СОДЕРЖАНИЕ

Том 501, 2021

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

CONTENTS

Volume 501, 2021

PHYSICS

MECHANICS

TECHNICAL SCIENCES

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 5–7

ФИЗИКА

УДК 629.78

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РЕЗЕРФОРДА ДЛЯ СИНТЕЗА ЦЕПОЧЕК ГРАВИТАЦИОННЫХ МАНЕВРОВ

© 2021 г. Ю. Ф. Голубев[1,*], А. В. Грушевский[1,**], В. В. Корянов[1,***], А. Г. Тучин[1,****], Д. А. Тучин[1,*****]

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 10.08.2021 г.
Поступило 02.09.2021 г.
После доработки 02.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Формула Резерфорда для рассеивания заряженных α-частиц в кулоновском поле может быть легко обобщена на случай гравитационного рассеивания. Одним из типов гравитационного рассеивания в Солнечной системе являются гравитационные маневры космических аппаратов. В работе для них по аналогии вводится эффективное гравитационное сечение рассеивания и выписывается обобщенная формула Резерфорда для гравитационного рассеивания при совершении гравитационного маневра. Показано, что с ее использованием можно существенно повысить эффективность рекуррентной процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных перелетов.

Ключевые слова: гравитационное рассеивание, обобщенная формула Резерфорда, гравитационный маневр, цепочки гравитационных маневров

DOI: 10.31857/S2686740021060109

Баллистическое проектирование перспективных малозатратных космических миссий в пределах Солнечной системы предполагает применение гравитационных маневров [1, 2]. При этом часто оказывается, что одного гравитационного маневра недостаточно. Тогда необходимо найти такие методы формирования последовательности гравитационных маневров, которые рекуррентно обеспечат продолжение их серии для формирования полной целевой орбиты исследовательского космического аппарата (КА). Для соединения гравитационных маневров в одну серию предлагается использовать то обстоятельство, что нужное изменение асимптотической скорости пролетной гиперболы КА относительно одного небесного тела можно осуществить гравитационным маневром у другого. Например, в проектах исследования Солнца для формирования внеэклиптической орбиты КА с этой целью используются Венера и Земля. Для проектирования цепочек гравитационных маневров оказывается полезной модель гравитационного рассеивания, которая описывает изменение плотности потока виртуальных траекторий до и после гравитационного маневра.

Для гравитационного рассеивания справедливо [3]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{1}{4}\frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\frac{1}{\sin^4\dfrac{\varphi}{2}}, \tag{1}$$

где $\mu_p = Gm_p$, G – гравитационная постоянная, m_p – масса тела, оказывающего гравитационное воздействие, $d\sigma$ – элементарная площадка нерассеянного пучка траекторий, так что число проходящих через нее траекторий $dN = nd\sigma$, n – локальная интенсивность пучка, характеризующая число траекторий, проходящих через нормальную единичную поверхность за единицу времени, $d\Omega$ – телесный угол с вершиной в центре рассеивающего небесного тела, в который попадают соответствующие траектории после рассеивания, V_∞ – модуль вектора асимптотической скорости, φ – угол рассеивания между исходным и повернутым векторами асимптотической скорости. Так как для эксцентриситета e_{hyp} и полуоси a_{hyp} пролетной гипер-

[1] *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
*E-mail: golubev@keldysh.ru
**E-mail: alexgrush@rambler.ru
***E-mail: korianov@keldysh.ru
****E-mail: tag@kiam1.rssi.ru
*****E-mail: den@kiam1.rssi.ru

болы справедливы соотношения: $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{e_{\text{hyp}}}$, $a_{\text{hyp}} = \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}$ [3], то (1) можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{e_{\text{hyp}}^4}{4} a_{\text{hyp}}^2. \quad (2)$$

Полученное в [3] выражение (1) есть обобщение формулы Резерфорда [4–6] на случай гравитационного рассеивания. Воспользовавшись тем, что эксцентриситет e_{hyp} связан с прицельной дальностью b равенством $e_{\text{hyp}}^2 = 1 + \frac{b^2}{a_{\text{hyp}}^2}$ [7], получим формулу

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{1}{4}\frac{V_\infty^4}{\mu_p^2}\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2. \quad (3)$$

Она выражает зависимость от начальной прицельной дальности b вероятности объемного распределения рассеянных траекторий КА и показывает, что число рассеянных виртуальных траекторий КА резко убывает согласно биквадратической зависимости от прицельной дальности.

В традиционной постановке пучкового баллистического проектирования на левом конце (до проведения гравитационного маневра) формируется трубка равномерно распределенных виртуальных траекторий КА. Таким образом, ситуация оказывается аналогичной опытам Резерфорда по атомному рассеиванию. В дальнейшем производится протяжка трубки через гравитационный маневр с помощью численного интегрирования согласно точным эфемеридам. Производится селекция полученных траекторий. Для дальнейшего моделирования оставляются только те траектории, которые при дальнейшей протяжке "дуплетом" попадают во вторичную целевую планету.

Ценность найденного набора таких траекторий состоит в их построении с использованием реальных эфемерид, и поэтому они не требуют решения каскада не всегда хорошо сходящихся итерационных процедур в задаче Ламберта. В свою очередь, каждая из новых траекторий может использоваться в качестве опорной оси для создания нового пучка с локализацией и углубленной детализацией [1, 3].

Для успешного нахождения цепочки гравитационных маневров алгоритм поиска сценариев должен обеспечить наличие после гравитационного маневра хоть какой-нибудь виртуальной траектории, попадающей в окрестность новой целевой планеты. Поэтому определяющую роль в ее обнаружении приобретает плотность множества виртуальных траекторий КА на выходе из сферы действия планеты. Достаточно большая плотность повышает вероятность близкого пролета хотя бы одной траектории вблизи намеченной планеты. При анализе достаточного числа траекторий виртуальной трубки, направленной к некоторой планете, целесообразно учитывать минимальное число ее виртуальных сфер действия в покрытии ее орбиты. Таблицы соответствующих характеристик для основных планет и спутников Солнечной системы представлены в [3].

Ситуация с первичным обнаружением целевой планеты на множестве траекторий после выполнения гравитационного маневра осложняется его пространственной неравномерностью, которая соответствует формуле (1). Многим исследователям-баллистикам знакома проблема неустойчивости, возникающая при эксплуатации итерационных процедур в процессе моделирования цепочек гравитационных маневров. В первую очередь, речь идет о сходимости метода Ньютона (и его модификаций) при вычислении действительных эфемеридных траекторий КА по прообразу найденного решения задачи Ламберта [1, 2]. Одна из причин кроется в гиперболическом расхождении соседних виртуальных траекторий КА, полученных в результате гравитационного маневра. При численном моделировании возникает существенный промах пробной эфемеридной траектории КА мимо планеты-мишени. Использование пучков траекторий повышает вероятность встречи с планетой хотя бы одной из них. При этом, однако, все равно требуется достаточная плотность рассеянного пучка, не позволяющая проскочить планете-мишени сквозь ячейку пучка незамеченной. Зачастую это требует рассмотрения миллионов виртуальных вариантов [1, 3].

Аналитический закон гравитационного рассеивания (3) является ключом для эффективного управления распределением виртуальных траекторий в их трубке до осуществления гравитационного маневра. Действительно, при равномерном распределении виртуальных траекторий трубки наиболее эффективные орбиты КА, в смысле воздействия на них гравитационного маневра, близко проходят над планетой. Однако после гравитационного маневра такие траектории сильно расходятся [3]. Вероятность проскока фронта рассеянных траекторий мимо планеты-мишени будет велика. Однако при изменении закона распределения плотности начальных виртуальных траекторий в пучке, т.е. при уходе от равномерной плотности, ситуация может кардинально поменяться [3]. Вместо равномерного распределения траекторий $n = n_0 = \text{const}$ следует генерировать начальную трубку виртуальных траекторий с неоднородным, концентрическим распределением $\tilde{n}$ по закону

$$\tilde{n}(b) = \frac{n_0}{\left(b^2 + \dfrac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}. \tag{4}$$

Тогда

$$dN = \tilde{n}(b)d\sigma = -\frac{n_0}{\left(b^2 + \dfrac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}d\sigma, \tag{5}$$

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{\tilde{n}(b)d\sigma}{d\Omega} = -\frac{n_0}{4}\frac{V_\infty^4}{\mu_p^2}\frac{\left(b^2 + \dfrac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}{\left(b^2 + \dfrac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2} = -\frac{n_0}{4}\frac{V_\infty^4}{\mu_p^2}. \tag{6}$$

При предлагаемом методе баллистического проектирования постановка вычислительного эксперимента и само моделирование происходит в направлении, обратном опыту Резерфорда по анализу рассеивания заряженных частиц. Если плотность пучка траекторий до гравитационного маневра сформировать в соответствии с (6), то после него будет получен равномерно рассеянный достаточно плотный пучок виртуальных траекторий КА [3], ориентированный в направлении точки встречи с очередной планетой-мишенью. В итоге существенно повышается вероятность захвата сферой действия планеты-мишени хотя бы одного виртуального пробного объекта. За счет этого оказывается возможным значительно уменьшить необходимое число моделируемых вариантов для построения требуемой последовательности гравитационных маневров.

В результате существенно повышается эффективность рекуррентной процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных перелетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г.* Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 149.
2. *Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G.* Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories. ESI Book Series. L.: Gordon and Breach, 1998.
3. *Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А.* Обобщенная формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных маневров в Солнечной системе. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2021. № 6.
4. *Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Черных А.И.* Лекции по аналитической механике: учеб. пос. Изд. 2-е, испр. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2017. 236 с. ISBN 978-5-4344-0427-3.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Т. 1. Теоретическая физика. Изд. 4-е, исправ. М.: Наука, 1988. 215 с. ISBN 5-02-013850-9.
6. *Rutherford E.* The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom // Philos. Mag. 1909. V. 6. P. 21.
7. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2.

RUTHERFORD’S GENERALIZED FORMULA FOR THE SYNTHESIS OF GRAVITY ASSISTS CHAINS

Yu. F. Golubev[a], A. V. Grushevskii[a], V. V. Koryanov[a], A. G. Tuchin[a], and D. A. Tuchin[a]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

Rutherford’s formula for the scattering of charged of charged α-particles in the Coulomb field can be easily generalized to the case of gravitational scattering. One of the types of the gravitational scattering in the Solar system is the gravity assist maneuvers. In this paper, an effective gravitational scattering cross-section is introduced by analogy for them and the generalized Rutherford formula for gravitational scattering is presented out when performing gravity assists. It is shown that with its using, it is possible to significantly increase the efficiency of the recurrent procedure for the searching for ballistic scenarios of interplanetary flights.

Keywords: gravitational scattering, extended Rutherford’s formula, gravity assist maneuver, chains of gravity assists

ФИЗИКА

УДК 534.01:539.6

РАДИАЛЬНАЯ РЕАКЦИЯ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

© 2021 г. С. В. Дмитриев[1,*], член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов[2,3,4,**]

Поступило 28.06.2021 г.
После доработки 20.09.2021 г.
Принято к публикации 10.11.2021 г.

Рассматривается радиальная динамика однослойной углеродной нанотрубки при динамическом сжатии в линейной постановке. Применяется уравнение изгибной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки (кругового кольца), основанное на гипотезах Кирхгоффа. Привлекается эффективный параметр, полученный сравнением собственных частот в рамках молекулярной динамики и теории упругих оболочек. Прикладываемое внешнее давление изменяется ступенчато и далее остается постоянным в пределах рассматриваемого времени. В зависимости от отношения этого давления к критическому значению статического давления изучаются режимы колебательного движения и экспоненциального возрастания прогиба. Эти величины представляются также через число атомов углерода, образующих круговое кольцо.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, эффективные параметры, давление, динамическое поведение

DOI: 10.31857/S2686740021060080

1. При изучении эксплуатационных характеристик углеродной нанотрубки, в том числе ее статического и динамического поведения под действием приложенных нагрузок, применяются методы молекулярной динамики, молекулярной механики, континуальной механики [1–5]. В последнем случае вводятся в рассмотрение эффективные размеры трубки, эффективные упругие и массовые параметры. В данной работе используются соотношения теории тонких оболочек и параметр, определенный из сравнения собственных частот в рамках молекулярной динамики и классической механики.

Рассматривается воздействие всестороннего динамического давления на внешнюю поверхность однослойной углеродной нанотрубки. Вопросы воздействия давлений на нанотрубки рассматриваются в обзорах [6, 7]. Имеются экспериментальные исследования динамических, структурных, электрических свойств однослойных и многослойных нанотрубок в зависимости от всестороннего статического и динамического давления [8–13]. В указанных работах приведено также теоретическое моделирование в рамках молекулярной динамики и континуальной механики. Дается анализ деформации изолированной нанотрубки под статическим давлением, который является необходимым шагом при изучении сложного поведения пучка нанотрубок под динамическим давлением. Показано [10, 11], что при увеличении статического давления до $p_1 \approx 3DR^{-3}$ поперечное сечение трубки приобретает форму эллипса (D – изгибная жесткость, R – радиус). При этом радиальная жесткость трубки уменьшается на два порядка [11]. Увеличение давления до $p_2 \approx p_1(1 - \ln(F_2F_1^{-1}))$ приводит к форме сечения с двумя противоположными точками с нулевой кривизной. При дальнейшем увеличении давления до $p_3 \approx p_1(1 - \ln(F_3F_1^{-1}))$ происходит рост деформации и изменение электрических свойств трубки (появление полупроводникового состояния). Здесь F_1, F_2, F_3 – площади поперечного сечения, соответствующие давлениям p_1, p_2, p_3. Для однослойной нанотрубки (10, 10) $p_1 = 1.55$ ГПа, $p_2 = 1.75$ ГПа, $p_3 = 2.2$ ГПа [10].

Рассматриваются вопросы структурных переходов в пучках нанотрубок при лазерном обжа-

[1] *Институт прикладной физики Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия*
[2] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*
[4] *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия*
**E-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com*
***E-mail: ilgamov@anrb.ru*

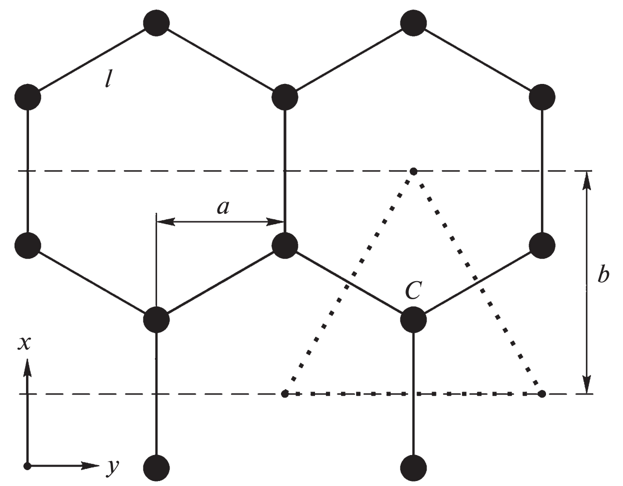

Рис. 1. Кольцо шириной b, образованное двумя поперечными сечениями углеродной нанотрубки. Площадь, приходящаяся на один атом C, показана пунктирными линиями (равносторонний треугольник).

тии, возникающие при этом колебания [8, 9, 12]. В этих и других работах при экспериментальных исследованиях широко применяется Раман-спектроскопия. Изучено поведение нанотрубок в зависимости от расстояния между ними в пучке (эксперименты при расстояниях 1.5–1.7 нм). В [13] исследовано изменение свойств одиночной многослойной нанотрубки при ударном обжатии бойком через окружающий упругий материал.

Ввиду одинакового давления по всей поверхности трубки объектом исследования может быть принято кольцо с эффективными значениями радиуса R, толщины h, ширины b, плотности по площади ρh, модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν. Кольцо образуется зигзагообразным рядом атомов углерода, расстояние между которыми $l = 0.142$ нм (рис. 1). Если ось x направлена вдоль трубки, ось $y = R\theta$ по окружности (θ – центральный угол), то расстояние по y равно $a = l\cos 30° = 0.123$ нм. На рис. 1 в виде равностороннего треугольника показана площадь S, приходящаяся на один атом. При $4S = 3\sqrt{3}l^2$ эффективная ширина кольца равна $b = Sa^{-1} = 0.213$ нм. Так как масса атома углерода равна $m = 1.99 \times 10^{-26}$ кг, то эффективная плотность по площади

$$\rho h = mS^{-1} = 0.76 \times 10^{-6}\ \text{кг/м}^2. \tag{1}$$

Во многих работах (в том числе в обзорных статьях [1, 2]) приводятся значения модуля упругости $E = (1{\div}5) \times 10^6$ МПа, толщины однослойного графена $h = 0.07{\div}0.34$ нм. Эти данные получены экспериментально, а также с привлечением теоретического моделирования. Разброс значений E и h объясняется разными образцами для испытаний, аппаратурой, методами определения и т.д. Эффективный радиус R определяется через число атомов N, образующих кольцо,

$$2\pi R = aN. \tag{2}$$

В [14–16] вводится параметр

$$\xi = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \tag{3}$$

В [14] его численное значение определено по известным эффективным значениям E, ν, ρ и равняется $\xi = 600$ нм^2/нс. В [15, 16] этот параметр определяется путем сравнения собственных частот радиальных колебаний кругового кольца по цепной модели в молекулярной динамике при условии $N > 78$, $n = 2$ и по теории тонких оболочек и равняется $\xi = 581$ нм^2/нс.

Как показано в [16], при $N < 78$ значение ξ меньше, чем приведенное выше. В этом проявляется размерный фактор. В данном исследовании предполагается $N \geq 100$ и принимается второе значение.

Внешнее равномерное избыточное давление на поверхность трубки принимается в виде ступеньки по времени ($p = 0$ при $t < 0$, $p = \text{const}$ при $t \geq 0$). Начальное давление p_0 действует на внешнюю и внутреннюю поверхности. Не учитывается влияние присоединенной массы окружающей газовой среды на колебания нанотрубки, что допустимо в случае легких газов. В статической задаче деформации под действием гидростатического давления это ограничение снимается.

2. Предполагаем, что имеется малое начальное отклонение $w_0(\theta)$ от идеальной круговой формы в момент времени $t = 0$. Оно может быть описано разными способами [17], например, распределением Гаусса по гармоникам n, зависимостью вида $n^{-\alpha}$ и т.д. Примем

$$w_0 = W_0 \sum_{n=2} (n-1)^{-\alpha} \cos n\theta \quad (\alpha \geq 0), \tag{4}$$

где W_0 – амплитуда отклонения по форме $n = 2$. Равномерному распределению начального прогиба по гармоникам соответствует значение $\alpha = 0$. Отклонение (4) можно считать за сумму амплитуд свободных радиальных колебаний кольца в начале отсчета времени

$$w = w_0, \quad \dot{w} = 0 \quad (t = 0), \tag{5}$$

где точка над буквой означает производную по времени.

Уравнение радиальной динамики тонкого кольца относительно функции прогиба $w(\theta, t)$ в рамках гипотез Кирхгоффа имеет вид [17]

$$\frac{\partial^6 w}{\partial\theta^6} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \\ + \frac{pR^3}{D}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\rho h R^4}{D}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial\theta^2} - \dot{w}\right) = 0. \quad (6)$$

Так как эффективная ширина b кольца линейно входит в значение массы, жесткости и давления, то она сокращается в уравнении (6). Решение его разыскиваем в виде

$$w = \sum_{n=2} W_n(t)\cos n\theta. \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем

$$\ddot{W}_n + \omega_n^2 W_n = 0, \quad \eta = pp_*^{-1},$$
$$\omega_n^2 = \Omega_n^2\left(1 - \frac{3\eta}{(n^2-1)}\right), \quad (8)$$
$$\Omega_n^2 = \frac{n^2(n^2-1)^2\xi^2}{(n^2+1)R^4}, \quad p_* = \frac{3D}{R^3},$$

где Ω_n — собственные частоты при нулевом давлении p, p_* — значение статического давления, при котором происходит потеря устойчивости круговой формы кольца в виде эллипса ($n = 2$). Оно может быть выражено также через ξ по (3).

По приведенным выше значениям ρh и ξ из (1), (3) следует $D = \xi^2\rho h = 25.65 \times 10^{-20}$ кг · м^2/с^2. Пусть число атомов $N = 200$, радиус трубки $R = 3.915$ нм. Тогда критическое значение давления по (8) равно $p_* = 12.82$ МПа, а частота низшей гармоники ($n = 2$, $p = 0$) $f_2 = \Omega_2(2\pi)^{-1} = 16$ ГГц. При таком определении p_* и Ω_n их значения являются единственными. Если исходить из значений E, h с учетом указанного выше их разброса, то будет соответствующий разброс значений p_* и f_n. Внешнее давление p приводит к понижению частоты f_2, внутренний перепад $(-p)$ — к ее повышению.

Удовлетворяя решение уравнения (8)

$$W_n = A_n\exp(\omega_n t) + B_n\exp(-\omega_n t)$$

условиям (4), (5), получаем

$$2W_n W_0^{-1} = (n-1)^{-\alpha}(e^{\omega_n t} + e^{-\omega_n t}). \quad (9)$$

Из (8), (9) следует, что в зависимости от p_*, p, n имеет место как колебательный режим ($\omega_n < 0$), так и экспоненциальное возрастание начальных прогибов ($\omega_n > 0$)

$$\frac{W_n}{W_0} = \begin{cases}(n-1)^{-\alpha}\cos\omega_n t, & 3p < (n^2-1)p_*, \\ (n-1)^{-\alpha}\operatorname{ch}\omega_n t, & 3p > (n^2-1)p_*. \end{cases} \quad (10)$$

При относительно малом давлении p и высоких значениях n, задаваемых начальным прогибом, реализуется первое решение (10), в противном случае — второе решение (10). Число n_R, разделяющее эти режимы, определяется из условия $\omega_n = 0$ или

$$n_R = \sqrt{1 + 3\eta}. \quad (11)$$

Значение n_R необходимо округлять до ближайшего меньшего целого числа. Решение (7), (10) можно записать в виде

$$\frac{w}{W_0} = \left(\sum_{n=2}^{n_R}(n-1)^{-\alpha}\operatorname{ch}\omega_n t + \\ + \sum_{n_R+1}^{\infty}(n-1)^{-\alpha}\cos\omega_n t\right)\cos n\theta. \quad (12)$$

Из (12) и выражения для ω_n в (8) следует, что рост возмущений происходит тем быстрее, чем больше давление и меньше плотность материала. Число волн $n = n_L$, при котором происходит наибольшее возрастание возмущений, определяется из условия $d\omega_n/dn = 0$. Если принять $\alpha = 0$, $n^4 \gg 1$, то это условие дает

$$4n_L^2 \approx n_R^2 - 2 + n_R\sqrt{(n_R^2 + 12)}. \quad (13)$$

Согласно (13) значение n_L несколько меньше значения n_R. Это означает, что наиболее быстро возрастает амплитуда гармоники, соответствующей переходу от экспоненциального роста к колебаниям. Например, при $n_R = 4.9$ рост возмущений описывается суммой от $n = 2$ до $n = 4$, а начиная с $n = 5$ происходят колебания с возрастающей частотой и уменьшающейся амплитудой около основного движения. В этом случае решение (12) имеет вид

$$\frac{w}{W_0} = \left(\sum_{n=2}^{4}(n-1)^{-\alpha}\operatorname{ch}\omega_n t + \\ + \sum_{n=5}^{\infty}(n-1)^{-\alpha}\cos\omega_n t\right)\cos n\theta, \quad (14)$$

причем аргументы функций $\operatorname{ch}\omega_n t$ и $\cos\omega_n t$ равны соответственно

$$\omega_n t = n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}(4.9^2 - n^2)\right)^{1/2}\tau \quad (n = 2,3,4),$$
$$\omega_n t = n(n^2 - 4.9^2)^{1/2}\tau, \quad \tau = \left(\frac{p_*}{3\rho h R}\right)^{1/2} t \quad (n > 5). \quad (15)$$

В последнем выражении учтено, что для высоких мод $n^2 \gg 1$. Несмотря на то, что число n_R нужно округлять до целого, при вычислении выражений (15) необходимо использовать истинное значение $n_R = 4.9$.

На рис. 2 показаны зависимости первых трех членов в (14), (15). При равномерном распределе-

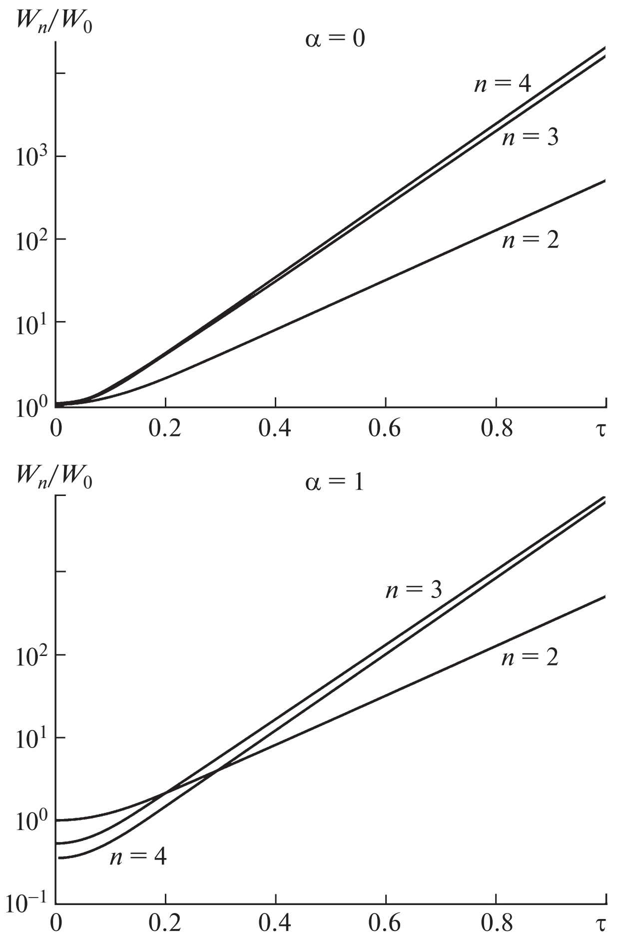

Рис. 2. Изменение безразмерных максимальных значений гармоник прогиба в зависимости от безразмерного времени по формулам (14), (15) при отношении действующего давления p к его критическому значению p_*, равном $\eta = 7.67$ ($n_R = 4.9$, $n_L = 3.58$).

нии начального прогиба по гармоникам ($\alpha = 0$) преобладающей является гармоника $n = 4$, что объясняется приведенным выше значением n_L. Однако в пределах рис. 2 амплитуда гармоники $n = 3$ остается величиной одного порядка с амплитудой гармоники $n = 4$. При $\alpha = 1$ в начале процесса преобладает гармоника $n = 2$, так как это имеет место в начальном распределении гармоник (4). Около $\tau = 0.2$ начинают преобладать гармоники $n = 3$ и $n = 4$. При $\tau \gg 1$ наибольшей является гармоника $n = 4$ (пересечение кривых $n = 4$ и $n = 3$ при $\tau \approx 1.7$). Амплитуды колебаний, определяемые в (14), (15) членами с $n \geq 4$, сравнимы с $W_n W_0^{-1}$ ($n \leq 3$) только в самый начальный момент времени.

Таким образом, при динамическом выпучивании кольца с убывающим распределением по гармоникам малого начального прогиба происходит их перестройка с течением времени. В начале процесса преобладает гармоника с наибольшей амплитудой ($n = 2$) в начальном прогибе, в дальнейшем преобладают другие гармоники. При больших значениях времени преобладающей становится гармоника n_L, определенная в (13). Эта формула может быть выражена также через отношение действующего давления к его критическому значению $\eta = pp_*^{-1}$:

$$4n_L^2 \approx 3\eta - 1 + \sqrt{(3\eta + 1)(3\eta + 13)}. \qquad (16)$$

Если имеются какие-либо ограничители перемещения по радиусу, например, контактирующие среды, то гармоника n_L может и не стать преобладающей. Это может иметь место также при учете нелинейностей.

Значения p_*, ω_n в (8) могут быть выражены через количество атомов, образующих кольцо, исключением в них R по (2). Так как значения a, ρh, ξ заданы, то p_*, ω_n при этом зависят только от числа атомов N и действующего давления p. С возрастанием числа N значение p_* падает как N^{-3}, а собственные частоты Ω_n как N^{-2}. При этом частоты ω_n падают еще быстрее, чем Ω_n. При одном и том же давлении p кольца, образованные из разного количества атомов N, ведут себя по разному. При приведенных выше $N = 200$, $p = 2.84$ МПа, $p_* = 12.82$ МПа возникают только колебания, так как $p < p_*$. Если $N = 400$ и, соответственно, $p_* = 1.60$ МПа, то после приложения давления происходят экспоненциальное возрастание прогиба по гармонике $n = 2$ и колебания по высшим гармоникам.

3. Динамические свойства углеродной нанотрубки могут быть определены с удовлетворительной точностью с использованием ее эффективных жесткостных и массовых характеристик и уравнений теории тонкостенных оболочек. В данной работе таким образом рассмотрено поведение однослойной нанотрубки под действием динамического давления на ее внешнюю поверхность. Давление принимается равномерным по всей поверхности в виде ступеньки по времени. Далее оно остается постоянным.

В условиях плоской деформации трубки может быть рассмотрено кольцо прямоугольного поперечного сечения. Малое начальное отклонение от круговой формы задается в виде суммы гармоник с убывающими амплитудами. Важными параметрами в анализе являются статическое критическое значение давления и собственные частоты радиальных колебаний. Они зависят от количества атомов, образующих кольцо, и его эффективных характеристик. Если действующее давление меньше статического критического давления, то возбуждаются колебания кольца. В противном случае прогибы в линейном анализе неограниченно возрастают. Они сопровождаются высокочастотными колебаниями с уменьшающимися амплитудами по росту гармоник. Определяется преобладающая гармоника в различные моменты динамического выпучивания в зависимости от количества атомов, образующих кольцо. В начале процесса преобладает низшая гармоника с наибольшей амплитудой в начальном прогибе, в дальнейшем быстрее возрастают другие гармоники и происходит их перестройка в зависимости от входных параметров.

Эти результаты относятся к линейной стадии развития прогибов нанотрубки. В нелинейной стадии возможна очередная перестройка гармоник, так как потенциальная энергия деформации при более высоких гармониках растет быстрее, чем для низших гармоник. Поэтому при любом их начальном распределении и преобладающих гармониках в зависимости от отношения давления к его критическому значению основной формой деформации может являться низшая гармоника.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

С.В.Д. благодарит Российский научный фонд за финансовую поддержку, грант № 21-19-00813.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Harik V.M.* Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods // Solid State Commun. 2001. V. 120. P. 331–335. https://doi.org/10.1016/S0038-1098(01)00383-0
2. *Qian D., Wagner G.J., Lin W.K., Ju M.F., Ruoff R.S.* Mechanics of carbon nanotubes // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 6. P. 495–532. https://doi.org/10.1115/1.1490129
3. *Yu M.F.* Fundamental mechanical properties of carbon nanotubes: current understanding and the related experimental studies // J. Eng. Mater. 2004. V. 126. P. 271–278. https://doi.org/10.1115/1.1755245
4. *Аннин Б.Д., Баимова Ю.А., Мулюков Р.Р.* Механические свойства, устойчивость, коробление графеновых листов и углеродных нанотрубок (обзор) // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 5. С. 175–189. https://doi.org/10.15372/PMTF20200519
5. *Khadimallah M.A., Hussain M., Taj M., Ayed H., Tounsi A.* Parametric vibration analysis of single-walled carbon nanotubes based on Sanders shell theory // Advances in Nano Research. 2021. V. 10. P. 165–174. https://doi.org/10.12989/anr.2021.10.2.16
6. *Zhao Z.S., Zhou X.F., Hu M., Yu D.L., He J.L., Wang H.T., Tian Y.J., Xu B.* High-pressure behaviors of carbon nanotubes // Superhard Materials. 2012. V. 34. № 6. P. 371–385.
7. *Khaniki H.B., Ghayesh M.H., Amabili M.* A review on the statics and dynamics of electrically actuated nano and micro structures // Int. J. Nonlinear Mech. 2021. V. 129. 103658. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103658
8. *Peters M.J., McNeil L.E., Lu J.P., Kahn D.* Structural phase transition in carbon nanotube bundles under pressure // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. № 9. P. 5939–5944. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.5939
9. *Teredesai P.V., Sood A.K., Sen R., Govindaraj A., Rao C.N.R.* Pressure-induced reversible transformation in single-wall carbon nanotube bundles studied by Raman spectroscopy // Chem. Phys. Lett. 2000. V. 319. № 3–4. P. 296–302.
10. *Wu J., Zang J., Larade B., Guo Y., Gong X.G., Liu F.* Computational desing of carbon nanotube electromechanical pressure sensors // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. № 15. Art. 153406. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.153406
11. *Sun D.Y., Shu D.J., Li M., Liu F., Wang M., Gong X.G.* Pressure-induced hard-to-soft transition of a single carbon nanotube // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. № 16. P. 165417. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.165417
12. *Merlen A., Bendiad N., Toulemonde P., Aouizerat A., San Miguel A., Sauvajol J.L., Montagnac G., Cardon Y., Petit P.* Resonant Raman spectroscopy of single-wall carbon nanotubes under pressure // Phys. Rev. B. 2005. V. 72. № 3. Art. 035409. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.035409
13. *Molodets A., Golyshev A., Zhukov A., Muradyan V., Pisarev S., Shul'ga Y., Fortov V.* Structural and morphological changes induced shock waves in carbon nanotubes // Nanotechnologies in Russia. 2008. V. 3. № 11–12. P. 697–703. https://doi.org/10.1134/s1995078008110050
14. *Goupalov S.V.* Continuum model for long-wavelength in two-dimensional graphite and carbon nanotubes // Phys. Rev B. 2005. V. 71. 085420. P. 1–7. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.085420
15. *Dmitriev S.V., Semenov A.S., Savin A.V., Ilgamov M.A., Bachurin D.V.* Rotobreather in a carbon nanotube bundle // J. Micromech. Molecular Phys. 2020. V. 5. 2050010. https://doi.org/10.1142/S2424913020500101
16. *Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С.* Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // ЖТФ. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737. https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21
17. *Ильгамов М.А.* Перестройка гармоник при изгибе цилиндрической оболочки вследствие динамического сжатия // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 3. С. 167–174.

RADIAL RESPONSE OF A CARBON NANOTUBE TO DYNAMIC PRESSURE

S. V. Dmitriev[a] **and Corresponding Member of the RAS M. A. Ilgamov**[b,c,d]

[a] *The Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

[b] *A.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[c] *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*

[d] *Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Investigation Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation*

The radial dynamics of a single-walled carbon nanotube under dynamic compression is considered in a linear formulation. The equation of bending deformation of a thin-walled cylindrical shell (circular ring) is applied under the assumption of an inextensible middle surface. The data of effective parameters obtained experimentally and within the framework of molecular dynamics are used. The applied external pressure changes stepwise and then remains constant within the considered time. Regimes of oscillatory motion and exponential increase in deflection are studied depending on the ratio of this pressure to the critical value of static pressure. These values are also expressed in terms of the number of carbon atoms forming a circular ring.

Keywords: carbon nanotube, effective parameters, pressure, dynamic behavior

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 14–18

ФИЗИКА

УДК 535.361.22, 550.34.016, 53.082.52

РАЗНОНАПРАВЛЕННАЯ МОДУЛЯЦИЯ СЕЗОННОГО СЖАТИЯ КОРЫ ЗЕМЛИ И СИГНАЛА АЭРОЗОЛЬНОГО ЛИДАРА В ТОННЕЛЕ НАД ОЧАГОМ ВУЛКАНА ЭЛЬБРУС

© 2021 г. С. М. Першин[1,*], член-корреспондент РАН А. Л. Собисевич[2], М. Я. Гришин[1], В. А. Завозин[1], В. С. Макаров[3], В. Н. Леднёв[1], А. Н. Фёдоров[1], А. В. Мясников[4], Д. Г. Артёмова[1]

Поступило 18.10.2021 г.
После доработки 18.10.2021 г.
Принято к публикации 27.10.2021 г.

В августе-октябре 2019 г. в тоннелях Баксанской нейтринной обсерватории над очагом вулкана Эльбрус было проведено зондирование аэрозольного рассеяния и деформации коры Земли. Обнаружена разнонаправленная модуляция сезонного сжатия коры с кратным превышением средней скорости (~4 мкм/сут) и сменой знака снижения лидарного сигнала рассеяния на аэрозолях на аномальный рост в “горячем” тоннеле. Установлено, что модуляция индуцирована быстрым охлаждением внешней атмосферы. Измерены задержки ускоренного сжатия плеча деформографа (до 14 мкм/сут) и начала роста лидарного сигнала рассеяния относительно начала снижения температуры (~2 и ~7 сут соответственно). Механизм обнаруженных явлений обсуждается.

Ключевые слова: лидар, аэрозольное рассеяние, деформация земной коры, деформограф, разнонаправленная модуляция

DOI: 10.31857/S2686740021060134

Известно [1–3], что знак и величину сезонной деформации коры Земли солнечно-лунными приливами, сейсмическими волнами измеряют лазерными деформографами-интерферометрами Майкельсона, чувствительность которых зависит от длины измерительного плеча. Так, деформограф с длиной плеча 75 м, установленный в главной штольне подземной Баксанской нейтринной обсерватории ИЯИ РАН (БНО) на расстоянии ~600 м от входа, обеспечивает разрешающую способность $\sim 1.6 \times 10^{-11}$ м [2, 3]. Недавно [4] мы обнаружили, что сезонная деформация коры Земли, измеряемая лазерным деформографом в главной штольне БНО, сопровождается разнонаправленной модуляцией скорости сжатия плеча интерферометра и одновременным переключением коэффициента рассеяния на аэрозолях со снижения на увеличение в тупиковом “горячем” тоннеле (43°14′57.7″ N, 42°43′19.5″ E, постоянная температура воздуха ~38°C) над очагом вулкана Эльбрус, удаленном от входа БНО на 3900 м. Физический механизм обнаруженной разнонаправленной модуляции остается пока неясным, его изучение является целью данной работы.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Зондирование вариаций аэрозолей производили с помощью разработанного нами уникального лидара нового типа [4] на базе диодного лазера [5, 6] с безопасным для глаз уровнем излучения (<1 мкДж · см$^{-2}$) [7] и однофотонного приемника [8]. Общий вид лидара представлен на рис. 1а. В каждом сеансе зондирования с интервалом 30 мин лидар излучал 100 000 импульсов с частотой повторения 10 кГц. Отметим здесь, что сигнал лидара суммирует вклады всех магматических газов и паров воды, которые выносят аэрозоли в объем тоннеля на длине наклонной трассы зондирования, что увеличивает чувствительность лидара к геодинамическим процессам при деформации коры [4]. Лидар был установлен в БНО в “горячем” тоннеле геофизической лаборатории № 2 Института физики Земли РАН (схема тоннелей БНО с научными лабораториями показана на рис. 1б).

[1] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Институт космических исследований Российской академии наук, Москва, Россия*
[4] *Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: pershin@kapella.gpi.ru*

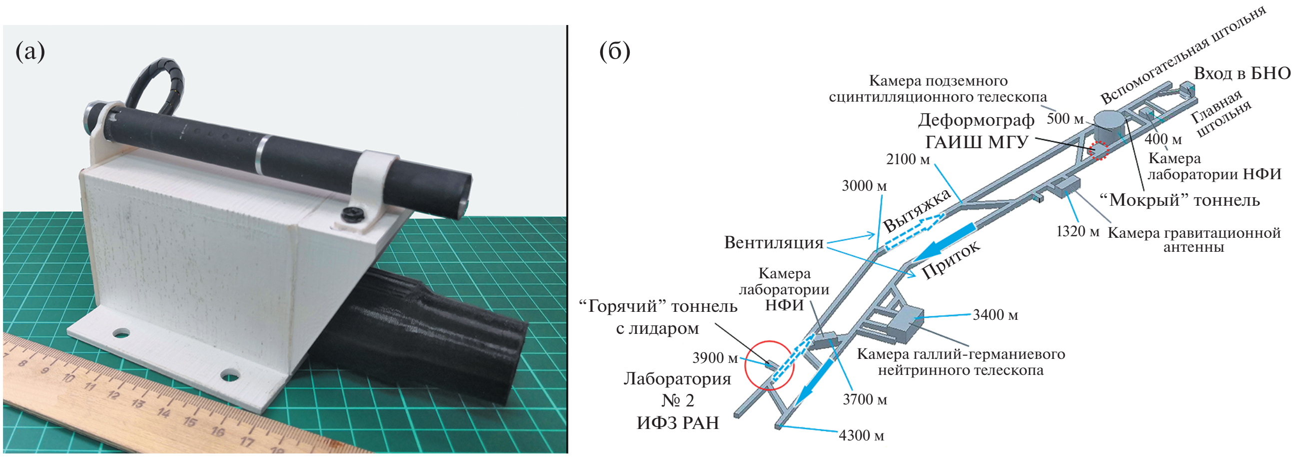

Рис. 1. а – общий вид аэрозольного лидара; б – схема тоннелей БНО с научными лабораториями и оборудованием. Лазерный деформограф Государственного астрономического института им. Штернберга (ГАИШ) и лаборатория Института физики Земли (ИФЗ) с лидаром в “горячем” тоннеле отмечены пунктирным и сплошным кругами соответственно. “Мокрый” тоннель расположен на удалении 450 м от входа БНО. Направление потока принудительной вентиляции тоннелей обозначено стрелками “вытяжка” и “приток”.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

На рис. 2а показаны зависимости от времени сезонной деформации коры Земли по данным лазерного деформографа в штольне БНО (черная линия) и сигнала лидарного зондирования аэрозолей в тупиковом “горячем” тоннеле БНО (серая линия). Для оценки средней скорости (~4 мкм/сут) сезонного сжатия коры Земли была методом наименьших квадратов проведена пунктирная линия. Из рис. 2 видно, что на месячном отрезке измерений отчетливо наблюдается разнонаправленная низкочастотная (неделя–две) модуляция сигналов деформографа и аэрозольного лидара относительно среднего значения обеих зависимостей (пунктирная линия). Так, 6, 21 и 27 сентября начинаются фазы сжатия плеча деформографа с большей скоростью (до ~14 мкм/сут, тонкие наклонные линии *1*, *2*, *3* на рис. 2а), которые чередуются с последующим расширением. Особый интерес вызывает смена знака снижения лидарного сигнала аэрозольного рассеяния (рис. 2а, серая линия), обусловленного сезонным сжатием коры [3], на его аномальный рост, что указывает на наполнение тоннеля аэрозолями неясной природы.

При этом известно [2], что основным фактором вариаций длины плеча интерферометра-деформографа является температура внешней атмосферы. Для проверки действия этого фактора в нашем случае удаленного тоннеля мы сравнили (рис. 2б) сезонное сжатие деформографа с данными датчика температуры, размещенного в штольне рядом с деформографом на удалении 600 м от входа в БНО (рис. 1а).

Из рис. 2б видно, что за два месяца наблюдений температура атмосферы (рис. 2б, пунктирная кривая) понизилась на ~4°C с кратковременными (3–6 дней), но быстрыми (10–15 ч) похолоданиями (на 1–2°C). Существенно, что сокращение длины плеча деформографа совпадает с вариациями температуры [2]. Кроме того, отчетливо проявляется продолжительная (~2 сут) задержка начала деформация коры Земли относительно быстрого снижения температуры (рис. 2б, вертикальные стрелки). Вариации длительности задержки при одинаковом градиенте температуры на фронте понижения отражают степень напряженного состояния горных пород в сейсмоактивном регионе [9] Северного Кавказа и допускают его мониторинг.

Отсюда следует, что температура атмосферы является одним из управляющих факторов деформации коры. При этом отметим, что температура основания в удаленном “горячем” тоннеле, где проводилось лидарное зондирование аэрозолей, уменьшилась за два месяца измерений только на ~0.1°C, что позволило нам ранее [4] сделать допущение об отсутствии влияния температуры внешней атмосферы на вариации аэрозолей в тоннеле (рис. 2а, серая линия). Однако высокая (~50%) относительная влажность воздуха в тоннеле около лидара варьировалась также немонотонно [4] с заметным (2–4%) увеличением в виде коротких, а также и протяженных импульсов. Для удобства анализа мы совместили графики вариации аэрозолей (линия *1*), температуры атмосферы (пунктирная кривая) и относительной влажности (толстая кривая) на одном рисунке (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что, как и следовало ожидать, продолжительные (~неделя) интервалы похолодания с коротким фронтом снижения температуры совпадают с аномальной генерацией аэрозолей. При этом задержка между началом разнонаправ-

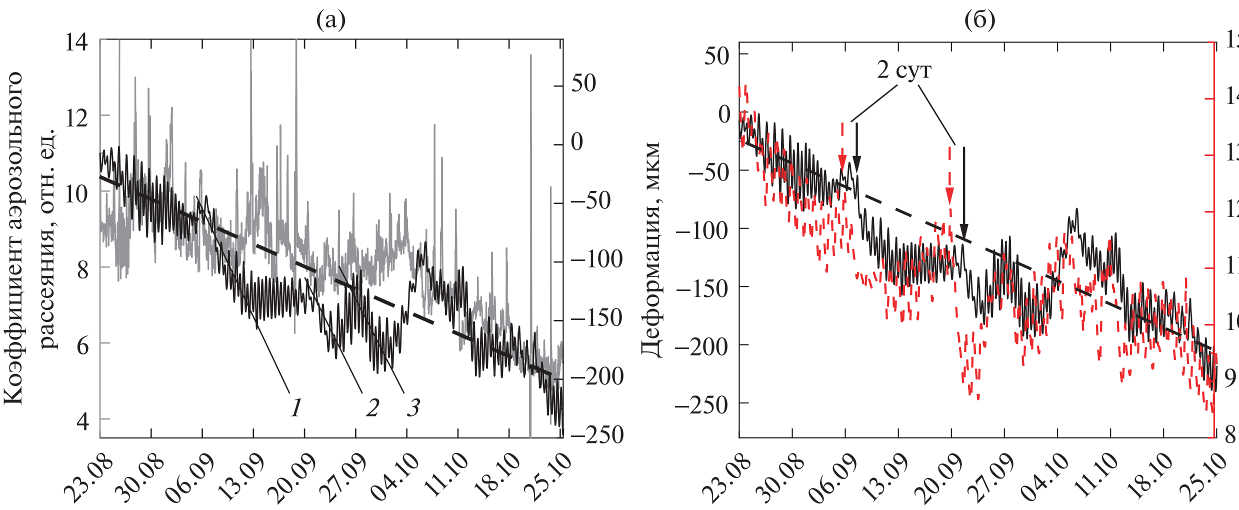

Рис. 2. а – Сезонное сжатие плеча 75-м лазерного деформографа в главной штольне БНО (черная линия) и коэффициент аэрозольного рассеяния (серая линия) по данным лидарного зондирования в тупиковом “горячем” тоннеле БНО, пунктирная прямая – средняя скорость сжатия, ~4 мкм/сут; б – модуляция сжатия-расширения плеча деформографа (черная линия), синфазная вариациям температуры внешней атмосферы (пунктирная кривая), вертикальные стрелки иллюстрируют задержку в ~2 сут между изменением температуры и деформацией коры. Шкала времени в стандарте UTC (coordinated universal time).

ленного отклонения лидарного сигнала рассеяния на аэрозолях и температуры увеличивается и наблюдается более отчетливо (рис. 3, вертикальные отрезки), чем при сравнении с деформацией коры Земли (рис. 2б).

Особый интерес здесь вызывают характерные особенности сезонной вариации влажности (линия *3*) и концентрации аэрозоля (линия *1*) в горячем тоннеле, а именно: сезонное снижение сигналов, короткие импульсы сигналов (длительность порядка единиц часов), а также недельные интервалы увеличения амплитуды. В некоторые моменты (отмечены сплошными стрелками) короткие импульсы роста влажности сопровождаются генерацией рассеивающих центров-аэрозолей также импульсами короткой длительности. Иногда генерация аэрозолей наблюдалась без роста влажности (стрелки с пунктирной линией). Заметим, что импульсы повышения влажности не превышают по амплитуде нескольких процентов, тогда как скачки сигнала лидарного рассеяния в два-три раза больше его средней величины. Сильное изменение лидарного сигнала при малом изменении управляющего фактора (относительной влажности воздуха) указывает на то, что лидар является весьма чувствительным инструментом.

Совокупность полученных данных показывает, что одним из факторов эффективной генерации аэрозолей являются пары воды (влажность). Фонтаны горячих магматических газов выносят эти пары в тоннель из трещин над очагом вулкана. Адиабатическое охлаждение при расширении фонтана газового выхода в объеме тоннеля с пониженным давлением (до 600 мм рт. ст. на высоте 1700 м над уровнем моря) повышает вероятность образования тумана (аэрозолей) в воздухе с большой влажностью (~50%). Более того, наличие пыли в тоннеле как центров конденсации Айткена снижает порог образования тумана и повышает скорость этого процесса. Заметим, что гидрорежим

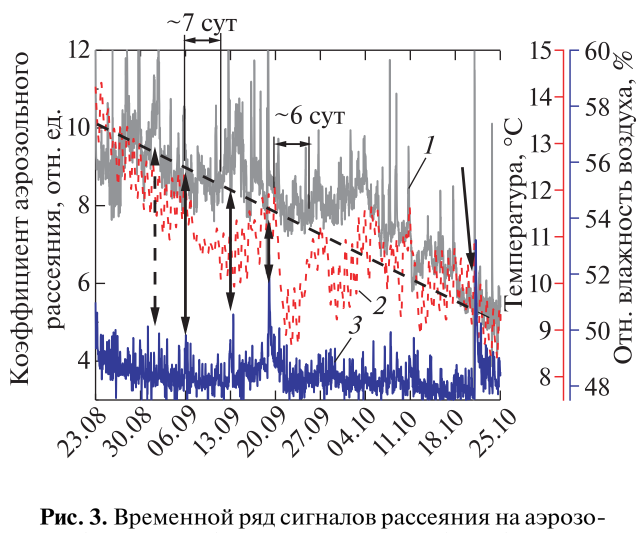

Рис. 3. Временной ряд сигналов рассеяния на аэрозолях (серая линия), температуры атмосферы (пунктирная кривая) и относительной влажности воздуха в тоннеле (синяя линия). Примеры синхронного увеличения лидарного сигнала рассеяния на аэрозолях и влажности отмечены стрелками (сплошные стрелки) и без увеличения влажности (пунктирные стрелки), а задержка смены знака вариаций аэрозолей от начала ускоренного снижения температуры – вертикальными отрезками.

горной выработки определяется естественной эволюцией ледника на вершине горы Андырчи, а также локальными источниками углекислых минеральных вод [10]. Так, просачивание воды ледника на протяжении многих лет регистрировали в тоннелях обсерватории Гран Сассо (Италия) [11]. О присутствии воды в скалах БНО и ее просачивании в объем тоннелей свидетельствуют водяные подтеки на потолке, а также небольшие сталагмиты на полу в "мокром" тоннеле недалеко от входа в БНО (рис. 1б), в котором ранее [12] мы зондировали многослойные плотные туманы с перемещением фронта приточной вентиляцией. Подобный процесс генерации тумана и скачков сигнала рассеяния происходит в "теплом" (36–38°C) и влажном воздухе горячего тоннеля при втягивании "холодного" (32–33°C) воздуха из потока вентиляции в штольне (рис. 1б). При этом формируется температурная инверсия, которую мы обнаружили недавно, слой холодного воздуха над теплым, что указывает на градиент температуры и генерацию тумана.

Отсюда следует, что обнаруженная разнонаправленная модуляция обусловлена образованием тумана на границе теплого влажного воздуха в штольнях БНО и холодного воздуха атмосферы, приток которого в главную штольню БНО обеспечивает принудительная вентиляция. При перемещении по штольне холодный воздух нагревается, а штольня остывает, и зона образования тумана сдвигается от входа в штольню к "горячему" тоннелю (3900 м) (рис. 1б). Через двое суток медленного охлаждения и распространения по штольне волны температурной деформации коры Земли лазерный деформограф (рис. 1б, 600 м от входа) регистрирует увеличение скорости сжатия (до ~14 мкм/сут) скального основания (см. задержку ~2 сут на рис. 2б). Через 6–7 сут (рис. 3) протяженная зона тумана достигает "горячего" тоннеля-тупика и перемещается далее по вспомогательной штольне. При этом температура воздуха в штольне повысилась от 10–12°C на входе в БНО до 33°C около входа в "горячий" тоннель с температурой скального основания до ~38°C. Медленная циркуляция воздуха в "горячем" тоннеле из-за стекания тяжелых вулканических газов (радон, CO_2) по наклонному основанию от глухой стены к выходу обеспечивает втягивание тумана из штольни в тоннель под потолком. В это время знак сезонного снижения лидарного сигнала (рис. 2, 3) меняется на аномальный рост рассеяния на аэрозолях тумана, часть которого поступила с воздухом из штольни, а другая часть генерируется на границе контакта воздуха штольни с теплым воздухом "горячего" тоннеля.

Заметим, что медленное и продолжительное (неделя) увеличение влажности мы наблюдали дважды в середине интервала мониторинга. Важно, что максимальные значения влажности достигались с задержкой ~6 сут после минимальной температуры воздуха у входа БНО (горизонтальные стрелки вверху рис. 3). Совпадение величины задержек генерации аэрозолей тумана и влажности в "горячем" тоннеле от вариации температуры атмосферы указывает на то, что тупиковый тоннель при непрерывно работающей принудительной вентиляции нельзя рассматривать как изолированный объем, несмотря на удаление 3900 м от входа в штольни БНО.

Таким образом, впервые, насколько нам известно, при лидарном мониторинге снижения выхода аэрозолей в "горячем" тоннеле-тупике над очагом вулкана Эльбрус обнаружены разнонаправленные вариации: аномальный рост сигнала рассеяния на аэрозолях при ускоренном (до 14 мкм/сут) сжатии коры Земли, измеренном деформографом. Выявленные задержки (2–7 сут) указывают на необходимость гармонического анализа сигналов лидара и метеопараметров, а также газового состава, на большей выборке данных, и защиты трассы зондирования от влияния вариаций атмосферы, например, погружением трассы лидарного зондирования в слой тяжелых газов у основания тоннеля.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00712).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельхиор П.* Земные приливы. М.: Мир, 1968. 482 с.
2. *Милюков В.К., Мясников А.В.* Метрологические характеристики Баксанского лазерного интерферометра // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 26–30.
3. *Milyukov V.K., Myasnikov A.V., Kuzminov V.V. et al.* 75 m laser strainmeter and aerosol lidar for monitoring the compression/expansion of the Earth's crust in the Baksan Neutrino Observatory // Proc. of 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL*2019). Sept. 06–08, 2019. Sozopol, Bulgaria. https://doi.org/10.1109/CAOL46282.2019.9019472
4. *Pershin S.M., Sobisevich A.L., Grishin M.Ya. et al.* Volcanic activity monitoring by unique LIDAR based on a diode laser // Laser Physics Letters. 2020. V. 17. № 11. 115607 (7 p). https://doi.org/10.1088/1612-202X/abbedc
5. *Pershin S.M., Linkin V.M., Makarov V.S. et al.* Spaceborn laser altimeter based on the single photon diode receiver and semiconductor laser transmitter // Proc. CLEO. 1991. OSA Technical Digest. V. 10. Paper CFI1.
6. *Першин С.М., Гришин М.Я., Завозин В.А. и др.* Диодный лазер, генерирующий импульсы 3 нс, для лидара с высоким пространственным разрешением // Квантовая электроника. 2021. Т. 51. № 5. С. 423–426.

7. *Sliney D., Wolbarsht M.* Safety with lasers and other optical sources: a comprehensive handbook. N.Y.: Springer Science & Business Media, 2013. 1035 p.
8. *Prochazka I., Hamal K., Sopko B.* Recent achievements in single photon detectors and their applications // J. Modern Optics. 2004. V. 51. № 9–0. P. 1289–1313. https://doi.org/10.1080/09500340408235273
9. *Демина Л.И., Копп М.Л., Короновский Н.В. и др.* Большой Кавказ в альпийскую эпоху. М.: ГЕОС, 2007. 368 с.
10. *Лаврушин В.Ю.* Подземные флюиды Большого Кавказа и его обрамления. М.: ГЕОС, 2012. 348 с.
11. *Агафонова Н.Ю., Ашихмин В.В., Добрынина Е.А. и др.* Изучение вариаций низкоэнергетического фона с помощью подземного эксперимента LVD // Известия РАН. Серия физическая. 2019. Т. 83. № 5. С. 673–675. https://doi.org/10.1134/S0367676519050041
12. *Першин С.М., Гришин М.Я., Завозин В.А. и др.* Лидарное зондирование многослойных туманов в наклонном тоннеле Баксанской нейтринной обсерватории // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2019. Т. 46. № 10. С. 328–332.
13. *Надеждинский А.И, Понуровский Я.Я.* Спектрометр на основе диодных лазеров для высокоточных измерений // Квантовая электроника. 2019. Т. 49. № 7. С. 613–622.

OMNIDIRECTIONAL MODULATION OF THE SEASONAL EARTH'S CRUST COMPRESSION AND AEROSOL LIDAR SIGNAL IN THE TUNNEL ABOVE THE ELBRUS VOLCANO CHAMBER

S. M. Pershin[a], Corresponding Member of RAS A. L. Sobisevich[b], M. Ya. Grishin[a], V. A. Zavozin[a], V. S. Makarov[c], V. N. Lednev[a], A. N. Fedorov[a], A. V. Myasnikov[d], and D. G. Artemova[a]

[a] *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[c] *Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[d] *Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

A long-term monitoring of the Earth's crust deformation and aerosol backscattering coefficient was carried out in August-October, 2019 by laser strainmeter and compact lidar in the underground facility of Baksan Neutrino Observatory above the Elbrus volcano chamber. An omnidirectional modulation by abrupt crust compression with a multiple excess of the average rate (~4 μm/day) accompanied by aerosol backscattering coefficient switching from seasonal decrease to anomalous growth has been discovered. The observed processes have been attributed to the fast cooling of the external atmosphere. The delays of the accelerated (up to 14 μm/day) compression of the strainmeter arm and the lidar signal growth relative to external temperature decrease have been estimated (~2 and ~7 days, respectively). The mechanism of the detected phenomenon is discussed.

Keywords: lidar, aerosol scattering, deformation of the Earth's crust, strainmeter, omnidirectional modulation

ФИЗИКА

УДК 533.9; 629.78

О ПЕРСПЕКТИВАХ ИНФРАКРАСНЫХ ЛАЗЕРОВ В ВОЗДУШНЫХ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

© 2021 г. Академик РАН С. Л. Чернышев[1,2], Е. Ю. Локтионов[1,3], А. Э. Сагалаков[1,2], В. В. Скворцов[2], А. С. Филатьев[1,4,*], А. А. Успенский[2]

Поступило 02.08.2021 г.
После доработки 02.08.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Приведены результаты исследований применения твердотельных лазеров, работающих в инфракрасном диапазоне, в сочетании со специальными мишенями для получения первичных электронов в камерах ионизации плазменно-ионных двигателей. Такие двигатели, оснащенные свободно-молекулярными воздухозаборниками для использования газов окружающей атмосферы в качестве рабочего тела, образуют воздушные электрореактивные двигатели, высокоэффективные для длительного поддержания космических аппаратов на сверхнизких орбитах, дающих значительные преимущества в дистанционном зондировании Земли и телекоммуникации. Показано, что предложенный способ эмиссии электронов может являться альтернативой применяемым сегодня катодам, нагреваемым током, для существенного увеличения срока их активного существования.

Ключевые слова: сверхнизкие орбиты, воздушный электрореактивный двигатель, плазменно-ионный двигатель, эффективность двигателя, электронная эмиссия, материал катода, лазерный нагрев катода, срок активного существования

DOI: 10.31857/S2686740021060079

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы применения электрических разрядов в различных аэродинамических и аэрокосмических приложениях рассматриваются авторами в различных направлениях (например, [1–3]). Одним из таких направлений является разработка принципов создания долгоживущего воздушного электрореактивного двигателя (ВЭРД), использующего в качестве рабочего тела забортные атмосферные газы для космических аппаратов (КА) на сверхнизких (150–250 км) орбитах. Применение таких орбит позволяет на порядки снизить требуемую мощность аппаратуры связи, радиационную нагрузку и затраты на выведение, повысить разрешение при зондировании Земли [4–6]. Принципиальное преимущество использования ВЭРД для решения таких задач состоит в том, что условие удержания КА с ВЭРД на сверхнизкой орбите инвариантно к плотности атмосферы, которая может изменяться многократно даже на круговой орбите [3].

Наряду с российскими исследовательскими центрами в ЦАГИ, МАИ, МГУ и др. в данном направлении проводят исследования ряд зарубежных организаций (JAXA [7], SITAEL S.p.A. [8], von Karman Institute for Fluid Dynamics [9], Stuttgart University [10], National University of Defense Technology, China [11], The Aerospace Corporation [12] и др.). Для практической реализации ВЭРД необходимо добиваться требуемого ресурса, сохранения энергетической эффективности и коэффициента использования массы рабочего газа с учетом замены ксенона, обычно применяемого в традиционных ЭРД, атмосферными азотом и кислородом, имеющими более высокие потенциалы ионизации, более низкие сечения ионизации и атомные массы и используемые в условиях очень низких давлений $(1 \div 4) \times 10^{-2}$ Па [3, 13].

Для решения проблем ВЭРД в качестве базовой системы ионизации, ускорения и нейтрализации плазмы подходят плазменно-ионные двигатели (ПИД) по схеме Кауфмана [14] с осцилляцией электронов в камере в продольном магнитном поле между стенками, которые имеют потенциал

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия*
[3] *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
[4] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
**E-mail: filatyev@yandex.ru*

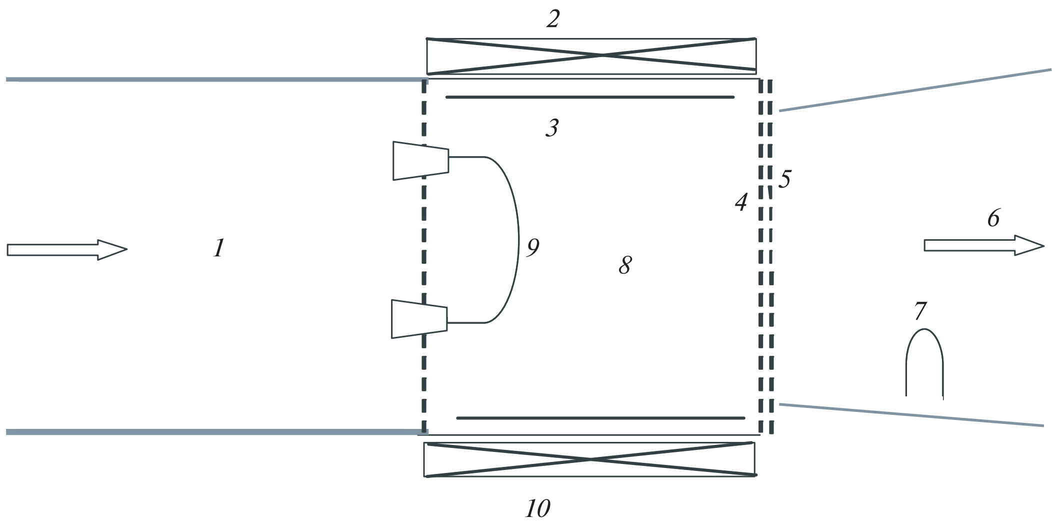

Рис. 1. Схема плазменно-ионного двигателя ЦАГИ: *1* – воздухозаборник, *2* – ПИД, *3* – анод, *4* – экранная сетка, *5* – ускоряющая сетка, *6* – поток синтезированной плазмы, *7* – нейтрализатор-эмиттер электронов, *8* – камера ионизации, *9* – катод, *10* – соленоид.

катода. Двигатели такого типа, в частности, были в середине прошлого века разработаны и испытаны в наземных и летных экспериментах в ЦАГИ при участии ряда организаций в рамках государственной космической программы “Янтарь” [2, 3, 15, 16].

ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАЗМЕННО-ИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Схема созданного в ЦАГИ ПИД в составе ВЭРД представлена на рис. 1.

Принцип действия ПИД основан на генерации плазмы внутри камеры ионизации (КИ) в результате осцилляции электронов, эмитируемых катодом, в магнитном поле с индукцией $\sim 3 \times 10^{-3}$ Тл для обеспечения эффективной ионизации в условиях, когда свободный пробег электронов много больше размеров КИ. Длина КИ составляет ~120 мм.

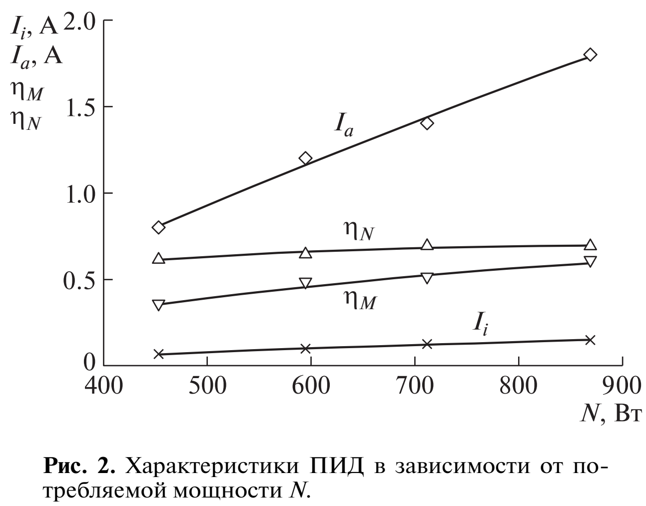

Рис. 2. Характеристики ПИД в зависимости от потребляемой мощности *N*.

Поток ионов газа *6* генерируется в результате извлечения ионов из КИ и их ускорения в ионно-оптической системе (ИОС), состоящей из сеток *4* и *5*. Объемный заряд ускоренного потока плазмы *6* компенсируется электронами из нейтрализатора *7*.

На рис. 2 представлены результаты, полученные при использовании катодов прямого накала и низкой для ПИД мощности $N = 450 \div 870$ Вт. При увеличении мощности в указанных пределах параметры возрастали в следующих диапазонах: анодный ток в КИ $I_a = 0.8 \div 1.8$ А, ионный ток в пучке на выходе КИ $I_i = 70 \div 150$ мА, энергетическая эффективность $\eta_N = 0.62 \div 0.7$, коэффициент использования массы $\eta_M = 0.35 \div 0.6$.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛАЗЕРОВ

Как перспективный вариант увеличения срока активного существования катодов и, следовательно КА, исследовано воздействие инфракрасных лазеров на мишени из W, Nb, HfC, Al, нержавеющей стали с разными физическими и геометрическими характеристиками для зажигания и стабильного горения разряда в КИ при параметрах ВЭРД на сверхнизкой орбите (с учетом компрессии за воздухозаборником [4]).

Изучены два пути обеспечения зажигания: термоэлектронная эмиссия путем нагрева мишеней с помощью 100-ваттного активированного иттербием Yb волоконного лазера (на длине волны 1070 нм) и применения импульсного твердотельного лазера с диодной накачкой с длительностью импульса 12 нс на длине волны 1064 нм. Результат оценивался по эффекту возрастания разрядного тока при различных напряжениях $U_a =$

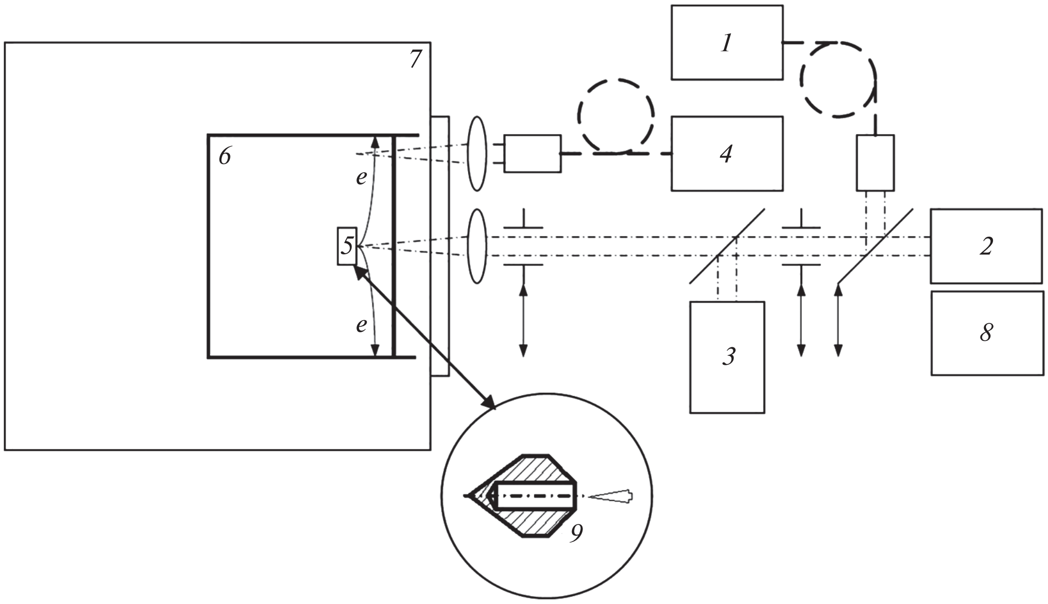

Рис. 3. Схема эксперимента с применением лазеров и объемной мишени.

= 100÷250 В, приложенных к межэлектродному промежутку.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Излучение лазера, формируемое либо волоконным *1*, либо импульсным *2* лазерами вводилось в камеру ионизации *6* ПИД через окно из кварца в ионосферной аэродинамической трубе *7* и специальное отверстие в стенке КИ. Для фокусировки пучков на мишень *5* использовалась настраиваемая оптическая система из линз и диафрагм. Мощность луча измерялась калориметром *3*. При проведении исследований использовались спектрометр *4* и осциллограф *8*. Мишени 5 монтировались на расстоянии ~15 мм от стенки КИ, противоположной ИОС, на выполненных из W-Re державках диаметром 0.2 мм. Это расстояние

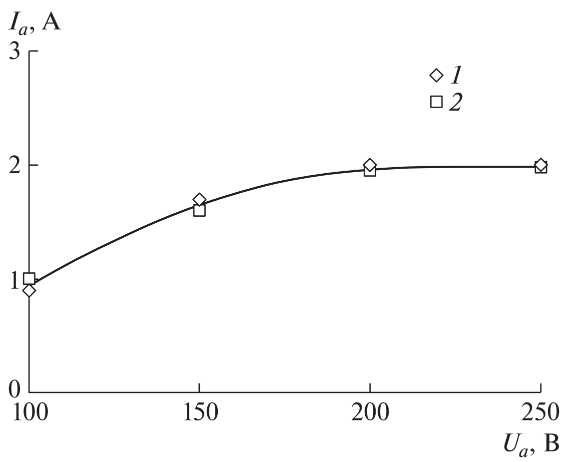

Рис. 4. Зависимость анодного тока от анодного напряжения U_a в камере ионизации с HfC-мишенью: (*1*) $p = 2.7 \times 10^{-2}$ Па, $N_b = 75$ Вт; (*2*) $p = 5.33 \times 10^{-2}$ Па, $N_b = 50$ Вт.

определялось возможностью настройки системы излучения.

В выполненных экспериментах положительные результаты были получены при использовании непрерывного волоконного лазера с мощностью луча N_b до 75 Вт. Для этого оказалось необходимым изготовление вместо плоских – объемных мишеней 9 с глухим отверстием для ввода внутрь лазерного излучения. Мишени имели характерный размер 4 мм с отверстием диаметром 1 мм.

Наряду с методикой создания усовершенствованных мишеней, была разработана технология нанесения прочных углеродных покрытий на Hf- и Nb-мишени с целью ожидаемого снижения работы выхода электронов [17]. При этом мишени, покрытые углеродной пылью, подвергались лазерному нагреву до температуры свыше 2000°C.

Стабильное зажигание и горение разряда было получено при применении HfC-мишеней, изготовленных указанным выше методом (в отличие от NbC-мишеней). Соответствующие зависимости анодного тока I_a от напряжения U_a приведены на рис. 4.

В опытах с применением импульсного лазера (энергия импульса до 30 мДж, частота импульсов 100 Гц) стабильное зажигание разряда и его горение в результате возникновения абляционной плазмы было получено при $p = 5.33 \times 10^{-2}$ Па на мишенях из нержавеющей стали. Анодный ток достигал 1.5 А, что также удовлетворяет требованиям ПИД. Проблемой применения импульсного лазера были пробои в камере, при которых ток возрастал более чем на два порядка, вероятно, вследствие увеличения давления из-за серии импульсов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненное исследование дает основание полагать, что лазерно-индуцированное зажигание может быть перспективным для использования в воздушных электрореактивных двигателях при дальнейшем усовершенствовании этого метода.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-69-46034, организация – МГУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernyshev S., Kuryachii A., et al.* Numerical Modeling of Dielectric Barrier Discharge Multi-Actuator System, Transactions of 3rd SEAS & Space Conference and 21st AIDAA Congress. 2011. P. 935–943.
2. *Филатьев А.С., Скворцов В.В.* Вклад ЦАГИ в развитие электрореактивных двигателей для аэрокосмических аппаратов: к 50-летию Государственной программы “Янтарь” // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII. № 1. С. 99–100.
3. *Маров М.Я., Филатьев А.С.* Комплексные исследования электрореактивных двигателей при полетах в ионосфере Земли: К 50-летию Государственной программы “Янтарь” // Космические исследования. 2018. Т. 56. № 2. С. 137–144.
4. *Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P., Golikov A.A., Yanova O.V.* Comparative Evaluation of the Applicability of Electrical Ramjets, 58th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences. Tel-Aviv & Haifa, Israel. March 14–15, 2018. P. 503–519.
5. *Crisp N.H., et al.* The benefits of very low earth orbit for earth observation missions, Progress in Aerospace Sciences. 2020. V. 117. № 100169. P. 1–18. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100619
6. *Bertolucci G., Barato F., Toson E., Pavarin D.* Impact of propulsion system characteristics on the potential for cost reduction of earth observation missions at very low altitudes, Acta Astronautica. 2020. V. 176. P. 173–191. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.06.018
7. *Hisamoto Y., Nishiyama K., Kuninaka H.* Development Statue of Atomic Oxygen Simulator for Air Breathing Ion Engine, 32nd International Electric Propulsion Conference. Wiesbaden, Germany. 2011. IEPC-2011-294.
8. *Ferrato E., et al.* Development Roadmap of SITAEL’s RAM-EP System, 36th International Electric Propulsion Conference. Vienna, Austria. 2019. IEPC-2019-886.
9. *Parodi P., et al.* Study of a Collector-Intake System for VLEO Air-Breathing Platforms, International Conference on Flight vehicles, Aerothermodynamics and Reentry Missions and Engineering. 30 September–3 October. Monopoly, Italy.
10. *Romano F., et al.* System Analysis and Test-Bed for an Atmosphere-Breathing Electric Propulsion System Using an Inductive Plasma Thruster, Acta Astronautica. 2018. V. 147. P. 114–126. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.03.031
11. *Zheng P., et al.* A Comprehensive Review of Atmosphere-Breathing Electric Propulsion Systems // International Journal of Aerospace Engineering. 2020. Article ID 8811847, 21 p. https://doi.org/10.1155/2020/8811847
12. *Spektor R., Jones K.L.* A Breath of Fresh Air: Air-Scooping Electric Propulsion in Very Low Earth Orbit, The Aerospace Corporation. Center for Space Policy and Strategy. 2021. OTR202100191. P. 1–15.
13. *Filatyev A.S., Golikov A.A.* Integrated Optimization of Trajectories and Layout Parameters of Spacecraft with Air-Breathing Electric Propulsion, 71th International Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 01–05 October 2020. Paper IAC-20-C4.9.2.
14. *Kaufman H.R.* Technology of Electron-Bombardment for Thruster // Advances in Electronics and Electron Physics. 1974. V. 36.
15. *Арцимович Л.А., Гродзовский Г.Л. и др.* Ученые записки ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 3. С. 65–71.
16. *Гродзовский Г.Л.* Применение плазменных ускорителей в газодинамике. // Сб. под ред. акад. Л.А. Арцимовича М.: Машиностроение, 1973. С. 25–40.
17. *Савицкий Е.М., Буров И.В., и др.* Электрические и эмиссионные свойства сплавов. М.: Наука, 1978. 269 с.

ON INFRARED LASER PROSPECTS IN AIR-BREATHING ELECTRIC THRUSTERS

Academician of the RAS S. L. Chernyshev[a,b], E. Yu. Loktionov[a,c], A. E. Sagalakov[a,b], V. V. Skvortsov[b], A. S. Filatyev[a,d], and A. A. Uspensky[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation*

[c] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

[d] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*

The results of studies of the use of solid-state lasers operating in the infrared range in combination with special targets for obtaining primary electrons in the ionization chamber of plasma-ion thrusters are presented. Such thrusters being equipped with free molecular air intakes for using the surrounding atmosphere as a working gas, form air-breathing electric thrusters, which are highly efficient for long-term maintenance of spacecraft in ultra-low orbits providing great advantages in Earth remote sensing and telecommunications. It is shown that the proposed method of electron emission can be an alternative to the used today current-heated cathodes for a significant increase of their lifetime.

Keywords: ultra-low Earth orbits, air-breathing electric thruster, plasma-ion thruster, thruster efficiency, electron emission, cathode material, laser heating of the cathode, lifetime

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 23–28

МЕХАНИКА

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-КРУЧЕНИИ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДО РАЗРЫВА С УЧЕТОМ ВИДА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

© 2021 г. В. Г. Баженов[1,*], Д. А. Казаков[1], Е. В. Нагорных[1], Д. Л. Осетров[1], А. А. Рябов[2]

Представлено академиком РАН В.М. Фоминым 30.04.2021 г.
Поступило 07.07.2021 г.
После доработки 07.07.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

В научной литературе нет четкого вывода о достоверности “гипотезы единой кривой” при больших деформациях из-за сложностей экспериментального анализа неоднородного напряженно-деформированного состояния (НДС). Авторами разработан экспериментально-расчетный метод, в котором интегральные характеристики (обобщенные силы и перемещения) процесса деформирования определяются экспериментально, а изменения неоднородного НДС – численно. Метод позволил установить существенную зависимость диаграмм деформирования при растяжении и кручении от вида напряженного состояния для сталей 09Г2С, 10ХСНД и 10Г2ФБЮ при умеренных и больших деформациях и заметно уточнить результаты численного моделирования процессов упругопластического деформирования стержней при комбинированных нагружениях растяжением-кручением. Предложенный быстросходящийся алгоритм применим для построения диаграмм деформирования и при других видах квазистатического и динамического нагружения: сжатии, пенетрировании, изгибе и др.

Ключевые слова: истинная диаграмма деформирования, упругопластический материал, эксперимент, численное моделирование, вид напряженного состояния, растяжение, кручение

DOI: 10.31857/S268674002106002X

ВВЕДЕНИЕ

В научной литературе открытым остается вопрос о достоверности “гипотезы единой кривой” при больших деформациях из-за сложностей экспериментального анализа неоднородного НДС. Экспериментально установлено, что некоторые материалы обладают зависимостью пластических свойств от вида напряженного состояния [1–4]. В теоретических исследованиях при описании процессов деформирования и разрушения таких материалов физические соотношения дополняются зависимостями от параметров вида напряженного состояния, выраженных через главные напряжения [5–7]: параметр “жесткости” напряженного состояния (параметр трехосности напряжений), параметр вида напряженного состояния, параметр Надаи–Лоде по напряжениям и другие.

При построении истинных диаграмм деформирования в условиях больших деформаций и неоднородного НДС применяются итерационные экспериментально-расчетные методы [8–11]. Они основаны на итерационной процедуре корректировки зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций пропорционально относительному различию значений осевых сил, полученных в расчете и эксперименте при неоднородном НДС с учетом образования шейки до разрыва. При таком подходе необходимо многократно решить прямую задачу с итерационно уточняемыми механическими характеристиками. Авторами [1] разработана оригинальная методика решения обобщенной задачи кручения в двумерной постановке. В современных пакетах программ задачи кручения тел вращения и задачи осесимметричного нагружения с кручением мож-

[1] *Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

[2] *Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия*

**E-mail: bazhenov@mech.unn.ru*

но решать только в трехмерной постановке, что является трудоемкой вычислительной задачей.

В работе представлен новый эффективный алгоритм построения истинной диаграммы деформирования с разбивкой всего процесса нагружения на интервалы, определяемые дискретными значениями экспериментальной зависимости обобщенной силы от обобщенного перемещения. В ходе вычисления в конце каждого интервала разбиения анализируется отличие расчетной обобщенной силы от экспериментальной и, при превышении заданной погрешности, выполняется итерационная корректировка величины интенсивности напряжений на границе текущего интервала истинной диаграммы деформирования. Для продолжения прямого расчета на следующем интервале разбиения применятся процедура нелинейной экстраполяции диаграммы деформирования, которая существенно повышает эффективность (до 10 раз) ранее разработанных алгоритмов [8] построения диаграмм деформирования упругопластических материалов. Построены истинные диаграммы деформирования конструкционных низколегированных сталей 10ХСНД и 10Г2ФБЮ, выявлена их зависимость от вида напряженного состояния при умеренных и больших деформациях.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Процесс нагружения разбивается на малые этапы. Количество этапов N равно количеству точек в табличном представлении экспериментальной зависимости обобщенной силы от обобщенного перемещения. Столько же точек будет содержать построенная истинная диаграмма деформирования (зависимость интенсивности напряжений σ_i от параметра Одквиста κ). В конце каждого этапа n $(n = 1,\ldots,N)$ анализируется величина отклонения расчетной обобщенной силы F_P^n от экспериментальной $F_Э^n$. При превышении заданной погрешности производится итерационная корректировка интенсивности напряжений по формулам: $\sigma_i^n(\kappa^n) = \beta\bar{\sigma}_i^n(\kappa^n)$, $\beta = F_Э^n/F_P^n$, причем κ^n соответствует параметру Одквиста в конце этапа n. При достижении необходимой точности в таблицу истинной диаграммы деформирования заносится новая точка $\sigma_i^n(\kappa^n)$ и выполняется переход на следующий этап $n+1$. Для этого осуществляется процедура нелинейной экстраполяции с использованием m последних точек построенного участка диаграммы деформирования. Необходимо иметь не менее трех опорных точек $(m \geq 3)$. Сначала выполняется процедура экстраполяции безразмерного параметра [9] $K(\kappa) = \dfrac{1}{\sigma_i(\kappa)}\dfrac{d\sigma_i(\kappa)}{d\kappa}$ в виде степенной функции методом наименьших квадратов. Затем вычисляются экстраполяционные значения опорных точек диаграммы деформирования при $\kappa \geq \kappa^n$ по формуле $\sigma_i(\kappa) = \sigma_i(\kappa^n)\exp\left(\int\limits_{\kappa^n}^{\kappa} K d\kappa\right)$. Для этапов нагружения $n < m$ принимается $m = n$. Начальный участок истинной диаграммы деформирования, включающий первые три этапа нагружения $(n = 1,\ldots,3)$, определяется на основе итерационной процедуры [8] без экстраполяции. Отметим, что диаграммы деформирования являются монотонно возрастающими функциями с убывающей производной, что позволяет с высокой точностью определить начальное приближение диаграммы для последующих этапов нагружения.

Максимальная эффективность предложенного алгоритма достигается в случае, когда количество точек экстраполяции m составляет около 12% от общего количества точек N, аппроксимирующих диаграмму. С увеличением количества этапов (точек, аппроксимирующих диаграмму) итерационная процедура построения диаграммы деформирования практически сводится к однократному прямому численному расчету без применения итерационной процедуры, что существенно повышает эффективность (до 10 раз) методик [8] построения диаграммы деформирования упругопластических материалов.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-КРУЧЕНИИ И ПОСТРОЕНИЕ ИСТИННЫХ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Проведено экспериментальное и численное исследование процессов деформирования осесимметричных образцов переменной толщины с цилиндрической рабочей частью из стали 10Г2ФБЮ при монотонном кинематическом нагружении растяжением-кручением с учетом больших деформаций и неоднородности НДС.

Для построения истинных диаграмм деформирования проводился эксперимент на испытательном комплексе Z100 ZWICK-ROEL, предназначенном для испытаний на растяжение и кручение цилиндрических образцов при одновременном синхронизированном по времени задании параметров: скорость изменения продольного перемещения – скорость изменения угла закручивания. Испытания проводились на сплошных цилиндрических образцах с размерами: начальный радиус рабочей части $R_0 = 6$ мм, первоначальная длина рабочей частей $L_0 = 60$ мм.

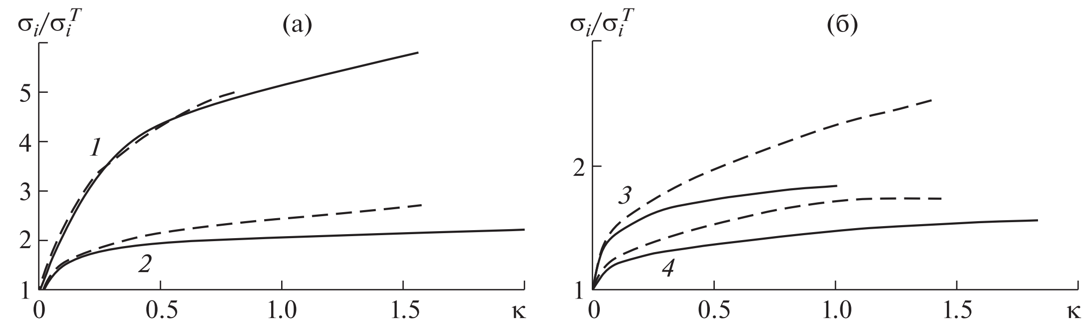

Рис. 1. Истинные диаграммы деформирования сталей 12Х18Н10Т (*1*), 09Г2С (*2*), 10ХСНД (*3*) и 10Г2ФБЮ (*4*) при растяжении (пунктирные линии) и кручении (сплошные линии).

Полная система уравнений [1], описывающих решение обобщенных двумерных задач кручения, записывается в цилиндрической системе координат $Orz\beta$ (Oz — ось вращения). Уравнение движения сплошной среды следует из уравнения баланса виртуальных мощностей. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие формоизменения. Упругопластические свойства материалов описываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением, поскольку рассматриваются процессы активного нагружения, близкие к пропорциональным. Для численного моделирования процессов деформирования образцов при пропорциональном комбинированном нагружении растяжением-кручением реализована зависимость диаграммы деформирования от вида напряженного состояния. Уточненная диаграмма деформирования является линейной комбинацией диаграмм растяжения $\sigma_i^{\text{ten}} = \sigma_i^{\text{ten}}(\kappa)$ и кручения $\sigma_i^{\text{tor}} = \sigma_i^{\text{tor}}(\kappa)$, коэффициенты которой зависят от параметра вида напряженного состояния Π [6]:

$$\sigma_i = \begin{cases} |\Pi|\sigma_i^{\text{ten}}(\kappa) + (1+|\Pi|)\sigma_i^{\text{tor}}(\kappa), & |\Pi| \le 1 \\ \sigma_i^{\text{ten}}(\kappa), & 1 \le |\Pi| \le \sqrt{3} \end{cases}$$
$$\Pi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}. \tag{1}$$

Начально-краевая задача решается по явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа “крест” [1]. Темп нагружения задавали таким образом, чтобы вклад инерционных сил был пренебрежимо мал. Разработанная методика численного решения реализована на базе пакета прикладных программ “Динамика-2” [12].

На основе проведенных экспериментов по кручению и растяжению с применением предложенного алгоритма, построены истинные диаграммы деформирования для сталей 12Х18Н10Т, 09Г2С, 10ХСНД и 10Г2ФБЮ (рис. 1, кривые *1–4* соответственно). На рис. 1 сплошными линиями отмечены истинные диаграммы деформирования, построенные из экспериментальных данных по монотонному кручению до разрушения образца, штриховыми — по одноосному растяжению с учетом образования шейки.

Для стали 12Х18Н10Т “гипотеза единой кривой” подтверждается при больших деформациях, поскольку диаграммы деформирования при кручении и растяжении образцов из этого материала практически совпали при деформациях до 80% (рис. 1, кривые *1*). Это согласуется с результатами исследования [10]. Для сталей 09Г2С и 10ХСНД “гипотеза единой кривой” выполняется при деформациях до 15 и 4% соответственно, и не выполняется при больших деформациях. Диаграммы растяжения и кручения стали 10Г2ФБЮ (рис. 1, кривые *4*), построенные при двух видах нагружения, отличаются друг от друга на всем интервале деформирования. При величине параметра Одквиста $\kappa = 0.09$ (момент начала образования шейки при одноосном растяжении) расхождение между кривыми составляет 4%, при $\kappa = 1$–16%.

В испытаниях сталей 12Х18Н10Т, 09Г2С и 10Г2ФБЮ максимальное значение параметра Одквиста до разрушения достигается при кручении. Для стали 12Х18Н10Т оно вдвое выше, чем при растяжении, а для сталей 09Г2С и 10Г2ФБЮ больше на 20%. Для стали 10ХСНД максимальное значение параметра Одквиста достигается при растяжении (в шейке), оно на 40% больше, чем при кручении.

Введем необходимые для дальнейшего анализа обозначения параметров задачи:

угол закручивания по окружной координате и осевое перемещение подвижного торца образца: θ и u_z;

кинематический параметр, характеризующий соотношение кручения и растяжения, при пропорциональном нагружении $q \equiv \text{const}$:

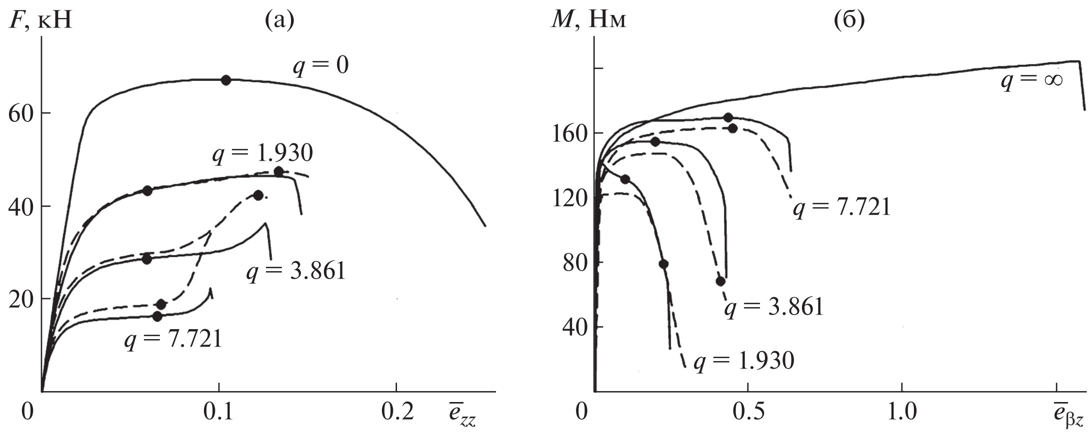

Рис. 2. Экспериментальные и расчетные зависимости осевой силы от условной осевой деформации и крутящего момента от условной сдвиговой деформации на поверхности рабочей части образца из стали 10Г2ФБЮ.

$$q = \frac{R_0\theta}{\sqrt{3}u_z};$$

условная интенсивность деформации на поверхности рабочей части образца:

$$\bar{e}_i = \sqrt{\bar{e}_{zz}^2 + \frac{4}{3}\bar{e}_{\beta z}^2} = \frac{u_z}{L_0}\sqrt{1+q^2};$$

условная осевая деформация:

$$\bar{e}_{zz} = \frac{u_z}{L_0};$$

условная сдвиговая деформация на поверхности рабочей части образца:

$$\bar{e}_{\beta z} = \frac{1}{2}\frac{R_0\theta}{L_0};$$

осевая сила и крутящий момент:

$$F = 2\pi\int_0^R \sigma_{zz} r dr \text{ и } M = 2\pi\int_0^R \sigma_{\beta z} r^2 dr;$$

обобщенная осевая сила:

$$W(\bar{e}_i) = \frac{L_0}{\sqrt{1+q^2}}\left(F + M\frac{\sqrt{3}q}{R_1}\right);$$

суммарная работа осевой силы и крутящего момента:

$$A = \int_0^{u_z} F du_z + \int_0^{\theta} M d\theta = \int_0^{\bar{e}_i} \frac{L_0}{\sqrt{1+q^2}}\left(F + \frac{\sqrt{3}q}{R_1}M\right) d\bar{e}_i = \int_0^{\bar{e}_i} W d\bar{e}_i.$$

В качестве критерия потери устойчивости пластического деформирования с образованием шейки при пропорциональном нагружении растяжением-кручением принимается условие $\frac{dW}{d\bar{e}_i} = 0$ [1], характеризующее момент достижения обобщенной силой W максимальных значений. Данный критерий является обобщением известного условия А. Консидера, полученного при растяжении стержней [13].

На рис. 2 приведены экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) зависимости осевой силы от условной осевой деформации $F = F(\bar{e}_{zz})$ и крутящего момента от условной сдвиговой деформации на поверхности рабочей части образца $M = M(\bar{e}_{\beta z})$ для образца из стали 10Г2ФБЮ. Соответствующие значения параметра q приведены рядом с кривыми. При чистом кручении и одноосном растяжении экспериментальные и расчетные кривые практически совпадают и приведены сплошными линиями. Точками отмечены моменты потери устойчивости пластического деформирования с образованием шейки, которым соответствуют максимальные значения обобщенной силы W. Расчетные зависимости хорошо согласуются с экспериментальными данными как по величине, так и по моменту достижения максимальных значений интегральных характеристик – сил F и моментов M.

При комбинированном нагружении растяжением-кручением в эксперименте и расчете после момента потери устойчивости в процессе образования шейки, в отличие от одноосного растяжения, наблюдается более интенсивный рост осевой силы F до разрушения, при этом величина крутящего момента M уменьшается из-за уменьшения радиуса поперечного сечения шейки. При чистом растяжении нисходящая ветвь экспериментальной кривой расчетом описывается также удовлетворительно. При наложении кручения на растяжение и чистом кручении эта ветвь не описывается, поскольку при численном моделировании не были учтены поврежденность материала и разрушение, которое имеет многостадийный характер, включающий в себя образование микроповреждений, слияние микропор, а затем развитие макроразрушения. Процесс макроразрушения начинается на поверхности образца и при дальнейшем нагружении (кручении) распространяется к оси вращения.

Процессы деформирования до момента потери устойчивости близки к лучевым, а закритическое поведение характеризуется траекториями малой кривизны. При комбинированном нагружении до момента потери устойчивости во всем объеме образца вид напряженного состояния медленно изменяется в сторону растяжения, так как образец утончается. Изменение вида напряженного состояния в шейке в сторону деформации чистого сдвига после момента потери устойчивости происходит наиболее интенсивно при одноосном растяжении. До момента падения осевой силы во всем объеме образца происходит процесс активного нагружения. В месте образования шейки активный процесс продолжается до разрушения. В экспериментах шейка образуется в средней части образца, ее положение зависит от многих случайных факторов. В расчетах образование шейки происходит на плоскости симметрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан эффективный алгоритм построения истинной диаграммы деформирования с разбивкой всего процесса нагружения на интервалы, определяемые дискретными значениями экспериментальной зависимости обобщенной силы от обобщенного перемещения. В ходе вычисления в конце каждого интервала разбиения анализируется отличие расчетной обобщенной силы от экспериментальной и, при превышении заданной погрешности, выполняется итерационная корректировка величины интенсивности напряжений на границе текущего интервала истинной диаграммы деформирования. Для продолжения прямого расчета на следующем интервале разбиения применятся процедура нелинейной экстраполяции диаграммы деформирования. Построены истинные диаграммы деформирования конструкционных низколегированных сталей 10ХСНД и 10Г2ФБЮ. Выявлена их зависимость от вида напряженного состояния при умеренных и больших деформациях, что позволило существенно уточнить результаты численного моделирования процессов упругопластического деформирования стержней при комбинированных нагружениях растяжением-кручением.

Реализована оригинальная методика численного решения обобщенной задачи кручения (осесимметричное деформирование и кручение) упругопластических тел вращения с учетом больших деформаций и неоднородности НДС в двумерной постановке [1]. Современные вычислительные комплексы позволяют решать задачи кручения и задачи осесимметричного нагружения с кручением тел вращения только в трехмерной постановке. Большие сдвиговые деформации приводят к существенному искажению конечно-элементной сетки, что требует ее многократного перестроения в ходе решения и снижает точность расчетов. Время счета одной прямой задачи комбинированного пропорционального нагружения растяжением-кручением осесимметричных образцов в двумерной постановке на процессоре с тактовой частотой 4.4 ГГц на разностной сетке 20 × 150 узлов составляет порядка 5 мин. Аналогичный расчет в трехмерной постановке является на два-три порядка более трудоемкой вычислительной задачей и возникает необходимость в использовании кластера с большим числом ядер.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-08-00667_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баженов В.Г., Зефиров С.В., Крамарев Л.Н., Павлёнкова Е.В.* Моделирование процессов деформирования и локализации пластических деформаций при кручении-растяжении тел вращения // ПММ. 2008. Т. 72. № 2. С. 342–350.
2. *Зубчанинов В.Г.* Механика сплошных деформируемых сред. Тверь: ТГТУ, ЧуДо, 2000. 703 с.
3. *Ипатова А.В., Вильдеман В.Э.* Построение материальных функций неупругого деформирования алюминиевого сплава Д16Т по результатам испытаний на растяжение и кручение // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 4 (29). С. 106–114.
4. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
5. *Ломакин Е.В., Мельников А.М.* Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 77–89.
6. *Капустин С.А., Горохов В.А., Виленский О.Ю., Кайдалов В.Б., Руин А.А.* Соотношения модели поврежденной среды для материалов, подвергающихся терморадиационным воздействиям // Проблемы прочности и пластичности. 2012. № 74. С. 5–15.
7. *Бондарь В.С., Абашев Д.Р.* Пластическое деформирование материалов, чувствительных к виду напряженного состояния // Вестн. Пермского нац. иссл. политехн. ун-та. Механика. 2018. № 1. С. 29–39. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.1.03
8. *Баженов В.Г., Зефиров С.В., Крамарев Л.Н., Осетров С.Л., Павленкова Е.В.* Способ определения деформационных и прочностных свойств материалов при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии. Патент на

изобретение № 2324162. Заявка № 2006115805. Опубликовано 10.05.2008, бюлл. № 13.

9. *Баженов В.Г., Осетров С.Л., Осетров Д.Л.* Анализ закономерностей растяжения упругопластических образцов и образования шейки с учетом краевых эффектов // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 4 (350). С. 133–140.
10. *Владимиров С.А., Трефилов С.И.* Исследование процесса глубокого деформирования образцов с кольцевой выточкой при их растяжении // Космонавтика и ракетостроение. 2017. Т. 81. № 3. С. 81–85.
11. *Masayuki Kamaya, Masahiro Kawakubo.* A procedure for determining the true stress-strain curve over a large range of strains using digital image correlation and finite element analysis // Mechanics of Materials. V. 43. Iss. 5. May 2011. P. 243–253. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.02.007
12. *Баженов В.Г., Зефиров С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р.* Пакет программ “Динамика-2” для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 67–72.
13. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

MODELING THE BEHAVIOR OF ELASTOPLASTIC RODS DURING TENSION-TORSION AND CONSTRUCTING THEIR DEFORMATION DIAGRAMS BEFORE TEARING WITH TAKING INTO ACCOUNT FOR THE TYPE OF STRESS-STRAIN STATE

V. G. Bazhenov[a], D. A. Kazakov[a], E. V. Nagornykh[a], D. L. Osetrov[a], and A. A. Ryabov[b]

[a] *Researcher Institute of Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

[b] *Federal State Unitary Enterprise Russian Federal Nuclear Center All-Russian Research Institute of Experimental Physics FSUE RFNC—VNIIEF, Sarov, Nizhny Novgorod Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.M. Fomin

In the scientific literature, there is no clear conclusion about the reliability of the “single curve hypothesis” at large deformations due to the complexity of the experimental analysis of the inhomogeneous stress-strain state (SSS). The authors have developed an experimental calculation method, in which the integral characteristics (generalized forces and displacements) of the deformation process are determined experimentally, and the changes in the inhomogeneous SSS are numerically determined. The method made it possible to establish a significant dependence of the stress-strain diagrams in tension and torsion on the type of stress state for steels 09G2S, 10KhSND, and 10G2FBYU at moderate and large deformations and to significantly refine the results of numerical modeling of the processes of elastoplastic deformation of rods under combined tensile-torsion loading. The proposed fast converging algorithm is applicable for plotting deformation diagrams for other types of quasi-static and dynamic loading: compression, penetration, bending, etc.

Keywords: true deformation diagram, elastoplastic material, experiment, numerical simulation, type of stress state, tension, torsion

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 29–32

МЕХАНИКА

УДК 533.6.011

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО ТРАНСЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ НЕВОЗМУЩЕННОЙ СКОРОСТИ

© 2021 г. А. Н. Богданов[1,*]

Представлено академиком РАН С.Т. Суржиковым 06.09.2021 г.
Поступило 09.09.2021 г.
После доработки 13.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

С использованием “трехпалубной” модели исследуется неклассический пограничный слой над твердой плоской пластиной при нестационарном свободном вязко-невязком взаимодействии на трансзвуковых скоростях. Особенностью настоящего исследования является выбор квадратичной зависимости продольной составляющей невозмущенной скорости в пограничном слое от поперечной координаты и непостоянство градиента давления. Показано качественное отличие картины течения в рассмотренном случае от случая линейного профиля скорости в пограничном слое.

Ключевые слова: пограничный слой, вязко-невязкое взаимодействие, трансзвуковое течение, асимптотические разложения, нелинейный процесс

DOI: 10.31857/S2686740021060031

Аналитическое исследование устойчивости свободно взаимодействующих на трансзвуковых скоростях вязких и невязких течений проведено на “трехпалубной модели” [1] для пограничного слоя с профилем продольной скорости, линейно зависящим от поперечной координаты: $u_0 = y$ (обзор выполненных работ см., например, [2]). При выборе такого вида профиля невозмущенной скорости уравнения, описывающие развитие возмущений, получаются уникальными по своей относительной простоте – сводятся к уравнению Эйри, что позволяет провести аналитическое исследование в достаточно законченном виде.

На практике при течении вязкого газа даже у плоской поверхности реализуются профили скорости более общего, чем простой линейный, вида. Известный пример автомодельного пограничного слоя на полубесконечной плоской пластине нулевой толщины (задача Блазиуса) [3], хорошо подтверждаемый экспериментально, дает зависимость профиля скорости в нем от комбинации обеих пространственных координат: не слишком близко к началу пластины, – $u_0 = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ (ось x направлена вдоль поверхности пластины). Градиент давления в реальном течении также может не быть тривиально постоянным.

В этой связи представляет интерес рассмотрение поведения малых возмущений в случае профиля скорости другого, отличного от линейного, вида. Следуя путем классических исследований свободного вязко-невязкого взаимодействия [2, 4] и полагая зависимость u_0 только от y, можно, задавая возмущения гармоническими по независимым переменным (t, x), свести задачу к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения (подобно тому, как для линейного профиля было получено уравнение Эйри). Хотя общность и этих результатов существенно ограничена, они освещают некоторые свойства и особенности развития возмущений исследуемых течений и позволяют избежать абсолютизации полученных для линейного профиля результатов.

Наиболее простым вариантом, кроме линейного, в интересующем нас исследовании может служить квадратичный вид профиля скорости $u_0 = y^2$ (в этом случае уравнения несжимаемого пограничного слоя удовлетворяются, если положить $v_0 = 0$ и $p_0 = x$). Заметим здесь, что, исследуя поведение возмущений при выборе конкретного вида профиля скорости, следует иметь в виду трение потока об обтекаемую поверхность, опреде-

[1] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: bogdanov@imec.msu.ru*

ляемое как $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$. Легко видеть, что при $u_0 = y^2$ трение на поверхности есть тождественный ноль, касательная к графику скорости $u_0 = y^2$ на обтекаемой поверхности вертикальна. Примеры течения в пограничном слое с нулевым трением на границе течения известны – поток при степенном законе убывания скорости во внешнем невязком течении [3], струя с прямолинейной осью [5]. Нулевое трение на границе течения является особенностью, главное в которой – возможность отрыва пограничного слоя в точках нулевого трения. Оригинальные соображения о качественном характере течения в окрестности точки отрыва пограничного слоя высказаны Ландау [6].

В случае профиля скорости более общего, квадратичного, вида $u_0 = y^2 + y$ трение на обтекаемой поверхности ($y = 0$) уже отлично от нуля. Случай такого типа, $u_0 = \frac{y^2}{2} + By$, был исследован при сверхзвуковом свободном вязко-невязком взаимодействии для различных величин параметра B [4]. Решение уравнения в случае квадратичного профиля продольной скорости пограничного слоя приведено также в работе Stewartson [7], в связи с изучением отрыва потока. В этой работе уравнение имело 4-й порядок, решение выписывалось в виде ряда по степеням поперечной координаты, ни уравнение, ни полученное решение не ставилось в соответствие с известными типами уравнений или специальных функций.

Исследование устойчивости течений с такого рода профилем невозмущенной скорости не проводилось.

Ниже будет рассмотрен случай квадратичного профиля:

$$u_0 = B\frac{y^2}{2} + y, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = Bx$$

(при $B = 0$ имеем изученный ранее случай линейного профиля [8]).

Для моделирования течения во всей исследуемой области свободного вязко-невязкого взаимодействия используем трехпалубную модель в ее трансзвуковой модификации [8]. В соответствии с выбранной моделью вблизи обтекаемой поверхности течение описывается уравнениями нестационарного несжимаемого пограничного слоя

$$\begin{gathered} u_x + v_y = 0, \quad p_y = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y = -p_x + u_{yy}. \end{gathered} \tag{1}$$

Вдали от поверхности тела течение – невязкое, в рассматриваемой задаче – трансзвуковое, его приближенно можно считать безвихревым и для его описания использовать линейное уравнение Линя–Рейсснера–Цяня (ЛРЦ) [9] для потенциала скорости $\phi(t, x, y)$:

$$\begin{gathered} \delta\phi_{tt} + 2\phi_{xt} + K_\infty\phi_{xx} - \phi_{y_1y_1} = 0, \\ K_\infty = \frac{(M_\infty^2 - 1)}{\delta} = \text{const}. \end{gathered} \tag{2}$$

Внешнее невязкое течение и пограничный слой в трехпалубной модели разделяет некоторое переходное течение. Вывод уравнений, моделирующих это течение и их интегрирование в связи с соответствующими граничными условиями, проведены ранее [8]. Приведем здесь только следующие из общего анализа соответствующие условия сращивания:

$$\begin{gathered} \phi_x(t, x, 0) = -p(t, x), \\ \phi_{y_1}(t, x, 0) = -A_x(t, x) \quad \text{при} \quad y_1 \to 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$u \to u_0 + A(t, x) \quad \text{при} \quad y \to \infty, \tag{4}$$

где $A(t, x)$ – функция мгновенного смещения линий тока переходного течения.

Примем условие ограниченности решения на выходе из исследуемой области: $\phi_{y_1} \to 0$ при $y_1 \to \infty$.

Составляющие скорости течения на поверхности тела удовлетворяют обычным граничным условиям прилипания и непротекания:

$$u(t, x, 0) = 0, \quad v(t, x, 0) = 0. \tag{5}$$

Пусть возмущения в начальный момент времени отсутствуют:

$$t = 0{:}\ u = B\frac{y^2}{2} + y, \quad v = 0, \quad p = Bx \tag{6}$$

и нет возмущений, приходящих на поверхность с набегающим потоком

$$x = x_0{:}\ u \to B\frac{y^2}{2} + y, \quad v \to 0, \quad p = Bx. \tag{7}$$

Представив параметры возмущенного течения в виде рядов по степеням амплитуды возмущений δ:

$$\begin{gathered} u = B\frac{y^2}{2} + y + \delta u + \ldots, \\ v = \delta v + \ldots, \quad p = \delta p + \ldots \end{gathered}$$

и подставив их в систему (1), имеем в первом приближении по δ:

$$\begin{gathered} \delta u_x + \delta v_y = 0, \quad \delta p_y = 0, \\ \delta u_t + u_0\delta u_x + \frac{du_0}{dy}\delta v = -\delta p_x + \delta u_{yy}. \end{gathered} \tag{8}$$

Из начальных и граничных условий (4)–(7) получим

$$
\begin{gathered}
\delta u(0,x,y)=0; \quad \delta u \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0; \\
\delta u(t,x,0)=0, \quad v_1(t,x,0)=0; \\
\delta u \to A \quad \text{при} \quad y \to \infty.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Для гармонических по x и по t возмущений можно свести систему (8) к одному уравнению, исключая неизвестные амплитуды и их производные из последнего уравнения при помощи первых двух. Получим

$$
\begin{gathered}
(By+1)\left(\frac{d^3\tilde{u}}{dy^3}-\left(\omega+ik\left(B\frac{y^2}{2}+y\right)\right)\frac{d\tilde{u}}{dy}\right)- \\
-B\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dy^2}-\left(\omega+ik\left(B\frac{y^2}{2}+y\right)\right)\tilde{u}\right)=-Bik\tilde{p},
\end{gathered} \tag{10}
$$

линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, неоднородное и с переменными коэффициентами. При $B=0$ вместо (10) имеем полученное ранее для линейного профиля уравнение Эйри для $\frac{d\hat{u}}{dy}$:

$$
\frac{d^3\hat{u}}{dy^3}-(\omega+iky)\frac{d\hat{u}}{dy}=0. \tag{11}
$$

Выражения и в первых, и во вторых скобках уравнения (10) сходны с уравнением Эйри (первое –для $\tilde{u}_y$, второе –для $\tilde{u}$), но коэффициенты в них пропорциональны не y, а многочлену $O(y^2)$.

Точное решение уравнения (11) и его подробное обсуждение приведено в [8]. Имея целью исследовать более сложный, не имеющий пока исследованного точного решения, случай квадратичного профиля по аналогии с линейным случаем, рассмотрим приближенное решение уравнения (10). Будем считать коэффициенты в этом уравнении постоянными величинами (допущение, применявшееся и ранее при исследовании задач гидродинамической устойчивости [10]): $\omega+ik\upsilon\equiv\Theta = \mathrm{const}$. Решениями такого уравнения являются две экспоненциальные функции и тривиальное решение (постоянная)

$$
\tilde{u}=C_1\exp(\sqrt{\Theta}y)+C_2\exp(-\sqrt{\Theta}y)+C_3. \tag{12}
$$

Для выполнения условия ограниченности полученного решения с ростом аргумента положим $C_1=0$. Сравнение решения (12) с известным точным решением (11), выражаемым через функции Эйри

$$
\tilde{u}=C\int Ai(\xi)\,d\xi, \tag{13}
$$

показывает, что (12) сохранило качественно сходное с точным решением (функция Ai) поведение – сильное затухание при $\Theta>0$, колебательный характер при $\Theta<0$, отброшенное решение сходно с функцией Bi. Решение (12) не удовлетворяет условию $\tilde{u}(0)=0$, но в данном случае важно поведение решения при $y\neq 0$.

Для квадратичного профиля общим решением однородного уравнения (10) при постоянных коэффициентах будет сумма трех экспоненциальных функций

$$
\begin{gathered}
\tilde{u}=C_1\exp(\sqrt{\Theta}y)+C_2\exp(-\sqrt{\Theta}y)+ \\
+C_3\exp\left(\frac{B}{B\upsilon+1}y\right),
\end{gathered} \tag{14}
$$

в этом решении $\Theta=\omega+ik\left(B\frac{\upsilon^2}{2}+\upsilon\right)$. Для ограниченности решения при $y\to\infty$ вновь положим $C_1=0$. При $B>0$, $B\upsilon+1>0$ по той же причине (неограниченный рост при $y\to\infty$) необходимо положить и $C_3=0$ (при $B<0$, $B\upsilon+1>0$ таких оснований нет и в задаче появляются возмущения неисследованного типа).

Сравнение решений (12) и (14) после выполненного отбора показывает, что определяемый ими рост (затухание) возмущений происходит качественно сходно, количественное отличие лишь в величине волнового числа: k для линейного против $k(B\upsilon+1)$ для нелинейного случая, возмущение с частотой ω для линейного случая отвечает возмущению той же частоты, но с волновым числом, большим в $B\upsilon+1$ раз, для квадратичного профиля.

В уравнении (10) уже видна существенная роль градиента давления – из-за него уравнение становится неоднородным, причем знак неоднородности зависит от вида профиля невозмущенной скорости – знака B. Эта неоднородность определяет еще одно решение, если известна $\varphi_j(y)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения [11]:

$$
\varphi(y)=\sum_{j=1}^{3}\varphi_j(y)\int\frac{W_j}{f_jW}dy,
$$

где f_j – коэффициенты в (10) при j-й производной искомой функции, W – определитель Вронского, W_j получается из него заменой j-го столбца на $(0,\,0,\,-Bik\tilde{p})$.

В рассматриваемом здесь случае $\varphi_j(y)$ есть экспоненциальные функции

$$
\begin{gathered}
\varphi_1=\exp(\sqrt{\Theta}y), \quad \varphi_2=\exp(-\sqrt{\Theta}y), \\
\varphi_3=\exp\left(\frac{B}{B\upsilon+1}y\right),
\end{gathered} \tag{15}
$$

где f_j – постоянные величины ($f_1=\Theta(B\upsilon+1)$, $f_1=-B$, $f_1=B\upsilon+1$).

Полученное решение (15) не ограничено при $y\to\infty$ и потому не соответствует постановке задачи в условиях (1)–(7). Таким образом, в случае профиля невозмущенной скорости вида $u_0 = B\frac{y^2}{2} + y$ проведение исследования устойчивости течения, аналогично линейному случаю невозможно – ограниченного решения стационарного обтекания уединенной плоской полупластины при таком профиле невозмущенной скорости не существует.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
2. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
3. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 520 с.
4. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003. 456 с.
5. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 480 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Stewartson K.* Is the singularity at separation removable? // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. № 2. P. 347–364.
8. *Рыжов О.С., Савенков И.В.* Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.
9. *Тзян Х.Ш., Лин Ц.Ц., Рейснер Е.* О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости / Сб. ст. Газовая динамика. М.: Изд. иностр. лит., 1950. С. 183–196.
10. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. 1977. М.: Наука, С. 366.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд. иностр. лит., 1951. 828 с.

TO MATHEMATICAL MODELING INTERACTIVE TRANSONIC BOUNDARY LAYER WITH A NON-LINEAR PROFILE OF UNDISTURBED SPEED

A. N. Bogdanov[a]

[a] *Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academiciam of the RAS S.T. Surzhikov

Using the triple-deck theory, a non-classical boundary layer over a solid flat plate is investigated in the case of unsteady free viscous-inviscid interaction at transonic speeds. A feature of this study is the choice of the quadratic dependence of the longitudinal component of the unperturbed velocity in the boundary layer on the transverse coordinate and the variability of the pressure gradient. A qualitative difference between the flow pattern in the considered case and the case of a linear velocity profile in the boundary layer is shown.

Keywords: boundary layer, viscous-inviscid interaction, transonic flow, asymptotic expansions, nonlinear process

МЕХАНИКА

УДК 521.13

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЧАСТОТ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУХПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧИ

© 2021 г. В. М. Буданов[1,*]

Представлено академиком РАН В.А. Левиным 13.09.2021 г.
Поступило 16.09.2021 г.
После доработки 16.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Рассматривается задача о движении вокруг массивного центрального тела (звезды) двух других тел (планет) со сравнимыми массами, которые существенно меньше массы центрального тела. Предполагается, что движение планет происходит в одной плоскости по орбитам, близким к круговым. Движение планет строится непосредственно в полярных координатах с применением метода неопределенных частот, предложенного автором, и являющегося модификацией метода последовательных приближений. Получено первое приближение, представляющее собой для каждой планеты сумму равномерного кругового движения и малых квазипериодических добавок. Последние представляют собой сумму периодических компонент, периоды которых равны периодам круговых движений обоих тел, а также их суммам и разностям. При этом периоды круговых движений изменяются по сравнению с тем, что дает третий закон Кеплера: период внутренней планеты увеличивается, а внешней – уменьшается. Второй особенностью построенного приближенного решения является отсутствие вековых возмущений.

Ключевые слова: двухпланетная задача, метод последовательных приближений

DOI: 10.31857/S2686740021060043

Двухпланетная задача является вариантом задачи трех тел, движущихся под действием взаимного притяжения. При этом распределение масс таково, что можно говорить о движении двух тел относительно центрального. Классической задачей является движение Юпитера и Сатурна вокруг Солнца, если пренебречь влиянием других тел Солнечной системы. История вопроса и подробный обзор работ в данной области приведен в [1], описания базовых методов и подходов – в [2–4]. Здесь мы отметим три факта. Первый факт – практически все современные аналитические исследования основываются на уравнениях для оскулирующих элементов орбит. При этом явно или неявно используется третий закон Кеплера, который строго выполняется только для задачи двух тел. Второй факт – вековые составляющие непременно присутствуют при описании движений планет и являются существенными на длительных временах. Третий факт – аналитические подходы практически полностью вытеснены численными методами в задачах, требующих современной точности. В данной работе строится модель плоского движения в гелиоцентрической системе координат исходя непосредственно из уравнений движения под действием сил взаимного притяжения [2, 3]. Рабочими являются полярные координаты каждой из планет – расстояние до Солнца и угол отклонения от фиксированного направления. Методом неопределенных частот [5] строится первое приближение в виде квазипериодического решения, не содержащего вековых членов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем систему, состоящую из трех тел S, Q, R (материальных точек) с массами m_s, m_q, m_r, находящихся в одной плоскости и движущихся под действием гравитационных сил с гравитационной постоянной γ. Ограничиваемся рас-

[1] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vlbudanov@gmail.com*

смотрением систем типа “звезда и две планеты”. Считаем, что масса центрального тела S значительно больше масс двух других и расстояние до него от общего центра масс мало по сравнению с расстояниями до двух других тел, которые движутся по орбитам разного размера.

Будем рассматривать движение в “гелиоцентрической” системе координат с началом в центральном теле и неподвижными направлениями осей. Радиус-векторы первого и второго тел обозначим $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, тогда уравнения движения имеют вид [2, 3]

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\gamma\frac{m_s + m_q}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q} + \gamma m_r\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right),$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\frac{m_s + m_r}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} - \gamma m_q\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|^3} + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3}\right).$$

В качестве характерного расстояния возьмем средний радиус орбиты S ближнего тела. Изменив масштаб времени $t \to \sqrt{\frac{\gamma m_s}{S^2}}\,t$, введя отношения масс $\mu_q = \frac{m_q}{m_s}$, $\mu_r = \frac{m_r}{m_s}$ и переходя к полярным координатам (q,φ), (r,ψ), приходим к системе, которая есть предмет настоящего исследования:

$$\begin{gathered}\ddot{q} - q\dot{\varphi}^2 = -\frac{1+\mu_q}{q^2} + \\ + \frac{\mu_r}{u^3}(r\cos(\varphi-\psi) - q) - \frac{\mu_r}{r^2}\cos(\varphi-\psi), \\ q\ddot{\varphi} + 2\dot{q}\dot{\varphi} = -\frac{\mu_r}{u^3}r\sin(\varphi-\psi) + \frac{\mu_r}{r^2}\sin(\varphi-\psi), \\ \ddot{r} - r\dot{\psi}^2 = -\frac{1+\mu_r}{r^2} + \\ + \frac{\mu_q}{u^3}(q\cos(\varphi-\psi) - r) - \frac{\mu_q}{q^2}\cos(\varphi-\psi), \\ r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} = \frac{\mu_q}{u^3}q\sin(\varphi-\psi) - \frac{\mu_q}{q^2}\sin(\varphi-\psi).\end{gathered} \tag{1}$$

Для расстояния между планетами здесь введено обозначение $u = |\mathbf{r} - \mathbf{q}|$. Система (1) является точной. Заметим, что при $\mu_r = \mu_q = 0$ получаем уравнения невозмущенного кеплеровского движения, допускающие стационарные решения с постояннымирадиусами и частотами обращения при выполнении третьего закона Кеплера $q^3\omega^2 = 1 = r^3\vartheta^2$. При выбранных масштабах времени и расстояний для невозмущенного кругового движения ближнего тела имеем $q = \omega = 1$. Далее для системы (1) построим в первом приближении модель движения, учитывающего взаимные возмущения планет.

ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ

Решение системы (1) будем искать в виде

$$\begin{gathered}\varphi = \omega t + \alpha, \quad \psi = \vartheta t + \beta, \\ q = Q(1+\tilde{q}), \quad r = R(1+\tilde{r}).\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь Q, R — заданные средние радиусы орбит, ω, ϑ — некоторые постоянные, но заранее не определенные частоты, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$, α, β — новые переменные, описывающие отклонения от круговых орбит и имеющие нулевые средние значения. Считаем, что $|\tilde{q},\tilde{r},\alpha,\beta| \ll 1$. Поскольку также $(\mu_q,\mu_r) \ll 1$, то при вычислении u учтем только основное движение

$$\begin{gathered}u^2 = Q^2 + R^2 - 2QR\cos\eta = U^2(1-\sigma\cos\eta), \\ \frac{1}{u^3} = \frac{1}{U^3}(a_0 + a_1\cos\eta + a_2\cos 2\eta) \equiv \frac{1}{U^3}\chi(\eta).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения $\eta = \phi - \psi \approx (\omega - \vartheta)t = \delta t$, $U = \sqrt{Q^2 + R^2}$ и $\sigma = \frac{2QR}{Q^2 + R^2}$. Коэффициенты a_0, a_1, … зависят от одного параметра σ и являются коэффициентами ряда Фурье функции

$$\frac{1}{(1-\sigma\cos\eta)^{3/2}} = a_0 + a_1\cos\eta + a_2\cos 2\eta + \ldots \tag{4}$$

Отметим, что параметр $\sigma \le 1$, но в общем случае малым считаться не может, как и коэффициенты.

С учетом сделанных предположений в первом приближении и учете первых двух гармоник в возмущающей силе система (1) приобретает вид

$$\begin{gathered}\ddot{\tilde{q}} - \omega^2 - 2\omega\dot{\alpha} - \tilde{q}\omega^2 = \\ = -\frac{1+\mu_q}{Q^3} + \frac{2}{Q^3}\tilde{q} + \frac{\mu_r}{U^3}\chi(\eta)\left(\frac{R}{Q}\cos\eta - 1\right) - \frac{\mu_r}{R^2Q}\cos\eta, \\ \ddot{\alpha} + 2\omega\dot{\tilde{q}} = -\frac{\mu_r}{U^3}\frac{R}{Q}\chi(\eta)\sin\eta + \frac{\mu_r}{R^2Q}\sin\eta, \\ \ddot{\tilde{r}} - \vartheta^2 - 2\vartheta\dot{\beta} - \tilde{r}\vartheta^2 = \\ = -\frac{1+\mu_r}{R^3} + \frac{2}{R^3}\tilde{r} + \frac{\mu_q}{U^3}\chi(\eta)\left(\frac{Q}{R}\cos\eta - 1\right) - \frac{\mu_q}{RQ^2}\cos\eta, \\ \ddot{\beta} + \frac{2}{R}\vartheta\dot{\tilde{r}} = \frac{\mu_q}{U^3}\frac{Q}{R}\chi(\eta)\sin\eta - \frac{\mu_q}{RQ^2}\sin\eta.\end{gathered} \tag{5}$$

Осредним систему (5), считая, что добавки $\tilde{q}$, $\tilde{r}$, α, β имеют нулевое среднее. Нетривиальные соотношения возникают только для первого и третьего уравнений. В результате получаем выражения для частот

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1+\mu_q}{Q^3} + \frac{\mu_r}{U^3}\left(a_0 - \frac{R}{2Q}a_1\right),\\ \vartheta^2 &= \frac{1+\mu_r}{R^3} + \frac{\mu_q}{U^3}\left(a_0 - \frac{Q}{2R}a_1\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Эти соотношения определяют средние движения. Уравнения для осциллирующих составляющих движения получаем из (5) с учетом (6), оставляя первые две гармоники

$$\begin{aligned}&\ddot{\tilde q} - 2\omega\dot\alpha - 3\tilde q\omega^2 = \frac{\mu_r R}{U^3 Q}\left(\left(a_0 - \frac{Q}{R}a_1 + \frac12 a_2 - \frac{U^3}{R^3}\right)\times\right.\\ &\qquad\left.\times\cos\eta + \left(\frac12 a_1 - \frac{Q}{R}a_2\right)\cos 2\eta\right),\\ &\ddot\alpha + 2\omega\dot{\tilde q} = -\frac{\mu_r R}{U^3 Q}\times\\ &\qquad\times\left(\left(a_0 - \frac12 a_2 - \frac{U^3}{R^3}\right)\sin\eta + \frac12 a_1 \sin 2\eta\right),\\ &\ddot{\tilde r} - 2\vartheta\dot\beta - 3\tilde r\vartheta^2 = \frac{\mu_q Q}{U^3 R}\left(\left(a_0 - \frac{R}{Q}a_1 + \frac12 a_2 - \frac{U^3}{Q^3}\right)\times\right.\\ &\qquad\left.\times\cos\eta + \left(\frac12 a_1 - \frac{R}{Q}a_2\right)\cos 2\eta\right),\\ &\ddot\beta + 2\vartheta\dot{\tilde r} = \frac{\mu_q Q}{U^3 R}\times\\ &\qquad\times\left(\left(a_0 - \frac12 a_2 - \frac{U^3}{Q^3}\right)\sin\eta + \frac12 a_1 \sin 2\eta\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что если массы двух тел пренебрежимо малы, то для каждого из них получаем независимые уравнения. В частности, для тела Q получаем соотношения

$$\begin{aligned}&\ddot{\tilde q} - 2\omega\dot\alpha - 3\omega^2\tilde q = 0,\\ &\ddot\alpha + 2\omega\dot{\tilde q} = 0.\end{aligned}$$

Эти уравнениия имеют периодические решения с частотой ω:

$$\tilde q_0 = \bar q\cos(\omega t + \bar\alpha), \quad \tilde\alpha_0 = -2\bar q\sin(\omega t + \bar\alpha),$$

где $\bar q$, $\bar\alpha$ – произвольные постоянные амплитуда и фаза. Это есть первое приближение для эллиптической кеплеровой орбиты.

Поскольку правые части (7) являются явными функциями времени ввиду того, что $\eta = \delta t$, нахождение частных решений не представляет проблемы, и в результате полное решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde q &= \bar q\cos(\omega t + \bar\alpha) + b_{11}\cos\delta t + b_{12}\cos 2\delta t,\\ \tilde\alpha &= -2\bar q\sin(\omega t + \bar\alpha) + b_{21}\sin\delta t + b_{22}\sin 2\delta t,\\ \tilde r &= \bar r\cos(\vartheta t + \bar\beta) + b_{31}\cos\delta t + b_{32}\cos 2\delta t,\\ \tilde\beta &= -2\bar r\sin(\vartheta t + \bar\beta) + b_{41}\sin\delta t + b_{42}\sin 2\delta t.\end{aligned} \tag{8}$$

Окончательно с использованием (8) получаем первое приближение в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}q_x &= Q(1+\tilde q)\cos(\omega t + \tilde\alpha),\\ q_y &= Q(1+\tilde q)\sin(\omega t + \tilde\alpha),\\ r_x &= R(1+\tilde r)\cos(\vartheta t + \tilde\beta),\\ r_y &= R(1+\tilde r)\sin(\vartheta t + \tilde\beta).\end{aligned} \tag{9}$$

СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С ЧИСЛЕННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Сравним приближенное решение (8), (9) с результатами численного интегрирования для случая “круговых” орбит, когда первые слагаемые в (8) отсутствуют. Соотношения расстояний возьмем как для полуосей Юпитера и Сатурна, именно, $Q = 1$, $R = \frac{9.55}{5.2} = 1.8365\ldots$ Тогда параметры в (4)–(6) равны

$$\begin{aligned}&\sigma = 0.84, \quad U = 2.09, \quad a_0 = 3.208,\\ &a_1 = 4.684, \quad a_2 = 3.058, \quad a_3 = 1.9\end{aligned}$$

и выражения для частот принимают вид

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1+\mu_q}{Q^3} - 1.09\frac{\mu_r}{U^3},\\ \vartheta^2 &= \frac{1+\mu_r}{R^3} + 1.93\frac{\mu_q}{U^3}.\end{aligned} \tag{10}$$

Видим, что частота обращения Юпитера (Q) уменьшается по сравнению с невозмущенным кеплеровским движением, а частота обращения Сатурна (R) – возрастает. Порядок поправки в (10) отличается на три порядка от основного слагаемого из-за массовых коэффициентов.

Массы планет для наглядности возьмем в 40 раз больше реальных: $\mu_q = 0.04$, $\mu_r = 0.012$. С учетом этих числовых данных (8) принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde q &= 0.004995\cos\delta t - 0.026321\cos 2\delta t,\\ \tilde\alpha &= \omega t - 0.015502\sin\delta t + 0.048229\sin 2\delta t,\\ \tilde r &= 0.034108\cos\delta t + 0.009007\cos 2\delta t,\\ \tilde\beta &= \vartheta t + 0.001873\sin\delta t - 0.009991\sin 2\delta t,\\ \omega &= 1.0191, \quad \vartheta = 0.414522, \quad \delta = 0.604579.\end{aligned} \tag{11}$$

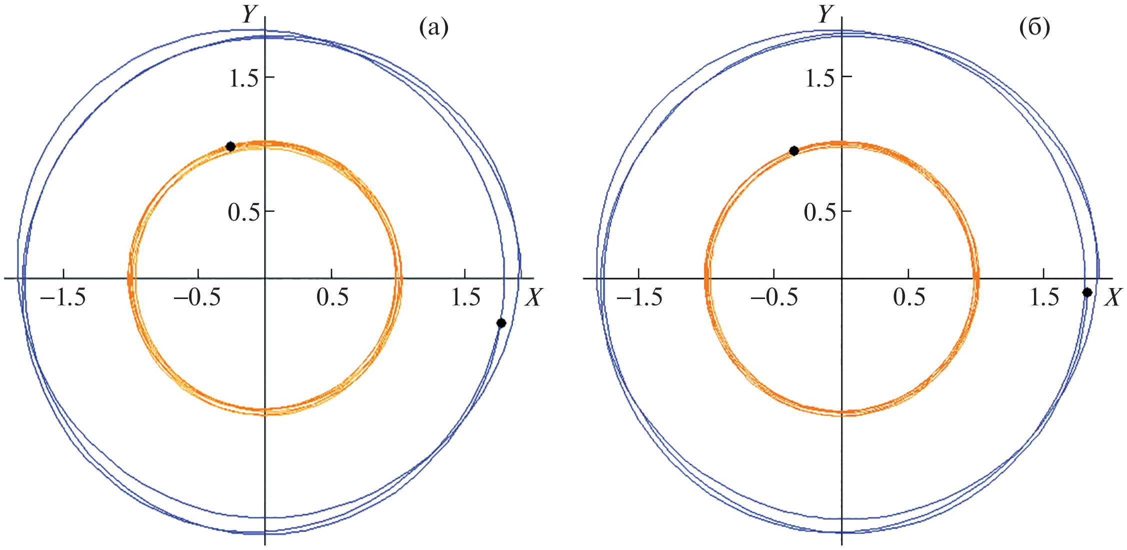

Рис. 1. Аналитическое приближение (а) и результат численного интегрирования (б).

Частоты здесь определены из (10). Кеплеровские оценки частот получаем, отбрасывая в (10) вторые слагаемые

$$\omega_k = 1.0198, \quad \vartheta_k = 0.404194.$$

На рис. 1 сравниваются два решения: аналитическое приближение (9), (11) и результат численного интегрирования на одинаковом интервале времени ($T = 45$). Вначале обе планеты находятся на оси абсцисс, конечные положения отмечены точками. При этом начальные условия для второго решения берутся из первого в нулевой момент времени:

$$\begin{gathered} q_x(0) = 0.978674, \quad q_y(0) = 0, \\ \dot{q}_x(0) = 0, \quad \dot{q}_y(0) = 1.04527, \\ r_x(0) = 1.91572, \quad r_y(0) = 0, \\ \dot{r}_x(0) = 0, \quad \dot{r}_y(0) = 0.773133. \end{gathered} \tag{12}$$

Мы видим почти одинаковые графики, отличие наиболее заметно в конечном положении внешней планеты. Ясно, что это отличие связано с оценками частот. При этом для внешней планеты коррекция частоты по (10) весьма существенна – при использовании кеплеровской оценки отставание в конечном положении на данном интервале времени увеличится примерно на 30°.

Заметим также, что если взять начальные условия (12) и вычислить параметры кеплеровской орбиты для внешней планеты, то получим эллиптическую орбиту с длиной полуоси, равной 2.2, вместо среднего радиуса 1.83, что не соответствует реальному движению.

ВЫВОДЫ

Во-первых, применение нового подхода позволило уже в первом приближении получить формулы (6) для оценки частот обращения планет с учетом их гравитационного воздействия друг на друга. Во-вторых, получены формулы, представляющие движение планет в квазипериодическом виде, без секулярных членов. Проведенные численные эксперименты подтверждают корректность предложенной модели, которая может служить альтернативой другим современным методам небесной механики.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке научно-образовательной школы МГУ “Фундаментальные и прикладные исследования космоса”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холшевников К.В., Кузнецов А.Д.* Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрономический вестник. 2007. Т. 41. № 4. С. 291–329.
2. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
3. *Брауер Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. М.: Мир, 1964. 516 с.
4. *Емельянов Н.В.* Основы теории возмущений в небесной механике. М.: Физический факультет МГУ, 2015. 126 с.
5. *Буданов В.М.* Метод неопределенных частот. Фундаментальная и прикладная математика. 2018. Т. 22. Вып. 2. С. 59–71.

APPLICATION OF THE UNDEFINED FREQUENCY METHOD FOR THE ANALYSIS OF A TWO PLANET PROBLEM

V. M. Budanov[a]

[a] *Research Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Levin

The problem of motion of two bodies (planets) with comparable masses around a massive central body (star) is considered in proposition that planet masses are significantly less than the mass of the central body. It is assumed that the movement of the planets occurs in the same plane and orbits are close to circular. The motion of the planets is constructed directly in polar coordinates using the method of undefined frequencies proposed by the author, which is a modification of the method of successive approximations. The first approximation is obtained, which is the sum of uniform circular motion and small quasi-periodic terms for each planet. The latter are the sum of periodic components whose periods are equal to the periods of circular motions of both bodies, as well as their sums and differences. Herewith the periods of circular motions change in comparison with what Kepler's third law gives: the period of the inner planet increases, and the outer one decreases. The second feature of the constructed approximate solution is the absence of secular perturbations.

Keywords: two-planet problem, method of successive approximations

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 38–41

МЕХАНИКА

УДК 532.529

О МЕХАНИЗМЕ ЛЕВИТАЦИИ КАПЕЛЬ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ГАЗОКАПЕЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН А. Ю. Вараксин[1,2,*], Н. В. Васильев[1,2,**], С. Н. Вавилов[1]

Поступило 22.09.2021 г.
После доработки 22.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

С использованием высокоскоростной видеосъемки впервые обнаружен эффект появления капель с околонулевыми скоростями при обтекании тел газокапельными потоками. Образование левитирующих капель происходило вследствие слияния падающих и отраженных от модели капель. Высказано предположение, что основным механизмом появления капель с околонулевыми скоростями является обмен импульсом в результате столкновения капель, имеющих противоположные по направлению и близкие по величине значения скорости. Обнаружен эффект увеличения размера крупных левитирующих капель из-за слияния с ними падающих капель вследствие многократных соударений.

Ключевые слова: газокапельные потоки, обтекание тел, столкновения капель, левитация

DOI: 10.31857/S2686740021060158

Проблема взаимодействия газокапельных потоков с обтекаемыми телами возникла в связи с изучением движения различных летательных аппаратов в дождевой атмосфере [1], а также движения двухфазных теплоносителей в трактах энергетических установок. Присутствие капель в потоке может приводить к существенному (порой многократному) увеличению тепловых потоков, а также к эрозионному износу обтекаемой поверхности. Указанные эффекты вызываются совместным действием целого ряда причин, среди которых важное место занимают соударения капель с поверхностью, а также межкапельные столкновения.

При проведении детальных исследований отдельных единичных процессов (столкновение капли и стенки, столкновение падающих и отраженных капель и др.) авторами был выявлен эффект появления вблизи критической точки одиночных капель, левитирующих над поверхностью модели. Имеется большое количество работ, в которых изучались процессы левитации капель, вызываемых действием электростатического, электромагнитного [2–5] и акустического [6] полей, а также аэродинамических сил [7–12], возникающих, в частности, над локально нагретыми жидкостями и твердыми поверхностями. Хорошо известны эффекты левитации твердых частиц и различных предметов в концентрированных вихревых потоках [13–15], природными аналогами которых являются воздушные смерчи.

Целью настоящей работы является описание и анализ обнаруженного экспериментальным путем эффекта появления вблизи критической точки тела капель, имеющих околонулевые скорости.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Исследования проводились на экспериментальной установке, схема которой приведена на рис. 1. В качестве модели выступал медный цилиндр *1* диаметром 20 мм и длиной 82 мм с передней кромкой в форме полусферы. Модель погружалась в нагреватель *2*, посредством которого имелась возможность ее разогрева. Мощность нагрева регулировалась с помощью автотрансформатора (модель АОСН-8-220-82-УХЛ4) и не превышала 300 Вт.

Капли дистиллированной воды диаметрами от 300 до 800 мкм создавались с помощью специального генератора капель *3*, расположенного на расстоянии 95 мм от критической точки модели.

Для удаления окислов меди и прочих загрязнений поверхности модели перед проведением каждого эксперимента медная полусфера шлифовалась до 6-го класса точности. Краевой угол смачивания

[1] *Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
**E-mail: varaksin_a@mail.ru*
***E-mail: nikvikvas@mail.ru*

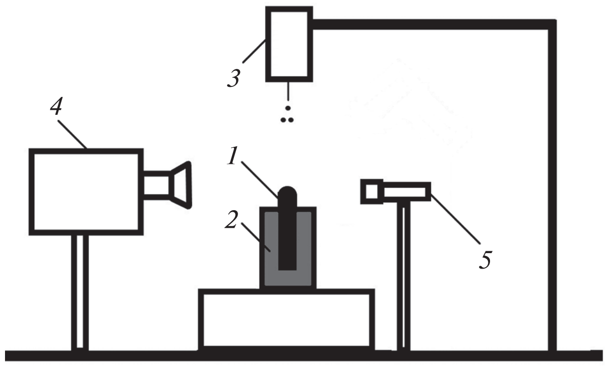

Рис. 1. Схема экспериментальной установки: *1* – модель, *2* – нагреватель с теплоизоляцией, *3* – генератор капель, *4* – скоростная видеокамера, *5* – подсветка.

поверхности измерялся методом одиночной капли и был равен ~60°.

Видеосъемка процесса взаимодействия капель с поверхностью нагретой медной полусферы осуществлялась с использованием высокоскоростной камеры *4* (модель Photron Fastcam SA4) с частотой кадров 5 кГц и экспозицией 20 мкс. С целью улучшения качества видеосъемки использовалась подсветка *5*.

Покадровый анализ видеозаписей позволяет получать обширную информацию о следующих основных кинематических, геометрических и временных параметрах, определяющих процесс взаимодействия капель между собой и с поверхностью модели. К этим параметрам относятся: скорости и размеры падающих и отраженных капель, а также крупных "суммарных" капель, образующихся путем коалесценции падающих и отраженных; время взаимодействия сталкивающихся капель; время взаимодействия капель с поверхностью модели; период осцилляции поверхности капель и др.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Цель проведенных экспериментов – установление основных физических механизмов, сопровождающих процесс столкновения капель с поверхностью модели, а также между собой. Эксперименты показали, что процесс деформации капли при столкновении с поверхностью обтекаемого тела увеличивает время ее нахождения на поверхности, что приводит к росту сечения (ядра) столкновений при прочих равных условий. Растекание капли при взаимодействии с моделью увеличивает эффективный размер (до нескольких раз), что также способствует росту сечения столкновений.

В результате выполненных исследований был выявлен следующий эффект. При близком к центральному (малый прицельный параметр) столкновении между падающими и отраженными каплями, имеющими схожие размеры и скорости, происходит их слияние (коалесценция). В результате этого образуется "суммарная" капля с очень малой (близкой к нулю) скоростью. Указанное обстоятельство приводит к росту сечения столкновений, так как "суммарная" капля находится в течение длительного времени (практически левитирует) вблизи поверхности обтекаемого тела и является своеобразной мишенью как для падающих, так и для отраженных капель.

Наглядным подтверждением сказанному может служить рис. 2, на котором приведены выборочные кадры видеозаписи, иллюстрирующие процесс образования капель с околонулевыми скоростями.

Процесс формирования левитирующей капли начинается после столкновения отраженной от модели капли *1* с падающей каплей *2* (рис. 2а). В результате обмена импульсом более крупной капли *1* с более мелкой, но имеющей большую скорость, каплей *2* образуется "суммарная" капля (капля *1* + *2*), имеющая низкую (околонулевую) скорость.

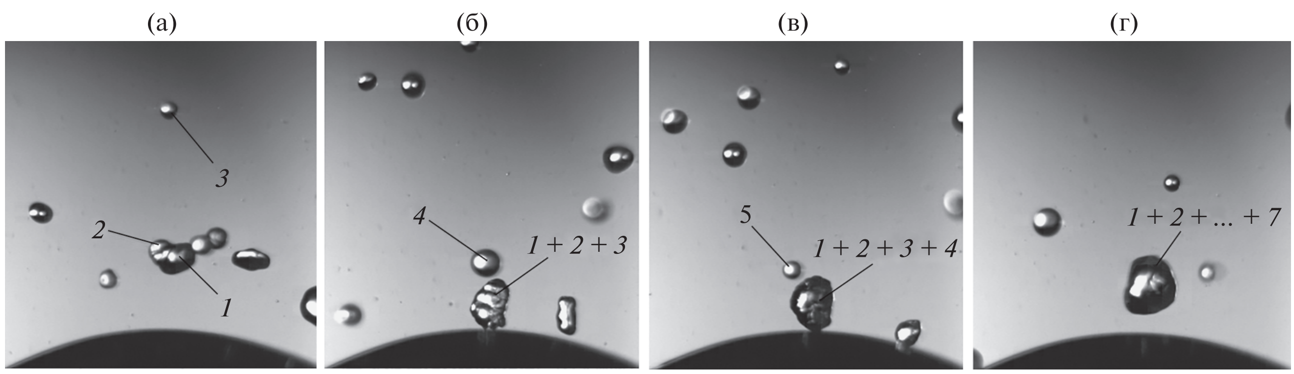

Рис. 2. Иллюстрация механизма появления левитирующих капель в окрестности критической точки тела (размер изображения – 9.1 × 9.4 мм); время от момента столкновения первой и второй капель: (а) 0.2 мс; (б) 9 мс; (в) 13.6 мс; (г) 50 мс. Цифрами обозначены номера капель.

Далее образовавшаяся “суммарная” капля претерпевает столкновения с каплями *3*, *4* и *5* (рис. 2а—в). Отметим, что столкновения зачастую характеризуются большими значениями прицельного параметра, что оказывает существенное влияние на процесс взаимодействия. Известно, что при больших прицельных параметрах происходит слияние капель с последующим “растягивающим” или “возвратным” их разделением. В условиях близости поверхности модели ситуация меняется качественным образом. Разделения капель, как правило, не происходит. Например, капля *4* проходит через поверхность “суммарной” капли (капля *1 + 2 + 3*), достигает поверхности модели, находясь внутри ее (рис. 2б). Затем происходит растекание нижней части вновь образовавшейся крупной капли (капля *1 + 2 + 3 + 4*) и последующее ее собирание, сопровождающееся интенсивными осцилляциями ее поверхности. В результате такого взаимодействия происходит смена направления первоначально передаваемого импульса (вниз к поверхности модели) от падающей капли *4*, на противоположное направление (вверх от поверхности модели), когда капля *4* поглощается крупной каплей.

Процесс обмена импульсом происходит в несколько стадий. Значительная часть кинетической энергии падающей капли тратится на преодоление поверхностного натяжения левитирующей капли. Затем происходит формирование струйного течения внутри левитирующей капли и его выход через нижнюю поверхность капли. Далее следует растекание струи по поверхности модели и ее последующее собирание. Вследствие этого возникает “поддерживающая” сила, препятствующая осаждению капли на поверхность модели.

Описанный выше механизм возникновения “поддерживающей” силы, направленной вверх (противоположно силе тяжести), способствует продолжительной левитации капель. В результате крупная левитирующая капля могла состоять из 7 (рис. 2г) и более (до 20—25) падающих капель.

Одними из основных безразмерных параметров, определяющих столкновения капель, являются числа Вебера We и Онезорге Oh, имеющие следующий вид

$$\mathrm{We} = \frac{\rho V_r^2 d_{d0}}{\sigma}, \quad \mathrm{Oh} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma d_{d0}}},$$

где ρ, σ, μ — плотность, поверхностное натяжение и динамическая вязкость материала капель соответственно; V_r — относительная скорость; d_{d0} — характерный диаметр капли для построения безразмерных параметров (обычно в качестве него выступает диаметр мелкой капли).

Для условий описываемых экспериментов указанные выше параметры изменялись в диапазоне We = 12.5–25 и Oh = 0.0035–0.005.

Описанный выше сценарий формирования вблизи тела крупных капель, левитирующих на протяжении продолжительного времени (до 0.1—0.3 с) около его поверхности, многократно наблюдался в экспериментах.

Таким образом, проведенные эксперименты позволили впервые наблюдать появление левитирующих капель в области критической точки тела, обтекаемого газокапельным потокам. Формирование указанных капель происходит в результате столкновения падающих и отраженных от тела капель. Вследствие сложного процесса обмена импульсом между каплями, сопровождающегося сильной деформацией поверхности капель, возникает сила, препятствующая осаждению левитирующих капель.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-19-00551).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вараксин А.Ю.* Двухфазный пограничный слой газа с твердыми частицами // ТВТ. 2020. Т. 58. № 5. С. 789—808.
2. *Ohji T., Yamaguchi S., Amei K., Kiyota K.* Magnetic levitation of a ferrofluid in mid-air // AIP Advances. 2020. V. 10. № 1. Paper № 015037.
3. *Fedorets A.A., Dombrovsky L.A., Gabyshev D.N., Bormashenko E., Nosonovsky M.* Effect of external electric field on dynamics of levitating water droplets // Int. J. Thermal Sci. 2020. V. 153. Paper № 106375.
4. *Fedorets A.A., Dombrovsky L.A., Bormashenko E., Nosonovsky M.* On relative contribution of electrostatic and aerodynamic effects to dynamics of a levitating droplet cluster // Int. J. Heat Mass Transfer. 2019. V. 133. P. 712—717.
5. *Dombrovsky L.A., Fedorets A.A., Levashov V.Y., Kryukov A.R., Bormashenko E., Nosonovsky M.* Stable cluster of identical water droplets formed under the infrared irradiation: experimental study and theoretical modeling // Int. J. Heat Mass Transfer. 2020. V. 161. Paper № 120255.
6. *Sasaki Y., Hasegawa K., Kaneko A., Abe Y.* Heat and mass transfer characteristics of binary droplets in acoustic levitation // Phys. Fluids. 2020. V. 32. № 7. Paper № 072102.
7. *Fedorets A.A., Dombrovsky L.A.* Generation of levitating droplet clusters above the locally heated water surface: a thermal analysis of modified installation // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 104. P. 1268—1274.
8. *Mogilevskiy E.* Levitation of a nonboiling droplet over hot liquid bath // Phys. Fluids. 2020. V. 32. № 1. Paper № 012114.

9. *Ajaev V.S., Kabov O.A.* Levitation and self-organization of droplets // Annual Rev. Fluid Mech. 2019. V. 53. P. 261–282.
10. *Zaitsev D.V., Kirichenko D.P., Kabov O.A., Ajaev V.S.* Levitation conditions for condensing droplets over heated liquid surfaces // Soft Matter. 2021. V. 17. P. 4623–4631.
11. *Ajaev V.S., Zaitsev D.V., Kabov O.A.* Levitation of evaporating microscale droplets over solid surfaces // Phys. Rev. Fluids. 2021. V. 6. № 5. Paper № 053602.
12. *Sawaguchi E., Matsuda A., Hama K., Saito M., Tagawa Y.* Droplet levitation over a moving wall with a steady air film // J. Fluid Mech. 2019. V. 862. P. 261–282.
13. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н.* К вопросу управления поведением воздушных смерчей // ТВТ. 2009. Т. 47. № 6. С. 870–876.
14. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Таекин С.И.* Параметры неустойчивой стратификации воздуха, приводящей к генерации свободных вихрей // ТВТ. 2010. Т. 48. № 2. С. 269–273.
15. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N.* Effect of net structures on wall-free non-stationary air heat vortices // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 64. P. 817–828.

ON THE MECHANISM OF DROPLET LEVITATION IN GAS-DROPLET FLOWS PAST BODIES

Corresponding Member of the RAS A. Yu. Varaksin[a,b], N. V. Vasil'ev[a,b], and S. N. Vavilov[a]

[a] *Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

By using of high-speed video filming the effect of the appearance of droplets with near-zero velocities in gas-droplet flows past bodies was discovered for the first time. The formation of levitating droplets occurred as a result of the coalescence of falling and reflected from the model droplets. It has been suggested that the main mechanism for the appearance of drops with near-zero velocities is momentum exchange as a result of the collision of droplets with opposite directions and close in magnitude values of velocity. The effect of an increase in the size of large levitating drops due to the coalescence of falling droplets with them due to multiple collisions has been detected.

Keywords: gas-droplet flow, flow past bodies, droplet collision, levitation

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 42–47

МЕХАНИКА

УДК 532.51

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИКЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОМЕЩЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

© 2021 г. Е. Н. Журавлева[1,2,*], член-корреспондент РАН Н. М. Зубарев[3,4,**], О. В. Зубарева[3,***], Е. А. Карабут[1,2,****]

Поступило 25.08.2021 г.
После доработки 25.08.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Представлены точные решения классической задачи о плоском нестационарном потенциальном течении несжимаемой жидкости со свободной границей. Жидкость занимает полубесконечную полосу, ограниченную свободной границей (сверху) и (с боков) двумя твердыми вертикальными стенками, сближающимися с постоянной скоростью. Решения найдены для ситуации, когда капиллярность и гравитационные силы отсутствуют, а движение жидкости полностью обусловлено движением стенок. В решениях уравнений движения неизбежно возникают сингулярности за конечное время: это время ограничено сверху моментом столкновения стенок. Рассмотрены примеры точных решений, соответствующие формированию пузырей, точек заострения и капель.

Ключевые слова: нестационарные течения, свободные границы, точные решения, формирование особенностей за конечное время

DOI: 10.31857/S2686740021060171

Несмотря на почти двухвековую историю задачи о плоском нестационарном потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей [1], известно лишь малое число ее точных частных решений. Наиболее известный класс точных решений – течения с линейным полем скоростей – был открыт Дирихле [2]. Классификация таких решений для двумерного случая была осуществлена акад. Л.В. Овсянниковым [3] и M.S. Longuet-Higgins [4]. Свободная граница для соответствующих течений представляет собой кривую второго порядка: эллипс, гиперболу, параболу и, в вырожденном случае, прямую. В наших работах [5, 6] был найден класс нестационарных течений с нелинейным полем скоростей, позволяющий снять указанное ограничение на геометрию границы. Независимо аналогичный класс решений был найден акад. В.Е. Захаровым [7]. Существенным недостатком этих решений является, как это было названо в [7], их “экзотичность”: для описываемых ими течений скорость жидкости стремится к бесконечности на периферии. Как следствие, построенные течения представляют скорее академический, чем практический интерес.

В настоящей работе показано, что проблему с условиями на бесконечности можно устранить, рассматривая комбинированные граничные условия, где, в отличие от [5–7], граница жидкости не является целиком свободной. Нам удалось найти точные нетривиальные решения задачи о плоском нестационарном потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, помещенной между двумя сближающимися непроницаемыми твердыми вертикальными стенками. Движение жидкости происходит как по инерции, так и под действием движущихся стенок. Такая задача оказывается чрезвычайно удобной для исследования формирования особенностей на свободной поверхности жидкости.

Для плоских течений идеальной несжимаемой жидкости уравнение неразрывности и условие

[1] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[3] *Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
[4] *Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: zhuravleva_e@mail.ru*
***E-mail: nick@iep.uran.ru*
****E-mail: olga@iep.uran.ru*
*****E-mail: eakarabut@gmail.com*

потенциальности записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Здесь $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ — x-я и y-я компоненты вектора скорости жидкости, соответственно; x, y и t — декартовы координаты и время. Уравнения (1) представляют собой соотношения Коши–Римана для функции $U(z,t)=u(x,y,t)-iv(x,y,t)$, называемой комплексной скоростью. Это означает, что $U(z,t)$ является аналитической функцией от комплексной переменной $z=x+iy$ в занимаемой жидкостью области.

Динамика жидкости в отсутствие внешних сил определяется уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3}$$

где $p(x,y,t)$ — давление, $\rho=\mathrm{const}$ — плотность жидкости. Сверху жидкость ограничена свободной границей, которая состоит из одних и тех же частиц жидкости для любого t. Если свободная граница задана уравнением $h(x,y,t)=0$, то на ней должно выполняться следующее (кинематическое) условие:

$$\frac{dh}{dt}\equiv\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}=0,\quad h(x,y,t)=0, \tag{4}$$

где $\frac{d}{dt}$ обозначает полную производную. Помимо него, на свободной поверхности должно выполняться динамическое граничное условие:

$$p=\mathrm{const},\quad h(x,y,t)=0. \tag{5}$$

Обозначим абсолютное значение скорости каждой стенки за V $(V>0)$. Их положения задаются уравнениями $x=\pm Vt$, т.е. они сталкиваются в момент $t=0$ (нас будет интересовать поведение жидкости при $t<0$). Кинематические условия на стенках имеют вид $u|_{x=\pm Vt}=\pm V$, или, в комплексной форме,

$$\mathrm{Re}U=\pm V,\quad \mathrm{Re}z=\pm Vt. \tag{6}$$

Наконец, на бесконечной глубине $y\to-\infty$ потребуем $v\to-\frac{y}{t}$, т.е. в результате сближения стенок жидкость выдавливается вниз.

Сформулированная задача допускает точное частное решение, для которого свободная поверхность жидкости — плоская. Жидкость занимает полубесконечную полосу $y<0$ и $Vt<x<-Vt$. Отрезок $y=0$ и $Vt<x<-Vt$ является свободной границей. По мере возрастания t (напомним, что $t<0$) ширина полосы уменьшается и при $t=0$ она становится нулевой — стенки сталкиваются. Комплексная скорость задается автомодельным соотношением

$$U=\frac{z}{t}. \tag{7}$$

В этом случае для давления и компонент скорости имеем

$$p=-\frac{\rho y^2}{t^2},\quad u=\frac{x}{t},\quad v=-\frac{y}{t},$$

что, как несложно убедиться, обеспечивает выполнение уравнений (1)–(6). Понятно, что к моменту $t=0$ в результате столкновения стенок поле скоростей становится сингулярным. Описываемое (7) нестационарное течение с плоской свободной границей и линейным полем скоростей было ранее изучено в [3, 4].

В работе [6] было продемонстрировано, что определенного прогресса в описании плоских течений со свободной границей можно достичь, применяя преобразование годографа, т.е. используя величину U в качестве независимой переменной, а переменную z в качестве неизвестной функции. Это преобразование оказывается удобным для рассматриваемой в настоящей работе задачи, поскольку движущиеся границы $x=\pm Vt$ области, занимаемой жидкостью в плоскости z, после перехода в плоскость годографа U становятся фиксированными: $u=\pm V$.

Точное частное решение (7) после преобразования годографа, очевидно, примет вид

$$z=Ut. \tag{8}$$

Это выражение определяет невозмущенное (базовое) решение задачи. Понятно, что возмущенное течение в общем случае представимо в виде

$$z=Ut+f(U,t), \tag{9}$$

где f — некоторая функция, определяющая отклонение течения от автомодельного (8). В настоящей работе мы покажем, что широкий класс точных решений задачи можно найти, ограничиваясь рассмотрением ситуации, когда $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, т.е. возмущение f не зависит от времени явно.

Итак, будем искать решение для возмущенного течения в виде

$$z=Z(U,t)=Ut+F(U), \tag{10}$$

где F — неизвестная функция комплексной скорости U. При этом мы не будем требовать малости возмущения F, т.е. будем рассматривать эволюцию возмущений произвольной амплитуды и формы.

Рассмотрим, совместно ли представление (10) с исходными уравнениями движения (1)–(6). Из (6) сразу видно, что на прямых $u=\pm V$ в плоскости годографа U должно быть выполнено следующее условие:

$$\operatorname{Re} F(U)\big|_{u=\pm V} = 0. \qquad (11)$$

Если выбрать удовлетворяющую ему функцию F, то это автоматически обеспечит выполнение кинематических условий на движущихся стенках $x = \pm Vt$.

Обсудим теперь условия на свободной поверхности жидкости. Перепишем уравнение (10) через обратную функцию $G = F^{-1}$:

$$U(z,t) = G(z - Ut). \qquad (12)$$

Несложно сообразить, что неявное выражение (12) – это известное решение уравнения Хопфа

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \qquad (13)$$

получаемое методом характеристик. Покажем, что течение, задаваемое (13) или (10), обеспечивает выполнение и кинематического (4), и динамического (5) условий.

Уравнения Эйлера (2) и (3) можно записать в комплексном виде как

$$\frac{dU}{dt} \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{U}\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial p}{\partial y}\right), \qquad (14)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Разность (14) и (13) дает:

$$2iv\frac{\partial U}{\partial z} \equiv -2i\operatorname{Im} U\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Отсюда сразу видно, что для течения, описываемого уравнением Хопфа (13), на поверхности $\operatorname{Im} U \equiv -v = 0$ будет выполнено условие $\nabla p = 0$, где $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Тогда на этой поверхности $p =$ $=$ const, что автоматически обеспечивает выполнение динамического граничного условия (5). Выполнение кинематического условия (4) немедленно следует из (14), где при нулевой правой части будет $\frac{dU}{dt} = 0$, т.е. для рассматриваемого нами течения жидкие частицы на поверхности $\operatorname{Im} U \equiv -v = 0$ движутся без ускорения. В частности, $\frac{dv}{dt} = 0$, что и является кинематическим граничным условием (4) при выборе функции $h \equiv v$. Таким образом, условие $v = 0$ для описываемого формулой (10) течения задает свободную поверхность в плоскости годографа.

Дальнейший анализ течений, описываемых выражением (10) с условием (11), существенно использует тот факт, что область, занимаемая жидкостью, оказывается неизменной в плоскости годографа U; в ней жидкость занимает полубесконечную полосу:

$$v < 0, \quad -V < u < V. \qquad (15)$$

Рассмотрим, какие ограничения на функцию F накладывает требование, что комплексная скорость U должна являться голоморфной функцией переменной z в занимаемой жидкостью области (аналитичность функции U вытекает из условий (1)). Из свойств обратных функций следует, что при выполнении условия $\frac{\partial Z}{\partial U} \neq 0$ функция U не будет иметь особых точек в области течения. В терминах функции F это соответствует тому, что F должна быть аналитична и для нее

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} \neq -t \qquad (16)$$

в области (15). Последнее означает, что особые точки, задаваемые условием $\frac{\partial F}{\partial U} = -t$, должны находиться вне области течения. Условие (16) легко выполнимо. Если производная $\frac{\partial F}{\partial U}$ финитна в области (15) (здесь принципиально важно, что занимаемая жидкостью область фиксирована в плоскости U), то условие (16) будет автоматически выполняться при достаточно больших $|t|$. Действительно, пусть функция F выбрана таким образом, что в полуполосе (15) справедливо условие $\operatorname{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right) \leq T$, где T – некоторая положительная величина. Тогда условие $\frac{\partial F}{\partial U} = -t$, задающее особые точки, в принципе не может выполняться в области течения при $t < -T$. При этом условие (16) может быть нарушено при малых $|t|$ (при $-T < t < 0$), т.е. когда стенки уже достаточно сильно приблизятся друг к другу. При выходе особой точки на границу области (15) решение будет разрушаться, что может сопровождаться формированием особенностей на свободной поверхности жидкости [8–13].

Итак, нами продемонстрировано, что если мы возьмем аналитическую функцию F, удовлетворяющую необременительным условиям (11) и (16), то неявное выражение (10) дает точное решение рассматриваемой задачи (1)–(6). Это решение можно интерпретировать как описывающее динамику возмущений базового течения (8). Для найденных решений амплитуда возмущений произвольна, и, как следствие, они задают нелинейную эволюцию возмущений вплоть до формирования различного рода особенностей. Поскольку на свободной границе $v = 0$, то ее эволюция задается параметрическим уравнением $z = ut + F(u)$ или, в вещественном виде, уравнениями

$$x = ut + \operatorname{Re} F(u), \quad y = \operatorname{Im} F(u), \qquad (17)$$

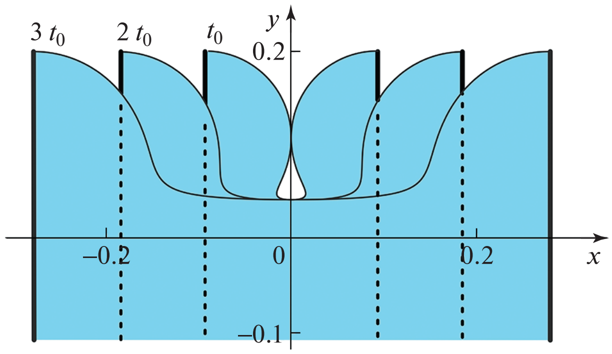

Рис. 1. Образование пузыря на свободной границе. Течение описывается уравнениями (10) и (18) при $a = -0.1$, $b = -1.5$, $V = 2$. Представлены последовательные моменты времени $t = 3t_0, 2t_0, t_0$, где $t_0 \approx -0.0463$ – момент разрушения решения. Вертикальные лучи соответствуют твердым стенкам.

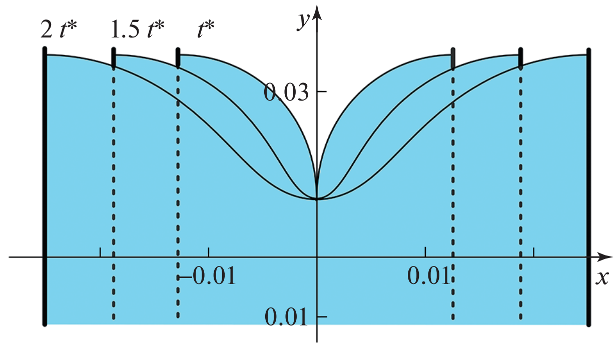

Рис. 2. Образование заостренной лунки в жидкости со свободной поверхностью. Течение описывается уравнениями (10) и (18) при $a = -0.1$, $b = -4$, $V = 2$. Представлены последовательные моменты времени $t = 2t^*, 1.5t^*, t^*$, где $t^* \approx -0.0063$ – момент разрушения решения.

где горизонтальная скорость u играет роль параметра ($-V < u < V$). Вместе с уравнениями $x = \pm Vt$ для стенок, уравнения (17) определяют область течения.

Рассмотрим в качестве примера течение (10) с $2V$-периодической функцией F, задаваемой выражением:

$$F(U) = \frac{ia}{b - \exp\left(\dfrac{i\pi U}{V}\right)}, \tag{18}$$

где a и b – вещественные постоянные (условие (11), очевидно, выполнено). Соответствующее течение симметрично относительно прямой $x = 0$. При $a < 0$ и $b < -1$ возмущение свободной поверхности, задаваемое (18), направлено вниз – см. рис. 1 и 2. Стенки толкают перед собой волны, которые при столкновении захватывают пузырь (этот режим реализуется при $b^* < b < -1$, где $b^* = -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$), либо образуют заостренную лунку (при $b \le b^*$).

Динамика образования пузыря продемонстрирована на рис. 1. Разрушение течения происходит в момент $t_0 \approx -0.0463$ в результате того, что граница становится самопересекающейся (в одной точке сталкиваются две свободные поверхности). Соответственно, решение существует при $t \le t_0$.

Динамика формирования точки заострения на границе жидкости показана на рис. 2. Она образуется при выходе на свободную поверхность особой точки из области вне течения в момент $t^* = \dfrac{\pi a}{V(1-b)^2}$. Решение задачи в этом случае существует ограниченное время $t \le t^* < 0$.

Возмущение свободной поверхности направлено вверх при $a > 0$ и $b > 1$ (рис. 3). В этом случае наблюдается тенденция к образованию капли за счет вытеснения жидкости вследствие сближения твердых стенок. Решение существует ограниченное время $t \le t^{**}$, где $t^{**} = -\dfrac{\pi a}{V(1+b)^2}$ – момент его разрушения (поле скоростей становится многозначным). В зависимости от значения параметра b можно выделить два сценария. При $1 < b < b^{**}$, где $b^{**} = 2 + \sqrt{3} \approx 3.73$, формирующаяся капля “не помещается” между стенками, и для продолжения решения до момента t^{**} стенки необходимо ограничить сверху на высоте $y = \dfrac{a}{1+b}$. Решение тогда напоминает выдавливание мороженого из вафельного брикета – см. рис. 3. На рис. 4 мы видим, что особенности, исходно расположенные вне жидкости, с ростом t приближаются к свободной границе, меняя ее форму. В момент t^{**} они касаются границы, разрушая решение. В случае же $b \ge b^{**}$ (второй сценарий) капля “помещается” между вертикальными стенками вплоть до момента “коллапса” t^{**}.

Таким образом, уже при использовании относительно простого выражения (18) для входящей в точное решение (10) произвольной функции F, мы получаем достаточно сложные и интересные нестационарные течения жидкости со свободной поверхностью, приводящие за конечное время к формированию различного рода особенностей – капель, пузырей, заострений. Как отмечалось выше, существенным недостатком исследованных ранее в [5–7] течений с неограниченной свободной поверхностью являлось “экзотическое”, инфинитное поведение поля скоростей на периферии. Это затрудняло использование полученных ранее точных решений для описания реальных течений. В настоящей работе, где жидкость ограничена

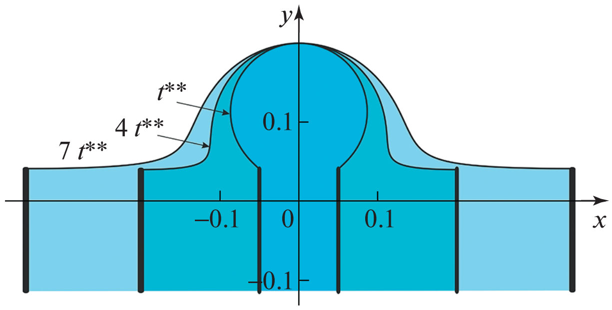

Рис. 3. Динамика образования капли. Течение описывается уравнениями (10) и (18) с $a = 0.1$, $b = 1.5$, $V = 2$. Представлены три области с разной заливкой, соответствующие жидкости для разных моментов времени $t = 7t^{**}, 4t^{**}, t^{**}$. Здесь $t^{**} \approx -0.025$ – момент разрушения решения.

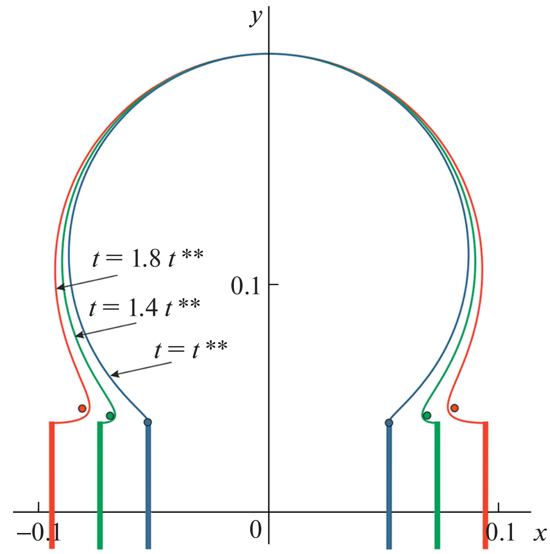

Рис. 4. Положение свободной границы и двух особых точек для трех моментов времени $t = 1.8t^{**}$, $t = 1.4t^{**}$ и $t = t^{**}$, где $t^{**} \approx -0.025$ – момент разрушения решения и, одновременно, момент выхода особых точек на свободную границу.

сближающимися с постоянной скоростью V стенками, проблема расходимости устранена. Горизонтальная скорость всегда финитна: она относится к интервалу $-V < u < V$, определяемому движением стенок. Полученные новые решения имеют ясный физический смысл и, по нашему мнению, войдут в весьма ограниченный список демонстрационных примеров точно решаемых задач гидродинамики.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 19-01-00096 и 19-08-00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1847. V. 8. P. 441–445.
2. *Dirichlet G.L.* Untersuchungen über ein problem der hydrodynamik // J. Reine Angew. Math. 1861. V. 58. P. 181–216.
3. *Овсянников Л.В.* Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967. С. 3–75.
4. *Longuet-Higgins M.S.* A class of exact, time-dependent, free-surface flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 55. № 3. P. 529–543.
5. *Karabut E.A., Zhuravleva E.N.* Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary // J. Fluid Mech. 2014. V. 754. P. 308–331. https://doi.org/10.1017/jfm.2014.401
6. *Зубарев Н.М., Карабут Е.А.* Точные локальные решения для формирования особенностей на свободной поверхности идеальной жидкости // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. № 7. С. 434–439. https://doi.org/10.7868/S0370274X18070056
7. *Захаров В.Е.* Интегрирование уравнений глубокой жидкости со свободной поверхностью // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 3. С. 327–338. https://doi.org/10.4213/tmf9811
8. *Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* Surface singularities of ideal fluid // Phys. Lett. A. 1993. V. 182. P. 387–393. https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90413-T
9. *Baker G.R., Xie C.* Singularities in the complex physical plane for deep water waves // J. Fluid Mech. 2011. V. 685. P. 83–116. https://doi.org/10.1017/jfm.2011.283
10. *Lushnikov P.M.* Structure and location of branch point singularities for Stokes waves on deep water // J. Fluid Mech. 2016. V. 800. P. 557–594. https://doi.org/10.1017/jfm.2016.405
11. *Lushnikov P.M., Zubarev N.M.* Exact solutions for nonlinear development of a Kelvin-Helmholtz instability for the counterflow of superfluid and normal components of Helium II // Phys. Rev. Lett. 2018. V. 120. P. 204504. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.204504
12. *Журавлева Е.Н., Пухначев В.В.* Задача о деформации вязкого слоя // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 490. С. 66–69. https://doi.org/10.31857/S2686740020010228
13. *Dyachenko A.I., Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Zakharov V.E.* Short branch cut approximation in two-dimensional hydrodynamics with free surface // Proc. R. Soc. A. 2021. V. 477. № 2249. P. 20200811. https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0811

EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF DYNAMICS OF A FLUID WITH A FREE SURFACE LOCATED BETWEEN TWO APPROACHING VERTICAL WALLS

E. N. Zhuravleva[a,b], Corresponding Member of the RAS N. M. Zubarev[c,d], O. V. Zubareva[c], and E. A. Karabut[a,b]

[a] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

[c] *Institute of Electrophysics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

[d] *Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Exact solutions of a classical problem of a plane unsteady potential flow of an ideal incompressible fluid with a free boundary are presented. The fluid occupies a semi-infinite strip bounded by the free surface (from above) and (from the sides) by two solid vertical walls approaching each other with a constant velocity. The solutions are obtained for a situation where the capillary and gravity forces are absent, and the fluid motion is completely determined by the motion of the walls. Singularities inevitably arise in the solutions of the equations of motion in a finite time: this time is limited from above by the moment of collision of the walls. Examples of exact solutions corresponding to the formation of bubbles, cuspidal points, and droplets are considered.

Keywords: unsteady flows, free boundaries, exact solutions, formation of singularities in a finite time

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 48–53

МЕХАНИКА

УДК 533.27: 534.222.2

УПРАВЛЕНИЕ ДЕТОНАЦИОННЫМ ГОРЕНИЕМ ВОДОРОДНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ ПОСРЕДСТВОМ ВНЕСЕНИЯ АРГОНА И ОЗОНА

 Академик РАН **В. А. Левин**[1,*], **Т. А. Журавская**[1,**]

Поступило 06.08.2021 г.
После доработки 06.08.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Численно исследовано влияние добавок аргона и озона в стехиометрическую водородно-воздушную смесь на параметры волны детонации с целью снижения скорости распространения волны и температуры продуктов горения без существенного увеличения детонационной ячейки, являющейся фундаментальной характеристикой детонационной способности смеси. Установлено, что мольные доли вносимых добавок могут быть подобраны так, что размер ячейки волны детонации в полученной смеси будет близок к среднему размеру ячейки в чистой смеси, при этом скорость волны и температура продуктов детонации будут существенно снижены. Обнаружено, что детонационная волна в смеси с добавками в концентрациях, не допускающих значимого увеличения размера ячейки, более устойчива к возмущениям, вызванным расположенными в канале препятствиями, чем в чистой смеси. Исследование проведено с использованием схемы второго порядка на основе метода Годунова; для моделирования химических реакций использовался детальный кинетический механизм.

Ключевые слова: детонационная волна, стехиометрическая водородно-воздушная смесь, ячеистая структура, аргон, озон

DOI: 10.31857/S2686740021060110

Изменение состава горючей газовой смеси за счет внесения в смесь различных добавок или предварительного преобразования ее компонентов является одним из основных способов управления детонацией. Так, в [1, 2] численно установлена возможность предотвращения гашения детонационного горения стехиометрической водородно-воздушной смеси в каналах с препятствиями посредством предварительной частичной диссоциации молекулярного водорода и кислорода на атомы, приводящей к существенному уменьшению размера детонационной ячейки и незначительному увеличению скорости распространения волны [1–4]. Обнаруженное в численном исследовании измельчение ячеистой структуры без значимого изменения скорости волны в результате указанной предварительной диссоциации подтверждается результатами экспериментов по распространению детонации в водородно-кислородной смеси с добавлением озона, который быстро разлагается за лидирующей ударной волной с образованием атомарного кислорода [5]. Изучение структуры плоской одномерной стационарной волны детонации (структуры детонации Зельдовича–Неймана–Дёринга (ЗНД-структуры)) показало, что как предварительная частичная диссоциация горючего и окислителя в водородно-воздушной смеси [2], так и добавление в горючую смесь озона [5] приводят к значительному уменьшению протяженности зоны индукции, при этом скорость волны детонации Чепмена–Жуге и параметры газа за ней меняются незначительно. Однако использование детонационного горения в различных энергетических установках требует решения сложной проблемы охлаждения стенок детонационной камеры. Упростить задачу возможно снижением температуры продуктов горения. Простым способом понижения температуры за волной является внесение в горючую смесь аргона, приводящее при этом к существенному росту детонационной ячейки. В [6] в рамках ЗНД-модели детонации было рассмотрено влияние на структуру волны добавления в горючую смесь инертных разбавителей и промоутеров (озона и перекиси водорода) с целью уменьшения постде-

[1] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**E-mail: levin@imec.msu.ru*

***E-mail: zhuravskaya@imec.msu.ru*

тонационной температуры и предотвращения увеличения зоны индукции.

В данной работе с использованием детальной кинетики химического взаимодействия численно исследуется влияние добавок озона и аргона в стехиометрическую водородно-воздушную смесь на параметры волны детонации с целью снижения скорости распространения волны и температуры продуктов горения без существенного увеличения размера детонационной ячейки, являющегося важным параметром, определяющим ряд критических условий и, как следствие, поведение волны детонации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается распространение детонационной волны в покоящейся при нормальных условиях ($p_0 = 1$ атм, $T_0 = 298$ K) газовой смеси в полубесконечном плоском канале шириной L ($L = 1$ см). Для инициирования детонации используется мгновенный однородный сверхкритический (достаточный для прямого инициирования детонации) подвод энергии в области, имеющей форму тонкого слоя, около закрытого торца канала. Изучается детонационное горение как чистой стехиометрической водородно-воздушной смеси, которая моделируется как смесь газов H_2, O_2 и N_2 в молярном соотношении 42 : 21 : 79 соответственно, так и в смеси с добавками озона O_3 и аргона Ar.

Система уравнений, описывающих плоское двумерное нестационарное течение невязкой многокомпонентной реагирующей газовой смеси, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho(u^2 + v^2)/2 + \rho h - p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u((u^2 + v^2)/2 + h))}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v((u^2 + v^2)/2 + h))}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho n_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u n_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v n_i)}{\partial y} = \rho\omega_i.$$

Здесь x и y – продольная и поперечная декартовы координаты; u и v – соответствующие компоненты скорости; t – время; ρ, p и h – плотность, давление и удельная энтальпия смеси; n_i и ω_i – удельные молярная концентрация и скорость образования i-го компонента смеси. Уравнения состояния горючей смеси суть

$$p = \rho R_0 T \sum_i n_i, \quad h = \sum_i n_i h_i(T).$$

Здесь T – температура, R_0 – универсальная газовая постоянная. Зависимости парциальных энтальпий от температуры $h_i(T)$ определяются по приведенным энергиям Гиббса соответствующих компонентов смеси [7]. Для описания химического взаимодействия используется современный детальный кинетический механизм окисления водорода, предложенный в [8].

Для решения уравнений газовой динамики использовалась явная разностная схема второго порядка на основе схемы С.К. Годунова, второй порядок точности по времени в которой достигается с помощью алгоритма типа предиктор-корректор [9]. Расчет проведен на сетке с шагом разбиения $\Delta = 5$ мкм, обеспечивающим корректное разрешение структуры волны детонации. Для численного моделирования использовался оригинальный программный модуль, в котором реализовано гибридное распараллеливание расчетов MPI/OpenMP. Исследование выполнено с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [10].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Начальный подвод энергии инициирует в канале плоскую детонационную волну, фронт которой со временем теряет устойчивость, возникают поперечные волны, в результате формируется самоподдерживающаяся детонационная волна с ячеистой структурой.

В случае чистой водородно-воздушной смеси получаемая в расчетах волна детонации имеет нерегулярную ячеистую структуру, что соответствует наблюдаемому в эксперименте для разбавленных азотом смесей [11]. Анализ полученной ячеистой структуры волны детонации показал, что максимальное значение относительного отклонения поперечного размера ячейки от среднего составляет более 60%. Численный аналог следа, оставляемого распространяющейся в плоском канале детонационной волной на расположенной вдоль стенки закопченной пластине, представлен на рис. 1а.

Моделирование распространения детонации в смеси с добавлением озона показало, что ячеистая детонационная структура становится существенно более мелкой, при этом скорость волны изменяется незначительно, что согласуется с результатами экспериментов [5]. Так, в случае $x_{O_3} = 1\%$

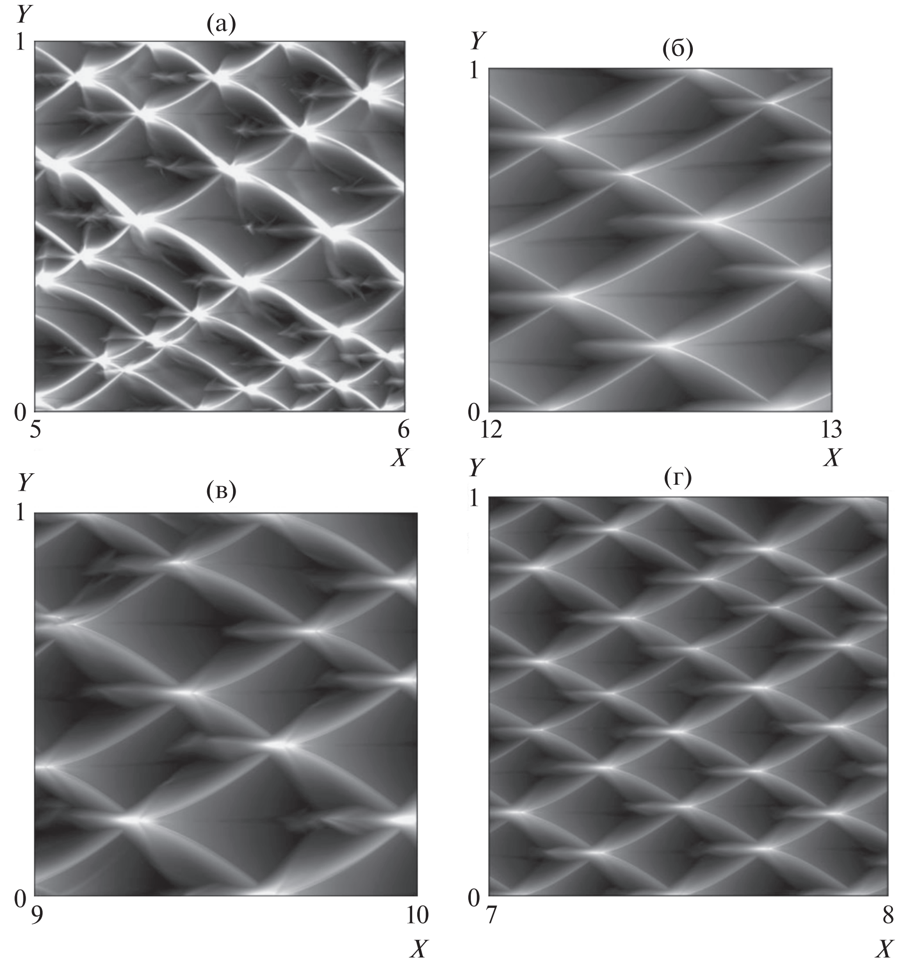

Рис. 1. Ячеистая структура детонационной волны, распространяющейся в плоском канале: а – стехиометрическая H_2–воздух смесь; б – H_2–воздух–80%Ar–1.5%O_3; в – H_2–воздух–70%Ar–0.6%O_3; г – H_2–воздух–70%Ar–1%O_3. Здесь и далее $X = x/L$, $Y = y/L$, где L – ширина канала. Волна распространяется слева направо.

(x_{O_3} – мольная доля O_3) детонационная ячейка уменьшается в 3.2 раза, а скорость ячеистой детонационной волны увеличивается лишь на 0.5%. Отметим, что температура продуктов горения при добавлении озона меняется незначительно и близка к 3000 K.

Простым способом понизить температуру в продуктах детонации является добавление Ar, но внесение данной инертной добавки приводит к существенному росту детонационной ячейки. Однако добавление озона в разбавленную аргоном водородно-воздушную смесь уменьшит размер детонационной ячейки, при этом не увеличив существенно температуру в волне детонации. Проведенные расчеты показали, что мольные доли Ar и O_3 можно подобрать так, что размер детонационной ячейки в полученной смеси будет близок к среднему размеру ячейки в чистой водородно-воздушной смеси, при этом скорость волны и температура продуктов детонации будут существенно снижены. Так, получено, что размер ячейки волны в водородно-воздушной смеси с добавкой 80% Ar и 1.5% O_3 немного больше, чем в чистой смеси (рис. 1б), при этом температура в волне детонации близка к 1600 K, а скорость волны меньше скорости детонации в чистой смеси в 1.68 раза. Однако количество вносимого в смесь Ar можно уменьшить. Получено, что в случае 70% Ar и 0.6% O_3 в смеси формируется детонационная волна, размер ячейки которой немного превышает средний размер детонационной ячейки в чистой смеси (рис. 1в), а увеличение доли озона до 1% приводит к формированию волны детонации с более мелкой (по сравнению с чистой смесью) ячеистой структурой (рис. 1г). При этом температура продуктов горения близка к 2000 K, а скорость волны меньше скорости детонации в чистой смеси более чем в 1.5 раза. Кроме того, в отличие от детонационного горения смеси без

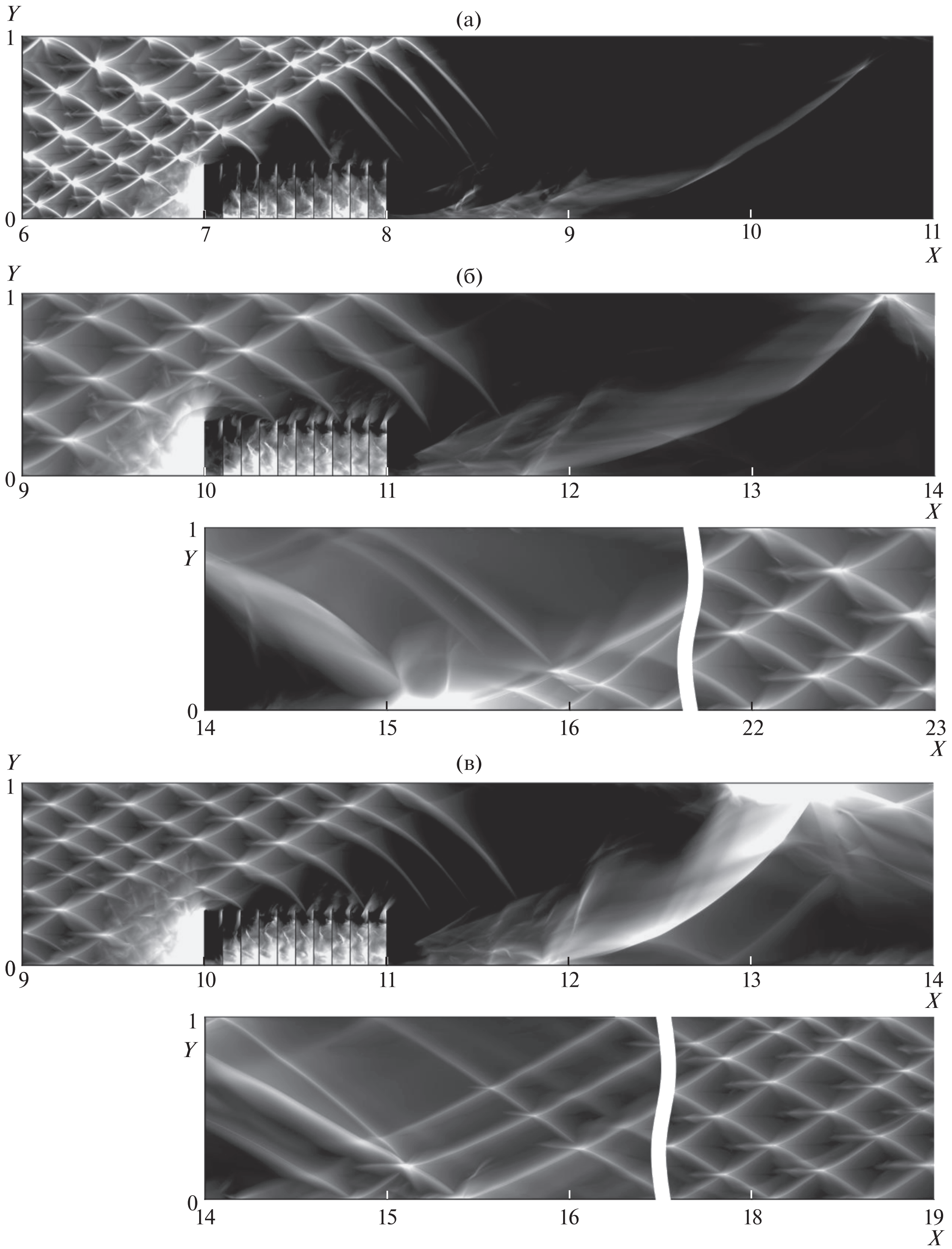

Рис. 2. Распространение детонационной волны в плоском канале при наличии области с барьерами (L_b = 1 см, ΔL_b = = 0.1 см, H_b = 0.3 см): а – разрушение детонации в стехиометрической H_2–воздух смеси; б, в – сохранение детонационного горения в смесях H_2–воздух–70%Ar–0.6%O_3 и H_2–воздух–70%Ar–1%O_3 соответственно. Волна распространяется слева направо.

добавок волна детонации в смеси, разбавленной одновременно Ar и O_3, имеет регулярную ячеистую структуру. Так, максимальное относительное отклонение поперечного размера детонационной ячейки от среднего в рассмотренных смесях не превышает 25%.

С целью исследования устойчивости детонационного горения смеси, полученной после добавления Ar и O_3, рассмотрено взаимодействие сформировавшейся ячеистой волны детонации с расположенной в канале областью с барьерами. Подобная область является простой моделью вставки с пористым покрытием на внутренней поверхности канала, например, покрытой стальной ватой [12]. Возможность использования различных пористых покрытий стенок канала для гашения детонационного горения исследовалась в ряде работ, см., например, [13–15]. В случае области с барьерами параметрами, определяющими результат взаимодействия волны с препятствиями, являются протяженность области L_b, расстояние между соседними барьерами ΔL_b и высота барьеров H_b. Известно, что как в случае одиночного барьера [16], так и множественных препятствий [1, 2] (при фиксированных значениях L_b и ΔL_b) детонационная волна разрушается, если высота барьеров превышает некоторое критическое значение, зависящее от ширины канала. В результате проведенного численного моделирования установлено, что критическая высота препятствий в случаях смесей с добавками Ar и O_3 (в указанных выше концентрациях) выше, чем в случае чистой смеси при прочих постоянных параметрах. Численные следовые отпечатки, иллюстрирующие разрушение детонационной волны при взаимодействии с областью барьеров в чистой смеси и сохранение детонации после прохождение той же области в смеси с добавками Ar и O_3, представлены на рис. 2. Повышение устойчивости детонации к возмущениям, вызванным расположенными в канале препятствиями, в рассмотренных смесях с добавками обусловлено увеличением интенсивности формующихся поперечных волн при прохождении детонации вдоль области барьеров, что является, по-видимому, следствием разложения озона за отраженными скачками между барьерами, которое сопровождается выделением энергии. В случае сохранения детонационного горения в смеси с добавками Ar и O_3 после прохождения области препятствий первоначально формируется детонация с более крупной ячейкой, размер которой постепенно уменьшается (рис. 2б, 2в). Такой механизм восстановления детонационного горения характерен для смесей с регулярной ячеистой структурой детонации [17] и качественно отличается от механизма реинициирования детонации в чистой смеси [2].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя детальный кинетический механизм химического взаимодействия, численно исследовано влияние добавок аргона и озона в стехиометрическую водородно-воздушную смесь на параметры волны детонации. Установлено, что мольные доли вносимых добавок можно подобрать так, что средний размер ячейки волны детонации в полученной смеси будет близок к среднему размеру ячейки в чистой смеси при этом скорость волны и температура продуктов детонации будут существенно снижены. Обнаружено, что детонационная волна в смеси, полученной после внесения добавок, отличается от волны в чистой водородно-воздушной смеси регулярной ячеистой структурой. Показано, что внесение добавок в концентрациях, предотвращающих существенное увеличение размера детонационной ячейки, повышает устойчивость детонационного горения смеси к возмущениям, вызванным расположенными в канале препятствиями.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение от 29.09.2020 № 075-15-2020-806).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин В.А., Журавская Т.А.* Управление детонационным горением посредством предварительной подготовки газовой смеси // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. Вып. 4. С. 40–44. https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.04.49050.18074
2. *Журавская Т.А., Левин В.А.* Управление детонационной волной в канале с препятствиями посредством предварительной подготовки газовой смеси // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 4. С. 59–68. https://doi.org/10.31857/S0568528120040131
3. *Левин В.А., Журавская Т.А.* Управление детонационным горением в высокоскоростном потоке газовой смеси // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 123–134. https://doi.org/10.1134/S0371968518010090
4. *Levin V.A., Zhuravskaya T.A.* The Methods of Control of Stabilized Detonation Location in a Supersonic Gas Flow in a Plane Channel // Combustion Science and Technology. 2019. https://doi.org/10.1080/00102202.2018.1557641
5. *Crane J., Shi X., Singh A.V., Tao Y., Wang H.* Isolating the effect of induction length on detonation structure: Hydrogen–oxygen detonation promoted by ozone // Combustion and Flame. 2019. V. 200. P. 44–52. https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2018.11.008
6. *Kumar D.S., Ivin K., Singh A.V.* Sensitizing gaseous detonations for hydrogen/ethylene-air mixtures using ozone and H_2O_2 as dopants for application in rotating detonation engines // Proc. Combustion Institute. 2021. V. 38(3). P. 3825–3834. https://doi.org/10.1016/j.proci.2020.08.061
7. Термодинамические свойства индивидуальных веществ / Под ред. В.П. Глушко и др. Т. I, кн. 2. М.: Наука, 1978. 328 с.
8. *Bezgin L.V., Kopchenov V.I., Sharipov A.S., Titova N.S., Starik A.M.* Evaluation of Prediction Ability of Detailed Reaction Mechanisms in the Combustion Performance

in Hydrogen/Air Supersonic Flows // Combustion Science and Technology. 2013. V. 185 (1). P. 62–94. https://doi.org/10.1080/00102202.2012.709562

9. *Родионов А.В.* Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчёта неравновесных течений // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27. № 4. С. 585–593.
10. *Voevodin Vl., Antonov A., Nikitenko D., Shvets P., Sobolev S., Sidorov I., Stefanov K., Voevodin Vad., Zhumatiy S.* Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2019. V. 6. № 2. P. 4–11. https://doi.org/10.14529/jsfi190201
11. *Pintgen F., Eckett C.A., Austin J.M., Shepherd J.E.* Direct observations of reaction zone structure in propagating detonations // Combustion and Flame. 2003. V. 133 (3). P. 211–229. https://doi.org/10.1016/S0010-2180(02)00458-3
12. *Bivol G.Yu., Golovastov S.V., Golub V.V.* Detonation suppression in hydrogen–air mixtures using porous coatings on the walls // Shock Waves. 2018. V. 28 (5). P. 1011–1018. https://doi.org/10.1007/s00193-018-0831-3
13. *Шарыпов О.В., Пирогов Е.А.* О механизме ослабления и срыва газовой детонации в каналах с акустически поглощающими стенками // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31. № 4. С. 71–76.
14. *Teodorczyk A., Lee J.H.S.* Detonation attenuation by foams and wire meshes lining the walls // Shock Waves. 1995. V. 4 (4). P. 225–236. https://doi.org/10.1007/BF01414988
15. *Radulescu M.I., Lee J.H.S.* The failure mechanism of gaseous detonations: experiments in porous wall tubes // Combustion and Flame. 2002. V. 131 (1–2). P. 29–46. https://doi.org/10.1016/S0010-2180(02)00390-5
16. *Журавская Т.А.* Распространение волн детонации в плоских каналах с препятствиями // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 6. С. 135–143.
17. *Qin H., Lee J.H.S., Wang Z., Zhuang F.* An experimental study on the onset processes of detonation waves downstream of a perforated plate // Proc. Combustion Institute. 2015. V. 35 (2). P. 1973–1979. https://doi.org/10.1016/j.proci.2014.07.056

CONTROL OF DETONATION COMBUSTION OF A HYDROGEN-AIR MIXTURE BY ARGON AND OZONE ADDITION

Academician of the RAS V. A. Levin[a] and T. A. Zhuravskaya[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russian Federation*

The influence of argon and ozone additions into a stoichiometric hydrogen-air mixture on the detonation wave parameters is numerically studied with the goal to reduce the wave propagation velocity and the temperature of the combustion products without significantly increasing the size of a detonation cell, which is a fundamental characteristic of the detonation ability of the mixture. It is established that the molar fractions of the additives introduced can be selected so that the cell size of the detonation wave in the resulting mixture will be close to the average cell size in a pure mixture, whereas the wave velocity and the temperature of the detonation products will be significantly reduced. It is found that the detonation wave in a mixture with additives in concentrations that do not allow a significant increase in the cell size is more resistant to disturbances caused by obstacles located in the channel than in a pure mixture. The study was carried out using a second-order scheme based on the Godunov method; a detailed kinetic mechanism was used to model chemical reactions.

Keywords: detonation wave, stoichiometric hydrogen-air mixture, cellular structure, argon, ozone

МЕХАНИКА

УДК 536.423.1

ВЛИЯНИЕ ВТОРИЧНОГО ВСКИПАНИЯ НА ДИНАМИКУ СТРУИ, ФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПРИ КОЛЛАПСЕ ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА, ИНДУЦИРОВАННОГО ЛАЗЕРНЫМ НАГРЕВОМ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. А. А. Чернов[1,2,*], академик РАН М. А. Гузев[3], А. А. Пильник[1,2], Т. П. Адамова[1,4], А. А. Левин[1,5], В. М. Чудновский[1]

Поступило 26.09.2021 г.
После доработки 26.09.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Экспериментально исследован одиночный акт вскипания недогретой до температуры насыщения жидкости при воздействии на нее непрерывного лазерного излучения, передаваемого в рабочий объем посредством тонкого оптоволокна. Показано, что образованный вблизи торца оптоволокна паровой пузырек при схлопывании формирует горячую кумулятивную струю, вокруг которой наблюдается явление вторичного вскипания. Образующееся вокруг струи вторичное паровое включение имеет протяженную форму, движется и эволюционирует вместе с ней. Продемонстрировано существенное влияние данного включения на динамику распространения струи.

Ключевые слова: лазерно-индуцированное вскипание, паровой пузырек, кумулятивная струя

DOI: 10.31857/S2686740021060067

Известно, что кипение локально перегретой жидкости характеризуется не только ростом, но и последующим коллапсом паровых пузырьков. И, если их форма по каким-либо причинам теряет сферичность, в ряде случаев это приводит к генерации высокоскоростных струй жидкости, которые локально могут создавать большие гидродинамические давления. Это представляет большой практический интерес для различных приложений, например, для селективной очистки поверхностей [1], разрушения твердых тел [2] и жидкостей [3], в технологии струйной печати [4] и т.п. Следует также указать на перспективу использования теплового воздействия лазерного излучения на биологические ткани для хирургического лечения различных заболеваний [5–9]. Передача излучения выполняется по тонкому оптоволокну, и с точки зрения физики механизм такого воздействия связан с образованием вблизи торца оптоволокна паровых пузырьков, их дальнейшим коллапсом из-за общего недогрева жидкости [10], с последующим формированием горячих затопленных струй [11], посредством которых и осуществляется необходимое воздействие.

Несмотря на то, что образование микроструй в процессе кавитации уже давно исследуется (см., например, [12–15]), остается множество задач, требующих своего решения. В частности, не совсем ясны механизмы образования этих струй для различных физических систем. Исследованию динамики паровых пузырьков в различных метастабильных средах также посвящено большое количество работ [16–18]. Однако на сегодняшний день в литературе отсутствует полноценное описание процесса эволюции паровой фазы при кипении, в особенности лазерно-индуцированном, локально перегретой в условиях общего недогрева жидкости. В настоящей работе частично восполнен этот пробел описания: представлено экспериментальное исследование процесса вторичного вскипания жидкости вокруг горячих затопленных струй, образованных при коллапсе парового пузырька, индуцированного лазерным нагревом жидкости.

[1] Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
[2] Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
[3] Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия
[4] Институт неорганической химии им. А.В. Николаева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
[5] Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия
*E-mail: a.chernov@g.nsu.ru

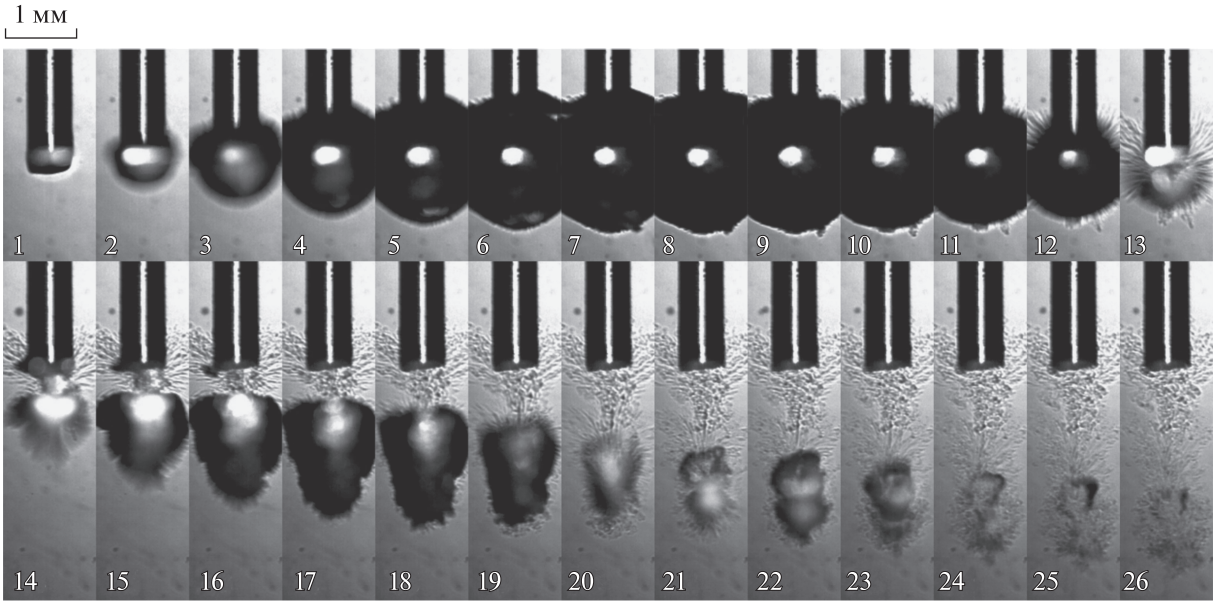

Рис. 1. Иллюстрация эволюции паровой фазы, образующейся в результате воздействия на жидкость лазерного излучения с длиной волны 1.94 мкм и мощностью 10 Вт. Съемка шлирен-методом. Временной интервал между кадрами 1/32 мс.

В экспериментах использовался полупроводниковый лазер с длиной волны 1.94 мкм (ИРЭ-Полюс, Россия) мощностью до 10 Вт, непрерывное излучение которого подавалось по вертикально ориентированному кварц–кварц полимерному волокну с диаметром жилы 600 мкм в оптическую кювету (стекло марки К-8 (SCHOTT GLASS BK7)), с внутренними размерами 16.5 × 37 × 20 мм (ширина × высота × глубина) и толщиной стенки 3 мм, заполненную дистиллированной водой. Торец оптоволокна был погружен на глубину 15 мм и зафиксирован специальным держателем. Эксперименты проводились при нормальных условиях. Мощность излучения в экспериментах варьировалась в пределах от 3 до 10 Вт. Излучение с длиной волны 1.94 мкм очень хорошо поглощается водой (с коэффициентом поглощения $\sim$100 см$^{-1}$). Это приводит к интенсивному объемному тепловыделению в воде вблизи торца оптоволокна и, как следствие, к спонтанному образованию одиночного парового зародыша, который в процессе своей эволюции претерпевает стадии быстрого роста и последующего не менее быстрого схлопывания с генерацией горячей затопленной струи. Для фото- и видеорегистрации процессов, протекающих в кювете, использовалась высокоскоростная видеокамера Photron FASTCAM Mini UX100 (Япония) со скоростью съемки до 100000 fps. Программное обеспечение видеокамеры позволяло вести запись с контролем времени. Точность измерений составляла $\sqrt{2}$ × размер пикселя, который равен 15 мкм.

На рис. 1 представлены покадровые иллюстрации всех стадий процесса вскипания недогретой до температуры насыщения жидкости при воздействии на нее лазерного излучения мощности 10 Вт: с момента образования зародыша паровой фазы до практически ее полного исчезновения. На рис. 2 более детально продемонстрирован процесс эволюции вторичного парового образования (раскадровка на рис. 2 соответствует кадрам 14–21 на рис. 1). Приведенные раскадровки получены при одинаковых условиях экспериментов, но с помощью двух разных методов видеофиксации – шлирен-метода (рис. 1) и “на просвет” (рис. 2). Каждый из них имеет свое преимущество. Если в первом методе хорошо отслеживается область нагретой жидкости, что видно по изменению ее коэффициента преломления, то во втором методе более четко видна структура паровой фазы.

Эксперименты показывают, что зародыш паровой фазы образуется по прошествии определенного времени после включения лазера. В течение этого времени происходит нагрев жидкости вблизи торца оптоволокна (со скоростью $\sim 10^4$ K/c). Оно оказывается обратно пропорционально мощности излучения и много больше характерного времени последующей эволюции паровой фазы (к примеру, в эксперименте, представленном на рис. 1, оно составило $\sim$3.5 мс). Образовавшийся вблизи торца оптоволокна пузырек (рис. 1, кадр 1) начинает расти за счет испарения локально перегретой жидкости. Это происходит до тех пор, пока перегрев жидкости на межфазной границе не станет равным нулю. В дальнейшем ка-

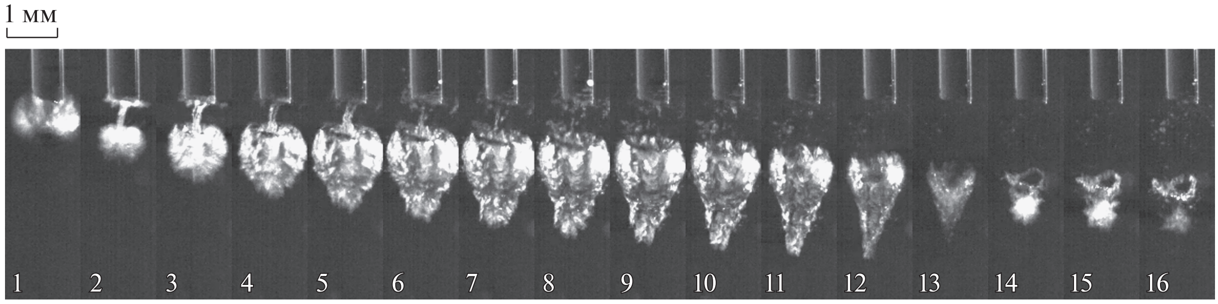

Рис. 2. Иллюстрация эволюции вторичного образования паровой фазы, образующейся в результате воздействия на жидкость лазерного излучения с длиной волны 1.94 мкм и мощностью 10 Вт. Съемка методом "на просвет". Временной интервал между кадрами 1/64 мс.

кое-то время пузырек по инерции продолжает расти, но, окруженный "холодными" слоями жидкости, рано или поздно останавливается (рис. 1, кадр 8), после чего быстро коллапсирует (рис. 1, кадры 8–13). Конденсация пара в пузырьке приводит к тепловыделению. Все это сопровождается сложными динамическими процессами, с генерацией волн давления и разрежения. Отметим, что при достижении пузырьком своего максимального размера, его форма близка к сферической, а диаметр существенно превосходит диаметр оптоволокна.

При коллапсе пузырек теряет сферичность, так как кончик оптоволокна играет роль "обратного уступа" для натекающей на него жидкости. Вблизи поверхности оптоволокна формируется перемычка (рис. 1, кадр 14; рис. 2, кадр 2), в процессе замыкания которой генерируются две кумулятивные струи [11]. Одна направлена на торец оптоволокна, другая – от торца. Скорости этих струй определяются условиями обтекания обратного уступа (по большей части, скоростью и углом натекания жидкости на ось симметрии, где и происходит столкновение жидких масс). Струя, направленная к торцу оптоволокна, сталкивается с его поверхностью, тогда как направленная от торца пронзает уже оторвавшийся от поверхности "породивший" ее пузырек, достигает его противоположной границы и становится затопленной.

В дальнейшем происходит "отскок" в виде вторичного вскипания (см. рис. 1, начиная с кадра 14, или рис. 2, на котором данный процесс снят с частотой, в два раза большей). Это происходит потому, что при коллапсе парового пузырька, сопровождаемого конденсацией пара, в небольшой области концентрируется практически вся запасенная за время ожидания появления парового зародыша тепловая энергия, в связи с чем жидкость в этой области оказывается в состоянии, близком к насыщенному. Поэтому, локальное понижение давления приводит к ее вторичному вскипанию. Отметим, что пульсации давления в жидкости, сопровождающие рост и схлопывание пузырьков, вообще говоря, характерны для кавитационных процессов [19, 20].

Из рис. 1, кадры 14–26, и рис. 2, кадры 2–16, видно, что новое включение паровой фазы локализовано вокруг образовавшейся при коллапсе первичного пузырька кумулятивной струи, движется и эволюционирует вместе с ней, имеет вытянутую и ориентированную в сторону распространения струи форму. Подобно первичному пузырьку оно сначала растет (рис. 2, кадры 2–10), потом коллапсирует (рис. 2, кадры 10–16). Характерные значения числа Вебера в рассматриваемом процессе $We > 100$, что говорит о гидродинамической неустойчивости данного включения. По виду оно напоминает виноградную гроздь, так как образовано из множества мелких пузырьков, которые, по всей видимости, вырастают из несконденсировавшихся фрагментов схлопнувшегося начального пузырька. Не исключено, что происходит образование и новых центров паровой фазы. Очевидно, что эволюция вновь образованного парового включения и сформированной при коллапсе начального пузырька струи неразрывно связаны. Данное включение существенно снижает сопротивление движению струи, аналогично тому, как снижает сопротивление движению подводных аппаратов барботирование газа, создающего пузырьковую завесу (так называемая суперкавитация) [21]. На рис. 3 представлена зависимость координаты фронта струи от времени (с момента ее формирования). Сопоставляя динамику струи с эволюцией вторичного парового включения, можно заметить, что в среднем струя имеет бóльшую скорость при увеличении объема включения (кадры 14–17 на рис. 1; временной интервал от 0 до 0.09 мс на рис. 3) и меньшую – при его коллапсе (кадры 17–21 на рис. 1; временной интервал от 0.09 до 0.22 мс на рис. 3).

В связи с тем, что струя, образующаяся при коллапсе первичного парового пузырька, формируется в процессе конденсации пара в пузырьке и из нагретых слоев жидкости, непосредственно

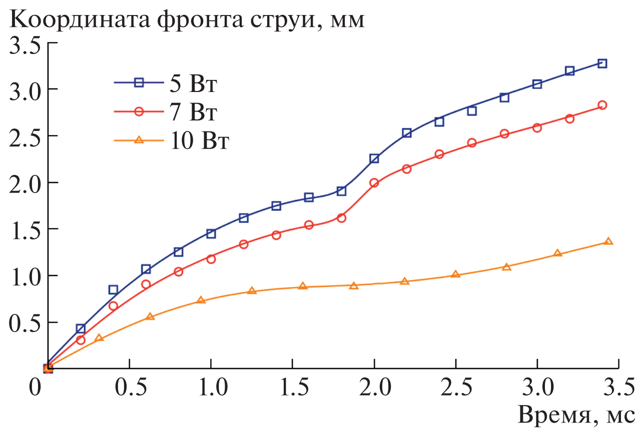

Рис. 3. Зависимость координаты фронта струи от времени для различных мощностей лазера.

прилегающих к межфазной границе, жидкость в струе обладает существенно более высокой по сравнению с начальной температурой (судя по всему, близкой к температуре насыщения). И все же, вопрос о реальном распределении температуры вокруг пузырька остается открытым, так как ввиду пространственной сосредоточенности (характерные размеры составляют доли миллиметра) и малых характерных времен процесса (менее 1 мс) извлечение сведений в ходе физического эксперимента в известной степени затруднительно. Таким образом, можно лишь предположить, что струя уносит существенную долю запасенной на стадии нагрева до момента образования парового зародыша тепловой энергии. Пульсации давления, появляющиеся в системе при росте и коллапсе паровой фазы, также постепенно затухают. А значит, образующееся после “отскока” паровое включение имеет меньшие размеры, чем размеры первичного пузырька. Дальнейшее рассеяние тепловой энергии ведет к полному прекращению циклических фазовых превращений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 19-19-00122).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ohl C.-D., Arora M., Dijkink R., Janve V., Lohse D.* Surface cleaning from laser-induced cavitation bubbles // Applied Physics Letters. 2006. V. 89. № 7. P. 074102.
2. *Cui P., Zhang A.-M., Wang S., Khoo B.C.* Ice breaking by a collapsing bubble // Journal of Fluid Mechanics. 2018. V. 841. P. 287–309.
3. *Gonzalez Avila S.R., Ohl C.-D.* Fragmentation of acoustically levitating droplets by laser-induced cavitation bubbles // Journal of Fluid Mechanics. 2016. V. 805. P. 551–576.
4. *Serra P., Piqué A.* Laser-Induced Forward Transfer: Fundamentals and Applications // Advanced Materials Technologies. 2019. V. 4. № 1. P. 1800099.
5. *Vogel A., Venugopalan V.* Mechanisms of Pulsed Laser Ablation of Biological Tissues // Chemical Reviews. 2003. V. 103. № 2. P. 577–644.
6. *Zhang X., Chen C., Chen F., Zhan Z., Xie S., Ye Q.* In vitro investigation on Ho:YAG laser-assisted bone ablation underwater // Lasers in Medical Science. 2016. V. 31. № 5. P. 891–898.
7. *George S.D., Chidangil S., Mathur D.* Minireview: Laser-Induced Formation of Microbubbles–Biomedical Implications // Langmuir. 2019. V. 35. № 31. P. 10139–10150.
8. *Robles V., Gutierrez-Herrera E., Devia-Cruz L.F., Banks D., Camacho-Lopez S., Aguilar G.* Soft material perforation via double-bubble laser-induced cavitation microjets // Physics of Fluids. 2020. V. 32. № 4. P. 042005.
9. *Beck R.J., Bitharas I., Hand D.P., Maisey T., Moore A.J., Shires M., Thomson R.R., West N.P., Jayne D.G., Shephard J.D.* Dynamics of picosecond laser ablation for surgical treatment of colorectal cancer // Scientific Reports. 2020. V. 10. № 1. P. 20261.
10. *Chernov A.A., Pil'nik A.A., Vladyko I.V., Lezhnin S.I.* New semi-analytical solution of the problem of vapor bubble growth in superheated liquid // Scientific Reports. 2020. V. 10. № 1. P. 16526.
11. *Chudnovskii V.M., Levin A.A., Yusupov V.I., Guzev M.A., Chernov A.A.* The formation of a cumulative jet during the collapse of a vapor bubble in a subcooled liquid formed as a result of laser heating // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. V. 150. P. 119286.
12. *Padilla-Martinez J.P., Berrospe-Rodriguez C., Aguilar G., Ramirez-San-Juan J.C., Ramos-Garcia R.* Optic cavitation with CW lasers: A review // Physics of Fluids. 2014. V. 26. № 12. P. 122007.
13. *Mohammadzadeh M., Gonzalez-Avila S., Liu K., Wang Q., Ohl C.-D.* Synthetic jet generation by high-frequency cavitation // Journal of Fluid Mechanics. 2017. V. 823. P. R3.
14. *Brujan E.-A., Takahira H., Ogasawara T.* Planar jets in collapsing cavitation bubbles // Experimental Thermal and Fluid Science. 2019. V. 101. P. 48–61.
15. *Surtaev A., Serdyukov V., Malakhov I., Safarov A.* Nucleation and bubble evolution in subcooled liquid under pulse heating // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2021. V. 169. P. 120911.
16. *Prosperetti A.* Vapor bubbles // Annual Review of Fluid Mechanics. 2017. V. 49. № 1. P. 221–248.
17. *Zudin Y.B.* Non-equilibrium Evaporation and Condensation Processes. Springer, 2019.
18. *Чернов А.А., Гузев М.А., Пильник А.А., Владыко И.В., Чудновский В.М.* Новый подход к аналитическому описанию роста парового пузырька в перегретой жидкости // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. № 1. С. 73–77.
19. *Накоряков В.Е., Донцов В.Е., Чернов А.А.* Образование газовых гидратов в газожидкостной смеси за

ударной волной // Доклады Академии наук. 2006. Т. 411. № 2. С. 190–194.

20. *Донцов В.Е., Чернов А.А.* Процессы растворения и гидратообразования за ударной волной в газожидкостной смеси // Доклады Академии наук. 2009. Т. 425. № 6. С. 764–768.

21. *Ahn B.-K., Jeong S.-W., Kim J.-H., Shao S., Hong J., Arndt R.E.* A. An experimental investigation of artificial supercavitation generated by air injection behind disk-shaped cavitators // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2017. V. 9. № 2. P. 227–237.

THE INFLUENCE OF SECONDARY BOILING ON THE DYNAMICS OF A JET FORMING DURING COLLAPSE OF A VAPOR BUBBLE INDUCED BY LASER HEATING OF A LIQUID

A. A. Chernov[a,b], **Academician of the RAS M. A. Guzev**[c], **A. A. Pil'nik**[a,b], **T. P. Adamova**[a,d], **A. A. Levin**[a,e], **and V. M. Chudnovskii**[a]

[a] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Kutateladze Institute of Thermophysics Siberean Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[c] *Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia*

[d] *Nikolaev Institute of Inorganic chemistry Siberean Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[e] *Melentiev Energy Systems Institute Siberean Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation*

A single act of boiling up of a liquid subcooled to the saturation temperature is experimentally investigated when it is exposed to continuous laser radiation transmitted to the working volume by means of a thin optical fiber. It is shown that a vapor bubble formed nerar the end of the optical fiber upon collapse forms a hot cumulative jet, around which the phenomenon of secondary boiling is observed. The secondary vapor inclusion formed around the jet has an extended shape, moves and evolves along with it. The significant unfluence of this inclusion on the dynamics of the jet propagation has been demonstrates.

Keywords: laser-induced boiling, vapor bubble, cumulative jet

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 59–62

МЕХАНИКА

УДК 517.977

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ НАБЛЮДЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

© 2021 г. А. М. Шматков[1,*]

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 18.08.2021 г.
Поступило 18.08.2021 г.
После доработки 18.08.2021 г.
Принято к публикации 20.10.2021 г.

Получены уравнения для вычисления оптимальной гарантированной оценки состояния динамической системы по данным наблюдений при наличии ограниченного по величине шума. Для линейных по фазовому вектору и вектору наблюдений дифференциальных уравнений, описывающих искомую оценку, в рамках метода эллипсоидов показано, что оптимальное решение состоит из участков, где игнорируются либо данные наблюдений, либо свойства системы.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, метод эллипсоидов, наблюдение за процессом с неопределенностью

DOI: 10.31857/S2686740021060146

1. Исследуем нестационарную линейную систему с фазовым вектором $x(t)$ и соответствующие наблюдения, описываемые вектором $y(t)$ при наличии ошибки наблюдения $v(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ y(t) &= H(t)x + v(t), \quad y(t) \in \mathbf{R}^r. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть зависимости матриц $A(t)$ и $H(t)$ от времени известны, а система (1) при $v(t) \equiv 0$ вполне наблюдаема [1]. Все рассматриваемые функции времени таковы, что решения дифференциальных уравнений, в которых эти функции используются, существуют, а случаи, в которых понадобятся дополнительные ограничения, будут описаны особо.

При отсутствии информации о точном значении фазового вектора $x(t)$ в начальный момент времени в общем случае невозможно точно узнать его значения в дальнейшем. Поэтому возникает задача о нахождении оценки этого вектора, наилучшей в некотором смысле, по данным наблюдений. Этот смысл зависит от подхода к оценке ошибок в системе (1). В данной работе будет использован метод гарантированного оценивания с помощью эллипсоидов, предложенный в [2] и развитый позднее многими авторами, например, [3]. Метод предполагает, что все неопределенные величины находятся внутри известных эллипсоидов и по их параметрам для ошибки наблюдений и начального значения фазового вектора необходимо найти наилучший в смысле некоторого функционала эллипсоид, содержащий все возможные значения фазового вектора в заданный момент времени.

Обозначим эллипсоид, заданный l-мерным вектором центра χ и симметрической неотрицательно определенной $(l \times l)$-матрицей Θ, через

$$E(\chi, \Theta). \tag{2}$$

Если Θ положительно определена, то

$$E(\chi, \Theta) = \{\ell \in \mathbf{R}^l : (\Theta^{-1}(\ell - \chi), \ell - \chi) \le 1\}, \tag{3}$$

где χ – центр, Θ – матрица. Если какие-либо собственные числа Θ обращаются в нуль, то под (2) будем понимать геометрическую фигуру, представляющую собой предел, к которому стремится последовательность эллипсоидов (3) с невырожденными матрицами, соответствующие собственные числа которых стремятся к нулю. В частности, $E(\chi, \Theta)$ может быть точкой.

Предположим, что все возможные значения вектора $v(t)$ находятся внутри эллипсоида размерности $r \times r$, имеющего центр в начале системы координат и известную невырожденную матрицу $V(t)$:

$$v(t) \in E(0, V(t)). \tag{4}$$

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: shmatkov@ipmnet.ru*

Пусть в начальный момент времени t_0 известна оценка вектора x:

$$x(t_0) \in E(\rho_0, \Sigma_0), \tag{5}$$

где вектор ρ_0 и матрица Σ_0 известны.

Необходимо найти вектор оценки $\rho(t) \in \mathbf{R}^n$ и соответствующую матрицу $\Sigma(t)$, так что $x(t) \in E(\rho(t), \Sigma(t))$. Тогда вектор ошибки равен

$$e(t) = x(t) - \rho(t), \tag{6}$$

причем

$$e(t) \in E(f(t), \Sigma(t)), \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы в любой момент времени выполнялось условие

$$f(t) \equiv 0. \tag{8}$$

Его аналогом в рамках вероятностного подхода является требование несмещенности оценки. Введем функционал

$$J = \mathrm{Tr}(L(T)\Sigma(T)). \tag{9}$$

Здесь T – некоторый фиксированный момент времени, а матрица $L(T)$ размерности $n \times n$ – симметрическая и положительно-определенная. Для лучшего понимания смысла функционала (9) в конкретных технических приложениях допустим, что матрица $\Sigma(T)$ диагональна, т.е. рассмотрим задачу в некоторой системе координат, получающейся из исходной путем поворота. Если матрица $L(T)$ в этой новой системе координат является единичной, то значение функционала (9) представляет собой сумму квадратов максимальных возможных отклонений оценки $\rho(T)$ от истинного точного значения фазового вектора $x(T)$. Если же все диагональные элементы матрицы $L(T)$, кроме одного, малы, то значение функционала (9) практически равно максимальному квадрату отклонения по соответствующей оси.

По аналогии с подходом, применяемым в рамках теории вероятностей [4], будем искать уравнения для $\rho(t)$ в форме нестационарной линейной системы

$$\dot{\rho} = F(t)\rho + K(t)y(t), \quad \rho(t_0) = \rho_0, \tag{10}$$

где $F(t)$ и $K(t)$ – неизвестные матрицы.

Рассматриваемая в данной работе задача состоит в отыскании такого удовлетворяющего уравнениям (10) вектора $\rho(t)$ и соответствующей ему матрицы $\Sigma(t)$, чтобы функционал (9) достигал минимума при выполнении условия (8).

2. Найдем матрицы $F(t)$ и $K(t)$, доставляющие минимум функционалу (9) и обеспечивающие выполнение условия (8). Согласно (1), (6) и (10), вектор $e(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = (A(t) - F(t) - K(t)H(t))x(t) + F(t)e - K(t)v(t). \tag{11}$$

Для вектора $f(t)$ центра эллипсоида с матрицей $\Sigma(t)$, используя [3], а также с учетом (4), (10) и (11), можно получить уравнение

$$\dot{f} = F(t)f + \zeta(t), \quad f(t_0) = 0, \tag{12}$$

где $\zeta(t)$ – центр эллипсоида, содержащего возможные значения вектора

$$\xi(t) = \left(A(t) - F(t) - K(t)H(t)\right)x(t). \tag{13}$$

Для выполнения условия (8) нужно, чтобы $\zeta(t) \equiv 0$. Если выбрать

$$F(t) = A(t) - K(t)H(t), \tag{14}$$

то, согласно (13), вектор $\zeta(t) \equiv 0$. Тогда требование (8) выполнено. С учетом (14) уравнение (11) приобретает вид

$$\dot{e} = \left(A(t) - K(t)H(t)\right)e(t) - K(t)v(t). \tag{15}$$

Согласно [3] для матрицы $\Sigma(t)$ на основании (4), (7) и (15) получаем

$$\begin{gathered}\dot{\Sigma} = \left(A' - KH\right)\Sigma + \Sigma\left(A' - KH\right)^T + KV'K^T, \\ \Sigma(t_0) = \Sigma_0,\end{gathered} \tag{16}$$

где для сокращения формул введены обозначения

$$A'(t) = A(t) + \left(2q(t)\right)^{-1} I_n, \quad V'(t) = q(t)V(t).$$

Здесь I_n – единичная матрица размерности $n \times n$. В [3] функция $q(t)$ найдена из условия минимизации скорости роста объема аппроксимирующего эллипсоида. В [5] показано, что в уравнениях [3] можно использовать произвольную скалярную функцию времени $q(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$. При этом получающийся эллипсоид не является оптимальным, но содержит искомое множество, а потому найдем функцию $q(t)$ позже.

Для уравнения (16) необходимо найти матрицу K, доставляющую минимум функционалу (9). В [4] (см. также [1]) для этого был использован принцип максимума [6]. Получим

$$K = \Sigma H^T V'^{-1}. \tag{17}$$

Этот результат зависит только от положительной определенности и симметричности матрицы $L(T)$, но не от конкретного вида этой матрицы и величины времени T. Тогда уравнение (10) для оценки вектора $x(t)$ примет вид

$$\dot{\rho} = A\rho + \Sigma H^T V'^{-1}\left(y(t) - H\rho\right), \quad \rho(t_0) = x(t_0), \tag{18}$$

а из (16) имеем

$$\dot{\Sigma} = A'\Sigma + \Sigma A'^T - \Sigma H^T V'^{-1} H\Sigma, \quad \Sigma(t_0) = \Sigma_0. \tag{19}$$

Заметим, что в формулу (18) для центра оценивающего эллипсоида входит матрица A, а не A'. В аналогичных уравнениях [8, 9] неверно указана матрица A'.

Если в соотношении (18) заменить матрицу эллипсоида V' на матрицу интенсивности соответствующего белого шума, которая будет разной для разных выбранных функций $q(t)$, а в соотношении (19) в дополнение к этому заменить матрицу системы A' на A, то полученные уравнения полностью совпадут с известными из вероятностной теории фильтрации для математического ожидания и дисперсии фазового вектора. Если при этом вместо $v(t)$ использовать гауссовый случайный процесс, то матрица, соответствующая матрице Σ^{-1}, совпадет с информационной матрицей Фишера [7].

3. Продолжим поиск оптимального решения, что не было сделано в [8], [9]. Найдем оптимальное значение параметра $q(t)$, введенного при получении уравнения (16). Перепишем формулу (19) в виде

$$\dot{\Sigma} = A\Sigma + \Sigma A^T + u(\Sigma - \Sigma H^T V^{-1} H \Sigma), \; \Sigma(t_0) = \Sigma_0. \quad (20)$$

Здесь введено новое скалярное управление $u(t)$ вместо произвольной неотрицательной функции $q(t)$. Сначала будем полагать, что оно заключено между некоторыми двумя положительными постоянными:

$$u(t) = q^{-1}(t), \quad u^- \le u(t) \le u^+, \quad (21)$$

а потом найдем решения задачи при $u^- \to 0$ и $u^+ \to +\infty$. Отыщем значения $u(t)$, доставляющие минимум функционалу (9) для системы (20).

Принцип максимума [6] указывает, что на каждом интервале времени оптимальным может быть лишь постоянное управление $u(t) = u^-$ или $u(t) = u^+$, поскольку $u(t)$ входит линейно в правую часть дифференциального уравнения (20) и, тем самым, в соответствующий гамильтониан, максимум которого $u(t)$ должно обеспечить. Следовательно, в общем случае оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию. Найдем решение $\Sigma_-(t)$ уравнения (20) для управления $u = u^- \to 0$. Возьмем $u(t) = 0$ в (20) и получим [3]

$$\Sigma_-(t) = \Phi\Sigma_0\Phi^T, \quad \dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = I_n. \quad (22)$$

Заметим, что если A не зависит от времени, то фундаментальная матрица $\Phi(t) = \exp\left(A(t - t_0)\right)$. При $u = 0$ уравнение (18) примет вид

$$\dot{\rho}_- = A\rho_-, \quad \rho_-(t_0) = x(t_0). \quad (23)$$

Получаем, что в случае $u = 0$ оптимальное решение представляет собой оценку фазового вектора по уравнению, описывающему его свойства, без какого бы то ни было учета данных наблюдений.

Теперь найдем решение $\Sigma_+(t)$ уравнения (20) в случае управления $u(t) = u^+ \to +\infty$. Для простоты ограничимся ситуацией, когда Σ_0 положительно определена. С практической точки зрения это дополнительное условие нельзя назвать существенным, поскольку всегда можно указать достаточно большой невырожденный эллипсоид, за пределами которого рассматриваемая система не может находиться в начальный момент времени. Тогда известно, что $\Sigma_+(t)$ положительно определена для любого последующего момента времени [1]. В этом случае, обозначив $A''(t) = -A^T(t)$, уравнение (20) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \frac{d\Sigma_+^{-1}}{dt} = A''\Sigma_+^{-1} + \Sigma_+^{-1}A''^T + \\ + u^+(H^T V^{-1} H - \Sigma_+^{-1}), \quad \Sigma_+^{-1}(t_0) = \Sigma_0^{-1}. \end{gathered} \quad (24)$$

Предположим, что матрицы $H(t)$ и $V(t)$ являются кусочно-дифференцируемыми функциями времени, что не накладывает существенных ограничений на технические приложения. На участках, где существуют производные у обеих матриц, будем искать решение уравнения (24) в форме $\Sigma_+^{-1} = Z(t) + H^T V^{-1} H$. Тогда на основании (24) получим

$$\begin{gathered} \dot{Z} = A''(Z + H^T V^{-1} H) + \\ + (Z + H^T V^{-1} H)A''^T - \frac{dH^T V^{-1} H}{dt} - u^+ Z. \end{gathered} \quad (25)$$

В правой части дифференциального уравнения (25) все слагаемые можно считать малыми по сравнению с матрицей u^+Z. Поэтому можно искать Z из уравнения $\dot{Z} = -u^+Z$. При $u^+ \to +\infty$ решение этого уравнения для любого ограниченного начального условия стремится к нулю. Для искомой матрицы Σ_+ при $u^+ \to +\infty$ получаем соотношение

$$\Sigma_+^{-1} = H^T V^{-1} H. \quad (26)$$

При этом оценку $\rho_+(t)$ вектора $x(t)$ следует найти из соотношения

$$\rho_+ = \Sigma_+ H^T V^{-1} H y, \quad (27)$$

которое можно получить на основании уравнения (18) способом, аналогичным примененному для получения выражения (26).

Таким образом, в случае $u^+ \to +\infty$ оптимальное решение представляет собой оценку фазового вектора по данным наблюдений, без какого бы то ни было учета свойств объекта.

Итак, оптимальное решение на всем рассматриваемом интервале времени состоит из участков, на каждом из которых используется либо оценка, полученная исключительно по начальным для этого участка данным на основании описывающих объект уравнений, либо оценка, полученная только на основании данных наблюдений. Поиск границ этих участков для каждой конкретной системы требует отдельного исследования и в общем случае представляет собой нетривиальную задачу.

4. В ряде ситуаций можно построить гораздо лучшую оценку, если не ограничиваться соотношениями (10). Можно, в соответствии с [3], вычислить эллипсоид согласно (22) и (23) и найти для некоторого момента времени $t_0 \le \tau \le T$ эллипсоид, аппроксимирующий его пересечение с эллипсоидом, полученным по данным наблюдений. Если соответствующая область пересечения мала, то и аппроксимирующий эллипсоид может оказаться малым в смысле любого функционала (9). С другой стороны, указанный подход имеет свои трудности [3].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1992. 576 с.
2. *Schweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1. P. 22–28.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
4. *Athans M., Tse E.* A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle // IEEE Trans. Automat. Control. 1967. V. AC-12. № 6. P. 690–698.
5. *Ovseevich A.I.* Limit Behaviour of Attainable and Superattainable Sets / Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty: Proceedings of a Conference held in Sopron, Hungary. September, 1990.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
7. *Kalman R.E.* New Methods in Wiener Filtering Theory / Proceedings of the 1st Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory. N.Y.: Wiley, 1963. P. 270–388.
8. *Шматков А.М.* Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы // Изв. РАН ТиСУ. 2011. № 5. С. 33–40.
9. *Шматков А.М.* Сглаживающий фильтр на основе аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 4. С. 498–508.

GUARANTEED ESTIMATION OF THE STATE OF A DYNAMICAL SYSTEM IN THE PRESENCE OF OBSERVATIONS WITH THE BOUNDED ERROR VALUE

A. M. Shmatkov[a]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

Equations are obtained for calculating the optimal guaranteed estimation of the state of a dynamical system from observational data in the presence of a bounded noise. For differential equations describing the desired estimation and linear in the phase vector and the vector of observations, within the framework of the ellipsoids method, it is shown that the optimal solution consists of sections where either the observational data or the properties of the system are ignored.

Keywords: guaranteed estimation, ellipsoids method, process observation with uncertainty

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 501, с. 63–67

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 532.59; 534.7

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ КОЛЕБАНИЙ – НОВЫЙ ТИП УСТРОЙСТВ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

© 2021 г. Е. И. Велиев[1], академик РАН Р. Ф. Ганиев[2], А. С. Корнеев[2,*], член-корреспондент РАН Л. Е. Украинский[2]

Поступило 21.09.2021 г.
После доработки 01.10.2021 г.
Принято к публикации 10.11.2021 г.

Для проведения исследований механических периодических воздействий на человека предлагается использовать новый тип устройств – гидродинамические генераторы колебаний (волновые гидромассажеры), способные создавать в гидродинамических течениях трехмерные (в частности, спиральные) волны с амплитудами и частотами скоростей и давлений широкого спектра, в том числе с зонами разрежения на обрабатываемой поверхности. Полученные данные могут быть использованы при проектировании гидромассажных устройств для физиотерапии.

Ключевые слова: гидродинамические генераторы колебаний, волновые гидромассажеры, эксперимент, амплитудно-частотные характеристики

DOI: 10.31857/S268674002106016X

Периодические воздействия на кожный покров человека могут влиять не только на поверхностные слои кожного покрова и на эпителий, но также на подкожные мышцы, на элементы кровеносной и лимфатических систем, на биохимические превращения, в частности, на насыщение крови связанным кислородом, на внутренние органы, на кровоток и лимфоток, а также на приток крови, лимфы и лекарственных препаратов к внутренним органам. Исследование этого требует широкого диапазона параметров воздействий: давление должно изменяться от нулевых значений (разрежение) до существенных положительных (сжатие), скорости должны иметь все три пульсирующие компоненты, частоты и амплитуды воздействий должны быть управляемыми и находиться в широком диапазоне значений.

Для осуществления периодических воздействий известно большое число массажных устройств разного принципа действия: электромеханические, ультразвуковые, жидкостные струйные и другие. Однако достаточной широты диапазона изменений параметров как скоростей жидкости, воздействующей на кожный покров, так и давлений они не достигают.

Авторами разработаны гидроволновые устройства [1, 2], которые обеспечивают волновое воздействие на кожный покров человека трехмерными (в частности, спиральными) волнами, в широком диапазоне частот и амплитуд. При этом происходит циклическое вакуум-прессующее многомерное воздействие на кожный покров. Пульсирующие компоненты скоростей жидкости в струе (продольных, поперечных и азимутальных) сопровождаются пульсациями давления, в процессе которых сжатие сменяется разрежением. Разрежение и сжатие обеспечиваются автоколебаниями жидкости, возбуждаемыми в струе жидкости. Механизмы возбуждения автоколебаний обусловлены взаимодействием жидких струй между собой внутри корпуса устройства, либо с образующимися в ней парогазовыми включениями. Частота возбуждаемых автоколебаний поддается регулированию путем изменения расхода жидкости, протекающей через устройство. Усиление автоколебаний обеспечивается резонаторами различной природы. Трехмерный характер течения жидкости в струе обеспечивается волноводными эффектами. В частности, спиральные скорости обеспечиваются генерацией в течении поперечных и азимутальных составляющих скоростей.

[1] *Городская клиническая больница им. С.П. Боткина Департамента здравоохранения г. Москвы, Москва, Россия*

[2] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Научный центр нелинейной волновой механики и технологии Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: korneev47@gmail.com*

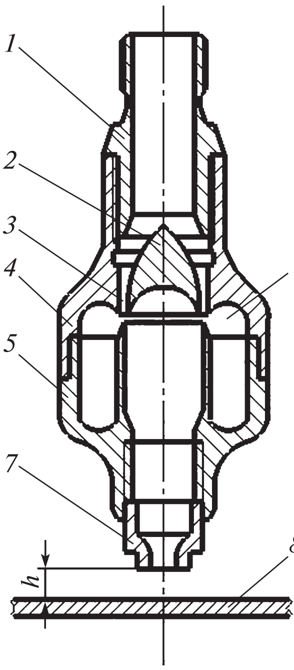

Рис. 1. Конструктивная схема гидромассажера струйного типа: *1* – штуцер входной, *2* – обтекатель, *3* – сопло кольцевое, *4* – корпус верхний, *5* – корпус нижний, *6* – камера резонансная, *7* – сопло, *8* – обрабатываемая поверхность.

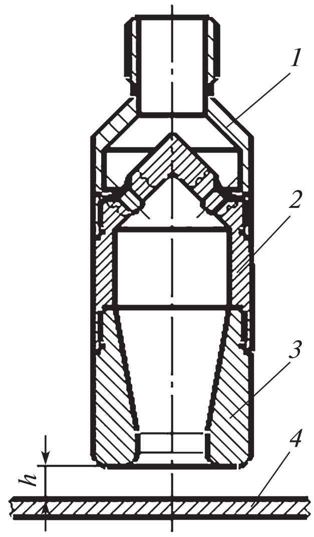

Рис. 2. Конструктивная схема гидромассажера струйно-вихревого типа: *1* – корпус, *2* – завихритель, *3* – сопло, *4* – обрабатываемая поверхность.

Это принципиально отличает данные гидростимуляторы от сертифицированных в Минздраве России традиционных гидромассажных устройств, в которых с помощью одномерной водяной струи обеспечивается давящее давление переменной величины, флуктуирующей вокруг значения атмосферного давления, без создания фазы разрежения (фазы "присасывающего", отрицательного давления) и без поперечных и азимутальных составляющих скорости, обеспечивающих спиралевидное течение. В настоящее время не известны сертифицированные устройства с трехмерными волнами и такими функциональными свойствами.

Представляется, что данная уникальная особенность этих гидроволновых массажеров после проведения комплекса клинических исследований может быть использована не только для проведения лабораторных экспериментов, но и может привести также к разработке прототипов аппаратов для лечебной практики, а также в целях профилактики и реабилитации при широком круге заболеваний бронхолегочной, пищеварительной, мочеполовой систем, а также в спортивной медицине и травматологии. Конструкции гидроволновых массажеров весьма разнообразны. Здесь для примера покажем две схемы гидромассажеров струйного (рис. 1) [1] и струйно-вихревого типа (рис. 2) [2].

В первом случае (рис. 1) рабочая жидкость (водопроводная вода) подавалась с помощью гибкого шланга во входной штуцер *1* и с помощью обтекателя *2* через кольцевое сопло *3* направлялась в верхний корпус *4*, который совместно с нижним корпусом *5* образовывал тороидальную резонансную камеру *6*. Затем вода выходила из массажера через сопло *7* к обрабатываемой поверхности *8*. Кольцевой поток воды, выходящий из тороидальной резонансной камеры *6* с определенной частотой, зависящей от частоты собственных колебаний всей системы, прерывал основную кольцевую струю, истекающую из кольцевого сопла *3*. Вследствие этого у активной кольцевой кромки тороидальной резонансной камеры *6* генерировались периодические гидродинамические импульсы в виде сжатия и разрежения потока воды. Под воздействием кольцевого потока, выходящего из тороидальной резонансной камеры, под нижней сферической поверхностью обтекателя *2* образовывалась зона разрежения, которая способствовала усилению амплитуды генерируемых волн. Амплитудно-частотные (спектральные) характеристики данного устройства зависят от площади поверхности и объема резонансной камеры, скорости истечения воды из кольцеобразного сопла и ее расхода. Их можно менять путем взаимного перемещения верхнего *4* и нижнего *5* корпусов.

Во втором случае (рис. 2) рабочая жидкость (водопроводная вода) подавалась с помощью гибкого шланга в корпус *1* и поступала к завихрителю *2*. Особое расположение подающих отверстий в завихрителе, показанных на рис. 2 схематично, обеспечивало создание в течении трехмерных струй, имеющих все компоненты скорости: акси-

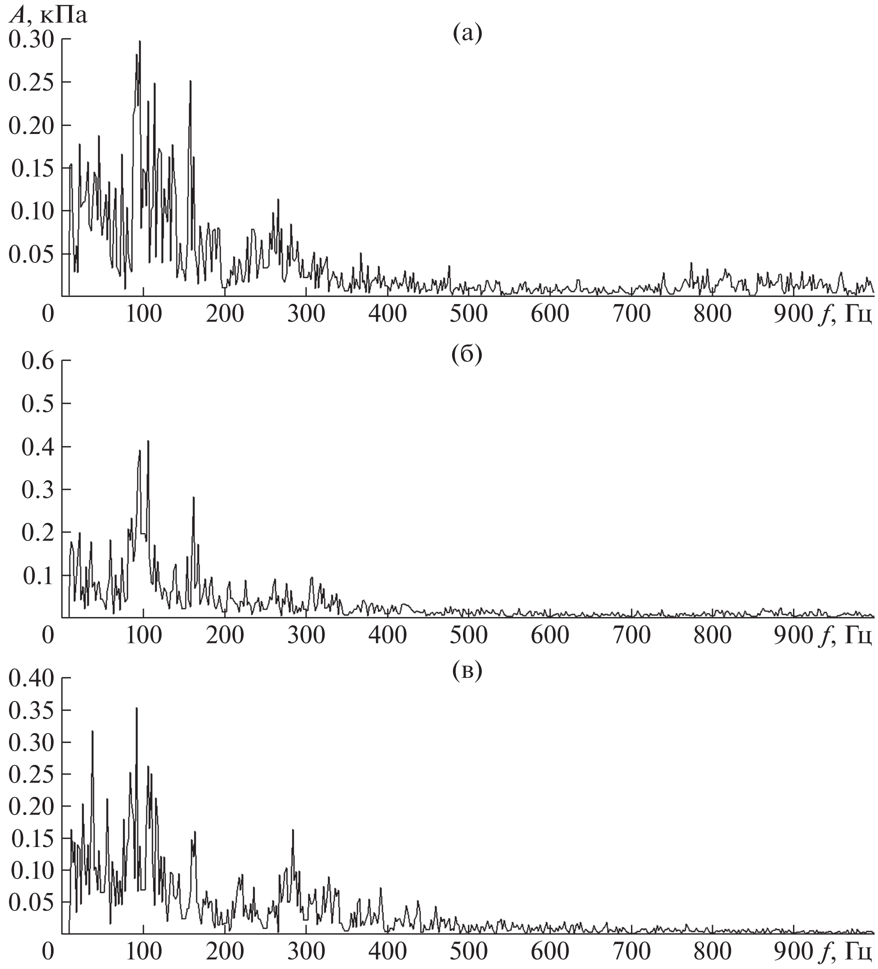

Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики колебаний давления на оси симметрии при расходе воды $Q = 14$ дм^3/мин на различных расстояниях h от гидромассажера: а – $h = 1$ мм, б – $h = 2$ мм, в – $h = 3$ мм.

альную, радиальную и тангенциальную. Как показали эксперименты [2], такой способ подачи жидкости позволил увеличить амплитуду колебаний давления, создаваемых в массажере, в 4–6 раз по сравнению со случаем чисто тангенциальной подачи, при котором подающие отверстия лежат в плоскости, перпендикулярной оси течения. Наличие тангенциальной компоненты скорости обеспечивало закрутку потока. За счет центробежных эффектов в приосевой зоне цилиндрического канала завихрителя *2* и сопла *3* возникали области пониженного давления, что обеспечивало эффект разрежения. При определенных значениях параметров закрученного течения устанавливался режим автоколебаний, приводящий к появлению трехмерных волн давления, распространявшихся от гидромассажера, корпус которого выступает в данном случае как цилиндрический волновод [3].

Отметим, что конструкции массажеров не сводятся к приведенным схемам. Они могут быть весьма разнообразными [4, 5]. В данной работе результаты представлены для массажеров струйно-вихревого типа (рис. 2).

Теоретические исследования течений в массажерах разных схем, проведенные с помощью оригинальных математических моделей [3], а также с помощью пакета ANSYS FLUENT [6, 7] по модели турбулентности LES [8–10], показало возникновение трехмерных, в том числе спиральных, волн в вытекающих струях жидкости, что было подтверждено экспериментально.

В процессе исследований были получены амплитудно-частотные характеристики колебаний давления на оси симметрии, на различных расстояниях h от гидромассажера, представленные на рис. 3. Использовался датчик динамического давления PS2001-5-01 производства “Глобал-Тест” (г. Саров, Россия) и осциллограф WaveSurfer MXs-B компании “LeCroy”.

Можно видеть, что с увеличением зазора h положения спектральных максимумов изменяются

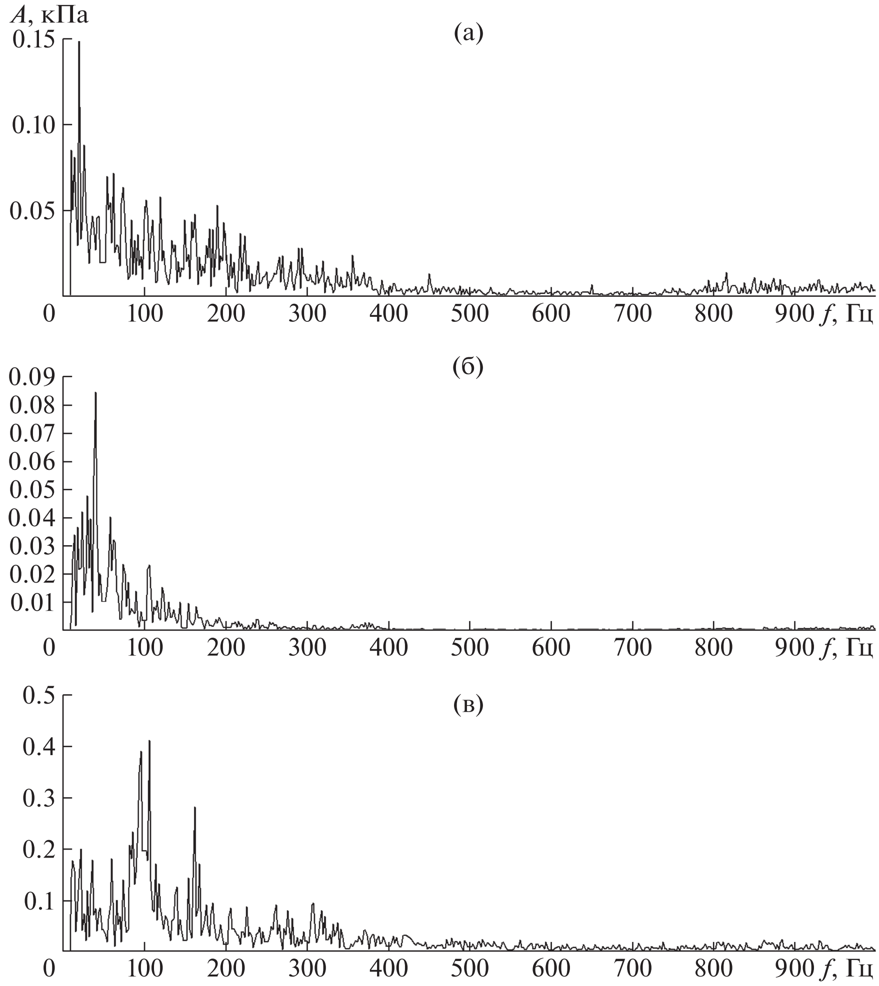

Рис. 4. Влияние расхода воды Q на спектры колебаний при зазоре $h = 2$ мм: а – $Q = 9$ дм^3/мин, б – $Q = 12$ дм^3/мин, в – $Q = 14$ дм^3/мин.

незначительно, в пределах частот от 92 до 106 Гц. В то же время амплитуда колебаний достигает максимального значения при $h = 2$ мм. Это связано с резонансными эффектами, возникающими при отражении волн давления от обрабатываемой поверхности.

С увеличением расхода воды Q через массажер происходит заметное перестроение амплитудно-частотной характеристики (рис. 4).

При $Q = 9$ дм^3/мин наблюдается острый максимум на частоте $f = 20$ Гц величиной 0.15 кПа, соответствующий продольной резонансной волне. С увеличением расхода до $Q = 12$ дм^3/мин этот максимум перемещается до $f = 40$ Гц, а его величина составляет 0.085 кПа. Уменьшение амплитуды в данном случае вызвано уширением соответствующей спектральной линии. Появление второго максимума вызвано появлением поперечной волны. Последующее увеличение расхода до $Q = 14$ дм^3/мин приводит к дальнейшему сдвигу максимумов в высокочастотном направлении. Наблюдаются два близко расположенных максимума на частотах $f = 96$ и 106 Гц, а их величины составляют 0.39 и 0.41 кПа соответственно.

Таким образом, путем изменения расхода воды через массажер можно регулировать спектр колебаний, а также интенсивность и формы волнового воздействия.

Уровень разрежения, создаваемого струйно-вихревым гидромассажером, иллюстрируется табл. 1. Здесь p_0 =100 кПа – нормальное атмосферное давление.

Таблица 1. Зависимость среднего по времени статического давления в центре обрабатываемой поверхности при зазоре $h = 2$ мм от расхода воды

Q, дм^3/мин	6	9	12	14
$p - p_0$, кПа	–2.5	–8.0	–16	–25

Для измерения статического разрежения на обрабатываемой поверхности использовался мановакуумметр EN-837-1 производства компании Wika (Германия) с пределами измерений от –100 до +150 кПа класса 1,0. Максимальное разрежение при расходе $Q = 14$ дм^3/мин составило 25 кПа.

Таким образом, теоретическими и экспериментальными исследованиями показано, что предложенные устройства одновременно создают трехмерные волны автоколебательного характера, в том числе спиральные, и эффект разрежения. Частоты и амплитуды генерируемых колебаний скоростей и давлений имеют широкий спектр. Это позволяет рассматривать их как перспективные устройства для физиотерапии нового класса для широкого использования в медицине. Рекомендации по их применению можно будет дать после проведения клинических испытаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по программе ФНИ государственных академий наук на 2013–2020 год, пункт программы № 26, тема “Развитие фундаментальных основ волнового машиностроения. Научные основы волновых технологий получения композитных материалов с уникальными свойствами и новых средств функциональной диагностики”. Номер госрегистрации 01201359375.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиев Р.Ф., Васильев Р.Х., Муфазалов Р.Ш. и др.* Устройство для физиотерапии. Патент РФ на изобретение № 2012319. 15.05.94. Бюл. № 9. Доступно по: http://allpatents.ru/patent/2012319.html. Ссылка активна на 03.09.2021.
2. *Ганиев Р.Ф., Корнеев А.С.* Волновые гидромассажеры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 4. С. 99–101.
3. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. М. Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 780 с.
4. *Кныш Ю.А., Кныш О.Ю., Карлова Т.Ю.* Душ-массажный аппарат. Патент РФ на изобретение № RU2221539C2. 20.01 2004. Бюл. № 1. Доступно по: https://patenton.ru/patent/RU2221539C2. Ссылка активна на 11.11.2021
5. *Федоров Ю.А., Юминов В.Г.* Гидромассажное устройство. Патент РФ на изобретение RU2437644C2. 27.12.2011. Бюл. № 36. Доступно по: https://patenton.ru/patent/RU2437644C2. Ссылка активна на 11.11.2021
6. ANSYS Fluent Release 12.1. ANSYS, Inc., Canonsburg, USA, 2009. http://www.ansys.com
7. ANSYS Fluent 12.0. Theory Guide. ANSYS, Inc., 2009. 816 c.
8. *Smagorinsky J.* General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment // Monthly Weather Review. 1963. V. 91. P. 99–164
9. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., et al.* A Hybrid RANS-LES Approach with Delayed-DES and Wall-Modelled LES Capabilities // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2008. V. 29. P. 1638–1649.
10. *Piomelli U., Moin P., Ferziger J.H.* Model Consistency in Large-Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow // Physics of Fluids. 1988. V. 31. P. 1884–1894.

HYDRODYNAMIC GENERATORS OF OSCILLATIONS – A NEW TYPE OF DEVICES FOR PERIODIC IMPACTS

E. I. Veliev[a], Academician of the RAS R. F. Ganiev[b], A. S. Korneev[b], and Corresponding Member of the RAS L. E. Ukrainsky[b]

[a] *S.P. Botkin City Clinical Hospital, Moscow, Russian Federation*

[b] *A.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences – Research Center for Nonlinear Wave Mechanics and Technology, Moscow, Russian Federation*

To conduct research on mechanical periodic effects on a person, it is proposed to use a new type of devices – hydrodynamic oscillators (wave hydromassagers) capable of creating three-dimensional (in particular, spiral) waves in hydrodynamic flows with amplitudes and frequencies of speeds and pressures of a wide spectrum, including zones vacuum on the treated surface. The data obtained can be used in the design of hydromassage devices for physiotherapy.

Keywords: hydrodynamic oscillators, wave hydromassagers, experiment, amplitude-frequency characteristics

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 533.6.01; 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ ОСЕВОГО ПОТОКА ВИХРЕВЫМИ СЛЕДАМИ НА ЛОПАСТИ НЕЖ

 В. Л. Окулов[1,*]

Представлено академиком РАН С.В. Алексеенко 12.05.2021 г.
Поступило 17.05.2021 г.
После доработки 22.10.2021 г.
Принято к публикации 25.10.2021 г.

Представлены результаты аналитического моделирования системы винтовых вихрей, сходящих с концов вращающихся лопастей ротора НЕЖ, предложенного Н.Е. Жуковским. В работе построено аналитическое решение для определения скорости торможения потока на лопасти, индуцированной вихревым следом. Впервые для моделирования вихревой системы следа использовалась модель с равномерным распределением завихренности в ядре каждого концевого вихря, сходящего с лопастей ротора НЕЖ. Решение получено с помощью обобщения на многовихревую систему лопастных вихрей метода Дайсона, применявшегося ранее только для отдельного винтового вихря. Данный результат может быть использован при построении теоретических и численных моделей, для оценки оптимальной производительности роторов и предсказания возникновения эрозии и обледенения на их лопастях. Результаты работы представляют интерес для фундаментального понимания и описания поведения потоков с системой винтовых вихрей в роторной аэродинамике и других исследованиях, где в закрученных течениях возникают многовихревые структуры винтовой формы, например, в ядрах торнадо, в вихревых аппаратах и циклонных сепараторах, в камерах сгорания и др.

Ключевые слова: вихревые следы, осевая турбина, вращающаяся лопасть, концевой вихрь, система винтовых вихрей, вихревые структуры

DOI: 10.31857/S2686740021060122

В вихревой теории ротора моделирование винтообразных вихревых следов, сходящих с кромок лопастей, важно, так как они определяют скорость, индуцируемую следом на лопасти, что позволяет правильно определить режим работы и производительность ротора [1]. Знание распределения скоростей вдоль лопасти необходимо для расчета аэроупругих характеристик, оценки эрозии и обледенения лопастей, допустимых сроков эксплуатации ветрогенераторов.

Создание вихревой теории ротора в начале XX в. было стимулировано развитием авиации, а сейчас ее развитие связано с применением возобновляемых источников энергии в гидро- и ветроэнергетике [2, 3]. В 1912 г. Жуковский [4] строит модель ротора на основе использования лопасти с постоянной циркуляцией (лопасть НЕЖ – название предложено Н.Е. Жуковским), генерирующей вихревую систему за ротором из концевых винтовых вихрей с конечным ядром, сходящих с концов каждой вращающейся лопатки, и одного прямолинейного центрального вихря с суммарной циркуляцией (рис. 1). Генерация энергии ротором прямо связана с торможением потока в плоскости ротора [1]. Отметим, что центральный вихрь в модели НЕЖ не влияет на торможение в силу отсутствия генерации им осевой компоненты скорости. Из-за сложности задачи по определению скоростей, индуцированных концевыми винтовыми вихрями, Николай Егорович не завершил ее решение. В [4] он пишет: “Основная идея присоединенных вихрей, положенная в основание этой статьи, позволила бы вести все вычисления, опираясь на истинные скорости относительного движения жидкости, но анализ этот вышел бы очень сложным”.

В дальнейшем оптимальная концепция ротора НЕЖ с постоянным распределением циркуляции вдоль лопасти была использована Кавадой в [5], но, в отличие от Жуковского, его решение для вихревой системы моделировалось с помощью бесконечно тонких – сингулярных концевых винтовых вихрей [6]. Скорость торможения вдоль лопасти в [5] бралась, отступая от сингулярности на малое расстояние, эквивалентное размеру ядра, а ее изменением при замене конечного рас-

[1] *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*

**E-mail: vokulov@mail.ru*

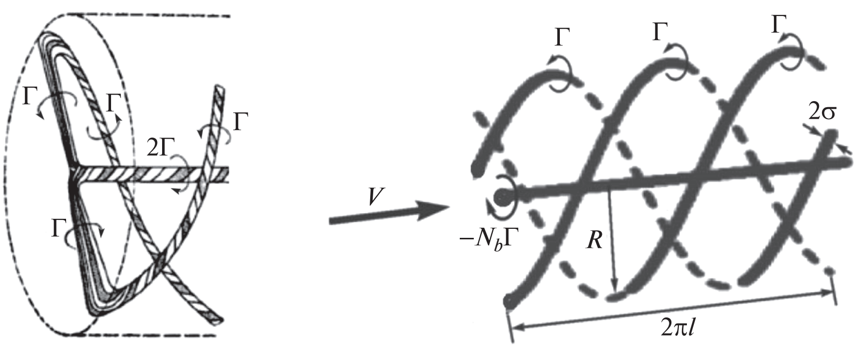

Рис. 1. Вихревая система ротора НЕЖ (слева – адаптирован оригинальный рисунок Н.Е. Жуковского [4]) и вихревая система идеального следа с концевыми винтовыми вихрями радиуса $a = R + \sigma$ и с шагом винта $L = 2\pi l$ (справа).

пределения завихренности в ядре на сингулярное решение пренебрегалось. Преимущество сингулярного представления концевых винтовых вихрей Кавадой связано с законченной аналитической формой его решения, поэтому для роторов НЕЖ его продолжают использовать до сих пор [7–9]. Приближенность решения Кавады, связанная с использованием сингулярного решения вместо решения для вихрей с конечным ядром (см. различие на рис. 5 в [10]), привела к необходимости рассмотрения незавершенного решения Жуковского по моделированию винтового вихря с постоянным распределением циркуляции в конечном ядре [4]. В [11] такое решение было построено для ротора НЕЖ, но для упрощения предлагалось рассматривать конечное ядро только у одного концевого вихря, сходящего с рассматриваемой лопасти, а вклад вихрей от других лопастей из-за их удаленности считать приближенно, как в решении Кавады [5], только через их сингулярное представление. Такое предположение вполне оправдано для достаточно тихоходных роторов, с быстроходностью $\lambda < 4$ ($\lambda = \dfrac{\Omega R}{V}$, где Ω – угловая скорость, а R – радиус ротора, а V – скорость набегающего потока [12]). В этом случае вихревая система состоит из достаточно удаленных друг от друга винтовых витков, когда искажения при замене распределенной завихренности в ядре винтового вихря на эквивалентную сингулярность затухают раньше их взаимодействия со следующим витком. В данном исследовании впервые построено и исследовано поле скоростей, генерируемое системой концевых вихрей; определено влияние конечного размера для всех вихревых ядер следа и проведено сопоставление нового решения с сингулярным решением [5] и аппроксимацией [11].

В рассматриваемой задаче для N-лопастного ротора НЕЖ радиуса R оси вихревой системы следа из N полубесконечных концевых вихрей точно совпадают с винтовыми линиями радиуса $a = R + \sigma$, увеличенным на радиус σ вихревого ядра. Шаг винта $L = 2\pi l$ соответствует полному витку винтовой линии (рис. 1). Относительная скорость замедления потока в следе u_z^* в плоскости ротора определяется формулой

$$u_z^* = 1 - \frac{1}{2}\frac{U_z^*}{V}, \tag{1}$$

где V – скорость набегающего потока, а скорость от полубесконечной вихревой системы за ротором определяется через половинное значение скорости U_z, индуцированной полной бесконечной вихревой системой [1, 3].

Для определения в (1) скорости U_z на лопасти вне вихревых ядер используем метод Дайсона [13], в соответствии с которым для одиночной винтовой вихревой трубки [14] было выполнено интегрирование по сечению ядра в объемном интеграле с помощью операторов сдвига. В результате задача о влиянии конечного ядра в объемном интеграле сводится к разложению на линейные интегралы и представляется в виде мультипольных разложений на оси вихревого ядра $U_z = u_z + v_z \ldots$. Главный член разложения индуцирует скорость u_z и состоит из цепочки монопольных особенностей с интенсивностью, равной циркуляции Γ винтового вихря. Следующий вклад дает скорость v_z, индуцированная цепочкой диполей интенсивности d, зависящая только от распределения завихренности в ядре. В [14] для равномерного распределения завихренности найдено

$$d = -\frac{3\Gamma\sigma^2}{16\pi}. \tag{2}$$

В [15] установлено, что для определения поля скорости U_z, индуцированного объемным винтовым вихрем с равномерным распределением завихренности вне его ядра σ, достаточно использовать две компоненты: u_z с циркуляцией Γ и v_z с моментом d, определенным по (2).

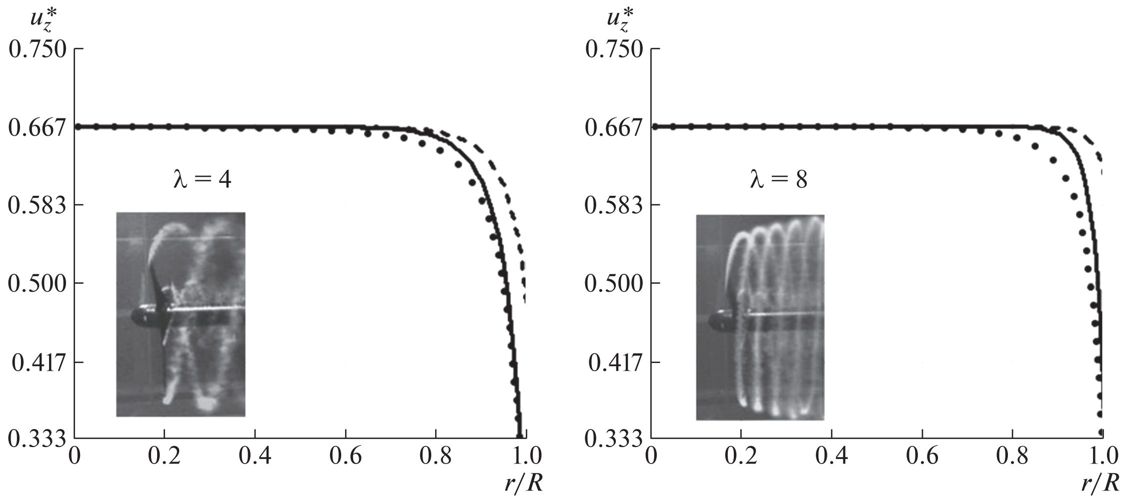

Рис. 2. Торможение осевой скорости вдоль лопасти (r/R) трехлопастной турбины при быстроходности $\lambda = 4$ (слева) и $\lambda = 8$ (справа) для концевых винтовых вихрей следа радиуса $a = R + \sigma$. Штриховые линии – сингулярное распределение завихренности на оси для всех вихрей в следе [5]; пунктирные линии – расчетный вихрь с конечным размером ядра, а остальные сингулярные [11]; сплошные линии – все винтовые вихри в следе имеют конечный размер ядер (данная работа).

Решения для представления следа за ротором вихревой системы из N винтовых вихрей в цилиндрических координатах (r, θ, z) или в винтовых переменных ($r, \chi = \theta - z/l$) получается суммированием поля скоростей для монопольных и дипольных нитей из [14], сдвинутых друг от друга равномерно на угол $\theta = 2\pi/N$. Полученные соотношения удается упростить циклическим суммированием монопольной и логарифмической сингулярности (см. (16) и (17) в [9])

$$u_z = \frac{\Gamma}{2\pi l}\left(\begin{Bmatrix} N \\ 0 \end{Bmatrix} - A\,\mathrm{Re}\left[\frac{\pm N e^{\pm\xi N}}{1 - e^{\pm\xi N}} + B\ln(1 - e^{\pm\xi N})\right]\right). \quad (3)$$

Аналогично, для суммирования дипольных сингулярностей удается найти сумму

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{\mp\xi + i(2\pi n/N)}}{(e^{\mp\xi} - e^{i(2\pi n/N)})^2} = \frac{N^2 e^{\pm\xi N}}{(1 - e^{\pm\xi N})^2}$$

и с ее помощью записать индуцируемую скорость v_z в виде

$$v_z = -\frac{2d}{Rl^2} A\sqrt{l^2 + a^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{N^2 e^{\pm\xi N}}{(1 - e^{\pm\xi N})^2} \pm B\frac{N e^{\pm\xi N}}{1 - e^{\pm\xi N}}\right], \quad (4)$$

где $$e^{\xi} = \frac{r}{a}\frac{e^{\sqrt{1+(r/l)^2}}\left(1 + \sqrt{1 + (a/l)^2}\right)}{e^{\sqrt{1+(R/l)^2}}\left(1 + \sqrt{1 + (r/l)^2}\right)}; \qquad A = \frac{\sqrt[4]{l^2 + a^2}}{\sqrt[4]{l^2 + r^2}};$$

$$\mathrm{B} = \frac{l}{24}\left(\frac{9a^2 + 2l^2}{(l^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3r^2 - 2l^2}{(l^2 + r^2)^{3/2}}\right).$$

В (3) и (4) использованы двухуровневые обозначения $\left\{\begin{matrix}\cdot \\ \cdot\end{matrix}\right\}$ или “±”, где верхний символ соответствует значению $r < a$, а нижний: $r \geq a$.

Расчет u_z^* с применением только уравнения (3) в определении U_z дает скорость в приближении Кавады [5] в форме сингулярной модели вихревой системы, уточненной в [8]. Расчет u_z^* по (3) с коррекцией поля скоростей (4) при $N = 1$ только для одного расчетного вихря соответствует полусингулярной аппроксимации [11], а точная сумма (3) и (4) дает искомое решение, учитывающее распределение завихренности в каждом ядре концевых вихрей. Все три аналитических решения: первые два – для приближенных моделей следа и третье, полученное в данном сообщении, для точной модели НЕЖ явно включают геометрические параметры вихревой системы. Это позволяет определить и проанализировать их влияние на изменения торможения потока и сравнить разные модели.

На рис. 2 показано сравнение трех описанных моделей следа при расчете осевой скорости торможения для трехлопастного ротора при значениях быстроходности 4 ($l = 0.1875$) и 8 ($l = 0.0875$), $\sigma = 0.07$, $\Gamma = \dfrac{4\pi RV}{3}$ для $a = 1.07$. Важно отметить, что концевая треть лопасти $\left(\dfrac{r}{R} > 0.67\right)$ производит более 50% от общей мощности турбины. В связи с этим предпринимаются многочисленные попытки для создания более точных моделей следа. Обычно уточнения за счет применения новых моделей составляют всего несколько процентов, а иногда только их долей, как это показано для ротора Беца–Гольдштейна в [9]. В данной работе для ротора НЕЖ получено большее различие для новой модели следа при использовании очевидного обобщения на конечный размер ядер у всех концевых вихрей (сплошные линии) по сравнению с существовавшими моделями при их полном либо частичном сингулярном представлении вихревой системы. Эти различия составляют 3 и 7% для быстроходностей ротора 4 и 8. Разница при росте быстроходности ротора связана с уменьшением расстояния между соседними витками концевых вихрей, показанная на фотографиях рис. 2. При более плотном расположении витков концевых вихрей становится существенным влияние других вихрей, сходящих с соседних лопастей, что требует использования предложенной здесь модели следа за ротором НЕЖ.

Таким образом, впервые получено аналитическое представление решения для определения поля скоростей, индуцированного системой винтовых вихрей за ротором НЕЖ с равномерным распределением завихренности в ядрах всех вихрей, предполагавшееся Н.Е. Жуковским в оригинальной модели ротора НЕЖ. С его помощью явно вычисляется и анализируется скорость торможения набегающего потока на лопастях при различных значениях параметров вихревых структур в следе: их числе, размере ядер и винтового шага. Для режимов работы роторов с быстроходностью 8, оптимальной при эксплуатации индустриальных ветрогенераторов, разница по сравнению с более простыми моделями следа достигает 7%, что превышает результаты последних подобных модернизаций следа за ротором Беца–Гольдштейна [9].

Данные результаты имеют значение для фундаментального понимания и описания поведения потоков с системой винтовых вихрей в роторной аэродинамике, в том числе для моделирования работы ветрогенераторов в экстремальных условиях. Например, при физическом или численном моделировании обледенения важно знать изменения скорости набегающего потока вдоль всей лопасти. Кроме того, новое решение представляет интерес в других областях гидродинамики, где возникают режимы с многовихревыми винтовыми структурами, например, в ядрах торнадо, в приосевых вихрях вихревых аппаратов, циклонных сепараторов, в камерах сгорания и др.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00205, в соответствии с тематикой международной академической и исследовательской программы по изучению обледенения структур в холодных регионах CoARICE.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wood D.H.* Application of extended vortex theory for blade element analysis of horizontal-axis wind turbines // Renew. Energy. 2018. V. 121. P. 188–194.
2. *Sørensen J.* General momentum theory for horizontal axis wind turbines. Springer. 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22114-4
3. *Segalini A., Alfredsson P.* A simplifified model of propeller and wind-turbine wakes // J. Fluid Mechanics. 2013. V. 725. P. 91–116.
4. *Жуковский Н.Е.* Вихревая теория гребного винта, I // Труды Отделения Физических наук Общества Любителей Естествознания: I. 1912. Т. 16(1).
5. *Kawada S.* Calculation of induced velocity by helical vortices and its application to propeller theory // Technical Report 172 Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University. 1939. http://repository.tksc.jaxa.jp/pl/dr/IS4146951000/en.
6. *Fukumoto Y., Okulov V.L., Wood D.H.* The Contribution of Kawada to the Analytical Solution for the Velocity Induced by a Helical Vortex Filament // Applied Mechanics Reviews. 2015. V. 67 (6). P. 060801.
7. *Lerbs H.* Moderately loaded propeller with a finite number of blades and an arbitrary distribution of circulation // Trans SNAME. 1952. V. 60. P. 73–123.
8. *Morgan B.M., Wrench J.W-Jr.* Some computation aspects of propeller design // Methods in Computational Physics. 1965. V. 4. P. 301–331.
9. *Wood DH.* Helical vortices and wind turbine aerodynamics // International Journal of Mathematics for Industry. 2020 Dec 6; 12 (01): 2050002.
10. *Okulov V., Sørensen J.* The self-induced motion of a helical vortex // Journal of Fluid Mechanics. 2020. V. 883. P. A5.
11. *Okulov V.L., Sørensen J.N.* Maximum efficiency of wind turbine rotors using Joukowsky and Betz approaches // Journal of Fluid Mechanics. 2010. V. 649. P. 497–508.
12. *Hansen M.* Aerodynamics of wind turbines. Routledge, 2015. 188 p. https://doi.org/10.4324/9781315769981
13. *Dyson F.W.* The potential of an anchor ring. II // Philos. Trans. *R. Soc*. London, Ser. A. 1893. V. 184. P. 1041–1106.
14. *Fukumoto Y., Okulov V.L.* The velocity field induced by a helical vortex tube // Physics of Fluids. 2005. V. 17 (10). P. 107101.
15. *Окулов В.Л., Фукумото Я.* Аналитическое решение для самоиндуцированного движения винтового вихря с гауссовым ядром // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27 (4). С. 507–514.

MODELING OF A DECELERATION OF THE AXIAL FLOW BY VORTEX WAKES ON THE NEJ BLADE

V. L. Okulov[a]

[a] *Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Alekseenko

The results of analytical modeling of the system of tip helical vortices behind the rotating blades of the NEJ rotor are presented (the NEJ was proposed by N.E. Joukowsky). For the first time, the influence of the distribution of vorticity in the core for each tip vortex of the wake on the total deceleration of the velocity in the rotor-plane was taken into account. This result was obtained by extending the Dyson method for determining the induced velocity around a single helical vortex with a constant distribution of vorticity in the core to the many blade vortices in the wake. The greatest effect from the refined description of the vortex system was obtained with an increase in tip speed ratio of the rotor, when the distances between the helical turns of the wake become commensurate with the dimensions of their vortex cores. The proposed analytical solution for predicting the axial velocity induced on the blade gives a more accurate determination of a rotor efficiency and optimal operating regimes, as well as uses it in models to assess possible erosion and icing. These results are important for a fundamental understanding and description of the behavior of flows with a system of helical vortices not only in power engineering, but also in other areas where regimes with many vortex helical structures arise, for example, in tornado cores and for axial vortices in vortex apparatuses; cyclone separators, combustion chambers, etc.

Keywords: vortex wakes, axial turbine, rotating blade, tip vortex, helical vortex system, vortex structures

Журнал "Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки" публикует краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области физики, механики и технических наук. Цель журнала – ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии "Doklady Physics" – 12 выпусков в год.

Подразделы журнала: Физика; Механика; Технические науки.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Сообщения, отклоненные редколлегией, повторно не рассматриваются.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция журнала "Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки" просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.

1. Публикуемые сообщения должны иметь представление действительного члена Российской Академии наук, если оно требуется (см. образец оформления Представления).

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке https://sciencejournals.ru/journal/danfiz/ или направляются в редакцию по электронной почте doklady_physics@mail.ru. Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует сообщения, занимающие не более 1/2 авторского листа (20 000 знаков). В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале "Доклады Академии наук". Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать:

– название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

– на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст сообщения должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При использовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитированную литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

Для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

Для периодических изданий: фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Рекомендуется приложить список литературы на английском языке, в котором будут правильно указаны название английской версии переводного журнала и выходные данные.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал «Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки» является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме. Если материал не может быть изложен в краткой форме или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

16. Появление краткого сообщения в "Докладах Академии наук" не препятствует впоследствии публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в "Доклады" и в другой журнал не допускается.

17. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

18. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

19. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикации и фальсификации данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

20. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/

21. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

22. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте https://link.springer.com/ (для англоязычных журналов) и https://elibrary.ru (для русскоязычных журналов).

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

РАЗДЕЛ

УДК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2021 г. В. П. Иванов[1,*], Г. В. Сидоров[2,]**

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

**E-mail: ivanov@niisi.ras.ru*

***E-mail: sidorov@msu.su*

Представлено академиком РАН Я.Я. Яковлевым ...

Поступило ...
После доработки ...
Принято к публикации ...

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

Ключевые слова: необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи...

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19–11–10000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007. 176 с.
2. *Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция–диффузия–адвекция // ЖВМиМФ. 2014. Т. 54. № 10. С. 35–49. https://doi.org/10.31857/S2686740020030098

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

THE TITLE OF ARTICLE

V. P. Ivanov[a] and G. V. Sidorov[b]

[a]Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation

[b]Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Ya.Ya. Yakovlev

Summary

Keywords: ...

REFERENCES

1. O. V. Rudenko, S. N. Gurbatov, and C. M. Hedberg, *Nonlinear Acoustics through Problems and Examples* (Fizmatlit, Moscow, 2007; Trafford, Victoria BC, Canada, 2011).
2. E. A. Antipov, N. T. Levashova, and N. N. Nefedov, Comput. Math. Math. Phys. **54** (10), 1536–1549 (2014).

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В кратком сообщении И.И. Иванова и С.С. Сидорова “Название работы” описано новое явление (обнаружен эффект, впервые объяснены свойства, построена новая модель и т.п.). Этот результат является приоритетным.

Приоритетность научного результата, полученного в быстро развивающейся области (физические свойства метаматериалов, регистрация гравитационной волны и т.п.) требует срочной публикации этого сообщения.

Представляю сообщение И.И. Иванова и С.С. Сидорова “Название работы” к публикации в журнале “Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки”.

Академик РАН Я.Я. Яковлев Подпись, Число

СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

- Экспертное заключение о возможности опубликования
- Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами (https://sciencejournals.ru/pub/license_agreement_ru.docx)
- Авторский договор для английской версии (https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/)