

СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 10, 2021 год

К 95-летию со дня рождения профессора
Юрия Дмитриевича Шмыглевского (1926–2007)

В. И. Зубов, А. А. Фролова, А. А. Чарахчян

1587

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

The Finite-Time Expected Deviation Exponent for Continuous Dynamical Systems

Guoqiao You

1593

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Определение коэффициента теплопроводности вещества
по тепловому потоку на поверхности трехмерного тела

А. Ф. Албу, В. И. Зубов

1594

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейные разностные операторы с коэффициентами
в виде бесконечных последовательностей

С. А. Абрамов, М. А. Баркату, М. Петковшек

1610

Generating Functions Involving the Fox-Wright Functions

Khaled Mehrez

1618

Сингулярные нелинейные задачи для автомодельных решений уравнений
пограничного слоя с нулевым градиентом давления: анализ и численное решение

Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин

1619

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Нелокальный закон сохранения в свободной затопленной струе

А. М. Гайфуллин, В. В. Жвик

1646

Юрий Дмитриевич Шмыглевский и вариационные задачи газовой динамики

А. Н. Крайко

1656

Расчет осаждения струи капельной влаги моментным методом

В. Н. Котеров, Р. И. Романенко

1672

Профилирование сверхзвуковой части пространственного сопла
максимальной тяги

И. Е. Михайлов

1684

Организация численных экспериментов на модели общей циркуляции
атмосферы и глобальной модели океана

В. П. Пархоменко

1693

Анализ граничных условий для разреженного молекулярного газа
с парциальными коэффициентами аккомодации и энергообменом

А. А. Фролова

1704

Отражение детонационной волны от плоскости симметрии
внутри цилиндрической мишени для управляемого термоядерного синтеза

К. В. Хищенко, А. А. Чарахчян

1715

ИНФОРМАТИКА

Дополненный метод стартовой площадки для аппроксимации
границы Парето в задачах с многоэкстремальными критериями

А. В. Лотов, А. И. Рябиков

1734

УДК 51(092)

*Этому прекрасному человеку мы безгранично благодарны
за щедрость, с которой он делился своим стремлением
к раскрытию секретов неизвестного,
составляющему подлинное счастье.
Измененная цитата Ю.Д. Шмыглевского*

К 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА ЮРИЯ ДМИТРИЕВИЧА ШМЫГЛЕВСКОГО (1926–2007)

© 2021 г. В. И. Zubov^{1,*}, А. А. Фролова^{1,**}, А. А. Чарахчян^{1,***}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: vladimir.zubov@mail.ru

**e-mail: afrol@yandex.ru

***e-mail: aachara@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.02.2021 г.
Переработанный вариант 16.02.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

27 апреля 2021 г. исполнилось 95 лет со дня рождения выдающегося математика и механика, Заслуженного деятеля науки России, доктора физико-математических наук, профессора, члена Национального комитета по теоретической и прикладной механике Юрия Дмитриевича Шмыглевского.

DOI: 10.31857/S0044466921100173

Научная деятельность Юрия Дмитриевича была яркой и многообразной. Ему принадлежат как глубокие теоретические исследования в области механики, физики, так и численные решения прикладных задач для моделирования сложных физических процессов. Многие полученные им результаты стали фундаментальными в этих областях.

Юрий Дмитриевич Шмыглевский родился в Москве на Арбате. В 1941 г. его семья была эвакуирована в Челябинск в связи с началом Великой Отечественной войны. Обучаясь в старших классах челябинской школы, Юрий Дмитриевич работал слесарем-ремонтником электростанции и помощником диспетчера Челябэнерго. Окончив в 1943 г. школу с золотой медалью, он один вернулся домой в Москву для поступления в институт. блестяще сдав экзамены, Юрий Дмитриевич поступил в Московский авиационный институт, успешно отучился в нем и в 1949 г. получил диплом с отличием по специальности инженера самолетостроения. Именно здесь, в МАИ, Юрий Дмитриевич познакомился с профессором кафедры аэродинамики Анатолием Алексеевичем Дородницыным и стал одним из ближайших его учеников. Личность Анатолия Алексеевича и масштаб его научных исследований оказали на Юрия Дмитриевича огромное влияние и определили в дальнейшем его научные интересы и многие этапы в жизни.

После окончания института Ю.Д. Шмыглевский был направлен на работу в Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского (ЦАГИ), в отдел, которым руководил А.А. Дородницын. Он достаточно быстро зарекомендовал себя как талантливый исследователь. За научные достижения в 1951 г. Юрий Дмитриевич вместе с А.А. Дородницыным и А.А. Никольским был удостоен Сталинской премии и переведен на работу в Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР, а позднее, в 1953 г. – в Отделение прикладной математики того же института.

В этот период под руководством директора Института энергетики С.А. Лебедева создавалась первая вычислительная машина. Лаборатория, в которой проводились работы, находилась в предместье Киева (в Феофании, в 17 км от города) в полуразрушенной церкви. В 1951 г. первая советская электронно-вычислительная машина – Малая электронная счетная машина (МЭСМ) была введена в эксплуатацию. А.А. Дородницын, занимавшийся в то время задачами, связанными с испытаниями ядерного оружия, предложил провести расчеты на МЭСМ и Ю.Д. Шмыглев-

ский, О.Н. Кацкова, а позднее П.И. Чушкин были направлены в Феофанию. Это была очень сложная, ответственная и напряженная работа с постоянным дежурством около вычислительной машины (смены длились по 12 ч), однако Юрий Дмитриевич часто с большой теплотой вспоминал то время и рассказывал о некоторых забавных моментах их жизни там.

В 1955 г. был организован Вычислительный центр АН СССР, директором которого стал академик А.А. Дородницын, и Ю.Д. Шмыглевский был приглашен им возглавить отдел в Лаборатории подготовки задач для решения на ЭВМ, а затем Лабораторию программирования № 2. В 1961 г. Юрий Дмитриевич был назначен заведующим вновь созданной Лаборатории газовой динамики, которая позднее была переименована в Отдел механики сплошных сред.

Когда в 1991 г. Юрию Дмитриевичу исполнилось 65 лет, он принял решение уйти с должности заведующего отделом, предоставив руководство отделом более молодому коллеге. Обсуждая со своими сотрудниками новую кандидатуру, Юрий Дмитриевич учитывал высказанные мнения и пожелания. В результате таких консультаций было принято решение сделать заведующим отделом доктора физико-математических наук Л.В. Шуршалова. Тем не менее до последних дней своей жизни Юрий Дмитриевич оставался бессменным научным лидером, лицом и душой отдела.

Список основных научных трудов Юрия Дмитриевича приведен в [1]. Его первые работы, выполненные в ЦАГИ, посвящены расчету обтекания тел вращения без протока сверхзвуковым потоком газа при нулевом угле атаки. Именно за достигнутые в этом направлении успехи Ю.Д. Шмыглевскому совместно с А.А. Дородницыным и А.А. Никольским в 1951 г. была присуждена Сталинская премия.

Особенно плодотворным в научной деятельности Ю.Д. Шмыглевского стало такое направление, как решение вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики, начатое в СССР в работах А.А. Никольского, Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева и других. Именно вариационные задачи газовой динамики легли в основу его диссертаций: кандидатской (1957 г., ВЦ АН СССР) и докторской (1963 г., Институт механики АН СССР). Часть работ этого направления была удостоена в 1963 г. премии имени Н.Е. Жуковского, в 1979 — Государственной премии СССР, а в 1997 г. совместно с работами Л.Е. Стернина была зарегистрирована как научное открытие.

Большой цикл работ Ю.Д. Шмыглевского посвящен динамике излучающего газа. Под его руководством и при его непосредственном участии совместно с сотрудниками отдела В.И. Зубовым, В.М. Кривцовым, И.Н. Наумовой, А.А. Чарахчьяном была создана целая система методов для расчета осесимметричных течений излучающего газа, решен ряд важных задач с учетом реальных оптических и термодинамических свойств веществ, исследовано взаимодействие алюминия и его паров с потоком лазерного излучения. Под влиянием Юрия Дмитриевича как научного руководителя аспирантов и более старшего коллеги многие сотрудники отдела начали работать в этой области.

Решения стационарных уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, которые не зависят от числа Рейнольдса (так как удовлетворяют одновременно и уравнениям Эйлера), были объектом исследований Юрия Дмитриевича в течение многих лет. В книге Юрия Дмитриевича (см. [2]) имеется любопытный фрагмент, который проливает свет на его точку зрения о возможном применении найденных им решений: “Найденные изолированные вихревые образования характерны тем, что возникают при аналитических краевых условиях, взятых, например, на окружности конечного радиуса с центром в начале координат. Они, как микроструктура потока, могут появляться в ламинарных течениях без видимых причин”.

Помимо поиска точных решений, Ю.Д. Шмыглевский исследовал общие свойства стационарных уравнений Навье—Стокса. Им предложено преобразование этих уравнений к виду, переводящему область пограничного слоя в область регулярного решения, найден способ приведения уравнения для функции тока к однородным формам, совместно с Б.В. Пальцевым изучен возможный характер пересечения линии тока и обтекаемой поверхности, совместно с А.В. Щепровым показана возможность появления бесконечной системы вихрей в окрестности излома обтекаемого контура.

Юрия Дмитриевича интересовали и общие свойства уравнений для сжимаемого газа. Им предложены новые вариационные принципы, из которых следуют уравнения газовой динамики и магнитной гидродинамики при бесконечной проводимости. Совместно с Е.Д. Терентьевым получены полные системы законов сохранения динамики идеального газа, магнитной и электромагнитной гидродинамики.

Руководя подразделениями института со дня его основания, Ю.Д. Шмыглевский не только создал цикл научных работ в разных областях, но и подготовил большой коллектив высококвалифицированных научных специалистов, среди которых более 20 кандидатов и докторов наук. Учениками Юрия Дмитриевича были В.В. Александров, В.М. Борисов и А.В. Шипилин, составившие в свое время костяк Отдела механики сплошных сред и создавшие свои научные школы.

Работали и продолжают работать в институте и другие научные “дети” и “внуки” Юрия Дмитриевича, ныне доктора и кандидаты наук. Учеником Юрия Дмитриевича Шмыглевского с гордостью считает себя А.Н. Крайко – один из ведущих ученых-механиков нашей страны.

О первых встречах и работе с Ю.Д. Шмыглевским А.Н. Крайко вспоминает так:

“Первый раз я увидел Юрия Дмитриевича в мае 1957 г. в ВЦ АН СССР при защите им кандидатской диссертации. Узнав о предстоящей защите из газеты “Вечерняя Москва”, в которой печатались сообщения обо всех открытых защитах в Москве, я подбил своих друзей-одногруппников, студентов 5-го курса Аэромеханического факультета МФТИ, поехать в ВЦ и узнать, что это такое. Был чудесный солнечный день, мы шли в Вычислительный Центр по разрытому-перерытому Ленинскому проспекту под откуда-то гремевшую замечательную музыку и чувствовали себя чуть ли не героями “Марша энгузиастов” (“Здравствуй, страна героев, страна мечтателей, страна ученых!”).

Юрий Дмитриевич должен был защищаться первым. Однако его оппонент А.А. Никольский опаздывал, и первым защищался Павел Иванович Чушкин, который вместе с Ю.Д. Шмыглевским перешел из ЦАГИ в недавно созданный ВЦ АН СССР. Директором ВЦ был А.А. Дородницын (академик и председатель диссертационного совета), учениками которого были оба подзащитных. В диссертации П.И. Чушкина (“Обтекание цилиндра околосзвуковым потоком”) нам, студентам, прослушавшим блестящий курс теоретической газовой динамики Горимира Горимировича Чёрного, все было понятно. То, что Ю.Д. Шмыглевский построил оптимальные по тяге или по сопротивлению контуры сверхзвуковых сопел и кормовых частей тел вращения с протоком, тоже было понятно. Однако как ему такое удалось, оставалось загадкой, думаю, в той или иной степени, для всех, включая членов совета и оппонентов, а тем более студентов. Именно эта загадка настолько увлекла меня, что вариационные задачи газовой динамики стали неизменным спутником всей моей научной жизни. Немалую роль в этом сыграли знакомство, сотрудничество и дружба с Юрием Дмитриевичем, который наряду с Горимиром Горимировичем стал моим учителем.

С марта 1959 г. (после окончания МФТИ) я начал работу в сопловом отделе “лаборатории Чёрного”, начальником которого был В.В. Поляков. Будучи экспериментатором, он хорошо понимал место теории и расчетов на появившихся тогда электронных вычислительных машинах (ЭВМ). В ЦИАМ в то время тоже установили первую ЭВМ “Урал” с быстродействием порядка сотни операций в секунду. Владимир Васильевич предложил мне: “Александр Николаевич, поезжайте в ВЦ. Там серьезные ЭВМ и работающие на них ученые. Попробуйте договориться о стажировке. Будете учиться, решая задачи, интересные и им, и нам, например о течениях в соплах. Думаю, они согласятся, а я устрою Вам соответствующий режим работы”. Так, благодаря В.В. Полякову, я оказался в Лаборатории механики сплошных сред ВЦ АН СССР. Заведовал лабораторией к.ф.-м.н. Ю.Д. Шмыглевский. В это время в ВЦ вместо до того момента самой мощной в СССР Большой электронной счетной машины (БЭСМ-1) поставили ее усовершенствованный вариант БЭСМ-2. На БЭСМ-2 под руководством О.Н. Кацковой я учился рассчитывать сверхзвуковые течения в соплах. Результатом завязавшейся, как и предвидел В.В. Поляков, совместной работы стало заметное продвижение в развитии методов расчета равновесных и неравновесных течений. Обучаясь работе на БЭСМ-2, я не забывал заинтриговавших меня на защите Ю.Д. Шмыглевского вариационных задачах, а Юрий Дмитриевич, не избалованный обсуждениями, готов был отвечать на любые вопросы заинтересованного ученика. Наши постоянные контакты и обсуждения оказались очень плодотворными в поиске решений вновь возникающих проблем.”

Отдел, которым руководил Ю.Д. Шмыглевский около 40 лет, стал одним из лучших отделов ВЦ РАН. Благодаря необыкновенной преданности Юрия Дмитриевича науке, его постоянному заботливому вниманию по отношению к коллегам и их поддержке, Отдел механики сплошных сред даже в трудные для науки годы сохранил свой состав и высокий научный потенциал.

Широта интересов Ю.Д. Шмыглевского не ограничивалась научными направлениями. Можно сказать, что он любил в жизни все прекрасное, редкое и удивительное. Это касалось и музыки, и живописи, и литературы. Его восхищали виртуозные исполнения классики (особенно он любил Моцарта) – более тысячи пластинок с записью различных музыкальных шедевров были собраны в его коллекции. Часто посещая со своей супругой И.Н. Наумовой Московскую консерваторию, он красочно рассказывал об этих замечательных концертах, стараясь поделиться услышанным со всеми, кто был рядом. Приглашенным для выступления в ВЦ исполнителям камерной музыки Т. Гринденко и Г. Кремеру Юрий Дмитриевич предоставил свой кабинет для репетиций и клавирина и был очень рад, что музыка будет еще долго наполнять его комнату. Он увлекался поэзией, часто вспоминая лирику М. Цветаевой, а иногда и сам писал, посвящая стихи своей жене или коллегам отдела.

Говоря о его увлечении живописью, нельзя не упомянуть об одном деле, продолжавшемся более 20 лет. Юрий Дмитриевич руководил общеинститутским еженедельным семинаром по методам решения задач математической физики. Объявления об этих семинарах готовил он сам. Это были маленькие произведения искусства. Надписи делались цветными фломастерами. Цветовая гамма, шрифты, форма и расположение надписей никогда не повторялись. Юрий Дмитриевич бережно сохранял эти объявления, снимая их после семинара и пополняя свою коллекцию. Но иногда докладчики успевали снять их раньше и забрать эти шедевры себе на память.

Ю.Д. Шмыглевский был прекрасным фотографом и коллекционировал снимки еще оставшихся в Москве церквей и соборов, чаще всего законсервированных или полуразрушенных. Он снимал и редких бабочек, и птиц, и цветы, и просто поразившие его природные явления или интересные лица людей.

Всеми своими находками и наблюдениями Юрий Дмитриевич пытался поделиться с друзьями и коллегами. Возвращаясь из интересных поездок, он привозил множество слайдов и фотографий и устраивал просмотры в ВЦ, сопровождая показы слайдов интересными рассказами.

Одним из увлечений Ю.Д. Шмыглевского был перевод современной английской художественной литературы. Начались эти переводы с романа Джона Фаулза “Женщина французского лейтенанта” (The French Lieutenant’s Woman), который он привез, находясь в одной из зарубежных поездок, и продолжались до тех пор, пока Юрий Дмитриевич не перевел почти все вышедшие к тому времени произведения этого автора. Переведенные книги он с удовольствием давал читать сотрудникам ВЦ. Именно так многие из нас познакомились с Д. Фаулзом задолго до создания литературных переводов и экранизации его первого романа.

Любимым видом отдыха Юрия Дмитриевича было катание на лыжах. В зимний период, пожалуй, не было ни одного выходного дня, когда бы он со своей прекрасной женой, Ириной Николаевной, не выезжал на лыжах в ближайшее Подмосковье. Когда не было такой возможности, они выходили покататься на лыжах в сквер на Университетском проспекте, где жили, или на Воробьевы горы. Это увлечение помогало Юрию Дмитриевичу сохранять прекрасную физическую форму. К одному из дней рождений сотрудники отдела преподнесли ему подарок – новые лыжи, самые-самые по тем временам. Конечно, Юрий Дмитриевич был очень рад такому подарку.

Коллеги и многие, кто встречался с Ю.Д. Шмыглевским, всегда вспоминают о нем с теплом и большим уважением.

Из воспоминаний профессора Б.А. Кушнера

Всегда элегантно одетый, подтянутый, Юрий Дмитриевич был профессором *par excellence*. И хотя наши математические интересы располагались далеко друг от друга, я неизменно чувствовал, что разговариваю с крупным ученым и неординарной личностью.

Юрий Дмитриевич был также объектом легенд. Например, говорили, что он послал письмо в высокую партийную инстанцию по поводу выдвинутого тогда лозунга “Достичь наибольших результатов с наименьшими затратами”, объясняя партийным чиновникам, что лозунг математически некорректен. Легенда утверждает, что был получен вежливый ответ с благодарностью и объяснением, что данный лозунг уже снят с повестки дня и заменен другим.

Также известно, что Юрий Дмитриевич был коллекционером монет и денежных купюр. Рассказывали, что, отчаявшись найти трехрублевую купюру определенного года выпуска, он послал запрос в Госбанк – выпускалась ли такая банкнота в этом году вообще. Ответ, как и можно было ожидать, не рассеял тумана. В нем говорилось, что подробности денежной эмиссии составляют государственную тайну.

Из воспоминаний Л.В. Шуршалова

Юрий Дмитриевич всегда воспринимался мной как строгий начальник. Мне кажется, что и другие сотрудники воспринимали его так же. При этом он никогда ни на кого не повышал голос, никогда не приказывал сделать что-то, никогда не принимал никаких административных мер по отношению к кому-либо. Со всеми поддерживал ровные уважительные отношения. Но никогда и ни с кем не было никакого панибратства. И дисциплина в Отделе механики сплошных сред всегда была на высоте.

По своему опыту и по своим наблюдениям со стороны могу заметить, что отношение к сотрудникам у Юрия Дмитриевича могло меняться со временем. Это никак не проявлялось внешне, но чувствовалось интуитивно. Со мной было несколько таких приливов и отливов. Когда я только пришел в отдел, то видел, что ему нравились мои дисциплинированность, аккуратность, усидчивость и старательность. Однако ему явно не понравилось, хотя он ни слова не сказал по этому поводу, что я согласился стать сначала заместителем, а потом председателем профкома

ВЦ, не посоветовавшись с ним. Спустя какое-то время отношения выровнялись. Когда я был секретарем партбюро, однажды возникла некоторая острая конфликтная ситуация, повлекшая за собой, из-за неоднозначного ее восприятия, очевидную напряженность между мной и Юрием Дмитриевичем. К счастью, ситуация быстро разрешилась и напряженность исчезла. Но, повторю, это никак не проявлялось в словах или поступках. Это воспринималось на уровне ощущений. На мой взгляд, у Юрия Дмитриевича было очень мощное биополе, которое воздействовало на других людей.

Как и положено руководителям, Юрий Дмитриевич регулярно просил сотрудников подготавливать планы и отчеты. Не знаю, всем ли он это говорил, но мне он сразу сказал, что в научных исследованиях никогда нельзя предвидеть, получится ли результат. Поэтому в план нужно писать только то, что уже сделано или почти сделано. Тогда и написание отчета не будет проблемой. С точки зрения сегодняшних руководителей российской науки (чиновников от бухгалтерии), это звучит кощунственно и призывает к безделью. Но с точки зрения существа дела это совершенно правильно и подтверждается блестящими результатами работы самого Юрия Дмитриевича и возглавляемого им отдела.

Когда по рекомендации Юрия Дмитриевича я стал ученым секретарем ВЦ, наши отношения с Юрием Дмитриевичем не только не прервались, но стали более тесными. Юрий Дмитриевич регулярно заходил ко мне в кабинет, и мы подолгу беседовали. Круг интересов и познания Юрия Дмитриевича были чрезвычайно широки.

Помимо науки он увлекался музыкой, литературой, живописью, фотографией. Но не только “высокие материи” интересовали Юрия Дмитриевича. Он хорошо разбирался в садоводстве и огородничестве, в строительных делах на садовом участке. Одно время это было очень актуально для меня. Например, когда я занимался проведением электричества в своем загородном домике, консультации Юрия Дмитриевича помогли мне решить многие вопросы, от которых зависела пожарная безопасность моего дома.

У Юрия Дмитриевича была одна вредная привычка — он курил. Не помню, чтобы он курил в своем кабинете, в комнатах своих сотрудников или при проведении семинаров. Обычно он выходил в коридор или на лестничную площадку. Но было одно публичное мероприятие, во время которого он закуривал всегда. Это были заседания Ученого совета ВЦ, которые вел директор академик А.А. Дородницын. Наш директор тоже был курильщиком. В какой-то момент в ходе заседания он обязательно доставал сигарету и закуривал. Почти сразу же закуривал и Юрий Дмитриевич. Больше никто из членов Ученого совета не курил. Когда А.А. Дородницын не стало и директором стал некурящий Ю.Г. Евтушенко, курение на заседаниях Ученого совета полностью прекратилось.

Из воспоминаний А.А. Чарахчяна

О законопослушности Юрия Дмитриевича

Будучи заведующим отделом, Юрий Дмитриевич всегда точно, пунктуально выполнял свои предписанные обязанности. Но если дело касалось сотрудников отдела, он мог принять совершенно неординарное решение. Мы с ныне покойным Владимиром Михайловичем Кривцовым (см. [3]) пришли к Юрию Дмитриевичу одновременно еще студентами МФТИ, а после защиты кандидатских диссертаций работали в Отделе механики сплошных сред младшими научными сотрудниками. Следующей ступенью карьеры в то время была должность старшего научного сотрудника с окладом на 100 рублей больше, что было весьма существенным. Однажды Юрий Дмитриевич пригласил нас к себе в кабинет и сказал примерно следующее. У него есть одна ставка старшего научного сотрудника, и поскольку В.М. Кривцов защитил диссертацию раньше меня, он отдает эту ставку ему. Но что касается денег, то он рекомендует нам поделить эту надбавку пополам. Больше эту тему он поднимать не будет и просит никому об этой беседе не говорить, так как за нее его могут посадить в тюрьму. Мы с Владимиром Михайловичем полностью выполнили его пожелание. Я абсолютно убежден в том, что когда Юрий Дмитриевич говорил о тюрьме, он не пугал нас, а говорил о вполне реальной, по его мнению, возможности.

Об удивительной скромности Юрия Дмитриевича

Несмотря на большое признание его заслуг и множество наград Юрий Дмитриевич всегда был очень скромным человеком. Так, в разговоре со мной он как-то сказал, что ему не нравится слово “учитель”. По его мнению, в науке есть только коллеги, которые на каком-то этапе работы помогают друг другу. Но Юрий Дмитриевич “забыл” о том, что одна из его статей памяти А.А. Дородницына называется “Учитель”.

О моем соавторстве с Юрием Дмитриевичем

Если не считать одной ранней работы 1977 г. с большим числом соавторов, куда Юрий Дмитриевич включил по каким-то соображениям и меня, у нас с ним есть две совместные работы. Первая работа — это обзор численных методов в динамике излучающего газа 1980 г. Это был юбилейный год для ВЦ РАН, и Юрию Дмитриевичу надо было написать два обзора, упомянутый выше и обзор методов решения вариационных задач. Так как “Журнал вычислительной математики и математической физики” не публиковал статьи с одним и тем же составом авторов дважды в год, Юрию Дмитриевичу был нужен соавтор. Он выбрал меня и попросил написать текст по моим работам, который составлял небольшую и далеко не главную часть всего обзора. Но не могло быть и речи о том, чтобы помочь ему в какой-нибудь технической работе над обзором.

Второй нашей совместной публикацией стал обзор работ отдела в сборнике 2005 г., посвященного 50-летию ВЦ РАН. Помимо Юрия Дмитриевича было еще четыре соавтора, которые представили свои тексты и списки литературы, после чего он все взял в свои руки. В частности, он сделал на бумаге единый список литературы (около 300 ссылок), тщательно его проверил, что-то сократил, внимательно прочитав тексты соавторов и кое-что поправив, и доверил мне только набор на компьютере уже готового текста. Юрию Дмитриевичу было тогда 78 лет.

Его шепетильность в отношении соавторства распространялась и на такие тексты, как отзыв на диссертацию ведущей организации. Однажды он попросил меня написать такой отзыв на кандидатскую диссертацию, которая пришла к нам без предварительной договоренности. Я написал отзыв, а Юрий Дмитриевич пошел заверять его в дирекцию и потом рассказал мне, как это происходило. Я был младшим научным сотрудником, и на отзыве стояла только моя подпись. Так как у меня была ученая степень, формально такое авторство отзыва допускалось, но на практике такая ситуация была, по-видимому, очень редкой. Поэтому дирекция потребовала, чтобы отзыв был подписан не только младшим научным сотрудником, но и заведующим отделом. Тогда Юрий Дмитриевич написал на втором экземпляре отзыва “С отзывом согласен”, расписался и категорически отказался ставить свою подпись на первом экземпляре. Дирекции пришлось смириться.

Об одном эпизоде с участием Юрия Дмитриевича

В конце 80-х годов дирекция ВЦ РАН рассматривала возможность проведения совместных работ по лазерной тематике с одним прикладным институтом. Нужен был сотрудник, который занялся бы этими работами, и А.А. Дородницын выбрал меня. Когда Юрий Дмитриевич мне об этом рассказал, я был очень огорчен, так как не хотел переключаться с задач, которыми занимался в то время, о чем и сказал Юрию Дмитриевичу. И он меня “отстоял”, за что я был и буду всегда ему благодарен.

В Ю.Д. Шмыглевском органично сочетались талант и скромность; пунктуальность и гибкость, умение принять нешаблонное решение; строгость по отношению к себе и подчиненным; и отзывчивость, и душевная щедрость. Среди сотрудников ВЦ РАН вряд ли найдется человек, который не относился бы к нему с огромным уважением.

Научно-педагогическая деятельность Ю.Д. Шмыглевского оценена рядом наград и званий. Он является лауреатом Государственных премий СССР (1951 и 1979 г.), удостоен премии им. Н.Е. Жуковского 2-й степени (1969 г.). В 1995 г. Юрию Дмитриевичу присвоено звание Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, он награжден орденами Трудового Красного Знамени и “Знак Почета” (1986 г.), восемью медалями СССР и РФ, а также медалью Китайской Народной Республики. С 1989 г. Ю.Д. Шмыглевский являлся членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Он опубликовал более 80 научных работ и 3 книги. Он является соавтором научного открытия об оптимальных формах сверхзвуковых сопел с внутренними ударными волнами.

Но главной своей наградой Юрий Дмитриевич считал профессию ученого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О.М., Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И., Керимов М.К., Чарахчян А.А. Памяти профессора Юрия Дмитриевича Шмыглевского (1926–2007) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 5. С. 928–936.
2. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. С. 201.
3. Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И., Флеров Ю.А., Чарахчян А.А. Памяти Владимира Михайловича Кривцова (1948–2019) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1998–2002.

**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 517.929

**THE FINITE-TIME EXPECTED DEVIATION EXPONENT
FOR CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS¹⁾**

© 2021 г. Guoqiao You^{1,*}

¹*School of Statistics and Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China*

**e-mail:270217@nau.edu.cn*

Поступила в редакцию 12.10.2020 г.
Переработанный вариант 16.05.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Показатель ожидаемого отклонения за конечное время для непрерывных динамических систем. Введено понятие показателя ожидаемого отклонения за конечное время (FTEDE), который описывает ожидаемую скорость расхождения частицы с другой изначально бесконечно близкой, но случайно отобранной частицей в течение конечного периода времени. Предлагаемый показатель FTEDE можно рассматривать как стохастическую версию традиционного показателя Ляпунова конечного времени (FTLE); он является полезным инструментом для измерения хаотического поведения непрерывных динамических систем. Библ. 27. Фиг. 4.

Ключевые слова: показатель отклонения частиц, показатель Ляпунова, непрерывные динамические системы.

DOI: 10.31857/S004446692110015X

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

**ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

УДК 519.634

Дорогому Учителю – Ю.Д. Шмыглевскому посвящается

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ВЕЩЕСТВА ПО ТЕПЛОВОМУ ПОТОКУ НА ПОВЕРХНОСТИ
ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА¹⁾**

© 2021 г. А. Ф. Албу¹, В. И. Zubov^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: vladimir.zubov@mail.ru

Поступила в редакцию 30.01.2021 г.
Переработанный вариант 30.01.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматривается и исследуется обратная задача определения зависящего от температуры коэффициента теплопроводности вещества по известному тепловому потоку на границе тела. Рассмотрение проводится на основе первой краевой задачи для трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности в параллелепипеде. Обратная коэффициентная задача сводится к вариационной задаче и решается численно с помощью градиентных методов минимизации функционала. В качестве целевого функционала выбрано среднеквадратичное отклонение рассчитываемого теплового потока на поверхности тела от экспериментально полученного потока. На примере ряда нелинейных задач, коэффициенты которых зависят от температуры, показаны работоспособность и эффективность предложенного подхода. Библ. 18. Фиг. 10.

Ключевые слова: обратные коэффициентные задачи, нелинейные задачи, трехмерное уравнение теплопроводности, оптимальное управление, численные методы оптимизации, схемы переменных направлений.

DOI: 10.31857/S0044466921100033

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи всегда были в поле внимания исследователей. Однако в последнее время наблюдается повышенный интерес к этим задачам. Причиной повышенного интереса является возросшая потребность в создании новых, современных материалов и изучении их свойств. Нередко некоторые характеристики вновь созданных материалов оказываются заранее неизвестными. Одним из способов их определения является решение обратных задач (см., например, [1], [2]).

Одной из важных и сложных обратных задач является задача определения зависимости коэффициента теплопроводности вещества от температуры по результатам экспериментального наблюдения за динамикой температурного поля в исследуемом веществе. Эта обратная коэффициентная задача исследовалась в работах [3]–[9]. В этих работах рассмотрение проводилось на основе первой краевой задачи для одномерного и двумерного нестационарного уравнения теплопроводности. В качестве исследуемых объектов там выступали стержень и прямоугольная пластина. Результаты проведенных исследований показали, что в двумерном случае получить решение обратной задачи существенно сложнее, чем в одномерном случае. Связано это не только с увеличивающимися затратами ресурсов компьютера, но и с особенностями распределения экспериментальных данных. Для получения решения обратной задачи в двумерном случае пришлось модернизировать численный алгоритм.

Однако на практике, при сборе экспериментальных данных, имеют дело с трехмерными объектами. Поэтому именно трехмерная постановка обратной коэффициентной задачи наиболее

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 21-71-30005).

востребована. Обратная коэффициентная задача для трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности исследовалась в работе [10]. В качестве целевого функционала в работе [10] выбрано среднеквадратичное отклонение рассчитанного поля температуры от экспериментально определенного поля. Зависимость возможности идентифицировать коэффициент теплопроводности от плотности распределения экспериментальных данных проявилась в трехмерном случае с особой силой.

Настоящая работа является продолжением исследований, выполненных в [10]. В отличие от [10], здесь в качестве целевого функционала используется среднеквадратичное отклонение рассчитанного теплового потока на поверхности трехмерного объекта от экспериментально определенного теплового потока. В работе предложен алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи в этом случае. В основе алгоритма решения обратной коэффициентной задачи лежит сведение ее к вариационной задаче, которая решается численно с помощью градиентных методов минимизации функционала. Для вычисления градиента целевого функционала используется эффективная методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология, см. [11], [12]). Заметим, что при проведении экспериментальных исследований используют, как правило, образцы материала простой формы (обычно это параллелепипед). Поэтому возникающую при этом обратную коэффициентную задачу в трехмерном случае разумно рассматривать также для объекта-параллелепипеда.

Для успешного численного решения обратной коэффициентной задачи в трехмерном случае необходимо использовать эффективные разностные схемы, аппроксимирующие прямую и сопряженную задачи. В работе [13] проведены исследования, касающиеся выбора разностной схемы для аппроксимации уравнения диффузии тепла при решении обратной коэффициентной задачи в трехмерной постановке. В [13] на примере ряда нелинейных задач для трехмерного уравнения теплопроводности, коэффициенты которого зависят от температуры, проводился сравнительный анализ нескольких схем переменных направлений: локально-одномерной схемы (см. [14]), схемы Дугласа–Рекфорда (см. [15]) и схемы Писмена–Рекфорда (см. [16]). При сравнении методов принимались во внимание точность получаемого решения и время достижения требуемой точности на компьютере. Результаты проведенных численных экспериментов показали, что локально-одномерная схема для таких задач является наиболее эффективной и наименее “капризной”.

В настоящей работе сопряженная задача и формула для вычисления градиента целевого функционала получены именно для случая использования локально-одномерной схемы. Для других разностных схем эти формулы можно получить аналогичным образом.

Работоспособность и эффективность предложенного алгоритма проиллюстрированы рядом примеров решения обратной коэффициентной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть образец исследуемого вещества имеет форму прямого параллелепипеда длины R , ширины E и высоты G . Температура T этого параллелепипеда в начальный момент времени известна. Известно также, как изменяется во времени температура параллелепипеда на его гранях. Для математического описания процесса теплопроводности в параллелепипеде введем декартовы координаты x , y и z . Точки $s = (x, y, z)$ параллелепипеда образуют область $Q = \{(0, R) \times (0, E) \times (0, G)\}$ с границей $\Gamma = \partial Q$. Распределение температурного поля в параллелепипеде в каждый момент времени описывается решением следующей начально-краевой (смешанной) задачи:

$$C(s) \frac{\partial T(s, t)}{\partial t} = \operatorname{div}_s (K(T(s, t)) \cdot \nabla_s T(s, t)), \quad (s, t) \in \{Q \times (0, \Theta)\}, \quad (1.1)$$

$$T(s, 0) = w_0(s), \quad s \in \bar{Q}, \quad (1.2)$$

$$T(s, t) = w_\Gamma(s, t), \quad s \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq \Theta. \quad (1.3)$$

Здесь t – время; $T(s, t) \equiv T(x, y, z, t)$ – температура вещества в точке s с координатами (x, y, z) в момент времени t ; $C(s)$ – объемная теплоемкость материала; $K(T)$ – коэффициент теплопроводности; $w_0(s)$ – заданная температура параллелепипеда в начальный момент времени $t = 0$; $w_\Gamma(s, t)$ – заданная температура на границе области. Объемная теплоемкость $C(s)$ считается известной функцией координат. При заданном коэффициенте теплопроводности $K(T)$ можно найти распределение температуры $T(s, t)$ в любой точке области $Q \times (0, \Theta)$, решив прямую задачу (1.1)–(1.3).

Обратная коэффициентная задача сводится к следующей вариационной задаче: требуется найти такую зависимость коэффициента теплопроводности вещества $K(T)$ от температуры T , при которой поток тепла $\left(-K(T(s,t))\frac{\partial T(s,t)}{\partial \bar{n}}\right)$ на границе объекта, полученный в результате решения прямой задачи (1.1)–(1.3), мало отличается от потока тепла $P(s,t)$, полученного экспериментально. В качестве меры отклонения этих функций рассматривается величина

$$\Phi(K(T)) = \int_0^{\Theta} \iint_{\Gamma} \beta(s(\Gamma)) \left[\left(-K(T(s(\Gamma), t)) \frac{\partial T(s, t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{s \in \Gamma} \right) - P(s(\Gamma), t) \right]^2 d\Gamma dt. \quad (1.4)$$

Здесь $\beta(s(\Gamma)) \geq 0$ – заданная весовая функция; $P(s(\Gamma), t)$ – заданный тепловой поток на границе Γ области Q ; $\partial T / \partial \bar{n}$ является производной от температуры по направлению внешней нормали к границе области.

Таким образом, обратная задача идентификации функции $K(T)$ сводится к следующей задаче оптимального управления: определить оптимальное управление $K(T)$ и соответствующее решение $T(s, t)$ задачи (1.1)–(1.3), при котором целевой функционал (1.4) достигает минимального значения.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

Вариационная задача (1.1)–(1.4), к которой сводится обратная коэффициентная задача, решалась в данной работе градиентными методами минимизации функционала. В работе [17] было получено аналитическое выражение для градиента целевого функционала в общей, n -мерной постановке сформулированной задачи оптимального управления. Однако использовать аналитическое выражение для градиента функционала при численном решении задачи практически невозможно в силу его сложности. Поэтому в предлагаемом алгоритме, как и ранее, для вычисления градиента функционала использовалась методология быстрого автоматического дифференцирования.

Дискретная сопряженная задача, построенная с помощью БАД-методологии, базируется на выбранной аппроксимации прямой задачи и согласованна с ней. В настоящей работе формулы для вычисления градиента функционала получены для случая использования второго (итерационного) варианта локально-одномерной схемы (см. [13]) при аппроксимации уравнения теплопроводности. Эти формулы могут быть использованы и в случае работы с явной локально-одномерной схемой, если полагать, что количество итераций равно единице.

Для дискретизации задачи в области $Q \times (0, \Theta)$ вводятся временная и пространственные сетки. Временная сетка задается набором узловых значений $\{t^j\}_{j=0}^J$, $t^0 = 0$, $t^J = \Theta$ с равномерным шагом $\tau = \Theta/J$.

Вводятся также две пространственные сетки: основная и вспомогательная. Для построения основной пространственной сетки на отрезке $[0, R]$ выбирается система “опорных” точек $\{x_n\}_{n=0}^N$ так, что $x_0 = 0$, $x_N = R$ и $x_n < x_{n+1}$ для всех $0 \leq n < N$. При этом h_n^x – расстояние между опорными точками x_n и x_{n+1} , т.е. $h_n^x = x_{n+1} - x_n$, $n = \overline{0, N-1}$. Аналогично на отрезках $[0, E]$ и $[0, G]$ выбирается система “опорных” точек $\{y_i\}_{i=0}^I$ и $\{z_l\}_{l=0}^L$ так, что $y_0 = 0$, $y_I = L$, $y_i < y_{i+1}$ для всех $0 \leq i < I$ и $z_0 = 0$, $z_L = G$, $z_l < z_{l+1}$ для всех $0 \leq l < L$ соответственно. При этом $h_i^y = y_{i+1} - y_i$, $i = \overline{0, I-1}$, $h_l^z = z_{l+1} - z_l$, $l = \overline{0, L-1}$. Точки основной сетки – совокупность точек $\{x_n, y_i, z_l\}$, где $n = \overline{0, N}$, $i = \overline{0, I}$ и $l = \overline{0, L}$.

Вспомогательная сетка $\{\tilde{x}_n, \tilde{y}_i, \tilde{z}_l\}$, $n = \overline{0, N+1}$, $i = \overline{0, I+1}$, $l = \overline{0, L+1}$, строится похожим образом. Отличие состоит лишь в выборе опорных точек:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= x_0, & \tilde{x}_{N+1} &= x_N, & \tilde{x}_n &= x_{n-1} + h_{n-1}^x/2, & n &= \overline{1, N}, \\ \tilde{y}_0 &= y_0, & \tilde{y}_{I+1} &= y_I, & \tilde{y}_i &= y_{i-1} + h_{i-1}^y/2, & i &= \overline{1, I}, \\ \tilde{z}_0 &= z_0, & \tilde{z}_{L+1} &= z_L, & \tilde{z}_l &= z_{l-1} + h_{l-1}^z/2, & l &= \overline{1, L}. \end{aligned}$$

Плоскости $x = \tilde{x}_n, y = \tilde{y}_i, z = \tilde{z}_l$ делят объект на параллелепипеды – так называемые расчетные ячейки. Расчетной ячейке будем приписывать индексы (n, i, l) , если вершина этой ячейки, ближайшая к началу координат, совпадает с узловой точкой $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_i, \tilde{z}_l)$. В каждом узле (x_n, y_i, z_l, t^j) расчетной области $Q \times (0, \Theta)$ все функции задаются своими значениями в этой точке (например, $T(x_n, y_i, z_l, t^j) = T_{nil}^j$).

Обозначим через Γ_x^+ ту часть поверхности Γ , которая принадлежит плоскости $x = \tilde{x}_{N+1}$, через Γ_x^- – часть поверхности Γ , принадлежащая плоскости $x = \tilde{x}_0$. Аналогично определяются поверхности $\Gamma_y^+, \Gamma_y^-, \Gamma_z^+$ и Γ_z^- .

Границы отрезка $[a, b]$, на котором идентифицируется коэффициент теплопроводности $K(T)$, задавались как минимальное и максимальное значения функций $w_0(s)$ и $w_S(s, t)$. Отрезок $[a, b]$ разбивался точками $\tilde{T}_0 = a, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_M = b$ на M частей (они могут быть как равными, так и неравными). Каждой из точек $\tilde{T}_m, m = 0, \dots, M$, ставилось в соответствие число $k_m = K(\tilde{T}_m)$. Искомая функция $K(T)$ аппроксимировалась непрерывной кусочно-линейной функцией с узлами в точках $\{(\tilde{T}_m, k_m)\}_{m=0}^M$ так, как это показано в [17]. Если в процессе решения задачи температура в точке выходила за границы отрезка $[a, b]$, то для определения функции $K(T)$ использовалась линейная экстраполяция.

Итерационная локально-одномерная схема (см. [13]), которая использовалась для решения прямой задачи, является схемой переменных направлений (расщепляется по направлениям x, y и z). Ниже эта схема приводится в так называемом каноническом виде, который требуется для применения формул быстрого автоматического дифференцирования:

x -направление

$$T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} = T_{nil}^j + a_{nil} \left(K \left(T_{n+1,il}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{n+1,il}^{j+\frac{1}{3}} + K \left(T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{n+1,il}^{j+\frac{1}{3}} - K \left(T_{n+1,il}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} - K \left(T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} \right) + b_{nil} \left(K \left(T_{n-1,il}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{n-1,il}^{j+\frac{1}{3}} + K \left(T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{n-1,il}^{j+\frac{1}{3}} - K \left(T_{n-1,il}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} - K \left(T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} \right) \equiv \Psi_{nil}^{j+\frac{1}{3}},$$

y -направление

$$T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} = T_{nil}^{j+\frac{1}{3}} + c_{nil} \left(K \left(T_{n,i+1,l}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{n,i+1,l}^{j+\frac{2}{3}} + K \left(T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{n,i+1,l}^{j+\frac{2}{3}} - K \left(T_{n,i+1,l}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} - K \left(T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} \right) + d_{nil} \left(K \left(T_{n,i-1,l}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{n,i-1,l}^{j+\frac{2}{3}} + K \left(T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{n,i-1,l}^{j+\frac{2}{3}} - K \left(T_{n,i-1,l}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} - K \left(T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} \right) T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} \right) \equiv \Psi_{nil}^{j+\frac{2}{3}},$$

z -направление

$$T_{nil}^{j+1} = T_{nil}^{j+\frac{2}{3}} + e_{nil} \left(K(T_{ni,l+1}^{j+1})T_{ni,l+1}^{j+1} + K(T_{nil}^{j+1})T_{ni,l+1}^{j+1} - K(T_{ni,l+1}^{j+1})T_{nil}^{j+1} - K(T_{nil}^{j+1})T_{nil}^{j+1} \right) + f_{nil} \left(K(T_{ni,l-1}^{j+1})T_{ni,l-1}^{j+1} + K(T_{nil}^{j+1})T_{ni,l-1}^{j+1} - K(T_{ni,l-1}^{j+1})T_{nil}^{j+1} - K(T_{nil}^{j+1})T_{nil}^{j+1} \right) \equiv \Psi_{nil}^{j+1},$$

где

$$a_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil}h_n^x(h_n^x + h_{n-1}^x)}, \quad b_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil}h_{n-1}^x(h_n^x + h_{n-1}^x)}, \quad c_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil}h_i^y(h_i^y + h_{i-1}^y)},$$

$$d_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil}h_{i-1}^y(h_i^y + h_{i-1}^y)}, \quad e_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil}h_l^z(h_l^z + h_{l-1}^z)}, \quad f_{nil} = \frac{\tau}{6C_{nil}h_{l-1}^z(h_l^z + h_{l-1}^z)},$$

$$(n = 1, N - 1, \quad i = 1, I - 1, \quad l = 1, L - 1, \quad j = 0, J - 1).$$

Целевой функционал (1.4) аппроксимировался функцией $F(k_0, k_1, \dots, k_M)$ конечного числа переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(K(T)) &= \int_0^{\Theta} \oint_{\Gamma} \beta(s(\Gamma)) \left[\left(-K(T(s(\Gamma), t)) \frac{\partial T(s, t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{s \in \Gamma} \right) - P(s(\Gamma), t) \right]^2 d\Gamma dt \cong \\ &\cong F = \sum_{j=1}^J \left[\sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_{0il}(H_{0il}^j - P_{0il}^j)^2 + \beta_{Nil}(-H_{Nil}^j - P_{Nil}^j)^2) h_i^y h_i^z + \right. \\ &\quad + \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n=1}^{N-1} (\beta_{n0l}(H_{n0l}^j - P_{n0l}^j)^2 + \beta_{nll}(-H_{nll}^j - P_{nll}^j)^2) h_n^x h_l^z + \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_{ni0}(H_{ni0}^j - P_{ni0}^j)^2 + \beta_{niL}(-H_{niL}^j - P_{niL}^j)^2) h_n^x h_i^y \right] \tau. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь через $H_{0il}^j, -H_{Nil}^j, H_{n0l}^j, -H_{nll}^j, H_{ni0}^j$ и $-H_{niL}^j$ обозначены тепловые потоки, вычисленные на соответствующих гранях параллелепипеда: $\Gamma_x^-, \Gamma_x^+, \Gamma_y^-, \Gamma_y^+, \Gamma_z^-$ и Γ_z^+ . Например,

$$H_{0il}^j = \frac{K(T_{il}^j) + K(T_{0il}^j) T_{il}^j - T_{0il}^j}{2 h_0^x}, \quad H_{Nil}^j = \frac{K(T_{Nil}^j) + K(T_{N-1,il}^j) T_{Nil}^j - T_{N-1,il}^j}{2 h_{N-1}^x}. \tag{2.2}$$

Дискретная сопряженная задача, которая получается в результате применения БАД-методологии в данном случае, совпадает с соотношениями (2.2)–(2.5), которые представлены в [10], однако формулы для вычисления производных $\frac{\partial F}{\partial T_{nil}^j}$ будут теперь иметь такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial T_{nil}^j} &= 0, \quad n = \overline{2, N-2}, \quad i = \overline{2, I-2}, \quad l = \overline{2, L-2}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{0il}^j} &= \tilde{A}_{il}^j \left[K(T_{0il}^j)(T_{il}^j - T_{0il}^j) - (K(T_{0il}^j) + K(T_{il}^j)) \right], \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{il}^j} &= \tilde{A}_{il}^j \left[K(T_{il}^j)(T_{il}^j - T_{0il}^j) + (K(T_{0il}^j) + K(T_{il}^j)) \right], \quad i = \overline{2, I-1}, \quad l = \overline{2, L-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{N-1,il}^j} &= \tilde{B}_{il}^j \left[K(T_{N-1,il}^j)(T_{Nil}^j - T_{N-1,il}^j) - (K(T_{Nil}^j) + K(T_{N-1,il}^j)) \right], \quad i = \overline{1, I-2}, \quad l = \overline{1, L-2}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{Nil}^j} &= \tilde{B}_{il}^j \left[K(T_{Nil}^j)(T_{Nil}^j - T_{N-1,il}^j) + (K(T_{Nil}^j) + K(T_{N-1,il}^j)) \right], \quad i = \overline{1, I-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ \tilde{A}_{il}^j &= \frac{\beta_{0il} h_i^y h_i^z \tau}{h_0^x} (H_{0il}^j - P_{0il}^j), \quad \tilde{B}_{il}^j = \frac{\beta_{Nil} h_i^y h_i^z \tau}{h_{N-1}^x} (H_{Nil}^j + P_{Nil}^j), \\ K(T_{nil}^j) &= \frac{dK(T)}{dT} (T_{nil}^j) = \frac{k_m - k_{m-1}}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1}}, \end{aligned}$$

а индекс m определяется условием $\tilde{T}_{m-1} \leq T \leq \tilde{T}_m$.

Производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial T_{n0l}^j}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial T_{nll}^j}, \quad n = \overline{2, N-1}, \quad l = \overline{2, L-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{n,l-1,l}^j}, \quad n = \overline{1, N-2}, \quad l = \overline{1, L-2}, \quad \frac{\partial F}{\partial T_{nll}^j}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{ni0}^j}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial T_{nil}^j}, \quad n = \overline{2, N-1}, \quad i = \overline{2, I-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_{ni,L-1}^j}, \quad n = \overline{1, N-2}, \quad i = \overline{1, I-2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial T_{niL}^j}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, I-1}$$

вычисляются подобным образом.

При вычислении производных, в которых встречаются повторяющиеся пространственные индексы, такие как:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial T_{1l}^j}, \quad l = \overline{2, L-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial T_{n1}^j}, \quad n = \overline{2, N-1}, \\ & \frac{\partial F}{\partial T_{li}^j}, \quad i = \overline{2, I-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial T_{N-1,I-1,l}^j}, \quad l = \overline{1, L-1} \quad \text{и} \quad N = I, \\ & \frac{\partial F}{\partial T_{n,I-1,L-1}^j}, \quad n = \overline{1, N-1} \quad \text{и} \quad I = L, \quad \frac{\partial F}{\partial T_{N-1,i,L-1}^j}, \quad i = \overline{1, I-1} \quad \text{и} \quad N = L, \end{aligned}$$

необходимо учитывать все пересечения по этим индексам. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial T_{1l}^j} &= \tilde{A}_l^j \left[K(T_{1l}^j)(T_{1l}^j - T_{0l}^j) + (K(T_{0l}^j) + K(T_{1l}^j)) \right] + \\ &+ \tilde{C}_l^j \left[K(T_{1l}^j)(T_{1l}^j - T_{10l}^j) + (K(T_{10l}^j) + K(T_{1l}^j)) \right], \quad l = \overline{2, L-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial T_{111}^j} &= \tilde{A}_{11}^j \left[K(T_{111}^j)(T_{111}^j - T_{011}^j) + (K(T_{011}^j) + K(T_{111}^j)) \right] + \\ &+ \tilde{C}_{11}^j \left[K(T_{111}^j)(T_{111}^j - T_{101}^j) + (K(T_{101}^j) + K(T_{111}^j)) \right] + \\ &+ \tilde{E}_{11}^j \left[K(T_{111}^j)(T_{111}^j - T_{110}^j) + (K(T_{110}^j) + K(T_{111}^j)) \right], \\ \tilde{C}_{nl}^j &= \frac{\beta_{n0l} h_n^x h_l^z \tau}{h_0^y} (H_{n0l}^j - P_{n0l}^j), \quad \tilde{E}_{ni}^j = \frac{\beta_{ni0} h_n^x h_i^y \tau}{h_0^z} (H_{ni0}^j - P_{ni0}^j). \end{aligned}$$

Компоненты градиента целевой функции, в соответствии с БАД-методологией, вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial k_m} &= \sum_{g=0}^J \sum_{r=0}^L \sum_{q=0}^I \sum_{s=0}^N \left(X_{rqs}^g \frac{\partial K(T_{rqs}^g)}{\partial k_m} \right) + \sum_{g=0}^{J-1} \sum_{r=0}^L \sum_{q=0}^I \sum_{s=0}^N \left(X_{rqs}^{g+\frac{1}{3}} \frac{\partial K\left(T_{rqs}^{g+\frac{1}{3}}\right)}{\partial k_m} + X_{rqs}^{g+\frac{2}{3}} \frac{\partial K\left(T_{rqs}^{g+\frac{2}{3}}\right)}{\partial k_m} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^J \left[\sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{I-1} \left(\frac{\partial F}{\partial K(T_{0il}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{1il}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{N-1,il}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{Nil}^j)} \right) + \right. \\ &+ \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\partial F}{\partial K(T_{n0l}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{n1l}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{n,I-1,l}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{nll}^j)} \right) + \\ &\left. + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} \left(\frac{\partial F}{\partial K(T_{ni0}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{ni1}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{ni,L-1}^j)} + \frac{\partial F}{\partial K(T_{niL}^j)} \right) \right], \quad m = \overline{0, M}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Производные $\frac{\partial F}{\partial K(T_{nil}^j)}$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial K(T_{0il}^j)} = \frac{\partial F}{\partial K(T_{1il}^j)} = \tilde{A}_{il}^j (T_{1il}^j - T_{0il}^j), \quad \frac{\partial F}{\partial K(T_{Nil}^j)} = \frac{\partial F}{\partial K(T_{N-1,il}^j)} = \tilde{B}_{il}^j (T_{Nil}^j - T_{N-1,il}^j).$$

Остальные подобные производные вычисляются аналогичным образом.

Выражения для X_{rqs}^g , $X_{rqs}^{g+1/3}$, $X_{rqs}^{g+2/3}$, содержащие сопряженные переменные, приведены в работе [10], а множители $\frac{\partial K(T_{rqs}^g)}{\partial k_m}$, присутствующие в формуле (2.3), должны вычисляться так:

$$\frac{\partial K(T_{ni}^j)}{\partial k_{m-1}} = 1 - \frac{T_{ni}^j - \tilde{T}_{m-1}}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1}}, \quad \frac{\partial K(T_{ni}^j)}{\partial k_m} = \frac{T_{ni}^j - \tilde{T}_{m-1}}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1}},$$

где индекс m определяется условием $\tilde{T}_{m-1} \leq T \leq \tilde{T}_m$, $m = 1, \dots, M$.

Отметим, что значение градиента целевой функции $F(k_0, k_1, \dots, k_M)$, вычисленное по формуле (2.3), является точным для выбранной аппроксимации задачи оптимального управления, что является чрезвычайно важным при использовании градиентных методов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма было выполнено большое количество тестовых расчетов. Наиболее характерные из них представлены здесь в виде нескольких серий расчетов.

Для получения “экспериментального” потока тепла $P(x, y, z, t)$ на поверхности параллелепипеда решалась прямая начально-краевая задача (1.1)–(1.3) с заданным коэффициентом теплопроводности, определялось поле температур в объекте, а затем по нему рассчитывались потоки с помощью формул, аналогичных формулам (2.2).

Сложности, с которыми приходится сталкиваться при решении задачи идентификации коэффициента теплопроводности в трехмерной постановке, связаны не только с выбором схемы дискретизации прямой задачи, но также с выбором подходящей расчетной сетки. Анализ полученных численных результатов показал, что если количество узлов пространственной сетки не меньше 20 по каждому направлению, то коэффициент теплопроводности восстанавливается с достаточно высокой точностью при условии, что грамотно выбран временной шаг.

Выбранная в настоящей работе локально-одномерная схема аппроксимации уравнения теплопроводности является устойчивой и позволяет работать с достаточно большим шагом по времени. Тем не менее для каждой используемой пространственной сетки необходимо проводить исследование, касающиеся выбора сетки по времени. Представленные здесь результаты численных расчетов получены при использовании равномерной пространственной сетки с параметрами $N = I = L = 25$. Количество интервалов разбиения отрезка $[0, \Theta]$ по времени $J = 25$.

Минимизация целевой функции $F(k_0, k_1, \dots, k_M)$ проводилась численно с помощью градиентного метода. Отрезок $[a, b]$, на котором идентифицировался коэффициент теплопроводности, разбивался на 64 интервала, т.е. $M = 64$. Хочется отметить, что для ускорения итерационного процесса спуска по градиенту, как и в работе [10], во всех представленных здесь примерах использовался подход, предложенный в [6]. Он основан на последовательном увеличении числа M разбиений отрезка $[a, b]$. Начинать процесс желательно с $M = 1$. После получения оптимального решения его следует использовать в качестве начального приближения для варианта с $M = 2$. Получив оптимальное решение для $M = 2$, использовать его в качестве начального приближения для $M = 4$, и т.д.

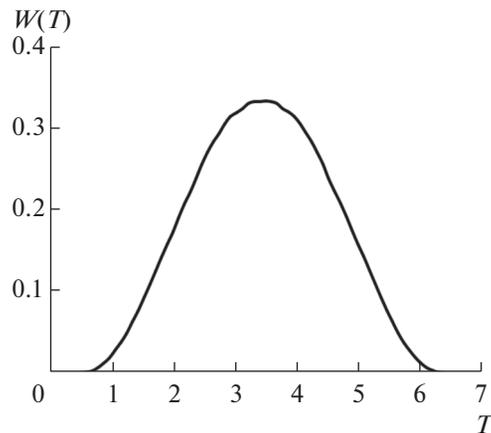
Для оценки точности получаемых численных решений обратной задачи использовались два критерия:

$$\varepsilon_1 = \max_{0 \leq m \leq M} \frac{|K_{\text{opt}}(\tilde{T}_m) - K(\tilde{T}_m)|}{K^*} \quad (3.1)$$

и

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{K^*} \sqrt{\sum_{m=0}^M \frac{(K_{\text{opt}}(\tilde{T}_m) - K(\tilde{T}_m))^2}{M+1}}, \quad (3.2)$$

где $K(\tilde{T}_m)$ – значения аналитического коэффициента теплопроводности, вычисленные в опорных точках отрезка температур, $K_{\text{opt}}(\tilde{T}_m)$ – значения коэффициента теплопроводности, получен-



Фиг. 1.

ные в результате решения оптимизационной задачи, а K^* — некоторое характерное значение функции $K(T)$. В работе полагалось, что

$$K^* = \frac{\sum_{m=0}^M K(\tilde{T}_m)}{M+1}.$$

Проведенные численные эксперименты показали, что качество восстановления коэффициента теплопроводности сильно зависит от плотности распределения “экспериментальных” данных. Бывают случаи, когда на некоторых участках отрезка $[a, b]$ слишком мало данных, необходимых для идентификации коэффициента теплопроводности. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо проанализировать распределение “экспериментальных” данных по интервалам интересующего нас отрезка температур.

Для анализа распределения экспериментальных данных по интервалам интересующего нас отрезка температур введем функцию $W_*(T)$ — относительную меру той подобласти области $Q \times (0, \Theta)$, температура в точках которой меньше T , а через $W(T)$ обозначим плотность (производную) функции $W_*(T)$ по переменной T .

Для надежности все рассмотренные задачи решались численно несколько раз, при этом в качестве начального приближения $K_{ini}(T)$ выбирались разные функции.

3.1. Первая серия расчетов

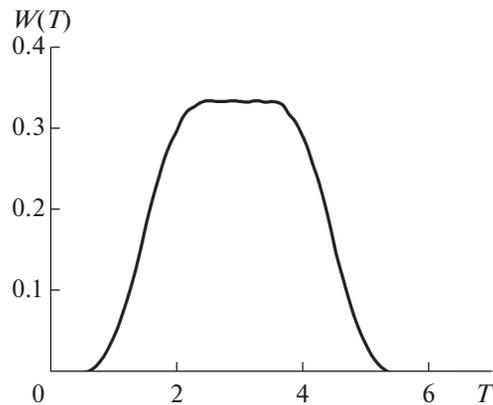
В первой серии расчетов рассматривалась задача нахождения коэффициента теплопроводности вещества при следующих входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_T(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = x + y + z + 3t + 0.5 \quad (3.3)$$

на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. В этом случае функция (3.3) является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и $K(T) = T$. Температура на параболической границе рассматриваемой области изменяется от $a = 0.5$ до $b = 6.5$.

Этот пример — простейший из всех рассмотренных. Целью первой серии расчетов являлась не только проверка работоспособности предложенного алгоритма, но и проверка корректности созданных машинных кодов, реализующих этот алгоритм.

Все проведенные расчеты первой серии можно разделить на несколько групп. В расчетах первой группы полагалось, что в целевом функционале весовой параметр $\beta(s(\Gamma))$ равняется 1 во всех точках границы Γ объекта. На фиг. 1 представлено распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[0.5, 6.5]$. Оно напоминает нормальное распределение с центром в точке $T = 3.5$. Отрезку темпе-



Фиг. 2.

ратур $T \in [2.5, 5.0]$ соответствует основное количество экспериментальных данных, а в окрестности концов отрезка $[0.5, 6.5]$ этих данных сравнительно мало.

Проведенные расчеты показали, что предложенный алгоритм приводит к одному и тому же оптимальному решению независимо от того, какая функция выбрана в качестве начального приближения. Во всех случаях коэффициент теплопроводности идентифицировался с машинной точностью. В процессе решения оптимизационной задачи целевой функционал изменился от 2.4159×10^1 на начальном приближении ($K_{ini}(T) = 5.0$) к коэффициенту теплопроводности до 1.5607×10^{-24} на финальном (оптимальном) приближении, при этом максимум модуля градиента уменьшился от 1.6057 до 9.4125×10^{-14} .

Отметим, что когда в качестве “экспериментальных” данных использовалось температурное поле (см. [10]), то обратная задача, рассмотренная в этой серии, имела неединственное решение и для получения единственного решения требовалось задание дополнительного условия. Отметим также, что неравномерное распределение экспериментальных данных сказалось здесь только на сходимости итерационного процесса, но не на качестве полученного решения.

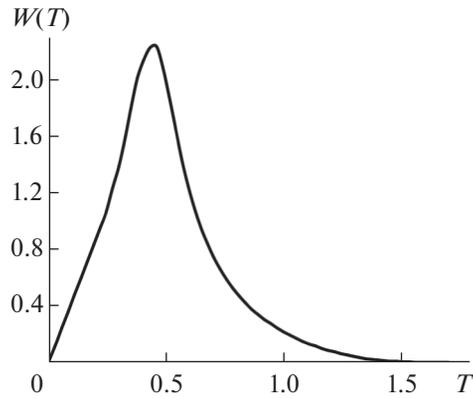
К расчетам второй группы относятся те случаи, когда в качестве “экспериментального” теплового потока использовался поток тепла, вычисленный только на одной из шести граней параллелепипеда. На фиг. 2 представлено распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[0.5, 6.5]$ для случая, когда в качестве “экспериментальных” данных использовался поток тепла только на той грани, для которой $z = 0$, т.е. $\beta_{ni0} = 1$ для всех $n = 1, N - 1, i = 1, I - 1$ (на остальных гранях весовая функция равна нулю). Качественно функция $W(T)$ здесь похожа на ту, что представлена на фиг. 1, но на правом конце отрезка вообще отсутствуют экспериментальные данные. Тем не менее предложенный алгоритм решения обратной задачи позволил восстановить коэффициент теплопроводности с машинной точностью на всем отрезке $[0.5, 6.5]$. По-видимому, это связано с линейным характером искомой функции $K(T) = T$.

Распределение функции $W(T)$, подобное приведенному на фиг. 2, получается и тогда, когда в качестве “экспериментальных” данных используются потоки тепла на тех гранях параллелепипеда, для которых $x = 0$ или $y = 0$. И в случаях использования экспериментальных данных только на этих гранях по отдельности удастся восстановить коэффициент теплопроводности с машинной точностью.

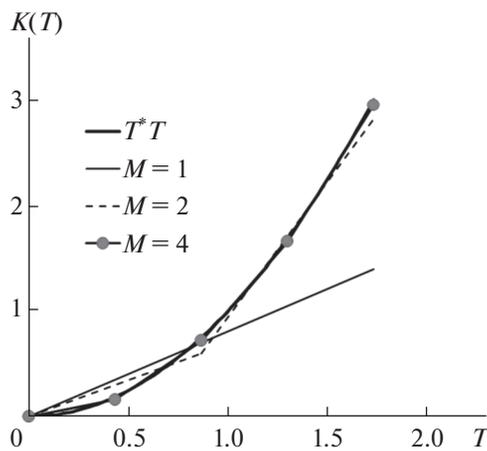
3.2. Вторая серия расчетов

Во второй серии расчетов рассматривалась задача определения коэффициента теплопроводности при таких входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_T(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{9 - 8t}} \quad (3.4)$$



Фиг. 3.

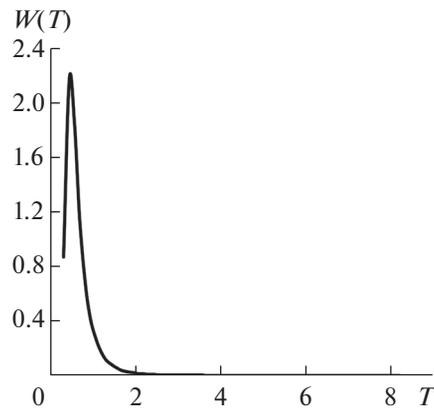


Фиг. 4.

на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. Функция (3.4) является в этом случае решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и $K(T) = T^2$. Температура на параболической границе рассматриваемой области изменяется от $a = 0.0$ до $b = 1.732$.

В расчетах первой группы полагалось, что в целевом функционале весовой параметр $\beta(s(\Gamma))$ равняется 1 во всех точках границы Γ объекта. Распределение экспериментальных данных вдоль отрезка температур $[0.0, 1.732]$ в этом случае представлено на фиг. 3 в виде зависимости функции $W(T)$ от температуры. Анализ этого распределения показывает, что правому концу отрезка $[0.0, 1.732]$ соответствует слишком мало “экспериментальных” данных. Поэтому можно предположить, что там возникнут трудности с восстановлением коэффициента теплопроводности. Проведенные расчеты подтвердили это предположение: при равномерном разбиении отрезка температур на $M = 64$ интервалов последняя компонента градиента функционала не изменяется (она равна нулю с машинной точностью).

Процесс построения решения задачи идентификации в том случае, когда в качестве начального приближения было выбрано управление $K_{in_i}(T) \equiv 5.0$, проиллюстрирован на фиг. 4. Здесь представлены функция $K(T) = T^2$ (теоретическое значение коэффициента теплопроводности) и оптимальные управления, полученные при $M = 1, 2, 4$. Видно, что опорные точки кусочно-линейного оптимального управления, полученного при $M = 4$, почти лежат на линии $K(T) = T^2$. Что касается оптимального управления, полученного при $M = 8$, то оно практически совпадает с функцией $K(T) = T^2$ ($\epsilon_1 = 9.4417 \times 10^{-3}$ и $\epsilon_2 = 7.1752 \times 10^{-3}$). Отклонения полученного при



Фиг. 5.

$M = 64$ коэффициента теплопроводности $K_{\text{opt}}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = T^2$ составляют $\varepsilon_1 = 5.3197 \times 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = 7.2643 \times 10^{-5}$ соответственно.

К расчетам второй группы относятся те случаи, когда в качестве “экспериментального” теплового потока использовался поток тепла, вычисленный на двух гранях параллелепипеда: при $x = 0$ и $x = 1$, т.е. в (2.1) $\beta_{0il} = 1$ и $\beta_{Nl} = 1$ для всех $i = 1, I - 1, l = 1, L - 1$, а в остальных точках весовая функция равна нулю.

Распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[0.0, 1.732]$ близко к тому, которое представлено на фиг. 3. Поэтому можно ожидать, что в этом случае коэффициент теплопроводности будет восстанавливаться с той же точностью, которая была получена при использовании “экспериментального” теплового потока на всех шести гранях параллелепипеда. Проведенные численные расчеты подтвердили это предположение. Нельзя не отметить, что в этом случае оптимизационная задача решается значительно быстрее.

3.3. Третья серия расчетов

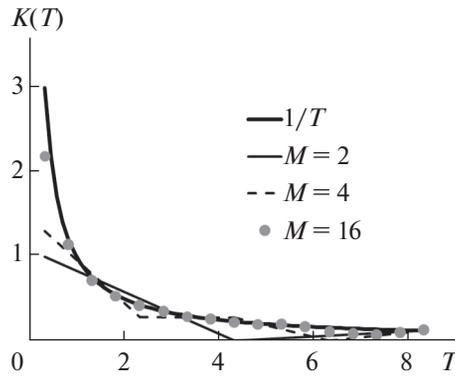
В третьей серии расчетов задача нахождения коэффициента теплопроводности решалась при следующих входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_{\Gamma}(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = \frac{3}{1.8(5 - x - y - z - 1.8t)} \quad (3.5)$$

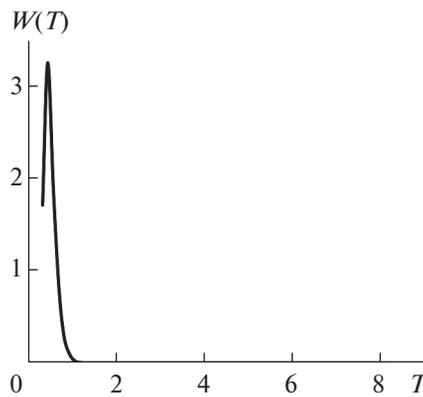
на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. Функция (3.5) является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и $K(T) = \frac{1}{T}$. Температура на параболической границе рассматриваемой области изменяется от $a = 0.33$ до $b = 8.33$.

В расчетах первой группы этой серии полагалось, что в целевом функционале весовой параметр $\beta(s(\Gamma))$ равняется 1 во всех точках границы Γ объекта. На фиг. 5 представлено распределение “экспериментальных” данных по отрезку температур $[0.33, 8.33]$ (функция $W(T)$). Анализируя представленный на этой фигуре график, нетрудно увидеть, что на правом конце отрезка $[0.33, 8.33]$ практически нет “экспериментальных” данных. Как показали проведенные расчеты этой серии, коэффициент теплопроводности на подотрезке $[6.0, 8.33]$ не восстанавливается. При разбиении отрезка температур на $M = 64$ интервала последние 19 компонент градиента функционала всегда оказывались нулевыми (с машинной точностью).

Задача оптимизации, к которой сводится рассматриваемая обратная коэффициентная задача, решалась при разных начальных приближениях $K_{ini}(T)$. Процесс построения решения задачи идентификации в том случае, когда в качестве начального приближения было выбрано управле-



Фиг. 6.

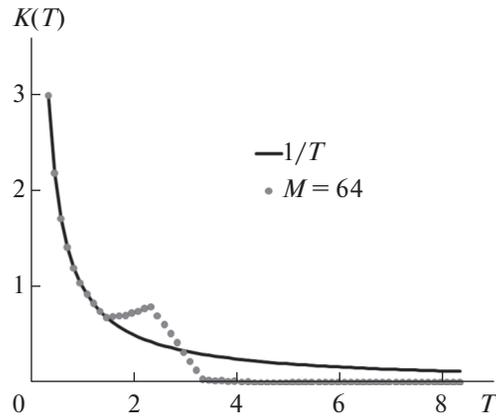


Фиг. 7.

ние $K_{ini}(T) \equiv 5.0$, проиллюстрирован на фиг. 6. Здесь представлены функция $K(T) = \frac{1}{T}$ (теоретическое значение коэффициента теплопроводности) и оптимальные управления, полученные при $M = 2, 4, 16$. График оптимального управления, полученного при $M = 64$ на отрезке $[0.33, 6.0]$, полностью совпадает с графиком функции $K(T) = \frac{1}{T}$. Отклонения полученного коэффициента теплопроводности $K_{opt}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = \frac{1}{T}$ на отрезке $[0.33, 6.0]$ составляют $\varepsilon_1 = 3.5506 \times 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = 1.5300 \times 10^{-4}$ соответственно. Однако на отрезке $[6.0, 8.33]$ сохранился след от управления, полученного при $M = 16$, не совпадающий с $K(T) = \frac{1}{T}$.

Следует отметить, что в случае использования в качестве экспериментальных данных температурного поля мы нередко сталкивались с неединственностью решения этой обратной задачи (см. [10]). В случае использования функционала-потока предложенный здесь алгоритм, как показал опыт работы с ним, приводит к одному и тому же оптимальному решению независимо от того, какая функция выбрана в качестве начального приближения.

К расчетам второй группы относятся те случаи, когда в качестве “экспериментального” теплового потока использовался поток тепла, вычисленный только на одной грани параллелепипеда, а именно на той, для которой $x = 0$, т.е. в (2.1) $\beta_{0il} = 1$ для всех $i = \overline{1, I-1}$, $l = \overline{1, L-1}$, а в остальных точках весовая функция равна нулю. На фиг. 7 представлено распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[0.33, 8.33]$. В этом случае на отрезке температур $[1.5, 8.33]$ практически нет “экспериментальных” данных.



Фиг. 8.

Построение решения задачи идентификации проводилось обычным образом. В качестве начального приближения было выбрано управление $K_{ini}(T) \equiv 5.0$. Затем задача решалась последовательно при $M = 1, 2, \dots, 64$. График оптимального управления, полученного при $M = 64$, полностью совпадает с графиком функции $K(T) = \frac{1}{T}$ только на отрезке $[0.33, 1.5]$ (см. фиг. 8), т.е. для тех значений температур, при которых задан тепловой поток. Отклонения полученного коэффициента теплопроводности $K_{opt}(T)$ от его аналитического значения $K(T) = \frac{1}{T}$ на отрезке $[0.33, 1.5]$ составляют $\varepsilon_1 = 5.8421 \times 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = 2.0151 \times 10^{-4}$ соответственно. На отрезке $[0.33, 8.33]$ сохранился след управления, полученного при $M = 16$.

Этот пример наглядно показывает, что в некоторых случаях информации о тепловых потоках только на некоторых поверхностях объекта может быть недостаточно для восстановления коэффициента теплопроводности на всем интересующем отрезке.

3.4. Четвертая серия расчетов

В четвертой серии расчетов рассматривалась задача нахождения коэффициента теплопроводности вещества при следующих входных данных: в качестве начальной функции $w_0(x, y, z)$ и граничной функции $w_T(x, y, z, t)$ выбирались следы функции

$$\Lambda(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{9(x+1)^2 + 20y^2 + 25z^2}{9-8t}}$$

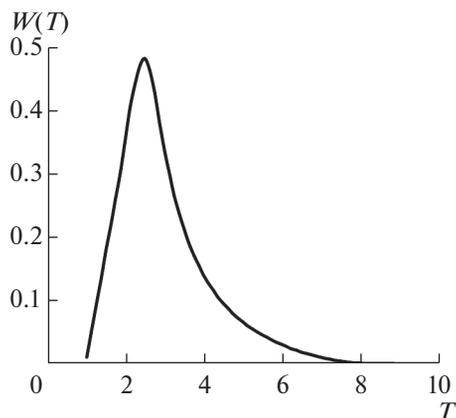
на параболической границе области $Q \times (0, \Theta) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$.

В качестве “экспериментальных” данных использовался поток тепла, вычисленный по температурному полю, полученному в результате решения прямой задачи (1.1)–(1.3) при $C(s) = 1$ и с коэффициентом теплопроводности $K(T) = k(T)$, где функция $k(T)$ определялась следующим равенством:

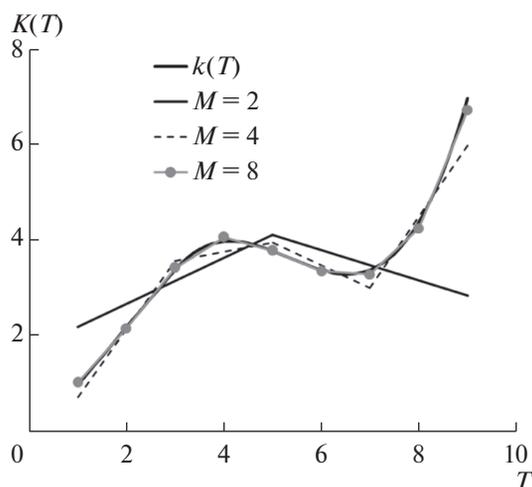
$$k(T) = \begin{cases} 0.1(T-3)(T-6)(T-7) + 3.4, & T \geq 3, \\ 1.2(T-3) + 3.4, & T < 3. \end{cases}$$

Анализ построенного таким образом температурного поля позволил определить диапазон изменения температуры: $a = 1, b = 9$.

В первом примере этой серии расчетов полагалось, что в целевом функционале весовой параметр $\beta(s(\Gamma))$ равняется 1 во всех точках границы Γ объекта. На фиг. 9 представлено распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[1.0, 9.0]$. В данном случае практически нет “экспериментальных” данных лишь на небольшом подотрезке на правом конце отрезка температур $[1.0, 9.0]$. Можно предположить, что здесь возникнут трудности с восстановлением коэффициента теплопровод-



Фиг. 9.



Фиг. 10.

ности. Проведенные расчеты подтвердили это предположение: при равномерном разбиении отрезка температур на $M = 64$ интервала последняя компонента градиента функционала не изменялась (она равнялась нулю с машинной точностью).

Процесс построения решения задачи идентификации в том случае, когда в качестве начального приближения было выбрано управление $K_{ini}(T) \equiv 5.0$, проиллюстрирован на фиг. 10. Здесь представлены функция $k(T)$ и оптимальные управления, полученные при $M = 2, 4, 8$. Видно, что опорные точки кусочно-линейного оптимального управления, полученного при $M = 8$, почти лежат на линии $K(T) = k(T)$.

График оптимального управления, полученного при $M = 64$, совпадает с графиком функции $k(T)$. Отклонения полученного при $M = 64$ коэффициента теплопроводности $K_{opt}(T)$ от его аналитического значения $k(T)$ на отрезке $[1.0, 8.875]$ составляют $\varepsilon_1 = 1.3914 \times 10^{-7}$ и $\varepsilon_2 = 1.8490 \times 10^{-8}$ соответственно. На последнем интервале сохраняется след значения коэффициента теплопроводности, полученного при последнем разбиении отрезка температур, для которого соответствующая компонента градиента целевого функционала ненулевая.

Во втором примере четвертой серии расчетов полагалось, что в качестве “экспериментального” теплового потока использовался поток тепла, вычисленный на двух гранях параллелепипеда: при $x = 0$ и $x = 1$, т.е. в (2.1) $\beta_{0il} = 1$ и $\beta_{Nil} = 1$ для всех $i = \overline{1, I-1}$, $l = \overline{1, L-1}$, а в остальных точках весовая функция равна нулю.

Распределение функции $W(T)$ вдоль отрезка $[1.0, 9.0]$ практически совпадает с тем, которое представлено на фиг. 9. В этом случае можно ожидать, что коэффициент теплопроводности будет восстанавливаться с той же точностью, которая была получена при использовании “экспериментального” теплового потока на всех шести гранях параллелепипеда. Проведенные численные расчеты подтвердили это предположение, а также тот факт, что оптимизационная задача решается быстрее, если использовать тепловые потоки только на этих двух гранях.

Полученные результаты позволяют использовать улучшенную стратегию при решении обратной коэффициентной задачи. Вначале надо построить распределение функции $W(T)$ на основе экспериментальных данных на всех гранях параллелепипеда, а затем на каждой грани по отдельности. Если окажется, что распределение функции $W(T)$ на какой-то грани качественно похоже на ее распределение по всей поверхности, то при решении обратной задачи достаточно использовать экспериментальные данные только на этой одной грани. Поиск решения обратной задачи при этом значительно упростится.

Как и при решении обратной коэффициентной задачи меньшей размерности, предложенный алгоритм продемонстрировал свою устойчивость: небольшие отклонения в экспериментальных данных ($\sim 10\%$) приводят к погрешностям в решении того же порядка ($\sim 2-5\%$). При больших отклонениях в экспериментальных данных для получения устойчивого решения необходимо ввести регуляризатор (см. [9]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные численные эксперименты показали, что качество восстановления коэффициента теплопроводности в трехмерном случае сильно зависит от распределения “экспериментальных” данных. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо проанализировать распределение данных по интервалам интересующего нас отрезка температур.

Если плотность распределения экспериментальных данных на какой-то грани параллелепипеда качественно похожа на плотность их распределения по всем граням, то при решении обратной задачи рекомендуется использовать экспериментальные данные только на одной этой грани.

Особого внимания заслуживают те значения температуры, которым соответствует малое количество экспериментальных данных. Коэффициент теплопроводности для таких значений температуры плохо идентифицируется регулярным способом. Поэтому для его определения в таких точках требуется проведение дополнительных экспериментальных исследований или введение дополнительных предположений.

Градиент целевого функционала в трехмерном случае еще сильнее, чем в двумерном случае, распределен по температуре неравномерно, что приводит к заметному ухудшению сходимости итерационного процесса. Как и в двумерном случае, эффективно устранить описанную трудность при решении задачи позволяет подход, основанный на последовательном увеличении числа разбиений отрезка температур.

Особо хочется остановиться на сравнении результатов решения задачи идентификации коэффициента теплопроводности в двух различных постановках: использование в качестве “экспериментальных” данных заданного температурного поля (функционал “поле”) или заданного теплового потока на границе объекта (функционал “поток”). Как следует из работы [10], использование функционала “поле” может приводить к неединственности решения задачи. При исследовании большого числа задач с функционалом “поток” никогда не приходилось сталкиваться с неединственностью решения. В пользу использования функционала “поток” при решении задач идентификации коэффициента теплопроводности говорит и то, что тепловой поток на границе объекта замерить проще, чем температуру в самом объекте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Математическое моделирование высокопористых волокнистых материалов и определение их физических свойств // Теплофиз. высоких температур. 2009. Т. 47. № 3. С. 463–472.
2. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностр., 1988.
3. Zubov V.I. Применение методологии быстрого автоматического дифференцирования к решению обратной коэффициентной задачи для уравнения теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1760–1774.

4. *Albu A.F., Evtushenko Y.G., Zubov V.I.* Identification of Discontinuous Thermal Conductivity Coefficient Using Fast Automatic Differentiation. In: *Battiti R., Kvasov D., Sergeyev Y.* (eds) Learning and Intelligent Optimization. LION 2017. Lecture Notes in Computer Science, 2017. V. 10556. P. 295–300. Springer, Cham.
5. *Zubov V.I., Albu A.F.* The FAD-methodology and Recovery the Thermal Conductivity Coefficient in Two Dimension Case. Proc. of the VIII Internat. Conference on Optimizat. Methods and Applications “Optimization and applications”, 2017. P. 39–44.
6. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 10. С. 1642–1657.
7. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* Восстановление коэффициента теплопроводности вещества по поверхностному тепловому потоку // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 1992–2017.
8. *Alla Albu, Vladimir Zubov.* Identification of the thermal conductivity coefficient in two dimension case // *Optim. Lett.* 2018. P. 1–17.
9. *Albu A., Zubov V.* On the Stability of the Algorithm of Identification of the Thermal Conductivity Coefficient. In: *Evtushenko Y., Jaćimović M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M.* (Eds.) Optimization and Applications. OPTIMA 2018. Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 974. Springer, Cham. P. 247–263.
10. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* Идентификация коэффициента теплопроводности вещества в трехмерном случае путем решения соответствующей задачи оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 9. С. 1447–1463.
11. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 144 с.
12. *Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И.* Об обобщенной методологии быстрого автоматического дифференцирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 11. С. 1847–1862.
13. *Албу А.Ф., Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И.* О выборе разностных схем при решении обратных коэффициентных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1643–1655.
14. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003.
15. *Douglas J., Rachford H.H.* On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. V. 82. P. 421–439.
16. *Peaceman D.W., Rachford H.H.* The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations // *Journal of the Society for Industrial and Applied Math.* 1955. V. 3. № 1. P. 28–41.
17. *Албу А.В., Зубов В.И.* Опыт использования методологии Быстрого Автоматического Дифференцирования для решения обратных коэффициентных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 18–28.
18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

© 2021 г. С. А. Абрамов^{1,*}, М. А. Баркату^{2,**}, М. Петковшек^{3,***}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

² Лиможский университет, CNRS, XLIM UMR 7252, MATHIS 123,
Авеню А. Тома, 87060 Лимож седекс, Франция

³ Люблянский университет, Факультет математики и физики, Ядранска, 19, SI-1000 Любляна, Словения

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

**e-mail: moulay.barkatou@unilim.fr

***e-mail: Marko.Petkovsek@fmf.uni-lj.si

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

Переработанный вариант 19.05.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматриваются линейные разностные операторы, коэффициенты которых представляют собой бесконечные двусторонние последовательности над полем нулевой характеристики. Обнаруживается, что эти операторы лишены ряда свойств, например, для дифференциальных операторов над дифференциальными полями. Дополнительно показывается неразрешимость ряда задач, возникающих в связи с алгоритмическим представлением бесконечных последовательностей. Библ. 10.

Ключевые слова: линейные разностные операторы, бесконечные последовательности в роли коэффициентов, аннулирующие операторы, пространства решений, делимость, общие кратные операторов, неразрешимые алгоритмические проблемы.

DOI: 10.31857/S0044466921100021

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость рассмотрения линейных разностных операторов с коэффициентами в виде последовательностей (или классов эквивалентности последовательностей) возникает, в частности, в связи с универсальными расширениями Пикара–Вессю разностных полей (см. [1], [2]). То, что в качестве расширений разностных полей приходится рассматривать кольца, было отмечено в [3].

В [2, приложение А] уже упоминалось, что некоторые естественные свойства дифференциальных операторов над дифференциальными полями (см. [4]) не сохраняются для разностных операторов над кольцами, в частности, над кольцами последовательностей. Мы расширяем список таких свойств.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 содержит предварительные сведения. В разд. 3 рассматривается вопрос, для любых ли m последовательностей $m \geq 0$ существует оператор порядка не выше m с пространством решений, порожденным этими последовательностями. Показано, что существуют такие последовательности, что любой оператор, аннулирующий любую из них, имеет бесконечномерное пространство решений. В том же разделе показано, что пространство решений наименьшего общего кратного операторов L_1, L_2 может быть бесконечномерным при том, что пространства решений исходных операторов L_1 и L_2 конечномерны. В заключительном разд. 4 обсуждается ряд вопросов разрешимости, связанных с алгоритмическим представлением бесконечных последовательностей: проверка обратимости оператора, делимости одного оператора на другой, существования ненулевого левого общего кратного двух данных операторов.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке С.А. Абрамова РФФИ (код проекта 19-01-00032-а); М. Петковшек Supported in part by the Ministry of Education, Science and Sport of Slovenia research programme P1-02.

Предварительный вариант этой работы был представлен в [5].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Ниже R обозначает кольцо двусторонних последовательностей с элементами – рациональными числами, сложение и умножение последовательностей определяется поэлементно; σ – автоморфизм на R : $\sigma c = d$ означает, что $d(k) = c(k + 1)$, $k = 0, \pm 1, \dots$

Обозначение $\mathbf{1}$ используется для последовательности, все элементы которой равны 1.

Если m – некоторое целое число, то δ_m (“дельта Кронекера”) будет обозначать последовательность

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мы будем также использовать последовательность $\omega_m \in R$:

$$\omega_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv m \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кольцо $R[\sigma]$ – это кольцо линейных разностных операторов с коэффициентами в R . Порядок $\text{ord } L$ оператора $L \in R[\sigma]$ – это неотрицательное целое, равное порядку (косоуго) полинома L от σ (о косых полиномах или, иначе, о некоммутативных полиномах Оре, см. в [6], [7]); принимается соглашение, что $\text{ord } 0 = -\infty$. Для $L \in R[\sigma]$ через V_L обозначается линейное пространство над \mathbb{Q} всех $f \in R$, для которых $L(f) = 0$. В этом смысле $V_L = \ker L$.

3. О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ

3.1. Полезная лемма

Лемма 1. Пусть m – положительное целое, $L \in R[\sigma]$. Пусть $\text{ord } L \leq m$ и при этом $L(\omega_m) = 0$. Тогда $\dim V_L = \infty$.

Доказательство. Пусть L имеет вид

$$L = a_m(n)\sigma^m + \dots + a_1(n)\sigma + a_0(n) \in R[\sigma].$$

Если $L(\omega_m) = 0$, то для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^m a_i(n)\omega_m(n+i) = \sum_{i=0}^m a_i(n) \begin{cases} 1, & \text{если } n+i \equiv m \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} = \\ &= \sum_{i=0}^m \begin{cases} a_i(n), & \text{если } n \equiv m-i \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} = a_{i_n}(n), \end{aligned} \tag{1}$$

где i_n – единственное $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ такое, что $n \equiv m - i \pmod{m+1}$. Таким образом, для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ имеем

$$n \equiv m - i \pmod{m+1} \Rightarrow a_i(n) = 0.$$

Пусть теперь $c(n)$ – произвольная последовательность из R . Пусть $g(n) \in R$ – последовательность, для которой

$$g(n) = \begin{cases} c(n), & \text{если } n \equiv m \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество (параметризованное последовательностью $c(n) \in R$) всех таких $g(n)$ является бесконечномерным подпространством \mathbb{Q} -линейного пространства R . Согласно (1) имеем

$$\sum_{i=0}^m a_i(n)g(n+i) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ n+i \equiv m \pmod{m+1}}} a_i(n)g(n+i) = a_{i_n}(n)g(n+i_n) = 0$$

и, следовательно, равенство $L(g) = 0$ для всех таких g означает, что $\dim \ker L = \infty$.

Пример 1. Пусть $m = 2$. Тогда $\omega_2(3k) = \omega_2(3k + 1) = 0$, $\omega_2(3k + 2) = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Если $L = a_2(n)\sigma^2 + a_1(n)\sigma + a_0(n)$ аннулирует $\omega_2(n)$, то

$$a_0(3k + 2) = a_1(3k + 1) = a_2(3k) = 0.$$

Оператор L аннулирует, например, и любую последовательность $g_s(n)$ такую, что $g_s(3k) = g_s(3k + 1) = 0$, $g_s(3k + 2) = k^s$. Последовательности $g_s(n)$, $s = 0, \pm 1, \dots$, линейно независимы над \mathbb{Q} .

3.2. Аннулирующие операторы

Предложение 1. Для любого положительного целого m существуют такие $f_1, \dots, f_m \in R$, что если для некоторого $L \in R[\sigma]$, $\text{ord } L \leq m$ выполнено

$$L(f_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то $\dim V_L = \infty$.

Доказательство. Вследствие леммы 1 любые $f_1, \dots, f_m \in R$ с $f_1 = \omega_m$ обладают указанным свойством.

В связи с этим напомним, что в дифференциальном случае можно всегда найти такой оператор L , $\text{ord } L \leq m$, аннулирующий заданные f_1, \dots, f_m , что размерность пространства его решений равна числу линейно независимых элементов среди f_1, \dots, f_m .

Следующий пример иллюстрирует предложение 1 и показывает существование других (но схожих) путей нахождения f_1, \dots, f_m .

Пример 2. Рассмотрим последовательности f_1, f_2 , где

$$\begin{aligned} f_1(4k) = 0, \quad f_1(4k + 1) = f_1(4k + 2) = f_1(4k + 3) = 1, \\ f_2(4k + 1) = 0, \quad f_2(4k) = f_2(4k + 2) = f_2(4k + 3) = 1, \quad k = 0, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

Если $L = a\sigma^2 + b\sigma + c$ аннулирует f_1 и f_2 , то

$$\begin{aligned} b(4k) = c(4k) = -a(4k), \\ b(4k + 1) = -a(4k + 1), \quad c(4k + 1) = 0, \\ a(4k + 2) = 0, \quad c(4k + 2) = -b(4k + 2), \\ b(4k + 3) = -c(4k + 3) = a(4k + 3). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $L(y) = 0$ для любой последовательности y такой, что выполняется

$$\begin{aligned} y(4k + 1) = y(2) - y(4k), \\ y(4k + 2) = y(4k + 3) = y(2), \end{aligned}$$

$y(2)$, $y(4k)$ играют роль произвольных постоянных.

Заметим, что лемма 1 может быть переформулирована в более сильной форме.

Лемма 1*. Существуют такие последовательности, что если оператор L (на его порядок не накладывается никаких ограничений) аннулирует хотя бы одну из них, то $\dim V_L = \infty$.

Доказательство. В самом деле, пусть последовательность c такова, что $c(n) = 1$, если $n = k^2$ для некоторого целого k , и $c(n) = 0$ в противном случае. Использование той же самой идеи, что и в доказательстве леммы 1, позволяет установить, что если $L(c) = 0$ и при этом $\text{ord } L = m$, то L аннулирует, например, любую последовательность d , для которой неравенство $d(n) \neq 0$ влечет $n = k^2$, $k > \sqrt{m}$.

(Общее соображение таково: пусть v является последовательностью положительных целых чисел $v(0), v(1), \dots$, для которой $v(k + 1) - v(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$: например, $v(k) = k^2$ или $v(k) = 2^k$. Определим последовательность c так: $c(n) = 1$, если $\exists_{k \geq 1} (|n| = v(k))$, и $c(n) = 0$ в противном случае. Каждая последовательность такого рода состоит из единиц и нулей, и при этом расстояние между соседними единицами неограниченно возрастает. Легко заметить, что последовательности вида ω_m этим свойством не обладают.)

Соответственно и предложение 1 может быть усилено отказом от ограничения $\text{ord } L \leq m$.

Пример 3. Пусть r – произвольное неотрицательное целое. Последовательность c_ν из единиц и нулей, определенная с помощью последовательности ν так, как это описано выше, аннулируется, например, любым оператором порядка r вида

$$\sigma^r(a)\sigma^r + b_{r-1}\sigma^{r-1}(a)\sigma^{r-1} + \dots + b_1\sigma(a)\sigma + b_0a,$$

где $a = 1 - c_\nu$ и $b_0, \dots, b_{r-1} \in R$. (Старший коэффициент оператора – ненулевая последовательность.) Такого вида оператор аннулирует любую последовательность вида gc_ν , $g \in R$.

Напомним, что в дифференциальном случае мы всегда можем найти такой оператор первого порядка, который аннулирует данный элемент c исходного дифференциального поля, и пространство решений которого одномерно.

3.3. Наименьшее левое общее кратное

Определение 1. Определим для операторов $L_1, L_2 \in R[\sigma]$ их *наименьшее левое общее кратное* $\text{lclm}(L_1, L_2)$ как множество всех таких операторов $L \in R[\sigma]$, что

- L не есть нулевой оператор,
- L является общим левым кратным для L_1 и L_2 ,
- не существует такого ненулевого оператора M , являющегося общим левым кратным для L_1 и L_2 , для которого $\text{ord } M < \text{ord } L$.

Замечание 1. Для некоторых $L \in R[\sigma]$ имеем $L \notin \text{lclm}(L, L)$. Например, пусть $L = a\sigma + 1$, где $a = \omega_1$. Если $f = \sigma(a)$, то $fa = 0$ и, таким образом, оператор $fL = fa\sigma + f = f$ является левым кратным для L . Так как $\text{ord } f = 0$ является наименьшим возможным порядком ненулевого оператора, то $f \in \text{lclm}(L, L)$, но $L \notin \text{lclm}(L, L)$, так как $\text{ord } L = 1$.

Заметим, что рассматриваемый оператор L обратим в $R[\sigma]$ и $L^{-1} = -a\sigma + 1$ в силу того, что $\sigma(a)a = a\sigma(a) = 0$. Отсюда $1 \in \text{lclm}(L, L)$.

Возможно также, что для двух заданных операторов $L_1, L_2 \in R[\sigma]$ их единственным общим левым кратным служит 0.

Пример 4. Рассмотрим два оператора нулевого порядка: L_1 – это последовательность $c(2k) = 0$, $c(2k + 1) = 1$, а L_2 – последовательность $d(2k) = 1$, $d(2k + 1) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Единственным левым общим кратным будет нулевая последовательность. В самом деле, предположим, что $M_1L_1 = M_2L_2$, где i -е слагаемое оператора M_1 имеет вид $a_i\sigma^i$, а i -е слагаемое оператора M_2 , в свою очередь, – вид $b_i\sigma^i$, при этом a_i и b_i суть последовательности. Тогда i -е слагаемое произведения $M_1L_1 = M_1c$ имеет вид $a_i(\sigma^i c)\sigma^i = a_i(n)c(n + i)\sigma^i$, в то же время i -е слагаемое произведения $M_2L_2 = M_2d$ имеет вид $b_i(\sigma^i d)\sigma^i = b_i(n)d(n + i)\sigma^n$. В точности одна из двух величин $c(n + i)$, $d(n + i)$ равна нулю для любых i и n . Если $M_1L_1 = M_2L_2$, то $a_i(n)c(n + i) = b_i(n)d(n + i) = 0$ для всех i и n , отсюда $a_i(\sigma^i c) = b_i(\sigma^i d)$ для всех i . Следовательно, $M_1L_1 = M_2L_2 = 0$.

Предложение 2. *Найдутся такие операторы первого порядка L_1, L_2 , что*

- (i) $\dim V_{L_1} = \dim V_{L_2} = 1$,
- (ii) *существует левое общее кратное L для L_1, L_2 , имеющее порядок 2,*
- (iii) *для любого такого левого общего кратного A для L_1, L_2 , что $\text{ord } A \leq 2$, выполнено $\dim V_A = \infty$.*

Доказательство. (i), (iii). Положим

$$L_1 = \sigma - b(n), \quad L_2 = \sigma - 1, \tag{2}$$

где $b(3k) = 1$, $b(3k + 1) = b(3k + 2) = -1$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Тогда пространства V_{L_1}, V_{L_2} одномерны: V_{L_1} порождается последовательностью $s(n)$, для которой $s(3k) = s(3k + 1) = -1$, $s(3k + 2) = 1$, в то же время V_{L_2} порождается последовательностью $t(n)$, для которой $t(n) = 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Если $V_{L_1}, V_{L_2} \subseteq V_A$ для некоторого оператора A , то V_A содержит $f(n) = (s(n) + t(n))/2$. Для последовательности $f(n)$ имеем $f(3k) = f(3k + 1) = 0$, $f(3k + 2) = 1$. Из леммы 1 следует, что если $\text{ord } A \leq 2$, то $\dim V_A = \infty$. Итак, (i), (iii) доказаны.

(ii). Легко проверить, что

$$((1 - b(n))\sigma - 1 + b(n + 1))L_1 = ((1 - b(n))\sigma + b(n)b(n + 1) - b(n))L_2. \quad (3)$$

Очевидно, что левая и правая части равенства (3) являются ненулевыми общими кратными для L_1, L_2 .

Как следствие, операторы $L_1, L_2 \in R[\sigma]$ могут быть такими, что пространства V_{L_1}, V_{L_2} конечномерны, но $\dim V_L = \infty$ для $L \in \text{lclm}(L_1, L_2)$.

Замечание 2. Равенство

$$V_L = V_{L_1} + V_{L_2} \quad (4)$$

в общем случае не выполняется. Можно при этом вспомнить, что в дифференциальном случае, когда L_1, L_2 суть операторы над дифференциальным полем \mathbb{K} , равенство (4) выполнено при рассмотрении решений, принадлежащих расширению Пикара–Вессии поля \mathbb{K} . Это верно также для случая дифференциальных систем (см. [8]). Равенство (4) имеет место и в скалярном разностном случае, когда коэффициенты принадлежат разностному полю, обладающему некоторыми специальными свойствами (см. [9]). Предложение 2 и, равным образом, его следствие о том, что равенство (4) в общем случае не выполняется, сохраняют свою силу, если рассматривать решения как последовательности с элементами, принадлежащими некоторому расширению поля \mathbb{Q} . В самом деле, ведущий и трейлинг-коэффициенты операторов (2) не обращаются в нуль и пространства решений операторов L_1 и L_2 одномерны. В то же время пространство решений оператора $\text{lclm}(L_1, L_2)$ содержит обсуждавшееся бесконечномерное пространство.

4. О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧАХ

4.1. Следствие одного из классических результатов Тьюринга

Ниже мы доказываем неразрешимость некоторых алгоритмических задач, связанных с операторами, имеющими коэффициенты в R . Доказательства, главным образом, основаны на представленном ниже следствии одного из классических результатов Тьюринга о неразрешимости задачи проверки завершенности выполнения алгоритма (см. [10]):

Пусть M – множество, содержащее, по крайней мере, два элемента, например, 0 и 1. В этой ситуации не существует алгоритма ответа на вопрос, является ли заданная алгоритмически последовательность с элементами, принадлежащими M (односторонняя $c(0), c(1), \dots$ или двусторонняя $\dots, c(-1), c(0), c(1), \dots$), такой, что каждый ее элемент равен данному $v \in M$; то же самое – для случая последовательности, не имеющей ни одного равного v элемента.

4.2. Проверка обратимости и делимости в $R[\sigma]$

Проблема представления бесконечных последовательностей важна для компьютерной алгебры. Общая формула для элементов последовательности не всегда известна и, возможно, просто не существует. Одним из естественных способов представления является алгоритмический способ, когда последовательность задана алгоритмом вычисления элементов по их индексам. Мы называем эти последовательности *вычислимыми*.

Лемма 2. Проверка для произвольной вычислимой последовательности $c \in R$ и неотрицательного целого r истинности утверждения

$$\mathbf{P}(c, r) = \exists_{(k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)} \quad \forall_{n \in \mathbb{Z}} \quad (c(n)c(n+r)c(n+2r)\dots c(n+kr) = 0)$$

является неразрешимой алгоритмической задачей.

Доказательство. Определим последовательность a : для $n \geq 0$ положим

$$a(n) = \begin{cases} c(0), & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0 \text{ и } c(n) = 0, \\ a(n-1) & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Для $n < 0$ положим $a(n) = 0$. Вычислимость последовательности c влечет вычислимость последовательности a . Последовательность a такова, что отсутствие нулевых элементов среди

$$c(0), c(1), \dots \quad (6)$$

имеет следствием $\forall_{k \in \mathbb{Z}, n \geq kr-1} (a(n)a(n+r)\dots a(n+kr) \neq 0)$. Если $c(m) = 0, m \geq 0$, то $k \geq \left\lceil \frac{m}{r} \right\rceil$. Мы имеем

$$\forall_{k \geq \left\lceil \frac{m}{r} \right\rceil, n \in \mathbb{Z}} (a(n)a(n+r)\dots a(n+kr) = 0),$$

так как произведение $a(n)a(n+kr)$ является нулевой последовательностью.

Таким образом, $\mathbf{P}(a, r)$ истинно, если и только если имеется хотя бы один нулевой элемент в (6).

Если некоторый алгоритм \mathcal{A} позволял бы проверять истинность \mathbf{P} для произвольной последовательности из R и произвольного неотрицательного целого r , то с помощью этого алгоритма мы могли бы проверять наличие нулевого элемента в данной последовательности вида (6), применив \mathcal{A} к последовательности

$$\tilde{c}(n) = \begin{cases} c(n), & \text{если } n \geq 0, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Последовательность (6) имеет нулевой элемент, если и только если истинно $\mathbf{P}(\tilde{c}, r)$ (в качестве r может быть взято любое неотрицательное целое). Но алгоритмическая проверка существования нулевых элементов в произвольной вычислимой последовательности невозможна (п. 1). Поэтому \mathcal{A} не может существовать.

Предложение 3. Пусть r – неотрицательное целое. Не существует алгоритма проверки для произвольного $L \in R[\sigma], \text{ord } L = r$, является ли L обратимым в $R[\sigma]$.

Доказательство. Если $r = 0$, то L – это последовательность из R . Эта последовательность обратима, если и только если в ней нет нулевых элементов. Не существует алгоритма проверки этого свойства.

Пусть $r > 0$. Рассмотрим множество операторов вида

$$1 - c(n)\sigma^r, \tag{7}$$

где последовательность $c \in R$ такова, что $c(0) = 1$, и, следовательно, c – ненулевая последовательность. Порядок каждого из L вида (7) равен r . Если обратный L^{-1} для L существует, то существует и такое $k \geq 1$, что L^{-1} имеет вид

$$1 + c(n)\sigma^r + c(n)c(n+r)\sigma^{2r} + \dots + c(n)c(n+r)c(n+2r)\dots c(n+(k-1)r)\sigma^{(k-1)r} \tag{8}$$

при

$$\forall_{n \in \mathbb{Z}} (c(n)c(n+r)c(n+2r)\dots c(n+kr) = 0). \tag{9}$$

Таким образом, L вида (7) обратим, если и только если выполнено (9). Следовательно, если у нас есть алгоритм проверки обратимости, то мы можем воспользоваться им для проверки истинности (9). Но последнее, согласно лемме 2, является неразрешимой алгоритмической задачей.

Замечание 3. Пусть r – неотрицательное целое. Тогда существует обратимый оператор порядка r в $R[\sigma]$. В самом деле, если $r = 0$, то $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Иначе, пусть $c(n) = \delta_0(n)$. Имеем $(\mathbf{1} - c(n)\sigma^r)(\mathbf{1} + c(n)\sigma^r) = \mathbf{1}$.

Предложение 4. Пусть r, s – неотрицательные целые. Не существует алгоритма проверки для произвольных $L_1, L_2 \in R[\sigma], \text{ord } L_1 = r, \text{ord } L_2 = s$, верно ли, что L_1 делится справа на L_2 в $R[\sigma]$.

Доказательство. Если бы упомянутый алгоритм существовал, то мы могли бы использовать его для проверки обратимости данного оператора $L \in R[\sigma]$ порядка s . В самом деле, возьмем любой оператор M порядка r , например, положим $M = \sigma^r$. Очевидно, что L обратим, если и только если M и $M + 1$ оба делятся на L . Таким образом, если мы можем проверять делимость, то мы можем проверять и обратимость. Но, согласно предложению 3, последняя задача алгоритмически неразрешима.

4.3. О проверке существования ненулевого левого общего кратного

Обсудим задачу проверки существования ненулевого левого общего кратного для данных $L_1, L_2 \in R$.

Отметим, что отсутствие общего алгоритма проверки существования ненулевого левого общего кратного может быть доказано просто рассмотрением случая операторов нулевого порядка, т.е. случая последовательностей.

Предложение 5. *Не существует алгоритма проверки существования ненулевого левого общего кратного для данных последовательностей a, b .*

Доказательство. Во-первых, докажем, что не существует алгоритма проверки истинности утверждения

$$\forall_n (a(n)b(n) = 0) \quad (10)$$

для данных вычислимых последовательностей a, b . В самом деле, если бы мы имели такой алгоритм, то он позволил бы нам алгоритмически проверять, является ли данная последовательность a тождественно нулевой. (Такая проверка невозможна.) Мы можем взять $b = \mathbf{1}$, тогда (10) истинно, если и только если a тождественно нулевая.

Мы можем теперь доказать, что задача проверки существования ненулевого левого общего кратного неразрешима алгоритмически уже в случае операторов нулевого порядка, т.е. когда операторы L_1, L_2 суть некоторые последовательности a и b . Видно, что a и b имеют ненулевое общее кратное, если и только если не выполняется (10). Фактически, доказательство отсутствия ненулевого левого общего кратного при выполнении (10) аналогично доказательству из примера 4. Если для некоторого n произведение $a(n)b(n)$ не равно нулю, то последовательность ab является ненулевым левым общим кратным.

Отсюда следует, что алгоритм проверки существования ненулевого левого общего кратного для произвольных данных операторов L_1, L_2 невозможен. Мы докажем более сильное утверждение.

Предложение 6. *Пусть r, s – неотрицательные целые. Тогда не существует алгоритма для проверки существования ненулевого левого общего кратного для произвольных данных операторов $L_1, L_2 \in R[\sigma]$, $\text{ord } L_1 = r, \text{ord } L_2 = s$.*

Доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть a, b – ненулевые последовательности и r, s – неотрицательные целые, $r \geq s$. Тогда $a\sigma^r, b\sigma^s$ обладают ненулевым общим кратным если и только если (\Leftrightarrow) найдется такое целое m , что*

$$a(m) \neq 0, \quad b(m+r-s) \neq 0. \quad (11)$$

Доказательство леммы 3. \Rightarrow : Пусть $Ua\sigma^r = Wb\sigma^s$, где левая и правая части являются ненулевыми операторами. Пусть $u = \text{ord } U, w = \text{ord } W$. Можно считать, что

$$u+r = w+s \quad (12)$$

(в противном случае некоторые из старших слагаемых операторов U, W могли бы быть удалены из операторов). В этом предположении пусть $c\sigma^u$ и $d\sigma^w$ служат старшими слагаемыми операторов U и W . Ненулевые последовательности $c(n)a(n+u)$ и $d(n)b(n+w)$ одинаковы. Отсюда получаем, что равенство

$$c(n-u)a(n) = d(n-u)b(n+w-u)$$

выполняется для всех n . В соответствии с (12), последнее равенство может быть записано как

$$c(n-u)a(n) = d(n-u)b(n+r-s).$$

Поскольку левая и правая части последнего равенства суть ненулевые последовательности, существует такое целое m , что

$$c(m-u)a(m) = d(m-u)b(m+s-t) \neq 0.$$

Отсюда $a(m) \neq 0, b(m+s-t) \neq 0$.

\Leftarrow : Если m существует, то положим

$$U = \frac{1}{a(m)} \delta_m(n), \quad W = \frac{1}{b(m+r-s)} \delta_m(n) \sigma^{r-s}.$$

Получаем

$$Ua\sigma^r = Wb\sigma^s = \delta_m(n)\sigma^r.$$

Доказательство предложения 6. Прежде всего, докажем следующее. Пусть t — неотрицательное целое. Невозможен алгоритм \mathcal{A}_t проверки для произвольных $a, b \in R$ существования такого $m \in \mathbb{Z}$, что $a(m)b(m+t) \neq 0$. Покажем, что если бы такой алгоритм \mathcal{A}_t существовал, то мы могли бы с его помощью проверять, содержит ли произвольная вычислимая последовательность

$$c = c(0), c(1), \dots \quad (13)$$

хотя бы один ненулевой элемент. Но последняя алгоритмическая проблема неразрешима (см. п. 4.1), что будет означать невозможность \mathcal{A}_t .

Пусть последовательность c такая же, как в (13). Определим двусторонние последовательности a и b :

$$a(n) = \begin{cases} c(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad b(n) = \begin{cases} c(n-t), & n \geq t, \\ 0, & n < t. \end{cases}$$

Тогда

$$b(n+t) = \begin{cases} c(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad a(n)b(n+t) = \begin{cases} c(n)^2, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Как следствие, двусторонняя последовательность $a(n)b(n+t)$ содержит ненулевой элемент, если и только если односторонняя последовательность c^2 содержит ненулевой элемент. В свою очередь, последнее справедливо, если и только если односторонняя последовательность c содержит ненулевой элемент.

Ненулевые последовательности a, b вычислимы. Видно, что $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $a(m)b(m+t) \neq 0$ существует, если и только если $c(m-2) \neq 0$. Таким образом, если бы алгоритм \mathcal{A}_t существовал, то для любой последовательности c можно было бы проверить алгоритмически существование ненулевого элемента в c . Но эта проблема алгоритмически неразрешима, как это следует из утверждения п. 4.1. Отсюда следует, что алгоритм \mathcal{A}_t не может существовать для каждого неотрицательного t . По лемме 3 это влечет справедливость предложения 4.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разностные уравнения являются тем фундаментом, на котором строятся современные численные методы. Представленные в статье результаты говорят о том, что разностные уравнения с коэффициентами в виде последовательностей являются сложными объектами, требующими весьма осторожного обращения с ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Difference Equations // LNM, Heidelberg V. 1666. Berlin: Springer, 1997.
2. *Hendriks P., Singer M.* Solving difference equation in finite terms // J. Symbolic Comput. 1999. V. 27. № 3. P. 239–259.
3. *Franke C.H.* Picard-Vessiot theory of linear homogeneous difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. P. 491–515.
4. *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Linear Differential Equations // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften V. 328. Berlin: Springer, 2003.
5. *Abramov S., Barkatou M., Petkovšek M.* On infinite sequences and difference operators // Материалы 4-й международной конференции “Компьютерная алгебра”. М: ООО МАКС Пресс, 19–22, 2021.
6. *Ore O.* Theory of non-commutative polynomials // Ann. of Math. 1933. V. 34. P. 480–508.
7. *Bronstein M., Petkovšek M.* An introduction to pseudo-linear algebra // Theor. Comput. Sci. 1996. V. 157. P. 3–33.
8. *Abramov S., Barkatou M., Petkovšek M.* Matrices of Scalar Differential Operators: Divisibility and Spaces of Solutions // Comput. Math. and Math. Phys. 2020. V. 60. № 1. P. 109–118.
9. *van Hoeij M.* Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations // J. Pure Appl. Algebra. 1999. V. 139. P. 109–131.
10. *Turing A.* On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem // Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2. 1936. V. 42. P. 230–265.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.923

**GENERATING FUNCTIONS INVOLVING
THE FOX-WRIGHT FUNCTIONS¹⁾**

© 2021 г. Khaled Mehrez^{1,*}

¹*Departement de Mathematiques, Faculte de Sciences de Tunis, Universite Tunis El Manar, Tunis, Tunisia*

**e-mail: k.mehrez@yahoo.fr*

Поступила в редакцию 12.12.2020 г.
Переработанный вариант 12.12.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Производящие функции, включающие функции Фокса–Райта. Представлено несколько производящих функций для классов функций, связанных с функциями Фокса–Райта. Эти функции выражены в терминах H -функций двух переменных. В качестве приложений получены некоторые производящие функции, связанные с обобщенным степенным рядом типа Маттье и расширенной дзета-функцией Гурвица–Лерха. Также получены некоторые новые тождества для двойных рядов. Библ. 27.

Ключевые слова: производящая функция, функция Фокса–Райта, обобщенные функции Маттье, дзета-функция Гурвица–Лерха.

DOI: 10.31857/S0044466921100112

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

СИНГУЛЯРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С НУЛЕВЫМ
ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ: АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

© 2021 г. Н. Б. Конюхова^{1,*}, С. В. Курочкин^{1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: nadja@ccas.ru

**e-mail: kuroch@ccas.ru

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.
Переработанный вариант 16.03.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Для математически корректной постановки и исследования задач, указанных в названии, даются развитие и обоснование нового подхода, отличного от применявшегося ранее специалистами по механике жидкости и газа. Основная “начально-краевая” задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка, определенного на всей вещественной оси, приближенно описывает автомодельные режимы течений вязкой несжимаемой жидкости в слое смешения (частный случай – задача о плоской “полуструе”). Сопутствующая сингулярная нелинейная краевая задача (КрЗ), определенная на неположительной вещественной полуоси, представляет самостоятельный математический интерес, а ее частные решения допускают известную физическую интерпретацию (задачи о “затопленной струе”, о “пристеночной струе” и др.). Для обоснованной математической постановки этих задач, их детального анализа и численного решения применяются результаты по сингулярным нелинейным задачам Коши, гладким устойчивым начальным многообразиям решений и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова, методы асимптотического анализа. Приводятся результаты численных экспериментов и обсуждается их физическая интерпретация. Библ. 25. Фиг. 15. Табл. 3.

Ключевые слова: двумерные уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления, дифференциальное уравнение для функции тока, автомодельные решения, нелинейное автономное ОДУ третьего порядка, сингулярная нелинейная “начально-краевая” задача на всей вещественной прямой, сопутствующая сингулярная нелинейная КрЗ на неположительной полуоси, ограничения на “параметр автомодельности” для существования решений, двусторонние оценки решений, численные методы и результаты расчетов.

DOI: 10.31857/S0044466921100070

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ИЗУЧАЕМЫХ ЗАДАЧ

Для правильной постановки и изучения сингулярных задач, указанных в названии статьи, используется новый подход [1], [2] (отличный от применявшегося в [3], [4]) и дается его дальнейшее развитие. Наряду с новыми результатами, излагаются основные результаты [1], [2] в переработанном, расширенном и более обоснованном виде (опечатки и неточности, допущенные в [1], [2], здесь исправлены). (К сожалению, в [1] опечаток и неточностей немало, включая и некоторые ошибки в формулах.) Коротко представлен также сравнительный анализ методов и результатов [1], [2] и данной работы с приведенными в [3], [4].

Основная рассматриваемая задача возникает в динамике вязкой несжимаемой жидкости и приближенно описывает автомодельные режимы течений в слое смешения. В [3], [4] она сформулирована в виде

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' - [(m-1)/m](\Phi')^2 = 0, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (1.1)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi'(\tau) = 0, \quad (1.2)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\Phi(\tau)/\tau^m) = b, \quad (1.4)$$

где постоянные $m > 0$ (параметр автомодельности) и $0 < b$ – задаваемые величины.

Нелинейное ОДУ (1.1) получено из уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления, а вся задача (1.1)–(1.4), по утверждению автора, приближенно описывает автомодельный режим ламинарного течения в слое смешения, который возникает при взаимодействии двух потоков, верхний из которых движется, а нижний покоится. Однако в таком исходном виде задача (1.1)–(1.4) в [3], [4] не изучается, а физический смысл условий (1.2)–(1.4) не обсуждается. Для ее изучения используются методы понижения порядка ОДУ (1.1), инвариантного относительно двух групп преобразований подобия. В результате в фазовом пространстве новых “нефизических” переменных возникает двумерная нелинейная динамическая система с особенностями на так называемой “сфере Пуанкаре”. (Понятие сферы Пуанкаре, а также принципы анализа заданных на ней нелинейных динамических систем второго порядка, правые части которых – многочлены, см., например, в [5, гл. VI].) Проводится довольно сложный качественный анализ поведения всех траекторий решений на этой сфере и описывается непрямая процедура возвращения к решениям исходной задачи в физических переменных. (Тот же подход первоначально применялся в [6], [7] для изучения частных случаев задачи (1.1)–(1.4) – при некоторых конкретных значениях m , а также в более поздней работе [8]; никакие расчеты для этой задачи в [3], [4], [6]–[8] не осуществлялись, приведены только качественные иллюстрации поведения траекторий решений на сфере Пуанкаре.) Краткое обсуждение методов [3], [4] дано в [1] (некоторые замечания см. в подразд. 5.2 данной работы).

При другом подходе, подробно представленном в данной работе (и кратко в [1], [2]), применяются некоторые результаты классического труда Ляпунова [9], а также публикаций [10]–[12]. Подход связан с изучением задачи (1.1)–(1.4) в исходном виде и использует результаты по сингулярным нелинейным задачам Коши (ЗК), гладким устойчивым начальным многообразиям (УНМ) решений и параметрическим экспоненциальным рядам Ляпунова для автономных систем нелинейных ОДУ. В подразд. 2.1, 2.2 (по-видимому, впервые) дается математическое описание исходной физической модели на основе двумерных уравнений теории пограничного слоя. Модель описывает течение в слое смешения, возникающем в результате взаимодействия двух неограниченных слоев вязкой несжимаемой жидкости, верхний из которых движется (при степенной зависимости горизонтальной составляющей скорости течения от высоты), а нижний покоится. Для автомодельных режимов течений в такой модели возникает (по крайней мере, формально) сингулярная нелинейная задача (1.1)–(1.4). Эта задача, определенная на всей вещественной оси, нуждается в более строгой математической постановке и вытекающей из нее более точной трактовке.

Обратимся к условию (1.2), которое (как, в частности, уточняется в [8]) означает стремление решения при $\tau \rightarrow -\infty$ к стационарной точке ОДУ (1.1) (подробнее ссылку на [8] см. в конце утверждения 1). Учитывая понятие допустимых предельных условий на бесконечности для систем нелинейных автономных ОДУ (см. [10]–[12] и, дополнительно, [13]–[16]) и изучив стационарные точки ОДУ (1.1) в фазовом пространстве переменных (Φ, Φ', Φ'') , заменяем условие (1.2) на более точное предельное условие с неизвестным параметром $a > 0$:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \exp(-\varepsilon\tau) \{\Phi(\tau) + a, \Phi'(\tau), \Phi''(\tau)\} = \{0, 0, 0\} \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < a. \quad (1.5)$$

Это условие отвечает экспоненциальному стремлению решений ОДУ (1.1) при $\tau \rightarrow -\infty$ к неподвижной точке $(-a, 0, 0)$ этого ОДУ типа псевдо-гиперболического седла. Условие (1.5) порождает локально сингулярную нелинейную ЗК (1.1), (1.5), которая при фиксированных значениях $a > 0$ и $m \neq 0$ обладает однопараметрическим семейством решений. Значения этих решений, представимых однопараметрическим экспоненциальным рядом Ляпунова (см. в подразд. 2.3 утверждение 1), порождают в окрестности стационарной точки $(-a, 0, 0)$ фазового пространства \mathbb{R}^3 переменных (Φ, Φ', Φ'') инвариантное относительно τ одномерное нелинейное УНМ (см. в подразд. 2.3 утверждение 2); это УНМ задается двумя нелинейными соотношениями, связывающими переменные Φ, Φ' и Φ'' . Тогда в конечной точке $\tau = -T, T \gg 1$, получаются два нелинейных условия для значений $\Phi(-T), \Phi'(-T)$ и $\Phi''(-T)$. Таким образом, для достаточно больших конечных значе-

ний $|\tau|$, $\tau < 0$, предельное условие (1.5) эквивалентно двум нелинейным соотношениям, определяющим устойчивую сепаратрису седла, так что задача (1.1), (1.5), (1.3) – двухточечная краевая.

В итоге получаем, что на интервале $-\infty < \tau \leq 0$ определена сингулярная нелинейная КрЗ (1.1), (1.5), (1.3) (а на отрезке $[-T, 0]$ – эквивалентная ей регулярная двухточечная КрЗ) с положительными параметрами a и m . Исследование вспомогательной КрЗ (1.1), (1.5), (1.3), определенной на \mathbb{R}_- , проводится в разд. 3: показано, что при фиксированных $a > 0$ и $m \geq 1/3$ решение $\Phi_m(\tau, a)$ этой задачи существует и единственно и получены его двусторонние оценки, причем при заданном $m \geq 1/2$ решение неограниченно продолжается вправо, а при $m : 1/3 \leq m < 1/2$, оно сингулярно – имеет особенность типа полюса на \mathbb{R}_+ (см. подразд. 3.3). При $m : m \in \{1/3, 1/2, \infty\}$, КрЗ (1.1), (1.5), (1.3) имеет аналитические решения, допускающие известную физическую интерпретацию (см. подразд. 3.2).

Для всей исходной задачи (1.1)–(1.4) значение параметра a не является произвольным: $a = a(b)$ находится из требования (1.4), если такое поведение решений КрЗ (1.1), (1.5), (1.3), продолженных вправо, справедливо. В результате, при фиксированном значении параметра $m > 0$, задача (1.1)–(1.4) разбивается на две – сингулярную двухточечную КрЗ с параметром, заданную на неположительной вещественной полуоси, и ЗК на положительной полуоси, определяющую продолжение решения КрЗ на \mathbb{R}_+ . В разд. 4 формулируются окончательные ограничения на параметр автомодельности $m : 1/2 < m < \infty$, гарантирующие существование и единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), которую по указанным выше причинам называем далее “начально-краевой” (НКЗ). В [3], [4] задача (1.1)–(1.4) ошибочно трактуется как трехточечная краевая. Впервые на эту неточную трактовку задачи (1.1)–(1.4) было указано в работе [12], одним из рецензентов которой был В.Н. Диесперов; рецензент согласился с более точной постановкой этой НКЗ и последующими пояснениями и формулами. В.Н. Диесперов был также рецензентом работы [1]. Даются двусторонние оценки решения и исследуются его свойства для различных значений параметра автомодельности. Для значений $m : 0 < m \leq 1/2$, НКЗ (1.1)–(1.4) решений не имеет. (Аналитическая функция $\Phi_{1/2}(\tau, a)$ (аналитическая функция $\Phi_\infty(\tau, a)$) как решение КрЗ (1.1), (1.5), (1.3), продолженное на \mathbb{R}_+ , является для НКЗ (1.1)–(1.4) верхним (нижним) решением на \mathbb{R}_- и нижним (верхним) решением на \mathbb{R}_+ .)

Предложены численные методы и приведены результаты расчетов. Наряду с численным моделированием функции тока (как функции автомодельной переменной), впервые приводятся некоторые результаты расчетов траекторий частиц в плоскости течений.

Дополнительно в разд. 5, для полноты изложения, изучаются семейства сингулярных (“взрывающихся”) решений нелинейного ОДУ (1.1), а также обсуждаются некоторые следствия из подхода [3], [4] к этому ОДУ для нахождения его частных решений.

В [12], [13], [15], [16] даны корректные постановки и более сложных сингулярных задач для автономных систем нелинейных ОДУ, возникающих в моделях гидродинамики (в [15], [16] приведены также примеры расчетов), но без их строгого математического анализа.

При описании необходимых сведений из теории пограничного слоя и механики жидкости и газа, в том числе для обсуждаемых здесь некоторых известных задач, используются монографии [17]–[20].

В заключение этого раздела заметим, что работы [3], [4], [6]–[8], в которых используются непростые идеи А. Пуанкаре, написаны известным специалистом по механике жидкости и газа и содержат целый ряд (по-видимому, новых) формул, результатов и выводов. Однако, на наш взгляд, как исходная физическая модель, так и сопутствующие сингулярные нелинейные задачи для ОДУ заслуживают более детального математического и численного анализа. Альтернативный подход данной работы, тесно связанный с идеями другого гениального ученого А.М. Ляпунова, позволяет дать более полные ответы на многие вопросы, что является довольно редкой возможностью в случае сингулярных нелинейных задач. С другой стороны, проведенные исследования показывают, что задачи гидродинамики уже для автомодельных решений достаточно сложны и требуют тщательного анализа.

Данная работа является итоговой по теме, указанной в ее названии.

2. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ ОБОСНОВАНИЕ КАК НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ

2.1. Математическое описание исходной физической модели на основе двумерных уравнений пограничного слоя

Рассматривается математическая модель течения в слое смешения, возникающего в результате взаимодействия двух неограниченных слоев вязкой несжимаемой жидкости, верхний из которых движется (со степенной зависимостью горизонтальной составляющей скорости течения от высоты), а нижний покоится. Для описания модели используются двумерные уравнения пограничного слоя для установившегося плоскопараллельного ламинарного течения с нулевым градиентом давления:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

(см., например, [17, гл. IX] и [20, гл. I]). Здесь (2.1) – уравнение Прандтля, а (2.2) – уравнение неразрывности (несжимаемости); ось x направлена вдоль потока и совпадает со свободной линией тока, u и v – компоненты скорости течения вдоль и поперек потока соответственно, $0 < \nu$ – кинематический коэффициент вязкости (в безразмерных переменных $\nu = 1$; см. [20, с. 14] и здесь замечание 2).

Учитывая физическую интерпретацию модели, определение свободной линии тока и цель изучения автомодельных режимов течений, получаем, что для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны выполняться следующие условия $\forall x > 0$:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad (2.3)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} [u(x, y)/y^{m-1}] = U_0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь m и U_0 – задаваемые величины, $0 < m$ – числовой параметр, $0 < U_0$ – размерная величина, так что первое условие в (2.5) задает поведение $u(x, y)$ в верхнем слое,

$$u(x, y) \sim U_0 y^{m-1}, \quad x > 0, \quad y \gg 1, \quad (2.6)$$

а второе – отсутствие далеко в верхнем слое вертикальной составляющей скорости течения.

Заметим, что в (2.1)–(2.5) рассматриваются значения $x > 0$ и никакие условия при $x = 0$ не задаются, так как при изучении установившихся автомодельных режимов течений, не зависящих от “предыстории”, задание произвольного профиля скоростей в некотором “начальном” сечении потока становится невозможным (см. об этом подробнее [19, с. 518]).

Для упрощения этой задачи вводится, как обычно, функция тока $\psi(x, y)$, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности (2.2). Тогда, учитывая еще, что ось x совпадает со свободной линией тока, получаем соотношения:

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y), \quad v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y), \quad \psi(x, 0) = 0 \quad \forall x > 0. \quad (2.7)$$

Для $\psi(x, y)$ получаем сингулярную задачу в бесконечной правой полуплоскости:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \forall x > 0, \quad (2.9)$$

$$\psi(x, 0) = 0 \quad \forall x > 0, \quad (2.10)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} / y^{m-1} \right) = U_0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \forall x > 0. \tag{2.11}$$

Отметим, что постановка исходной задачи в виде (2.1)–(2.5) для компонент скорости течения (или, как следствие, в виде (2.8)–(2.11) для функции тока) ранее не приводилась (во всяком случае, в [3], [4] отсутствуют какая-либо постановка исходной задачи или ссылки на нее в литературе). На необходимость постановки исходной задачи было ранее указано В.Н. Самохиным одному из авторов (Н.Б.К.) на докладе по данной проблеме (XX Intern. Conf. “Mathematics. Economics. Education.” 2012, Rostov-na-Donu, Russia).

2.2. Переход к задаче для автомодельных функций

В [3], [4] основная НКЗ (1.1)–(1.4) получена из следующих соображений. Сразу утверждается, что течение в слое смешения в первом приближении хорошо описывается уравнением пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления, т.е. уравнением (2.8). В классе автомодельных функций решения (2.8) представляются в виде

$$\psi(x, y) = \omega^{-1/2} x^{v\omega} \Phi(\tau), \tag{2.12}$$

$$\tau = \omega^{1/2} y/x^{1/(m+1)}, \quad \omega > 0, \quad m > 0, \quad v\omega = m/(m+1). \tag{2.13}$$

Для определения $\Phi(\tau)$ получается нелинейное ОДУ (1.1). Далее, при описании автомодельного режима течения в слое смешения, возникающем при взаимодействии двух потоков, верхний из которых движется, а нижний покоится, ОДУ (1.1) дополняется условиями (1.2)–(1.4), смысл которых в [3], [4] не поясняется (условие (1.4) там записано в виде $\Phi(\tau) = b\tau^m + \dots$, $b > 0$, $m > 0$).

Получим НКЗ (1.1)–(1.4) аккуратнее: будем искать решения задачи (2.8)–(2.11) в классе автомодельных функций (2.12), где автомодельная переменная τ в (2.13) зависит от параметра m , причем справедливы следующие соотношения (штрих означает производную по τ):

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = x^{(m-1)/(m+1)} \Phi'(\tau), \tag{2.14}$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \sqrt{\frac{v}{m(m+1)}} x^{-1/(m+1)} [\tau \Phi'(\tau) - m\Phi(\tau)]. \tag{2.15}$$

Для функции $\Phi(\tau)$ получаем нелинейную сингулярную задачу с параметром $m > 0$: 1) из уравнения (2.8) и формул (2.12), (2.13) следует автономное нелинейное ОДУ (1.1) третьего порядка; 2) из требования (2.9) и соотношения (2.14) вытекает предельное условие (1.2); 3) из (2.10) и (2.13) следует выполнение условия в нуле (1.3) (ось x совпадает со свободной линией тока, а из (2.13) имеем $\tau = 0$ при $y = 0$); 4) наконец, из требований (2.11) и формул (2.14), (2.15) вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\Phi'(\tau)/\tau^{m-1}] = U_0/[m/(v(m+1))]^{(m-1)/2}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\tau \Phi'(\tau) - m\Phi(\tau)] = 0,$$

откуда получаем предельное равенство (1.4) и соотношения:

$$b = (U_0/m)/[m/(v(m+1))]^{(m-1)/2}, \quad U_0 = U_0(m, b, v) = mb\{m/[(m+1)v]\}^{(m-1)/2}. \tag{2.16}$$

Окончательно получаем сингулярную нелинейную НКЗ (1.1)–(1.4) с параметрами $m > 0$ и $b > 0$. Из (2.16) следует, что задание величины b в условии (1.4) эквивалентно заданию U_0 в формуле (2.6), которая описывает y -зависимость горизонтальной составляющей скорости верхнего потока при больших y и влечет качественно различный характер ее поведения при $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$.

Замечание 1. Для случая $m = 1$ задача (1.1)–(1.4) известна давно (см. [17, с. 180–181] и библиографию там) как описывающая ламинарный слой на границе раздела двух потоков, верхний из которых движется с постоянной скоростью, а нижний покоится (задача о плоской “полуструе”). В одной из ранних публикаций, указанной в [17], для этой задачи были получены численные результаты методом “сращивания” асимптотических и сходящихся разложений. В п. 4.3.2 данной работы для сравнения воспроизведен один численный результат, приведенный в [17], а также дополнительно графически описана картина течений в плоскости $\{x, y\}$.

Замечание 2 (О введении безразмерных переменных.) В [3], [4] не обсуждаются какие-либо способы введения безразмерных переменных (например, в уравнение (2.8) для функции тока), и всюду присутствует параметр ν , хотя в безразмерных переменных $\nu = 1$. Рассмотрим один из способов введения в (2.8) таких переменных, что необходимо для дальнейшего анализа задач и численных экспериментов. В соответствии, например, с терминологией и подходом в [19, с. 519, 528, 545], перейдем от размерных переменных x, y и ψ к безразмерным \tilde{x}, \tilde{y} и $\tilde{\psi}$, выбрав в качестве масштабов постоянные величины: L – для x , $\tilde{x} = Lx$; $L/\sqrt{\text{Re}}$ – для y , $\tilde{y} = (L/\sqrt{\text{Re}})y$, где Re – число Рейнольдса, $\text{Re} = UL/\nu$, U – масштаб скорости верхнего потока; $UL/\sqrt{\text{Re}}$ – для ψ , $\tilde{\psi} = (UL/\sqrt{\text{Re}})\psi$. Тогда для $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ получаем то же уравнение (2.8), но с $\nu = 1$. Далее, обратимся к условиям (2.11). Для масштаба скорости U учитываем соотношение $U = U_0(L/\sqrt{\text{Re}})^{m-1}$, которое следует из (2.6) и масштаба для y . Тогда для $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ получаем то же условие (2.11), но с $U_0 = 1$. В результате для безразмерной функции тока $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ получаем ту же задачу (2.8)–(2.11), но с $\nu = 1$ и $U_0 = 1$ (разумеется, постоянные величины L, U, Re в полученные уравнение и условия не входят). В дальнейшем, сохраняя ν в формулах, в расчетах полагаем $\nu = 1$.

Замечание 3 (К расчету течений в плоскости $\{x, y\}$). Как следует из (2.13), автомодельная переменная $\tau = \tau(x, y, \nu, m)$ имеет вид

$$\tau(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\nu(m+1)}} y/x^{1/(m+1)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Пусть для заданных $m > 0$ и $b > 0$ функция $\Phi_m(\tau, b)$ является решением сингулярной НКЗ (1.1)–(1.4). Тогда, учитывая формулы (2.14), (2.15), для изучения установившегося движения частиц жидкости в плоскости $\{x, y\}$ можно использовать следующую нелинейную ЗК с параметрами $\{x_0, y_0\}$ (в силу наличия особенности при $x \rightarrow +0$ и зависимости правых частей ОДУ от $\Phi_m(\tau, b)$ и $\Phi'_m(\tau, b)$, численное решение такой ЗК представляет определенные трудности):

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y) = x^{(m-1)/(m+1)} \Phi'_m(\tau, b), \quad (2.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y) = \sqrt{\frac{\nu}{m(m+1)}} x^{-1/(m+1)} [\tau \Phi'_m(\tau, b) - m \Phi_m(\tau, b)], \quad (2.18)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad (x_0 > 0, y_0 \in \mathbb{R}). \quad (2.19)$$

Нелинейная ЗК (2.17)–(2.19) эквивалентна ЗК вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)} = \sqrt{\frac{\nu}{m(m+1)}} x^{-m/(m+1)} [\tau - m \Phi_m(\tau, b) / \Phi'_m(\tau, b)], \quad (2.20)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (x_0 > 0, y_0 \in \mathbb{R}), \quad (2.21)$$

где необходимо рассмотреть различные значения x_0 и y_0 .

Другой подход состоит в определении линий уровня функции тока

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{\nu(m+1)}{m}} x^{m/(m+1)} \Phi_m(\tau, b), \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

что в известном смысле эквивалентно решению нелинейной ЗК (2.20), (2.21). Действительно: $\psi(x, y) = \text{const}$ влечет $(\partial\psi/\partial x)dx + (\partial\psi/\partial y)dy = 0$, затем учитываем соотношения (2.7), (2.14), (2.15), и т.д. (как оказалось, этот подход наиболее удобен в реализации).

Еще раз подчеркнем, что в данной работе рассматривается только задача (1.1)–(1.4) для автомодельных решений и обсуждаются некоторые следствия из нее. На наш взгляд, оправданием предположений (2.5), (2.6) для профиля скорости потока в верхнем слое в указанной выше физической модели является то обстоятельство, что для фиксированных значений $m : 1/2 < m < \infty$, и $b > 0$ задача (1.1)–(1.4) однозначно разрешима, как это следует из ее дальнейшего анализа (тот же вывод при другом подходе получен в [3, с. 23] и [4, с. 412]). Подробнее о физическом смысле рассматриваемой задачи для различных значений параметра m см. в [3], [4], [6]–[8] и цитированных там работах.

2.3. Корректная постановка предельного условия при $\tau \rightarrow -\infty$ и его обоснование

Если система ОДУ обладает особой точкой на конце интервала интегрирования (конечной или бесконечно удаленной), то для постановки допустимых граничных условий в этой точке следует изучить предельное поведение всех компонент решения ОДУ, поставив локальную сингулярную ЗК в окрестности этой точки. Если существует семейство решений такой задачи, то размерность этого семейства и соотношения, порожденные значениями его решений в фазовом пространстве переменных ОДУ, важны для правильной постановки допустимых граничных условий в особой точке и их переноса в близкую регулярную точку.

Для автономных систем нелинейных ОДУ с (псевдо)гиперболическими точками равновесия в фазовом пространстве переменных перечисленные выше проблемы подробно исследованы в [10]–[12]. Полученные результаты используются в данной работе для уточнения предварительной формулировки сингулярной НКЗ (1.1)–(1.4).

В фазовом пространстве \mathbb{R}^3 переменных $(z_1, z_2, z_3) = (\Phi, \Phi', \Phi'')$ ОДУ (1.1) имеет бесконечное множество стационарных точек (положений равновесия):

$$(z_1, z_2, z_3)_s(a) = (\Phi, \Phi', \Phi'')_s(a) = (-a, 0, 0), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

В переменных $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, где $z_1(\tau) = \Phi(\tau)$, $z_2(\tau) = \Phi'(\tau)$, $z_3(\tau) = \Phi''(\tau)$, получаем систему нелинейных ОДУ:

$$z' = Q(z), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad Q(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_2^2(m-1)/m - z_1 z_3 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Матрица Якоби для $Q(z)$, взятая в стационарной точке (2.22), имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(z_s(a)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

где $z_s(a) = (z_1, z_2, z_3)_s^T(a)$, $Q(z_s(a)) = 0$. Тогда $\forall a > 0$ стационарная точка (2.22) для системы (2.23), рассматриваемой на \mathbb{R}_- , является псевдо-гиперболическим седлом с одномерной устойчивой сепаратрисой (или, по другой терминологии, седло-узлом $(-\varepsilon, 1)$ -типа, где ε – произвольное число в интервале $(0, a)$). Это означает, что условие (1.2) следует заменить более точным предельным соотношением (1.5) с параметром $a > 0$. Тонкость в появлении дополнительного параметра ε связана с тем, что матрица Якоби (2.24) имеет жорданову клетку второго порядка, соответствующую нулевому собственному значению (СЗ). При постановке условий в виде (1.5), уточняющих условие (1.2), известен ответ на вопрос о существовании в окрестности точки (2.22) аналитического УНМ для решений ОДУ (1.1) и его размерность (см. ниже утверждения 1 и 2; обоснование подобных условий дано в [10]–[12], см. также [21, гл. XIII, § 4]).

Задача (1.1), (1.5) рассматривается как сингулярная нелинейная ЗК. Из [9, разд. 23] следует

Утверждение 1 (Экспоненциальный ряд Ляпунова для однопараметрического семейства решений). *При любых заданных $a > 0$ и $m \neq 0$ сингулярная нелинейная ЗК (1.1), (1.5) имеет однопараметрическое семейство решений $\Phi_m(\tau, a, d)$. Эти решения представимы экспоненциальным рядом Ляпунова*

$$\Phi_m(\tau, a, d) = -a + d \exp(a\tau) + \sum_{l=2}^{\infty} h_l d^l \exp(la\tau), \quad \tau \leq \tilde{\tau}, \quad \tilde{\tau} \in \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

где d – параметр, $|d \exp(a\tilde{\tau})|$ мало, а коэффициенты h_l не зависят от d ($l \geq 1, h_1 \doteq 1$):

$$h_l = \left[\sum_{k=1}^{l-1} k \left(\frac{(m-1)(l-k)}{m} - k \right) h_k h_{l-k} \right] / [la^2(l-1)], \quad l = 2, 3, \dots; \tag{2.26}$$

в частности, из (2.26) следует, что $h_2 = -1/(4am)$, $h_3 = (m+4)/(72a^2m^2)$, ...

В предельном случае $t \rightarrow \infty$ сингулярная нелинейная ЗК (1.1), (1.5) имеет двухпараметрическое семейство точных решений $\Phi_\infty(\tau, a, d)$, существующих на всей вещественной оси:

$$\Phi_\infty(\tau, a, d) = -a + d \exp(a\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

где a и d – параметры, $a > 0$, $d \in \mathbb{R}$.

В [8] утверждается, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.4) при $m > 1/2$ условие (1.2) надо уточнить, а именно (в наших обозначениях): $\Phi(\tau) \rightarrow -a + O(\exp(a\tau))$ при $\tau \rightarrow -\infty$, где $a > 0$ (см. текст после формулы (2.2) на стр. 1016), что в главном согласуется с формулой (2.25) и не противоречит условию (1.5).

Принимая во внимание результаты [10]–[12], получаем следующее

Утверждение 2 (Об аналитическом одномерном УНМ). При любых заданных $m \neq 0$ и $a > 0$ в окрестности стационарной точки (2.22) в фазовом пространстве \mathbb{R}^3 переменных (Φ, Φ', Φ'') значения решений сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.5) образуют инвариантное относительно τ одномерное аналитическое УНМ $\mathbf{M}_-^{(1)}(a, m)$, которое задается двумя нелинейными соотношениями

$$\mathbf{M}_-^{(1)}(a, m): \quad \Phi + a = \rho_1(\Phi'', a, m), \quad \Phi' = \rho_2(\Phi'', a, m). \quad (2.28)$$

Здесь $\{\rho_1(y), \rho_2(y)\}$ – решение сингулярной нелинейной задачи типа Ляпунова:

$$\frac{d\rho_1}{dy} \left[ay + \frac{m-1}{m} \rho_2^2 - \rho_1 y \right] = \rho_2, \quad \frac{d\rho_2}{dy} \left[ay + \frac{m-1}{m} \rho_2^2 - \rho_1 y \right] = y, \quad |y| < \Delta, \quad \Delta > 0, \quad (2.29)$$

$$\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0. \quad (2.30)$$

Решение $\{\rho_1(y, a, m), \rho_2(y, a, m)\}$ этой задачи (с вырождением в нуле по начальным данным) существует, единственно и голоморфно в точке $y = 0$:

$$\rho_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k, \quad \rho_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^k, \quad |y| < \Delta_0, \quad \Delta_0 > 0, \quad (2.31)$$

$$b_1 = 1/a^2, \quad c_1 = 1/a, \quad (2.32)$$

$$c_k = \left[\sum_{l=1}^{k-1} \left(l c_l b_{k-l} - \frac{m-1}{m} \sum_{s=1}^{k-l} l c_l c_s c_{k-l-s+1} \right) \right] / (ak), \quad (2.33)$$

$$b_k = \left[c_k + \sum_{l=1}^{k-1} \left(l b_l b_{k-l} - \frac{m-1}{m} \sum_{s=1}^{k-l} l b_l c_s c_{k-l-s+1} \right) \right] / (ak), \quad k = 2, 3, \dots; \quad (2.34)$$

в частности, из (2.32)–(2.34) следует, что

$$c_2 = 1/(2ma^4), \quad b_2 = 3/(4ma^5), \quad \dots \quad (2.35)$$

В предельном случае $t \rightarrow \infty$ задача (2.29), (2.30) имеет точное решение

$$\rho_1(y, a, \infty) = y/a^2, \quad \rho_2(y, a, \infty) = y/a, \quad (2.36)$$

так что, в силу (2.28), одномерное УНМ $\mathbf{M}_-^{(1)}(a, \infty)$ становится линейным, существует глобально на \mathbb{R}^3 и порождается значениями решений (2.27).

Следствие 1. При любых заданных $m \neq 0$ и $a > 0$ существует $T_0 \gg 1$, такое что $\forall T \geq T_0$ для решений (1.1) предельное условие (1.5) эквивалентно двум нелинейным соотношениям:

$$\Phi(-T) + a = \rho_1(\Phi''(-T), a, m), \quad \Phi'(-T) = \rho_2(\Phi''(-T), a, m). \quad (2.37)$$

Здесь $\rho_1(y, a, m)$ и $\rho_2(y, a, m)$ те же, что в (2.28), а $|\Phi''(-T_0)|$ достаточно мало. В предельном случае $t \rightarrow \infty$, с учетом (2.36), получаем явные выражения

$$\rho_1 = \Phi''(-T)/a^2, \quad \rho_2 = \Phi''(-T)/a, \quad (2.38)$$

и соотношения (2.37) становятся линейными.

Замечание 4. Касательная к кривой (2.37) в стационарной точке (2.22) определяется соотношениями

$$\Phi(-T) + a - \Phi''(-T)/a^2 = 0, \quad \Phi'(-T) - \Phi''(-T)/a = 0. \quad (2.39)$$

Эти соотношения дают линейное приближение к нелинейному УНМ (2.37). При $m \rightarrow \infty$ соотношения (2.37), с учетом (2.38) совпадают с (2.39) (линейное УНМ для нелинейного ОДУ!).

Следствие 2. При любых фиксированных $m > 0$ и $a > 0$ сингулярная нелинейная КрЗ (1.1), (1.5), (1.3), заданная на \mathbb{R}_- , эквивалентна регулярной нелинейной двухточечной КрЗ (1.1), (2.37), (1.3), определенной на конечном интервале $[-T, 0]$, $T \gg 1$ (вообще говоря, с подвижным левым концом).

Следствие 3. При любых фиксированных $m > 0$, $a > 0$ и $b > 0$ сингулярная нелинейная НКЗ (1.1), (1.5), (1.3), (1.4), заданная на всей вещественной оси, эквивалентна нелинейной НКЗ (1.1), (2.37), (1.3), (1.4), определенной на интервале $[-T, \infty)$, $T \gg 1$ (вообще говоря, с подвижным левым концом). Если существует решение КрЗ (1.1), (1.5), (1.3) (эквивалентной КрЗ (1.1), (2.37), (1.3)), то значение параметра $a > 0$ в (1.5) (в (2.37)) не является произвольным: $a = a(b) > 0$ выбирается так, чтобы удовлетворить предельному условию (1.4), если такое поведение решения КрЗ справедливо при его продолжении вправо (как решения ЗК с полученными данными при $\tau = 0$).

2.4. Предварительные выводы и замечания, в том числе связанные с последующими вычислениями

2.4.1. Перенос предельных граничных условий из бесконечности в конечную точку и методы стрельбы для решения нелинейной двухточечной КрЗ. Для приближенного переноса предельных соотношений (1.5) в конечную точку $\tau = -T$, $T \gg 1$, удерживаем в (2.37) главные члены по $\Phi''(-T)$, используя разложения (2.31)–(2.34), где $y = \Phi''(-T)$. В линейном приближении получаем соотношения (2.39). Если учесть в (2.31) члены до второго порядка по y включительно, то, в силу формул (2.32), (2.35), (2.37), получаем приближенные краевые условия в точке $\tau = -T$ в виде

$$\Phi(-T) + a - \Phi''(-T)/a^2 = [3 / (4a^5 m)] [\Phi''(-T)]^2, \quad (2.40)$$

$$\Phi'(-T) - \Phi''(-T)/a = [1 / (2a^4 m)] [\Phi''(-T)]^2. \quad (2.41)$$

Таким образом, вместо сингулярной нелинейной КрЗ (1.1), (1.5), (1.3), заданной на \mathbb{R}_- и зависящей от параметра $a > 0$, получаем приближенную двухточечную КрЗ на $[-T, 0]$ вида (1.1), (2.40), (2.41), (1.3) (или вида (1.1), (2.39), (1.3)). Если при заданных $a > 0$ и $m > 0$ КрЗ (1.1), (1.5), (1.3) однозначно разрешима, то для ее численного решения применяем методы устойчивой “стрельбы”:

1) для фиксированного $T \gg 1$, “стартуя” с приближенного одномерного УНМ, определенного формулами (2.40), (2.41) (или (2.39)), решаем слева направо вспомогательную ЗК для ОДУ (1.1) с $\Phi''(-T)$ в качестве параметра стрельбы ($|\Phi''(-T)| \ll 1$) и находим значение этого параметра, при котором условие (1.3) удовлетворяется в точке $\tau = 0$;

2) как альтернативный эквивалентный метод, используем ряд Ляпунова (2.25), (2.26), взятый в точке $\tau = -T$, и определяем приближенные значения $\Phi_m(-T, a, d)$, $\Phi'_m(-T, a, d)$, $\Phi''_m(-T, a, d)$ как начальные данные к ЗК для ОДУ (1.1); решая слева направо указанную вспомогательную ЗК с $d > 0$ в качестве параметра стрельбы, находим значение этого параметра, при котором удовлетворяется условие (1.3) (такой подход наиболее удобен для использования метода стрельбы).

2.4.2. Применение масштабных преобразований при решении сингулярной нелинейной НКЗ. Пусть сингулярная нелинейная НКЗ (1.1), (1.5), (1.3), (1.4) однозначно разрешима при заданных $m > 0$ и $b > 0$, и пусть $\Phi_m(\tau, a)$ – ее решение, где $a = a(b)$. Чтобы найти это решение, достаточно решить указанную НКЗ при $a = 1$. Действительно: 1) решаем сопутствующую сингулярную нелинейную КрЗ (1.1), (1.5), (1.3) при $a = 1$ (например, методом 2) из п. 2.4.1) и находим $d = d_m(1) > 0$ и соответствующее решение $\Phi_m(\tau, 1)$ (здесь и далее $d = d_m(a)$ – параметр ряда Ляпунова (2.25), (2.26)); 2) продолжая решение $\Phi_m(\tau, 1)$ для $\tau > 0$ как решение ЗК с найденными начальными данными в точке $\tau = 0$, получаем значение $b = b_m(1) > 0$; 3) значение $a = a(b) > 0$ для заданного $b > 0$ в (1.4) находим с помощью масштабных преобразований:

$$b_m(a) = b_m(1)a^{m+1} > 0, \quad a = a(b) = [b/b_m(1)]^{1/(m+1)} > 0; \quad (2.42)$$

Таблица 1. (к фиг. 1б)

x	$y_0(x)$	$y_{\max}(x)$	$v_{1/2,\max}(x)$	$v_{1/2,\lim}(x)$	$\tilde{v}_{1/2,\lim}(x)$
0.75	3.11308	1.49215	0.227294	-0.69941	-0.69941
1.75	5.47656	2.62501	0.129202	-0.39757	-0.39757
2.75	7.40238	3.54809	0.095589	-0.29414	-0.29414
3.75	9.10270	4.36308	0.077733	-0.23919	-0.23919
4.75	10.6564	5.10781	0.066400	-0.20432	-0.20431

Таблица 2. ($\tau_{-\infty} = -T = -7$)

m	$d_m(1)$	m	$d_m(1)$	m	$d_m(1)$	m	$d_m(1)$
1/3	8.579306	0.45	2.2846	0.59	1.7191	1.70	1.1641
0.33334	8.4470	0.46	2.2148	0.60	1.6975	1.90	1.1441
0.3334	8.1710	0.47	2.1525	0.70	1.5370	2.00	1.1358
0.334	7.3800	0.48	2.0965	0.80	1.4370	2.50	1.1056
0.335	6.7938	0.49	2.0460	0.90	1.3686	3.00	1.0864
0.34	5.5131	0.50	2.0000	0.99	1.3232	3.50	1.0731
0.35	4.4467	0.5001	1.9996	0.999	1.3192	4.00	1.0633
0.36	3.8739	0.501	1.9956	1.00	1.3188	4.50	1.0558
0.37	3.4922	0.51	1.9580	1.01	1.3146	5.00	1.0500
0.38	3.2125	0.52	1.9196	1.02	1.3104	10.0	1.0243
0.39	2.9959	0.53	1.8841	1.04	1.3025	15.0	1.0161
0.40	2.8218	0.54	1.8514	1.06	1.2949	20.0	1.0120
0.41	2.6781	0.55	1.8211	1.08	1.2877	25.0	1.0096
0.42	2.5571	0.56	1.7929	1.10	1.2809	50.0	1.0048
0.43	2.4534	0.57	1.7666	1.20	1.2511	100.0	1.0024
0.44	2.3635	0.58	1.7421	1.50	1.1904	∞	1.0000

4) искомое решение $\Phi_m(\tau, a)$ и значение параметра $d = d_m(a) > 0$, где $a = a(b)$ определено в (2.42), окончательно получаем с помощью преобразований:

$$\Phi_m(\tau, a) = a\Phi_m(a\tau, 1), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad d_m(a) = ad_m(1) > 0. \tag{2.43}$$

Значения $b_m(1)$ и $d_m(1)$, вообще говоря, не могут быть определены методами локального анализа и находятся численно (см. далее табл. 2, 3). (В справедливости соотношений (2.42), (2.43) нетрудно убедиться непосредственно.)

2.4.3. Сходимость сопутствующих несобственных интегралов. Постановка условий при $\tau \rightarrow -\infty$ в виде (1.5) гарантирует сходимость несобственных интегралов

$$I_k(\tau, a) = \int_{-\infty}^{\tau} \Phi^{(k)}(s, a) ds, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

(и некоторых других) для решений $\Phi(\tau, a)$ сингулярной нелинейной КрЗ (1.1), (1.5), (1.3). Здесь $\Phi^{(k)}(\tau, a)$ есть k -я производная решения $\Phi(\tau, a)$ при $k \geq 1$, $\Phi^{(0)}(\tau, a) \equiv \Phi(\tau, a)$. Это позволяет преобразовать ОДУ (1.1) интегрированием на интервале $(-\infty, \tau)$ для проведения полного исследования КрЗ (1.1), (1.5), (1.3) (см. разд. 3).

Таблица 3. ($\tau_{-\infty} = -T = -7$)

m	$b_m(1)$	m	$b_m(1)$	m	$b_m(1)$	m	$b_m(1)$	m	$b_m(1)$
0.5001	0.06213	0.59	0.67571	0.99	1.3007	1.09	1.2997	1.70	0.83240
0.501	0.09267	0.60	0.71184	0.999	1.3023	1.10	1.2975	1.80	0.73884
0.505	0.17106	0.70	0.98975	1.00	1.3025	1.12	1.2975	1.90	0.64985
0.51	0.23382	0.80	1.1634	1.01	1.3038	1.14	1.2854	2.00	0.56684
0.52	0.32389	0.85	1.2210	1.02	1.3047	1.16	1.2775	2.50	0.25817
0.53	0.39361	0.90	1.2621	1.03	1.3052	1.18	1.2684	3.00	0.10274
0.54	0.45276	0.92	1.2744	1.04	1.3053	1.20	1.2584	3.50	0.03688
0.55	0.50516	0.94	1.2845	1.05	1.3049	1.35	1.1559	4.00	0.01218
0.56	0.55272	0.95	1.2887	1.06	1.3042	1.4	1.1141	5.00	0.00109
0.57	0.59657	0.96	1.2925	1.07	1.3031	1.50	1.0236	6.00	0.00008
0.58	0.63740	0.98	1.2984	1.08	1.3016	1.60	0.9283	∞	0.00000

Для полноты изложения заметим, что с использованием показателей Ляпунова [9] условия (1.5) приобретают вид

$$\limsup_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\ln|\Phi(\tau) + a|}{\tau} = \limsup_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\ln|\Phi'(\tau)|}{\tau} = \limsup_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\ln|\Phi''(\tau)|}{\tau} > \varepsilon \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < a.$$

2.4.4. Семейства частных регулярных и сингулярных решений исходного нелинейного ОДУ третьего порядка. Для некоторых фиксированных значений m существуют частные решения нелинейного ОДУ (1.1), которые получаются методами понижения порядка этого ОДУ; они не являются решениями сингулярной нелинейной НКЗ (1.1)–(1.4), и значительная часть из них известна. Именно, наряду с очевидными решениями $\Phi(\tau) \equiv \text{const} \quad \forall m \in \mathbb{R}$, нелинейное ОДУ (1.1) имеет следующие семейства решений:

1) для каждого $m : (m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$, существует однопараметрическое семейство сингулярных решений

$$\Phi_{\text{sing},m}^{(1)}(\tau - \tau_p) = \frac{6m}{(m+1)(\tau - \tau_p)}, \quad \tau_p \in \mathbb{R}, \tag{2.44}$$

с особенностью типа полюса в конечной точке $\tau = \tau_p$; при этом для $m = 1/2$ существует двухпараметрическое семейство сингулярных решений

$$\Phi_{\text{sing},1/2}^{(2)}(\tau - \tau_p, a) = a \coth(a(\tau - \tau_p)/2), \quad a, \tau_p \in \mathbb{R}, \tag{2.45}$$

которые переходят в решения (2.44) при $a = 0$: $\Phi_{\text{sing},1/2}^{(2)}(\tau - \tau_p, 0) \equiv \Phi_{\text{sing},1/2}^{(1)}(\tau - \tau_p)$;

2) для $m \in \{1/2; 1; 2; \infty\}$ существуют двухпараметрические семейства решений $\Phi_m(\tau - \tau_s, a)$ ($a, \tau_s \in \mathbb{R}$), определенных глобально – на всей вещественной оси:

$$\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a) = a \tanh(a(\tau - \tau_s)/2), \tag{2.46}$$

$$\Phi_1(\tau - \tau_s, a) = a(\tau - \tau_s), \quad \Phi_2(\tau - \tau_s, a) = a(\tau - \tau_s)^2, \tag{2.47}$$

$$\Phi_{\infty}(\tau - \tau_s, a) = a[\exp(a(\tau - \tau_s)) - 1]; \tag{2.48}$$

3) для $m = 1/3$ существует, в частности, двухпараметрическое семейство решений, задаваемых в неявном виде ($b \neq 0, \tau_s \in \mathbb{R}$):

$$\tau - \tau_s = -\frac{1}{2b^2} \ln \left(\frac{b^2 + b\sqrt{|\Phi_{1/3}|} + |\Phi_{1/3}|}{(b - \sqrt{|\Phi_{1/3}|})^2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{b^2} \arctan \left(\frac{2\sqrt{|\Phi_{1/3}|} + b}{b\sqrt{3}} \right). \tag{2.49}$$

В (2.44)–(2.49) произвольные величины τ_p и τ_s – параметры сдвига, a и b – отличные от нуля произвольные числа. При этом при любых заданных $a > 0$ и $b = \sqrt{a}$ функции $\Phi_{\text{sing},1/2}^{(2)}(\tau - \tau_p, a)$, $\Phi_{1/2}(\tau - \tau_s, a)$, $\Phi_\infty(\tau - \tau_s, a)$ и $\Phi_{1/3}(\tau - \tau_s, a)$ являются решениями сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.5); они представимы рядами Ляпунова (2.25), (2.26) с соответствующими значениями параметра d :

$$d_{\text{sing},1/2}(a, \tau_p) = -2a \exp(-a\tau_p); \tag{2.50}$$

$$d_{1/2}(a, \tau_s) = 2a \exp(-a\tau_s); \quad d_\infty(a, \tau_s) = a \exp(-a\tau_s); \tag{2.51}$$

$$d_{1/3}(a, \tau_s) = 2a\sqrt{3} \exp(\pi\sqrt{3}/3 - a\tau_s). \tag{2.52}$$

При $m = 1/3$, если для решения ЗК (1.1), (1.5) положить $\tau_s = \tilde{\tau}_s + \pi\sqrt{3}/(6a)$, то получим $\Phi_{1/3}(\tilde{\tau}_s, a) = \Phi'_{1/3}(\tilde{\tau}_s, a) = 0$, $\Phi''_{1/3}(\tilde{\tau}_s, a) = -2a^3/9$, и $\Phi_{1/3}(\tau - \tau_s, a)$ не существует глобально – имеет полюс в точке $\tau = \tau_p$, где $\tau_p = \tilde{\tau}_s + 2\pi\sqrt{3}/(3a) = \tau_s + \pi\sqrt{3}/(2a)$ (сложный случай $m = 1/3$ см. подробнее в [1] и здесь в п. 3.2.3 и подразд. 5.2).

2.4.5. Необходимое условие глобального существования решений из однопараметрического семейства Ляпунова. Как показано в подразд. 5.1, при любых заданных $\tau_p \in \mathbb{R}$ и $m > 0$ для ОДУ (1.1) существует двухпараметрическое семейство сингулярных решений, которые стремятся к частному сингулярному решению (2.44), когда оба параметра стремятся к нулю. Существование таких семейств тесно связано с проблемой глобального существования решений ОДУ (1.1) на всей вещественной оси (далее опускаем индекс (1) вверху в обозначениях решений (2.44) и их производных). А именно, из (2.44) при $m > 0$ следует, что

$$\Phi_{\text{sing}}(\tau, \tau_p) < 0, \quad \Phi'_{\text{sing}}(\tau, \tau_p) < 0, \quad \Phi''_{\text{sing}}(\tau, \tau_p) < 0, \quad \tau < \tau_p, \tag{2.53}$$

$$\Phi_{\text{sing}}(\tau, \tau_p) > 0, \quad \Phi'_{\text{sing}}(\tau, \tau_p) < 0, \quad \Phi''_{\text{sing}}(\tau, \tau_p) > 0, \quad \tau > \tau_p. \tag{2.54}$$

Тогда любое решение ОДУ (1.1), для которого такие неравенства выполнены в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}$, “уходит на полюс”, т.е. не существует глобально (“взрывается” в точке $\tau = \tau_p$). В частности, это справедливо для любого решения сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.5), представимого рядом Ляпунова (2.25), (2.26) с $m > 0$ и $d < 0$ (см. пример (2.45), где $d < 0$ определяется формулой (2.50)).

Следствие 4. Пусть для заданных $m > 0$ и $a > 0$ функция $\Phi_m(\tau, a, d)$ является решением сингулярной нелинейной ЗК (1.1), (1.5), где d – параметр в разложении (2.25), (2.26). Тогда условие $d > 0$ является необходимым для глобального существования этого решения, т.е. на всей вещественной оси (при $\tau \ll -1$ для такого решения справедливо $\Phi_m(\tau) < 0$, $\Phi'_m(\tau) > 0$, $\Phi''_m(\tau) > 0$; ср. с неравенствами (2.53) для сингулярных решений).

3. СОПУТСТВУЮЩАЯ СИНГУЛЯРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ КрЗ НА НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ И ЕЕ ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

3.1. Постановка сингулярной нелинейной КрЗ с двумя параметрами и интегродифференциальные соотношения для ее решений

Рассмотрим сингулярную нелинейную КрЗ с параметрами $a > 0$ и $m > 0$:

$$(\Phi'' + \Phi\Phi')' = [(2m - 1)/m](\Phi')^2, \quad -\infty < \tau \leq 0, \tag{3.1}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \{\exp(-\varepsilon\tau)[\Phi(\tau) + a]\} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} [\exp(-\varepsilon\tau)\Phi'(\tau)] = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} [\exp(-\varepsilon\tau)\Phi''(\tau)] = 0 \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < a, \tag{3.2}$$

$$\Phi(0) = 0. \tag{3.3}$$

Здесь для дальнейшего удобства ОДУ (1.1) записано в эквивалентной форме (3.1).

Прежде всего изучим поведение решений сингулярной нелинейной ЗК (3.1), (3.2). На основании утверждения 1 при фиксированных $a > 0$ и $m > 0$ эта задача обладает однопараметрическим семейством решений $\Phi_m(\tau, a, d)$, причем они представимы экспоненциальным рядом Ляпу-

нова (2.25), (2.26) с параметром $d > 0$, где $|d \exp(a\tau)|$ достаточно мало. Для таких решений проинтегрируем дважды обе части ОДУ (3.1) от $-\infty$ до τ и учтем равенство

$$\int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^s [\Phi'(t)]^2 dt ds = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - s) [\Phi'(s)]^2 ds, \tag{3.4}$$

которое получается интегрированием по частям интеграла в левой части (3.4). Тогда для решений $\Phi_m(\tau, a, d)$ сингулярной нелинейной ЗК (3.1), (3.2) получаем соотношения:

$$\Phi_m''(\tau, a, d) + \Phi_m(\tau, a, d)\Phi_m'(\tau, a, d) = [(2m - 1)/m] \int_{-\infty}^{\tau} [\Phi_m'(t, a, d)]^2 dt, \tag{3.5}$$

$$\Phi_m'(\tau, a, d) = [a^2 - \Phi_m^2(\tau, a, d)]/2 + [(2m - 1)/m] \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - s) [\Phi_m'(s, a, d)]^2 ds. \tag{3.6}$$

При $m > 1/2$ и $d > 0$ из этих соотношений и следствия 4 получаем неравенство $\Phi_m'(\tau, a, d) > 0 \forall \tau \in \mathbb{R}$. Действительно, иначе существовало бы такое $\tau = \tilde{\tau}$, что $\Phi_m'(\tilde{\tau}) = 0$ и $\Phi_m''(\tilde{\tau}) \leq 0$, но из (3.5) следует, что $\Phi_m''(\tilde{\tau}) > 0$.

Следствие 5. Пусть при заданных $m > 1/2$, $a > 0$ и $d > 0$ функция $\Phi_m(\tau, a, d)$ есть решение сингулярной нелинейной ЗК (3.1), (3.2), где d – параметр в разложении (2.25), (2.26). Тогда это решение существует глобально на \mathbb{R} и строго возрастает по τ ; оно является выпуклой функцией, во всяком случае, пока оно остается отрицательным.

Пусть теперь $\Phi_m(\tau, a)$ – решение сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3). Тогда оно представимо экспоненциальным рядом Ляпунова (2.25), (2.26) с некоторым $d = d(a, m) > 0$, а из соотношений (3.5), (3.6) и условия (3.3) следуют равенства:

$$\Phi_m''(0, a) = [(2m - 1)/m] \int_{-\infty}^0 [\Phi_m'(t, a)]^2 dt, \tag{3.7}$$

$$\Phi_m'(0, a) = a^2/2 - [(2m - 1)/m] \int_{-\infty}^0 s [\Phi_m'(s, a)]^2 ds. \tag{3.8}$$

Из (3.7), (3.8) получаем

Следствие 6. Если $0 < m < 1/2$, то $\Phi_m''(0) < 0$, $\Phi_m'(0) < a^2/2$; если $m = 1/2$, то $\Phi_{1/2}''(0) = 0$, $\Phi_{1/2}'(0) = a^2/2 > 0$; если $m > 1/2$, то $\Phi_m''(0) > 0$, $\Phi_m'(0) > a^2/2 > 0$, причем $\Phi_{m_2}'(0) > \Phi_{m_1}'(0) > a^2/2 > 0$ и $\Phi_{m_2}''(0) > \Phi_{m_1}''(0) > 0$, $m_2 > m_1 > 1/2$.

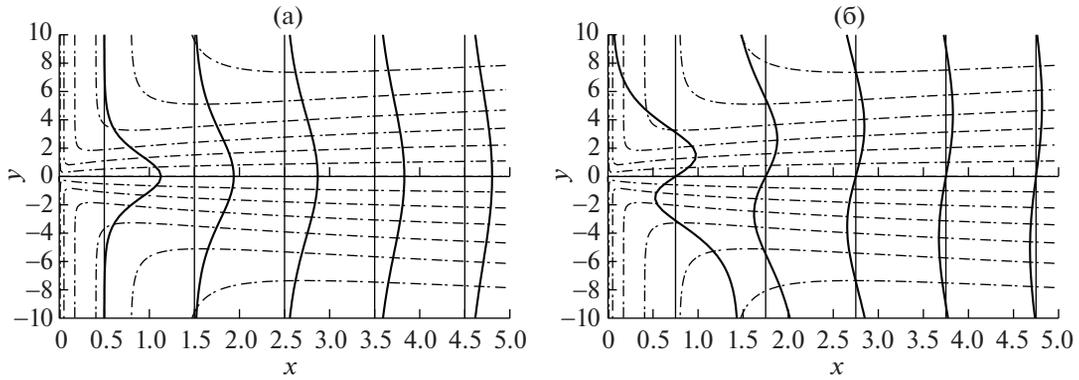
Учитывая п. 2.4.5 и следствие 4, получаем

Следствие 7. Если для некоторого $m : 0 < m < 1/2$, существует решение $\Phi_m(\tau)$ КрЗ (3.1)–(3.3), то для него $\Phi_m'(0) \geq 0$. Иначе, если $\Phi_m'(\tau)$ меняет знак в некоторой точке $\tau < 0$, то такое решение “уходит на полюс” (“взрывается” в конечной точке $\tau = \tau_p$), поскольку для него выполнены неравенства (2.53).

3.2. Точные решения сингулярной нелинейной КрЗ при некоторых значениях параметра m и их физическая интерпретация

Для значений $m : m \in \{1/3, 1/2, \infty\}$ существуют точные решения $\Phi_m(\tau, a)$ сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3), допускающие известную физическую интерпретацию (хотя получены они совершенно другим способом, чем в физической литературе). С другой стороны, здесь даются только краткие представления о физической интерпретации этих задач со ссылками на подробности в литературе.

Далее, приведенные в замечании 3 формулы и методы расчета течений в плоскости $\{x, y\}$ остаются в силе при замене всюду решений $\Phi_m(\tau, b)$ сингулярной нелинейной НКЗ (1.1)–(1.4) на решения $\Phi_m(\tau, a)$ вспомогательной сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3).



Фиг. 1. ($m = 1/2$).

В расчетах (здесь и далее, если не оговорено особо) $a = 1, v = 1$ (см. замечание 2 и п. 2.4.2). Значения m указаны в подписях к фигурам.

3.2.1. Задача 1: плоская ламинарная “затопленная струя”. При $m = 1/2$ решение $\Phi_{1/2}(\tau, a)$ КрЗ (3.1)–(3.3) существует глобально на \mathbb{R} и задается формулой (2.46) при $\tau_s = 0$:

$$\Phi_{1/2}(\tau, a) = a \tanh(a\tau/2), \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Для данных в точке $\tau = 0$ и параметра $d = d_{1/2}(a)$ в разложении (2.25), (2.26) получаем

$$\Phi_{1/2}(0) = \Phi''_{1/2}(0) = 0, \quad \Phi'_{1/2}(0) = a^2/2, \quad d_{1/2}(a) = 2a. \tag{3.10}$$

Решение (3.9) может быть интерпретировано как описывающее неограниченную плоскую ламинарную струю (так называемая “затопленная струя”; см. [17]–[19] и библиографию там). Параметр $a > 0$ в (3.9) определяется заданным значением интеграла $I_{1/2}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi'_{1/2}(\tau, a)]^2 d\tau = 2a^3/3$ (о физическом смысле этого требования см. в [17, с. 177]).

Для переменных x, y ($x > 0, y \in \mathbb{R}$) из замечания 3 получаем $\tau_{1/2}(x, y) = yx^{-2/3}/\sqrt{3v}$;

$$\Psi_{1/2}(x, y, a) = (ax^{1/3}\sqrt{3v}) \tanh(a\tau_{1/2}(x, y)/2);$$

$$u_{1/2}(x, y, a) = (a^2/2)x^{-1/3} / \cosh^2(a\tau_{1/2}(x, y)/2);$$

$$v_{1/2}(x, y, a) = ax^{-2/3}\sqrt{v/3}[a\tau_{1/2}(x, y)/\cosh^2(a\tau_{1/2}(x, y)/2) - \tanh(a\tau_{1/2}(x, y)/2)].$$

На фиг. 1 представлены результаты расчетов течений (видимо, впервые полученные): штриховыми линиями изображены линии тока $\Psi_{1/2}(x, y) = \text{const}$; на фиг. 1а (на фиг. 1б) приведены профили горизонтальной компоненты скорости $\tilde{u}_{1/2}(y) = u_{1/2}(x, y)|_{x=\text{const}}$ (вертикальной компоненты скорости $\tilde{v}_{1/2}(y) = v_{1/2}(x, y)|_{x=\text{const}}$).

В табл. 1 использованы обозначения: $y_0(x) : v_{1/2}(x, y_0) = 0$; $y_{\max}(x), v_{1/2, \max}(x) : v_{1/2, \max}(x) = v_{1/2}(x, y_{\max}(x)) = \max_{y \in [0, y_0]} v_{1/2}(x, y)$; $v_{1/2, \lim}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} v_{1/2}(x, y)$; $\tilde{v}_{1/2, \lim}(x) = v_{1/2}(x, 70)$.

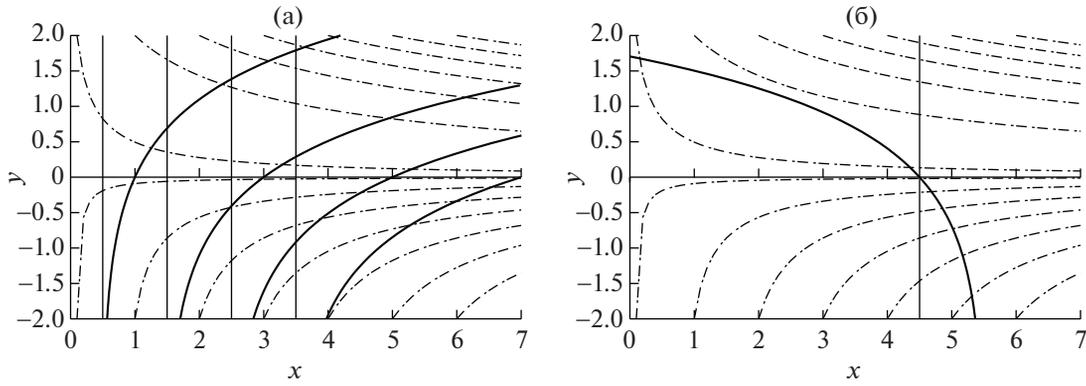
Нам известны только иллюстрации качественного характера для профилей горизонтальной скорости потоков, приведенные в [17, с. 177], [18, с. 287], [19, с. 532]. (Для профилей вертикальной скорости в монографиях [17]–[19] отсутствуют какие-либо иллюстрации.)

3.2.2. Задача 2: о нестационарном отрыве ламинарного пограничного слоя. При $m \rightarrow \infty$ решение $\Phi_{\infty}(\tau, a)$ КрЗ (3.1)–(3.3) существует глобально на \mathbb{R} и задается формулой (2.48) при $\tau_s = 0$:

$$\Phi_{\infty}(\tau, a) = a[\exp(a\tau) - 1], \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Для данных в точке $\tau = 0$ и параметра $d = d_{\infty}(a)$ в разложении (2.25), (2.26) имеем

$$\Phi_{\infty}(0) = 0, \quad \Phi'_{\infty}(0) = a^2, \quad \Phi''_{\infty}(0) = a^3, \quad d_{\infty}(a) = a. \tag{3.12}$$



Фиг. 2. ($m \rightarrow \infty$).

Согласно замечанию в [4] со ссылкой на [22], решение (3.11), а следовательно, и приведенные здесь расчеты, относятся к задаче о нестационарном отрыве ламинарного пограничного слоя.

В переменных x, y ($x \geq 0, y \in \mathbb{R}$) из замечания 3 имеем $\tau_\infty(x, y) \equiv y/\sqrt{v}$ (это единственный случай, когда автомодельная переменная не имеет особенности при $x = 0$); $\psi_\infty(x, y, a) = ax\sqrt{v}[\exp(ay/\sqrt{v}) - 1]$; $u_\infty(x, y, a) = a^2 x \exp(ay/\sqrt{v})$; $v_\infty(x, y, a) \equiv a\sqrt{v}[1 - \exp(ay/\sqrt{v})]$, а соотношение $\psi_\infty(x, y, a) = \text{const}$ приводит к формуле

$$y(x, a) = (\sqrt{v}/a) \ln(1 + \text{const}/(ax\sqrt{v})), \quad x > 0.$$

Тогда, согласно определению Прандтля, значение $x = x_0 = 0$ – точка отрыва пограничного слоя, так как $u_\infty(x_0, 0) = 0, (\partial u_\infty/\partial y)(x_0, 0) = 0$.

На фиг. 2 штриховыми линиями изображены линии тока $\psi_\infty(x, y) = \text{const}$; на фиг. 2а – профили горизонтальной компоненты скорости $\tilde{u}_\infty(y) = u_\infty(x, y)|_{x=\text{const}}$, на фиг. 2б – не зависящий от x профиль вертикальной компоненты скорости $\tilde{v}_\infty(y) = v_\infty(4.5, y) \equiv v_\infty(x, y)$.

3.2.3. Задача 3: плоская ламинарная “пристеночная струя”. При $m = 1/3$ решение $\Phi_{1/3}(\tau, a)$ КрЗ (3.1)–(3.3) не существует глобально на \mathbb{R} (для указанного ниже значения $\tau = \tau_p > 0$ оно имеет особенность типа полюса) и задается неявными формулами (подробнее см. [1] и здесь формулу (2.49) и подразд. 5.2):

$$\tau(\Phi_{1/3}) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{-a\Phi_{1/3} - \Phi_{1/3}}}{[\sqrt{a - \sqrt{-\Phi_{1/3}}}]^2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{a} \arctan \left(\frac{\sqrt{a + 2\sqrt{-\Phi_{1/3}}}}{\sqrt{3a}} \right), \quad (3.13)$$

$$-\infty < \tau \leq 0, \quad -a < \Phi_{1/3}(\tau) \leq 0;$$

$$\tau(\Phi_{1/3}) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a - \sqrt{-a\Phi_{1/3} - \Phi_{1/3}}}{[\sqrt{a + \sqrt{-\Phi_{1/3}}}]^2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{a} \arctan \left(\frac{\sqrt{a - 2\sqrt{-\Phi_{1/3}}}}{\sqrt{3a}} \right), \quad (3.14)$$

$$0 < \tau < \tau_p = 2\pi\sqrt{3}/(3a) \approx 3.6275987/a, \quad \Phi_{1/3}(\tau) < 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_p - 0} \Phi_{1/3}(\tau) = -\infty.$$

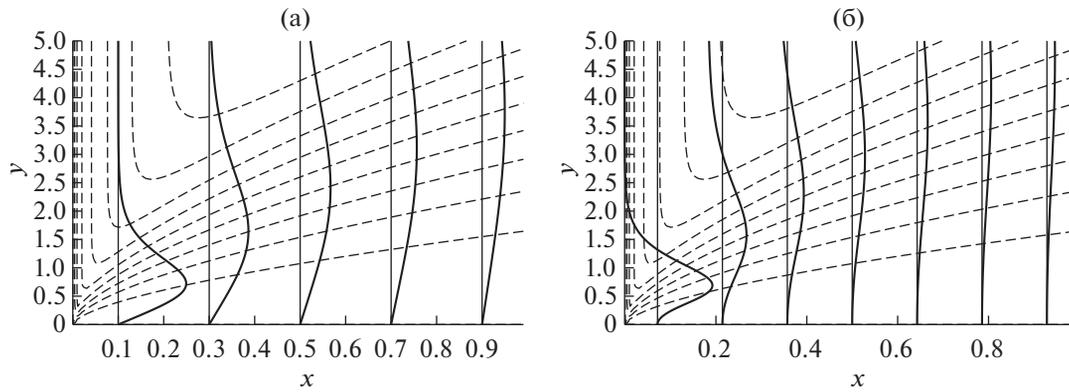
В точке $\tau = 0$ и точке перегиба $\tau = \tau_{in}(a)$ из (3.5), (3.7), (3.8) получаем соотношения

$$\Phi'_{1/3}(0, a) = a^2/2 + \int_{-\infty}^0 s[\Phi'_{1/3}(s, a)]^2 ds = 0, \quad \Phi''_{1/3}(0, a) = - \int_{-\infty}^0 [\Phi'_{1/3}(s, a)]^2 ds = -2a^3/9, \quad (3.15)$$

$$\Phi_{1/3}(\tau_{in}, a)\Phi'_{1/3}(\tau_{in}, a) = - \int_{-\infty}^{\tau_{in}} [\Phi'_{1/3}(s, a)]^2 ds, \quad \tau_{in} \in \mathbb{R}_-, \quad (3.16)$$

а для параметра $d = d_{1/3}(a)$ в разложении (2.25), (2.26) имеем

$$d_{1/3}(a) = 2a\sqrt{3} \exp(\sqrt{3}\pi/6) \approx 8.579306a. \quad (3.17)$$

Фиг. 3. ($m = 1/3$).

В переменных x, y ($x > 0, y \in \mathbb{R}$) и $\tau: -\infty < \tau < \tau_p$, из замечания 3 получаем

$$\tau_{1/3}(x, y) = yx^{-3/4}/(2\sqrt{v}); \quad \psi_{1/3}(x, y, a) = 2x^{1/4}\sqrt{v}\Phi_{1/3}(\tau, a);$$

$$u_{1/3}(x, y, a) = x^{-1/2}\Phi'_{1/3}(\tau, a); \quad v_{1/3}(x, y, a) = (3\sqrt{v}/2)x^{-3/4}[\tau\Phi'_{1/3}(\tau, a) - \Phi_{1/3}(\tau, a)/3].$$

Из КрЗ (3.1)–(3.3) при $m = 1/3$, заменой τ на $-\tau$, Φ на $-\Phi$ и с учетом формулы (3.13), получаем задачу о неограниченной струе вблизи стенки. Параметр сдвига (см. (2.49)) определяется требованием (3.3), а значение параметра $a > 0$ – заданным значением интеграла

$I_{1/3}(a) = \int_0^\infty \Phi_{1/3}(\tau, a)[\Phi'_{1/3}(\tau, a)]^2 d\tau$. Эта модель описана в [19, с. 541–543], включая основное соотношение (3.13) в других обозначениях (с тем же логарифмическим слагаемым и преобразованной остальной частью формулы); формулы (3.14) там не приводятся.

На фиг. 3 штриховыми линиями изображены линии тока $\psi_{1/3}(x, y) = \text{const}$; на фиг. 3а – профили горизонтальной компоненты скорости $\tilde{u}_{1/3}(y) = 0.15u_{1/3}(x, y)|_{x=\text{const}}$ с масштабным множителем; на фиг. 3б – профили вертикальной компоненты скорости $\tilde{v}_{1/3}(y) = 0.02v_{1/3}(x, y)|_{x=\text{const}}$ с масштабным множителем.

Какие-либо расчеты для этой задачи в [19] не приводятся, а приводится лишь иллюстративная фигура (см. [19, с. 541]), которая не описывает истинное поведение потока. Других статей или монографий, где рассматривалась бы эта задача, нами не обнаружено.

3.3. Теоремы существования и единственности и двусторонние оценки строго возрастающих решений

3.3.1. Случай $m \in \{1/3; 1/2; \infty\}$. Суммируя результаты подразд. 3.2, получаем

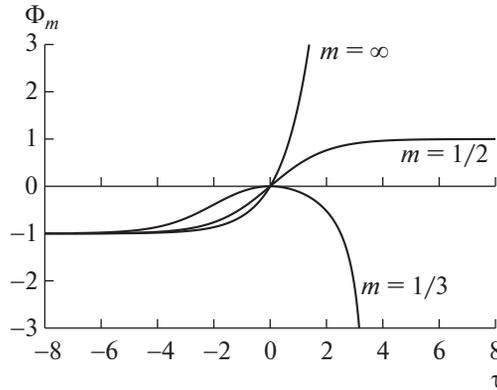
Утверждение 3. Для любой фиксированной пары значений $\{m, a\}: m \in \{1/3; 1/2; \infty\}, a > 0$, сингулярная нелинейная КрЗ (3.1)–(3.3) имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a)$ – строго возрастающую на \mathbb{R}_- функцию:

(i) решение $\Phi_{1/3}(\tau, a)$ задается неявной формулой (3.13), где данные в точке $\tau = 0$ определены в (3.15), а параметр $d = d_{1/3}(a)$ в разложении Ляпунова – в (3.17); это решение имеет точку перегиба $\tau = \tau_{\text{in}} < 0$, определяемую соотношением (3.16);

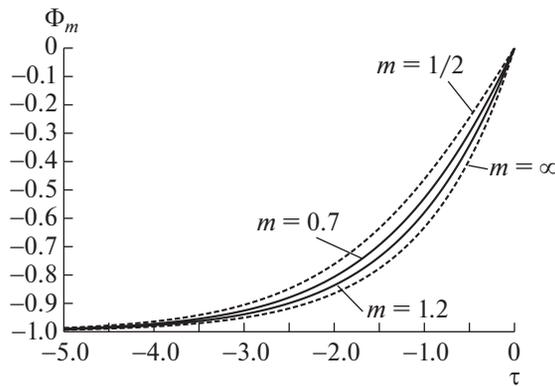
(ii) решение $\Phi_{1/2}(\tau, a)$ – выпуклая на \mathbb{R}_- функция, представимая формулой (3.9), где данные в точке $\tau = 0$ и параметр $d = d_{1/2}(a)$ в ряду Ляпунова определены в (3.10);

(iii) решение $\Phi_\infty(\tau, a)$ – выпуклая на \mathbb{R}_- функция, представимая формулой (3.11), где данные в точке $\tau = 0$ и параметр $d = d_\infty(a)$ в ряду Ляпунова определены в (3.12).

Следствие 8. При любых заданных $a > 0$ и $m \in \{1/3; 1/2; \infty\}$ сингулярная нелинейная НКЗ (3.1)–(3.3), (1.4), определенная на \mathbb{R} , не имеет решений ни при каком конечном $b \neq 0$. Более того, при $m = 1/3$ решение сингулярно – имеет полюс в точке $\tau = \tau_p = 2\pi\sqrt{3}/(3a) > 0$.



Фиг. 4.



Фиг. 5. ($m \geq 1/2$).

На фиг. 4 представлены графики решений КрЗ (3.1)–(3.3), описанных в утверждении 3 и продолженных вправо. Они отделяют области с различным поведением на \mathbb{R}_+ решений ОДУ (3.1) ($m \in \{1/3; 1/2; \infty\}$ – критические значения m как параметра бифуркации).

3.3.2. Случай $m \geq 1/2$. При фиксированных $m \geq 1/2$ и $a > 0$ решение $\Phi_m(\tau, a, d)$ ЗК (3.1), (3.2), заданное рядом (2.25), (2.26) при $d > 0$, строго возрастает при его продолжении вправо и выпукло на \mathbb{R}_- (см. следствие 5 и утверждение 3). Тогда, по непрерывности, существует такое $d = d(m, a) > 0$, при котором выполняется (3.3) (варьирование d эквивалентно сдвигу по τ).

Теорема 1. При любых заданных $m \geq 1/2$ и $a > 0$ сингулярная нелинейная КрЗ (3.1)–(3.3), определенная на \mathbb{R}_- , имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a)$; оно есть строго возрастающая выпуклая функция, принадлежащая семейству (2.25), (2.26) при некотором $d = d(m, a) > 0$ и удовлетворяющая соотношениям (3.5)–(3.8), причем справедливы двусторонние оценки

$$\Phi_\infty(\tau, a) \leq \Phi_m(\tau, a) \leq \Phi_{1/2}(\tau, a), \quad \tau \in \mathbb{R}_-; \quad a \leq d(m, a) \leq 2a, \quad (3.18)$$

где “supersolution” $\Phi_{1/2}(\tau, a)$ (“subsolution” $\Phi_\infty(\tau, a)$) определено в (3.9) (в (3.11)).

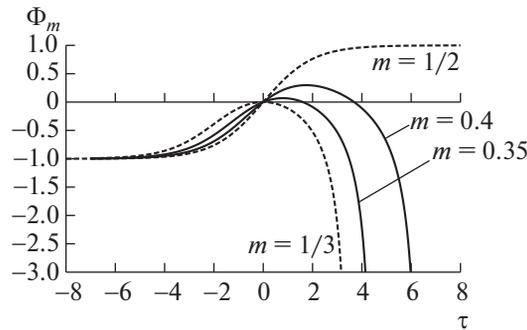
Для нескольких значений m графики решений КрЗ (3.1)–(3.3) представлены на фиг. 5.

3.3.3. Случай $0 < m \leq 1/2$. В последующем изложении учитываем: 1) приведенные выше аналитические формулы для $m = 1/2$ и $m = 1/3$; 2) поведение решений семейства (2.25), (2.26); 3) непрерывность решений по m , $1/3 < m < 1/2$ (см. следствие 6).

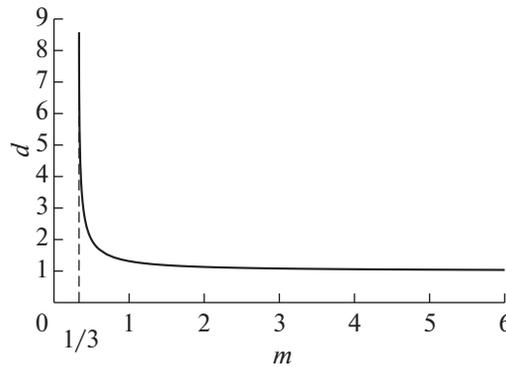
Теорема 2. Для решений сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3) при $m : 0 < m \leq 1/2$, следующие утверждения справедливы:

1) для любой фиксированной пары значений $\{m, a\}$: $1/3 \leq m \leq 1/2$, $a > 0$, КрЗ (3.1)–(3.3) имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a)$; оно есть строго возрастающая функция, принадлежащая семейству (2.25), (2.26) при некотором $d = d(a, m) > 0$, и справедливы оценки:

$$\Phi_{1/2}(\tau, a) \leq \Phi_m(\tau, a) \leq \Phi_{1/3}(\tau, a), \quad \tau \in \mathbb{R}_-, \quad 2a \leq d(a, m) \leq 2a\sqrt{3} \exp(\pi\sqrt{3}/6); \quad (3.19)$$



Фиг. 6. ($1/3 \leq m \leq 1/2$).



Фиг. 7.

2) при $m : 1/3 \leq m < 1/2$, решение $\Phi_m(\tau, a)$ имеет точку перегиба $\tau = \tau_{in} \in \mathbb{R}_-$, определяемую соотношением

$$\Phi_m(\tau_{in}, a)\Phi'_m(\tau_{in}, a) = \frac{2m-1}{m} \int_{-\infty}^{\tau_{in}} [\Phi'_m(s, a)]^2 ds, \quad \tau_{in} \in \mathbb{R}_-, \tag{3.20}$$

и не существует глобально на \mathbb{R} — имеет полюс первого порядка в точке $\tau = \tau_p(a, m) > 0$, где $\tau_p(a, 1/3) = 2\pi\sqrt{3}/(3a)$, $\tau_p(a, m) > \tau_p(a, 1/3) \forall m : 1/3 < m < 1/2$;

3) при любых $m : 0 < m < 1/3$, и $a > 0$ КрЗ (3.1)–(3.3) решений не имеет.

На фиг. 6 представлена графическая иллюстрация к теореме 2 для случая $1/3 \leq m \leq 1/2$ (иллюстрации к случаю $0 < m < 1/3$ см. в [1]).

3.3.4. Вычисление параметра $d = d_m(a)$ ($m \geq 1/3$) в разложении Ляпунова для решений КрЗ (3.1)–(3.3). Напомним следующее: 1) точные значения параметров $d = d_m(a)$ в ряду Ляпунова, соответствующие частным решениям $\Phi_m(\tau, a)$ КрЗ (3.1)–(3.3) (см. подразд. 3.2): $d_\infty(a) = a$, $d_{1/2}(a) = 2a$, $d_{1/3}(a) = 2a\sqrt{3} \exp(\pi\sqrt{3}/6) \approx 8.579306a$; 2) справедливость соотношений $d_m(a) = ad_m(1)$, $\Phi_m(\tau, a) = a\Phi_m(a\tau, 1)$, позволяющих проводить все расчеты при $a = 1$ (см. п. 2.4.2).

Значения $d = d_m(1)$ приведены в табл. 2, а график $d_m(1)$ как функции m представлен на фиг. 7. Здесь, в частности, $d'_m(1) \rightarrow -\infty$ при $m \rightarrow 1/3 + 0$, где производная берется по m .

Замечание 5. Используя следствие 1, из сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3) получаем эквивалентную регулярную КрЗ на интервале $[-T, 0]$. Линеаризуя последнюю в окрестности стационарного решения (2.22), с учетом замечания 4, получаем не зависящую от m линейную КрЗ:

$$\Phi''' - a\Phi'' = 0, \quad -T \leq \tau \leq 0, \quad \Phi(-T) + a - \Phi''(-T)/a^2 = 0, \quad \Phi'(-T) - \Phi''(-T)/a = 0, \quad \Phi(0) = 0.$$

Эта задача имеет точное решение, которое совпадает с решением (3.11) исходной сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3) при $m \rightarrow \infty$. В результате, если применять итерационный метод квазилинеаризации [23] для решения регулярной нелинейной КрЗ на интервале $[-T, 0]$, то функцию (3.11) можно использовать как начальное приближение $\forall m \geq 1/3$. Расчеты показали, что $\forall m \geq 1/3$ и, в особенности, $\forall m \geq 1/2$ решения сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3) на \mathbb{R}_+ действительно достаточно близки (см. фиг. 4, 5).

Замечание 6. Формально проведенные расчеты для течений в плоскости $\{x, y\}$ при $m : 1/3 < m < 1/2$ (“сингулярные потоки”) позволяют проследить переход от “пристеночного течения” ($m = 1/3$) к “затопленной струе” ($m = 1/2$).

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ И ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИСХОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НКЗ

4.1. О продолжении решений сингулярной нелинейной КрЗ на положительную полуось

Проанализируем поведение решений сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3) при их неограниченном продолжении вправо, что возможно при $m \geq 1/2$. Имеются два предельных случая: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_{1/2}(\tau, a) = a$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\Phi_\infty(\tau, a) / \exp(a\tau)] = a$. Для случая $m : 1/2 < m < \infty$, решения ищем в виде

$$\Phi(\tau) = \tau^m [b + Y(\tau)], \quad \tau > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) = 0, \tag{4.1}$$

где b – параметр ($b \neq 0$). Введя замену переменных $\xi = \tau^{m+1}/(m+1)$, $Y(\tau(\xi)) = v(\xi)$, для $v(\xi)$ получаем сингулярную нелинейную ЗК на бесконечности (точки означают дифференцирование по ξ):

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \left[\frac{6m}{(m+1)\xi} + b \right] \dot{v} + \left[\frac{(7m-4)m}{(m+1)^2 \xi^2} + \frac{(m+2)b}{(m+1)\xi} \right] v + \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+1)^3 \xi^3} v + \frac{m(m-1)(m-2)b}{(m+1)^3 \xi^3} = \\ = -v\ddot{v} - \frac{m+2}{(m+1)\xi} v\dot{v} + \frac{m-1}{m} \dot{v}^2, \quad \xi > 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} v(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \dot{v}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \ddot{v}(\xi) = 0. \tag{4.3}$$

ОДУ (4.2) имеет иррегулярную особенность при $\xi \rightarrow \infty$ (см. [24]). Следующие два утверждения следуют из общей теории [24] для некоторых классов систем нелинейных ОДУ с особенностями типа полюса.

Прежде всего заметим, что ОДУ (4.2) удовлетворяет формальный ряд:

$$v_{\text{form}}(\xi, b) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(b) / \xi^k, \tag{4.4}$$

$$v_1 = -(m-1)(m-2)/(m+1)^2, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} v_{k+1} = \left\{ k(k+1)(k+2) - \frac{6m}{m+1} k(k+1) + \frac{(7m-4)m}{(m+1)^2} k - \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+1)^3} \right\} v_k - \\ - \sum_{l=1}^k l \left[l+1 - \frac{m+2}{m+1} - \frac{m-1}{m} (k-l+1) \right] v_l v_{k-l+1} \Big/ \left[b(k+1) \left(k+2 - \frac{m+2}{m+1} \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.6}$$

Утверждение 4. При любых заданных $b \neq 0$ и $m > 0$ сингулярная нелинейная ЗК (4.2), (4.3) имеет частное решение $v_{\text{par}}(\xi, b)$, для которого ряд (4.4)–(4.6) является асимптотическим разложением при больших ξ .

Утверждение 5. При любом заданном $m > 0$ нелинейное ОДУ (3.1), рассматриваемое на \mathbb{R} , имеет трехпараметрическое семейство решений $\Phi_m(\tau + \tau_s, b, D)$, которое в главном, для больших положительных τ , представимо в виде

$$\begin{aligned} \Phi_m(\tau + \tau_s, b, D) = (\tau + \tau_s)^m \left\{ b + v_{\text{par}}((\tau + \tau_s)^{m+1}/(m+1), b) + \right. \\ \left. + D(\tau + \tau_s)^\gamma \exp(-b(\tau + \tau_s)^{m+1}/(m+1)) [1 + o(1)] \right\}, \quad \tau \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где τ_s , b и D – параметры, $\tau_s, D \in \mathbb{R}$, $b > 0$,

$$\gamma = (-4m^2 - 6m + 4)/(m + 1), \quad (4.8)$$

а $v_{\text{пар}}(\xi, b)$ определено в утверждении 4.

Вывод формулы (4.7) подробнее приведен в [1]. С использованием более сложного подхода эта формула получена также в [3], [4], за исключением того, что из разложения (4.4)–(4.6) для частного решения приведено только выражение вида $v_1/\xi + O(1/\xi^2)$ при $\xi \rightarrow \infty$.

Замечание 7. При $m = 1$ и $m = 2$ из (4.4)–(4.6) следует, что $v_{\text{пар}}(\xi, b) \equiv 0$. Тогда из (4.7), (4.8) для больших $\tau > 0$ получаем

$$\Phi_1(\tau + \tau_s, b, D) = (\tau + \tau_s)\{b + D(\tau + \tau_s)^{-3} \exp(-b(\tau + \tau_s)^2/2)[1 + o(1)]\}, \quad (4.9)$$

$$\Phi_2(\tau + \tau_s, b, D) = (\tau + \tau_s)^2\{b + D(\tau + \tau_s)^{-8} \exp(-b(\tau + \tau_s)^3/3)[1 + o(1)]\}, \quad (4.10)$$

а следующие из (2.47) двухпараметрические семейства решений $\Phi_1(\tau + \tau_s, b) = b(\tau + \tau_s)$ и $\Phi_2(\tau + \tau_s, b) = b(\tau + \tau_s)^2$ принадлежат семействам (4.9) и (4.10) при $D = 0$ и $b \neq 0$.

Для решения $\Phi(\tau)$ ОДУ (3.1), удовлетворяющего условию (3.3), следует равенство

$$[\Phi'(\tau) + \Phi^2(\tau)/2]' = \Phi''(0) + [(2m - 1)/m] \int_0^\tau [\Phi'(t)]^2 dt \quad (4.11)$$

и неравенства $\Phi'(0) > 0$, $\Phi''(0) > 0$ при $m > 1/2$ (см. (3.7), (3.8)). Тогда из (4.11) следует, что при $m > 1/2$ величина $\Phi'(\tau) + \Phi^2(\tau)/2$ возрастает по τ при $\tau > 0$ и справедливо

Утверждение 6. При любых заданных $a > 0$ и $m : 1/2 < m < \infty$, решение $\Phi_m(\tau, a)$ сингулярной нелинейной КрЗ (3.1)–(3.3) неограниченно продолжимо вправо и для больших $\tau > 0$ представимо в виде (4.7) при некоторых $b = b(m, a) > 0$, $D = D(m, a)$ и $\tau_s = \tau_s(m, a)$.

Следствие 9. Для любой фиксированной пары значений $\{m, b\}$: $m : 1/2 < m < \infty$, $b > 0$, сингулярная нелинейная НКЗ (3.1)–(3.3), (1.4), определенная на \mathbb{R} , имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a, b)$; это решение принадлежит семейству (2.25), (2.26) при некоторых $a = a(m, b) > 0$ и $d = d(m, b) > 0$.

Напомним следующее: 1) решая КрЗ (3.1)–(3.3) при $a > 0$ и $m : 1/2 < m < \infty$, получаем в точке $\tau = 0$ данные Коши $\Phi_m(0, a) = 0$, $\Phi'_m(0, a) > 0$, $\Phi''_m(0, a) > 0$, которые при продолжении решения $\Phi_m(\tau, a)$ для $\tau > 0$, определяют три параметра в (4.7), включая значение $b = b_m(a)$; 2) при этом достаточно решить КрЗ (3.1)–(3.3) при $a = 1$ и найти значение $b = b_m(1)$, так как справедливы формулы (2.42), (2.43).

На фиг. 8 представлены графики решений КрЗ (3.1)–(3.3), продолженных для $\tau > 0$.

Значения $b_m(1)$ приведены в табл. 3, а график $b = b_m(1)$ как функции m представлен на фиг. 9. Здесь $\lim_{m \rightarrow 1/2+0} b_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m(1) = 0$ и $\lim_{m \rightarrow 1/2+0} b'_m(1) = \infty$, где производная берется по m (значение $m = 1/2$ является точкой ветвления для функции $b_m(1)$).

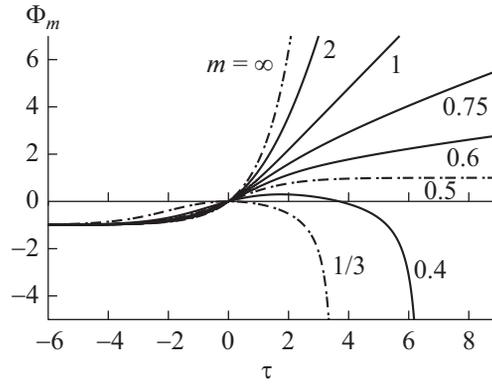
4.2. Основной результат для сингулярной нелинейной НКЗ

Далее рассматриваем ОДУ (3.1) на всей вещественной оси и добавляем к условиям (3.2), (3.3) предельное условие (1.4) при $\tau \rightarrow +\infty$.

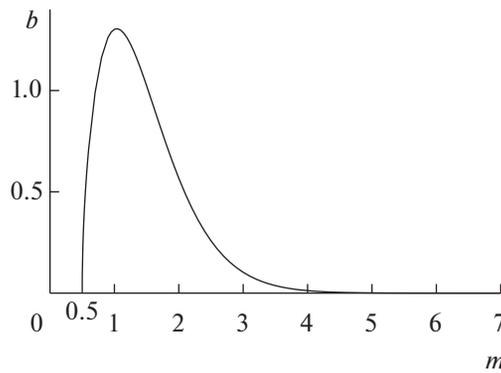
Теорема 3. Для любой фиксированной пары значений $\{m, b\}$: $m : 1/2 < m < \infty$, $b > 0$, сингулярная нелинейная НКЗ (3.1)–(3.3), (1.4), определенная на всей вещественной оси, имеет единственное решение $\Phi_m(\tau, a, b)$, где $a = a(m, b) > 0$, и следующие утверждения справедливы:

(i) $\Phi_m(\tau, a, b)$ – выпуклая на \mathbb{R}_- монотонно возрастающая на \mathbb{R} функция, принадлежащая семейству (2.25), (2.26) для некоторого $d = d(m, a, b) > 0$ и удовлетворяющая ограничениям

$$a[\exp(a\tau) - 1] \leq \Phi_m(\tau, a, b) \leq a \tanh(a\tau/2), \quad -\infty < \tau \leq 0, \\ a \tanh(a\tau/2) < \Phi_m(\tau, a, b) < a[\exp(a\tau) - 1], \quad \tau > 0;$$



Фиг. 8.



Фиг. 9.

(ii) при больших $\tau > 0$ функция $\Phi_m(\tau, a, b)$ представима в виде (4.7) с некоторыми $D = D(m, a, b)$ и $\tau_s = \tau_s(m, a, b)$;

(iii) решение $\Phi_m(\tau, a, b)$ может быть получено следующим образом: фиксируем $a = 1$ и определяем решение $\Phi_m(\tau, 1)$ КрЗ (3.1)–(3.3), которое, в силу теоремы 1, существует, единственно и принадлежит семейству (2.25), (2.26) при некотором $d = d_m(1)$; продолженное вправо, это решение удовлетворяет предельному соотношению $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\Phi_m(\tau, 1)/\tau^m] = b_m(1) > 0$; в силу масштабных преобразований (2.42), (2.43), для искомого решения $\Phi_m(\tau, a, b)$ при $\tau \in \mathbb{R}$ окончательно получаем:

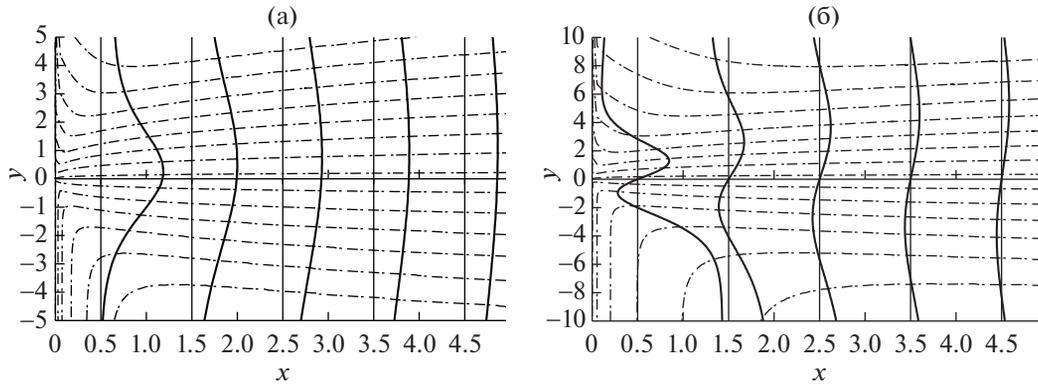
$$\Phi_m(\tau, a, b) = a\Phi_m(a\tau, 1), \quad a = a(m, b) = [b/b_m(1)]^{1/(m+1)}, \quad d = d_m(a(m, b)) = a(m, b)d_m(1).$$

4.3. Численные результаты для различных значений параметра автотомельности

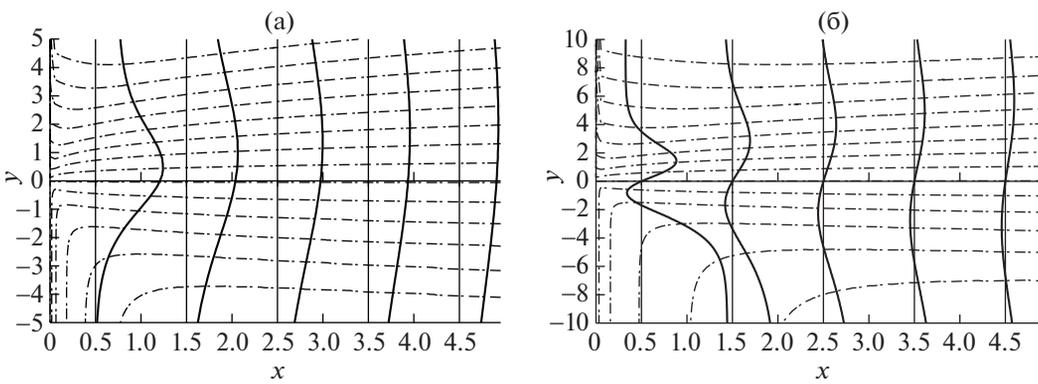
Ниже приводятся результаты расчета потоков в плоскости $\{x, y\}$ для значений параметра m , указанных в подписях к фигурам.

На фиг. 10–12, 14, 15 штриховыми линиями изображены линии тока $\psi_m(x, y) = \text{const}$; на фиг. 10а–12а, 14а (10б–12б, 14б) – профили горизонтальных (вертикальных) компонент скорости $\tilde{u}_m(y) = u_m(x, y)|_{x=\text{const}}$ ($\tilde{v}_m(y) = v_m(x, y)|_{x=\text{const}}$); на фиг. 15а (15б) – профили горизонтальной (вертикальной) компоненты скорости $\tilde{u}_{6/5}(y) = 0.2u_{6/5}(x, y)|_{x=\text{const}}$ ($\tilde{v}_{6/5}(y) = 0.5v_{6/5}(x, y)|_{x=\text{const}}$) с масштабным множителем.

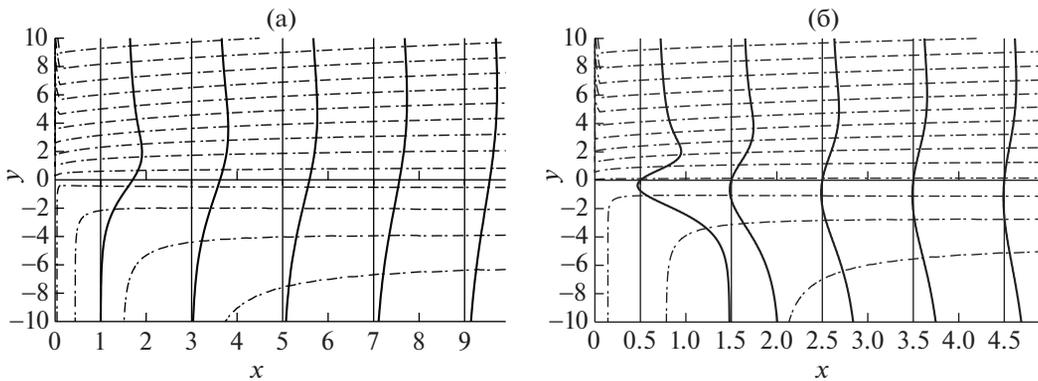
4.3.1. Случай $1/2 < m < 1$ ($m \in \{1/20, 3/5, 4/5\}$).



Фиг. 10. ($m = 11/20$).



Фиг. 11. ($m = 3/5$).



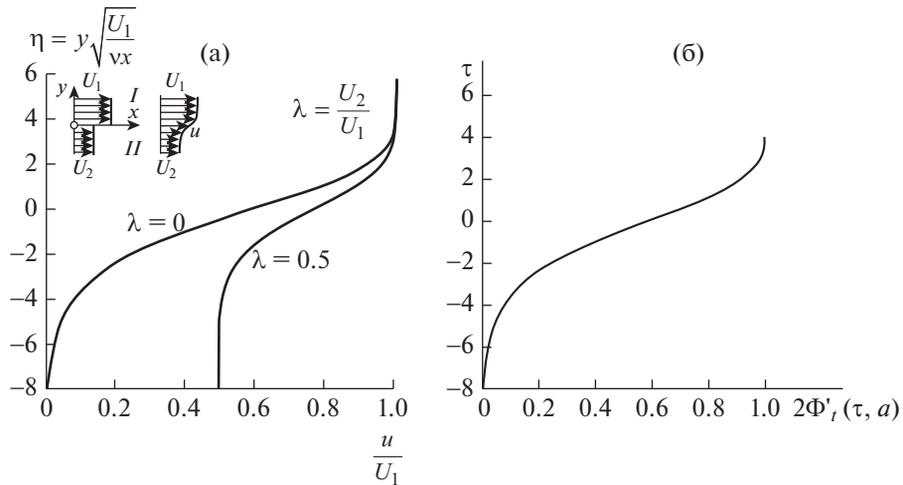
Фиг. 12. ($m = 4/5$).

4.3.2. Случай $m = 1$ (плоская “полуструя”). В [17, с. 180–181] сформулирована задача о ламинарном слое на границе раздела двух потоков (см. здесь замечание 1):

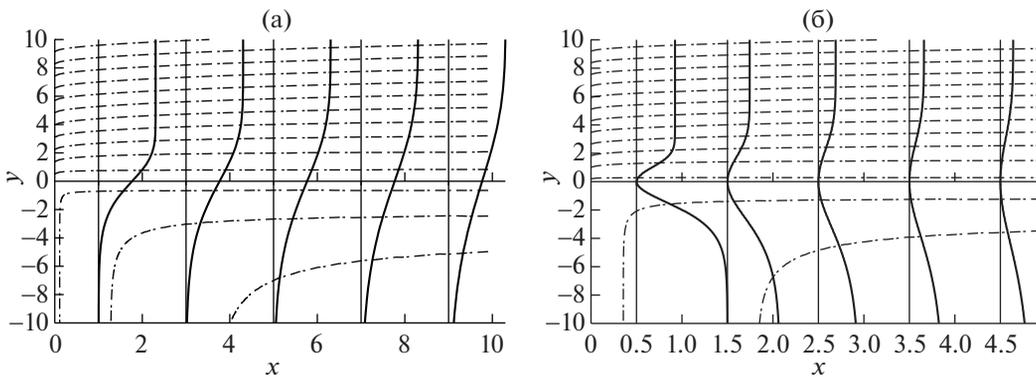
$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta)/2 = 0, \quad -\infty < \eta < \infty, \tag{4.12}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} f'(\eta) = U_2/U_1 = \lambda, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1. \tag{4.13}$$

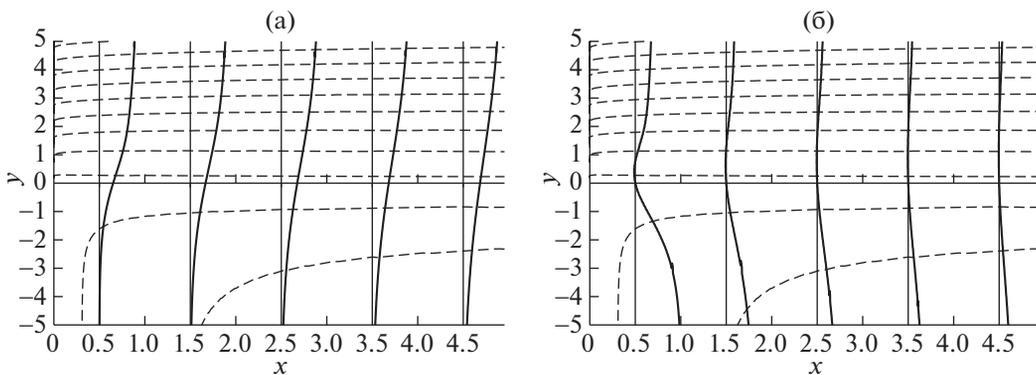
Здесь η – автомодельная переменная, $\eta(x, y) = y\sqrt{U_1/(vx)}$, а U_1 (U_2) – постоянная скорость верхнего (нижнего) потока. Для “полуструи” в (4.13) $U_2 = 0$, т.е. $\lambda = 0$ (при $\lambda \neq 0$ задача (4.12), (4.13) – другая как математически, так и по физической интерпретации).



Фиг. 13.



Фиг. 14. ($m = 1$).



Фиг. 15. ($m = 6/5$).

В случае “полуструи” для функции тока $\psi(x, y, U_1)$ и x -компоненты скорости $u(\eta, U_1)$ справедливо: $\psi(x, y, U_1) = \sqrt{vU_1}xf(\eta)$, $u(\eta, U_1) = U_1f'(\eta)$. Полагая $U_1 = 1/2$, получаем $\eta(x, y) \equiv \tau(x, y)$, $\Phi_1(\tau) = f(\eta)/2$, $\ddot{u}(\eta) = f'(\eta) = 2\Phi'_1(\tau, a) = 2u_1(\tau, a)$, где $a : b_1(a) = 1/2$.

Из табл. 2 и 3 имеем $d_1(1) \approx 1.3188$, $b_1(1) \approx 1.3025$. Учитывая соотношения $b_1(a) = b_1(1)a^2 = 1/2$, $d_1(a) = d_1(1)a$, окончательно получаем $a \approx 0.619583$, $d_1(a) \approx 0.8171$.

В [17, с. 181] представлены графики функции $\tilde{u}(\eta) = u(\eta, U_1)/U_1 = f'(\eta)$ для значений $\lambda = 0$ и $\lambda = 0.5$; см. здесь фиг. 13а. На фиг. 13б представлен график $\tilde{u}(\eta) = 2\Phi'_1(\tau, a)$ ($a = 0.619583$) для сравнения с графиком на фиг. 13а, соответствующим $\lambda = 0$.

На фиг. 14 представлены результаты расчета течений, которые ранее не проводились.

4.3.3. Случай $m > 1$. См. фиг. 15, где $m = 6/5$.

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПОВЕДЕНИИ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

5.1. О семействах сингулярных (“взрывающихся”) решений исходного нелинейного ОДУ

Для ОДУ (1.1) при $m > 0$ опишем поведение решений, стремящихся к точному сингулярному решению (2.44) при $\tau \rightarrow \tau_p$. В окрестности точки $\tau = \tau_p$ решения ищем в виде

$$\Phi(\tau - \tau_p) = \frac{6m}{(m+1)(\tau - \tau_p)} [1 + Y(\tau - \tau_p)], \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_p} Y(\tau - \tau_p) = 0.$$

Без потери общности достаточно рассмотреть случай $\tau > \tau_p$. Вводя обозначение $x = \tau - \tau_p$, для $Y(x)$ при малых $x > 0$ получаем локальную сингулярную ЗК для нелинейного ОДУ третьего порядка с регулярной особенностью в нуле (см. [24]):

$$x^3 Y''' + [3(m-1)/(m+1)]x^2 Y'' + [6(m-1)/(m+1)]x Y' + 6Y + F(x, Y, xY', x^2 Y'') = 0, \quad (5.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} Y(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (xY'(x)) = \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 Y''(x)) = 0; \quad (5.2)$$

здесь нелинейная функция в (5.1) имеет вид

$$F(x, Y, xY', x^2 Y'') = [6/(m+1)] [mx^2 Y'' Y - (m-1)(xY')^2 - 2xY' Y + (m+1)Y^2].$$

СЗ главной линейной части ОДУ (5.1) являются корнями кубического уравнения $\lambda^3 - 6\lambda^2/(m+1) + \lambda(5m-1)/(m+1) + 6 = 0$, один из корней которого $\lambda_3 = -1$, а два других $\lambda_{1,2}(m)$ удовлетворяют уравнению $\lambda^2 - \lambda(m+7)/(m+1) + 6 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2}(m) = (m+7 \pm i\sqrt{\kappa(m)})/[2(m+1)], \quad m \geq m_1, \quad (5.3)$$

$$\lambda_{1,2}(m) = (m+7 \pm \sqrt{-\kappa(m)})/[2(m+1)], \quad 0 < m \leq m_1; \quad (5.4)$$

здесь $\kappa(m) = 23m^2 + 34m - 25$, а m_1 – положительный корень уравнения $\kappa(m) = 0$:

$$m_1 = (-17 + 12\sqrt{6})/23 \approx 0.538864213. \quad (5.5)$$

Для $\lambda_{1,2}(m)$ в (5.3) при $m > m_1$ обозначим

$$\alpha = \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(m) = (m+7)/[2(m+1)], \quad \beta = |\operatorname{Im} \lambda_{1,2}(m)| = \sqrt{\alpha(m)}/[2(m+1)]. \quad (5.6)$$

Введем в (5.1), (5.2) замены переменных: $x = \exp(-t)$, $t > 0$ ($t = -\ln x$, $0 < x < 1$), $Z(t) \equiv Y(\exp(-t))$. Для $Z(t)$ получим сингулярную ЗК на бесконечности для нелинейного автономного ОДУ:

$$\ddot{Z} + [6/(m+1)]\dot{Z} + [(5m-1)/(m+1)]Z - 6Z - G(Z, \dot{Z}, \ddot{Z}) = 0, \quad t \geq T, \quad (5.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{Z}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{Z}(t) = 0; \quad (5.8)$$

здесь нелинейная часть в (5.7) имеет вид

$$G(Z, \dot{Z}, \ddot{Z}) = [6/(m+1)] [m\ddot{Z}Z - (m-1)\dot{Z}^2 + (m+2)\dot{Z}Z + (m+1)Z^2].$$

Применяя классические результаты [9, разд. 23] к сингулярной нелинейной ЗК (5.7), (5.8) и учитывая введенные замены переменных, получаем

Утверждение 7. При любых фиксированных $m > 0$ и $\tau_p \in \mathbb{R}$ сингулярная нелинейная ЗК (5.1), (5.2) имеет двухпараметрическое семейство решений $Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – параметры $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}$. В окрестности точки $\tau = \tau_p$ эти решения представимы в виде:

1) при $m > m_1$ и $\tau \rightarrow \tau_p$

$$Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2) = |\tau - \tau_p|^\alpha [C_1 \cos(\beta \ln |\tau - \tau_p|) + C_2 \sin(\beta \ln |\tau - \tau_p|)] [1 + o(1)], \quad (5.9)$$

где $m_1 > 1/2$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ определены в (5.5), (5.6);

2) при $m = m_1$

$$Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2) = |\tau - \tau_p|^\alpha [C_1 + C_2 \ln |\tau - \tau_p|] [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow \tau_p, \quad (5.10)$$

где $\alpha = (m_1 + 7)/[2(m_1 + 1)] > 0$;

3) при $0 < m < m_1$

$$Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2) = [C_1 |\tau - \tau_p|^{\lambda_1} + C_2 |\tau - \tau_p|^{\lambda_2}] [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow \tau_p, \quad (5.11)$$

где $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(m) > 0$ определены в (5.4). Более полное утверждение: в окрестности точки $\tau = \tau_p$ двухпараметрическое семейство решений $Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2)$ сингулярной нелинейной ЗК (5.1), (5.2), где $x = |\tau - \tau_p|$, представимо параметрическим рядом Ляпунова по целым степеням величин (5.9)–(5.11) соответственно (без слагаемых вида $o(1)$); коэффициенты этих рядов могут быть получены их формальной подстановкой в ОДУ (5.1) и имеют рост не выше степенного.

Для $m = 1/2$, используя точные решения (2.45) и принимая во внимание, что $\kappa(1/2) = -9/4 < 0$, $\lambda_1(1/2) = 3$, $\lambda_2(1/2) = 2$ и $m_1 > 1/2$, получаем также

Следствие 10. При $m = 1/2$ сингулярная нелинейная ЗК (5.1), (5.2) имеет однопараметрическое семейство точных решений

$$Y_{1/2}(x, a) = (ax/2) \coth(ax/2) - 1, \quad x, a \in \mathbb{R},$$

где a – параметр, т.е. для любого заданного τ_p

$$Y_{1/2}(\tau - \tau_p, a) = [a(\tau - \tau_p)/2] \coth(a(\tau - \tau_p)/2) - 1, \quad \tau, \tau_p, a \in \mathbb{R}.$$

Эти решения принадлежат семейству (5.11) при $C_1 = 0$, $C_2 = C_2(a) = a^2/(3 \cdot 2^2)$ и $\lambda_2 = 2$; их разложения в ряд Ляпунова при $(\tau - \tau_p)^2 < \pi^2$ имеют вид

$$Y_{1/2}(\tau - \tau_p, a) = C_2(a)(\tau - \tau_p)^2 - (1/5)C_2^2(a)(\tau - \tau_p)^4 + (2/35)C_2^3(a)(\tau - \tau_p)^6 - \dots,$$

или, в полной записи, $Y_{1/2}(\tau - \tau_p, a) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(C_2(a)(\tau - \tau_p)^2)^n$, где $(\tau - \tau_p)^2 < \pi^2$, $D_n = [(-1)^{n-1}/(2n!)]3^n \cdot 2^{2n} B_n$, B_n – числа Бернулли (см. [25]): $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, ...

Суммируя результаты этого подраздела, получаем

Следствие 11. При любом заданном $m > 0$ нелинейное ОДУ (1.1) имеет трехпараметрическое семейство сингулярных решений $\Phi_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2)$, представимых в виде

$$\Phi_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2) = \frac{6m}{(m+1)(\tau - \tau_p)} [1 + Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2)], \quad (5.12)$$

где τ_p , C_1 , C_2 – параметры ($\tau_p, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$), а двухпараметрическое семейство функций $Y_m(\tau - \tau_p, C_1, C_2)$ при фиксированном $\tau_p \in \mathbb{R}$ описано в утверждении 7.

Замечание 8. Формулы (5.9)–(5.11) получены также в [3], [4] с использованием существенно более сложного подхода. Кроме того, результаты утверждения 7 и следствия 11 являются более полными и точными, а результаты следствия 10 – новыми.

5.2. О преобразовании нелинейного ОДУ третьего порядка к сингулярному нелинейному ОДУ первого порядка (в нефизических переменных) и некоторых его частных решениях

Коротко обратимся к подходу [3], [4], чтобы уточнить один частный результат.

Порядок ОДУ (1.1) понижается, если взять искомую функцию Φ в качестве независимой переменной и ввести новую искомую функцию $f(\Phi)$, которая вдоль траектории $\Phi(\tau)$ этого ОДУ задается в виде

$$f(\Phi(\tau)) = \frac{d\Phi}{d\tau}(\tau). \quad (5.13)$$

Для $f(\Phi)$ получаем ОДУ второго порядка (точка означает производную по Φ):

$$f\ddot{f} + \dot{f}^2 + \Phi\dot{f} - [(m-1)/m]f = 0. \quad (5.14)$$

Учитывая инвариантность этого ОДУ и ОДУ (1.1) относительно некоторых групп преобразований, в [3], [4] вводятся новые функции $F(\Phi)$ и $\Psi(\Phi)$ по формулам

$$\Phi^2 F(\Phi) = f(\Phi), \quad \Psi(\Phi) = \Phi \frac{dF}{d\Phi}(\Phi). \quad (5.15)$$

Дифференцируя (5.15) по Φ и используя формулы (5.13)–(5.15), получаем соотношения

$$\frac{df}{d\Phi} = (2F + \Psi)\Phi, \quad F \frac{d^2 f}{d\Phi^2} = -(\Psi + 2F)^2 - \Psi - \frac{m+1}{m}F; \quad (5.16)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} = F(2F + \Psi)\Phi^3, \quad \frac{d^3 \Phi}{d\tau^3} = -F[\Psi + F(m+1)/m]\Phi^4; \quad (5.17)$$

$$\Psi F \frac{d\Psi}{dF} = -\Psi^2 - \Psi - 7F\Psi - 6F^2 - \frac{m+1}{m}F. \quad (5.18)$$

Далее, в соответствии с [3], [4], следует рассмотреть особые точки нелинейного ОДУ (5.18) на плоскости (F, Ψ) и проанализировать поведение интегральных кривых в окрестностях этих точек в проекциях на сферу Пуанкаре. Для возвращения к исходным переменным $(\tau, \Phi, \Phi', \Phi'')$ придется использовать довольно сложный набор формул (5.13)–(5.17). В результате анализ решений в терминах исходных физических переменных получается достаточно трудоемким: для (5.18) все граничные условия потеряны, так что надо изучать поведение всех траекторий решений, отбирая нужные.

Одним из исключений является случай частных решений ОДУ (5.18) вида

$$\Psi = AF + B. \quad (5.19)$$

Здесь A и B – постоянные, зависящие от m ; для нахождения всех возможных значений этих постоянных получаем уравнения

$$B^2 + B = 0, \quad A + 3AB + 7B + (m+1)/m = 0, \quad 2A^2 + 7A + 6 = 0,$$

которые дают решения

$$B = B_m = 0, \quad A = A_m = -(m+1)/m, \quad m \in \{1; 2\}; \quad (5.20)$$

$$B = B_m = -1, \quad A = A_m = (1-6m)/(2m), \quad m \in \{1/3; 1/2\}. \quad (5.21)$$

В терминах исходных переменных решения получаются с помощью формул (5.15), (5.19), откуда следует

$$F = (C/A)|\Phi|^4 - B/A, \quad f(\Phi) = \Phi^2 F(\Phi), \quad (5.22)$$

где C – произвольная постоянная. Окончательно имеем

$$\frac{d\Phi_m}{d\tau} = \Phi_m^2 [(C/A_m)|\Phi_m|^{4m} - B_m/A_m], \quad m \in \{1/3; 1/2; 1; 2\}. \quad (5.23)$$

В результате получаем семейства решений (2.46), (2.47) для $m \in \{1/2; 1; 2\}$ и более сложное семейство неявных решений (2.49) для $m = 1/3$, если в (5.23) положить $C = -b^3$ (пример этого последнего случая обсуждается в п. 3.2.3). (В [1] допущены опечатки в первой формуле (5.22) и, как следствие, в (5.23), которые здесь исправлены.)

Следствие 12. Для ОДУ (5.18) значения A , B и m , определенные в (5.20), (5.21), охватывают все возможные решения вида (5.19). В свою очередь, из ОДУ (5.23) следуют формулы (2.46), (2.47) и (2.49) для решений ОДУ (1.1).

В заключение отметим, что анализ сингулярных задач для нелинейных ОДУ, возникающих в моделях естественных наук, связан с большими трудностями, что вызывает особый интерес к тем задачам, которые допускают достаточно полный их математический и численный анализ. Подход к конкретной задаче гидродинамики, описанный в данной работе, может представлять интерес и для других задач. Отметим еще раз, что в [3], [4], [6]–[8], в отличие от [1] и данной работы, никакие расчеты не приводятся (вообще говоря, непонятно, что и как можно посчитать при таком сложном подходе этих работ).

Авторы благодарят М.Б. Соловьеву за помощь в проведении расчетов, а также Рецензентов, некоторые замечания и вопросы которых по тексту способствовали улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дышко А.Л., Конохова Н.Б., Суков А.И. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 7. С. 1158–1178.
2. Копуихова Н.В., Суков А.И., Соловьев М.В. Singular nonlinear problems for self-similar solutions to the boundary layer equations with a zero pressure gradient // Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. 2009. V. 19. P. 143–155 (Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University; e-print: <http://www.kromsh.info/>).
3. Диесперов В.Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смещения // Прикл. матем. и мех. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403–414.
4. Диесперов В.Н. Поведение автомодельных решений уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления // Сообщ. по прикл. матем. ВЦ АН СССР. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
5. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
6. Диесперов В.Н. О существовании и единственности автомодельных решений, описывающих течение в слоях смещения // Докл. АН СССР. Гидромеханика. 1984. Т. 275. № 6. С. 1341–1346.
7. Диесперов В.Н. О течениях в слое смещения Чепмена // Докл. АН СССР. Аэродинамика. 1985. Т. 284. № 2. С. 305–309.
8. Диесперов В.Н. Об одной задаче в теории слоев смещения // Прикл. матем. и мех. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 1008–1020.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
10. Конохова Н.Б. О стационарной задаче Ляпунова для системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 8. С. 1384–1395.
11. Конохова Н.Б. Об устойчивых многообразиях Ляпунова для автономных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1358–1379.
12. Конохова Н.Б. Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи // Сообщ. по прикл. матем. ВЦ РАН. М.: ВЦ РАН, 1996.
13. Копуихова Н.В. Smooth Lyapunov's manifolds and singular boundary value problems for autonomous systems of nonlinear ordinary differential equations // Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. Материалы II Междунар. научн. конф. (Актобе, 15–19 сентября 1999 г.). Актобе: Ред.-изд. отдел Актюбинского университета им. К. Жубанова, 2000. С. 60–65.
14. Копуихова Н.В. Smooth Lyapunov's manifolds and singular boundary value problems for nonlinear autonomous systems on an infinite interval // Spectral and Evolution Problems (Sevastopol, 2000). Simferopol: National Taurida V. Vernadsky University, 2001. V. 11. P. 204–209.
15. Копуихова Н.В., Суков А.И. Smooth Lyapunov manifolds and correct mathematical simulation of nonlinear singular problems in mathematical physics // Mathematical Modeling. Problems, Methods, Applications. New York: Kluwer Academic/ Plenum Publishers, 2001. P. 205–217.
16. Копуихова Н.В., Суков А.И. On correct statement of singular BVPs for autonomous systems of nonlinear ODEs with the applications to hydrodynamics // Proc. Inter. Seminar "Day on Diffraction – 2003" (St. Petersburg, Russia, June 24–27, 2003)/ Ed. by I.V. Andronov. St. Petersburg: Faculty of Physics, SPbU, 2003. P. 99–109.
17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
18. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
19. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
20. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.
21. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
22. Сычев Вик.В. Теория нестационарного отрыва пограничного слоя и разрушение следа // Успехи механики. 1983. Т. 6. Вып. 1/2. С. 13–51.
23. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
24. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
25. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ В СВОБОДНОЙ
ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ¹⁾

© 2021 г. А. М. Гайфуллин^{1,*}, В. В. Жвик^{1,**}

¹ 140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ЦАГИ, Россия

*e-mail: gaifullin@tsagi.ru

**e-mail: VladZhvick@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.02.2021 г.

Переработанный вариант 12.02.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматривается свободная осесимметричная незакрученная затопленная струя вязкой несжимаемой жидкости. При больших числах Рейнольдса определена неизвестная константа в асимптотическом решении Ландау–Румера–Гольдштика–Яворского уравнений Навье–Стокса, описывающем дальнее поле струи. Аналогичная константа определена в решении Лойцянского, которое получено в приближении пограничного слоя. Константы выражаются через распределение скорости в источнике струи с помощью нелокального закона сохранения. Библ. 30. Фиг. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: закон сохранения, затопленная струя, асимптотика, инвариант.

DOI: 10.31857/S0044466921100057

ВВЕДЕНИЕ

Автомодельная осесимметричная затопленная струя вязкой несжимаемой жидкости впервые описана Г. Шлихтингом [1] с помощью точного решения уравнений пограничного слоя, и позже Л.Д. Ландау [2] и Х.Б. Сквайром [3] с помощью точного решения уравнений Навье–Стокса. Данные решения выражают поле скоростей, порожденное постоянной силой, сосредоточенной в фиксированной точке жидкости, или, иначе говоря, точечным источником импульса. Расход такого источника равен нулю. Ю.Б. Румер [4] заметил, что решение Ландау является лишь первым приближением, пригодным для описания движения на больших расстояниях от источника струи конечного размера, и предпринял попытку построить второе приближение с заданным ненулевым расходом. Разыскивалось решение в виде разложения по целым обратным степеням расстояния до источника, и для определения второго члена разложения получено линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение. Для этого уравнения получены однородное решение с неизвестным коэффициентом и неоднородное решение. Л.Г. Лойцянский построил [5] второе приближение для поля скоростей в незакрученной струе в приближении пограничного слоя в виде суммы решения Шлихтинга и малого на больших расстояниях возмущения с неизвестным коэффициентом. Отмечено [5], что данное решение является пределом решений Ландау и Румера при переходе к большим числам Рейнольдса. В действительности, построенный Лойцянский второй член разложения есть предел только однородного решения Румера. Если для однородного решения Румера вычислить расход через произвольную сферу, окружающую источник, то он окажется нулевым, следовательно, решение Лойцянского не содержит информацию о расходе источника струи. Между тем, в монографиях [6], [7] неизвестный коэффициент в решении Лойцянского определяется через расход жидкости в отверстии, хотя в работе [5] отмечена некорректность такого определения этой константы. Неоднородное решение Румера подверглось критике М.А. Гольдштика и Н.И. Яворского [8], доказавших, что решение в виде разложения по целым обратным степеням расстояния до источника не может одновременно

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00163).

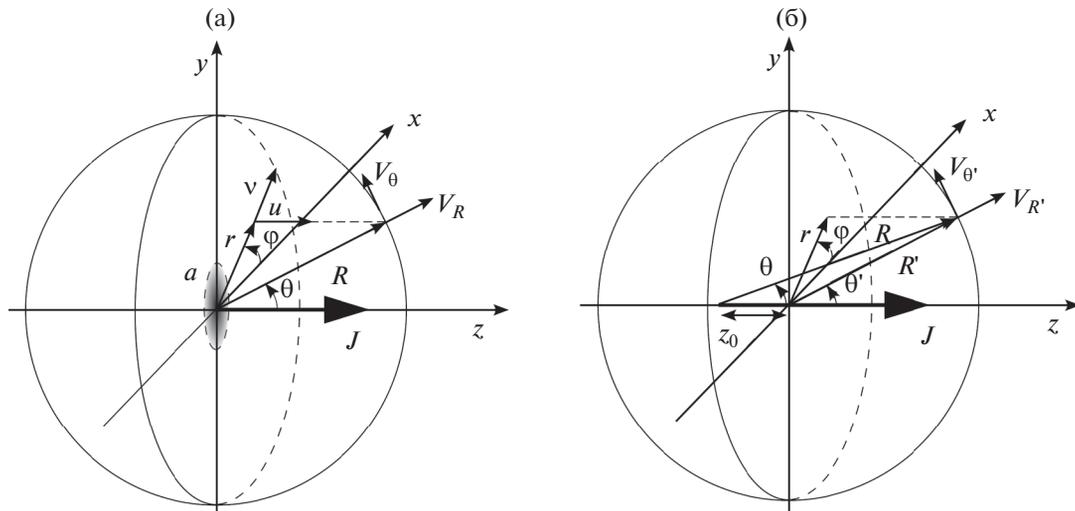
иметь конечный ненулевой расход и быть регулярным при отличном от нуля числе Рейнольдса. Показано [8], что если ввести в разложение слагаемое, пропорциональное логарифму расстояния, до источника, то можно построить регулярное решение с заданным расходом. При этом член разложения, отвечающий за расход, является решением обыкновенного дифференциального уравнения, которое отличается от уравнения [4] только неоднородной частью. Таким образом, однородное решение Румера с неизвестным коэффициентом присутствует и в решении Гольдштика–Яворского. Также установлено [8], что решение Лойцянского получается из решения Гольдштика–Яворского в пределе пограничного слоя, причем члены, зависящие от расхода источника, пропадают при предельном переходе. Кроме того, доказано, что следующие координатные приближения решения уравнений пограничного слоя являются некорректными, т.е. не следуют из решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса.

Проблеме определения коэффициента при однородном решении Румера в асимптотике струи посвящены работы [4], [8]–[11]. Данная проблема получила название парадокса скрытых инвариантов [9], [10], поскольку сложилось мнение, что за эту константу может отвечать некоторый неизвестный закон сохранения. Предпринята попытка [8]–[10] построить инвариант струи, базируясь на сохранении потока боковой компоненты момента импульса через полусферу с плоским дном. Аналогичный подход использовался [12], [13] для построения инварианта закрученной струи. Данный подход неэффективен, поскольку для вычисления таких инвариантов в дальнейшем поле струи требуется знать поле течения во всей области, а не только на больших расстояниях от источника. Полученные “инварианты” (в отличие от интегралов расхода и импульса) не дают однозначной связи дальнего поля струи с характеристиками источника. Выяснен [4], [11] физический смысл однородного решения Румера. Оказывается, данное решение является вторым членом разложения решения Ландау в ряд по обратным степеням расстояния до начала координат, которое смещено относительно источника импульса в направлении импульса. При этом коэффициент при решении Румера выражается через величину смещения. В общем случае неавтономной струи всегда можно выбрать начало координат таким образом, чтобы данный коэффициент был равен нулю [4]. Предлагается [11] связать этот коэффициент с расходом, эжектируемой струей в начальном поперечном сечении. Данный результат получен из анализа решения Ландау, но не обоснован в общем случае.

Среди перечисленных решений представляется наиболее продуктивной идея Гольдштика о существовании скрытого закона сохранения. Под законом сохранения принято понимать дивергентное соотношение, которое равно нулю на решениях исследуемой системы уравнений. Методы вычисления законов сохранения обсуждаются в ряде монографий (см. [14]–[19]). Для систем уравнений, следующих из вариационного принципа, законы сохранения эффективно вычисляются с помощью теоремы Э. Нётер, если известна группа симметрий вариационного функционала [14], [15]. Однако неизвестно, можно ли построить вариационный функционал для уравнений Навье–Стокса. Достаточно трудоемкий метод прямого вычисления законов сохранения успешно применен в [16], [20], [21] к уравнениям динамики совершенного газа. В монографиях [17]–[19] описан алгоритм вычисления всех законов сохранения, применимый для широкого класса уравнений математической физики. Данный алгоритм позволяет получить набор интегрирующих множителей, которые приводят рассматриваемую систему к дивергентной форме.

Выше шла речь о локальных законах сохранения, т.е. о таких дивергентных выражениях, которые включают только независимые и зависимые переменные, входящие в рассматриваемые уравнения, а также производные любого порядка от зависимых переменных по независимым. В то же время запас законов сохранения может быть расширен путем интегриродифференциальной замены зависимых переменных в уравнениях. Полученные таким способом законы сохранения называются нелокальными. Методы отыскания соответствующих замен переменных изложены в [18], [19]. Примеры построения нелокальных законов сохранения для различных моделей математической физики приведены в [19], [22].

Локальные законы сохранения уравнений Навье–Стокса исчерпываются известными законами сохранения массы, импульса и момента импульса [23]. О нелокальных законах сохранения этих уравнений ничего не известно. В теории пограничного слоя хорошо известен инвариант плоской пристенной струи [24], [25], который следует из нелокального закона сохранения, зависящего от функции тока. Данный инвариант не имеет общезначимого смысла, поскольку его размерность соответствует произведению потока импульса на расход. Похожий закон сохранения вычислен [26] для уравнений пограничного слоя, описывающих осесимметричную задачу. Определен [27] неизвестный коэффициент в решении Лойцянского при помощи нелокального



Фиг. 1. (а) – Сферическая и цилиндрическая системы координат; (б) – смещение источника импульса.

закона сохранения [26]. Вопрос о существовании аналогичного закона сохранения в трехмерной пристенной струе является открытым [28].

В настоящей работе решение Гольдштика–Яворского для дальнего поля струи получено в элементарных функциях при больших числах Рейнольдса, и в этом решении определена константа при однородном решении Румера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать стационарную осесимметричную незакрученную струю вязкой несжимаемой жидкости, которая вытекает из кругового отверстия радиуса a в пространство, затопленное той же жидкостью. Пусть U – максимальная скорость в отверстии. Определим безразмерные переменные:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^*}{a}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}^*}{U}, \quad p = \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho U^2}, \quad \text{Re} = \frac{Ua}{\nu},$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки поля течения с координатами (R, θ) , (z, r) соответственно в сферической и цилиндрической системах координат с началом в центре отверстия (фиг. 1а); $\mathbf{V} = (V_R, V_\theta) = (u, v)$ – вектор скорости и его компоненты в сферической и цилиндрической системах координат (фиг. 1а); ρ – постоянная плотность жидкости; p – давление; p_∞^* – давление в невозмущенной области; Re – число Рейнольдса; ν – кинематический коэффициент вязкости. Звездочкой отмечены размерные переменные. Струя распространяется вдоль оси z .

Функции $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, $p(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (\nabla \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{V}. \quad (1)$$

Граничные условия определяются распределением скорости $u(0, r)$ в отверстии и затуханием всех компонент скорости на большом расстоянии от отверстия. На оси симметрии z выполняются условия $v = 0$, $\partial u / \partial r = 0$.

При больших числах Рейнольдса струю можно рассматривать в приближении пограничного слоя:

$$\frac{\partial(ur)}{\partial z} + \frac{\partial(vr)}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Хотя струйное течение зависит от распределения скорости $u(0, r)$ в отверстии, вдали от отверстия $z \gg 1$ многие детали начального профиля скорости “забываются”, и течение зависит от некоторых интегральных характеристик источника струи. Как правило, для дальнего поля струи удается построить аналитическое решение, в которое входят неизвестные константы. Цель работы заключается в выяснении связи неизвестных констант в дальней асимптотике струи с интегральными характеристиками ее источника.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Уравнение (2) позволяет ввести функцию тока ψ :

$$d\psi = urdr - vrdz = V_R R^2 \sin \theta d\theta - V_\theta R \sin \theta dR. \tag{4}$$

Далее предполагается, что нулевая линия тока, на которой $\psi = 0$, совпадает с полуосью $z > 0$.

Точное решение [2], [3] уравнений (1) описывает автомодельную струю, порожденную точечным источником импульса:

$$\psi^{(1)}(R, s) = \text{Re}^{-1} R \frac{2(1-s^2)}{A-s}, \tag{5}$$

где $s = \cos \theta$; константа A связана с потоком осевого импульса J через произвольную сферу, окружающую источник, соотношением [29]:

$$J = 16\pi \text{Re}^{-2} A \left(1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \left(\frac{A+1}{A-1} \right) \right). \tag{6}$$

Объемный расход жидкости $Q^{(1)} = 2\pi\psi^{(1)}(R, -1)$ через произвольную сферу, окружающую источник, равен нулю. Причиной является нулевой размер источника. Действительно, поток импульса и расход являются величинами порядка $J \sim \rho U^2 a^2$, $Q \sim Ua^2$. Если $a \rightarrow 0$ при $J = \text{const}$, то $Q \rightarrow 0$.

В случае источника конечного размера решение (5) описывает дальнейе поле струи, где $R \gg 1$. В следующих координатных приближениях появляется решение [4] $c_0\psi^{(2)}(s)$, где c_0 – неизвестная константа,

$$\psi^{(2)}(s) = \text{Re}^{-1} (1-s^2) \frac{1-As}{A(A-s)^2}. \tag{7}$$

Физический смысл решения (7) разъясняется в работах [4], [11]. Перепишем решение (5) в сферических координатах (R', s') , соответствующих смещению начала координат вдоль оси z в точку $z = z_0$ (см. фиг. 1б):

$$\psi^{(1)}(R, s) = \text{Re}^{-1} \frac{2R'^2(1-s'^2)}{A\sqrt{2z_0(R's' + z_0) + R'^2 - z_0^2 - R's' - z_0}},$$

где $R_s = R's' + z_0$, $R\sqrt{1-s^2} = R'\sqrt{1-s'^2}$. Разложим полученное выражение в ряд Тейлора по степеням z_0/R' до линейного члена

$$\psi^{(1)}(R, s) = \psi^{(1)}(R', s') + 2Az_0\psi^{(2)}(s') + O\left(\left(\frac{z_0}{R'}\right)^2\right). \tag{8}$$

Таким образом, $c_0 = 2Az_0$, т.е. в случае точечного источника константа c_0 определяется смещением z_0 источника относительно начала координат. В случае источника конечного размера величина z_0 неизвестна, и константа c_0 должна определяться из других соображений. Заметим, что решение (7) имеет нулевой расход: $Q^{(2)} = 2\pi c_0\psi^{(2)}(-1) = 0$.

Рассмотрим теперь решения (5) и (7) в приближении пограничного слоя. Из (6) следует, что при $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$ имеем

$$A = 1 + \frac{2}{\alpha^2} \text{Re}^{-2} + o(\text{Re}^{-2}), \quad \alpha = \sqrt{\frac{3J}{16\pi}}. \tag{9}$$

Подставим (9) в формулы (5), (7), выполним переход к цилиндрическим координатам (z, r) , где $z = R \cos \theta$, $r = R \sin \theta$, затем выделим главные члены в разложениях полученных выражений по степеням $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$ при фиксированных переменных z и $\eta = \text{Re} \cdot r/z$:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \Psi^{(1)}(z, \eta) + o(\text{Re}^{-1}), \\ \Psi^{(1)} &= \text{Re}^{-1} z \frac{\alpha^2 \eta^2}{1 + \alpha^2 \eta^2 / 4}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c_0 \Psi^{(2)} &= \beta \Psi^{(2)}(\eta) + o(\text{Re}^{-1}), \\ \Psi^{(2)} &= -\frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \frac{1 - \alpha^2 \eta^2 / 4}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\beta = 2c_0 \text{Re}^{-1}. \quad (12)$$

Решения (10) и (11) получены соответственно в [1] и [5] с помощью уравнений пограничного слоя. Дальняя асимптотика струи построена [5] в виде:

$$\Psi(z, r) = \Psi^{(1)}(z, \eta) + \beta \Psi^{(2)}(\eta) + o(1), \quad (13)$$

$$u = u^{(1)} + \beta u^{(2)} + o(z^{-2}), \quad v = v^{(1)} + \beta v^{(2)} + o(z^{-2}), \quad (14)$$

где

$$u^{(1)} = \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^2} \frac{\text{Re}}{z}, \quad v^{(1)} = \frac{\alpha^2 \eta (1 - \alpha^2 \eta^2 / 4)}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^2} \frac{1}{z}, \quad (15)$$

$$u^{(2)} = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1 - 3\alpha^2 \eta^2 / 4}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^3} \frac{\text{Re}^2}{z^2}, \quad v^{(2)} = -\frac{1}{2} \alpha^2 \eta \frac{1 - 3\alpha^2 \eta^2 / 4}{(1 + \alpha^2 \eta^2 / 4)^3} \frac{\text{Re}}{z^2}. \quad (16)$$

В монографиях [6], [7] константа β в решении (13) выражается через расход жидкости в отверстии

$$Q = 2\pi \int_0^1 u(0, r) r dr = 2\pi \Psi(0, +\infty) = 2\pi \beta. \quad (17)$$

Соотношение (17) базируется на предположении, что разложение (13) справедливо вплоть до отверстия $z = 0$, что в общем случае неверно [5].

Решение уравнений Навье–Стокса (1) при $R \rightarrow +\infty$ с ненулевым расходом построено [8] в виде

$$\psi(R, s) = \psi^{(1)}(R, s) + B \psi^{(2)}(s) \ln R + \psi^{(3)}(s) + o(1), \quad (18)$$

где функции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ описываются формулами (5) и (7), B – неизвестная константа, а $\psi^{(3)}$ – неизвестная функция.

Подстановка (18) в уравнения (1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию $\psi^{(3)}$:

$$((1 - s^2)(A - s)^2 \psi^{(3)''})' + 6(A^2 - 1) \psi^{(3)} = (A - s)^2 f(s), \quad (19)$$

где

$$f(s) = C + B \left(6 - \frac{6A^2 - 2}{A(A - s)} + \frac{3(A^2 - 1)}{(A - s)^2} - \frac{8A(A^2 - 1)}{(A - s)^3} + \frac{6(A^2 - 1)^2}{(A - s)^4} \right).$$

Зададим конечный расход условием $\psi^{(3)}(-1) = Q/(2\pi)$. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (19) относительно функции $\psi^{(3)}$, дополненное граничными условиями аналитичности решения в точках $s = \pm 1$, является самосопряженной краевой задачей. По теореме Фредгольма об альтернативе данная задача разрешима, если правая часть (19) ортогональна решению (7) однородной краевой задачи.

Заданный расход и условие ортогональности образуют систему двух линейных уравнений на константы B и C [8]:

$$\begin{aligned} & \left(9A^2 - 5 - 4A(A^2 - 1) \ln \frac{A+1}{A-1}\right) B + \left(A^2 + \frac{1}{3}\right) C = -\frac{3}{2\pi} (A^2 - 1) Q, \\ & \left(-44A^2 + \frac{196}{3} - \frac{8}{A^2} + \frac{(A^2 - 1)(22A^2 - 18)}{A} \ln \frac{A+1}{A-1}\right) B + \left(-4A^2 + \frac{20}{3} + 2 \frac{(A^2 - 1)^2}{A} \ln \frac{A+1}{A-1}\right) C = 0. \end{aligned}$$

Сформулированная краевая задача имеет бесконечно много решений в зависимости от c_0 :

$$\psi^{(3)}(s) = c_0 \psi^{(2)}(s) + \varphi(s), \tag{20}$$

где $\varphi(s)$ — частное решение неоднородной краевой задачи, найденное в квадратурах [8].

Построим координатное разложение решения (20) по степеням $(s - 1)$ при $s \rightarrow 1$ в виде

$$\psi^{(3)}(s) = K_1(s - 1) + K_2(s - 1)^2 + O((s - 1)^3). \tag{21}$$

При произвольном значении коэффициента K_1 остальные члены ряда (21) определяются однозначно. Например,

$$K_2 = \frac{(6K_1 - B - C)A^3 + 2(B + C)A^2 - (11B + C + 6K_1)A + 2B}{4A(A - 1)^2}.$$

Задание коэффициента K_1 эквивалентно заданию константы c_0 .

Анализ полученной в [8] явной формулы для $\varphi(s)$ затруднен ее чрезвычайно сложным видом. Представляется разумным исследовать асимптотику этого решения в практически важном случае больших чисел Рейнольдса. Тогда получим

$$B = \frac{9Q}{4\pi\alpha^2} \text{Re}^{-2}, \quad C = -\frac{45Q}{4\pi\alpha^2} \text{Re}^{-2}. \tag{22}$$

В выбранных безразмерных переменных $Q = O(1)$, поэтому в области внешнего течения $1 - s = O(1)$ функция тока $\varphi_o(s)$ является величиной порядка $O(1)$ и удовлетворяет уравнению:

$$((1 - s^2)(1 - s)^2 \varphi_o'')' = 0.$$

Регулярное при $s = -1$ решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi_o(s) = -\frac{Q}{4\pi} (s - 1). \tag{23}$$

Рассмотрим теперь внутреннюю область $\eta = O(1)$. Функция тока в этой области $\varphi_i(\eta)$ подчиняется уравнению:

$$\begin{aligned} & -\eta^2(\alpha^2\eta^2 + 4)^4 \varphi_i'''' - 3\eta(\alpha^2\eta^2 - 4/3)(\alpha^2\eta^2 + 4)^3 \varphi_i'' + \\ & + 3(\alpha^4\eta^4 - 88\alpha^2\eta^2/3 - 16/3)(\alpha^2\eta^2 + 4)^2 \varphi_i' + 256B\alpha^4\eta^3(\alpha^2\eta^2 - 2) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условию $\varphi_i(0) = 0$ и срачивающееся с внешним решением (23) при $\eta \rightarrow +\infty$, имеет вид:

$$\varphi_i(\eta) = 2c_0 \text{Re}^{-1} \Psi_2(\eta) + \text{Re}^{-2} \frac{Q}{\pi\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2\eta^2}{8} + 3 \ln(1 + \alpha^2\eta^2/4) - \frac{\alpha^2\eta^2(7\alpha^2\eta^2 + 26)}{(\alpha^2\eta^2 + 4)^2} \right). \tag{25}$$

Найдем связь коэффициента K_1 в ряде (21) с константой c_0 в решении (25), приравняв главные члены разложения этих выражений при $\eta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(\eta) &= -\frac{K_1 \text{Re}^{-2}}{2} \eta^2 + o(\eta^2), \\ \varphi_i(\eta) &= -\left(\frac{1}{2} c_0 \alpha^2 \text{Re}^{-1} + \frac{3Q \text{Re}^{-2}}{4\pi} \right) \eta^2 + o(\eta^2), \\ K_1 &= c_0 \alpha^2 \text{Re} + \frac{3Q}{2\pi}. \end{aligned}$$

Асимптотические формулы (23), (25) проверены сравнением с численным решением задачи Коши для уравнения (19) с условием (21).

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение (2) выражает закон сохранения массы. Проинтегрируем данное уравнение по r :

$$\frac{dQ}{dz} = -2\pi \lim_{r \rightarrow +\infty} (vr), \quad Q(z) = 2\pi \int_0^{+\infty} ur dr. \quad (26)$$

Расход $Q(z)$ сохраняется, если $v = o(r^{-1})$ при $r \rightarrow +\infty$. Это требование нарушается для струи (10), (15), поэтому расход через поперечное сечение струи не сохраняется: $Q(z) = 8\pi \operatorname{Re}^{-1} z$.

Умножим уравнение (3) на r и сложим с уравнением (2), умноженным на u ,

$$\frac{\partial ru^2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0. \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (27) по r , получаем закон изменения потока осевой компоненты импульса через поперечное сечение струи:

$$\frac{dJ}{dz} = -2\pi \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad J(z) = 2\pi \int_0^{+\infty} u^2 r dr. \quad (28)$$

Поток импульса сохраняется, если $u = O(r^{-1})$, $v = O(r^{-1})$ при $r \rightarrow +\infty$, что выполняется для струи (10), (15).

Умножим уравнение (27) на величину $\psi - \operatorname{Re}^{-1} z$ и приведем полученное выражение к дивергентному виду:

$$\frac{\partial}{\partial z} (ru^2(\psi - \operatorname{Re}^{-1} z)) + \frac{\partial}{\partial r} \left((\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) \left(ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}^{-1} (ur)^2 \right) = 0.$$

Интегрируя данное уравнение по r , получаем закон изменения еще одной величины:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} = - \lim_{r \rightarrow +\infty} \left((\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) \left(ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}^{-1} (ur)^2 \right), \\ E = \int_0^{+\infty} u^2 (\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) r dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Интеграл (29) сохраняется, если $u = o(r^{-1})$, $v = O(r^{-1})$ при $r \rightarrow +\infty$. На решении (10), (15) инвариант (29) равен нулю, что позволяет использовать его для определения констант в следующих координатных приближениях.

Приведем выражение интеграла (29) в размерных переменных:

$$E^* = \int_0^{+\infty} u^{*2} (\psi^* - v z^*) r^* dr^*.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ β И c_0

Определим константу β в решении (13) с помощью инварианта (29). Имеем

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} u^2 (\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) \eta d\eta = \\ &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (u^{(1)} + \beta u^{(2)} + o(z^{-2}))^2 (\Psi^{(1)} + \beta \Psi^{(2)} + o(1) - \operatorname{Re}^{-1} z) \eta d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (u^{(1)2} + 2\beta u^{(1)} u^{(2)} + o(z^{-3})) (\Psi^{(1)} - \operatorname{Re}^{-1} z + \beta \Psi^{(2)} + o(1)) \eta d\eta = \\
 &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (\beta u^{(1)2} \Psi^{(2)} + 2\beta u^{(1)} u^{(2)} (\Psi^{(1)} - \operatorname{Re}^{-1} z) + o(z^{-2})) \eta d\eta.
 \end{aligned}$$

Используя (10), (11), (12), (15), (16), получаем

$$E = \frac{2}{3} \beta \alpha^2, \quad \beta = \frac{3E}{2\alpha^2}, \quad c_0 = \frac{3E}{4\alpha^2} \operatorname{Re}. \quad (30)$$

При этом инвариант E вычисляется через профиль скорости в отверстии с помощью формулы (29), в которой следует положить $z = 0$.

Полученные результаты без труда обобщаются на случай турбулентной струи, поскольку усредненное по времени поле скорости в турбулентной струе в рамках модели постоянной турбулентной вязкости описывается теми же уравнениями [5], [7], что и ламинарная струя.

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Аппроксимируем уравнения (2), (3) полностью неявной конечно-разностной схемой второго порядка точности по обеим координатам:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(\frac{3u_k^{n+1} - 4u_k^n + u_k^{n-1}}{2\Delta z} + \frac{3u_{k-1}^{n+1} - 4u_{k-1}^n + u_{k-1}^{n-1}}{2\Delta z} \right) + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{v_k^{n+1} r_k - v_{k-1}^{n+1} r_{k-1}}{\Delta r} = 0, \\
 &u_k^{n+1} \frac{3u_k^{n+1} - 4u_k^n + u_k^{n-1}}{2\Delta z} + v_k^{n+1} \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta r} - \operatorname{Re}^{-1} \left(\frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_k} \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta r} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

где $z^n = n\Delta z$, $r_k = k\Delta r$, $0 \leq n \leq n_{\max}$, $1 \leq k \leq k_{\max}$.

Аппроксимация уравнения (3) в узлах на оси струи при $k = 0$ имеет вид:

$$u_0^{n+1} \frac{3u_0^{n+1} - 4u_0^n + u_0^{n-1}}{2\Delta z} - 2 \operatorname{Re}^{-1} \frac{u_1^{n+1} - 2u_0^{n+1} + u_{-1}^{n+1}}{\Delta r^2} = 0.$$

Численное решение приведенных разностных уравнений при граничных условиях $u_1 = u_{-1}$, $v_0 = 0$, $u_{k_{\max}+1} = 0$ строится маршевым методом [30]. Начальный профиль скорости задается в узлах при $n = -1$, $n = 0$. Использовались следующие варианты задания начального профиля скорости при $r \leq 1$: параболический профиль $u(0, r) = 1 - r^2$ и линейный профиль $u(0, r) = 1 - r$. При $r > 1$ выполняется $u(0, r) = 0$. Радиальная скорость в начальном сечении равна нулю. Результаты получены при $\operatorname{Re} = 100$, $\Delta z = \Delta r = 0.01$, $r_{\max} = 300$.

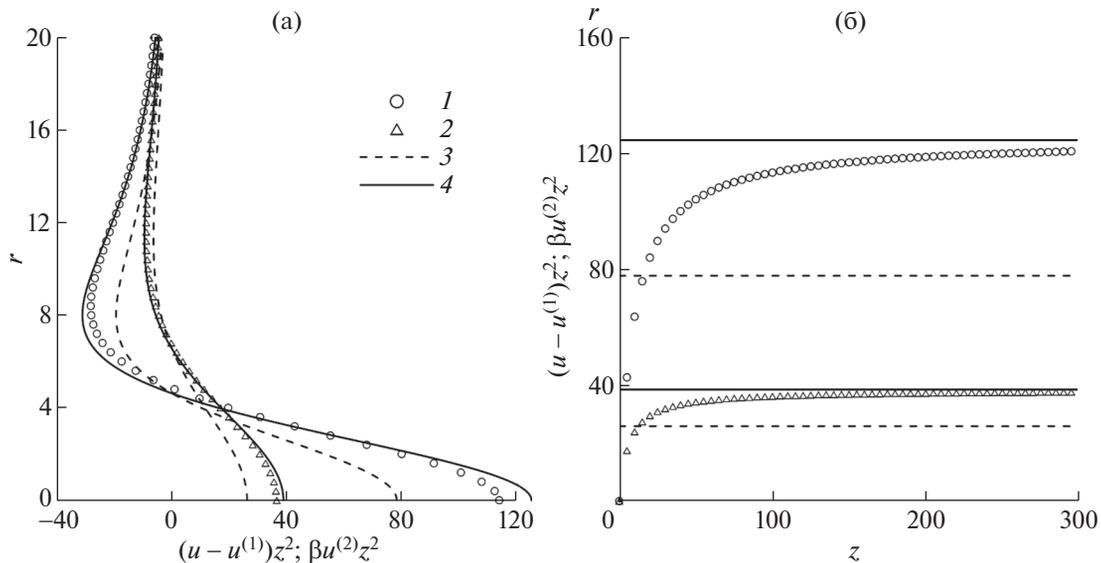
Верификация численного метода проводилась для параболического начального профиля скорости. Проведено сравнение профиля осевой скорости в сечении $z = 300$, полученного в расчете при $(\Delta z, \Delta r) = (0.01, 0.01)$, с профилями, полученными при $(0.01, 0.02)$, $(0.01, 0.04)$, $(0.02, 0.01)$, $(0.04, 0.01)$. Отличие при $r \leq 200$ не превосходило значений 0.006, 0.01, 0.01, 0.03% соответственно. Следует ожидать, что погрешность определения продольной скорости при дискретизации $(0.01, 0.01)$ не больше 0.01%.

На каждом шаге по z проверялось сохранение интегралов (28) и (29). Для используемых начальных профилей скорости отклонение интегралов от начального значения не превосходит 2% вплоть до сечения $z = 300$.

В табл. 1 для используемых начальных профилей скорости приведены значения инвариантов J , (28), E , (29), а также значения константы β , определенной двумя способами: традиционным (17) и новым (30), основанным на интеграле (29).

Таблица 1. Зависимость параметров струи от начального профиля скорости

$u(0, r)$	J , (28)	E , (29)	β , (17)	β , (30)
$1 - r^2$	$\pi/3$	1/60	1/4	2/5
$1 - r$	$\pi/6$	13/2520	1/6	26/105



Фиг. 2. Сравнение отклонений численного и асимптотического (14) решений от решения (15) при $z = 100$ (а), $r = 0$ (б): 1 – численное решение для параболического начального профиля скорости; 2 – численное решение для линейного начального профиля скорости; 3 – решение (14), (17); 4 – решение (14), (30).

На фиг. 2 приведено сравнение численного и асимптотического (14) решений для профиля осевой скорости в сечении $z = 100$ и для скорости на оси струи. Из всех решений вычтено решение (15). Легко видеть, что решение (14), (30) гораздо ближе к численному решению, чем (14), (17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В свободных осесимметричных затопленных струях в приближении пограничного слоя сохраняется интеграл, аналогичный инварианту плоской пристенной струи. С помощью этого интеграла определяется неизвестная константа в дальней асимптотике незакрученной струи. Полученный результат легко обобщается на турбулентные струи. Предложенный метод определения константы является решением парадокса скрытых инвариантов, сформулированного М.А. Гольдштикком, при больших числах Рейнольдса. Остаются открытыми проблемы определения аналогичной константы в закрученных и неосесимметричных струях, и в струях при произвольном числе Рейнольдса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung // *Z. Angew. Math. Mech.* 1933. Bd. 13. H. 4. S. 260–263.
2. *Ландау Л.Д.* Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса // *Докл. АН СССР.* 1944. Т. 43. № 7. С. 299–301.
3. *Squire H.B.* Some viscous fluid flow problems I: Jet emerging from a hole in a plane wall // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* 1952. V. 43. № 344. P. 942–945.
4. *Румер Ю.Б.* Задача о затопленной струе // *Прикл. матем. и механ.* 1952. Т. 16. № 2. С. 255–256.
5. *Лойцянский Л.Г.* Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // *Прикл. матем. и механ.* 1953. Т. 17. № 1. С. 3–16.
6. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматлит, 1962. 479 с.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
8. *Гольдштик М.А., Яворский Н.И.* О затопленных струях // *Прикл. матем. и механ.* 1986. Т. 50. № 4. С. 573–583.
9. *Goldshnik M.A.* Viscous-flow paradoxes // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1990. V. 22. № 1. P. 441–472.
10. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1989. 336 с.

11. *Яворский Н.И.* О скрытом интеграле сохранения в теории затопленных струй // XII Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теор. и прикл. механ. Аннотации докладов. 19–24 августа 2019 г. Уфа, 2019. С. 92.
12. *Гольдштик М.А.* О закрученных струях // Известия АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1979. № 1. С. 26–35.
13. *Жвик В.В.* Инварианты и асимптотики осесимметричных закрученных затопленных струй // Прикл. механ. и техн. физ. 2020. Т. 61. № 2. С. 92–108.
14. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1978. 400 с.
15. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Физматлит, 1983. 280 с.
16. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
17. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.
18. *Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Изд-во “Факториал Пресс”, 2005. 380 с.
19. *Krasil'shchik J., Verbovetsky A., Vitolo R.* The Symbolic Computation of Integrability Structures for Partial Differential Equations. Springer, 2018. 263 p.
20. *Терентьев Е.Д., Шмыглевский Ю.Д.* Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1535–1544.
21. *Терентьев Е.Д., Шмыглевский Ю.Д.* Полная система дивергентных уравнений электромагнитной динамики совершенного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 3. С. 725–737.
22. *Krasil'shchik I.* Nonlocal Conservation Laws of PDEs Possessing Differential Coverings // Symmetry. 2020. V. 12. 1760.
23. *Gusyatnikova V.N., Yumaguzhin V.A.* Symmetries and Conservation Laws of Navier–Stokes Equations // Acta Applicandae Mathematicae. 1989. V. 15. P. 65–81.
24. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // Труды Ленинградского политехнического института. 1953. № 5. С. 24–31.
25. *Glauert M.V.* The wall jet // J. Fluid Mechanics. 1956. V. 1. P. 625–643.
26. *Naz R.* Conservation laws for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl // Applicable Analysis: An International Journal. 2012. V. 91. № 5. P. 1045–1052.
27. *Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Связь дальней асимптотики струи с профилем скорости в отверстии // Докл. АН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 46–49.
28. *Krechetnikov R., Lipatov I.* Hidden invariances in problems of two-dimensional and three-dimensional wall jets for Newtonian and non-Newtonian fluids // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2002. V. 62. № 6. P. 1837–1855.
29. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
30. *Hornbeck R.W.* Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer. Washington: D.C. NASA, 1973. V. 297. 349 p.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 517.97

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

ЮРИЙ ДМИТРИЕВИЧ ШМЫГЛЕВСКИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ
ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ¹⁾

© 2021 г. А. Н. Крайко^{1,2,*}

¹ 111116 Москва, ул. Авиамоторная, 2, ЦИАМ, Россия

² 141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пр-т, 9, МФТИ, Россия

*e-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 15.01.2021 г.
Переработанный вариант 20.02.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

В середине XX века задачи построения сверхзвуковых частей реактивных сопел, реализующих максимум тяги, стали актуальными и важными в связи с развитием ракетной техники. Демонстрируется выдающийся вклад Ю.Д. Шмыглевского в решение таких вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. Библ. 40. Фиг. 4.

Ключевые слова: вариационные задачи газовой динамики, сопла максимальной тяги, характеристики сверхзвуковых течений невязкого (“идеального”) газа, переход к контрольному контуру, множители Лагранжа, решения К. Гудерлея и Е. Хантша, решения Ю.Д. Шмыглевского.

DOI: 10.31857/S0044466921100094

1. ВВЕДЕНИЕ

В конце 50-х годов XX века внимание автора, тогда еще студента, привлекли первые работы Ю.Д. Шмыглевского, посвященные вариационным задачам сверхзвуковой газовой динамики. Много, если не все, представлялось в них непонятным, загадочным и непостижимым. С годами автор, благодаря возникшему контакту с Юрием Дмитриевичем, приобщился к искусству решения более сложных вариационных задач газовой динамики. Несмотря на это он, как и тогда, не может избавиться от чувств удивления, а подчас и восхищения, которые вызывают в нем новые решения, подходы и пути, появляющиеся и открываемые в данной весьма специфической области газовой динамики и оптимального управления.

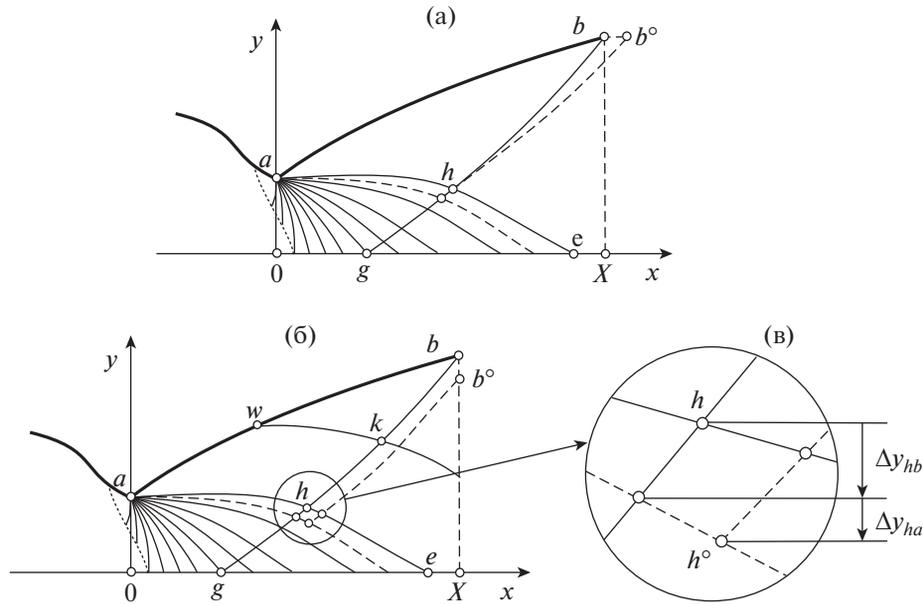
Чтобы увидеть красоту вариационных задач газовой динамики, связанные с ними проблемы и роль Ю.Д. Шмыглевского в их разрешении, вспомним, какие вариационные задачи сверхзвуковой газовой динамики в связи с запросами ракетной техники решались к концу 50-х—началу 60-х годов XX века.

2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ, КОНТРОЛЬНЫЙ КОНТУР
И РЕШЕНИЕ К. ГУДЕРЛЕЯ И Е. ХАНТША

Пожалуй, самой важной из возникших в те далекие годы вариационных задач газовой динамики стала задача профилирования оптимальной сверхзвуковой части осесимметричного реактивного сопла. Первыми к этой вариационной задаче обратились К. Гудерлей и Е. Хантш [1], две постановки которых поясняет фиг. 1а. На ней в плоскости $xу$ декартовых или цилиндрических координат ($xу_z$ или $xу_\phi$) нарисован контур ab сверхзвуковой части сопла, который при заданных: контуре сужающейся части, длине $x_b = X$, нулевой z - или ϕ -компоненте $w = 0$ вектора скорости и однородных удельной энтропии $s \equiv s_0$ и полной энтальпии $H \equiv H_0$ реализует максимум интеграла сил давления

$$\chi = \int_a^b y^{v-1} (p - p^+) dy. \quad (2.1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 19-01-00671 и 20-01-00100).



Фиг. 1. К постановке задач о построении оптимальной сверхзвуковой части сопла: (а) контрольный контур (“КК”) [1], (б) и (в) КК [5], [9].

Здесь $\nu = 1$ и 2 в плоском и осесимметричном случаях, p – давление на обтекаемом контуре, а p^+ – заданное “внешнее” давление (например, $p^+ = 0$ при полете ракеты в пустоте). В одной из постановок вариационной задачи [1] ордината конечной точки профилируемого сопла также задавалась ($y_b = Y$), в другой – должна находиться в процессе решения.

Наряду с контуром сопла на фиг. 1а нарисованы S^- -характеристики пучка волн разрежения, возникающего при обтекании излома контура в точке a , пунктирная звуковая линия ($M = 1$) и S^+ -характеристика ghb . Авторы [1] ограничились случаем прямой звуковой линии – отрезка оси y : $0 \leq y \leq y_a$ с параллельным оси x звуковым потоком. Тип уравнений обсуждаемых ниже течений невязкого и нетеплопроводного (“идеального”) газа зависит от числа Маха $M = V/a$ – отношения $V = |\mathbf{V}|$, где \mathbf{V} – вектор “меридиональной” скорости потока (без z - или ϕ -компоненты w) к скорости звука a . Малые вариации контура ab , в частности, его наклона справа от точки a , не изменяют до-, транс- и сверхзвуковое течения слева от замыкающей S^- -характеристики ahe пучка волн разрежения, а с ними – расход газа G и поток x -компоненты количества движения в минимальном сечении сопла. Поэтому контур сверхзвуковой части сопла, оптимальный по интегралу сил давления χ , будет оптимальным и по тяге сопла, и по его удельной (отнесенной к G) тяге.

Сложность решаемых “в точной постановке” вариационных задач газовой динамики обусловлена тем, что входящее в формулу (2.1) давление в любой точке w контура ab зависит от формы всего контура сопла левее точки w . “Точная постановка” означает, что эту зависимость определяет решение уравнений течения в частных производных по x и y слева от приходящей в точку w S^+ -характеристики с “условием непротекания” – равенством нулю нормальной к обтекаемым контурам компоненты скорости \mathbf{V} и ее y -компоненты v на оси x . К счастью, при решении в точной постановке первых вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики ситуация существенно упростилась благодаря переходу к “характеристическому контрольному контуру”. Первым такой переход в 1950 г. применил А.А. Никольский в одной из закрытых работ. А.А. Никольский воспользовался им при построении в линейном приближении оптимальных по волновому сопротивлению головных и кормовых частей обтекаемых сверхзвуковым потоком тел вращения с протоком. В приближении нелинеаризованных уравнений безвихревого течения К. Гудерлей и Е. Хантш [1] применили переход к характеристическому контрольному контуру независимо (открытая публикация [2] работы А.А. Никольского относится к 1957 г.).

Для возможности перехода к контрольному контуру необходимо, чтобы оптимизируемый функционал χ – интеграл по контуру ab в (2.1), можно было выразить через интегралы по отрезкам ag и gb . Один интеграл вычисляется по отрезку ag S^- -характеристики пучка волн разрежения с фокусом в точке a , второй – по S^+ -характеристике gb . Описанный переход, возможный в

силу интегрального закона сохранения x -компоненты количества движения, приводит к такому выражению для оптимизируемого функционала

$$\chi = \int_a^g y^{v-1} [p - p^+ + \rho u(u - x'v)] dy + \int_g^b y^{v-1} [p - p^+ + \rho u(u - x'v)] dy, \quad (2.2)$$

$$x' \equiv \frac{dx}{dy} = \text{ctg}(\theta \pm \mu), \quad \sin \mu = \frac{1}{M}, \quad M = \frac{V}{a}, \quad u = V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta.$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак отвечает C^+ (C^-)-характеристикам, ρ – плотность газа (известная функция p и $s \equiv s_0$), u есть x -компонента вектора \mathbf{V} , θ – угол \mathbf{V} с осью x и μ – угол Маха. В дополнение к χ через интегралы по тем же отрезкам характеристик и с теми же формулами для x' выражаются заданная абсцисса точки b и условие равенства расходов газа, протекающих через отрезки характеристик ag и gb ,

$$L_1 \equiv \int_a^g \text{ctg}(\theta - \mu) dy + \int_g^b \text{ctg}(\theta + \mu) dy - X = 0, \quad (2.3)$$

$$L_2 \equiv \int_a^g y^{v-1} \rho(u - x'v) dy + \int_g^b y^{v-1} \rho(u - x'v) dy = 0.$$

Пока переход от одного отрезка ab к двум ag и gb , вроде бы, лишь усложнил задачу, добавив второе равенство (2.3), которое, как и первое, должно учитываться в качестве изопериметрического условия. Однако не это главное. Искомому оптимальному контуру отвечает отрезок hb оптимальной C^+ -характеристики, распределение параметров на котором удовлетворяет “условию совместности”. Это условие для “незакрученных” ($w = 0$) и “однородных” по $s \equiv s_0$ и $H \equiv H_0$ течений можно записать в форме [3]

$$\theta' - \frac{\text{ctg} \mu}{V} V' + \frac{(v-1) \sin \theta \sin \mu}{y \sin(\theta + \mu)} = 0$$

с полными производными θ' и V' по y вдоль отрезка hb . Здесь и ранее все термодинамические переменные, скорость звука a и угол Маха μ – функции V в силу равенства: $h + V^2/2 = H_0$, в котором удельная энтальпия h – известная функция p и $s \equiv s_0$. Поэтому условие совместности можно записать иначе

$$L \equiv \beta' + \frac{(v-1) \sin \theta \sin \mu}{y \sin(\theta + \mu)} = 0, \quad \beta = \theta - \Phi, \quad \Phi = \Phi(V) = \int_{V_*}^{V > V_*} \frac{\text{ctg} \mu(V^\circ)}{V^\circ} dV^\circ \quad (2.4)$$

с постоянной во всем потоке критической скоростью V_* .

В итоге описанный переход привел к замене вариационных задач с уравнениями с частными производными на задачи с одним обыкновенным дифференциальным уравнением (2.4) и изопериметрическими условиями (2.3). Даже в наше время это – серьезнейшее упрощение. Как решать подобные задачи, было известно и 70 лет назад. Решение начиналось с получения необходимых условий двустороннего экстремума – “уравнений Эйлера” вариационного исчисления. Для этого составлялся вспомогательный “функционал Лагранжа”

$$I = \chi + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \int_h^b \lambda L dy \quad (2.5)$$

с χ , L_1 , L_2 и L из (2.2)–(2.4). В (2.5) λ_1 , λ_2 и $\lambda = \lambda(y)$ – постоянные и переменный множители Лагранжа, подлежащие определению.

Если, как в [1], фиксировать начальную точку g C^+ -характеристики контрольного контура, то допустимые варьирования контура ab приведут к показанным штрихами на фиг. 1а смещению отрезка hb C^+ -характеристики и появлению небольшого горизонтального участка b^0b , к возмущению параметров потока на hb и к изменению координат точки h из-за возможного малого уменьшения или увеличения излома контура в точке a , а при свободной ординате точки b при второй постановке вариационной задачи – к изменению и этой координаты. При таких (“допу-

стимых”) варьированиях, естественно, выполняются условия (2.3) и уравнение (2.4). Поэтому приращения χ и вспомогательного функционала совпадают: $\Delta\chi = \Delta I$. В результате, проделав необходимые выкладки, придем к выражению

$$\Delta\chi = \int_h^b \left[(\lambda' - A) \left(\frac{\text{ctg}\mu}{V} \delta V - \delta\theta \right) + y^{v-1} B \delta V \right] dy + \lambda_b (\delta\theta - \text{ctg}\mu \delta V / V)_b + y_b^{v-1} C_b (x_b - X) + y_b^{v-1} F_b \Delta y_b \tag{2.6}$$

с “вариациями” δV и $\delta\theta$ – разностями V и θ при фиксированном y на отрезках $h^\circ b^\circ$ и hb и с Δy_b – разностью y концевых точек b этих отрезков только при второй постановке вариационной задачи. Коэффициенты A, \dots – линейные функции λ_1, λ_2 и λ – равны

$$A = y^{v-1} \rho \frac{V[V \cos \mu + \lambda_2 \cos(\theta + \mu)] \sin \mu + \Lambda_1 - \Lambda(v-1) \sin^2 \mu}{\sin^2(\theta + \mu)},$$

$$B = \frac{1}{\sin^2(\theta + \mu)} \left\{ [(V\mu_V - \text{ctg}\mu) \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \mu] \rho V - \Lambda_1 \frac{\text{ctg}\mu + V\mu_V}{V} + \lambda_2 \rho \frac{V\mu_V \sin \theta \sin \mu - \sin(\theta + 2\mu) \cos \mu}{\sin \mu} + \Lambda \frac{v-1}{V} (\cos \mu \sin \mu + V\mu_V \sin^2 \theta) \right\},$$

$$C = \rho V (V \cos \theta + \lambda_2) \sin \theta - \Lambda_1, \quad F = p - p^+ + \frac{\rho a (V \cos \theta + \lambda_2)}{\sin(\theta + \mu)} + \Lambda_1 \text{ctg}(\theta + \mu),$$

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{y^{v-1}}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{y^v}, \quad \mu_V = \frac{d\mu}{dV}.$$

Выражение (2.6) справедливо для обтекаемых без образования ударных волн в треугольнике ahb и искомого (оптимального) контура, и неоптимальных контуров ab , удовлетворяющих условиям (2.3) и уравнению (2.4) на отрезке C^+ -характеристики hb .

Выше и при дальнейшем изложении автор, придерживаясь главных установок цитируемых работ, во-первых, использует единообразные, принятые им в [3] обозначения, и, во-вторых, иногда добавляет отсутствующие в этих работах, но и не противоречащие им соображения из [3], [4], в частности, связанные с вводимой ниже “компенсирующей” точкой.

В выражение (2.6) входят пока еще неопределенные множители Лагранжа. Множитель λ определим дифференциальным уравнением и условием

$$\lambda' = A(y, \theta, V, \Lambda_1, \lambda_2, \Lambda), \quad \lambda_b = 0, \tag{2.7}$$

а множитель $\lambda_1 = y^{v-1} \Lambda_1$ или λ_2 – условием

$$C_b \equiv C(\theta_b, V_b, \Lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{2.8}$$

С учетом (2.7) и (2.8) выражение для приращения χ принимает вид

$$\Delta\chi = \int_h^b y^{v-1} B \delta\theta dy + y_b^{v-1} F_b \Delta y_b, \quad F_b = F(\theta_b, V_b, p^+, \Lambda_1, \lambda_2). \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) пока еще не позволяет получить необходимое условие, определяющее оптимальное (“экстремальное”) распределение параметров на отрезке hb с заданными $x_b = X$ и $y_b = Y$ в первой задаче, и в дополнение найти оптимальную координату y_b – во второй. Это нельзя сделать по двум причинам. Во-первых, входящие в B и F_b множители Лагранжа все еще не определены. Во-вторых, нужно реализовать независимое знакоопределенное варьирование V в ε -окрестности любой точки hb при $\delta V \equiv 0$ вне такой ε -окрестности.

Обе проблемы решает введение на hb “компенсирующей” точки c , в которой за счет выбора все еще неопределенных множителей Λ_1 и λ_2 обращается в нуль коэффициент B : $B_c = 0$. Это всегда можно сделать, поскольку B – линейная функция Λ_1 и λ_2 . Теперь при знакоопределенном варьировании V в окрестности любой отличной от c точки отрезка hb для удовлетворения первого условия (2.3) варьируется V в ε -окрестности точки c . Поскольку $B_c = 0$, то правая часть выраже-

ния (2.8) будет такой же, как при знакоопределенной вариации δV только в ε -окрестности рассматриваемой точки при $\delta V \equiv 0$ вне ее. Следовательно, если $V(y)$ оптимально, то равенство

$$B(\theta, V, \mu_V, \Lambda_1, \lambda_2, \Lambda) = 0 \quad (2.10)$$

должно выполняться во всех точках отрезка hb .

При второй постановке вариационной задачи оптимальную величину координаты y_b определит условие

$$F_b = F(\theta_b, V_b, p^+, \Lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad (2.11)$$

которое вместе с условием (2.8) и записанным в точке b равенством (2.10) с $\Lambda_b = 0$ связывает параметры потока и внешнее давление p^+ в точке b оптимального сопла. Эта связь, одинаковая в плоском и осесимметричном случаях, получается, если множители Λ_1 и λ_2 , найденные из (2.8) и (2.10), подставить в (2.11). Искомая связь через входящую в B производную μ_V , на первый взгляд, должна зависеть от уравнений состояния газа. Это, однако, не так, т.е. μ_V в нее не входит. Первые полученные в [1] для произвольного “двухпараметрического” газа, все термодинамические параметры которого — функции двух из них, например, p и s или p и ρ , она свелась к равенству

$$(p - p^+ - \rho V^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \mu)_b = 0, \quad (2.12)$$

которое в отечественных публикациях, включая [3], [4], названо “условием Буземана”. Почему так, объясняют цитата и последующая демонстрация сказанного в [1]: “Смысл этого соотношения можно понять при помощи рассуждения, принадлежащего Буземану. Именно, можно варьировать направление малого последнего элемента контура сопла, не изменяя при этом распределение давления по остальной его части, лежащей выше по потоку. Поэтому последний элемент должен принять направление, для которого тяга самого этого элемента будет максимальной”.

Затем сначала авторы [1] строят оптимальные плоские сопла. Для них ($v = 1$), во-первых, уравнение (2.4) сводится к $\beta' = 0$, и, во-вторых, в условии оптимальности (2.10) нет переменного множителя Лагранжа λ и равного ему Λ , а $\Lambda_1 = \lambda_1$. В результате на hb имеем

$$\theta - \Phi(V) = \beta_h, \quad B(\theta, V, \mu_V(V), \lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Отсюда следует, что θ , V и прочие параметры газа на отрезке hb постоянны, а сам он прямой. Поэтому при однородном по H и s течении контур любого плоского оптимального сопла получается укорочением некоторого сопла с равномерным потоком на выходе. Следовательно, при заданной сужающейся части контуры плоских оптимальных сопел образуют однопараметрическое семейство, каждая кривая которого определена углом наклона в точке a . В [1] приведено также несколько оптимальных контуров осесимметричных сопел, при построении которых было проще решать “обратную задачу”. В ней вместо x_b и y_b задавались угол излома контура в точке a и положение точки h на C^- -характеристике ae . Однако в [1] и обратная задача остается сложной. Ведь в условии оптимальности (2.10) входит множитель λ , определяемый интегрированием уравнения (2.7) с условием $\lambda_b = 0$ в точке b .

3. КОНТРОЛЬНЫЙ КОНТУР И РЕШЕНИЯ Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКОГО

Важнейшим этапом в решении вариационных задач газовой динамики стали статьи Ю.Д. Шмыглевского [5], [6], опубликованные в 1957 г. Их автор также воспользовался переходом к характеристическому контрольному контуру, но слегка отличному от контура фиг. 1а. Отличие поясняют фиг. 1б и 1в. На них проварьированный (штриховой) отрезок $h^\circ b^\circ$ приходит в точку b° с фиксированной абсциссой ($x_{b^\circ} = X$), однако точка h может смещаться и по C^+ -, и по C^- -характеристике. Кроме того, наряду с безвихревыми (однородными по H и s) течениями в [5], [6] допускались H и s , которые могли зависеть от функции тока ψ , вводимой дифференциальным равенством

$$d\psi = y^{v-1} \rho (u dy - v dx) = y^{v-1} \rho V (\cos \theta dy - \sin \theta dx).$$

Поэтому в формулах для χ и X интегралы по y заменили интегралы по ψ , а вместо одного дифференциального уравнения на отрезке hb C^+ -характеристики стало два:

$$\chi = \int_a^h \left[V \cos \theta - p \frac{\sin(\theta - \mu)}{\rho V \sin \mu} \right] d\psi + \int_h^b \left[V \cos \theta + p \frac{\sin(\theta + \mu)}{\rho V \sin \mu} \right] d\psi - p^+ \frac{y_b^v - y_a^v}{v}, \tag{3.1}$$

$$L_1 \equiv \int_a^h \frac{\cos(\theta - \mu)}{y^{v-1} \rho V \sin \mu} d\psi + \int_h^b \frac{\cos(\theta + \mu)}{y^{v-1} \rho V \sin \mu} d\psi - X = 0,$$

$$L_2 \equiv y' - \frac{\sin(\theta + \mu)}{y^{v-1} \rho V \sin \mu} = 0, \quad L \equiv \theta' - \frac{\text{ctg} \mu}{V} V' + \frac{v-1}{y^v \rho V} \sin \theta = 0. \tag{3.2}$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, “штрих” означает производную по ψ вдоль hb , а второе уравнение (3.2) по-прежнему справедливо только для течений, однородных по H и s .

Далее, как и выше, составлялся вспомогательный функционал I . Справедливое на hb дифференциальное уравнение $L_2 = 0$ вводилось в него интегралом по hb с переменным множителем $\lambda_2(\psi)$, вместо постоянного, введившего равенство расходов газа через отрезки ag и gb контрольного контура. Теперь равенство расходов газа через отрезки ah и hb выполняется благодаря переходу от y к ψ при том, что переменная y , ставшая зависимой, при $v = 2$ входит в L_1 и в условие совместности.

Если, как в [5], [6], фиксировать абсциссу x_b , то допустимые варьирования контура ab , включающие уменьшение или увеличение угла излома в точке a , приведут к возмущению параметров потока на отрезке hb и к показанным штрихами на фиг. 1б и 1в замене замыкающей C^- -характеристики пучка волн разрежения и смещению отрезка hb C^+ -характеристики с появлением небольшого вертикального участка bb° и к перемещениям точки h по характеристикам обоих семейств, а не одного, как в [1]. При таких (“допустимых”) варьированиях выполняются условие (3.1) и уравнения (3.2). Поэтому приращения χ и функционала Лагранжа совпадают: $\Delta\chi = \Delta I$. В результате, проделав необходимые выкладки, придем к выражению

$$\Delta\chi = \int_h^b \left\{ (\lambda' - A) \left(\frac{\text{ctg} \mu}{V} \delta V - \delta\theta \right) + [\lambda_2' - (v-1)E] \delta y + B \delta V \right\} d\psi + G_h \Delta\psi_{ha} + \lambda_b (\delta\theta - \text{ctg} \mu \delta V / V)_b + (\lambda_2 - p^+ y^{v-1})_b \delta y_b \tag{3.3}$$

с “вариациями” $\delta\theta$, ... – разностями θ , ... при фиксированном ψ на отрезках $h^\circ b^\circ$ и hb , с $\Delta\psi_{ha}$ – разностью ψ точек h° и h вдоль C^- -характеристики ha , как Δy_{ha} на фиг. 1в, и с δy_b только при второй постановке вариационной задачи. Коэффициенты A , ... – линейные функции λ_1 , λ_2 и λ – равны

$$A = V \sin \theta - \frac{\lambda_1 \sin(\theta + \mu) - (\lambda_2 - y^{v-1} p) \cos(\theta + \mu)}{y^{v-1} \rho V \sin \mu} - \lambda \frac{v-1}{y^v \rho V} \cos \theta,$$

$$B = \left[2 \sin \theta + \frac{\lambda_1 \cos(\theta + 2\mu) + (\lambda_2 - y^{v-1} p) \sin(\theta + 2\mu)}{y^{v-1} \rho V^2 \sin^2 \mu} \right] \text{ctg} \mu - \frac{\lambda_1 \cos \theta + (\lambda_2 - y^{v-1} p) \sin \theta}{y^{v-1} \rho V \sin^2 \mu} \mu_\nu - \lambda \frac{v-1}{y^v \rho V^2} \text{ctg}^2 \mu \sin \theta,$$

$$E = \frac{y[\lambda_1 \cos(\theta + \mu) + \lambda_2 \sin(\theta + \mu)] - v\lambda \sin \theta \sin \mu}{y^{v+1} \rho V \sin \mu},$$

$$G = 2 \frac{\lambda_1 \cos \theta + (\lambda_2 - y^{v-1} p) \sin \theta}{y^{v-1} \rho V} \text{ctg} \mu + \lambda \left[\beta' - \left(\frac{d\beta}{d\psi} \right)^- \right].$$

Индекс “минус” в последнем слагаемом формулы для коэффициента G означает, что производная $d\beta/d\psi = d\theta/d\psi - (V^{-1} \text{ctg} \mu) dV/d\psi$ вычисляется вдоль C^- -характеристики.

В выражение (3.3) входят пока еще неопределенные множители Лагранжа. Два из них λ и λ_2 определим дифференциальными уравнениями и условиями

$$\lambda' = A(y, \theta, V, \lambda_1, \lambda_2, \lambda), \quad \lambda_b = 0, \quad (3.4)$$

$$\lambda_2' = (v-1)E(y, \theta, V, \lambda_1, \lambda_2, \lambda), \quad G_h = 0. \quad (3.5)$$

В результате выражение для $\Delta\chi$ принимает вид

$$\Delta\chi = \int_h^b B\delta V d\psi + (\lambda_2 - p^+ y^{v-1})_b \delta y_b. \quad (3.6)$$

Затем, как и выше, на hb вводилась “компенсирующая” точка c . В ней за счет выбора множителя λ_1 удовлетворялось условие $B_c = 0$. После этого при знакоопределенном варьировании V в окрестности любой отличной от c точки отрезка hb для удовлетворения условия (3.1) варьировалась скорость V в ε -окрестности точки c . Поскольку $B_c = 0$, то правая часть выражения (3.6) будет такой же, как при знакоопределенной δV только в ε -окрестности рассматриваемой точки при $\delta V \equiv 0$ вне ее. Следовательно, если $V(\psi)$ оптимально, то равенство

$$B(y, \theta, V, \mu_V, \lambda_1, \lambda_2, \lambda) = 0 \quad (3.7)$$

должно выполняться во всех точках отрезка hb .

В плоском случае решение полученных уравнений существенно упрощается и приводит к тем же результатам, что в [1]. Действительно, при $v = 1$ функция B не содержит y и λ , а уравнение (3.5) имеет вид $\lambda_2' = 0$. Отсюда $\lambda_2 = \lambda_{2h}$. Поэтому в необходимое условие экстремума (3.7) кроме V и θ входят одни константы, с учетом постоянства $\theta - \Phi(V) = \beta_h$ параметры газа на hb постоянны, и плоские оптимальные контуры получаются укорочением контуров сопел, реализующих равномерный поток.

В осесимметричном случае “обратная задача” с решением на hb уравнений C^+ -характеристики и двух задач (3.4) и (3.5) сложнее “обратной задачи”, решавшейся в [1]. Однако главное достижение Ю.Д. Шмыглевского состояло в доказательстве того, что $\lambda = 0$ на всей “экстремальной” характеристике hb . По сравнению с [1] это неизмеримо упростило решение.

Прежде чем вспомнить, как сам Юрий Дмитриевич описывал историю столь важного доказательства, перепишем уравнение (3.4) с правой частью, преобразованной с привлечением условия (3.7),

$$\lambda' = \frac{\lambda_1 \cos \theta + (\lambda_2 - y^{v-1} p) \sin \theta}{y^{v-1} \rho V \sin 2\mu} (V \mu_V - \text{ctg} \mu) + (v-1) \frac{\sin(\theta - \mu) - \cos \theta \sin \mu}{2y^v \rho V \sin \mu} \lambda.$$

Такая запись поможет понять ту увлекательную и поучительную историю.

Просматривая результаты расчетов, Ю.Д. Шмыглевский обратил внимание на малость λ и на то, что этот множитель уменьшался по мере более точного удовлетворения всех условий задачи и с повышением точности вычислений. “Такое не может быть случайностью. Вдруг, $\lambda = 0$, но почему?” – задавал себе вопросы ученый и вскоре понял, что это на самом деле так, и вот почему. В силу гиперболичности уравнений сверхзвуковых течений идеального газа любой концевой участок wb оптимального контура ab на фиг. 1б должен быть оптимален сам по себе, т.е. при неизменном участке aw и сдвиге участка hk C^+ -характеристики hb в невозмущенном потоке. Можно показать, что при этом в выражении (3.3) для $\Delta\chi$ нужно h заменить на k , а условие $G_h = 0$ в (3.5) заменить на $G_k = 0$, т.е. $G = 0$ на всем отрезке hb . Вспомнив выражение для G , найдем, что на hb

$$\frac{\lambda_1 \cos \theta + (\lambda_2 - y^{v-1} p) \sin \theta}{y^{v-1} \rho V \sin 2\mu} = \frac{\lambda}{4 \cos^2 \mu} \left[\left(\frac{d\beta}{d\psi} \right)^- - \beta' \right]. \quad (3.8)$$

В силу этого предыдущее уравнение примет вид

$$\lambda' = \frac{V \mu_V - \text{ctg} \mu}{4 \cos^2 \mu} \left[\left(\frac{d\beta}{d\psi} \right)^- - \beta' \right] \lambda + (v-1) \frac{\sin(\theta - \mu) - \cos \theta \sin \mu}{2y^v \rho V \sin \mu} \lambda.$$

Итак, λ определяется линейным однородным уравнением и условием $\lambda_b = 0$. Значит, $\lambda = 0$ на hb , а из равенства (3.8) следует, что

$$\lambda_2 - y^{v-1} p = -\lambda_1 \operatorname{ctg} \theta \quad (3.9)$$

также на всем отрезке hb .

Подстановка в условие оптимальности (3.7) $\lambda = 0$ и λ_2 из (3.9) приводит к равенству

$$y^{v-1} \rho V^2 \sin^2 \theta \operatorname{tg} \mu = \lambda_1 \quad (3.10)$$

с константой λ_1 , определяемой по значению левой части в точке h . Вместе с уравнениями (3.2) и уравнением для x' на C^+ -характеристике условие оптимальности (3.10) полностью определяет экстремальную характеристику hb . В условие оптимальности в точке b

$$(\lambda_2 - p^+ y^{v-1})_b = 0, \quad (3.11)$$

которое получается из (3.6) при постановке задачи со свободной ординатой конечной точки оптимального контура, входит переменный множитель λ_2 . Выше его определение предполагало интегрирование уравнения (3.5). Теперь же λ_2 на hb дается формулой:

$$\lambda_2 = y^{v-1} (p - \rho V^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \mu), \quad (3.12)$$

т.е. следствием равенств (3.9) и (3.10). При этом исключение множителей λ_1 и λ_2 с помощью формул (3.10) и (3.12) из уравнения (3.5) сводит его к условию совместности (3.2), а подстановка множителя λ_{2b} , определенного формулой (3.12), в равенство (3.11) приводит к условию Буземана (2.12).

Как отмечалось в начале раздела, Юрий Дмитриевич рассматривал более общие неоднородные течения, в которых

$$2h(p, s) + V^2 = 2H(\psi), \quad s = S(\psi), \quad (3.13)$$

с заданными функциями $H(\psi)$ и $S(\psi)$. Для них также $\lambda = 0$, и потому справедливы полученные ранее уравнение (3.5), равенства (3.9)–(3.12) и условие Буземана (2.12). При $v = 1$ уравнение (3.5) имеет вид $\lambda_2' = 0$, что дает $\lambda_2 = \lambda_{2h}$, и в силу (3.10) и (3.12) в плоском случае на экстремальном отрезке hb имеем два интеграла и их следствие:

$$\rho V^2 \sin^2 \theta \operatorname{tg} \mu = \lambda_1, \quad p - \rho V^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \mu = \lambda_{2h}, \quad p - \lambda_1 \operatorname{ctg} \theta = \lambda_{2h}.$$

Продифференцировав последнее, придем к условию совместности в форме, справедливой для неоднородных течений [3]

$$d\theta + \frac{c \operatorname{tg} \mu}{\rho V^2} dp = 0.$$

В [5], [6] вариационная задача для неоднородных течений была решена и с независимой переменной y . При этом переменный множитель Лагранжа $\lambda_2(y)$ вводил выполняющееся на hb дифференциальное уравнение

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{y^{v-1} \rho V \sin \mu}{\sin(\theta + \mu)} = 0.$$

Далее, как и при независимой переменной ψ , множитель, вводящий условие совместности, оказывался на hb равным нулю. С учетом этого условие оптимальности сводилось к равенству (3.10), а вместо формулы (3.12) с $\lambda_2(\psi)$ получалась формула

$$\lambda_2(y) = \frac{V \cos(\theta - \mu)}{\cos \mu}.$$

Множитель $\lambda_2(y)$ удовлетворял дифференциальному уравнению, которое в силу данной формулы и равенства (3.10) сводится к условию совместности для C^+ -характеристик. В результате и эта формула, нужная лишь для вывода уже известного условия Буземана, и дифференциальное урав-

нение для $\lambda_2(y)$ к построению экстремального hb не привлекаются, и о них можно было бы забыть. Однако для однородного течения $d\lambda_2/dy = 0$, и получается интеграл

$$\frac{V \cos(\theta - \mu)}{\cos \mu} = \lambda_{2h} \quad (3.14)$$

с константой, определяемой значением левой части в точке h .

Итак, в осесимметричном однородном течении на экстремальном отрезке hb выполняются две конечные связи между параметрами газа, что, однако, не переопределяет задачу построения hb , ибо любая из этих связей — следствие второй и условия совместности. В обратной задаче при известных отрезке ah замыкающей C^- -характеристики пучка волн разрежения с фокусом в точке a и экстремальном отрезке hb C^+ -характеристики оптимальный контур сопла ab находится из решения методом характеристик задачи Гурса как линия тока, проходящая через точку a .

Кроме рассмотренных выше “внутренних” задач, в [5], [6] решены “внешние” задачи построения оптимальных сверхзвуковых частей сопел с центральным телом и оптимальных по волновому сопротивлению кормовых частей тел с протоком. В них на экстремальном отрезке hb не C^+ -, а C^- -характеристики, как и выше, справедливо условие оптимальности (3.10) при замене формулы (3.12) и условий (2.12) и (3.14) на следующие:

$$\lambda_2 = y^{v-1}(p + \rho V^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \mu), \quad (3.15)$$

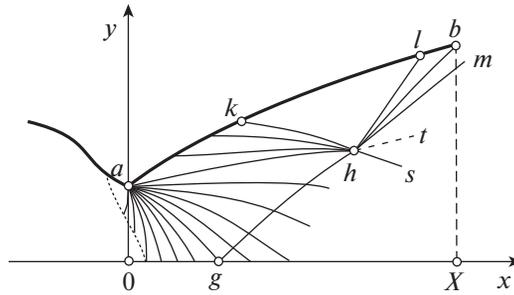
$$(p - p^+ + \rho V^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{tg} \mu)_b = 0, \quad \frac{V \cos(\theta + \mu)}{\cos \mu} = \lambda_{2h}. \quad (3.16)$$

Именно с “внешней” вариационной задачи начинался в [5], [6] поиск оптимального решения. Искался контур ab кормовой части обтекаемого сверхзвуковым потоком тела, реализующий минимум сопротивления или определяемого формулой (2.1) отрицательного интеграла сил давления. При отсутствии излома в точке a точка h отрезка hb контрольного контура лежит на выходящей из a C^+ -характеристике набегающего потока, и задача построения оптимального контура ab в общем случае решения не имеет. Как и для внутренней задачи без излома, для решения не хватает произвольных. Не встречавшийся с подобным в классическом вариационном исчислении Юрий Дмитриевич обратился к Д.Е. Охочимскому, у которого такие ситуации возникали в теории движения ракет [7]. Тот посоветовал поискать в газовой динамике течения наиболее быстрого разгона, привлечение которых должно было решить проблему. Увенчавшийся успехом поиск [8] привел к излому с центрированной волной разрежения, обладавшей требуемым свойством. Сейчас и без этого ясно, что излом неизбежен потому, что контур слева от точки a задан, а справа — ищется при отсутствии условия гладкой стыковки в постановке задачи. Думаю, именно так рассуждали введшие излом без комментариев авторы [1]. Конечно, так проще, но, с другой стороны, не столь загадочно и увлекательно, как было на незабываемой защите кандидатской диссертации Юрия Дмитриевича в мае 1957 г.

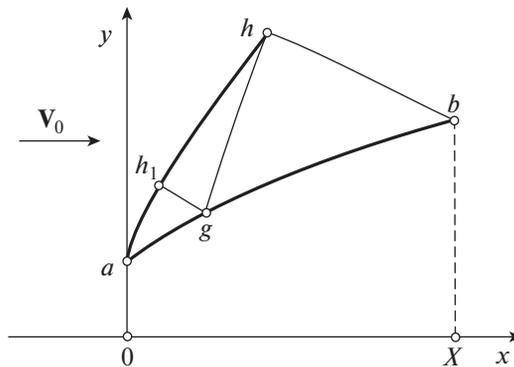
Как уже отмечалось выше, при построении оптимальных сопел легче решать обратную задачу, состоящую в определении экстремального отрезка hb -характеристики, координат точки b и давления p^+ для произвольной точки h пучка волн разрежения. Однако в 1961 г. Л.Е. Стернин — сотрудник гениального конструктора жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) В.П. Глушко — установил, что в осесимметричном случае построение отрезка hb с непрерывными параметрами на нем возможно не всегда [9] (уже много лет США покупают ЖРД НПО “Энергомаш им. акад. В.П. Глушко”). В волне разрежения есть линия, такая, что на экстремальных характеристиках, выходящих из точек h слева от нее, полные производные по y вдоль hb всюду конечны, а справа, в некоторой точке hb , становятся бесконечными. Построение непрерывного течения во втором случае невозможно. В связи с этим Юрий Дмитриевич [10], [11] провел анализ необходимых условий экстремума χ , нашел условие максимума и показал, что при $v = 2$ области максимума χ и непрерывности полученных ранее решений (названных “непрерывными”) совпадают.

В дополнение к непрерывным решениям в [10], [11] построены “разрывные безударные” решения, отличающиеся от первых фокусировкой C^- -характеристик в точке h . Схема такого течения приведена на фиг. 2. На ней ahk и lhm — пучки волн сжатия и разрежения, hs — скачок уплотнения и ht — тангенциальный разрыв. “Безударными” эти решения названы потому, что идущий из точки h косой скачок располагается вне области определенности ahb контура ab .

Параллельно с соплами и кормовыми частями Ю.Д. Шмыглевский тогда же занялся построением оптимальных профилей и тел вращения, обтекаемых с образованием присоединенных го-



Фиг. 2. Схема течения при реализации “разрывного безударного” решения Ю.Д. Шмыглевского [10], [11].



Фиг. 3. Схема обтекания оптимального контура тела с протоком.

ловных скачков [12]–[14]. В этих задачах (фиг. 3, gh – C^+ -характеристика) контрольный контур образуют отрезки скачка ah и C^- -характеристики hb . Угол наклона скачка σ к оси x и функцию $S(\psi)$ при $H = H_0$ в (3.13) определяет начальный участок ag искомого контура, а экстремальную характеристику hb – его концевой участок gb . Поэтому функция $S(\psi)$ при варьировании параметров потока на hb считается заданной, экстремальный отрезок hb по-прежнему определяет равенство (3.10), а вариации $\delta\sigma$ на ah не зависят от вариаций параметров на hb . Оптимальный угол $\sigma(\psi)$ на ah определяет условие, которое получается приравниванием нулю коэффициента W при $\delta\sigma$ в $\Delta\chi$. Подставив в равенство $W_h = 0$ множители λ_1 и λ_2 из (3.10) и (3.15), приходим к уравнению, связывающему параметры потока и угол σ в точке h головного скачка. Для фиксированного равномерного сверхзвукового набегающего потока оно выполняется при конечном числе значений σ – корней этого уравнения. Один корень: $\sigma_0 = \mu_0$ отвечает обтеканию прямолинейного контура ab , параллельного скорости набегающего потока V_0 и “скачку нулевой интенсивности” (C^+ -характеристике). “Нетривиальные” корни зависят от свойств газа. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями число таких корней в зависимости от величины скорости, отнесенной к критической, изменяется от нуля до трех.

В плоском случае каждому нетривиальному корню отвечает обтекание некоторого клина с постоянными параметрами в $abha$. Отвечающие нетривиальным корням оптимальные клинья первым обнаружил в самом начале своей научной деятельности Г.Г. Чёрный в его первой, тогда закрытой печатной работе [15] (см. также [16]). Сокращенный вариант этой замечательной работы увидел свет девятью годами позже в монографии [17]. Изучая сверхзвуковое обтекание тел, близких к клину, Г.Г. Чёрный нашел первое точное решение задачи о построении головной части минимального волнового сопротивления. Такой плоской головной частью оказался клин, но не всегда, как следовало из линейной теории, а только при равенстве нулю коэффициента отражения возмущений давления, приносимых к скачку от образующей клина по C^+ -характеристикам. Развитый Г.Г. Чёрным для доказательства этого результата оригинальный прием “варьирования в характеристических полосках” и в наше время используется при решении вариационных задач газовой динамики.

Оптимальные клинья, обнаруженные Г.Г. Чёрным, – единственный пример опережения Ю.Д. Шмыглевского в те годы не в смысле обобщения его результатов, например, на газы, отличные от совершенного, а в принципиальных вопросах построения оптимальных аэродинамических форм. Автор гордится тем, что и Горимир Горимирович, и Юрий Дмитриевич – его учителя.

В осесимметричном случае те же нетривиальные корни определяют параметры сверхзвукового потока за криволинейным скачком в точке h . От нее при $x_h = 0$, $y_h = 1$ и $\psi_h = \rho_0 V_0 / 2$ численным интегрированием по ψ уравнений

$$x' = -\frac{\cos(\theta - \mu)}{y\rho V \sin \mu}, \quad y' = -\frac{\sin(\theta - \mu)}{y\rho V \sin \mu}, \quad \theta' - \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} p' + \frac{\sin \theta}{y^2 \rho V} = 0$$

для $\psi < \psi_h$ с привлечением равенств (3.10) и $W = 0$, отвечающих $v = 2$, уравнений состояния газа и условий на косом скачке строятся экстремальные скачок и C^- -характеристика. Согласно выполненному анализу и расчетам, с приближением к оси симметрии угол наклона скачка растет и при конечных ψ и u достигает величины, при которой поток за скачком становится звуковым. Для найденных экстремальных отрезков ah и hb скачка и C^- -характеристики течение в $abha$ строится после этого методом характеристик. Любую линию тока построенного течения можно принять за оптимальную образующую головной части тела вращения с протоком. Для всех таких тел вращения коэффициент отражения равен нулю только в единственной точке h экстремального скачка.

Как мог заметить читатель, все рассказанное выше не предполагало конкретного вида уравнений состояния газа. Требовалось только, чтобы его термодинамические свойства, включая скорость звука a , были известными функциями двух из них, например, давления p и удельной энтропии s . Вне зависимости от вида этих функций для рассматриваемых течений имели место формулы: $(\partial p / \partial V)_\psi = -\rho V$ и $(\partial \rho / \partial p)_\psi = a^{-2}$. Благодаря им в выражениях для $\Delta \chi$ появлялась единственная зависящая от вида уравнений состояния величина $\mu_V = d\mu/dV$ или $(\partial \mu / \partial V)_\psi$ для неоднородных течений, но и она не вошла ни в условия Буземана для внутренней и внешней задач, ни в условия оптимальности (3.10), (3.14) и (3.16).

В отличие от вышеизложенного Юрий Дмитриевич в цитированных работах с самого начала включал в рассмотрение уравнения состояния совершенного газа с постоянными теплоемкостями и их отношением (“показателем адиабаты”) γ . К тому же, не всегда было ясно, какие конкретные выражения потребуются в дальнейшем. Поэтому нередко выписанные заранее сложные зависимости p , ρ и a от V или от μ для совершенного газа проходили через весь анализ, усложняя и его, и конечные результаты. В то же время именно это подвигло автора, следуя за Учителем, оформлявшим тогда докторскую диссертацию и ее сокращенный вариант [11], обобщить его результаты на произвольный двухпараметрический газ. Следствия затраченных усилий – брошюра [18] и приобретенный автором бесценный опыт решения вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. Еще раньше подход [5], [6] к построению оптимальных сопел под руководством Юрия Дмитриевича перенес на двухпараметрический газ уже упоминавшийся ранее Л.Е. Стернин [19].

В 1958 г. Г.В.Р. Рао [20] в задаче построения для однородного потока совершенного газа оптимального контура сверхзвуковой части сопла получил необходимые условия экстремума в форме (3.10) и (3.14), не предполагая, что hb – отрезок C^+ -характеристики и не привлекая условия совместности. У него оптимизируемая тяга и фиксированные длина и расход выражались через интегралы по кривой ghb – C^+ -характеристике только в пучке волн разрежения. Угол наклона $\varphi = \varphi(y)$ отрезка hb к оси x искался вместе с u и v . Полученное при этом выражение для $\Delta \chi$ включало интеграл по искомому отрезку hb с точкой h на замыкающей C^- -характеристике ahc пучка волн разрежения и с $(A\delta u + B\delta v + C\delta \varphi)$ в этом интеграле. Приравняв незаконно нулю коэффициенты при трех вариациях, Г.В.Р. Рао нашел, что $\varphi = \theta + \mu$, т.е. hb – отрезок C^+ -характеристики, и на нем выполняются равенства (3.10) и (3.14).

В [20] газ был совершенным, и условия оптимальности в форме (3.10) и (3.14) – следствия того, что δp и $\delta \rho$ находились не дифференцированием $p(V)$ и $\rho(V)$, а по формулам $dp/dV = -\rho V$ и $d\rho/dp = a^{-2}$, верным для однородных течений любых двухпараметрических газов. В [21] Г.В.Р. Рао, применив тот же подход [20] к соплу с центральным телом, получил условия оптимальности в форме (3.10) и (3.16) для экстремального отрезка C^- -характеристики.

В 1959 г. к построению “методом Рао” оптимальной сверхзвуковой части сопла при неоднородном течении обратился К. Гудерлей [22], рассмотревший газ, у которого p и ρ представимы

произведением функций h и s . Там же К. Гудерлей, понимая, что подход Рао нуждается в обосновании, попытался сделать это, однако, как видно из дальнейшего, без должного успеха. Прежде всего, непонятно, что делает вариации δu , δv и $\delta \varphi$ независимыми, а без этого приравнение нулю коэффициентов A , B и C при них в интеграле по hb незаконно. К вопросу о законности обсуждаемого подхода обратились и Ю.Д. Шмыглевский с недавно закончившим МФТИ его молодым сотрудником В.М. Борисовым. В их заметке [23] было показано, что причины удач Рао обусловлены особенностями рассмотренных задач и уравнений течения и в этом отношении случайны.

Заметка [23] еще была в печати, когда стало известно о конференции по оптимальным аэродинамическим формам, организуемой фирмой “Боинг”. О событиях, развернувшихся в связи с этой конференцией, речь пойдет в следующем разделе.

4. КОНФЕРЕНЦИЯ В СИЭТЛЕ И СОБЫТИЯ ВОКРУГ НЕЕ

Осенью 1962 г. стало известно, что фирма “Боинг” наметила провести в своей штаб-квартире в Сиэтле, шт. Вашингтон, конференцию по оптимальным аэродинамическим формам. Г.Г. Чёрный, приглашенный на нее от Советского Союза, через автора передал Ю.Д. Шмыглевскому материалы конференции с тем, чтобы тот поспешил принять в ней участие. Оба учителя автора знали и уважали друг друга, и первый мог не сомневаться в том, что второй достойно представит нашу науку.

Юрий Дмитриевич написал о желании принять участие в конференции ее организатору — Анжело Миеле, сообщив тому о направлении своих исследований. Реакция А. Миеле, лишь недавно занявшегося оптимальными аэродинамическими формами в рамках локальных законов сопротивления, была вполне доброжелательной. В его приглашении было пожелание, чтобы новый доклад не пересекался тематически с заявленным и уже принятым докладом Г.В.Р. Рао, приложенный текст которого практически повторял статью [20].

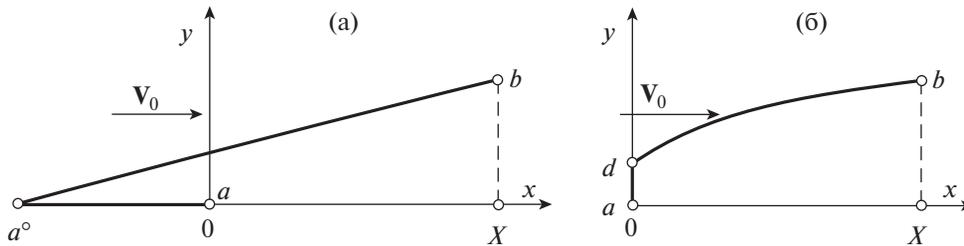
Учтя пожелание А. Миеле, Юрий Дмитриевич направил тому доклад о построении оптимальных кормовых частей плоских и осесимметричных тел и обтекаемых с присоединенными скачками головных частей профилей и тел вращения с протоком. Однако введение доклада включало также обзор работ по соплам, из которого были очевидны передовые позиции советских ученых и лично Ю.Д. Шмыглевского. Кроме того, А. Миеле были посланы переводы основных статей Юрия Дмитриевича, а также находящейся в печати и вышедшей в свет в начале 1963 г. заметки [23] с критическим анализом подхода Рао. После этого началось нечто необъяснимое.

А. Миеле, не будучи, согласно сказанному выше, специалистом в вариационных задачах, решаемых в приближении уравнений течения идеального газа (“в точной постановке”), вдруг начал высказывать сомнения в правильности результатов Ю.Д. Шмыглевского. “Сомнения” вращались вокруг двух вопросов: доказательства того, что условие $G = 0$ выполняется на всем отрезке hb , и двух конечных, эквивалентных равенствам (3.10) и (3.16) условий на отрезке hb для оптимальных кормовых частей тел вращения, обтекаемых однородным по H и s потоком совершенного газа. Напомню, что именно эти условия, записанные в более простой форме (3.10) и (3.16), получал и Рао. Все усилия объяснить А. Миеле эти “точки преткновения” были напрасны.

Последнее письмо А. Миеле, полученное за две недели до начала конференции, заканчивалось предложением: “Через неделю я буду в Париже. Давайте встретимся, чтобы снять вопросы, мешающие принятию Вашего доклада”. Запомнился ответ Юрия Дмитриевича: “У меня к Вам единственная просьба. Если Вы поймете, что были неправы, не сообщайте мне об этом”. Когда же “понявший, что был неправ”, попытался связаться с Юрием Дмитриевичем, тот был непреклонен. Чтобы отстоять честь Учителя, с А. Миеле пришлось “воевать” ученику, но это было позднее, а тогда завязалась другая увлекательная история с участием ученика и его Учителей. Забыл на время об А. Миеле, напомним ее.

Один из докладов Г.Г. Чёрного и его аспиранта А.Л. Гонора на предстоящей конференции касался головных частей тел вращения, оптимальных в рамках формулы Ньютона—Буземана для давления на теле. При заданных длине и радиусе основания они не могли построить оптимальный контур, начинающийся на оси симметрии. Как и в точной постановке [14], получались только тела с протоком. То же положение имело место и с более простой формулой Ньютона. В связи с этим А.Л. Гонор, повстречав в ЦИАМ автора, сказал: “Подумай, вдруг чего-нибудь сообразишь”.

Приехав в ВЦ, автор взял в библиотеке “Основы вариационного исчисления” М.А. Лаврентьева и Л.А. Люстерника, вспомнил то, чему его учили в МФТИ, проделал для формулы Ньютона



Фиг. 4. К построению оптимальной головной части тела вращения в приближении формулы Ньютона: (а) “мысленный эксперимент”, (б) оптимальный контур.

необходимые выкладки и, не построив требуемый контур и ничего не сообразив, пошел домой, чтобы утром проснуться с готовым решением. В то утро ему представился или приснился такой мысленный эксперимент. Ранее, как само собой разумеющееся, полагалось, что из точки a образующая ab идет сразу вправо. А если не так? Составим ее из двух участков (фиг. 4а): идущего влево отрезка aa^0 оси x и наклонного участка a^0b . Для такой образующей в рамках формулы Ньютона, согласно которой на ab : $p = p_0 + \rho_0 V_0^2 \sin^2 \theta$, и без вариационного исчисления коэффициент волнового сопротивления $c_x \rightarrow 0$ при $x_{a^0} \rightarrow -\infty$. Но, тут же спохватился “экспериментатор”, мы ведь задавали длину головной части, и потому нельзя вылезать за ось y ! Значит, оптимальный контур может содержать передний торец ad (фиг. 4б), появляющийся из-за ограничения длины головной части как участок краевого экстремума с допустимыми вариациями $\delta x \geq 0$ и $\delta x' \geq 0$ — из-за условия применимости формулы Ньютона.

Следствия утреннего “эксперимента” были получены в тот же день. В частности, было найдено условие стыковки в точке d торца ad и выпуклого участка двустороннего экстремума db : $x'_{d+} = 1$. Рассказ же обо всем этом Юрию Дмитриевичу вызвал бурю восторга: “Александр Николаевич, немедленно пишите статью” — его совет. Что было потом, любознательный читатель узнает, прочтя недавние воспоминания автора [24], [25], а мы вернемся к “войне” с А. Миеле.

По результатам конференции в Сиэтле в 1965 г. под редакцией А. Миеле вышла книга [26], к переводу которой на русский язык под редакцией А.Л. Гонора привлекли и автора данной статьи. Одной из доставшихся ему глав была глава Г.В.Р. Рао [27], в корне отличающаяся от его доклада, присланного Ю.Д. Шмыглевскому в 1962 г. Ссылаясь на статью К. Гудерля [22], который якобы обосновал первоначальный подход [20], Рао заменил его на подход Юрия Дмитриевича [5], [6] с рядом неверно излагаемых деталей, отмеченных переводчиком в русском издании [26].

В связи с переводом книги [26] в Москву летом 1966 г. прилетел А. Миеле, встретившийся с А.Н. Крайко. Дав необходимые разъяснения, А.Н. Крайко отправил А. Миеле их письменный вариант. Вот фрагмент ответа А. Миеле: “Дорогой Доктор Крайко, мои сотрудники предприняли проверку Ваших материалов в соответствии с тем, что Вы предложили. Эта проверка, теперь завершенная, показала, что Вы абсолютно правы. Поэтому я был бы признателен, если бы Вы передали эту информацию доктору Шмыглевскому с извинениями за все неудобства, которые я ему причинил. Поскольку Вы с доктором Гонором переводите книгу “Теория оптимальных аэродинамических форм” и планируется добавление нескольких глав, я хотел бы предложить Вам пригласить доктора Шмыглевского, чтобы он написал свою собственную главу. С моей точки зрения, это был бы лучший способ закончить спор к всеобщему удовлетворению”. На письмо близкого содержания Ю.Д. Шмыглевскому ответа, естественно, не последовало. Этим, однако, история отношений с А. Миеле тогда не закончилась.

К русскому переводу [26] было добавлено “Приложение” [28] из двух частей. В первой “Вариационные задачи гиперзвуковой аэродинамики с использованием приближенных законов сопротивления”, написанной А.Л. Гонором, в основном дан обзор исследований, выполненных после конференции в Сиэтле. Во второй, большей по объему, “Вариационные задачи сверхзвуковой аэродинамики с использованием точных уравнений течения газа”, написанной А.Н. Крайко, при обсуждении практически всех результатов этого направления демонстрировался приоритет советских ученых. Узнав об этом “Приложении”, А. Миеле сообщил А.Л. Гонору о готовности опубликовать его в журнале “Journal of Optimization Theory and Applications”, главным редактором которого он тогда стал. Загоревшегося А.Л. Гонора охладил его соавтор: “Такого не будет”. Как и ожидалось, английский перевод “Приложения” света не увидел.

5. НЕМНОГО О ДАЛЬНЕЙШИХ РЕЗУЛЬТАТАХ ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Длительное сотрудничество автора с Ю.Д. Шмыглевским ознаменовалось совместной публикацией [29] Учителя, ученика и И.Н. Наумовой. Авторы обратили внимание на то, что при заданной длине оптимальные тела могут иметь и передний (как у головной части фиг. 4б), и задний торец. В задаче о сверхзвуковой части сопла это объединило две постановки в одну. В ней заданы максимально допустимые осевой и радиальный размеры (X и Y), а искомый контур в общем случае состоит из обтекаемого сверхзвуковым потоком участка ab и торца $x = X$. На возможный торец $y_b \leq y \leq Y$ действует постоянное давление p^+ , и он присутствует, если определенная условием Буземана (2.12) ордината $y_b < Y$. Торец является участком краевого экстремума, если при выполнении условия Буземана $\sin^2 \theta_b > 0$. Если найденный угол $\theta_b = 0$, то это значит, что заданная длина X превышает длину сопла, реализующего равномерный осевой поток, и с учетом трения должна быть уменьшена.

Последняя проблема, которую автору довелось решать в то время, связана с развитием “общего метода множителей Лагранжа (ОММЛ)”. Его практически одновременно предложили применять к решению не допускающих перехода к контрольному контуру вариационных задач газовой динамики К. Гудерлей с Дж. Армиейджем [30] и Т.К. Сиразетдинов [31]. Все, кто тогда рядом с Юрием Дмитриевичем имели отношение к вариационным задачам, сочли, что этот метод весьма перспективен для построения оптимальных конфигураций в нерешенных и в почему-то нерешаемых задачах. Одной из таких задач была задача построения плоских и осесимметричных тел минимального сопротивления, обтекаемых с присоединенным головным скачком. В силу результатов обоих Учителей автора решения этой задачи были найдены лишь при равном нулю коэффициенте отражения возмущений давления от головного скачка в точке h (фиг. 3). Предположив, что при ненулевых коэффициентах отражения оптимальный контур может иметь выпуклый излом вблизи точки g , Юрий Дмитриевич предложил заняться этой задачей в рамках ОММЛ своему новому молодому сотруднику – выпускнику МФТИ А.В. Шипилину. Со временем А.В. Шипилин построит требуемые решения [32], [33], но тогда он сразу столкнулся с проблемой: невозможностью решить сопряженную задачу для множителей Лагранжа $\lambda_{1-3}(x, y)$, определяемых в ОММЛ линейными уравнениями с частными производными. Эти уравнения имеют те же, что уравнения течения, характеристики, т.е. C^\pm -характеристики и линии тока. Сопряженность задачи обусловлена заданием начальных условий для них на C^- -характеристике hb , а не в набегающем потоке, как для параметров газа.

А.В. Шипилин искал выход из возникшей ситуации подбором величины излома в точке g . Автор же, убежденный, что сопряженная задача должна иметь решение для любых контуров ab , пришел к разрывам множителей при непрерывных параметрах потока. На принципиальную важность этого результата для решения вариационных задач указал Ю.Д. Шмыглевский в сборнике своих трудов [34] (ссылки изменены): “Крайко [35] в рамках метода множителей Лагранжа ввел разрывы множителей и тем придал ему общность”. Как и положено для линейных уравнений с частными производными от двух независимых переменных, линиями разрыва $\lambda_{1-3}(x, y)$ могут быть не только скачки уплотнения и тангенциальные разрывы, на которых рвутся параметры газа, но и характеристики всех семейств, на которых параметры газа непрерывны. Для задачи А.В. Шипилина вторая возможность была принципиальна, поскольку в ней при отличном от нуля коэффициенте отражения в точке h линия разрыва множителей – ломаная из отрезков (фиг. 3) hg, gh_1 и т.д. C^+ - и C^- -характеристик. Другие источники их разрыва – обтекаемые с образованием пучков волн разрежения внутренние изломы контура. Здесь “разрывна” характеристика, проходящая в излом по потоку. Усиление и ослабление разрывов множителей вдоль характеристик описываются конечными формулами, а их отражение от головных скачков, твердых стенок и оси симметрии подобно отражению в акустическом приближении малых скачков параметров потока. Следует отметить, что в решенной ОММЛ задаче построения оптимальной сверхзвуковой части сопла с заданной площадью обтекаемой газом поверхности [30] и в [31] разрывов множителей не было.

Неизменно теплые отношения автора с одним из двух своих Учителей – Ю.Д. Шмыглевским – никогда не прерывались. Об этом свидетельствуют, в частности, слова признательности в вышедших из печати с тех пор монографиях и сборниках [3], [4], [16], [36]. С Юрием Дмитриевичем обсуждались все новые результаты автора и его учеников по оптимальным аэродинамическим формам. Некоторое представление о части из них дают приведенные выше монографии, Часть 4 сборника [16] с Введением [37] в нее и обзор [28]. Из задач, решенных с тех пор автором и его учениками, приведу лишь две. В первой [38] в точной постановке построены оптимальные

головные части тел вращения, о чем в 1960–1964 гг. мечтали Учитель и его ученик. За решение этой задачи автор в 2004 г. был награжден “Медалью и премией им. академика Л.И. Седова”. Вручал их Горимир Горимирович в присутствии Юрия Дмитриевича. Вторая задача [39], решенная совсем недавно, посвящена построению оптимальной кормовой части при кусочно-равномерном набегающем потоке с тангенциальным разрывом. Параметры набегающего потока таковы, что строившие ее прямым методом ожидали получить контур с вогнутым изломом, обтекаемым с косым скачком. Каково же было их удивление, когда прямой метод с “генетическим алгоритмом” и “кривыми Бернштейна-Безье” вместо решений с таким изломом и косым скачком построил решения с центрированными волнами сжатия и разрежения, фокусирующимися на контактном разрыве. Будучи аналогом “разрывного безударного решения” [10], [11], построенного Юрием Дмитриевичем 58 лет назад, найденные решения допускают переход к контрольному контуру, приводящему к точным условиям оптимальности. Жаль, что Юрий Дмитриевич не дожил до этого.

Наконец, письмо в редакцию [40] напоминает о том, что все авторы этого письма в 1979 г. получили Государственную премию СССР за “работу в области аппаратостроения” (если “раскрыть”, то за оптимальное профилирование ракетных сопел).

Закончу дарственной надписью ученику от Учителя на сборнике его работ Юрия Дмитриевича [34]: “Дорогому Александру Николаевичу в память обо всем связывающем нас неповторимо прекрасном. Ю. Шмыглевский. 11.01.1999”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guderley K.G., Hantsch E.* Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen // Zeitschrift für Flugwissenschaften. 1955. Bd. 3. H. 9. S. 305–313. *Гудерлей К., Хантш Э.* Наилучшие формы сверхзвуковых осесимметричных реактивных сопел // Сб. Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. № 4 (38). С. 53–69.
2. *Никольский А.А.* О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке / Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 56–63.
3. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. 440 с.
4. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 448 с.
5. *Шмыглевский Ю.Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Прикл. матем. и механ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 195–206.
6. *Шмыглевский Ю.Д.* Вариационная задача газодинамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 3. С. 520–522.
7. *Охоцимский Д.Е.* К теории движения ракет // Прикл. матем. и механ. 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 251–272.
8. *Шмыглевский Ю.Д.* О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122. № 5. С. 782–784.
9. *Стернин Л.Е.* О границе области существования безударных оптимальных сопел // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 2. С. 335–336.
10. *Шмыглевский Ю.Д.* Вариационные задачи сверхзвуковых тел вращения и сопел // Прикл. матем. и механ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 110–125.
11. *Шмыглевский Ю.Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики // Тр. ВЦ АН СССР. 1963. 142 с.
12. *Шмыглевский Ю.Д.* О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление // Прикл. матем. и механ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 269–273.
13. *Шмыглевский Ю.Д.* Поправка к статье Ю.Д. Шмыглевского “О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление” // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 392.
14. *Шмыглевский Ю.Д.* Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 923–926.
15. *Черный Г.Г.* Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ им. П.И. Баранова. 1950. № 197. 11 с. *Черный Г.Г.* Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // [16]. С. 443–462.
16. Газовая динамика. Избранное. Издание второе исправленное. В 2-х т. Т. 1 / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2005. 720 с.
17. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
18. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами // Тр. ВЦ АН СССР. 1963. 84 с.
19. *Стернин Л.Е.* К расчету осесимметричного реактивного сопла наименьшего веса // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. 1959. № 1. С. 41–45.

20. Rao G.V.R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust // *Jet Propulsion*. 1958. V. 28. № 6. P. 377–382.
21. Rao G.V.R. Spike nozzle contour for optimum thrust // *Planet. and Space Sci.* 1961. № 4. P. 92–101.
22. Guderley K.G. On Rao's method for the computation of exhaust nozzles // *Zeitschrift für Flugwissenschaften*. 1959. Bd. 7. H. 12. S. 345–350.
23. Борисов В.М., Шмыглевский Ю.Д. К постановке вариационных задач газовой динамики // *Прикл. матем. и механ.* 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 183–185.
24. Крайко А.Н. Задача Ньютона о головной части минимального сопротивления с разьяснениями А.Н. Крылова и продолжение истории решения в XX и в начале XXI века // *Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение* / Сб. тр. Международной летней научной школы-конференции, посвященной 155-летию со дня рождения акад. А.Н. Крылова. Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. ун-та, 2018. 268 с. С. 47–56.
25. Крайко А.Н. Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения // *Прикл. матем. и механ.* 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 734–748.
26. Theory of optimum aerodynamic shapes / Ed. by A. Miele. N.Y.-London: Academic press, 1965. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
27. Rao G.V.R. Построение оптимальных ракетных сопел методом сведения к вариационной задаче одного переменного // *Теория оптимальных аэродинамических форм* / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 161–171.
28. Гонор А.Л., Крайко А.Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // *Теория оптимальных аэродинамических форм*. М.: Мир, 1969. С. 455–492.
29. Крайко А.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке // *Прикл. матем. и механ.* 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 178–182.
30. Guderley K.G., Armitage J.V. General method for the determination of best supersonic rocket nozzles // Paper presented at the Symposium on extremal problems in aerodynamics, Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Science Laboratory, Seattle, Washington, December 3–4, 1962. Гудерлей К., Армтейдж Дж. Общий метод определения оптимальных ракетных сопел // *Сб. Механика*. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. № 6 (82). С. 85–101.
31. Сиразетдинов Т.К. Оптимальные задачи газодинамики // *Изв. ВУЗов. Авиационная техн.* 1963. № 2. С. 11–21.
32. Шипилин А.В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // *Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа*. 1966. № 4. С. 9–18.
33. Шипилин А.В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами // В кн.: *Сборник теоретических работ по гидромеханике*. М.: Тр. ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
34. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
35. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений // *Прикл. матем. и механ.* 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 285–295.
36. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: “ЯНУС-К”, 2001. 132 с.
37. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики и оптимальные аэродинамические формы. Введение // [16]. Часть 4. С. 357–372.
38. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // *Прикл. матем. и механ.* 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
39. Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И., Шаповалов В.А. Внутренние скачки уплотнения при сверхзвуковом обтекании контуров оптимальных тел и сопел // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа*. 2020. № 6. С. 121–138.
40. Крайко А.Н., Мельников Д.А., Пирумов У.Г., Сергиенко А.А., Стернин Л.Е., Шмыглевский Ю.Д. Замечания к статье Л.В. Гогиша “Исследование коротких сверхзвуковых сопел” (МЖГ, 1996, № 2, стр. 175–180) // *Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа*. 1967. №. 1. С. 185–186.

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

РАСЧЕТ ОСАЖДЕНИЯ СТРУИ КАПЕЛЬНОЙ ВЛАГИ МОМЕНТНЫМ МЕТОДОМ

© 2021 г. В. Н. Котеров^{1,*}, Р. И. Романенко^{2,**}

¹ 119333 Москва, Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ(ГУ), Россия

*e-mail: vkotеров@yandex.ru

**e-mail: romanenko.ri@phystech.edu

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
Переработанный вариант 07.03.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

На примере задачи расчета осаждения шлейфа мелкодисперсной капельной влаги, образованного компактным источником в потоке воздуха, проводится верификация моментного метода приближенного решения уравнения переноса и диффузии полидисперсной среды. Формулируется способ замыкания бесконечной цепочки моментных уравнений. Результаты расчетов уравнения переноса и диффузии сравниваются с расчетами, выполненными по двухмоментному и трехмоментному приближениям. Библ. 15. Фиг. 8. Табл. 1.

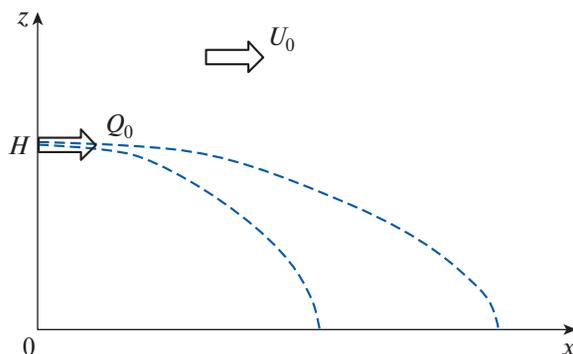
Ключевые слова: полидисперсная среда, уравнение переноса и диффузии, капельная влага, метод моментов.

DOI: 10.31857/S0044466921100082

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи расчета переноса воздушным потоком капельной влаги уже давно рассматриваются, например, при математическом моделировании зарождения и формирования осадков в облачных структурах. Подобные задачи возникают также при попытках описания распространения аэрозолей, распыляемых наземным или воздушным источниками. Еще одно интересное явление, к которому имеет отношение настоящая работа, – это возникновение и интенсивный перенос капельной влаги в нижних бьефах крупных гидроэлектростанций при работе их водосбросных сооружений. Математическая модель (см. [1]–[6]), описывающая данное явление, включает, в частности, блок расчета распространения капельной влаги в потоке воздуха. Перенос капельной влаги достаточно аккуратно описывается уравнением переноса и диффузии, которому удовлетворяет функция распределения капель по их размерам. При этом, однако, необходимо рассматривать четырехмерное пространство (три пространственные координаты, плюс перемнная, определяющая радиусы капель), что на практике требует длительных расчетов с использованием высокопроизводительных вычислительных комплексов. Для сокращения расчетного времени в модели (см. [1]–[6]) была использована приближенная методика, основанная на применении метода моментов, в двухмоментном и трехмоментном приближении.

Настоящая работа посвящена верификации моментного метода расчета уравнения переноса и диффузии капельной влаги путем сравнения результатов расчетов моментных уравнений с “точным” расчетом уравнения переноса и диффузии. При этом рассматривается одна из простейших задач в двумерной пространственной постановке, а именно, расчет осаждения двумерного (плоского) шлейфа мелкодисперсной капельной влаги, образованного компактным источником в потоке воздуха.



Фиг. 1. Схема плоского капельного шлейфа, образованного неподвижным источником влаги в потоке воздуха.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоский шлейф осаждающейся капельной влаги, образованный компактным неподвижным источником, находящимся на высоте H над подстилающей поверхностью в однородном потоке воздуха, имеющем скорость U_0 (фиг. 1).

Будем полагать, что количество жидкой фазы, содержащейся в единице объема среды невелико, а влияние процессов испарения/конденсации, сопровождающихся поглощением/выделением скрытой теплоты испарения, пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что функция распределения $f(a)$ капель по размерам (радиусам a) удовлетворяет следующему уравнению переноса и диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial U_0 f}{\partial x} + \frac{\partial w_s f}{\partial z} + \frac{\partial \dot{a} f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x} A_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad q = \int_0^\infty f(a) da. \tag{1}$$

Здесь и далее q – масса воды в единице объема (так называемая водность среды), w_s – скорость осаднения капель в гравитационном поле, \dot{a} – скорость изменения радиуса капель, A_x и A_z – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии, принимаемые далее постоянными.

Задача рассматривается в области $x \geq 0, z \geq 0, a \geq 0$. Наличие источника капельной влаги, образуящего водно-воздушный шлейф, учитывается следующим краевым условием:

$$f = f_0 b(a/a_m) \delta(z/H - 1) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \int_0^\infty b(a') da' = 1, \quad \int_0^\infty \delta(z' - 1) dz' = 1. \tag{2}$$

Здесь $b(a/a_m)$ – нормированное на единицу распределение источника капельной влаги по радиусам капель (a_m – мода распределения), $\delta(z/H - 1)$ – нормированная на единицу достаточно узкая финитная функция, описывающая распределение функции f в начальном сечении шлейфа (H – высота источника над подстилающей поверхностью), f_0 – нормировочный множитель.

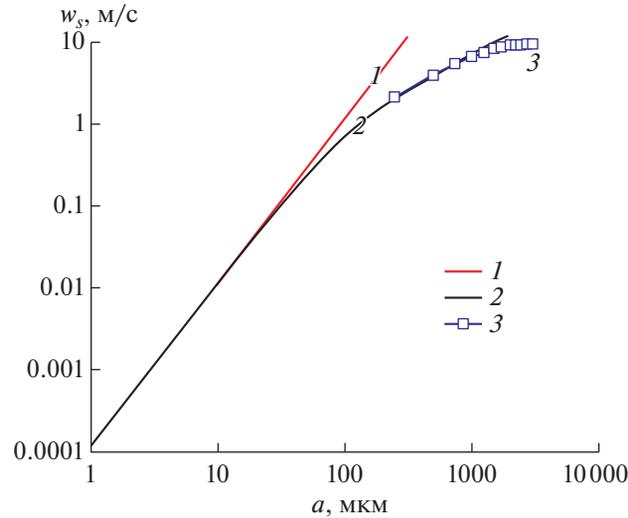
Так как погонный расход жидкости источника капельной влаги Q_0 (фиг. 1) определяется выражением

$$Q_0 = U_0 \int_0^\infty q(0, z) dz, \quad q(0, z) = \int_0^\infty f(a, 0, z) da, \quad \text{то} \quad f_0 = Q_0 / (U_0 a_m H).$$

На подстилающей поверхности ($z = 0$) выставляется условие $\partial f / \partial z = 0$, и расчетная величина осадков h , выпадающих на подстилающую поверхность, вычисляется по формуле

$$h = \frac{1}{\rho_w} \int_0^\infty w_s f(a) da.$$

Здесь и далее ρ_w – плотность воды.



Фиг. 2. Скорость осаждения капель воды в воздухе: 1 – формула Стокса (3), 2 – формула (4), 3 – данные [9].

На открытом участке границы, через который может происходить диффузия капельной влаги (при $x \rightarrow \infty$), выставляется модельное “мягкое” условие $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$. Аналогичное условие $\partial^2 f / \partial z^2 = 0$ выставляется и при $z \rightarrow \infty$.

Наконец, при $a = 0$ можно считать, что “поток капель” $\dot{a}f(a) = 0$, а при $a \rightarrow \infty$ величина $f \rightarrow 0$. В рассматриваемой задаче, впрочем, будет считаться, что изменение размеров капель происходит только за счет так называемого процесса гравитационной коагуляции. В этом случае “скорость потока капель в пространстве их радиусов” $\dot{a} \geq 0$, и условие $f \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$ можно не учитывать.

Для окончательной формулировки задачи необходимо указать зависимость скорости осаждения капель w_s от их радиуса a , а также выражение для скорости изменения размеров капель \dot{a} .

2.1. Скорость осаждения капель в гравитационном поле

Эта величина для капель (или твердых частиц) достаточно малого радиуса может быть вычислена по формуле Стокса (см., например, [7]):

$$w_s = w_{St}(a) \equiv ka^2, \quad k = \frac{2}{9} \frac{g}{\nu_a} \left(\frac{\rho_w}{\rho_a} - 1 \right), \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения, ν_a – кинематическая вязкость газа, ρ_w и ρ_a – плотности жидкости и газа соответственно. Для капель воды в воздухе параметр k в формуле (3) составляет величину порядка 10^8 1/(м·с).

Формула (3) справедлива лишь для капель или твердых частиц достаточно малого размера, когда скорость их осаждения такова, что число Рейнольдса $Re(a) = 2aw_s(a)/\nu_a < 1$ (см. [7]). При $Re(a) \geq 1$ используются различные полуэмпирические формулы, основанные на формуле Стокса (3), но с поправками, зависящими от числа Рейнольдса Re . Например, согласно [8],

$$w_s(a) = \frac{w_{St}(a)}{1 + 0.15 Re(a)^{0.687}}. \quad (4)$$

Отметим также, что очень крупные капли вначале испытывают значительную деформацию, а затем могут начинать дробиться. В результате максимальный радиус капель не превышает 2.5–3 мм, а их скорость осаждения 9–10 м/с (см. [9]).

На фиг. 2 представлена зависимость скорости осаждения w_s капли воды в воздухе от радиуса капли a . Видно, что формула Стокса удовлетворительно работает лишь для капель радиуса $a \leq 50$ –100 мкм, а формула (3) для $a \leq 1000$ –1500 мкм.

В настоящей работе, в отличие от [1]–[6], будет рассматриваться только мелкодисперсная капельная влага, осаждаемая в режиме Стокса.

2.2. Скорость изменения размеров капель

Изменение размеров капель в процессе их переноса потоком воздуха происходит, в основном, за счет процессов конденсации/испарения и процесса коагуляции, в частности, гравитационной коагуляции – укрупнения капель в процессе их движения за счет “поглощения” более мелких капель. Крупные капли с $a \geq 10^3$ мкм, скорость движения которых относительно воздуха достаточно высока, могут также дробиться на более мелкие. Известно, что механизм изменения размеров капель за счет конденсации/испарения существенен для капель достаточно малого радиуса ($a \leq 50$ мкм, см., например, [10]). Для капель с размерами $50 \text{ мкм} < a < 10^3 \text{ мкм}$, которые будут рассматриваться далее, основную роль должна играть гравитационная коагуляция. Точное выражение для скорости изменения радиусов капель за счет этого процесса достаточно сложное (см., например, [10], [11]). Однако известны приближенные формулы, применяемые, например, при моделировании переноса капельной влаги в облачных структурах. В частности, в метеорологии известна следующая теоретическая формула для изменения массы M капли в результате процесса гравитационной коагуляции (см. [12]):

$$dM/dt = \pi a^2 w_s(a) \rho_w q \tilde{E}, \quad \tilde{E} = \text{const},$$

где \tilde{E} – безразмерная величина, которую можно назвать средней вероятностью/коэффициентом захвата/коагуляции крупной каплей более мелких капель. Так как $M = (4/3)\pi \rho_w a^3$, то отсюда немедленно следует: $\dot{a} = \tilde{K} w_s(a) q$, $\tilde{K} = \tilde{E}/(4\rho_w)$. Если скорость осаждения капель рассчитывается по формуле Стокса, то

$$\dot{a} = K a^2 q, \quad K = k\tilde{K} = k\tilde{E}/(4\rho_w).$$

По порядку величины (значение \tilde{E} принято равным 0.4) в рассматриваемых случаях (капли воды в воздухе) $K \approx 10^4 \text{ м}^2/(\text{кг}\cdot\text{с})$.

1.3. Формулировка задачи в безразмерной форме

Приведем уравнение (1) и краевое условие (2) к безразмерной форме, для чего представим переменные в следующем виде (штрихи помечают безразмерные переменные):

$$x = H \frac{U_0}{ka_m^2} x', \quad z = Hz', \quad t = T_0 t', \quad a = a_m a',$$

$$f = f_0 f', \quad q = f_0 a_m q', \quad \dot{a} = Ka_m^3 f_0 \dot{a}', \quad h = \frac{1}{\rho_w} ka_m^3 f_0 h',$$

где a_m – мода распределения источника капельной влаги, $T_0 = H/(ka_m^2)$ – характерное время процесса, \dot{a}' и h' – безразмерная скорость изменения размеров капель и безразмерная скорость выпадения капельной влаги на подстилающую поверхность. Подставляя данные выражения в (1) и (2), получаем (штрихи у безразмерных переменных далее везде опущены):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} - a^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon_{\dot{a}} \frac{\partial \dot{a} f}{\partial a} = \varepsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \dot{a} = a^2 q, \quad q = \int_0^\infty f(a) da, \tag{5}$$

$$f = b(a)\delta(z-1) \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{\dot{a}}$, ε_{A_x} , ε_{A_z} – параметры подобия, определяющие влияние гравитационной коагуляции, горизонтальной и вертикальной диффузии, соответственно, на процесс осаждения шлейфа. Они следующим образом связаны с определяющими параметрами задачи:

$$\varepsilon_{\dot{a}} = \frac{KQ_0}{ka_m U_0}, \quad \varepsilon_{A_x} = \frac{A_x w_s(a_m)}{HU_0 U_0}, \quad \varepsilon_{A_z} = \frac{A_z U_0}{HU_0 w_s(a_m)}, \quad w_s(a_m) = ka_m^2.$$

Так как обычно $w_s(a_m)/U_0 \ll 1$, то $\varepsilon_{A_x} \ll \varepsilon_{A_z}$, т.е. процессом продольной диффузии часто можно пренебрегать по сравнению с вертикальной диффузией.

В расчетах будем принимать, что функция δ , задающая пространственное распределение функции f в начальном сечении $x = 0$ шлейфа, имеет вид гауссовой функции

$$\delta(z-1) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{z-1}{\Delta}\right)^2\right],$$

где Δ – характерная безразмерная полуширина шлейфа в его начальном сечении.

Безразмерная скорость выпадения жидкости на подстилающую поверхность вычисляется так:

$$h = \int_0^{\infty} a^2 f(a) da \quad \text{при} \quad z = 0.$$

3. МОМЕНТНЫЙ МЕТОД

Введем моменты функции распределения капель по размерам (n – порядок момента):

$$f_n = \int_0^{\infty} a^n f(a) da, \quad n = 0, 1, \dots$$

Отметим, что нулевой и первый моменты функции распределения связаны с водностью q и со средним размером капель \bar{a} следующим образом:

$$f_0 = q, \quad f_1 = q\bar{a}, \quad \bar{a} = \int_0^{\infty} af(a) da / \int_0^{\infty} f(a) da.$$

Второй момент f_2 совместно с двумя первыми определяет дисперсию D функции распределения и стандартное отклонение σ размеров капель от среднего значения:

$$D = \int_0^{\infty} (a - \bar{a})^2 f(a) da = f_2 - f_1^2 / f_0, \quad \sigma = \sqrt{D}.$$

Помножим уравнение (5) на a^n и проинтегрируем по всем возможным размерам капель a . Тогда можно получить следующие моментные уравнения:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} - \frac{\partial f_{n+2}}{\partial z} - n\epsilon_a f_0 f_{n+1} = \epsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \epsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Цепочка моментных уравнений (7), обрываемая на каком-нибудь значении $n = N$, оказывается не замкнутой, так как в эти уравнения входят моменты f_{N+1} и f_{N+2} , порядок которых выше N . Однако на основе (7) могут быть построены приближенные модели процесса переноса капельной влаги, позволяющие, в частности, рассчитывать распределения водности среды и интенсивность осадков, выпадающих на подстилающую поверхность.

Оборвем цепочку уравнений (7) на некотором значении $n = N$ (N будет называться номером приближения), и запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} - \frac{\partial f_{n+2}}{\partial z} - n\epsilon_a f_0 f_{n+1} &= \epsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \epsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-2, \\ \frac{\partial f_{N-1}}{\partial t} + \frac{\partial f_{N-1}}{\partial x} - \frac{\partial \eta_{N-1} \bar{a}^2 f_{N-1}}{\partial z} - (N-1)\epsilon_a f_0 f_N &= \epsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_{N-1}}{\partial x^2} + \epsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_{N-1}}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial f_N}{\partial t} + \frac{\partial f_N}{\partial x} - \frac{\partial \eta_N \bar{a}^2 f_N}{\partial z} - N\epsilon_a \zeta_N f_1 f_N &= \epsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_N}{\partial x^2} + \epsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_N}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\eta_n = \frac{f_{n+2}}{\bar{a}^2 f_n} = \frac{f_{n+2} f_0^2}{f_n f_1^2} = \frac{\int_0^{\infty} a^{n+2} f da \left(\int_0^{\infty} f da \right)^2}{\left(\int_0^{\infty} a^n f da \right) \left(\int_0^{\infty} a f da \right)^2}, \quad \zeta_n = \frac{f_0 f_{n+1}}{f_1 f_n} = \frac{\int_0^{\infty} f da \int_0^{\infty} a^{n+1} f da}{\int_0^{\infty} a f da \int_0^{\infty} a^n f da}. \quad (9)$$

Заметим, что, согласно (9), $\zeta_1 = \eta_0$. Отметим также, что если в дробно-рациональных функционалах (9) полагать $f = f_0 \delta(a - a_0)$ (где δ – дельта-функция Дирака, а $a_0 = \text{const}$), то все $\eta_n = 1$ и $\zeta_n = 1$.

Систему уравнений (8) можно замкнуть, указав приближенную зависимость функционалов η_{N-1} , η_N и ζ_N от моментов f_0, \dots, f_N . Для решения этой задачи постулируем какую-нибудь физически оправданную аналитическую зависимость функции распределения $f(a)$ от радиуса капель a и от $(N + 1)$ -го дополнительного параметра. Сама эта функциональная зависимость должна оставаться неизменной в рассматриваемом процессе, но параметры в ней, конечно, могут меняться с течением времени.

Удобно постулировать следующую параметрическую зависимость:

$$f = \frac{f_0}{a_m} F(\xi; g_0, \dots, g_{N-2}), \quad \xi = \frac{a}{a_m}, \quad \int_0^\infty F(\xi; g_0, \dots, g_{N-2}) d\xi = 1, \quad (10)$$

где $f_0 = q$ – водность среды, а F – так называемая функция распределения, “нормированная на единицу”. В качестве нормировочной величины a_m удобно выбрать моду функции распределения. Величины $f_0, a_m, g_0, \dots, g_{N-2}$ являются теми дополнительными параметрами, о которых шла речь в предыдущем абзаце.

Вычисляя моменты, из (10) имеем

$$f_n = f_0 a_m^n \alpha_n(g_0, \dots, g_{N-2}), \quad \alpha_n(g_0, \dots, g_{N-2}) = \int_0^\infty \xi^n F(\xi; g_0, \dots, g_{N-2}) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Из (9) и (11), учитывая, что $\alpha_0 = 1$, получаем

$$\eta_n = \frac{\alpha_{n+2}(g_0, \dots, g_{N-2})}{\alpha_n(g_0, \dots, g_{N-2}) \alpha_1^2(g_0, \dots, g_{N-2})}, \quad \zeta_n = \frac{\alpha_{n+1}(g_0, \dots, g_{N-2})}{\alpha_1(g_0, \dots, g_{N-2}) \alpha_n(g_0, \dots, g_{N-2})}. \quad (12)$$

Соотношения (11) можно свести к следующей системе $(N - 1)$ -го уравнения для $(N - 1)$ -го параметра g_0, \dots, g_{N-2} :

$$\frac{f_n f_0^{n-1}}{f_1^n} = \frac{\alpha_n(g_0, \dots, g_{N-2})}{\alpha_1^n(g_0, \dots, g_{N-2})}, \quad n = 2, 3, \dots, N. \quad (13)$$

Разрешив эту систему уравнений и воспользовавшись (12), получим окончательно искомые зависимости параметров η_n и ζ_n от моментов f_n в виде

$$\eta_n = \eta_n \left(\frac{f_2 f_0}{f_1^2}, \dots, \frac{f_N f_0^{N-1}}{f_1^N} \right), \quad \zeta_n = \zeta_n \left(\frac{f_2 f_0}{f_1^2}, \dots, \frac{f_N f_0^{N-1}}{f_1^N} \right). \quad (14)$$

Рассмотрим далее два низших приближения: приближение двух моментов ($N = 1$) и приближение трех моментов ($N = 2$).

Система уравнений (8) в приближении двух моментов ($N = 1$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \eta_0 \bar{a}^2 f_0}{\partial z} &= \varepsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1 \bar{a}^2 f_1}{\partial z} - \varepsilon_a \eta_0 f_1^2 &= \varepsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \quad \bar{a} = f_1/f_0. \end{aligned} \quad (15)$$

В приближении трех моментов ($N = 2$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial z} &= \varepsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1 \bar{a}^2 f_1}{\partial z} - \varepsilon_a f_0 f_2 &= \varepsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2 \bar{a}^2 f_2}{\partial z} - 2\varepsilon_a \zeta_2 f_1 f_2 &= \varepsilon_{A_x} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z} \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \quad \bar{a} = f_1/f_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для замыкания систем (15) и (16) воспользуемся приближенным аналитическим выражением для распределения капель жидкой фазы в двухфазной среде. Известны различные формулы, аппроксимирующие экспериментальные функции распределения. В частности, типовые распре-

Таблица 1. Зависимость величин $\alpha_1, \alpha_2, \eta_0, \eta_1$ от параметров функции распределения (17) капель по радиусам

(s, p)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 8)
$\alpha_1(s, p)$	1.12837917	1.08540188	1.06384608	1.03166095
$\alpha_2(s, p)$	1.5	1.33333333	1.25	1.125
$\eta_0(s, p)$	1.17809725	1.13176848	1.10446616	1.05700864
$\eta_1(s, p)$	1.57079633	1.41471060	1.32535940	1.17445404

деления капель в облаках и туманах довольно хорошо аппроксимируются следующей колоколообразной функцией (см., например, [13]):

$$F(\xi; s, p) = \frac{1}{C} \xi^p \exp\left(-\frac{p}{s} \xi^s\right), \quad C = \frac{1}{s} \left(\frac{s}{p}\right)^{(p+1)/s} \Gamma\left(\frac{p+1}{s}\right), \quad (17)$$

где p и s – эмпирические параметры, а $\Gamma(x) = \int_0^\infty \eta^{x-1} e^{-\eta} d\eta$ – полная гамма-функция.

Моменты α_n от “нормированной на единицу” функции распределения (17) имеют следующий вид:

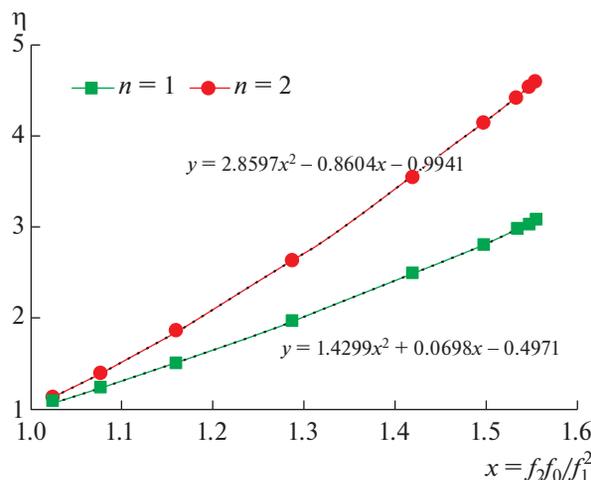
$$\alpha_n(s, p) = \int_0^\infty \xi^n F(\xi; s, p) d\xi = \left(\frac{s}{p}\right)^{n/s} \Gamma\left(\frac{n+p+1}{s}\right) / \Gamma\left(\frac{p+1}{s}\right),$$

и дробно-рациональные функционалы (12) легко вычисляются:

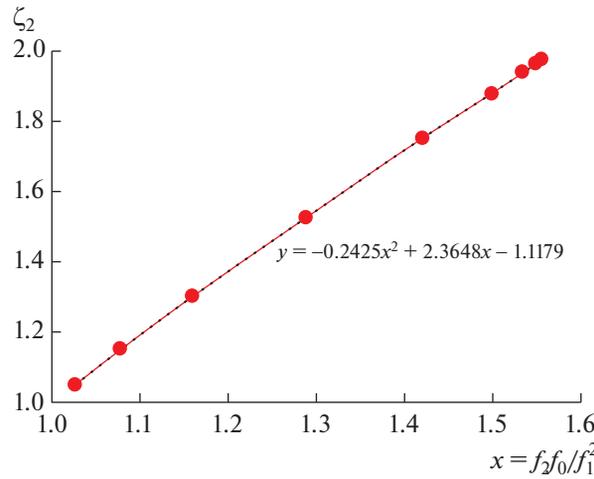
$$\eta_n(s, p) = \frac{\alpha_{n+2}(s, p)}{\alpha_n(s, p)\alpha_1^2(s, p)}, \quad \zeta_n(s, p) = \frac{\alpha_{n+1}(s, p)}{\alpha_1(s, p)\alpha_n(s, p)}. \quad (18)$$

3.1. Приближение двух моментов

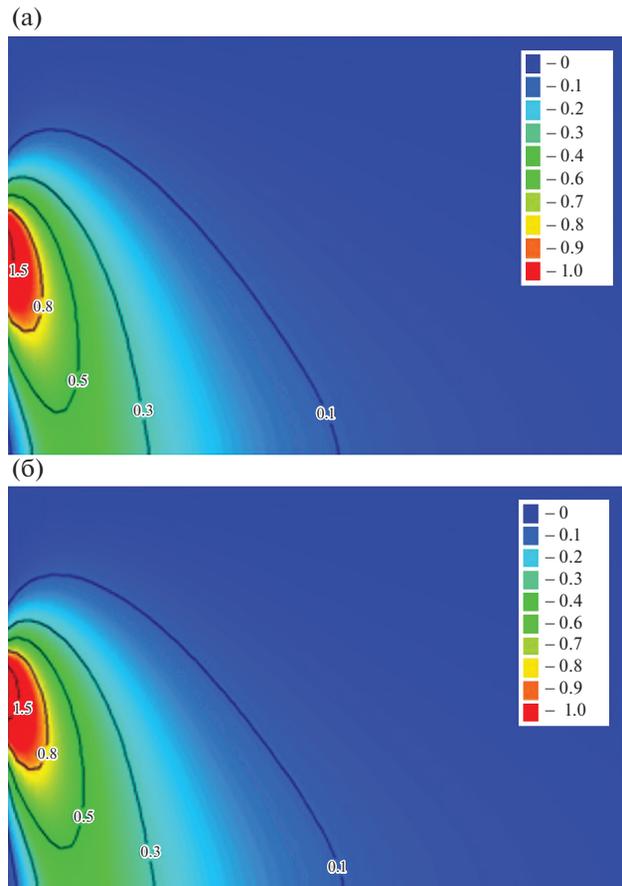
В двухмоментном приближении ($N = 1$) пространственно-временные распределения водности среды $q = f_0$ и среднего радиуса капель $\bar{a} = f_1/f_0$ описываются двумя уравнениями (15). При этом параметры s и p в (17) должны быть фиксированными, а дробно-рациональные функционалы $\eta_0 = \alpha_2/\alpha_1^2$ и $\eta_1 = \alpha_3/\alpha_1^3$ – постоянными (табл. 1). Величины η_0 и η_1 имеют порядок единицы. Их зависимость от s и p достаточно слабая.



Фиг. 3. Зависимости η_1 и η_2 от первых трех моментов при $s = 2$. Штриховые кривые – квадратичные аппроксимации.



Фиг. 4. Зависимость ζ_2 от первых трех моментов при $s = 2$. Штриховая кривая – квадратичная аппроксимация.



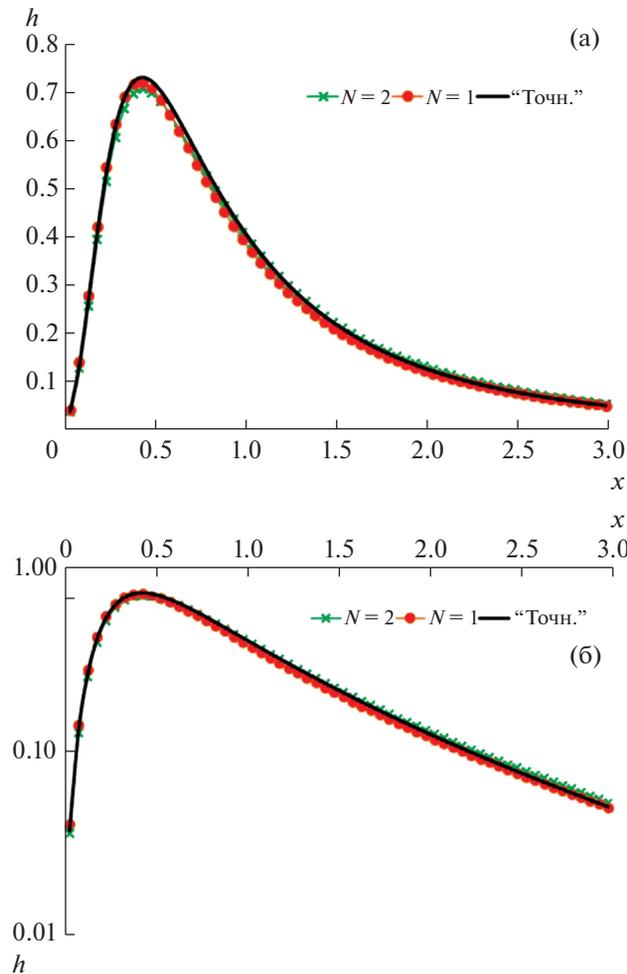
Фиг. 5. Распределение водности в стационарном шлейфе капельной влаги при $\varepsilon_d = 1$: (а) – “точное” решение; (б) – двухмоментное приближение.

Скорость выпадения жидкости на подстилающую поверхность в приближении двух моментов вычисляется так:

$$h = \eta_0 \bar{a}^2 f_0(t, x, 0).$$

3.2. Приближение трех моментов

В приближении трех моментов ($N = 2$) будем считать, что параметр s в (17) фиксирован, а параметр p , определяющий дисперсию функции распределения, может изменяться. Тогда, соглас-



Фиг. 6. Стационарные осадки на подстилающую поверхность в обычном (а) и логарифмическом (б) масштабе: “точное” решение (“Точн.”), двухмоментное приближение ($N = 1$), трехмоментное приближение ($N = 2$). Параметр $\varepsilon_a = 0$.

но (13), (14), входящие в (16) дробно-рациональные функционалы η_1 , η_2 и ζ_2 будут зависеть только от следующей комбинации трех моментов: $x = f_2 f_0 / f_1^2$. При этом данная величина может быть связана с параметром p функции распределения (17) уравнением (см. (13))

$$\frac{f_2 f_0}{f_1^2} = \frac{\alpha_2(s, p)}{\alpha_1^2(s, p)}.$$

Обратив эту зависимость (напомним, что s – фиксировано) и используя результат в (18), получим искомые выражения дробно-рациональных функционалов от первых трех моментов функции распределения в виде

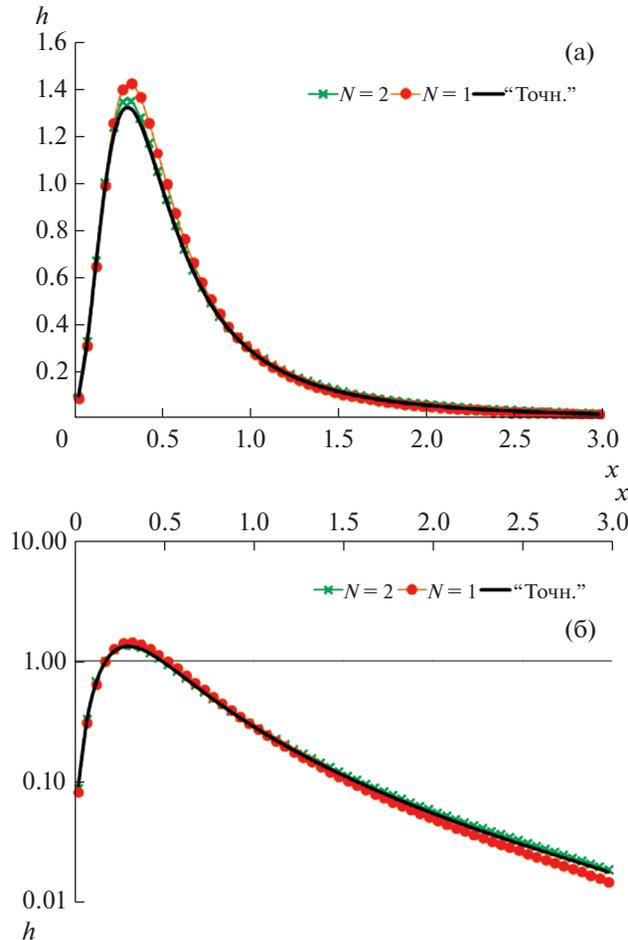
$$\eta_1 = \eta_1(s, f_2 f_0 / f_1^2), \quad \eta_2 = \eta_2(s, f_2 f_0 / f_1^2), \quad \zeta_2 = \zeta_2(s, f_2 f_0 / f_1^2). \tag{18}$$

На фиг. 3 и 4 приведены рассчитанные с помощью электронных таблиц Excel графики функций (18) для случая $s = 2$. Там же представлены квадратичные зависимости, хорошо аппроксимирующие данные кривые.

Скорость выпадения жидкости на подстилающую поверхность в приближении трех моментов определяется вторым моментом функции распределения:

$$h = f_2(t, x, 0).$$

При постановке краевой задачи для моментных уравнений в сечении $x = 0$ должны быть заданы пространственные распределения всех моментов, входящих в рассматриваемое приближения моментного метода. Далее в конкретных расчетах примем, что в начальном сечении $x = 0$



Фиг. 7. То же, что на фиг. 6, но при $\epsilon_{\dot{a}} = 1$.

функция распределения f каплей по размерам имеет вид (6), причем $b(a) = F(a; s, p)$ (см. (17)). Тогда в сечении $x = 0$

$$f_n(z) = \left(\int_0^{\infty} a^n b(a) da \right) \delta(z - 1) = \alpha_n(s, p) \delta(z - 1), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

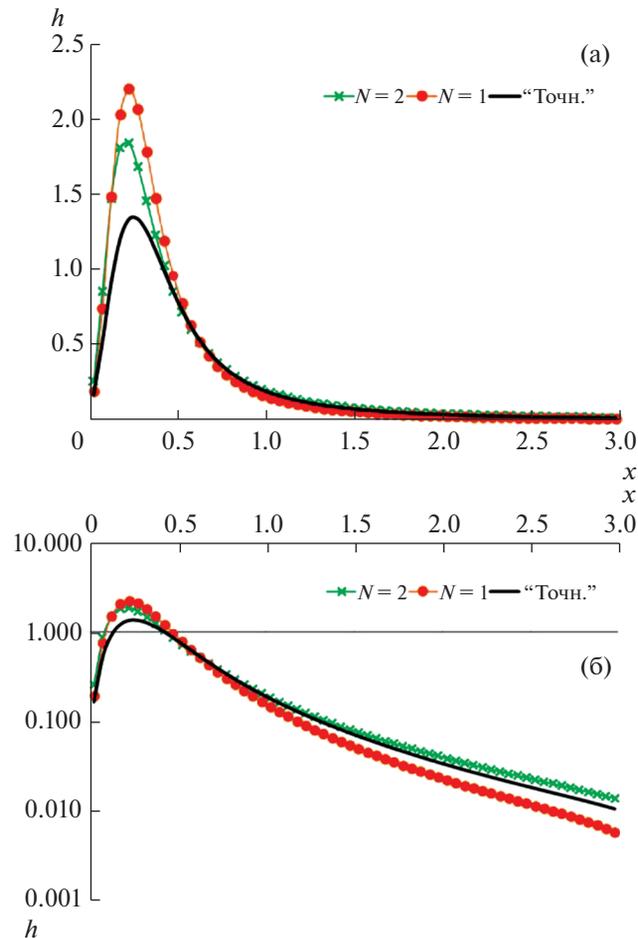
4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ. ВЫВОДЫ

Для численного интегрирования уравнения переноса и диффузии в настоящей работе используется вычислительная методика, предложенная в [14] и применявшаяся, например, в работе [15]. Достоинства этой методики состоят не в экономичности и высокой скорости счета (что до некоторой степени компенсируется все возрастающей производительностью современных ЭВМ), а в простоте реализации и высокой универсальности.

На фиг. 5–7 приведены результаты расчетов описанной выше задачи как в “точной” постановке (1), так и с использованием двухмоментного приближения (15) и трехмоментного приближения (16). Расчеты проведены при разных значениях параметра гравитационной коагуляции $\epsilon_{\dot{a}}$. Во всех расчетах $\epsilon_{Ax} = 0, \epsilon_{Az} = 0.3$.

Расчетное распределение водности в стационарном шлейфе капельной влаги при $\epsilon_{\dot{a}} = 1$ представлено на фиг. 5.

Сравнение “точного” решения с расчетами по двухмоментному и трехмоментному приближению для трех различных значений $\epsilon_{\dot{a}}$ приведено на фиг. 6–8.



Фиг. 8. То же, что на фиг. 6, но при $\varepsilon_{\dot{a}} = 2$.

Видно, что моментный метод в целом дает неплохие не только качественные, но и количественные результаты. Во всяком случае, при $\varepsilon_{\dot{a}} \leq 1$ даже низшее, двухмоментное приближение вполне приемлемо. Видно также, что использование трехмоментного приближения заметно уменьшает разницу между точным и приближенным решением при $\varepsilon_{\dot{a}} > 1$ (особенно вдали от источника капельной влаги).

В заключение отметим, что согласно данным, приведенным в пп. 2.1 и 2.2, параметр коагуляции $\varepsilon_{\dot{a}} = 1$ при значениях $a_m = 100$ мкм, $Q_0 = 10$ кг/(м с), и $U_0 = 10$ м/с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котеров В.Н., Архипов Б.В., Беликов В.В., Солбаков В.В., Федосов В.Е. Численное моделирование образования и переноса капельной влаги в нижнем бьефе гидроузла при работе водосборов трамплинного типа // Гидротехническое строительство. 2007. Вып. 7. С. 17–27.
2. Котеров В.Н., Архипов Б.В., Беликов В.В., Солбаков В.В. Образование и перенос капельной влаги в нижнем бьефе гидроузла // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 5. С. 78–92.
3. Котеров В.Н., Беликов В.В. Исследование и моделирование тепловой конвекции воздуха и переноса локальных осадков при работе эксплуатационного водосброса Саяно-Шушенской ГЭС в зимний период // Гидротехническое строительство. 2012. № 3. С. 62–70.
4. Беликов В.В., Котеров В.Н. Численное моделирование переноса капельной влаги, генерируемой работой водосброса № 1 Богучанской ГЭС в период наполнения водохранилища зимой 2012 г. // Гидротехническое строительство. 2014. № 5. С. 16–26.

5. *Беликов В.В., Котеров В.Н.* Прогноз влияния водно-ледяного облака за водосбросами № 1 и № 2 Богучанской ГЭС на сооружения гидроузла в условиях аварийной эксплуатации в зимний период // Гидротехническое строительство. 2015. № 6. С. 40–51.
6. *Беликов В.В., Котеров В.Н.* Проблемы брызгового обледенения и образования техногенных осадков в нижних бьефах высоконапорных гидроузлов. Теория и практика математического моделирования природных и техногенных процессов. М.: Янус-К, 2016. 152 с.
7. *Дж. Бэтчелор.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
8. *Winterwerp J.C.* A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sediment // J. Hydraulic Res. 1997. V. 36. № 3. P. 309–326.
9. ГОСТ Р 53613-2009 (МЭК 60721-2-2:1988) Воздействие природных внешних условий на технические изделия. Общая характеристика. Осадки и ветер.
10. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 366 с.
11. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000. 254 с.
12. *Халтинер Дж., Мартин Ф.* Динамическая и физическая метеорология. М.: Изд-во Иностран. лит., 1960. 435 с.
13. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 366 с.
14. *Котеров В.Н., Кочерова А.С., Кривцов В.М.* Об одной методике расчета течений несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 550–558.
15. *Зубов В.И., Инякин В.А., Котеров В.Н., Кривцов В.М.* Численное моделирование пространственных турбулентных течений газа в сложных сопловых устройствах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 10. С. 1871–1886.

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

ПРОФИЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СОПЛА МАКСИМАЛЬНОЙ ТЯГИ

© 2021 г. И. Е. Михайлов^{1,2,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44/2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ НИУ, Россия

*e-mail: mikh_igor@mail.ru

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.

Переработанный вариант 02.02.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматривается задача о нахождении формы пространственной сверхзвуковой части сопла, проходящей через круглое критическое сечение сопла и выходной контур, вписанный в заданные габариты, которая имеет наибольшую тягу среди всех возможных допустимых форм. Составляется функционал Лагранжа, в котором все уравнения газовой динамики и граничное условие учитываются с помощью переменных множителей Лагранжа. Выписывается первая вариация функционала. Уравнения и связи, обращающие первую вариацию в нуль, образуют сопряженную задачу для множителей Лагранжа и условие оптимальности. Разработан вычислительный алгоритм совместного решения уравнений газовой динамики и сопряженной задачи. Приводятся примеры расчетов. Библ. 12. Фиг. 3.

Ключевые слова: сверхзвуковая часть пространственного сопла, необходимые условия экстремума.

DOI: 10.31857/S0044466921100136

ВВЕДЕНИЕ

С каждым годом возрастает уровень требований к характеристикам летательных аппаратов. Поэтому задачи оптимизации элементов летательных аппаратов и их двигателей, позволяющие улучшать эти характеристики, еще долгое время будут оставаться актуальными. В работе рассматривается задача о нахождении формы пространственной сверхзвуковой части сопла, вписанной в заданные габариты и имеющей наибольшую тягу среди всех возможных допустимых форм. В настоящее время применяются два подхода к решению этой задачи: прямые приближенные методы и обратные точные методы. В прямых методах искомая стенка параметризуется, и искомые параметры находятся с помощью прямых методов максимизации интеграла тяги (см. [1]–[3]). Обратные методы используют математический аппарат теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, когда связи задачи учитываются с помощью множителей Лагранжа. Далее вычисляется первая вариация расширенного функционала, возникают сопряженная система для множителей Лагранжа и условие оптимальности. Совместное решение исходной и сопряженной систем, удовлетворяющее условию оптимальности, позволяет найти оптимальное решение. Но решение сопряженной системы для множителей Лагранжа с достаточной точностью является весьма трудоемким процессом, который стал возможным только теперь с развитием вычислительной техники. В этой процедуре для задач с распределенными параметрами есть “узкое” место: какие связи задачи необходимо учитывать с помощью множителей Лагранжа, а какие можно и не привлекать? Дело в том, что учет всех связей в применимости к пространственным оптимальным задачам приводит к чудовищно громоздким расширенным функционалам и громоздким сопряженным системам. Авторы монографий Ю.Д. Шмыглевский (см. [4]) и А.Н. Крайко (см. [5]) считают, что необходимо учитывать только существенные связи задачи. В некоторых задачах можно получить оптимальные решения, которые автоматически удовлетворяют не учтенным в функционале Лагранжа связям. Последнее связано

с тем, что если бы такие связи были учтены с помощью соответствующих множителей Лагранжа, то эти множители все равно получились бы нулями (см. [4]). Примером такой задачи является задача, рассматриваемая в настоящей статье. В ней не учитываются условия совместности на характеристических поверхностях, ограничивающих область решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Течение идеального газа в сопле полагается изэннергетическим, безвихревым. Оно описывается уравнениями

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0. \quad (1)$$

Система (1) для идеального газа замыкается интегралом Бернулли

$$\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\varkappa + 1}{2(\varkappa - 1)} \quad (2)$$

и уравнением состояния

$$p = \frac{\rho^\varkappa}{\varkappa}, \quad (3)$$

где \varkappa – показатель адиабаты.

Все искомые функции, входящие в уравнения (1)–(3): скорость \mathbf{V} , давление p , плотность ρ , а также местная скорость звука $a = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\rho}}$ обезразмерены к параметрам в критическом сечении сопла. Независимые переменные отнесены к радиусу критического сечения.

Из формул (1)–(3) следует, что закон сохранения импульса в проекции на фиксированное направление \mathbf{e} можно записать в следующем дивергентном виде:

$$\operatorname{div} [p\mathbf{e} + \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e})\mathbf{V}] = 0. \quad (4)$$

Дополнительно введем две скалярные функции тока ψ и χ , определяемые уравнениями

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \psi = 0, \quad \mathbf{V} \cdot \nabla \chi = 0. \quad (5)$$

Функции ψ и χ сохраняются вдоль линий тока, поэтому задавая значения функций тока ψ и χ на некоторой начальной поверхности, пересекающей все линии тока, мы можем с помощью (5) рассчитать значения ψ и χ во всей области течения и выделить нужные линии тока.

Начальные данные задаются на некоторой характеристической поверхности Σ_1 , сходящей с круглого критического сечения сопла γ_1 (фиг. 1). На стенке сверхзвуковой части сопла σ выполняется условие непротекания

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\sigma = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{n}_σ – нормаль к поверхности σ .

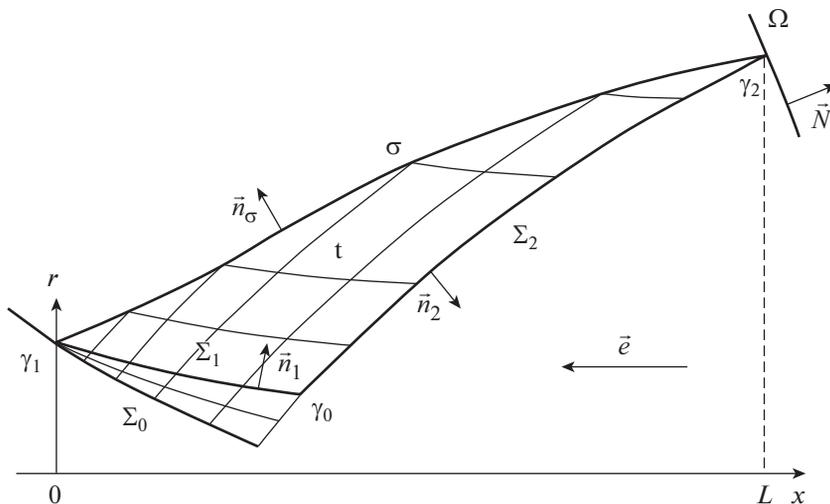
Система уравнений (1) при сверхзвуковом течении имеет гиперболический тип. Это означает, что в рассматриваемой области существуют особые поверхности, называемые характеристическими. Для системы (1) форма этих поверхностей определяется уравнениями

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \pm a, \quad (7)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к характеристической поверхности. Такие поверхности удовлетворяют следующему условию: существует линейная комбинация уравнений (1) такая, что в нее будут входить лишь производные вдоль векторов, касательных к поверхности – “внутренние” производные. Такие линейные комбинации называются условиями совместности. На каждой характеристической поверхности может быть выписано одно или несколько условий совместности. Условия совместности для системы (1) имеют вид

$$a^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) + \rho[\mathbf{a}\mathbf{n} + (\varkappa - 1)\mathbf{V}] \cdot [\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}] = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0.$$

В работе для численного расчета как уравнений газовой динамики, так и сопряженной задачи, использовался метод, явно выделяющий характеристические поверхности и использующий соответствующие условия совместности на них.



Фиг. 1. Сечение пространственной сверхзвуковой части сопла меридиональной плоскостью $\varphi = \text{const}$.

Расчет функций \mathbf{V} , p , ρ , ψ и χ в заданной области τ (фиг. 1), ограниченной начальной характеристической поверхностью Σ_1 , замыкающей характеристической поверхностью Σ_2 , приходящей на заданный выходной контур сопла γ_2 , и заданной стенкой сверхзвуковой части сопла σ , по уравнениям (1)–(3), (5) с начальными данными на характеристической поверхности Σ_1 будем называть прямой задачей.

Сформулируем теперь вариационную задачу для определения оптимальной формы сверхзвуковой части сопла. Пусть заданы входная критическая γ_1 и выходная γ_2 кромки сверхзвуковой части сопла (в общем случае контур γ_2 может лежать на известной поверхности Ω , см. фиг. 1). Пусть далее вектор \mathbf{e} задает направление, в котором будет проводиться оптимизация тяги сопла. Требуется среди всех поверхностей σ , проходящих через заданные контуры γ_1 и γ_2 , найти такую, на которой функционал

$$T = \iint_{\sigma} (p - p_0) \mathbf{e} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{8}$$

являющийся проекцией интеграла сил давления на направление \mathbf{e} , принимает наибольшее значение (здесь p_0 – постоянное атмосферное давление на внешней поверхности сопла). Давление p в (8) находится из решения задачи (1)–(3). В точках критического сечения продольные образующие сопла имеют излом.

2. СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

Для решения поставленной вариационной задачи будем использовать общий метод множителей Лагранжа, предложенный для решения осесимметричных задач в [6]. Составим функционал Лагранжа

$$T^0 = \iint_{\sigma} (p\mathbf{e} + \mu\mathbf{V}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iiint_{\tau} (\lambda \operatorname{div} \rho\mathbf{V} + \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}) d\tau,$$

в котором дифференциальные уравнения (1) и условие непротекания (6) учитываются с помощью переменных множителей Лагранжа μ , λ и \mathbf{h} . Тогда задача нахождения экстремума функционала (8) при условии выполнения уравнений (1)–(3) сводится к задаче нахождения безусловного экстремума функционала T^0 . Таким образом, необходимым условием экстремальности сверхзвуковой части сопла является обращение первой вариации функционала δT^0 в нуль.

Для получения первой вариации мы будем использовать следующие формулы, основанные на обобщении результатов Н.Е. Кочина по переменным полям в сплошных средах (см. [7]). Формулы, совпадающие с формулами Н.Е. Кочина, опубликованы также и в монографии [8]. Пусть заданы функционалы

$$T_2 = \iint_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad T_3 = \iiint_{\tau} \varphi(\mathbf{r}) d\tau.$$

Тогда первые вариации этих функционалов равны

$$\delta T_2 = \iint_S (\delta \mathbf{a} + \delta \mathbf{r}_S \operatorname{div} \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_L [\mathbf{a} \times \delta \mathbf{r}_L] \cdot d\mathbf{r},$$

$$\delta T_3 = \iiint_\tau \delta \varphi d\tau + \iint_S \varphi(\mathbf{r}_S) \delta \mathbf{r}_S \cdot d\mathbf{S}.$$

Здесь вектор-функция $\delta \mathbf{a}$ обозначает допустимую вариацию вектора \mathbf{a} внутри и на границе фиксированной поверхности S , $\delta \varphi$ – допустимая вариация функции φ внутри и на границах фиксированного объема τ , вектор-функция $\delta \mathbf{r}_S$ – малая непрерывная деформация поверхности S , ограничивающей объем τ , $\delta \mathbf{r}_L$ – малая непрерывная деформация контура L , ограничивающего поверхность S .

При варьировании поверхности σ из-за сверхзвукового характера течения будем считать, что на поверхности Σ_1 функции течения не меняются. Это означает, что на поверхности Σ_1 выполняются соотношения $\delta \mathbf{V} = \delta \mathbf{r} = 0$. Кроме того, из формул (1)–(3) следуют связи

$$\delta \rho = -\frac{\rho}{a^2} \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{V}, \quad \delta p = a^2 \delta \rho.$$

С учетом этих формул первая вариация функционала Лагранжа записывается в виде

$$\delta T_0 = \iiint_\tau \left[\operatorname{rot} \mathbf{h} - \rho \nabla \lambda + \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda) \right] \cdot \delta \mathbf{V} d\tau + \iint_\sigma [(\mu + \rho \lambda) \delta \mathbf{V} - (\rho \mathbf{V} \times \mathbf{e} + \mathbf{h}) \times \delta \mathbf{V}] d\mathbf{S} +$$

$$+ \iint_{\Sigma_2} \left[\rho \lambda \left(\mathbf{n}_2 \times \frac{\mathbf{V}}{a} \right) - \mathbf{h} \right] \cdot (\delta \mathbf{V} \times d\mathbf{S}) + \iint_\sigma \{ \operatorname{div} (\rho \mathbf{e} - \rho \lambda \mathbf{V}) \delta \mathbf{r}_\sigma \} d\mathbf{S} + \oint_{\gamma_2} \{ [(p - p_0) \mathbf{e} - \rho \lambda \mathbf{V}] \times \delta \mathbf{r}_L \} d\mathbf{r},$$

где \mathbf{n}_2 – вектор нормали к поверхности Σ_2 такой, что $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2 = a$.

Определим множители Лагранжа следующим образом:
в области τ

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \rho \nabla \lambda - \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda), \tag{9}$$

на поверхности Σ_2

$$\left[\mathbf{h} - \rho \lambda \left(\mathbf{n}_2 \times \frac{\mathbf{V}}{a} \right) \right] \times \mathbf{n}_2 = 0, \tag{10}$$

на поверхности σ

$$(\mathbf{h} + \rho \mathbf{V} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{n}_\sigma = 0, \tag{11}$$

$$\mu + \rho \lambda = 0. \tag{12}$$

Выпишем теперь три дифференциальных и одно конечное следствия формул (9)–(11), не содержащих вектор-функцию \mathbf{h} :

в области τ

$$\operatorname{div} \left[\rho \nabla \lambda - \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda) \right] = 0, \tag{13}$$

на поверхности Σ_2

$$\mathbf{n}_2 \cdot \operatorname{rot} \left[\rho \lambda \left(\mathbf{n}_2 \times \frac{\mathbf{V}}{a} \right) \right] + \rho \left(\frac{\mathbf{V}}{a} - \mathbf{n}_2 \right) \cdot \nabla \lambda = 0, \tag{14}$$

на поверхности σ

$$\rho \mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla \lambda = -\mathbf{n}_\sigma \cdot \operatorname{rot} (\rho \mathbf{V} \times \mathbf{e}), \tag{15}$$

на контуре γ_2

$$\lambda = a \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_\sigma)}{(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_\sigma)}. \tag{16}$$

Уравнения (13)–(16) однозначно определяют функцию λ в замкнутой области τ . Дело в том, что уравнение (13) имеет гиперболический тип и его характеристические поверхности совпадают с характеристическими поверхностями уравнений (1). Значение нормальной производной $\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla \lambda$ известно на σ из (15), сама функция $\lambda(\Sigma_2)$ однозначно определяется уравнением (13) и граничными условиями (14), (16).

Отметим, что после определения множителя $\lambda(\sigma)$ формула (12) однозначно определяет множитель $\mu(\sigma)$.

Описанная выше процедура выбора множителей Лагранжа тесно связана с выбором “зависимых” и “независимых” функций, входящих в задачу. Вариации “независимых” функций, называемых управлениями, оставляются в выражении первой вариации исследуемого функционала, а вклад вариаций “зависимых” функций исключается с помощью выбора множителей Лагранжа. Тогда выражение для первой вариации примет вид

$$\delta T_0 = \iint_{\sigma} \{\operatorname{div}(p\mathbf{e} - \rho\lambda\mathbf{V})\delta\mathbf{r}_\sigma\} d\mathbf{S} + \oint_{\gamma_2} \{[(p - p_0)\mathbf{e} - \rho\lambda\mathbf{V}] \times \delta\mathbf{r}_L\} dr. \quad (17)$$

Теперь условие оптимальности поверхности σ можно записать с учетом формулы (4) в виде

$$\operatorname{div}(p\mathbf{e} - \rho\lambda\mathbf{V}) = \operatorname{div}[\rho\mathbf{V}(\lambda + \mathbf{V} \cdot \mathbf{e})] = 0.$$

Интегралом последнего равенства является соотношение

$$\lambda + \mathbf{V} \cdot \mathbf{e} = \Phi(\psi, \chi), \quad (18)$$

где $\Phi(\psi, \chi)$ – произвольная функция, сохраняющая свое значение на линиях тока.

Вектор $d\mathbf{r}$ во втором интеграле (17) лежит на поверхности Ω , поэтому его можно представить в точках контура γ_2 в виде

$$d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{N}}{|\mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{N}|} dr,$$

где \mathbf{N} – вектор нормали к поверхности Ω .

Окончательно получим

$$\delta T_0 = \oint_{\gamma_2} [-(p - p_0)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{N}) + \rho\lambda(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})] \frac{\mathbf{n}_\sigma \cdot \delta\mathbf{r}_L}{|\mathbf{n}_\sigma \times \mathbf{N}|} dr. \quad (19)$$

Если контур γ_2 фиксирован, то на нем $\delta\mathbf{r}_L = 0$, если контур γ_2 не фиксирован и принадлежит поверхности Ω , то вдоль кромки γ_2 с учетом (16) получаем аналог локального условия Буземана для пространственных вариационных задач газовой динамики

$$\left[(p - p_0)\mathbf{e} - \rho a \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_\sigma}{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_\sigma} \mathbf{V} \right] \cdot \mathbf{N}(\gamma_2) = 0. \quad (20)$$

В вариационных задачах о соплах максимальной тяги часто существуют конструктивные ограничения на контур γ_2 , приводящие к “недорасширенным” соплам. В таких соплах габаритные ограничения на кромку γ_2 не позволяют получить степень расширения, соответствующую условию (20). Поэтому на участках краевого экстремума допустимая в формуле (19) произвольная вдоль γ_2 функция $\mathbf{n}_\sigma \cdot \delta\mathbf{r}_L < 0$. Отсюда на таких участках необходимое условие локального максимума тяги вместо равенства (20) приводит к неравенству

$$\left[(p - p_0)\mathbf{e} - \rho a \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_\sigma}{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_\sigma} \mathbf{V} \right] \cdot \mathbf{N}(\gamma_2) \leq 0. \quad (21)$$

В дальнейшем приведем примеры расчетов только оптимальных “недорасширенных” сопел, вдоль выходного контура которых выполняется достаточное условие локального максимума: строгое неравенство в формуле (21).

Введем новую искомую функцию $\lambda_1 = \lambda + \mathbf{e} \cdot \mathbf{V}$. Тогда формулы (13)–(16) можно переписать в виде

в области τ

$$\operatorname{div} \left[\rho \nabla \lambda_1 - \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda_1) \right] = 0, \quad (22)$$

на поверхности Σ_2

$$\mathbf{n}_2 \cdot \text{rot} \left[\rho(\lambda_1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{V}) \left(\mathbf{n}_2 \times \frac{\mathbf{V}}{a} \right) \right] + \rho \left(\frac{\mathbf{V}}{a} - \mathbf{n}_2 \right) \cdot \nabla(\lambda_1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{V}) = 0, \quad (23)$$

на поверхности σ

$$\mathbf{n}_\sigma \cdot \nabla \lambda_1 = 0, \quad (24)$$

на контуре γ_2

$$\lambda_1 = \Phi(\psi, \chi) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{V} + a \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_\sigma)}{(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_\sigma)}. \quad (25)$$

Условие оптимальности (18) на поверхности сопла σ примет вид

$$E(\mathbf{r}_\sigma, \lambda_1) = \lambda_1 - \Phi(\psi, \chi) = 0. \quad (26)$$

В дальнейшем систему (22)–(25) будем называть сопряженной задачей.

Из уравнения (22) видно, что вектор $\rho \nabla \lambda_1 - \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda_1)$ является соленоидальным и, следовательно, может быть представлен как вихрь некоторого другого вектора \mathbf{A} :

$$\rho \nabla \lambda_1 - \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda_1) = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (27)$$

Вектор \mathbf{A} в общем случае можно представить в виде трех скалярных функций, т.е. мы имеем всего три скалярных уравнения (27) для определения четырех неизвестных функций λ_1, \mathbf{A} . Поэтому однозначно определить эти функции из (27) мы не можем. Воспользуемся этим произволом и представим вектор \mathbf{A} с помощью двух неизвестных функций λ_2 и λ_3 . Такое представление неединственно. Возьмем его в виде

$$\mathbf{A} = \lambda_2 \nabla \varphi + \lambda_3 \nabla \psi.$$

Здесь φ — угол цилиндрической системы координат x, r, φ (орты $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$), в которой мы и будем работать в дальнейшем. Выбор такого представления вектора \mathbf{A} можно объяснить двумя причинами. Во-первых, в осесимметричном случае при $\lambda_3 = 0$ уравнения (27) совпадают с уравнениями, полученными в [6]. Во-вторых, как это будет видно дальше, краевые условия для λ_2 и λ_3 имеют наиболее простой вид. Таким образом, система уравнений (27) записывается в виде

$$\rho \nabla \lambda_1 - \frac{\rho}{a^2} \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \nabla \lambda_1) = \frac{1}{r} \nabla \lambda_2 \times \mathbf{e}_\varphi + \nabla \lambda_3 \times \nabla \psi. \quad (28)$$

Система уравнений (28) имеет гиперболический тип. Ее характеристические поверхности совпадают с характеристическими поверхностями уравнений (1). Условие совместности на них получается скалярным умножением (28) на вектор нормали к характеристической поверхности. В частности, условие совместности на замыкающей характеристической поверхности Σ_2 имеет вид

$$\rho \left(\frac{\mathbf{V}}{a} - \mathbf{n}_2 \right) \cdot \nabla \lambda_1 = \frac{1}{r} (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{e}_\varphi) \cdot \nabla \lambda_2 + (\mathbf{n}_2 \times \nabla \psi) \cdot \nabla \lambda_3. \quad (29)$$

Выберем распределения функций ψ и χ в критическом сечении сопла следующим образом:

$$\psi(r, \varphi) = \frac{1}{2}(r^2 - 1), \quad \chi(r, \varphi) = \varphi.$$

Тогда в точках контура γ_1 и, следовательно, на всей стенке сопла $\psi = 1$. Умножим скалярно уравнение (28) на вектор \mathbf{n}_σ . Так как σ является поверхностью уровня для функции ψ , то $\nabla \psi \times \mathbf{n}_\sigma = 0$ и $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\sigma = 0$, и второе слагаемое в правой части (28) пропадает. Слагаемое в левой части в силу (24) также обращается в нуль. Окончательно получим условие, справедливое на стенке сопла, $(\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{n}_\sigma) \cdot \nabla \lambda_2 = 0$. Отсюда следует, что на поверхности сопла мы имеем условие $\lambda_2 = \text{const}$ вдоль линий пересечения σ с меридиональными плоскостями. И если мы зададим $\lambda_2 = 0$ во всех точках контура γ_2 , то на всей поверхности σ

$$\lambda_2 = 0. \quad (30)$$

Если теперь задать на всей поверхности Σ_2 какое-либо распределение λ_3 , например, $\lambda_3 = 0$, то из уравнений (23), (29) с граничными условиями (24), (25), (30) можно найти распределения λ_1 и λ_2 на поверхности Σ_2 . Таким образом, в качестве краевых условий для системы (28) выберем следующие:

на поверхности Σ_2 известны λ_1 , λ_2 и λ_3 ,

на поверхности сопла σ $\lambda_2 = 0$.

В качестве условия оптимальности поверхности сопла σ будем рассматривать условие (26). Таким образом, мы выписали корректную краевую задачу для уравнений (22)–(26).

3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СОПЛА

В [9] был разработан численный метод пространственных характеристик для расчета сверхзвуковых течений газа. Входными параметрами задачи являлись числа M – количество меридиональных плоскостей $\varphi = \text{const}$ на отрезке $[0, \pi]$, N – количество плоскостей $x = \text{const}$, секущих заданную начальную осесимметричную характеристическую поверхность Σ_0 , и P – количество характеристических поверхностей в пространственном течении разрежения Прандтля–Майера. Линии пересечения характеристических поверхностей противоположных семейств будем называть венками. Расчетная сетка строилась пересечением венков и меридиональных плоскостей в процессе решения задачи.

Все характеристические уравнения на этой сетке аппроксимировались со вторым порядком. При этом для аппроксимации уравнений (5) со вторым порядком в разностную схему вводились вспомогательные искомые функции (см. [10]). Этот метод был использован для определения функций тока ψ и χ в узловых точках сетки при решении прямой задачи.

Так как характеристические поверхности для прямой и сопряженной задач совпадают, то уравнения сопряженной задачи (28) аппроксимировались на той же сетке. При этом для аппроксимации этих уравнений со вторым порядком в разностную схему вводились две вспомогательные функции.

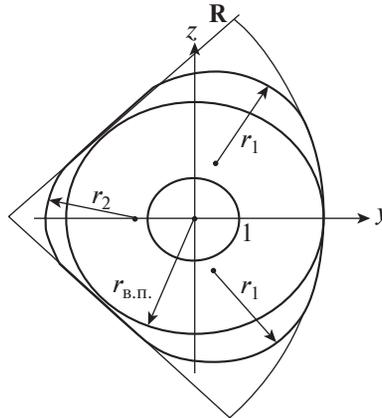
Опишем теперь общую последовательность действий, в соответствии с которой мы будем решать задачу профилирования. Длина сопла L предполагается фиксированной. В плоскости $x = L$ задан гладкий контур γ_2 . Оптимальная стенка сопла σ искалась в два этапа, на каждом из которых был организован итерационный процесс. На первом этапе проводился прямой расчет сопла заданной формы $r = r(x, \varphi)$, определялось распределение узловых точек и находились скорость V , функция тока ψ в узловых точках области τ и функция тока χ в фиксированных точках стенки сопла. Для того чтобы рассматриваемая сетка целиком заполняла область τ , т.е. для того, чтобы замыкающая характеристическая поверхность Σ_2 , найденная в результате прямого расчета, проходила через заданный выходной контур γ_2 , был организован итерационный процесс, в результате которого на поверхности Σ_1 находился венок γ_0 , с которого замыкающая характеристическая поверхность Σ_2 приходила на контур γ_2 . Остальные венки на Σ_1 сдвигались пропорционально. При этом количество венков на Σ_1 сохранялось. Газодинамические функции в сдвинутых венках находились с помощью квадратичной интерполяции по данным на исходной поверхности Σ_1 .

На втором этапе решалась сопряженная задача. Сначала решалась задача Коши для уравнения (23) с начальными данными (25), и находилась функция λ_1 на замыкающей характеристической поверхности Σ_2 . Затем на этой поверхности из (29) определялась функция λ_2 . Далее решалась задача Дарбу для системы (28) с известными значениями λ_1 , λ_2 и λ_3 на Σ_2 и условием (30) на σ , и определялись значения искомых функций λ_1 , λ_2 и λ_3 в узлах найденной ранее сетки в области τ . Как в задаче Коши, так и в задаче Дарбу решение искалось с помощью трех пересчетов. Вычисленные в узловых точках стенки значения λ_1 подставлялись в функцию невязки $E(x, \varphi, \lambda_1)$ условия оптимальности (26). Теперь ординаты новых узловых точек стенки в каждой меридиональной плоскости φ_* вычислялись по формуле

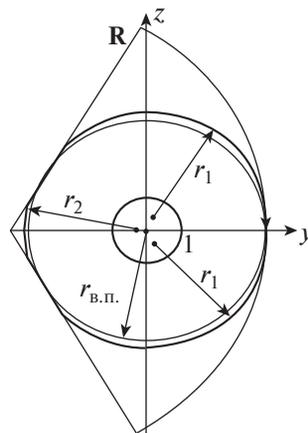
$$r_{\text{нов}}(x, \varphi_*) = r_{\text{ст}}(x, \varphi_*) + \int_0^x E(x, \varphi_*, \lambda_1) F(x, \varphi_*) dx - \frac{x}{L} \int_0^L E(x, \varphi_*, \lambda_1) F(x, \varphi_*) dx. \quad (31)$$

Здесь $F(x, \varphi)$ – некоторая заданная функция, удачный выбор которой позволял уменьшить общее число итераций, необходимых для нахождения оптимальной стенки.

На этом заканчивалась одна итерация второго этапа.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Во всех приведенных расчетах $\alpha = 1.4$, $p_0 = 0$.

Были проведены два расчета сверхзвуковой части сопла длиной $L = 7.6$ с круглым критическим сечением $r = 1$ с выходным контуром в виде прямоугольного сектора круга радиуса $R = 6.8974$ со скругленными по радиусам r_1 и r_2 углами. На фиг. 2 показан общий вид выходного контура $r_L(\varphi)$. При использовании входных параметров $M \times N \times P = 31 \times 61 \times 19$ относительная погрешность вычисления тяги не превышала 0.1%.

В первом расчете радиус скругления углов был одинаков и равнялся $r_1 = r_2 = 2.5570$. В качестве начального приближения бралась форма, рассчитанная прямым методом оптимизации (см. [1]). Осесимметричная поверхность Σ_0 бралась из таблиц [11]. Функция $F(x, \varphi)$ из (31) задавалась в виде $F(x, \varphi) = 1 + \beta x$, где параметр β в процессе итераций менялся от 10 до 0.

Тяга оптимальной сверхзвуковой части сопла в направлении единичного вектора $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_x$ составила $T_x = 1.549$, а в поперечном направлении $T_y = -0.079$. Тяга же оптимальной осесимметричной сверхзвуковой части сопла с выходным контуром, вписанным в данный ($r_{\text{вн}} = 2.8570$), составила $T_x = 1.522$. Таким образом, абсолютная величина тяги оптимальной сверхзвуковой части пространственного сопла ($T = 1.551$) превышает тягу закритической части вписанного осесимметричного сопла на 1.9%.

Во втором расчете радиусы скруглений брались разные: $r_1 = 2.3$, $r_2 = 2.0$. Тяга в продольном направлении составила $T_x = 1.555$, а в поперечном направлении $T_y = -0.073$. Таким образом, аб-

солютная величина тяги этой оптимальной сверхзвуковой части сопла ($T = 1.557$) превысила тягу вписанного сопла на 2.2%.

Был проведен расчет сверхзвуковой части сопла длиной $L = 14.96$ с круглым критическим сечением $r = 1$ с выходным контуром в виде 120° – сектора круга радиуса $R = 12.0711$ со скругленными по радиусам $r_1 = 5.4$ и $r_2 = 4.5$ углами. На фиг. 3 показан общий вид выходного контура $r_L(\varphi)$. Тяга оптимальной сверхзвуковой части сопла составила $T = 1.864$. Для сравнения (с использованием той же сетки) был проведен расчет оптимального осесимметричного сопла с $r_L(\varphi) \equiv 5.6022$, вписанного в рассчитанное пространственное сопло. Его тяга составила $T = 1.855$. Таким образом, величина тяги оптимальной пространственной сверхзвуковой части сопла превысила тягу вписанного осесимметричного сопла на 0.5%.

Такое увеличение связано с более рациональным использованием площади мидела выходного сечения.

Отметим, что в случае вывода спутника на околоземную орбиту увеличение тяги ракетного сопла на 0.3% позволяет вывести на орбиту на 1.3% больше полезного груза, или поднять высоту орбиты на 10% (см. [12]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов В.М., Михайлов И.Е. Об оптимизации сверхзвуковых частей пространственных сопел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 2. С. 517–519.
2. Wang X., Damodan M. Optimal Three-Dimensional Nozzle Shape Design Using CFD and Parallel Simulated Annealing Algorithms // AIAA J. of Propulsion and Power. 2002. V. 18. № 8. С. 217–221.
3. Крайко А.А., Пьянков К.С. Профилирование оптимальных пространственных сопел // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 1. С. 141–153.
4. Шмыглевский Ю.Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
5. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 448 с.
6. Guderley K.G., Armitage J.V., General Approach to Optimum Rocket Nozzles / Chapter 11, Theory of Optimum Aerodynamic Shapes. Ed. by A. Miele. New York: Acad. Press, 1965.
7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 426 с.
8. Germain P. Cours de Mécanique des Milieu Continus. Théorie Générale. Paris, 1973.
9. Борисов В.М., Михайлов И.Е. Метод характеристик для расчета пространственных сверхзвуковых безвихревых течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 5. С. 1243–1252.
10. Kurilenko Yu.V., Mikhailov I.E. Three-dimensional Method of Characteristics for Computing Steady Supersonic Flows / Modern Problems in Computational Aerohydrodynamics. Ed. by A.A. Dorodnicyn and P.I. Chushkin. М.: Mir Publ., London: CRC Press. 1991. P. 67–80.
11. Кацкова О.Н., Шмыглевский Ю.Д. Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
12. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Течения газа в соплах. М.: МГУ, 1978. 352 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 517.95

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

ОРГАНИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
НА МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ
И ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

© 2021 г. В. П. Пархоменко^{1,2,*}

¹ 1119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

*e-mail: parhom@ccas.ru

Поступила в редакцию 08.02.2021 г.
Переработанный вариант 21.02.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Исследование основано на трехмерной гидродинамической модели глобального климата, включающей модель общей циркуляции атмосферы, модель океана в геострофическом приближении с фрикционным членом в уравнениях горизонтального импульса с реальной конфигурацией глубин и континентов, модель эволюции морского льда. Представлены расчеты прогнозирования климата до 2100 г. с использованием сценариев роста CO₂. Установлено существенное уменьшение меридионального потока воды в Атлантике при реализации жесткого сценария. Библ. 17. Фиг. 12.

Ключевые слова: глобальная климатическая модель, термохалинная циркуляция, численные эксперименты, изменение климата.

DOI: 10.31857/S0044466921100148

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования по газовой динамике, инициированные и поддерживаемые Ю.Д. Шмыглевским, были ценны не только сами по себе, но и как тематика для подготовки научных кадров, в частности, учеником Юрия Дмитриевича был В.В. Александров, которому полученные компетенции позволили применить их в области моделирования глобальных процессов в атмосфере и климата. Развитие этих исследований представлено и в настоящей работе.

При исследовании долгосрочных изменений климата требуется рассматривать всю атмосферу, глобальный океан (с морским льдом) и верхний слой суши (почва и растительность) как взаимодействующие части единой системы, называемой климатической системой (см. [1]). Она имеет глобальный характер со значительно отличающимися временными и пространственными масштабами. Математическое моделирование является мощным инструментом для исследования климатической системы и прогнозирования (см. [2]).

В настоящей работе представлена глобальная трехмерная гидродинамическая модель климата, объединяющая модель общей циркуляции атмосферы (ОЦА), модель термохалинной циркуляции океана и модель эволюции морского льда. До этого модель океана использовалась с достаточно сильно агрегированной энерго-влажно-балансовой моделью атмосферы, описывающей характеристики приземного слоя (см. [3]). Модель ОЦА значительно более сложная и позволяет более точно описывать процессы в атмосфере. Функционирование совместной климатической модели рассматривается в режиме сезонного хода солнечного излучения.

Рассмотрена процедура проведения совместных расчетов модели океана и модели ОЦА. Для этого требуется обеспечить синхронизацию ряда параметров и процедур в обеих моделях. В связи с этим применяется процедура двумерной интерполяции данных, заданных на сетке модели океана и данных модели атмосферы и обратно. Особенностью этой процедуры является несоответствие конфигураций материков в моделях. В работе приведены результаты численных экспе-

риментов с климатической моделью по воспроизведению климата и его чувствительности к увеличению концентрации углекислого газа для двух сценариев.

2. МОДЕЛЬ ТЕРМОХАЛИННОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА

Базовые уравнения крупномасштабных течений в океане обычно приводятся в приближении Буссинеска (постоянства плотности в горизонтальных уравнениях импульса и неразрывности, учета силы Кориолиса, вертикальной и горизонтальной турбулентной вязкости) (см. [4]). При этом по вертикали принимается гидростатическое приближение. Уравнения дополняются уравнениями переноса и турбулентной диффузии тепла и солей, а также уравнением состояния для плотности, зависящей от температуры и солёности. На границе с атмосферой предполагаются воздействие ветра, обмен теплом и влагой в воздухе.

Для стационарной ситуации при наличии придонного трения (фрикционного члена), пропорционального среднему по глубине потоку и постоянного воздействия ветра осредненные по глубине базовые уравнения объясняют эффект западного усиления течений в океане, влияния переменной глубины океана и воздействия ветра (см. [4]). Это позволяет предположить, что некоторое их обобщение и рассмотрение далее в качестве горизонтальных уравнений импульса могут быть использованы для описания термохалинной циркуляции глобального океана (см. [5], [6]).

Учитывая эти замечания, система уравнений модели океана записывается в геострофическом приближении с фрикционным членом в уравнениях импульса по горизонтали (см. [3], [7], [8]). Значения температуры T и солёности S подчиняются адвекционно-диффузионным уравнениям, что дает возможность описать крупномасштабную термохалинную циркуляцию океана. Приближенным образом учитываются также конвективные процессы (см. [7]).

Таким образом, система основных уравнений, для наглядности записанных в локальных декартовых координатах (x, y, z) , где x, y – горизонтальные координаты и z – высота, направленная вверх, имеет следующий вид:

уравнения импульса по горизонтали

$$-lv + \lambda u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad lu + \lambda v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z},$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

уравнение гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

уравнение состояния морской воды

$$\rho = \rho(S, T),$$

уравнение переноса и диффузии субстанции X (температуры и солёности)

$$\frac{d}{dt} X = k_n \nabla^2 X + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_v \frac{\partial X}{\partial z} \right) + C,$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости течений, λ – переменный в пространстве фрикционный член, увеличивающийся к материкам и экватору; T, S, p – температура, солёность, давление соответственно; τ_x, τ_y – компоненты напряжения трения ветра; ρ – плотность воды; l – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения, κ_v, κ_n – коэффициенты турбулентной диффузии температуры и солёности по вертикали и горизонтали соответственно, C – источники субстанции X . Уравнение состояния для плотности морской воды имеет вид

$$\rho = 1000 + 0.7968S - 0.0559T - 0.0063T^2 + 3.7315 \times 10^{-5} T^3.$$

Условие отсутствия нормального потока принимается на всех границах. На границах с сушей также полагаются равными нулю нормальные компоненты потоков тепла и солей. Океан подвергается воздействию напряжения трения ветра на поверхности. Потоки T и S у дна принимаются нулевыми, а на поверхности определяются взаимодействием с воздухом.

Уравнения дискретизируются на горизонтальной сетке Аракавы (см. [3], [7]) с применением простых центральных разностей по пространству для диффузионных членов и схемой с весами вверх по потоку для адвективных. Явные конечные разности по времени для соответствующих уравнений дают требуемую точность, и хотя шаг по времени численно ограничен, являются более эффективными, чем центральные разности по времени с большим шагом по времени. Возможно также использование в программе неявного алгоритма (см. [5]). На всех шагах по времени поле скоростей вычисляется диагностически из поля плотностей с использованием уравнений импульса по горизонтали.

Вертикальные уровни модели в логарифмических координатах равномерно распределены так, что верхние слои тоньше, чем нижние. По горизонтали используются равномерная в координатах долгота и синус широты конечно-разностной сетки, определяя при этом ячейки одинаковой площади в пространстве.

В настоящей реализации модели используется восемь вертикальных слоев для плотности в растянутой логарифмической шкале. Поверхность океана соответствует уровню с номером восемь. Максимальная глубина океана принимается равной 5000 м.

В термодинамической модели (см. [3], [7]) морского льда уравнения, описывающие его эволюцию, решаются для сплоченности льда и для средней толщины льда. Нарастание и таяние льда в модели определяются разностью между атмосферным потоком тепла в морской лед и тепловым потоком изо льда в океан. Температура поверхности льда в каждый момент времени определяется из уравнения для распределения температуры по толщине льда.

Таким образом, скорость изменения средней толщины льда H , которая подвергается также влиянию адвекции поверхностными течениями океана и турбулентной диффузии, определяется уравнением

$$\frac{dH}{dt} + \kappa_{hi} \nabla_h^2 H = AG_i + (1 - A)G_0 = G,$$

где K_{hi} — эффективный коэффициент горизонтальной диффузии. Скорость роста G_i толщины морского льда в части океана, уже покрытой льдом, вычисляется из разности тепловых потоков в морской лед и обратно, с учетом латентных тепловых потерь из-за сублимации. Образование снега в модели явно не учитывается, все осадки над океаном или морским льдом попадают непосредственно в верхний слой океана. В области расчетной ячейки океана, свободной ото льда, определенный дефицит тепла приводит к росту льда в открытой области ячейки и скорость роста льда в открытой области ячейки задается G_0 .

Скорость изменения сплоченности льда A , т.е. доли площади ячейки океана, занятой льдом, равна

$$\frac{dA}{dt} + \kappa_{hi} \nabla_h^2 A = \max\left(0, (1 - A)\frac{G_0}{H_0}\right) + \min\left(0, AG_i\frac{A}{2H}\right).$$

Первый член в правой части уравнения определяет потенциальный рост льда на свободных поверхностях океана. Значение этого члена заключается в том, что если G_0 положительно, то доля поверхности без льда убывает экспоненциально со скоростью G_0/H_0 , где H_0 — минимально допустимая толщина льда. Второе слагаемое в правой части уравнения определяет потенциальное таяние льда и соответствует скорости, с которой площадь A будет уменьшаться, если весь лед будет однородный по толщине от 0 до $2H/A$ в части ячейки A , занятой льдом.

Все блоки модели связаны условиями непрерывности потоков импульса, тепла и влаги. Применяются реальная конфигурация материков и структура глубин мирового океана (см. [3], [8]). Уравнения в сферической системе координат решаются численным конечно-разностным методом. Глубина океана представляется в виде восьмиуровневой логарифмической шкалы до 5000 м.

Упрощенные диагностические уравнения импульса по горизонтали позволяют вести расчеты с большими шагами по времени и на длительные промежутки (до нескольких тысячелетий).

При расчете современного состояния климата начальные условия системы задаются постоянными температурами мирового океана, атмосферы и нулевыми скоростями течений океана. Численные эксперименты показывают, что модель достигает равновесия за период около 2000 лет (см. [8]).

3. МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ

Модель ОЦА описывает тропосферу, расположенную ниже предполагаемого уровня изобарической тропопаузы (см. [9], [10]). Как указано ниже, гидростатическое приближение по вертикали позволяет использовать вертикальные координаты, связанные с давлением атмосферы. В данном случае используется безразмерная σ -система координат (см. [11]):

$$\sigma = \frac{p - p_T}{p_s - p_T},$$

где p – давление, p_T – постоянное давление на уровне тропопаузы, p_s – переменное давление у поверхности Земли. По определению, на тропопаузе (верхняя граница тропосферы) $\sigma = 0$ и у поверхности земли $\sigma = 1$.

Уравнения горизонтального движения (в σ -системе координат) могут быть записаны в векторной форме следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi V) + (\nabla \cdot \pi V) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\pi V \dot{\sigma} \right) + f \mathbf{k} \times \pi V + \pi \nabla \Phi + \sigma \pi \alpha \nabla \pi = \pi F,$$

где

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \cos \varphi) \right]$$

для вектора $A = (A_\lambda, A_\varphi)$, λ – долгота и φ – широта точки. Здесь V – вектор горизонтальных компонент скорости, $\pi = p_s - p_T$, $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$, f – параметр Кориолиса, \mathbf{k} – единичный вектор в вертикальном направлении, α – удельный объем, F – горизонтальная сила трения, Φ – геопотенциал.

Термодинамическое уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi c_p T) + \nabla \cdot (\pi c_p T V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi c_p T \dot{\sigma}) - \pi \alpha \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + V \cdot \nabla \pi \right) = \pi \dot{H},$$

где c_p – удельная теплоемкость сухого воздуха, T – температура воздуха, \dot{H} – скорость выделения тепла в единице массы воздуха.

Уравнения неразрывности и переноса влаги, соответственно,

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi \dot{\sigma}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\pi q) + \nabla \cdot (\pi q V) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\pi q \dot{\sigma}) = \pi \dot{Q},$$

где q – отношение смеси водяного пара, равное отношению массы водяного пара (в граммах) к массе сухого воздуха (в килограммах) в единице объема, \dot{Q} – скорость генерации влаги в единице массы воздуха.

Приведенные выше уравнения являются прогностическими (т.е. эволюционными). К ним добавляются уравнение состояния воздуха $\alpha = RT/p$, где R – газовая постоянная для влажного воздуха, и диагностическое уравнение гидростатики, в которое вырождается вертикальная проекция уравнения движения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \pi \alpha = 0.$$

Уравнения дополняются соответствующими граничными условиями, и таким образом получается замкнутая динамическая система в σ -координатах.

Для численного решения задачи атмосфера разбивается на слои в вертикальном направлении пропорционально массе воздуха (давлению) (см. [9], [12]). Количество слоев варьировалось от двух до 18 в разных экспериментах.

В центре каждого из слоев расположены отсчетные уровни, для которых вычисляются значения основных переменных. На поверхности раздела между слоями, так же как и на тропопаузе и поверхности Земли, определяются дополнительные переменные и граничные условия.

Для определения источников водяного пара \dot{Q} и тепла \dot{H} применяются точечные модели, описывающие гидрологический цикл и процессы распространения теплового и солнечного излучения (см. [13]). Явная численная схема, используемая в модели, накладывает ограничение сверху на шаг интегрирования по времени, который при данном пространственном разрешении модели не превышает 1 ч (см. [14]).

Источником влаги в атмосфере является испарение с поверхности, а стоком влаги – осадки в виде дождя или снега. Вся влага, сконденсированная в модельной атмосфере, выпадает (по предположению) на поверхность в виде осадков. Таким образом, сток влаги в атмосфере определяется крупномасштабной конвективной и поверхностной конденсацией.

Испарение, конденсация и конвективные процессы зависят от термического состояния атмосферы, которое, в свою очередь, является функцией обмена теплом, имеющим место в этих процессах. Вместо получения одновременного решения для влаги и термического состояния, в модели рассчитываются испарение и компоненты конденсации последовательно. На каждом шаге определяется термическое состояние атмосферы, новые значения температуры используются на следующем шаге. При этом для описания конвективных процессов применяется так называемая процедура конвективного приспособления (см. [10]). Она состоит в следующем. Во-первых, температурный градиент между слоями приводится к сухоадиабатическому градиенту, если обнаруживается сухоадиабатическая неустойчивость. Во-вторых, если воздух в верхних слоях перенасыщен, здесь происходят крупномасштабная конденсация и приведение температуры и отношения смеси к устойчивому состоянию. В-третьих, градиенты температуры между уровнями и влажность проверяются на существование влажноконвективной неустойчивости. Если обнаруживается неустойчивость, происходит конденсация, а температуры и отношения смеси адаптируются в результате конвективных процессов. После конвективного приспособления в модели предусматривается переход к расчету влаги в слоях и конденсации.

Система обработки и представления результатов позволяет получить основные характеристики атмосферы. Как указывалось выше, все параметры относятся к узлам используемой равномерной пространственной сетки.

4. ОРГАНИЗАЦИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В модели океана используется по горизонтали расчетная сетка 72×72 ячеек, неравномерная по широте, в то время как модель ОЦА рассчитывается на сетке 72×46 ячеек, равномерной по широте (46 ячеек) и долготе (72 ячейки).

Расчетная сетка модели океана – равномерная по долготе с тем же шагом 5° , что и для модели атмосферы. Сетка модели океана имеет переменный шаг по широте (сгущается от полюсов к экватору). Для определения значений климатических характеристик в этих точках развита и применяется процедура кусочно-линейной интерполяции функции двух переменных (см. [15], [16]).

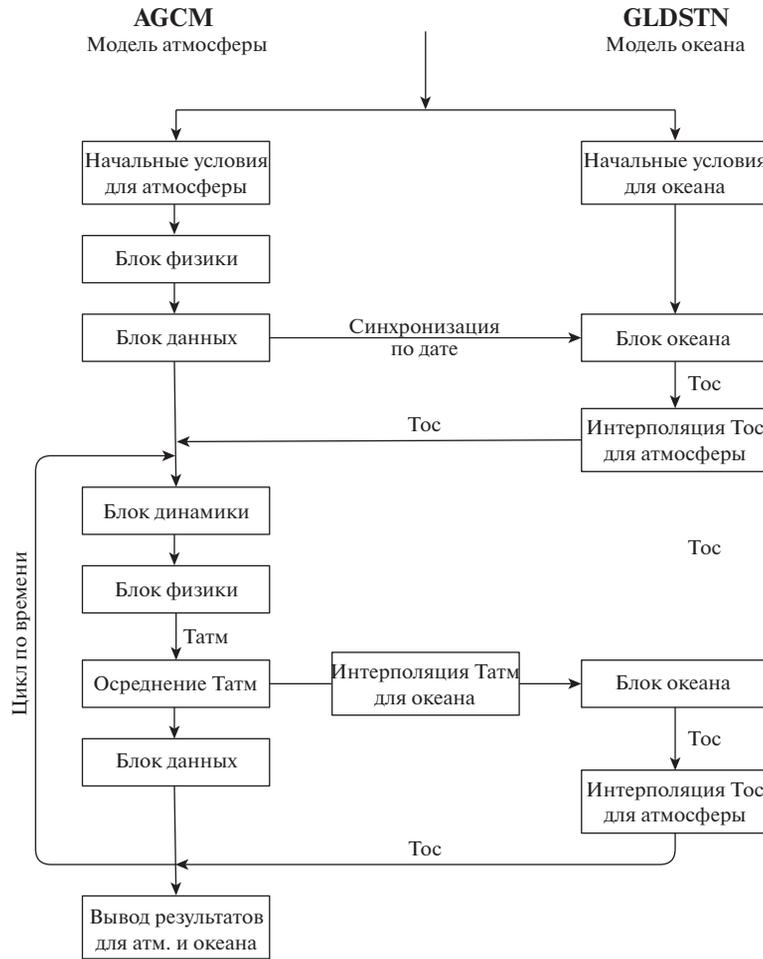
В случае интерполяции массива 72×72 из модели океана на сетку 72×46 атмосферы необходима дополнительная корректировка массива 72×46 , связанная с тем, что в модели атмосферы используется более точная карта суши, определяющая тип поверхности в данной точке (океан, суша, лед и т.п.).

Для совместных расчетов необходимо организовать порядок выполнения основных блоков программ и обеспечить обмен параметрами между моделями (фиг. 1). На начальном этапе проводится синхронизация начальных данных модели океана и модели атмосферы по времени до совпадения дня года. На следующем этапе в модели атмосферы организуется цикл по времени общей протяженностью в одни сутки. После завершения этого этапа осуществляются осреднение за сутки и передача вычисленных параметров в модель океана. Далее, в модели океана совершается шаг по времени (одни сутки) и передаются вычисленные параметры в модель атмосферы для возобновления счета в цикле.

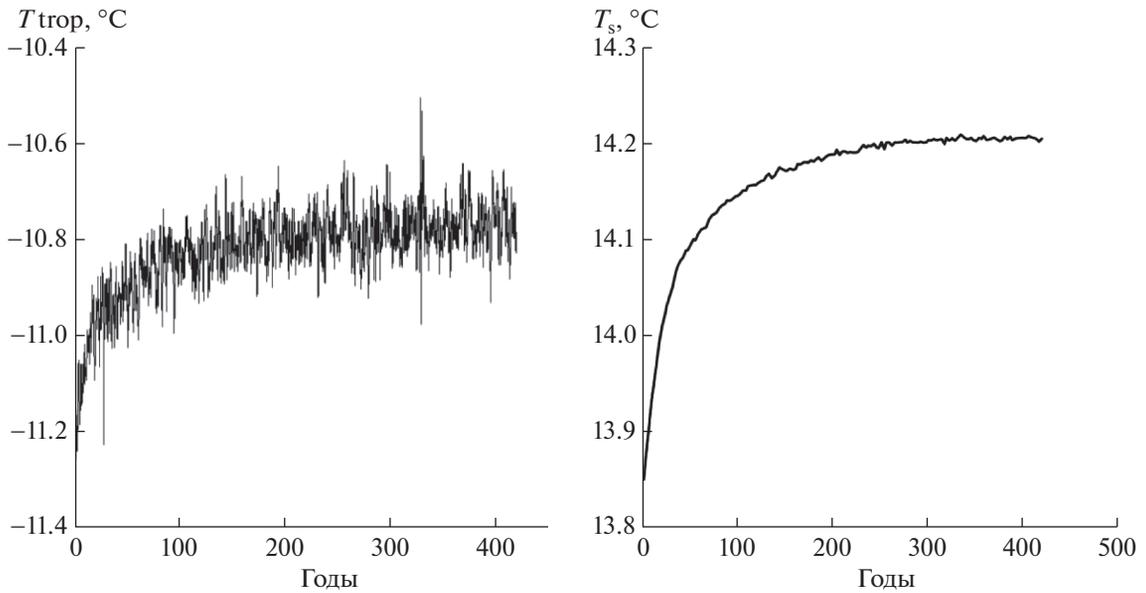
Некоторые результаты совместных расчетов по модели общей циркуляции атмосферы и модели термохалинной циркуляции океана показаны на фиг. 2–8. На фиг. 2 приведены графики средней глобальной и приземной температуры атмосферы в зависимости от времени. Эти кривые демонстрируют выход на установившийся режим и наличие межгодовой изменчивости температуры атмосферы в установившемся состоянии климатической системы.

На фиг. 3 представлено географическое распределение температуры поверхности океана для января месяца из модели термохалинной циркуляции океана при совместном расчете с моделью ОЦА. Наблюдается в целом зонально однородная структура изолиний с заметными отклонениями от зональности вблизи материков, что согласуется с данными наблюдений.

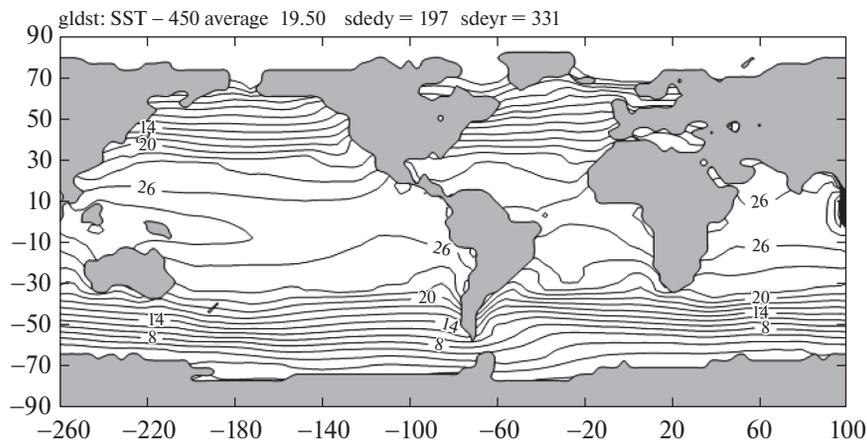
Поля температуры атмосферы вблизи подстилающей поверхности и давления на уровне моря (мбар) для января из модели ОЦА при совместном расчете с моделью термохалинной циркуляции океана обладают сильной изменчивостью над материками, что видно на фиг. 4, 5.



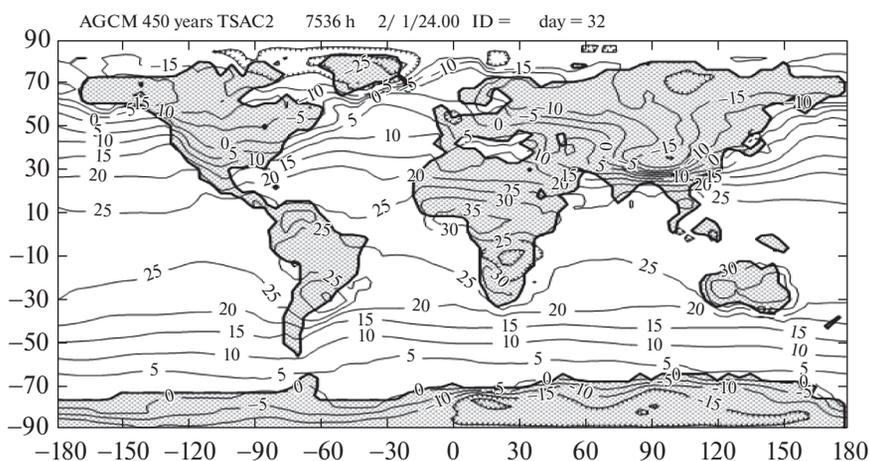
Фиг. 1. Блок-схема взаимодействия моделей.



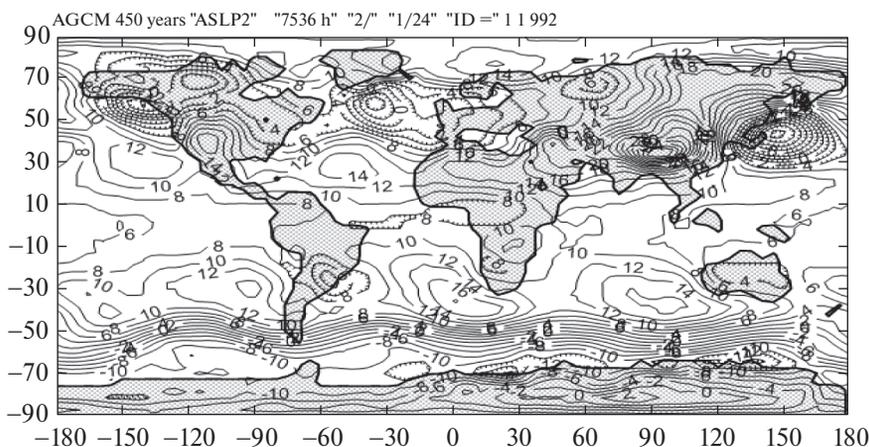
Фиг. 2. Среднеглобальная (а) и приземная (б) температура атмосферы. Совместные расчеты по модели общей циркуляции атмосферы и модели термохалинной циркуляции океана.



Фиг. 3. Температура поверхности океана (январь).

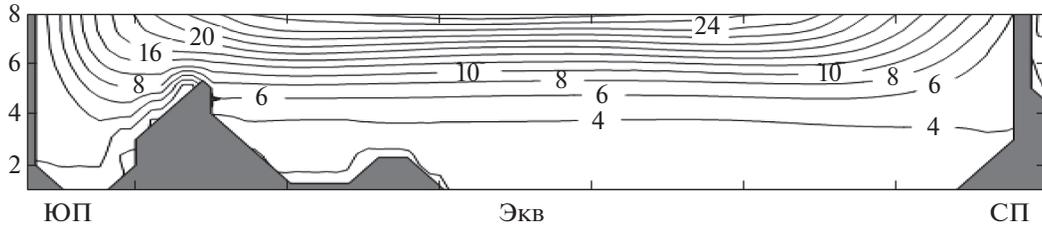


Фиг. 4. Температура атмосферы вблизи подстилающей поверхности (январь) из модели ОЦА при совместном расчете с моделью термохалинной циркуляции океана.

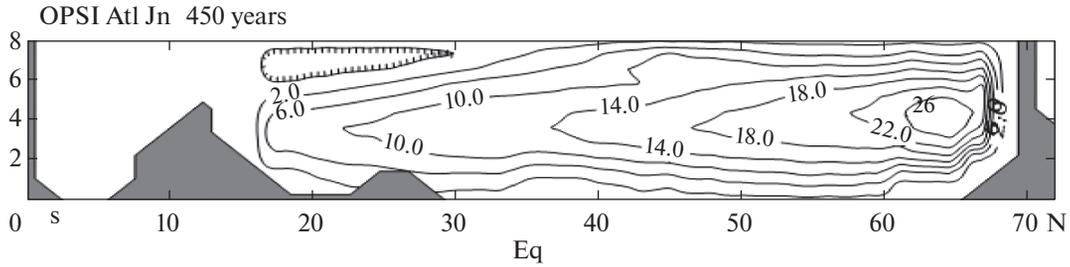


Фиг. 5. Давление на уровне моря (мбар), январь.

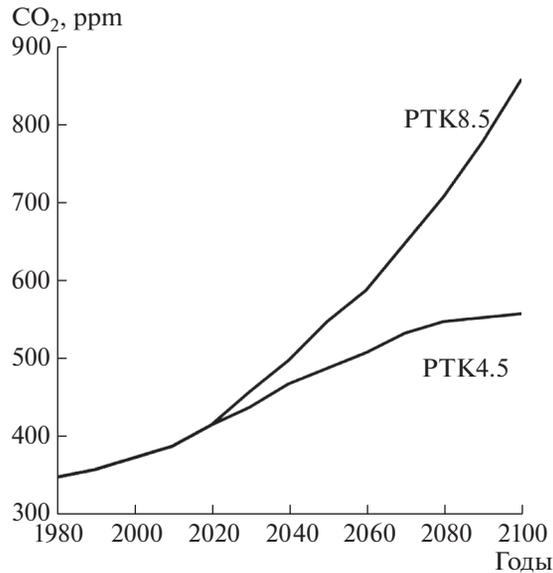
На фиг. 6 и 7 представлено распределение температур океана и меридиональной функции тока, соответственно, в вертикальном сечении до глубины 5000 м в среднем для Атлантического океана. По глубине использована логарифмическая расчетная шкала, сгущающаяся к поверхности. Распределение температуры демонстрирует большие вертикальные градиенты в термоклине



Фиг. 6. Распределение температуры по глубине в Атлантическом океане.



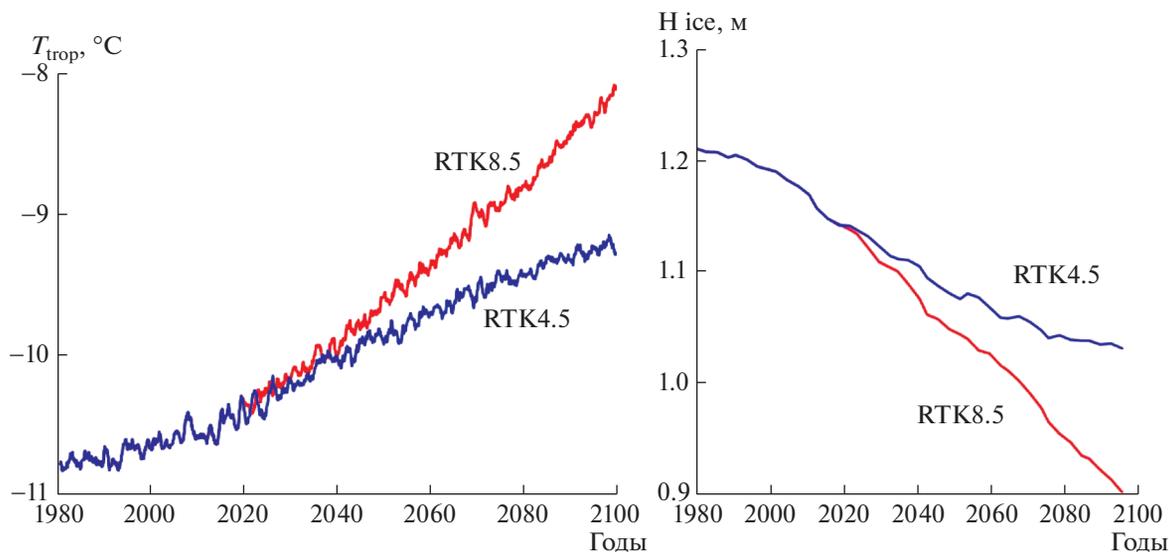
Фиг. 7. Меридиональная функция тока (Св). Атлантический океан, июль.



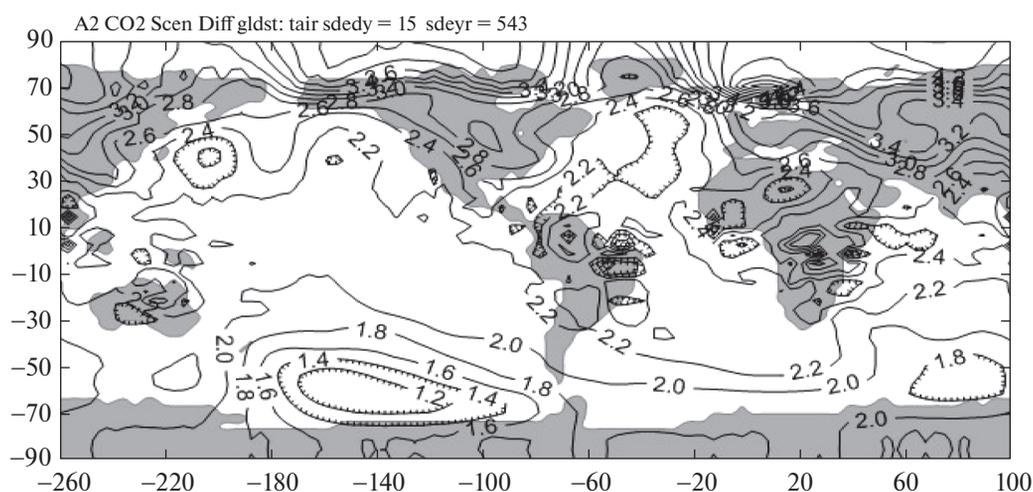
Фиг. 8. Сценарии роста концентрации CO_2 до 2100 г. Сценарии РТК8.5 и РТК4.5.

вблизи поверхности океана в слое толщиной около 1000 м и более однородное поле в глубоких слоях. На фиг. 7 изолинии определяют направление и величину меридионального потока в Свдрупах ($1 \text{ Св} = 10^6 \text{ м}^3/\text{с}$). В верхних слоях океана он направлен от экватора к северному полюсу, где холодные тяжелые массы воды опускаются вниз и более медленно смещаются в обратном направлении, постепенно замещая верхние слои в экваториальной области.

По комплексу моделей на первом этапе проведены расчеты прогнозирования климата до 2100 г. с использованием сценариев роста CO_2 (фиг. 8) под названием РТК8.5 (концентрация 860 ppm в 2100 г.) и РТК4.5 (концентрация 560 ppm в 2100 г.), предложенных Межправительственной группой экспертов по изменению климата (МГЭИК) (см. [17]) и отличающихся прогнозами развития мировой энергетики.



Фиг. 9. Изменение температуры тропосферы (а) и толщины морского льда (б).

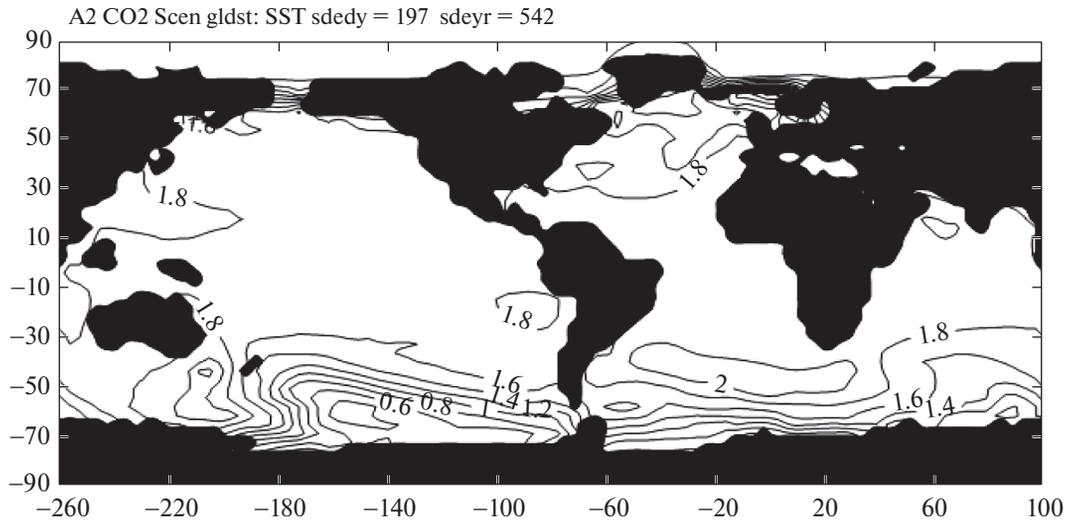


Фиг. 10. Изменение приземной температуры воздуха. Сценарий РТК8.5, январь.

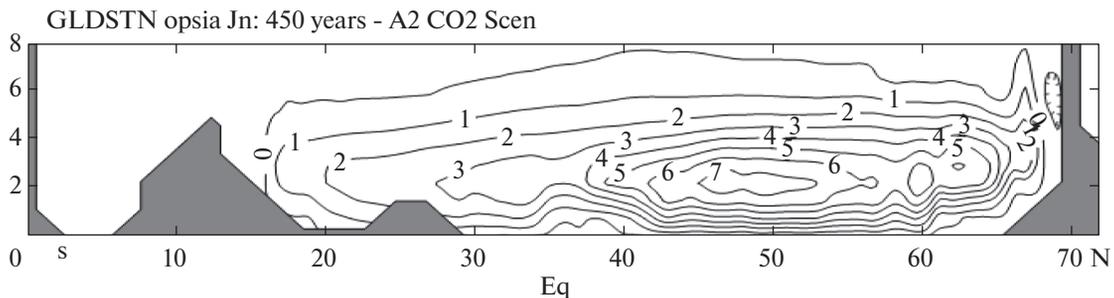
Для первого из них среднеповерхностная глобальная температура атмосферы к 2100 г. выросла на 2.7°C , влажность атмосферы – на 11.5% , уменьшение толщины морского льда – на 25% (фиг. 9). Арктический морской лед летом практически полностью растаял. Площадь вечной мерзлоты на территории России сократилась на 22% . Повышение приземной температуры атмосферы больше над материками, в средних и высоких широтах, достигая величины 5.2°C в северных областях Евразии (фиг. 10). В южном полушарии потепление не превышает 2°C . При реализации второго сценария среднеповерхностная глобальная температура атмосферы к 2100 г. выросла на 1.4°C , влажность атмосферы – на 8.0% , уменьшение толщины морского льда составило 15% .

Изменение температуры верхнего слоя океана для сценария РТК8.5 ожидаемо составляет меньшие значения (фиг. 11), чем для атмосферы, не превышая 2°C . В низких и средних широтах океан прогреет достаточно равномерно на величину около 1.8°C .

К концу века согласно проведенным расчетам прогнозируется существенное уменьшение мощности меридионального потока воды в Атлантическом океане при реализации сценария РТК8.5. На фиг. 12 показан прогноз изменения среднего меридионального потока в Атлантическом океане для 2100 г. при реализации сценария РТК8.5 роста CO_2 по сравнению с его значени-



Фиг. 11. Изменение температуры верхнего слоя океана, 2100 г.



Фиг. 12. Ослабление максимума меридиональной циркуляции в Атлантическом океане на 27% к 2100 г.

ем при современном климате (фиг. 7). Наблюдается значительное уменьшение потока максимально на 27%, что означает уменьшение потока теплых масс воды из зоны экватора в северные области Атлантики.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе описана организация взаимодействия модели ОЦА и модели термохалинной циркуляции океана и рассматривается функционирование полученной глобальной климатической модели в режиме сезонного хода солнечной радиации. Предложена схема их взаимодействия через граничные условия на поверхности океана. Реализована процедура интерполяции данных на расчетных сетках моделей с учетом конфигурации материков и океанов. Проведены долговременные расчеты на период более 400 лет по совместной модели, которые показали ее устойчивую работу. По комплексу моделей проведены расчеты прогнозирования климата до 2100 г. с использованием различных сценариев роста CO_2 , предложенных Межправительственной группой экспертов по изменению климата и отличающихся прогнозами развития мировой энергетики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Climate Change 2013. The Physical Science Basis. http://www.climatechange2013.org/images/report/WG1AR5_ALL_FINAL.pdf
2. Толстых М.А., Ибраев Р.А. и др. Модели глобальной атмосферы и мирового океана: алгоритмы и суперкомпьютерные технологии. М.: Изд-во МГУ, 2013. 144 с.

3. *Пархоменко В.П.* Модель климата с учетом глубинной циркуляции Мирового океана // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. Спец. вып. № 2. Матем. моделирование. 2011. С. 186–200.
4. *Кочергин В.П.* Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978, 128 с.
5. *Samelson R.M., Vallis G.K.* A simple friction and diffusion scheme for planetary geostrophic basin models. // J. Phys. Oceanog. 1997. V. 27. P. 186–194.
6. *Hogg A. McC., Dewar W.K., Killworth P.D., Blundell J.R.* A quasi-geostrophic coupled model: Q-GCM // Monthly Weather Review. 2003. V. 131. P. 2261–2278.
7. *Marsh R., Edwards N.R., Shepherd J.G.* Development of a fast climate model (C-GOLDSTEIN) for Earth System Science // SOC. 2002. № 83. 54 p.
8. *Пархоменко В.П.* Численные эксперименты на глобальной гидродинамической модели по оценке чувствительности и устойчивости климата // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. Спец. вып. № 3. Матем. моделирование. 2012. С. 134–145.
9. *Parkhomenko V.P., Tran Van Lang* Improved computing performance and load balancing of atmospheric general circulation model // J. Comput. Sci. and Cybernet. 2013. V. 29. № 2. P. 138–148.
10. *Arakawa A., Lamb V.* Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model // Meth. in Comput. Phys. Acad. Press. 1977. V. 17. P. 174–207.
11. *Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д.* Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 375 с.
12. *Гейтс В.Л., Баттен Е.С., Кейл А.Б., Нельсон А.Б.* Двухуровневая модель общей циркуляции атмосферы Минца-Аракавы. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 239 с.
13. *Thompson S.L., Warren S.G.* Parameterization of outgoing infrared radiation derived from detailed radiative calculations // J. Atmos. Sci. 1982. V. 39. P. 2667–2680.
14. *Shepherd J.G.* Overcoming the CFL time-step limitation: a stable iterative implicit numerical scheme for slowly evolving advection-diffusion systems // Ocean Modelling. 2002. V. 4. P. 17–28.
15. *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику. М: Физматлит, 2000. 296 с.
16. *Пархоменко В.П.* Организация совместных расчетов по модели общей циркуляции атмосферы и модели океана // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 41–57. <https://doi.org/10.7463/0415.0763783>
17. AR5 Synthesis Report: Climate Change 2014. <https://www.ipcc.ch/report/ar5/syr/>

*Памяти выдающегося ученого Ю.Д. Шмыглевского
с бесконечной благодарностью за его внимание к работе
и душевную поддержку в трудные минуты жизни*

АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА С ПАРЦИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ АККОМОДАЦИИ И ЭНЕРГООБМЕНОМ¹⁾

© 2021 г. А. А. Фролова

119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: aafrolova@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

Переработанный вариант 14.02.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Исследуются модели граничных условий на поверхности тела для разреженного молекулярного газа с учетом вращательной энергии. Проводится сравнение температурных полей при обтекании тел сверхзвуковым потоком газа при неполной аккомодации энергии на поверхности и при различной степени обмена вращательной и поступательной энергий. Показано влияние на течение газа интенсивности обмена в зависимости от параметра разреженности, скорости набегающего потока и температуры поверхности. Библ. 21. Фиг. 6.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, метод дискретных скоростей, граничное условие для газа с вращательными степенями свободы, взаимодействие газа с поверхностью.

DOI: 10.31857/S0044466921100045

1. ВВЕДЕНИЕ

Выбор граничного условия отражения, аппроксимирующего взаимодействие частиц с поверхностью тел, является одним из основных моментов при исследовании течений разреженного газа. При решении прикладных задач взаимодействие моноатомного газа с поверхностями, как правило, моделируется классическими условиями Максвелла, Эпштейна (см. [1]), Ночиллы (см. [2]), Черчиньяни–Лэмпис (см. [3]), а также их различными комбинациями и обобщениями (см. [4], [5]). При изучении течений молекулярного газа часто используются модель отражения Лорда (см. [6]) или условия Максвелла с неполной аккомодацией. Как и в случае моноатомного газа, для получения результатов, близких к экспериментальным, применяются различные модификации условий Максвелла и Черчиньяни–Лэмпис (см. [7], [8]). Данные граничные условия, учитывая закон отражения частиц с вращательными степенями свободы, не описывают обмена внутренней и поступательной энергий. Модель граничных условий с учетом энергетического обмена была предложена В. Рыковым (см. [9]). Несмотря на то что эта модель была представлена достаточно давно (в 1986 г.), она мало использовалась, и только несколько примеров ее применения можно найти в научной литературе (см. [10], [11]). Одной из причин этого является то, что величина энергетического обмена в условиях В. Рыкова является свободным внешним параметром, зависящим от двух вспомогательных коэффициентов, значения которых должны быть заданы априори. При этом критерием правильности выбора является согласование вращательной и поступательной температур около поверхности с экспериментальными данными. Так как экспериментальные данные, как правило, дают информацию о каком-то определенном режиме течения, то общая картина влияния обменов энергии на течение газа остается невыясненной. Поэтому представляется важным провести анализ данных условий и установить связь между интенсивностью энергетического обмена и параметрами течения, а также определить влияние

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-15-2020-799).

величины обменов на изменения температуры газа около поверхности в зависимости от параметра разреженности, скорости набегающего потока и температуры поверхности.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА

Детальным методом исследования влияния внутренних энергий на течение молекулярного газа является подход, основанный на решении полуклассического кинетического уравнения Ван-Чанг и Улунбека, но из-за своей сложности оно редко используется в прикладных задачах. Менее детальные подходы на основе кинетических уравнений используют двух- или трехтемпературные приближения, учитывая только изменение внутренней энергии и основываются на обобщении модельных уравнений типа БГК (Бхатнагара–Гросса–Крука), эллипсоидальной статистической модели или модели Шахова для одноатомного газа. При этом вращательная энергия молекул в модельных уравнениях описывается, как правило, классически (непрерывной величиной), а суммирование заменяется интегрированием. Колебательная энергия остается дискретной (см., например, [12]–[16]).

Сравнение поверхностных коэффициентов и температурных полей при обтекании цилиндра молекулярным газом (азотом) при сверхзвуковых скоростях (с числами Маха = 10, 25), полученных применением модели из [16] и методом DSMC из [17], показало удовлетворительное согласие, при этом влияние колебательной энергии на параметры течения оказалось достаточно слабым. Поэтому в настоящей работе мы будем рассматривать различные граничные условия при обтекании тел двухатомным газом (азотом), учитывая только вращательные энергии и используя модель Рыкова (R-модель) (см. [12]).

Описание течений двухатомного газа в [12] осуществляется введением функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, I_r)$, зависящей от времени t , вектора координат \mathbf{x} , вектора скорости $\boldsymbol{\xi}$ и непрерывной переменной I_r ($I_r > 0$), соответствующей вращательной энергии. В этом случае число степеней свободы внутренней энергии $k_{\text{rot}} = 2$. Макропараметры газа (плотность числа частиц n , вектор скорость \mathbf{u} , температуры $T_{\text{tr}}, T_{\text{rot}}$, векторы тепловых потоков $\mathbf{q}_{\text{tr}}, \mathbf{q}_{\text{rot}}$ и энергии $E_{\text{tr}}, E_{\text{rot}}$) определяются с использованием собственной скорости $\mathbf{C} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}$ и обозначения $\langle\langle f \rangle\rangle = \int_{R^3 \times R^+} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, I_r) d\boldsymbol{\xi} dI_r$ следующим образом (нижний индекс tr соответствует поступательным переменным, а rot – вращательным):

$$n = \langle\langle f \rangle\rangle, \quad n\mathbf{u} = \langle\langle \boldsymbol{\xi} f \rangle\rangle, \quad 3nk_{\text{B}}T_{\text{tr}} = \langle\langle m\mathbf{C}^2 f \rangle\rangle, \quad (k_{\text{rot}}/2)nk_{\text{B}}T_{\text{rot}} = \langle\langle I_r f \rangle\rangle, \\ \mathbf{q}_{\text{tr}} = m\langle\langle \mathbf{C}\mathbf{C}^2/2f \rangle\rangle, \quad \mathbf{q}_{\text{rot}} = \langle\langle I_r \mathbf{C} f \rangle\rangle, \quad nE_{\text{rot}} = \langle\langle I_r f \rangle\rangle, \quad nE_{\text{tr}} = \langle\langle m\xi^2/2f \rangle\rangle,$$

где m – масса молекул, k_{B} – постоянная Больцмана. Давление поступательного движения p_{tr} и равновесная температура T_{eqr} , устанавливаемая за счет обменов поступательной и вращательной энергий, определяются согласно формулам

$$p_{\text{tr}} = nk_{\text{B}}T_{\text{tr}}, \quad T_{\text{eqr}} = \frac{(3T_{\text{tr}} + k_{\text{rot}}T_{\text{rot}})}{3 + k_{\text{rot}}}.$$

В R-модели интеграл столкновений представляется суммой двух релаксационных членов, аппроксимирующих упругие и неупругие соударения. Усреднение функций распределения по внутренним энергиям и интегрирование по переменной I_r с весовыми коэффициентами $+1, I_r$,

$$f_0 = \int f dI_r, \quad f_1 = \int I_r f dI_r,$$

приводит кинетическое уравнение к системе двух модельных уравнений

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \left(\boldsymbol{\xi}, \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} \right) = \nu_{\text{tr}}(nf_j^{\text{tr}} - f_j) + \nu_{\text{rot}}(nf_j^{\text{rot}} - f_j), \quad j = 0, 1,$$

где введены следующие обозначения:

$$f_0^{\text{tr}} = f_M(T_{\text{tr}})[1 - (\mathbf{q}_{\text{tr}} \cdot \mathbf{C})a(T_{\text{tr}})], \\ f_0^{\text{rot}} = f_M(T_{\text{eqr}})[1 - \omega_0(\mathbf{q}_{\text{tr}} \cdot \mathbf{C})a(T_{\text{eqr}})],$$

$$\begin{aligned}
f_1^{\text{tr}} &= k_B T_{\text{rot}} [f_0^{\text{tr}} + f_M(T_{\text{tr}})(1 - \delta_D)m(\mathbf{q}_{\text{rot}} \cdot \mathbf{C}) / (k_B T_{\text{rot}} p_{\text{tr}})], \\
f_1^{\text{rot}} &= k_B T_{\text{eqr}} [f_0^{\text{rot}} + f_M(T_{\text{eqr}})\omega_1(1 - \delta_D)m(\mathbf{q}_{\text{rot}} \cdot \mathbf{C}) / (k_B T_{\text{eqr}} p_{\text{eqr}})], \\
f_M(T) &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mC^2}{2k_B T} \right), \quad a(T) = \frac{2m}{15n(k_B T)^2} \left(\frac{5}{2} - \frac{m}{2k_B T} C^2 \right).
\end{aligned}$$

Величина δ_D определяется по коэффициентам самодиффузии газа D и вязкости поступательного движения μ_{tr} , соотношением $\delta_D = \mu_{\text{tr}}/nmD$. Для молекул со степенным законом взаимодействия при индексе вязкости, близком к единице (максвелловские молекулы) $\delta_D = 1/1.55$. Параметры ω_0, ω_1 зависят от свойств рассматриваемого газа и определяются либо из экспериментальных данных по релаксации тепловых потоков, либо по числу Прандтля, которое для R-модели, как следует из [18], представляется в виде

$$\text{Pr} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \left\{ \frac{15}{2[2 + (1 - \omega_0)Z_r^{-1}]} + \frac{1}{\delta_D + (1 - \delta_D)(1 - \omega_1)Z_r^{-1}} \right\}^{-1}.$$

Здесь $\gamma = 7/5$, а Z_r – вращательное число столкновений, определяющее вращательную и поступательную частоты столкновений равенствами $\nu_{\text{rot}} = \nu/Z_r$, $\nu_{\text{tr}} = \nu(1 - 1/Z_r)$ и $\nu = p_{\text{tr}}/\mu_{\text{tr}}$.

Рассмотрим постановку граничных условий для функций f_0, f_1 , следуя аппроксимации взаимодействия газа с поверхностью, предложенной в [9]. Закон отражения в этом случае предполагается диффузным с температурой поверхности T_w и функцией распределения отраженных частиц в виде

$$f_w(\xi, I_r) = n_w (\beta_{\text{tr}}/\sqrt{\pi})^3 \exp[-\beta_{\text{tr}}^2 \xi^2 - I_r / (k_B T_{\text{rot},r})] / k_B T_{\text{rot},r}, \quad (2.1)$$

где $\beta_{\text{tr}} = \sqrt{m/(2k_B T_{\text{tr},r})}$, $T_{\text{tr},r}, T_{\text{rot},r}$ – поступательная и вращательная температуры отраженных частиц, а n_w – плотность, удовлетворяющая условию непротекания.

Интегрируя (2.1) по переменной I_r с весовыми коэффициентами $+1, I_r$, получаем

$$f_{0w}(\xi_n < 0) = n_w (\beta_{\text{tr}}/\sqrt{\pi})^3 \exp[-\beta_{\text{tr}}^2 \xi^2],$$

$$f_{1w}(\xi_n < 0) = k_B T_{\text{rot},r} f_{0w},$$

$$N_i = \frac{n_w}{2\sqrt{\pi}\beta_{\text{tr}}} = \int_{\xi_n > 0} \xi_n f_0(\xi) d\xi.$$

Поступательная и вращательная энергии, уносимые отраженными частицами $E_{\text{tr},r}, E_{\text{rot},r}$, и энергии отраженных частиц при равновесии газа с поверхностью тела $E_{\text{tr},w}, E_{\text{rot},w}$ связаны с $T_{\text{tr},r}, T_{\text{rot},r}$ следующими формулами:

$$E_{\text{tr},r} = 2N_i k_B T_{\text{tr},r}, \quad E_{\text{rot},r} = N_i k_B T_{\text{rot},r}, \quad E_{\text{tr},w} = 2N_i k_B T_w, \quad E_{\text{rot},w} = N_i k_B T_w. \quad (2.2)$$

При этом сами температуры $T_{\text{tr},r}, T_{\text{rot},r}$ определяются из условия аккомодации энергии, которое можно записать в виде

$$\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_r = \mathbf{A}(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_w),$$

где введены векторы энергий падающих и отраженных молекул и матрица коэффициентов аккомодации следующими соотношениями:

$$\mathbf{E}_i = (E_{\text{tr},i}, E_{\text{rot},i}), \quad \mathbf{E}_w = (E_{\text{tr},w}, E_{\text{rot},w}), \quad \mathbf{E}_r = (E_{\text{tr},r}, E_{\text{rot},r}),$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{\text{tr}} + \alpha_{\text{tr,rot}} & -\alpha_{\text{rot,tr}} \\ -\alpha_{\text{tr,rot}} & \alpha_{\text{rot}} + \alpha_{\text{rot,tr}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E_{tr,i}, E_{rot,i}$ – поступательная и вращательная энергии падающих на поверхность частиц. Если коэффициенты $\alpha_{tr,rot} = \alpha_{rot,tr} = 0$, то обмен энергии между поступательными и вращательными степенями свободы отсутствует, и граничные условия для энергий имеют вид

$$E_{tr,r} = (1 - \alpha_{tr})E_{tr,i} + \alpha_{tr}E_{tr,w},$$

$$E_{rot,r} = (1 - \alpha_{rot})E_{rot,i} + \alpha_{rot}E_{rot,w},$$

а температуры отраженных частиц определяются с использованием (2.2) следующим образом:

$$k_B T_{tr,r} = (1 - \alpha_{tr})E_{tr,i}/(2N_i) + \alpha_{tr}k_B T_w, \tag{2.3}$$

$$k_B T_{rot,r} = (1 - \alpha_{rot})E_{rot,i}/N_i + \alpha_{rot}k_B T_w. \tag{2.4}$$

При отличных от нуля коэффициентах $\alpha_{tr,rot}, \alpha_{rot,tr}$ энергии отраженных молекул определяются по формулам

$$E_{tr,r} = E_{tr,i} + \alpha_{tr}(E_{tr,w} - E_{tr,i}) + \alpha_{tr,rot}(E_{tr,w} - E_{tr,i}) - \alpha_{rot,tr}(E_{rot,i} - E_{rot,w}), \tag{2.5}$$

$$E_{rot,r} = E_{rot,i} + \alpha_{rot}(E_{rot,w} - E_{rot,i}) + \alpha_{rot,tr}(E_{rot,w} - E_{rot,i}) - (E_{tr,i} - E_{tr,w}), \tag{2.6}$$

что приводит к соотношениям для температур

$$k_B T_{tr,r} = E_{tr,i}/(2N_i) - (\alpha_{tr} + \alpha_{tr,rot})[E_{tr,i}/(2N_i) - k_B T_w] + \alpha_{rot,tr} \left(\frac{E_{rot,i}}{2N_i} - k_B T_w \right),$$

$$k_B T_{rot,r} = \frac{E_{rot,i}}{N_i} - (\alpha_{rot} + \alpha_{rot,tr})[E_{rot,i}/N_i - k_B T_w] + \alpha_{rot,tr} [E_{tr,i}/N_i - k_B T_w].$$

Условия (2.5), (2.6) можно записать также в следующем виде:

$$E_{tr,r} = E_{tr,i} - \alpha_{tr}(E_{tr,i} - E_{tr,w}) - Q, \tag{2.7}$$

$$E_{rot,r} = E_{rot,i} - \alpha_{rot}(E_{rot,i} - E_{rot,w}) + Q, \tag{2.8}$$

где $Q = \alpha_{tr,rot}(E_{tr,i} - E_{tr,w}) - \alpha_{rot,tr}(E_{rot,i} - E_{rot,w})$ определяет величину обмена энергии. Если $Q > 0$, то превалирует переход поступательной энергии молекул во вращательную, и наоборот, если $Q < 0$. Задание величины Q достаточно произвольно, однако при выборе параметров $\alpha_{tr,rot}, \alpha_{rot,tr}$ нужно учитывать условия положительности энергий отраженных частиц $E_{rot,r} > 0$ и $E_{tr,r} > 0$. Кроме того, так как при обтекании выпуклых тел сверхзвуковым потоком вращательная температура у поверхности меньше поступательной (за исключением возможно теневой области), то значения Q на части поверхности, обращенной к потоку, можно выбрать таким, чтобы выполнялось условие $T_{rot,r} < T_{tr,r}$. Из соотношений (2.2), (2.7), (2.8) и используя обозначения

$$E_{tr,r}^* = (1 - \alpha_{tr})E_{tr,i} + \alpha_{tr}E_{tr,w}, \quad E_{rot,r}^* = (1 - \alpha_{rot})E_{rot,i} + \alpha_{rot}E_{rot,w},$$

получаем

$$\max\{-E_{rot,r}^*, -E_{tr,r}^*\} < Q \leq (E_{tr,r}^* - 2E_{rot,r}^*)/3. \tag{2.9}$$

Отметим, что правая часть (2.9) оценивает значения температур для вылетающих с поверхности молекул. Для температур на поверхности поступательного движения $T_{tr,s}$ и вращательного движения $T_{rot,s}$ нужно учесть энергию частиц, приходящих на тело. Выполнение условия $T_{rot,s} < T_{tr,s}$ приводит к более общему условию для величины обмена. Оценить допустимую величину Q можно по значениям энергий и скорости падающего потока для свободномолекулярного режима. Тогда для температур отраженных частиц, вводя обозначение

$$F(U_n, U_t, \beta_{tr}) = \frac{\beta_{tr} U_n}{3\sqrt{\pi}} + \frac{n \langle u_0 \rangle U_t^2}{3(n \langle u_0 \rangle + N_i \beta_{tr} \sqrt{\pi})},$$

будем иметь

$$T_{rot,r} < T_{tr,r} + F(U_n, U_t, \beta_{tr}),$$

где U_n, U_t – нормальная и тангенциальная компоненты скорости свободно молекулярного потока, а $\langle u_0 \rangle = 0.5 \operatorname{erfc}(-\beta_{tr} U_n)$. Из (2.2), (2.7), (2.8) получим

$$Q \leq (E_{tr,r}^* - 2E_{rot,r}^*)/3 + 2/3 N_i F(U_n, U_t, \beta_{tr}). \quad (2.10)$$

Сравнивая условия (2.9) и (2.10), мы видим, что в случае обтекания тел на элементах поверхности, обращенных к потоку, $U_n > 0$, и из условия (2.9) следует (2.10), а в теневой области, где величина $F(U_n, U_t, \beta_{tr})$ может стать отрицательной, условие (2.10) является более сильным. При уменьшении числа Кнудсена компоненты скорости U_n, U_t около поверхности стремятся к нулю и (2.9), (2.10) становятся практически эквивалентными. Отметим, что при постоянных значениях коэффициентов $\alpha_{tr,rot}, \alpha_{rot,tr}$ не всегда удается удовлетворить этим условиям на всей поверхности, так как величины в правых частях (2.9), (2.10) и величина обмена Q могут менять знак.

Полная энергия отраженных частиц $E_r = E_{tr,r} + E_{rot,r}$ выражается формулой

$$E_r = E_i - \alpha_{tr}(E_{tr,i} - E_{tr,w}) - \alpha_{rot}(E_{rot,i} - E_{rot,w}),$$

так что поверхностный коэффициент теплопередачи для свободномолекулярного режима не зависит от энергетического обмена, а в случае произвольных значений числа Кнудсена изменяется очень незначительно. Основное отличие при использовании граничных условий (2.7), (2.8) проявляется в поведении температурных полей около поверхности тела, которое и исследуется в настоящей работе.

3. МЕТОД И ДЕТАЛИ РАСЧЕТА

При численном анализе рассматривается двумерная стационарная задача сверхзвукового обтекания цилиндрического тела с закругленным сечением (см. ниже фиг. 4). Влияние величины энергетического обмена на параметры течения оценивается сравнением поведения температуры около поверхности.

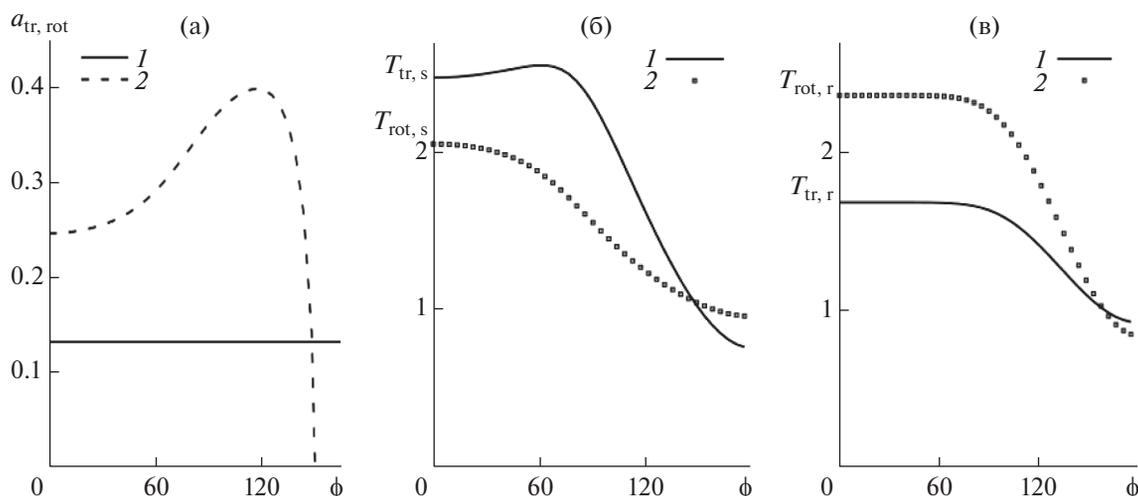
Численный расчет проводится методом дискретных ординат с применением кинетического модуля программного комплекса Unified Flow Solver (UFS) (см. [19]), использующего для решения расщепление кинетического уравнения на этапы свободномолекулярного течения и релаксацию. В дискретном скоростном пространстве выбирается равномерная кубическая сетка. В физическом пространстве используется иерархическая адаптивно измельчаемая сетка. В пространственных координатах применяется метод конечных объемов второго порядка на неструктурированной декартовой сетке. Поверхность тела аппроксимируется с помощью метода скошенных ячеек. Стационарное решение ищется с помощью явного по времени метода установления. Интеграл столкновений в кинетическом уравнении аппроксимируется согласно R-модели Рыкова (см. [12]). Для выполнения законов сохранения релаксационного оператора используется итерационная процедура Ньютона.

Физические параметры задачи взяты из [17], где предполагается, что закон вязкости соответствует взаимодействию по модели $\mu = \mu_{ref}(T/T_{ref})^\omega$, и

$$\mu_{ref} = \frac{15\sqrt{\pi m k_B T_{ref}}}{2\pi d_{ref}^2 (5 - 2\omega)(7 - 2\omega)}, \quad \omega = 0.7, \quad T_{ref} = 290 \text{ К}, \quad d_{ref} = 4.11 \times 10^{-10} \text{ м.}$$

При расчетах используются безразмерные величины введением характерных значений длины d , температуры и плотности набегающего потока T_∞, ρ_∞ , и наиболее вероятной молекулярной скорости $v_m = \sqrt{2RT_\infty}$. Тепловой поток, давление и вязкость обезразмериваются на $\rho_\infty v_m^3/2, \rho_\infty v_m^2/2$ и $\mu_\infty = \mu(T_\infty)$ соответственно. Введение характерных величин приводит к безразмерной форме кинетического уравнения с числом Кнудсена $\text{Kn} = \lambda_\infty/d$, где λ_∞ – длина свободного пробега. Вращательное число столкновений Z_r в расчетах задается постоянным и $Z_r = 4$.

Вычисления, представленные ниже, выполнены с размерами ячеек в скоростном пространстве $\Delta\xi/v_m = 0.3-0.4$. Адаптация сетки в физическом пространстве выполнялась по расстоянию от тела. Минимальный размер ячейки около поверхности выбирался от $h/d = 4 \times 10^{-3}$ до $h/d = 2 \times 10^{-2}$ в зависимости от числа Кнудсена.



Фиг. 1. (а) – Значения коэффициента $\alpha_{tr,rot}$ в зависимости от угла ϕ наклона нормали к поверхности, линии 1, 2 соответствуют равенствам в (2.9), (2.10). Значения поступательной и вращательной температур при $\alpha_{tr,rot} = 0.2$ на поверхности (б) и отраженных молекул (в). Линии 1, 2 – поступательная и вращательная температуры соответственно.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Исследуем, как влияют граничные условия (2.7), (2.8) на температурные поля на примере обтекания цилиндрического тела с параболическим сечением и прямой задней кромкой (см. ниже фиг. 4). Характерный параметр длины d равен максимальной ширине сечения. Парциальные коэффициенты аккомодации заданы значениями $\alpha_{tr} = 0.6$, $\alpha_{rot} = 0.5$, которые близки к коэффициентам, полученным для азота в [20].

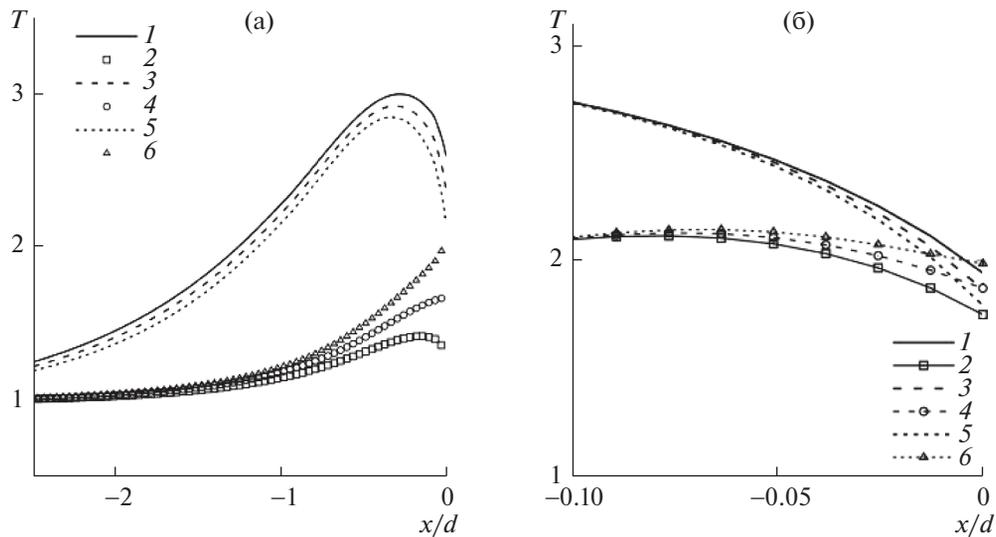
Пример 1. Рассмотрим сначала случай обтекания при температуре поверхности тела $T_w = T_\infty$. В безразмерных переменных $T_w = 1$. Зададим скорость набегающего потока, соответствующей числу $Ma = 3$. В свободномолекулярном режиме при отсутствии энергетических обменов внутренней энергия при любых заданных коэффициентах аккомодации и любой скорости частиц, падающих на поверхность, не изменяется, что не является физически корректным, так как исключает возбуждение вращательных степеней свободы (см. [21]). Рассмотрим случай, когда преобладает передача поступательной энергии во вращательную, т.е. $Q > 0$. Так как в свободномолекулярном режиме величина $(E_{rot,i} - E_{rot,w}) = 0$, то для анализа влияния интенсивности энергетического обмена на решение будем изменять $\alpha_{tr,rot}$.

Для выбора значений $\alpha_{tr,rot}$ рассмотрим поведение коэффициента в зависимости от угла наклона нормали к элементу поверхности при свободномолекулярном режиме обтекания. На фиг. 1а приведены графики значений $\alpha_{tr,rot}$, дающие равенство в условиях (2.9) и (2.10) (кривые 1, 2 соответственно). Видно, что условие $T_{rot,s} < T_{tr,s}$ можно удовлетворить при $\phi < 140^\circ$, выбрав $\alpha_{tr,rot} < 0.24$, однако при этом $T_{rot,r} > T_{tr,r}$. Значения температур на поверхности и температур отраженных частиц при $\alpha_{tr,rot} = 0.2$ приведены на фиг. 1б и 1в.

Учитывая значения $\alpha_{tr,rot}$ в свободномолекулярном режиме обтекания, рассмотрим влияние энергетических обменов на поведение температур при числах Кнудсена $Kn = 1$ и $Kn = 0.1$ для следующих значений параметров:

- вариант 1: $\alpha_{tr,rot} = 0.0$, $\alpha_{rot,tr} = 0.0$,
- вариант 2: $\alpha_{tr,rot} = 0.1$, $\alpha_{rot,tr} = 0.0$,
- вариант 3: $\alpha_{tr,rot} = 0.2$, $\alpha_{rot,tr} = 0.0$.

Из фиг. 2а следует, что при $Kn = 1$ передача поступательной энергии во вращательную приводит к значительному изменению температур по сравнению с течением без обмена. Особенно



Фиг. 2. Профили поступательной и вращательной температур при переходе поступательной энергии во вращательную: (а) – $\text{Kn} = 1$, (б) – $\text{Kn} = 0.1$. Линии 1, 3, 5 – поступательная температура, 2, 4, 6 – вращательная температура. Линии (1, 2), (3, 4), (5, 6) соответствуют вариантам 1, 2, 3.

сильно увеличивается вращательная температура газа, и при выбранных значениях $\alpha_{\text{tr,rot}}$ остается меньше поступательной температуры у поверхности тела.

При уменьшении числа Kn правая часть условия (2.10) стремится к нулю, и решения с обменом и без обмена становятся близкими. На фиг. 2б, где представлены вращательная и поступательная температуры газа у поверхности при $\text{Kn} = 0.1$, видно, что отличия температур становятся малыми и локализованы около поверхности. При этом для варианта 2 температуры становятся уже равными, а для варианта 3 $T_{\text{rot}} > T_{\text{tr}}$. Таким образом, с уменьшением числа Кнудсена допустимые значения $\alpha_{\text{tr,rot}}$ и Q уменьшаются и граничные условия без обмена энергиями (2.3), (24) и с обменом (2.7), (2.8) становятся эквивалентными.

В рассмотренных случаях параметр $\alpha_{\text{rot,tr}} = 0$, и передача вращательной энергии в поступательную энергию молекул явным образом не задана. Значения $\alpha_{\text{rot,tr}}$, отличные от нуля, могут приводить к изменению поведения температур в поле течения. Однако для скоростей набегающего потока с $\text{Ma} \gg 1$ влияния перехода вращательной энергии в поступательную оказывается слабым, так как величина $|E_{\text{rot},i} - E_{\text{rot,w}}| \ll |E_{\text{tr},i} - E_{\text{tr,w}}|$ за исключением частей поверхности, где $(E_{\text{tr},i} - E_{\text{tr,w}}) \cong 0$. Кроме этого, выбором в точке торможения $\alpha_{\text{tr,rot}}^* = \alpha_{\text{tr,rot}} - \alpha_{\text{rot,tr}}(E_{\text{rot},i} - E_{\text{rot,w}})/(E_{\text{tr},i} - E_{\text{tr,w}})$ можно сделать обмены Q близкими.

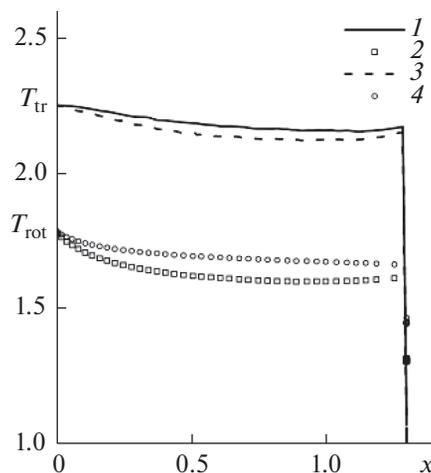
На фиг. 3 показаны профили поступательной и вращательной температур газа на поверхности от координаты x , отсчитываемой от вершины параболы, с равными обменами в точке торможения для двух вариантов параметров ($\text{Kn} = 1$):

вариант 1: $\alpha_{\text{tr,rot}} = 0.138$, $\alpha_{\text{rot,tr}} = 0.5$,

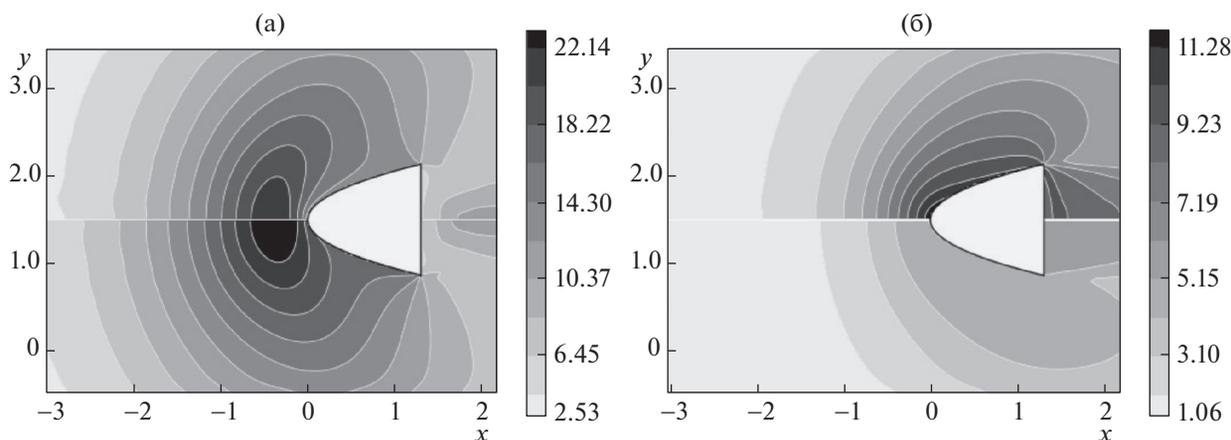
вариант 2: $\alpha_{\text{tr,rot}} = 0.128$, $\alpha_{\text{rot,tr}} = 0.0$.

Несмотря на отличие значений в вариантах 1 и 2, температуры вдоль линии торможения совпадают (график опущен), а отличия температур газа на поверхности малы.

При увеличении скорости набегающего потока общая тенденция влияния граничных условий на течение газа не изменяется. Положительный обмен, удовлетворяющий условиям (2.9), (2.10), стремится к нулю при уменьшении числа Kn . При $\text{Kn} \sim 1$ основное влияние испытывает вращательная температура, изменяясь не только около поверхности, но и во всем поле течения. На фиг. 4 приведены изолинии вращательной и поступательной температур при обмене энергиями ($\alpha_{\text{tr,rot}} = 0.24$, $\alpha_{\text{rot,tr}} = 0.0$) и без обмена ($\alpha_{\text{tr,rot}} = \alpha_{\text{rot,tr}} = 0.0$) для скорости набегающего потока $\text{Ma} = 10$ при температуре поверхности $T_w = 2.5$.



Фиг. 3. Профили поступательной и вращательной температур на поверхности при равных обменах в точке торможения. Линии (1, 2) – вариант 1, линии (3, 4) – вариант 2, (1, 3) – поступательная температура, (2, 4) – вращательная температура.



Фиг. 4. Изолинии температур при скорости набегающего потока $Ma = 10$ и $T_w = 2.5$: (а) – поступательная температура, (б) – вращательная температура. Верхняя часть фигуры условия с обменом энергией, нижняя без обмена.

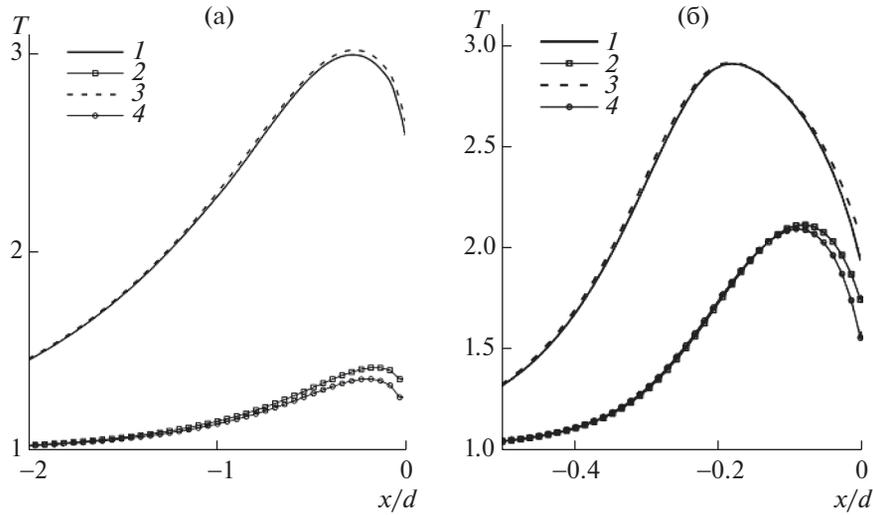
Рассмотрим случай $Q < 0$, соответствующий переходу вращательной энергии в поступательную при значениях параметров $\alpha_{tr,rot} = 0$ и $\alpha_{rot,tr} = 0.5$. Отметим, что данным выбором параметров мы искусственно создаем передачу вращательной энергии в поступательную, что может и не соответствовать реальной картине отражения.

На фиг. 5, где приведены для сравнения профили температур с $Q < 0$ и $Q = 0$, видно, что переход вращательной энергии в поступательную слабо влияет на течение как при $Kn = 1$, так и при $Kn = 0.1$. Относительные изменения вращательной и поступательной температур в точке торможения составляют 10 и 2% соответственно. Отметим, что при уменьшении числа Кнудсена относительные изменения вращательной и поступательной температур около поверхности сохраняются по величине.

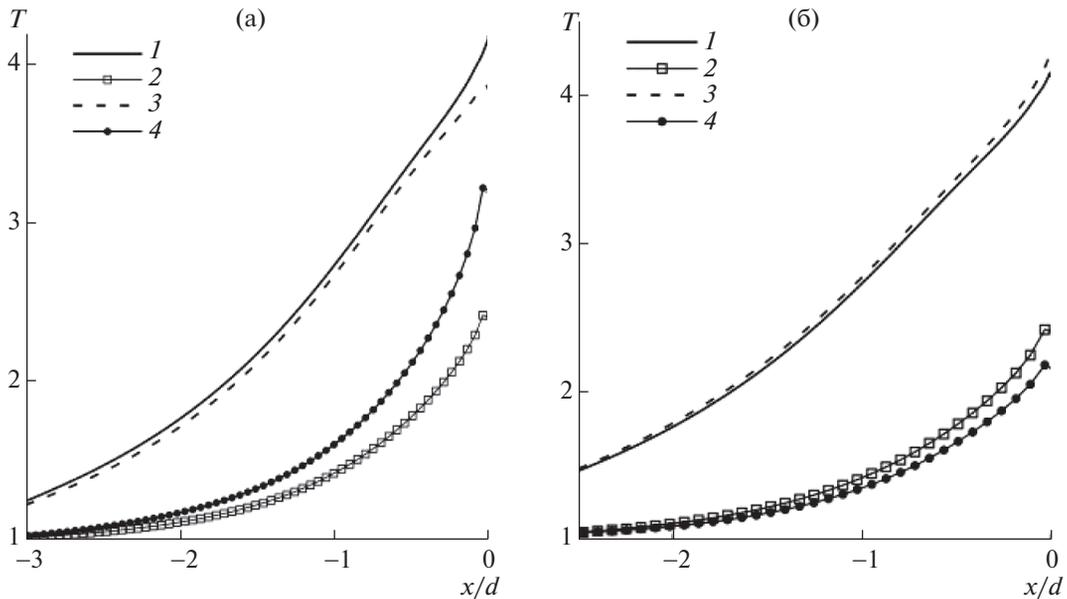
Пример 2. Рассмотрим обтекание при $Kn = 1$, с температурой поверхности тела выше равновесной температуры набегающего потока со скоростью $Ma = 3$. В безразмерных переменных $T_w = 4.5$. Для анализа влияния энергетических обменов на течение газа рассмотрим два варианта параметров:

вариант 1: $\alpha_{tr,rot} = 0.0, \alpha_{rot,tr} = 0.4,$

вариант 2: $\alpha_{tr,rot} = 0.4, \alpha_{rot,tr} = 0.0.$



Фиг. 5. Профили поступательной и вращательной температур при $Q < 0$ и $Q = 0$: (а) – $Kn = 1$, (б) – $Kn = 0.1$. Линии 1, 3 – поступательная температура, 2, 4 – вращательная температура. Линии (1, 2) – $Q = 0$, (3, 4) – $Q < 0$.



Фиг. 6. Профили поступательной и вращательной температур при $T_w = 4.5$: (а) – обмен $Q > 0$, (б) – обмен $Q < 0$. Линии 1, 3 – поступательная температура, 2, 4 – вращательная. Линии (1, 2) – условия без обмена энергией, (3, 4) – с обменом.

Нас интересует, возможен ли переход поступательной энергии во вращательную при малых значениях $E_{tr,i} - E_{tr,w}$. Из представленных графиков (фиг. 6) следует, что значения коэффициентов варианта 1 дают переход поступательной энергии во вращательную, несмотря на то что $\alpha_{tr,rot} = 0$. Так как $E_{rot,i} - E_{rot,w} < 0$, то величина обмена оказывается положительной, что и приводит к передаче поступательной энергии во вращательную. Положительная величина обмена, как и в примерах, рассмотренных выше, приводит к значительному повышению вращательной температуры. При значениях коэффициентов из варианта 2 реализуется обратная передача энергии, которая практически не влияет на параметры.

Таким образом, в рассмотренном случае определяющим фактором энергообмена является знак величины Q независимо от значений коэффициентов $\alpha_{tr,rot}$, $\alpha_{rot,tr}$.

В данной работе мы проанализировали только ряд предельных случаев использования граничных условий с энергообменом, не рассматривая дозвуковые течения и области за телом. Из приведенных примеров видно, что определяющим фактором при взаимодействии газа с поверхностью является величина обмена Q , которая может быть близкой при разных значениях используемых коэффициентов обмена. Задавая разные значения величины Q , мы можем моделировать различные условия отражения частиц поверхностью. При этом положительные значения независимо от значений коэффициентов обмена будут приводить к передаче поступательной энергии во вращательную, а отрицательные – наоборот.

Однако для использования таких граничных условий в реальных задачах необходимы дополнительная информация и детализация процесса передачи энергий, возможно, с заменой постоянных коэффициентов обмена на параметры, зависящие от энергии падающих на поверхность частиц и температуры отражения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ граничных условий отражения молекулярного газа от поверхности с парциальными коэффициентами аккомодации и с обменом энергий показывает, что преобладание передачи поступательной энергии во вращательную существенно изменяет температуру газа около поверхности при умеренных и больших числах Кнудсена. С уменьшением числа Кнудсена переход поступательной энергии во вращательную становится незначительным, и условия без энергетического обмена могут использоваться при решении задач.

Переход вращательной энергии в поступательную гораздо слабее влияет на параметры течения, однако приводит к отличию температур около поверхности тела даже при малых числах Кнудсена. Такой процесс передачи энергии должен использовать дополнительную информацию о величине и условиях обмена и исследоваться более детально, учитывая распределение вращательной энергии по уровням.

При температуре поверхности выше равновесной энергетический обмен реализуется при значениях коэффициентов, соответствующих обратному переходу. Это связано с тем, что приходящие частицы не отдают, а получают энергию от поверхности.

Численные расчеты программным комплексом UFS проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Epstein M.* A model of the wall boundary condition in kinetic theory // *AIAA Journal*. 1967. V. 5. № 10. P. 1797–1800.
2. *Nocilla S.* The surface re-emission law in free molecule flow, ed. J.A. Laurmann. *Rarefied Gas Dynamics*. New York, Academic Press, 1963.
3. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. Edinburgh and London: Academic Press, 1975.
4. *Ковалев В.Л., Якунчиков А.Н.* Анализ моделей рассеяния на основе результатов траекторных расчетов // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа*. 2012. № 5. С. 80–87.
5. *Struchtrup H.* Maxwell boundary condition and velocity dependent accommodation coefficient // *Phys. Fluids*. 2013. V. 25. P. 112001.
6. *Lord R.G.* Some extensions to the Cercignani-Lampis gas-surface scattering kernel // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. P. 706–710.
7. *Yamamoto K., Takeuchi H., Hyakutake T.* Characteristics of reflected gas molecules at a solid surface // *Phys. Fluids*. 2006. V. 18. P. 046103.
8. *Yamamoto K., Takeuchi H., Hyakutake T.* Scattering properties and scattering kernel based on the molecular dynamics analysis of gas-wall interaction // *Phys. Fluids*. 2007. V. 19. P. 087102.
9. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* О граничных условиях для газов на поверхности тела // *Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа*. 1986. № 5. С. 141–148.
10. *Рыков В.А., Титарев В.А., Шахов Е.М.* Численное исследование поперечного обтекания пластины сверхзвуковым потоком двухатомного разреженного газа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 1. С. 140–154.
11. *Tantos S.* Effect of rotational and vibrational degrees of freedom in polyatomic gas heat transfer, flow and adsorption processes far from local equilibrium // *Dissertation*. Department of Mech. Engineer. Univ. of Thessaly, 2006.

12. Рыков В.А. Модельное кинетическое уравнение для газов с вращательными степенями свободы // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1975. № 6. С. 107–115.
13. Holway L.H. New statistical models for kinetic theory: Methods of construction // Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 1658–1673.
14. Andries P., LeTallec P., Perlat J., Perthame B. The Gaussian-BGK model of Boltzmann equation with small Prandtl number // Eur. J. Mech. B – Fluids. 2020. V. 19. P. 813–830.
15. Wang Z., Yan H., Li Q., Xu K. Unified gas-kinetic scheme for diatomic molecular flow with translational, rotational, and vibrational modes // J. of Comput. Phys. 2017. V. 350. P. 237–259.
16. Титарев В.А., Фролова А.А. Применение модельных кинетических уравнений для расчетов сверх- и гиперзвуковых течений молекулярного газа // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2018. № 4. С. 95–112.
17. Lofthouse A.J. Nonequilibrium hypersonic aerothermodynamics using the Direct Simulation Monte Carlo and Navier–Stokes models. PhD dissertation. Univ. Michigan, 2008.
18. Рыков В.А., Скобелкин В.Н. О макроскопическом описании движения газа с вращательными степенями свободы // Изв. АН. СССР. Механ. жидкости и газа. 1978. № 1. С. 180–183.
19. Kolobov V., Arslanbekov R., Aristov V., Frolova A., Zabelok S. Unified solver for rarefied and continuum flows with adaptive mesh and algorithm refinement // J. Comput. Phys. 2007. V. 223. P. 589–608.
20. Ребров А.К., Морозов А.А., Плотников М.Ю., Тимошенко Н.И., Шишкин А.В. Аккомодация поступательной и вращательной энергии газа при свободномолекулярном обтекании тонкой проволоки // Ж. эксперим. и техн. физ. 2003. Т. 124. Вып. 4 (10) С. 820–828.
21. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

Моему научному руководителю, профессору
Юрию Дмитриевичу Шмыглевскому посвящаю.
А.А. Чарахчьян

ОТРАЖЕНИЕ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЛОСКОСТИ
СИММЕТРИИ ВНУТРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МИШЕНИ
ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

© 2021 г. К. В. Хищенко^{1,*}, А. А. Чарахчьян^{2,**}

¹ 125412 Москва, ул. Ижорская 13, стр. 2, ОИВТ РАН, Россия

² 119333 Москва, ул. Вавилова 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: konst@ihed.ras.ru

**e-mail: chara@ccas.ru

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.
Переработанный вариант 14.03.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматривается осесимметричная задача о столкновении двух идущих навстречу одинаковых детонационных волн внутри предварительно сжатой мишени небольшого размера, состоящей из цилиндра с горючим в виде эквимольярной смеси дейтерия и трития, окруженного золотой оболочкой и зажигаемого с торцов пучком протонов. Изучается отражение возникающей нестационарной неплоской детонационной волны от плоскости симметрии. Обсуждаются зависимости от времени некоторых характеристик течения. Развита приближенная модель горения, позволяющая рассчитывать коэффициент выгорания горючего между отраженной детонационной волной и плоскостью симметрии после вынужденного прекращения двумерного расчета, в частности, из-за неустойчивости границы раздела горючего и оболочки. Изучена роль двух возможных механизмов развития неустойчивости границы раздела: ее импульсного ускорения детонационной волной (неустойчивость Рихтмайера–Мешкова) и высокоскоростного скольжения горючего вдоль границы раздела (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца). Библ. 30. Фиг. 12. Табл. 2.

Ключевые слова: численное моделирование, управляемый термоядерный синтез, детонационные волны, неустойчивость границы раздела сред.

DOI: 10.31857/S0044466921100069

ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования по управляемому инерциальному термоядерному синтезу ориентированы в основном на сферические мишени, так как на этом направлении есть надежда получить на создаваемых в настоящее время мощных лазерных установках выход термоядерной энергии, превышающий вложенную в мишень энергию. Привлекательной чертой цилиндрической мишени (цилиндр с термоядерным горючим, окруженный тяжелой оболочкой) является возможность получить незатухающую волну термоядерного горения, двигающуюся по холодному горючему вдоль оси мишени. Это позволяет, решив проблему зажигания небольшой мишени, имеющей небольшой коэффициент усиления энергии, увеличивать этот коэффициент, увеличивая размер мишени вдоль оси, что требует дополнительной энергии на сжатие мишени, но не на ее зажигание.

Остановимся на работах по цилиндрическим мишеням, в которых рассматривались волны термоядерного горения вдоль оси. В [1] рассматривается зажигание центральной части мишени, что моделируется заданием небольшой области с высокой температурой, примыкающей к плоскости симметрии задачи. Была продемонстрирована, в частности, возможность получения близкой к стационарной незатухающей детонационной волны.

В [2], [3] рассматривалась предварительно сжатая мишень (в соответствии с концепцией быстрого зажигания), которая зажигается с торца тем или иным драйвером. В [4]–[6] это был пучок тяжелых ионов. Получены близкие к стационарным детонационные волны и так называемые радиационные волны (см. [6]), основным механизмом распространения которых является нагрев холодного горючего высокочастотным излучением горячей плазмы.

В нашей работе [7] зажигающим драйвером является пучок протонов с глубиной прогрева горючего примерно в 10 раз меньше, чем для пучка тяжелых ионов. Было обнаружено, что возникающая после зажигания детонационная волна может со временем превратиться в близкую к стационарной безударную волну термоядерного горения, основным механизмом распространения которой является нелокальный нагрев α -частицами, возникающими в реакции синтеза между ядрами дейтерия и трития (далее DT-реакции). Изучаются свойства такой волны, а также ее нестационарный предвестник, генерируемый высокочастотным излучением горячей плазмы. Близкие к стационарным радиационные волны в [7] не обнаружены.

В настоящей работе рассматривается взаимодействие двух двигающихся навстречу детонационных волн, которые одновременно генерируются на противоположных торцах мишени одинаковыми зажигающими драйверами. Размер мишени выбирается сравнительно небольшим, для которого детонационная волна не успевает превратиться в безударную. Симметрия задачи позволяет рассматривать только половину мишени, которая ограничена плоскостью симметрии. В качестве зажигающего драйвера используется тот же пучок протонов, что и в [7].

Ранее нами рассматривалась аналогичная одномерная задача (см. [8]–[12]). Было показано, что при отражении детонационной волны от плоскости симметрии возникает волна, которая хорошо описывается точным решением уравнений гидродинамики из известного семейства (см. [13]). Это решение, которое можно легко получить непосредственно из уравнений гидродинамики, используется и в настоящей работе.

Математическая модель DT-горючего (эквимольярной смеси дейтерия и трития) является обычной моделью для плотной горячей плазмы. Она основана на уравнениях одножидкостной двухтемпературной гидродинамики с учетом электронной и ионной теплопроводности, излучения (в диффузионном по телесному углу и многогрупповом по частоте приближении) и нагрева плазмы горючего протонами зажигающего пучка и α -частицами DT-реакции. Нагрев плазмы нейтронами DT-реакции не учитывается из-за большой длины свободного пробега.

Основное отличие нашей модели от моделей других авторов связано с переносом надтепловых α -частиц. Обычно это диффузионное приближение нестационарного кинетического уравнения Фоккера–Планка в одногрупповом по скорости частицы (см. [4]) или многогрупповом (см. [5]) приближении. Как известно (см. [14]), почти вся траектория движения надтепловых тяжелых частиц является прямой линией. Поэтому естественно моделировать движение α -частиц с помощью упрощенного уравнения Фоккера–Планка с отброшенным диффузионным слагаемым в пространстве скоростей (см. [15]), для которого траектория движения частицы является прямой линией. В настоящей работе мы используем стационарное уравнение Фоккера–Планка.

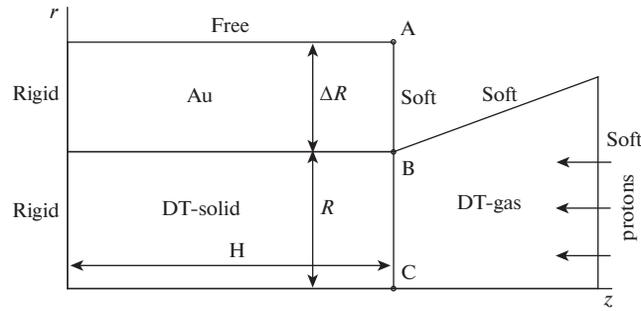
Как и в [4]–[7], рассматривается золотая оболочка. Для ее описания используются уравнения однотемпературной гидродинамики. Нагрев оболочки α -частицами, излучением и тепловым потоком из горючего не учитывается. Отметим, что, как показано в [7], [16], учет охлаждения горючего за счет теплового потока в оболочку увеличивает энергию зажигания всего примерно на 10%.

Уравнение состояния горючего получено из полуэмпирического уравнения состояния водорода, основанного на модели из [17]. Для золота используется уравнение состояния из [18], обеспечивающее переход к уравнению состояния газа Ферми при сильном сжатии.

Горючее предполагается предварительно сжатым изэнтропически из нормального состояния (температура 4 К, давление одна атмосфера, плотность $\rho_a \approx 0.22$ г/см³) до плотности $\rho_0 = 1000 \rho_a$, что дает давление $p_0 \approx 20$ ТПа. Оболочка предполагается предварительно сжатой изэнтропически до давления p_0 , что дает плотность сжатой оболочки примерно 100 г/см³.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

На фиг. 1 показана начальная конфигурация горючего и оболочки в цилиндрических координатах z, r . Горючее имеет форму цилиндра радиуса R и высоты H . Перед цилиндром имеется дополнительная область, предназначенная для расчета горючего, вылетающего из мишени. Перво-



Фиг. 1. Схема мишени и граничных условий: “Soft” – граница с мягкими условиями; “Free” – свободная граница; “Rigid” – плоскость симметрии.

начально эта область заполнена парами ДТ-горючего с низкой плотностью и атмосферным давлением. Оболочка имеет форму цилиндрического слоя с размерами ΔR по координате r и H по z .

На фиг. 1 указаны также типы условий на разных границах. На границах дополнительной области, кроме оси симметрии, ставятся условия равенства нулю пространственных производных термодинамических функций и скорости (мягкие условия). Мягкие условия ставятся также на прямолинейной границе АВ, которая совпадает первоначально с торцевой границей мишени. Внешняя боковая граница оболочки является свободной границей с атмосферным давлением. На левых границах оболочки и горючего ставятся условия симметрии.

В дополнительной области не учитывается излучение, чтобы избежать не имеющих физического смысла решений уравнения диффузии излучения в оптически тонком случае. На линии ВС для уравнения диффузии ставится условие отсутствия внешнего излучения. В дополнительной области мы также исключаем из рассмотрения нагрев разреженной ДТ-смеси протонным пучком.

В течение всего времени расчета границы АВ и ВС находятся на заданной прямой линии, но точки В и А могут двигаться вдоль этой линии в соответствии с движением границы раздела и внешней границы оболочки.

Мягкие граничные условия позволяют исключить из рассмотрения вылетающее за границу вещество. В то же время такие границы могут отражать идущие изнутри возмущения, искажая тем самым решение задачи. Во многих задачах можно избежать существенного искажения решения, выбирая подходящее положение границы или конструируя неотражающие граничные условия (см. [19]). Как показывают расчеты, рассмотренная выше тактика вычислений позволяет изучать зажигание мишени и отражение детонационной волны от плоскости симметрии. Существенное искажение решения происходит только после выхода из мишени отраженной волны.

В качестве зажигающего драйвера рассматривается моноэнергетический пучок протонов с энергией 1 МэВ. Интенсивность J_b пучка не зависит от r при $r \leq R$ и равна нулю при $r > R$. Функция $J_b(t)$ определяется двумя параметрами: максимальной интенсивностью $J_0 = 10^{19}$ Вт/см² и временем действия пучка $\Delta t_{pr} = 80$ пс, которое, в свою очередь, определяет начальный интервал времени $\Delta t_{0pr} = 0.02\Delta t_{pr}$, в течение которого $J_b(t)$ увеличивается от 0 до J_0 :

$$J_b(t) = \begin{cases} J_0 t / \Delta t_{0pr}, & t \leq \Delta t_{0pr}, \\ J_0, & \Delta t_{0pr} < t \leq \Delta t_{pr}, \\ 0, & t > \Delta t_{pr}. \end{cases} \quad (1)$$

Геометрические параметры мишени $R = 0.25$ мм (определяется условием близости энергии зажигания к пороговой энергии), $H = 0.6$ мм и $\Delta R = 0.2$ мм. Первые два параметра соответствуют значениям $R\rho_0 \approx 0.55$ г/см² и $H\rho_0 \approx 1.3$ г/см².

Применительно к ДТ-смеси уравнения гидродинамики имеют следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p, \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon_e}{dt} = -p_e \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{q}_e + Q_{ei} + D_e + W_e + S, \quad (4)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon_i}{dt} = -p_i \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{q}_i - Q_{ei} + D_i + W_i, \quad (5)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\nabla$ – лагранжева производная по времени; ρ – плотность; $\mathbf{u} = (u_z, u_r)$ – скорость; p_e и p_i – электронное и ионное давления, $p = p_e + p_i$; ε_e и ε_i – внутренняя энергия электронов и ионов; \mathbf{q}_e и \mathbf{q}_i – тепловые потоки электронов и ионов; Q_{ei} определяет обмен энергией между электронами и ионами. Последние члены в уравнениях (4) и (5) определяют нагрев электронов и ионов пучком протонов (D_e и D_i) и α -частицами (W_e и W_i), а также обмен энергией между электронами и излучением (S). Давление излучения и перенос импульса при торможении α -частиц не учитываются в уравнении движения (3).

Уравнения (2)–(5) замыкаются уравнениями состояния для электронной $p_e(\rho, T_e)$, $\varepsilon_e(\rho, T_e)$ и ионной $p_i(\rho, T_i)$, $\varepsilon_i(\rho, T_i)$ компонент, где T_e и T_i – электронная и ионная температуры.

Учитывается только первичная реакция синтеза ядер дейтерия и трития, в результате которой возникают α -частица с энергией 3.5 МэВ и нейтрон. Нейтроны полагаются вылетающими из горючего без взаимодействия с ним. Количество актов реакции синтеза в единице объема за единицу времени определяется известной формулой

$$F = n_D n_T \langle \sigma v \rangle_{DT}(T_i), \quad (6)$$

где n_D и n_T – концентрации ядер дейтерия и трития, $\langle \sigma v \rangle_{DT}(T_i)$ – скорость реакции.

Выгорание ядер горючего описывается уравнениями

$$\frac{dn_j}{dt} = -n_j \nabla \mathbf{u} - F, \quad (7)$$

где индексы $j = D$ и T соответствуют дейтерию и тритию. Дополнительное слагаемое в уравнении неразрывности (2), вызванное изменением состава плазмы из-за DT-реакции, как и соответствующие изменения уравнений состояния, не учитываются.

Перенос α -частиц, которые являются существенно надтепловыми, описывается стационарным кинетическим уравнением в приближении Фоккера–Планка (см. [15]) относительно функции распределения $f(\mathbf{r}, v, \Omega)$, которая определяет $f(\mathbf{r}, v, \Omega) dv d\Omega$ как число частиц в единице объема вблизи точки \mathbf{r} , имеющих модуль скорости в интервале dv вблизи v и направление в интервале телесного угла $d\Omega$ вблизи единичного вектора Ω . Помимо функции F задаются скорости торможения частицы (отрицательные по величине ускорения) на электронах $a_e(T_e, \rho, v)$ и ионах $a_i(T_i, T_e, \rho, v)$, а также скорость частицы $v_{th}(T_i)$, при которой она термализуется (т.е. перестает рассматриваться как надтепловая частица). Для краткости записи заменим зависимость от термодинамических функций на зависимость от \mathbf{r} , полагая заданными функции $a_e(\mathbf{r}, v)$, $a_i(\mathbf{r}, v)$, $F(\mathbf{r})$, $v_{th}(\mathbf{r})$.

Пусть все рождающиеся частицы имеют одинаковый модуль скорости v_0 и однородное распределение по телесному углу. Тогда, в отсутствие диффузии функции распределения в скоростном пространстве, неоднородное кинетическое уравнение сводится к следующей задаче Коши для однородного уравнения (см. [15]):

$$v(\Omega \nabla) f + \frac{\partial a f}{\partial v} = 0, \quad f(\mathbf{r}, v_0, \Omega) = -\frac{F(\mathbf{r})}{4\pi a(\mathbf{r}, v_0)}, \quad a = a_e + a_i, \quad (8)$$

$$v_m(\mathbf{r}, \Omega) = \max(v_{th}(\mathbf{r}), v_b(\mathbf{r}, \Omega)) \leq v \leq v_0,$$

где $v_b(\mathbf{r}, \Omega)$ зависит от близости точки \mathbf{r} к границе области вдоль луча с направлением $-\Omega$ и учитывает отсутствие рождения частиц вне области. Если точка \mathbf{r} стремится к точке на границе об-

ласти, то $v_b(\mathbf{r}, \Omega) \rightarrow v_0$ для всех Ω , направленных внутрь области. Слагаемые в правых частях уравнений (4) и (5) имеют вид

$$W_j(\mathbf{r}) = -m_\alpha \int_{(4\pi)} \int_{v_m(\mathbf{r}, \Omega)}^{v_0} f(\mathbf{r}, v, \Omega) a_j(\mathbf{r}, v) v dv d\Omega,$$

где $j = e$ или i , m_α – масса частицы.

Для расчета задачи (8) используется обратный трековый метод (см. [20]).

Нагрев ДТ-плазмы протонами описывается их торможением вдоль лучей $r = \text{const}$ в соответствии с уравнением

$$v_p \frac{dv_p}{dz} = a_e + a_i,$$

где v_p – скорость протонов, уменьшающаяся от начального значения v_{0p} до скорости термализации v_{th} .

Интенсивность моноэнергетического пучка протонов внутри мишени определяется формулой $J = n_p v_p m_p v_p^2 / 2$, где n_p – концентрация протонов, которая предполагается постоянной вплоть до их термализации, m_p – масса протона. Значение n_p определяется заданной начальной скоростью протонов v_{0p} и интенсивностью пучка на входе в мишень (1). Слагаемые в правых частях уравнений (4) и (5) имеют вид

$$D_e = -\frac{a_e}{a_e + a_i} \frac{\partial J}{\partial z}, \quad D_i = -\frac{a_i}{a_e + a_i} \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Излучение плазмы описывается диффузионным по телесному углу и многогрупповым по частоте ν приближением стационарного уравнения переноса. Многогрупповое приближение строится делением интервала $0 < \nu < \infty$ на N групп $\nu_{l-1} < \nu < \nu_l$, $l = 1, 2, \dots, N$, $\nu_0 = 0$, $\nu_N = \infty$. Уравнения диффузии в каждой группе имеют следующий вид:

$$\nabla \mathbf{q}_l = K_l - \kappa_l^p U_l, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{q}_l = -\frac{1}{3\kappa_l^R} \nabla U_l, \quad \kappa_l^R = \frac{\int (\partial B / \partial T_e) dv}{\int \kappa^{-1} (\partial B / \partial T_e) dv}, \quad \kappa_l^p = \frac{K_l}{\int B dv}, \quad K_l = \int \kappa B dv,$$

интегрирование выполняется по интервалу $\nu_{l-1} < \nu < \nu_l$, $B(\nu, T_e)$ – функция Планка, $\kappa = \kappa(\nu, T_e, \rho)$ – коэффициент тормозного поглощения с учетом индуцированного излучения. Слагаемое в правой части уравнения (4) имеет вид

$$S = -\sum_{l=1}^N K_l + \sum_{l=1}^N \kappa_l^p U_l,$$

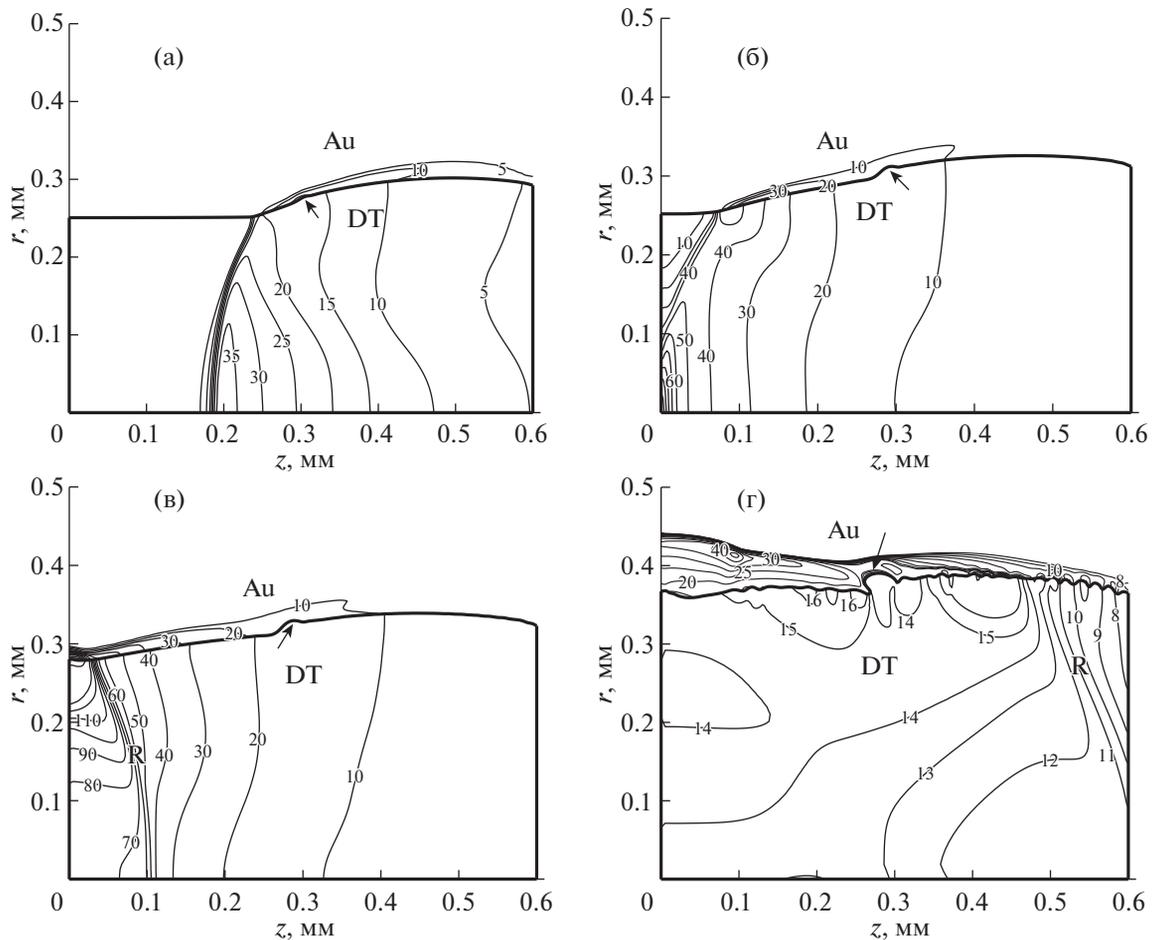
где первая сумма определяет охлаждение плазмы и не зависит от разбиения на группы. Учитываются также охлаждение электронов за счет обратного комптоновского эффекта (см. [12]).

Уравнения состояния для двухтемпературной гидродинамики и ссылки на работы, откуда брались формулы для коэффициентов приведенных выше уравнений, приведены в [7], [12].

Компьютерный код основан на развитом ранее коде для расчета осесимметричных течений плазмы и конденсированных сред на подвижных регулярных сетках, состоящих из гарантированно выпуклых четырехугольников (см. [21]–[26]).

Внешняя граница оболочки и ее граница с горючим выделяются явно в виде линий сетки. В основной расчетной области горючего сетка имеет $N_r = 40$ интервалов по оси r вдоль плоскости симметрии и $N_z = 240$ интервалов вдоль оси симметрии. Проводились также контрольные расчеты с $N_z = 120$. Сетка в оболочке имеет 30 интервалов по оси r .

Возможность применения существенно более подробных сеток ограничена неустойчивостью границы раздела между горючим и оболочкой, которая проявляется в росте первоначально небольшого локального возмущения границы, возникающего при формировании детонационной



Фиг. 2. Изобары (цифры вдоль кривых задают давление в ППа) в горючем (DT) и оболочке (Au) при $t = 0.2$ (а), 0.3 (б), 0.35 (в) и 0.5 нс (г); стрелка указывает на локальное возмущение границы; символ R на (в) и (г) указывает положение отраженной детонационной волны.

волны. Для более подробных сеток возмущение растет быстрее, что приводит к остановке расчета из-за сильного искривления ячеек сетки вблизи границы раздела.

Число лучей для расчета задачи (8), выходящих из каждой ячейки сетки, $N_{tr} = 32$. Число групп для расчета излучения $N = 50$; $h\nu_1/k_B = 1.5$ КК, $h\nu_{N-1}/k_B = 300$ МК. Здесь h – постоянная Планка, k_B – постоянная Больцмана.

2. ОТРАЖЕНИЕ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Детонационная волна возникает при $t \approx 0.15$ нс. Далее для краткости плоскость симметрии $z = 0$ будем называть стенкой. Заметим, что в отличие от детонации на основе химических реакций в газовых смесях, где детонационная волна сжигает все горючее, через которое она проходит, термоядерная реакция продолжается и после отражения.

На фиг. 2 показано поле давления в горючем (без дополнительной области) и в оболочке в четыре последовательных момента времени. Граница раздела между горючим и оболочкой, как и граница с дополнительной областью, показана жирной линией. Стрелка указывает на локальное возмущение границы раздела, которое первоначально возникает при образовании детонационной волны, а затем растет из-за неустойчивости границы.

На фиг. 2а видна детонационная волна хорошо известного типа (см. [27]) с примыкающей к ее фронту волной разрежения. Момент времени $t = 0.2$ нс соответствует положению детонационной волны непосредственно перед ее взаимодействием со стенкой. Давление на фронте волны

возрастает от оболочки к оси симметрии. Волна является неплоской: ее z -координата около оси симметрии заметно меньше, чем вблизи оболочки. Вблизи оси симметрии виден предвестник детонационной волны.

Начальная стадия отражения детонационной волны от стенки показана на фиг. 2б ($t = 0.3$ нс). Вблизи границы с оболочкой волна еще не дошла до стенки. Отражение остальной части волны дает область высокого давления около стенки. Дальнейшее формирование отраженной волны происходит в основном из-за движения этой области вдоль стенки, что будет обсуждаться ниже в связи с фиг. 3.

На фиг. 2в показана отраженная детонационная волна при $t = 0.35$ нс (сгущение изолиний отмечено символом R) почти сразу после образования. За фронтом волны давление вблизи оси симметрии слабо зависит от пространственных координат. Область высокого давления находится около границы с оболочкой, переместившись сюда из окрестности оси симметрии (см. фиг. 2б). Нормальная скорость границы раздела имеет максимум вблизи стенки.

В момент времени $t = 0.5$ нс (см. фиг. 2г) можно увидеть ударную волну в оболочке, которая отходит от границы раздела и усиливается вблизи стенки. Помимо локального возмущения границы раздела, показанного стрелкой, почти на всей границе возникает коротковолновое возмущение. В горючем отраженная волна уже частично вошла в дополнительную область.

Давление за отраженной волной слабо зависит от пространственных переменных не только вблизи оси симметрии, а почти везде, кроме небольшой окрестности границы раздела. Таким же свойством обладает и аналогичная одномерная задача из [12]. Течение между стенкой и отраженной волной хорошо описывается простым решением уравнений гидродинамики с линейным профилем скорости и не зависящими от пространственной координаты термодинамическими функциями. Возможность использования этого решения для приближенного описания рассматриваемой осесимметричной задачи будет обсуждаться ниже в разд. 4.

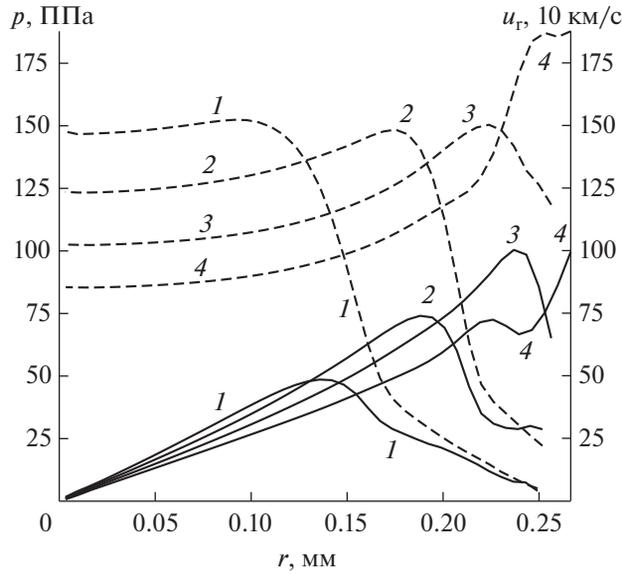
Вернемся к формированию отраженной детонационной волны. На фиг. 3 показаны профили давления и радиальной скорости $p(r)$ и $u_r(r)$ вдоль стенки в четыре промежуточных момента времени между моментом $t = 0.3$ нс, когда отраженная волна начинает формироваться (см. фиг. 2б) и моментом $t = 0.35$ нс, когда отраженная волна уже сформировалась (см. фиг. 2в).

Видно, что область высокого давления генерирует высокоскоростную струю горючего вдоль стенки и движется вместе со струей в направлении оболочки. Скорость горючего в струе возрастает со временем и достигает значения примерно 1000 км/с при $t = 0.33$ нс (см. сплошную линию 3 на фиг. 3). Удар струи по оболочке дает дополнительный рост давления горючего вблизи оболочки (см. штриховую линию 4 на фиг. 3) и ударную волну в ней, более сильную, чем ударная волна при движении детонационной волны вдоль границы раздела. Отметим также обратную волну в горючем, идущую от оболочки к оси симметрии, что можно увидеть на последнем профиле скорости с локальным минимумом (см. сплошную линию 4 на фиг. 3).

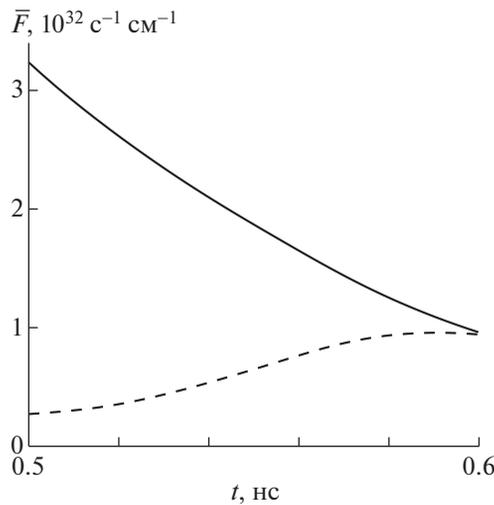
Расчет на сетке с $N_z = 240$ практически заканчивается при $t \approx 0.5$ нс вследствие падения шага по времени, определяемого условием устойчивости явной схемы для уравнений гидродинамики на сильно искривленных сетках, возникающих вблизи искривленных участков границы раздела.

Возможность выполнить расчет для $t > 0.5$ нс появляется при использовании более грубых сеток, на которых неустойчивость границы раздела не так сильно выражена. Однако точность такого расчета существенно снижается из-за взаимодействия отраженной волны с искусственной боковой границей дополнительной расчетной области. Несмотря на мягкие граничные условия, свободного вылета вещества за эту границу не происходит. По-видимому, для корректного расчета выхода отраженной волны из мишени требуется другая конфигурация дополнительной расчетной области.

Отсутствие бокового расширения вещества в дополнительной области показано на фиг. 4 для расчета на сетке с $N_z = 120$ на временном интервале от 0.5 до 0.6 нс. Приведены две функции $\bar{F}_{mn}(t)$ и $\bar{F}_{ad}(t)$, полученные осреднением функции F (см. (6)) по объемам основной и дополнительной расчетной области. Можно увидеть, что функция $\bar{F}_{ad}(t)$ быстро растет со временем и при $t = 0.6$ нс почти совпадает с функцией $\bar{F}_{mn}(t)$, что было бы невозможно при выбросе горючего через боковую границу дополнительной области.



Фиг. 3. Давление (штриховые линии) и радиальная скорость (сплошные линии) вдоль стенки (плоскости симметрии) как функции радиальной координаты при $t = 0.31$ (1), 0.32 (2), 0.33 (3) и 0.34 нс (4).



Фиг. 4. Осредненная по объему скорость генерации α -частиц \bar{F} для основной (сплошная линия) и дополнительной (штриховая линия) вычислительных областей на сетке с $N_z = 120$ как функции времени.

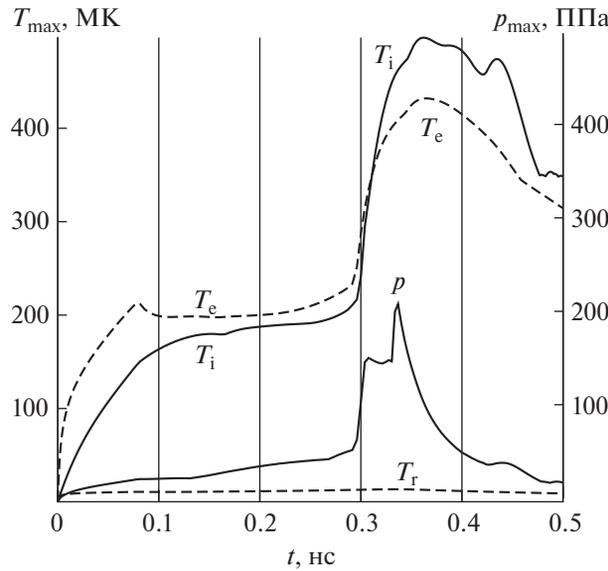
3. ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ

На фиг. 5 показаны зависимости от времени максимальных по пространству значений термодинамических функций: давления и температур электронов, ионов и фотонов. Последняя температура определяется равенством

$$\sum_{l=1}^N U_l = \int_0^{\infty} B(v, T_r) dv,$$

где U_l – решение уравнения диффузии (9).

После образования детонационной волны и перед ее отражением от стенки точка с максимальным давлением находится на фронте волны вблизи оси симметрии. Как видно на фиг. 5, это давление растет со временем, что указывает на нестационарность детонационной волны.



Фиг. 5. Максимальные по пространству давление (p) и температуры ионов (T_i), электронов (T_e) и фотонов (T_r) как функции времени.

До начала взаимодействия волны со стенкой электронная и ионная температуры достигают своих максимальных значений примерно 200 МК на некотором расстоянии от волны. Максимальная температура фотонов примерно в 20 раз меньше.

После отражения детонационной волны от стенки все характеристики, за исключением температуры фотонов, резко возрастают (максимальные электронная и ионная температуры примерно в 2–2.5 раза), а затем относительно медленно уменьшаются. Первый резкий рост максимального давления связан с ударом детонационной волны по стенке вблизи оси симметрии (см. фиг. 2б), а последующий пик является следствием удара высокоскоростной струи по оболочке около стенки (см. фиг. 3). Отраженная от оболочки волна сходится к оси симметрии и дает небольшой рост максимальных давления и ионной температуры при $t \approx 0.45$ нс. Прекращение падения максимальных давления и ионной температуры при $t \approx 0.5$ нс является следствием взаимодействия окружающего горючего с возмущениями границы раздела (см. фиг. 2г).

На фиг. 6 показаны коэффициент выгорания $B(t)$ (отношение количества актов ДТ-реакции к количеству ядер дейтерия в горючем при $t = 0$) и относительная потеря мощности α -частиц

$$k_\alpha(t) = 1 - \frac{Y_\alpha(t)}{P_\alpha(t)},$$

где Y_α — полная мощность нагрева плазмы α -частицами:

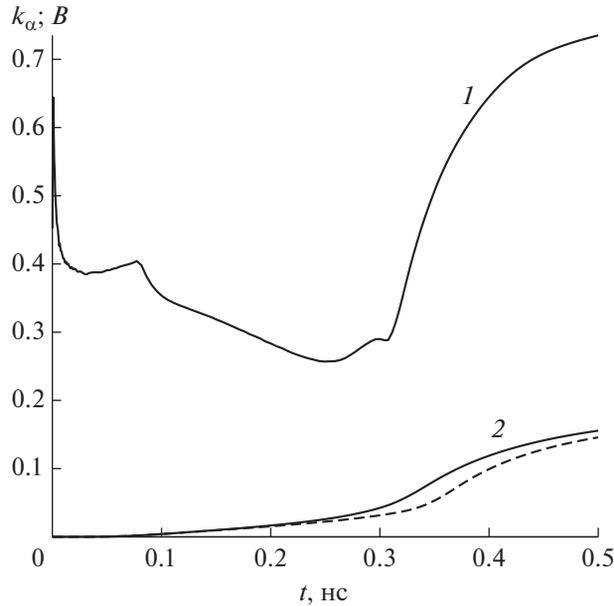
$$Y_\alpha(t) = \int (W_e + W_i) dV,$$

P_α — полная мощность возникающих α -частиц:

$$P_\alpha(t) = \frac{m_\alpha v_0^2}{2} \int F(t) dV,$$

W_e и W_i — слагаемые в правых частях уравнений (4) и (5); F — количество актов ДТ-реакции за единицу времени в единице объема, определяемое формулой (6); интегрирование выполняется по объему горючего.

Величина $k_\alpha P_\alpha$ определяет энергию α -частиц, термализующихся в горючем или вылетающих из него в единицу времени. Энергия термализованных за единицу времени α -частиц заведомо мала в сравнении с P_α . Даже если частица термализуется с максимальной для рассматриваемой задачи температурой примерно 500 МК (фиг. 5), энергия частицы составляет меньше 2% ее начальной энергии. Поэтому можно рассматривать функцию $k_\alpha(t)$ как долю энергии образующих-



Фиг. 6. Относительная потеря мощности α -частиц (1) и коэффициент выгорания (2) для $N_z = 240$ (сплошная линия) и 120 (штриховая линия) как функции времени.

ся в единицу времени частиц, которая уносится вылетающими частицами из горючего. На фиг. 6 видно, что эта доля не мала.

Во время действия пучка протонов ($t \leq 0.08$ нс) $k_\alpha \approx 0.4$ за исключением небольшого начального интервала. Затем при $t \approx 0.25$ нс значение k_α уменьшается до примерно 0.25, и, начиная с $t \approx 0.31$ нс, функция k_α быстро увеличивается из-за увеличения средней длины свободного пробега α -частиц, вызванного уменьшением плотности горючего.

При $t = 0.5$ нс коэффициент выгорания $B \approx 0.15$, что примерно в 2 раза меньше, чем в случае квазиодномерной модели из [12] с тем же значением начальной плотности и близкими значениями остальных параметров ($H = 0.5$ мм, радиус цилиндра, ограничивающего траектории α -частиц, 0.1 мм). В следующем разделе будет представлена приближенная модель течения при $t > 0.5$ нс, которая позволяет оценить значение коэффициента выгорания после прекращения горения.

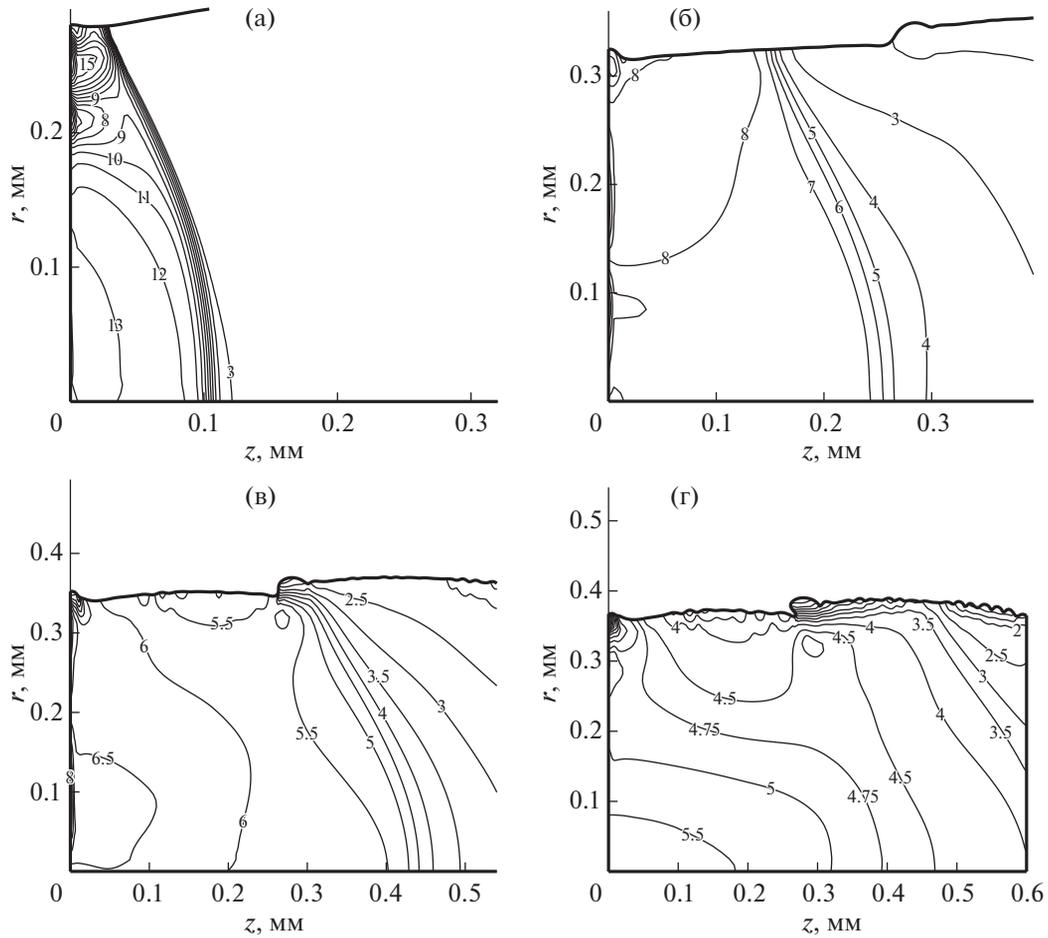
На фиг. 6 показана также функция $B'(t)$, полученная из двумерного расчета на более грубой сетке с $N_z = 120$. Видно, что $B'(t) < B(t)$. Это позволяет надеяться, что коэффициент выгорания, полученный на некоторой сетке, можно рассматривать в качестве нижней границы значения этого коэффициента в точном решении задачи. Это дает возможность исследовать мишени с большими значениями H , имеющими большой коэффициент выгорания (см. [12]), без увеличения числа узлов сетки вдоль оси симметрии пропорционально H .

4. НУЛЬМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГОРЕНИЯ МЕЖДУ СТЕНКОЙ И ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНОЙ

Решение одномерных уравнений гидродинамики с линейным профилем скорости и постоянными по пространственной переменной термодинамическими функциями принадлежит известному семейству решений из [13], а также легко может быть получено из самих уравнений [12]. Скорость и плотность в этом решении имеют вид

$$u_z = \varphi(t)z, \quad \varphi(t) = \frac{1}{C+t}, \quad \rho(t) = \rho_0 \frac{C+t_0}{C+t}, \quad (10)$$

где C — произвольная постоянная, $\rho_0 = \rho(t_0)$. Как показано в [12] применительно к одномерной задаче, аналогичной рассматриваемой, постоянную C можно выбрать так, что решение уравнения (10) с хорошей точностью описывает изменение плотности со временем после отражения детонационной волны в области между стенкой и отраженной волной.



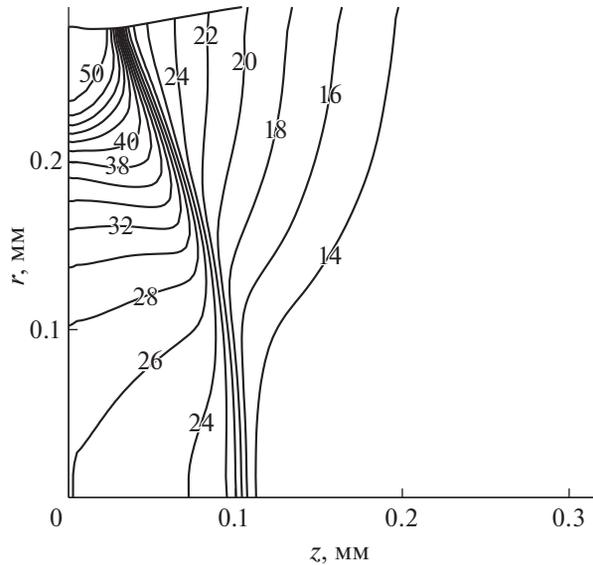
Фиг. 7. Изолинии функции u_z/z (мкс^{-1}) в горючем после отражения детонационной волны при $t = 0.35$ (а), 0.4 (б), 0.45 (в) и 0.5 нс (г).

На фиг. 7 показано поле функции u_z/z в четыре момента времени после отражения детонационной волны. В табл. 1 приведены значения функции $\varphi(t)$ из уравнений (10), выбранные после анализа полей в качестве средних значений функции u_z/z между стенкой и отраженной волной. Выбирая $\varphi = 13$ при $t = 0.35$ нс (см. фиг. 7а), мы рассматривали поле только около оси симметрии, так как вблизи оболочки располагается область высокого давления с большими градиентами термодинамических функций. В три последних момента времени функция u_z/z слабо меняется почти во всей области между стенкой и отраженной волной.

Значения постоянной C , вычисленные по соответствующим значениям φ из уравнений (10) показаны в табл. 1. Слабая зависимость C от времени указывает на возможность использования уравнений (10) для приближенного описания зависимости средней плотности в области между стенкой и отраженной волной от времени.

Таблица 1. Выбранные значения функции $\varphi(t)$ и рассчитанные значения постоянной C и средней плотности ρ в четыре момента времени после отражения детонационной волны

$t, \text{нс}$	$\varphi, \text{мкс}^{-1}$	$C, \text{нс}$	$\rho, \text{г/см}^3$
0.35	13	-0.27	24
0.4	8	-0.275	13
0.45	6	-0.28	9
0.5	4.75	-0.29	6.9



Фиг. 8. Изолинии плотности (г/см^3) в горючем при $t = 0.35$ нс.

В последний момент $t = 0.5$ нс почти вся основная вычислительная область находится между стенкой отраженной волной. Следовательно, в качестве средней плотности между стенкой и отраженной волной можно взять плотность, осредненную по всему объему основной вычислительной области, и рассчитать среднюю плотность в три предыдущих момента из уравнений (10) с постоянными C , ρ_0 и t_0 для момента $t = 0.5$ нс. На фиг. 8 видно, что приведенное в табл. 1 значение плотности для момента $t = 0.35$ нс (24 г/см^3) вполне удовлетворительно воспроизводит среднюю плотность между стенкой и отраженной волной около оси симметрии.

Построим модель, приближенно описывающую зависимость от времени осредненных по объему основной вычислительной области термодинамических функций, имея в виду возможность оценки коэффициента выгорания горючего после прекращения горения. Предположим, что скорость имеет только одну компоненту u_z с линейным профилем по z , наклон которого $\varphi(t)$, вместе с плотностью $\rho(t)$ описывается уравнениями (10) с $t_0 = 0.5$ нс. Параметры C и ρ_0 относятся к моменту t_0 и заданы в табл. 1. Плазма предполагается однотемпературной $T_e = T_i = T$. Подставляя уравнения (6) и (10) в уравнение (7) и полагая $n_D = n_T = n$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{C+t} - n^2 \langle \sigma v \rangle_{DT}(T),$$

решение которого имеет вид

$$n(t) = n_0 \frac{C+t_0}{C+t} \exp\left(-\int_{t_0}^t n \langle \sigma v \rangle_{DT}(T) dt\right), \quad (11)$$

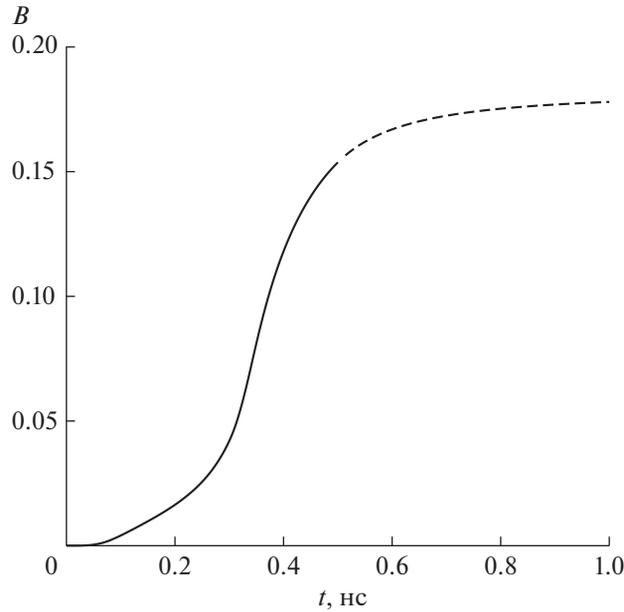
где $n_0 = \bar{n}_D(t_0)$, черта сверху означает осреднение по объему.

Полное число актов ДТ-реакции

$$N_{DT}(t) = N_{DT}(t_0) + V_{mn} \int_{t_0}^t F(n, T) dt, \quad (12)$$

где $N_{DT}(t_0)$ определяется из двумерного расчета, V_{mn} — объем основной вычислительной области, который полагается не зависящим от времени при $t > 0.5$ нс. Температура $T(t_0) = T_0$ определяется условием

$$\bar{F}(t_0) = n_0^2 \langle \sigma v \rangle_{DT}(T_0),$$



Фиг. 9. Коэффициент выгорания от времени: двумерный расчет (сплошная линия) и приближенная нульмерная модель горения (штриховая линия).

которое в силу (12) обеспечивает равенство производных dN_{DT}/dt в двумерном расчете и приближенной модели при $t = t_0$.

Уравнения (10), (11) и (12) должны замыкаться уравнением для определения температуры T . Если охлаждение вследствие гидродинамического охлаждения было бы намного больше, чем для других механизмов ее охлаждения или нагрева, тогда связь между ρ и T определялась бы изэнтропой, проходящей через точку (ρ_0, T_0) . В нашем случае это не так. Ниже для различных механизмов приведены значения полной мощности охлаждения или нагрева, которые являются интегралами по объему от суммы соответствующих слагаемых в правых частях уравнений (4) и (5), полученных из двумерного расчета при $t = t_0$ (в единицах 10^{16} Вт):

$$\begin{aligned}
 Y_g &= -\int p(\nabla \mathbf{u})dV \approx -1.68, \\
 Y_\alpha &\approx 1.08, \quad Y_r = \int SdV \approx -0.21, \\
 Y_h &= -\int \nabla(\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i)dV \approx -0.27.
 \end{aligned}$$

Необходимое уравнение для функции $T(t)$ берется в виде

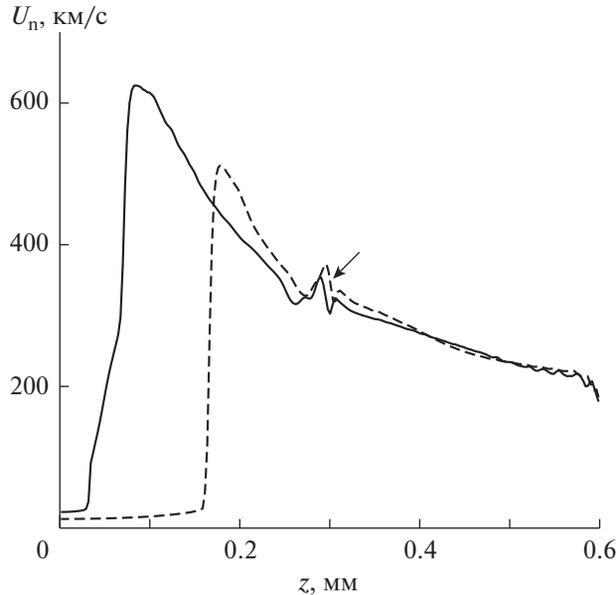
$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_g \chi,$$

где $(dT/dt)_g$ – производная вдоль изэнтропы, которая определяется производной $d\rho/dt$ из уравнения (10), $\chi = (Y_g + Y_\alpha + Y_r + Y_h)/Y_g \approx 0.64$ – поправочный коэффициент, который приводит производные dT/dt в соответствии с результатами двумерного расчета при $t = t_0$.

Результат расчета коэффициента выгорания $B(t)$ для приближенной модели показан на фиг. 9. Коэффициент выгорания увеличивается со значения 0.15 при $t = 0.5$ нс до примерно 0.18.

5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ГОРЮЧИМ И ОБОЛОЧКОЙ

На фиг. 10 показана нормальная скорость границы раздела U_n в зависимости от z в два момента времени, когда детонационная волна еще не достигла стенки около границы раздела. Колебание скорости при $z = z_d \approx 0.3$ мм возникает при формировании детонационной волны и вызы-



Фиг. 10. Нормальная к границе раздела скорость как функция z при $t = 0.25$ (штриховая линия) и 0.3 нс (сплошная линия); стрелка указывает на колебание скорости, которое вызывает локальное возмущение границы на фиг. 2.

вает локальное возмущение границы раздела на фиг. 2. Ускорение границы раздела справа от колебания (при $z > z_d$) связано с быстрым нагревом горючего пучком протонов. Граница раздела слева от колебания (при $z < z_d$) ускоряется детонационной волной. Увеличение U_n с уменьшением z связано с ростом давления на фронте волны по мере ее движения. Сравнение профилей $U_n(z)$ для двух моментов времени показывает, что после прохождения фронта нормальная скорость в фиксированной точке границы раздела уменьшается со временем из-за уменьшения давления за фронтом детонационной волны.

Отметим коротковолновые возмущения профиля $U_n(z)$ около крайней точки $z = 0.6$ мм, что, скорее всего, является чисто вычислительным эффектом. Для двух показанных моментов времени эти возмущения не приводят к заметным возмущениям границы. Однако появление коротковолновых возмущений границы раздела в более позднее время (см. фиг. 2г), скорее всего, вызвано коротковолновыми возмущениями профиля $U_n(z)$ на фиг. 10.

В рассматриваемой задаче могут иметь место два механизма развития неустойчивости границы раздела между горючим и оболочкой. Первый механизм — это неустойчивость Рихтмайера–Мешкова (РМ), связанная с импульсным (или близким к импульсному) ускорением границы, которое возникает при прохождении детонационной волны в горючем и генерирует ударную волну в оболочке. В случае плоской границы раздела, испытывающей одинаковое во всех точках границы импульсное ускорение, амплитуда d малых синусоидальных возмущений с длиной волны λ (амплитуда начального возмущения $d_0 \ll \lambda$) растет линейно со временем (см. [28]):

$$d = d_0 + t \Delta U_n A (2\pi d_0 / \lambda), \quad (13)$$

где $\Delta U_n > 0$ — изменение нормальной скорости границы раздела сред в результате импульсного ускорения, $A = |\rho_1 - \rho_2| / (\rho_1 + \rho_2)$ — число Атвуда, ρ_1 и ρ_2 — плотности сред по обе стороны границы, под параметрами d_0 , ρ_1 и ρ_2 понимаются соответствующие значения после импульсного ускорения. Имеется простое обобщение формулы (13) на случай немалых начальных возмущений до стадии турбулентного перемешивания (см. [29]).

Другим механизмом развития неустойчивости границы раздела в рассматриваемой задаче является неустойчивость Кельвина–Гельмгольца (КГ), возникающая при разрыве тангенциальной компоненты скорости. Амплитуда малого синусоидального возмущения плоской границы раздела сред, каждая из которых движется параллельно границе со своей постоянной скоростью, растет экспоненциально по времени (см. [30]):

$$d = d_0 \exp(st), \quad s = (2\pi/\lambda) U_\tau A_K,$$

где $A_K = (\rho_1 \rho_2)^{1/2} / (\rho_1 + \rho_2)$ – аналог числа Атвуда, $U_\tau > 0$ – относительная скорость движения сред. Ограничившись рассмотрением интервала времени, для которого $st \ll 1$, приходим к формуле

$$d = d_0 + tU_\tau A_K (2\pi d_0 / \lambda).$$

Скорость роста амплитуды \dot{d} для обоих типов неустойчивости имеет вид

$$\dot{d} = \frac{2\pi d_0}{\lambda} \psi, \quad (14)$$

где $\psi = \Delta U_n A$ для РМ-неустойчивости и $\psi = U_\tau A_K$ для КГ-неустойчивости.

Вернемся к рассматриваемой двумерной задаче. Возьмем на границе раздела некоторую точку, которая определяется заданным отношением ξ расстояния вдоль границы от точки до стенки к длине всей границы от стенки до точки В (см. фиг. 1). В расчете это означает выбор некоторого сеточного интервала на границе раздела (так как сеточные узлы вдоль границы раздела расставляются равномерно). Заметим, что координата z точки с заданным ξ меняется со временем незначительно.

Дальнейшее исследование основано на следующем предположении. Скорость роста малого возмущения границы вблизи этой точки с некоторой разумной точностью определяется формулой (14), где параметры d_0 и λ полагаются одинаковыми для обоих типов неустойчивости, а параметр ψ берется из решения двумерной задачи. Параметр ΔU_n полагается равным нормальной скорости выбранного интервала сразу после прохождения детонационной волны (выбиралось максимальное по времени значение U_n , см. фиг. 10). Параметры A и A_K вычисляются по значениям плотности, а параметр U_τ (касательная скорость) вычисляется по значениям компонент вектора скорости в примыкающих к интервалу ячейках сетки.

Далее фиксируется момент времени t_* прохождения детонационной волны через выбранную точку границы (в расчете выбирается момент достижения максимума U_n на выбранном сеточном интервале), и для обоих видов неустойчивости вычисляется интеграл

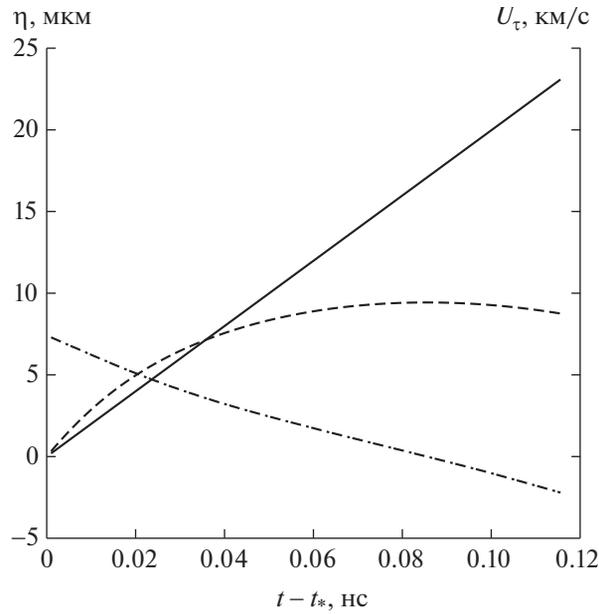
$$\eta(t) = \frac{[d(t) - d_0]\lambda}{2\pi d_0} = \int_{t_*}^t \psi(t') dt', \quad (15)$$

пропорциональный разности между текущей и начальной амплитудой возмущения. Заметим, что для РМ-неустойчивости ψ не зависит от времени, так как импульсное ускорение границы раздела происходит только в момент прохождения детонационной волны (если ограничится временем до прохождения отраженной волны), а в случае КГ-неустойчивости функция ψ существенно зависит от времени, так как скорость U_τ определяется тангенциальной компонентой скорости горючего, которая намного больше скорости оболочки и которая после прохождения фронта детонационной волны начинает уменьшаться под действием волны разрежения.

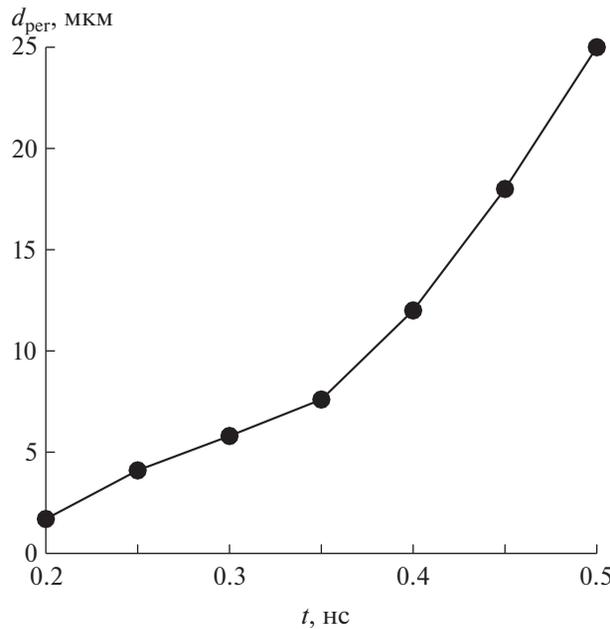
На фиг. 11 приведена функция $\eta(t - t_*)$ для обоих видов неустойчивости и функция $U_\tau(t - t_*)$ для точки на границе раздела с $\xi \approx 0.33$ (в момент прохождения фронта детонационной волны $z \approx 0.23$ мм). Единичный вектор вдоль границы раздела, на который проектируется вектор скорости при вычислении U_τ , направлен по движению детонационной волны.

Видно, что вначале КГ-неустойчивость дает более быстрый рост амплитуды. Затем скорость U_τ падает и даже меняет знак, что останавливает рост амплитуды. Отсюда можно сделать следующий вывод. Если формула (14) верна хотя бы качественно, т.е. скорость роста амплитуды малого возмущения для КГ-неустойчивости уменьшается вместе с разрывом касательной скорости на границе раздела, то заметное влияние КГ-неустойчивости на рост амплитуды возможно только на некотором расстоянии от фронта детонационной волны, скорее всего, после смены знака скорости U_τ .

Рассмотрим теперь локальное возмущение границы раздела, возникающее при формировании детонационной волны, которое легко идентифицируется в каждый момент времени и позволяет получить хотя бы качественную информацию о скорости своего роста. Для расчета амплитуды локального возмущения в некоторый момент времени вначале визуальным образом определяются крайние узлы, ограничивающие возмущение на линии разностной сетки, являющейся границей раздела. Затем через крайние узлы проводится прямая линия и вычисляются максимальное по-



Фиг. 11. Зависимости от времени функции η (15), пропорциональной разности между текущей и начальной амплитудой малого возмущения границы раздела, для неустойчивости Рихтмайера–Мешкова (сплошная линия) и Кельвина–Гельмгольца (штриховая линия), а также касательной скорости вдоль границы раздела (штрихпунктирная линия) в точке границы с $z \approx 0.23$ мм.



Фиг. 12. Амплитуда локального возмущения границы раздела от времени.

ложительное $d_{\text{per}+}$ и минимальное отрицательное $d_{\text{per}-}$ расстояния от всех внутренних узлов до этой линии. Амплитуда возмущения определяется как $d_{\text{per}} = d_{\text{per}+} - d_{\text{per}-}$.

Рассчитанные значения функции d_{per} в семь моментов времени показаны на фиг. 12. Значения скорости $-u_z$ около локального возмущения границы раздела (которые являются неплохим приближением для значений рассмотренной выше скорости U_τ) в те же моменты времени приведены в табл. 2. Уменьшение u_z при $t = 0.5$ нс по сравнению с $t = 0.45$ нс объясняется тем, что

Таблица 2. Скорость $-u_z$ около локального возмущения границы в несколько моментов времени

t , нс	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$-u_z$, км/с	400	200	0	-300	-600	-1500	-1000

при $t = 0.45$ нс отраженная детонационная волна еще не достигла локального возмущения границы раздела. Напомним, что момент $t = 0.35$ нс приблизительно соответствует появлению отраженной детонационной волны.

В интервале времени между 0.25 и 0.35 нс скорость роста амплитуды $dd_{\text{пер}}/dt$ почти не меняется, несмотря на изменение знака скорости $-u_z$ при $t = 0.3$ нс. Из этого можно сделать вывод, что скорость роста амплитуды до отражения детонационной волны определяется РМ-неустойчивостью.

Можно также увидеть, что скорость роста амплитуды при $t > 0.35$ нс намного больше, чем при $t < 0.35$ нс. Увеличение скорости u_z при $t > 0.35$ нс указывает на то, что указанное выше увеличение скорости роста амплитуды после отражения детонационной волны вызвано КГ-неустойчивостью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается торцевое зажигание предварительно сжатой ДТ-мишени с золотой оболочкой двумя одинаковыми пучками протонов, параметры которых обеспечивают так называемое быстрое зажигание с минимальной энергией пучка. Рассматривается мишень небольшого размера вдоль оси (произведение начальной плотности на полуразмер примерно 1.3 г/см^2).

Отражение возникающей нестационарной неплоской детонационной волны от плоскости симметрии начинается около оси, где возникает область высокого давления, генерирующая высокоскоростную струю ДТ-горючего вдоль стенки по направлению к границе с оболочкой. Образование отраженной волны заканчивается после удара этой струи по оболочке.

Перед отражением детонационной волны от плоскости симметрии температура электронов и ионов достигает своего максимума примерно 200 МК на некотором расстоянии от волны. Максимальная температура фотонов примерно в 20 раз меньше. При отражении детонационной волны максимальная ионная и электронная температуры быстро возрастают в 2–2.5 раза.

Значительная часть энергии α -частиц выносится из мишени вылетающими частицами. Во время нагрева горючего пучком протонов доля энергетических потерь в единицу времени $k_\alpha \approx 0.4$. При движении детонационной волны коэффициент k_α постепенно уменьшается до примерно 0.25–0.3, а после отражения детонационной волны быстро возрастает из-за роста длины свободного пробега α -частиц, вызванного уменьшением плотности горючего.

Коэффициент выгорания горючего после прекращения горения $B \approx 0.18$, что примерно в 2 раза меньше того значения, которое дает квазиодномерная модель для той же начальной плотности горючего и примерно того же размера мишени. Расчет на более грубой сетке дает несколько меньшее значение B . Это позволяет надеяться, что коэффициент выгорания, полученный на некоторой сетке, можно рассматривать в качестве нижней границы значения этого коэффициента в точном решении задачи.

В области между стенкой и отраженной волной термодинамические функции слабо зависят от пространственных координат, а компонента скорости вдоль оси u_z как функция координаты z имеет профиль, близкий к линейному. Это позволяет использовать известное решение одномерных уравнений гидродинамики для приближенного описания зависимости термодинамических функций от времени, определив произвольную постоянную в этом решении и вводя поправочный коэффициент, основанный на результатах двумерного расчета. Построенная таким образом модель горения позволяет рассчитывать коэффициент выгорания горючего после вынужденного прекращения двумерного расчета из-за сильного искривления ячеек разностной сетки вблизи искривленных участков границы раздела горючего и оболочки или падения точности расчета при выходе отраженной волны на границу расчетной области.

Изучена роль двух возможных механизмов развития неустойчивости границы раздела между горючим и оболочкой: импульсного ускорения границы раздела детонационной волной (неустойчивость Рихтмайера–Мешкова) и высокоскоростного скольжения горючего вдоль грани-

цы раздела (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца). Рост малых синусоидальных возмущений границы раздела изучается на основе известных формул для плоской границы, коэффициенты которых берутся из расчета рассматриваемой задачи. Показано, что заметное влияние неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на рост амплитуды возможно только на некотором расстоянии от фронта детонационной волны, скорее всего, после смены знака касательной составляющей скорости горючего из-за волны разрежения, примыкающей к фронту детонационной волны.

Проанализирована также эволюция небольшого локального возмущения границы раздела, возникающего в расчете при формировании детонационной волны. Сопоставление зависимостей от времени амплитуды возмущения и компоненты скорости горючего u_z около возмущения, которую можно рассматривать в качестве скачка касательной скорости вдоль границы, позволяет сделать следующий вывод, близкий к сделанному выше при изучении роста малых синусоидальных возмущений. Скорость роста амплитуды возмущения до отражения детонационной волны определяется неустойчивостью Рихтмайера–Мешкова, а значительное увеличение скорости роста амплитуды после отражения вызвано неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аврорин Е.Н., Бунатия А.А., Гаджиев А.Д. и др. Численные расчеты термоядерной детонации в плотной плазме // Физика плазмы. 1984. Т. 10. Вып. 3. С. 514–521.
2. Basov N.G., Gus'kov S.Yu., Feoktistov L.P. Thermonuclear gain of ICF targets with direct heating of ignitor // J. Sov. Laser Res. 1992. V. 13. № 5. P. 396–399.
<https://doi.org/10.1007/BF01124892>
3. Tabak M., Hammer J., Glinsky M.E., et al. Ignition and high gain with ultrapowerful lasers // Phys. Plasm. 1994. V. 1. № 5. P. 1626–1634.
<https://doi.org/10.1063/1.870664>
4. Basko M.M., Churazov M.D., Aksenov A.G. Prospects of heavy ion fusion in cylindrical geometry // Laser and Part. Beams. 2002. V. 20. P. 411–414.
<https://doi.org/10.1017/S0263034602203080>
5. Vatulin V.V., Vinokurov O.A. Fast ignition of the DT fuel in the cylindrical channel by heavy ion beams // Laser and Part. Beams. 2002. V. 20. P. 415–418.
<https://doi.org/10.1017/S0263034602203092>
6. Ramis R., Meyer-ter-Vehn J. On thermonuclear burn propagation in a pre-compressed cylindrical DT target ignited by a heavy ion beam pulse // Laser and Part. Beams. 2014. V. 32. P. 41–47.
<https://doi.org/10.1017/S0263034613000839>
7. Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчьян А.А. Быстрое зажигание пучком протонов и горение цилиндрической оболочечной DT-мишени // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 9. С. 804–824.
<https://doi.org/10.1134/S0367292119080043>
8. Хищенко К.В., Чарахчьян А.А. Об одном свойстве двух симметрично сходящихся плоских волн термоядерного горения // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2013. Вып. 3. С. 30–40.
9. Charakhch'yan A.A., Khishchenko K.V. Symmetrically converging plane thermonuclear burn waves // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. P. 105011.
<https://doi.org/10.1088/0741-3335/55/10/105011>
10. Хищенко К.В., Чарахчьян А.А. Столкновение плоских волн термоядерной детонации в предварительно сжатой DT-смеси // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 3. С. 240–251.
<https://doi.org/10.7868/S0367292115020055>
11. Хищенко К.В., Чарахчьян А.А. О некоторых свойствах плоских волн термоядерного горения // Прикл. механ. и техн. физ. 2015. Т. 56. № 1. С. 104–115.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20150114>
12. Charakhch'yan A.A., Khishchenko K.V. Plane thermonuclear detonation waves initiated by proton beams and quasi-one-dimensional model of fast ignition // Laser and Part. Beams. 2015. V. 33. P. 65–80.
<https://doi.org/10.1017/S0263034614000780>
13. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
14. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерционный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984.
15. Гуськов С.Ю., Розанов В.Б. Кинетика термоядерных частиц в лазерной плазме // Труды ФИАН. 1982. Т. 134. С. 115–122.
16. Charakhch'yan A.A., Frolova A.A., Khishchenko K.V. The role of heat loss at the fuel-shell interface during the fast ignition of cylindrical DT targets // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1147. P. 012089.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012089>

17. *Khishchenko K.V.* Equations of state for two alkali metals at high temperatures // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2008. V. 98. P. 032023.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/98/3/032023>
18. *Holzappel W.B.* Equation of state for Cu, Ag, and Au and problems with shock wave reduced isotherms // *High Pressure Res.* 2010. V. 30. P. 372–394.
<https://doi.org/10.1080/08957959.2010.494845>
19. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
20. *Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчян А.А.* Трековый метод расчета нагрева плазмы заряженными продуктами термоядерных реакций для осесимметричных течений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 36. № 3. С. 443–454.
<https://doi.org/10.7868/S0044466916030054>
21. *Чарахчян А.А.* Расчет сжатия дейтерия в конической мишени в рамках уравнений Навье–Стокса для двухтемпературной магнитной гидродинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 5. С. 766–784.
22. *Миляевский В.В., Фортон В.Е., Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчян А.А., Шуршалов Л.В.* Расчет ударного сжатия пористых сред в конических твердотельных мишенях с выходным отверстием // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 5. С. 913–931.
<https://doi.org/10.1134/S0965542506050113>
23. *Иваненко С.А., Чарахчян А.А.* Алгоритм построения криволинейных сеток из выпуклых четырехугольников // *Докл. АН СССР.* 1987. Т. 295. № 2. С. 280–283.
24. *Иваненко С.А., Чарахчян А.А.* Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1988. Т. 28. № 4. С. 503–514.
25. *Charakhch'yan A.A., Ivanenko S.A.* A variational form of the Winslow grid generator // *J. Comput. Phys.* 1997. V. 136. P. 385–398.
<https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5750>
26. *Грын В.И., Фролова А.А., Чарахчян А.А.* Сеточный генератор барьерного типа и его применение для расчета течений с подвижными границами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2003. Т. 43. № 6. С. 904–917.
27. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
28. *Richtmyer R.D.* Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 297–319.
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160130207>
29. *Charakhch'yan A.A.* Reshocking at the non-linear stage of Richtmyer–Meshkov instability // *Plasma Phys. Controlled Fusion.* 2001. V. 43. P. 1169–1179.
<https://doi.org/10.1088/0741-3335/43/9/301>
30. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005.

*Статья посвящается светлой памяти
Юрия Дмитриевича Шмыглевского,
выдающегося ученого и замечательного человека*

ДОПОЛНЕННЫЙ МЕТОД СТАРТОВОЙ ПЛОЩАДКИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЦЫ ПАРЕТО В ЗАДАЧАХ С МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

© 2021 г. А. В. Лотов^{1,*}, А. И. Рябиков^{1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: avlotov@yandex.ru

**e-mail: ariabikov@gmail.com

Поступила в редакцию 18.11.2020 г.
Переработанный вариант 23.02.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

Для нелинейных невыпуклых задач многокритериальной оптимизации с многоэкстремальными критериями предлагается новый метод аппроксимации границы Парето – дополненный метод стартовой площадки. В связи с тем, что граница Парето является неустойчивой по отношению к возмущениям параметров задачи многокритериальной оптимизации, вместо аппроксимации границы Парето решается задача аппроксимации оболочки Эджворта–Парето множества достижимых критериальных векторов. Предлагаемый метод является развитием метода стартовой площадки, основанного на предварительном построении такого подмножества множества допустимых решений, что стартовые из его точек градиентные процедуры локальной оптимизации функций (сверток) критериев достаточно часто приводят к решениям, близким к эффективным решениям задачи многокритериальной оптимизации. В дополнение к процедурам метода стартовой площадки, дополненный метод стартовой площадки включает генетический алгоритм аппроксимации границы Парето. Экспериментально показывается, что по качеству построенной аппроксимации оболочки Эджворта–Парето предлагаемый метод превосходит как метод стартовой площадки, так и известный ранее метод инъекции оптимумов. Эксперименты проведены с использованием задачи выбора правил управления многошаговой системой с критериями типа обеспеченности (частоты выполнения) некоторых априорных требований к системе. Библ. 17. Фиг. 5.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, граница Парето, аппроксимация оболочки Эджворта–Парето, многоэкстремальные критерии, генетические методы.

DOI: 10.31857/S0044466921100100

ВВЕДЕНИЕ

Аппроксимация границы Парето (недоминируемой границы) множества достижимых критериальных векторов используется при решении задач многокритериальной оптимизации (МКО) с целью выбора предпочтительного решения на основе изучения этой границы (см., например, [1]). Как показано в [2], граница Парето зачастую является неустойчивой по отношению к возмущениям параметров задачи МКО. Поэтому задача аппроксимации границы Парето является некорректно поставленной, и вместо нее разумно решать корректно поставленную задачу аппроксимации оболочки Эджворта–Парето (ОЭП) множества достижимых критериальных векторов (см. [3]–[6]). Методы аппроксимации ОЭП в выпуклых задачах МКО рассмотрены в [3], [4], [6], а для относительно простых нелинейных задач в [1], [5]. Для нелинейных невыпуклых задач, характеризующихся наличием многих локальных экстремумов сверток критериев, были предложены так называемые многофазные методы (см. [7], [8]). Эти методы опираются на поиск локальных экстремумов адаптивно выбираемых сверток, стартовых из случайных точек множества допустимых решений. Если многоэкстремальные задачи МКО таковы, что многофазные

методы не дают хорошей аппроксимации ОЭП, можно использовать метод стартовой площадки (МСП) (см. [9]). МСП основан на построении стартовой площадки – такого подмножества множества допустимых решений, что градиентные процедуры локальной оптимизации сверток, стартовые из его точек, в совокупности приводят к эффективным решениям задачи МКО. В данной работе МСП дополняется еще одним шагом, который основан на использовании генетических алгоритмов аппроксимации границы Парето (см. [10], [11]). Это позволяет значительно повысить эффективность процедуры аппроксимации.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 кратко формулируется задача аппроксимации ОЭП. В разд. 2 описывается класс задач МКО, для которых разработан новый метод – это задачи выбора правил управления многошаговой системой с критериями типа уровня обеспеченности выполнения априорных требований к системе, имеющими крайне большое число локальных экстремумов. Раздел 3 посвящен описанию дополненного метода стартовой площадки (ДМСП). Раздел 4 посвящен экспериментальному изучению предлагаемого метода: приводятся результаты экспериментов, направленных на сравнение результатов аппроксимации ОЭП, полученных с помощью ДМСП и других методов. В тех случаях, когда это возможно, сравнивается порядок скорости сходимости методов.

1. ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Кратко рассмотрим стандартную формулировку задачи МКО (см. [12]). Пусть совокупность допустимых решений является непустым компактным множеством $X \subset \mathbb{R}^n$, а значения компонентов вектора критериев оптимизации $y \in \mathbb{R}^m$ задаются вектор-функцией $y = f(x)$. Для определенности рассмотрим задачу многокритериальной минимизации, т.е. будем считать, что желательно уменьшение значения каждого из отдельных (частных) критериев при неизменных остальных. Точнее говоря, будем считать, что из $y' \leq y$ и $y' \neq y$ следует, что критериальная точка y' более предпочтительна, чем точка y (другими словами, y' доминирует y по Парето). Под паретовой (недоминируемой) границей множества достижимых критериальных векторов $Y = f(X)$ понимается множество

$$P(Y) = \{y \in Y : \{y' \in Y : y' \leq y, y' \neq y\} = \emptyset\}.$$

Если для любой точки $y \in Y$ найдется точка $y' \in P(Y)$, доминирующая ее или совпадающая с ней, то при анализе задачи МКО можно ограничиться изучением границы Парето. Такое свойство имеют, например, задачи МКО с компактным множеством Y . В дальнейшем наличие этого свойства будет предполагаться, поэтому под решением задачи МКО, как принято, будем понимать $P(Y)$, а также подмножество $P(X)$ точек X , которые порождают $P(Y)$.

Оболочка ОЭП множества $Y = f(X)$ в задачах многокритериальной минимизации определяется как $Y^* = Y + \mathbb{R}_+^m$, где \mathbb{R}_+^m – неотрицательный конус пространства \mathbb{R}^m . ОЭП можно также представить в виде

$$Y^* = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq f(x), x \in X\}.$$

Как видно, кроме точек, принадлежащих Y , множество Y^* содержит недостижимые точки, доминируемые точками Y . При этом границы Парето обоих множеств совпадают (см. [12], [13]). Благодаря этому, визуализация Y^* позволяет получить информацию о границе Парето. Преимущества аппроксимации и визуализации Y^* , кроме указанной выше корректности постановки задачи аппроксимации Y^* , обсуждаются в [3], [4], [6], [13].

В случае нелинейных невыпуклых задач МКО внутреннюю аппроксимацию ОЭП предлагается (см. [7], [8]) строить в виде

$$T^* = Y\{y + \mathbb{R}_+^m : y \in T\}, \quad (1.1)$$

где T – некоторое конечное число точек множества Y (так называемая база аппроксимации). В идеале точки базы T должны принадлежать $P(Y)$, поэтому в случае использования аппроксимации (1.1) задачи аппроксимации ОЭП и $P(Y)$ близки между собой, отличаясь лишь понятием отклонения аппроксимации от аппроксимируемого множества.

2. ИЗУЧАЕМЫЙ КЛАСС ЗАДАЧ

Рассматриваемые в данной статье методы были разработаны для аппроксимации ОЭП в многошаговых задачах МКО с многоэкстремальными критериями следующего класса. Пусть рассматривается многошаговая система

$$x_t = f(t, x_{t-1}, u_t), \quad t = 1, 2, \dots, t_0, \quad (2.1)$$

где $x_t \in R^n$, $t = 0, 1, \dots, t_0$, — переменная состояния, $u_t \in R^r$, $t = 1, 2, \dots, t_0$, — управление, t_0 — число шагов (достаточно большая величина). Пусть вектор u_t задается правилом управления, содержащим параметры

$$u_t = h(t, x_{t-1}, \alpha^t), \quad t = 1, 2, \dots, t_0, \quad (2.2)$$

где $h(\cdot, \cdot, \cdot) : \{1, 2, \dots, t_0\} \times R^n \times \Xi \rightarrow R^r$ — заданная вектор-функция, $\alpha = (\alpha^t, t = 1, 2, \dots, t_0)$ — вектор параметров правила управления, $\alpha \in \Xi \subset R^l$, где Ξ — непустое компактное множество. Предполагается, что, задав вектор параметров и начальное состояние x_0 , с помощью (2.1) и (2.2) можно последовательно вычислить управления и состояния системы во все моменты времени.

Критерии оптимизации строятся на основе требований — априорных удовлетворительных уровней некоторых скалярных характеристик (показателей функционирования) $s_t^{(j)}$, значения которых связаны с управлениями и состояниями системы (2.1) и задаются непрерывными функциями

$$s_t^{(j)} = s_t^{(j)}(x_t, u_t), \quad (2.3)$$

где j — номер характеристики, $j = 1, 2, \dots, m_0$, $t = 1, 2, \dots, t_0$. Заметим, что рассматриваемые в статье методы аппроксимации ОЭП в виде (1.1) можно использовать и в случае многошаговых систем, для которых соотношения (2.1), (2.2) и (2.3) не заданы в явном виде, а вместо них используется черный ящик (неизвестный алгоритм), который по входным параметрам $\alpha \in \Xi$ находит выходы — значения характеристик $s_t^{(j)}$, где $j = 1, 2, \dots, m_0$, $t = 1, 2, \dots, t_0$.

Пусть совокупность удовлетворительных уровней j -й характеристики задается в момент t замкнутым отрезком или полупрямой $G_t^{(j)}$. Если $s_t^{(j)}$ не принадлежит $G_t^{(j)}$, то отклонение (невязка) определяется как

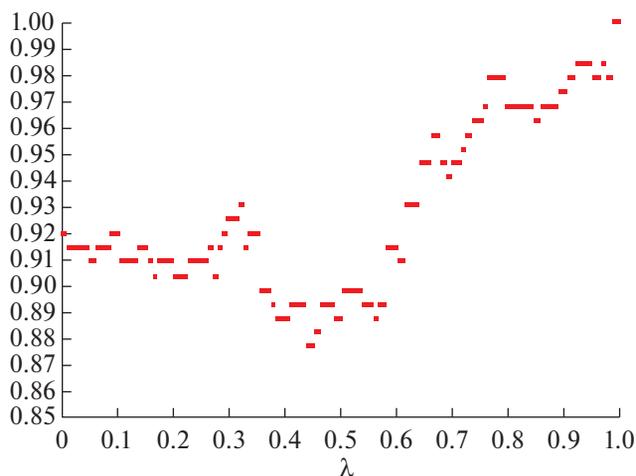
$$z_t^{(j)} = \inf \left\{ |s_t^{(j)} - s| : s \in G_t^{(j)} \right\}. \quad (2.4)$$

Особенность рассматриваемой задачи МКО состоит в том, что j -й частный критерий выбора y_j равен доле перебоев, т.е. доле интервалов (моментов) времени t , при которых $z_t^{(j)} > 0$. Такой критерий y_j имеет вид

$$y_j = \frac{1}{t_0} \sum_{t=1}^{t_0} \Theta(z_t^{(j)}), \quad (2.5)$$

где $\Theta(z)$ — функция Хэвисайда, т.е. $\Theta(z) = 1$ при $z > 0$ и $\Theta(z) = 0$ в остальных случаях. Величину $1 - y_j$ принято называть обеспеченностью (выполнения требования j). Таким образом, если характеристики $s_t^{(j)}(x_t, u_t)$ вычислены, то на основе (2.4) и (2.5) можно найти значения частных критериев y_j , $j = 1, 2, \dots, m_0$. В связи с этим при $\alpha \in \Xi$ величины $z_t^{(j)}(\alpha)$, $t = 1, 2, \dots, t_0$, $j = 1, 2, \dots, m_0$, и критерии y_j , $j = 1, 2, \dots, m_0$, можно рассматривать как функции вектора α , заданные некоторым алгоритмом, и писать $y_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, m_0$.

Частным примером рассмотренной многошаговой системы, с которой проводились эксперименты по аппроксимации ОЭП, является модель каскада водохранилищ реки Ангара, описанная в [14]. Для расчета значений критериев по модели Ангарского каскада для какого-либо конкретного правила (2.2) управления каскадом, т.е. с заданными значениями параметров $\alpha \in \Xi$, используется вариантный расчет по модели типа (2.1)–(2.3) на достаточно большое число шагов, соответствующих промежутку времени до сотни лет, для которого имеются наблюдавшиеся значения или искусственный ряд приточности, построенный на основе наблюдавшегося. При этом



Фиг. 1.

по начальным значениям объемов воды в водохранилищах рассчитываются попуски и уровни воды на весь период времени. По результатам этих расчетов находятся значения экологических, экономических и других характеристик (2.3), а по ним и заданным требованиям рассчитываются отклонения, что позволяет по формулам типа (2.5) найти значения критериев.

Число параметров правил управления (т.е. переменных задачи МКО) в модели каскада водохранилищ реки Ангара составляло около 300. Число шагов по времени (103 года) было равно 2266, т.е. каждый критерий типа (2.5) являлся суммой 2266 функций Хэвисайда. Число критериев равнялось 24. Требовалось построить аппроксимацию ОЭП с точностью порядка 1%, причем число вычислений вектора критериев не должно было превышать 10–15 млн для того, чтобы расчеты по модели Ангарского каскада занимали не более 6–8 ч персонального компьютера. Такое требование, в свою очередь, было связано с тем, что в процессе использования разработанных методов и программ для персональных компьютеров требовалось достаточно быстро исследовать задачи с различными требованиями к системе и с различными сценариями внешних воздействий (приточности бассейна).

Как показали эксперименты, описанные в [14], двухфазный метод аппроксимации ОЭП (см. [7], [8]) и генетический алгоритм аппроксимации границы Парето NSGA-II (см. [10]) не в состоянии в разумное время построить достаточно точную аппроксимацию ОЭП в этой задаче МКО. Причиной этого является сложность критериев типа обеспеченности (2.5), которые являются функциями с большим числом локальных экстремумов. Характерный пример графика зависимости критерия от параметров правил управления для модели ангарского каскада приведен на фиг. 1, где изображен график изменения критерия “Доля перебоев в выработке электроэнергии на Братской ГЭС” вдоль случайно выбранного одномерного отрезка многомерного пространства параметров. Ясно видны подмножества постоянности критерия и наличие многочисленных экстремумов. При этом свертки (функции) критериев имеют еще более сложный характер. Очевидно, что для применения градиентных методов требуется заменить исходные критерии на некоторые непрерывные вспомогательные функции. Заранее, однако, понятно, что этого будет недостаточно для преодоления проблем многоэкстремальности и требуется предложить методы, учитывающие такое свойство критериев. Именно поэтому модель Ангарского каскада использовалась в экспериментах по сравнению различных методов аппроксимации ОЭП (см. [9], [14]) и используется здесь в экспериментах с ДМСП.

Построение стартовой площадки в МСП может быть основано на различных идеях. В варианте, описанном в [9] и используемом в данной статье, применяется метод инъекции оптимумов (ИО), предложенный в [14]. Метод ИО является комбинацией глобальной оптимизации отдельных (частных) критериев на основе использования метода мултистарта (см. [15]) и генетического алгоритма аппроксимации границы Парето NSGA-II (см. [10]). Как известно, для генетических алгоритмов аппроксимации границы Парето наличие локальных экстремумов критериальных функций не является помехой. В то же время использование этих алгоритмов затруднено из-за их медленной сходимости. Оказалось, что включение в популяцию генетического алгоритма

решений, полученных в результате оптимизации отдельных критериев, осуществляемое в методе ИО, приводит к качественному ускорению сходимости алгоритма (см. [14]). Поэтому метод ИО можно использовать как для грубой аппроксимации ОЭП в задачах МКО с критериями типа (2.5), так и для построения стартовой площадки в рамках МСП. Отметим, что использование в рамках метода ИО генетического алгоритма приводит к тому, что стартовая площадка содержит многие тысячи относительно хороших решений задачи МКО.

После построения стартовой площадки в МСП для поиска точек, близких к границе Парето, используются многофазные методы аппроксимации ОЭП (см. [7], [8]), являющиеся, по существу, адаптацией на многокритериальный случай методов мултистарта (см. [15]). Методы из [7], [8] (двухфазный и трехфазный методы) основаны на нахождении локальных экстремумов адаптивно выбираемых сверток критериев с использованием градиентных методов скалярной оптимизации. Для того чтобы применить градиентные методы, в случае задач с разрывными критериями типа (2.5) используются непрерывные вспомогательные функции, вопрос о выборе которых рассмотрен в работе А.И. Рябикова (см. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. № 2). Использование непрерывных вспомогательных функций позволяет приближенно находить локальные экстремумы исходных сверток критериев типа (2.5). Наличие очень большого числа (возможно континуума) локальных экстремумов у вспомогательных функций — главная сложность, возникающая при использовании градиентных методов в рассматриваемых задачах. Приведенные в [16] эксперименты показали, что градиентные методы оптимизации сверток критериев оказываются пригодными для аппроксимации ОЭП в случае рассматриваемой задачи МКО лишь тогда, когда процедуры локальной оптимизации стартуют из специально подобранных точек, таких что ловушки в виде неэффективных локальных экстремумов не мешают методам локальной оптимизации находить решения, критериальные точки которых близки к границе Парето. Стартовая площадка, построенная с помощью метода ИО, обладает описанным свойством.

После построения стартовой площадки в МСП осуществляется шаг, использующий градиентную локальную оптимизацию вспомогательных функций. Этот шаг требует большого числа расчетов. В модели с критериями (2.5), в которых используются суммы тысяч функций Хэвисайда, приближенный расчет градиента свертки критериев требует проведения сотен вариантных расчетов по модели, что является весьма трудоемкой задачей. Поэтому решается лишь относительно небольшое число задач локальной оптимизации для случайно взятых стартовых точек из стартовой площадки, состоящей из многих тысяч точек. По этой причине удается найти лишь небольшое число новых точек базы аппроксимации ОЭП, которые, однако, качественно улучшают аппроксимацию, полученную на основе точек стартовой площадки. В то же время, при том же числе расчетов вектора критериев, меньше времени остается на расчеты по методу ИО. Поэтому большинство точек базы аппроксимации, наследуемых МСП из стартовой площадки, хуже точек базы аппроксимации, полученных методом ИО без последующей оптимизации. Этот факт заставляет задуматься о совершенствовании МСП с целью “подтягивания” остальных точек базы аппроксимации к критериальным точкам, полученным с помощью градиентной оптимизации. Это может быть осуществлено на основе дополнения МСП еще одним шагом, основанным на идеях генетических алгоритмов. Такой метод, получивший название дополненного МСП (ДМСП), рассмотрен далее.

3. ДОПОЛНЕННЫЙ МЕТОД СТАРТОВОЙ ПЛОЩАДКИ

ДМСП предназначен для аппроксимации ОЭП в нелинейных задачах МКО большой размерности (сотни переменных) с существенным числом критериев, каждый из которых имеет большое (может быть, континуальное) число локальных экстремумов, в частности, критериев типа (2.5). Также как и в МСП зависимость характеристик траектории (2.3) от решения в ДМСП может быть задана с использованием черного ящика, т.е. некоторого неизвестного алгоритма построения траектории, а расчет критериев — на основе априорных требований к характеристикам траектории.

В общем виде ДМСП состоит из трех шагов.

Шаг 1. Формирование стартовой площадки.

Шаг 2. Применение локальной оптимизации вспомогательных функций со случайными стартовыми точками, принадлежащими стартовой площадке.

Шаг 3. Использование генетического алгоритма аппроксимации границы Парето с исходной популяцией, включающей решения, найденные на шаге 2.

В версии МСП, предложенной в [9], в качестве средства формирования стартовой площадки используется вариант метода ИО, в котором включение оптимумов частных критериев в популяцию генетического алгоритма аппроксимации границы Парето совершается однократно – перед первой итерацией алгоритма. В данном исследовании в ДМСП используется такой же подход к построению стартовой площадки. На втором шаге используется тот же модуль локальной оптимизации. Таким образом, основное отличие изучаемого варианта ДМСП от МСП (см. [9]) состоит в наличии шага 3. Рассмотрим структуру этого варианта ДМСП более подробно.

3.1. Схема изучаемого варианта ДМСП

Шаг 1. Построение стартовой площадки X_{LP} . Этот шаг состоит из двух частей.

Шаг 1.1. Достаточно точно решаются задачи *глобальной* минимизации частных критериев. При этом оптимумы частных критериев приближенно находятся на основе идей метода мульти-старта (см. [15]), примененного для глобальной оптимизации вспомогательных функций. Для этого используется модуль локальной оптимизации, реализованный в рамках диалоговой системы оптимизации ДИСО (см. [17]) и адаптированный под среду Windows. Этот модуль, разработанный в ВЦ РАН А.И. Голиковым и Н.И. Грачевым, основан на комбинировании метода сопряженного градиента с предложенными разработчиками оригинальным методом оптимизации шага с использованием параболических функций. Обозначим совокупность решений задач глобальной минимизации частных критериев через X_y .

Шаг 1.2. Исходная популяция Q_0 генетического алгоритма NSGA-II (см. [10]) строится следующим образом: совокупность оптимумов X_y дополняется случайными точками из множества допустимых решений X до некоторого заранее заданного достаточно большого числа N_{POP} . Далее выполняются итерации генетического алгоритма. При этом заранее должны быть заданы правило завершения шага 1.2, а также желаемое число точек в популяции Q_k , получаемой на k -й итерации генетического алгоритма, $k = 1, 2, \dots$, в том числе в выходном множестве генетического алгоритма (обычно берется N_{POP}). Выходное множество пополняем точками X_y , после чего из него выделяем множество недоминируемых решений. Полученное множество X_{LP} берется в качестве стартовой площадки.

Шаг 2. Выполняется процедура приближенной локальной оптимизации адаптивных сверток критериев со случайными стартовыми точками, принадлежащими стартовой площадке X_{LP} . Используются тот же модуль локальной оптимизации и тот же подход к построению вспомогательных функций, что и на шаге 1.1. Заранее должны быть заданы объем выборки N_{OPT} на каждой итерации (обычно порядка одной или нескольких сотен), используемое параметрическое семейство сверток критериев, параметры которых выбираются адаптивно, а также правило остановки алгоритма. Обозначим через X_2 полученное множество решений. В качестве результата X_{OPT} шага 2 берем совокупность недоминируемых точек $X_2 \cup X_{LP}$.

Шаг 3. Выполняются итерации генетического алгоритма NSGA-II, причем в качестве начальной популяции берется множество решений X_{OPT} , дополненное случайными точками из множества допустимых решений. Заранее должны быть заданы желаемое число точек в выходном множестве этого шага и число итераций алгоритма. Совокупность решений, полученная в результате работы генетического алгоритма, обозначена через X_3 . Окончательный результат шага 3, обозначаемый через X_{DOP} , получаем путем выделения недоминируемых точек $X_{OPT} \cup X_3$. Результирующая база аппроксимации – это множество критериальных точек $T_{DOP} = y(X_{DOP})$.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДОПОЛНЕННОГО МЕТОДА СТАРТОВОЙ ПЛОЩАДКИ

4.1. Описание эксперимента

Эффективность ДМСП проанализируем на основе экспериментов с моделью Ангарского каскада. Прежде всего рассмотрим вопрос о том, смогло ли введение шага 3 (т.е. дополнительное использование генетического алгоритма) качественно улучшить совокупность решений X_{OPT} , полученную в результате работы МСП при условии, что суммарное число расчетов критериальной функции осталось без изменения.

Воспользуемся результатами экспериментов с МСП, описанными в [9]. В экспериментах [9] на шаге 1.1 МСП было затрачено около 10 млн расчетов критериальной функции и около 5 млн расчетов критериальной функции на шаге 1.2 (545 итераций генетического метода). Таким образом, на расчет стартовой площадки, которую здесь обозначим X_{LP}^M , в МСП потрачено 15 млн расчетов критериальной функции. На шаге 2 было проведено две итерации ($N_{OPT} = 50$), для которых потребовалось около 3 млн расчетов критериальной функции, так что суммарное число расчетов критериальной функции составило около 18 млн. При этом было построено множество X_{OPT}^M . В качестве множества решений X_{LPM} , полученного в итоге работы МСП, была взята совокупность недоминируемых точек объединения X_{LP}^M и X_{OPT}^M . Множество X_{LPM} порождает базу аппроксимации $T_{LPM} = y(X_{LPM})$. Отметим, что в качестве одного из важнейших показателей качества аппроксимации ОЭП было использовано отклонение недоминируемой точки $y(\alpha_{11})$ от T_{LPM}^* , где α_{11} – найденное заранее эффективное решение, предпочтительное для ЛПР. Поиск решения α_{11} описан в [16]. В эксперименте с МСП в результате первой итерации шага 2 это отклонение достигло значения 0.01 и осталось таким же после второй итерации.

Обратимся теперь к эксперименту с ДМСП, в котором шаг 1.1 полностью совпадал с шагом 1.1 МСП, а шаг 1.2 отличался только тем, что в эксперименте с ДМСП число итераций генетического алгоритма NSGA-II равнялось 100 (вместо 545 в МСП). Благодаря этому на шаге 1.2 было потрачено около 1 млн расчетов критериальной функции вместо 5 млн в МСП. В результате на построение стартовой площадки X_{LP} ушло около 11 млн расчетов критериальной функции. Меньшее число итераций NSGA-II на шаге 1.2 позволило сэкономить вычислительные ресурсы для дополнительного, третьего шага ДМСП.

В рамках процедуры на втором шаге ДМСП осуществлялась локальная оптимизация той же свертки, что и в эксперименте с МСП. При этом число генерируемых точек ($N_{OPT} = 50$) было тем же, что и в эксперименте с МСП. Как и в эксперименте с МСП, было выполнено две итерации процедуры локальной скалярной оптимизации, потребовавших 2.7 млн расчетов критериальной функции. В результате были построены множество X_{OPT} и база аппроксимации $T_{OPT} = y(X_{OPT})$. В связи с тем, что на построение стартовой площадки было потрачено лишь 100 итераций алгоритма NSGA-II, стартовая площадка оказалась недостаточно хорошей, поэтому отклонение точки $y(\alpha_{11})$ от множества T_{OPT}^* составило 0.04, что почти в 4 раза больше величины, достигнутой методом МСП.

На шаге 3 выполнялся генетический алгоритм NSGA-II с начальной популяцией, состоящей из множества X_{OPT} , дополненного случайными точками исходного множества X . Было выполнено 430 итераций (это число итераций было выбрано для того, чтобы суммарное число расчетов критериальной функции совпадало с экспериментом с МСП, т.е. 18 млн). В результате шага 3 была получена база аппроксимации T_{DOP} .

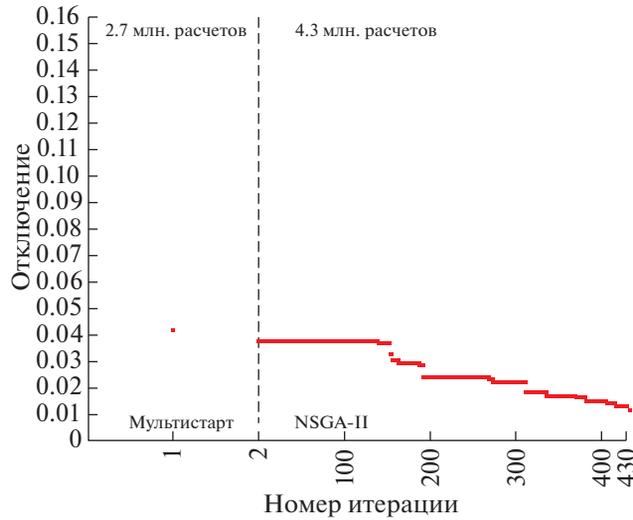
4.2. Сравнение ДМСП с МСП

Рассмотрим график отклонения точки $y(\alpha_{11})$ от аппроксимации ОЭП в зависимости от номера итерации внутри второго и третьего шагов ДМСП (фиг. 2). Как уже говорилось, процедура второго шага позволила уменьшить отклонение с 0.15 до 0.04, что хуже, чем в методе МСП. В то же время использование сэкономленного ресурса (около 4.3 млн расчетов критериальной функции) позволило уменьшить эту величину на шаге 3 до величины 0.01, т.е. удалось достичь той же величины отклонения, что и в случае МСП. Таким образом, оказалось, что ДМСП приближает аппроксимацию к точке $y(\alpha_{11})$ с той же точностью, что и МСП, причем примерно за такое же число расчетов критериальной функции.

Сравним базу аппроксимации T_{DOP} с базой аппроксимации T_{LPM} , полученной с помощью МСП при том же числе расчетов критериальной функции, используя при этом метод функций включения, предложенный в статье В.Е. Березкина и А.В. Лотова (см. ЖВМиМФ № 9 за 2014 г.).

Пусть $(A)_\varepsilon$ – ε -окрестность множества A в максимальной метрике. Величина $v_{T_{LPM}}(\varepsilon, T_{DOP}^*)$, определенная при $\varepsilon \geq 0$ – это доля точек T_{LPM} , попавших в ε -окрестность T_{DOP}^* , т.е.

$$v_{T_{LPM}}(\varepsilon, T_{DOP}^*) = \frac{1}{\text{card } T_{LPM}} \sum_{i=1}^{\text{card } T_{LPM}} \delta(\varepsilon, t^i), \quad \text{где} \quad \delta(\varepsilon, t^i) = \begin{cases} 1, & t^i \in (T_{DOP}^*)_\varepsilon \\ 0, & t^i \notin (T_{DOP}^*)_\varepsilon \end{cases}, \quad t^i \in T_{LPM}.$$



Фиг. 2.

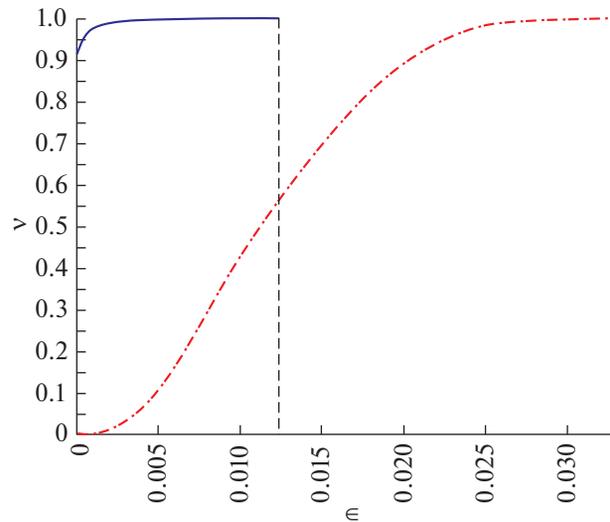
Зависимость $v_{T_{LPM}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$ называют функцией включения базы T_{LPM} в ϵ -окрестность множества T_{DOP}^* . Таким образом, функция включения $v_{T_{LPM}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$ характеризует отклонение T_{LPM} от T_{DOP}^* . Аналогичным образом определяется зависимость $v_{DOP}(\epsilon, T_{LPM}^*)$, которая имеет смысл доли точек T_{DOP} , попавших в ϵ -окрестность T_{LPM}^* , и характеризует отклонение точек T_{DOP} от T_{LPM}^* .

На фиг. 3 представлены графики функций включения $v_{DOP}(\epsilon, T_{LPM}^*)$ и $v_{T_{LPM}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$. Пунктирной линией нарисован график функции $v_{DOP}(\epsilon, T_{LPM}^*)$, сплошной линией – график функции $v_{T_{LPM}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$. Видно, что график функции $v_{T_{LPM}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$ лежит выше и левее графика функции $v_{DOP}(\epsilon, T_{LPM}^*)$. В частности, множество T_{DOP}^* содержит 90% точек T_{LPM} , ϵ -окрестность T_{DOP}^* уже при $\epsilon = 0.001$ содержит уже более 95% точек T_{LPM} , а при $\epsilon = 0.01$ – почти все 100% точек T_{LPM} . Это означает, что точки T_{LPM} сосредоточены в малой окрестности множества T_{DOP}^* .

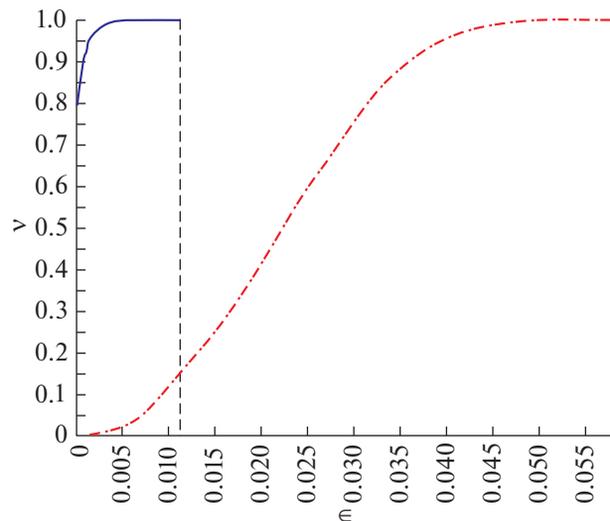
Наоборот, функция $v_{DOP}(\epsilon, T_{LPM}^*)$ растет достаточно медленно, так что множество T_{LPM}^* содержит менее 0.1% точек T_{DOP} , а при ϵ порядка 0.01 в (T_{LPM}^*) содержится не более 45% точек T_{aa} , т.е. более половины точек T_{DOP} отклоняются от T_{LPM}^* более чем на 0.01. Сказанное позволяет сделать вывод о том, что аппроксимация ОЭП, задаваемая множеством точек T_{DOP} , гораздо лучше аппроксимации, задаваемой множеством T_{LPM} .

4.3. Сравнение ДМСП с методом ИО

В [9] было показано, что эксперименты с методами ИО и МСП не позволяют обнаружить явно выраженного превосходства одного метода над другим. Как уже говорилось, наличие в аппроксимации, полученной МСП, очень хороших критериальных точек, полученных на шаге оптимизации, не компенсирует того, что почти 10 тысяч остальных критериальных точек уступают критериальным точкам, полученным методом ИО. В связи с этим представляет интерес сравнение аппроксимации T_{DOP}^* , построенной методом ДМСП, с аппроксимацией $(T_{800}^{eim})^*$, построенной методом ИО (см. [14]) при том же числе расчетов критериальной функции (18 млн). Сравнение осуществим на основе метода функций включения. На фиг. 4 представлен график функций включения $v_{DOP}(\epsilon, (T_{800}^{eim})^*)$, нарисованный пунктирной линией, и график функций включения $v_{T_{800}^{eim}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$, нарисованный сплошной линией. Напомним, что функция $v_{DOP}(\epsilon, (T_{800}^{eim})^*)$ имеет смысл доли точек T_{DOP} , попавших в ϵ -окрестность $(T_{800}^{eim})^*$, а функция $v_{T_{800}^{eim}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$ – доли точек



Фиг. 3.

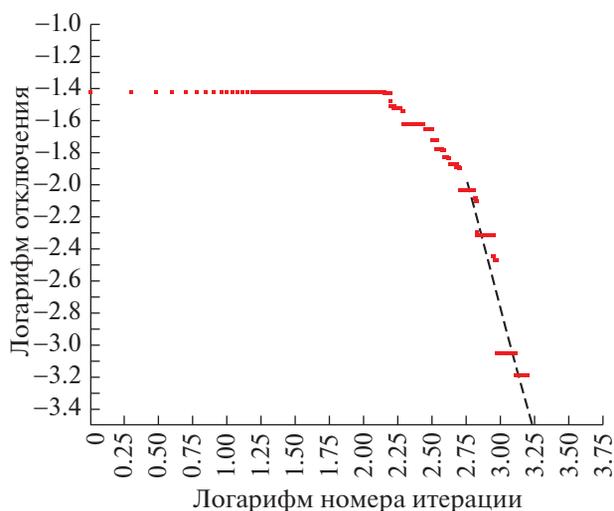


Фиг. 4.

T_{800}^{eim} , попавших в ϵ -окрестность T_{DOP}^* . На рисунке видно, что график функции $\nu_{T_{800}^{eim}}(\epsilon, T_{DOP}^*)$ лежит выше и левее графика функции $\nu_{DOP}(\epsilon, (T_{800}^{eim})^*)$. В частности, множество T_{DOP}^* содержит 80% точек T_{800}^{eim} , а ϵ -окрестность T_{DOP}^* содержит более 99% точек T_{800}^{eim} уже при $\epsilon = 0.005$. При $\epsilon = 0.012$ ϵ -окрестность T_{DOP}^* содержит все точки T_{800}^{eim} . Это означает, что точки T_{800}^{eim} сосредоточены в малой окрестности множества T_{aa} .

Наоборот, $(T_{800}^{eim})^*$ содержит менее 0.1% точек T_{DOP} , а при ϵ порядка 0.012 в $(T_{800}^{eim})^*$ содержится не более 15% точек T_{DOP} , т.е. более 85% точек T_{DOP} отклоняются от $(T_{800}^{eim})^*$ более чем на 0.012. Сказанное позволяет сделать вывод о том, что аппроксимация ОЭП, задаваемая базой T_{DOP} , качественно лучше аппроксимации, задаваемой базой T_{800}^{eim} .

Наконец, сравним асимптотическую скорость сходимости ДМСП с асимптотической скоростью сходимости метода ИО. На фиг. 5 по горизонтальной оси откладывается десятичный логарифм



Фиг. 5.

рифт числа итераций k генетического метода на третьем шаге ДМСП, а по вертикальной оси — десятичный логарифм отклонения точки $y(\alpha_{11})$, обозначенный δ . При $\lg k > 2.75$ асимптотическое поведение графика экспериментальной зависимости может быть приближенно описано линейным соотношением $\lg \delta = a + b \lg k$. На основании экспериментальных данных получаем, что $a = 6.7$, $b = -3.2$, поэтому приближенная асимптотическая зависимость отклонения от числа итераций имеет вид

$$\delta = 10^7 k^{-3}.$$

Имеет место кубическая скорость сходимости, т.е. значительно более быстрая, чем квадратичная скорость сходимости метода ИО (см. [14]). Этот факт приводит к выводу о предпочтительности ДМСП по скорости сходимости по сравнению с методом ИО, который, сам по себе, за 18 млн измерений критериальной функции обеспечил отклонение точки $y(\alpha_{11})$ от аппроксимации ОЭП только около 0.06. Напомним, что при использовании алгоритма NSGA-II за 18 млн расчетов критериальной функции это отклонение удалось уменьшить только до 0.1 (см. [14]).

Подводя итог сравнению ДМСП с МСП и ИО, можно утверждать, что эксперимент показал разумность решения перенести часть ресурсов, затрачиваемых на генетический метод, с шага построения стартовой площадки на вновь образованный третий шаг ДМСП. Это позволило “подтянуть” большинство точек базы аппроксимации, построенной ИО, к точкам базы, полученным с помощью градиентных методов. Стало ясно, что слишком точное построение стартовой площадки совсем не требуется — 100 итераций генетического алгоритма (вместо 450) оказались достаточны для надежной работы шага многокритериального мультистарта.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБЩИЙ ВЫВОД ПО МЕТОДАМ АППРОКСИМАЦИИ ОЭП

Рассматривая три метода — ИО, МСП и ДМСП, — которые предложены в [9], [14] и данной статье, соответственно, можно сделать следующие выводы. Проведенные эксперименты показали, что при аппроксимации ОЭП в задачах МКО, порождаемых задачами выбора правил управления для многошаговых систем (2.1)–(2.2) с критериями типа (2.3)–(2.5), по числу вычислений критериальной функции все три предложенные метода оказались значительно лучше генетического алгоритма NSGA-II. При этом ДМСП оказался эффективнее и МСП, и ИО. Поэтому пользователям можно рекомендовать применять ДМСП. В то же время, хотя метод ИО уступает ДМСП по эффективности, он имеет определенное преимущество перед ДМСП по простоте организации: для применения ДМСП требуется подобрать подходящий класс сверток критериев для второго шага и применить их градиентную локальную оптимизацию, что может оказаться непростым делом, требующим определенной квалификации от пользователя. При использовании метода ИО такой квалификации не требуется. Поэтому метод ИО можно рекомендовать в том случае, когда можно удовлетвориться достаточно грубой аппроксимацией ОЭП.

Первые эксперименты показали, что метод ДМСП можно использовать для построения ОЭП в нелинейных задачах МКО с многоэкстремальными критериями других типов. Этот вопрос требует, однако, дополнительного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Краснощечков П.С., Морозов В.В., Попов Н.М.* Оптимизация в автоматизированном проектировании. М.: Макс Пресс, 2008.
2. *Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T.* Theory of multiobjective optimization. Orlando: Acad. Press, 1985.
3. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997. 239 с.
4. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004. 310 p.
5. *Евтушенко Ю.Г., Посылкин М.А.* Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с заданной точностью // Автоматика и телемехан. 2014. № 6. С. 49–58.
6. *Lotov A.V., Miettinen K.* Visualizing the Pareto Frontier // J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowinski (eds.) Multiobjective Optimization. Interactive and Evolutionary Approaches, Lect. Not. Comp. Sci. V. 5252. Berlin-Heidelberg: Springer, 2008. P. 213–244.
7. *Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е.* Аппроксимация и визуализация паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // Докл. АН. 2002. Т. 386. № 6. С. 738–741.
8. *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 2009–2023.
9. *Лотов А.В., Рябиков А.И.* Метод стартовой площадки в многоэкстремальных задачах многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 12. С. 2111–2128.
10. *Deb K.* Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Chichester, UK: Wiley, 2001. 515 p.
11. *Coello C.A., Lamont G.B., van Veldhuizen D.A.* Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. 2nd ed. Springer, 2007.
12. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
13. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
14. *Лотов А.В., Рябиков А.И.* Простая эффективная гибридизация классической глобальной оптимизации и генетических алгоритмов многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 1666–1680.
15. *Horst R., Pardalos P.M.* Handbook on global optimization. Dordrecht, NL: Kluwer, 1995.
16. *Лотов А.В., Рябиков А.И., Бубер А.Л.* Многокритериальная процедура выбора решения с наследуемым множеством точек старта локальной оптимизации свертки критериев // Искусственный интеллект и принятие решений. 2018. № 3. С. 58–68.
17. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.