta}\|$ , полученных при применении контуров оценки (2.8), (3.7) и (4.1). На графике нормы параметрической ошибки разработанного контура оценки (3.7) также приводится верхняя оценка (UB), рассчитанная по формуле (3.12) при  $\Delta_{\min} = 0,7$  и  $t_s = 0$  с.

Как следует из рис. 2, разработанный контур оценки, в отличие от (2.8) и (4.1), позволяет не допускать ситуаций, когда для одних регрессоров  $\|\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\| \rightarrow \|\tilde{\theta}(t_0)\|$ , а для других —  $\|\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\| \rightarrow 0$ , что и является основным результатом статьи.

Далее промоделируем разработанный контур оценки (3.7) при различных управляющих воздействиях (5.3) и различных значениях коэффициента усиления  $\gamma$ .

Результаты данного эксперимента показывают, что выбор коэффициента  $\gamma$  в (3.7) позволяет корректировать верхнюю оценку параметрической ошибки и при этом не допускать ситуаций, когда для одних регрессоров  $\|\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\| \rightarrow \|\tilde{\theta}(t_0)\|$ , а для других  $\|\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\| \rightarrow 0$ .

## 6. Заключение

Для идентификации параметров линейных динамических объектов в различных режимах работы без переыбора коэффициента усиления контура оценки в исследовании была разработана процедура нормализации возбуждения регрессора. Предложенная процедура может оказаться полезной при оффлайн идентификации интервальных моделей промышленных объектов управления, функционирующих по технологическим ступеням уставок.

Так как в данной статье влияние шумов измерения на полученные результаты было отмечено кратко (см. замечание 3 и 4), то в дальнейших работах планируется более подробно исследовать свойства разработанной нормализации в условиях их наличия. Также в следующих работах планируется использование предложенного подхода для нормализации возбуждения интегрально-растущего регрессора в процедуре [21].

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* При  $|\omega| > \omega_{\min}$  регрессор  $\varphi = 1$  по определению в (3.3). В противном случае  $|\omega| \omega_{\min}^{-1} \leq 1$ , откуда следует принадлежность  $\varphi$  отрезку  $[0; 1]$ , что и требовалось доказать.

*Доказательство утверждения 2.* Для доказательства утверждения выпишем из (3.3) выражение для регрессора  $\varphi$ :

$$(П.1) \quad \varphi = \frac{\omega}{f(\omega)}.$$

Выражая из (П.1)  $\omega^2$  и подставляя полученное выражение в определение (2.11), имеем:

$$(П.2) \quad \int_{t_s}^{t_s+T} \omega^2(\tau) d\tau = \int_{t_s}^{t_s+T} f^2(\omega(\tau)) \varphi^2(\tau) d\tau \geq \alpha.$$

Откуда при  $|\omega| \leq \omega_{\min}$  с учетом (3.1) и (3.2) непосредственно следует нижняя оценка в (3.5). Также, пользуясь теоремой об оценке определенного интеграла и учитывая  $\varphi \in [0; 1]$ , из (П.2) имеем верхнюю оценку в (3.5).

В случае  $|\omega| > \omega_{\min}$  из (П.1) можем получить:

$$(П.3) \quad \int_{t_s}^{t_s+T} \frac{\omega^2(\tau)}{f^2(\omega(\tau))} d\tau = \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau.$$

Пользуясь формулой Лейбница и учитывая  $\varphi = 1$  при  $|\omega| > \omega_{\min}$ , из (П.3) нетрудно получить равенство:

$$(П.4) \quad \int_{t_s}^{t_s+T} \frac{\omega^2(\tau)}{f^2(\omega(\tau))} d\tau = \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau = T.$$

Так как  $T > 0$  по условию конечного возбуждения, то в (П.4) всегда существует некоторое  $0 < \Delta \leq T$  такое, что верно неравенство (3.6). Поскольку  $T$  одинакова для всех регрессоров класса (2.11), то величина  $\Delta$  также может быть принята одинаковой  $\forall \omega_j$ , для которых верно  $|\omega_j| > \omega_{\min}$ , что завершает доказательство утверждения 2.

*Доказательство утверждения 3.* Условие конечного возбуждения для регрессора  $\varphi$  может быть записано в эквивалентном виде:

$$(П.5) \quad \int_{t_s}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau = \int_{t_s}^{t_s+t_j} \varphi^2(\tau) d\tau + \int_{t_s+t_j}^{t_s+T_j} \varphi^2(\tau) d\tau + \int_{t_s+T_j}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau \geq \\ \geq \int_{t_s+t_j}^{t_s+T_j} \varphi^2(\tau) d\tau.$$

В силу  $|\omega_j| > \omega_{\min}$  на интервале  $[t_s+t_j; t_s+T_j]$ , по доказанному в утверждении 2, для нижней оценки в (П.5) имеем:

$$(П.6) \quad \int_{t_s+t_j}^{t_s+T_j} \varphi^2(\tau) d\tau = T_j - t_j.$$

Поскольку по условию утверждения  $t_j \in (0; T)$ , а  $T_j \in (t_j; T)$ , то существует момент времени  $\Delta_{\min}$ , такой, что:

$$(П.7) \quad 0 < \Delta_{\min} \leq \min_{j \geq 0} \{T_j - t_j\} \leq T_j - t_j < T.$$

Учитывая неравенства (П.5), (П.6) и (П.7), имеем нижнюю оценку в (3.11). Для получения верхней оценки в (3.11) запишем с учетом утверждения 2 оценку сверху на первое и третье слагаемое в равенстве (П.5):

$$(П.8) \quad \int_{t_s}^{t_s+t_j} \varphi^2(\tau) d\tau \leq t_j; \\ \int_{t_s+T_j}^{t_s+T} \varphi^2(\tau) d\tau \leq T - T_j.$$

Складывая верхние оценки (П.6) и (П.8), имеем верхнюю оценку в (3.11), что вместе с полученной нижней оценкой в (П.5) позволяет записать неравенство (3.11) в полном виде. С помощью оценки (3.11) нетрудно получить оценку (3.12) на решение (3.8), что завершает доказательство утверждения 3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
2. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Persistent Excitation in Adaptive Systems // *Int. J. Control.* 1987. V. 45. No. 1. P. 127–160.
3. *Holtz J.* Sensorless Control of Induction Machines – With or without Signal Injection? // *IEEE Trans. Industr. Electronics.* 2006. V. 53. No. 1. P. 7–30.
4. *Wang J., Efimov D., Aranovskiy S., Bobtsov A.* Fixed-time Estimation of Parameters for Non-persistent Excitation // *Eur. J. Control.* 2020. V. 55. P. 24–32.
5. *Wang J., Efimov D., Bobtsov A.* On Robust Parameter Estimation in Finite-time without Persistence of Excitation // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2019. V. 65. No. 4. P. 1731–1738.
6. *Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N.* Parameter Identification with Finite-Convergence Time Alertness Preservation // *IEEE Control Syst. Lett.* 2021. P. 1–6.
7. *Chowdhary G., Mühlegg M., Johnson E.* Exponential Parameter and Tracking Error Convergence Guarantees for Adaptive Controllers without Persistency of Excitation // *Int. J. Control.* 2014. V. 87. No. 8. P. 1583–1603.
8. *Cho N., Shin H., Kim Y., Tsourdos A.* Composite Model Reference Adaptive Control with Parameter Convergence under Finite Excitation // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2017. V. 63. No. 3. P. 811–818.
9. *Lee H.I., Shin H.S., Tsourdos A.* Concurrent Learning Adaptive Control with Directional Forgetting // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2019. V. 64. No. 12. P. 5164–5170.
10. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
11. *Bobtsov A., Pyrkin A., Ortega R., Vedyakov A.* A State Observer for Sensorless Control of Magnetic Levitation Systems // *Automatica.* 2018. V. 97. P. 263–270.
12. *Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D.* Generalized Parameter Estimation-based Observers: Application to Power Systems and Chemical-biological Reactors // *arXiv preprint arXiv:2003.10952.* 2020. P. 1–13.
13. *Ortega R., Gromov V., Nuno E., Pyrkin A., Romero J.* Parameter Estimation of Nonlinearly Parameterized Regressions without Overparameterization: Application to Adaptive Control // *Automatica.* 2021. V. 127. P. 109544.
14. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Regression Filtration with Resetting to Provide Exponential Convergence of MRAC for Plants with Jump Change of Unknown Parameters // *arXiv preprint arXiv:2102.10359.* 2021. P. 1–12.
15. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
16. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control – Stability, Convergence, and Robustness. N.J.: Prentice Hall, 1989.
17. *Schatz S.P., Yucelen T., Gruenwal B., Holzapfe F.* Application of a Novel Scalability Notion in Adaptive Control to Various Adaptive Control Frameworks // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.* 2015. P. 1–17.
18. *Aranovskiy S., Belov A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A.* Parameter Identification of Linear Time-invariant Systems Using Dynamic Regressor Extension and Mixing // *Int. J. Adaptive Control Signal Process.* 2019. V. 33. No. 6. P. 1016–1030.

19. *Yi B., Ortega R.* Conditions for Convergence of Dynamic Regressor Extension and Mixing Parameter Estimator Using LTI Filters // arXiv preprint arXiv:2007.15224. 2020. P. 1–6.
20. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On Preserving-Excitation Properties of a Dynamic Regressor Extension Scheme // INRIA Int. Report. 2019. P. 1–6.
21. *Глушченко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.* I-DREM: ослабление условия квадратичной интегрируемости // АиТ. 2021. № 7. С. 147–165.  
*Glushchenko A.I., Petrov V.A., Lastochkin K.A.* I-DREM: Relaxing the Square Integrability Condition // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. P. 1233–1247.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 19.04.2021

После доработки 21.06.2021

Принята к публикации 29.08.2021

© 2022 г. А.С. АНТИПОВ (scholess18@mail.ru),  
С.А. КРАСНОВА, д-р техн. наук (skrasnova@list.ru),  
В.А. УТКИН, д-р техн. наук (viktorutkin013@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ СЛЕЖЕНИЯ С СИГМОИДАЛЬНЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ СЛЕЖЕНИЯ<sup>1</sup>

Для нелинейных одноканальных объектов управления, математическая модель которых представима в треугольной форме вход – выход, рассматривается задача слежения в условиях внешних и параметрических возмущений. В рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейной обратной связи, обеспечивающая отслеживание выходной переменной целевого сигнала с заданной точностью за заданное время. Формализован новый тип сигмоидальных локальных связей из класса гладких и всюду ограниченных S-образных функций, обеспечивающих инвариантность по отношению к неконтролируемым ограниченными возмущениям, не принадлежащим пространству управления, без предположений об их гладкости. Приведены результаты моделирования разработанных алгоритмов для системы управления перевернутым маятником.

*Ключевые слова:* нелинейная SISO система, слежение, декомпозиция, инвариантность, сигма-функция, перевернутый маятник.

DOI: 10.31857/S0005231022010032

### 1. Введение

Базовой проблемой теории автоматического управления является задача слежения, при решении которой нужно обеспечить в замкнутой системе отработку выходными переменными целевых допустимых сигналов с заданными показателями переходных и установившихся процессов. Основные усилия специалистов направлены на решение этой задачи применительно к объектам, функционирующим при действиях внешних неконтролируемых возмущений. Наиболее разработанным является случай, когда аффинные внешние возмущения действуют в пространстве управления, т.е. условия согласования (англ. “matching conditions”) выполнены [1]. По отношению к согласованным возмущениям можно обеспечить инвариантность всего вектора состояния как

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00363А).



с помощью динамической, так и статической обратной связи. В первом случае предварительно нужно получить оценки внешних возмущений с помощью динамического компенсатора или наблюдателя возмущений (см., например, [1–6]) и компенсировать их действие с помощью комбинированного управления. Во втором случае для подавления внешних ограниченных возмущений используются “силовые” методы: глубокие обратные связи или разрывные управления с организацией скользящего режима [7–9].

Наибольшую сложность представляют объекты с несогласованными возмущениями, которые нельзя непосредственно компенсировать или подавить с помощью истинного управления. В задаче слежения к таким возмущениям относятся также производные целевых сигналов. Поэтому задача обеспечения инвариантности по отношению к возмущениям ставится только для регулируемых выходов (ошибок слежения), а остальные переменные вынуждены отрабатывать соответствующие внешние воздействия. Для синтеза следящей системы в предположении о гладкости внешних и параметрических возмущений используют генераторы задающих и возмущающих воздействий, наблюдатели возмущений, регрессоры и идентификаторы параметров [1, 10–12]. При этом динамический порядок замкнутой системы увеличивается в несколько раз по сравнению с размерностью модели объекта управления. Кроме того, построение адекватных динамических моделей внешних воздействий достаточно проблематично, если они меняются в процессе эксплуатации или недостаточно гладкие. Примером могут служить ударные нагрузки и силы сухого трения при управлении электромеханическими объектами [13–15]. В частном случае, когда негладкое возмущение отделено от истинного управления одним интегратором, можно подавить его с помощью “вихревого” статического управления с непрерывной и разрывной составляющими. Результат достигается за счет организации в системе колебательного переходного процесса, при котором часть переменных состояния автоматически компенсирует влияние неизвестных слагаемых [16].

В общем случае для обеспечения инвариантности ошибок слежения по отношению к несогласованным возмущениям, которые не подлежат дифференцированию, целесообразно использовать локальные связи специального вида и блочный принцип управления как методологическую основу для их реализации. При решении задачи слежения в рамках блочного подхода [17–22] уравнения внешней динамики приводятся к блочной форме вход–выход с аффинным вхождением фиктивных и истинных управлений. Она состоит из элементарных блоков, в каждом из которых размерность управляемых переменных равна рангу матрицы перед фиктивными управлениями, в качестве которых используются переменные следующего блока. Последовательно формируемые стабилизирующие локальные связи в каждом блоке в итоге обеспечивают выбором истинного управления. Внешние возмущения при блочной организации являются согласованными с фиктивными управлениями. Как было отмечено, классическими методами подавления внешних и параметрических ограниченных возмущений, действующих в пространстве управления, являются: 1) непрерывные линейные обратные связи с большими коэффици-

ентами усиления; 2) ограниченные по модулю разрывные управления с организацией скользящих режимов. При этом только управления первого типа (в силу гладкости) можно использовать для формирования локальных связей. Применению глубоких обратных связей на практике препятствует известная проблема всплесков в начале переходных процессов [23–24], на величину которых в практических приложениях накладываются ограничения. Гибридом линейного и разрывного управлений является кусочно-линейное управление с насыщением в виде sat-функции [25–26], которое сочетает в себе положительные свойства обоих методов, но свободно от их недостатков. С помощью ограниченного и непрерывного sat-управления в замкнутой системе обеспечиваются свойства, близкие к свойствам систем с разрывными управлениями, функционирующим в скользящем режиме. Негладкость sat-функции не является препятствием для ее использования в истинном управлении и в корректирующих воздействиях наблюдателей состояния [5, 18], но сужает возможности ее применения для синтеза фиктивных управлений в практических задачах.

Для универсального формирования инвариантных локальных связей требуются гладкие аналоги sat-функции — трансцендентные S-образные функции (арктангенс, гиперболический тангенс, логистическая функция и т.п.). Конструктивным инструментом для анализа и синтеза нелинейного управления представляется нечетный гиперболический тангенс  $\text{th}(x) = 1 - 2/(\exp(2x) + 1)$ , он зависит от экспоненты, его производные всюду ограничены и рекурсивно выражаются через первообразную. В данной работе используется более удобная для построений модификация гиперболического тангенса — сигма-функция  $\sigma(x) = -\text{th}(-x/2)$ .

Заметим, что с помощью сигма-функций можно с любой точностью аппроксимировать любую ограниченную функцию с конечным числом разрывов. Это свойство используется в задачах нейросетевого обучения, где сигмоиды служат функциями активации нейронов: из набора сигмоидов формируется нейронный слой, выходом которого является их линейная комбинация. Вычисление параметров нейронной сети (весовых коэффициентов и смещений) происходит в процессе обучения по заранее известной обучающей выборке (англ. “data set”) с целью минимизации функции потерь, в качестве которой выступает среднеквадратическая ошибка между целевыми значениями обучающей выборки и выходом нейронной сети. После завершения процесса обучения нейронная сеть применяется к новым данным и позволяет прогнозировать целевые значения на основе настроенных при обучении параметров [27].

В данной работе сигма-функции используются непосредственно в контуре обратной связи в качестве фиктивных и истинных управлений. Параметры регулятора выбираются на этапе синтеза исходя из наилучших допустимых значений параметров объекта управления и границ изменения внешних воздействий. В процессе регулирования сигмоидальные фиктивные и истинные управления за конечное время сходятся к согласованным с ними неизвестным сигналам и повторяют их форму с наперед заданной точностью. При этом

автоматически реализуется механизм компенсации возмущений, в том числе не принадлежащих пространству истинного управления, что и обеспечивает инвариантность выходных переменных. Таким образом, предлагаемый метод принципиально отличается от способа использования сигмоидальных функций в задачах нейросетевого управления, где параметры регулятора настраиваются по заранее известной обучающей выборке, при формировании которой требуется предусмотреть все возможные модификации регулируемого процесса [28].

Апробация сигмоидальных обратных связей в задачах наблюдения [3, 17], а также в задачах управления применительно к различным мехатронным объектам [15, 29–32] показала несомненное преимущество этого подхода по сравнению с линейной обратной связью с большими коэффициентами. К недостаткам метода можно отнести более сложную вычислительную реализацию, но с учетом постоянно наращиваемой мощности современных управляющих микропроцессоров это не является серьезным препятствием для его использования в системах управления современными и перспективными техническими объектами.

В данной работе блочный принцип управления с сигмоидальными обратными связями формализован для решения задачи слежения применительно к нелинейным одноканальным системам треугольного вида произвольной размерности, функционирующих в условиях параметрических и внешних несогласованных возмущений (без предположений об их гладкости). Обратим внимание, что динамические генераторы внешних воздействий в построения не вводятся; в оценивании параметрических и внешних возмущений нет необходимости. Задача рассматривается в детерминированной постановке: полагается, что весь вектор состояния объекта управления измеряется, шумы в измерениях отсутствуют.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся базовые сведения о сигма-функции и ее применении для синтеза инвариантной элементарной системы; описывается математическая модель объекта управления, формулируется постановка задачи слежения. В разделе 3 представлен основной результат: формализованы достаточные условия и разработана декомпозиционная процедура синтеза параметров сигмоидальных обратных связей на основе иерархических неравенств, обеспечивающих стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью за заданное время. В разделе 4 приведены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов для системы управления перевернутым маятником.

## 2. Описание проблемы

### 2.1. Особенности сигмоидальной обратной связи

Рассмотрим гладкую и ограниченную сигма-функцию

$$\sigma(kx) = \frac{2}{1 + \exp(-kx)} - 1, \quad k = \text{const} > 0,$$

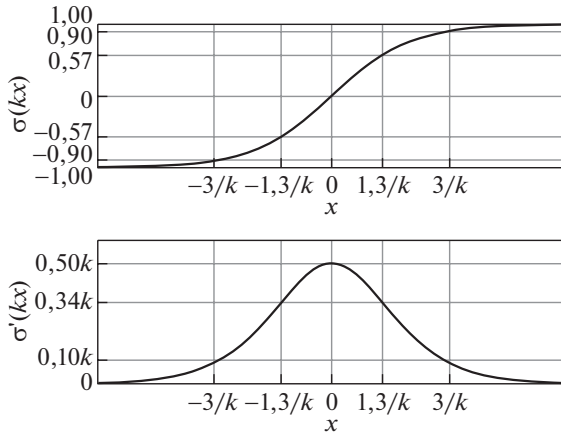


Рис. 1. Графики сигма-функции (сверху) и ее производной (снизу).

которая определена на всей числовой оси и имеет следующие свойства:

$$\sigma(-kx) = -\sigma(kx), \quad \sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} kx/2, \quad \sigma(kx) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign}(x).$$

В аргументе специально выделен множитель  $k$ , который в дальнейших построениях играет роль большого коэффициента усиления в малой окрестности нуля. Производная сигма-функции имеет рекурсивный вид:

$$\sigma'(kx) = k(1 - \sigma^2(kx))/2 > 0, \quad x \in R, \quad \sigma'(-kx) = \sigma'(kx).$$

Для упрощения анализа нелинейной сигма-функции установим ее аналогию с кусочно-линейной sat-функцией. Рассмотрим некоторую окрестность нуля с радиусом  $\Delta > 0$ . Для сигма-функции и ее производной в указанных интервалах справедливы следующие оценки:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \sigma(k\Delta) < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < \sigma'(k\Delta), \quad |x| > \Delta; \\ & \frac{\sigma(k\Delta)|x|}{\Delta} \leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(k\Delta), \quad \sigma'(k\Delta) \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, \quad |x| \leq \Delta. \end{aligned}$$

Неравенства (2.1) демонстрируют, что при  $|x| > \Delta$  сигма-функция близка к постоянной, а при  $|x| \leq \Delta$  — к линейной функции (см. рис. 1). Для формализации абсцисс указанного разделения введем параметр  $c = \text{const} > 0$ :  $|x| = \Delta = c/k$ , который целесообразно выбирать из интервала

$$(2.2) \quad k\Delta = c \in [1,3; 3],$$

где:  $\pm 1,3$  — абсциссы точек перегиба первой производной  $\sigma'''(\pm 1,3) = 0$ , при этом  $\sigma(\pm 1,3) \approx \pm 0,57$ ,  $\sigma'(\pm 1,3) \approx 0,34k$ ;  $\pm 3$  — абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом  $\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9$ ,  $\sigma'(\pm 0,9) \approx 0,095k$  [17].

Поясним идею использования сигмоидальной обратной связи и выбора ее параметров в задаче обеспечения инвариантности на примере элементарной возмущенной системы

$$(2.3) \quad \dot{x} = f(t) + u,$$

где  $x \in R$  – измеряемая переменная состояния,  $f(t)$  – внешнее возмущение, которое описывается детерминированной, неизвестной, но ограниченной функцией времени, требование гладкости к ней не предъявляется, достаточно, чтобы она была кусочно-непрерывная. Переменную системы (2.3) можно трактовать как ошибку слежения, тогда  $f(t)$  аддитивно включает производную задающего воздействия.

Ставится задача стабилизации системы (2.3) с помощью статической обратной связи. Управляющее воздействие  $u$  сформируем в виде сигма-функции

$$(2.4) \quad u = -m\sigma(kx)$$

с постоянной амплитудой  $m = \text{const} > 0$ .

*Лемма.* Если в системе (2.3), (2.4) внешнее возмущение ограничено известной константой  $|f(t)| \leq F = \text{const} > 0$ ,  $t \geq 0$ , то тогда для любых сколь угодно малых  $\Delta > 0$ ,  $T > 0$  и любого начального условия  $x(0)$  найдутся такие положительные действительные числа  $\bar{k}$  и  $\bar{m}$ , что при любых  $k \geq \bar{k}$ ,  $m \geq \bar{m}$  выполнится неравенство

$$(2.5) \quad |x(t)| \leq \Delta, \quad t \geq T.$$

*Доказательство леммы.* Заданное  $\Delta > 0$  (2.5) и коэффициент  $k$  свяжем параметрически (2.2), что сводит проблему выбора  $k$  к выбору  $c$  из указанного диапазона.

Формализуем для замкнутой системы (2.3), (2.4) достаточные условия устойчивости: введем функцию Ляпунова  $V = x^2/2$  и оценим ее производную. Вне области  $|x| \leq \Delta$  с учетом (2.1)–(2.2) имеем:

$$(2.6) \quad \dot{V} = x(f(t) - m\sigma(kx)) \leq |x|(F - m\sigma(c)).$$

Из (2.6) следует, что неравенство  $\dot{V} \leq |x|(F - m\sigma(c)) < 0$  справедливо, если

$$(2.7) \quad m > m^* = F/\sigma(c).$$

Выполнение (2.7) обеспечивает  $|x(t)| \leq \Delta$  без учета времени сходимости, которое зависит от начального условия. В частном случае  $|x(0)| \leq \Delta$  неравенство  $|x(t)| \leq \Delta$  обеспечивается при (2.7) и  $t \geq 0$ , т.е. цель управления (2.5) достигается.

В общем случае  $|x(0)| > \Delta$  для гарантированного достижения переменной состояния заданной области за заданное время  $T > 0$  повысим нижнюю границу для выбора амплитуды (2.7). С учетом оценки решения системы (2.3)

на интервале  $t \in [0; T]$

$$|x(t)| \leq |x(0)| + (F - m\sigma(c))T \leq \Delta, \quad t \geq T$$

получим

$$(2.8) \quad m \geq \bar{m} = \frac{1}{\sigma(c)} \left( \frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right) > m^*, \quad |x(0)| > \Delta.$$

Таким образом, принятое значение  $c$  (2.2) определяет  $\bar{m}$  (2.8) и  $\bar{k}$

$$(2.9) \quad k \geq \bar{k} = c/\Delta,$$

отвечающие цели управления (2.5) при любом  $x(0)$ . Выбор амплитуды  $m$  управления (2.4) на основе неравенства (2.8) гарантирует попадание переменной состояния системы (2.3) из любого начального условия в окрестность нуля за заданное время (и чем больше  $m$ , тем быстрее). Если переменная изначально находится в этой области, то гарантированно не покинет ее в процессе регулирования. Выбор большого коэффициента  $k$  на основе (2.9) обеспечивает заданный радиус этой окрестности (и чем больше  $k$ , тем меньше радиус). Лемма доказана.

*Замечание 1.* В процессе доказательства леммы 1 формализованы достаточные условия (2.8), (2.9), гарантирующие выполнение целевых показателей (2.5). Однако предельный радиус окрестности нуля, достигаемой переменной  $x(t)$  в стационарном режиме, будет несколько меньше заданного  $\Delta > 0$ . Действительно, при  $t \geq T$  для замкнутой системы (2.3), (2.4) оценка производной функции Ляпунова (2.6) в силу (2.1) имеет вид

$$\dot{V} = x(f(t) - m\sigma(kx)) \leq |x|(F - m\sigma(c)|x|/\Delta).$$

Неравенство  $\dot{V} < 0$  справедливо вне области

$$(2.10) \quad |x| \leq \Delta \frac{F}{m\sigma(c)} < \Delta,$$

к которой асимптотически стремится  $x(t)$  и которая в силу (2.8) меньше заданной (2.5). Ее радиус сокращается с ростом амплитуды  $m$ .

Тем не менее на практике целесообразно выбирать  $k$  и  $m$  как можно ближе к базовым значениям  $\bar{k}$  (2.9) и  $\bar{m}$  (2.8) в целях экономии ресурса управления.

Рассмотрим вопрос о выборе параметра  $c$  из указанного диапазона (2.2). Принимая во внимание последующее использование сигма-функций для синтеза локальных связей в многомерных системах, в качестве критерия выбора примем минимум базовой оценки модуля скорости управления. Для замкнутой системы (2.3) имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -mk(1 - \sigma^2(kx))\dot{x}/2; \quad 0 < 1 - \sigma^2(kx) \leq 1, \quad x \in R; \\ | \dot{x}(t) | &< F + m < 2m, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.8), (2.9) следует базовая оценка скорости изменения управления:

$$(2.11) \quad |\dot{u}(t)| < m^2 k, \quad t \geq 0, \quad m^2 k \geq \bar{m}^2(c) \bar{k}(c) = \frac{c}{\sigma^2(c) \Delta} \left( \frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right)^2.$$

Из (2.11) при фиксированных значениях  $\Delta$ ,  $|x(0)|$ ,  $T$ ,  $F$  имеем целевое условие:

$$(2.12) \quad y(c) = \frac{c}{\sigma^2(c)} \rightarrow \min, \quad c > 0.$$

Исследуем на экстремумы функцию (2.12). Ее производная имеет вид

$$y' = \frac{(1 + e^c)(e^{2c} - 4ce^c - 1)}{(e^c - 1)^3},$$

из уравнения  $y' = 0 \Rightarrow e^{2c} - 4ce^c - 1 = 0$  численно находим стационарную точку  $c \approx 2,17$ . На интервале  $c \in (0; 2,17)$  функция убывает ( $y' < 0$ ), на интервале  $c \in (2,17; +\infty)$  — возрастает ( $y' > 0$ ), следовательно,  $c \approx 2,17 \in [1,3; 3]$  — точка минимума. Для удобства расчетов положим

$$(2.13) \quad \bar{c} = 2,2; \quad \sigma(\bar{c}) \approx 0,8; \quad \frac{1}{\sigma(\bar{c})} \approx 1,25.$$

В принятой точке  $y(2,2) \approx 3,43322$ , что практически не отличается от минимального значения функции  $y(2,17) \approx 3,43299$ . Тогда с учетом (2.13) оценки (2.1) примут следующий вид:

$$(2.14) \quad 0,8 < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < 0,18k, \quad |x| > \bar{c}/k, \quad \bar{c} = 2,2;$$

$$\frac{0,8k|x|}{\bar{c}} = 0,36k|x| \leq |\sigma(kx)| \leq 0,8, \quad 0,18k \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, \quad |x| \leq \bar{c}/k.$$

*Замечание 2.* В элементарной возмущенной системе (2.3) с помощью сигмоидального управления обеспечивается монотонный переходный процесс и  $|x(t)| \leq \bar{x} = \max\{|x(0)|, \Delta\}$ ,  $t \geq 0$ , что позволяет расширить класс рассматриваемых элементарных систем за счет систем вида

$$(2.15) \quad \dot{x} = f_1(x) + f_2(t) + b(x, t)u,$$

где значения  $f_1(x)$  точно не известны, требование ограниченности на всей области определения к данной функции не предъявляется, достаточно выполнения условия  $|f_1(x)| \leq F_1 = \text{const} > 0$  при  $|x| \leq \bar{x} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — любая малая величина;  $f_2(t)$  — неизвестное ограниченное возмущение  $|f_2(t)| \leq F_2 = \text{const} > 0$  при  $t \geq 0$ . Достаточное условие управляемости системы (2.15) в сделанных предположениях:  $b(x, t)$  — знакопостоянная функция, т.е.  $b(x, t) \neq 0$  при  $|x| \leq \bar{x} + \varepsilon$ ,  $t \geq 0$ , допускается ее параметрическая неопределенность, но в указанных интервалах известны ее знак  $\text{sign}(b(x, t)) = \text{const}$

и границы изменения  $0 < b_{\min} \leq |b(x, t)| \leq b_{\max}$ . Ко всем функциям системы (2.15) не предъявляется требование гладкости, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Обозначим:  $f(x, t) = f_1(x) + f_2(t)$ ,  $|f(x, t)| \leq F = F_1 + F_2$  при  $|x| \leq \bar{x} + \varepsilon$ ,  $t \geq 0$ . Управление

$$u = -\text{sign}(b)m\sigma(kx)$$

приводит к замкнутой системе

$$(2.16) \quad \dot{x} = f(x, t) - |b(x, t)| m\sigma(kx).$$

Зафиксируем большой коэффициент на основе (2.9) с учетом (2.13):

$$(2.17) \quad k \geq \bar{k} = \frac{\bar{c}}{\Delta} = \frac{2,2}{\Delta}.$$

Для замкнутой системы (2.15) при  $\Delta < |x| < \bar{x} + \varepsilon$  аналогично (2.6), (2.7) имеем:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{V} = x(f - |b|m\sigma(kx)) &\leq |x|(F - b_{\min}m\sigma(\bar{c})) = |x|(F - 0,8b_{\min}m), \\ 0,8b_{\min}m > F &\Leftrightarrow m > 1,25F/b_{\min} \Rightarrow \dot{V} < 0. \end{aligned}$$

Если  $|x(0)| \leq \Delta$ , то выполнение (2.17), (2.18) обеспечит  $|x(t)| \leq \Delta$  при  $t \geq 0$ . В общем случае  $\Delta < |x(0)| < \bar{x} + \varepsilon$  переменная состояния не выйдет из области  $|x(t)| \leq \bar{x}$ ,  $t \geq 0$ , а цель управления (2.5) будет достигнута, если аналогично (2.8) амплитуда принята на основе неравенства

$$(2.19) \quad m \geq \bar{m} = \frac{1}{b_{\min}\sigma(\bar{c})} \left( \frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right) = \frac{1,25}{b_{\min}} \left( \frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right),$$

$$|x(0)| > \Delta.$$

Приведенные построения далее распространяются на неэлементарные управляемые системы.

## 2.2. Описание модели объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается нелинейная одноканальная система, функционирующая при действии внешних несогласованных возмущений, математическая модель которой представима в треугольной (по составу аргументов функций ее подсистем) форме вход–выход:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + b_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t) + b_i(x_1, \dots, x_n, t)u, \end{aligned}$$

где  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in X \subset R^n$  – измеряемый вектор состояния,  $X$  – открытая ограниченная область изменения переменных состояния, определяемая физикой процесса, границы области допустимых начальных значений переменных  $x(0) \in X$  заранее известны;  $x_1 \in X_1 \subset R$  – регулируемая переменная



(выход),  $u \in R$  – управляющее воздействие (вход);  $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$  – функции от указанных переменных вектора состояния и внешних возмущений, которые в общем случае полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными по модулю:

$$(2.21) \quad |f_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)| \leq F_i = \text{const} > 0, \quad x(t) \in X, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

характер вхождения параметрических и сигнальных возмущений не принципиален, так как задача их индивидуального оценивания и компенсации не ставится.

*Замечание 3.* Константы  $F_i, i = \overline{1, n}$  (2.21) нужно знать заранее, поэтому самый простой вариант – предполагать, что функции  $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$  ограничены по всем указанным аргументам. Конечно, это сильно сужает класс допустимых систем, из рассмотрения сразу выпадают линейные системы. Отметим, что предлагаемая далее процедура синтеза всюду ограниченных обратных связей является удобным аналитическим инструментом для обеспечения в процессе регулирования заданных ограничений на переменные состояния и управления [15]. В данной работе эта проблема не рассматривается. Тем не менее если функции  $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$  не ограничены всюду по  $x_1, \dots, x_i$ , то имеется принципиальная возможность априори для худшего расчетного случая оценить область изменения переменных состояния  $X$  и соответствующие значения  $F_i, i = \overline{1, n}$  при  $x(t) \in X$  (см. замечание 2).

Система (2.20) является управляемой, а именно,  $b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t) \neq 0, x(t) \in X, t \geq 0, i = \overline{1, n}$  [20]. Данные функции могут содержать различные неопределенности, но при этом известными считаются их знаки  $\text{sign}(b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)) = \text{const}, t \geq 0$  и диапазоны изменения

$$(2.22) \quad 0 < b_{i,\min} \leq |b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)| \leq b_{i,\max}, \\ x(t) \in X, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Требование гладкости к функциям  $f_i(t), b_i(t), i = \overline{1, n}$  (2.20) не предъявляется, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Модель (2.20) без ограничения общности можно рассматривать как одну из подсистем уравнений внешней динамики многоканальной системы [1, 33]. Под такое описание попадает представительный класс динамических объектов управления, например теплообменные и электромеханические системы [9, 12–15, 19, 25, 26, 29–32, 34, 35]. Модели ряда других объектов можно представить в виде связного набора подсистем типа (2.20) с помощью невырожденных замен переменных без задействования в преобразованиях внешних возмущений.

Для объекта управления (2.20) ставится задача синтеза закона управления в форме статической обратной связи, обеспечивающего отслеживание выходной переменной  $x_1(t)$  заданного допустимого сигнала  $g(t)$ , который поступает в систему управления в реальном времени из внешнего источника, его

аналитическое описание отсутствует, известны только его текущие значения, области изменения начальных условий и первой производной:

$$(2.23) \quad g(t) \in G \subseteq X_1, \quad |\dot{g}(t)| \leq G_1, \quad t \geq 0.$$

В сделанных предположениях задача слежения, а именно стабилизация ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ , может быть решена только с некоторой точностью. Пусть заданы точность стабилизации  $\Delta_1 > 0$  и время  $t_1 > 0$  ее достижения. Цель управления — обеспечить в замкнутой системе

$$(2.24) \quad |e_1(t)| \leq \Delta_1, \quad t \geq t_1.$$

В следующем разделе получены достаточные условия решения поставленной задачи (2.24) в рамках блочного подхода с использованием сигмоидальных обратных связей.

### 3. Декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных обратных связей с обеспечением заданной точности стабилизации ошибки слежения

Система (2.20) имеет структуру блочной формы управляемости [20–22]. Согласно идеологии блочного принципа управления каждое уравнение системы (2.20) трактуется как элементарный блок, аналогичный (2.15), относительно фиктивного или истинного управления. В  $i$ -м блоке ( $i = \overline{1, n-1}$ ) в качестве фиктивного управления выступает переменная следующего блока  $x_{i+1}$ . Таким образом, неопределенности  $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , которые не согласованы с истинным управлением, находятся в пространстве соответствующих фиктивных управлений. Чтобы избежать большого перерегулирования, характерного для линейных обратных связей с большими коэффициентами, которые стандартно используются для подавления неопределенностей [22–24, 30], стабилизирующие фиктивные управления предлагается выбрать в виде гладких и ограниченных сигма-функций:

$$(3.1) \quad x_i^* = -\text{sign}(b_{i-1})m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), \quad k_{i-1}, m_{i-1} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{2, n},$$

где  $e_1$  — ошибка слежения,  $e_{i-1}$  ( $i = \overline{3, n+1}$ ) — невязки между переменными  $x_i$  и выбранными фиктивными управлениями (3.1):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} e_1 &= x_1 - g, \\ e_i &= x_i - x_i^* = x_i + \text{sign}(b_{i-1})m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

В замкнутой системе с помощью истинного управления, которое также для единообразия принимается в виде сигма-функции

$$(3.3) \quad u = -\text{sign}(b_n)m_n\sigma(k_n e_n), \quad k_n, m_n = \text{const} > 0,$$

требуется обеспечить стабилизацию невязок (3.2), в том числе ошибки слежения  $e_1$ , что отвечает цели управления (2.24).

Перепишем замкнутую систему (2.20), (3.3) относительно невязок (3.2):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -|b_1| m_1 \sigma(k_1 e_1) + f_1 - \dot{g} + b_1 e_2; \\ \dot{e}_i &= -|b_i| m_i \sigma(k_i e_i) + f_i + \Lambda_{i-1} + b_i e_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ \dot{e}_n &= -|b_n| m_n \sigma(k_n e_n) + f_n + \Lambda_{n-1}, \end{aligned}$$

где слагаемые

$$(3.5) \quad \Lambda_i = \text{sign}(b_i) m_i \frac{k_i (1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} \dot{e}_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

являются производными соответствующих фиктивных управлений (3.1), которые возникают при переходе к новому координатному базису (3.2).

Для настройки параметров сигмоидальных обратных связей в системе (3.4) используем блочный подход, в котором реализуется принцип декомпозиции [34, 35]. Задача сводится к последовательному решению элементарных задач синтеза в подсистемах (блоках), аналогичных (2.16). Отличие заключается в том, что только последняя,  $n$ -я подсистема регулируется непосредственно истинным управлением, а в остальных в качестве фиктивных управлений выступают переменные следующего блока. Как следствие, в общем случае ненулевых начальных значений невязок только в последнем блоке гарантируется монотонный переходный процесс. Формализуем достаточные условия стабилизации системы (3.4).

*Теорема.* Если в системе (3.4) выполняются условия (2.21)–(2.23), то тогда для любых начальных условий  $x(0) \in X$  и любых, сколь угодно малых  $\Delta_1 > 0$ ,  $t_1 > 0$  найдутся такие действительные числа  $\bar{k}_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $0 < \bar{m}_i < \bar{m}_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $\bar{m}_n > 0$ , что при любых  $k_i \geq \bar{k}_i$ ,  $m_i$ :  $\bar{m}_i < m_i \leq \bar{m}_i$ ,  $m_n \geq \bar{m}_n$  неравенство (2.24) выполнится.

В Приложении приведено конструктивное доказательство теоремы, в ходе которого получена декомпозиционная процедура выбора параметров фиктивных и истинного управлений на основе неравенств, обеспечивающая решение поставленной задачи (2.24). Заметим, что на стадии проектирования следящей системы в полученные оценки для выбора амплитуд вместо конкретных значений  $|x_i(0)|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $|g(0)|$  (2.23) следует подставлять граничные значения областей допустимых начальных условий соответствующих переменных состояния.

Для упрощения вычислительной реализации в качестве истинного управления вместо (3.3) можно также использовать всюду ограниченную, но негладкую sat-функцию [25, 26].

*Замечание 4.* Для управления механическими системами часто используют электрические безынерционные исполнительные устройства, построенные на базе силовых электронных элементов, которые могут функционировать исключительно в ключевом режиме. В этом случае вместе с сигмоидальными локальными связями (3.2) естественно вместо непрерывного управления (3.3) использовать закон разрывного управления:

$$(3.6) \quad u = -\text{sign}(b_n) m_n \text{sign}(e_n).$$

Разрывное управление (3.6) имеет один настраиваемый параметр — амплитуду, которая выбирается на основе неравенства, аналогичного (П.22), а именно:

$$(3.7) \quad m_n \geq \bar{m}_n = \frac{1}{b_{n,\min}} \left( \frac{|x_n(0)| + m_{n-1}^*}{t_n^*} + F_n + k_{n-1}^* (m_{n-1}^*)^2 b_{n-1,\max} \right).$$

При выполнении (3.7) в замкнутой системе (2.20), (3.2), (3.6) за конечное время  $0 < t_n^* < 0,2b_{n-1,\min}t_{n-1}^*/b_{n-1,\max} < t_1$  возникнет скользящий режим [7–9]. В теории — на поверхности  $e_n = 0$  в виртуальном пространстве невязок  $(e_1, \dots, e_n) \in R^n$ , а в реальности из-за различного рода неидеальностей движение изображающей точки происходит в пограничном слое поверхности переключения  $|e_n(t)| \leq \Delta_n$ ,  $t \geq t_n^*$ , ширина которого пропорциональна амплитуде разрывного управления. При этом неравенства (П.1), а следовательно, и цель управления (2.24) обеспечиваются.

Необходимо отметить, что параметры обратной связи в предложенной процедуре определяются на основе неравенств, составленных для худшего расчетного случая, что не требует перенастройки регулятора при изменении внутренних и внешних факторов в допустимых пределах. Кроме того, показана принципиальная возможность в рамках предложенного подхода обеспечить любую, сколь угодно малую ошибку слежения с любым, достаточно малым перерегулированием (П.11) за любое, сколь угодно малое время при любых начальных условиях. Но эти построения имеют больше теоретическую значимость, поскольку уменьшение показателей цели управления (2.24), (П.11) обернется ростом параметров регулятора. Это может привести к избыточным величинам фиктивных и истинных управлений в переходном процессе, недопустимым в реальных системах автоматического управления.

*Замечание 5.* При использовании разработанной в доказательстве теоремы процедуры настройки в практических приложениях рекомендуется фиксировать коэффициенты обратной связи как можно ближе к нижним базовым границам. Учитывая консервативность полученных оценок, можно несколько завышать целевые показатели (2.24) при выполнении расчетов, так как реально в установившемся режиме будет достигаться меньшая ошибка слежения (2.10) и/или меньшее время регулирования (см. раздел 4).

Обратим внимание, что в силу организации локальных обратных связей (3.1) в замкнутой системе (2.20), (3.6) переменные состояния  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{2, n}$  будут “отслеживать” ограниченные сигмоидальные сигналы, при этом максимальные отклонения фиктивных управлений от “задающих воздействий” ограничены (П.6), а точность слежения будет зависеть от задаваемой точности стабилизации невязок (3.2) (“ошибок слежения”). Этот факт является предпосылкой для использования данного подхода при решении задачи слежения в условиях проектных ограничений на переменные состояния и управления.

#### 4. Результаты моделирования

Для иллюстрации разработанного метода рассмотрим задачу синтеза следящей системы для перевернутого математического маятника. За точку от-

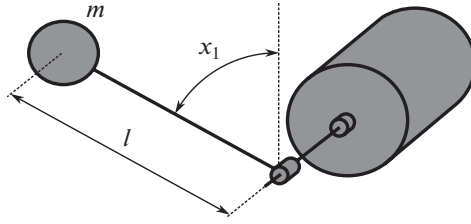


Рис. 2. Схема перевернутого маятника.

счета принято верхнее вертикальное положение  $x_1 = 0$ , которое является неустойчивым (см. рис. 2).

Математическая модель с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока (ДПТ) аналогична (2.20) и имеет третий порядок:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \sin x_1 - a_{22}x_2 + b_2x_3 + \eta(t), \\ \dot{x}_3 &= -a_{32}x_2 - a_{33}x_3 + b_3u, \end{aligned}$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$  – положительные конструктивные коэффициенты

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a_{21} &= \tilde{g}/l, & a_{22} &= \kappa/l, & b_2 &= k_a/(\tilde{m}l^2), \\ a_{32} &= c/L, & a_{33} &= R/L, & b_3 &= 1/L, \end{aligned}$$

которые не определены и могут изменяться в известных диапазонах. Описание переменных состояния  $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$  системы (4.1), которые подлежат прямым измерениям, и параметров (4.2) приведено в табл. 1.

В системе (4.1) регулируемой (выходной) переменной является угловое положение маятника  $x_1(t)$ , для которого ставилась задача отслеживания заданного сигнала  $g(t)$  (2.23). Для обеспечения (2.24) применялся разработанный метод с формированием сигмоидальных локальных связей и синтеза разрыв-

**Таблица 1.** Описание переменных состояния и параметров объекта управления

Обозначение	Описание, единица измерения	Обозначение	Описание, единица измерения
$x_1(t)$	угловое положение маятника, $[-\pi; \pi]$ [рад]	$l$	длина маятника, [м]
$x_2(t)$	угловая скорость маятника, $[-2; 2]$ [рад/с]	$\kappa$	коэффициент вязкого трения, $[\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2]$
$x_3(t)$	ток якоря ДПТ, $[-4; 4]$ [А]	$c$	коэффициент противо-ЭДС ДПТ, $[\text{В} \cdot \text{с}/\text{рад}]$
$\eta(t)$	неконтролируемое возмущение, $[\text{Н} \cdot \text{м}]$	$R$	сопротивление якоря ДПТ, [Ом]
$\tilde{g} = 9,81$	ускорение свободного падения, $[\text{м}/\text{с}^2]$	$L$	индуктивность якоря ДПТ, [Гн]
$\tilde{m}$	масса маятника, [кг]	$k_a$	коэффициент пропорциональности, $[\text{Н} \cdot \text{м}/\text{А}]$

**Таблица 2.** Параметры объекта управления, принятые при моделировании

	Диапазон изменения	Вид или значение			
		Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
$\eta(t)$	$[-0,5; 0,5]$	$0,25t, t \in [(k-1)T, kT], k = 1, 2, \dots, T = 2$		$0,5 \cos t$	$0,3 \sin t$
$g(t)$	$[-0,5; 0,5]$ $ \dot{g}(t)  \leq 0,5$	$0,2 \sin t$		$0,5  \sin t $	$0,25 \sin 2t$
$\tilde{m}$	$[0,18; 0,25]$	0,18	0,25	$0,07  \cos(t/2)  + 0,18$	
$l$	$[0,2; 0,3]$	0,2	0,3	0,25	0,23
$\kappa$	$[2; 4]$	2	4	3	3,8
$c$	$[0,27; 0,33]$	0,27	0,33	0,3	0,28
$R$	$[4,15; 4,2]$	4,15	4,2	4,18	4,1
$L$	$[0,012; 0,013]$	0,012	0,013	0,013	0,012
$k_a$	$[1,68; 1,75]$	1,68	1,75	1,7	1,69

ного управления, аналогично (3.1), (3.6) соответственно, где  $n = 3$ ,  $u$  – напряжение питания якорной цепи ДПТ, [В].

В табл. 2 приведены рассматриваемые диапазоны изменения внешних воздействий, параметров объекта, а также конкретные функции и значения, принятые при моделировании.

По данным табл. 2 были рассчитаны допустимые диапазоны для коэффициентов (4.2):

$$a_{21} \in [32,70; 49,05], \quad a_{22} \in [6,67; 20], \quad b_2 \in [74,67; 243,06], \\ a_{32} \in [20,76; 27,5], \quad a_{33} \in [319,23; 350], \quad b_3 \in [76,92; 83,34].$$

На их основе, а также с учетом заданных (завышенных, см. замечание 5) показателей (2.24)

$$(4.3) \quad \Delta_1 = 0,1 \text{ [рад]}, \quad t_1 = 5 \text{ [с]}$$

и принятых  $E_1 = 2,05$  (П.11),  $\Delta_2 = 0,64$ ,  $\Delta_3 = 0,05$  (П.1) для худшего расчетного случая на основе неравенств (П.2), (П.16), (П.21), (П.22) были выбраны следующие коэффициенты обратной связи:

$$(4.4) \quad m_1 = 1,96, \quad k_1 = 22; \quad m_2 = 3,54, \quad k_2 = 3,44; \quad m_3 = 190.$$

Моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink, для численного интегрирования системы (4.1) использовался метод Эйлера с постоянным шагом  $10^{-5}$ . Как показано в табл. 2, в первых двух экспериментах были приняты граничные значения параметров объекта из допустимых диапазонов (в первом – наименьшие, во втором – наибольшие). В третьем и четвертом экспериментах масса маятника полагалась переменной негладкой величиной, задающее воздействие – негладким (в третьем) и гладким (в четвертом), параметры приняты в виде промежуточных значений из допустимых диапазонов. Все четыре эксперимента проводились при одинаковых коэффициентах обратной связи (4.4) и одинаковых начальных условиях  $x_1(0) = \pi/3$ ,  $x_2(0) = 0,64$ ,  $x_3(0) = 0,5$ .

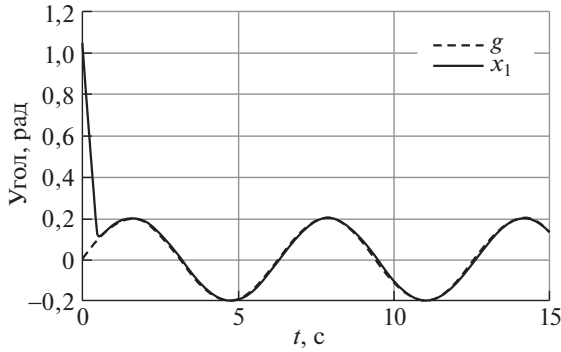


Рис. 3. Графики  $g(t)$ ,  $x_1(t)$  (эксперимент 1).

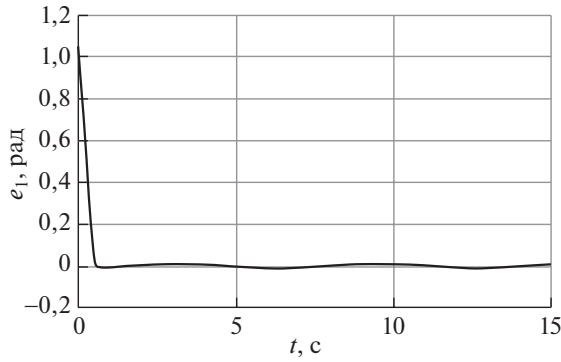


Рис. 4. График  $e_1(t)$  (эксперимент 2).

На рис. 3 для эксперимента 1 представлены графики задающего воздействия  $g(t)$  и регулируемой переменной  $x_1(t)$ , ее поведение во втором эксперименте практически не отличается от показанного на рис. 3. На рис. 4 представлен график ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$  [рад] для эксперимента 2. На рис. 5–6 для экспериментов 3 и 4 приведены графики задающего воздействия  $g(t)$  и регулируемой переменной  $x_1(t)$  (снизу), а также ошибки слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$  [рад] (сверху).

В табл. 3 для всех экспериментов представлены показатели регулирования ошибки слежения  $e_1(t)$ : время регулирования  $t_*$ :  $|e_1(t)| \leq 0,1$ ,  $t \geq t_*$ ; величина перерегулирования  $e_{1,\max} \geq |e_1(t)|$ ,  $t \geq 0$ ; точность  $\delta_1 \geq |e_1(t)|$ , достигаемая при  $t \geq 5$  [с].

Таким образом, из рис. 3–6 и табл. 3 следует, что цель управления достигается во всех случаях, все показатели не превышают заданных значений. Следует отметить, что в силу выбора параметров регулятора из достаточных условий, радиусы областей сходимости ошибок слежения в установившемся режиме оказались примерно в 4–10 раз меньше заданного, а время регулирования — в 10–12 раз меньше заданного (4.3).

Конечно, высокоточные системы слежения потребуют индивидуальной настройки каждого рабочего режима в условиях полной определенности пара-

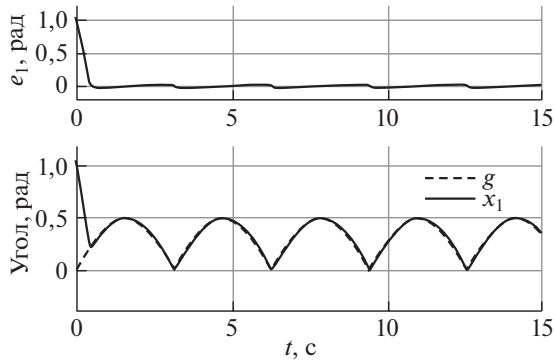


Рис. 5. Графики  $g(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$  (эксперимент 3).

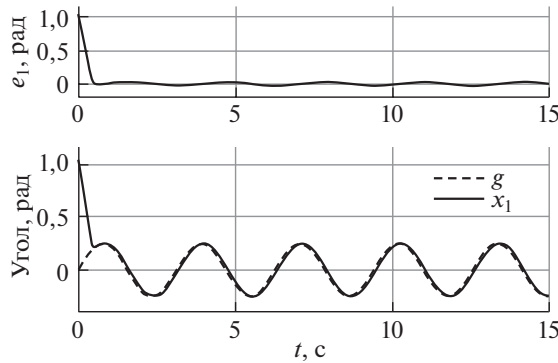


Рис. 6. Графики  $g(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$  (эксперимент 4).

метров объекта управления и внешних воздействий. Для системы (4.1), функционирующей в условиях неопределенности, можно обеспечить лучшие, чем указанные в табл. 3, показатели регулирования путем увеличения коэффициентов обратной связи (4.4). Предельные значения зависят от проектных ограничений на переменные состояния и управления конкретного объекта управления.

**Таблица 3.** Значения показателей качества регулирования

Показатель	Требования (не более)	Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
$t_*$ , с	5	0,4532	0,4714	0,4067	0,4138
$e_{1,\max}$ , рад	2,05	1,0474	1,0477	1,0473	1,0472
$\delta_1$ , рад	0,1	0,0093	0,0096	0,0242	0,0240

## 5. Заключение

Предложен метод синтеза сигмоидальных обратных связей, который принципиально отличается от способа использования сигмоидов в задачах нейросетевого обучения. Цель исследований заключалась в синтезе системы слежения для нелинейного объекта одноканального управления при воздействии



параметрических и внешних возмущений без предположений об их гладкости, о которых известны только границы диапазонов их изменения. Поставленная цель была достигнута за счет распространения блочного подхода на формирование нелинейных, всюду ограниченных сигмоидальных локальных связей, обеспечивающих  $\varepsilon$ -инвариантность по отношению к возмущениям, не согласованным с истинным управлением. Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанных алгоритмов.

Представленный материал является установочным для дальнейшего практикоориентированного решения задачи слежения с учетом проектных ограничений на переменные состояния и управление. Эта проблема, а также распространение данного метода на многоканальные системы, представимые в блочной форме управляемости с блоками разной размерности, составит предмет дальнейших исследований авторов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Согласно идеологии блочного подхода в замкнутой системе (3.4) нужно обеспечить следующую последовательность сходимости невязок:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} & |e_n(t)| \leq \Delta_n (t \geq t_n > 0) \Rightarrow |e_{n-1}(t)| \leq \\ & \leq \Delta_{n-1} (t \geq t_{n-1} > t_n) \Rightarrow \dots \Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1 (t \geq t_1 > t_2), \end{aligned}$$

где  $\Delta_1 > 0$ ,  $t_1 > 0$  заданы (2.24),  $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{2, n}$  назначаются произвольно, зависимости  $t_i$  от начальных значений невязок и принятых  $\Delta_i > 0$  устанавливаются в процессе доказательства.

Из леммы следует существование  $\bar{k}_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  таких, что для любых  $k_i \geq \bar{k}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  гарантируются желаемые радиусы  $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  (П.1) окрестностей нуля, в которые невязки сойдутся в указанные моменты времени (П.1). С учетом (2.13) аналогично (2.17) зафиксируем значения больших коэффициентов  $k_i$  на основе неравенств:

$$(П.2) \quad k_i^* \geq \bar{k}_i = 2,2/\Delta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сходимость невязок в установленные области за указанное время (П.1) обеспечивается с помощью выбора  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Стабилизация системы (3.4) осуществляется “снизу вверх” (П.1). Достаточные условия для выбора амплитуд, аналогичные (2.18), справедливы при выполнении указанных условий:

$$(П.3) \quad \begin{aligned} & 0,8b_{1,\min}m_1 > F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2, \quad |e_2| \leq \Delta_2; \\ & 0,8b_{i,\min}m_i > F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\min}\Delta_{i+1}, \quad |e_{i+1}| \leq \Delta_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ & 0,8b_{n,\min}m_n > F_n + |\Lambda_{n-1}|. \end{aligned}$$

Выполнение (П.2)–(П.3) обеспечивает последовательную стабилизацию невязок с заданной точностью без учета времени сходимости, которое зависит от начальных условий. В частном случае  $|e_i(0)| \leq \Delta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  выполнение (П.2)–(П.3) обеспечит  $|e_i(t)| \leq \Delta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  при  $t \geq 0$ , т.е. цель управления

(2.24) достигается. Заметим, что если  $|e_i(0)| \leq \Delta_i$ ,  $i = \overline{n, j+1}$ ,  $|e_j(0)| > \Delta_j$ , то переходный процесс невязки  $e_j(t)$  будет монотонным; в частности, при  $j = 1$  у ошибки слежения  $e_1(t)$  переходный процесс будет без перерегулирования.

В общем случае  $|e_i(0)| > \Delta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  в рамках данных построений монотонный переходный процесс гарантируется только для  $e_n(t)$ . Пока переменные нижних блоков системы (3.4) не достигнут установленных окрестностей нуля (П.1), переменные верхних блоков растут по модулю и достигают максимального значения не позже, чем в следующие моменты времени:

$$(П.4) \quad \begin{aligned} |e_n(t)| &\leq |e_n(0)| = e_{n,\max}, \\ |e_i(t)| &\leq |e_i(t_{i+1})| = e_{i,\max}, \quad i = \overline{n-1, 1}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

В силу построений (3.2) оценим начальные значения невязок:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} |e_1(0)| &\leq |x_1(0)| + |g(0)|, \\ |e_i(0)| &\leq |x_i(0)| + m_{i-1}\sigma(k_{i-1}|e_{i-1}(0)|) \leq |x_i(0)| + m_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.4), (П.3), (П.5) и учитывая, что собственные движения в замкнутой системе (3.4) устойчивые, составим оценки максимальных значений (П.4):

$$(П.6) \quad \begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2)t_2; \\ e_{i,\max} &= |x_i(0)| + m_{i-1} + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1})t_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ e_{n,\max} &= |x_n(0)| + m_{n-1}. \end{aligned}$$

Для обеспечения заданного времени сходимости требуется увеличить нижние границы для выбора амплитуд (П.3). Предварительно дадим оценки производных фиктивных управлений (3.5). Они отличаются на разных интервалах и зависят от соответствующих оценок производных сигма-функций и производных соответствующих невязок (3.4). Для производных невязок  $e_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  с учетом (П.3) справедливы оценки:

$$(П.7) \quad \begin{aligned} t \in [0; t_2) : |\dot{e}_1(t)| &\leq \\ &\leq \underbrace{F_1 + G_1 + b_{1,\max}\Delta_2 + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2) + b_{1,\max}m_1}_{< 0,8b_{1,\min}m_1} < \\ &< 2b_{1,\max}m_1 + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2), \\ t \geq t_2 : |\dot{e}_1(t)| &\leq F_1 + G_1 + b_{1,\max}\Delta_2 + b_{1,\max}m_1 < 2b_{1,\max}m_1; \\ t \in [0; t_{i+1}) : |\dot{e}_i(t)| &= \\ &= \underbrace{F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\max}\Delta_{i+1} + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) + b_{i,\max}m_i}_{< 0,8b_{i,\min}m_i} < \\ &< 2b_{i,\max}m_i + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_i), \\ t \geq t_{i+1} : |\dot{e}_i(t)| &= F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\max}\Delta_{i+1} + b_{i,\max}m_i < \\ &< 2b_{i,\max}m_i, \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

Для производной сигма-функции в силу (2.14) на указанных интервалах имеем:

$$(П.8) \quad \begin{aligned} |e_i(t)| &> \bar{c}/k_i, \quad t \in [0; t_i) : 0 < 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i)) < 0,18k_i, \\ |e_i(t)| &\leq \bar{c}/k_i, \quad t \geq t_i : 0,18k_i \leq 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i)) \leq 0,5k_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Объединяя (П.7)–(П.8), получим оценки производных фиктивных управлений (3.5) на указанных интервалах:

$$\begin{aligned} |\Lambda_i| &= m_i \frac{k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} |\dot{e}_i| \leq \\ &\leq \begin{cases} 0,36k_i m_i^2 b_{i,\max} + 0,18k_i m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}), & t \in [0; t_{i+1}); \\ 0,36k_i m_i^2 b_{i,\max}, & t \in [t_{i+1}; t_i); \\ k_i m_i^2 b_{i,\max}, & t \geq t_i; \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для того чтобы единообразно принять в качестве оценки

$$(П.9) \quad |\Lambda_i| \leq k_i m_i^2 b_{i,\max}, \quad t \geq 0; \quad i = \overline{1, n-1},$$

нужно обеспечить

$$0,18k_i m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) \leq 0,64k_i m_i^2 b_{i,\max} \Rightarrow e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1} \leq 3,5m_i, \\ i = \overline{1, n-1}.$$

С этой целью введем ограничения на пиковые значений невязок, несколько снизив предельные оценки для удобства расчетов:

$$(П.10) \quad e_{i,\max} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Для единообразия введем ограничение для перерегулирования по ошибке слежения:

$$(П.11) \quad |e_1(0)| < e_{1,\max} \leq E_1.$$

В частном случае  $|e_1(0)| < \Delta_1$  выполнение  $e_{1,\max} \leq E_1 = \Delta_1$  обеспечит  $|e_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq 0$ .

С учетом (П.10)–(П.11) неравенства (П.6) примут вид

$$(П.12) \quad \begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + 3b_{1,\max} m_1 t_2 \leq E_1; \\ e_{i,\max} &= |x_i(0)| + m_{i-1} + 3b_{i,\max} m_i t_{i+1} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ e_{n,\max} &= |x_n(0)| + m_{n-1} \leq 3m_{n-1} + \Delta_n, \end{aligned}$$

откуда следуют дополнительные условия, которые надо учитывать при выборе  $t_i, i = \overline{n, 2}$  ( $0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_2 < t_1$ ) и амплитуд фиктивных управлений:

$$(П.13) \quad 0 < m_1 \leq \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max} t_2}, \quad 0 < m_i \leq \frac{2m_{i-1} + \Delta_i - |x_i(0)|}{3b_{i,\max} t_{i+1}}, \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$(П.14) \quad m_i > \frac{|x_{i+1}(0)| - \Delta_{i+1}}{2}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Заметим, что по построениям (П.3)  $m_{i-1} > \Delta_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ , при этом  $\Delta_i > 0$  могут быть приняты как меньше, так и больше величин  $|x_i(0)|$ , требования малости к ним не предъявляются. Для упрощения расчетов можно изначально зафиксировать  $\Delta_i = |x_i(0)|$ ,  $i = \overline{2, n}$ , что снимает необходимость проверки выполнения условий (П.14).

В общем случае  $\Delta_i < |x_i(0)|$ ,  $i = \overline{2, n}$  неравенства нижней границы выбора амплитуд  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  будут содержать две базовые компоненты. С помощью первой компоненты  $m_{i1}$ , а также  $m_n$  аналогично (2.19) обеспечивается сходимость невязок  $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$  на интервалах  $[t_2; t_1], [t_3; t_2], \dots, [0; t_n]$  соответственно из пиковых значений (П.6), (П.12) в заданные области (П.1) за заданное время (2.24); а с помощью второй  $m_{i2}$  — ограничения (П.14). При этом в отличие от амплитуды истинного управления  $m_n$ , которая выбирается только на основе нижней оценки, для выбора амплитуд фиктивных управлений имеются ограничения сверху (П.13).

Формализуем пошаговую процедуру последовательного “сверху вниз” выбора амплитуд сигмоидальных управлений и допустимых моментов времени  $t_i$ ,  $i = \overline{2, n}$  при заданных  $\Delta_1$ ,  $t_1$ , назначенных  $E_1$  (П.11),  $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{2, n}$  и принятых на их основе  $k_i^*$ ,  $i = \overline{1, n}$  (П.2). В процессе процедуры допускается варьирование свободных параметров.

*Шаг 1.* С учетом (П.12) первое неравенство (П.3) примет вид:

$$\begin{aligned} 0,8b_{1,\min}m_1 &\geq \frac{|e_1(0)| + 3b_{1,\max}m_1t_2 - \Delta_1}{t_1 - t_2} + F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{11} &\geq \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)(t_1 - t_2)}{0,8b_{1,\min}t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max})t_2}, \end{aligned}$$

откуда следует ограничение на выбор  $0 < t_2 < t_1$ :

$$(П.15) \quad 0,8b_{1,\min}t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max})t_2 > 0 \Rightarrow t_2 < 0,2\frac{b_{1,\min}}{b_{1,\max}}t_1.$$

Выбираем  $t_2^* > 0$  на основе (П.15) и подставляем его в двойное неравенство

$$(П.16) \quad \max\{m_{11}; m_{12}\} < \bar{m}_1 < \bar{\bar{m}}_1,$$

где

$$(П.17) \quad \begin{aligned} m_{11} &= \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)(t_1 - t_2^*)}{0,8b_{1,\min}t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max})t_2^*}, \\ m_{12} &= \frac{|x_2(0)| - \Delta_2}{2}, \quad \bar{\bar{m}}_1 = \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max}t_2^*}. \end{aligned}$$

Если (П.16) выполняется, то тогда фиксируем  $t_2^*$ ,  $m_1^* \in (\bar{m}_1; \bar{\bar{m}}_1]$  и переходим на второй шаг. При невыполнении (П.3) следует варьировать произвольные параметры. Это можно сделать двумя способами.

*Первый способ.* Если требуется обеспечить принятое  $E_1$  (П.11), то тогда варьировем  $\Delta_2$  и/или  $t_2$ . Если при изначально принятом  $0 < t_2^* <$

$< 0, 2b_{1,\min}t_1/b_{1,\max}$  имеет место  $m_{12} > m_{11}$  (П.17), то путем увеличения  $\Delta_2$  (вплоть до  $\Delta_2 = |x_2(0)|$ ) нужно обеспечить  $m_{11} > m_{12}$ . Если при новом  $\Delta_2^*$  неравенство (П.16) не выполняется или изначально  $m_{11} > m_{12}$ , то тогда снижаем  $t_2^*$ . Критическое значение  $\bar{t}_2 > 0 : m_{11}(\bar{t}_2) = \bar{m}_1(\bar{t}_2)$  существует и равно

$$\bar{t}_2 = \frac{\sqrt{p_{12}^2 - 4p_{11}p_{13}} - p_{12}}{2p_{11}},$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -3b_{1,\max}(F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2), \\ p_{12} &= 0,8b_{1,\min}(E_1 - |e_1(0)|) + 3b_{1,\max}(E_1 - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)t_1), \\ p_{13} &= -0,8b_{1,\min}(E_1 - |e_1(0)|)t_1. \end{aligned}$$

Из предельного соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow +0} m_{11}(t_2) &= \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)t_1}{0,8b_{1,\min}t_1} = \\ \text{(П.18)} \quad &= \text{const} < \lim_{t_2 \rightarrow +0} \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max}t_2} = +\infty \end{aligned}$$

следует, что  $\bar{m}_1$  можно сделать сколь угодно большим и при любом  $t_2^* > 0 : 0 < t_2^* < \bar{t}_2$  неравенство (П.16) будет выполнено.

Таким образом, путем снижения  $t_2$  можно обеспечить любое, достаточно малое перерегулирование по ошибке слежения (П.11). Однако это может привести к существенному росту нижних границ для выбора амплитуд в следующих блоках.

*Второй способ.* Если отказаться от принятого  $E_1$  (П.11) и увеличить его значение:

$$E_1 > \bar{E} = |e_1(0)| + 3b_{1,\max}m_1^*t_2^*,$$

где  $\bar{E}$  – минимально возможное перерегулирование ошибки слежения при изначально принятом  $0 < t_2^* < 0, 2b_{1,\min}t_1/b_{1,\max}$ , то тогда можно произвольно увеличить верхнюю границу  $\bar{m}_1$  для выбора амплитуды (П.16).

Допустимые значения  $t_2^*$ ,  $m_1^*$ ,  $\Delta_2^*$  и  $k_2^*(\Delta_2^*)$  фиксируются, переходим на второй шаг.

*Шаг  $i$  ( $i = \bar{2}, n-1$ ).* Соответствующее номеру шага неравенство (П.1), а именно  $|e_i(t)| \leq \Delta_i$  ( $t \geq t_i > t_{i+1}$ ), обеспечивается путем выбора  $m_i$ . С учетом (П.9), (П.12)  $i$ -е неравенство (П.3) примет вид

$$\begin{aligned} \text{(П.19)} \quad 0,8b_{i,\min}m_i &\geq \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* + 3b_{i,\max}m_it_{i+1} - \Delta_i^*}{t_i^* - t_{i+1}} + \\ &+ F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1} \Rightarrow \\ m_i &\geq \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* - \Delta_i^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1})(t_i^* - t_{i+1})}{0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует ограничение на выбор  $0 < t_{i+1} < t_i^*$ , аналогичное (П.15):

$$(П.20) \quad 0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1} > 0 \Rightarrow t_{i+1} < 0,2\frac{b_{i,\min}}{b_{i,\max}}t_i^*.$$

Выбираем  $t_{i+1}^* > 0$  на основе (П.20) и подставляем его в двойное неравенство

$$(П.21) \quad \max\{m_{i1}; m_{i2}\} < \bar{m}_i < \bar{\bar{m}}_i,$$

где  $m_{i1}(t_{i+1}^*)$  (П.19),

$$m_{i2} = \frac{|x_{i+1}(0)| - \Delta_{i+1}}{2}, \quad \bar{\bar{m}}_i = \frac{2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|}{3b_{i,\max}t_{i+1}^*}.$$

Если (П.21) выполняется, то тогда фиксируем  $t_{i+1}^*$ ,  $m_i^* \in (\bar{m}_i; \bar{\bar{m}}_i]$  и переходим на следующий шаг. При невыполнении (П.21) следует варьировать произвольные параметры  $\Delta_{i+1}$  и/или  $t_{i+1}$ . Если изначально  $m_{i2} > m_{i1}$ , то путем увеличения  $\Delta_{i+1}$  (вплоть до  $\Delta_{i+1} = |x_{i+1}(0)|$ ) нужно обеспечить  $m_{i1} > m_{i2}$ . Если при новом  $\Delta_{i+1}^*$  неравенство (П.21) не выполняется или изначально  $m_{i1} > m_{i2}$ , то тогда снижаем  $t_{i+1}^*$ . Критическое значение  $\bar{t}_{i+1} > 0 : m_{i1}(\bar{t}_{i+1}) = \bar{\bar{m}}_i(\bar{t}_{i+1})$  существует и равно

$$\bar{t}_{i+1} = \frac{\sqrt{p_{i2}^2 - 4p_{i1}p_{i3} - p_{i2}}}{2p_{i1}},$$

где

$$\begin{aligned} p_{i1} &= -3b_{i,\max}(F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1}), \\ p_{i2} &= 3b_{i,\max}(3m_{i-1}^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1})t_i^*) + \\ &\quad + 0,8b_{i,\min}(2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|), \\ p_{i3} &= -0,8b_{i,\min}(2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|)t_i^*, \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

Из предельного соотношения, аналогичного (П.18), а именно

$$\begin{aligned} &\lim_{t_{i+1} \rightarrow +0} m_{i1}(t_{i+1}) = \\ &= \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* - \Delta_i^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1})t_i^*}{0,8b_{i,\min}t_i^*} = \text{const} < \\ &< \lim_{t_{i+1} \rightarrow +0} \frac{2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|}{3b_{i,\max}t_{i+1}} = +\infty, \end{aligned}$$

следует, что при любом  $t_{i+1}^* > 0 : 0 < t_{i+1}^* < \bar{t}_{i+1}$  неравенство (П.3) будет выполнено.

Заметим, что на  $i$ -м шаге (в отличие от первого) обеспечить выполнение (П.21) можно только указанным способом. Увеличение верхней границы  $\bar{\bar{m}}_i$

путем увеличения  $m_{i-1}^*$  приведет также к росту нижней границы  $\bar{m}_i(m_{i1})$ , причем более быстрыми темпами.

Допустимые значения  $t_{i+1}^*$ ,  $m_i^*$ ,  $\Delta_{i+1}^*$  и  $k_{i+1}^*(\Delta_{i+1}^*)$  фиксируются, переходим на следующий шаг.

*Шаг n* (последний). С учетом (П.9), (П.12) третье неравенство (П.3) примет вид, аналогичный (2.19):

$$(П.22) \quad m_n \geq \bar{m}_n = \frac{1,25}{b_{n,\min}} \left( \frac{|x_n(0)| + m_{n-1}^* - \Delta_n^*}{t_n^*} + F_n + k_{n-1}^*(m_{n-1}^*)^2 b_{n-1,\max} \right).$$

На основе (П.22) фиксируем  $m_n^*$ . Процедура настройки амплитуд закончена.

Таким образом, существуют такие  $\bar{k}_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  (П.2),  $0 < \bar{m}_i < \bar{\bar{m}}_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  (П.16)–(П.17), (П.21) и  $\bar{m}_n > 0$  (П.22), что для любых  $k_i \geq \bar{k}_i$ ,  $m_i : \bar{m}_i < m_i \leq \bar{\bar{m}}_i$ ,  $\forall m_n \geq \bar{m}_n$  в замкнутой системе (3.4) переменные последовательно сходятся в указанные области за указанное время (П.1), что и обеспечивает цель управления (2.24). Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wonham W.M.* Linear Multivariable control: a geometric approach. N.Y.: Springer-Verlar, 1979.
2. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
3. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // ПУ. № 5. 2015. С. 27–36.  
*Krasnova S.A., Utkin A.V.* Sigma Function in Observer Design for States and Perturbations // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1676–1688.
4. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // АИТ. 2018. № 3. С. 21–43.  
*Malikov A.I.* Synthesis of State Unknown Input Observers for Nonlinear Lipschitz Systems with Uncertain Disturbances // Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 406–424.
5. *Краснова С.А.* Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // УБС. 2018. Вып. 76. С. 6–25.  
*Krasnova S.A.* Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 5. P. 897–910.
6. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // АИТ. 2020. № 9. С. 3–61.  
*Andrievsky B.R., Furtat I.B.* Disturbance Observers: Methods and Applications. I. Methods // Autom. Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 9. P. 1563–1610.
7. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. М.: Наука. Физматлит, 1997.
8. *Edwards C., Spurgeon S.* Sliding mode control: theory and applications. Taylor & Francis Ltd, 1998.

9. *Utkin V.I., Guldner J., Shi J.* Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. N.Y.: CRC Press, 2009.
10. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // *АиТ.* 2014. № 9. С. 62–81.  
*Utkin V.A., Utkin A.V.* Problem of Tracking in Linear Systems with Parametric Uncertainties under Unstable Zero Dynamics // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 9. P. 1577–1592.
11. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Nonlinear and adaptive control design. N.Y.: Wiley, 1995.
12. *Ebrahim A., Murphy G.V.* Adaptive backstepping controller design of an inverted pendulum // *Proc. Thirty-Seventh Southeastern Symposium on System Theory.* 2005. P. 172–174.
13. *Feng H., Qiao W., Yin C., Yu H., Cao D.* Identification and compensation of nonlinear friction for a electro-hydraulic system // *Mechanism and Machine Theory.* 2019. V. 141. P. 1–13.
14. *Hidalgo M., Garcia C.* Friction compensation in control valves: Nonlinear control and usual approaches // *Control Engineering Practice.* 2018. V. 58. P. 42–53.
15. *Антипов А.С., Краснова С.А.* Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 3–20.  
*Antipov A.S., Krasnova S.A.* Block-Based Synthesis of a Tracking System for a Twin-Rotor Electromechanical System with Constraints on State Variables // *Mech. Solids.* 2021. V. 56. No. 7. P. 43–56.
16. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Обеспечение инвариантности за счет создания колебательных режимов // *ДАН.* 2013. Т. 452. № 6. С. 1–6.  
*Kochetkov S.A., Utkin V.A.* Providing the invariance property on the basis on oscillation modes // *Doklady Mathematics.* 2013. Vol. 88. No. 2. P. 618–623.
17. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // *АиТ.* 2014. № 2. С. 106–128.  
*Krasnova S.A., Mysik N.S.* Cascade Synthesis of a State Observer with Nonlinear Correction Influences // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 2. P. 263–280.
18. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // *АиТ.* 2017. № 12. С. 26–53.  
*Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V.* Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
19. *Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // *Прикладная математика и механика.* 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 530–548.  
*Antipov A.S., Krasnov D.V., Utkin A.V.* Decomposition Synthesis of the Control System of Electromechanical Objects in Conditions of Incomplete Information // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. No. 5. P. 47–60.
20. *Лукьянов А.Г.* Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // *АиТ.* 1998. № 7. С. 14–34.  
*Luk'yanov A.G.* A block method of synthesis of nonlinear systems at sliding modes // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 7. Part 1. P. 916–933.



21. *Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // *АиТ.* 2011. № 8. С. 65–95.  
*Krasnova S.A., Sirotina T.G., Utkin V.A.* A structural approach to robust control // *Autom. Remote Control.* 2011. Vol. 72. No. 8. P. 1639–1666.
22. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // *АиТ.* 2001. № 11. С. 73–94.  
*Utkin V.A.* Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // *Autom. Remote Control.* 2001. V. 62. No. 11. P. 1825–1843.
23. *Tsyupkin Y., Polyak B.* High-Gain Robust Control // *European J. Control.* 1999. Vol. 5. P. 3–9.
24. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.  
*Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // *Autom. Remote Control.* 2015. Vol. 76. No. 6. С. 957–976.
25. *Slotine J.E., Li W.* Applied Nonlinear Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
26. *Пестерев А.В.* Оценка области притяжения нулевого решения для аффинных систем с ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 4. С. 3–20.  
*Pesterev A.V.* Attraction domain estimate for single-input affine systems with constrained control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 4. P. 581–594.
27. *Бенджио И., Гудфеллоу Я., Курвилль А.* Глубокое обучение. М.: ДМК-Пресс, 2018.  
*Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep Learning. The MIT Press, 2016.
28. *Шумихин А.Г., Бояршинова А.С.* Идентификация сложного объекта управления по частотным характеристикам, полученным экспериментально на его нейросетевой динамической модели // *АиТ.* 2015. № 4. С. 125–132.  
*Shumikhin A.G., Boyarshinova A.S.* Identification of a complex control object with frequency characteristics obtain with its dynamic neural network model // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No 4. P. 650–657.
29. *Краснова С.А., Антипов А.С.* Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // *ПУ.* 2016. № 4. С. 10–21.  
*Krasnova S.A., Antipov A.S.* Hierarchical Design of Sigmoidal Generalized Moments of Manipulator under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2018. Vol. 79. No. 3. P. 554–570.
30. *Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S.* Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // *IFAC-PapersOnLine.* 2017. V. 50. No. 1. P. 1042–1047.
31. *Антипов А.С., Краснова С.А.* Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2019. Т. 20. № 10. С. 609–614.  
*Antipov A.S., Krasnova S.A.* Sistema stabilizatsii polozheniya telezhki krana s ispol'zovaniyem sigmoidal'noy funktsii (Stabilization System of Convey-Crane Position Via Sigmoidal Function) // *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye.* 2019. V. 20. No. 10. P. 41–54. (In Russian)

32. *Kokunko Yu., Krasnova S.* Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA). 2019. Vol. 10. No. 4. P. 695–705.
33. *Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И.* Об уравнения нулевой динамики некоторых аффинных нелинейных систем // ДУ. 2018. Т. 54. № 12. С. 1695–1709.  
*Fomichev V.V., Kraev A.V., Rogovskii A.I.* On the zero dynamics equations of some nonlinear systems affine in control // Differ. Equations. 2018. V. 54. No. 12. P. 1654–1668.
34. *Живанович М.М., Лазаревич М.П.* Применение принципа декомпозиции для стабилизации с заданной точностью номинального движения механической системы // АиТ. 2012. № 12. С. 65–88.  
*Živanović, M.M., Lazarević, M.P.* Using the decomposition principle to stabilize the nominal motion of a mechanical system with given accuracy // Autom. Remote Control. 2012. Vol. 73. No. 12. P. 2001–2020.
35. *Юркевич В.Д.* Синтез многоканальной системы управления роботами–манипуляторами на основе метода разделения движений // Автометрия. 2016. Т. 52. № 2. С. 107–114.  
*Yurkevich V.D.* Multi-channel control system design for a robot manipulator based on the time-scale method // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2016. V. 52. No. 2. P. 196–202.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 04.03.2021

После доработки 02.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021

© 2022 г. И.Н. БАРАБАНОВ, канд. физ.-мат. наук (ivbar@ipu.ru),  
В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ЦИКЛА В СВЯЗАННОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ<sup>1</sup>

Исследуются механические системы, каждая из которых в отсутствие связи допускает семейство периодических движений. Доказывается, что необходимым условием существования цикла в связанной системе является невырожденность периодических движений в подсистемах; исключение быть может в одной подсистеме. Находятся структура и конкретный вид связующего управления, решаются задачи существования, устойчивости и естественной стабилизации колебания. Показывается, что в цикле происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе. В статье развивается идея стабилизации колебания связанной системы путем выбора подходящей связи-управления между подсистемами.

*Ключевые слова:* механическая система, связующее управление, колебание, цикл, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231022010044

### 1. Введение

Для решения задачи стабилизации колебания модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предлагается выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и саму стабилизацию. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения иных управлений.

В рамках механической системы, подверженной действию позиционных сил, периодическое движение (одночастотное колебание) не может быть асимптотически устойчивым. Поэтому для стабилизации необходимо привлекать управление, нарушающее симметрию фазового портрета системы. Таким управлением для равновесия служит диссипация Релея. В уравнении Ван дер Поля используется нелинейная диссипация, которая линейна по скорости и приложена в текущей точке траектории. Здесь действие на линейный осциллятор управления с малым коэффициентом  $\varepsilon$  регулятора приводит к орбитально асимптотически устойчивому циклу. Физически управление реализуется посредством анодного тока в триоде, который не зависит явно от времени. Поэтому замкнутая система остается автономной и допускает цикл.

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

В уравнении Ван дер Поля в терминах МССП связь замыкает систему на себя: конструируется управляемая система с обратной связью. Такой подход к управляемой механической системе оказался продуктивным для произвольной механической системы [2, 3]. Возникает вопрос о перенесении подхода Ван дер Поля на связанную систему.

Связанные системы исследуются в различных областях знаний. Классическим примером в механике является симпатический маятник Зоммерфельда. Синхронизация находит применение в механических и электрических устройствах. Некоторые примеры, показывающие разнообразие постановок задач и исследуемых динамических свойств в связанных системах, даются в [4–14]. В этой статье приоритетными являются вопросы агрегирования консервативных систем в связанную систему с притягивающим циклом и управление посредством связей в сложной системе. Способы агрегирования сложной системы методом Ляпунова приводятся в [15].

Идея [1] о связях-управлениях развивается в статье для слабо связанных механических систем с одной степенью свободы. Предполагается, что в каждой из них в отсутствие связи существует семейство периодических движений. Устанавливается, что необходимым условием существования цикла в связанной системе является невырожденность семейства в подсистемах; исключение может быть в одной подсистеме. Находятся структура и конкретный вид связующего управления, решаются задачи существования, устойчивости и естественной стабилизации колебания связанной системы. Показывается, что в цикле происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.

## 2. Связанные механические системы

Рассматриваются слабо связанные механические системы

$$(1) \quad \ddot{x}_s + f_s(x_s) = \varepsilon u_s(x, \dot{x}), \quad s = 1, \dots, n, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где параметр  $\varepsilon$  можно интерпретировать как коэффициент усиления регулятора. При  $\varepsilon > 0$  получается связанная система, в которой наличие малого ненулевого параметра  $\varepsilon$  может приводить к качественным изменениям в поведении механических систем. Функции  $\varepsilon u_s(x, \dot{x})$  действуют как связи-управления. Они замыкают систему на себя: связанная система (1) становится замкнутой системой.

В случае  $\varepsilon = 0$  система (1) распадается на независимые консервативные системы с интегралами энергии

$$E_s \equiv \frac{\dot{x}_s^2}{2} + \int f(x_s) dx_s = h_s (\text{const}), \quad s = 1, \dots, n.$$

Фазовый портрет каждой системы симметричен относительно оси абсцисс; колебания пересекают эту ось в двух различных точках и представляют собой симметричные периодические движения (СПД).

Предполагается, что каждая из систем допускает семейство СПД; решения содержат два параметра  $h_s$  и  $\gamma_s$  и обозначаются как

$$x_s = \varphi_s(h_s, t + \gamma_s), \quad s = 1, \dots, n.$$

Нулевому значению сдвига  $\gamma_s$  начальной точки по времени отвечает в каждой системе четная функция  $x_s = \varphi_s(h_s, t)$ .

Семейство СПД бывает двух типов в зависимости от того, как ведет себя период с изменением энергии. Так, колебания линейного осциллятора имеют один и тот же период. В другом примере период колебаний математического маятника монотонно зависит от начального отклонения маятника от вертикали. Чтобы различать эти типы семейств СПД, будем пользоваться следующим определением для системы с одной степенью свободы.

*Определение 1.* Семейство СПД по параметру  $h$  называется невырожденным, если на нем производная от периода  $T(h)$  по постоянной энергии  $h$  отлична от нуля. СПД невырожденного семейства называется невырожденным.

Вырожденное семейство СПД описывается формулой

$$x_s = A_s \cos \omega_s(t + \gamma_s),$$

где  $A_s$  — амплитуда колебания,  $\omega_s$  — частота.

Для связанной автономной системы сдвиг будет единым для всех подсистем. Без ограничения общности полагается, что траектории в подсистемах пересекают оси абсцисс в момент времени  $t = 0$ . Тогда  $\gamma_s = \gamma$ ,  $s = 1, \dots, n$ .

Рассмотрим систему (1) при малых  $\varepsilon \neq 0$  и запишем условие существования  $T^*$ -периодического решения в первом по  $\varepsilon$  приближении. Получится амплитудное, или бифуркационное, уравнение

$$(2) \quad I \equiv \int_0^{T^*} \sum_{s=1}^n u_s(\varphi_1(h_1, t), \dots, \varphi_n(h_n, t), \dot{\varphi}_1(h_1, t), \dots, \dot{\varphi}_n(h_n, t)) \psi_s dt = 0,$$

где  $\psi_s$  — решение сопряженной линейной системы; для консервативной системы с одной степенью свободы  $\psi_s = \dot{x}_s$  [1].

Выполнение условия (2) приводит к продолжению в первом по  $\varepsilon$  приближении  $T^*$ -периодического решения, которым обладала система при  $\varepsilon = 0$ . Найдем необходимые условия выполнения равенства (2) по частотам в случае двух систем. Для линейных осцилляторов выполнение (2) возможно только тогда, когда их частоты равны:  $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi/T^*$ . Для механических систем с невырожденными семействами СПД необходимым условием будут равенства  $T^* = T_s(h_s(h^*))$ ,  $s = 1, 2$ , где в каждой подсистеме  $T_s = T_s(h_s)$  — зависимость периода от параметра. Наконец, для механических систем с различными типами семейств СПД получается:  $\omega_1 = 2\pi/T^*$  — для вырожденного семейства,  $T^* = T_2(h_2^*)$  — для невырожденного семейства.

При действии автономного управления решение в (1) может быть изолированным периодическим решением автономной системы, т.е. циклом. Достаточное условие существования цикла в слабо связанной системе (1) дается неравенством (см. [1])

$$(3) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} \neq 0,$$

гарантирующим простоту корня амплитудного уравнения.

Пусть необходимые условия по частотам для амплитудного уравнения (2) выполнены. Найдем условия для выполнения неравенства (3) в случае двух механических систем в (1). Если системы содержат вырожденные семейства СПД, то уравнение (2) содержит два независимых друг от друга неизвестных  $A_1$  и  $A_2$ , поэтому простой корень в (2) невозможен и (3) не выполняется. В случае двух невырожденных семейств уравнение (2) составляется относительно одной неизвестной  $h$  и уравнение  $I(h) = 0$  может допускать простой корень. Наконец, когда рассматриваются семейства различных типов, уравнение (2) содержит одну неизвестную  $A_1$ : простой корень уравнения (2) возможен.

Эти рассуждения распространяются на случай произвольного числа механических систем с учетом того, что вырожденное семейство допускается только в одной системе.

*Лемма 1. Цикл в слабо связанной системе (1) существует только в случае, когда все механические системы, за исключением, быть может, одной системы с вырожденным семейством СПД, содержат невырожденные семейства СПД.*

Пусть  $\varepsilon = 0$  и каждая система в (1) допускает невырожденное семейство СПД. Тогда справедлива следующая лемма 2.

*Лемма 2. Если при  $\varepsilon = 0$  в системе (1) содержатся только невырожденные семейства СПД и (1) допускает периодическое движение, то:*

- 1) движение принадлежит к семейству СПД;
- 2) периоды СПД во всех механических системах в (1) возрастают (убывают).

*Доказательство.* При  $\varepsilon = 0$  в (1) получается обратимая механическая система с фазовым портретом, симметричным относительно неподвижного множества  $M = \{x, \dot{x} : \dot{x} = 0\}$ . Поэтому каждое невырожденное СПД системы принадлежит семейству (см., например, [16]). Это семейство для системы с  $n$  степенями свободы содержит в качестве составляющих семейства систем с одной степенью свободы, которые, следовательно, имеют одновременно возрастающие (убывающие) периоды на семействах СПД. Лемма 2 доказана.

Семейство СПД системы (1) при  $\varepsilon = 0$  обозначается через  $\Sigma$ . СПД содержат два скалярных параметра  $h$  и  $\gamma$  и описываются векторной функцией  $\varphi(h, t + \gamma)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ .

### 3. Поиск управления

При доказательстве леммы 2 указывалось, что при  $\varepsilon = 0$  системы с одной степенью свободы в (1) объединяются в обратимую механическую систему с  $n$  степенями свободы, содержащую семейство  $\Sigma$  невырожденных СПД. В случае, когда управления  $u_s(x, \dot{x})$  удовлетворяют условиям

$$(4) \quad u_s(x, \dot{x}) = u_s(x, -\dot{x}),$$

система (1) сохраняет свою принадлежность к классу обратимых механических систем при  $\varepsilon > 0$  и согласно [16] по-прежнему обладает невырожденным семейством СПД.

Таким образом, справедлива лемма 3.

*Лемма 3. Если управления в (1) удовлетворяют условиям (4), то система (1) допускает невырожденное семейство СПД, наследующее монотонную зависимость периода СПД в подсистемах.*

Условия (4) гарантируют симметрию фазового портрета связанной системы (1). Поэтому при конструировании цикла в управляемой системе необходимо нарушать данную симметрию. Пример необходимого для этого управления находится в правой части уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Это управление вполне удовлетворяет условиям (2), (3). При этом отрицательность производной (3) гарантирует существование притягивающего цикла.

Изохронность семейства СПД осциллятора не стала препятствием для обобщения результата Ван дер Поля на семейство невырожденных колебаний. Результат по существованию орбитально асимптотически устойчивого цикла переносится в [1] на общий случай консервативной системы с одной степенью свободы. При этом для одного уравнения стабилизируется колебание управляемой системы, близкой к неуправляемой системе. Тогда для рассматриваемых здесь  $n$  механических систем ставится задача стабилизации колебания всей связанной системы: при отсутствии связи нет самой связанной системы.

Выбор управления основывается на следующих наблюдениях. Для связанной системы управляющие связи должны быть такими, чтобы в случае одной подсистемы переходили в управление, найденное в [1]. В уравнении Ван дер Поля управление представляется диссипацией, действующей в текущей точке цикла. В связанной системе текущая точка единая для всех подсистем. Наконец, требуется выполнение амплитудного уравнения.

В результате находятся управления

$$(5) \quad u_s = (1 - K\|x\|^2) \dot{x}_s, \quad \|x\|^2 = \sum_{s=1}^n x_s^2,$$

где положительное число  $K$  гарантирует выполнение амплитудного уравнения. В связанной системе реализуется колебание, рождающееся из колебания системы (1) при  $\varepsilon = 0$ , т.е. порождающего решения. Поэтому  $K(h)$  будет функцией параметра  $h$ , отвечающего порождающему решению.

Функция  $K(h)$  выбирается так, чтобы амплитудное уравнение

$$\int_0^{T(h^*)} (1 - K(h^*)\|\varphi(h, t)\|^2) \|\dot{\varphi}(h, t)\|^2 dt = 0$$

имело бы корнем число  $h = h^*$ . В результате для  $T^*$ -периодического движения,  $T^* = T(h^*)$ , находится число  $K(h^*)$ , которое вычисляется как отношение интегралов в правой части равенства при  $h = h^*$ . Теперь, рассматривая  $h^*$  как переменную, получим, что

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \|\dot{\varphi}(h, t)\|^2 dt}{\int_0^{T(h)} \|\varphi(h, t)\|^2 \|\dot{\varphi}(h, t)\|^2 dt}.$$

Функция  $K(h)$  становится характеристикой семейства СПД связанной системы, гарантирующей выполнение амплитудного уравнения при всех  $h^*$ . Поэтому для СПД с коэффициентом  $K(h^*)$  амплитудное уравнение имеет корень  $h = h^*$ .

Применение управлений вида (5) обосновывается в [2, 3].

#### 4. Цикл связанной системы

Для найденного связующего управления (5) амплитудное уравнение (2) принимает вид

$$(6) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} (1 - K(h^*)\|\varphi(h, t)\|^2) \|\dot{\varphi}(h, t)\|^2 dt = 0.$$

Вычислим

$$(7) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \chi\nu, \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = \int_0^{T^*} \|\varphi(h^*, t)\|^2 \|\dot{\varphi}(h^*, t)\|^2 dt > 0.$$

*Определение 2. Точка, в которой  $\chi = 0$ , называется критической точкой семейства СПД по характеристике  $K(h)$ .*



С использованием определения 2 формулируется достаточное условие существования цикла связанной системы.

*Теорема 1.* Пусть каждая консервативная система с одной степенью свободы допускает семейство невырожденных СПД, принадлежащее семейству  $\Sigma$  по параметру  $h$  несвязанной системы. Тогда при выборе связующих управлений (5) связанная система в каждой точке, не являющейся критической по характеристике  $K(h)$ , допускает единственный цикл.

*Замечание 1.* Согласно лемме 2 существование семейства  $\Sigma$  гарантируется существованием хотя бы одного СПД системы (1) при  $\varepsilon = 0$ .

*Замечание 2.* В цикле происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.

*Замечание 3.* В случае отдельной системы теорема 1 доставляет условия существования предельного цикла Понтрягина [17].

Теперь обратимся к задаче стабилизации цикла. Система (1), (5) записывается в виде

$$(8) \quad \ddot{x}_s + f_s(x_s) = \varepsilon \Psi \dot{x}_s, \quad \Psi \equiv 1 - K(h^*) \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad s = 1, \dots, n.$$

При этом для  $s$ -й системы справедливо дифференциальное равенство

$$(9) \quad \frac{dE_s}{dt} = \varepsilon \Psi \dot{x}_s^2, \quad s = 1, \dots, n.$$

Следствием равенств (9) будет закон изменения полной механической энергии  $E = \sum_{s=1}^n E_s$  системы из  $n$  консервативных систем с одной степенью свободы

$$(10) \quad \frac{dE}{dt} = \varepsilon \Psi \sum_{s=1}^n \dot{x}_s^2.$$

Из (10) при  $h = h^*$  получается амплитудное уравнение:

$$(11) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} E(h, t) dt = 0.$$

Отсюда с использованием (9) вычисляется приращение  $\Delta E$  энергии  $E$  на отрезке  $[0, T^*]$ :

$$(12) \quad \Delta E = \varepsilon \chi \nu (h - h^*) + o(\varepsilon).$$

Формула (12) справедлива при малых приращениях  $\Delta h = h - h^*$ . Из нее следует, что при  $\chi < 0$  на каждом временном отрезке длиной  $T^*$  знак приращения энергии противоположен знаку приращения  $\Delta h$ . Значит, траектория системы (8) асимптотически приближается к поверхности уровня энергии

$h = h^*$ , отвечающей циклу. При этом происходит бифуркация одной жордановой клетки с нулевым характеристическим показателем (ХП). В результате цикл имеет один нулевой ХП, связанный с произвольностью сдвига  $\gamma$  в решении автономной системы, другой ХП вычисляется по формуле (см. [1])

$$\hat{\lambda}^h = \frac{\varepsilon}{T(h^*)} \frac{dI(h^*)}{dh} + o(\varepsilon).$$

Законы изменения энергии (9) аналогичны закону (10) изменения энергии всей системы. Поэтому сравнением равенств (9) и (10) находятся соотношения

$$(13) \quad \dot{x}_s^2 dE = \sum_{j=1}^n \dot{x}_j^2 dE_s, \quad s = 1, \dots, n,$$

справедливые в точках, где  $\Psi \neq 0$ . На цикле функция  $\Psi(t)$  будет  $T^*$ -периодической и  $\Psi(t) = 0$  в конечном числе точек (двух — для СПД, четырех — для двоякосимметричного периодического движения). Такая же ситуация будет для траекторий в окрестности цикла.

Обратимся к точкам окрестности цикла. Из равенств (13) следует, что изменение энергии  $E_s$  каждой подсистемы в (8) происходит подобно изменению энергии всей системы. В частности, для приращения  $\Delta E_s$  на отрезке  $[0, T(h^*)]$  справедлив закон, аналогичный закону (12). Поэтому в случае  $\chi < 0$  траектория системы (8) по каждой паре переменных  $(x_s, \dot{x}_s)$ , будучи в момент  $t = 0$  в окрестности цикла, при  $t = T^*$  по-прежнему будет находиться в этой окрестности, приближаясь за время  $T^*$  к поверхности  $h = h^*$ . Одновременное во всех парах  $(x_s, \dot{x}_s)$  приближение означает приближение к циклу. Следовательно, применением отображения  $G : 0 \rightarrow T^*$  фазового пространства  $(x, \dot{x})$  на себя в случае  $\chi < 0$  устанавливается орбитальная асимптотическая устойчивость цикла.

Таким образом, справедлива следующая теорема 2.

*Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и цикл связанной системы существует. Тогда при выполнении неравенства  $\chi < 0$  цикл орбитально асимптотически устойчив.*

*Замечание 4.* При действии связующих управлений (5) осуществляется естественная стабилизация цикла связанной механической системы.

## 5. Пример

Рассматриваются два идентичных друг другу слабо связанных математических маятника. Для одного маятника  $\ddot{\varphi} + \sin \varphi = 0$  зависимость  $K(h)$  приводится в [18]: функция  $K(h)$  монотонно стремится к нулю. В случае двух маятников, когда частоты колебаний несвязанных маятников равны друг другу, характеристикой семейства будет согласно определению функция  $K(h)$ , деленная на два. Тогда в связанной системе с управлениями (5) согласно теореме 2 реализуется асимптотически орбитально устойчивый цикл, близкий к колебаниям маятников как одного целого.

## 6. Заключение

Связанные системы интенсивно исследуются в различных областях знаний. Цикл в слабо связанной механической системе возможен, если составляющие его подсистемы обладают невырожденными семействами СПД за исключением, быть может, одной системы с вырожденным семейством СПД. Для решения задачи естественной стабилизации цикла системы подходят связующие управления типа диссипации Ван дер Поля, действующей в каждой текущей точке траектории. В режиме цикла происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // *АиТ.* 2016. № 6. С. 38–46.  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // *АиТ.* 2019. № 11. С. 83–92.  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
3. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с  $N$  степенями свободы // *АиТ.* 2020. № 9. С. 93–104.  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of an  $N$  Degree of Freedom Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
4. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стресса, вызванные кратковременным продольным ударом // *ДАН.* 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.  
*Morozov N.F., Tovstik, P.E.* Transverse Rod Vibrations Under a Short-Term Longitudinal Impact // *Doklady Physics.* 2013. V. 58. No. 9. P. 387–391.
5. *Kovaleva A., Manevitch L.I.* Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2016. V. 320 (15 Apr. 2016). P. 1–8.
6. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7. № 3. С. 411–425.
7. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // *Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation.* 2007. V. 12. No. 5. P. 794–803.
8. *Yakushevich L. V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // *10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications.* Lodz: Left Group. 2009. P. 879–886.
9. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля // *Нелинейная динамика.* 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
10. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which Are Driven by a Third Oscillator // *J. Appl. Nonlin. Dynam.* 2014. V. 3. No. 3. P. 271–282.
11. *Kawamura Y.* Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced Anti-phase Synchronization // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2014. V. 270 (1 Jun. 2014). P. 20–29.

12. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu.* Control of a System of Two Interacting Bodies on a Rough Inclined Plane // Proc. 2020 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEE Xplore: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9140564>.  
<https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140564>.
13. *Galyaev A., Lysenko P.* About Synchronization Problem of Group of Weakly Coupled Identical Oscillators // Proc. 2020 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEE Xplore: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9140581>.  
<https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140581>.
14. *Tkacheva O., Vinogradova M., Utkin A.* The Comparison of Approaches to Estimating Speed From Position Measurements in van der Pol–Duffing System // Proc. 2020 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB).  
IEEE Xplore: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9140593>.  
<https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140593>.
15. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2012.
16. *Тхай В.Н.* О грубых по периодическому движению моделях // *АиТ.* 2009. № 9. С. 162–167.  
*Tkhai V.N.* On models structurally stable in periodic motion // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 9. P. 1584–1589.
17. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // *Журн. эксперим. и теорет. физики.* 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
18. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1959. No. 030022. P. 030022-1–030022-5.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.*

Поступила в редакцию 02.11.2020

После доработки 03.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021

© 2022 г. В.П. ИВАНОВ, д-р техн. наук (vladguc@ipu.ru),  
Д.Д. ТАБАЛИН (corovan@mail.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРЕДИКТИВНЫМ ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ НЕВЯЗОК КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ<sup>1</sup>

Рассматривается формулировка задачи синтеза терминального управления с разделением координат состояния объекта на два типа: медленно меняющиеся координаты, участвующие в краевых условиях, и координаты контура стабилизации. Получено обобщение теоремы о производной невязок краевых условий. На ее основе производится дискретизация системы. Выводится критерий наличия возможности приведения полученной системы к линейной путем замены управления. Полученный результат используется для построения управления с прогнозирующими моделями. Произведено численное моделирование полученного алгоритма для задачи вывода центра масс ступени ракеты-носителя на заданную орбиту на безатмосферном участке.

*Ключевые слова:* терминальное управление, управление с прогнозирующими моделями, управление тангажом ракеты-носителя.

DOI: 10.31857/S0005231022010056

### 1. Введение

Задачи терминального управления возникают во многих областях техники. В ракетодинамике примерами таких задач являются выведение на околоземную орбиту, расходование топлива до его полной выработки из баков, сближение космических аппаратов и др. В указанных примерах задача управления заключается в приведении объекта в заданные конечные состояния при известных начальных условиях. Конечные условия могут определяться в виде значений координат состояния объекта, а также и более сложным образом, например в виде функций от координат состояния.

Современная концепция терминального управления объектами ракетно-космической техники в наиболее полном объеме сформулирована в [1]. Принципиальным элементом способа терминального управления является прогнозирование конечного состояния объекта в виде заданных краевых условий.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00073 А).

Принципы методов прогнозирования в области ракетодинамики рассматривались уже в [2, 3]. Для обзора подхода в области управления линейными системами, см., например, [4]. Применение современных методов управления с прогнозирующей моделью к нелинейным системам подробно рассматривается в [5]. Общая идея метода состоит в том, что задается прогнозирующая модель объекта, для которой находится оптимальное управление в текущий и последующие моменты времени. При этом на реализацию идет только текущее управление, а в следующий момент времени процедура оптимизации повторяется. В публикации [6] для заданного управления в модели прогнозирования определяется производная прогнозируемых значений координат по времени. Методы синтеза алгоритмов управления развивались также в направлении применения оптимизации в реальном времени [7] и придания робастности замкнутой системе [8].

В приведенных выше примерах терминальное управление формулируется как часть общей задачи управления объектом путем выделения в объекте сравнительно медленно протекающих физических процессов, определяющих движение к заданной цели. При этом общее управление декомпозируется на терминальное управление и задачу стабилизации объекта относительно движения к заданной цели. В качестве примера можно привести стабилизацию углового положения ракеты-носителя относительно программы угла тангажа при управлении выведением. Отметим, что управление непосредственно воздействует на ту динамическую часть объекта, которая относится к контуру стабилизации. Синтез терминального управления, как правило, рассматривается независимо от контура стабилизации. При этом координаты объекта, формируемые на выходе контура стабилизации, принимаются в качестве терминального управления.

В данной статье задача синтеза терминального управления рассматривается при условии декомпозиции общей задачи с учетом формального описания динамики объекта в целом, включая контур стабилизации. Суть такого подхода состоит не в том, чтобы учитывать погрешности работы этого контура. Целью такого рассмотрения является учет динамики переходных процессов реакции контура стабилизации на управляющее воздействие. В этом случае идея прогнозирования конечного состояния объекта реализуется для всего динамического тракта системы: от места непосредственного воздействия управления до значений невязок краевых условий. В результате может быть получено дифференциальное уравнение, определяющее в явном виде зависимость невязок от управления.

Полученное дифференциальное уравнение дискретизируется. Для рассмотренного уравнения выводится критерий, при котором это уравнение с точностью до невырожденной замены управления сводится к линейному. Это используется для обобщения результатов для линейных систем, в частности для алгоритма терминального управления в случае отсутствия ограничений на управление. Затем данный алгоритм используется в качестве эвристики для решения задачи управления с учетом ограничений. Производится численное моделирование полученных алгоритмов для задачи управления центром

масс ступени ракеты-носителя на безатмосферном участке путем изменения программы угла тангажа.

Элементы описанного подхода докладывались на [9] и были отмечены в [10].

## 2. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), t), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $u$  — управление, значения которого принадлежат множеству  $U$ .

Здесь предполагается, что решение (1) для любых начальных условий существует и единственно (например, при выполнении условий одной из соответствующих теорем в [11, гл. 1]). Это же предположение используется для всех рассматриваемых в статье систем и не будет в дальнейшем оговариваться отдельно.

Ставится задача терминального управления — перевода системы в состояние  $x$ , удовлетворяющее краевым (граничным) условиям  $\psi$  в момент времени  $T$ :

$$\psi(x_1) : \psi_j(x_j(T)) = 0, \quad j \in L \subset \overline{1, l},$$

$l$  — число краевых условий. Предполагается, что краевые условия накладываются только на координаты  $x_1$ , а граничные условия представляют собой вектор условий для отдельных  $x_{1j}$ . Функция  $\psi$  предполагается дифференцируемой.

Момент времени  $T > t_0$  либо является фиксированным, либо определяется первым моментом выполнения  $p$ -го краевого условия  $\psi_p(x_{1p}) = 0$ .

Координаты  $x_2$  объекта формируются на выходе стабилизирующего контура системы управления. В данном случае работа контура рассматривается только в части переходных процессов реакции на изменение управляющего воздействия. Предполагается, что переходный процесс завершается на интервале, существенно меньшем, чем интервал терминального управления. Ограничением общности является независимость динамики координат состояния  $x_2$  от координат объекта  $x_1$ .

Задачу синтеза терминального управления объектом (1) будем рассматривать в классе систем с прогнозирующей моделью. Данный класс систем рассматривался в [1]. Общий обзор метода представлен, например, в [4, 5].

### 3. Теорема о производной прогнозируемой невязки

Рассмотрим динамическую систему общего вида:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Краевые условия могут накладываться на все координаты  $x_i$ .

*Определение 1.* Назовем прогнозирующей моделью для системы (2) в момент времени  $t$  при управлении  $\hat{u}(t)$  систему вида

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau), \\ \hat{x}(t) = x(t). \end{cases}$$

Обозначим интеграл системы (3), записанной в момент времени  $t$  с начальными условиями  $x(t)$  через  $\hat{x}(\tau|t, x(t))$ . Это обозначение подчеркивает, что  $\hat{x}(\tau|t, x(t))$  зависит от момента прогнозирования и начальных условий прогноза. В дальнейшем изложении будем писать просто  $\hat{x}(\tau|t)$ , опуская  $x$  и подразумевая, что  $\hat{x}(t)$  совпадает с состоянием системы (2) в момент времени  $t$ , или просто  $\hat{x}(\tau)$ , опуская  $t$  и  $\hat{x}(t)$ , когда момент прогнозирования  $t$  ясен из контекста.

*Определение 2.* Прогнозируемой невязкой краевых условий (в силу прогнозирующей модели) будем называть

$$z(t) \equiv \psi(\hat{x}(T|t)),$$

где момент времени  $T$  вычисляется для системы (3) так же, как и для исходной системы (2), т.е. либо фиксирован, либо определяется первым моментом выполнения краевого условия  $\psi_p$ .

*Замечание 1.* В определениях 1 и 2  $\dim \hat{x} = \dim x$ . Аналогичные определения можно сформулировать для  $\dim \hat{x} \neq \dim x$  путем выбора координат  $\hat{x}$ , участвующих в начальных/краевых условиях.

*Замечание 2.* Прогнозируемая невязка краевых условий определена не всегда, в частности при выбранном  $\hat{u}(t)$  условие  $\psi_p(\hat{x}_p) = 0$  может никогда не выполняться. В дальнейшем рассматриваются только те прогнозирующие модели, для которых прогнозируемая невязка краевых условий существует.

Это одно из ограничений области применения рассматриваемых методов — требуется знать  $\hat{u}$ , для которого прогнозируемая невязка существует.

Справедлива теорема 1.

*Теорема 1.* Пусть  $\psi$ ,  $\hat{x}(T|t)$ ,  $T$  — дифференцируемы (по  $x$ ,  $\{x, t\}$  и  $t$  соответственно), тогда



$$(4) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}(T)} \left[ \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) \right].$$

Доказательство теоремы 1 (и следствий из нее) приведено в Приложении.

*Замечание 3.* Теорема 1 не является новой. Аналог теоремы 1 использовался в [6] для решения задачи нетерминального типа.

*Замечание 4.* Для доказательства дифференцируемости  $\hat{x}(T|t)$  может использоваться, например, теорема Люстерника, см., например, [12]. В частности, достаточно существования непрерывной сюръективной  $\hat{f}'$ .

*Следствие 1.* Пусть верны условия теоремы 1 и  $T = \text{const}$ , тогда

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}(T)} \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right).$$

Прогнозируемая невязка зависит от разности  $\frac{d}{dt}(x(t) - \hat{x}(t))$ , т.е. от ошибки прогнозирующей модели, вызванной отличием  $f$  от  $\hat{f}$ .

Для  $T$ , соответствующего  $\psi_p(x_p(T)) = 0$ , при выполнении некоторых дополнительных условий возможно явно вычислить  $\frac{dT}{dt}$ .

*Следствие 2.* Пусть верны условия теоремы 1,  $T$  определяется первым моментом выполнения  $\psi_p(x_p(T)) = 0$  и дополнительно

$$f_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T)) \neq 0, \quad \frac{d\psi_p}{dx_p}(\hat{x}_p(T)) \neq 0.$$

Тогда

$$(5) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}(T)} \left[ \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} - C(\hat{x}(T)) \right] \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right),$$

где

$$(6) \quad C(\hat{x}(T)) = \frac{\hat{f}(\hat{x}(T), \hat{x}(T), T) \frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)}}{\hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{x}(T), T)}.$$

*Замечание 5.* Условие зависимости  $\psi_p$  только от  $x_p$  существенно. Для других координат  $x$  данное требование можно опустить.

Рассмотрим систему (1) с прогнозирующей моделью

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{d\tau} = f_1(\hat{x}_1(\tau), \hat{x}_2(\tau), \tau), \\ \frac{d\hat{x}_2}{d\tau} = 0, \\ \hat{x}(t) = x(t). \end{cases}$$

Прогнозирующую модель (7) можно рассматривать как движение объекта с фиксированным значением  $x_2$ .

После применения теоремы 1 получим

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_1(T)} \left[ \frac{\partial \hat{x}_1(T)}{\partial x_2(t)} f_2(x(t), u(t), t) + \frac{dT}{dt} f_1(\hat{x}_1(T), \hat{x}_2(T), T) \right].$$

Для  $T = \text{const}$ :

$$(8) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_1(T)} \frac{\partial \hat{x}_1(T)}{\partial x_2(t)} f_2(x_2(t), u(t), t).$$

Использование декомпозиции (1) и прогнозирующей модели (7) позволяет получить более простой вид уравнения (4).

#### **4. Дискретизация уравнения для прогнозируемой невязки. Неограниченное управление при сведении задачи к линейной**

Введем обозначение  $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ . Под  $\frac{\partial z}{\partial x_2}$  будем понимать матрицу, на которую в выражении для  $\frac{dz}{dt}$  домножается  $f_2$ . В данных обозначениях (8) примет вид

$$(9) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) f_2(x_2(t), u(t)).$$

Проинтегрируем (9) на малом интервале  $[t; t + \delta t]$ :

$$\begin{aligned} z(t + \delta t) &= z(t) + \int_t^{t+\delta t} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(\tau), \tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = \\ &= z(t) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) \Delta x_2 + o(\delta t). \end{aligned}$$

При малых  $\delta t$  переходим к дискретной системе

$$(10) \quad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_i), t_i) \Delta x_2(t_i).$$

Рассмотрим случай, когда отсутствуют ограничения на возможные значения  $\Delta x_2$ . Будем искать решение терминальной задачи:

$$(11) \quad \{\Delta x_2(t_i)\} : z(t_k) = 0.$$

Запишем (10) для  $z(t_k)$ :

$$(12) \quad z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}) \Delta x_2(t_{k-1}).$$

Пусть  $Q_{k-1}$  — матрица размерности  $m \times n$ , где  $n = \dim z, m \in \mathbb{N}$ . Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Решение задачи

$$\begin{aligned}
 & \{\Delta x_2(t_1), \Delta x_2(t_2), \dots, \Delta x_2(t_{k-2}), Q\} : \\
 & Q_{k-1} z(t_{k-1}) = 0, \\
 & Q_{k-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = 0, \\
 (13) \quad & \text{rank} \left( \begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x(t_{k-1}), t_{k-1}) \end{bmatrix} \right) = \dim z, \\
 & \{\Delta x_2(t_{k-1})\} : \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x(t_{k-1}), t_{k-1}) z(t_k) = 0
 \end{aligned}$$

является решением задачи (11). При этом матрицу  $Q_{k-1}$  (если она существует) можно выбрать в виде

$$(14) \quad Q_{k-1} \equiv K(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = E - \frac{\partial z}{\partial x_2} \left( \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top,$$

где

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}).$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении. Управление  $\Delta x_2$  при этом можно выбирать в виде линейной обратной связи:

$$(15) \quad \Delta x_2(t_{k-1}) = - \left( \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_{k-1}),$$

$z(t_k)$  при данном управлении примет значение

$$(16) \quad z(t_k) = \left( E - \frac{\partial z}{\partial x_2} \left( \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \right) z(t_{k-1}).$$

В выражении (16)  $K$  — линейный оператор относительно  $z(t_{k-1})$ .

*Замечание 6.* Данные выражения предполагают, что матрица  $\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2}$  обратима. Если  $\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \neq 0$ , то воспользуемся результатами из [13]. Управление  $\Delta x_2$  можно выбрать в виде

$$(17) \quad \Delta x_2(t_{k-1}) = - \sum_{i=1}^l \frac{\langle z(t_{k-1}), e_i \rangle}{\lambda_i} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top e_i,$$

$$(18) \quad K = E - \sum_{i=1}^l e_i e_i^\top,$$

где  $e_i$  — ортонормированные собственные векторы оператора  $\frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_i > 0$ . Заметим, что (17) также линейно относительно  $z(t_{k-1})$ .

*Замечание 7.* Полученное управление (17) также является решением задачи минимизации квадрата невязки  $z(t_k)$  при фиксированном  $z(t_{k-1})$ .

В дальнейшем будем пользоваться записью (16).

В случае  $\frac{\partial z}{\partial x_2} \top \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$  управление не оказывает влияния в момент времени  $t_{k-1}$  и  $z(t_k) = z(t_{k-1})$ . Их можно исключить из рассмотрения.

Предположим, что

$$(19) \quad K(x(t_j), t_j) \equiv K(t_j),$$

т.е. линейный оператор  $K$  зависит только от времени  $t_{k-1}$ , а не от всего вектора состояния. Обозначим через  $z_{k-1}$

$$z_{k-1}(t) = K(t_{k-1})z(t).$$

Новая невязка  $z_{k-1}$  представляет собой значение  $z(t_k)$  при управлении (17). Для  $z_{k-1}$  справедливы равенства:

$$(20) \quad \begin{aligned} z_{k-1}(t_{k-1}) &= K(t_{k-1})z(t_{k-1}) = \\ &= K(t_{k-1}) \left( z(t_{k-2}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-2}), t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}) \right), \\ z_{k-1}(t_{k-1}) &= z_{k-1}(t_{k-2}) + \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_2}(x(t_{k-2}), t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}). \end{aligned}$$

Так как (20) имеет вид (12), то для невязки  $z_{k-1}(t_{k-1})$  можно искать решение задачи, аналогичной (11). В результате найдем  $z_{k-2}(t)$ . Процедура может быть продолжена для моментов времени, предшествующих  $t_{k-1}$ , если условие на  $K$  продолжает выполняться. Управление при этом находится исходя из выражений типа (15). Заметим, что в будущие моменты времени управление будет зависеть от, вообще говоря, неизвестных координат объекта, а в текущий момент времени зависит только от текущих координат.

Выясним, для каких систем выполняется (19). Ответ на этот вопрос дает теорема 3.

*Теорема 3.* Для системы (10)  $K(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = K(t_{k-1})$  тогда и только тогда, когда система невырожденной заменой входов сводится к линейной:

$$\exists P_{t_{k-1}}(x, y) \forall x, x_s : \frac{\partial z}{\partial x_2}(x, t_{k-1}) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1})P_{t_{k-1}}(x_s, x),$$

где матрицы  $P_{t_{k-1}}(x, y) \in \mathbb{R}^{\dim \Delta x_2 \times \dim \Delta x_2}$  образуют группу:

$$\begin{aligned} \forall x : P_{t_{k-1}}(x, x) &= I, \\ \forall x, y : P_{t_{k-1}}(x, y)P_{t_{k-1}}(y, x) &= I, \\ \forall x, y, z : P_{t_{k-1}}(y, x)P_{t_{k-1}}(z, y) &= P_{t_{k-1}}(z, x). \end{aligned}$$

Заменой  $\Delta x_2'(t_{k-1}) = P_{t_{k-1}}(x_s, x(t_{k-1}))\Delta x_2(t_{k-1})$  уравнение (10) будет приведено к линейному виду

$$z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1})\Delta x_2'(t_{k-1}).$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении. Замены данного типа производятся для всех будущих и текущего моментов времени.

Для определения управления можно применять рекуррентные выражения для  $K$  и  $z$ :

$$(21) \quad z(t_k) = z_{j-1}(t_{j-1}) = K(t_{j-1})z(t_{j-1}) \quad \forall j \in \overline{2, k},$$

$$(22) \quad \begin{cases} K(t_k) = E, \\ K(t_{j-1}) = \left( E - K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2} \left( \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top K(t_j) \right) K(t_j), \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_j).$$

Эти выражения проверяются непосредственно. В них учтено, что оператор  $K$  есть симметричный ортогональный проектор. Следовательно, в явном виде замену входов  $P$  можно не находить.

Из того что управления находятся из условий

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x_s, t_i)K(t_i)z_i(t_i) = \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x_s, t_i)z(t_k) = 0 \quad \forall i \in \overline{p, k-1},$$

имеет следствие 3.

*Следствие 3. Управляемость системы (10) на интервале  $t_{k-p}, \dots, t_{k-1}$  в случае удовлетворения системой условия (19) в моменты времени  $t_{k-p+1}, \dots, t_k$  эквивалентна полноте ранга матрицы*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_k) & \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1}) & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-p}) \end{bmatrix}$$

для произвольных  $x_s$ . Управление, решающее терминальную задачу (11), при этом можно выбирать исходя из (15).

Обобщением результата публикации [14] служит теорема 4.

*Теорема 4. Пусть управление  $u$  в задаче (1) импульсное в моменты  $t_j$  без ограничений на размер и направление импульса  $\Delta x_2$ . Пусть выполнено условие (19), где  $K$  определяется рекурсивно по формуле (22).*

*Тогда существует управление из  $r \leq \dim(z)$  импульсов, минимизирующее  $z^\top(T)z(T)$ .*

*Следствие 4.* Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда ядро оператора  $K(t_j)$  есть управляемое подпространство невязок, если управление ведется начиная с момента времени  $t_j$ . Если  $K(t_j) = 0$ , то система полностью управляема.

*Замечание 8.* Существенна линейность оператора  $K$ . Для ограниченных импульсов аналогично определенный оператор  $K$  перестанет быть линейным.

## 5. Эвристический алгоритм управления

Воспользуемся теоремой 4 как эвристикой для построения управления с учетом ограничений. В основу возьмем метод управления с прогнозирующими моделями.

Запишем выражение типа (10) для  $z(T)$  через текущее и будущее управление:

$$(23) \quad z(T) = z(t_c) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_c), t_c)\Delta x_2(t_c) + \sum_{i=c+1}^k \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_i), t_i)\Delta x_2(t_i),$$

где  $t_c$  есть текущий момент времени в дискретизированной системе. В выражении (23) отдельно выделены члены для текущего и будущих управлений.

Будем приближать сумму в (23) суммой импульсов в моменты времени  $\{t_p\}$ ,  $p \in \overline{1, I}$ :

$$(24) \quad \sum_{i=c+1}^k \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_i), t_i)\Delta x_2(t_i) \approx \sum_{p=1}^I \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_p), t_p)\Delta x_2(t_p).$$

Обозначив прогнозируемое будущее изменение невязки через  $\Delta_f z$ , получим

$$(25) \quad z(T) - \Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_c), t_c)\Delta x_2(t_c).$$

Текущий же импульс можно найти, обрезав полученный импульс.

В следующий момент дискретизации процедуру следует повторить для нахождения нового управления.

*Замечание 9.* Важно, чтобы будущие импульсы не могли целиком свести невязку в 0 — иначе текущее управление не будет выбрано.

В данной статье для модельной задачи (26) с управлением по тангажу было численно промоделировано с одним будущим управлением в момент времени  $t_1 = (1 - \alpha)t + \alpha T$ . Коэффициент  $\alpha$  был подобран в процессе моделирования.

## 6. Модельная задача управления

Упрощенная модель ступени ракеты-носителя на безатмосферном участке взята из [1, с. 74–75]:

$$(26) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{W\beta}{m_0 + m_1 + m_2} \cos(\nu), \\ \ddot{y} = \frac{W\beta}{m_0 + m_1 + m_2} \sin(\nu) - g, \\ \dot{m} = -\beta, \\ \dot{\nu} = u, \end{cases}$$

где  $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты,  
 $m$  — масса топлива,  
 $m_0$  — масса ступени,  
 $\beta$  — секундный расход топлива,  
 $W$  — скорость истечения топлива,  
 $g$  — ускорение силы притяжения,  
 $\nu$  — угол тангажа.

Координаты  $x, y$  и их производные  $\dot{x}, \dot{y}$  являются координатами  $x_1$  в декомпозиции (1),  $m, \nu$  принадлежат  $x_2$ .

Управление ограничено:

$$(27) \quad \nu_{\min} \leq \nu(t) \leq \nu_{\max}.$$

Данная система рассматривается при фиксированном моменте времени  $T$  и фиксированном  $\beta(t)$  — случай управления только тангажом через производную.

Требуется достижение заданной высоты при нулевой вертикальной скорости:

$$(28) \quad \begin{cases} y(T) = y_k, \\ \dot{y}(T) = 0. \end{cases}$$

Фиксируем  $\nu, \beta$ . Известно [1, с. 304–305], что

$$(29) \quad \begin{cases} \hat{x}(T) = S \cos(\nu), \\ \frac{d\hat{x}}{d\tau}(T) = L \cos(\nu), \\ \hat{y}(T) = S \sin(\nu), \\ \frac{d\hat{y}}{d\tau}(T) = L \sin(\nu), \end{cases}$$

где

$$(30) \quad \begin{cases} t_M \equiv T - t, \\ \tau_f \equiv \frac{m + m_0}{\beta}, \\ L \equiv W \ln \frac{\tau_f}{\tau_f - t_M}, \\ J \equiv \tau_f L - W t_M, \\ S \equiv L t_M - J, \end{cases}$$

$\tau_f$  есть время “полного сгорания” ступени.

Заметим, что согласно (8) достаточно дифференцировать только по начальным условиям, на которые прямо влияет управление.

Матрица частных производных для краевых условий (28) будет иметь вид

$$(31) \quad \begin{bmatrix} S(t) \cos \nu \\ L(t) \cos \nu \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что замена управления

$$\Delta \nu' = \frac{\Delta \nu}{\cos \nu}$$

сводит уравнение к линейному.

## 7. Результаты моделирования

В рамках статьи было произведено численное моделирование системы (26).

Параметры, использованные при моделировании:

$$\begin{cases} t_0 = 0, & T = 388, \\ m_0 = 24\,142, & m(t_0) = 64\,930, \\ v_x(t_0) = 2905, & v_y(t_0) = 1677, \\ \theta(t_0) = \frac{\pi}{6}, & \theta_{\max \text{ speed}} = 0,01, \\ \beta(t) = 167,15, \\ W = 3537, & g = 9,8, \end{cases}$$

где  $-\theta_{\max \text{ speed}} \leq \nu \leq \theta_{\max \text{ speed}}$ .

Частота дискретизации — одна секунда. Считается, что в момент дискретизации все необходимые вычисления производятся мгновенно.

При этом вместо импульсного управления использовалось кусочно-непрерывное, постоянное между точками дискретизации. В последние 10 с симуляции управление фиксируется. Это производится, чтобы избежать вырождения управления вследствие приближения обрабатываемых в алгоритме матриц к вырожденным.



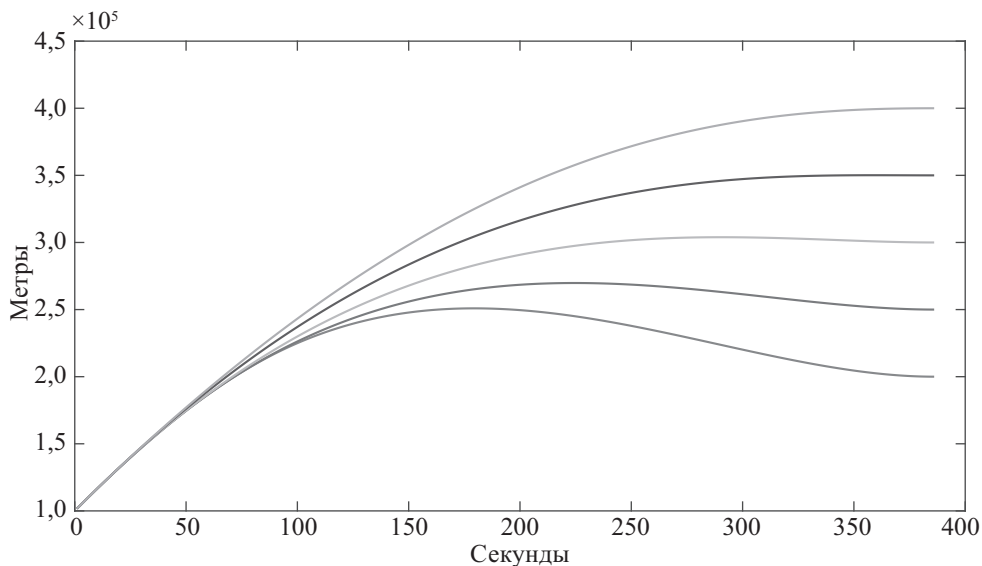


Рис. 1. Зависимость высоты от времени полета.

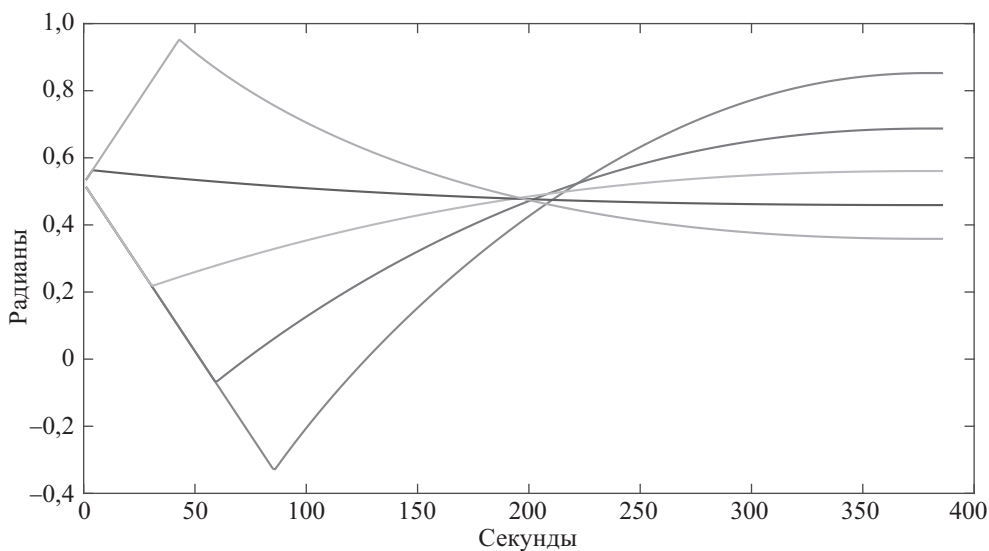


Рис. 2. Зависимость угла тангажа от времени полета.

Способность предложенного алгоритма обеспечивать подъем на различные высоты демонстрируется на рис. 1, где изображены траектории подъема на высоты 200—400 км с шагом 50 км. Соответствующие управления изображены на рис. 2.

Будущий момент времени один, в каждый момент дискретизации вычисляемый по формуле

$$t_I = t + \frac{T - t}{4}.$$

Результаты моделирования

Высота, км	200	250	300	350	400
$v_x(T)$ , м/с	6634,2	6829,6	6927,9	6948,6	6885,4
$z^T(T)z(T)$	0,0030	8,5e-04	1,1e-04	6,5e-06	2,9e-04

Перенабор высоты в процессе управления объясняется высокой начальной вертикальной скоростью.

Конечные значения квадрата невязки и энергетические характеристики (горизонтальной скорости) представлены в таблице.

## 8. Заключение

При терминальном управлении объектами ракетно-космической техники, например при управлении вектором тяги в задаче выведения на околоземную орбиту, в общем движении объекта выделяются два класса взаимосвязанных процессов с существенно различающимися динамическими характеристиками. Первый класс процессов характеризуется уравнениями с медленно изменяющимися координатами состояния, на которые накладываются краевые условия. Ко второму классу относятся сравнительно быстро изменяющиеся координаты, которые негативно влияют на динамику объекта. При этом управление непосредственно воздействует на производные этих координат.

При рассмотрении общих уравнений движения объекта получено обобщение теоремы о производной прогнозируемой невязки краевых условий (теорема 1 и ее следствия). Проведена дискретизация уравнения путем интегрирования дифференциальных уравнений для производных невязок на малом интервале затухания реакции объекта на изменение управления. Разностные уравнения непосредственно связывают невязку с импульсами управляющих воздействий.

Сформулирована задача синтеза импульсного терминального управления из условий нулевой невязки и минимизации квадратичного критерия. Развита процедура синтеза и получены алгоритмы импульсного терминального управления для систем, сводящихся к линейным. Работоспособность предложенных алгоритмов была продемонстрирована на модельной задаче терминального управления тангажем ступени ракеты-носителя на безатмосферном участке.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Доказательство теоремы 1.

По формуле полной производной

$$(II.1) \quad \frac{d\hat{x}(T)}{dt} := \frac{d\hat{x}(T|t, x(t))}{dt} = \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial T} \frac{dT}{dt}.$$

Частные производные будут иметь вид

$$\frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial T} = \hat{f}(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T),$$

$$(II.2) \quad \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} = E + \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau,$$

$$\frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau.$$

Воспользуемся формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = \hat{x}(T) - \hat{x}(s).$$

Дифференцируя по  $s$  внутри одного прогноза (помня, что внутри одного прогноза  $T = \text{const}$ ), получим

$$(II.3) \quad \frac{d}{ds} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = -\hat{f}(\hat{x}(s), \hat{u}(s), s).$$

Распишем  $\frac{d}{ds} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau$  через формулу полной производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}(s)} \left( \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau \right) \frac{d\hat{x}(s)}{ds} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Выразив  $\frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau$  и воспользовавшись (II.3), получим

$$(II.4) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = \\ &= - \left( E + \frac{\partial}{\partial \hat{x}(s)} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau \right) \hat{f}(\hat{x}(s), \hat{u}(s), s). \end{aligned}$$

Заметим, что (II.4) верна для любого  $s$  из интервала  $[t; T]$ , в частности для  $s = t$ , и соответственно  $\hat{x}(s)|_{s=t} = \hat{x}(t) = x(t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = - \left( E + \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau \right) \hat{f}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t).$$

Подставим результат в (П.1), воспользовавшись (П.2):

$$(П.5) \quad \frac{d\hat{x}(T|t)}{dt} = \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}(\hat{x}(T), \hat{u}(T)).$$

Формула (4) получается из (П.5) дифференцированием сложной функции  $\psi(\hat{x}(T|t))$ . Теорема 1 доказана.

*Доказательство следствия 2.*

$$(П.6) \quad \frac{dz_p(T|t)}{dt} = \frac{d\psi_p}{d\hat{x}_p(T)} \left[ \frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)} \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) \right],$$

где производная  $\frac{d\psi_p}{d\hat{x}_p(T)}$  полная из условия зависимости  $p$ -го краевого условия только от  $p$ -й координаты. Также заметим, что эта производная является числом.

По условию определения  $T : \psi_p(\hat{x}_p(T)) = 0$ , следовательно,

$$(П.7) \quad \frac{dz_p(T|t)}{dt} = 0.$$

Объединив (П.6), (П.7) и сократив на  $\frac{d\psi_p}{d\hat{x}_p}(\hat{x}_p(T)) \neq 0$ , получим

$$\frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)} \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) = 0.$$

Выразим производную  $T$  при  $\hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) \neq 0$ :

$$(П.8) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T)} \frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)} \left( f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right).$$

Подстановка (П.8) в (4) приводит к (5). Следствие 2 доказано.

*Доказательство теоремы 2.*

Пусть найдены  $\{\Delta x_2(t_1), \Delta x_2(t_2), \dots, \Delta x_2(t_{k-2}), \Delta x_2(t_{k-1}), Q\}$ , удовлетворяющие условиям (13). Рассмотрим

$$Q_{k-1} z(t_k) = Q_{k-1} \left( z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2(t_{k-1}) \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \end{bmatrix} z(t_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица  $\begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \end{bmatrix}$  имеет полный ранг, то  $z(t_k) = 0$ . Управление  $\Delta x_2$  находится из равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_k) = 0 = \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2.$$

Проверим, что если существует  $Q_{k-1}$ , удовлетворяющее условиям (2), то этим условиям также удовлетворяет  $K$ , определенное по (18). Рассмотрим  $\left(K \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) \left(K \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^\top$ :

$$\begin{aligned} K \frac{\partial z}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^\top &= \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top = \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) = \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top - \sum_{i=0}^l \lambda_i e_i e_i^\top. \end{aligned}$$

Для любой матрицы  $A$  верно  $AA^\top = \sum_{i=0}^l \lambda_i e_i e_i^\top$ . Следовательно,  $K \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ .

Покажем, что  $K$  удовлетворяет ранговому условию. Так как  $K$  ортогональна  $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ , то

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} K \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(K) + \text{rank} \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = n - l + \text{rank} \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \geq n.$$

Условие  $Kz(t_k) = 0$  следует из того, что управление  $\Delta x_2$  минимизирует квадрат невязки. Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.*

Пусть  $K(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = K(t_{k-1})$ . Заметим, что

$$\ker K(t_{k-1}) = \text{Im} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}).$$

Следовательно, образ  $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1})$  не зависит от  $x(t_{k-1})$ . Фиксируем  $x_s, x$ . Выберем  $P_{t_{k-1}}(x_s, x)$ , отображающее векторы ядра  $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x, t_{k-1})$  в векторы ядра  $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1})$  и производящее аналогичное отображение для векторов из образа, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}(x, t_{k-1}) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1}) P_{t_{k-1}}(x_s, x).$$

При  $x = x_s$  можно выбрать  $P_{t_{k-1}}(x, x) = I$ . Если определено  $P_{t_{k-1}}(x, y)$ , то  $P_{t_{k-1}}(y, x)$  можно определить как обратную к ней матрицу. Если определены  $P_{t_{k-1}}(y, x), P_{t_{k-1}}(z, y)$ , то можно определить  $P_{t_{k-1}}(x, z) = P_{t_{k-1}}(y, x) P_{t_{k-1}}(z, y)$ .

Достаточность проверяется непосредственно. Теорема 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сухарулдзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011.
2. *Haussermann W.* Description and Performance of the Saturn Launch Vehicle's Navigation, Guidance, and Control System // 3rd Int. IFAC Conf. on Automatic Control in Space. Toulouse. France. 1970. V. 3. P. 275–312.
3. *Петров Б.Н., Портнов-Соколов Ю.П., Андриенко А.Я., Иванов В.П.* Бортовые терминальные системы управления. М.: Машиностроение, 1983.
4. *Веремей Е.И., Еремеев В.В.* Введение в задачи управления на основе предсказаний // Всероссийская науч. конф. “Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB”. М.: 2004. С. 98–115.
5. *Grüne L., Pannek J.* Nonlinear model predictive control. Theory and Algorithms. Springer, 2011.
6. *Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А.* Применение методов прогнозирования в задачах синтеза систем автоматического управления // VIII Всесоюзное совещание по проблемам управления. М.: 1980. Т. 1. С. 32–34.
7. *Klaučo M., Kalúz M., Kvasnica M.* Real-time Implementation Of an Explicit MPC-based Reference Governor for Control of a Magnetic Levitation System // Control Engineering Practice. 2017. V. 60. No. 3. P. 99–105.
8. *Langson W., Chrysochoos I., Rakovic S.V., Mayne D.Q.* Robust Model Predictive Control Using Tubes // Automatica. 2004. V. 40. No. 1. P. 125–133.
9. *Табалин Д.Д.* Детерминированный синтез алгоритмов терминального управления с прогнозированием невязок краевых условий // Тезисы на международном научном форуме “Ломоносов”. П. математика. С. “Вычислительная математика и кибернетика”. Матер. Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2020”.
10. *Табалин Д.Д.* О терминальной задаче с прогнозированием невязок краевых условий // Хроника доклада на семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Журн. Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1138–1139.
11. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory Of Ordinary Differential equations. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1955.
12. *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. № 6 (216).
13. *Balakrishnan A.V.* An Operator Theoretic Formulation of a Class of Control Problems and a Steepest Descent Method of Solution // J.S.I.A.M. Control. Ser. A. Publ. 1963. V. 1. No. 2. P. 109–127.
14. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.*

Поступила в редакцию 26.05.2021

После доработки 08.10.2021

Принята к публикации 15.10.2021

© 2022 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com),  
Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@inbox.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ТЕЛЕЖКИ С ОБРАТНЫМ МАЯТНИКОМ

Рассматривается задача стабилизации движущейся вдоль прямой тележки с установленным на ней перевернутым маятником. Цель управления — стабилизировать тележку в заданной целевой точке так, чтобы при этом маятник находился в верхнем вертикальном положении. Основная трудность, связанная с решением данной задачи, заключается в том, что две подсистемы (тележка и маятник) должны быть стабилизированы одновременно с помощью одного управления. Предлагается новый закон управления, основанный на введении эталонной системы второго порядка, траектория движения которой принимается в качестве целевой для тележки с маятником. С помощью расширения эталонной системы до 4-го порядка и введения алгебраического условия, связывающего две системы, находится целевая траектория в четырехмерном фазовом пространстве исходной системы и строится закон управления, обеспечивающий асимптотическое стремление траектории замкнутой системы к целевой. Полученный в работе закон управления применим к системам с произвольным соотношением масс маятника и тележки, так как замкнутая система не зависит от массовых характеристик системы. Найдена область значений параметров системы, при которых линеаризованная система устойчива. Изложение иллюстрируется численными примерами, демонстрирующими эффективность предлагаемого управления.

*Ключевые слова:* стабилизация, тележка с обратным маятником, локальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231022010068

### 1. Введение

Тележка с обратным маятником — классический пример нелинейной неустойчивой системы. Модель рассматривалась во множестве работ по теории управления и использовалась как тестовый пример при апробации новых идей и подходов, разработанных для стабилизации неминимально фазовых аффинных систем, в частности систем, описывающих движение велосипеда, моноцикла, сигвея и т.п. В линейном приближении задача подробно обсуждалась в книге Ю. Неймарка [1]. Большинство обсуждаемых в литературе нелинейных законов управления основаны на представлении системы в виде совокупности двух связанных подсистем с разнотемповой динамикой: подсистемы с быстрой динамикой (маятник) и подсистемы с медленной динамикой (тележка). При этом можно выделить три различных подхода, используемых почти во всех работах по этой тематике.

Первый подход [2] основан на оптимальной стабилизации маятника по быстродействию, при этом стабилизация тележки в нужной точке достигается введением силы вязкого трения, которая не позволяет тележке разгоняться. Если эта сила равна нулю, как в рассматриваемом в настоящей статье случае, стабилизация тележки вообще не гарантируется, несмотря на стабилизацию маятника. Дальнейшее развитие этого подхода можно найти в [3].

Идея второго подхода [4] заключается в выделении “многообразия внутреннего равновесия” (internal equilibrium manifold). Ищется такой закон управления, который приводит систему в малую окрестность многообразия и обеспечивает ее движение в этой окрестности. Предположение о более быстрой динамике маятника по сравнению с динамикой тележки позволяет задавать многообразию с помощью алгебраического уравнения, связывающего отклонение маятника с позицией и скоростью тележки. Похожий прием в упрощенном виде применялся позднее в [5, 6]. В [5] ставится задача глобальной оптимизации при ограниченном ресурсе управления и предлагается комбинированный закон управления, когда при больших начальных отклонениях для попадания в область, где стабилизация может быть гарантирована, применяется раскачивание маятника. В [6] указанный подход обобщается на случай, когда параметры системы известны неточно, и предлагается робастный вариант закона управления.

Разработанный Тилом третий подход [7] применим к достаточно широкому классу нелинейных систем, представимых в блочном виде, где одна из подсистем асимптотически устойчива при нулевой динамике второй подсистемы (feedforward form), и основан на применении теоремы о малом параметре усиления [7]. Основная идея данного подхода применительно к рассматриваемой системе заключается в том, что если есть глобальный закон управления маятником, то всегда можно построить локальный закон управления тележкой. На этих же идеях основаны работы [8, 9]. Основной недостаток данного подхода заключается в том, что стабилизация достигается только для достаточно узкой локальной области по переменным, отвечающим за позицию тележки. С другой стороны, если, наоборот, потребовать глобальную стабилизацию тележки, будет сужена гарантированная область устойчивости по переменным, отвечающим за положение маятника.

Множество законов управления, предложенных для рассматриваемой системы, не исчерпывается непрерывными законами. Так, в [10] для стабилизация системы применяется разрывный закон управления на скользящих режимах. Автор приводит исходную систему с помощью обратимой нелинейной замены переменных к регулярной форме, содержащей управление только в последнем уравнении. В результате синтезируется закон управления для новой системы, содержащий как непрерывную (отвечающую за компенсацию внутренней динамики маятника), так и разрывную компоненты (гарантирует выход и скольжение системы по нелинейной поверхности в 4-х мерном фазовом пространстве для некоторого множества начальных условий).

Основной недостаток всех вышеперечисленных работ — отсутствие конструктивного метода выбора параметров в законе управления, гарантирую-



щих хотя бы локальную стабилизацию. Как правило, авторы ограничиваются достаточно общими утверждениями о существовании таких параметров.

В настоящей работе предлагается новый гладкий нелинейный закон управления, основанный на введении более простой, эталонной, системы второго порядка. Эталонная система стабилизируется в целевой точке с помощью аналитически заданного ограниченного управления, обеспечивающего желаемые характеристики переходного процесса. Траектория эталонной системы принимается в качестве целевой для тележки с маятником, и ищется такое управление, которое обеспечит движение тележки по траектории, асимптотически приближающейся к целевой траектории. Синтезированный в работе закон управления применим к системам с произвольным соотношением масс маятника и тележки, так как замкнутая система не зависит от массовых характеристик системы. Проведен исчерпывающий анализ линеаризованной замкнутой системы и определена область значений параметров закона управления, гарантирующих локальную стабилизируемость системы.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации движущейся без проскальзывания колес вдоль прямой тележки массы  $M$  с установленным на ней перевернутым маятником массы  $m$ . Для простоты будем считать маятник математическим и пренебрежем трением. Координату центра тележки обозначим через  $x$ , а угловое отклонение маятника от вертикальной оси — через  $\phi$  (рис. 1). Будем считать положительным угол, отсчитываемый от верхнего положения маятника в направлении по часовой стрелке. Уравнения движения системы хорошо известны (например, [5, 10]):

$$(1) \quad \mu \ddot{x} + ml\ddot{\phi} \cos \phi - ml\dot{\phi}^2 \sin \phi = U,$$

$$(2) \quad ml\ddot{x} \cos \phi + ml^2 \ddot{\phi} - mgl \sin \phi = 0.$$

Здесь  $\mu = M + m$ ,  $l$  — длина подвеса маятника и  $U$  — действующая на тележку управляющая сила. Будем считать, что в начальный момент отклонение

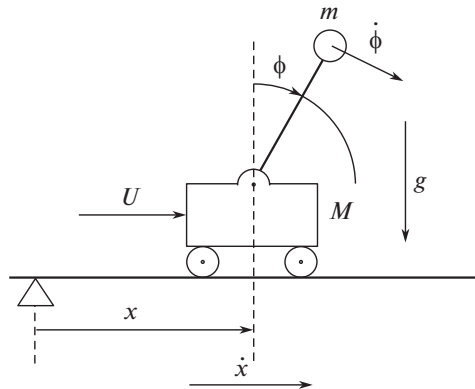


Рис. 1. Тележка с обратным маятником.

маятника ограничено прямым углом, т.е.  $|\phi(0)| < \pi/2$ . Случай большего отклонения сводится к рассматриваемому предварительным применением специального закона управления, позволяющего перевести маятник из произвольного начального положения в указанную область (например, с помощью раскачивания, как в [5] в случае ограниченного управления).

Цель управления — стабилизировать тележку в заданной целевой точке на линии так, чтобы при этом маятник находился в верхнем вертикальном положении. Без потери общности будем считать, что целевая точка совпадает с началом координат. Основная трудность, связанная с данной задачей, заключается в том, что две подсистемы (тележка и маятник) должны быть стабилизированы одновременно с помощью одного управления.

Рассмотрим также более простую задачу стабилизации в начале координат тележки массы  $\mu = M + m$  без маятника, которую будем называть *эталонной системой*, с помощью заданной управляющей силы  $U_1(w, \dot{w})$  (будем использовать обозначение  $w$  для координаты центра тележки, чтобы отличать эталонную систему от исходной):

$$(3) \quad \mu \ddot{w} = U_1(w, \dot{w}), \quad w(0) = x(0), \quad \dot{w}(0) = \dot{x}(0).$$

Относительно функции  $U_1(w, \dot{w})$  предполагаем, что она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям  $U_1(0, 0) = 0$  и  $\partial U_1 / \partial w(0, 0) < 0$ ,  $\partial U_1 / \partial \dot{w}(0, 0) < 0$ . Будем также полагать, что управление  $U_1$  и скорость эталонной системы ограничены:

$$|U_1(w, \dot{w})| \leq U_{\max}, \quad \forall w, \dot{w}, \quad |\dot{w}(t)| \leq V_{\max} \quad \forall t \geq 0.$$

Конкретный вид функции  $U_1$  обсуждается в конце статьи в разделе 5. В настоящий момент достаточно знать, что она удовлетворяет сформулированным выше условиям, из которых, в частности, следует, что начало координат является положением устойчивого равновесия системы (3), в окрестности которого функция  $U_1(w, \dot{w})$  аппроксимируется линейной функцией.

Цель введения эталонной системы — определить для тележки с маятником некоторую “желаемую” (целевую) траекторию, которая задается неявно управлением  $U_1$ , и свести задачу к нахождению такого управления  $U$ , которое обеспечит движение тележки в начало координат по траектории, асимптотически приближающейся к желаемой. Максимальная скорость системы и управляющая сила на практике всегда ограничены. В настоящей работе ограничения на управление и скорость при синтезе закона управления не вводились, однако учитывались при планировании траектории: введение ограничений при стабилизации эталонной системы позволяет получить “разумную” целевую траекторию, которая может быть реализована (за исключением, быть может, некоторого начального участка) исходной системой с заданными ограниченными управлением и скоростью. Параметры  $U_{\max}$  и  $V_{\max}$  будут также использованы при приведении уравнений движения системы к безразмерной форме.

### 3. Безразмерная модель

Перейдем к безразмерным переменным. В отличие от большинства посвященных решению данной задачи работ, где в качестве масштаба времени принимается период колебаний маятника (см., например, [4, 5, 7, 8]), в настоящей работе в качестве масштаба берется величина  $l/V_{\max}$ , и безразмерные переменные вводятся как

$$(4) \quad \tilde{t} = tV_{\max}/l, \quad \tilde{x} = x/l, \quad \tilde{\phi} = \phi.$$

Производные по времени в размерных и безразмерных переменных связаны формулами

$$(5) \quad \dot{x} = V_{\max} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \quad \ddot{x} = \frac{V_{\max}^2}{l} \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{V_{\max}}{l} \frac{d\phi}{d\tilde{t}}, \quad \ddot{\phi} = \frac{V_{\max}^2}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\tilde{t}^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1), (2) и деля первое уравнение на  $\mu V_{\max}^2/l$ , а второе на  $mV_{\max}^2$ , получаем уравнения системы в безразмерном виде:

$$(6) \quad \ddot{\tilde{x}} + \frac{m}{\mu} \ddot{\tilde{\phi}} \cos \tilde{\phi} - \frac{m}{\mu} \dot{\tilde{\phi}}^2 \sin \tilde{\phi} = \tilde{U},$$

$$(7) \quad \ddot{\tilde{x}} \cos \tilde{\phi} + \ddot{\tilde{\phi}} - \tilde{\omega}_0^2 \sin \tilde{\phi} = 0,$$

где  $\tilde{\omega}_0$  – безразмерная круговая частота маятника и  $\tilde{U}$  – безразмерное управление,

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{l}{V_{\max}} \equiv \frac{\sqrt{gl}}{V_{\max}}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\mu g} \frac{gl}{V_{\max}^2} \equiv \frac{Ul}{\mu V_{\max}^2}.$$

Уравнение эталонной системы (3) и ограничения при переходе к безразмерной записи принимают вид:

$$\ddot{\tilde{w}} = \tilde{U}_1, \quad |\dot{\tilde{w}}(t)| \leq 1, \quad |\tilde{U}_1(\tilde{w}, \dot{\tilde{w}})| \leq \tilde{U}_{\max}, \quad \tilde{U}_{\max} = \frac{U_{\max}l}{\mu V_{\max}^2}.$$

Далее в статье все уравнения приводятся в безразмерном виде и, чтобы избежать громоздкости, тильду над символами опускаем.

Разрешая систему (6), (7) относительно старших производных, получим

$$(8) \quad \ddot{x} = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{m}{\mu} \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{m}{\mu} \omega_0^2 \sin \phi \cos \phi + U \right],$$

$$(9) \quad \ddot{\phi} = \frac{1}{\gamma} \left[ -\frac{m}{\mu} \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + \omega_0^2 \sin \phi - \cos \phi \cdot U \right],$$

где

$$(10) \quad \gamma \equiv \gamma(\phi) = 1 - \frac{m}{\mu} \cos^2 \phi.$$

## 4. Синтез стабилизирующего управления

### 4.1. Замена переменных

Сделаем замену переменных в  $\phi$ -подсистеме и запишем уравнения (8)–(9) в виде системы уравнений первого порядка. Для этого введем новые переменные состояния

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \omega_0^2 \tan \phi, \quad x_4 = \omega_0^2 \dot{\phi} / \cos^2 \phi$$

и обозначение  $X = [x_1, \dots, x_4]$ . В новых переменных (для компактности записи здесь и далее будем применять смешанные обозначения, т.е. наряду с новыми переменными в правых частях уравнений использовать старые) система (8)–(9) принимает вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{m}{\mu} \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{m}{\mu} \omega_0^2 \sin \phi \cos \phi + U \right], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= f_\phi(\phi, \dot{\phi}) + g_\phi(\phi)U, \end{aligned}$$

где, с учетом формулы  $\dot{x}_4 = \omega_0^2(\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}^2 \tan \phi) / \cos^2 \phi$ ,

$$f_\phi(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\omega_0^2}{\gamma \cos \phi} \left[ x_3 + \frac{\dot{\phi}^2 \tan(\phi)}{\cos \phi} \left( 2\gamma - \frac{m}{\mu} \cos^2 \phi \right) \right], \quad g_\phi(\phi) = -\frac{\omega_0^2}{\gamma \cos \phi}.$$

### 4.2. Идея подхода

Так как исходная система имеет четвертый порядок, запишем уравнения эталонной системы также в виде системы четвертого порядка:

$$(12) \quad \dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = w_3, \quad \dot{w}_3 = w_4, \quad \dot{w}_4 = \ddot{U}_1,$$

где  $w_1$  и  $w_2$  – координата и скорость,  $w_3$  и  $w_4$  – зависимые переменные,

$$(13) \quad w_3 = U_1(w_1, w_2), \quad w_4 = \dot{U}_1(w_1, w_2),$$

а  $\dot{U}_1$  и  $\ddot{U}_1$  – производные по времени функции  $U_1$  в силу системы (3). Решение системы (12) будет решением (3) только при фиксированных начальных условиях для третьей и четвертой переменных, а именно при  $w_3(0) = U_1(w_1(0), w_2(0))$  и  $w_4(0) = \dot{U}_1(w_1(0), w_2(0))$ .

Наряду с (12) рассмотрим еще одну систему (будем называть ее *возмущенной эталонной системой*):

$$(14) \quad \dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = w_3, \quad \dot{w}_3 = w_4, \quad \dot{w}_4 = \ddot{U}_1 + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2,$$

где  $\beta_1, \beta_2 > 0$  и

$$\delta_1 = U_1(w_1, w_2) - w_3, \quad \delta_2 = \dot{U}_1(w_1, w_2) - w_4.$$

Здесь  $w_3$  и  $w_4$  – независимые переменные, которые могут принимать произвольные начальные значения. Решение системы (14) с начальными условиями  $w_i(0) = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , будем называть *целевой траекторией* для исходной системы.

Будем искать такое управление  $U$  в исходной системе, при котором правые части четвертых уравнений исходной и эталонной систем совпадают при подстановке  $x_i$  вместо  $w_i$ :

$$f_\phi(\phi, \dot{\phi}) + g_\phi(\phi)U = \ddot{U}_1(x_1, x_2) + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2.$$

Подставляя правые части выражений для функций  $f_\phi$  и  $g_\phi$  в левую часть уравнения, находим:

$$(15) \quad U = x_3 + \frac{\dot{\phi}^2 \tan(\phi)}{\cos \phi} \left( 2\gamma - \frac{m}{\mu} \cos^2 \phi \right) - \frac{1}{\omega_0^2} \gamma \cos \phi \left[ \ddot{U}_1(x_1, x_2) + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 \right],$$

где

$$(16) \quad \delta_1 = U_1(x_1, x_2) - x_3, \quad \delta_2 = \dot{U}_1(x_1, x_2) - x_4.$$

Подставляя найденное управление  $U$  в (11), получаем уравнения замкнутой системы в виде

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \frac{2\dot{\phi}^2 \tan(\phi)}{\cos \phi} - \frac{1}{\omega_0^2} \cos \phi (\ddot{U}_1 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \ddot{U}_1 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2, \end{aligned}$$

отличающиеся от уравнений возмущенной эталонной системы только правой частью второго уравнения. Из вида правой части (17) следует, что поведение системы, замкнутой управлением (15), не зависит от массовых характеристик системы и определяется одним параметром  $\omega_0$  и выбранной функцией  $U_1$ .

Обратная связь (15) получена с помощью эвристических соображений, так что предыдущие рассуждения не являются доказательством устойчивости замкнутой системы (17). В следующем разделе докажем, что функция  $U_1$  и параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$  могут быть выбраны так, чтобы система (17) была локально устойчива, и найдем область значений параметров, гарантирующих устойчивость линеаризованной системы.

#### 4.3. Локальная устойчивость замкнутой системы

Для доказательства локальной устойчивости линеаризуем систему (17) в малой окрестности начала координат четырехмерного пространства состояний. Согласно предположению функция  $U_1(x_1, x_2)$  линейна в окрестности нуля:  $U_1(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + o(x_1, x_2)$ , откуда следует, что матрица линеаризованной системы зависит от пяти параметров:  $\omega_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Ограничим

выбор коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  условием  $\alpha_1^2 \geq 4\alpha_2$ , при выполнении которого начало координат в пространстве переменных  $x_1, x_2$  будет положением равновесия типа узел, что, в свою очередь, обеспечит монотонное приближение эталонной системы к целевой точке. Далее, чтобы уменьшить количество параметров, ограничимся случаем вырожденного узла, взяв функцию  $U_1(x_1, x_2)$  вида

$$(18) \quad U_1 = -\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2 + o(x_1, x_2).$$

Аналогично будем выбирать  $\beta_1$  и  $\beta_2$  из однопараметрического семейства коэффициентов:  $\beta_1 = \rho^2$  и  $\beta_2 = 2\rho$ ,  $\rho > 0$ , сведя, таким образом, количество параметров до трех:  $\omega_0$ ,  $\lambda$  и  $\rho$ .

Дифференцируя (18) в силу системы (3), получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -\lambda^2 \dot{x}_1 - 2\lambda \dot{x}_2 + \frac{\partial o}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial o}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= 2\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2 - \lambda^2 \frac{\partial o}{\partial x_2} x_1 + \left( \frac{\partial o}{\partial x_1} - 2\lambda \frac{\partial o}{\partial x_2} \right) x_2 + o(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Так как (по определению функции  $o(x_1, x_2)$ )  $\partial o / \partial x_i \rightarrow 0$  при  $x_i \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2$ , получаем

$$\dot{U}_1 = 2\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2 + o(x_1, x_2).$$

Аналогично дифференцируя второй раз в силу системы, находим

$$\ddot{U}_1 = -3\lambda^4 x_1 - 4\lambda^3 x_2 + o(x_1, x_2).$$

Отсюда правая часть четвертого уравнения принимает в окрестности начала координат вид

$$\ddot{U}_1 + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \approx W_1 x_1 + W_2 x_2 - \beta_1 x_3 - \beta_2 x_4,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial \ddot{U}_1}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} = -\lambda^2 (\beta_1 - 2\beta_2 \lambda + 3\lambda^2), \\ W_2 &= \frac{\partial \ddot{U}_1}{\partial x_2} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \beta_2 \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} = -\lambda (2\beta_1 - 3\beta_2 \lambda + 4\lambda^2). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$(19) \quad \xi = \rho/\lambda, \quad s = (\lambda/\omega_0)^2.$$

Оставляя линейные члены в (17) и пренебрегая членами более высокого порядка, после несложных преобразований получим зависящую от двух параметров линеаризованную систему

$$(20) \quad \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\lambda^2 c_1(\xi) & s\lambda c_2(\xi) & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^4 c_1(\xi) & -\lambda^3 c_2(\xi) & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda\xi \end{pmatrix},$$

где

$$(21) \quad c_1(\xi) = (\xi - 3)(\xi - 1), \quad c_2(\xi) = 2(\xi - 2)(\xi - 1).$$

Пусть  $\tilde{\nu}$  – собственное значение матрицы  $A$ . Нормируя его на  $\lambda$ ,  $\tilde{\nu} = \lambda\nu$ , получаем характеристический полином линеаризованной системы в виде

$$(22) \quad P(\nu) = \det(A - \tilde{\nu}I) = \begin{vmatrix} -\lambda\nu & 1 & 0 & 0 \\ s\lambda^2c_1 & s\lambda c_2 - \lambda\nu & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda\nu & 1 \\ -\lambda^4c_1 & -\lambda^3c_2 & -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi - \lambda\nu \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda\nu \begin{vmatrix} s\lambda c_2 - \lambda\nu & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & -\lambda\nu & 1 \\ -\lambda^3c_2 & -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi - \lambda\nu \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} s\lambda^2c_1 & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & -\lambda\nu & 1 \\ -\lambda^4c_1 & -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi - \lambda\nu \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 [\nu^4 + \nu^3(2\xi - sc_2(\xi)) + \nu^2(\xi^2 - sc_1(\xi)) + \nu c_2(\xi) + c_1(\xi)].$$

Отметим, что устойчивость характеристического полинома, а следовательно, и линеаризованной системы, зависит только от двух параметров  $s$  и  $\xi$ , определенных формулой (19), а так как  $s$  и  $\xi$  не зависят ни от масс маятника и тележки, ни от их отношения, то и область устойчивости не зависит от массовых характеристик исходной системы. Анализ устойчивости полинома, результат которого сформулирован в следующей теореме, приведен в Приложении.

*Теорема. Линеаризованная система (20) устойчива при любых  $s$  и  $\xi$ , принадлежащих области*

$$\Omega = \{3 < \xi < \infty, 0 < s < s_{\max}(\xi)\},$$

где

$$(23) \quad s_{\max}(\xi) = \frac{\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2}{\xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)}.$$

Из теоремы следует, что найдется окрестность нуля в 4-мерном пространстве такая, что система (17) (система (11), замкнутая обратной связью (15)) устойчива при любом принадлежащем ей начальном векторе  $X(0)$ .

Легко видеть, что  $s_{\max}(\xi)$  – монотонно убывающая функция при  $\xi > 3$ . Кривая  $s_{\max}(\xi)$  изображена на рис. 2. Здесь  $\Omega$  – внутренность области, ограниченной кривой  $s_{\max}(\xi)$ , горизонтальной осью и вертикальной прямой  $\xi = 3$ . Подставляя  $\xi = 3$  в правую часть формулы для  $s_{\max}(\xi)$ , находим верхнюю границу значений  $s$ , при которых возможна стабилизация:  $\max_{\xi} s_{\max}(\xi) = 25/18$ . Отсюда получаем ограничение на выбор желаемой экспоненциальной скорости убывания отклонения  $\lambda$ :

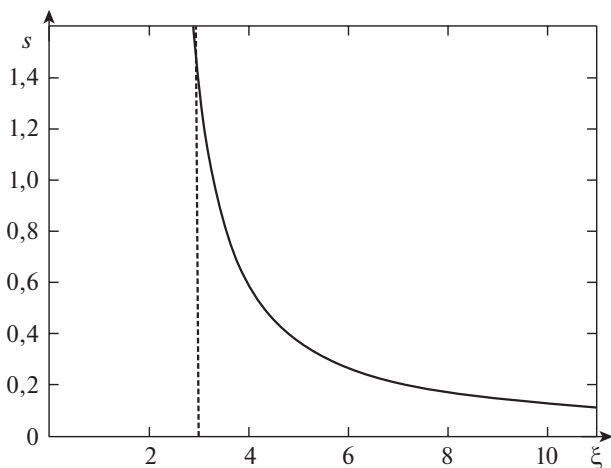


Рис. 2. Область устойчивости линеаризованной системы в пространстве параметров  $s$  и  $\xi$ , определенных формулой (19).

*Следствие 1. Система (11) может быть локально стабилизирована с помощью обратной связи (15), если  $\lambda$  принадлежит интервалу  $0 < \lambda < \lambda_{\max}$ , где*

$$(24) \quad \lambda_{\max} = \frac{5\omega_0}{3\sqrt{2}}.$$

Из рис. 2 видно, чем больше значение  $\lambda$ , тем меньше диапазон значений  $\xi$  (а значит, и  $\beta_1, \beta_2$ ), при которых линеаризованная система устойчива.

*Следствие 2. Для любых параметров исходной системы (6), (7) и заданной скорости  $\lambda$  убывания отклонения из интервала  $0 < \lambda < \lambda_{\max}$  существует  $\xi_{\max}(\lambda)$  такое, что обратная связь (15) с коэффициентами  $\beta_1 = \lambda^2 \xi^2$  и  $\beta_2 = 2\lambda\xi$ , где  $\xi \in (3, \xi_{\max}(\lambda))$ , локально стабилизирует рассматриваемую систему.*

## 5. Управление эталонной системой

Для стабилизации эталонной системы предлагается применять обратную связь в виде вложенных сигмоидов, позволяющую одновременно удовлетворить фазовые ограничения и ограничения на управление (например, [11, 12]):

$$(25) \quad U_1(w, \dot{w}) = -k_4 \sigma_2(k_3(\dot{w} + k_2 \sigma_1(k_1 w))),$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – сигмоиды. Напомним, что сигмоидой называется гладкая монотонно возрастающая функция, меняющаяся от  $-1$  до  $+1$ . В семейство функций класса сигмоид входят такие функции, как арктангенс, гиперболический тангенс, функция ошибок и многие другие подобного вида. Нетрудно проверить, что функция (25) удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в разделе 2 при  $k_2 = V_{\max}$  и  $k_4 = U_{\max}$ , или в безразмерной записи (см. раздел 3) при  $k_2 = 1$  и  $k_4 = \bar{U}_{\max}$ . С помощью двух оставшиеся коэффициентов



$k_1$  и  $k_3$  можно регулировать форму кривой и ее наклон в окрестности нуля, который, в свою очередь, определяет скорость экспоненциального убывания отклонения вблизи нуля, а также оптимизировать некоторый критерий качества управления, как, например, в [12]. Легко проверить, что если положить

$$k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda/\tilde{U}_{\max},$$

то нулевая точка будет положением равновесия эталонной системы типа выродившийся узел (см. раздел 4.3) с экспоненциальной скоростью убывания отклонения вблизи нуля  $\lambda$ .

## 6. Численные примеры

Прежде чем представить результаты численных экспериментов, опишем, как выбрать параметры закона управления для физической (размерной) системы. Здесь и далее, чтобы различать размерные и безразмерные параметры, будем помечать последние тильдой. Для реализации описанного выше подхода, кроме физических параметров системы и ограничений на скорость и управление в эталонной системе, требуется выбрать конкретные сигмоидальные функции  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В приведенных здесь численных экспериментах, результаты которых обсуждаются ниже, в качестве обоих сигмоид использовалась функция арктангенса:

$$\sigma_i = (2/\pi) \arctan(x), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что вид сигмоиды влияет на поведение системы вдали от положения равновесия, в то время как локальная устойчивость зависит только от коэффициентов  $k_i$  в формуле (25). Коэффициенты  $k_1$  и  $k_3$  выбираются так, чтобы обеспечить желаемую экспоненциальную скорость  $\lambda$  приближения к целевой точке, которая должна принадлежать интервалу  $(0, \lambda_{\max})$ . Связь размерного  $\lambda$  ( $\lambda_{\max}$ ) и безразмерного  $\tilde{\lambda}$  ( $\tilde{\lambda}_{\max}$ ) легко определить, рассматривая линеаризацию в окрестности нуля функции  $U_1(x, \dot{x})$ , заданной выражением (25), в размерной и безразмерной записи. С помощью формул (4), (5), связывающих размерные и безразмерные переменные и их производные по времени, легко находим:  $\lambda = \tilde{\lambda}V_{\max}/l$ . Отсюда размерные  $\lambda_{\max}$  и  $\omega_0$  связаны тем же соотношением (24), что и безразмерные величины, а значит, чем больше круговая частота маятника  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , тем больше максимально возможная экспоненциальная скорость приближения к целевой точке  $\lambda_{\max}$ , при которой локальная стабилизация уже невозможна.

По заданным физическим параметрам исходной (1), (2) и эталонной (3) систем и заданному  $\lambda$  определяется безразмерный параметр  $s = (\lambda/\omega_0)^2$ , выбирается значение  $\xi$  из диапазона  $(3, \xi_{\max}(\lambda))$  и строится обратная связь по формуле (15) с коэффициентами  $\beta_1 = \lambda^2\xi^2$  и  $\beta_2 = 2\lambda\xi$ . Умножая полученное управление на масштабирующий множитель  $\mu V_{\max}^2/l$ , получаем управление в исходной размерной системе (1), (2). Как установлено в разделе 4.2, замкнутая система (17) не зависит от массовых характеристик исходной системы.

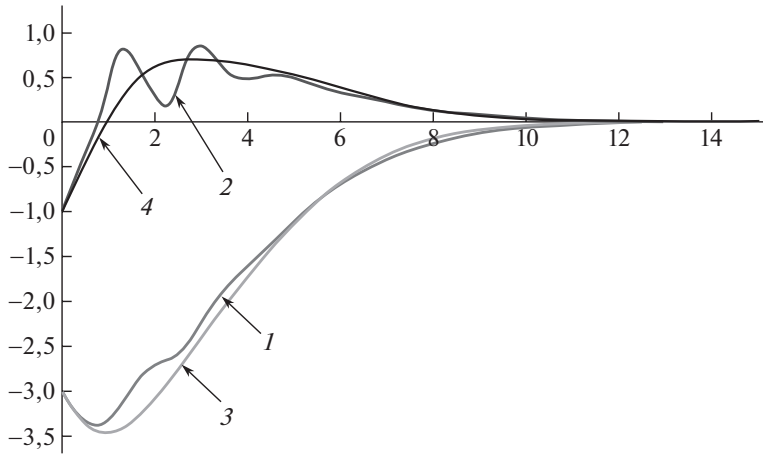


Рис. 3. Стабилизация системы с начальным состоянием  $x(0) = -3,0$ ,  $\dot{x}(0) = -1,0$ ,  $\phi(0) = 0,5$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  при  $\xi = 4,0$ . Зависимость от времени расстояния до целевой точки (кривые 1 и 3) и скорости тележки (кривые 2 и 4) для тележки с маятником и возмущенной эталонной системы соответственно.

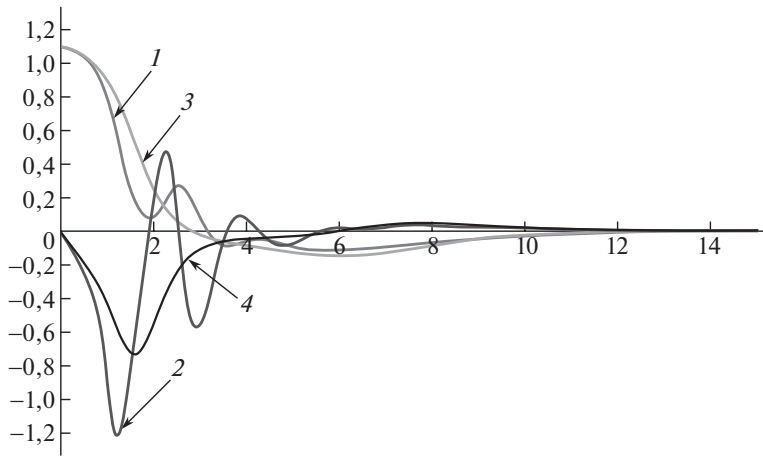


Рис. 4. Стабилизация системы с начальным состоянием  $x(0) = -3,0$ ,  $\dot{x}(0) = -1,0$ ,  $\phi(0) = 0,5$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  при  $\xi = 4,0$ . Зависимость от времени переменных  $x_3$  (кривая 1),  $x_4$  (кривая 2) (тележка с маятником) и  $w_3$  (кривая 3),  $w_4$  (кривая 4) (возмущенная эталонная система).

По этой причине не имеет смысла рассматривать системы с разными отношениями масс маятника и тележки, так как для таких систем отличаться будут только графики управлений.

Экспериментально установлено, что область притяжения замкнутой системы (область начальных значений в четырехмерном пространстве состояний) зависит от значения  $\xi \in (3, \xi_{\max}(\lambda))$  и сложно устроена. Область притяжения уменьшается при увеличении  $\xi$ , стягиваясь в точку, когда  $\xi \rightarrow \xi_{\max}(\lambda)$ .

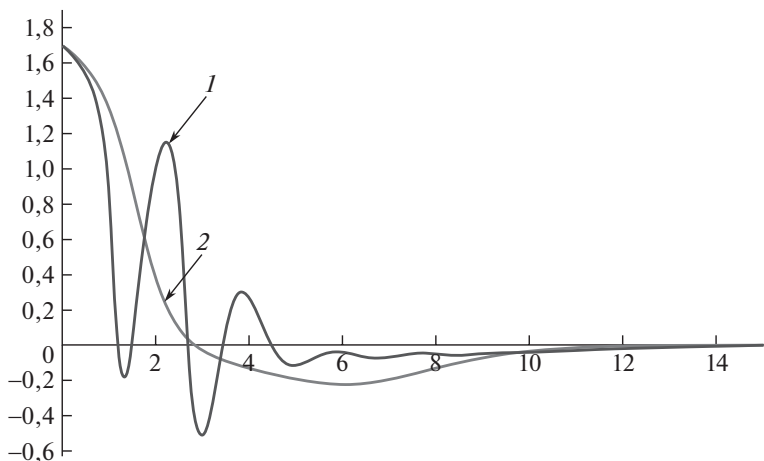


Рис. 5. Стабилизация системы с начальным состоянием  $x(0) = -3,0$ ,  $\dot{x}(0) = -1,0$ ,  $\phi(0) = 0,5$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  при  $\xi = 4,0$ . Зависимость от времени управления  $U$  (кривая 1) тележкой с маятником и управления  $U_1$  (кривая 2) возмущенной эталонной системой.

При уменьшении же  $\xi$  область притяжения растет, расширяясь предположительно до всего пространства  $R^4$  вблизи нижней границы интервала  $\xi = 3$ . Установление зависимости области притяжения от параметра  $\xi$  является первоочередной задачей будущих исследований.

Полученный закон управления апробировался в численных экспериментах для различных параметров и начальных условий. Представленные ниже результаты получены для безразмерной системы со следующими параметрами:  $m/\mu = 1/3$ ,  $\omega_0^2 = 2$  и  $\tilde{U}_{\max} = 2$ . Управление  $U_1$  в эталонной системе определено формулой (25) с коэффициентами  $k_1 = 0,5\pi/2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 4k_1/\tilde{U}_{\max} = \pi/2$  и  $k_4 = 2$ . Такие значения коэффициентов соответствуют единичной скорости экспоненциального убывания отклонения:  $\tilde{\lambda} = 1$ , при этом  $s = 0,5$ . Подставляя  $s = 0,5$  вместо  $s_{\max}$  в левую часть формулы (23) и решая численно получившееся уравнение относительно  $\xi$ , находим верхнюю границу  $\xi_{\max}(0,5) \approx 4,315$  диапазона устойчивости линеаризованной системы.

Серия численных экспериментов с различными значениями параметра  $\xi$  и различными начальными условиями подтвердила приведенные выкладки: для любых значений  $\xi$ , принадлежащих интервалу  $(3, 4,315)$ , нашлось множество начальных значений переменных, при которых стабилизировалась исходная нелинейная система, в то время как для всех тестируемых значений  $\xi$  за пределами указанного диапазона система не стабилизировалась.

Приведенные в данном разделе графики показывают результаты двух численных примеров. В первом примере (рис. 3–5)  $\xi = 4,0$ ,  $x(0) = -3,0$ ,  $\dot{x}(0) = -1,0$ ,  $\phi(0) = 0,5 \text{ rad}$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$ . На рис. 3 показаны графики отклонения от целевой точки (кривая 1) и скорости (кривая 2) тележки; кривые 3 и 4 показывают для сравнения графики отклонения и скорости эталонной системы (целевая траектория). На рис. 4 показана зависимость от времени третьей

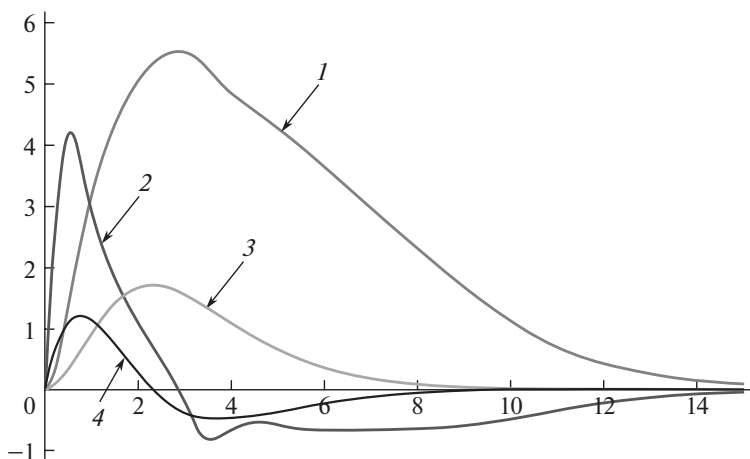


Рис. 6. Стабилизация системы с начальным состоянием  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = 1,0$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  при  $\xi = 3,5$ . Зависимость от времени расстояния до целевой точки (кривые 1 и 3) и скорости тележки (кривые 2 и 4) для тележки с маятником и возмущенной эталонной системы соответственно.

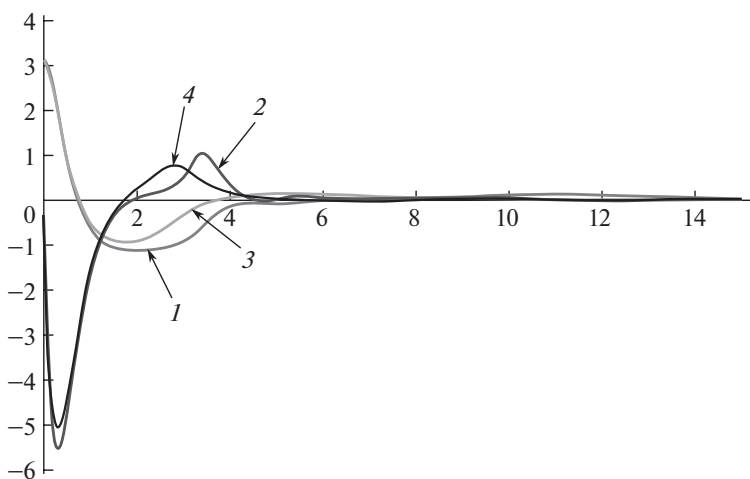


Рис. 7. Стабилизация системы с начальным состоянием  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = 1,0$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  при  $\xi = 3,5$ . Зависимость от времени переменных  $x_3$  (кривая 1),  $x_4$  (кривая 2) (тележка с маятником) и  $w_3$  (кривая 3),  $w_4$  (кривая 4) (возмущенная эталонная система).

(кривая 1) и четвертой (кривая 2) переменных,  $x_3$  и  $x_4 = \dot{x}_3$ ; графики соответствующих переменных  $w_3$  и  $w_4$  эталонной системы показаны кривыми 3 и 4 соответственно. На рис. 5 показано, как меняются во времени управления  $U$  (кривая 1) в исходной системе и  $U_1$  (кривая 2) в эталонной системе при следовании по целевой траектории.

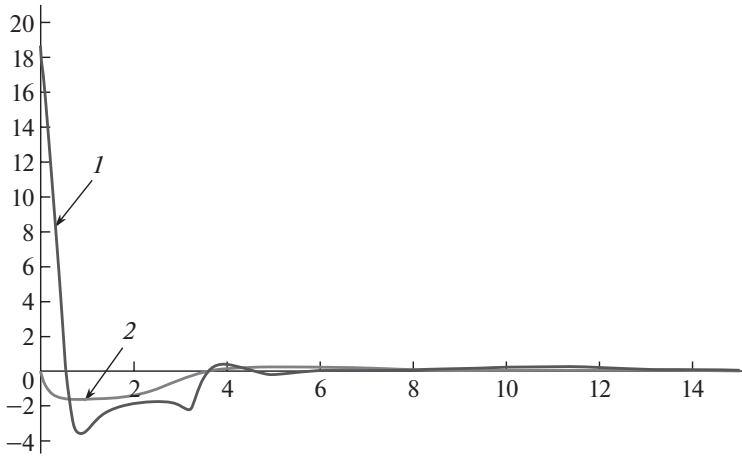


Рис. 8. Стабилизация системы с начальным состоянием  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = 1,0$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$  при  $\xi = 3,5$ . Зависимость от времени управления  $U$  (кривая 1) тележкой с маятником и управления  $U_1$  (кривая 2) возмущенной эталонной системой.

Во втором примере тележка изначально находилась в целевой точке с нулевой скоростью ( $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ) и отклоненным на большой угол маятником ( $\phi(0) = 1 \text{ rad}$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$ ),  $\xi = 3,5$ . На рис. 6–8 показаны те же характеристики, что и в первом примере. Для компенсации большого начального отклонения маятника в начальный момент времени потребовалась большая управляющая сила (кривая 1 на рис. 8, которая привела к значительному отклонению тележки от целевой точки (кривая 1 на рис. 6).

## 7. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации движущейся вдоль прямой тележки с установленным на ней обратным маятником. Предложен новый закон управления, основанный на введении эталонной системы второго порядка, траектория движения которой принимается в качестве целевой для тележки с маятником. Проведен исчерпывающий анализ линеаризованной замкнутой системы, определена область значений параметров закона управления, гарантирующих локальную стабилизируемость системы, и предложен конструктивный метод их выбора.

Численные эксперименты показали, что для заданной системы и заданной скорости убывания отклонения  $\lambda$  (т.е. при фиксированном параметре  $s$ ) область притяжения мала для больших значений параметра  $\xi$  (вблизи верхней границы) и увеличивается с его уменьшением. Вблизи верхней границы допустимых значений параметра  $\xi$  при достаточно небольших отклонениях от положения равновесия в системе возникают незатухающие колебания. Вблизи нижней границы  $\xi = 3$  область притяжения настолько велика (возможно расширяется до всего пространства  $R^4$ ), что при любых тестируемых начальных значениях замкнутая система была устойчива.

Область притяжения нелинейной системы с устойчивой матрицей линеаризованной системы может быть оценена с помощью квадратичной функции Ляпунова линеаризованной системы, матрица которой находится решением известного линейного матричного неравенства. Результаты численных экспериментов, однако, показывают, что область притяжения исследуемой системы устроена довольно сложно, поэтому любая ее аппроксимация с помощью эллипсоида в 4-мерном пространстве, на взгляд авторов, будет крайне консервативной. Менее консервативные оценки можно надеяться получить только с помощью неэллипсоидальных областей. Получение такого рода оценок является достаточно сложной задачей, над решением которой авторы в настоящее время работают. Предполагается, в частности, попробовать применить для этой цели некоторые из известных из литературы численных методов (см., например, [13–15]).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Для нахождения области устойчивости характеристического полинома (22) можно воспользоваться критериями Рауса–Гурвица или Лъенара–Шипара [16]. Согласно второму критерию, для того чтобы полином был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все коэффициенты полинома и нечетные главные миноры матрицы Гурвица. Найдем область в пространстве параметров  $\xi$  и  $s$ , в которой эти условия выполнены.

Коэффициент при старшем члене  $\nu^4$  всегда положителен:  $a_4 = 1$ . Остальные коэффициенты с учетом (21) имеют вид

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda^4(\xi - 3)(\xi - 1), & a_1 &= 2\lambda^4(\xi - 2)(\xi - 1), \\ a_2 &= \lambda^4[\xi^2 - (\xi - 3)(\xi - 1)s], & a_3 &= 2\lambda^4[\xi - (\xi - 2)(\xi - 1)s]. \end{aligned}$$

Свободный член  $a_0$  и коэффициент  $a_1$  оба положительны, когда  $0 < \xi < 1$  или  $\xi > 3$ . Коэффициенты  $a_2$  и  $a_3$  положительны в этих интервалах при условии

$$(II.1) \quad s < s_3(\xi) = \frac{\xi}{(\xi - 2)(\xi - 1)}.$$

Минор первого порядка  $\Delta_1 = a_1 > 0$ . Подставляя коэффициенты характеристического полинома в формулу для  $\Delta_3 = a_1(a_2a_3 - a_1) - a_0a_3^2$ , после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 4\lambda^6(\xi - 1) [(\xi^4 - 4\xi^3 + 8\xi^2 - 8\xi + 4) - \xi(\xi^4 - 6\xi^3 + 14\xi^2 - 15\xi + 6)s] = \\ &= 4\lambda^6(\xi - 1) \{ [\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2] - \xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)s \}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$(II.2) \quad s_{\max}(\xi) = \frac{\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2}{\xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)}$$

и найдем разность правых частей (П.2) и (П.1):

$$\begin{aligned}\Delta_s &= s_{\max}(\xi) - s_3(\xi) = \\ &= \frac{\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2 - \xi^2(\xi^2 - 3\xi + 3)}{\xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)} = \\ &= \frac{2 - \xi}{\xi(\xi^2 - 3\xi + 3)}.\end{aligned}$$

В интервале  $0 < \xi < 1$  имеем  $\Delta_3 > 0$  только тогда, когда  $s > s_{\max}$ . Так как  $s_{\max} > s_3$  в этом интервале, неравенства  $s > s_{\max}$  и (П.1) несовместны. Таким образом, в интервале  $0 < \xi < 1$  характеристический полином неустойчив.

В интервале  $\xi > 3$  при  $s < s_{\max}$  имеем  $\Delta_3 > 0$ . Так как в этом интервале  $s_{\max} < s_3$ , справедливо неравенство (П.1). Таким образом, все условия критерия Ляпуна–Шипара выполнены. Теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2010.
2. *Martynenko Y.G., Formal'skii A.M.* Controlled pendulum on a movable base // *Mechanics of Solids*. 2013. Т. 48. № 1. С. 6–18.
3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014.
4. *Getz N.H., Hedrick J.K.* An Internal Equilibrium Manifold Method of Tracking for Nonlinear Nonminimum Phase Systems // *ACC Proc.* 1995. P. 1–5.
5. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum – Control strategy and experimental verification // *Automatica*. 2009. V. 45. P. 265–269.
6. *Lee J., Mukherjee R., Khalil H.K.* Output feedback stabilization of inverted pendulum on a cart in the presence of uncertainties // *Automatica*. 2015. V. 54. No. 4. P. 146–157.
7. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // *Trans. Autom. Contr. IEEE*, 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
8. *Gordillo F., Aracil J.* A new controller for the inverted pendulum on a cart // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2008. No. 18. P. 1607–1621.
9. *Magni L., Scattolini R., Aström K.J.* Global stabilization of the inverted pendulum using model predictive control // *IFAC Proc.* V. 35. Iss. 1. 2002. P. 141–146.
10. *Utkin V., Guldner J., Shi J.* Sliding mode control in electromechanical systems. 2nd ed. CRC Press, 2009.
11. *Matrosov I.V., Morozov Yu.V., Pesterev A.V.* Control of the robot-wheel with a pendulum // *Proc. of the 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*, IEEE. 2020. P. 1–4.
12. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // *Commun. Comput. Inform. Sci. (CCIS)*. 2020. V. 1340. P. 236–249.

13. *Сергеев В.С.* Об одном способе получения оценок областей притяжения с помощью функций Ляпунова, построенных численным методом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1978. Т. 18. № 5. С. 1154–1161.
14. *Каменецкий В.А.*, Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // АиТ. 1994. № 6. С. 10–26.
15. *Chiang H.D., Thorp J.S.* Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 30. No. 12. P. 1229–1241.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2010.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.*

Поступила в редакцию 31.05.2021

После доработки 05.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021



## Стохастические системы

© 2022 г. Б.Я. ЛИХТЦИНДЕР, д-р техн. наук (lixt@psuti.ru),  
И.А. БЛАТОВ, д-р физ.-мат. наук (blatow@mail.ru)  
(Поволжский государственный университет телекоммуникаций  
и информатики, Самара),  
Е.В. КИТАЕВА, канд. физ.-мат. наук (el\_kitaeva@mail.ru)  
(Самарский национальный исследовательский университет  
им. акад. С.П. Королева)

### ОБ ОЦЕНКАХ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЧЕРЕЗ СТАТИСТИЧЕСКИЕ БЕЗУСЛОВНЫЕ МОМЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ВХОДНОГО ПОТОКА

Рассматривается математическая модель простейшей одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с детерминированным временем обслуживания в случае входящего потока с произвольной корреляцией. Для данной СМО получены различные обобщения формулы Хинчина–Полячека средней длины очереди. Предложена интервальная модель входящего потока, в рамках которой получено выражение средней длины очереди через статистические безусловные моменты второго порядка. Все результаты были получены при весьма общих предположениях эргодичности и стационарности. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

*Ключевые слова:* система массового обслуживания, коррелированный входной поток, средняя длина очереди, формула Хинчина–Полячека.

DOI: 10.31857/S000523102201007X

#### 1. Введение

В мультисервисных сетях с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского, поскольку такие потоки формируются множеством источников запросов на предоставление услуг, существенно отличающихся между собой. Это приводит к тому, что для потоков в мультисервисных сетях характерна неравномерность поступления заявок и пакетов. Пакеты группируются в “пачки” в одних промежутках времени и практически отсутствуют в других промежутках. Случайный процесс поступления заявок (пакетов) в систему характеризуется законом распределения, устанавливающим связь между значениями случайной величины и вероятностями появления указанных значений. В большинстве случаев такой поток характеризуется функцией распределения временных интервалов между соседними заявками, а процесс их обработки характеризуется функцией распределения

вероятностей интервалов времени обслуживания. В подавляющем числе публикаций по теории массового обслуживания указанные случайные величины считаются некоррелированными и взаимно независимыми. Однако указанные допущения для анализа пакетного трафика мультисервисных сетей совершенно недопустимы. В ряде публикаций [1–9], а также в публикациях авторов этой статьи [10–13] предпринимались попытки учета корреляционных свойств потоков, образующих очереди. Имеется много публикаций, посвященных различным частным случаям СМО при наличии корреляции входных данных (см. обзор [14]).

В задачах управления СМО важной характеристикой является средняя длина очереди. Обобщения формулы Хинчина–Полячека средней длины очереди для некоторых конкретных СМО рассматривались в [15, 16]. Однако авторам неизвестны работы, в которых разрабатываются общие подходы анализа СМО при наличии произвольных коррелированных входных потоков.

Одним из перспективных, на взгляд авторов, направлений изучения пакетного трафика является разрабатываемый нами Интервальный метод [17, 18], позволяющий заменить анализ интервалов времени между соседними заявками и интервалов времени обработки заявок, анализом одной случайной величины — числом заявок, поступающих в течение последовательных интервалов времени обработки каждой из заявок. Авторами показано, что дисперсия и корреляционные свойства указанной случайной величины, при заданной загрузке, полностью характеризуют размер очереди в системах массового обслуживания [18].

В настоящей статье для одноканальной системы с коррелированным входящим потоком и постоянным временем обработки заявок при весьма общих предположениях стационарности и эргодичности получены формулы средней длины очереди, обобщающие формулу Хинчина–Полячека. При этом применение модели, основанной на интервальном методе, позволило получить формулу, выражающую оценку средней длины очереди через безусловные выборочные ковариации входящего потока. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические выводы.

## 2. Постановка задачи

Введем терминологию и обозначения. Анализируются стационарные потоки заявок (пакетов). Весь промежуток времени анализа разбивается на равные интервалы  $\tau_i$  одинаковой длины  $\tau$ . Считается, что интервал времени обработки каждой из заявок — постоянный и равен  $\tau$ . Число заявок на  $i$ -м интервале обозначаем через  $m_i(\tau)$ . Пусть  $\rho = \lambda\tau$  — коэффициент загрузки, где  $\lambda$  — средняя интенсивность заявок. Предполагается, что  $\rho \in (0, 1)$ . Величины  $\overline{m(\tau)} = \lambda\tau = \rho$  и  $D_m(\tau) = \overline{[m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]^2}$  — математическое ожидание и дисперсия чисел заявок, поступающих в течение интервала времени  $\tau$  соответственно. Через  $q_i(\tau)$  обозначим количество заявок, стоящих в очереди в конце  $i$ -го интервала обработки (длину очереди). Через  $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = K[q_{i-1}(\tau), m_i(\tau)]$  обозначим ковариацию случайных величин

$q_{i-1}(\tau)$  и  $m_i(\tau)$ . Для предположений, которые будем делать по ходу статьи, будем использовать обозначения **A1**, **A2**, ...

Для любой одноприборной СМО справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [19],

$$(1) \quad q_i(\tau) = q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau),$$

где

$$\delta_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае пуассоновского потока заявок с постоянным временем обслуживания для средней длины очереди (математического ожидания) известна формула Хинчина–Полячека [19], которая имеет вид

$$(2) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

В [20] получено обобщение формулы (2) на случай произвольных коррелированных потоков:

$$(3) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{D_m(\tau) + 2\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}.$$

В частном случае пуассоновского потока  $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = 0$ ,  $D_m(\tau) = \rho$  и формула (3) принимает вид (2). Доказательство формулы (3) приводится в разделе 4. Из доказательства следует, что формула (3) справедлива для любых стационарных в широком смысле потоков с конечным математическим ожиданием и дисперсией, для которых процесс  $q_i(\tau)$  обладает такими же свойствами, т.е. и для МАР-потока, управляемого эргодической марковской цепью.

Задача настоящей статьи — получение формул, в которых средняя длина очереди выражается через корреляционные свойства входящего потока  $m_i(\tau)$  при весьма общих предположениях.

### 3. Предположения и определения

В [12] формула (3) была преобразована к более удобному для применения виду. Приведем некоторые понятия из [12], поскольку они необходимы для решения задач данной статьи.

Введем понятие цикла обслуживания. Циклом обслуживания  $Z_k = \bigcup_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} I_j$  будем называть совокупность смежных интервалов обработки  $I_j$ , на которых  $q_j > 0$  везде, кроме последнего интервала, на котором очередь обнуляется после обработки последней заявки, а слева от данного цикла

тоже находится хотя бы один такой интервал. Здесь  $N_k$  обозначает количество смежных интервалов — длину  $k$ -го цикла.

*Замечание 1.* Понятие цикла обслуживания отличается от введенного Л. Клейнроком [21] понятия периода занятости, поскольку период занятости предполагает наличие слева и справа как минимум одного интервала, на котором  $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$ . Поэтому период занятости Клейнрока может содержать несколько циклов  $Z_k$ . Целесообразность введения данного понятия обоснована в [12].

Сделаем следующее *предположение*.

**A1.** Гипотеза эргодичности и взаимной стационарности. *Предположим, что все рассматриваемые процессы обладают свойствами эргодичности, стационарности и взаимной стационарности в широком смысле. В частности, для любой реализации случайного процесса  $m_i(\tau)$  существуют соответствующие пределы и*

$$\overline{m(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau), \quad D_m(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( m_i(\tau) - \overline{m(\tau)} \right)^2,$$

$$(4) \quad \mu_{m_{i-j} m_i}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \left( m_{k-j}(\tau) - \overline{m(\tau)} \right) \left( m_k(\tau) - \overline{m(\tau)} \right),$$

$$\overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(\tau),$$

$$(5) \quad \mu_{q_{i-1} m_i}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_{i-k-1}(\tau) \left[ m_{i-k}(\tau) - \overline{m(\tau)} \right].$$

#### 4. Основные результаты

Формулы для средней длины очереди, полученные в [12], были записаны для конкретной фиксированной реализации случайного процесса  $m_i(\tau)$ . Однако представляет интерес преобразование формулы (3) к выражению, зависящему от корреляционных свойств входящего потока  $m_i$ . Получим соответствующие результаты. Пусть  $m_i(\tau)$  — произвольная реализация случайного процесса  $\{m_i\}$ .

*Теорема 1.* *Справедлива формула*

$$(6) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1).$$

Эта и последующие теоремы будут доказаны в разделе 5.

Второе слагаемое в (6) при естественных дополнительных предположениях есть весовая сумма условных выборочных ковариаций (см. далее) элементов входящего потока. Покажем это.

Пусть  $A_k(\tau) = \{\delta_s = 1, s = i - k, i - k + 1, \dots, i\}$  – случайное событие, состоящее в том, что случайно выбранная пара  $(m_{i-k}(\tau), m_i(\tau))$ ,  $k + 1 \leq i \leq N$ , принадлежит одному циклу обработки  $Z_s \subset [1, N]$ . Пусть  $N_k(N)$  – число таких пар. Обозначим через

$$(7) \quad \begin{aligned} \mu(k, N) &= \frac{1}{N_k(N)} \sum_{i \in Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{k: i-k \in Z_s} (m_{i-k}(\tau) - 1), \\ P(A_k(\tau)) &= \frac{N_k(N)}{N - k} \end{aligned}$$

условную выборочную ковариацию случайных величин  $(m_{i-k}(\tau), m_i(\tau))$  при условии  $A_k(\tau)$  и выборочную вероятность события  $A_k(\tau)$  соответственно.

*Теорема 2. Справедлива формула*

$$(8) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N - k}{N} \mu(k, N) P(A_k(\tau)).$$

Теорема 2 непосредственно вытекает из (6), (7). Теорема 2 доказана.

Формулы (8) содержат условные корреляции и вероятности  $P(A_k(\tau))$ , вычисление которых затруднительно. Получим формулу, содержащую только безусловные моменты второго порядка нового случайного процесса, тесно связанного с исходным.

Произведем замену переменной интервалов  $\tau_i$ , на которых рассматривается поступление заявок, на другую переменную —  $\theta_i$ , которая представляет собой интервал между двумя соседними заявками, покидающими очередь. Число заявок, поступивших на указанных интервалах, обозначим через  $m_i(\theta)$ . Это и есть новый случайный процесс, который рассмотрим.

*Замечание 2.* Каждая реализация случайного процесса  $m_i(\theta)$  совпадает с соответствующей реализацией исходного случайного процесса  $m_i(\tau)$ , из которой удалены все участки покоя, на которых  $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$ , т.е. остаются только примыкающие друг к другу циклы обслуживания. Таким образом, между реализациями потоков  $m_i(\theta)$  и  $m_i(\tau)$  существует взаимно однозначное соответствие.

*Определение 1.* Процесс  $m_i(\theta)$  будем называть интервальным представлением процесса  $m_i(\tau)$ .

**A2.** Гипотеза **A1** для процесса  $m_i(\theta)$ . Предположим, что для нового случайного процесса также справедлива гипотеза **A1**.

Пусть  $N$  — рассматриваемое число членов  $m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)$  реализации процесса  $m_i(\tau)$ , а  $M = M(N)$  — число членов соответствующей реализации процесса  $m_i(\theta)$ , полученных из  $m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)$  удалением нулевых членов, принадлежащих участкам покоя.

Пусть

$$(9) \quad \nu_m(k, \theta, M) = \frac{1}{M - k} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1)$$

— безусловная выборочная ковариация числа заявок нового случайного процесса.

*Теорема 3.* Пусть справедливы предположения **A1–A2**. Тогда имеет место формула

$$(10) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \rho \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M).$$

В формуле (10) присутствует дисперсия исходного случайного процесса  $m_i(\tau)$ . Обозначим через  $D_m(\theta)$  дисперсию процесса  $m_i(\theta)$ .

*Теорема 4.* Пусть справедливы предположения **A1–A2**. Тогда имеет место формула

$$(11) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2} \left( D_m(\theta) + 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M) \right).$$

Формула (11) выражает среднюю длину очереди через безусловные моменты второго порядка случайного процесса  $m_i(\theta)$ .

*Замечание 3.* Если предположить, что теоретические ковариации

$$(12) \quad \nu_m(k, \theta) = \lim_{M \rightarrow \infty} \nu_m(k, \theta, M)$$

достаточно быстро убывают так, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_m(k, \theta)$  сходится, а сходимость в (12) достаточно быстрая, т.е. выполнены условия перестановки предельных переходов в (11), то формула (11) принимает вид

$$(13) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2} \left( D_m(\theta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_m(k, \theta) \right).$$

Однако формула (13) для рассматриваемых нами потоков оказывается непригодной, в отличие от формулы (11), которая всегда верна при выполнении условий стационарности и эргодичности. Это связано с медленным убыванием выборочных ковариаций в (11) и медленной сходимостью в (12).

## 5. Доказательства теорем

*Доказательство формулы (3).* Возведем в квадрат уравнение баланса (1). Учитывая, что  $\delta_i^2(\tau) = \delta_i(\tau)$ ,  $q_{i-1}(\tau)\delta_i(\tau) = q_{i-1}(\tau)$ ,  $(\tau)m_i(\tau)\delta_i(\tau) = m_i$ , получим

$$\begin{aligned} (q_i(\tau))^2 &= (q_{i-1}(\tau))^2 + (m_i(\tau))^2 + \delta_i(\tau) + \\ &+ 2q_{i-1}(\tau)m_i(\tau) - 2q_{i-1}(\tau) - 2m_i(\tau). \end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание от обеих частей последнего равенства. Учитывая, что  $\overline{m_i(\tau)} = \overline{\delta_i(\tau)} = \rho$ , а в силу стационарности  $\overline{(q_i(\tau))^2} = \overline{(q_{i-1}(\tau))^2}$ , получим

$$0 = \overline{(m_i(\tau))^2} + \rho + \overline{2q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} - 2\overline{q_{i-1}(\tau)} - 2\rho,$$

или же

$$\overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(\overline{(m_i(\tau))^2} - \rho) + \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)},$$

или же

$$(14) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)}.$$

Подставляя в (14)  $\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) + \overline{m(\tau)} \cdot \overline{q(\tau)} = \mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) + \rho\overline{q(\tau)}$  и выражая  $\overline{q(\tau)}$ , получаем (3).

*Доказательство теоремы 1.* Из (14) следует, что для доказательства (6) достаточно установить равенство

$$(15) \quad \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1).$$

Докажем (15). Отметим важное свойство цикла обслуживания.

*Лемма 1.* Для любого цикла обслуживания

$$\sum_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} (m_j(\tau) - \delta_j) = \sum_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} (m_j(\tau) - 1) = 0.$$

*Доказательство леммы 1* вытекает из того, что окончание цикла обслуживания означает обработку всех заявок, которые поступили на всех интервалах, входящих в данный цикл обслуживания.

Последовательно применяя равенство (1) к значениям очереди в правой части (1), находим, что

$$q_{i-1}(\tau) = q_{i-(N+1)}(\tau) + \sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)).$$

Отсюда имеем (здесь и далее с точностью до бесконечно малой при  $N \rightarrow \infty$ )

$$(16) \quad \begin{aligned} \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{i-1}(\tau)m_i(\tau) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left( \sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)) + q_{i-(N+1)}(\tau) \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 1 отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left( \sum_{j \in Z_l \cap [i-N, i-1]: Z_l \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) + q_{i-(N+1)}(\tau) \right) + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left( \sum_{j \in Z_l \cap [i-N, i-1]: Z_l \cap \{i-1\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) \right). \end{aligned}$$

Но в силу леммы 1 первая сумма в последнем равенстве равна нулю, так как

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in Z_l \cap [i-N, i-1]: Z_l \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) = \\ & = - \sum_{j \in Z_l \setminus [i-N, i-1]: Z_l \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) = -q_{i-(N+1)}(\tau). \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left( \sum_{j \in Z_l \cap [i-N, i-1]: Z_l \cap \{i-1\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) \right) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1). \end{aligned}$$

Тем самым формула (15), а значит, и формула (6) доказаны. Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Сначала установим вспомогательное утверждение.

*Лемма 2.* Для процесса  $m_i(\theta)$  справедлива формула

$$(17) \quad \overline{m_i(\theta)} = 1,$$

$$(18) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \rho.$$

*Доказательство леммы 2.* Вычисляя математическое ожидание от обеих частей формулы (1), в силу стационарности находим, что

$$(19) \quad \overline{\delta(\tau)} = \overline{m(\tau)} = \rho.$$

Поскольку  $m_i(\theta)$  получается из  $m_i(\tau)$  удалением участков покоя, на которых  $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$ , то для соответствующего процесса  $\delta_i(\theta)$  будем иметь

$$(20) \quad \overline{\delta(\theta)} = \overline{m(\theta)}.$$



Но на участках обработки  $\delta_i(\theta) = 1$ , откуда

$$(21) \quad \overline{\delta(\theta)} = 1.$$

Из (20), (21) следует (17). Формула (18) следует из (19), (21) и того, что  $\sum_{i=1}^N \delta_i(\tau) = \sum_{i=1}^M \delta_i(\theta)$ .

Лемма 2 доказана.

Преобразуем сумму безусловных ковариаций (9) из (10).

Имеем

$$(22) \quad \begin{aligned} \nu_m(k, \theta, M) &= \frac{1}{M-k} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1), \\ \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M) &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1) = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1). \end{aligned}$$

Из (22), определения процесса  $m_i(\theta)$ , циклов обработки и замечания 2 следует, что

$$(23) \quad \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1) = \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1),$$

поскольку эти суммы состоят из одних и тех же слагаемых.

Далее заметим, что в силу леммы 2 и (23)

$$(24) \quad \begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1) &= \\ = \frac{1}{\rho} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1). \end{aligned}$$

Из (6), (22) и (24) получаем (10). Теорема 3 доказана.

*Доказательство теоремы 4.* Очевидно, что  $D_m(\theta) = D_{\delta=1}(\tau)$ . Поэтому в силу (10), (11) достаточно доказать формулу

$$(25) \quad D_m(\tau) = D_{\delta=1}(\tau)\rho + \rho(1 - \rho).$$

Для краткости будем опускать аргумент  $\tau$ . Имеем в силу леммы 2

$$\begin{aligned} M(D_\delta(m)) &= D_{\delta=0}(m)P(\delta = 0) + D_{\delta=1}(m)P(\delta = 1) = \\ &= D_{\delta=1}(m)P(\delta = 1) = D_{\delta=1}(m)\rho, D(M_\delta(m)) = (M_{\delta=0}(m) - \rho)^2 P(\delta = 0) + \\ &+ (M_{\delta=1}(m) - \rho)^2 P(\delta = 1) = (0 - \rho)^2(1 - \rho) + (1 - \rho)^2 \rho = \rho(1 - \rho). \end{aligned}$$

Отсюда, используя известную формулу  $D_m = D(m) = M(D_\delta(m)) + D(M_\delta(m))$ , получаем (25). Теорема 4 доказана.

## 6. Результаты численных экспериментов

### 6.1. Анализируемые потоки

Справедливость полученных результатов иллюстрируется результатами численных экспериментов на основе формулы (11) для реализации видеотрафика на фоне пуассоновского потока [19] той же интенсивности. Кроме того, приводим результаты аналогичных расчетов для одной из моделей заявок, управляемых цепью Маркова (МАР-поток). МАР-поток образовывался последовательным во времени переключением двух пуассоновских потоков заявок с параметрами интенсивности  $\lambda_1 = 1000$  и  $\lambda_2 = 10$ . При этом в соответствии с определением МАР-потока в обозначениях [22] переходные вероятности, определяющие МАР-поток, задавались следующим образом:  $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_i, 1) = 0,9$  при  $i = 1, 2$ ;  $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 1) = 0,1$ ;  $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 0) = 0$  при  $i \neq j$ . Всего для МАР-потока и пуассоновского потока было сгенерировано по 100 тысяч временных отсчетов, а поток телетрафика содержал 16 910 отсчетов. Отсчетом называем момент времени, в который в систему поступает заявка.

Все результаты были также проверены и подтверждены с помощью формулы (3) на основе оценок входящего в нее корреляционного члена согласно гипотезе А1, а также с помощью сравнения с оценками среднего значения очереди, вычисленных их непосредственным усреднением (см. подраздел 6.2).

Результаты приведены в табличной и графической формах. Приведем графические иллюстрации. Численные результаты в виде таблиц приводятся в подразделе 6.2. В табл. 1, 3, 4 приведены данные для потоков, полученных имитационным моделированием, а в табл. 2 – результаты реального видеотрафика. Файл моментов прихода пакетов видеотрафика, анализируемого на рисунках и в табл. 2, получен экспериментально с помощью открытой программной системы WireSark на реальной сети. Все результаты анализа, приведенные на рисунках, получены с экранов разработанной авторами программной системы АМС, подробное описание которой дано в [18]. Файл моментов прихода пакетов МАР-потока заявок, показанный на рис. 5, был сгенерирован специально разработанной программой, а затем проанализирован с помощью системы АМС и с помощью отдельной программы имитационного моделирования. Результаты моделирования представлены в табл. 2.

Поскольку численные результаты получены для конечных значений  $N$ , то в данном подразделе речь идет об оценках соответствующих характеристик. Сохраним за ними прежние обозначения предельных значений, обозначая через  $D_m(\rho)$ ,  $q(\rho)$  оценки дисперсии и средней длины очереди соответственно.

В мультисервисных сетях связи (МСС) с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского и носит явно выраженный пачечный характер.

На рис. 1 представлена реализация видеотрафика (узкие пачки) на фоне пуассоновского потока одинаковой интенсивности (серый фон). На рис. 2 показан фрагмент указанной реализации в увеличенном масштабе времени. Каждая тонкая вертикальная полоска соответствует числу пакетов, посту-

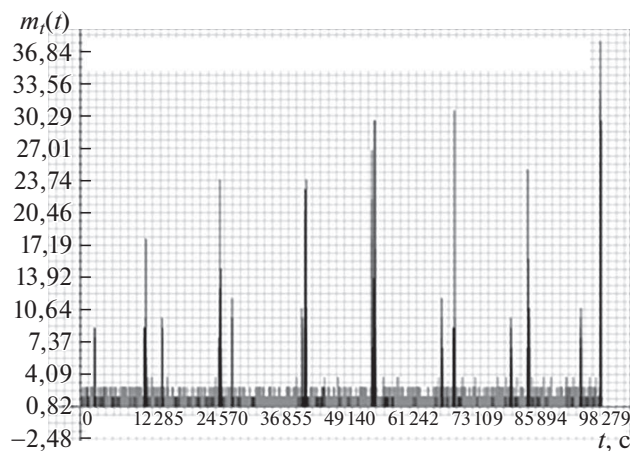


Рис. 1. Поток видеотрафика и пуассоновский поток.

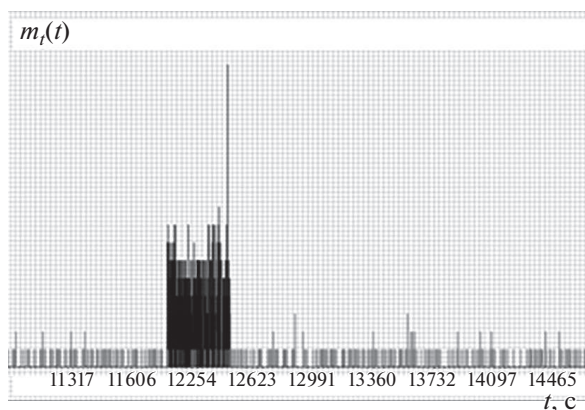


Рис. 2. Поток видеотрафика и пуассоновский поток в увеличенном масштабе времени.

пающих в течение интервала времени обработки одного пакета. Из графиков следует, что для видеопотока имеются интервалы, в течение которых поступают десятки пакетов, в то время как пуассоновский поток содержит на указанных интервалах один или два пакета. Это и объясняет наличие больших очередей при передаче потоков видеотрафика.

На рис. 3 представлены зависимости оценок среднего размера очереди при различных значениях коэффициента загрузки  $\rho$  (верхний график — видеотрафик, нижний график — пуассоновский поток). Из рис. 3 видно, что при одинаковых значениях коэффициента загрузки  $\rho$  оценка среднего размера очереди у пуассоновского потока во много раз меньше, чем у потока видеотрафика.

На рис. 4 для рассматриваемого видеотрафика показаны зависимости оценок дисперсии (нижняя кривая) и оценок среднего размера очереди (верх-

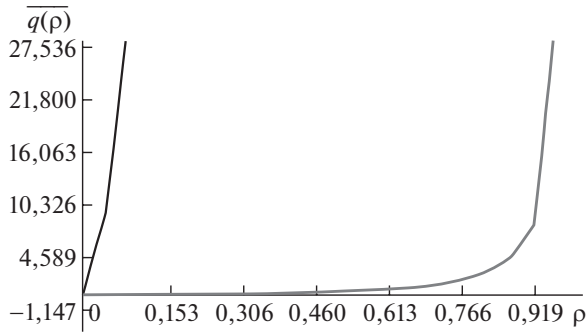


Рис. 3. Зависимости оценок среднего размера очереди при различных значениях коэффициента загрузки  $\rho$ .

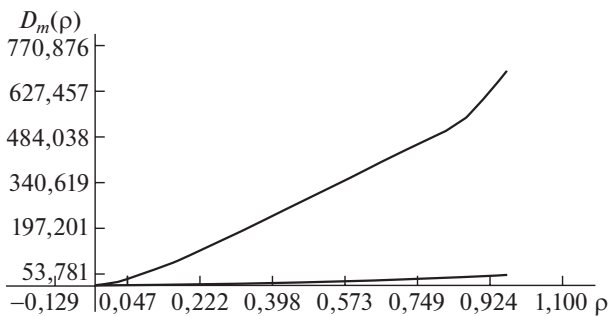


Рис. 4. Зависимости оценок дисперсии и среднего размера очереди видеотрафика, при различных значениях коэффициента загрузки  $\rho$ .

няя кривая), при различных значениях коэффициента загрузки ( $\rho$ ), полученные в результате имитационного моделирования. Значение оценки дисперсии  $D_{m(\tau)}(0,5) = 10,6$  в то время, когда оценка размера очереди превышает 250 пакетов. Корреляционная составляющая в десятки раз превышает значение дисперсии, и не учитывать ее нельзя.

Разница впечатляет, поскольку при постоянном времени обработки и коэффициенте загрузки, равном 0,5, оценка среднего значения очереди для пуассоновского потока составляет лишь 0,25 пакета. Для пачечного потока видеотрафика составляющая, обусловленная оценкой дисперсии  $D_{m(\tau)}(\rho)$ , оказывается существенно меньше, чем составляющая, обусловленная наличием корреляционных связей.

Наконец, приведем результаты расчетов для МАР-потока.

На рис. 5 показан поток, представляющий число заявок, поступающих в течение каждого из интервалов времени  $\tau = 2,72 \cdot 10^{-2}$ , которые соответствуют коэффициенту загрузки  $\rho = \lambda\tau = 0,5$ .

Поток носит пачечный характер, и интервалы, в течение которых поступает более 20 заявок, чередуются с интервалами, содержащими не более двух заявок.

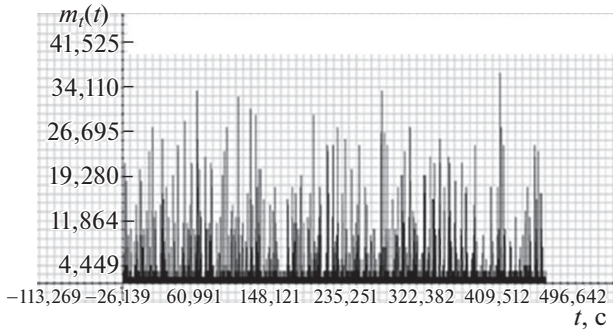


Рис. 5. Поток заявок, поступающих в течение интервалов времени, соответствующих коэффициенту загрузки  $\rho = 0,5$ .

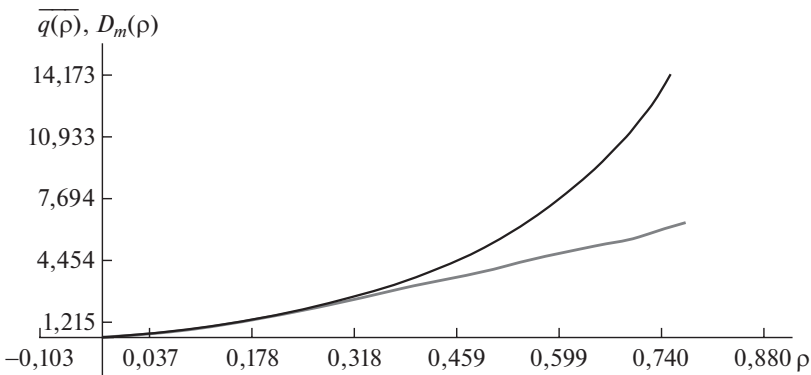


Рис. 6. Зависимости оценок дисперсии и среднего размера очереди для рассматриваемого потока при различных значениях коэффициента загрузки  $\rho$ .

Несмотря на высокую пачечность, в отличие от видеотрафика, представленного на рис. 3, здесь оценки среднего значения длины очереди имеют небольшие размеры  $\overline{q(0,5)} = 5,21$  заявок при коэффициенте загрузки ( $\rho$ ), равном 0,5. На рис. 6 для рассматриваемого потока показаны зависимости оценок среднего размера очереди (верхний график) и дисперсии (нижний график), при различных значениях коэффициента загрузки ( $\rho$ ). Из рис. 6 видно, что в отличие от видеотрафика (рис. 4), при малых загрузках оценка размера очереди близка к значению оценок дисперсии, а влияние корреляционной составляющей соизмеримо с влиянием дисперсии.

## 6.2. Численные результаты

В разделах статьи 1–5  $\rho$  предполагалось фиксированным. Здесь исследуется зависимость величин от  $\rho$ . Поэтому далее используем обозначения, которые связаны с предыдущими следующим образом:  $D_m(\tau) = D_{m(\tau)}(\rho)$ ,  $D_m(\theta) = D_{m(\theta)}(\rho)$ ,  $\overline{q(\tau)} = \overline{q}_{cov}(\rho)$  – значение средней длины очереди, вычисляемое по формуле (11). Через  $cov_{m(\theta)}(\rho) = 2 \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M)$  обозначим

**Таблица 1.** Пуассоновский поток

$\rho$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
$D_{m(\theta)}(\rho)$	$9,71 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-1}$	$2,98 \cdot 10^{-1}$	$4,96 \cdot 10^{-1}$	$7,00 \cdot 10^{-1}$	$9,00 \cdot 10^{-1}$
$cov_{m(\theta)}(\rho)$	$5,42 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-2}$	$6,27 \cdot 10^{-2}$	$2,47 \cdot 10^{-1}$	$8,28 \cdot 10^{-1}$	3,94
$\bar{q}_{cov}(\rho)$	$5,40 \cdot 10^{-3}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$6,37 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$	3,96
$\bar{q}_{exact}(\rho)$	$5,40 \cdot 10^{-3}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$6,37 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$	3,96
$D_{m(\tau)}(\rho)$	$9,97 \cdot 10^{-2}$	$1,99 \cdot 10^{-1}$	$2,99 \cdot 10^{-1}$	$4,98 \cdot 10^{-1}$	$7,00 \cdot 10^{-1}$	$8,99 \cdot 10^{-1}$

**Таблица 2.** Поток видеотрафика

$\rho$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
$D_{m(\theta)}(\rho)$	6,57	$1,04 \cdot 10^1$	$1,40 \cdot 10^1$	$2,08 \cdot 10^1$	$2,76 \cdot 10^1$	$3,49 \cdot 10^1$
$cov_{m(\theta)}(\rho)$	$7,16 \cdot 10^2$	$8,72 \cdot 10^2$	$9,46 \cdot 10^2$	$1,01 \cdot 10^3$	$1,06 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$
$\bar{q}_{cov}(\rho)$	$3,62 \cdot 10^1$	$8,81 \cdot 10^1$	$1,44 \cdot 10^2$	$2,58 \cdot 10^2$	$3,82 \cdot 10^2$	$1,38 \cdot 10^3$
$\bar{q}_{exact}(\rho)$	$3,62 \cdot 10^1$	$8,81 \cdot 10^1$	$1,44 \cdot 10^2$	$2,58 \cdot 10^2$	$3,82 \cdot 10^2$	$1,38 \cdot 10^3$
$D_{m(\tau)}(\rho)$	0,75	2,24	$4,42 \cdot 10^1$	$1,07 \cdot 10^1$	$1,95 \cdot 10^1$	$3,15 \cdot 10^1$

**Таблица 3.** MAP поток

$\rho$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
$D_{m(\theta)}(\rho)$	2,19	3,81	5,07	6,77	7,87	8,67
$cov_{m(\theta)}(\rho)$	3,1	3,98	4,61	7,03	$1,33 \cdot 10^1$	$4,99 \cdot 10^1$
$\bar{q}_{cov}(\rho)$	$4,68 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-1}$	2,17	5,30	$1,22 \cdot 10^1$	$4,84 \cdot 10^1$
$\bar{q}_{exact}(\rho)$	$4,68 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-1}$	2,17	5,30	$1,22 \cdot 10^1$	$4,84 \cdot 10^1$
$D_{m(\tau)}(\rho)$	$3,08 \cdot 10^{-1}$	$9,23 \cdot 10^{-1}$	1,73	3,53	5,71	7,88

**Таблица 4.** Зависимость оценки среднего значения очереди от размера выборки для MAP-потока

$N \setminus \rho$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10 000	0,55	1,40	2,49	3,89	5,83	8,51	12,2	19,6	34,0
20 000	0,51	1,33	2,41	3,79	5,74	8,62	13,0	20,9	40,7
30 000	0,5	1,28	2,35	3,70	5,65	8,44	12,6	20,7	41,6
40 000	0,50	1,29	2,34	3,70	5,66	8,50	12,9	21,1	45,8
50 000	0,49	1,26	2,29	3,62	5,52	8,26	12,6	20,5	45,8
60 000	0,48	1,25	2,26	3,57	5,43	8,08	12,2	20,2	49,2
70 000	0,48	1,22	2,22	3,51	5,38	8,08	12,3	20,5	48,3
80 000	0,47	1,21	2,20	3,50	5,35	8,06	12,3	29,4	48,0
90 000	0,47	1,20	2,19	3,48	5,32	8,01	12,3	20,4	48,5
100 000	0,47	1,19	2,17	3,45	5,30	7,99	12,2	20,3	48,4

на оценка корреляционной составляющей длины очереди в (11). Кроме того,  $\bar{q}_{exact}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(\tau)$ , где  $q_i(\tau)$  последовательно вычисляются по формулам (1). Графические результаты полностью согласуются с численными и были получены на их основе.

Отметим, что в табл. 1 для интервального представления  $m_i(\theta)$  пуассоновского потока  $m_i(\tau)$  присутствует корреляционная составляющая, которая может быть не меньше дисперсионной. Это связано с тем, что пуассоновский поток при переходе от  $m_i(\tau)$  к  $m_i(\theta)$  подвергается изменениям (за счет удаления многих нулевых элементов) и, возможно, становится коррелированным, а также с тем, что выборочные ковариации медленно сходятся к теоретическим (см. замечание 3). Из табл. 2 видно, что корреляционная составляющая сильно преобладает над дисперсионной и определяет длину очереди. В случае МАР-потока (табл. 3) видно, что корреляционная составляющая преобладает, но не так сильно, как для потока видеотрафика.

Наконец, в табл. 4 представлена зависимость оценки среднего размера очереди МАР-потока от объема выборки. Видно, что при больших значениях  $N$  оценка среднего значения очереди стабилизируется с точностью до десятых и сотых, что согласуется с теоремами 1–4.

## 7. Заключение

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. В статье для однолинейной системы массового обслуживания с ожиданием, неограниченным бункером, детерминированным обслуживанием и коррелированным входящим потоком получена формула (11), выражающая среднюю длину очереди через безусловные статистические моменты первого и второго порядков потока, тесно связанного с исходным потоком.

2. Теоретическое значение формулы (11) состоит в том, что для одноканальных систем с детерминированным временем обслуживания впервые получена точная зависимость средней длины очереди от корреляционных свойств входящего потока в предположениях только стационарности в широком смысле и эргодичности этого потока.

3. Непосредственное практическое применение формулы (11) для вычисления средней длины очереди нецелесообразно, так как оно более затратно, чем непосредственное наблюдение очереди по выборке. Однако формулы (11) и (12) стимулируют изучение интервальных представлений  $m_i(\theta)$  входящих потоков, их моделирование и аппроксимацию потоками, для которых автокорреляционная функция может быть точно или приближенно определена параметрами, задающими поток. Это, например, гауссовы потоки. Решение этих задач требует дополнительных исследований.

4. Результаты имитационного моделирования подтверждают справедливость полученного авторами обобщения (11) формулы Хинчина–Поллачека для СМО со стационарными коррелированными потоками.

5. Реальные потоки пакетов видеотрафика в телекоммуникационных сетях имеют высокую степень корреляции, которая и обуславливает наличие



большого размера очереди. Влияние корреляционной составляющей на размер очереди в десятки раз превосходит влияние дисперсии числа заявок на интервалах обслуживания. Анализ примера потока пакетов реального видеотрафика показал, что определяющее влияние на размер очереди в нем оказывает корреляционная составляющая потока.

6. Анализ примера одного из потоков, образуемых с помощью случайного независимого переключения двух пуассоновских потоков с различными параметрами интенсивности, показал, что, несмотря на высокую пачечность результирующего потока, его дисперсия и корреляционные свойства оказывают сопоставимое влияние на средний размер очереди. Следовательно, в первом случае причиной возникновения большой очереди является большая корреляционная составляющая, в то время как во втором случае причинами возникновения очереди являются дисперсия и корреляционная составляющая в сопоставимых пропорциях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leland W.E., Taqqu Murad S., Willinger W., Wilson D.V.* On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic // J. IEEE/ACM Transact. Networking, 1994. V. 2. No. 1. P. 1–15.
2. *Neuts M.F.* Versatile Markovian Point Process // J. Appl. Probab., 1979. V. 16. No. 4. P. 764–779.
3. *Ramaswami V.* The N/G/1 Queue and Its Detailed Analysis // Advances Appl. Probab. 1980. V. 12. No. 1. P. 222–261.
4. *Jagerman D.L., Balcioglu B., Altioek T., Melamed B.* Mean Waiting Time Approximations in the G/G/1 Queue // Queueing Systems. 2004. V. 46. P. 481–506.
5. *Balcioglu B., Jagerman D.L., Altioek T.* Approximate Mean Waiting Time in a GI/D/1 Queue with Autocorrelated Time to Failures // IEEE Transactions. 2007. V. 39. No. 10. P. 985–996.
6. *Карташевский И.В., Сапрыкин А.В.* Обработка коррелированного трафика в узле сети типа G/G/1 // Радиотехника. 2017. № 10. С. 119–125.
7. *Карташевский И.В.* Модель трафика для программно-конфигурируемых сетей // Радиотехника. 2016. № 6. С. 124–129.
8. *Цыбаков Б.С.* Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса // Радиотехника. 1999. № 5. С. 24–31.
9. *Шелухин О.И., Теняжнев А.М., Осин А.В.* Фрактальные процессы в телекоммуникациях / Под ред. О.И. Шелухина. Радиотехника, 2003.
10. *Лихтциндер Б.Я.* Корреляционные связи в пачечных потоках систем массового обслуживания // Телекоммуникации. Наука и технологии. 2015. № 9. С. 8–12.
11. *Лихтциндер Б.Я.* Корреляционные свойства длин очередей в системах массового обслуживания с потоками общего вида // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 3. С. 276–280.
12. *Блатов И.А., Лихтциндер Б.Я.* Об оценке длин очередей в СМО с произвольной корреляцией // Сб. тр. Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ–2018). Самара: Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева, 2018. С. 1607–1616.



13. *Лихтциндер Б.Я.* О некоторых обобщениях формулы Хинчина–Полячека // Инфокоммуникационные технологии. 2007. Т. 5. № 4. С. 253–258.
14. *Вишневецкий В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // *АиТ*. 2017. № 8. С. 3–59.  
*Vishnevskii V.M., Dudin A.N.* Queueing Systems with Correlated Arrival Flows and Their Applications to Modeling Telecommunication Networks // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.
15. *Шульга Ю.Н.* Обобщение формулы Полячека–Хинчина для объемных стохастических сетей // *АиТ*. 1989. № 3. С. 84–98.  
*Shul'ga Yu.N.* Extension of the Polaczek – Khinchin Formula to 3d Stochastic Networks // *Autom. Remote Control*. 1989. V. 50. No. 3. P. 355–365.
16. *Jain G., Sigman K.* A Pollaczek-Khinchine Formula for M/G/1 Queues with Disasters // *J. Appl. Prob.* 1996. V. 33. P. 1191–1200.
17. *Лихтциндер Б.Я.* Интервальный метод анализа мультисервисного трафика сетей доступа // *Электросвязь*. 2015. № 12. С. 52–54.
18. *Лихтциндер Б.Я.* Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая линия – Телеком, 2018.
19. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.
20. *Лихтциндер Б.Я.* Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа. Самара ПГУТИ, 2015.
21. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
22. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // *Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. Т. 13. № 4. С. 50–60.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневецким.*

Поступила в редакцию 15.09.2019

После доработки 25.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021

## Управление в технических системах

© 2022 г. К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук, член-корр. НАН Азербайджана  
(kamil\_aydazade@gambler.ru)

(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку;

Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку),

В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif\_ab@gambler.ru)

(Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку;

Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

### УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕКУЩЕЙ И ПРЕДЫДУЩЕЙ ПО ВРЕМЕНИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

На примере процесса нагрева стержня в печи исследуется задача синтеза управления объектами с распределенными параметрами с обратной связью. Для формирования значений управляющих воздействий предлагается использовать их линейную зависимость от значений состояния в точках замера как в текущий, так и в предыдущий моменты времени. Неизвестные коэффициенты, участвующие в этой зависимости управления от замеренных значений состояния, являются параметрами обратной связи. Они определяются минимизацией целевого функционала с использованием численных методов оптимизации первого порядка. Для этого получены формулы градиента целевого функционала по параметрам обратной связи. Приводятся результаты численных экспериментов.

*Ключевые слова:* система с распределенными параметрами, процесс нагрева, обратная связь, коэффициент усиления, точка контроля, градиент функционала, параметры обратной связи.

DOI: 10.31857/S0005231022010081

#### 1. Введение

В работе на примере задачи управления нагревом стержня в печи с обратной связью предлагается подход к синтезу управляющих воздействий, использующий результаты замера состояния процесса в заданных точках контроля не только в текущий момент времени  $t$ , но и в момент  $t - \tau$ , где  $\tau$  – некоторый заданный параметр. Предложена формула линейной зависимости текущего значения управляющего воздействия от замеренных значений в точках замера, включающая неизвестные постоянные параметры обратной связи. В результате задача синтеза управления редуцируется в задачу параметрического оптимального управления распределенной системой с запаздывающим аргументом по определению оптимальных значений параметров

обратной связи, участвующих в формулах зависимости значений управлений от замеренных значений состояний в точках контроля.

Отметим, что в отличие от задач синтеза управления объектами с сосредоточенными параметрами, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений [1–4], эти задачи для объектов с распределенными параметрами исследованы существенно меньше. Это было связано, во-первых, со сложностью как исследования самих краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными, так и численного их решения. Во-вторых, имелись сложности технического и технологического характера, связанные с оперативностью, точностью проводимых замеров и обработки их результатов, в-третьих, отсутствие достаточно эффективных математических методов и мощных вычислительных средств для своевременного принятия решения по определению текущих значений управляющих воздействий.

В 60–70-е годы прошлого века в связи с развитием вычислительных средств и математического аппарата эти работы существенно активизировались как в теоретическом направлении, так и для практических приложений. Здесь следует отметить работы [5–11], которыми были предложены различные подходы к построению систем управления с обратной связью. В работах [5, 12, 13] описаны системы управления реальными технологическими процессами, техническими объектами с распределенными параметрами.

Предлагаемый в данной работе подход, развивающий работы [10, 11] на случай использования текущих и предыдущих во времени результатов замеров, может быть использован для объектов, у которых нет возможности оперативного замера значений всего вектора состояния или точность замеров не достаточно высока. Например, при нагреве стержня замер температуры в его отдельных точках не позволяет судить о текущей динамике (скорости) процесса нагрева, а измерительная техника, позволяющая это сделать, пока отсутствует или недостаточно точна.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача регулирования температуры стержня длиной  $l$  в печи, состояние которого описывается начально-краевой задачей:

$$(2.1) \quad u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \mu_1 [\vartheta(t) - u(x, t)], \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (t_0, T),$$

$$(2.2) \quad u(x, t) = u^0(x, t; \varphi), \quad \varphi = \text{const}, \quad \varphi \in \Phi \subset R^m, \quad x \in [0, l], \quad t \leq t_0,$$

$$(2.3) \quad u_x(0, t) = -\mu_2 [\vartheta(t) - u(0, t)], \quad t \geq t_0,$$

$$(2.4) \quad u_x(l, t) = \mu_2 [\vartheta(t) - u(l, t)], \quad t \geq t_0.$$

Здесь  $u(x, t)$  – температура стержня в точке  $x \in [0, l]$  в момент времени  $t$ ;  $T$  – длительность процесса управления;  $u^0(x, t; \varphi)$  – параметрически заданная непрерывная функция, определяющая температуру стержня при  $t \leq t_0$ . Точное значение  $m$ -мерного скалярного вектора параметров  $\varphi$  не задано, но известно, что его значения принадлежат заданному компактному множеству

$\Phi \subset R^m$  с заданной функцией плотности  $\rho_{\Phi}(\varphi)$  такой, что

$$\rho_{\Phi}(\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in \Phi, \quad \int_{\Phi} \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi = 1.$$

Заданные коэффициенты  $\mu_1, \mu_2$  характеризуют процесс теплопередачи между печью и стержнем. Поддержание температуры самой печи осуществляется управляемым внешним источником тепла, создающего в печи температуру, определяемую кусочно-непрерывной функцией  $\vartheta(t)$ , удовлетворяющей технологическому ограничению:

$$(2.5) \quad \vartheta(t) \in V = \{\vartheta : \underline{\vartheta} \leq \vartheta \leq \bar{\vartheta}\}, \quad t \in [t_0, T],$$

значения  $\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta}$  заданы.

Рассматриваемая задача управления процессом (2.1)–(2.4) заключается в определении допустимой управляющей функции  $\vartheta(t)$ , приводящей состояние стержня к заданному состоянию, определяемой непрерывной функцией  $U(x)$  при условии, что в момент времени  $t_0$  на стержне имеются точки  $x \in [0, l]$ , состояние  $u(x, t_0)$  в которых по каким-либо причинам вышло из требуемого по технологическим соображениям диапазона температуры на стержне:

$$(2.6) \quad \underline{u} \leq u(x, t_0) \leq \bar{u}.$$

Предельные значения температуры стержня  $\underline{u}, \bar{u}$  считаются заданными и определяются из технологических требований.

Управление  $\vartheta(t)$  должно доставлять минимум некоторому заданному функционалу, например следующему:

$$(2.7) \quad J_T(\vartheta) = \int_{\Phi} \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l \mu(x) [u(x, t; \vartheta, \varphi) - U(x)]^2 dx dt d\varphi + \\ + \alpha \int_{t_0}^T [\vartheta(t) - V_{\alpha}(t)]^2 dt.$$

Здесь функция  $u(x, t; \vartheta, \varphi)$  является решением начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) при заданных допустимых управлении  $\vartheta(t) \in V, t \in [t_0, T]$  и начальном условии  $u^0(x, 0; \varphi), \varphi \in \Phi; \mu(x) \geq 0$  – заданная весовая функция;  $[T - \Delta T, T]$  заданный отрезок времени, в течение которого оценивается степень устойчивости достижения заданного желаемого распределения температуры на стержне; параметры  $\alpha, V_{\alpha}(t)$  введены для регуляризации целевого функционала задачи.

Функционал (1.7) определяет качество управления множеством (пучком) функций  $u(x, t; \vartheta, \varphi)$ , являющихся решением дифференциального уравнения (1.1) и удовлетворяющих краевым условиям (2.3), (2.4), с начальными условиями  $u^0(x, t_0; \varphi)$  при значениях параметра  $\varphi$  из заданного множества  $\Phi$ .

Как видно из целевого функционала (2.7), в задаче требуется не только достичь желаемого распределения температуры  $U(x)$  на стержне в заданный момент времени  $T - \Delta T$ , но и поддерживать его в течение заданного отрезка времени  $[T - \Delta T, T]$ . Такое свойство качества управления требуется, как правило, в системах оптимального (финитного) регулирования [5].

Пусть в  $N_c$  точках  $\xi_j$  стержня непрерывно во времени производятся замеры температуры,  $u_i(t) = u(\xi_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , используемые для формирования текущего значения управления  $\vartheta(t)$ .

В качестве зависимости управления  $\vartheta(t)$  от замеренных значений используем следующую формулу:

$$(2.8) \quad \vartheta(t) = \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U(\xi_i)) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U(\xi_i))], \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь постоянные  $k_{1i}$ ,  $k_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, L$ , являются оптимизируемыми параметрами обратной связи, определяющими текущие значения управления в процессе нагрева.

Как видно из (2.8), в формировании управляющего воздействия участвуют не только текущие значения температуры в точках замера, но и значения температуры в этих точках в предыдущий момент времени, а именно при  $t - \tau$ . Значение  $\tau$  задано, и оно назначается в зависимости от точности проведения замеров и динамики (скорости) протекания процесса: для быстро протекающих процессов  $\tau$  необходимо назначать малым, а для медленно протекающих процессов  $\tau$  выбирается таким, чтобы за промежуток времени  $(t - \tau, t)$  изменение состояния процесса существенно превышало как точность проводимых замеров, так и решения краевой задачи (1.1)–(2.4). Из практических соображений предполагается выполнение условия  $\tau < \Delta T$ .

Оптимизируемые параметры  $k_{1i}$ ,  $k_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, L$ , как и в задачах синтеза управления в системах с сосредоточенными параметрами, будем называть коэффициентами усиления.

Введя обозначение для заданной функции  $U(x)$   $U_i = U(\xi_i)$ , зависимость (2.8) запишем так:

$$(2.9) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L (k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)), \quad t \in [t_0, T],$$

и будем ее использовать в дальнейшем.

Здесь использовано обозначение для оптимизируемых параметров обратной связи  $\mathbf{K} = (k_1, k_2) \in R^{2L}$ ,  $k_1 = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1L})$ ,  $k_2 = (k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2L})$ .

Управление с обратной связью  $\vartheta(t)$ , определенное формулой (2.9), в силу свойства решения дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом, является не только непрерывным при всех  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ , но, более того, его гладкость улучшается во времени [13].

Рассмотрим также случай, когда имеется возможность осуществлять замеры температуры только в заданные дискретные моменты времени  $\bar{t}_{j+1} =$

$= t_0 + j\Delta t$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_t - 1$ ,  $\bar{t}_0 = t_0$ ,  $\Delta t = (T - t_0)/N_t$ . Значение  $\Delta t$  определяется технологическими особенностями как самого процесса нагрева, так и возможностями проведения замеров.

Для управления  $\vartheta(t)$  в этом случае используем следующую, аналогичную (1.8), зависимость от замеренных в дискретные моменты времени значений состояния:

$$(2.10) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L (k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)), \\ t \in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1.$$

Значение запаздывания  $\tau$  должно выбираться, естественно, кратным значению  $\Delta t$ , т.е.  $\tau = \sigma\Delta t$ ,  $\sigma = 1, 2, \dots$ , и удовлетворять тем же требованиям, что и при непрерывной обратной связи.

Управление  $\vartheta(t)$ , определяемое зависимостью (2.10) при дискретной обратной связи, непрерывно на интервалах  $(\bar{t}_j, \bar{t}_{j+1})$ , а в моменты времени  $\bar{t}_j$  проведения замеров состояния процесса может претерпевать конечные скачки. Состояние самого процесса нагрева в эти моменты времени изменяется непрерывно.

Для случая непрерывной обратной связи подставим зависимость (1.9) в дифференциальное уравнение (2.1) и в краевые условия (2.3), (2.4), получим уравнение

$$(2.11) \quad u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \\ + \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)] - \\ - \mu_1 u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

и краевые условия

$$(2.12) \quad u_x(0, t) = \mu_2 u(0, t) - \\ - \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)], \quad t \geq t_0,$$

$$(2.13) \quad u_x(l, t) = -\mu_2 u(l, t) + \\ + \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)], \quad t \geq t_0.$$

Дифференциальное уравнение (2.11) характеризуется следующими особенностями: во-первых, оно является уравнением с запаздывающим аргументом по времени в фазовой переменной [14]; во-вторых, оно является точно нагруженным по временной переменной [15–18]. В-третьих, краевые условия (2.12), (2.13) имеют запаздывание во времени и являются нелокальными, так

как в них участвуют значения искомой функции в промежуточных точках. Такие условия называют также неразделенными [11, 19]. Работы, в которых рассматривались начально-краевые задачи одновременно с такими особенностями, авторам не встречались. Использование имеющихся результатов, отдельных для каждой из особенностей (метод шагов во времени для систем с запаздыванием [15] и метод сдвига для нелокальных нагруженных уравнений [17, 18]), не представляет каких-либо проблем для исследования и численного решения полученной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13). Схема решения этих задач будет изложена в разделе 4 при описании результатов компьютерных экспериментов на примере иллюстративной задачи.

В случае дискретной во времени обратной связи (2.10) в промежутках между замерами дифференциальное уравнение (1.1) имеет вид

$$(2.14) \quad \begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) + \\ &+ \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)] - \mu_1 u(x, t), \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

а в моменты времени замеров  $\bar{t}_j, j = 1, \dots, N_t - 1$  выполняется условие непрерывности процесса

$$(2.15) \quad u(x, \bar{t}_i^+) = u(x, \bar{t}_i^-), \quad x \in [0, l], \quad i = 1, \dots, N_t - 1.$$

Здесь использованы обозначения:

$$u(x, \bar{t}_i^+) = u(x, t_j + 0), \quad u(x, \bar{t}_i^-) = u(x, t_j - 0).$$

Краевые условия в этом случае будут иметь вид:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} u_x(0, t) &= \mu_2 u(0, t) - \\ &- \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)], \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

$$(2.17) \quad \begin{aligned} u_x(l, t) &= -\mu_2 u(l, t) + \\ &= \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)], \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1. \end{aligned}$$

Ограничение (2.5) на управляющее воздействие, учитывая зависимость (2.9) и условия на состояние температуры при протекании процесса регулирования (2.6), несложно привести к следующим ограничениям на параметры обратной связи:

$$(2.18) \quad \sum_{i=1}^L (k_{1i} + k_{2i}) (\bar{u} - U_i) \leq \bar{\vartheta},$$

$$(2.19) \quad \sum_{i=1}^L (k_{1i} + k_{2i}) (\underline{u} - U_i) \geq \underline{\vartheta}.$$

Ясно, что ограничения (2.18), (2.19) являются линейными по  $\mathbf{K}$ .

Целевой функционал (2.7) на случай управления с обратной связью запишем в виде

$$(2.20) \quad J_T(\mathbf{K}) = \int_{\Phi} I(\mathbf{K}; \varphi) \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi,$$

$$(2.21) \quad I(\mathbf{K}; \varphi) = \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l \mu(x) [u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x)]^2 dx dt + \alpha \left\| \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha} \right\|_{R^{2L}}^2,$$

где  $\alpha, \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha} \in R^{2L}$  – параметры регуляризации функционала.

Таким образом, задача оптимального управления процессом нагрева как с непрерывной, так и дискретной обратной связью заключается в определении таких параметров обратной связи  $\mathbf{K} \in R^{2L}$ , удовлетворяющих ограничениям (2.18) при непрерывной и (2.19) при дискретной обратной связи, при которых совместно с решением соответствующих начально-краевых задач (2.11)–(2.13), (2.2) и (2.14), (2.2)–(2.4) функционал (2.20), (2.21) принимает минимальное значение.

Исследуемая далее полученная задача относится к параметрическим задачам оптимального управления, поскольку непосредственно оптимизируемым является конечномерной вектор  $\mathbf{K} \in R^{2L}$ . Специфическими особенностями дифференциальных уравнений, как указывалось выше, являются наличие запаздывания во времени у фазовой переменной и точечная нагруженность по пространственной переменной. Специфика задачи заключается и в целевом функционале (2.20), (2.21), оценивающим на некотором конечном промежутке времени  $[T - \Delta T, T]$  поведение множества решений начально-краевой задачи (пучка-траекторий), параметры  $\varphi$  начальных условий  $u^0(x, t_0; \varphi)$  которых принадлежат множеству  $\Phi$ . Отметим еще одну важную специфическую особенность полученной задачи. Несмотря на то что исходная задача оптимального управления без обратной связи (2.1)–(2.7) является, как несложно проверить, выпуклой, задачи как с непрерывной, так и с дискретной обратной связью являются невыпуклыми. Это видно из зависимостей (2.9), (2.10), в которых участвуют произведения оптимизируемых параметров  $\mathbf{K}$  и зависящих от них, в общем случае нелинейно, значений фазовой переменной в точках замера  $u(\xi_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, L$ . Эта особенность важна и требует привлечения к ее численному решению каких-либо подходов к отысканию глобального оптимума. Одним из таких подходов является применение известных эффективных методов локальной оптимизации с использованием различных начальных точек поиска для оптимизируемого вектора  $\mathbf{K} \in R^{2L}$  (метод мултистарта). В следующем разделе будет изложен предлагаемый подход и получены необходимые формулы для применения эффективных локальных методов оптимизации первого порядка.



### 3. Подход к численному решению задачи синтеза управления

Для численного решения полученной задачи параметрического оптимального управления (2.11), (2.2), (2.12), (2.13), (2.18)–(2.21) с учетом линейности ограничений (2.18), (2.19) на оптимизируемые параметры, а следовательно, выпуклости допустимой области параметров  $\mathbf{K}$  предлагается использовать метод проекции градиента [20, 21].

$$(3.1) \quad \mathbf{K}^{s+1} = P_{(2.17),(2.18)}(\mathbf{K}^s - \gamma_s \text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}^s)),$$

$$(3.2) \quad \gamma_s = \arg \min_{\gamma \geq 0} J_T(P_{(2.18),(2.19)}(\mathbf{K}^s - \gamma \text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}^s))), \quad s = 0, 1, \dots$$

Здесь  $\text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}) - 2L$ -мерной вектор компонент градиента целевого функционала (2.20), (2.21);  $\gamma_s$  – величина шага одномерной оптимизации по направлению градиента на  $s$ -й итерации, определяемой, например, методом золотого сечения;  $\mathbf{K}^0$  – некоторое начальное значение вектора параметров обратной связи (в случае, если оно не удовлетворяет ограничениям (2.18), (2.19), необходимо его предварительно спроектировать на допустимую область). Для построения оператора проектирования  $P_{(2.18),(2.19)}(\mathbf{K})$  произвольного вектора  $\mathbf{K} \in R^{2L}$  на допустимую область, определяемую линейными неравенствами (2.18), (2.19), имеются известные конструктивные формулы [13, 20, 21].

Как было отмечено выше, полученная задача параметрического оптимального управления может быть многоэкстремальной по оптимизируемым параметрам  $\mathbf{K}$ , а метод (3.1), (3.2) позволяет отыскивать лишь ближайшую к точке  $\mathbf{K}^0 \in R^{2L}$  точку локального минимума целевого функционала. Поэтому в приведенных расчетах использовался метод “мультистарта”, заключающийся в многократном применении итерационной процедуры (3.1), (3.2) для различных допустимых начальных точек  $\mathbf{K}^0$ . При этом за решение принимается тот вектор локального минимума  $\mathbf{K}^*$ , которому соответствует меньшее значение целевого функционала.

Ясно, что для реализации процедуры (3.1), (3.2) важную роль имеет вектор градиента целевого функционала  $\text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K})$ . Далее в теореме показана дифференцируемость целевого функционала  $J_T(\mathbf{K})$  и приведены формулы для компонент его градиента.

*Теорема 1. При принятых допущениях на функции и параметры задачи (2.1)–(2.4), (2.7) функционал (2.20), (2.21) задачи управления (2.11), (2.2), (2.12), (2.13), (2.18)–(2.21) с обратной связью (2.9) дифференцируем по допустимым значениям параметров обратной связи  $\mathbf{K}$ , а компоненты градиента определяются формулами*

$$(3.3) \quad \text{grad}_{k_{1i}} J_T(\mathbf{K}) = \int_{\Phi} \left[ \int_{t_0}^T \left( -a^2 \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \right. \\ \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 (k_{1i} - \tilde{k}_{1i}) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\begin{aligned}
\text{grad}_{k_{2i}} J_T(\mathbf{K}) = & \int_{\Phi} \left[ \int_{t_0}^{T-\tau} \left( -a^2 \mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \right. \\
(3.4) \quad & \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left( k_{2i} - \tilde{k}_{2i} \right) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad -\tau \leq t \leq T - \tau,
\end{aligned}$$

где  $u(x, t; \varphi)$  – решение начально-краевой задачи (2.11)–(2.13), (2.2);  $\psi(x, t)$  – решение следующей сопряженной начально-краевой задачи при каждом заданном допустимом значении параметра  $\varphi$ :

$$(3.5) \quad \psi_t(x, t) = -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t), \quad t_0 \leq t \leq T - \Delta T,$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \psi_t(x, t) = -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t) + 2\mu(x) (u(x, t; y, \varphi) - U(x)), \\ T - \Delta T < t \leq T, \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad \psi(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$(3.8) \quad \psi_x(0, t) = \mu_2 \psi(0, t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$(3.9) \quad \psi_x(l, t) = -\mu_2 \psi(l, t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad \psi_x(\xi_i^+, t) = & \psi_x(\xi_i^-, t) + \mu_2 k_{1i} (\psi(0, t) + \psi(l, t)) + \frac{\mu_1 k_{1i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t) dx, \\
& t_0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad \psi_x(\xi_i^+, t + \tau) = & \psi_x(\xi_i^-, t + \tau) + \mu_2 k_{2i} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) + \\
& + \frac{\mu_1 k_{2i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx, \quad t_0 \leq t \leq T - \tau,
\end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \psi(\xi_i^+, t) = \psi(\xi_i^-, t), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

В случае дискретной по времени обратной связи в виде зависимости (2.10) имеет место следующая

*Теорема 2.* При принятых допущениях на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1)–(2.4), (2.7), функционал (2.20), (2.21) задачи управления (2.14)–(2.17), (2.2) при дискретной обратной связи (2.8) дифференцируем по параметрам обратной связи  $\mathbf{K}$  при их допустимых значениях, компоненты градиента целевого функционала определяются формулами

$$\begin{aligned}
\text{grad}_{k_{1i}} J_T(\mathbf{K}) = & \int_{\Phi} \left[ \sum_{j=0}^{N_t-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t} \left( -a^2 \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \right. \\
& \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left( k_{1i} - \tilde{k}_{1i} \right) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{grad}_{k_{2i}} J_T(\mathbf{K}) = \\ & = \int_{\Phi} \left[ \sum_{j=0}^{N_t-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t - \tau} \left( -a^2 \mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left( k_{2i} - \tilde{k}_{2i} \right) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad \bar{t}_j - \tau \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \end{aligned}$$

а функция  $\psi(x, t)$  при каждом заданном допустимом значении параметра  $\varphi$  и соответствующей функции  $u(x, t; \varphi)$  решения начально-краевой задачи (2.14)–(2.17), (2.2) определяется решением сопряженной начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi_t(x, t) &= -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \\ \psi_t(x, t) &= -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t) + 2\mu(x) (u(x, t; y, \varphi) - U(x)), \\ & \quad \bar{t}_j + \Delta t - \tau < t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \\ \psi(x, T) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \psi_x(0, t) &= \mu_2 \psi(0, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \\ \psi_x(l, t) &= -\mu_2 \psi(l, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

в точках  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , при  $\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t$  должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \psi_x(\xi_i^-, t_j) &= \psi_x(\xi_i^+, t_j) - \mu_2 k_{1i} \sum_{k=1}^{N_t-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\psi(0, \tau) + \psi(l, \tau)) d\tau, \\ & \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_t - 1, \\ \psi(\xi_i^+, t) &= \psi(\xi_i^-, t), \quad i = 1, \dots, L, \\ \psi_x(\xi_i^+, t_j + \tau) &= \psi_x(\xi_i^-, t_j + \tau) + \mu_2 k_{2i} \sum_{k=1}^{N_t-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) dt, \\ & \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

а в точках  $t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_t - 1$ , при  $x \in [0, l]$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi(\xi_i, t_j^-) &= \psi(\xi_i, t_j^+) - \frac{\alpha}{a^2} \sum_{\nu=1}^L k_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\xi_{\nu}}^{\xi_{\nu+1}} \psi(x, t) dx dt, \\ & \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1. \end{aligned}$$

Сформируем необходимые условия оптимальности параметров обратной связи  $\mathbf{K}$  в вариационной форме.

*Теорема 3. Для оптимальности параметров обратной связи  $\mathbf{K}^* \in R^{2L}$  в задаче синтеза (2.11)–(2.13), (2.20), (2.21) с непрерывной обратной связью (2.9) необходимо выполнение условия*

$$(\text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}^*), \mathbf{K} - \mathbf{K}^*) \geq 0$$

для произвольного допустимого вектора  $\mathbf{K} \in R^{2L}$ , удовлетворяющего условиям (2.18), (2.19), где градиент целевого функционала (2.20), (2.21) определяется формулами (3.3)–(3.12).

Аналогичную теорему можно сформировать для случая дискретной обратной связи (2.10).

#### 4. Результаты компьютерных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении задачи (2.1)–(2.7), для следующих функций и значений параметров, участвующих в постановке задачи:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad T = 2, \quad a = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu(x) = 1, \\ l = 1, \quad u^0(x, t; \varphi) = \varphi, \quad x \in [0, 1], \quad \Phi = \{55, 60, 65\}, \\ \underline{\vartheta} = 10, \quad \bar{\vartheta} = 1000, \quad \Delta T = 1, \quad U(x) = 85, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

При проведении экспериментов время запаздывания  $\tau$ , число  $L$  точек непрерывного во времени контроля и места их размещения принимали различные значения. В приводимых далее результатах были использованы следующие значения параметров:  $\tau = 0,05$ ,  $L = 2$ ,  $\xi_1 = 0,3$ ,  $\xi_2 = 0,6$ .

Для реализации итерационной процедуры (3.1), (3.2) использовались полученные выше формулы для компонентов градиента (3.3), (3.4).

Для решения прямой (2.11)–(2.13) и сопряженной (3.5)–(3.12) начально-краевых задач при заданных текущих значениях параметров обратной связи  $\mathbf{K}$  и начальном условии  $\varphi \in \Phi$  использовалась неявная схема метода сеток с шагами дискретизации по  $x$  и  $t$ , соответственно равными  $h_x = 0,01$ ,  $h_t = 0,01$  [22]. Для учета запаздывания  $\tau$  использовался метод шагов [14]. К нелокальным краевым условиям (2.12), (2.13) прямой задачи и (3.8)–(3.12) сопряженной задачи после дискретизации применялась схема сдвига условий, описанная в [18] основанная на идее метода прогонки [23].

С учетом возможности многоэкстремальности функционала (2.20), (2.21) в качестве начальной точки для итерационной процедуры (3.1), (3.2) использовались разные точки, в частности приведенные в табл. 1. В этой же таблице приведены соответствующие этим точкам значения целевого функционала.

В табл. 2 приведены полученные с применением процедуры (3.1), (3.2) оптимальные значения параметров обратной связи. Отметим, что при дальнейших итерациях процедуры (3.1) оптимизируемые параметры и значение

**Таблица 1.** Начальные значения оптимизируемых параметров  $k_{11}^0, k_{12}^0, k_{21}^0, k_{22}^0$  и соответствующие значения функционала

$N$	$k_{11}^0$	$k_{12}^0$	$k_{21}^0$	$k_{22}^0$	$J_T^0(\mathbf{K})$
1	6,0000	9,0000	7,0000	8,0000	4514,7446001
2	0,5000	0,9000	0,3000	0,6000	4440,8716378

**Таблица 2.** Полученные значения параметров обратной связи (2.9) и целевого функционала

$N$	$T$	$\chi$	$k_{11}^{(*)}$	$k_{12}^{(*)}$	$k_{21}^{(*)}$	$k_{22}^{(*)}$	$J_T^{(*)}(\mathbf{K})$
1	1	0%	-0,54691	1,51775	1,36562	1,42903	0,00000042134
		1%	-0,54655	1,50549	1,37056	1,42836	0,00000063847
		3%	-0,53125	1,51231	1,37452	1,44927	0,00000095917
	2	0%	-0,54693	1,51773	1,36560	1,42901	0,00000041473
		1%	-0,54827	1,51537	1,36314	1,42821	0,00000052774
		3%	-0,54949	1,50465	1,35546	1,41236	0,00000091645
2	1	0%	0,86006	1,31130	0,65608	1,00734	0,00000042441
		1%	0,84875	1,30618	0,65785	1,00908	0,00000053893
		3%	0,85589	1,30355	0,65777	1,00626	0,00000061959
	2	0%	0,86004	1,31128	0,65606	1,00732	0,00000041806
		1%	0,85746	1,31135	0,64758	1,00563	0,00000062639
		3%	0,86481	1,31407	0,66105	1,00586	0,000000724320

функционала практически не изменялись. В этой же таблице приведены значения параметров обратной связи, полученные процедурой оптимизации (3.1), (3.2) при условии, что замеры фазового состояния в точках контроля  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  проводятся не точно, а с погрешностью  $\chi\%$ . Замеренные значения с погрешностью определялись по формуле

$$u(t) = u(\xi_i, t) = u(\xi_i, t)(1 + \chi s(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

где случайные значения  $s(t)$  при каждом  $t \in [t_0, T]$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[-1; 1]$  и стандартной программой Randomize.

Как видно из таблицы, параметры обратной связи достаточно устойчивы к погрешностям проводимых замеров.

Для сравнения предлагаемого подхода к синтезу управления проводились эксперименты с решением задачи синтеза управления с обратной связью без использования предыдущих по времени результатов замеров в виде [10]:

$$(4.1) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L k_{ij}(u(\xi_i, t) - U_i), \quad t \in [t_0, T].$$

**Таблица 3.** Начальные значения параметров обратной связи (4.1) и соответствующие значения целевого функционала

$N$	$k_{11}^0$	$k_{12}^0$	$J_T^0(\mathbf{K})$
1	6,0000	9,0000	4068,59998
2	0,5000	0,9000	4188,42555

**Таблица 4.** Полученные значения параметров обратной связи (4.1) и целевого функционала

$N$	$T$	$\chi$	$k_{11}^{(*)}$	$k_{12}^{(*)}$	$J_T^{(*)}(\mathbf{K})$
1	1	0%	0,75542	2,98977	0,24977233550
		1%	0,75533	2,98965	0,24982552763
		3%	0,75512	2,98936	0,25005961886
	2	0%	0,53942	2,74553	0,23500497418
		1%	0,53891	2,74491	0,23519332257
		3%	0,53877	2,74476	0,23525947935
2	1	0%	1,64570	2,21322	0,24976508234
		1%	1,64565	2,21315	0,24985018452
		3%	1,64522	2,21257	0,24996574232
	2	0%	1,43147	1,96693	0,23500821019
		1%	1,43110	1,96645	0,23522688761
		3%	1,43026	1,96523	0,23564519287

Как видно, в (4.1) для формирования текущего значения управления  $\vartheta(t)$  не используется информация о фазовом состоянии в предыдущие моменты времени.

В табл. 3 проведены значения начальных значений параметров обратной связи из (4.1), использованные для итерационной процедуры (3.1), (3.2), и соответствующие значения целевого функционала.

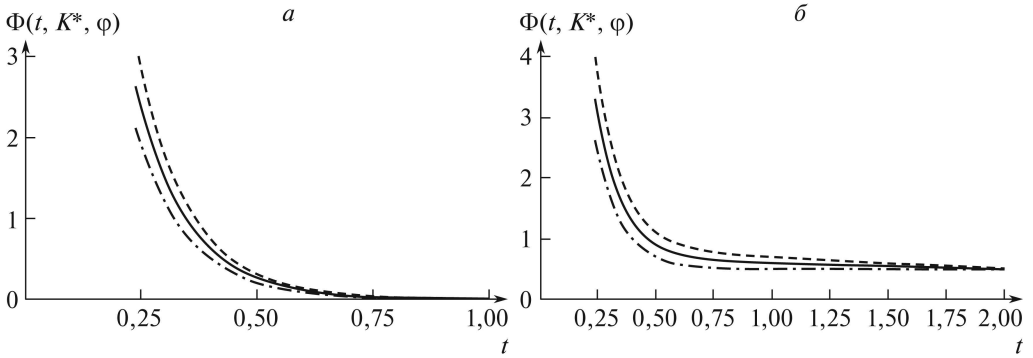
В табл. 4 аналогично табл. 2 приведены полученные оптимальные значения параметров обратной связи в виде (4.1) при различных уровнях погрешностей  $\chi$  проводимых замеров.

Введем функционал

$$\Phi(t; \mathbf{K}, \varphi) = \left( \int_0^l [u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x)]^2 dx \right)^{1/2},$$

характеризующий состояние процесса нагрева всего стержня в интегральном смысле, при параметрах обратной связи  $\mathbf{K}$  и начальном условии  $u(x, t_0) = \varphi$ .

На рисунке приведены графики функции  $\Phi(t; \mathbf{K}^*, \varphi)$  при оптимальных значениях параметров  $\mathbf{K}^*$ , полученные из первой начальной точки  $\mathbf{K}^0$  (пер-



Графики функционала  $\Phi(t; K^*, \varphi)$ . *a* — для обратной связи вида (1.9); *б* — для обратной связи вида (3.1) для начальных условий:  $\varphi = 55^\circ$  (-----),  $\varphi = 60^\circ$  (—),  $\varphi = 65^\circ$  (- · - ·).

вая строка табл. 1), с состояниями в начальный момент времени  $u(x, t_0) = 55^\circ$ ,  $u(x, t_0) = 60^\circ$ ,  $u(x, t_0) = 65^\circ$ . На рисунке *a* использованы приведенные в первой строке табл. 2 полученные оптимальные значения параметров обратной связи в виде (2.9). На рисунке *б* использованы приведенные в первой строке табл. 4 полученные оптимальные значения параметров обратной связи в виде (4.1).

В случае обратной связи вида (2.9), как видно из рисунка *a*, графики функций  $\Phi(t; K^*, \varphi)$  при  $t \geq 0,75$  для разных начальных условий устанавливаются достаточно близко к  $U(x) = 85$ , а из рисунка *б* следует, что установление при обратной связи вида (4.1) начинает наблюдаться только при  $t \geq 1,5$ .

## 5. Заключение

На примере процесса нагрева стержня предложен подход к синтезу управления в системах с распределенными параметрами. Для формирования текущего управления предлагается использовать информацию о состоянии в точках замера не только в текущий, но и в некоторый предыдущий момент времени.

Применение такого подхода может быть обусловлено невозможностью проведения замера всех компонентов состояния объекта или объекта в целом. В работе задача синтеза параметров обратной связи приведена к задаче параметрического оптимального управления, в котором процесс описывается дифференциальным уравнением с запаздывающими по времени аргументами.

Получены формулы градиента целевого функционала по параметрам обратной связи, сформулированы необходимые условия оптимальности. Приведены численные эксперименты.

Предложенный подход к синтезу управления в системах с распределенными параметрами несложно распространить на другие процессы, описываемые другими видами начально-краевых задач.

*Доказательство теоремы 1.* Из взаимной независимости возможных начальных условий  $u^0(x, t; \varphi)$  при различных параметрах  $\varphi$  имеет место

$$(II.1) \quad \text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}) = \text{grad}_{\mathbf{K}} \int_{\Phi} I(\mathbf{K}; \varphi) \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi = \int_{\Phi} \text{grad}_{\mathbf{K}} I(\mathbf{K}; \varphi) \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi.$$

Поэтому сначала займемся исследованием дифференцируемости функционала  $I(\mathbf{K}; \varphi)$  и получением формул для компонент его градиента по параметрам обратной связи  $\mathbf{K}$  при каком-либо заданном допустимом параметре  $\varphi \in \Phi$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся известным методом приращения оптимизируемых параметров и оценки соответствующего приращения функционала [20].

Пусть вектор параметров обратной связи  $\mathbf{K} = (k_1, k_2)$ , которому соответствует решение  $u(x, t)$  нагруженной краевой задачи (2.11)–(2.13), получил приращение  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} = (k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)$  и этому вектору соответствует решение краевой задачи  $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + \Delta u(x, t)$ .

Из (2.11)–(2.13), (2.2) следует, что  $\Delta u(x, t)$  является решением краевой задачи

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \Delta u_t(x, t) = & a^2 \Delta u_{xx}(x, t) + \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \\ & + \mu_1 \sum_{i=1}^L (u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + \mu_1 \sum_{i=1}^L (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i} - \\ & - \mu_1 \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (t_0, T], \end{aligned}$$

$$(II.3) \quad \begin{aligned} \Delta u_t(0, t) = & \mu_2 \Delta u(0, t) - \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] - \\ & - \mu_2 \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i}], \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

$$(II.4) \quad \begin{aligned} \Delta u_t(l, t) = & -\mu_2 \Delta u(l, t) + \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \\ & + \mu_2 \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i}], \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

$$(II.5) \quad \Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l].$$

Пользуясь известными результатами об устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающей во времени фазовой переменной и нагружен-



ных нелокальных краевых задач, можно показать справедливость оценки  $\|\Delta u(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \alpha \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}}$ , где  $\alpha > 0$  не зависит от  $\mathbf{K}$  [20].

Для приращения функционала (2.19) несложно непосредственно получить представление:

$$\begin{aligned}
 \Delta I(\mathbf{K}; \varphi) &= I(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}; \varphi) - I(\mathbf{K}; \varphi) = \\
 &= 2 \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l \mu(x) [u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x)] \Delta u(x, t) dx dt + \\
 (\text{П.6}) \quad &+ 2 \sum_{i=1}^L \left[ \sigma_1(k_{1i} - \tilde{k}_{1i}) \Delta k_{1i} + \sigma_2(k_{2i} - \tilde{k}_{2i}) \Delta k_{2i} \right] + \\
 &+ R \left( \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}} \right),
 \end{aligned}$$

где остаточный член  $R \left( \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}} \right)$  включает слагаемые второго порядка малости относительно  $\|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}}$  и  $\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}$ . Из этой оценки приращения функционала следует и его дифференцируемость [20].

Получим формулы для компонентов градиента целевого функционала по параметрам обратной связи. Пусть функция  $\psi(x, t)$  некоторая пока произвольная непрерывная всюду в  $\Omega$ , дважды дифференцируемая по  $x$  при  $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, L$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_{L+1} = l$ , дифференцируемая по  $t$  при  $t \in (t_0, T)$ . Умножим (П.2) на  $\psi(x, t)$ , проинтегрируем результат по прямоугольнику  $\Omega$ . С учетом принятых предположений и условий (П.3)–(П.5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u_t(x, t) dx dt - a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{t_0}^T \psi(x, t) \Delta u_{xx}(x, t) dt dx - \\
 (\text{П.7}) \quad &- \int_{t_0}^T \int_0^l \psi(x, t) \left[ \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \right. \\
 &\left. + \mu_1 \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{1i}] - \mu_1 \Delta u(x, t) \right] dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (П.7) и, учитывая (П.3)–(П.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u_t(x, t) dx dt = \\
 (\text{П.8}) \quad &= \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_{t_0}^T \int_0^l \psi_t(x, t) \Delta u(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{II.9}) \quad & a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{t_0}^T \psi(x, t) \Delta u_{xx}(x, t) dt dx = \\
& = a^2 \int_{t_0}^T [(\psi_x(0, t) - \mu_2 \psi(0, t)) \Delta u(0, t) - (\psi_x(l, t) + \mu_2 \psi(l, t)) \Delta u(l, t)] dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T [\psi_x(\xi_i^-, t) - \psi_x(\xi_i^+, t) + \mu_2 k_{1i} (\psi(0, t) + \psi(l, t))] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^{T-\tau} [\psi_x(\xi_i^-, t + \tau) - \psi_x(\xi_i^+, t + \tau) + \mu_2 k_{2i} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau))] \times \\
& \quad \times \Delta u(\xi_i, t) dt + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T [(\psi(\xi_i^+, t) - \psi(\xi_i^-, t)) \Delta u_x(\xi_i, t)] dt + \\
& \quad + a^2 \sum_{i=1}^L \mu_2 \Delta k_{1i} \int_{t_0}^T (\psi(0, t) + \psi(l, t)) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + \\
& \quad + a^2 \sum_{i=1}^L \mu_2 \Delta k_{2i} \int_{t_0}^{T-\tau} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + \\
& \quad + a^2 \int_{t_0}^T \int_0^l \psi_{xx}(x, t) \Delta u(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Используя (П.6)–(П.9), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
(\text{II.10}) \quad & \Delta I(\mathbf{K}; \varphi) = \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \\
& - a^2 \int_{t_0}^T [(\psi_x(0, t) - \mu_2 \psi(0, t)) \Delta u(0, t) - (\psi_x(l, t) + \mu_2 \psi(l, t)) \Delta u(l, t)] dt + \\
& + \int_{t_0}^{T-\Delta T} \int_0^l [-\psi_t(x, t) - a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t)] \Delta u(x, t) dx dt + \\
& + \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l [-\psi_t(x, t) - a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t) + \\
& \quad + 2\mu(x)(u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x))] \Delta u(x, t) dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T \left[ \psi_x(\xi_i^-, t) - \psi_x(\xi_i^+, t) + \mu_2 k_{1i} (\psi(0, t) + \psi(l, t)) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\mu_1 k_{1i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t) dx \right] \Delta u(\xi_i, t) dt - \\
& -a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^{T-\tau} \left[ \psi_x(\xi_i^-, t + \tau) - \psi_x(\xi_i^+, t + \tau) + \mu_2 k_{2i} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\mu_1 k_{2i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
& \qquad \qquad \qquad + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T [(\psi(\xi_i^+, t) - \psi(\xi_i^-, t)) \Delta u_x(\xi_i, t)] dt + \\
& -a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{1i} \left\{ \int_{t_0}^T \left( \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) + \frac{\mu_1}{a^2} \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt - \frac{2}{a^2} (k_{1i} - \tilde{k}_{1i}) \right\} - \\
& -a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{2i} \left\{ \int_{t_0}^{T-\tau} \left( \mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) + \frac{\mu_1}{a^2} \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt - \frac{2}{a^2} (k_{2i} - \tilde{k}_{2i}) \right\} + R \left( \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}} \right).
\end{aligned}$$

В силу произвольности функции  $\psi(x, t)$  потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (3.5)–(3.12).

Учитывая, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получаем:

$$\begin{aligned}
\text{grad}_{k_{1i}} I(\mathbf{K}; \varphi) &= \int_{t_0}^T \left( -a^2 \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \\
& \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left( k_{1i} - \tilde{k}_{1i} \right), \quad i = 1, \dots, L, \quad t_0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

$$\text{grad}_{k_{2i}} I(\mathbf{K}; \varphi) = \int_{t_0}^{T-\tau} \left( -a^2 \mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \\ \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left( k_{2i} - \tilde{k}_{2i} \right), \quad i = 1, \dots, L, \quad -\tau \leq t \leq T - \tau.$$

Учитывая (П.1), получим приводимые в теореме выражения для искомым компонент градиента функционала.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично вышеприведенному с той разницей, что всюду в проводимых выкладках интегрирование по интервалу  $t \in [0, T]$  заменяется интегрированием по отдельным интервалам  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_t - 1$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
2. *Mitkowski W., Bauer W., Zagórska M.* Discrete-Time Feedback Stabilization // Archives of Control Sciences. 2017. V. 27. No. 1. P. 309–321.
3. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2001.
5. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
6. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Control Synthesis for Temperature Maintaining Process in a Heat Supply Problem // Cybern. Syst. Analysis. 2020. V. 56. No. 3. P. 380–391.
7. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: Ленанд, 2019.
8. *Afifi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N.* Feedback Controls for Exact Remediability in Disturbed Dynamical Systems // IMA J. Math. Control Inform. 2018. V. 35. No. 1. P. 411–425.
9. *Coron J.M., Wang Zh.* Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity // SIAM J. Math. Anal. 2012. V. 45. No. 5. P. 2646–2665.
10. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // АИТ. 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.  
*Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Optimizing Placement of the Ccontrol Points at Synthesis of the Heating Process Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
11. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // АИТ. 2012. № 9. С. 3–19.  
*Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 2. P. 1443–1455.
12. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
13. *Ray W.H.* Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981.

14. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
15. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
16. *Алиханов А.А., Березков А.М., Шхануков-Лафшиев М.Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628.
17. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
18. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1585–1595.
19. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Optimization of Loading Places and Load Response Functions for Stationary Systems // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. No. 4. P. 634–644.
20. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2008.
21. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2014.
22. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
23. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 30.07.2021

После доработки 25.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. А.В. ГРАБОВОЙ (grabovoy.av@phystech.edu)  
(Московский физико-технический институт),

В.В. СТРИЖОВ, д-р физ.-мат. наук (strijov@phystech.edu)  
(Московский физико-технический институт;

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва)

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ДИСТИЛЛЯЦИИ<sup>1</sup>

Статья посвящена методам понижения сложности аппроксимирующих моделей. Предлагается вероятностное обоснование методов дистилляции и привилегированного обучения. Приведены общие выводы для произвольной параметрической функции с наперед заданной структурой. Показано теоретическое обоснование для частных случаев: линейной и логистической регрессии. Проводится анализ рассмотренных моделей в вычислительном эксперименте на синтетических выборках и реальных данных. В качестве реальных данных рассматриваются выборки FashionMNIST и Twitter Sentiment Analysis.

*Ключевые слова:* выбор модели, байесовский вывод, дистилляция модели, привилегированное обучение.

DOI: 10.31857/S0005231022010093

### 1. Введение

Увеличение точности аппроксимации в задачах машинного обучения увеличивает сложность моделей и снижает их интерпретируемость. Примерами являются трансформеры [1], BERT [2], ResNet [3] и ансамбли этих моделей.

При построении модели оптимизируются два критерия: сложность и точность аппроксимации модели. Сложность определяет время, которое модель требует для принятия решения, и интерпретируемость модели. Модель меньшей сложности является более предпочтительной [4]. С учетом снижения сложности требуется сохранить приемлемой точность аппроксимации. В данной статье рассматривается метод *дистилляции* модели, предназначенный

---

<sup>1</sup> Настоящая статья содержит результаты проекта Математические методы интеллектуального анализа больших данных, выполняемого в рамках реализации Программы Центра компетенций Национальной технологической инициативы “Центр хранения и анализа больших данных”, поддерживаемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по Договору МГУ им. М.В. Ломоносова с Фондом поддержки проектов Национальной технологической инициативы от 11.12.2018 № 13/1251/2018. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-01155, 19-07-00875, 19-07-00885).

для снижения сложности при сохранении точности моделей. Этот метод строит новые модели на основе ранее обученных моделей.

*Определение 1. Дистилляция модели — снижение ее сложности путем выбора из множества более простых моделей с использованием ответов более сложной модели.*

Основным подходом дистилляции модели учителя в модель ученика является метод, основанный на использовании ответов модели учителя при оптимизации модели ученика [5–10]. В первых публикациях по генерации псевдометок предлагается пополнить множество объектов редких классов с помощью предобученной модели [6]. Это искусственно увеличивает объем обучающей выборки. В [5] предложен метод, в рамках которого моделью учителя генерируются новые метки объектов. Эти метки соответствуют вероятностям классов с некоторым параметром температуры, который позволяет увеличивать или уменьшать дисперсию в полученных ответах учителя. В [5] проведен ряд экспериментов по дистилляции моделей для разных задач машинного обучения: эксперимент на выборке MNIST [11], в котором нейросеть избыточной сложности была дистиллирована в нейросеть меньшей сложности, и эксперимент по распознаванию речи, в котором ансамбль моделей был дистиллирован в одну модель. Также в [5] был проведен эксперимент по обучению экспертных моделей на основе одной большой модели. В [8] предложено добавить к новым вероятностным меткам, введенным Дж. Хинтоном, метки классов, которые соответствуют предсказанному классу модели учителя. Различные подходы к дистилляции рассматривают значение на промежуточных слоях модели учителя [12–14]. В [12, 14] обучение происходит при помощи введения дополнительных матриц, которые выравнивают размеры промежуточных слоев модели учителя и ученика. В [13] предложен метод передачи селективности нейронов, основанный на минимизации максимального среднего отклонения между выходами всех слоев модели учителя и ученика.

*Определение 2. Привилегированная информация — множество признаков, которые доступны только в момент выбора модели, но не в момент тестирования.*

В [15] В.Н. Вапником введено понятие *привилегированной информации*. В [7] метод дистилляции [5] используется вместе с привилегированным обучением [15]. В предложенном методе на первом этапе обучается модель *учителя* в пространстве привилегированной информации, после чего обучается модель *ученика* в исходном признаковом пространстве, используя *дистилляцию* [5]. Для обучения строится функция ошибки специального вида. Эта функция состоит из нескольких слагаемых, включая ошибки учителя, ученика и регуляризирующие элементы. Первые варианты подобной функции ошибки были предложены А.Г. Ивахненко [16].

*Определение 3. Учитель — фиксируемая модель, ответы которой используются при выборе модели ученика.*

*Определение 4. Ученик — модель, которая выбирается согласно заданному критерию.*

Данная статья посвящена вероятностной интерпретации методов дистилляции, предложенных Дж. Хинтоном [5] и В.Н. Вапником [15]. В рамках вероятностного подхода предлагаются анализ и обобщение функции ошибки [5, 7]. Рассматриваются задачи классификации и регрессии в [16]. В ходе вычислительного эксперимента обучается модель ученика с использованием модели учителя и без использования модели учителя. Рассмотрены выборки задач классификации изображений FashionMNIST [17] и классификации текстов Twitter Sentiment Analysis [18]. Выборка FashionMNIST включена в эксперимент вместо выборки MNIST, так как последняя имеет приемлемое качество аппроксимации даже для линейного классификатора. Вычислительный эксперимент рассматривает различные модели: линейную модель, полносвязную нейронную сеть, сверточную нейронную сеть [19], модель Bi-LSTM [20] и модель BERT [2].

## 2. Постановка задачи обучения с учителем

Заданы множество объектов  $\Omega$  и множество целевых переменных  $\mathbb{Y}$ . Множество  $\mathbb{Y} = \{1, \dots, K\}$  для задачи классификации, где  $K$  — число классов, множество  $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$  для задачи регрессии. Для каждого объекта из  $\omega_i \in \Omega$  задана целевая переменная  $y_i = y(\omega_i)$ . Множество целевых переменных для всех объектов обозначим  $\mathbf{Y}$ . Для множества  $\Omega$  задано отображение в признаковое пространство  $\mathbb{R}^n$ :

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad |\Omega| = m,$$

где  $n$  — размерность признакового пространства, а  $m$  — число объектов в множестве  $\Omega$ . Отображение  $\varphi$  отображает объект  $\omega_i \in \Omega$  в соответствующий ему вектор признаков  $\mathbf{x}_i = \varphi(\omega_i)$ . Пусть для объектов  $\Omega^* \subset \Omega$  задана привилегированная информация

$$\varphi^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^{n^*}, \quad |\Omega^*| = m^*,$$

где  $m^* \leq m$  — число объектов с привилегированной информацией,  $n^*$  — число признаков в пространстве привилегированной информации. Отображение  $\varphi^*$  отображает объект  $\omega_i \in \Omega^*$  в соответствующий ему вектор признаков  $\mathbf{x}_i^* = \varphi^*(\omega_i)$ .

Множество индексов объектов, для которых известна привилегированная информация, обозначим

$$\mathcal{I} = \left\{ 1 \leq i \leq m \mid \text{для } i\text{-го объекта задана привилегированная информация} \right\},$$

а множество индексов объектов, для которых неизвестна привилегированная информация, обозначим  $\bar{\mathcal{I}} = \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I}$ .



Пусть на множестве привилегированных признаков задана функция учителя

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{Y}^*,$$

где для задачи регрессии  $\mathbb{Y}^* = \mathbb{R}^1$ , а для задачи классификации  $\mathbb{Y}^*$  является единичным симплексом  $\mathcal{S}_K$  в пространстве размерности  $K$ . Модель учителя  $\mathbf{f}$  ставит объекты  $\mathbf{X}^*$  в соответствие объектам  $\mathbf{S}$ , т.е.  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) = \mathbf{s}_i$ .

Требуется выбрать модель ученика  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  из множества

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \left\{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Y}^* \right\}.$$

Например, для задачи классификации множество  $\mathfrak{G}$  — обобщенно-линейные модели

$$\mathfrak{G}_{\text{lin,cl}} = \left\{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{x}) = \text{softmax}(\mathbf{W}\mathbf{x}), \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times K} \right\}.$$

### 3. Постановка задачи Хинтона и Вапника

Рассмотрим описание метода, предложенного в публикациях [5, 7], в которых предполагается, что для всех данных доступна привилегированная информация  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, m\}$ . В [5] решается задача классификации:

$$\mathfrak{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \quad y_i \in \mathbb{Y} = \{1, \dots, K\},$$

где  $y_i$  — класс объекта. Обозначим через  $\mathbf{y}_i$  вектор вероятности класса объекта  $\mathbf{x}_i$ .

В постановке Хинтона рассматривается параметрическое семейство функций:

$$(2) \quad \mathfrak{G}_{\text{cl}} = \left\{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \text{softmax}(\mathbf{z}(\mathbf{x})/T), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K \right\},$$

где  $\mathbf{z}$  — дифференцируемая параметрическая функция заданной структуры,  $T$  — параметр температуры. В качестве модели учителя  $\mathbf{f}$  рассматривается функция из множества  $\mathfrak{F}_{\text{cl}}$ :

$$(3) \quad \mathfrak{F}_{\text{cl}} = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = \text{softmax}(\mathbf{v}(\mathbf{x})/T), \quad \mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K \right\},$$

где  $\mathbf{v}$  — дифференцируемая параметрическая функция, модель заданной структуры,  $T$  — параметр температуры. Свойства параметра температуры  $T$ :

- 1) при  $T \rightarrow 0$  получаем вектор, в котором один из классов имеет высокую вероятность;
- 2) при  $T \rightarrow \infty$  получаем равновероятные классы.

Функция потерь  $\mathcal{L}$ , в которой учитывается перенос информации от модели учителя  $\mathbf{f}$  к модели ученика  $\mathbf{g}$ , имеет вид:

$$(4) \quad \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = - \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}_{\text{исходная функция потерь}} \Big|_{T=1} - \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)}_{\text{слагаемое дистилляции}} \Big|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0},$$

где  $\cdot|_{T=t}$  обозначает, что параметр температуры  $T$  в предыдущей функции равняется  $t$ .

Получаем оптимизационную задачу

$$(5) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \min_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{cl}} \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}).$$

Публикация [7] обобщает метод, предложенный в [5]. Решение задачи оптимизации (5) зависит только от вектора ответов модели учителя  $\mathbf{f}$ . Следовательно, признаковые пространства учителя и ученика могут различаться. В этом случае получаем постановку задачи:

$$\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^*, y_i)\}_{i=1}^m, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^{n^*}, \quad y_i \in \{1, \dots, K\},$$

где  $\mathbf{x}_i$  — информация, доступная на этапах обучения и контроля, а  $\mathbf{x}_i^*$  — информация, доступная только на этапе обучения. Модель учителя принадлежит множеству моделей  $\mathfrak{F}_{cl}^*$ :

$$(6) \quad \mathfrak{F}_{cl}^* = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = \text{softmax}(\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*)/T), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{R}^K \right\},$$

где  $\mathbf{v}^*$  — дифференцируемая параметрическая функция заданной структуры,  $T$  — параметр температуры. Множество моделей  $\mathfrak{F}_{cl}^*$  отличается от множества моделей  $\mathfrak{F}_{cl}$  из выражения (3). В множестве  $\mathfrak{F}_{cl}$  модели используют пространство исходных признаков, а в множестве  $\mathfrak{F}_{cl}^*$  модели используют пространство привилегированных признаков. Функция потерь (4) в случае модели учителя  $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{cl}^*$  переписывается в виде:

$$(7) \quad \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=1} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) \Big|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0}.$$

Требуется построить модель, которая использует привилегированную информацию  $\mathbf{x}_i^*$  при обучении. Для этого рассмотрим двухэтапную модель обучения, предложенную в [7]:

1) выбираем оптимальную модель учителя  $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{cl}^*$ ;

2) выбираем оптимальную модель ученика  $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}$ , используя дистилляцию [5].

Модель ученика минимизирует (7). Модель учителя минимизирует кросс-энтропийную функцию ошибки

$$\mathcal{L}_{\text{th}}(\mathbf{f}) = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_i^k \log \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*).$$

#### 4. Постановка задачи: вероятностный подход

##### 4.1. Метод максимального правдоподобия

Задано распределение целевой переменной  $p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g})$ . Для поиска  $\hat{\mathbf{g}}$  воспользуемся методом максимального правдоподобия. В качестве  $\hat{\mathbf{g}}$  выбирается функция, которая максимизирует правдоподобие модели:

$$(8) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{i=1}^N p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}),$$

где множество  $\mathfrak{G}$  задается в (1).

##### 4.2. Подход дистилляции модели учителя в модель ученика

Рассмотрим вероятностную постановку, в которой выполнены ограничения:

- 1) задано распределение целевой переменной  $p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g})$ ;
- 2) задано совместное распределение целевой переменной и ответов модели учителя  $p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g})$ ;
- 3) для всех  $\omega \in \Omega^*$  элементы  $\mathbf{y}(\omega)$  и  $\mathbf{s}(\omega)$  являются зависимыми величинами, так как ответы учителя должны коррелировать с истинными ответами;
- 4) если  $|\Omega^*| = 0$ , то решение должно соответствовать решению (8).

Рассмотрим совместное правдоподобие истинных меток и меток учителя:

$$(9) \quad p(\mathbf{Y}, \mathbf{S} | \mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Перепишем  $p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g})$  по формуле условной вероятности:

$$(10) \quad p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) = p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) p(\mathbf{s}_i | \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Подставляя выражения (10) в (9), получим

$$p(\mathbf{Y}, \mathbf{S} | \mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{s}_i | \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

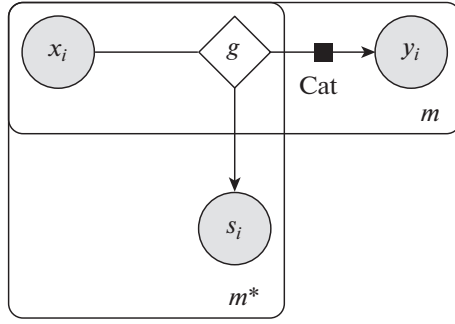


Рис. 1. Вероятностная модель в формате плоских нотаций.

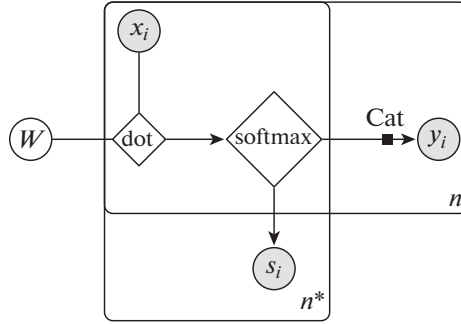


Рис. 2. Вероятностная модель, используемая в синтетическом эксперименте.

Заметим, что  $\mathbf{y}_i$  и  $\mathbf{s}_i$  зависимы только через переменную  $\mathbf{x}_i$ , тогда  $p(\mathbf{s}_i|\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) = p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$ . Получаем совместное правдоподобие

$$(11) \quad p(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Используя (11), получаем оптимизационную задачу для поиска  $\hat{\mathbf{g}}$

$$(12) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Для удобства будем минимизировать логарифм выражения. Тогда из (12) получаем, что

$$(13) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \log p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}),$$

где параметр  $\lambda \in [0, 1]$  введен для взвешивания ошибок на истинных ответах и ошибок ответов учителя.

На рис. 1 показан вид вероятностной модели в графовой нотации для произвольной функции  $\mathbf{g}$ . Для каждой реализации  $\mathbf{g}$  соответствующий блок требует уточнения. На рис. 2 показана более подробная реализация в случае, когда  $\mathbf{g}$  — линейная модель.

## 5. Обучение с учителем для задачи классификации и регрессии

### 5.1. Случай классификации

Для задачи многоклассовой классификации рассматриваются вероятностные предположения:

- 1) рассматривается функция учителя  $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{\text{cl}}^*$  (6);
- 2) рассматривается функция ученика  $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}$  (2);
- 3) для истинных меток рассматривается категориальное распределение  $p(y|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \text{Cat}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ , где  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  задает вероятность каждого класса;
- 4) для меток учителя введем плотность распределения

$$(14) \quad p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = C \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x})^{s^k},$$

где  $g^k$  — вероятность класса  $k$ , которую предсказывает модель ученика, а  $s^k$  — вероятность класса  $k$ , которую предсказывает модель учителя.

**Теорема 1.** Пусть вероятность каждого класса отделима от нуля и единицы, т.е. для всех  $k$  выполняется условие

$$1 > 1 - \varepsilon > g_k(\mathbf{x}) > \varepsilon > 0.$$

Тогда при

$$C = (-1)^K \frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x}) \log g_k(\mathbf{x})$$

функция  $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g})$ , определенная в (14), является плотностью распределения.

**Доказательство.** Во-первых, покажем, что для произвольного вектора ответов  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_K$  выполняется  $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0$ . Заметим, что для всех  $k$  выполняется

$$\log g_k(\mathbf{x}) < 0,$$

тогда

$$C = \underbrace{\frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}}}_{>0} \prod_{k=1}^K \underbrace{g_k(\mathbf{x})}_{>\varepsilon} \underbrace{(-\log g_k(\mathbf{x}))}_{>0} > 0.$$

Так как  $g_k(\mathbf{x}) > 0$  и  $C > 0$ , получаем, что  $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0$ . Во-вторых, покажем, что интеграл по всему пространству ответов  $\mathcal{S}_K$  является конечным:

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \int_{\mathcal{S}_K} p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) ds &= \int_{\mathcal{S}_K} \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x})^{s^k} ds = \prod_{k=1}^K \int_{\mathcal{S}_K} g_k(\mathbf{x})^{s^k} ds = \\
 &= \prod_{k=1}^K \int_0^1 \frac{r^{K-1} \sqrt{K}}{(K-1)! \sqrt{2^{K-1}}} g_k(\mathbf{x})^r dr = \\
 &= \prod_{k=1}^K \underbrace{\frac{\sqrt{K}}{(K-1)! \sqrt{2^{K-1}}}}_D \int_0^1 r^{K-1} g_k(\mathbf{x})^r dr = \\
 &= D^K \prod_{k=1}^K \int_0^1 r^{K-1} \exp(r \log g_k(\mathbf{x})) dr = \\
 &= (-D)^K \prod_{k=1}^K \log g_k(\mathbf{x}) (\Gamma(K) - \Gamma(K, -\log g_k(\mathbf{x}))) = \\
 &= (-D)^K (K-1)!^K \prod_{k=1}^K \log g_k(\mathbf{x}) (1 - g_k(\mathbf{x}) \exp_{K-1}(-\log g_k(\mathbf{x})) + g_k(\mathbf{x})) = \\
 &= \frac{(-\sqrt{K})^K}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^K \log g_k(\mathbf{x}) (1 - g_k(\mathbf{x}) \exp_{K-1}(-\log g_k(\mathbf{x})) + g_k(\mathbf{x})) < \infty,
 \end{aligned}$$

где  $\Gamma(K)$  является гамма-функцией,  $\Gamma(K, -\log g_k(\mathbf{x}))$  является неполной гамма функцией,  $\exp_n(x)$  является суммой Тейлора из первых  $n$  слагаемых. В рамках приближенных расчетов будем считать, что  $\exp_n(x) \approx \exp(x)$ , тогда с учетом (15) получаем

$$(16) \quad C(\mathbf{g}, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{S}_K} p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) ds \approx (-1)^K \frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x}) \log g_k(\mathbf{x}).$$

Полученное выражение (16) заканчивает доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что плотность, введенная для меток учителя, является плотностью распределения. Поэтому можно воспользоваться выражением (13). Используя предположения 1–4 и подставляя в (13), получаем

оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{g}} &= \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K y_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=1} + \\
 (17) \quad &+ (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K y_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=1} + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K s_{i,k} \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0} + \\
 &+ \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K \left( \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0} + \log \log \frac{1}{g_k(\mathbf{x}_i)} \Big|_{T=T_0} \right).
 \end{aligned}$$

Проанализировав выражение (17), получаем, что первые три слагаемых совпадают со слагаемыми в выражении (4) при  $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$  и  $\lambda = \frac{1}{2}$ , а четвертое слагаемое является некоторым регуляризатором, который получен из вида распределения. Анализируя первые три слагаемых в выражении (17) при  $T_0 = 1$ , получаем сумму кросс-энтропий между двумя распределениями для каждого объекта:

- 1) первое распределение — это выпуклая комбинация с весами  $1 - \lambda$  и  $\lambda$  распределения, задаваемого метками объектов  $\text{Cat}(\mathbf{y})$ , и распределения, задаваемого моделью учителя  $\text{Cat}(\mathbf{s})$ ;
- 2) второе распределение — это распределение, задаваемое моделью ученика  $\text{Cat}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ .

Следовательно, модель ученика восстанавливает плотность не исходных меток, а новую плотность, которая является выпуклой комбинацией плотности исходных меток и меток учителя.

## 5.2. Случай регрессии

Для задачи регрессии рассматриваются вероятностные *предположения*:

- 1) рассматривается функция учителя  $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{rg}^*$ ,

$$\mathfrak{F}_{rg}^* = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{R} \right\},$$

где  $\mathbf{v}^*$  — дифференцируемая параметрическая функция;

- 2) рассматривается функция ученика  $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{rg}$ ,

$$\mathfrak{G}_{rg} = \left\{ \mathbf{g} \mid \mathbf{g} = \mathbf{z}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K \right\},$$

где  $\mathbf{z}$  — дифференцируемая параметрическая функция;

- 3) истинные метки имеют нормальное распределение

$$p(y \mid \mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathcal{N}(y \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}), \sigma);$$

- 4) метки учителя имеют распределение

$$p(s \mid \mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathcal{N}(s \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}), \sigma_s).$$

Используя предположения 1–4 и подставляя в (13), получаем оптимизационную задачу:

$$(18) \quad \begin{aligned} \hat{g} = \arg \min_{g \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \sigma^2 (y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i))^2 + \\ + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma^2 (y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i))^2 + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma_s^2 (s_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i))^2. \end{aligned}$$

Выражение (18) записано с точностью до аддитивной константы относительно  $\mathbf{g}$ .

*Теорема 2.* Пусть множество  $\mathcal{G}$  описывает класс линейных функций вида  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$ . Тогда решение оптимизационной задачи (18) эквивалентно решению задачи линейной регрессии:

$$(19) \quad \mathbf{y}'' = \mathbf{X}\mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

где  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}')$  и  $\mathbf{y}''$  имеют вид:

$$(20) \quad \begin{aligned} \sigma'_i &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } i \notin \mathcal{I}, \\ (1 - \lambda) \sigma^2 + \lambda \sigma_s^2, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \mathbf{y}'' &= \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y}', \\ y'_i &= \begin{cases} \sigma^2 y_i, & \text{если } i \notin \mathcal{I}, \\ (1 - \lambda) \sigma^2 y_i + \lambda \sigma_s^2 s_i, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

*Доказательство.* Обозначим  $\mathbf{a}_{\mathcal{J}} = [a_i | i \in \mathcal{J}]^\top$ , где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор, а  $\mathcal{J}$  — произвольное непустое индексное множество. Подвектор вектора ответов  $\mathbf{y}$ , для элементов которого доступна привилегированная информация, обозначим  $\mathbf{y}_{\mathcal{I}} = [y_i | i \in \mathcal{I}]^\top$ . Аналогично обозначим матрицу  $\mathbf{X}_{\mathcal{I}} = [\mathbf{x}_i | i \in \mathcal{I}]^\top$ .

В случае линейной модели  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$  выражение (18) принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \sigma^2 (\mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} - \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}\mathbf{w})^\top (\mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} - \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}\mathbf{w}) + \\ + \sigma^2 (1 - \lambda) (\mathbf{y}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w})^\top (\mathbf{y}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w}) + \sigma_s^2 \lambda (\mathbf{s}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w})^\top (\mathbf{s}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \sigma^2 \left( \mathbf{w}^\top \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^\top \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}\mathbf{w} - 2\mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}}^\top \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}\mathbf{w} \right) + \\ + (1 - \lambda) \sigma^2 \left( \mathbf{w}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w} - 2\mathbf{y}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w} \right) + \lambda \sigma_s^2 \left( \mathbf{w}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w} - 2\mathbf{s}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}}\mathbf{w} \right). \end{aligned}$$

Продифференцируем выражение, приравняем к нулю и сгруппируем элементы:

$$(21) \quad \begin{aligned} \left( \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^\top \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} + (1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}} + \lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \right) \mathbf{w} = \\ = 2\sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^\top \mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} + 2(1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{y}_{\mathcal{I}} + 2\lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^\top \mathbf{s}_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$



Воспользуемся равенствами:

$$(22) \quad \begin{aligned} \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{I}}^T \mathbf{X}_{\bar{I}} + (1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{I}}^T \mathbf{X}_I + \lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\bar{I}}^T \mathbf{X}_I &= \mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X}, \\ 2\sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{I}}^T \mathbf{y}_{\bar{I}} + 2(1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{I}}^T \mathbf{y}_I + 2\lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\bar{I}}^T \mathbf{s}_I &= 2\mathbf{X} \mathbf{y}', \end{aligned}$$

где  $\Sigma$  и  $\mathbf{y}'$  из условия задачи (20).

Подставляя (22) в (21), получаем:

$$\mathbf{w} = 2 \left( \mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X} \Sigma^{-1} \mathbf{y}'',$$

что соответствует решению задачи (19). Теорема 2 доказана.

Теорема 2 показывает, что обучение с учителем для задачи регрессии можно свести к задаче оптимизации в линейной регрессии.

## 6. Вычислительный эксперимент

Проводится вычислительный эксперимент для анализа моделей, которые получены путем дистилляции модели учителя в модель ученика. Как показано в теореме 2, задачу регрессии с учителем можно свести к задаче регрессии без учителя, поэтому в эксперименте рассматривается только случай классификации. Во всех частях вычислительного эксперимента для поиска оптимальных параметров нейросетей использовался градиентный метод оптимизации Adam [21].

### 6.1. Выборка FashionMNIST

Эксперимент проводился для задачи классификации для выборки Fashion-MNIST [17]. В качестве модели учителя  $\mathbf{f}$  рассматривается нейросеть с двумя сверточными слоями и с тремя полносвязными слоями, в качестве функции активации рассматривается ReLu. Модель учителя содержит 30 тысяч обучаемых параметров. В качестве модели ученика рассматривается модель логистической регрессии для многоклассовой классификации. Модель ученика содержит 7850 обучаемых параметров.

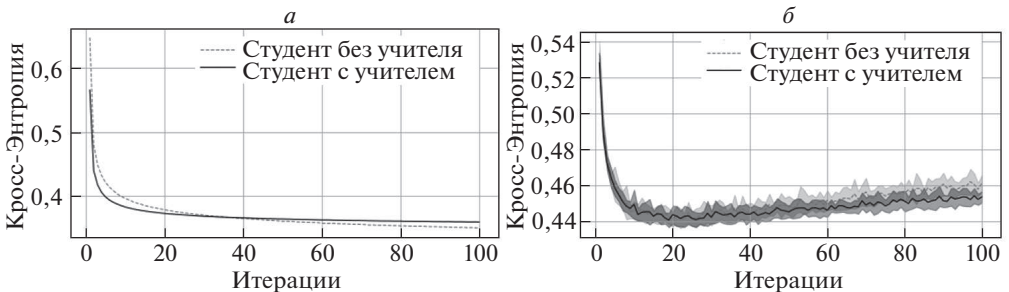


Рис. 3. Зависимость кросс-энтропии между истинными метками и предсказанными учеником вероятностями классов:  $a$  — на обучающей выборке;  $b$  — на тестовой выборке.

На рис. 3 показан график зависимости кросс-энтропии между истинными метками объектов и вероятностями, которые предсказывает модель ученика. На графике сравнивается модель, которая обучалась без учителя (в задаче оптимизации (17) присутствует только первое слагаемое) с моделью, которая была получена путем дистилляции модели нейросети в линейную модель. Из графика видно, что обе модели начинают переобучаться после 30-й итерации. Но модель, которая получена путем дистилляции, переобучается не так быстро: ошибка на тестовой выборке растет медленнее, а на обучающей выборке падает также медленнее.

В таблице показано, что для выборки FashionMnist итоговые модели ученика с учителем и без учителя сравнимы по точности и кросс-энтропийной ошибке, если учитывать дисперсию этих величин.

### 6.2. Синтетический эксперимент

Проанализируем модель на синтетической выборке. Выборка построена следующим образом:

$$\mathbf{W} = [\mathcal{N}(w_{jk}|0, 1)]_{n \times K}, \quad \mathbf{X} = [\mathcal{N}(x_{ij}|0, 1)]_{m \times n}, \\ \mathbf{S} = \text{softmax}(\mathbf{X}\mathbf{W}), \quad \mathbf{y} = [\text{Cat}(y_i|\mathbf{s}_i)],$$

где функция  $\text{softmax}$  берется построчно. Строки матрицы  $\mathbf{S}$  будем рассматривать как предсказание учителя, т.е. учитель знает истинные вероятности каждого класса. На рис. 2 показана вероятностная модель в графовой нотации. В эксперименте число признаков  $n = 10$ , число классов  $K = 3$ , для обучения было сгенерировано  $m_{\text{train}} = 1000$  и  $m_{\text{test}} = 100$  объектов.

На рис. 4 показано распределение по классам для 20 объектов из обучающей выборки. Каждому столбцу на графике соответствует объект, а каждой строке соответствует вероятность класса. Видно, что для каждого рассмотренного объекта вероятности разных классов близки. Получается, что если в качестве истинных меток взять класс с максимальной вероятностью, то выборка будет сильно зашумленной и модель будет описывать эти данные некорректно.

Построим в качестве ученика линейную модель, которая минимизирует кросс-энтропийную (первое слагаемое в формуле (17)). Представление данной модели в виде графовой модели показано на рис. 2.

На рис. 5 показано распределение вероятностей классов, которое предсказала модель. Видно, что полученное распределение не соответствует истинному, так как модель сосредотачивает всю вероятность в одном классе.

Рассмотрим модель, которая учитывает информацию об истинных распределениях на классах для каждого объекта. Для этого будем минимизировать первые три слагаемых в формуле (17) при  $T_0 = 1$  и  $\lambda = 0,75$ . В качестве меток учителя  $s_{i,k}$  использовались истинные вероятности для каждого класса данного объекта. На рис. 6 показано распределение, которое дала модель. В данном случае видно, что распределения являются сглаженными. Концентрации всей вероятности в одном классе не наблюдается.

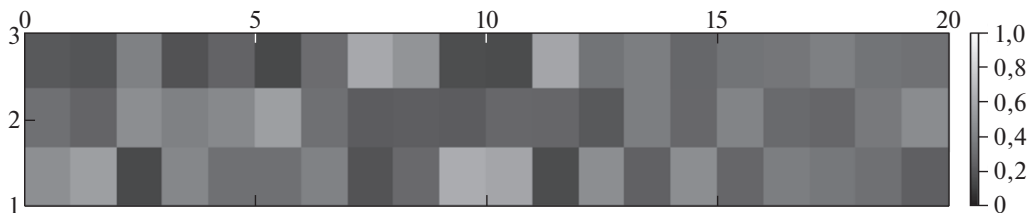


Рис. 4. Истинное распределение объектов по классам.

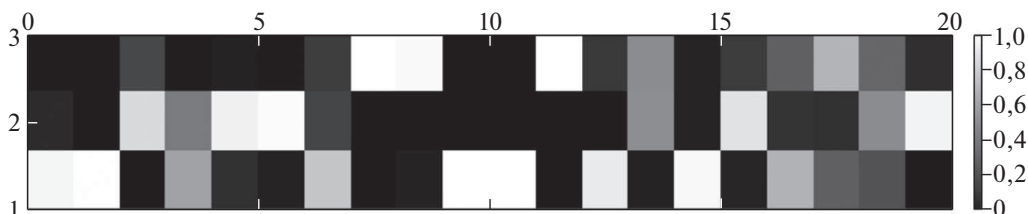


Рис. 5. Распределение, предсказанное моделью без использования информации об истинном распределении на классах.

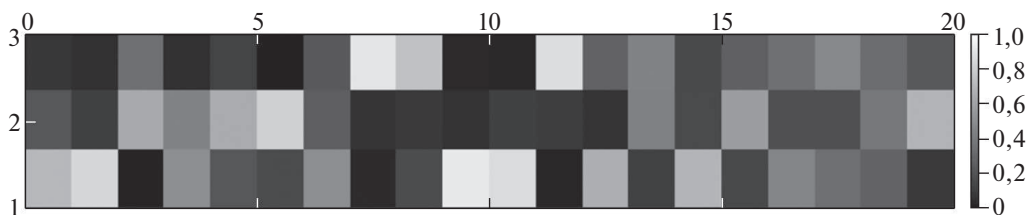


Рис. 6. Распределение, предсказанное моделью с использованием информации об истинном распределении на классах.

Заметим, что в данном примере предполагается, что модель учителя учитывает не только метки классов, но и распределение на метках классов, в то время как в выборке  $\{\mathbf{X}, \mathbf{y}\}$  имеются только точечные оценки в виде меток.

В данном примере используются истинные распределения в качестве предсказаний учителя, но их можно заменить предсказаниями модели учителя, которая предсказывает не только сами метки, но и их распределение для каждого объекта.

На рис. 7 показана зависимость вероятности верного класса от температуры  $T$  и параметра доверия  $\lambda$  для одного из объектов из тестовой выборки. На рис. 7 видно, что изменение температуры  $T$  влечет изменение концентрации вероятностной меры. При уменьшении параметра температуры и приближении его к нулю наблюдаем, что вероятность одного из классов приближается к единице, а остальных классов — к нулю. С другой стороны, при увеличении параметра температуры вероятности классов сглаживаются и распределение классов для каждого объекта становится близким к равномерному.

В таблице в колонке “Кросс-энтропийная ошибка с реальными вероятностями” показано сравнение кросс-энтропии в случае, если в качестве истин-

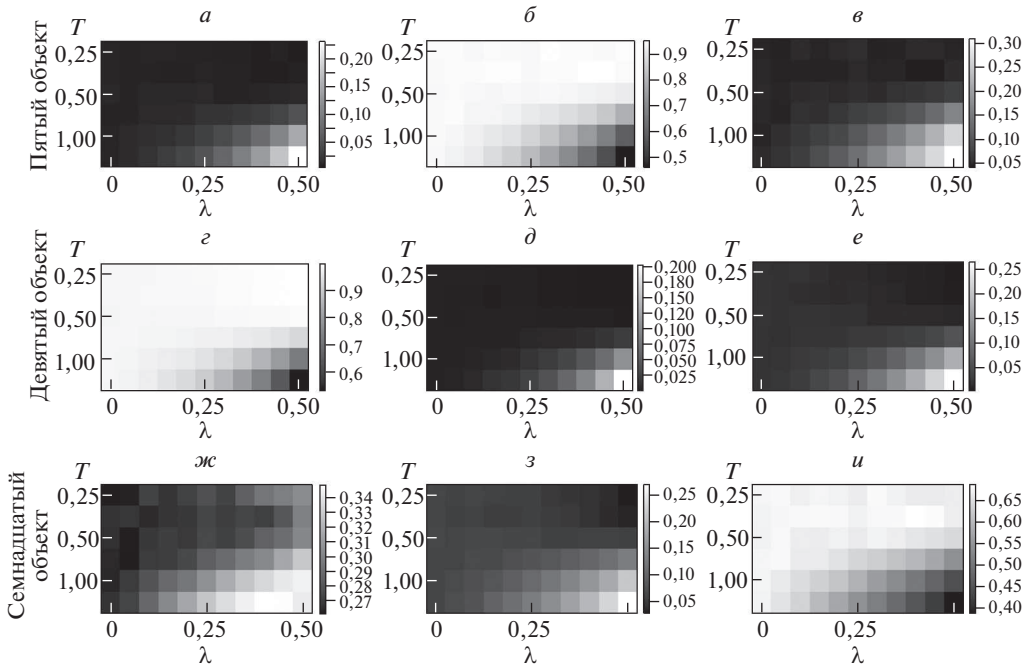


Рис. 7. Иллюстрация распределения вероятности предсказания классов при различных значениях  $\lambda$  и  $T$ .

ных вероятностей меток рассмотреть не onehot-кодированные вероятности классов, а истинные вероятности:

$$\mathcal{L}_{\text{real}}(\mathbf{g}) = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K s_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i),$$

где  $\mathbf{g}$  — модель ученика. Видно, что модель с учителем лучше аппроксимирует истинные вероятности классов. Также в таблице представлено среднее значение разницы максимальной вероятности с минимальной вероятностью для каждого объекта:

$$\mathcal{L}_{\text{maxmin}}(\mathbf{g}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \max_k g_k(\mathbf{x}_i) - \min_k g_k(\mathbf{x}_i) \right).$$

Видно, что модель учителя имеет меньшую разницу между вероятностями классов, т.е. вероятности классов не концентрируются в одном классе.

### 6.3. Выборка Twitter Sentiment Analysis

Проводится эксперимент на выборке Twitter Sentiment Analysis. Данная выборка содержит короткие сообщения, для которых требуется предсказать эмоциональный окрас: содержит твит позитивный окрас или негативный. Выборка разделена на 1,18 млн твитов для обучения и 0,35 млн твитов для

**Таблица.** Сводная таблица результатов вычислительного эксперимента

Выборка	Модель	Кросс-Энтропийная ошибка	Кросс-Энтропийная ошибка с реальными вероятностями	Вероятностная разница	Точность	Число параметров
Fashion-Mnist	с учителем	$0,453 \pm 0,003$	–	$0,84 \pm 0,13$	$0,842 \pm 0,002$	7850
	без учителя	$0,461 \pm 0,005$	–	$0,86 \pm 0,18$	$0,841 \pm 0,002$	7850
Systetic	с учителем	$0,618 \pm 0,001$	$1,17 \pm 0,05$	$0,45 \pm 0,20$	$0,828 \pm 0,002$	33
	без учителя	$0,422 \pm 0,002$	$2,64 \pm 0,02$	$0,75 \pm 0,22$	$0,831 \pm 0,001$	33
Twiter	с учителем	$0,489 \pm 0,003$	–	$0,79 \pm 0,17$	$0,764 \pm 0,005$	1538
	без учителя	$0,501 \pm 0,006$	–	$0,83 \pm 0,22$	$0,747 \pm 0,004$	1538

тестирования. В твитах была выполнена предобработка: все твиты были переведены в нижний регистр, все никнеймы вида “@andrey” были заменены на токен “name”, все цифры были заменены на токен “number”.

Результаты данной части эксперимента показаны в таблице. В качестве модели учителя использовалась модель Vi-LSTM с линейным слоем на выходе. В качестве векторного представления токенов обучалась матрица параметров. В ней каждая строка соответствует токену из обучающей выборки. Суммарное число обучаемых параметров модели учителя составляет более 30 млн. Обученная модель учителя имеет точность предсказания 0,835. В качестве модели ученика рассматривается линейная модель с 1538 параметрами, где в качестве векторного представления предложения рассматривается выход предобученной модели BERT с размерностью векторного пространства 768. Признаковое описание модели учителя и модели ученика различаются. Модель учителя в качестве признакового описания рассматривает исходные слова в предложении. Модель ученика в качестве признакового описания использует готовое векторное представление предложения, которое получено при помощи модели BERT.

В таблице показано качество модели ученика с использованием предсказания модели учителя и без него. В рамках данных результатов качество модели ученика с дистилляцией выше, чем модели ученика без дистилляции, но разница находится в пределах погрешности, что не позволяет говорить о значительных улучшениях качества.

Программное обеспечение для проведения экспериментов и проверки результатов находится в [22].

## 7. Заключение

В данной статье проанализирована задача обучения модели ученика с помощью модели учителя. Исследован метод дистилляции и привилегированно-

го обучения. Предложено вероятностное обоснование дистилляции. Введены вероятностные предположения, описывающие дистилляцию моделей. В рамках данных вероятностных предположений проанализированы модели для задачи классификации и регрессии. Результат анализа сформулирован в виде теорем 1 и 2.

Теорема 2 показала, что обучение линейной регрессии с учителем эквивалентно замене обучающей выборки и вероятностных предположений о распределении истинных ответов. Для задачи классификации ответы учителя дают дополнительную информацию в виде распределения классов для каждого объекта из обучающей выборки. Данная информация не может быть представлена в виде задачи классификации. Требуется ввести распределение, которое представлено в теореме 1.

В вычислительном эксперименте сравниваются модели ученика, которые обучены с использованием модели учителя и без него. В таблице показаны результаты вычислительного эксперимента для разных выборок. Показано, что точность аппроксимации выборки учеником улучшается при использовании модели учителя. Задача регрессии не приведена в вычислительном эксперименте, так как в теореме 2 была показана ее эквивалентность задаче линейной регрессии. Для задачи классификации проведен вычислительный эксперимент. Из вычислительного эксперимента видно, что дистилляция влияет на распределение классов в рамках одного объекта. Вероятности классов для каждого объекта являются более разреженными, а не концентрируются в одном классе. Данное свойство хорошо видно в синтетической выборке, так как она генерировалась с максимальной дисперсией в вероятностях классов.

Основным результатом данной статьи является вероятностная интерпретация задачи дистилляции. Рассмотрен частный случай, когда признаковые описания модели учителя и ученика совпадают. В рамках вычислительного эксперимента проведен анализ ответов модели ученика с использованием модели учителя и без нее. Из результатов эксперимента видно, что модель ученика наследует распределение вероятностей по классам от модели учителя. Когда модель учителя адекватно описывает данные, описание данных моделью ученика также улучшается, что показано в вычислительном эксперименте на синтетических данных.

В дальнейшем предполагается обобщить метод максимального правдоподобия для дистилляции моделей с помощью байесовского подхода выбора моделей машинного обучения. Также в рамках байесовского подхода планируется развить методы повышения качества не только для задачи классификации, но и для задачи регрессии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vaswani A., Gomez A., Jones L., Kaiser L., Parmar N., Polosukhin I., Shazeer N., Uszkoreit J.* Attention Is All You Need // *Advances in Neural Information Processing Syst.* 2017. V. 5. P. 6000–6010.
2. *Devlin J., Chang M., Lee K., Toutanova K.* BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // *Proc. 2019 Conf. North Amer-*

- ican Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies. Minnesota. 2019. V. 1. P. 4171–4186.
3. *He K., Ren S., Sun J., Zhang X.* Deep Residual Learning for Image Recognition // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas. 2016. P. 770–778.
  4. *Бахтеев О.Ю., Стрижов В.В.* Выбор моделей глубокого обучения субоптимальной сложности // АИТ. 2018. № 8. С. 129–147.  
*Bakhteev O.Yu., Strijov V.V.* Deep Learning Model Selection of Suboptimal Complexity // Automat. Remote Control. 2018. V. 79. P. 1474–1488.
  5. *Hinton G., Dean J., Vinyals O.* Distilling the Knowledge in a Neural Network // NIPS Deep Learning and Representation Learning Workshop. 2015.
  6. *Bucilu C., Caruana R., Mizil A.* Model compression // Proc. ACM SIGKDD Conf. on Knowledge Discovery and Data mining. Philadelphia. 2006. P. 535–541.
  7. *Lopez-Paz D., Bottou L., Scholkopf B., Vapnik V.* Unifying Distillation and Privileged Information // Int. Conf. on Learning Representations. Puerto Rico. 2016.
  8. *Tang Z., Wang D., Zhang Z.* Recurrent neural network training with dark knowledge transfer // Proc. IEEE Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Shanghai. 2016. V. 2. P. 5900–5904.
  9. *Darrell T., Hoffman J., Saenko K., Tzeng E.* Simultaneous deep transfer across domains and tasks // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision. Santiago. 2015. V. 2. P. 4068–4076.
  10. *Ahn S., Dai Z., Damianou A., Hu S., Lawrence N.* Variational information distillation for knowledge transfer // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Long Beach. 2019. P. 9163–9171.
  11. *Burges C., Cortes C., LeCun Y.* The MNIST dataset of handwritten digits. 1998. <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/index.html>.
  12. *Che Z., Chen Y., Guoping H., Liu W., Wang T., Ziqing Y.* TextBrewer: An Open-Source Knowledge Distillation Toolkit for Natural Language Processing // Proc. 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: System Demonstrations. Online. 2020.
  13. *Huang Z., Naiyan W.* Like What You Like: Knowledge Distill via Neuron Selectivity Transfer // arXiv:1707.01219. 2017.
  14. *Fu T., Lei Z., Liao S., Mei T., Wang S., Wang X.* Exclusivity-Consistency Regularized Knowledge Distillation for Face Recognition // Lect. Notes in Computer Sci. 2020. V. 1 P. 23–69.
  15. *Vapnik V., Izmailov R.* Learning Using Privileged Information: Similarity Control and Knowledge Transfer // J. of Machine Learning Research. 2015. V. 16. P. 2023–2049.
  16. *Ivakhnenko A., Madala H.* Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. Boca Raton: CRC Press Inc. 1994.
  17. *Rasul K., Vollgraf R., Xiao H.* Fashion-MNIST: a Novel Image Dataset for Benchmarking Machine Learning Algorithms // arXiv preprint arXiv:1708.07747. 2017.
  18. *Kozareva Z., Nakov P., Ritter A., Rosenthal S., Stoyanov V., Wilson T.* SemEval-2013 Task 2: Sentiment Analysis in Twitter // Proc. Seventh Int. Workshop on Semantic Evaluation (SemEval 2013). Atlanta. 2013. P. 312–320.
  19. *Boser B., Denker J., Henderson D., Howard R., Hubbard W., Jackel L., LeCun Y.* Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition // Neural Computation. 1989. V. 1. No. 4. P. 541–551.

20. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // Neural Computation. 1997. V. 9. No. 8. P. 1735–1780.
21. Ba J., Kingma D. Adam: A Method for Stochastic Optimization // Int. Conf. on Learning Representations. San Diego. 2014.
22. Код вычислительного эксперимента. URL: <https://github.com/andriygav/PrivilegeLearning>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 29.08.2020

После доработки 14.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021



---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Линейные системы

- Данилин А.Р., Шабуров А.А.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с эллипсоидальным ограничением на управление ..... 3
- Глуценко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.** Нормализация возбуждения регрессора в процедуре динамического расширения и смешивания ..... 22

### Нелинейные системы

- Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А.** Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения ..... 40
- Барабанов И.Н., Тхай В.Н.** Стабилизация цикла в связанной механической системе ..... 67
- Иванов В.П., Табалин Д.Д.** Об одном методе детерминированного терминального управления с предиктивным прогнозированием невязок краевых условий ..... 77
- Пестерев А.В., Морозов Ю.В.** Стабилизация тележки с обратным маятником... 95

### Стохастические системы

- Лихтциндер Б.Я., Блатов И.А., Китаева Е.В.** Об оценках средней длины очереди для одноканальных систем массового обслуживания через статистические безусловные моменты второго порядка модифицированного входного потока ..... 113

### Управление в технических системах

- Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.** Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи ..... 130

### Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Грабовой А.В., Стрижов В.В.** Вероятностная интерпретация задачи дистилляции ..... 150

## C O N T E N T S

### Linear Systems

- Danilin A.R., Shaburov A.A.** Asymptotics of a Solution to a Singular Perturbation  
Optimal Control Problem with Ellipsoid Constraint on the Control ..... 3
- Glushchenko A.I., Lastochkin K.A., Petrov V.A.** Normalization of Regressor Ex-  
citation as a Part of Dynamic Extension and Mixing Procedure ..... 22

### Nonlinear Systems

- Antipov A.S., Krasnova S.A., Utkin V.A.** Synthesis of Invariant Nonlinear  
SISO Tracking Systems with Sigmoid Feedbacks Ensuring a Given Tracking  
Accuracy ..... 40
- Barabanov I.N., Tkhai V.N.** Stabilization of the Cycle in the Coupled Mechanical  
System ..... 67
- Ivanov V.P., Tabalin D.D.** On One Method of Deterministic Terminal Control  
with Prediction of Terminal Conditions Residue ..... 77
- Pesterev A.V., Morozov Yu.V.** Stabilization of a Cart with Inverted Pendulum ... 95

### Stochastic Systems

- Likhtsinder B.Ya., Blatov I.A., Kitaeva E.V.** About Estimates of the Average  
Queue Length for Single-Channel Queuing Systems Through Statistical Uncon-  
ditional Moments of the Second Order of the Modified Input Stream ..... 113

### Control in Technical Systems

- Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.** Control of Rod Heating Process Using Current  
and Previous Feedback in Time ..... 130

### Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Grabovoy A.V., Strijov V.V.** Probabilistic Interpretation of Distillation ..... 150