

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 47, номер 6, 2021

---

---

## ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ

О восстановлении двумерной функции распределения ионов в пробкотроне по измерениям спектров коллективного томсоновского рассеяния

*Е. Д. Господчиков, Т. А. Хусаинов, А. Г. Шалашов*

483

---

## МЕТОДЫ НАГРЕВА ПЛАЗМЫ

Мощный атомарный инжектор с перестраиваемой энергией пучка для нагрева и стабилизации плазмы

*А. В. Бруль, А. Г. Абдрашитов, В. Х. Амиров, В. П. Белов, Р. В. Вахрушев, А. И. Горбовский, А. Н. Драничников, В. И. Давыденко, П. П. Дейчули, Н. П. Дейчули, А. С. Донин, А. А. Иванов, И. А. Иванов, В. А. Капитонов, В. В. Колмогоров, С. Корепанов, В. В. Мишагин, В. В. Ращенко, А. В. Сорокин, Н. В. Ступишин*

499

---

## ИОННЫЕ И ПЛАЗМЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ

Геликонный источник плотной плазмы для линейных плазменных установок

*Е. И. Кузьмин, И. В. Шиховцев*

507

---

## ПУЧКИ В ПЛАЗМЕ

Пучково-плазменный разряд в космосе и в лаборатории

*Е. Г. Шустин*

518

Использование коаксиальной электродинамической системы для усиления волн СВЧ-диапазона при развитии пучково-плазменной неустойчивости

*И. Н. Карташов, М. В. Кузелев*

531

---

## НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

Моделирование положительного коронного разряда от плоскопараллельной системы горизонтальных заземленных проводов в электрическом поле грозового облака

*М. С. Мокров, Ю. П. Райзер*

541

Исследования характеристик положительного столба тлеющего разряда постоянного тока в ксеноне

*Г. М. Григорьян, А. В. Демьянов, Н. А. Дятко, И. В. Кочетов*

562

Самовоздействие гауссова пучка микроволн в создаваемом им разряде в воздухе в подпороговом поле

*Г. М. Батанов, В. Д. Борзосеков, Л. В. Колик, Е. М. Кончечков, Д. В. Малахов, А. Е. Петров, К. А. Сарксян, В. Д. Степахин, Н. К. Харчев*

572

---

---



## О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ В ПРОБКОТРОНЕ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СПЕКТРОВ КОЛЛЕКТИВНОГО ТОМСОНОВСКОГО РАССЕЙАНИЯ

© 2021 г. Е. Д. Господчиков<sup>a, b</sup>, Т. А. Хусаинов<sup>a, \*</sup>, А. Г. Шалашов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

<sup>b</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

\*e-mail: hta@ipfran.ru

Поступила в редакцию 07.12.2020 г.

После доработки 20.01.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Предлагается метод томографии функции распределения энергичных ионов, адиабатически удерживаемых в открытой магнитной ловушке, по данным диагностики методом коллективного томсоновского рассеяния. Метод основан на измерениях спектров рассеяния из последовательных сечений плазмы, отвечающих различным значениям напряженности магнитного поля вдоль одной силовой линии. Показано, что задача восстановления функции распределения ионов в пространстве скоростей по данным измерений в этой ситуации сводится к интегральному уравнению первого рода, допускающему аналитическое решение. Рассмотрены несколько путей построения точных и приближенных решений полученного интегрального уравнения.

*Ключевые слова:* открытая магнитная ловушка, диагностика плазмы, функция распределения по скоростям, энергичные ионы, коллективное томсоновское рассеяние

DOI: 10.31857/S0367292121060056

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние мощного зондирующего миллиметрового излучения на тепловых флуктуациях магнитоактивной плазмы (так называемое коллективное томсоновское рассеяние) позволяет получать информацию о распределении ионов плазмы по скоростям с хорошим пространственным и временным разрешением [1]. Возможности анализа спектров рассеянного сигнала для диагностики функции распределения быстрых ионов в тороидальных магнитных ловушках были продемонстрированы экспериментально на токамаках TFTR [2], JET [3], TEXTOR [4–7], ASDEX-U [6, 8], на стеллараторе W7AS для диагностики температуры тепловых ионов и нижнегибридной неустойчивости плазмы [9–11], на стеллараторе LHD для диагностики распределения как быстрых, так и тепловых ионов [12] и, совсем недавно, на новейшем стеллараторе W7X для диагностики температуры тепловых ионов [13]. Наряду с оптическими методами, спектроскопией нейтронов и гамма-квантов, коллективное рассеяние миллиметрового излучения является одним из основных способов диагностики функции распределения быстрых ионов в токамаках [14]; в частности, этот метод рассматривается как основной способ

диагностики термоядерных альфа-частиц в токамаке-реакторе ИТЭР [15].

Последний прогресс в методах удержания термоядерной плазмы в существующих прямых магнитных ловушках [16–20] и планирование новых физических задач для прямых магнитных ловушек следующего поколения [20, 21] привели к тому, что сейчас активно совершенствуются методы диагностики плазмы в прямых магнитных ловушках. Важной возможностью, позволяющей проводить диагностику функции распределения энергичных ионов, является реализация в прямой магнитной ловушке опробованного на тороидальных магнитных ловушках метода регистрации спектров коллективного томсоновского рассеяния [22].

Следуя работе [22], отметим основные особенности коллективного томсоновского рассеяния в плазме крупномасштабной прямой магнитной ловушки на примере крупнейшей на данный момент подобной установки ГДЛ (газодинамическая ловушка), функционирующей в ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН. Плазма в этой установке делится на две фракции: фоновую плазму, удерживаемую в газодинамическом режиме, и высокоэнергичные ионы, появляющиеся в результате бомбардировки фоновой плазмы пучками ней-

тральных атомов с энергией порядка 20–30 кэВ [23]. Энергичные ионы, во-первых, составляют существенную часть всех ионов плазмы (20% в центральном сечении и до 100% в точках разворота); во-вторых, они удерживаются в пробкотроне в бесстолкновительном адиабатическом режиме. Частота соударений быстрых ионов с электронами и ионами фоновой плазмы много меньше частоты баунс-осцилляций между точками разворота в магнитном поле. В отличие от тороидальных систем модуль магнитного поля в открытой ловушке меняется сильно (например, в установке ГДЛ пробочное отношение превышает 30), поэтому функция распределения энергичных ионов будет существенно разной в разных поперечных сечениях ловушки [22]. Это, с одной стороны, накладывает дополнительные ограничения на пространственное разрешение метода диагностики, а с другой стороны, может быть использовано для восстановления функции распределения частиц.

Напомним, что диагностика плазмы по коллективному рассеянию заключается в регистрации спектральной плотности мощности рассеянного излучения  $dP_s/d\omega$ , которая в свою очередь пропорциональна спектральной плотности флуктуаций плотности плазмы  $S_f(\mathbf{k}, \omega)$ , где  $\omega = \omega_s - \omega_i$  и  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  – разность частот и волновых векторов зондирующего и рассеянного излучения. В эксперименте обычно направление  $\mathbf{k}$  фиксировано геометрией рассеяния, а  $\omega$  меняется (попадает в полосу спектроанализатора). Поэтому мы имеем одномерный спектр рассеяния, который непосредственно позволяет восстановить одномерную функцию распределения ионов по проекциям скорости на направление  $\mathbf{k}$

$$S_f \propto F(\omega/k), \quad F(u) = \int f(\mathbf{v})\delta(u - \mathbf{v}\mathbf{k}/k)d^3v,$$

где  $f(\mathbf{v})$  – локальная функция распределения ионов или электронов по трехмерному пространству скоростей, рассчитанная в рассеивающем объеме. Для предложенного в [22] эксперимента на установке ГДЛ угол рассеяния и полоса анализа по  $\omega$  выбираются так, что спектральная плотность флуктуаций определяется одномерной функцией распределения быстрых ионов.

В дальнейшем будем предполагать, что для вращающейся в магнитном поле частицы все направления скорости поперек магнитного поля равновероятны, поэтому ансамбль таких частиц можно характеризовать двумерной функцией распределения  $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$  по поперечной и продольной по отношению к магнитному полю компонентам вектора скорости. Воспользовавшись этой естественной симметрией, мы можем пере-

писать выражение для одномерной функции распределения в виде

$$F(u, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) \times \delta(u - v_{\parallel} \cos \theta - v_{\perp} \sin \theta \cos \varphi) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\varphi, \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол между вектором  $\mathbf{k}$  и направлением магнитного поля. Измерение спектра рассеянного сигнала при заданном угле рассеяния не позволяет восстановить полную функцию распределения  $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , однако такое восстановление в принципе возможно по двумерной функции  $F(u, \theta)$ , то есть если мы проведем измерения при некотором наборе углов рассеяния. Такой подход к восстановлению функции распределения близок к классической задаче томографии, которая в данном случае может быть решена стандартными математическими методами решения некорректных обратных задач. Метод был предложен и теоретически проанализирован [24], продемонстрирован на синтетических данных [25] и успешно реализован при обработке реальных экспериментальных данных [14].

Однако широкое варьирование угла рассеяния не всегда возможно и требует достаточно изощренной геометрии линий ввода и приема микроволнового излучения. В том случае, когда измерения могут быть проведены в точках, отвечающих различным значениям магнитного поля вдоль одной силовой линии, возможен другой подход: мы можем воспользоваться тем, что если функция распределения электронов пересчитывается между этими точками известным образом, то мы, сравнивая спектры рассеяния в этих точках, можем также восстановить полную функцию распределения. В настоящей работе мы математически сформулируем задачу такого восстановления, покажем, что такая задача может быть сведена к поиску решений интегрального уравнения первого рода, и продемонстрируем пути решения этого уравнения.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим формулу (1) для произвольной точки вдоль силовой линии магнитного поля:

$$F(u, R, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f_R(v'_{\parallel}, v'_{\perp}) \times \delta(u - v'_{\parallel} \cos \theta - v'_{\perp} \sin \theta \cos \varphi') v'_{\perp} dv'_{\perp} dv'_{\parallel} d\varphi',$$

где  $f_R(v'_{\parallel}, v'_{\perp})$  – функция распределения в сечении, где напряженность магнитного поля равна  $B = R \cdot B_{\min}$ , локальное пробочное отношение  $R$  играет роль координаты вдоль силовой линии магнитного поля. Здесь и далее мы будем исполь-

зовать обозначения  $v'_{\parallel,\perp}$  для скорости в заданном сечении  $R$  и  $v_{\parallel,\perp}$  — для скорости в центральном сечении  $R = 1$ , отвечающем минимальному значению магнитного поля. Для иона, осуществляющего бесстолкновительное движение в плавном однородном магнитном поле, можно ввести два интеграла движения

$$v_{\perp}^2/R = \text{const},$$

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 + 2eZ_i m_i \Phi' = \text{const}.$$

Первый из них отвечает сохранению магнитного момента, второй — сохранению энергии с учетом электростатического амбиполярного потенциала  $\Phi'$ . Характерные значения перепада амбиполярного потенциала вдоль силовой линии определяются температурой мишенной плазмы [18, 26], поэтому при рассмотрении динамики энергичных ионов им можно пренебречь. В результате для быстрых ионов связь между скоростями  $v_{\parallel,\perp}$  и  $v'_{\parallel,\perp}$  можно найти в явном виде

$$v'_{\perp} = \sqrt{R}v_{\perp},$$

$$v'_{\parallel} = v_{\parallel} \sqrt{1 - (R-1)v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2}. \quad (2)$$

В силу теоремы Лиувилля фазовый объем сохраняется, поэтому функция распределения ионов в данном сечении  $R$  выражается через функцию распределения в центральном сечении  $R = 1$  ловушки следующим образом:

$$f_R(v'_{\parallel}, v'_{\perp}) = f_1(v_{\parallel}, v_{\perp}),$$

где скорости в минимуме магнитного поля выражены через скорости в сечении  $R$  в соответствии с преобразованиями (2).

Для простоты выберем продольную геометрию рассеяния  $\theta = 0$  и возьмем интеграл по  $\phi'$ . Получим

$$F(u, R, 0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(v'_{\parallel}, v'_{\perp}) \delta(u - v'_{\parallel}) v'_{\perp} dv'_{\perp} dv'_{\parallel}.$$

Далее перейдем в подынтегральном выражении к скоростям в минимуме магнитного поля

$$F(u, R) = \int_{v_{\perp}^2 \geq (R-1)v_{\parallel}^2} f_1(v_{\parallel}, v_{\perp}) \times$$

$$\times \delta(u - v_{\parallel} \sqrt{1 - (R-1)v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2}) \frac{2\pi R v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\sqrt{1 - (R-1)v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2}}.$$

Формально интеграл берется по области  $v_{\perp}^2 \geq (R-1)v_{\parallel}^2$ , в которую переходит полуплоскость  $v'_{\parallel} \in \mathbb{R}$ ,  $v'_{\perp} \geq 0$ . Однако за пределами этой области  $\delta$ -функция всюду равна нулю, поэтому мы можем расширить интеграл на все простран-

ство скоростей  $v_{\parallel}, v_{\perp}$ . Также в силу ожидаемой в открытой ловушке симметричности функции распределения для захваченных ионов по  $v_{\parallel}$ , мы можем рассматривать только область  $u \geq 0$  для  $F(u, R)$ ; при этом подынтегральная  $\delta$ -функция будет равна нулю в области  $v_{\parallel} < 0$ . С учетом этого мы можем переписать интеграл в более простом виде

$$F(u, R) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(v_{\parallel}, v_{\perp}) \delta(u - v_{\parallel} \sqrt{1 - (R-1)v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2}) \times$$

$$\times \frac{2\pi R v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}}{\sqrt{1 - (R-1)v_{\perp}^2/v_{\parallel}^2}}.$$

Возьмем интеграл по  $v_{\parallel}$ , получим

$$F(u, R) = 2\pi R \int_0^{\infty} f_1(\sqrt{u^2 + (R-1)v_{\perp}^2}, v_{\perp}) v_{\perp} dv_{\perp}. \quad (3)$$

Это основное соотношение, которое мы будем анализировать в предположении, что по результатам диагностики плазмы нам известна непрерывная функция  $F(u, R)$ . Конечно, при использовании данных реального эксперимента для построения такой функции придется воспользоваться интерполяцией по дискретному набору измерений.

Для компактности последующих выкладок введем новые обозначения

$$f(x, y) = f_1(v_0 \sqrt{x}, v_0 \sqrt{y}), \quad x = v_{\parallel}^2/v_0^2, \quad y = v_{\perp}^2/v_0^2,$$

$$G(\xi, w) = (\pi R)^{-1} F(v_0 \sqrt{\xi}, R),$$

$$\xi = u^2/v_0^2, \quad w = R - 1,$$

где  $v_0$  — любая характерная скорость, введенная только для нормировки. В итоге, мы приходим к интегральному уравнению

$$G(\xi, w) = \int_0^{\infty} f(\xi + wy, y) dy. \quad (4)$$

Математическая постановка задачи восстановления состоит в том, чтобы по заданной функции  $G(\xi, w)$  найти функцию  $f(x, y)$ . При этом будем считать, что переменные  $\xi, w, x, y$  изменяются в интервале  $[0, \infty)$ . Функция  $f(x, y)$  является действительной положительно определенной кусочно-гладкой функцией, интегралы от которой по любой конечной области ограничены. Отметим, что реальная функция распределения в силу релятивистских ограничений также должна обращаться в нуль начиная с определенных значений переменных  $x, y$ , однако для удобства вычисления аналитических интегралов мы не будем тре-

бовать выполнения этого условия, а вместо этого оставим за собой свободу вводить ограничения на закон спадаания функции  $f(x, y)$  при  $x, y \rightarrow \infty$ .

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Поскольку все аргументы в уравнении (4) заданы на положительной полуоси, для поиска решения естественно воспользоваться косинус-преобразованием Фурье. Определим

$$F_c(v, y) = \int_0^\infty f(x, y) \cos(xv) dx, \tag{5}$$

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_c(v, y) \cos(xv) dv.$$

Необходимым условием для этих равенств является сходимость интегралов  $\int_0^\infty f(x, y) dx$  для всех значений  $y \geq 0$ . После преобразования (5) уравнение (4) переписывается в виде

$$G(\xi, w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F_c(v, y) \cos(v\xi + vwy) dy dv. \tag{6}$$

Мы видим, что косинус-преобразование Фурье сохраняет интегральный характер уравнения, однако приводит его к нормальному виду, допускающему стандартное решение. Это решение приведено в следующем разделе, но прежде чем переходить к нему, сделаем одно отступление методического характера.

Функции  $G(\xi, w)$  и  $f(x, y)$  принципиально заданы нам только при положительных значениях своих параметров. Давайте на время забудем об этом и распространим все наши зависимости в область  $\xi, w, x \in (-\infty, \infty)$ , но по-прежнему будем считать  $y \geq 0$ . Тогда мы можем применить к уравнению (4) комплексное преобразование Фурье по переменным  $\xi, w, x$ :

$$\tilde{f}(k_x, y) = \int_{-\infty}^\infty f(x, y) e^{ik_x x} dx,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(k_x, y) e^{-ik_x x} dk_x$$

$$\tilde{G}(k_\xi, k_w) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty G(\xi, w) e^{ik_\xi \xi + ik_w w} d\xi dw,$$

$$G(\xi, w) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{G}(k_\xi, k_w) e^{-ik_\xi \xi - ik_w w} dk_\xi dk_w$$

Уравнение (4) при этом примет вид

$$\tilde{G}(k_\xi, k_w) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \tilde{f}(k_x, y) e^{ik_\xi \xi + ik_w w - ik_x(\xi + wy)} dy dk_x d\xi dw =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \tilde{f}(k_x, y) \delta(k_\xi - k_x) \delta(k_w - k_x y) dy dk_x =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \tilde{f}(k_\xi, y) \delta(k_w - k_\xi y) dy.$$

Далее учитываем, что интеграл берется только для положительных значений  $y$ , и приходим к

$$\tilde{G}(k_\xi, k_w) = \begin{cases} 2\pi \tilde{f}(k_\xi, k_w/k_\xi) / |k_\xi|, & k_\xi k_w \geq 0 \\ 0, & k_\xi k_w < 0 \end{cases}.$$

При  $k_\xi k_w \geq 0$  это соотношение дает нам простую алгебраическую связь между фурье-образами заданной функции  $G$  и искомой функции  $f$ . Однако при  $k_\xi k_w < 0$  мы получили дополнительное ограничение на функцию  $\tilde{G}$ , которое необходимо учитывать при доопределении ее прообраза  $G(\xi, w)$  на область отрицательных аргументов. Чтобы понять суть этого ограничения, мы можем перенести неопределенность и ограничения функции  $G$  при  $\xi, w < 0$  в неопределенность и ограничения функции  $\tilde{G}$  в области  $k_\xi k_w \geq 0$ . Воспользуемся действительностью  $G(\xi, w)$  и  $f(x, y)$ , то есть  $\tilde{G}(k_\xi, k_w) = \tilde{G}^*(-k_\xi, -k_w)$  и  $\tilde{f}(k_x, y) = \tilde{f}^*(-k_x, y)$ , где звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения. Без потери общности будем считать, что функция распределения доопределена в нефизическую область симметричным образом:  $f(x, y) = f(-x, y)$ . Тогда комплексное преобразование Фурье переходит в косинус-преобразование (6),  $\tilde{f}(k_x, y) = \tilde{f}(-k_x, y)$  и  $\tilde{G}(k_\xi, k_w) = \tilde{G}(-k_\xi, -k_w)$ . Используя эти условия, имеем

$$G(\xi, w) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{G}(k_\xi, k_w) \times$$

$$\times \left( e^{ik_\xi \xi + ik_w w} + e^{-ik_\xi \xi - ik_w w} \right) dk_\xi dk_w =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{G}(k_\xi, k_w) \cos(k_\xi \xi + k_w w) dk_\xi dk_w.$$

Получившееся уравнение эквивалентно уравнению (6). Таким образом, если мы корректно определим функцию  $G(\xi, w)$  в области  $\xi, w < 0$ , то с помощью комплексного преобразования Фурье мы можем элементарно решить уравнение (4). Но сама задача корректного доопределения  $G(\xi, w)$

все равно сводится к решению интегрального уравнения (6), порожденного косинус-преобразованием Фурье.

#### 4. РЕШЕНИЕ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

Уравнение (6) сформулировано для неизвестной функции двух переменных. Несмотря на простой вид, нам не удалось найти это уравнение в математических справочниках. Тем не менее, его решение удастся построить, опираясь на технику, развитую для решения одномерных линейных интегральных уравнений 1-го рода [27].

Введем интегральное преобразование Меллина [28]

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{f}(s) x^{-s} ds.$$

Интеграл во втором выражении берется в смысле главного значения, а параметр  $\sigma$  принадлежит интервалу  $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ , границы которого определяются сходимостью интегралов

$$\int_0^1 f(x) x^{\sigma_1-1} dx < \infty, \quad \int_1^\infty f(x) x^{\sigma_2-1} dx < \infty.$$

Сходимость приведенных интегралов для некоторых  $\sigma_1, \sigma_2$  при  $\sigma_1 < \sigma_2$  является критерием применимости преобразования Меллина для функции  $f(x)$ .

Умножим левую и правую части уравнения (6) на  $\xi^{s_\xi-1} w^{s_w-1}$  и проинтегрируем по  $\xi$  и  $w$  от нуля до бесконечности, получим

$$\hat{G}(s_\xi, s_w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F_c(v, y) \times \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(v\xi + vw y) \xi^{s_\xi-1} w^{s_w-1} d\xi dw \right] dy dv. \quad (7)$$

В левой части уравнения (7) стоит двумерное преобразование Меллина для функции  $G(\xi, w)$

$$\hat{G}(s_\xi, s_w) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) \xi^{s_\xi-1} w^{s_w-1} d\xi dw, \quad (8)$$

обратное преобразование к которому также имеет вид

$$G(\xi, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_\xi-i\infty}^{\sigma_\xi+i\infty} \int_{\sigma_w-i\infty}^{\sigma_w+i\infty} \hat{G}(s_\xi, s_w) \xi^{-s_\xi} w^{-s_w} ds_w ds_\xi.$$

Диапазон изменения параметров  $\sigma_\xi = \text{Re}(s_\xi)$ ,  $\sigma_w = \text{Re}(s_w)$  мы определим после того, как закончим преобразование правой части уравнения (7).

Выражение в квадратных скобках в (7) является преобразованием Меллина для ядра интегрального преобразования (6). Преобразуем это выражение, перейдя к новым переменным интегрирования

$$\bar{\xi} = v\xi, \quad \bar{w} = vw y.$$

Теперь выражение в квадратных скобках можно посчитать, используя табличные преобразования Меллина для тригонометрических функций [28]:

$$\begin{aligned} [\dots] &= \frac{1}{v^{s_\xi+s_w} y^{s_w}} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(\bar{\xi} + \bar{w}) \bar{\xi}^{s_\xi-1} \bar{w}^{s_w-1} d\bar{\xi} d\bar{w} = \\ &= \frac{1}{v^{s_\xi+s_w} y^{s_w}} \int_0^\infty \int_0^\infty [\cos(\bar{\xi}) \cos(\bar{w}) - \sin(\bar{\xi}) \sin(\bar{w})] \times \\ &\quad \times \bar{\xi}^{s_\xi-1} \bar{w}^{s_w-1} d\bar{\xi} d\bar{w} = \frac{1}{v^{s_\xi+s_w} y^{s_w}} \Gamma(s_\xi) \Gamma(s_w) \times \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\pi}{2}(s_\xi + s_w)\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Gamma(\dots)$  обозначает гамма-функцию, а выкладки корректны при  $\text{Re}(s_\xi), \text{Re}(s_w) \in (0, 1)$ . После проведенных преобразований выражение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{G}(s_\xi, s_w) &= \frac{2}{\pi} \Gamma(s_\xi) \Gamma(s_w) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s_\xi + s_w)\right) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty F_c(v, y) v^{-s_\xi} y^{-s_w} dy dv. \end{aligned}$$

Оставшиеся интегралы представляют преобразование Меллина для фурье-образа функции распределения с аргументами

$$s_y = 1 - s_w, \quad s_v = 1 - s_\xi - s_w.$$

Таким образом, после преобразований Меллина изначальное интегральное уравнение представляет собой просто алгебраическое произведение образов с заменой переменных

$$\begin{aligned} \hat{G}(s_\xi, s_w) &= \frac{2}{\pi} \Gamma(s_\xi) \Gamma(s_w) \cos\left(\frac{\pi}{2}(s_\xi + s_w)\right) \times \\ &\quad \times \hat{F}_c(1 - s_\xi - s_w, 1 - s_w), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\hat{F}_c(s_v, s_y) = \int_0^\infty \int_0^\infty F_c(v, y) v^{s_v-1} y^{s_y-1} dv dy, \quad (11)$$

$$F_c(v, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_v-i\infty}^{\sigma_v+i\infty} \int_{\sigma_y-i\infty}^{\sigma_y+i\infty} \hat{F}_c(s_v, s_y) v^{-s_v} y^{-s_y} ds_y ds_v. \quad (12)$$

Определим необходимые ограничения на  $\text{Re}(s_y), \text{Re}(s_v)$ . Будем отталкиваться от уже имеющих ограничений, возникших для интеграль-

ного преобразования (9):  $\text{Re}(s_\xi), \text{Re}(s_w) \in (0,1)$ . Для преобразования Меллина (8) для функции  $G(\xi, w)$  такой диапазон параметров требует, чтобы положительно определенная функция  $G(\xi, w)$  не имела особенностей при  $\xi = 0$  и  $w = 0$ , а также спадала на бесконечности не медленнее, чем  $1/(\xi w)$ . Условия для преобразования Меллина (11) для функции  $F_c(v, y)$  определить немного сложнее, поскольку она не является положительно определенной. Выразим нужный нам интеграл через  $f(x, y)$

$$\int_0^\infty F_c(v, y) v^{s_v-1} dv = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \cos(xv) v^{s_v-1} dv dx = \Gamma(s_v) \cos(\pi s_v/2) \int_0^\infty f(x, y) x^{-s_v} dx.$$

Интеграл по  $v$  берется явно и соответствует преобразованию Меллина для  $\cos(xv)$  [28]. Сходимость интеграла по  $v$  требует дополнительного условия  $\text{Re}(s_v) > 0$ ; если оно выполнено, то с учетом условий  $\text{Re}(s_\xi), \text{Re}(s_w) \in (0,1)$  интеграл по  $x$  будет сходиться — при условии, что  $f(x, y)$  не имеет особенностей при  $x \rightarrow 0$  и спадает быстрее, чем  $1/x$  при  $x \rightarrow \infty$ . Рассматривая аналогично преобразование по  $y$ , получим, что для сходимости требуется, чтобы  $f(x, y)$  не имела особенностей при  $y \rightarrow 0$  и спадала быстрее, чем  $1/y$  при  $y \rightarrow \infty$ , при этом дополнительных ограничений на  $\text{Re}(s_y) \in (0,1)$  не возникает. Отметим, что накладываемые на функцию распределения условия выполняются автоматически, если наложить естественное физическое требование конечности числа частиц и суммарной кинетической энергии в системе. Далее можно показать, что если выполняются вышеперечисленные условия для  $f$ , то выполняются и аналогичные условия для функции  $G$ . В итоге, для применимости преобразований Меллина достаточно потребовать, чтобы константы в преобразованиях Меллина принадлежали следующим интервалам:

$$\text{Re}(s_y) \in (0,1), \quad \text{Re}(s_v) \in (0,1), \quad \text{Re}(s_y - s_v) \in (0,1). \tag{13}$$

Решение уравнения (6) можно представить в виде следующей последовательности линейных преобразований:

$$G(\xi, w) \xrightarrow{(8)} \hat{G}(s_\xi, s_w) \xrightarrow{(10)} \hat{F}_c(s_v, s_y) \xrightarrow{(12)} F_c(v, y) \xrightarrow{(5)} f(x, y),$$

над стрелками указан номер формулы, описывающей преобразование. В явном виде эта цепочка выражается как

$$f(x, y) = \int_0^\infty \int_{\sigma_v-i\infty}^{\sigma_v+i\infty} \int_0^\infty \int_{\sigma_y-i\infty}^{\sigma_y+i\infty} KG(\xi, w) d\xi dw ds_y ds_v dv, K = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\xi^{s_y-s_v-1} w^{-s_y} v^{-s_v} y^{-s_y} \cos(xv)}{\Gamma(s_y - s_v) \Gamma(1 - s_y) \sin(\pi s_v/2)}.$$

Смена порядка интегрирования позволяет получить решение в стандартной для линейного оператора форме в виде интегральной свертки

$$f(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(\xi, w, x, y) G(\xi, w) d\xi dw \tag{14}$$

с ядром

$$P(\xi, w, x, y) = \int_0^\infty \int_{\sigma_v-i\infty}^{\sigma_v+i\infty} \int_{\sigma_y-i\infty}^{\sigma_y+i\infty} K ds_y ds_v dv.$$

Последнее выражение можно упростить, поскольку, как уже отмечалось, интеграл по  $v$  берется явно и соответствует преобразованию Меллина для  $\cos(xv)$ , получающиеся при этом тригонометрические функции сокращаются и остается выражение

$$P(\xi, w, x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \times \int_{\sigma_v-i\infty}^{\sigma_v+i\infty} \int_{\sigma_y-i\infty}^{\sigma_y+i\infty} \xi^{s_y-s_v-1} x^{s_v-1} (wy)^{-s_y} \Gamma(1 - s_v) ds_y ds_v. \tag{15}$$

Заметим, что это выражение можно рассматривать как определение функции не четырех, а двух переменных, поскольку  $P\xi^2$  зависит только от комбинаций  $wy/\xi$  и  $x/\xi$ . В дальнейшем это свойство автомодельности нам не потребуется, однако оно позволяет табулировать ядро  $P(\xi, w, x, y)$  с помощью двумерной таблицы или интерполировать его с помощью функции двух переменных. На этом может основываться эффективный практический способ вычисления двумерной свертки (14).

Докажем, что получившийся обратный интегральный оператор действительно позволяет восстановить функцию  $f(x, y)$ . Применим оператор (14) с ядром (15) к функции  $G(\xi, w)$  наиболее общего вида (4):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) P(\xi, w, x, y) d\xi dw =$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(\xi + wy', y') dy' \right) \times \\
 &\times \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \xi^{s_y - s_v - 1} x^{s_v - 1} (wy)^{-s_y} \frac{\Gamma(1 - s_v)}{\Gamma(s_y - s_v) \Gamma(1 - s_y)} \times \\
 &\times ds_y ds_v d\xi dw.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Далее делаем замену переменных  $\xi = x' - wy'$  и меняем порядок интегрирования так, чтобы интегралы по  $x'$  и  $y'$  брались последними,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \xi^{s_y - s_v - 1} w^{-s_y} f(\xi + wy', y') dy' d\xi dw = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{x'/y'} (x' - wy')^{s_y - s_v - 1} w^{-s_y} f(x', y') dw dx' dy'.
 \end{aligned}$$

В получившемся выражении интеграл по  $w$  является известным табличным интегралом [28]

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{x'/y'} (x' - wy')^{s_y - s_v - 1} w^{-s_y} dw = \\
 &= y'^{s_y - s_v - 1} \left( \frac{x'}{y'} \right)^{-s_v} \frac{\Gamma(1 - s_y) \Gamma(s_y - s_v)}{\Gamma(1 - s_v)},
 \end{aligned} \tag{17}$$

сходящимся при  $\text{Re}(s_y - s_v) > 0, \text{Re}(1 - s_v) > 0, x'/y' > 0$ . Подставляя (17) в исходное выражение (16) получим, что все гамма-функции сокращаются, а из оставшейся части набираются прямое и обратное преобразование Меллина [28], образующие дельта-функцию:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) P(\xi, w, x, y) d\xi dw = \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \frac{1}{x'} \left( \frac{x}{x'} \right)^{s_v - 1} \frac{1}{y'} \left( \frac{y}{y'} \right)^{-s_y} \times \\
 &\times f(x', y') ds_y ds_v dx' dy' = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x', y') \delta(x - x')' \times \\
 &\times \delta(y - y') dx' dy' = f(x, y).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали верность восстановления исходного прообраза в пределах применимости преобразований Меллина. В Приложении читатель может найти еще несколько частных примеров восстановления функции распределения, которые возникли на пути поиска общего решения и показались нам достаточно интересными.

Нужно отметить, что математическое доказательство существования и единственности решений уравнения (6) для произвольного  $G$  достаточно трудоемко, поскольку это уравнение со знако-

переменным ядром [27]. Однако того факта, что в качестве  $G$  мы берем только функции, являющиеся образом для некоторой достаточно быстро убывающей функции  $f$ , возникающей из физической задачи, достаточно для того, чтобы наше решение существовало и определялось соотношениями (14) и (15).

### 5. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Хотя нам и удалось предъявить аналитическое выражение для обратного оператора в квадратурах, тем не менее, такое решение является во многом формальным и неудобным для реального применения. Поэтому мы предложим здесь еще один способ обращения уравнения (4).

По данной функции  $G(\xi, w)$  мы можем восстановить дискретный набор функций  $G_k(x)$ , определенный как

$$G_0(x) = G(x, 0),$$

$$G_1(x) = \lim_{w \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial w} G(\xi_1, w) d\xi_1,$$

$$G_k(x) = \lim_{w \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\xi_1} \dots \int_{-\infty}^{\xi_{k-1}} \frac{\partial^k}{\partial w^k} G(\xi_k, w) d\xi_k \dots d\xi_2 d\xi_1.$$

Легко показать, что

$$G_k(x) = \int_0^\infty y^k f(x, y) dy, \tag{18}$$

то есть эти функции описывают зависимости от переменной  $x$  моментов функции распределения по переменной  $y$  (напомним, что  $x$  и  $y$  есть, соответственно, кинетическая энергия продольного движения и циклотронного вращения частицы).

Из функции  $G_k$  можно составить линейные комбинации таким образом, чтобы под интегралом сформировались какие-либо ортогональные на интервале  $[0, \infty)$  полиномы. Рассмотрим в качестве базового примера полиномы Лагерра [29]

$$L_n(y) = \frac{e^y}{n!} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y} y^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} y^k,$$

с условием ортогональности

$$\int_0^\infty L_n(y) L_k(y) e^{-y} dy = \delta_{nk}.$$

Здесь  $\binom{n}{k}$  обозначает биномиальный коэффициент. Введем обозначение  $L_n[G_k(x)]$  – формальный полином Лагерра  $L_n(y)$ , в котором проведена

замена  $y^k \rightarrow G_k(x)$ . С учетом (18) получаем набор интегральных уравнений для  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$L_n[G_k(x)] = \int_0^\infty L_n(y) f(x, y) dy. \quad (19)$$

Переменная  $x$  стала здесь просто параметром, а по переменной  $y$  мы можем разложить функцию распределения по полной системе полиномов Лагерра:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) L_n(y) \exp(-y), \quad (20)$$

где  $f_n(x)$  – коэффициенты разложения, независимо определенные для каждого значения  $x$ . В силу ортогональности полиномов Лагерра уравнения (19) принимают вид

$$L_n[G_k(x)] = f_n(x).$$

Таким образом, мы построили решение уравнения (6) в виде

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} G_k(x) L_n(y) \exp(-y). \quad (21)$$

Получившийся ряд имеет важное свойство, обеспечивающее его эффективность при решении физической задачи. Частичная сумма из первых  $N$  членов по  $n$  дает функцию  $f_N$ , обладающую тем же набором первых  $N$  моментов по переменной  $y$ , что и искомая функция, то есть, если в соотношения (18) подставить  $f_N$ , то они будут выполняться строго при  $k = 0, 1, \dots, N-1$  для всех  $x$ . Соответственно, остаточный член  $f - f_N$  обладает нулевыми первыми  $N$  моментами. Например, учет только первых трех членов дает верные среднее значение и дисперсию распределений по  $y$ , зависящие от  $x$  как от параметра.

Обсудим сходимость получившегося ряда. Для этого достаточно рассмотреть аналог теоремы Парсеваля для разложения (20), следующий из условий ортогональности полиномов Лагерра,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^2(\xi, y) e^y dy &= \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty f_m(\xi) f_n(\xi) \int_0^\infty L_m(y) L_n(y) e^{-y} dy = \\ &= \sum_{m=0}^\infty f_m^2(\xi). \end{aligned}$$

Сумма квадратов коэффициентов разложения ограничена, только если сходится интеграл в левой части, то есть если функция  $f(x, y)$  спадает

по  $y$  быстрее, чем  $\exp(-y/2)$ . Для оценки скорости сходимости рассмотрим функцию вида

$$f = g(x) \exp(-ay). \quad (22)$$

Коэффициенты  $f_n(x)$  разложения (20) для этой функции

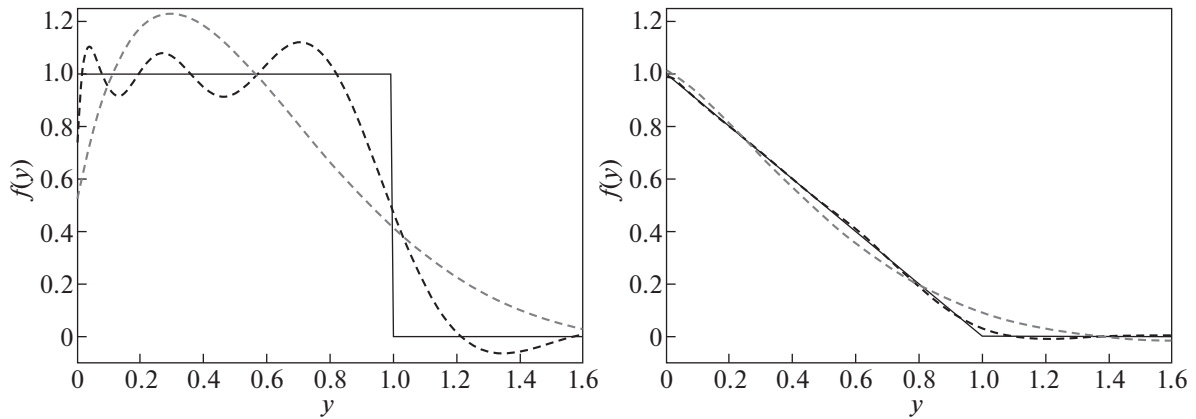
$$f_n(x) = \int_0^\infty L(y) \exp(-ay) dy g(x) = a^{-1} (1 - 1/a)^n g(x).$$

Видно, что при выполнении условия сходимости амплитуда коэффициентов экспоненциально уменьшается с ростом  $n$ . То есть для бесконечно гладкой функции коэффициенты ряда (21) уменьшаются в геометрической прогрессии. Иначе говоря, ряд если сходится, то сходится быстро. В случае, когда есть разрыв значения функции или ее первой производной, скорость сходимости также можно оценить на конкретных примерах. Рассмотрим разложение по полиномам Лагерра для модельных функций  $g_0 = \text{St}(1 - y)$ , имеющей разрыв значения, и  $g_1 = (1 - y)\text{St}(1 - y)$ , имеющей разрыв первой производной; здесь

$$\text{St}(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

На рис. 1 показаны частичные суммы первых 11 и 101 членов ряда для функции  $g_0$  (слева) и  $g_1$  (справа). Видно, что для функции с разрывом значения учет даже сотни слагаемых ряда не дает удовлетворительной сходимости, а для функции с разрывом производной удовлетворительная сходимость достигается уже для десяти слагаемых, а сотня слагаемых повторяет функцию практически идеально.

Заметим, что расходимость ряда (21) для функций распределения со степенными хвостами вытекает из самой схемы построения нашего решения, которая требует сходимости набора интегралов (18). Для восстановления функций распределения со степенными хвостами  $f(x, y) \sim 1/y^\alpha$  мы не можем использовать члены ряда с  $k > \alpha - 1$ . Тем не менее, даже в тех случаях, когда наш ряд формально не сходится из-за обращения в бесконечность высоких моментов исходной функции, мы можем использовать конечное число конечных членов ряда (21) для удовлетворительного приближенного решения исходной задачи. С физической точки зрения это не удивительно, поскольку у приближенной функции распределения все младшие моменты гарантированно совпадают с точными значениями для восстанавливаемой функции  $f$ . Процедура построения приближенного решения с использованием конечного числа членов ряда рассмотрена в следующем разделе.



**Рис. 1.** Частичные суммы первых 11 и 101 членов ряда (21) для функций  $g_0$  (слева) и  $g_1$  (справа). Сплошной черной линией показаны исходные функции, серыми штриховыми линиями показаны суммы первых 11 членов ряда, черными штриховыми – суммы первых 101 члена ряда.

### 6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО КОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ ЧЛЕНОВ РЯДА

Для того чтобы донести идею, развиваемую ниже, начнем с простого частного случая. У нас есть определенный произвол при выборе системы ортогональных полиномов. В частности, мы можем воспользоваться вместо  $L_n(y)$  полиномами  $L_n(\beta y)$ , где  $\beta > 0$  не зависит от  $y$ . С учетом перемасштабированного соотношения ортогональности, нетрудно получить набор различных эквивалентных записей ряда (21) с дополнительным свободным параметром  $\beta$ :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \beta^{k+1} G_k(x) \times L_n(\beta y) \exp(-\beta y). \quad (23)$$

Этот ряд наследует основное свойство разложения (21) – частичная сумма из первых  $N$  членов дает приближенную функцию  $f_N$ , воспроизводящую точно первые  $N$  моментов по переменной  $y$ , то есть

$$\int_0^{\infty} y^k f_N(x, y) dy = \int_0^{\infty} y^k f(x, y) dy, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

при этом остаточный член обладает нулевыми первыми  $N$  моментами.

Видно, что подбирая  $\beta$  можно обеспечить сходимость полученного ряда для любой экспоненциально спадающей функции  $f$ , включая те, для которых исходный ряд (21) расходится. Более того, нетрудно видеть, что все функции вида (22) будут точно описываться одним членом ряда (23), если  $\beta = a$ . В реальной задаче мы априори не знаем функцию  $f$ , более того, асимптотика этой функции при  $y \rightarrow \infty$  скорее всего не является экспоненциальной. Тем не менее, свобода выбора

параметра  $\beta$  и тут позволяет оптимизировать сходимость бесконечного ряда (23) для  $f$  и уменьшить ошибку приближенного решения  $f_N$ , связанную с отбрасыванием остаточного члена. Такое отбрасывание в реальной задаче в первую очередь связано с естественной ограниченностью экспериментальных данных, которые мы не можем бесконечно дифференцировать, надеясь извлечь из этого какую-то информацию. При этом возникает задача оптимизации восстановления функции распределения в ситуации, когда доступно только конечное число членов ряда  $G_n$ . Для ее решения можно предложить следующий подход. Учтем первые  $N$  членов разложения, а выбором  $\beta$  добьемся, чтобы  $(N + 1)$ -й член разложения был равен нулю. Это предполагает решение алгебраического уравнения

$$\sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} \frac{(-1)^k}{k!} G_k(x) \beta^k = 0 \quad (24)$$

для величины  $\beta$  при каждом значении  $x$ . Полученная приближенная функция будет состоять из  $N$  членов разложения и точно воспроизводить  $N + 1$  первых моментов функции распределения по переменной  $y$ . Если вспомнить смысл переменных  $x$  и  $y$ , то уравнение (24) можно интерпретировать с физической точки зрения как уравнение для эффективной поперечной температуры, наиболее точно описывающей распределение частиц с заданной продольной энергией.

Приведенный метод можно усовершенствовать, если в качестве системы ортогональных полиномов взять обобщенные полиномы Лагерра, определенные как

$$L_n^{(\alpha)}(y) = \frac{y^{-\alpha} e^y}{n!} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y} y^{n+\alpha}) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} y^k,$$

где  $\binom{n+\alpha}{n-k}$  обозначает обобщенные биномиальные коэффициенты [30]. Возьмем в качестве базиса разложения набор полиномов  $L_n^{(\alpha)}(\beta y)$ , удовлетворяющих соотношению ортогональности

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(\beta y) L_k^{(\alpha)}(\beta y) y^\alpha e^{-\beta y} dy = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1} n!} \delta_{nk}.$$

Тогда разложение искомой функции примет вид

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) L_n^{(\alpha)}(\beta y) y^\alpha e^{-\beta y}, \\ f_n(x) &= \frac{\beta^{\alpha+1} n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}[\beta^k G_k(x)], \end{aligned} \quad (25)$$

где  $L_n^{(\alpha)}[\beta^k G_k(x)]$  мы понимаем как выражение, получаемое из полинома  $L_n^{(\alpha)}(y)$  в результате формальной замены  $y^k \rightarrow \beta^k G_k(x)$ . Полученный ряд сходится в широком диапазоне параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для достаточно быстро спадающей на бесконечности функции  $f(x, y)$ . Это позволяет нам, варьируя эти параметры, оптимизировать приближение функции распределения конечным числом членов ряда, при этом мы можем варьировать эти параметры для каждого значения  $x$  независимо.

Как и раньше, частичная сумма  $f_N$  первых  $N$  членов ряда (25) точно воспроизводит первые  $N$  моментов искомой функции при любых  $\alpha$  и  $\beta$ . Потребуем теперь, чтобы  $(N+1)$ -й и  $(N+2)$ -й члены ряда строго равнялись нулю. Это приведет к алгебраической системе

$$\begin{cases} L_{N+1}^{(\alpha)}[\beta^k G_k(x)] = 0 \\ L_{N+2}^{(\alpha)}[\beta^k G_k(x)] = 0 \end{cases}, \quad (26)$$

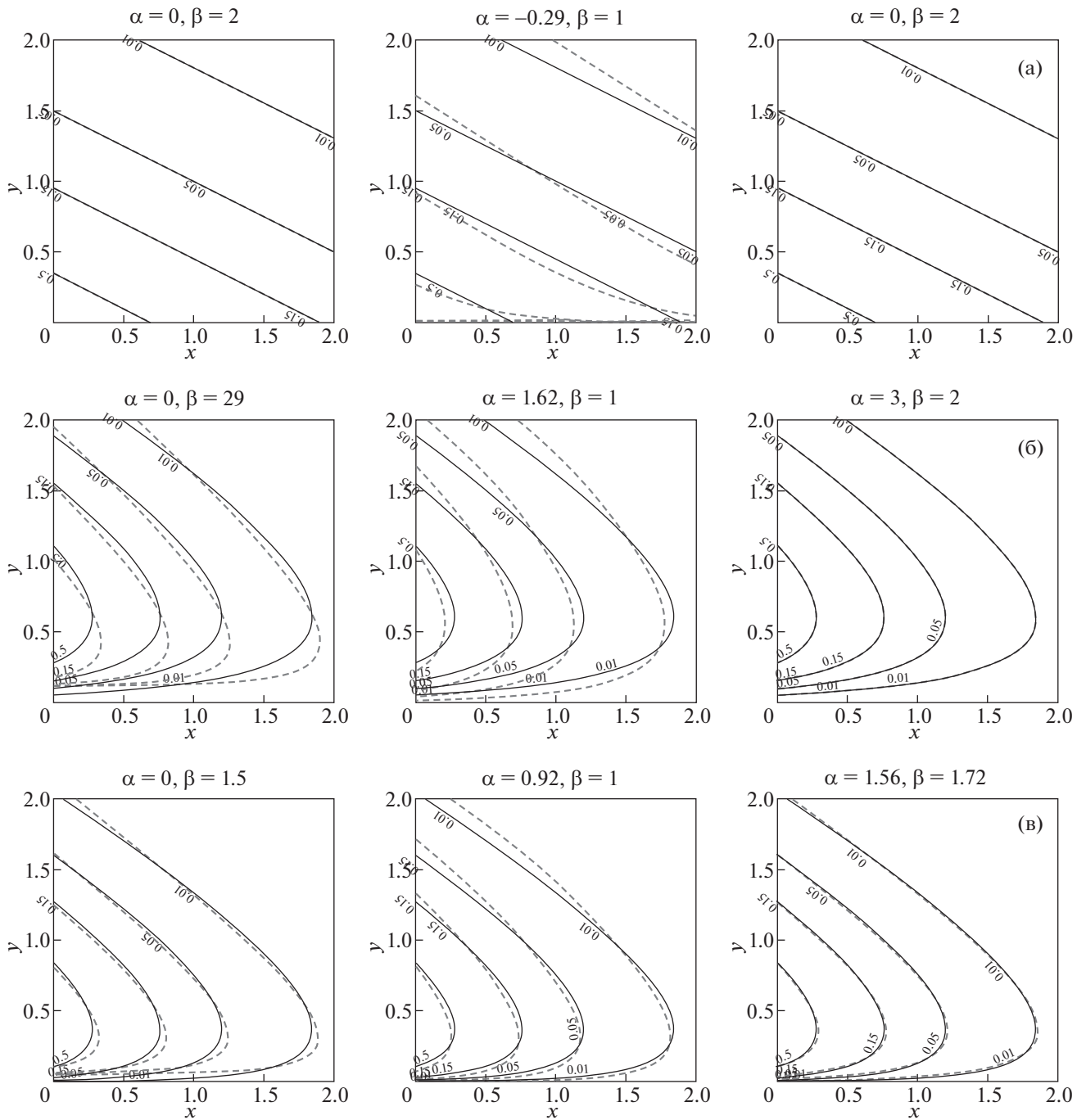
определяющей параметры  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  для каждого значения  $x$  независимо. Соответствующая этому выбору параметров приближенная функция  $f_N$  будет точно воспроизводить уже  $N+2$  момента функции распределения.

Разложение по обобщенным полиномам Лагерра позволяет учесть специфику распределения частиц в адиабатической магнитной ловушке, а именно, распределения с незаполненным конусом потерь. Напомним, что  $y$  соответствует кинетической энергии поперечного движения (вращения) частицы. Поэтому распределения с конусом потерь хорошо моделируются функциями вида  $y^\alpha \exp(-\beta y)$ , которые можно описать точно одним членом ряда (25). Можно ожидать, что при восстановлении функции распределения с обедненным распределением ионов в области потерь по реальным данным разложение (25) позволит

обеспечить заданную точность меньшим числом членов ряда, чем разложение (23), опирающееся на “менее физические” базисные функции.

Рассмотрим на примерах, как работает восстановление функции распределения через разложение по полиномам Лагерра с одним варьирующимся масштабом  $\beta$  и через обобщенные полиномы Лагерра с двумя варьирующимися параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Процедура проверки все время одинаковая: по заданной аналитически функции  $f(x, y)$  рассчитываем диагностический отклик  $G(\xi, w)$ , вычисляем моменты  $G_k(x)$ , а затем применяем решения (23) или (25) с конечным числом членов ряда. Мы всегда рассматриваем три члена с учетом принудительно зануляемых, то есть восстановленная приближенная функция содержит максимум два слагаемых, если варьируется один параметр разложения, и всего одно слагаемое, если варьируются два параметра разложения. Даже в таких жестких условиях уравнения (24) или (26) гарантируют, что первые три момента, то есть число частиц, полная энергия циклотронного вращения и ее дисперсия восстанавливаются точно для каждой группы частиц, имеющих заданную продольную скорость.

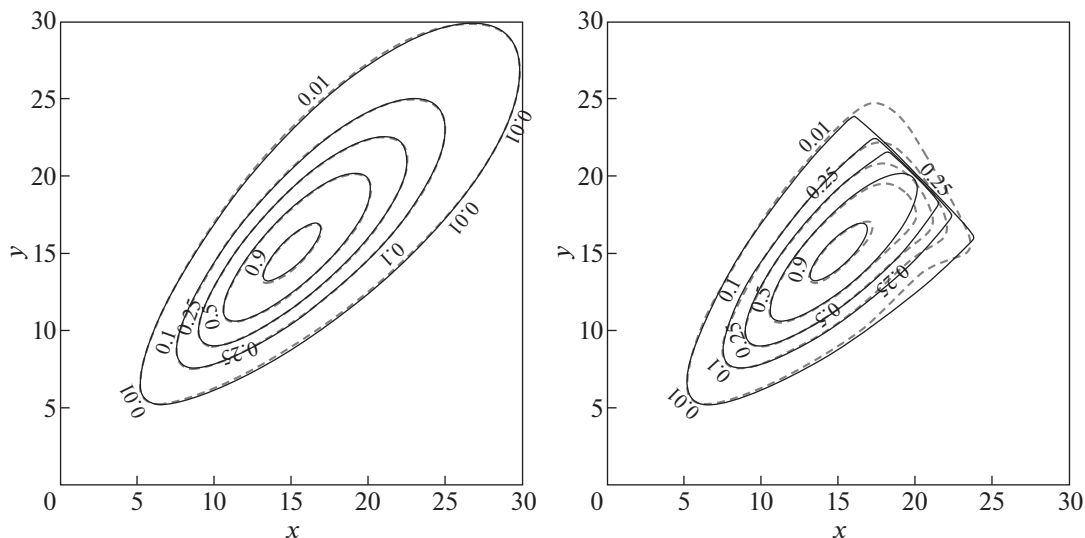
На рис. 2 представлены результаты восстановления распределений вида  $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$ . В данном случае множитель, отвечающий за зависимость от  $x$ , восстанавливается точно конечной суммой ряда, при этом параметры  $\alpha$  и  $\beta$  одинаковы при всех  $x$ . Рисунок 2а относится к элементарному случаю анизотропного максвелловского распределения, для которого первый член разложения (25) дает точный ответ при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 2$  (одинаковые графики слева и справа). Если же зафиксировать “неправильную” поперечную температуру  $\beta = 1$  и оптимизировать параметр  $\alpha$ , то первые два члена разложения обеспечивают относительную точность на уровне 5% во всей “тепловой области”  $|x + y| < 3$  (график в центре, относительная точность определяется по максимальному относительному сдвигу линий уровня). Случай (б) отвечает максвелловскому распределению с конусом потерь, для которого первый член разложения (25) дает точный ответ при  $\alpha = 3$  и  $\beta = 2$  (график справа). Остальные два метода (слева – подгонка поперечной температуры  $\beta$  при  $\alpha = 0$  и в центре – подгонка  $\alpha$  при навязанной неправильной температуре  $\beta = 1$ ) позволяют удовлетворительно восстановить функцию распределения всего по двум членам разложения. Случай (в) тоже отвечает максвелловскому распределению с конусом потерь, но более сложного вида. Теперь мы уже не можем точно восстановить функцию распределения одним членом ряда. Видно, что оптимизация одновременно по двум параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ , приводящая к простой



**Рис. 2.** Примеры восстановления по первым членам ряда (25) для модельных функций распределения: а)  $f(x, y) = \exp(-x - 2y)$ , б)  $f(x, y) = y^3 \exp(-x - 2y)$ , в)  $f(x, y) = (0.5y + y^2 + 0.3y^3) \exp(-x - 2y)$  для трех способов оптимизации: по  $\beta$  при  $\alpha = 0$  (слева), по  $\alpha$  при  $\beta = 1$  (в центре) и по обоим параметрам  $\alpha$  и  $\beta$  (справа). Сплошные черные линии соответствуют линиям уровня исходной функции, штриховые – линиям уровня восстановленных функций. Получившиеся в результате оптимизации параметры разложения приведены на каждом графике сверху.

формуле  $f(x, y) \approx 1.41 y^{1.56} \exp(-x - 1.72 y)$  (график справа), дает лучшее приближение, чем двухчленные приближения, получаемые в результате оптимизации по каждому из параметров по от-

дельности (слева и в центре). Таким образом, на приведенных “учебных” примерах мы убедились, что разложение (25) с дополнительным свободным параметром позволяет существенно повы-



**Рис. 3.** Восстановление функции распределения пучка ионов по первому члену ряда (25) в случае оптимизации по обоим параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . Левый график соответствует гладкому распределению (27), правый график – распределению с разрывом (28). Параметры распределений  $\varepsilon = 30$ ,  $\delta\varepsilon = 1$ ,  $\delta\theta = 0.3$ ,  $\varepsilon_m = 40$ . Сплошные черные линии соответствуют линиям уровня исходной функции, штриховые – линиям уровня восстановленных функций.

сдать точность восстановления по сравнению с однопараметрическим разложением (23).

Теперь рассмотрим пример, моделирующий физическую задачу. На рис. 3 приведены линии уровня функции распределения, описывающей горячие ионы, рождающиеся в результате обдирки нейтрального пучка, введенного в плазму под углом  $45^\circ$  к магнитному полю, и последующей кулоновской релаксации, – случай, отвечающий условиям эксперимента на установке ГДЛ. Исходная функция распределения задается либо анизотропным максвелловским распределением, сдвинутым в точку, отвечающую скорости нейтральных атомов (график слева),

$$f_1(x, y) = \exp\left(-\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{2\varepsilon})^2}{2\delta\varepsilon} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2\delta\varepsilon\delta\theta^2}\right), \quad (27)$$

либо таким же распределением, но обрезанным со стороны высоких энергий (график справа),

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) \text{St}(\varepsilon_m - x - y). \quad (28)$$

Второе распределение моделирует особенности релаксации функции распределения за счет кулоновских столкновений с частицами фоновой плазмы, при которых доминирующими эффектами являются диффузия по направлениям скорости и потери энергии за счет трения. В отличие от рассмотренных выше, данные распределения уже не являются факторизованными, поэтому при восстановлении мы провели оптимизацию по  $\alpha$  и  $\beta$  отдельно для каждого значения  $x$ . Результаты

восстановления изображены на графиках штриховыми линиями уровня. Точность восстановления функции  $f_1$  с использованием всего одного члена ряда (25) составляет около 1%. Видно, что для функции с разрывом  $f_2$  восстановление несколько хуже, однако его точность все равно достаточно велика. Например, наиболее трудно восстанавливаемый этим методом параметр – положение разрыва, отвечающего максимальной энергии  $\varepsilon_m$ , – восстанавливается с точностью около 5% при определении максимальной энергии по уровню функции распределения 0.01. Отметим также, что получаемое из малого числа членов оптимизированного ряда приближение для функции с разрывом положительно определено, в отличие от результата, получаемого путем суммирования большого числа членов неоптимизированного ряда (рис. 1). Напомним, что метод автоматически обеспечивает верные значения для числа частиц, поперечной энергии и ее дисперсии при каждом значении продольной скорости частицы.

В целом, обобщая наш опыт применения указанного метода к различным функциям распределения, можно сформулировать следующее эмпирическое заключение. Если выбором  $\alpha$  и  $\beta$  добиться того, что два последовательных члена ряда (25) равны нулю, то сумма всех последующих ненулевых членов ряда будет мала по сравнению с  $f_N$ , или, другими словами, сумма первых ненулевых членов будет хорошо повторять искомую функцию. Это утверждение верно и для отдельных функций с “патологическими” особенностями

ми, например, для функций со степенными хвостами, для которых все старшие моменты начиная с некоторого расходятся.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы исследовали возможность восстановления полной двумерной функции распределения энергичных ионов по скоростям в открытой магнитной ловушке по измерениям спектров коллективного томсоновского рассеяния в одной геометрии рассеяния, но в разных сечениях ловушки, отвечающих разным значениям магнитного поля. Видно, что в предположении об адиабатическом характере движения ионов в ловушке такой серии измерений достаточно для того, чтобы восстановить функцию распределения полностью.

Задача восстановления сводится к решению интегрального уравнения, для которого предложено два метода решения. Оба предъявленных аналитических метода: через преобразование Меллина и через разложение по ортогональным полиномам, — допускают реализацию на практике, — однако метод разложения по ортогональным полиномам выглядит несколько более предпочтительно с точки зрения физической обоснованности и удобства реализации. При использовании разложения по ортогональным полиномам каждый член ряда отвечает за восстановление соответствующего момента функции распределения. Естественно, что поиск решения в виде ряда имеет и свои недостатки, к которым можно отнести необходимость вычисления производных все более высокого порядка от экспериментальных данных для вычисления членов ряда. При этом возникает проблема оптимизации процедуры восстановления функции распределения при принципиальной доступности из экспериментальных данных только конечного числа членов бесконечного ряда. Возможности такой оптимизации рассмотрены в данной статье на примере случая, когда нам доступны только три члена ряда, что требует вычисления первой и второй производной от экспериментальных данных. Показана возможность очень хорошего восстановления модельных функций распределения за счет выбора масштаба и порядка обобщенных полиномов Лагерра.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 19-72-20139.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь рассмотрены примеры восстановления функции распределения через преобразование Меллина, допускающие полностью аналитическое вычисление. Эти частные примеры появились в ходе проверки предлагаемых в статье фор-

мул (14), (15) до того, как нами было получено общее формальное доказательство, изложенное в статье. Также они могут оказаться полезными для тестов в процессе практической реализации предлагаемого метода.

**I. Дельта-функция.** Рассмотрим функцию распределения, соответствующую моноскоростному пучку ионов,

$$f(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0).$$

Функция  $G(\xi, w)$  принимает вид

$$G = \delta(\xi + wy_0 - x_0).$$

Применим обратный интегральный оператор (14) к функции  $G(\xi, w)$ . Получим цепочку выражений

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) P(\xi, w, x, y) d\xi dw = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(\xi + wy_0 - x_0) \times \\ & \times \frac{\xi^{s_y - s_v - 1} x^{s_v - 1} (wy)^{-s_y} \Gamma(1 - s_v)}{\Gamma(s_y - s_v) \Gamma(1 - s_y)} d\xi dw ds_y ds_v = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \frac{1}{x_0 y_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{s_v - 1} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-s_y} ds_y ds_v = \\ & = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \end{aligned}$$

Интеграл по  $\xi$  соответствует уже использовавшемуся табличному интегралу (17) и берется при условии  $\text{Re}(s_y - s_v) > 0$  и  $\text{Re}(s_y) < 1$ , а последнее равенство следует из преобразования Меллина для дельта-функции (строгое доказательство того, что полученный интеграл является дельта-функцией, можно найти в [31]).

**II. Анизотропная максвелловская функция распределения.** Рассмотрим функцию распределения

$$f(x, y) = \alpha \exp(-x - \alpha y).$$

Отвечающая ей функция  $G(\xi, w)$  имеет вид

$$G(\xi, w) = \frac{\exp(-\xi)}{1 + w/\alpha}.$$

Далее используем табличные интегралы [28]

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \xi^{s_y - s_v - 1} \exp(-\xi) d\xi = \Gamma(s_y - s_v), \\ & \int_0^\infty \frac{w^{-s_y}}{\alpha + w} dw = \frac{\pi \alpha^{-s_y}}{\sin(\pi s_y)} \end{aligned} \tag{П1}$$

(формулы справедливы при  $\text{Re}(s_y - s_v) > 0$  и  $\text{Re}(s_y) \in (0, 1)$ ). В результате при применении обратного интегрального оператора (14) к функции  $G(\xi, w)$  получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) P(\xi, w, x, y) d\xi dw = \\ & = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \int_0^\infty \frac{\exp(-\xi)}{\alpha + w} \times \\ & \times \frac{\xi^{s_y - s_v - 1} x^{s_v - 1} (wy)^{-s_y} \Gamma(1 - s_v)}{\Gamma(s_y - s_v) \Gamma(1 - s_y)} d\xi dw ds_y ds_v = \\ & = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} x^{s_v - 1} (\alpha y)^{-s_y} \Gamma(1 - s_v) \Gamma(s_y) ds_y ds_v = \\ & = \alpha \exp(-x - \alpha y). \end{aligned}$$

В ходе выкладок также использовались соотношения  $\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\pi/(z \sin(\pi z))$  и  $z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$ , последнее равенство следует из известного преобразования Меллина для экспоненты [28]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} x^{-s} \Gamma(s) ds = \exp(-x),$$

справедливого при  $\text{Re}(s) > 0$ ; или  $\text{Re}(s_y) > 0$ ,  $\text{Re}(s_v) < 1$ . Как видно, последние ограничения лежат в области (13).

**III. Изотропная степ-функция.** Рассмотрим функцию распределения с разрывом, заданную выражением

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y < a \\ 0, & x + y > a \end{cases}.$$

Соответствующая ей функция  $G(\xi, w)$  имеет вид

$$G(\xi, w) = \begin{cases} \frac{a - \xi}{1 + w}, & \xi < a \\ 0, & \xi > a \end{cases}.$$

Применим обратный интегральный оператор (14) к функции  $G(\xi, w)$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) P(\xi, w, x, y) d\xi dw = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \int_0^a \frac{a - \xi}{1 + w} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\xi^{s_y - s_v - 1} x^{s_v - 1} (wy)^{-s_y} \Gamma(1 - s_v)}{\Gamma(s_y - s_v) \Gamma(1 - s_y)} d\xi dw ds_y ds_v = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \frac{x^{s_v - 1} y^{-s_y} a^{1 + s_y - s_v} \Gamma(s_y) \Gamma(1 - s_v)}{\Gamma(2 + s_y - s_v)} ds_y ds_v. \end{aligned}$$

Здесь интеграл по  $\xi$  соответствует интегралу (17), который берется при условии  $\text{Re}(s_y - s_v) > 0$ , а интеграл по  $w$  соответствует интегралу (П1), который берется при условии  $\text{Re}(s_y) \in (0, 1)$ . Далее берем интеграл по  $s_y$ , используя табличный интеграл [28]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_y - i\infty}^{\sigma_y + i\infty} \frac{\Gamma(s_y) z^{-s_y}}{\Gamma(s_y + 2 - s_v)} ds_y = \\ & = \begin{cases} (1 - z)^{1 - s_v} / \Gamma(2 - s_v), & z \in (0, 1) \\ 0, & z \in (1, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

(справедливо при  $\text{Re}(s_y) > 0$ ,  $\text{Re}(2 - s_v) > 0$ ). В итоге имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty G(\xi, w) P(\xi, w, x, y) d\xi dw = \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma_v - i\infty}^{\sigma_v + i\infty} \left(\frac{x}{a - y}\right)^{s_v - 1} \frac{1}{1 - s_v} ds_v, \quad y \in (0, a), \end{aligned}$$

что соответствует известному преобразованию Меллина для степ-функции [28]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^{-s}}{s} ds = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

справедливого при  $\text{Re}(s) > 0$ . Это соответствует  $\text{Re}(s_v) < 1$ , то есть не противоречит никаким ограничениям на  $s_v$ , оговоренным выше. После простого преобразования области определения получается ответ:

$$\int_0^a \int_0^a \frac{a - \xi}{1 + w} P(\xi, w, x, y) d\xi dw = \begin{cases} 1, & x + y < a \\ 0, & x + y > a \end{cases}.$$

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Bindslev H.* // Rev. Sci. Instrum. 1999. V. 70. P. 1093. <https://doi.org/10.1063/1.1149521>
2. *Machuzak J.S., Woskov P.P., Gilmore J., Bretz N.L., Park H.K., Bindslev H.* // Rev. Sci. Instrum. 1997. V. 68. P. 458. <https://doi.org/10.1063/1.1147605>
3. *Bindslev H., Hoekzema J.A., Egedal J., Fessey J.A., Hughes T.P., Machuzak J.S.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3206. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3206>



4. *Porte L., Bindslev H., Hoekzema F., Machuzak J., Woskov P., Van Eester D.* // *Rev. Sci. Instrum.* 2001. V. 72. P. 1148.  
<https://doi.org/10.1063/1.1322617>
5. *Meo F., Bindslev H., Korsholm S.B., Tsakadze E.L., Walker C.I., Woskov P., Vayakis G.* // *Rev. Sci. Instrum.* 2004. V. 75. P. 3585.  
<https://doi.org/10.1063/1.1788853>
6. *Korsholm S.B., Bindslev H., Meo F., Leipold F., Michelsen P.K., Michelsen S., Nielsen S.K., Tsakadze E.L., Woskov P., Westerhof E., FOM ECRH team, Oosterbeek J.W., Hoekzema J., Leuterer F., Wagner D., ASDEX Upgrade ECRH team* // *Rev. Sci. Instrum.* 2006. V. 77. 10E514.  
<https://doi.org/10.1063/1.2217921>
7. *Stejner M., Nielsen S.K., Korsholm S.B., Salewski M., Bindslev H., Furtula V., Leipold F., Meo F., Michelsen P.K., Moseev D., Bürger A., Kantor M., de Baar M.* // *Rev. Sci. Instrum.* 2010. V. 81. 10D515.  
<https://doi.org/10.1063/1.3475540>
8. *Meo F., Bindslev H., Korsholm S.B., Furtula V., Leuterer F., Leipold F., Michelsen P.K., Nielsen S.K., Salewski M., Stober J., Wagner D., Woskov P.* // *Rev. Sci. Instrum.* 2008. V. 79. 10E501.  
<https://doi.org/10.1063/1.2989140>
9. *Suvorov E.V., Holzhauser E., Kasperek W., Lubyako L.V., Burov A.B., Dryagin Y.A., Fil'chenkov S.E., Fraiman A.A., Kukin L.M., Kostrov A.V., Ryndyk D.A., Shtanyuk A.M., Skalyga N.K., Smolyakova O.B., Erckmann V., Geist T., Kick M., Laqua H., Rust M., W7-AS Team, ECRH Team and NBI Team* // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 1997. V. 39(12B). P. B337.  
<https://doi.org/10.1088/0741-3335/39/12B/026>
10. *Suvorov E.V., Holzhauser E., Kasperek W., Burov A.B., Dryagin Y.A., Fil'chenkov S.E., Fraiman A.A., Lubyako L.V., Ryndyk D.A., Skalyga N.K., Smolyakova O.B., Erckmann V., Geist T., Kick M., Rust N., W7-AS Team and ECRH Team* // *Nucl. Fusion.* 1998. V. 38(5). P. 661.  
<https://doi.org/10.1088/0029-5515/38/5/302>
11. *Shalashov A.G., Suvorov E.V., Lubyako L.V., Maassberg H. and W7-AS Team* // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2003. V. 45. P. 395.  
<https://doi.org/10.1088/0741-3335/45/4/306>
12. *Kubo S., Nishiura M., Tanaka K., Shimosuma T., Yoshimura Y., Igami H., Takahashi H., Mutoh T., Tamura N., Tatsumatsu Y., Saito T., Notake T., Korsholm S.B., Meo F., Nielsen S.K., Salewski M., Stejner M.* // *Rev. Sci. Instrum.* 2010. V. 81. 10D535.  
<https://doi.org/10.1063/1.3481165>
13. *Laqua H.P., Baldzuhn J., Braune H., Bozhenkov S., Brunner K.J., Kazakov Ye.O., Marsen S., Moseev D., Stange T., Wolf R.C., Zanini M., W7-X Team* // *European Physical Journal Conferences.* 2018. V. 187(2). 01011.  
<https://doi.org/10.1051/epjconf/201818701011>
14. *Moseev D., Salewski M., Garcia-Muñoz M., Geiger B., Nocente M.* // *Rev. Mod. Plasma Phys.* 2018. V. 2. 7.  
<https://doi.org/10.1007/s41614-018-0019-4>
15. *Bindslev H., Meo F., Tsakadze E.L., Korsholm S.B., Woskov P.* // *Rev. Sci. Instrum.* A. 2004. V. 75(10). P. 3598.  
<https://doi.org/10.1063/1.1779620>
16. *Bagryansky P.A., Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Lizunov A.A., Maximov V.V., Prikhodko V.V., Soldatkina E.I., Solomakhin A.L., Yakovlev D.V.* // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 114 (20). 205001.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.205001>
17. *Bagryansky P.A., Anikeev A.V., Denisov G.G., Gospodchikov E.D., Ivanov A.A., Lizunov A.A., Kovalenko Yu.V., Malygin V.I., Maximov V.V., Korobeinikova O.A., Murakhtin S.V., Pinzhenin E.I., Prikhodko V.V., Savkin V.Ya., Shalashov A.G., Smolyakova O.B., Soldatkina E.I., Solomakhin A.L., Yakovlev D.V., Zaytsev K.V.* // *Nucl. Fusion.* 2015. V. 55(5). 053009.  
<https://doi.org/10.1088/0029-5515/55/5/053009>
18. *Yakovlev D.V., Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Maximov V.V., Prikhodko V.V., Savkin V.Ya., Soldatkina E.I., Solomakhin A.L., Bagryansky P.A.* // *Nucl. Fusion.* 2018. V. 58. 094001.  
<https://doi.org/10.1088/1741-4326/aac888>
19. *Simonen T.C.* // *J. Fusion Energy.* 2016. V. 35(1). P. 63.  
<https://doi.org/10.1007/s10894-015-0017-2>
20. *Gota H., Binderbauer M.W., Tajima T., Putvinski S., Tuszewski M., Dettrick S., Garate E., Korepanov S., Smirnov A., Thompson M.C., Trask E., Yang X., Schmitz L., Lin Z., Ivanov A.A., Asai T., Allfrey I., Andow R., Beall M., Bolte N., Bui D.Q., Cappello M., Ceccherini F., Clary R., Cheung A.H., Conroy K., Deng B.H., Douglass J., Dunaevsky A., Feng P., Fulton D., Galeotti L., Granstedt E., Griswold M., Gupta D., Gupta S., Hubbard K., Isakov I., Kinley J.S., Knapp K., Magee I R., Matvienko V., Mendoza R., Mok Y., Necas A., Primavera S., Onofri M., Osin D., Rath N., Roche T., Romero J., Schindler T., Schroeder J.H., Sevier L., Sheftman D., Sibley A., Song Y., Steinhauer L.C., Valentine T., Van Drie A.D., Walters J.K., Waggoner W., Yushmanov P., Zhai K., the TAE Team* // *Nucl. Fusion.* 2017. V. 57. 116021.  
<https://doi.org/10.1088/1741-4326/aa7d7b>
21. *Bagryansky P.A., Beklemishev A.D., Postupaev V.V.* // *J. Fusion Energy.* 2019. V. 38. P. 162.  
<https://doi.org/10.1007/s10894-018-0174-1>
22. *Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Khusainov T.A., Lubyako L.V., Smolyakova O.B., Solomakhin A.L.* // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2020. V. 62. 065010.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6587/ab83cc>
23. *Ivanov A.A., Prikhodko V.V.* // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 2013. V. 55. 063001.  
<https://doi.org/10.1088/0741-3335/55/6/063001>
24. *Salewski M., Nielsen S.K., Bindslev H., Furtula V., Gorelenkov N.N., Korsholm S.B., Leipold F., Meo F., Michelsen P.K., Moseev D., Stejner M.* // *Nucl. Fusion.* 2011. V. 51. 083014.  
<https://doi.org/10.1088/0029-5515/51/8/083014>

25. *Salewski M., Geiger B., Nielsen S.K., Bindslev H., García-Muñoz M., Heidbrink W.W., Korsholm S.B., Leipold F., Meo F., Michelsen P.K., Moseev D., Stejner M., Tardini G., the ASDEX Upgrade team* // Nucl. Fusion. 2012. V. 52. 103008.  
<https://doi.org/10.1088/0029-5515/52/10/103008>
26. Юшманов Е.Е. // ЖЭТФ. 1966. Т. 49. С. 588. [E.E. Yushmanov // J. Exp. Theoret. Phys. (U.S.S.R.). 1966. V. 22. P. 409]
27. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
29. Бейтмен Г., Эрдейи А. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
30. Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series. Washington, D.C., New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, Dover Publications, 1983.
31. Bracewell R. The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1999.

## МЕТОДЫ НАГРЕВА ПЛАЗМЫ

УДК 533.9.07

### МОЩНЫЙ АТОМАРНЫЙ ИНЖЕКТОР С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ ЭНЕРГИЕЙ ПУЧКА ДЛЯ НАГРЕВА И СТАБИЛИЗАЦИИ ПЛАЗМЫ

© 2021 г. А. В. Бруль<sup>а,\*</sup>, А. Г. Абдрашитов<sup>а</sup>, В. Х. Амиров<sup>а</sup>, В. П. Белов<sup>а</sup>, Р. В. Вахрушев<sup>а</sup>,  
А. И. Горбовский<sup>а</sup>, А. Н. Драничников<sup>а</sup>, В. И. Давыденко<sup>а</sup>, П. П. Дейчули<sup>а</sup>,  
Н. П. Дейчули<sup>а</sup>, А. С. Донин<sup>а</sup>, А. А. Иванов<sup>а</sup>, И. А. Иванов<sup>а</sup>, В. А. Капитонов<sup>а</sup>,  
В. В. Колмогоров<sup>а</sup>, С. Корепанов<sup>б</sup>, В. В. Мишагин<sup>а</sup>, В. В. Ращенко<sup>а</sup>,  
А. В. Сорокин<sup>а</sup>, Н. В. Ступишин<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>б</sup> TAE Technologies, CA, USA

\*e-mail: A.V.Brul@inp.nsk.su

Поступила в редакцию 16.12.2020 г.

После доработки 30.01.2021 г.

Принята к публикации 01.02.2021 г.

Для нагрева и стабилизации плазмы в открытых магнитных ловушках в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН разработан мощный атомарный инжектор с перестраиваемой энергией пучка. Начальная энергия частиц составляет 15 кэВ с последующим увеличением до 40 кэВ. Мощность нейтрального пучка при этом возрастает с 1.7 МВт до 3.5 МВт. Особенностью инжектора является постоянство ионного тока пучка при значительном изменении ускоряющего напряжения. Инжекторы на базе ионных источников с перестраиваемой энергией используются в экспериментах на открытой ловушке С-2W, США.

*Ключевые слова:* источник ионов, нейтральный пучок, источник положительных ионов

DOI: 10.31857/S0367292121060044

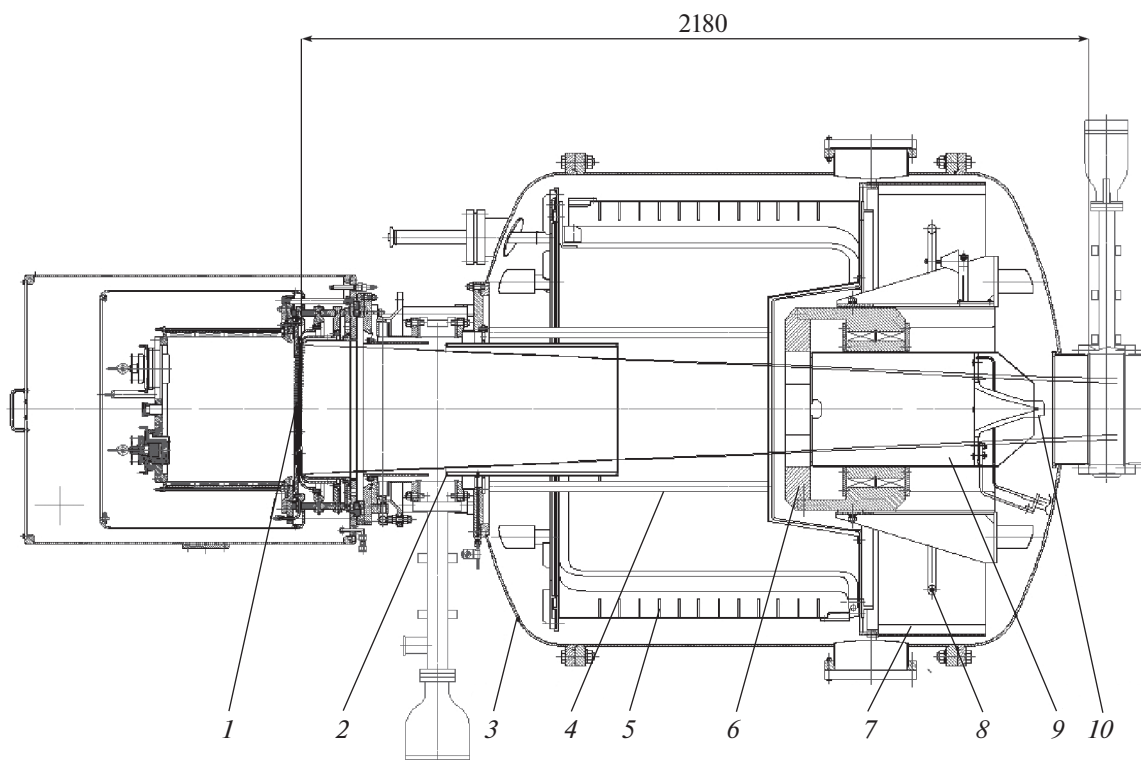
#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Инжекция нейтральных пучков широко используется в термоядерных установках с магнитным удержанием для нагрева и стабилизации плазмы. Развитие исследований в этой области привело к необходимости в системах нейтральной инжекции с перестраиваемой энергией пучка. Так, в экспериментах на установке С-2W (TAE Technologies, USA) [1] сценарий эксперимента предусматривает увеличение магнитного поля по мере увеличения температуры плазмы и соответствующее изменение энергии инжектируемых нейтральных частиц. На С-2W имеется действующая система нейтральной инжекции с постоянной энергией частиц 15 кэВ [2, 3]. В дальнейшем часть ионных источников была модифицирована так, чтобы осуществить переход с начальной энергии 15 кэВ на энергию 40 кэВ во время импульса инжекции при сохранении извлекаемого тока ионного пучка. Мощность нейтрального пучка при этом возрастает с 1.7 МВт до 3.5 МВт с учетом уменьшения примерно в 1.33 раза коэффициента нейтрализации из-за повышения энергии частиц. Длительность импульса пучка составляет 30 мс. Особенностью инжектора является

большая (~150 А) величина извлеченного тока пучка. Настоящая работа посвящена решению задачи оптимального формирования пучка с фиксированной плотностью тока при реализации сценария увеличения энергии в течение рабочего импульса.

#### 2. ОПИСАНИЕ ИНЖЕКТОРА

Модифицированный инжектор [4] предназначен для получения пучка быстрых атомов водорода с энергией от 15 до 40 кэВ и длительностью 30 мс. При этом энергия пучка в этих пределах может меняться по заданному сценарию при сохранении тока водородных ионов из источника. Инжектор схематически показан на рис. 1. Ионный источник формирует сфокусированный пучок ионов водорода с током до 150 А. Сформированный пучок ионов далее перезаряжается в атомы в газовой мишени нейтрализатора. Неперезарядившиеся ионы отклоняются магнитом и попадают в водоохлаждаемый приемник. Для измерения мощности пучка быстрых атомов на выходе инжекторного бака установлен подвижный калориметр. Инжектор с перестраиваемой энергией конструктивно близок к инжектору с посто-



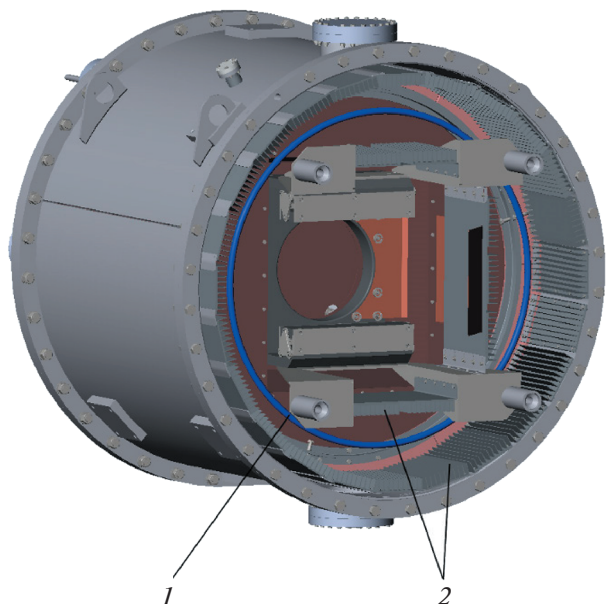
**Рис. 1.** Общий вид инжектора атомарного пучка. 1 – ионный источник; 2 – нейтрализатор; 3 – вакуумный объем; 4 – стержень дугового распылителя титана; 5 – медный сорбционный лайнер; 6 – отклоняющий магнит; 7 – алюминиевые сорбционные панели; 8 – кольцевой испаритель титана; 9 – приемник отклоненных ионов; 10 – отклоняемый calorиметр нейтрального пучка.

янной энергией [2, 3]. Для изменения энергии пучка в нем был модернизирован ионный источник и ряд элементов инжектора. В частности, потребовалось введение дополнительных средств откачки, поскольку увеличение энергии пучка приводит к увеличению газовой нагрузки в инжекторном баке. Это связано с тем, что с ростом энергии пучка требуется большая подача газа в нейтрализатор из-за уменьшения сечений, определяющих равновесный выход атомов. Кроме того, это приводит к падению выхода атомов из мишени нейтрализатора и, следовательно, к увеличению тока отклоненных непerezарядившихся ионов на приемник и соответствующему росту газоотделения из него. Дифференциальная система откачки инжектора с постоянной энергией [2], основанная на сорбции водорода покрытой титаном поверхностью, обеспечивает скорость откачки  $10^5 \text{ л} \cdot \text{с}^{-1}$  при комнатной температуре панелей. Нанесение титана на стенку вакуумной камеры со специальными ребрами для развития поверхности производится с помощью стержневых дуговых распылителей [5].

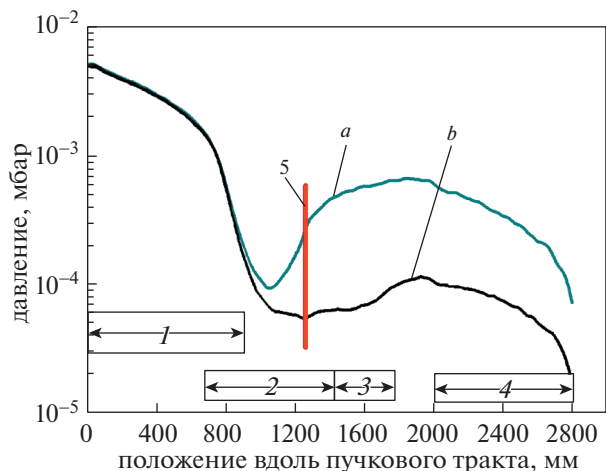
Для откачки дополнительного количества газа, выделяющегося на приемнике отклоненных ионов и из газовой мишени нейтрализатора, был

введен дополнительный кольцевой распылитель титана. Он размещен на выходе вакуумного объема. Общий вид модифицированной системы вакуумной откачки инжектора показан на рис. 2. В результате модификации, система откачки обеспечивает уровень потерь пучка из-за реионизации, не превышающий 5.3% от мощности инжектируемого нейтрального пучка. Расчетный профиль давления вдоль пучкового тракта при энергии пучка 40 кэВ, полученный при помощи симулятора сверхвысокого вакуума MolFlow+ [6], при включении дополнительного насоса и без него, показан на рис. 3.

Увеличение энергии пучка, помимо модификации системы откачки, потребовало также модификации отклоняющего остаточные ионы магнита. В конструкции отклоняющего магнита [2] применяются постоянные магниты из  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ . Длина полюсов магнита вдоль пучка была увеличена. Одновременно были установлены дополнительные постоянные магниты. При этом модификации приемника пучка не потребовалось, так как его размеры и положение позволяют не выходить за его пределы при увеличении энергии пучка.



**Рис. 2.** Вид системы дополнительной вакуумной откачки. 1 – кольцевой испаритель титана; 2 – дополнительные сорбционные панели.

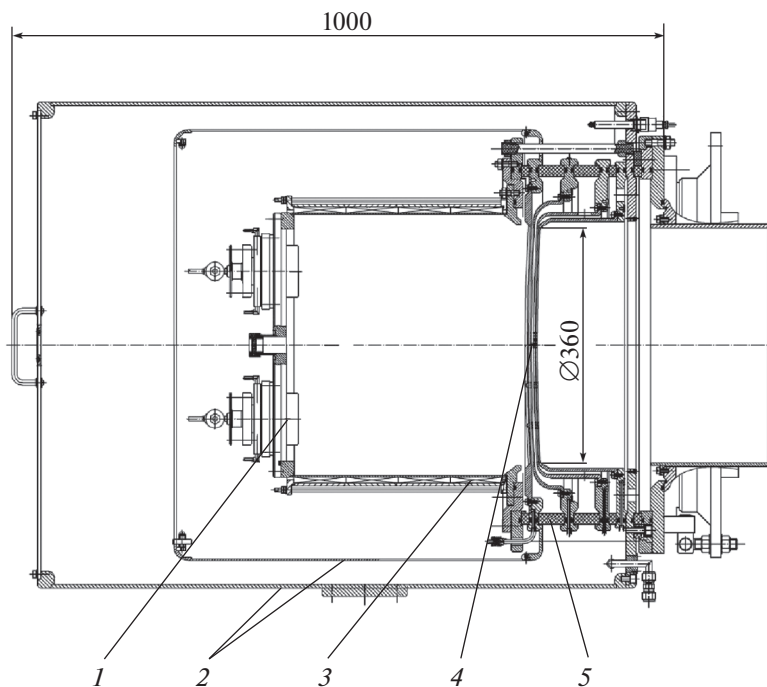


**Рис. 3.** Профиль давления вдоль пучкового тракта: 1 – нейтрализатор; 2 – сорбционный насос со стержневыми распылителями титана; 3 – дополнительный сорбционный насос с кольцевым испарителем титана; 4 – пучковый тракт на выходе из инжектора; 5 – диафрагма. а) – без дополнительной откачки; б) – с дополнительной откачкой.

### 3. ИОННЫЙ ИСТОЧНИК ПУЧКА С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Общий вид ионного источника показан на рис. 4. Плазменный эмиттер формируется за счет

сложения струй плазмы четырех плазменных генераторов. Это дает необходимый плазменный поток для обеспечения плотности извлекаемого тока ионов более 300 мА/см<sup>2</sup> из плазменного эмиттера диаметром 360 мм. Генераторы плазмы



**Рис. 4.** Схема источника. 1 – дуговой генераторов плазмы; 2 – магнитный и электростатический экраны; 3 – плазменная камера с магнитными стенками; 4 – электроды ИОС; 5 – керамический изолятор.

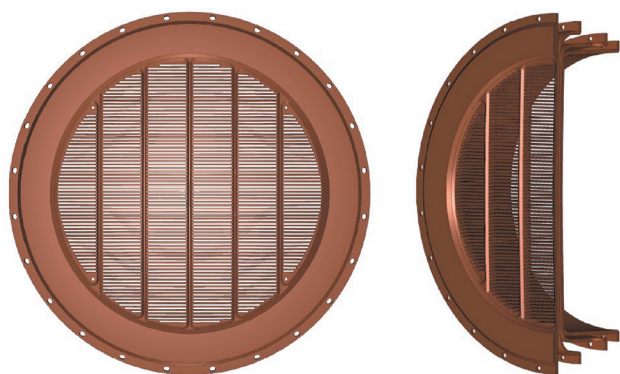


Рис. 5. Расположение щелей на плазменном электроде (слева) и общий вид системы электродов (справа).

расположены симметрично относительно оси пучка. На внешней поверхности вакуумной камеры источника плазмы расположены рядами керамические магниты из  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  с чередующимися направлениями намагниченности. Частичное отражение плазменных струй от “магнитной стенки” позволяет получить плазменный эмиттер с неоднородностью  $\sim 10\%$  [2] и увеличить плотность тока ионов. Электроды имеют прозрачность около 42%, что позволяет получить ток ионного пучка до 150 А.

Для формирования пучка с перестраиваемой энергией и сохранением извлекаемого тока использовалась многощелевая 4-электродная ионно-оптическая система (ИОС). Расположение щелей и общий вид системы электродов показаны на рис. 5. В первом ускоряющем зазоре (см. рис. 7) обеспечиваются оптимальные условия для экстракции ионного пучка с энергией 15 кэВ, а требуемое доускорение с перестройкой потенциалов для формирования пучка с энергией 40 кэВ происходит во втором зазоре. Схема подключения источников питания и потенциалы электродов при формировании пучка с энергией 15 и 40 кэВ показаны на рис. 6.

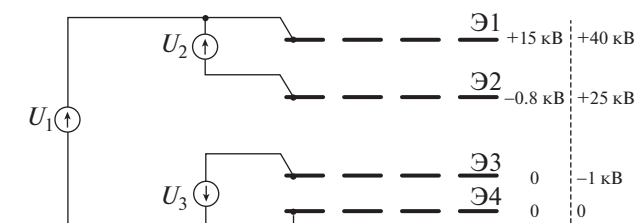


Рис. 6. Схема подключения источников питания к электродам. Э1 – электрод 1 (плазменный); Э2 – электрод 2 (извлекающий); Э3 – электрод 3 (доускоряющий); Э4 – электрод 4 (заземленный).

ИОС представляет из себя набор из четырех вложенных друг в друга электродов с щелевыми отверстиями для формирования пучка. Для фокусировки пучка рабочая поверхность электродов изготовлена в виде сферы. Каждый электрод имеет своей радиус кривизны, так что зазоры между электродами меняются в зависимости от радиуса для компенсации радиальной неоднородности плазменного эмиттера ионов. Фокусное расстояние ИОС составляет 3.5 м. Оптимальная геометрия элементарной ускоряющей ячейки определя-

ется на рис. 5. В первом ускоряющем зазоре (см. рис. 7) обеспечиваются оптимальные условия для экстракции ионного пучка с энергией 15 кэВ, а требуемое доускорение с перестройкой потенциалов для формирования пучка с энергией 40 кэВ происходит во втором зазоре. Схема подключения источников питания и потенциалы электродов при формировании пучка с энергией 15 и 40 кэВ показаны на рис. 6.

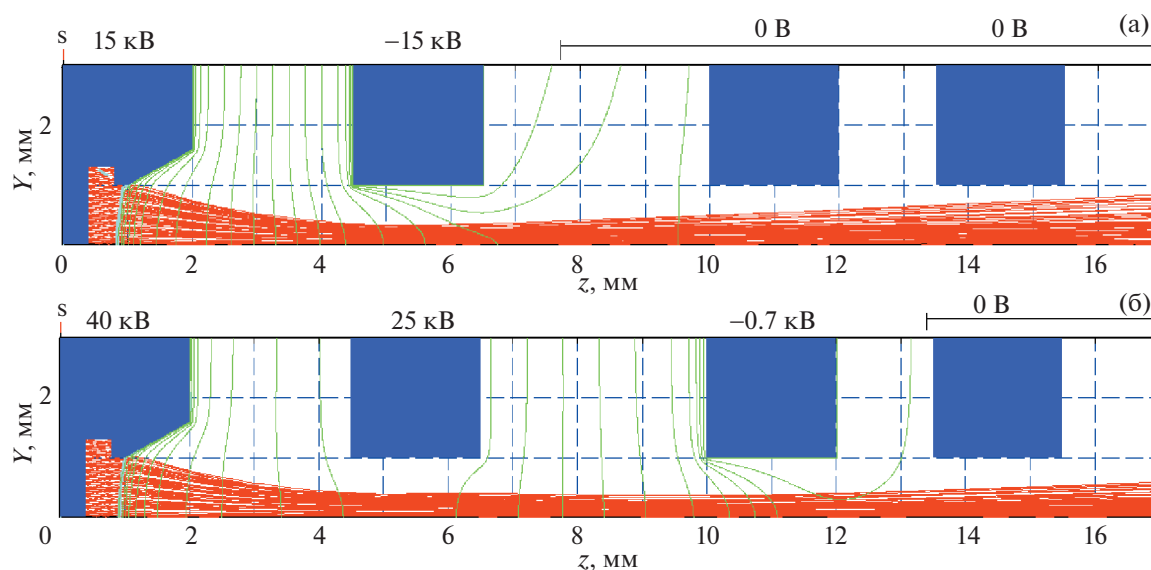
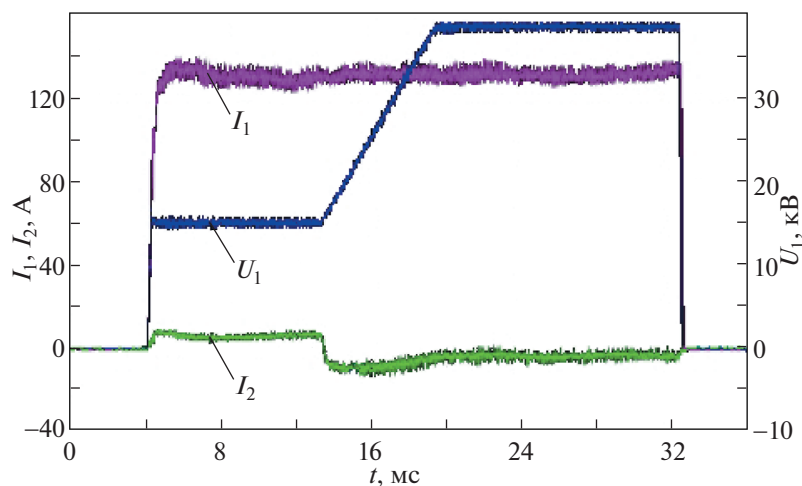
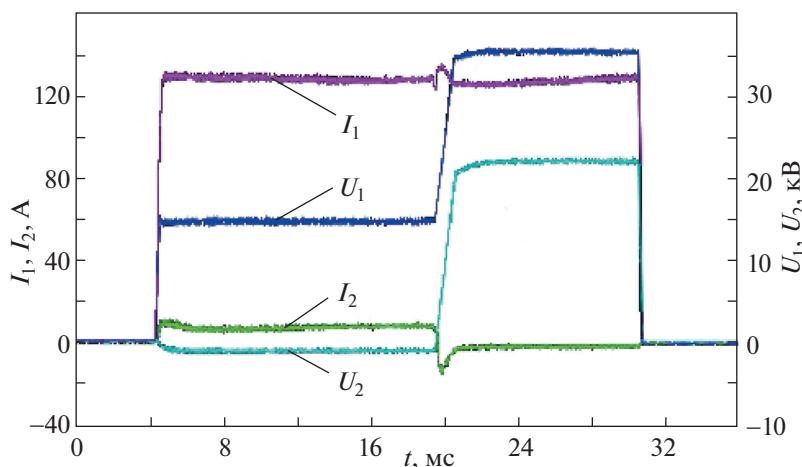


Рис. 7. Траектории ионов и эквипотенциалы электрического поля при формировании пучка с энергией 15 кэВ (а) и 40 кэВ (б).



**Рис. 8.** Осциллограммы тока пучка ( $I_1$ ), тока электрода 2 ( $I_2$ ) и напряжения на электроде 1 ( $U_1$ ) для сценария линейного изменения энергии пучка с 15 до 40 кэВ.



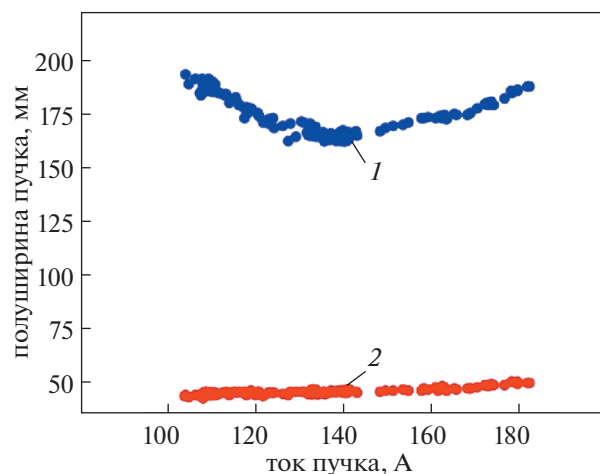
**Рис. 9.** Осциллограммы тока пучка ( $I_1$ ), тока электрода 2 ( $I_2$ ), напряжения на электроде 1 ( $U_1$ ) и напряжения на электроде 2 ( $U_2$ ) при быстром переключении энергии пучка с 15 кэВ на 35 кэВ.

лась моделированием при помощи численного кода PBGUNS (Particle Beam GUN Simulation) [7]. Для формирования пучка в элементарной ускоряющей ячейке с угловой расходимостью поперек щелей менее 30 мрад, при выполнении моделирования варьировались геометрия отверстий в плазменном электроде, межэлектродные зазоры и потенциалы электродов. Траектории ионов при формировании пучка с энергией 15 кэВ и 40 кэВ в оптимизированной элементарной ячейке ионно-оптической системы показаны на рис. 7.

#### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На испытательном стенде была достигнута номинальная длительность импульса 30 мс, с пере-

ключением энергии с 15 до 40 кэВ с сохранением тока пучка. Ток пучка в стабильном режиме (без пробоев) с переключением энергии составлял не менее 135 А. Сценарий перехода инжектора от начальной энергии к конечной может быть осуществлен произвольным способом, с плавным и резким фронтом изменения энергии. Пример переключения энергии частиц с 15 кэВ до 40 кэВ при линейном нарастании энергии при токе пучка около 135 А и длительности импульса 29 мс, показан на рис. 8. Сценарий работы ИОС допускает также быстрое переключение потенциалов с 15 на 40 кВ с фронтом  $\sim 0.3$  мс. Осциллограммы тока и напряжения в этом случае показаны на рис. 9. При изменении потенциалов первого и второго электродов для увеличения энергии ча-

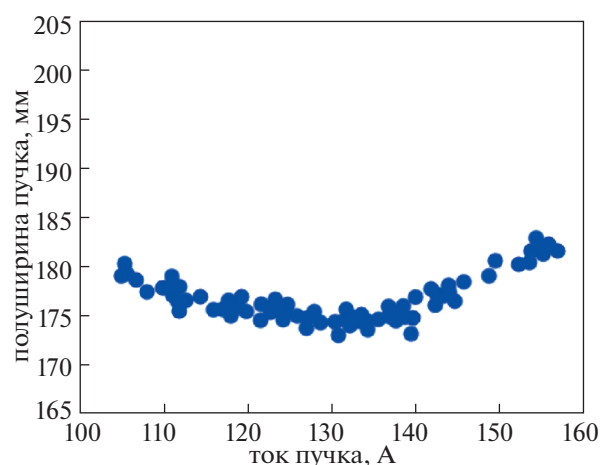


**Рис. 10.** Зависимость полуширины пучка с энергией 15 кэВ от тока ионов на уровне  $1/e$ : 1 – поперек щелей; 2 – вдоль щелей.

стиц ток питания электрода 2 меняет знак, как показано на рис. 8, 9, то есть ток течет против направления эдс источника питания электрода 2. Положительный ток питания до переключения обуславливается потерями части пучка на краях отверстий в электроде 2 и ионами вторичной плазмы на выходе из ИОС. После переключения ионы вторичной плазмы не попадают на электрод 2, а электроны, образовавшиеся во втором ускоряющем промежутке, попадают на электрод 2.

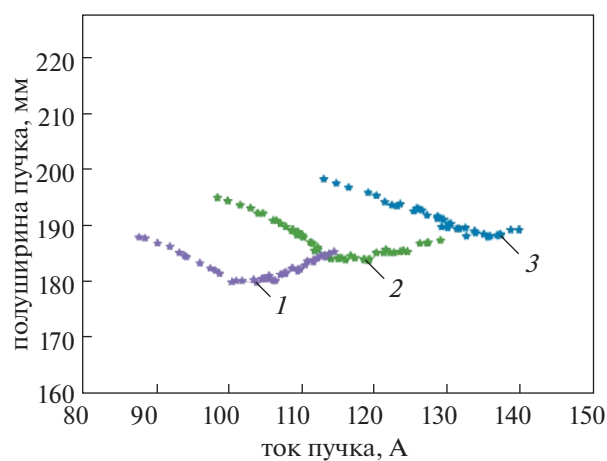
Относительные профили потока атомов пучка измерялись набором вторично-эмиссионных датчиков на расстоянии 4.1 м от ИОС. При формировании пучка с энергией 15 кэВ полуширина пучка на уровне  $1/e$  поперек щелей составляет 163 мм и вдоль щелей менее 50 мм в оптимуме по току. Зависимость полуширины пучка вдоль и поперек щелей от величины извлекаемого тока ионов показана на рис. 10. При формировании пучка с энергией 35 кэВ минимальная полуширина пучка поперек щелей составила 173 мм (см. рис. 11). При переключении энергии пучка с 15 кэВ на 25 кэВ угловая расходимость пучка поперек щелей увеличивается при сохранении разности потенциалов между первым и вторым электродом (см. рис. 10, 12). Этот эффект удалось компенсировать изменением разности потенциалов между первым и вторым электродом во время перестройки энергии пучка. Зависимости полуширины пучка поперек щелей от тока при разных напряжениях между первым и вторым электродом при формировании пучка с энергиями 25 кэВ показаны на рис. 12.

Состав пучка определялся с помощью оптической диагностики. Наблюдались линии излучения  $H_\alpha$  частиц с разной энергией, сдвинутые из-за эффекта Доплера. Измерения производились



**Рис. 11.** Зависимость полуширины пучка поперек щелей от тока ионов для энергии 35 кэВ.

навстречу пучку под углом 5 градусов. Спектры пучка, измеренные при формировании пучка с энергией 15 и 30 кэВ, показаны на рис. 13. Состав пучка с учетом изменения коэффициентов нейтрализации в газовой мишени в процессе переключения энергии не изменился (см. рис. 13). Спектр пучка, измеренный в импульсе с быстрым переключением энергии, показан на рис. 14. На рисунке представлены линии, соответствующие молекулярным фракциям пучка с энергией 15 кэВ и 35 кэВ. Из-за конечного быстродействия системы измерений сигналов спектрометра, при быстром переключении энергии пучка спектр не размывается и представляет собой два набора независимых доплеровских линий. Это позволяет измерять состав в течение одного импульса ин-



**Рис. 12.** Зависимость полуширины пучка поперек щелей от тока при потенциале плазменного электрода 25 кВ и разных значениях потенциала второго электрода. 1 – 13.2 кВ; 2 – 14.0 кВ; 3 – 15.0 кВ.



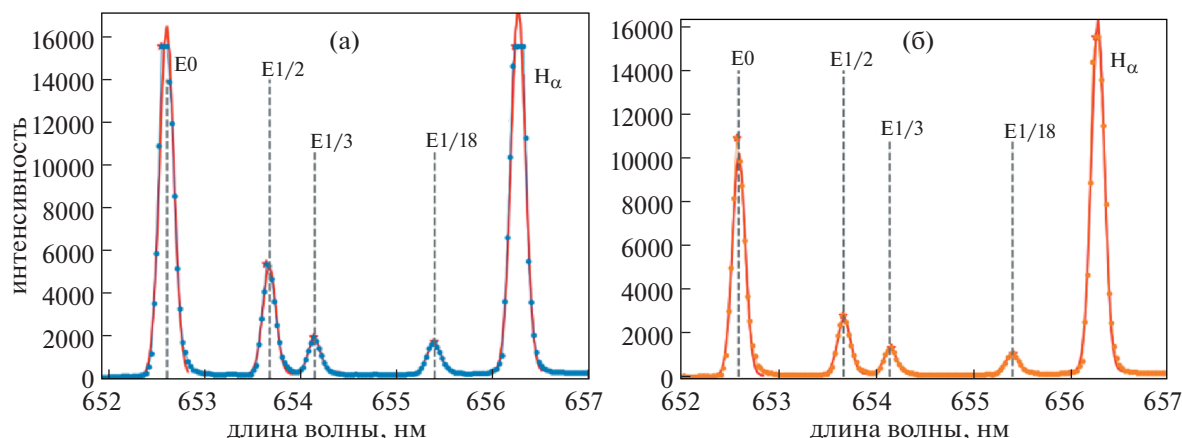


Рис. 13. Спектр излучения линии  $H_\alpha$  пучка атомов водорода для энергии 15 кэВ (а) и 30 кэВ (б).

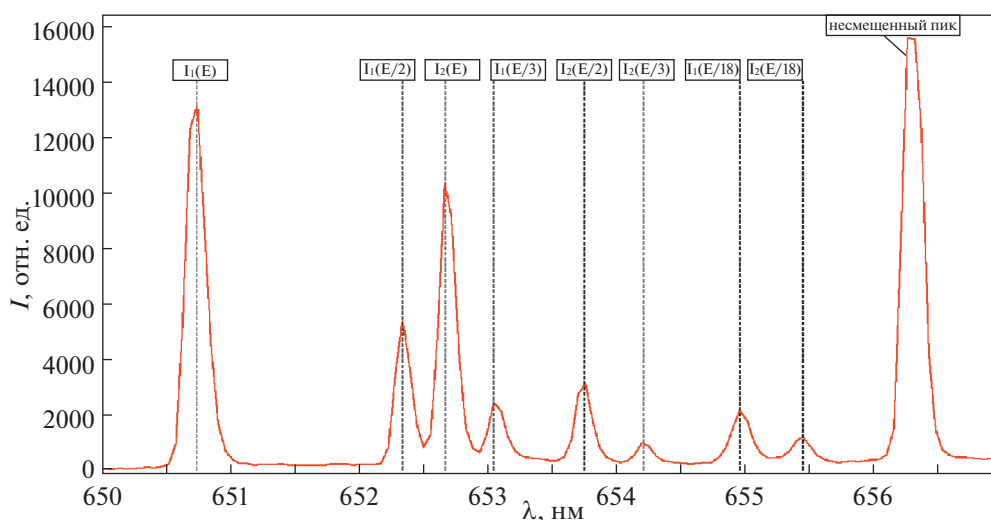


Рис. 14. Спектр излучения линии  $H_\alpha$  пучка при энергии 15 кэВ ( $I_2$ ) на 35 кэВ ( $I_1$ ). Быстрое переключение энергии.

жектора. Проведенные измерения показали, что ток ионов полной энергии в пучке составляет более 85%.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан ионный источник с перестраиваемой с 15 до 40 кэВ энергией при постоянном токе пучка. Для формирования пучка ионов водорода используется многощелевая 4-электродная ионно-оптическая система с баллистической фокусировкой. Ионные источники с перестраиваемой энергией используются в системе мощной атомарной инжекции установки С-2W (США) [1, 8] для нагрева и поддержания тока в плазме. Это позволяет проводить эксперименты, направленные на увеличение плотности и температуры

плазмы одновременно с ростом магнитного поля установки.

При работе инжектора с увеличением энергии в пучковом тракте требуется более интенсивная вакуумная откачка. С ростом энергии происходит уменьшение равновесного выхода атомов в газовой мишени нейтрализатора пучка, что приводит к соответствующему росту газоотделения в приемнике остаточных ионов. Кроме того, требуется также повышенный напуск газа в нейтрализатор для обеспечения близкого к равновесному выходу атомов. Для откачки дополнительного газа в инжекторе на выходе пучка установлен вспомогательный геттерный насос с кольцевым дуговым распылителем титана. Кроме того, увеличение энергии пучка потребовало модификации отклоняющих остаточные ионы магнита. Остальные

системы, расположенные в вакуумном объеме инжектора, не изменились.

Разработанный инжектор атомарного пучка при максимальной энергии частиц (40к эВ) позволяет получить мощность атомарного пучка более 3 МВт. Таким образом, он является самым мощным в линейке инжекторов, разработанных до настоящего времени в ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН [9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gota H., Binderbauer M.W., Tajima T., Putvinski S., Tuszewski M., Dettrick S., Garate E., Korepanov S., Smirnov A., Thompson M.C., Trask E., Yang X., Schmitz L., Lin Z., Ivanov A.A., Asai T., Alfrey I., Andow R., Beall M., Bolte N., Bui D.Q., Cappello M., Ceccherini F., Clary R., Cheung A.H., Conroy K., Deng B.H., Douglass J., Dunaevsky A., Feng P., Fulton D., Galeotti L., Granstedt E., Griswold M., Gupta D., Gupta S., Hubbard K., Isakov I., Kinley J.S., Knapp K., Magee R., Matvienko V., Mendoza R., Mok Y., Necas A., Primavera S., Onofri M., Osin D., Rath N., Roche T., Romero J., Schindler T., Schroeder J.H., Sevier L., Sheftman D., Sibley A., Song Y., Steinhauer L.C., Valentine T., Van Drie A.D., Walters J.K., Waggoner W., Yushmanov P., Zhai K. and the TAE Team // Nucl. Fusion. 2017. V. 57. 116021. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/aa7d7b>
2. Deichuli P., Davydenko V., Ivanov A., Korepanov S., Mishagin V., Smirnov A., Sorokin A., Stupishin N. // Rev. Sci. Instrum. 2015. V. 86. 113509. <https://doi.org/10.1063/1.4936292>
3. Сорокин А.В., Давыденко В.И., Дейчули П.П., Иванов А.А. // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 7. С. 46.
4. Deichuli P., Abdrashitov A., Dranichnikov A., Davydenko V., Ivanov A., Kolmogorov V., Kapitonov V., Mishagin V., Brul A., Deichuli N., Raschenko V., Sorokin A., Stupishin N., Vakhrushev R. // Abstracts. Plasma Physics and Technology. 2018. V. 5. № 1.
5. Sorokin A., Ivanov A., Deichuli P., Dranichnikov A., Van Drie A., Korepanov S. // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771. 030026. <https://doi.org/10.1063/1.4964182>
6. Ady M., Kersevan R. // 10th Int. Particle Accelerator Conf., Melbourne, Australia, 2019. <https://doi.org/10.18429/JACoW-IPAC2019-TUPMP037>.
7. Boers J.E. // J. Vacuum Sci. Technol. 1973. V. 10. P. 1120. <https://doi.org/10.1116/1.1318483>
8. Binderbauer M.W., Tajima T., Steinhauer L.C., Garate E., Tuszewski M., Schmitz L., Guo H.Y., Smirnov A., Gota H., Barnes D., Deng B.H., Thompson M.C., Trask E., Yang X., Putvinski S., Rostoker N., Andow R., Aefsky S., Bolte N., Bui D.Q., Ceccherini F., Clary R., Cheung A.H., Conroy K.D., Dettrick S.A., Douglass J.D., Feng P., Galeotti L., Giammanco F., Granstedt E., Gupta D., Gupta S., Ivanov A.A., Kinley J.S., Knapp K., Korepanov S., Hollins M., Magee R., Mendoza R., Mok Y., Necas A., Primavera S., Onofri M., Osin D., Rath N., Roche T., Romero J., Schroeder J.H., Sevier L., Sibley A., Song Y., Van Drie A.D., Walters J.K., Waggoner W., Yushmanov P., Zhai K. and TAE Team // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. 056110. <https://doi.org/10.1063/1.4920950>
9. Бельченко Ю.И., Давыденко В.И., Дейчули П.П., Емелев И.С., Иванов А.А., Колмогоров В.В., Константинов С.Г., Краснов А.А., Попов С.С., Санин А.Л., Сорокин А.В., Ступишин Н.В., Шиховцев И.В., Колмогоров А.В., Атлуханов М.Г., Абдрашитов Г.Ф., Драничников А.Н., Капитонов В.А., Кондаков А.А. // УФН. 2018. Т. 188 (6). С. 595. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2018.02.038305>

## ИОННЫЕ И ПЛАЗМЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ

УДК 533.9

### ГЕЛИКОННЫЙ ИСТОЧНИК ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВОК

© 2021 г. Е. И. Кузьмин<sup>а,\*</sup>, И. В. Шиховцев<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

\*e-mail: e.i.kuzmin.94@mail.ru

Поступила в редакцию 15.10.2020 г.

После доработки 31.01.2021 г.

Принята к публикации 02.02.2021 г.

Представлены результаты экспериментов на линейной установке с геликонным плазменным источником, работающем на частоте 13.56 МГц при мощности до 15 кВт. В экспериментах использованы различные виды антенн с азимутальным волновым числом  $m = 0; \pm 1$  (витковая, NAGOYA TYPE III и геликонная полуволновая антенны). Для указанных типов антенн были измерены радиальные профили плотности и электронной температуры плазмы в зависимости от магнитного поля под антенной и давления газа. Максимальная плотность плазмы, полученная в экспериментах, составила  $2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , при величине магнитного поля около 200 Гс.

*Ключевые слова:* геликонный разряд, ВЧ-источники плазмы, плазма в неоднородном магнитном поле, линейные плазменные установки

**DOI:** 10.31857/S0367292121060111

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из приоритетных направлений развития термоядерных технологий являются исследования по взаимодействию плазмы с материалами. Важность этих исследований связана с условиями работы первой стенки в реакторе под мощным воздействием потоков плазмы. Как правило, для материаловедческих исследований используются линейные плазменные установки, позволяющие проводить моделирование воздействия на стенки реактора при необходимых характеристиках потока плазмы. Источник плазмы для таких установок должен удовлетворять ряду требований, а именно: высокая плотность и однородность плазмы, отсутствие примесей и возможность стационарного режима работы [1].

Безэлектродные ВЧ-генераторы плазмы позволяют работать в стационарном режиме, давая при этом чистую плазму без примесей. В индукционном ВЧ-разряде плазма создается за счет передачи энергии электронам высокочастотными электрическими полями. При определенных условиях, возбуждаемые антенной на периферии волны с частотой  $\omega \ll \omega_p$ , распространяются внутрь, и их поглощение дает возможность генерировать плотную плазму во всем объеме разряда, увеличивая его эффективность. Этими свойствами обладают геликонные источники плазмы. Вместе с тем, они являются весьма чувствитель-

ными к таким параметрам, как давление газа, величина внешнего магнитного поля и его однородность, так что требуется оптимизация этих параметров для получения требуемых параметров плазменного потока.

Эксперименты проводились на линейной плазменной установке с геликонным источником плазмы [2]. Предполагается, что разрабатываемый геликонный источник может служить прототипом источника плазмы для линейной плазменной установки по исследованию материалов JULE-PSI [3]. Соответственно, основные требования к нему — это однородность плотности плазмы на размере 3–4 см, плотность плазмы  $\geq 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и возможность работы в стационарном режиме.

В данной статье представлены первые результаты по созданию и исследованию плазмы на установке с геликонным источником в ИЯФ СО РАН. В разд. 2 представлено описание плазменного источника, магнитной системы и применяемых методов диагностики. В разд. 3 представлены основные экспериментальные данные, которые обсуждаются в разд. 4.

#### 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Параметры установки и получаемой плазмы указаны в табл. 1, схема установки изображена на рис. 1. Геликонный источник представляет собой кварцевую вакуумную камеру ( $\varnothing 110$  мм, длина

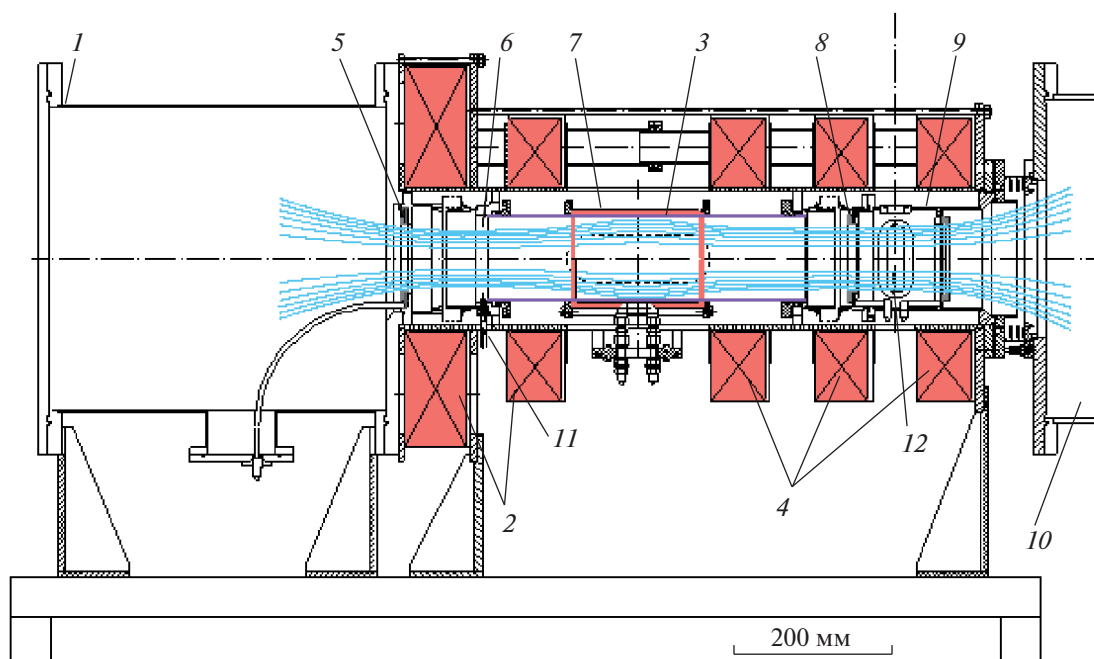
**Таблица 1.** Параметры геликонного источника и плазмы

Параметры	Значение
Частота, МГц	13.56
Мощность, кВт	≤15
Давление газа (H <sub>2</sub> ), мТорр	10–45
Магнитное поле, Гс	≤1000
Длительность разряда, с	0.5–2
Плотность, см <sup>-3</sup>	10 <sup>11</sup> –10 <sup>13</sup>
Электронная температура, эВ	5–12
Диаметр плазмы, см	~8–10

400 мм), на которой устанавливается ВЧ-антенна с возможностью водяного охлаждения. На установке используется ВЧ-генератор COMDEL CX25000-S мощностью до 25 кВт. Для заданной мощности ожидаемая плотность плазмы  $>10^{13}$  см<sup>-3</sup>, температура электронов ~5 эВ, что обусловлено экспериментальными результатами работ [4, 5]. Для согласования импеданса системы с нагрузкой генератора (50 Ом) между антенной и генератором установлено согласующее устройство с L-схемой согласования. Камера находится в постоянном магнитном поле, создаваемом четырьмя соленоидами (490 витков) и пробочной катушкой (976 витков). Данный геликонный источник имеет ряд важных технических особенностей. Геометрия магнитных полей за счет ослабления

поля в области ВЧ-антенны повторяет конфигурацию пробкотрона, что улучшает удержание плазмы, а также эффективную передачу энергии ВЧ-полей вглубь плазмы [6]. Магнитное поле имеет минимум в области антенны с пробочным отношением ~2. Эта конструкция основана на успешном опыте открытых плазменных ловушек по генерации и удержанию плазмы в пробочной конфигурации [7], теория геликонного разряда в неоднородном магнитном поле представлена в работе [8]. Поскольку распределение магнитного поля в камере неоднородно (рис. 2), всюду, где особо не оговорено, указано усредненное магнитное поле вдоль антенны. Для изоляции плазмы от стенок источника и диэлектрической цилиндрической плазменной камеры предусмотрены три охлаждаемых медных лимитера. На установке имеется расширительный объем, который можно использовать для экспериментов по изменению коэффициента расширения плазменного потока и температуры электронов, а также для систем диагностики и откачки газа.

Вакуум в камере (~10<sup>-6</sup> мТорр) создавался турбомолекулярным и форвакуумным насосами, откачка производилась со стороны вакуумного объема. Водород в камеру напускался в непрерывном режиме в течение импульса, при измерениях везде указано давление в камере в момент установления квазистационарного разряда. Для измерения плотности и электронной температуры плазмы в 340 мм от центра ВЧ-антенны расположен трой-



**Рис. 1.** Геликонный источник плазмы: 1 – расширительный объем; 2, 4 – катушки магнитного поля; 3 – кварцевая камера; 5, 8 – лимитеры; 6 – подача газа; 7 – ВЧ-антенна; 9 – диагностическая камера; 10 – вакуумный объем стэнда; 11 – поджиг; 12 – ось движения тройного зонда Ленгмюра.

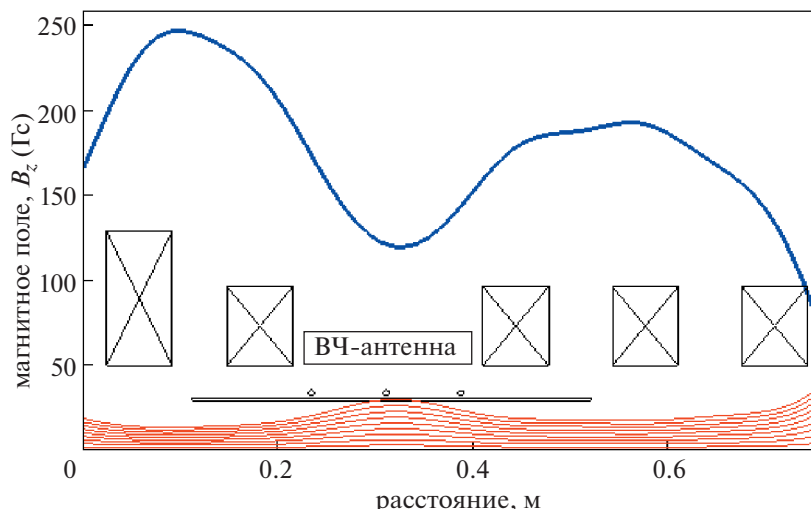


Рис. 2. Продольное магнитное поле и магнитные силовые линии при токе в магнитных катушках 5 А.

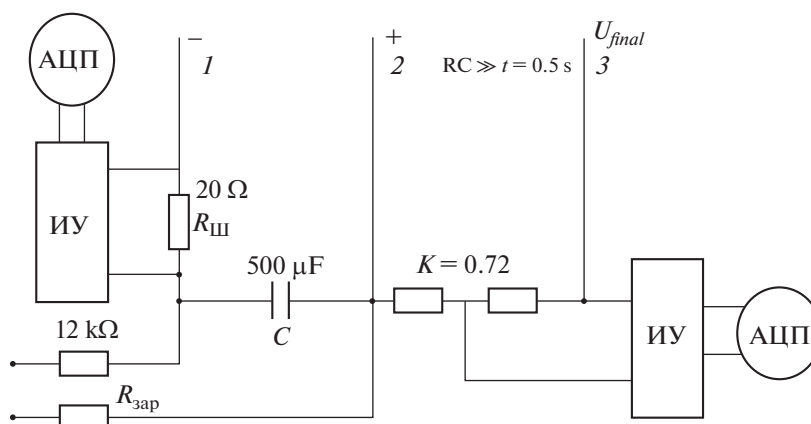


Рис. 3. Схема тройного ленгмюровского зонда. ИУ – изолирующий усилитель (гальваническая развязка).

ной ленгмюровский зонд на вертикальной подвижке. Данный зонд (рис. 3) состоит из трех электродов: электроды 1, 2 подключаются по схеме двойного зонда, между ними прикладывается напряжение  $-100$  В, таким образом, они находятся в режиме ионного тока насыщения, электрод 3 находится в режиме плавающего потенциала. Электронная температура определяется с помощью напряжения между 2 и 3 электродами, а плотность с помощью ионного тока с электрода 1. Емкость  $C$  с помощью зарядных резисторов  $R_{зар}$  заряжается до напряжения  $100$  В, номиналы резисторов подбираются так, чтобы длительность измеряемого сигнала была меньше времени разрядки емкости. Полная длительность разряда  $\sim 0.7$  с, длительность квазистационарного режима  $\sim 0.5$  с,  $R_{зар} = 12$  кОм,  $C = 500$  мкФ. Гальваническая развязка между зондом и измерительной схемой реализована с помощью оптронных преобразовате-

лей с малой емкостью связи между передатчиком и приемником, что позволяет избежать влияния емкостных помех, вызванных колебаниями потенциала плазмы.

В эксперименте были исследованы ВЧ-антенны, изображенные на рис. 4: NAGOYA TYPE III (NIII) и геликонная полуволновая (Н–Н) антенны с  $m = \pm 1$  симметрией, а также витковая антенна с  $m = 0$  симметрией, поскольку данный тип антенн широко распространен в экспериментальной физике индукционного разряда [9], и существуют весьма успешные результаты ( $n_e \sim 10^{12}$  см $^{-3}$ ) по использованию витковой антенны на установках с магнитным полем и низкой ВЧ-мощностью (до 1 кВт) [10]. Оптимальная длина ВЧ-антенн с  $m = \pm 1$  определяется на основании рассуждений в работе Чена, где предложен механизм ионизации газа электронами с резонансным сечением [11]. Выбирая фазовую ско-



**Рис. 4.** Типы использованных ВЧ-антенн: витковая ( $l = 3.6$  см,  $m = 0$ ); НПН ( $l = 16$  см,  $m = \pm 1$ ); Н–Н ( $l = 15$  см,  $m = \pm 1$ ); диаметр медной трубки  $d = 6$  мм.

рость волн равной скорости электронов с энергией ионизации  $E_f$ , получаем

$$\frac{\omega}{k_z} = \sqrt{\frac{2E_f}{m_e}} = 5.93 \times 10^5 \sqrt{E_f} \text{ [м} \cdot \text{с}^{-1}\text{]}. \quad (1)$$

Отсюда, для водорода, принимая энергию электронов равной 50 эВ, имеем продольную длину волны  $\lambda_z \sim 32$  см. Поскольку работы по оптимизации длины антенны [12, 13] показали наибольшую эффективность полуволновых антенн ( $l_a = \lambda_z/2$ ), длина азимутально-несимметричных антенн в эксперименте  $\sim 15$  см.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

#### 3.1. ВЧ-мощность

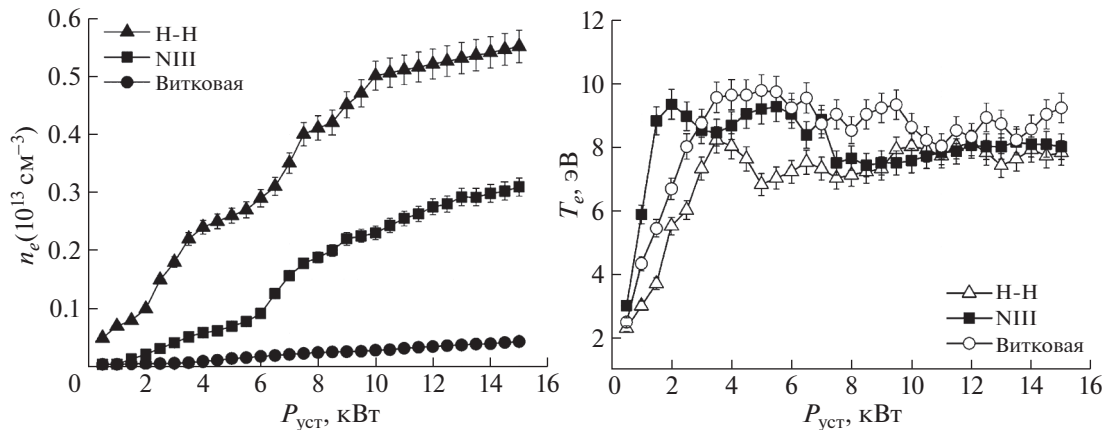
В эксперименте была исследована зависимость плотности и электронной температуры плазмы на оси от вводимой в разряд мощности. Поскольку ВЧ-мощность, магнитное поле и давление рабочего газа значительным образом влияют на плотность плазмы, при их изменении изменяется и плазменная нагрузка, поэтому необходима постоянная подстройка согласующих емкостей для оптимального поглощения мощности плазмой. При измерениях подстройкой контура допускалась отраженная мощность не более 10% от вводимой в разряд мощности.

Следует отметить, что для каждой антенны измерения по мощности выполнены при фиксированном магнитном поле и давлении газа, но оптимальные значения поля и давления зависят от величины мощности (разделы 3.2, 3.3) и существенно изменяют плотность и электронную температуру. Плотность плазмы равномерно увели-

чивается с ростом мощности для витковой антенны (рис. 5). При 15 кВт достигается плотность плазмы  $4.4 \times 10^{11}$  см $^{-3}$ . Электронная температура быстро растет в диапазоне от 0.5 до 3.5 кВт, далее температура электронов остается на уровне 8–10 эВ. Наибольший рост плотности плазмы наблюдается в диапазоне от 6 до 8 кВт. НПН антенна показывает более высокую эффективность ионизации почти на порядок:  $n_e = 3 \times 10^{12}$  см $^{-3}$  при 15 кВт, также наблюдается резкий рост плотности от 5.5 до 7 кВт. Электронная температура имеет схожее распределение и температуру  $\sim 8$ –9 эВ. В экспериментах с полуволновой геликонной антенной удалось получить самые высокие значения плотности:  $n_e = 5.5 \times 10^{12}$  см $^{-3}$  при 15 кВт. На интервалах от 2 до 3.5, от 5.5 до 7.5 и от 8.5 до 10 кВт наблюдаются скачки темпа роста плотности плазмы. Электронная температура в случае геликонной антенны несколько ниже, чем для витковой и НПН антенн, и составляет  $\sim 7$ –8 эВ.

#### 3.2. Магнитное поле

Одной из целей данной работы было исследование влияния величины магнитного поля на генерацию разряда. Конструкция геликонного источника, используемого в эксперименте, предполагает возможность создания неоднородных магнитных полей, а увеличенное расстояние между катушками в районе ВЧ-антенны позволяет реализовать в источнике принцип открытых ловушек и увеличить градиент магнитного поля в области генерации плазмы. В ходе эксперимента были измерены зависимости плотности и электронной температуры от тока в катушках при различной мощности ВЧ-генератора.



**Рис. 5.** Зависимость плотности плазмы и электронной температуры от ВЧ-мощности для витковой (магнитное поле 600 Гс, давление газа 25 мТорр), NIII (магнитное поле 240 Гс, давление газа 24 мТорр) и Н–Н (магнитное поле 180 Гс, давление газа 18 мТорр) антенн.

В случае витковой антенны не наблюдается ярко выраженных максимумов плотности по магнитному полю. Максимальная плотность плазмы  $2.1 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$  достигается при магнитном поле 620 Гс при мощности 5 кВт. С ростом мощности оптимальное поле изменяется в пределах 40–70 Гс, а плотность плазмы равномерно, без скачков, достигая в максимуме  $4.4 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$  при магнитном поле 580 Гс и мощности 15 кВт. Температура электронов слабо зависит от магнитного поля, выше 100 Гс электронная температура  $\sim 8\text{--}10$  эВ. В эксперименте измерялись радиальные профили плотности и температуры. Данные для витковой антенны, соответствующие оптимальному магнитному полю для различной ВЧ-мощности, представлены на рис. 6. Плотность плазмы имеет колоколообразный профиль с максимумом на оси камеры. Электронная температура имеет максимумы в 3 см от оси источника ( $\sim 10\text{--}12$  эВ), минимум на оси ( $\sim 7\text{--}8$  эВ). С ростом мощности форма профилей плотности и электронной температуры не изменяется.

NIII антенна позволяет получить более высокую плотность плазмы по сравнению с витковой антенной. Для всех значений мощности оптимальное магнитное поле совпадает и равно 240 Гс (рис. 7). Разряд характеризуется быстрым нарастанием плотности плазмы в области низких полей до 250 Гс, при дальнейшем увеличении магнитного поля плотность равномерно спадает. При повышении мощности с 5 до 15 кВт плотность растет с  $0.6 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$  до  $3 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Электронная температура для 7.5, 10 и 15 кВт имеет минимум  $\sim 6\text{--}9$  эВ в области наибольшей плотности, затем начинает линейно расти с магнитным полем до 12 эВ, для 5 кВт электронная температура имеет максимум  $T_e = 13$  эВ при 450 Гс. Радиальные профили  $n_e$  (рис. 8) также имеют колоколооб-

разное распределение, но плазма более однородна на радиусе меньше 3 см, при большем радиусе плотность резко уменьшается. Значение электронной температуры  $\sim 7\text{--}8$  эВ на оси, в максимумах  $\sim 13$  эВ на радиусе 3.5–4 см.

В экспериментах с Н–Н антенной наблюдается резкое увеличение плотности при оптимальных значениях поля (рис. 9). При увеличении подводимой мощности наблюдается изменение оптимальных значений  $B_z$ : максимум плотности  $0.4 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$  был получен при 205 Гс для 5 кВт, для мощностей 7.5, 10 и 15 кВт оптимальное поле равно 140 Гс, а достигаемые плотности соответственно  $0.5 \times 10^{13}$ ,  $0.7 \times 10^{13}$  и  $1.2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . При  $B_z > 250$  Гс плотность плазмы постепенно снижается. Распределение температуры аналогично случаю NIII антенны, при этом минимальная температура ( $\sim 6$  эВ) соответствует резкому скачку плотности при 15 кВт. Радиальные профили плотности плазмы и электронной температуры (рис. 10) обнаруживают ряд особенностей, не наблюдавшихся в экспериментах с витковой и NIII антенной. Форма радиального профиля плотности становится более пикированной с ростом ВЧ-мощности и при 15 кВт падает в два раза на расстоянии 1 см от оси. При 5 кВт наблюдаются пики 10 и 13 эВ в точках  $R = -4$  и  $R = 4$  см, с минимумом при  $R = -2$  см ( $\sim 6.5$  эВ). При 7.5 кВт максимум электронной температуры 8.5 эВ находится на оси, с сохранением пиков в точках  $R = \pm 4$  см. Подобную форму профиль температуры имеет место только при мощности 7–8 кВт и магнитном поле  $\sim 140$  Гс, объяснение данного эффекта требует изучения волновой структуры магнитных полей в плазме. При дальнейшем повышении мощности распределение температуры вновь имеет “седловидный” характер. В целом, разряд характеризуется более низкой температу-

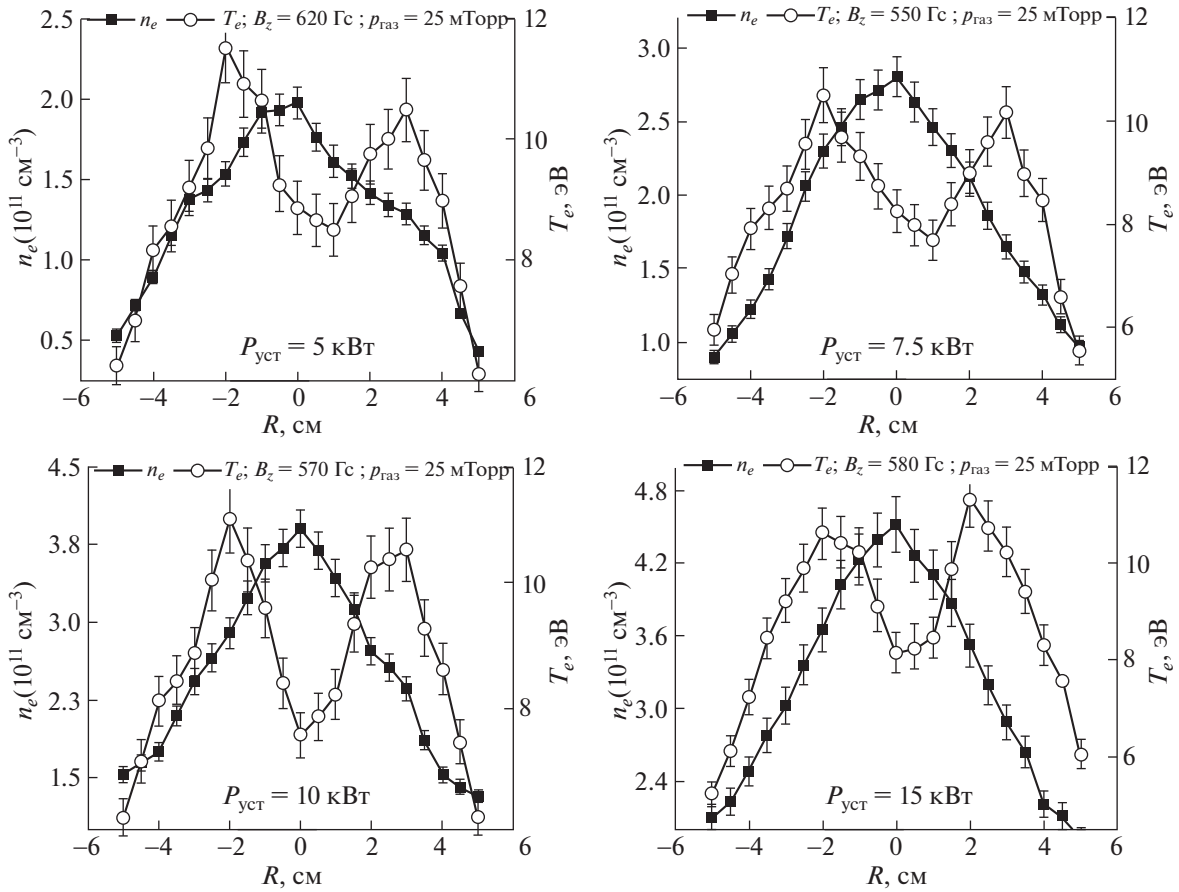


Рис. 6. Радиальные профили плотности плазмы и электронной температуры для витковой антенны.

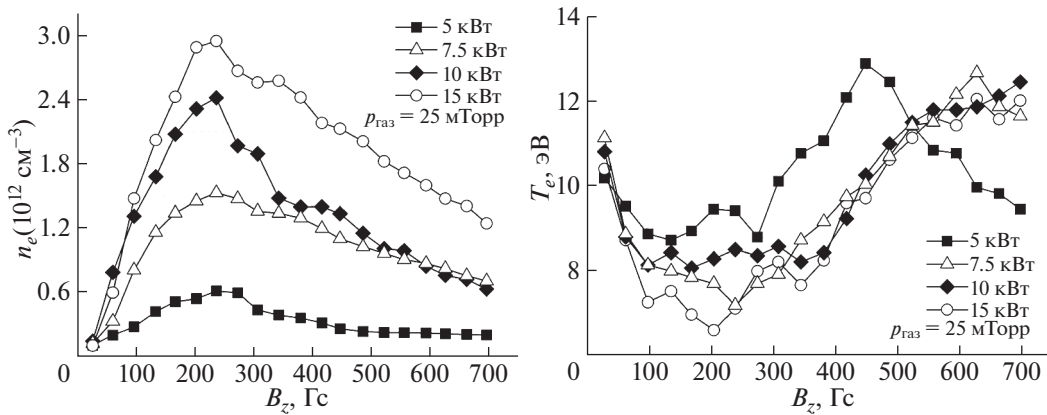


Рис. 7. Плотность плазмы и электронная температура при различном магнитном поле в области NIII антенны.

рой плазмы по сравнению с витковой и NIII антеннами.

Для данной работы все измерения проводились в условиях распространения  $m = 1$  моды и  $k_z > 0$ , но также были проведены измерения плот-

ности плазмы при смене направления магнитного поля при сохранении ориентации электродов ВЧ-антенн, что соответствует случаю  $m = -1$  и  $k_z < 0$ . Поскольку форма витковой антенны соответствует  $m = 0$  моде, а NIII антенна является



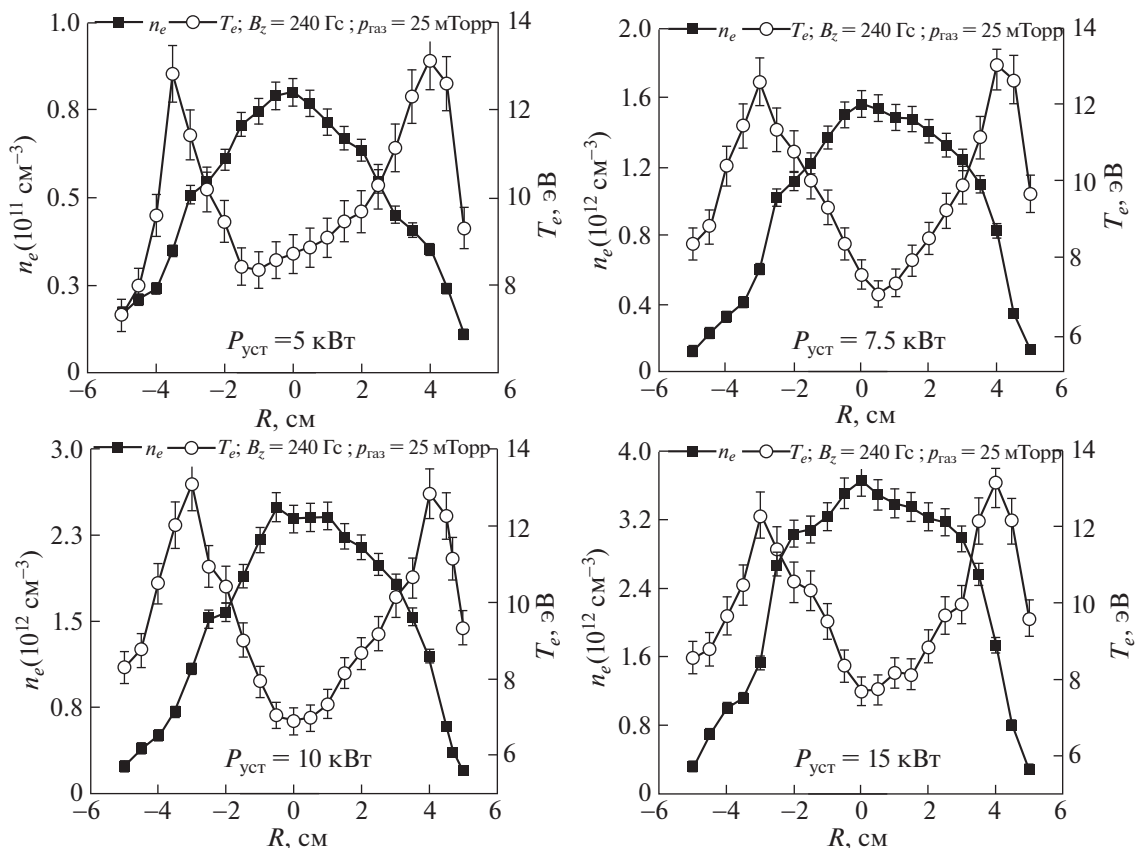


Рис. 8. Радиальные профили плотности плазмы и электронной температуры для НИИ антенны.

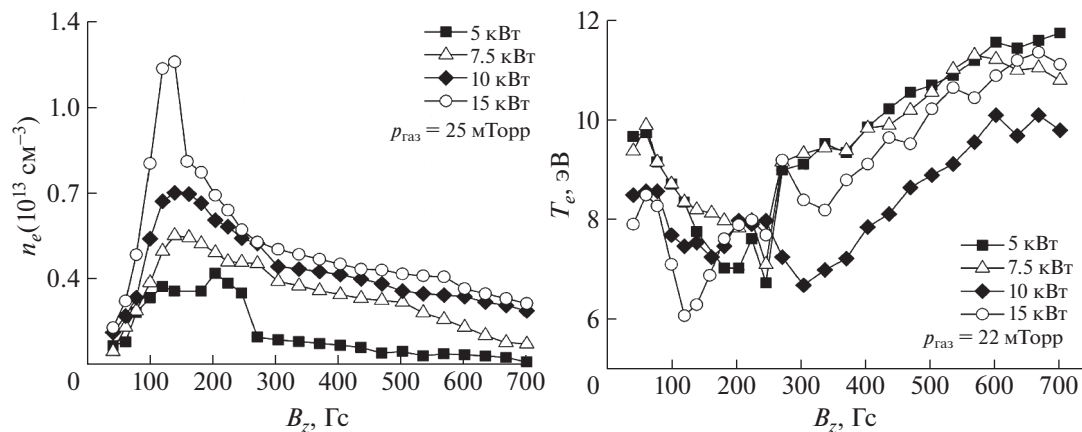


Рис. 9. Плотность плазмы и электронная температура при различном магнитном поле в области Н–Н антенны.

симметричной, смена направления  $B_z$  не влияет на измеряемые  $n_e$  и  $T_e$ . Результаты для Н–Н антенны показаны на рис. 11. Магнитное поле со знаком “плюс” соответствует распространению в камере преимущественно моды  $m = 1$  и положительным волновым числам (направление  $k_z$  совпадает с направлением  $B_z$ , а электрическое поле

волны вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль магнитного поля), и наоборот для знака “минус”. Как видно, плазма в случае  $B_z > 0$  имеет плотность на порядок выше ( $n_{e,\text{max}} \sim 3.6 \times 10^{12}$  см $^{-3}$ ), чем для отрицательного поля ( $n_{e,\text{max}} \sim 0.4 \times 10^{11}$  см $^{-3}$ ).

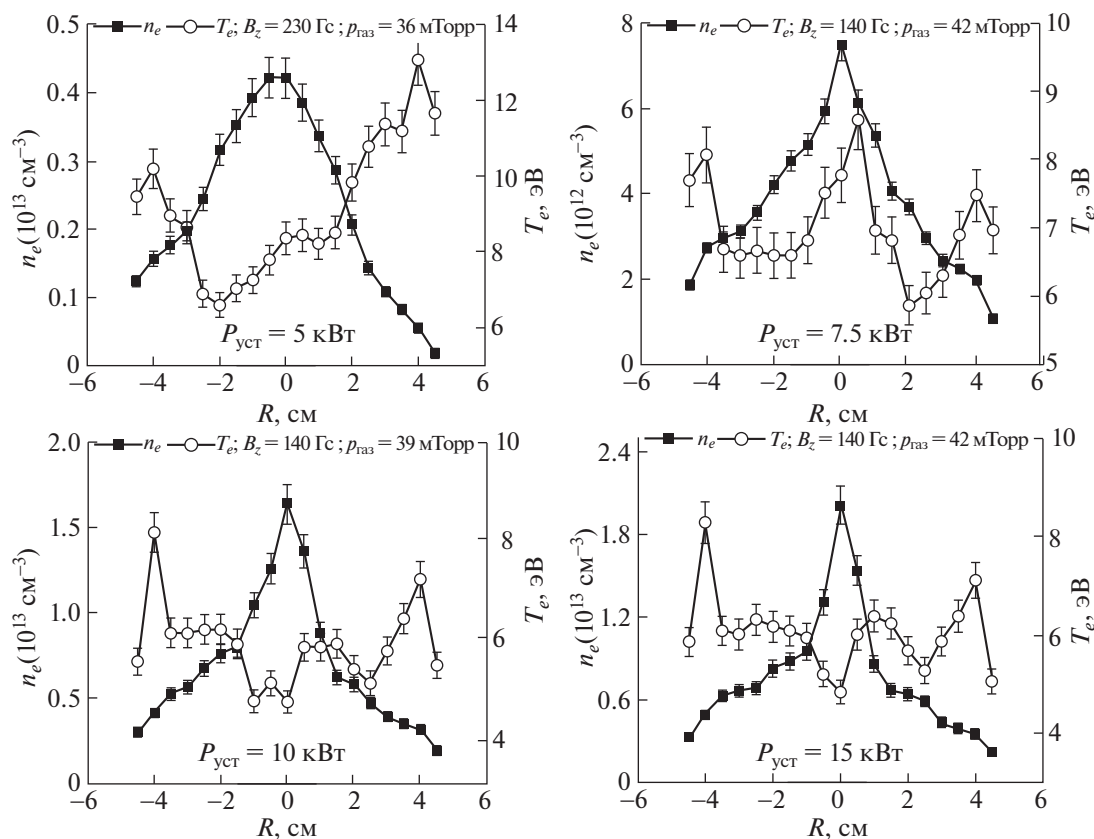


Рис. 10. Радиальные профили плотности плазмы и электронной температуры для Н–Н антенны.

### 3.3. Давление водорода

Для резонансных значений магнитного поля, представленных в разд. 3.2, были измерены зависимости плотности и электронной температуры от давления нейтрального газа в плазменной камере в диапазоне от 10 до 47 мТорр. Распределение плотности по давлению нейтрального газа для витковой антенны (при мощности 5, 7.5, 10 и 15 кВт) показаны на рис. 12. При 5 кВт оптимальное давление газа в камере 23 мТорр, а плотность плазмы  $\sim 1.9 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ; при повышении мощности до 15 кВт плотность достигает значения  $4.4 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$ , а оптимальное давление почти не меняется. Минимум электронной температуры ( $\sim 8 \text{ эВ}$ ) соответствует максимальным значениям плотности, максимум температуры наблюдается в диапазоне от 12 до 15 мТорр.

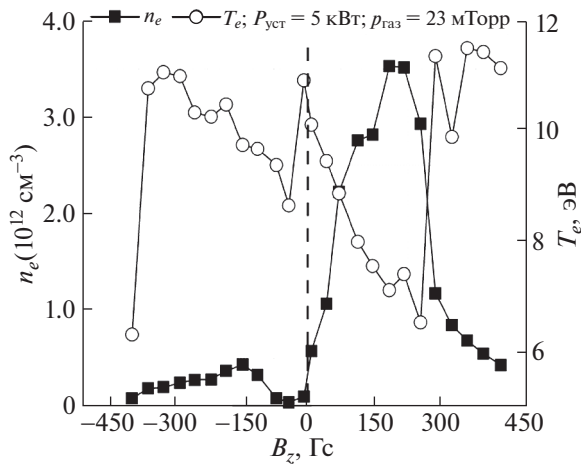
Распределения плотности плазмы и электронной температуры НИИ по давлению в камере при 240 Гс представлены на рис. 13. При 5 кВт оптимальное давление в камере 32 мТорр, а плотность равна  $0.9 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ , с увеличением мощности оптимальное давление газа уменьшается незначительно – 21 мТорр для 15 кВт ( $n_e = 3.6 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ). Температура электронов имеет минимум в области наибольшей плотности ( $T_e \sim 7 \text{ эВ}$ ), и растет

при уменьшении и увеличении давления (кроме случая  $P_{\text{уст}} = 5 \text{ кВт}$ , для которого  $T_e$ , как и  $n_e$ , почти не меняются по давлению).

Н–Н антенна характеризуется повышенным значением оптимального давления по сравнению с витковой и НИИ антеннами (рис. 14). При мощности 5 кВт оптимальное давление в камере  $\sim 36 \text{ мТорр}$ , плотность  $\sim 0.4 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , с ростом мощности оптимальное давление газа увеличивается: при 15 кВт оптимальное давление составляет 42 мТорр, ( $n_e = 2.05 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ). При мощности 10 кВт наблюдается резкий скачок по плотности в диапазоне от 30 до 40 мТорр. Температура электронов имеет минимум в области максимальной плотности при мощности 7.5, 10 и 15 кВт.

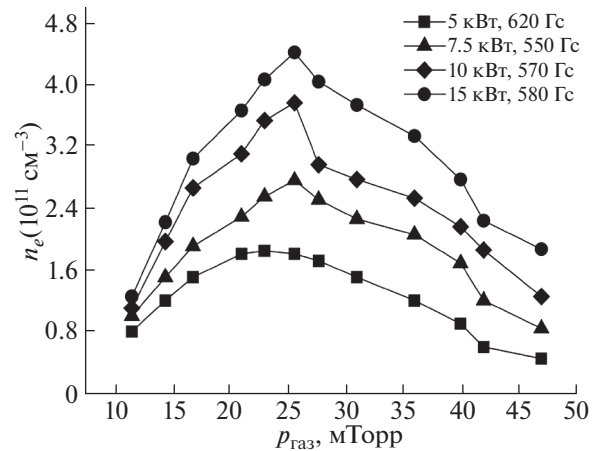
## 4. ОБСУЖДЕНИЕ

В эксперименте достигнуто согласование ВЧ-мощности с плазменной нагрузкой при 15 кВт, и получены распределения плотности по магнитному полю и давлению газа для мощности 5–15 кВт. Также изучены режимы генерации плазмы с использованием трех видов антенн с азимутальным числом  $m = 0; \pm 1$  в пробкотронной конфигурации магнитного поля. Витковая антен-



**Рис. 11.** Зависимость плотности плазмы и электронной температуры от величины и направления магнитного поля при мощности 5 кВт и давлении 23 мТорр;  $B_z < 0$  соответствует  $m = -1$  моде и отрицательным волновым числам,  $B_z > 0$  соответствует  $m = 1$  моде и  $k_z > 0$ .

на продемонстрировала самые низкие результаты по созданию плотной плазмы ( $\sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ), что делает ее неподходящей для предполагаемых реализаций разрабатываемого источника в материаловедческих исследованиях. Причина может заключаться в отсутствии геликонной моды в разряде, и ионизация идет за счет емкостного и индукционного разрядов с характерной низкой плотностью плазмы. Недостатком этой антенны является более высокое ВЧ-напряжение, что накладывает определенные технические ограничения, однако профиль получаемой плазмы обладает высокой однородностью, а при повышении мощности не наблюдается скачков нагрузки плазмы (как в случае  $m = \pm 1$  антеннами), осложняющих согласование. NAGOYA TYPE III антенна дает более высокие значения плотности ( $\sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ), обладая довольно однородными профилями плотности. Также преимуществом НИИ антенны можно считать более плавные зависимости по магнитному полю и меньшее давление нейтрального газа по сравнению с Н–Н антенной, что упрощает режим работы и технические требования к установке. Среди изученных антенн Н–Н антенна демонстрирует лучшие значения плотности плазмы ( $\sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ), что уже наблюдалось в ряде экспериментов [10, 14]. Этот факт можно объяснить более высокими значениями азимутального тока, возбуждаемого геликонной антенной [15]. Кроме того, поскольку геликонные волны обладают круговой поляризацией, спиральная форма геликонной антенны позволяет полю волны эффективнее взаимодействовать с электронами. Оптимальные



**Рис. 12.** Зависимость плотности плазмы от давления в газоразрядной камере при различной ВЧ-мощности (витковая антенна).

магнитные поля для НИИ и Н–Н антенн близки к теоретической оценке (208 Гс), полученной для водородной плазмы в работе [16]. Данная оценка поля соответствует частоте нижнегибридного резонанса для конкретного геликонного источника, что совпадает с результатами работы [17], в которой величина оптимального поля в случае неоднородного распределения также соответствовала зоне нижнегибридного резонанса.

В работе [13] Ф. Ченом показано, что поляризация геликонной антенны значительно влияет на эффективность разряда, поскольку спектр азимутального тока геликонной антенны несимметричен по  $k_z$ , а левополяризованные волны (мода  $m = -1$ ) плохо распространяются в плазме и быстро затухают по сравнению с правополяризованными ( $m = 1$ ). Наибольшая плотность плазмы соответствует азимутальной моде  $m = 1$  и  $k_z > 0$ , а наименьшая –  $m = -1$  и  $k_z > 0$ . Эксперименты по смене направления демонстрируют сильную зависимость плотности от взаимной ориентации Н–Н антенны и магнитного поля, совпадая с результатами, полученными Ченом, что является весомым аргументом в пользу наличия и распространения в разряде геликонных волн с  $m = \pm 1$  в случае Н–Н антенны. Радиальное распределение плотности сохраняет максимум на оси для всех антенн, также как сохраняется и “седловидное” распределение электронной температуры с минимумом на оси и максимумами на периферии плазмы. Предположительно, это связано с нагревом наружного слоя плазмы быстро затухающими электростатическими волнами Трайвелписа–Голланда [18], дающими значительный вклад в поглощение мощности. В эксперименте с Н–Н антенной обнаружено повышение концентрации плотности на оси с увеличением ВЧ-мощности с

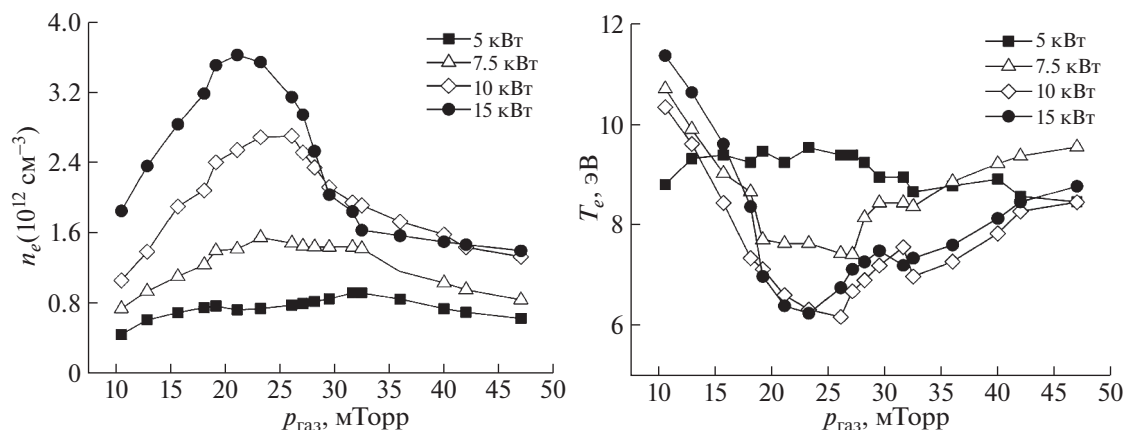


Рис. 13. Зависимости плотности плазмы и электронной температуры от давления в газоразрядной камере при магнитном поле 240 Гс и различной ВЧ-мощности (НИИ антенна).

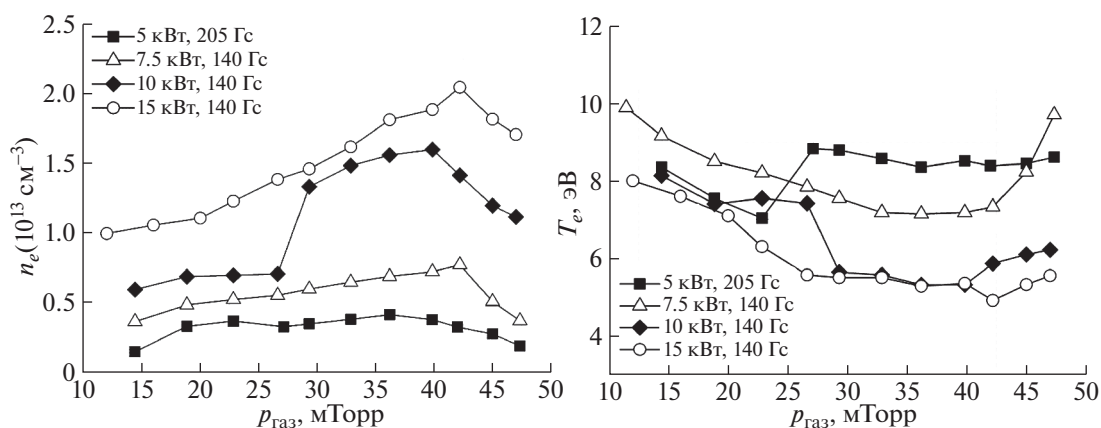


Рис. 14. Зависимости плотности плазмы и электронной температуры от давления в газоразрядной камере при различной ВЧ-мощности (Н–Н антенна).

формированием выраженного пика размером  $\sim 1$  см. При повышении мощности наблюдается уменьшение области оптимального для  $n_e$  магнитного поля, что является важным результатом в рамках разрабатываемой концепции магнитного пробкотрона. По этим причинам в последующих экспериментах планируется сосредоточиться на ВЧ-антеннах геликонного типа, в частности на измерении электромагнитных полей в создаваемом разряде и оптимизации профиля плазмы для целей материаловедческих исследований, а также дальнейшее повышение ВЧ-мощности, вводимой в разряд.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90117 “ВЧ источник плотной плазмы на основе геликонного разряда в неоднородном внешнем магнитном поле для материаловедческих исследований”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kreter A., Brandt C., Huber A., Kraus S., Möller S., Reinhardt M., Schweer B., Sergienko G., Unterberg B. // Fusion Sci. Technol. 2015. V. 68. P. 8. <https://doi.org/10.13182/FST14-906>
2. Ivanov A.A., Davydenko V.I., Kotelnikov I.A., Kreter A., Mishagin V.V., Prokhorov I.A., Shikhovtsev I.V., Unterberg B. // Trans. Fusion Sci. Technol. 2013. V. 63.
3. Linsmeier Ch., Unterberg B., Coenen J.W., Doerner R.P., Greuner H., Kreter A., Linke J., Maier H. // Nucl. Fusion. 2017. V. 57. P. 092012. <https://doi.org/10.1088/1741-4326/aa4feb>
4. Blackwell B.D., Caneses J.F., Samuell C.M., Wach J., Howard J., Corr C. // Plasma Sources Sci. Technol. 2012. V. 21. P. 055033. <https://doi.org/10.1088/0963-0252/21/5/055033>
5. Thakur S.C., Simmonds M.J., Caneses J.F., Chang F., Doerner R.P., Goulding R., Lumsdaine A., Rapp J., Tynan G.R. // arxiv.org/abs/2005.11214.

6. *Virko V.F., Shamrai K.P., Virko Yu.V., Kirichenko G.S.* // Phys. Plasmas. 2004. V. 11. P. 3888.  
<https://doi.org/10.1063/1.1764830>
7. *Иванов А.А., Приходько В.В.* // УФН. 2017. Т. 187. С. 547.
8. *Тимофеев А. В.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. С. 984.
9. *Иванов А.А., Шиховцев И.В., Подыминогин А.А., Авербух И.И., Ахметов Т.Д., Давыденко В.И., Дейчули П.П.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. С. 221.
10. *Virko V.F., Kirichenko G.S., Shamrai K.P.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2002. V. 11. P. 10.  
<https://doi.org/10.1088/0963-0252/11/1/302>
11. *Chen F.F.* // Plasma Phys. Controlled Fusion. 1991. V. 33. P. 339.
12. *Porte L., Yun S.M., Arnush D., Chen F.F.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2003. V. 12. P. 287.  
<https://doi.org/10.1088/0963-0252/12/2/320>
13. *Miljak D.G., Chen F.F.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1998. V. 7. P. 61.
14. *Blackwell D.D., Chen F.F.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1997. V. 6. P. 569.
15. *Arnush D., Chen F.F.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 1239.  
<https://doi.org/10.1063/1.872782>
16. *Kotelnikov I. A.* // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 122101.  
<https://doi.org/10.1063/1.4903329>
17. *Yoshitaka M., Nakashima H., Baity F.W., Goulding R.H., Carter M.D., Sparks D.O.* // Thin Solid Films. 2006. V. 506–507. P. 583.  
<https://doi.org/10.1016/j.tsf.2005.08.063>
18. *Arnush D.* // Phys. Plasmas. 2000. V. 7. P. 3042.

## ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫЙ РАЗРЯД В КОСМОСЕ И В ЛАБОРАТОРИИ

© 2021 г. Е. Г. Шустин\*

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал, Фрязино, Россия

\*e-mail: shustin@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 22.01.2021 г.

После доработки 05.02.2021 г.

Принята к публикации 05.02.2021 г.

Дан обзор процесса и приложений специфического вида газового разряда – пучково-плазменного разряда (ППР). Представлен краткий обзор теории ППР. Описаны основные свойства ППР в активных геофизических экспериментах с инжекцией электронных пучков в ионосферу Земли. Исследования физики ППР привели к обнаружению эффектов, которые успешно применяются в плазменных технологиях для обработки материалов и структур наноэлектроники.

**Ключевые слова:** Газовые разряды, активные геофизические эксперименты, плазменные технологии, плазмохимические реакторы, тонкие пленки, графен

**DOI:** 10.31857/S0367292121060147

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Обзор посвящен истории и успешным применениям явления физики плазмы: пучково-плазменного разряда (ППР). Показано, что это явление находит применение в различных сферах человеческой деятельности и очень полезно в таких различных областях, как активные геофизические эксперименты и технологии создания устройств твердотельной электроники. Автор полагает, что это явление еще будет иметь более широкое применение в нанотехнологиях.

Предыстория пучково-плазменного разряда начинается с явления, обнаруженного в 1949 году независимо в теоретических работах А.И. Ахиезера и Я.Б. Файнберга [1] и Д. Бома и Е.П. Гросса [2]: когда электронный пучок движется через плазму, развивается неустойчивость, которая проявляется в увеличении тепловых флуктуаций скорости и плотности электронов плазмы и пучка в частотном диапазоне, близком к ленгмюровской частоте плазмы. Первое экспериментальное подтверждение этого эффекта описано в [3].

Напомним основные положения теории пучковой неустойчивости [4–6].

Ниже мы используем определения:

$T_e$  и  $n_p$  – температура и плотность электронов плазмы;  $\omega_p = (e^2 n_p / m \epsilon_0)^{1/2}$  – электронная плазменная частота,  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона,  $M$  – масса иона;  $c$  – скорость света;  $V_0$ ,  $V_{\perp}$  – продольная и поперечная скорости электронов пучка;  $B$  – индукция магнитного поля,  $p$  – рабочее давление газа,  $k$  – волновое число,  $\Gamma$  – инкремент неустой-

чивости; индекс “ $b$ ” относится к величинам, относящимся к электронному пучку.

В простейшей модели плазма представляет собой бесстолкновительную холодную ( $T_e = 0$ ) изотропную сплошную среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_p = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ . Для случая бесконечного электронного пучка с плотностью  $n_b$ , движущегося с постоянной скоростью  $V_0$  через плазму, из уравнения Пуассона и уравнений движения и непрерывности легко получить дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_0)^2} = 1 \quad (1)$$

Физический механизм неустойчивости определяется сменой знака кулоновских сил в сгустке электронов:  $\epsilon_p < 0$  при  $\omega < \omega_p$ , и заряды, индуцированные пучком в плазме, фазированы таким образом, что электростатические силы объемного заряда не расталкивают сгусток электронов в пучке, а направлены внутрь сгустка и уплотняют его.

Эта неустойчивость очень сильная: коэффициент усиления колебаний на порядок больше, чем коэффициент усиления в лампе бегущей волны при сопоставимых геометрических размерах и параметрах пучка. Это свойство, а также отсутствие сложных конструктивных элементов (замедляющих структур) сразу привлекли внимание специалистов по СВЧ-электронике [7].

Уравнение (1) получено в предположении, что все электроны пучка имеют одинаковую начальную (невозмущенную) скорость. В действитель-

ности всегда существует разброс скоростей, который определяется происхождением пучка и может быть небольшим относительно средней скорости (пучок создается в лабораторной плазме с помощью электронной пушки) или значительно превышать тепловой разброс, например, когда он генерируется в плазме газового разряда или в космическом пространстве (вспышки 3-го типа на Солнце [8] – так называемый “bump on tail”). Эти ситуации качественно различаются как по инкрементам неустойчивости, так и по характеру нелинейных процессов при ее развитии.

Нелинейность взаимодействия выражается в таких явлениях, как отклонение закона увеличения амплитуды колебаний от экспоненциального; деформация функции распределения электронов пучка по энергиям; изменение спектра колебаний (генерация гармоник и комбинационных частот).

Мы не будем здесь вдаваться в подробности теории пучковой неустойчивости, перенаправляя читателя к цитированным выше монографиям [5, 6]. Отметим только, что как показано в [9, 10], квазилинейная теория пучковой неустойчивости [11, 12] неприменима для описания нелинейных процессов в системе пучок-плазма с малым разбросом пучка по скоростям (гидродинамическая пучковая неустойчивость): эта система должна рассматриваться как стохастическая автоколебательная система с внутренней обратной связью, описываемая в терминах теории динамического хаоса [13].

Образование ППР, то есть создание плазмы с высокой концентрацией (значительно превышающей ожидаемую при столкновении электронов пучка с молекулами газа) при движении электронного пучка через разреженный газ в сильном продольном магнитном поле, было обнаружено и качественно объяснено уже на раннем этапе экспериментальных исследований пучковых неустойчивостей [14–16]. Были экспериментально исследованы пороги зажигания ППР в сильном магнитном поле, спектры колебаний и типы неустойчивостей, ответственные за формирование и поддержание ППР, энергетические соотношения в ППР.

Основными проявлениями пучково-плазменного разряда в сильном магнитном поле ( $B^2/8\pi \gg n_p T_e$ ) являются: резкое увеличение плотности плазмы при определенном (пороговом) значении тока пучка, значительное увеличение диаметра плазменного столба по сравнению с диаметром электронного пучка, усиление высокочастотного излучения из области плазмы и преобразование его спектра (от монохроматического или набора гармоник к широкополосному спектру в диапазоне около  $\omega_p$ ), рост низкочастотных колебаний плотности электронов.

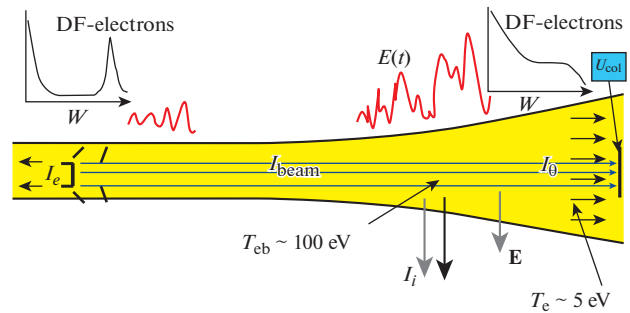


Рис. 1. Схема формирования ППР.

В [17, 18] было показано, что ППР может развиваться и без внешнего магнитного поля. Особенности оптического излучения из области ППР без внешнего магнитного поля описаны в [17]. При повышении давления газа наблюдались четыре стадии формирования ППР (см. рис. 1): область с достаточно резкими границами, занимаемая пучком, который рассеивается при столкновениях электронов пучка с нейтральными частицами, (так называемая пучковая плазма, в англоязычной литературе – electron beam excited plasma – ЕВЕР); тонкий светящийся канал в режиме ионной фокусировки пучка; конфигурация ППР в виде светящегося эллипсоида с диффузными границами, связанного с инжектором пучка тонким каналом пучковой плазмы; и след рассеянного пучка в газе высокой плотности.

Область, занимаемая ППР, заметно больше объема пучка, если магнитное поле не слишком велико (ларморовский радиус электронов  $R_{Le} = mV_0/eB \ll R_0 \ll R_{Li} = MV_0/eB$ ).

Первые работы по теории ППР появились в 1976 г. [19, 20], и последующие исследования по теории ППР были стимулированы в основном желанием применить это явление в микроволновой электронике [14], позже – стремлением объяснить и описать особенности, наблюдаемые в активных геофизических экспериментах и в лабораторных экспериментах, моделирующих их условия [21, 22].

## 2. ФИЗИКА ППР

Обобщая результаты теоретических и экспериментальных работ, можно построить следующую качественную картину возбуждения и свойств ППР (рис. 1).

На начальной стадии разряда (после включения инжекции электронного пучка в газовую среду) газ ионизируется за счет столкновений электронного пучка с молекулами. При малой плотности пучка или низком давлении газа, если скорость ионизации превышает скорость ухода заряженных частиц из области ионизации, эта

“первичная” плазма накапливается и создает пучковую плазму. При достаточных плотностях тока пучка и газа, когда в системе накапливается определенная плотность первичной плазмы, начинает развиваться пучковая неустойчивость (в англоязычной литературе — beam-plasma instability). При заданном наборе параметров эксперимента: ток и ускоряющее напряжение пучка, длина и диаметр рабочей камеры, давление и состав газа в ней — зажигание разряда происходит при превышении током пучка определенного порогового значения, которое связано с этими параметрами эмпирической зависимостью [23]

$$I_t = \frac{E_0^{3/2}}{B_0 L} f(p), \quad (2)$$

где  $f(p)$  является функцией с минимумом и изменяется примерно как  $p^{\pm\beta}$  ( $0.5 < \beta < 1$ ) выше и ниже от этого минимального давления. Например, для  $E_0 = (1-3)$  кэВ,  $B \sim 40$  Гс,  $L \sim 10$  м =  $p_{\min} = (1-2) \times 10^{-5}$  Торр<sup>1</sup>.

Скорость ионизации нейтральных атомов при зажигании ППР увеличивается на 2 порядка по сравнению со скоростью столкновительной ионизации пучком в тех же условиях. Поскольку скорость диффузии также увеличивается с ростом температуры плазмы, плотность плазмы в разряде увеличивается на меньшую величину.

Генерация регулярных колебаний меняется после некоторого времени возбуждением широкополосных стохастических колебаний; это является следствием накопления энергии в объеме, результирующем изменения температуры и плотности плазмы и, следовательно, постоянно меняющимися начальными условиями для входа пучка в объем [24, 25]. В области, занимаемой пучком, образуется сильно неравновесная плазма со средней энергией электронов до сотен электрон-вольт, поэтому функции распределения электронов пучка и плазмы становятся физически неразличимыми. Электроны из этой области создают дополнительный ток на торцевых пластинах камеры. Увеличение электронного тока приводит к увеличению потенциала плазмы в области, занимаемой пучком.

Обмен энергией между электронным пучком и плазмой при пучково-плазменном разряде в замкнутой полости, возбуждаемой электронным пучком, проанализирован в [26]. Определены качественные характеристики энергообмена как при самопроизвольном возбуждении разряда, так и при начальной модуляции пучка регулярными или шумоподобными сигналами. Суммарные потери мощности пучка в разряде меняются во вре-

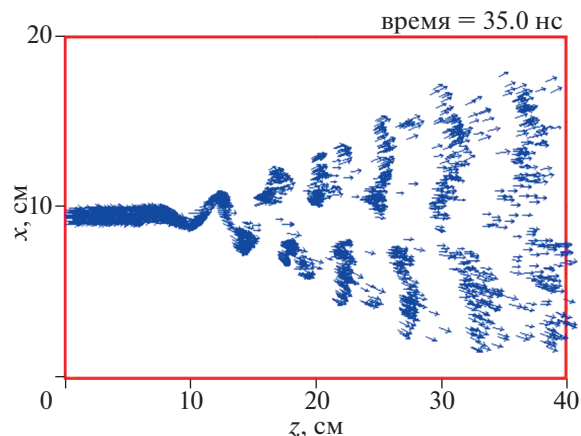


Рис. 2. Вектора скорости электронов пучка в ППР.

мени случайным образом. Их среднее значение достигало  $\sim 40\%$  в условиях компьютерного эксперимента, а доля мощности пучка, затрачиваемая на генерацию ионного потока к периферии разряда, составляла 1.5%.

Нелинейное развитие неустойчивости приводит к быстрому рассеянию электронов как по энергии, вплоть до 150%, так и по углу [25, 27, 28] (“prompt electron echo”) (наглядная иллюстрация этого процесса видна на рис. 2 — результат машинного моделирования системы пучок-плазма без магнитного поля [27], и рис. 3 — фото области ППР без магнитного поля при различных давлениях рабочего газа [17]). Диффузия электронов пучка по скоростям создает окончательное платообразное распределение электронов в пространстве скоростей, нагрев электронов плазмы и соответствующее увеличение скорости ионизации электронами плазмы. При этом наблюдается ускорение заметной части электронов пучка.

Таким образом, происходит создание вторичной плазмы с плотностью, существенно превышающей плотность первичной плазмы. Эта плазма является турбулентной: из-за интенсивных колебаний ее эффективная температура существенно превышает температуру первичной плазмы. Температура в области интенсивной ионизации на порядок достигает 100 эВ. При этом образуется значительная группа перегретых электронов с энергиями до 150 эВ (около 20% от общей плотности плазмы)<sup>2</sup>.

Важное свойство ППР в случае его зажигания в диэлектрической камере отмечено в [29]. Плотность плазмы и электронная температура разряда в 1.2–3 раза больше, чем для плазмы, образованной переносом электронного пучка в металличе-

<sup>1</sup> В условиях космических экспериментов порог зажигания ППР определяется выносом пучка из за движения ракеты поперек магнитного поля.

<sup>2</sup> Этот эффект в космическом эксперименте описан в работе Gringauz K.I., Mishin E.V., Shutte N.M., and Volokitin A.S. Adv. Space Res., 1981, vol. 1, pp. 69–76.



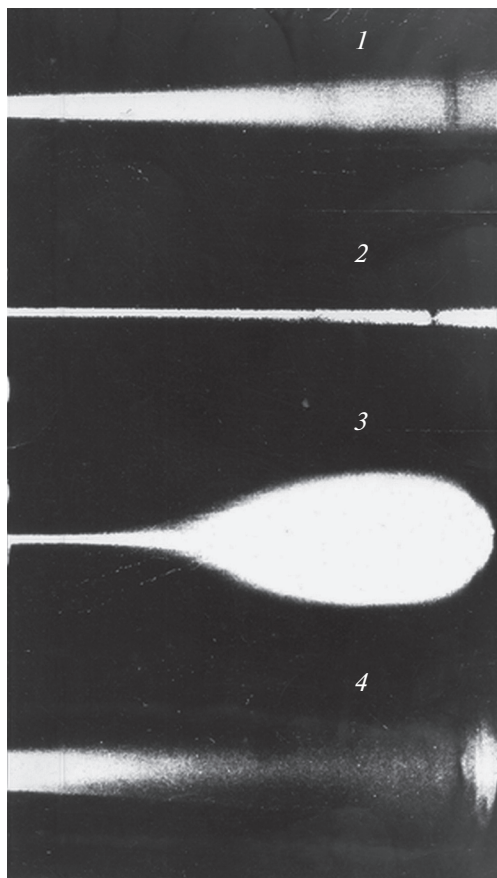


Рис. 3. Вид области распространения пучка в плазменной камере. Рабочий газ – гелий. 1 –  $p = 0.06$  мПа; 2 – 0.25 мПа; 3 – 0.7 мПа; 4 – 7 мПа.

ской вакуумной камере. Дополнительный приток энергии в разряд создается вторичными электронами, эмитируемыми с поверхности полости электронами пучка, и ионами плазмы, ускоренными в пристеночной оболочке. Авторы заметили, что это свойство может приводить к эффективному ионному травлению внутренней поверхности диэлектрических сосудов, что может быть полезно для технологических приложений и, с другой стороны, может быть источником загрязнения рабочего объема.

### 3. ПРИМЕНЕНИЯ

Начиная с 1972–1974 гг., экспериментальные исследования ППР в лабораторных условиях преследовали в основном три цели: изучение перспектив его применения в СВЧ-электронике и в плазмохимии, а также моделирование условий активных ракетных и спутниковых экспериментов с инъекцией электронных пучков в околоземное пространство.

В нескольких лабораториях тогда начались экспериментальные исследования ППР с целью

изучения перспектив его применения в плазмохимии. Эта идея привлекла внимание исследователей в связи с проблемами неравновесной плазмохимии: поскольку температуры ионов и электронов в пучковом плазменном разряде существенно различаются даже при самых высоких давлениях рабочей среды [30]. Таким образом, возможны химические реакции и производство материалов, которые невозможны в обычной равновесной химии. С целью применения ППР в плазмохимии в основном изучалась кинетика частиц плазмы в ППР, а также условия возбуждения ППР при относительно высокой плотности газа [30, 31]. Данное применение ППР не получило широкого распространения в первую очередь из-за низкой производительности таких процессов (максимальное рабочее давление среды, в которой зажигался разряд, составляло несколько мПа).

В 60-е годы в ИРЭ АН СССР и в Харьковском физико-техническом институте были разработаны плазменные генераторы шумового сигнала для применения в устройствах радиоэлектронной борьбы. Однако они не могли конкурировать с созданными в те же годы вакуумными генераторами шума на основе схем с лампами бегущей волны (ЛБВ) (“шумотронами”) [13]: их эффективность была существенно ниже, они плохо контролировались, хотя возможности перестройки частотного диапазона были выше, чем у шумотронов. Плазменные СВЧ-приборы были реализованы в виде гибридных устройств, в которых применялись металлические замедляющие структуры, заполненные плазмой. Это позволило увеличить ток пучка и, как следствие, мощность устройств, а также обеспечить изменение их частотного диапазона. В дальнейшем это направление привело к рождению релятивистской плазменной электроники [32].

Быстро стало ясно, что использование ППР в качестве источника плазмы для СВЧ-устройств неприемлемо: эта плазма крайне нестабильна, так как ее плотность зависит от мощности генерируемых СВЧ-колебаний. Поэтому в релятивистских устройствах используется независимый источник плазмы с трубчатым электронным пучком с энергией в несколько сотен эВ (пучковая плазма). Тем не менее, мы приводим здесь для информации основные параметры таких устройств. На сегодняшний день созданы плазменные генераторы и усилители в диапазоне 2.4–3.1 ГГц мощностью 100–150 МВт, электронной перестройкой частоты в диапазоне 30%, КПД 10–15%, длительностью импульса 200–300 нс. По сравнению с устройствами вакуумной релятивистской электроники эти устройства хоть и имеют меньшую предельную мощность, но выигрывают по длительности импульса и возможности быстрой (электронной) перестройки.

В следующих разделах мы обсудим историю и современное состояние исследований и применений ППР в ближнем космосе, а также в технологиях синтеза и обработки материалов для нанoeлектроники.

#### 4. ППР В КОСМОСЕ

Исследования эффектов инжекции электронных пучков с зондирующих ракет в верхние слои атмосферы стимулировались работами по картированию магнитного поля Земли и намерением создать искусственное полярное сияние (ПС). ПС происходят, когда потоки энергичных электронов высыпаются вдоль магнитного поля в атмосферу на высотах ниже  $\sim 130$  км. После первых экспериментов стало ясно, что некоторые свойства ПС не могут быть объяснены исключительно столкновительной деградацией энергичных электронов, но требуют учета коллективного взаимодействия пучка с плазмой. Таким образом, возникло намерение использовать эмитируемые с космического корабля электронные пучки с контролируруемыми параметрами для исследования ПС в верхних слоях атмосферы. Такие активные эксперименты по ПС проводились с зондирующих ракет и аппарата Sraselab. Начало экспериментов по искусственным ПС было положено 26 января 1969 года [33], когда с острова Уоллопс, штат Вирджиния, была запущена ракета Aerobee 350 с ускорителем электронов. На высоте более 230 километров электронная пушка испускала пучок электронов с энергией 0.5 А и энергией 10 кэВ импульсами длительностью 1 с, направленный вниз вдоль силовых линий магнитного поля Земли. Взаимодействие электронного луча с атмосферой на высоте около 100 километров генерировало лучи полярного сияния, которые можно было фотографировать на Земле с помощью телевизионных камер.

Когда в околоземном космическом пространстве испускается электронный пучок, возникает проблема зарядки устройства и соответствующего замедления или прекращения излучения пучка. Поэтому в первых экспериментах для компенсации заряда использовался ионный или плазменный источник. Однако быстро было обнаружено, что по крайней мере на высотах 100–120 км пучок за счет возбуждения ППР создает плазму, достаточно плотную для такой компенсации.

Позже были выполнены эксперименты по французско-советской программе “Зарница” и “АРАКС” [34–36], имевшей целью создание искусственного ПС. Инжекторы электронного пучка и цезиевой плазмы выводились метеорологическими ракетами на баллистическую траекторию с апогеем 155 км. На рис. 4 показано околоракетное свечение и лучи искусственного

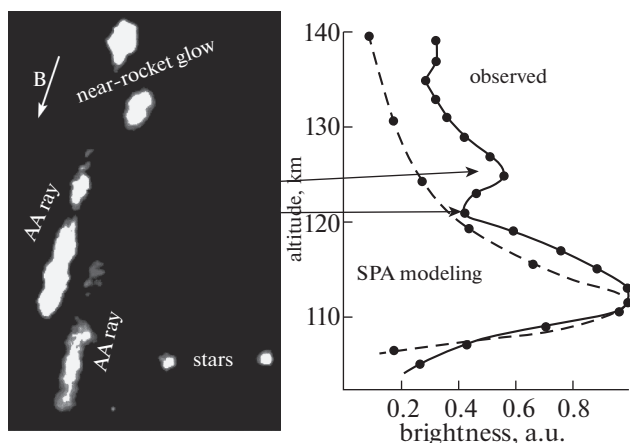


Рис. 4. Пример околоракетного свечения и искусственного сияния лучей в “Зарнице 2”. Справа – высотный профиль крайнего левого луча AA с наложенным профилем Монте-Карло (из [53]).

сияния в эксперименте “Зарница 2” [37]. Там же представлен высотный профиль крайнего левого луча с наложенным профилем, рассчитанным методом Монте-Карло. Ниже 120 км яркость ПС согласуется с расчетами, но выше этого уровня наблюдаемая светимость значительно превышала уровень, определяемый столкновениями пучка с газом. Кроме того, нижний пик несколько шире профиля естественных ПС, что указывает на некоторый дополнительный разброс энергии пучка ( $\sim 10\%$ ).

Аналогичные результаты были получены в эксперименте Polar 5 [38, 39], проведенном в феврале 1976 г. Электронный ускоритель на “дочернем” отделяемом аппарате эмитировал импульсный электронный пучок с максимальным током 0.13 А, энергией  $\sim 10$  кэВ. “Материнская” нагрузка несла фотометр 391.4 нм (длина волны, соответствующая фотону, излучаемому при акте ионизации азота) и диагностические приборы для контроля рассеянных и вторичных электронов, а также волновых эффектов. Полезные нагрузки отделялись медленно, таким образом, их расстояние поперек магнитного поля Земли достигло к концу полета – через 80 минут.

Наблюдаемый уровень освещенности следует нейтральной плотности ниже 130 км, но практически сохраняется постоянным в диапазоне высот от 150 км до апогея 220 км и много больше, чем определяемый столкновениями пучка с нейтралами.

Таким образом, наблюдаемое свечение около ракеты, надтепловые электроны, УКВ-радиоизлучение и тонкая высотная структура ПС-лучей указывают на гораздо более сильное взаимодействие инжектированных электронов с верхними слоями атмосферы, чем обеспечивается элек-

тронными столкновениями. Наблюдения за искусственными авроральными лучами далеко под ракетой показывают, что плотность энергии плазменных волн и сопутствующее возбуждение электронов плазмы увеличиваются в узком слое, называемом слоем сильной ленгмюровской турбулентности [40, 41].

Образование сильной ленгмюровской турбулентности приводит к двухпиковой структуре искусственных авроральных лучей (рис. 4). Некоторые примеры оптических и радиолокационных наблюдений естественных дуг ПС также демонстрируют два пика профилей светимости и ионизации (так называемое “усиленное сияние”). Очевидное сходство между усиленным и искусственным сиянием указывает на общий механизм их генерации.

Интересные результаты по теме пучковой неустойчивости в активных экспериментах представлены в [42]. Эксперимент проводился в 1992 г. на спутнике “Интеркосмос-25” и дочернем спутнике “Магион-3” (эксперимент под названием АРЕХ). Основные результаты – возбуждение волн в ВЧ и ОНЧ-НЧ-диапазонах и генерация потоков быстрых заряженных частиц, которые были зарегистрированы на обоих спутниках. Достигнуто удовлетворительное согласие между расчетными параметрами пучковой плазмы, генерируемой при инъекции “теплого” электронного пучка в холодную ионосферную плазму, и ВЧ-полями, измеренными на субспутнике “Магион-3”.

Последнюю информацию об эксперименте с искусственным сиянием можно найти в [44]. Здесь говорится: “... ракета-носитель ICI-5 длиной 12.1 м была запущена в Нью-Олесунне, Шпицберген, Норвегия, 26 ноября 2019 года”. В сообщении [44] представлено видео светящихся облаков на фоне естественного полярного сияния, которое наблюдалось при запуске ракеты, хотя в сообщении ничего не говорилось об инъекции искусственных электронных пучков в ионосферу. Мы пока не нашли научной информации об этом событии.

По-видимому, первыми работами по лабораторному моделированию эффектов, возникающих в активных геофизических экспериментах с электронными пучками, были [17, 18, 45]. Эти работы были стимулированы началом подготовки активного геофизического эксперимента “Зарница”. Тогда было высказано предположение, что ППР может создаваться в активных экспериментах с инъекцией электронных лучей в ионосферу Земли, и что ППР может быть причиной наиболее интенсивных форм полярных сияний. Эксперименты “Зарница” и “Аракс” подтвердили эти предположения, и в дальнейшем основные исследования ППР развивались в основном в

связи с проблемами активных геофизических экспериментов.

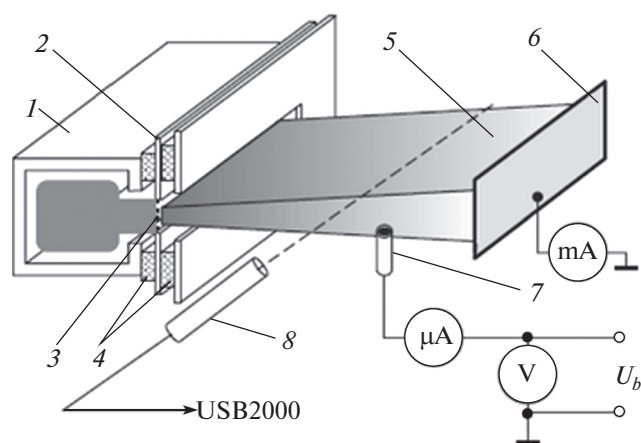
Среди экспериментов, моделирующих условия возбуждения ППР в верхних слоях атмосферы, отметим прежде всего серию исследований, выполненных группами из различных научных организаций в Космическом центре имени Джонсона НАСА, Хьюстон, США [46, 47]. Использовалась испытательная вакуумная камера, представляющая собой цилиндр диаметром 16.8 м и высотой 27.4 м, откачиваемый до остаточного давления  $10^{-6}$  Торр. Камера оснащена средствами для создания постоянного магнитного поля с индукцией до 2 Гс и фоновой плазмы с  $n_p \sim 10^6$  см<sup>3</sup> и  $T_e$  до нескольких электрон-Вольт. На этой установке были проведены эксперименты для определения условий зажигания ППР, распределения энергии пучка в ППД и других свойств и параметров ППР. Лабораторные исследования по моделированию активных геофизических экспериментов с электронными пучками проводились также во Франции, Норвегии и России [48–50]. В работе [50], в частности, был обнаружен “мерцательный” режим ППР: спонтанное погасание и зажигание разряда с частотой порядка 1 с, вызванное “выгоранием” разряда: нарушением баланса заряженных частиц из-за ускоренной диффузии ионов при относительно малой плотности газа. Отметим также интересный эффект, обнаруженный в космическом эксперименте “Грузия-60-Спурт” [51] и промоделированный в [52] – аномалия зарядки эмитирующего электроны аппарата: в определенном диапазоне высот потенциал аппарата поднимался до величины, на 35% превышающей ускоряющее напряжение пучка. Было показано, что этот эффект объясняется конечным временем пролета электронов, возвращающихся на аппарат, при плотности газа, недостаточной для зажигания ППР.

Подробный обзор исследований ППР применительно к естественным и искусственным полярным сияниям можно найти в [53], поэтому мы не продолжаем здесь эту тему.

## 5. ПРИМЕНЕНИЯ В ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

Впервые пучковая плазма в реакторах плазменной обработки для технологий микроэлектроники была применена в [54] и начала активно применяться в последних 90-х годах (см., например, [55, 56]). Она нашла самое разнообразное применение в работах группы S.G. Walton из Naval Research Lab, США (см. [57–59] и цитированные там статьи).

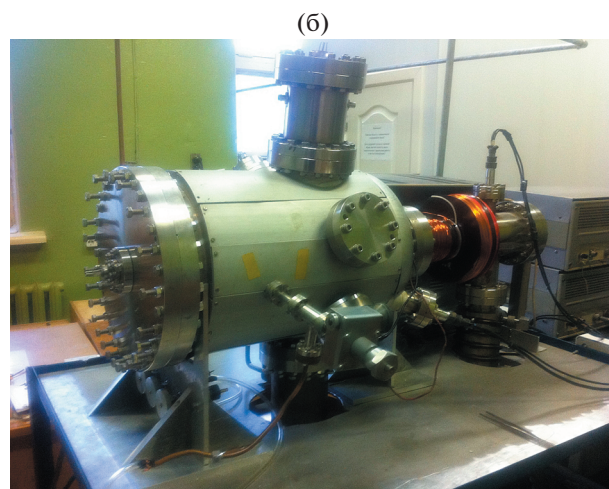
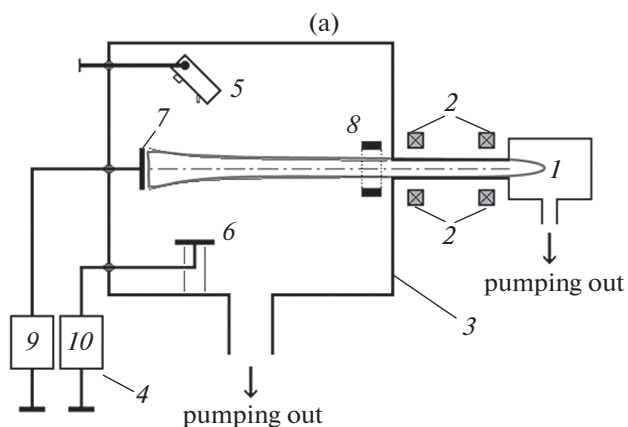
Здесь используется пучок малой плотности ( $1-10$  мА/см<sup>2</sup>), поэтому за счет столкновительной ионизации электронами пучка с молекулами газа



**Рис. 5.** Пучково-плазменный реактор с плазменным катодом [60]. 1 – полый ленточный катод; 2 – анод; 3 – экстрактор; 4 – изолирующие пластины; 5 – электронный пучок; 6 – коллектор; 7 – зонд; 8 – спектрометр.

образуется “спокойная” плазма. В этой системе нет внутренних механизмов ускорения ионов или плазмы. Низкое значение  $T_e$  ( $\sim 1$  эВ) приводит к образованию потока ионов с низкой кинетической энергией ( $< 5$  эВ) на прилегающие поверхности. Кинетическая энергия ионов может быть увеличена с помощью смещения потенциала подложки, при этом распределение ионов по энергиям оказывается относительно узким. Изменение тока электронного пучка обеспечивает простой способ регулирования плотности плазмы. Изменения плотности нейтрального газа или состава газа обеспечивают дополнительный контроль над интенсивностью потока ионов и его химическим составом. Однако для получения достаточной ионизации необходимо относительно высокое давление 1–100 мПа, таким образом, на поток ионов влияют столкновения, и направленность потока достаточно мала.

Подобные установки описаны в [60–64]. На рис. 5 представлена общая схема установок [57–64]. Их электрические параметры одинаковы:  $U_b = 1–3$  кВ,  $I_b = 100–500$  мА (плотность тока 1–5 мА/см<sup>2</sup>). Так же близки параметры плазмы:  $n_e \sim 10^{16}$  м<sup>-3</sup>,  $T_e = 1–2.5$  эВ. Однако вторая установка работает при значительно более высоком давлении 1–10 Па, поэтому эта плазма является сильно столкновительной. Установки этого типа используются для модификации поверхностей керамики и стекла, спекания композитов и подобных задач, поэтому не являются установками для нанoeлектроники. Описание технологических применений установок типа описанной в [60] можно найти в [61–64] и других работах Томского коллектива, руководимого Е.М. Оксом.

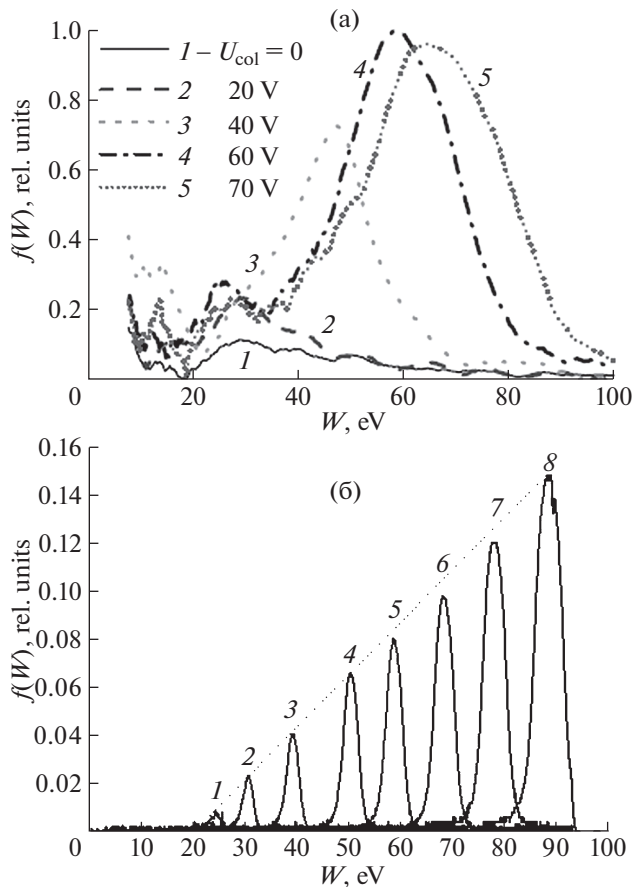


**Рис. 6.** Схема (а) и фото (б) ППР-реактора. 1 – электронный инжектор; 2 – фокусирующие катушки; 3 – вакуумная камера; 4 – блоки питания для управления потенциалами коллектора и подложки; 5 – анализатор энергии ионов; 6 – держатель подложки; 7 – коллектор разряда; 8 – модулирующее кольцо, 9 и 10 – источники питания.

В России исследования по применению ППР в технологиях плазменной обработки для микро- и нанoeлектроники начинаются в конце 90-х гг. Тогда мы начали исследование свойств ионной компоненты в ППР. Схема экспериментальной установки и ее вид представлены на рис. 6.

Мы обнаружили, что ППР при низком давлении газа может служить источником ионов в диапазоне 10–100 эВ [65]. Эти ионы распространяются от ядра разряда к его периферии перпендикулярно оси разряда. Их энергия существенно превышает тепловую энергию электронов и может превышать энергию, приобретаемую ионами в электростатическом поле между столбом разрядной плазмы и стенкой камеры.

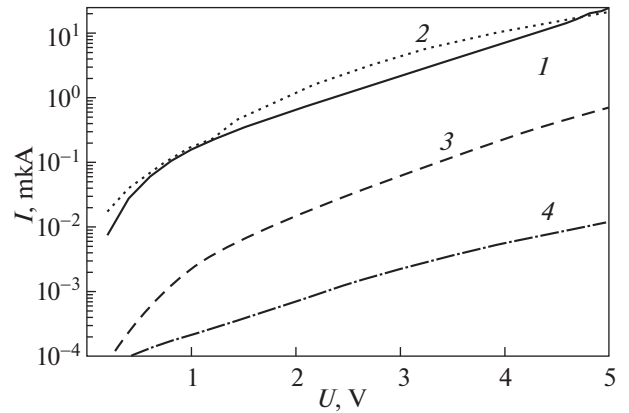
Обычный способ управления функцией распределения ионов, действующих на проводящую структуру на изолирующей подложке – измене-



**Рис. 7.** Распределение энергии ионов, действующих на заземленный электрод у боковой стенки плазменной камеры при различных напряжениях коллектора разряда: (а) —  $U_b = 2$  кВ;  $I_b = 350$  мА;  $H_0 = 2$  мТл; б — то же при разряде при  $I_b = 150$  мА.

ние высокочастотного синусоидального напряжения смещения на электроде подложки. Этот способ приводит к типично широкой, часто бимодальной форме функции распределения ионов по энергиям (ФРИ).

Для плазменного реактора на основе ППР (ППРР) были предложены два метода управления функцией распределения ионов [66–68]. В первом случае на подложкодержатель подавалось периодическое импульсное напряжение; во втором случае на коллектор пучка подавалось импульсное напряжение, модулирующее потенциал плазмы. Мы проверили эти методы экспериментально и с помощью компьютерного моделирования, чтобы исследовать пространственное распределение плотности плазмы ППД и энергии потока ионов к держателю подложки реактора плазменной обработки. Сравнение показало, что второй метод обеспечивает более эффективный контроль функции распределения ионов, действующих на обработанную поверхность. Кроме того,



**Рис. 8.** Вольт-амперные характеристики образцов пленок DLC, осажденных при различных импульсных напряжениях на модулирующем электроде.

он позволяет одновременно обрабатывать образцы на нескольких подложках при разной энергии действующих на них ионов, что делает этот метод эффективным в научных исследованиях. Вид ФРИ в ППР-реакторе при различных токах пучка показан на рис. 7.

Таким образом, был создан новый плазмохимический реактор для обработки материалов, используемых в электронике (рис. 6б) [69].

Изменяя внешние параметры ППР в камере взаимодействия и используя управление электронными пучками по скорости, можно изменять энергию ионов, действующих на поверхность образца, расположенного у боковой стенки камеры, в диапазоне 10–70 эВ (рис. 7). Этот диапазон энергии ионов характерен для плазмохимических реакторов для обработки поверхности материалов для полупроводниковой электроники и фотоники.

### 5.1. Применение для травления поверхности микроструктур

Первым применением реактора с ППР была технология мягкого травления барьерных слоев AlGaAs в полупроводниковых гетероструктурах AlGaAs/InGaAs/GaAs, используемых для создания полевых СВЧ-транзисторов [66, 67]. Анализ протравленных образцов проводился с использованием атомно-силового микроскопа (АСМ — см. рис. 8) и путем измерения концентрации и подвижности двумерного электронного газа, чувствительного к радиационным дефектам.

Скорость травления GaAs составила 3 нм/мин при средней энергии ионов 60 эВ. Поскольку низкоэнергетическое травление требуется в основном для подготовки канавок затвора полевых транзисторов, и глубина травления не должна превышать 10–20 нм, полученная скорость впол-

не достаточна для промышленного применения метода.

Нами был предложен и испытан реактор на ППР для изготовления слоев одноатомного графита (графена) [70]. Тонкие кристаллы графита толщиной от десяти до сотен атомных слоев с поперечными размерами около 0.5 мм, являющиеся заготовками для последующего травления, получали расщеплением монокристаллов природного графита с помощью липкой ленты, которую затем растворяли в ацетоне. Такой метод позволил получить более тонкие исходные кристаллы графита. Полученные тонкие чешуйки кристаллов графита переносили на подложку из поликора и подвергали ионному травлению.

Индиевые электроды прикреплялись к границам образцов, и кристалл утонялся плазменным травлением в реакторе БПД в атмосфере аргона. Толщина пленки измерялась *in situ* по сопротивлению при плазменном травлении. Поведение сопротивления во времени позволило оценить скорость травления и определить его конечный момент времени: сопротивление квадрата однородного монослоя оценивается как  $\sim 2-3$  кОм в зависимости от формы образца. Энергия ионов аргона составляла 50 эВ на начальной стадии травления и 20 эВ на последней стадии, что минимизировало вероятность внесения радиационных дефектов.

Полученные графитовые пленки были охарактеризованы методом рамановской спектроскопии. Так впервые были изготовлены образцы структурно совершенного двухслойного графена с характерными размерами более  $100 \times 100$  мкм<sup>2</sup> и несколько образцов многослойного графена (FLG) с характерными размерами более  $500 \times 500$  мкм<sup>2</sup>.

Таким образом, была продемонстрирована новая методика получения атомно-тонких пленок из природных слоистых материалов с относительно большими латеральными размерами.

### 5.2. Осаждение углеродных пленок

Мы применили наш реактор для осаждения углеродных пленок методом PECVD [71]. Для этого были модифицированы его схема и режимы. Коллектор разряда был изготовлен из графита и питался напряжением катода. Потенциал плазмы контролировался с помощью дополнительного электрода, представлявшего собой короткую трубку, установленную у входа в камеру соосно электронному пучку. Таким образом, атомы и ионы углерода были получены путем распыления материала коллектора, а энергия ионов С и Аг контролировалась путем изменения модулирующего напряжения электрода. Этот метод отличается от обычных схем PECVD-синтеза

DLC-пленок путем крекинга углеводородных газов в газовом разряде, обеспечивая более простое управление энергией ионного потока. Образцы наноразмерных пленок DLC, полученных таким образом, имели разные электрофизические свойства в зависимости от энергии ионов, действующих на осаждаемую пленку. Пленки с максимальным сопротивлением и напряжением пробоя были получены при средней энергии ионов 100 эВ (см. рис. 8).

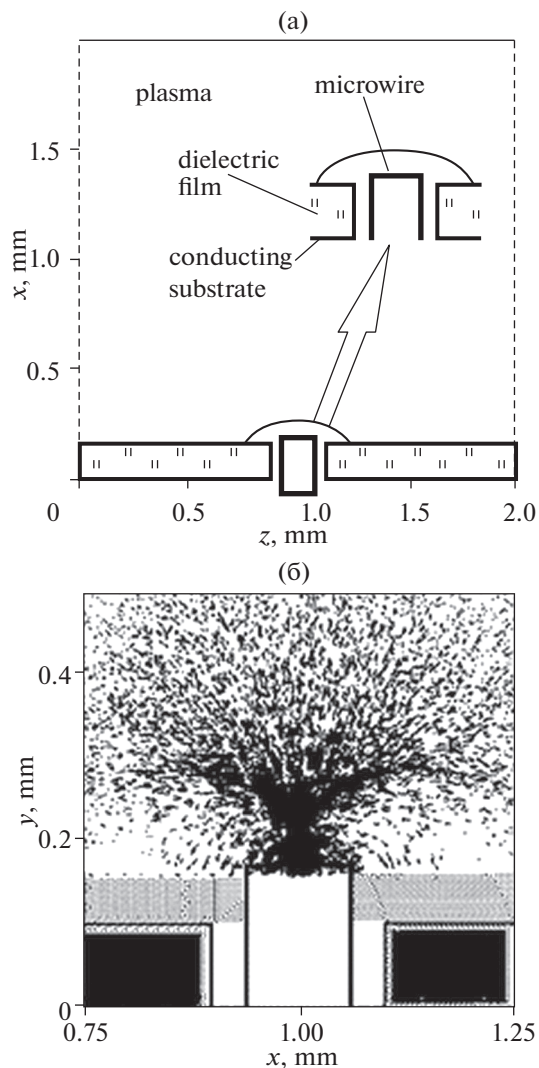
Методом спектроскопии релаксации заряда глубоких уровней (DLTS) выявлено влияние адсорбированных водяного пара и спирта на электрические свойства пленок, что указывает на возможность использования полученных пленок в качестве активного адсорбирующего материала для химических сенсоров [71].

### 5.3. Создание микроструктур

В настоящее время растет интерес к разработке нанoeлектронных устройств с микроструктурами типа “микропровод на изоляторе”. Например, формирование графена в виде нанополоски (nanoribbon) может открыть запрещенную зону, которую можно регулировать, изменяя ширину полоски.

Успешное применение технологии получения бездефектных наноразмерных пленок графена с контролем их толщины *in situ* стимулировало предложение получить таким образом двумерные структуры, перспективные для использования в нанoeлектронике и спинтронике. Таким образом, были начаты работы по получению нанополосок топологического изолятора InSb<sub>3</sub> путем травления нетронутых монокристаллов этого материала, аналогично тому, как были получены образцы двухслойного графена. Эти эксперименты дали смешанный результат: желаемый эффект травления наблюдался для ионов с энергией  $\geq 70$  эВ, действующих на исходные полоски, но полученные структуры оказались сильно неоднородными по толщине. (Из-за этого отрицательного результата информация об этих экспериментах не публиковалась). Возникло естественное предположение, что неравномерность вызвана неоднородностью ионного потока вследствие зарядки диэлектрика, и можно было бы исключить или ослабить отрицательное влияние зарядки на диэлектрике с помощью импульсной модуляции потенциала проводника. Таким образом, мы приступили к компьютерному моделированию процесса плазменного травления таких микроструктур. Моделирование производилось с использованием кода KAPAT [72, 73].

Исследовалось действие ионных потоков из плазмы на поверхность микропровода, который представляет собой плоский проводник, лежа-



**Рис. 9.** Геометрия моделируемой системы (а) и распределение ионов аргона в плоскости  $(X, Y)$  (б) при постоянном потенциале электрода 70 В.

ший на изоляторе, с шириной, меньшей, чем длина Дебая плазмы. Целью этой работы было исследование эффектов зарядки поверхности диэлектрика в этой конфигурации. Основным качественным эффектом зарядки был показан в [74]: формирование электростатической линзы, приводящей к значительной неоднородности профиля ионного пучка, действующего на микропроводу (см. рис. 9).

Затем была построена модель, позволяющая проводить компьютерное моделирование пристеночной области плоского плазменного слоя в условиях, когда стационарное состояние плазмы поддерживается за счет образования заряженных частиц в области, удаленной от стенки [75]. Расчеты выявили изменение распределения электронов по энергии во времени и в пространстве по

ширине листа (охлаждение электронного компонента) из-за поглощения быстрых электронов на стенках, ограничивающих объем плазмы. Показано, что профиль плотности плазмы по ширине слоя имеет резкое уменьшение на границе области регулирования плазмы. Напомним, что стандартная концепция распределения потенциала и плотности плазмы в оболочке и в предварительной оболочке основана на предположении о стабильном распределении энергии электронов в предслое [76]. Таким образом, было показано, что эта концепция дает неточные результаты для пристеночного слоя, когда источник ионизации удален от стенки.

Наконец, была разработана модель, позволяющая исследовать динамику плазмы, прилегающей к микропроводу, либо с постоянным потенциалом, приложенным к микропроводу, либо под действием периодических импульсов [77]. Было обнаружено, что более сложные формы импульсов, чем прямоугольные, могут обеспечить гораздо более однородное распределение скорости травления (на уровне 10%) по поверхности микропровода. Наибольший интерес в этом плане представляет использование в качестве управляющего напряжения квазিশумового сигнала. Изучение таких режимов проводится в настоящее время методами компьютерных, физических и технологических экспериментов.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Плазменные процессы активно развиваются для приложений в нанoeлектронике. В исследованиях участвуют многие исследовательские группы, разработано и имеется на рынке специальное промышленное оборудование для нанoeлектронных технологий. Очевидно, что все новые проблемы, возникающие при продвижении нанoeлектроники к все большим скоростям вычислительных процессов и к все меньшим габаритам электронных устройств, могут быть решены как за счет совершенствования известных процессов и схем, так и за счет применения качественно новых подходов. При этом используются новые источники электронных, ионных и нейтральных пучков как для создания плазмы с определенными свойствами, так и для травления структур при отсутствии или уменьшении поверхностной зарядки и структурных повреждений, вызванных УФ-излучением и излучением частиц. Новые материалы, в частности, материалы групп АЗВ5 и А2В6, углеродные нанотрубки, графен, органические полупроводники и биосупермолекулы, активно изучаются и используются в нанoeлектронике. Это обстоятельство привело к широкому применению атомно-слоевых процессов с предельно низкой концентрацией дефектов и точным контролем реагирующих ком-

понентов и их энергий. При этом многие проблемы обработки материалов АЗВ5 и А2В6 решаются использованием чисто химических процессов, без применения плазмы, однако эти процессы неприменимы при обработке углеродных материалов. Мы считаем, что процессы с использованием импульсных электронных пучков для создания плазмы являются перспективными инструментами для бездефектного травления и осаждения атомно-слоистых пленок.

Автор выражает глубокую признательность своим коллегам Н.В. Исаеву, Д.В. Колодко, В.А. Лузанову, Е.Н. Миргородской, И.А. Сорокину, В.А. Тараканову, М.П. Темиряевой за участие в исследованиях, послуживших основанием для настоящего обзора. Автор благодарен также рецензенту этой статьи, замечания которого позволили дополнить и уточнить ее содержание.

Работа выполнена в рамках государственного задания и частично поддержана РФФИ, гранты № 18-29-19047, 19-07-00432.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. // Доклады АН СССР. 1949. Т. 69. № 3. С. 555.
2. Bohm D., Gross E.P. // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1851.
3. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Николаев Р.М., Корнилов Е.А., Луценко Е.А., Педенко Н.С. // ЖЭТФ. 1960 Т. 11. № 3. С. 493.
4. Файнберг Я.Б. // Атомная энергия. 1961. Т. 11. № 4. С. 313.
5. Briggs R. Electron stream interaction with plasmas. Cambridge, MIT Press, 1964 (Бриггс Р. Двухпучковая неустойчивость. В кн.: "Достижения физики плазмы", пер. с англ. под ред. М.С. Рабиновича. М.: Мир, 1974, с. 132).
6. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, Т. 1, 1974
7. Бернашевский Г.А., Богданов Е.В., Кислов В.Я., Чернов З.С. Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ. М.: Сов. радио, 1965.
8. Железняков В.В. Радиоизлучение Солнца и планет. М.: Наука, 1964.
9. Лавровский В.А., Харченко И.Ф., Шустин Е.Г. // ЖЭТФ. 1973 Т. 65 (6). С. 2236.
10. Кочмарев Л.Ю., Чмил А.И., Шустин Е.Г. // Физика плазмы. 1995. Т. 51 (3). С. 257
11. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // УФН. 1961 Т. 73. С. 701.
12. Шапиро В.Д. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 1515.
13. Залогин Н.Н., Кислов В.Я. Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах М.: Радиотехника, 2006.
14. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б. // ЖТФ. 1961 Т. 31 С. 762.
15. Smullin L.D. // Phys. Rev. Letts. 1962. 9 (1). P. 3–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.3>
16. Getty W.D., Smullin L.D. // Journal of Applied Physics. 1964. 34 (12). P. 3421 <https://doi.org/10.1063/1.1729220>
17. Шустин Е.Г., Попович В.П., Харченко И.Ф. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18. С. 649.
18. Попович В.П., Новскова Т.А., Харченко И.Ф., Шустин Е.Г. // Радиофизика. 1973. Т. 16(6). С. 1109.
19. Галеев А.А., Мишин Е.В., Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. // Доклады АН СССР. 1976. Т. 231 (1). С. 71.
20. Лебедев П.М., Онищенко И.Н., Ткач Ю.В., Шевченко В.И. // Физика плазмы. 1976. Т. 2(3). С. 407.
21. Mishin E., Ruzhin Y. // Adv. Space Res. 1981. V. 1. P. 47. [https://doi.org/10.1016/0273-1177\(81\)90271-4](https://doi.org/10.1016/0273-1177(81)90271-4)
22. Мишин Е.В., Ружин Ю.Я., Телегин В.А. Взаимодействие электронных потоков с ионосферной плазмой. Л.: Гидрометеиздат, 1989.
23. Sotnikov V., Omelchenko Yu., Shapiro V., Shevchenko V., Ashour-Abdalla M., Schriver D. // Phys Fluids. 1992. V. B4. P. 3562. <https://doi.org/10.1063/1.860363>
24. Rowland H.L., Chang C.L., Papadopoulos K. // JGR. 1981. V. 86. P. 9215. <https://doi.org/10.1029/JA086iA11p09215>
25. Тараканов В.П., Шустин Е.Г. // Физика плазмы. 2007. Т. 33 (2). С. 151 (Tarakanov V.P., Shustin E.G. // Plasma Physics Reports. 2007. V. 33 (2). P. 130). <https://doi.org/10.1134/S1063780X07020067>
26. Исаев Н.В., Шустин Е.Г. // Физика плазмы. 2007. Т. 33 (1). С. 43 (Isaev N.V., Shustin E.G. // Plasma Phys. Rep. 33 (1), 38 42 (2007)).
27. Клыков И.Л., Тараканов В.П., Шустин Е.Г. // Физика плазмы. 2012. Т. 38 (3). С. 290 (Klykov I. L., Tarakanov V.P., Shustin E.G. // Plasma Phys. Rep. 2012. V. 38 (3). P. 263). <https://doi.org/10.1134/S1063780X12020067>
28. Кочмарев Л.Ю., Ляхов С.Б., Майоров А.Д., Манагадзе Г.Г., Чмил А.И., Шустин Е.Г. // Физика плазмы. 1985. Т. 11 (5). С. 622.
29. Zolotukhin D.B., Lomaev M.I., Oks E.M., Tyunkov A.V., Yushkov Yu.G. // Plasma Sources Sci. Technol. 2019 V. 28(3). 035018. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/ab0942>
30. Иванов А.А. Физика сильнонеравновесной плазмы. М.: Атомиздат, 1977.
31. Атаманов В.М., Жужунашвили А.И., Крашенинников С.И., Шапкин В.В. // Физика плазмы. 1979. Т. 5(1). С. 204.
32. Стрелков П.С. УФН. 2019. Т. 189. С. 494. (Strelkov P.S. Physics-Uspexhi 2019 32 (5): 494–517. <https://doi.org/10.3367/UFN.2018.09.038443>
33. Hess W.N. Science. 1969. V. 164. P. 1512. <https://doi.org/10.1126/science.164.3887.1512>
34. Cambou F., Dokukin V., Ivchenko V., Managadze G., Migulin V., Nazarenko O. // Space Res. 1975. V. 15. P. 491.



35. *Cambou F., Lavergnat J., Migulin V., Morozov V., Paton B., Pellat R.* Nature 1978. V. 271. P. 723.  
<https://doi.org/10.1038/271723a0>
36. *Cambou F., Dokoukine V., Lavergnat J., Pellat R., Reme H., Saint-Marc A.* // Inn. Geophys. 1980. V. 36. P. 271–278.
37. *Mishin E., Ivchenko V., Milinevsky G.* // Adv. Space Res. 1981 V. 1. P. 163.  
[https://doi.org/10.1016/0273-1177\(81\)90286-6](https://doi.org/10.1016/0273-1177(81)90286-6)
38. *Maehlum B.N., Måseide K., Aarsnes K., Egeland A., Grandal B., Holtet J. et al.* P. 259–28.  
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(80\)90017-3](https://doi.org/10.1016/0032-0633(80)90017-3)
39. *Maehlum B.N., Grandal B., Jacobsen T.A., Trøim J.* // J. Planet. Space Sci. 1980. V. 28 (3). P. 279.  
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(80\)90018-5](https://doi.org/10.1016/0032-0633(80)90018-5)
40. *Мишин Е., Ружин Ю.И., Телегин В.* Взаимодействие электронных пучков с ионосферной плазмой. Ленинград.: Гидрометеиздат, 264 с.
41. *Omelchenko Y., Sotnikov V., Shapiro V., Shevchenko V.* // Planet. Space Sci. 1992. V. 40. P. 535.  
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(92\)90172-K](https://doi.org/10.1016/0032-0633(92)90172-K)
42. *Баранец Н.В., Соболев Я.П., Чобану М., Войта Я., Шмилаур Я., Клос З., Роткель Х., Кирага А., Кудела К., Матишин Я., Афонин В.В., Рябов Б.С., Исаев Н.В.* // Физика плазмы. 2007. Т. 33 (12). С. 1086. (Baranets N.V., Sobolev Y.P., Ciobanu M. et al. Plasma Physics Reports, 2007. 33 (12): 995.)  
<https://doi.org/10.1134/S1063780X07120057>
43. <https://www.andoyaspace.no/2019/11/27/the-ici-5-sounding-rocket-launched-074304-ut-nov-26th-from-ny-alesund-svalbard-into-a-beautiful-red-auro-ral-arc>.
44. <https://www.youtube.com/watch?v=SQ3sMTtYP6Y>
45. *Королев Ю.С., Новскова Т.А., Попович В.П., Харченко И.Ф., Шустин Е.Г.* // Косм. исслед. 1975. Т. 13(5). С. 730. (*Korolyev Y.S., Novskova T.A., Popovich V.P., Kharchenko I.F., Shustin E.G.* // Space Res. 1975. V. 13 (5). P. 730.)
46. *Bernstein W., Leinbach H., Kellogg P., Monson T.* // Geophys. Res. Lett. 1978. V. 5. P. 127.  
<https://doi.org/10.1029/GL005i002p00127>
47. *Bernstein W., Leinbach H., Kellogg P., Monson S.J.* // J. Geophys. Res. 1979. V. 84 P. 7271.  
<https://doi.org/10.1029/JA084iA12p07271>
48. Artificial Particle Beams in Space Plasma Studies, NATO Advanced Study Institutes Ser. B. V. 79 / Ed. Grandal B. NY.: Plenum Press, 1982.
49. Active experiments in space. Paris: European Space Agency, 1983. V. SP-195.
50. *Lyachov S.B., Mayorov A.D., Managadze G.G., Povay-ayev O.A., Chmil A.I., Kochmarev L.Y., Shustin E.G., Friedrich M., Riedler W., Laliashvili A.N., Kiraga A., Klos Z., Kravchik Z.* // Planet. Space Sci. 1982 V. 30 (4). P. 347–357  
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(82\)90040-X](https://doi.org/10.1016/0032-0633(82)90040-X)
51. *Managadze G.G., Balebanov V.M., Burchudladze A.A., Gagaa T.I., Leonov N.A., Lyachov S.B., Martinson A.A., Mayorov A.D., Riedler W.K., Friedrich M.F., Torkar K.M., Laliashvili A.N., Klos Z., Zbyszynski Z.* // Planetary and Space Science. 1988. V. 36 (4). P. 399–410.  
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(88\)90128-6](https://doi.org/10.1016/0032-0633(88)90128-6)
52. *Бессарабский А.Ю., Шустин Е.Г.* // Космические исследования. 1988. Т. 26 (11). С. 953.
53. *Mishin E.V.* // Front. Astron. Space Sci. 201905  
<https://doi.org/10.3389/fspas.2019.00014>
54. *Ishikava J., Takagi T.* // J. Appl. Phys. 1983. V. 54 (6). P. 29.
55. *Schatz K.D., Ruzic D.N.* // Plasma Sources Sci Technol. 1993. V. 2. P. 100–104.
56. *Fernsler R.F., Manheimer W.M., Meger R.A., Mathew J., Murphy D.P., Pechacek R.E., Gregor J.A.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 2137.  
<https://doi.org/10.1063/1.872886>
57. *Leonhardt D., Walton S.G., Fernsler R.F.* // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. 057103.  
<https://doi.org/10.1063/1.2712424>
58. *Walton S.G., Boris D.R., Hern'andez S.C., Lock E.H., Petrova Tz.B., Petrov G.M., Fernsler R.F.* // ECS. Journal of Solid State Science and Technology 2015. V. 4(6). P. 5033.  
<https://doi.org/10.1149/2.0071506jss>
59. *Boris D.R., Wheeler V.D., Nepal N., Qadri S.B., Walton S.G., Eddy C.R.* // Journal of Vacuum Science & Technology A: 2020. V. 38. 040801.  
<https://doi.org/10.1116/6.0000145>
60. *Климов А.С., Ломаев М.И., Окс Е.М., Андрейчик А.П.* // ЖТФ. 2017. Т. 87 (2) С. 192.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2017.02.44124.1825>
61. *Klimov A., Zenin A.* // MATEC Web of Conf. 2018. V. 143. 03008.  
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201814303008>
62. *Kazakov A.V., Medovnik A.V., Oks E.M., Panchenko N.A.* // Journal of Physics: Conf. Ser. 2020. V. 1611 (10). 012014.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1611/1/012014>
63. *Zolotukhin D.B., Klimov A.S., Oks E.M., Tyunkov A.V., Yushkov Yu.G., Zenin A.A.* // Vacuum. 2021. V. 184. 109944.  
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2020.109944>
64. *Klimov A.S., Bakeev I.Yu., Oks E.M., Zenin A.A.* Ceramics International. 2020. V. 46 (14). P. 22276–22281.  
<https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.05.306>
65. *Исаев Н.В., Чмиль А.И., Шустин Е.Г.* Физика плазмы. 2004. Т. 30 (3) С. 292. (*N.V. Isaev, A.I. Chmil', and E.G. Shustin* // Plasma Physics Reports. 2004. 30 (3). P. 263–268.  
<https://doi.org/1063-780X/04/3003-0263>
66. *Shustin E.G.* Journal of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1393. 012058.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1393/1/012058>
67. *Isaev N.V., Temiryazeva M.P., Fedorov Y.V., Shustin E.G.* // Vacuum 2009. V. 83. P. 1350–1354.  
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2009.03.033>
68. *Isaev N.V., Klykov I.L., Peskov V.V., Shustin E.G.* // Vacuum. 2011. V. 85. P. 711.  
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2010.11.004>
69. *Исаев Н.В., Клыков И.Л., Песков В.В., Шустин Е.Г., Визгалов И.В., Курнаев В.А.* // ПТЭ. 2014. № 1. С. 124. DOI: 10.7868/S0032816214010145 (*Isaev N.V., Klykov I.L., Peskov V.V., Shustin E.G., Vizgalov I.V., Kurnaev V.A.* // Instruments a. Experimental Techniques 2014. V. 57 (1) P. 82.)

70. Латышев Ю.И., Орлов А.П., Песков В.В., Шустин Е.Г., Шекин А.А., Быков В.А. // Доклады академии наук. 2012. Т. 442 (2). С. 181. (*Latyshev Yu.I., Orlov A.P., Peskov V.V., Shustin E.G., Schekin A.A., Bykov V.A. Doklady Physics. 2012. V. 57. P. 1–3.*)  
<https://doi.org/10.1134/S1028335812010077>
71. Шустин Е.Г., Исаев Н.В., Клыков И.Л., Песков В.В., Поляков В.И., Руквишников А.И., Темирязева М.П. // ЖТФ. 2013. Т. 83 (2). С. 97. (*Shustin E.G., Isaev N.V., Klykov I.L., Peskov V.V., Polyakov V.I., Rukovishnikov A.I., Temiryazeva M.P. // Technical Physics. 2013. V. 58 (2) P. 245.*)  
<https://doi.org/10.1134/S1063784213020229>
72. Tarakanov V.P. User's Manual for Code KARAT, 1992. Berkeley, Research Associates Inc, Springfield, Va.
73. Тараканов В.П. Универсальный электромагнитный код KARAT / Математическое моделирование. Проблемы и результаты. М.: Наука, 2003. С. 456.
74. Tarakanov V.P., Shustin E.G. // Vacuum. 2015. V. 113. P. 59–63.  
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2014.12.014>
75. Shustin E.G., Tarakanov V.P., Ronald K. // Vacuum. 2017. V. 135. P. 1–6.  
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2016.10.002>
76. Lieberman M.A., Lichtenberg A.J. Principles of Plasma Discharges and Materials Processing. New York.: Wiley, 1994.
77. Tarakanov V.P., Shustin E.G., Ronald K. // Vacuum. 2019. V. 165. P. 262.  
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2019.04.021>

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОАКСИАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УСИЛЕНИЯ ВОЛН СВЧ-ДИАПАЗОНА ПРИ РАЗВИТИИ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

© 2021 г. И. Н. Карташов<sup>a,\*</sup>, М. В. Кузелев<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

\*e-mail: igorkartashov@mail.ru

\*\*e-mail: kuzelev@mail.ru

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.

После доработки 05.01.2021 г.

Принята к публикации 20.01.2021 г.

Проведено теоретическое исследование коаксиальной электродинамической системы с плазменным заполнением, сквозь которую движется релятивистский электронный пучок, для усиления волн СВЧ-диапазона. Получены зависимости инкрементов пространственного усиления пучково-плазменной неустойчивости от частоты внешнего сигнала и параметров усилителя. Промоделирована нелинейная динамика развития неустойчивости и определена эффективность преобразования энергии электронного пучка в энергию СВЧ-колебаний. Использование коаксиальной электродинамической системы позволяет повысить значение тока электронного пучка, транспортируемого через систему, при этом инкремент неустойчивости и эффективность преобразования энергии направленного движения электронов также возрастают.

**Ключевые слова:** коаксиальный волновод, плазменный СВЧ-усилитель, эффект Черенкова, пучково-плазменные неустойчивости

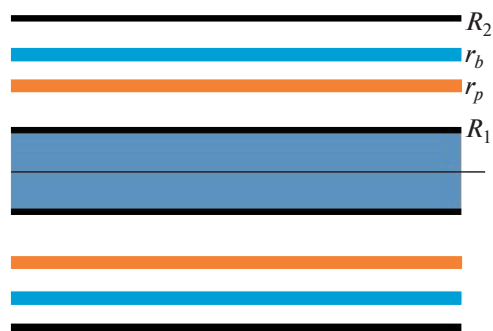
**DOI:** 10.31857/S0367292121060093

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время реализованы мощные импульсные плазменные источники СВЧ-диапазона длин волн (плазменные мазеры) субгигаваттной мощности с диапазоном перестройки рабочей частоты в пределах октавы [1–5]. Принципиальная схема такого устройства изображена на рисунке 1. В волноводе радиуса  $R_2$  расположена тонкая трубчатая плазма толщиной  $\Delta_p$  и средним радиусом  $r_p$  с концентрацией электронов  $n_p$ . Тонкий трубчатый электронный пучок с концентрацией частиц  $n_b$ , толщиной  $\Delta_b$  и средним радиусом  $r_b$  движется со скоростью  $u$  вдоль оси волновода. Вся система помещается в достаточно сильное внешнее магнитное поле, замагничивающее поперечное движение, как электронов пучка, так и плазмы. За счет развития пучково-плазменной неустойчивости возбуждаются плазменные волны и возможно усиление сигнала, подаваемого на вход системы. Традиционно в плазменных мазерах электронный пучок инжектировался вовнутрь трубчатой плазмы. При определенных технических сложностях реализации, некоторыми преимуществами обладает инверсная конфигурация плазменных мазеров [1], когда электрон-

ный пучок распространяется снаружи плазмы, как показано на рис. 1.

В реализованных к настоящему моменту времени плазменных мазерах используются волноводы с односвязной формой поперечного сечения: полые волноводы круглого сечения. В настоящей работе предлагается форма электро-



**Рис. 1.** Принципиальная схема плазменного мазера: отрезок волновода радиуса  $R_2$  с коаксиальным стержнем радиуса  $R_1$  и тонкими трубчатыми электронным пучком и плазмой со средними радиусами  $r_b$  и  $r_p$ .

динамической системы в виде коаксиального волновода и исследуется влияние на усиление внешнего сигнала, которое оказывает металлический стержень радиуса  $R_1$  на оси волновода. Интерес к модификации электродинамической системы продиктован не только техническими соображениями, позволяющими реализовать импульсно-периодический мазер с инверсной конфигурацией, где металлический стержень осуществляет проводящее крепление ограничителя трубчатой плазмы в продольном направлении, без нарушения целостности электронного потока. Имеются и физические предпосылки для модификации электродинамической системы. С одной стороны, следует ожидать, что внесение в систему дополнительных эквипотенциальных поверхностей (металлический стержень на оси системы) приведет к уменьшению инкремента пучково-плазменного взаимодействия. С другой стороны, это приведет к подавлению тормозящего действия объемного заряда электронного пучка, и как следствие, к повышению предельного вакуумного тока, транспортируемого через электродинамическую систему. Повышение предельного вакуумного тока открывает возможность использования более сильноточных электронных пучков, что повысит мощность излучения. Заметим, что коаксиальные волноводы используют в качестве вакуумных электродинамических систем в источниках СВЧ-излучения, основанных на возбуждении релятивистским электронным пучком электромагнитной волны в замедляющей структуре [6–9], в качестве резонаторов для СВЧ-разряда [10, 11] и т.д.

В работе мы исследуем развитие пучково-плазменной неустойчивости в коаксиальной электродинамической системе с тонкостенными замагниченными трубчатыми электронным пучком и плазмой (см. рис. 1). В рамках линейной теории будет получено дисперсионное уравнение, которое будет сведено к кубическому уравнению для комплексных инкрементов пространственного усиления. Далее будут учтены нелинейные эффекты в электронном пучке и получена система из уравнения для медленно меняющейся амплитуды плазменной волны и уравнений движения электронов пучка. Это позволит промоделировать пространственную динамику усиления на стадии насыщения неустойчивости и определить эффективность преобразования направленной энергии электронного пучка в энергию электромагнитных колебаний.

## 2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В пределе бесконечно сильного внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси плазмонаполненного волновода, волновые решения можно представить в виде суперпозиции волн  $E$ -

и  $B$ -типов. Волны  $E$ -типа имеют ненулевую продольную составляющую электрического поля и могут иметь фазовую скорость меньше скорости света  $c$ . Только для этих волн возможно резонансное взаимодействие с электронным пучком и поэтому далее рассматриваются только волны  $E$ -типа. Из системы уравнений Максвелла можно получить уравнение для  $z$ -компоненты электрического вектора Герца (поляризационного потенциала) [12]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = -4\pi j_p \Delta_p \delta(r - r_p) - 4\pi j_b \Delta_b \delta(r - r_b). \quad (1)$$

В правую часть (1) входят  $z$ -компоненты плотности тока плазмы и пучка  $j_p$  и  $j_b$ , поперечное движение электронов в которых замагничено сильным внешним магнитным полем. Электронный пучок и плазма рассматриваются как бесконечно тонкие, что учтено дельта-функциями Дирака  $\delta(r - r_{p,b})$ . Приближения сильного продольного магнитного поля и малой толщины трубчатых пучка и плазмы являются традиционными в плазменной СВЧ-электронике [12]. Предположение о сильном магнитном поле становится оправданным, когда электронная циклотронная частота превосходит ленгмюровскую частоту электронной компоненты плазмы, при этом частота возбуждаемой волны меньше, но одного порядка с ленгмюровской. Для рассматриваемых в настоящей работе плотностей плазмы порядка  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ , приближение замагниченной плазмы и пучка реализуется при индукции внешнего магнитного поля порядка нескольких Тесла. Представление плазмы (и пучка) в качестве тонкостенной трубки приводит к пренебрежению возможности возбуждения электронным пучком высших радиальных мод ленгмюровских волн, запертых внутри плазменного слоя. Однако, при используемых в экспериментах релятивистских электронных пучках, возбуждение этих мод не происходит из-за их малой фазовой скорости.

Из вектора Герца можно определить все компоненты электрического и магнитного полей, в частности

$$E_z = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi. \quad (2)$$

Ток в плазме связан с напряженностью электрического поля уравнением

$$\frac{\partial j_p}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_z(r_p), \quad (3)$$

которое представляет собой уравнение движения электронов в приближении холодной гидродинамики [13]. Для зависимостей вида  $\sim \exp(-i\omega t +$

+  $ik_z z + il\phi$ ), где  $\omega$  – частота сигнала,  $k_z$  – продольное волновое число,  $l$  – номер азимутальной моды, из (3) можно получить диэлектрическую проницаемость холодной плазмы  $\epsilon_p = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  с ленгмюровской частотой  $\omega_p^2 = 4\pi n_p e^2/m$ , где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона. При этом ток в плазме связан с поляризационным потенциалом соотношением

$$\tilde{j}_p = -\frac{\omega}{4\pi i}(\epsilon_p - 1)\chi^2\tilde{\Psi}(r_p), \quad (4)$$

где  $\chi^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$ , а знак тильда используется для обозначения амплитуды соответствующей величины. Аналогичное соотношение в линейном приближении можно записать и для электронного пучка, который имеет диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_b = 1 - \omega_b^2\gamma^{-3}/(\omega - k_z u)^2$ , где  $\omega_b$  – ленгмюровская частота пучка,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$  – релятивистский фактор, так что уравнение (1) сведется к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \phi^2} - \epsilon(r)\chi^2\tilde{\Psi} = 0 \quad (5)$$

с

$$\epsilon(r) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Delta_p \delta(r - r_p) - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \Delta_b \delta(r - r_b). \quad (6)$$

Плазма и электронный пучок делят интервал  $R_1 < r < R_2$  на три вакуумные области:  $R_1 < r < r_p$  (область I),  $r_p < r < r_b$  (область II) и  $r_b < r < R_2$  (область III). Для определенности рассмотрен случай, когда  $r_p < r_b$ . Противоположный случай может быть рассмотрен по аналогии и окончательные выражения для него будут также сформулированы ниже. В каждой из вакуумных областей справедливо уравнение (5), в котором  $\epsilon(r) = 1$ . Его решения в цилиндрических координатах записываются как суперпозиция модифицированных функций Бесселя

$$\tilde{\Psi} = A_{1,2,3} I_l(\chi r) + B_{1,2,3} K_l(\chi r). \quad (7)$$

Здесь индексы у коэффициентов относятся к вакуумным областям I, II и III. По виду решений (7) ясно, что поперечная структура поля имеет поверхностный характер (убывающая зависимость близкая к экспоненциальной) в вакуумной области при удалении от плазмы или пучка.

Решения (7) для разных вакуумных областей необходимо “сшить” в точках, разделяющих эти области. Условия сшивания можно получить непосредственно из уравнения (5) с выражением для диэлектрической проницаемости (6) интегрированием по бесконечно малому отрезку в

окрестности точек  $r_p$  и  $r_b$ . При этом сама продольная компонента электрического поля в виду непрерывности на двух близко расположенных границах раздела остается непрерывной. Таким образом, имеют место следующие условия сшивания:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r_p + 0) - \tilde{\Psi}(r_p - 0) &= 0, \\ \frac{d\tilde{\Psi}(r_p + 0)}{dr} - \frac{d\tilde{\Psi}(r_p - 0)}{dr} &= -\chi^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Delta_p \tilde{\Psi}(r_p), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r_b + 0) - \tilde{\Psi}(r_b - 0) &= 0, \\ \frac{d\tilde{\Psi}(r_b + 0)}{dr} - \frac{d\tilde{\Psi}(r_b - 0)}{dr} &= -\chi^2 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \Delta_b \tilde{\Psi}(r_b). \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме условий сшивания (8) и (9) на решения (7) необходимо наложить обычные условия обращения в нуль тангенциальной компоненты электрического поля на металлических поверхностях, что приводит к граничным условиям

$$\tilde{\Psi}(R_2) = 0, \quad \tilde{\Psi}(R_1) = 0. \quad (10)$$

В итоге, для определения 6 постоянных в (7) имеется 6 дополнительных условий (8)–(10), что приводит к однородной системе уравнений. Условие ее разрешимости представляет собой дисперсионное уравнение, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \left[ \omega^2 - \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp p}^2} \right] \left[ (\omega - k_z u)^2 - \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi^2}{k_{\perp b}^2} \right] &= \\ = \theta \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp p}^2} \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi^2}{k_{\perp b}^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} k_{\perp p,b}^{-2} &= \Delta_{p,b} r_{p,b} E_1(r_{p,b}) E_2(r_{p,b}) \times \\ &\times \left[ \frac{I_l(\chi r_b) K_l(\chi r_p) - I_l(\chi r_p) K_l(\chi r_b)}{E_1(r_b) E_2(r_p) - E_1(r_p) E_2(r_b)} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\theta = \frac{E_1(r_p) E_2(r_b)}{E_1(r_b) E_2(r_p)}, \quad (13)$$

$$E_{1,2}(r) = I_l(\chi r) - \frac{I_l(\chi R_{1,2})}{K_l(\chi R_{1,2})} K_l(\chi r). \quad (14)$$

Дисперсионное уравнение (11) записано в форме, позволяющей придать физический смысл каждому из его элементов. Первое выражение в квадратных скобках есть дисперсионная функция плазменной волны, то есть волны в электродинамической системе в отсутствие электронного пучка [14]. Аналогично, второе выражение в квадратных скобках есть дисперсионная функция пучковых волн (быстрой и медленной), то есть волн в электродинамической системе в отсутствие плазмы. Правая часть с коэффициентом

связи  $\theta$  описывает взаимодействие этих волн. Если коэффициент связи равен нулю, то дисперсионное уравнение распадается на два уравнения, которые описывают отдельно плазменную и пучковые волны. Случай волновода с односвязной формой сечения [12] можно получить из формул (12)–(14) для коаксиального волновода, если устремить  $R_1 \rightarrow 0$ . Легко сообразить и как модифицируется дисперсионное уравнение если  $r_p > r_b$ : в выражении (13) следует сделать замену  $r_p \leftrightarrow r_b$ .

Дисперсионное уравнение (11) содержит сложную зависимость от продольного волнового числа  $k_z$ , в том числе и через аргументы цилиндрических функций. Развитию пучковой неустойчивости и усилению волны соответствуют комплексные значения  $k_z$ , причем экспоненциальный рост сигнала в направлении положительных значений координаты  $z$ , который:  $\sim e^{|\text{Im } k_z| z}$ , определяется мнимой частью продольного волнового числа. Известно [12, 13], что черенковская пучковая неустойчивость развивается в условиях черенковского резонанса  $k_z \approx \omega/u$ . Поэтому представим решение дисперсионного уравнения (11) в виде

$$k_z = \frac{\omega}{u}(1 + \delta), \quad (15)$$

где  $\delta$  – комплексный безразмерный инкремент пространственного усиления, причем  $|\delta| \ll 1$ . Подставляя (15) в (11), проведем разложение величины

$$\chi^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \approx \frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} (1 + 2\gamma^2 \delta) \quad (16)$$

по малому параметру  $\delta$ , ограничиваясь линейным приближением. Заметим, что учитывать поправку пропорциональную  $\delta$  в аргументах цилиндрических функций нецелесообразно. Действительно, дисперсионное уравнение (11) получено в приближении достаточно тонких электронного пучка и плазмы, что заведомо не выполняется при достаточно больших значениях  $k_z$ . При малых же значениях  $k_z$  и  $\omega$  величины  $k_{\perp p}^{-2}$ ,  $k_{\perp b}^{-2}$  и  $\theta$  почти постоянны и в азимутально симметричном случае  $l = 0$ , которым в дальнейшем и ограничимся, приближенно равны

$$k_{\perp p,b}^{-2} = \Delta_{p,b} r_{p,b} \frac{\ln r_{p,b}/R_1 \ln R_2/r_{p,b}}{\ln R_2/R_1}, \quad (17)$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\ln r_p/R_1 \ln R_2/r_b}{\ln r_b/R_1 \ln R_2/r_p} & \text{при } r_p < r_b, \\ \frac{\ln r_b/R_1 \ln R_2/r_p}{\ln r_p/R_1 \ln R_2/r_b} & \text{при } r_b < r_p. \end{cases} \quad (18)$$

В итоге имеем кубическое уравнение относительно комплексного безразмерного инкремента пространственного усиления  $\delta$

$$\begin{aligned} [1 - \alpha_p (1 + 2\gamma^2 \delta)] [\delta^2 - \alpha_b (1 + 2\gamma^2 \delta)] &= \\ &= \theta \alpha_p \alpha_b (1 + 2\gamma^2 \delta)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где

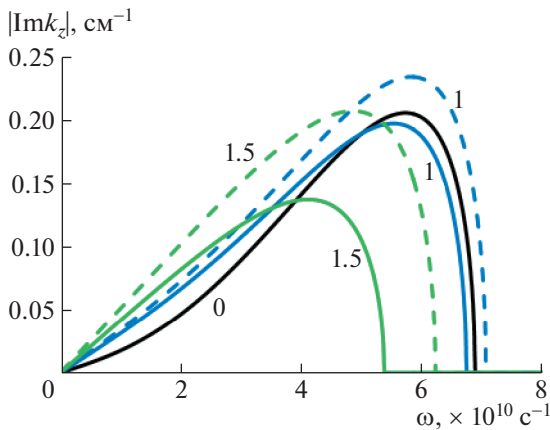
$$\alpha_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_b = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp b}^2 u^2 \gamma^2}. \quad (20)$$

Величины  $\alpha_p$  и  $\alpha_b$  представляют собой безразмерные параметры плотности электронов плазмы и пучка. Различная зависимость от релятивистского фактора обусловлена эффективным увеличением массы релятивистского электрона пучка в уравнениях движения (см. диэлектрическую (22)). Классификация различных режимов неустойчивости, содержащихся в дисперсионном уравнении (19), дана в [15]. Кроме рассмотренных выше медленных волн  $E$ -типа, в коаксиальных волноводах в конечном магнитном поле возможны медленные волны квази- $TEM$ -типа [16], имеющие почти поперечную структуру.

Для работы плазменных мазеров существенное ограничение накладывает невозможность стационарно транспортировать через электродинамическую систему токи, превышающие предельный вакуумный ток. В случае коаксиальной электродинамической системы его значение для тонкого трубчатого электронного пучка определяется формулой [17]

$$I_{lim} = \frac{mc^3}{2e} (\gamma^{2/3} - 1)^{3/2} \frac{\ln R_2/R_1}{\ln r_b/R_1 \ln R_2/r_b}. \quad (21)$$

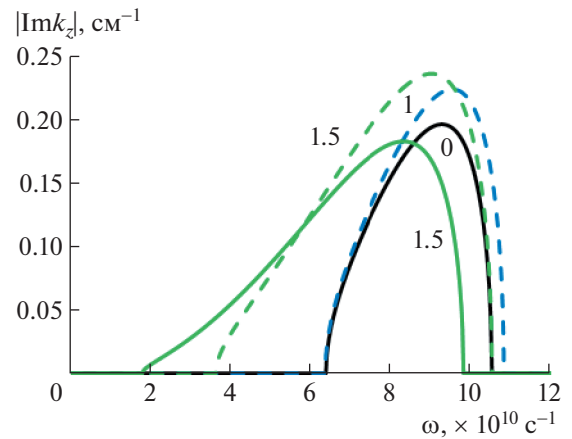
В зависимости от параметров, значение предельного вакуумного тока для коаксиальной электродинамической системы может в несколько раз превосходить его значение для волновода с односвязной формой сечения. Более того, в экспериментах обычно используются токи электронного пучка, не превосходящие значение  $I_{lim}/2$ . Использование коаксиальной электродинамической системы позволяет в значительной степени избавиться от ограничений, связанных с предельным вакуумным током. Заметим, что даже в случае нейтрализации электронного пучка по заряду за счет ионизации газа и ухода избыточных электронов образовавшейся плазмы, транспортируемый ток будет ограничен током Пирса. Его значение будет в  $\gamma^2$  раз выше предельного вакуумного тока и для случая слабoreлятивистских пучков с энергией 270 кэВ и  $\gamma = 1.5$  предельный ток Пирса будет примерно в 2 раза превосходить предельный вакуумный ток.



**Рис. 2.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

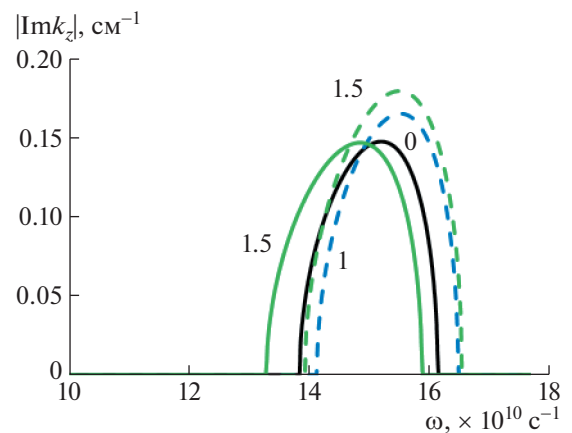
При численном анализе будем ориентироваться на следующие параметры плазменных мазеров, используемых в экспериментах: кинетическая энергия электронов пучка 270 кэВ, ток пучка от 2 кА,  $R_2 = 3 \text{ см}$ ,  $r_p = 1.85 \text{ см}$ ,  $r_b = 2.2 \text{ см}$ ,  $\Delta_p = 0.2 \text{ см}$ ,  $\Delta_b = 0.1 \text{ см}$ . На рис. 2–4 представлены зависимости инкрементов пространственного усиления  $|\text{Im} k_z|$  азимутально симметричной волны от частоты усиливаемого сигнала. Варьируется от рис. 2 к рис. 4 плотность электронов плазмы ( $n_p = 5 \times 10^{12}$ ,  $10^{13}$  и  $2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , соответственно). На каждом из рисунков представлено несколько дисперсионных кривых для различных значений радиуса стержня  $R_1$  и тока пучка. Сплошные кривые построены для тока 2 кА, а штрихованные соответствуют току  $I$ , в котором отношение  $I/I_{lim}$  такое же, как в волноводе с односвязным поперечным сечением.

При  $n_p < 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$  инкременты относительно малы, но с ростом концентрации электронов плазмы их значения возрастают. Это соответствует ситуации, что пучковая неустойчивость имеет пороговый характер по плотности плазмы и возникает при  $\omega_p^2 > k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2$  [12]. При достаточно больших значениях концентрации электронов плазмы инкременты снова начинают плавно уменьшаться. Кроме того, при увеличении концентрации электронов плазмы увеличивается и плазменная (ленгмюровская) частота. Это приводит к увеличению резонансной частоты черенковской пучковой неустойчивости и смещению максимумов инкрементов в более высокочастотную область.

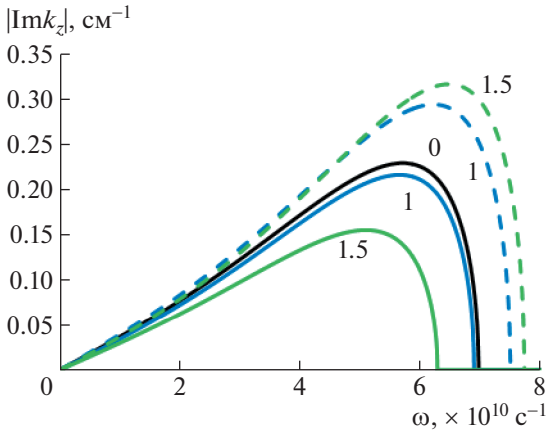


**Рис. 3.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

Увеличивая радиус внутреннего металлического стержня волновода  $R_1$  (или, другими словами, приближая эквипотенциальную поверхность к области, занимаемой плазмой) инкремент уменьшается, а оптимальная частота (соответствующая максимуму инкремента пространственного усиления) сдвигается в область более низких частот. Физически это связано с тем, что металлическая поверхность вблизи плазмы “нейтрализует” ее, и взаимодействие с электронным пучком ослабевает. При  $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$  (рис. 2) использование металлического стержня с радиусом  $R_1 < 1 \text{ см}$  практически не изменяет инкре-



**Рис. 4.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 5.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления (пучок внутри,  $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

мент. При дальнейшем увеличении концентрации электронов плазмы до значения  $10^{13} \text{ см}^{-3}$  (рис. 3) в случае односвязного поперечного сечения волновода область неустойчивости располагается не от нулевых значений частоты, как при меньшей концентрации плазмы. Эта ситуация известна [12] как коллективный эффект Черенкова, в противоположность одночастичному эффекту Черенкова как в случае  $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Различие между этими эффектами состоит в том, что, успеют ли проявиться колебательные свойства электронного пучка за время развития неустойчивости. Когда инкремент велик по сравнению с частотой собственных колебаний электронного пучка реализуется одночастичный эффект Черенкова, в противоположном случае – коллективный. С увеличением внутреннего радиуса коаксиального волновода, начиная со значений  $R_1 = 1.6 \text{ см}$  коллективный эффект Черенкова трансформируется в одночастичный. Уменьшение инкремента неустойчивости с трансформацией коллективного механизма в одночастичный означает еще более сильное уменьшение собственной частоты колебаний пучка. При концентрации электронов плазмы  $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$  (рис. 4) инкремент уже начинает уменьшаться. При значениях внутреннего радиуса коаксиального волновода  $R_1$  от нуля и вплоть до области занимаемой плазмой инкремент изменяется слабо. Однако, области неустойчивости становятся достаточно узкими, что не очень удобно при экспериментальной реализации.

Использование коаксиальной электродинамической системы при одном и том же значении

тока электронного пучка не приводит к улучшению усилительных свойств плазменного мазера. Однако, такая модификация увеличивает предельный вакуумный ток, что позволяет реализовать большие значения тока электронного пучка. На рассмотренных выше рис. 2–4 штриховыми линиями показаны инкременты неустойчивости пучково-плазменной системы, в которой ток пучка увеличен до значения 2.8 кА при  $R_1 = 1 \text{ см}$  и 3.6 кА при  $R_1 = 1.5 \text{ см}$ , то есть отношение  $I/I_{lim}$  такое же, как в волноводе с односвязным поперечным сечением. Увеличение пространственного инкремента усиления при этом составляет 10...15%.

Приведем еще те же результаты для случая, когда плазма и пучок меняются местами, то есть  $r_p = 2.2 \text{ см}, r_b = 1.85 \text{ см}$  (пучок внутри плазменной трубки), остальные же параметры остаются неизменными. Эти результаты представлены на рис. 5–7. Отличие от уже представленных результатов состоит в том, что при изменении радиуса внутреннего металлического стержня при неизменном токе электронного пучка частота, соответствующая максимуму пространственного инкремента неустойчивости, смещается существенно меньше. Малое смещение частоты, соответствующей максимуму пространственного инкремента неустойчивости, можно объяснить удаленностью плазменной трубки от внутреннего металлического стержня, что слабо сказывается на изменении дисперсионных свойств поверхностной плазменной волны при изменении  $R_1$ . Штриховыми линиями на рис. 5–7 показаны инкременты неустойчивости пучково-плазменной системы, в которой ток пучка увеличен до значения 3.6 кА при  $R_1 = 1 \text{ см}$  и 6.6 кА при  $R_1 = 1.5 \text{ см}$ . Увеличение пространственного инкремента усиления при этом составляет 20...30%.

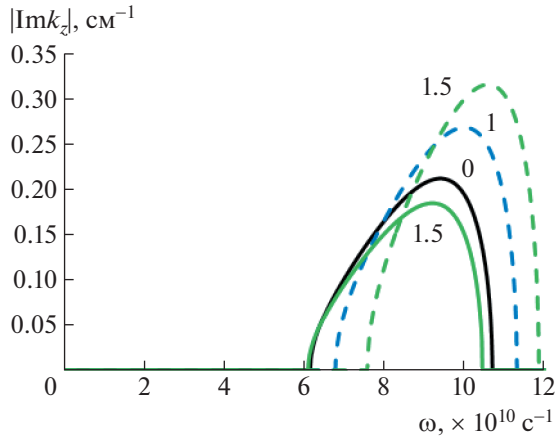
### 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ И НАСЫЩЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для описания насыщения пучково-плазменной неустойчивости учтем нелинейность в пучке. Для этого запишем уравнения движения электронов, где в качестве независимой переменной выбрана координата  $z$ ,

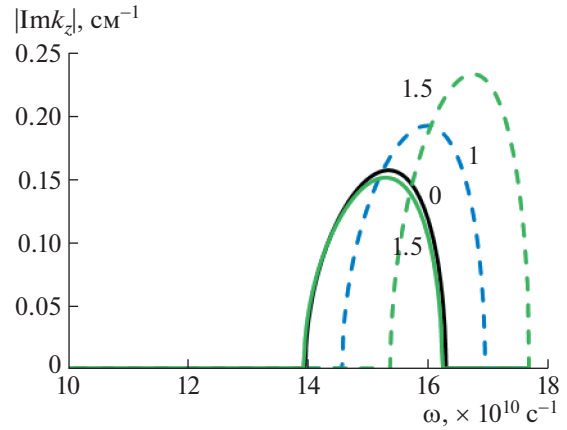
$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_z}, \quad \frac{dv_z}{dz} = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{eE_z(r_b)}{mv_z}. \quad (22)$$

В условиях, когда скорость электронов пучка  $v_z$  при взаимодействии с возбуждаемой волной меняется незначительно, то есть  $\eta = (u - v_z)/u \ll 1$





**Рис. 6.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления (пучок внутри,  $n_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}$ , 1 см, 1.5 см, штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 7.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}$ , 1 см, 1.5 см, штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

и, вводя локальное время  $\tau = t - z/u$ , уравнения движения (22) можно записать в виде

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\eta}{u}, \quad \frac{d\eta}{dz} = -\frac{\left(1 + 2\frac{u^2}{c^2}\gamma^2\eta\right)^{3/2}}{mu^2\gamma^3} eE_z(r_b). \quad (23)$$

Плотность тока пучка представим как сумму вкладов от каждого отдельного электрона

$$j_b = en_b u \int \delta(\tau - \tau(z, \tau_0)) d\tau_0, \quad (24)$$

где  $\tau_0$  – время влета электрона в область взаимодействия через плоскость  $z = 0$ ,  $\tau(z, \tau_0)$  – решение уравнений (23), т.е. локальное время, когда электрон, влетевший в момент времени  $\tau_0$ , окажется в точке  $z$ . Уравнения (23) дополняются условиями влета частиц

$$\tau(z = 0) = \tau_0, \quad \eta(z = 0) = 0. \quad (25)$$

В выражениях для вектора Герца и тока в плазме выделим амплитуду и экспоненциальный множитель  $\exp(-i\omega t + ik_z z)$ , а вектор Герца дополнительно разложим в ряд по мембранным функциям [18], т.е. представим

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_n \varphi_n(r) \left[ A_n(z) e^{-i\omega t + ik_z z} + c.c. \right], \quad (26)$$

$$j_p = \frac{1}{2} \left[ \tilde{J}_p e^{-i\omega t + ik_z z} + c.c. \right], \quad (27)$$

Символы *c.c.* означают комплексное сопряжение, а мембранные функции цилиндрического коаксиального волновода есть

$$\varphi_n(r) = J_0(k_n r) - \frac{J_0(k_n R_1)}{N_0(k_n R_1)} N_0(k_n r), \quad (28)$$

где  $J_0$  и  $N_0$  – функции Бесселя и Неймана нулевого порядка, а  $k_n$  определяется решением следующего уравнения:

$$J_0(k_n R_2) N_0(k_n R_1) - J_0(k_n R_1) N_0(k_n R_2) = 0. \quad (29)$$

Волновой вектор волны в условиях черенковского резонанса равен  $k_z = \omega/u$ . При слабой нелинейности  $A_n(z)$  будет медленной (на масштабах длины волны) функцией  $z$ . Продольная компонента электрического поля волны определяется из (2) и (26) с учетом медленности изменения  $A_n(z)$

$$E_z = \frac{1}{2} \sum_n \varphi_n(r) \left[ \hat{A}_n(z) e^{-i\omega t + ik_z z} + c.c. \right], \quad (30)$$

где  $\hat{A}_n(z) = -\frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} \hat{L} A_n(z) = -\frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} \left( 1 - 2i\gamma^2 \frac{u}{\omega} \frac{d}{dz} \right) A_n(z)$ . Подставляя (26) и (27) в (1) и выражая коэффициенты  $A_n(z)$ , находим

$$A_n(z) = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{k_n^2 + \omega^2 / (u^2 \gamma^2)} \times \frac{S_p \varphi_n(r_p) \tilde{J}_p + S_b \varphi_n(r_b) \tilde{J}_b}{\|\varphi_n\|^2}, \quad (31)$$

где  $S_{p,b} = 2\pi r_{p,b} \Delta_{p,b}$ ,  $\|\Phi_n\|^2$  – квадраты нормы мембранных функций. Амплитуда плотности тока пучка определяется соотношением

$$\tilde{j}_b = en_b u \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} e^{i\omega\tau(z,\tau_0)} d\tau_0. \quad (32)$$

Подставляя (27) и (30) в (3), получим уравнение

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2} \hat{L}\right) \tilde{j}_p = \frac{\omega_p^2}{k_{pb}^2 u^2 \gamma^2} \hat{L} \tilde{j}_b, \quad (33)$$

где

$$k_{\perp p,b}^{-2} = \sum_n \frac{1}{k_n^2 + \omega^2 / (u^2 \gamma^2)} \frac{S_{p,b} \Phi_n^2(r_{p,b})}{\|\Phi_n\|^2}, \quad (34)$$

$$k_{pb}^{-2} = \frac{S_b}{S_p} k_{bp}^{-2} = \sum_n \frac{1}{k_n^2 + \omega^2 / (u^2 \gamma^2)} \frac{S_b \Phi_n(r_p) \Phi_n(r_b)}{\|\Phi_n\|^2}. \quad (35)$$

В уравнениях (32), (33) рационально сделать обезразмеривание величин  $\tilde{j}_{p,b}$  на  $en_{p,b}u$ . Обезразмерим далее время  $\tau$  с помощью частоты  $\omega$ , то есть  $y = \omega\tau$ , координату  $z$  с помощью волнового числа  $k_z = \omega/u$ , то есть  $\xi = z\omega/u$ . Введем еще величины

$$\theta = \frac{k_{pb}^{-2} k_{bp}^{-2}}{k_{\perp p}^{-2} k_{\perp b}^{-2}}, \quad \alpha_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_b = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp b}^2 u^2 \gamma^2}, \quad (36)$$

а также переобозначим

$$\frac{\omega_p^2}{u^2 \gamma^5} \sqrt{\frac{S_p}{S_b}} \theta k_{\perp p}^{-1} k_{\perp b}^{-1} \tilde{j}_p \rightarrow \tilde{j}_p$$

и окончательно запишем систему (23), (25) и (32), (33) в виде

$$(1 - \alpha_p \hat{L}) \tilde{j}_p = \alpha_p \alpha_b \theta \hat{L} \tilde{j}_b, \quad \hat{L} = 1 - 2i\gamma^2 \frac{d}{d\xi} \quad (37)$$

$$\tilde{j}_b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{iy} dy_0, \quad (38)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \eta,$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = i \frac{\left(1 + \frac{2u^2}{c^2} \gamma^2 \eta\right)^{3/2}}{2} \left[ \hat{L} (\tilde{j}_p + \alpha_b \tilde{j}_b) e^{-iy} - c.c. \right], \quad (39)$$

$$y(\xi = 0) = y_0, \quad \eta(\xi = 0) = 0. \quad (40)$$

Параметры  $\theta$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_b$ , а также входящие в них величины  $k_{\perp p}^{-2}$ ,  $k_{\perp b}^{-2}$ ,  $k_{pb}^{-2}$ ,  $k_{bp}^{-2}$ , с одной стороны определены формулами нелинейной теории (34)–(36), а с другой стороны формулами линейной теории (12), (13), (20). Линеаризуя (38), (39), можно показать, что, несмотря на разную форму за-

писи, выражения для  $\theta$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_b$  в линейной и нелинейной теориях совпадают.

Ниже приведены результаты расчетов для тех же параметров, которые использовались при построении рисунков 2–4. Согласно результатам линейной теории, при варьировании радиуса внутреннего стержня коаксиального волновода область неустойчивости трансформируется, и, в частности, частота, соответствующая максимуму коэффициента усиления, изменяется. Будем в расчетах предполагать, что усилитель используется в оптимальном режиме, то есть частота сигнала и параметры плазмы подобраны таким образом, что для данной частоты инкремент пространственного усиления максимален. Это наиболее естественный режим работы усилителя. Амплитуду сигнала от внешнего генератора на входе будем задавать, с одной стороны, достаточно малой, чтобы усиление имело как участок с линейным режимом (экспоненциальный рост), так и участок, в котором пучковая неустойчивость насыщается и дальнейшего усиления сигнала не происходит. С другой стороны, амплитуду сигнала будем брать достаточной, чтобы на расстояниях порядка длины плазменного мазера (до 1 метра) пучковая неустойчивость успевала развиваться и успели проявиться нелинейные эффекты, приводящие к ее насыщению.

Величина

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2u^2}{c^2} \gamma^2 \eta\right)^{-1/2} dy_0 \quad (41)$$

характеризует относительную долю энергии частиц пучка в точке  $\xi$ . На рис. 8–10 представлены зависимости величины  $1 - P$ , которая пропорци-

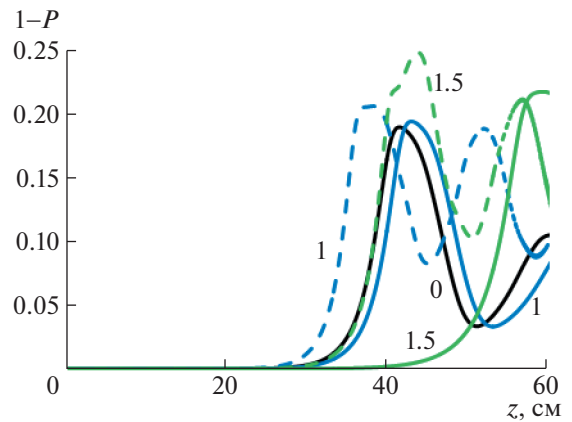
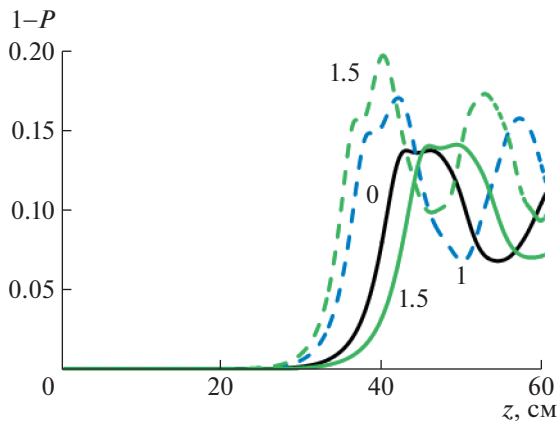
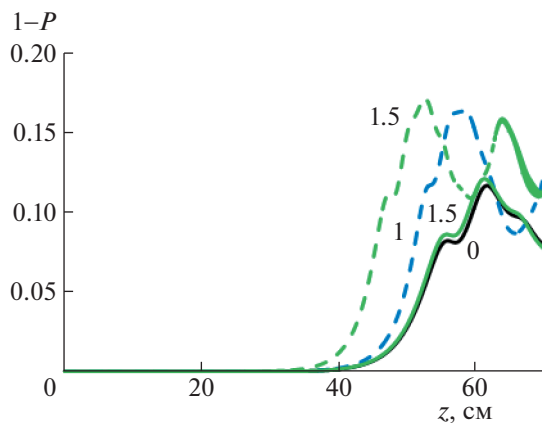


Рис. 8. Пространственная зависимость эффективности ( $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 9.** Пространственная зависимость эффективности ( $n_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 10.** Пространственная зависимость эффективности ( $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

ональна эффективности преобразования энергии направленного движения электронов в энергию электромагнитных волн. На начальном участке имеется экспоненциальный рост сигнала за счет развития пучково-плазменной неустойчивости в линейном режиме. На некотором расстоянии от входа усилителя эффективность достигает максимума порядка 15...25% (насыщение неустойчивости), а затем снижается (в некоторых случаях имеют место повторные повышения и понижения с уменьшающейся амплитудой). Максимальное значение эффективности преобразования направленной энергии электронного пучка в энергию электромагнитных колебаний ведет себя аналогично величине инкремента простран-

ственного усиления, т.е. с ростом инкремента повышается и эффективность. Такая ситуация характерна для пучковых неустойчивостей и обусловлена тем обстоятельством, что величина замедления электронов определяется  $\text{Re } \delta < 0$  [12]. Таким образом, использование коаксиальной геометрии электродинамической системы позволяет повысить мощность микроволнового излучения не только за счет увеличения тока электронного пучка, но и за счет увеличения эффективности.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита теория СВЧ-усилителя на основе пучково-плазменной неустойчивости в волноводе с неодносвязным поперечным сечением (коаксиальном волноводе). В рамках линейного приближения получены пространственные инкременты неустойчивости и их зависимость от частоты сигнала и параметров плазмы. При используемых в экспериментах параметрах, внесение в электродинамическую систему внутреннего металлического стержня радиусом до 1–1.5 см относительно слабо сказывается на самом характере неустойчивости, однако, позволяет существенно повысить транспортируемый через систему ток электронного пучка. А это, в свою очередь, приводит к повышению пространственного инкремента до 30%. Моделирование нелинейной динамики электронов пучка позволило определить возможный уровень выходной мощности и эффективности усилителя. В случае коаксиальной геометрии системы вслед за ростом инкремента неустойчивости при увеличении тока электронного пучка увеличивается эффективность и выходная мощность излучения. Эффективность преобразования направленной энергии электронного пучка в энергию СВЧ-колебаний для использованных параметров составляет 15–25%. Проведенные расчеты могут быть полезны при создании плазменных мазеров с новой, коаксиальной конфигурацией и увеличенной мощностью и эффективностью.

Авторы выражают благодарность О.Т. Лозе, инициировавшему проведенные теоретические исследования, за полезные обсуждения и интерес к работе. Работа выполнена в рамках Договора № 313/1689–Д от 16.09.2019 г. с ГК Росатом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Buleyko A.B., Gusein-zade N.G., Loza O.T. // Phys. Wave Phen. 2018. V. 26. P. 317.
2. Buleyko A.B., Ponomarev A.V., Loza O.T., Ul'yanov D.K. // Phys. Wave Phen. 2019. V. 27. P. 257.
3. Litvin V.O., Loza O.T. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25 (1). P. 013105.

4. Стрелков П.С., Тараканов В.П., Диас Михайлова Д.Е., Иванов И.Е., Шумейко Д.В. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 335.
5. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Стрелков П.С., Тараканов В.П. // Физика плазмы. 2018. Т. 44. С. 250.
6. Ge X., Zhong H., Qian B., Liu L., Liu Y., Shu T., Zhang J. // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 063107.
7. Ge X., Zhong H., Qian B., Zhang J., Fan Y., Shu T., Liu J. // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 113104.
8. Ge X., Zhong H., Zhang J., Qian B. // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. P. 023105.
9. Тотъменинов Е.М., Климов А.И., Конев В.Ю., Пегель И.В., Ростов В.В., Цыганков Р.В., Тараканов В.П. // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40 (4). С. 23.
10. Алисов А.Ф., Артамошкин А.М., Бердин С.А., Голота В.И., Егоров А.М., Загородний А.Г., Загребельный И.А., Засенко В.И., Карась В.И., Карась И.В., Потапенко И.Ф., Старостин А.Н. // Физика плазмы. 2010. Т. 36. С. 786.
11. Загребельный И.А., Марков П.И., Подобинский В.О. // ВАНТ. Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2008. № 4. С. 195.
12. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
13. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
14. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Хапаева Е.А. // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. С. 1488.
15. Кузелев М.В., Хапаева Е.А. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. С. 603.
16. Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 1084.
17. Сотников Г.В., Яценко Т.Ю. // ЖТФ. 2002. Т. 72 (5). С. 22.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО КОРОННОГО РАЗРЯДА  
ОТ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ  
ЗАЗЕМЛЕННЫХ ПРОВОДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ  
ГРОЗОВОГО ОБЛАКА© 2021 г. М. С. Мокров<sup>а,\*</sup>, Ю. П. Райзер<sup>а</sup><sup>а</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: mmokrov@gmail.com

Поступила в редакцию 23.12.2020 г.

После доработки 21.01.2021 г.

Принята к публикации 23.01.2021 г.

Теоретически рассматривается нестационарная положительная корона, развивающаяся в свободном пространстве от системы заземленных проводов, подвешенных на одинаковой высоте и находящихся в нарастающем однородном электрическом поле грозового облака. Для расчета характеристик короны разработана двумерная компьютерная модель, в которой разряд описывается уравнением для плотности положительных ионов одного сорта и уравнением Пуассона для электрического поля. Для простоты предполагается, что провода многоэлектродной системы тождественны и расстояния между любыми двумя соседними проводами одинаковы. Рассмотрен случай, когда число проводов в системе бесконечно и задача сводится к изучению короны от одного провода и случай системы из восьми коронирующих проводов. На основе численного решения уравнений двумерной модели, рассчитаны коронный ток, распределение объемного заряда, генерируемого короной, и электрического поля в окружающем провода пространство. В случае короны от бесконечного числа проводов рассчитан режим, когда коронный ток выходит на насыщение и зависит только от скорости роста грозового поля и расстояния между проводами. Результаты могут представлять интерес для последующих оценок влияния коронного разряда на эффективность многотросовой молниезащиты.

*Ключевые слова:* коронный разряд, многоэлектродная система, численное моделирование, ионный слой, электрическое поле грозового облака

DOI: 10.31857/S0367292121060123

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нестационарная корона, возникающая в грозовую погоду у острых выступов заземленных объектов, подробно изучалась в последние 20 лет. Особенность этого явления состоит в том, что заряды, генерируемые короной вблизи коронирующего острия, устремляются вверх к грозовому облаку, заполняя свободное пространство, поэтому стационарное состояние установиться не может. Поэтому характеристики нестационарной короны в естественных условиях существенно отличаются от характеристик лабораторной короны, когда стационарное состояние устанавливается сравнительно быстро. В частности, ток нестационарной короны определяется скоростью роста напряжения на промежутке, а не самой величиной напряжения [1].

В грозовых условиях роль приложенного напряжения играет разность потенциалов между заземленным объектом и потенциалом внешнего

поля в месте расположения объекта,  $E_0(t)h$ , где  $E_0(t)$  – медленно нарастающее во времени электрическое поле грозового облака, направленное вертикально вверх,  $h$  – высота объекта. Корона возникает от объекта с радиусом закругления  $r_0 \ll h$ , когда электрическое поле на его поверхности превысит поле зажигания короны  $E_{cor}$ . Пространственный заряд, внедряемый в окружающее пространство коронным разрядом, приводит к перераспределению электрического поля вблизи объекта. Как оказалось, такое действие заряда позволяет подавлять возбуждение восходящих молний от высоких заземленных сооружений [1–4]. В недавней статье [5] высказано предположение, что присутствие заряда, внедренного короной, может объяснять снижение вероятности удара молнии в статический ветрогенератор электрической энергии по сравнению с вращающимся ветрогенератором, около которого облако про-

пространственного заряда короны не успевает сформироваться.

Эффект пространственного заряда короны приводит к уменьшению электрического поля у земли, как это следует из наблюдений [6–8] в условиях, когда поверхность земли покрыта густой растительностью. Растительный покров (ветки деревьев, кустов, траву) можно уподобить заземленным проводникам, острия которых находятся достаточно высоко над земной поверхностью. Индивидуальные короны от таких электродов перекрываются в единый плоский ионный слой, верхняя граница которого достигает высот в несколько сотен метров [6–8]. Пространственный ионный заряд, сосредоточенный в области между земной поверхностью и верхней границей ионного слоя, создает свое собственное поле, направленное вдоль вертикали противоположно внешнему грозовому полю  $E_0$ . В результате измеренные значения грозового поля на земной поверхности оказались существенно ниже, чем поле  $E_0$  над верхней границей ионного слоя [6–8].

С практической точки зрения, многоэлектродные системы могут быть использованы для повышения надежности молниезащиты объектов [2, 9–11]. Для защиты не слишком высоких сооружений, занимающих значительную площадь, предложено разместить над ними плоскопараллельную решетку заземленных проводов (грозотросов), подвешенных на опорах, которые вынесены за пределы защищаемой территории [12]. Предполагается, что экранирующий эффект объемного заряда короны от проводов усилит их защитное действие. Поэтому представляет интерес информация о характеристиках короны, ее тока, распределении и величине заряда, внедренного коронирующими проводами. Одной из задач является выяснение условий, при которых можно создать однородный плоский слой объемного заряда над защищаемой территорией благодаря эффекту короны от проводов. В настоящей работе эти вопросы рассматриваются теоретически, на основе численного моделирования.

Моделирование нестационарной короны даже от одиночных заземленных электродов в грозовых условиях сталкивается с большими вычислительными трудностями. Строго говоря, процесс коронирования, как минимум, двумерен, а расчетная область охватывает масштабы от малого радиуса закругления электрода  $r_0 \sim 1$  см до расстояний в сотни метров, которые сравнимы с длиной промежутка облако–земля. В серии работ [1, 4, 13–16] на основе приближенной квазиодномерной (1D) модели короны впервые были рассчитаны характеристики короны от заземленных сферических электродов и стержней с полусферической головкой, которые являются прототипами молниеотводов, и сделаны оценки влияния коро-

ны на притяжение молний к высоким заземленным объектам. Позднее те же вопросы исследовались более детально в статьях [17, 18] на основе двумерной (2D) модели нестационарной короны и моделей [19, 20] возбуждения встречного лидера от объекта.

Надо сказать, что в статьях [17, 18] опровергаются выводы [4, 15] о заметном подавлении молнии эффектом короны, и говорится, что неверные оценки получились в результате использования чрезмерно упрощенной одномерной модели. В статье [21], суммирующей результаты многолетних исследований [1, 4, 13–16], показано, что это утверждение не справедливо, а отличия приближенной 1D и строгой 2D-моделей короны не столь радикальны, чтобы сильно повлиять на условие возникновения встречного лидера. Возможно, расхождение результатов [17, 18] и [21] объясняется использованием разных критериев возбуждения стримеров и лидеров от объекта. Поэтому вопрос о влиянии короны на молнию остается открытым.

В двумерной цилиндрической геометрии характеристики нестационарной короны от уединенного заземленного провода (молниезащитного троса) изучались в работе [22] на основе приближенной квазиодномерной квазистационарной аналитической модели, подобной примененной в [1, 4]. Также в [22] рассматривался вопрос о влиянии короны на притяжение молний к тросу. В двумерной постановке задача о нестационарной короне от уединенного заземленного провода рассматривалась в [23].

Нестационарная корона от многоэлектродной системы, состоящей из одинаковых сферических проводников, заземленных тонкими проволоками, и находящихся на одинаковой высоте  $h$  над плоской земной поверхностью в однородном грозовом поле впервые теоретически рассмотрена в [24, 25] (расчеты также выполнены для родственной системы из вертикальных тонких заземленных стержней с полусферической головкой). На плоскости земли проводники размещались вдоль концентрических окружностей с радиусами  $r_k = kD$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) вокруг одного проводника. Предполагалось, что вдоль окружности с номером  $k$  равномерно размещено  $bk$  проводников. Краевыми эффектами пренебрегалось и считалось, что заряды всех электродов одинаковы. Для расчета короны от такой системы использовалась усовершенствованная 1D модель [1, 4, 13–16, 21], а в предельном случае бесконечного числа проводников, – аналитическая теория. Путем варьирования входных параметров задачи: числа окружностей с проводниками  $N$ , высот проводников  $h$ , характерного расстояния между соседними проводниками  $D$ , характерного времени нарастания грозового поля  $E_0(t)$ , получено множе-

ство данных о динамике коронного тока во времени [24] и временной эволюции вертикального электрического поля на земле и разных высотах [25]. Найдены условия, при которых характеристики короны от названной многоэлектродной системы оказываются такими же, как от плоской поверхности, эмитирующей ионы. В этом случае индивидуальные короны от проводников объединяются, над электродами формируется плоский ионный слой, а плотность тока нестационарной короны определяется только скоростью нарастания со временем грозового поля  $E_0$ .

Целью данной работы является расчет характеристик нестационарной положительной короны, развивающейся от многоэлектродной системы плоскопараллельных одинаковых заземленных проводов (молниезащитных тросов), коронирующих во внешнем медленно нарастающем электрическом поле грозового облака. Расчет короны от многоэлектродной системы проводится на основе 2D компьютерной модели [23], развитой ранее для расчета короны от одиночного провода в грозовых условиях.

Отметим, что рассматриваемая здесь задача о нестационарной короне имеет общие черты с электростатическими задачами о стационарной короне. Стационарная корона от многоэлектродной системы электрофильтров была рассчитана для 2D системы длинных параллельных проводов [26, 27] и для трехмерной системы с заостренными электродами [26, 28]. Множество статей посвящено короне от линий электропередач с постоянным напряжением. Рассматривалась, например, задача о короне от одного горизонтального провода [29–31]; от двухполюсной нерасщепленной линии [32] и линии с полюсами, расщепленными на несколько проводов [33]; при этом в [30–33] учитывалось еще действие бокового ветра. В [34] на основе 2D численной модели описаны результаты проведенного в той же работе эксперимента, в котором продемонстрирована возможность использования стационарного коронного разряда от длинной тонкой проволоки в потоке воздуха (ветра) для управляемой электризации изолированного проводящего тела. Однако, во всех этих работах, в отличие от рассматриваемого нами случая, стационарное состояние устанавливается быстро, а короткая нестационарная стадия коронного разряда интереса не представляет.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ

Рассматриваем положительную корону от плоскопараллельной системы длинных одинаковых заземленных проводов радиуса  $r_0$ , подвешенных на высоте  $h$  и коронирующих в медленно на-

растающем вертикальном электрическом поле грозового облака  $E_0(t)$ . Как обычно, предполагаем, что рост поля  $E_0(t)$  описывается двумя простыми законами. В первом случае поле  $E_0(t)$  растет линейно в течение времени  $\tau$ , достигает максимума и затем поддерживается постоянным:

$$\begin{aligned} E_0(t) &= E_{0\max} t / \tau, & t < \tau; \\ E_0(t) &= E_{0\max}, & t \geq \tau \end{aligned} \quad (1)$$

Во втором случае поле растет по релаксационному закону:

$$E_0(t) = E_{0\max} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (2)$$

Расстояние между соседними проводами  $D$  считаем одинаковым. В первом случае расчет короны проведем для многоэлектродной периодической системы, состоящей из бесконечного числа проводов. В силу периодичности системы достаточно рассмотреть корону от одного провода, а действие остальных проводов заменить периодическими граничными условиями. Во втором случае принимаем, что система состоит из восьми параллельных проводов. Такое число выбрано в результате компромисса между затратами труда, машинным временем и полезной информацией, которую можно ожидать от расчета.

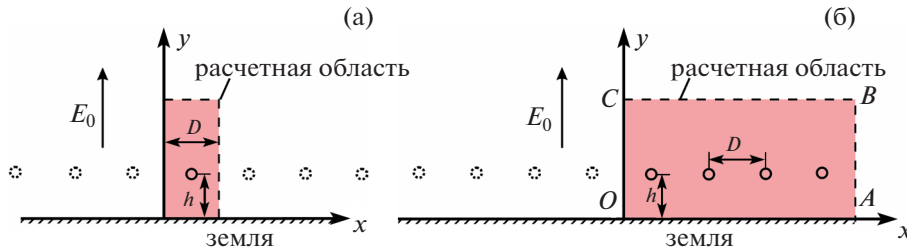
Схемы расположения проводов для названных случаев показаны на рис. 1. Координаты центров проводов, составляющих периодическую систему, равны  $x_k = D/2 + kD$ ,  $y_k = h$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ , и т.д., см. рис. 1(а). Центры восьми проводов расположены в точках  $x_k = -7D/2 + (k - 1)D$ ,  $y_k = h$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , рис. 1(б).

Коронный процесс описываем уравнением непрерывности для плотности ионов  $n_{\text{ion}}$  одного сорта и уравнением Пуассона для потенциала электростатического поля  $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$ , созданного зарядами проводов и пространственным зарядом ионов. Изменениями  $n_{\text{ion}}$  и  $\phi'$  вдоль направления, параллельного осям проводов, координату вдоль которого обозначим  $z$ , пренебрегаем, т.е. имеем дело с плоской электростатической задачей. Тогда система уравнений для  $n_{\text{ion}}$  и  $\phi'$  имеет вид:

$$\frac{\partial n_{\text{ion}}}{\partial t} + \text{div} [n_{\text{ion}} \mu_{\text{ion}} (\mathbf{E}' + \mathbf{E}_0)] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = -\frac{en_{\text{ion}}}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

где  $\mu_{\text{ion}}$  – подвижность ионов,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. Принимаем, что подвижность положительных ионов в воздухе при нормальных условиях равна  $\mu_{\text{ion}} = 1.5 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  [35]. Потенциал грозового поля  $\phi''$  отсчитываем от земли, где  $y = 0$ , так что  $\phi'' = -E_0 y$ .



**Рис. 1.** Схематическое изображение плоскопараллельных многоэлектродных систем из одинаковых заземленных проводов в однородном грозовом поле  $E_0$ : (а) бесконечная решетка проводов; (б) система из восьми проводов.

Граничные условия к системе (3), (4) таковы. Полагаем, что потенциал  $\varphi' = 0$  на поверхности земли. Поскольку провода заземлены, то суммарный потенциал в центрах проводов равен нулю,  $\varphi' + \varphi'' = 0$ , т.е.  $\varphi' = E_0(t)h$ . Задача о короне от бесконечной системы проводов симметрична относительно прямых  $x = 0$  и  $x = D$  (см. рис. 1а), а о короне от восьми проводов симметрична относительно прямой  $x = 0$  (см. рис. 1б). На этих линиях задаются граничные условия симметрии  $d\varphi'/dx = 0$  и  $\partial n_{ion}/\partial x = 0$ .

Поскольку коронный разряд возникает в свободном пространстве, а в численном счете расчетная область неизбежно ограничена, особого внимания требует постановка граничных условий для потенциала  $\varphi'$  на свободных границах расчетных областей. Этими границами являются верхняя граница прямоугольной расчетной области в случае короны от бесконечной системы проводов и линии  $AB$  и  $BC$  на рис. 1б в случае короны от восьми проводов. Когда система проводов и зарядов бесконечна вдоль направления  $x$ , потенциал  $\varphi'$  не убывает на бесконечности при  $y \rightarrow \infty$  [36]. В этом случае условие для  $\varphi'$  на верхней границе может быть выведено в предположении, что над верхней границей объемный заряд ионов равен нулю [37] или, другими словами, что ионный фронт не достигает этой границы за все время моделирования. Когда система проводов и зарядов конечна, то граничным условием для потенциала в свободном пространстве служит условие, что на бесконечности потенциал равен нулю  $\varphi' = 0$ . Используя это условие, и снова полагая, что весь объемный заряд ионов сосредоточен внутри расчетной области (см. рис. 1б), мы найдем потенциал  $\varphi'$  на линиях  $AB$  и  $BC$ . Подробно эти вопросы обсуждаются в следующем разделе.

В тонком слое вблизи коронирующих проводов идут процессы фотоионизации, электронного прилипания, электрон-ионной рекомбинации, ионной конверсии и др., которые обычно учитывают, когда моделируют корону из первых принципов в промежутках сантиметровой длины

[38–41]. Нашей целью является расчет характеристик короны на расстояниях от проводов в десятки, сотню метров, что несопоставимо больше толщины ионизационного слоя вблизи электрода, которая при атмосферных условиях порядка радиуса закругления электрода [42]. Во всех расчетах этой статьи мы принимаем, что радиус проводов равен  $r_0 = 1$  см. Поэтому можно исключить рассмотрение слоя. С этой целью, как и в работах [1, 4, 11, 13–18, 21–25], предполагаем, что поле на коронирующем проводе равно пороговому полю для зажигания короны  $E_{cor}$

$$E(r_0) = E_{cor}, \quad (5)$$

где  $E_{cor}$  дается формулой Пика

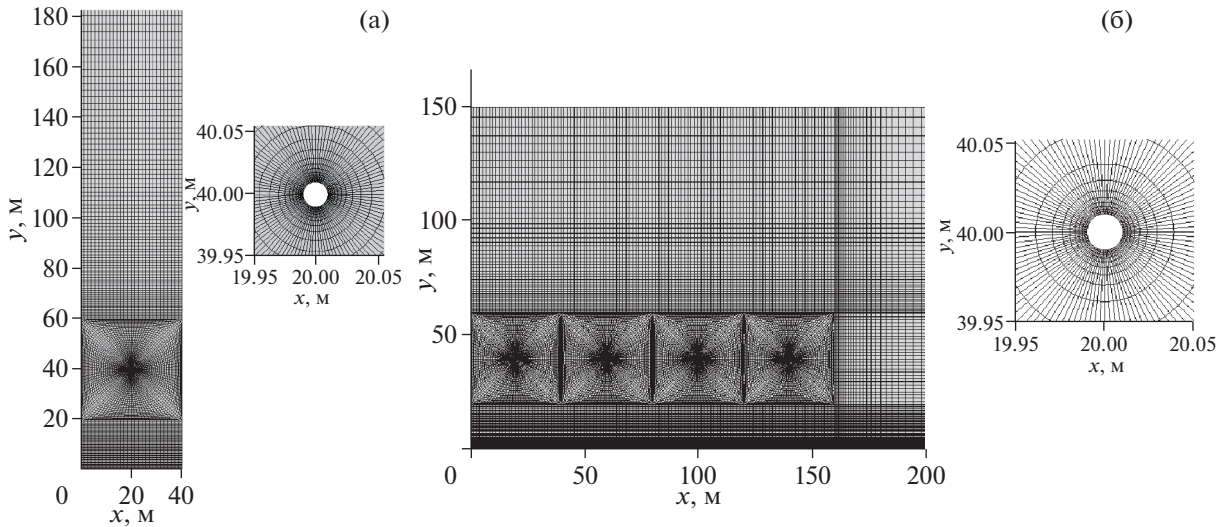
$$E_{cor}(r_0) = 31(1 + 0.308r_0^{-1/2}) \text{ кВ см}^{-1}, \quad r_0 [\text{см}]. \quad (6)$$

Условие (5) для поля на проводе хорошо обосновано, когда внешнее электрическое поле нарастает медленно, с характерным временем не меньше  $\tau \sim 10^{-2}$  с, как это следует из результатов лабораторных экспериментов [43, 44] и численного моделирования [45]. По данным [46], грозовое поле нарастает за времена  $\tau \sim 10\text{--}100$  с. Следовательно, формула (5) справедлива для случая короны в грозовом поле.

По мере накопления зарядов грозовой ячейки, внешнее поле  $E_0$  сначала растет со временем, а затем выходит на насыщение. Согласно электростатике, внешнее грозовое поле усиливается у заземленных проводов. Когда поле на проводе достигает порога  $E_{cor}$ , у провода зажигается корона.

До момента зажигания короны предполагается, что плотность ионов  $n_{ion}$  в окружающем пространстве равна нулю, и ток короны на этой стадии равен нулю. После зажигания короны, принимая во внимание эволюцию грозового поля  $E_0(t)$ , мы внедряем ионы в первую расчетную ячейку у поверхности провода, чтобы компенсировать превышение поля на проводе  $E(r_0)$  над  $E_{cor}$  и удовлетворить условию (5).





**Рис. 2.** Пример расчетных сеток: (а) для расчета периодической системы проводов; (б) для расчета системы из 8 проводов с условием симметрии при  $x = 0$ . Высота подвеса проводов  $h = 40$  м, расстояние между соседними проводами  $D = 20$  м. На вставках показана в крупном масштабе сетка около проводов.

После зажигания короны ток на единицу длины каждого провода можно представить в виде

$$I(t) = 2\pi r_0 e n_{ion}(r_0, t) \mu_{ion} E_{cor}, \quad (7)$$

где  $n_{ion}(r_0, t)$  – плотность ионов на проводе. Алгоритм расчета коронного тока рассматривается в следующем разделе.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В расчетных областях, показанных на рис. 1, вводилась блочная сетка. Каждый провод помещался в квадратный блок сетки, а длину стороны этого квадрата принимали равной расстоянию между соседними проводами  $D$ . Такой выбор оправдан в том случае, когда высота подвеса проводов  $h$  сравнима с расстоянием  $D$ , что мы и будем предполагать в дальнейшем. В квадратных блоках строилась криволинейная неортогональная сетка О-типа, для координат узлов которой,  $x$  и  $y$ , решались уравнения эллиптического типа [47]. Вне квадратных блоков сетки с проводами вводились 2 либо 3 прямоугольных блока с прямоугольной сеткой.

Примеры построенных сеток даны на рис. 2: на рис. 2а – для расчета периодической системы проводов, а на рис. 2б – для расчета системы из восьми проводов. В силу принятого условия симметрии при  $x = 0$ , в последнем случае индивидуально рассматривается только половина от общего числа проводов.

Каждый шаг по времени начинается с решения уравнения Пуассона для потенциала  $\varphi'$  (4). Уравнение (4) приводится к конечно-разностному виду методом конечного объема [48, 49]. В

блоках с прямоугольной сеткой использовалась стандартная пятиточечная аппроксимация. В блоках с криволинейной сеткой после интегрирования по контрольному “объему” ячейки, градиенты потенциала в центрах граней ячеек рассчитывались “методом интегрирования по траекториям” [50]. Решение задачи во всей расчетной области находилось путем сшивания решений на границах блоков. Для этого использовался итерационный метод Шварца–Неймана [51]. Итерационный процесс начинается с того, что задаются пробные значения  $\varphi'$  на стыках блоков сетки. Принимая их в качестве граничных условий для  $\varphi'$ , находится приближенное распределение  $\varphi'$  в каждом блоке сетки. Затем граничные значения  $\varphi'$  на стыках блоков уточняются. Полагая производные  $\varphi'$  по координатам равными по обе стороны от межблочной границы, мы находим граничные значения  $\varphi'$  через известные с предыдущей итерации значения  $\varphi'$  во внутренних, приграничных узлах сетки.

В случае бесконечной периодической системы проводов, решение уравнения Пуассона в прямоугольных блоках сетки (см. рис. 2а) находилось методом Фурье, а сетка по  $x$  бралась равномерной с центрами ячеек  $x_i = (i + 1/2)\Delta x$ ,  $i = 0, M$ ,  $\Delta x$  – шаг сетки,  $x_M = x_0 + D$ . В самом деле, для фиксированного  $y$ , представим  $\varphi'_i = \varphi'(x_i, y)$  и  $n_{ioni} = n_{ioni}(x_i, y)$  в виде разложения по косинусам:

$$\begin{aligned} \varphi'(x_i, y) = & \\ = \frac{1}{M} \hat{\varphi}'_0(y) + \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \hat{\varphi}'_m(y) \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + \frac{1}{2} \right) \right], & \quad (8) \\ i = 0, M - 1. & \end{aligned}$$

Функция (8) автоматически удовлетворяет граничным условиям  $\partial\varphi'/\partial x = 0$  при  $x = 0$  и  $x = D$ . В аналогичный (8) ряд для  $n_{ioni}$  входят коэффициенты  $\hat{n}_{ion0}$  и  $\hat{n}_{ionm}$ . Раскроем в уравнении Пуассона (4) производную по  $x$  в конечно-разностном виде:

$$\frac{\varphi'_{i+1} - 2\varphi'_i + \varphi'_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\partial^2 \varphi'_i}{\partial y^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_{ioni}, \quad (9)$$

$$i = 1, M - 1,$$

и подставим в него разложения  $\varphi'_i$  и  $n_{ioni}$  по (8). Используя тождество:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + 1 + \frac{1}{2} \right) \right] - 2 \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + \frac{1}{2} \right) \right] + \\ + \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i - \frac{1}{2} \right) \right] = -4 \sin^2 \left( \frac{\pi m}{2M} \right) \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

выражение (9) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left( \frac{d^2 \hat{\varphi}'_0}{dy^2} + \frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ion0} \right) + \\ + \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left( -\lambda_m \hat{\varphi}'_m + \frac{d^2 \hat{\varphi}'_m}{dy^2} + \frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ionm} \right) \times \\ \times \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \quad i = 0, M - 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где введено обозначение  $\lambda_m = \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi m}{2M} \right)$ .

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\varphi}'_0}{dy^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ion0}, \\ \frac{d^2 \hat{\varphi}'_m}{dy^2} - \lambda_m \hat{\varphi}'_m = -\frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ionm}, \quad m = 1, M - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия для каждой гармоники (11) ставятся следующим образом. Если значение потенциала на границе приближенно известно, как в случае потенциала на стыке прямоугольного и квадратного блоков сетки, где оно берется с предыдущей “межблочной” итерации, то граничными условиями для (11) служат коэффициенты разложения этого потенциала в ряд (8). Они находятся по формулам:

$$\hat{\varphi}'_m = \sum_{i=0}^{M-1} \varphi'_i \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + \frac{1}{2} \right) \right], \quad m = 0, M - 1.$$

На земле, ясно, что все  $\hat{\varphi}'_m = 0, m = 0, M - 1$ .

Особого рассмотрения требует условие на верхней границе расчетной области  $y = y_{\max}$ . Оно получается из шивки решения уравнения Пуассона с решением уравнения Лапласа [37]. При  $y \geq y_{\max}$  объемного заряда нет,  $n_{ion} = 0$ . Отсюда и из первого уравнения (11) находим зависимость от высоты компоненты  $\hat{\varphi}'_0$  потенциала:  $\hat{\varphi}'_0(y) = c_1 + c_2 y$ , где  $c_1, c_2 = \text{const}$ . Но поскольку из электростатики известно, что бесконечный, однородный вдоль  $x$ , заряженный плоский слой над проводящей поверхностью не создает над собой вертикального электрического поля (см. также [24, 25]), имеем  $c_2 = 0$ , и находим граничное условие:

$d\hat{\varphi}'_0/dy = 0$ . При  $m = 1, M-1$ , из (11) получим:  $\hat{\varphi}'_m(y) = c_3 e^{-\sqrt{\lambda_m} y} + c_4 e^{\sqrt{\lambda_m} y}$ . Потенциал не может экспоненциально стремиться к бесконечности при  $y \rightarrow \infty$  в пустом пространстве, поэтому  $c_4 = 0$  и  $\hat{\varphi}'_m(y) = c_3 e^{-\sqrt{\lambda_m} y}$ . Дифференцируя последнее равенство по  $y$ , получим граничное условие  $d\hat{\varphi}'_m/dy = -\sqrt{\lambda_m} \hat{\varphi}'_m(y), m = 1, M-1$ .

С описанными граничными условиями уравнения (11) приводятся к конечно-разностному виду на сетке вдоль оси  $y$  и решаются методом прогонки. Искомое решение затем получается из выражения (8):

$$\varphi'_{i,j} = \frac{1}{M} \hat{\varphi}'_{0,j} + \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \hat{\varphi}'_{m,j} \cos \left[ \frac{\pi m}{M} \left( i + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (12)$$

$$i = 0, M - 1.$$

где  $j$  – индекс ячеек сетки вдоль направления  $y$ . Переход от сеточных функций  $\varphi'_i$  к гармоникам  $\hat{\varphi}'_m$  и обратно осуществлялся с помощью доступных стандартных программ дискретного преобразования Фурье.

В случае системы из восьми проводов, для расчета потенциала  $\varphi'$  на внешней границе, т.е. отрезках  $AB$  и  $BC$  на рис. 1б, исходим из теоремы Грина [36, 52, 53], примененной в четверти плоскости,  $x > 0, y > 0$ , где содержится половина от общего числа проводов. Пусть  $\Omega$  – четверть плоскости с исключенными из нее четырьмя кругами проводов. Внешняя граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  состоит из полупрямых  $x = 0, y \geq 0$  и  $y = 0, x \geq 0$  и дуги четверти окружности бесконечного радиуса, проведенной из начала координат.

Потенциал в произвольной точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из начала координат  $O$ , дается формулой [36, 52]:

$$\begin{aligned} \varphi'(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\Omega' + \\ + \epsilon_0 \oint_{\partial\Omega + \partial\Omega_1} \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} - \varphi' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dl', \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор точек, по которым ведется интегрирование; индекс  $\partial\Omega + \partial\Omega_1$  у интеграла по замкнутому контуру означает, что интегрирование проводится по контуру  $\partial\Omega$ , и к этому интегралу добавляются интегралы по четырем окружностям  $\partial\Omega_1$  проводов, лежащим в области  $x \geq 0, y \geq 0$ ;  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина двумерного оператора Лапласа в области  $x \geq 0, y \geq 0$ ;  $\rho = en_{ion}$  – плотность объемного заряда;  $d\Omega'$  – элемент площади  $\Omega$ ;  $\mathbf{n}'$  – внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega + \partial\Omega_1$  области  $\Omega$ ,  $dl'$  – элемент длины контура этой границы.

Функция Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , т.е. потенциал, создаваемый в точке  $\mathbf{r} = (x, y)$  нитью, проходящей через точку  $\mathbf{r}' = (x', y')$  и несущей единичный погонный заряд, при условии симметрии на полупрямой  $x' = 0 \partial G(\mathbf{r}, x', y')/\partial x' = 0$  и равенства  $G(\mathbf{r}, x', 0) = 0$  на земле, выражается формулой [53]<sup>1</sup>

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \times \ln \left\{ \frac{[(x-x')^2 + (y+y')^2][(x+x')^2 + (y+y')^2]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2][(x+x')^2 + (y-y')^2]} \right\}. \quad (14)$$

Применим теперь формулу (13) для расчета искомого потенциала на отрезках на  $AB$  и  $BC$ . Поскольку мы считаем, что  $\rho \equiv 0$  вне  $OABC$  (см. рис. 1б), первый интеграл по  $\Omega$  в (13) сводится к интегралу по  $OABC$ . Вычислим интеграл по контуру  $\partial\Omega$ . На полупрямой  $x' = 0, y' \geq 0$  (ось симметрии) имеем,  $\partial\phi'/\partial x'|_{x'=0} = \partial G(\mathbf{r}, x', y')/\partial x'|_{x'=0} = 0$ , а на полупрямой  $y' = 0, x' \geq 0$  (поверхность земли) –  $\phi' = G(\mathbf{r}, x', 0) = 0$ . Поэтому вклад этих участков в контурный интеграл дает нуль. В силу граничного условия на бесконечности  $\phi' = 0$ , полагаем, что интеграл по бесконечно удаленной дуге окружности также равен нулю<sup>2</sup>. Таким образом, интеграл по контуру  $\partial\Omega$  равен нулю, и выражение (13) дает

$$\phi'(\mathbf{r}) = \int_{OABC} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dS' + + \epsilon_0 \oint_{\partial\Omega_1} \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\phi'}{\partial n'} - \phi' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dl', \quad (15)$$

где  $dS'$  – элемент площади прямоугольника  $OABC$  (рис. 1б), а  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  находится по (14).

<sup>1</sup> По сравнению с [53] мы изменили знак у функции Грина, чтобы привести формулу в соответствие с принятой в [52].

<sup>2</sup> Интересно отметить, что, как показано в [53], для стремления к нулю интеграла по удаленной окружности радиуса  $R$  потенциал  $\phi'$  в бесконечности может даже возрастать с  $R$ , но не быстрее, чем  $R^\alpha$ , где  $\alpha < 1$ .

Во второй интеграл в (15) входит поле на проводах  $E_n = -\partial\phi'/\partial n = \partial\phi'/\partial n'$ . Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к проводу, антипараллельная внешней нормали  $\mathbf{n}'$  к границе  $\partial\Omega_1$ . После зажигания короны, согласно условию (5), поле на проводе равно порогу зажигания короны  $E_{cor}$ . Поэтому, если корона горит на всех проводах, граничный потенциал на отрезках  $AB$  и  $BC$  может быть найден из (15) путем простого однократного интегрирования.

В том случае, когда короны нет, поле на проводе  $\partial\phi'/\partial n'$  неизвестно и само зависит от распределения потенциала во всем пространстве. Поэтому для расчета  $\phi'$  используем итерации, как в [54]. Сначала, используя начальное приближение для  $E_n$ , по (15) вычисляется пробный потенциал на отрезках  $AB$  и  $BC$ . Этот потенциал служит приближенным граничным условием задачи на многоблочной сетке. После сходимости “межблочных” итераций, о которых говорилось выше, рассчитываются значения поля  $\partial\phi'/\partial n'$  на проводах. Эти поля подставляются во второе слагаемое в (15), и в результате находится уточненное значение потенциала на отрезках  $AB$  и  $BC$ . С этими новыми значениями  $\phi'$  начинается следующий цикл внешних итераций, и процедура повторяется до сходимости. К счастью, этот трудоемкий итерационный процесс нужен только на первом временном шаге. В дальнейшем начальное приближение для потенциала берется с предыдущего шага, что резко снижает число и трудоемкость всего итерационного процесса. Заметим, что интегралы от обоих членов в (15) численно находятся нами по правилу средней точки.

Отметим, что в статье [54], где ищется решение трехмерного уравнения Пуассона для поля, создаваемого в свободном пространстве пространственным зарядом и зарядами проводников, интеграл, аналогичный нашему первому интегралу в правой части (15), вычисляется не путем суммирования, как у нас. Этот интеграл, трудоемкий для вычисления в трехмерном случае, выражается через решение вспомогательной задачи для уравнения Пуассона, как это было впервые предложено в [55, 56] для расчета потенциала, создаваемого пространственным зарядом. Если имеется в распоряжении “быстрый” метод решения уравнения Пуассона, то удастся значительно сэкономить вычислительные ресурсы. Такой оптимизацией алгоритма мы здесь не занимаемся.

На каждом шаге по времени, после того как распределение потенциала и поля в расчетной области найдены, рассчитывается плотность коронного тока  $j$  на проводе. Плотность заряда элемента  $dl$  провода равна  $\sigma = \epsilon_0 E_n$ , а плотность

тока  $-j = \epsilon_0 dE_n/dt$ . Раскрывая это выражение на одном временном шаге  $\Delta t$ , получим:

$$j = \epsilon_0 \left[ E_n(t^p + \Delta t) - E_n(t^p) \right] / \Delta t, \quad (16)$$

где  $E_n(t^p + \Delta t)$ ,  $E_n(t^p)$  – локальные поля на проводе в текущий и предыдущий моменты времени. В момент времени, близкий к моменту зажигания короны,  $E_n(t^p + \Delta t) > E_{cor}$ , а  $E_n(t^p) < E_{cor}$ , так что плотность тока короны (16) пропорциональна скорости роста грозового поля у провода. В последующие моменты времени, поле  $E_n(t^p + \Delta t)$  рассчитываем численно, а в качестве  $E_n(t^p)$  в (16) подставляем  $E_{cor}$ . Тем самым на каждом шаге  $\Delta t$  в промежуток мы внедряем заряд, который компенсирует превышение  $E_n(t^p + \Delta t)$  над  $E_{cor}$ . Поскольку условие (5) игнорирует малые неоднородности поля у провода, в формулу (16) в качестве  $E_n(t^p + \Delta t)$  мы подставляли не локальное, а усредненное по окружности провода значение поля на проводе. Это позволяет избежать нефизических выбросов в распределении плотности ионов вблизи провода. Полный ток с каждого провода получается умножением (16) на длину окружности провода  $2\pi r_0$ . Отметим, что в случае системы из восьми проводов при расчете потенциала  $\phi'$  по формуле (15) в качестве поля на коронирующем проводе подставляется локальное поле  $E_n(t^p + \Delta t)$ , а не  $E_{cor}$ .

После расчета коронного тока на данном временном шаге решалось уравнение непрерывности для ионов (3). Также как и уравнение Пуассона, оно приводилось к конечно-разностному виду методом конечного объема. Использовалась смешанная неявная схема первого-второго порядка точности по пространству [48, 49] с коррекцией потоков [26, 49]. Для интегрирования по времени использовались схема Эйлера, либо Кранка–Николсона первого и второго порядка точности, соответственно. Тестовые расчеты не показали заметной разницы в результатах по обеим схемам, поэтому предпочтение было отдано более простой схеме Эйлера.

Поток ионов, втекающий в первые ячейки сетки, граничащие с проводом, одинаков для всех ячеек и равен  $j/e$ , где  $j$  дается формулой (16). Этот поток служит граничным условием для ионного уравнения (3). При решении ионного уравнения на многооблочной сетке, на стыке блоков сетки закон сохранения ионного потока выполнялся. После расчета распределения ионов, решение системы (3)–(5) на данном временном шаге считалось завершенным. Принятый временной шаг составлял  $\Delta t = 10^{-2} - 10^{-1}$  с.

#### 4. ЗАЖИГАНИЕ КОРОНЫ ОТ МНОГОЭЛЕКТРОДНОЙ СИСТЕМЫ ПРОВОДОВ

Грозовое поле  $E_{0cor}$  достаточное для возбуждения короны от проводов, в принципе, находится в двумерной программе, путем сравнения рассчитанного поля вблизи проводов  $E(r_0)$  с порогом возбуждения короны  $E_{cor}$  (6). Однако, для удобства анализа, ниже рассчитаем  $E_{0cor}$  для двух рассматриваемых многоэлектродных систем также аналитическими методами, пользуясь тем, что радиусы проводов  $r_0$  очень малы по сравнению с расстоянием между проводами  $D$  и высотой их подвеса  $h$ ,  $r_0 \ll D$  и  $r_0 \ll h$ . В таком случае, при расчете потенциала данного провода можно считать, что заряды соседних проводов и отражений всех проводов в земле сосредоточены в их центрах.

##### 4.1. Периодическая бесконечная система проводов

Исходная формула для потенциала провода, создаваемого собственным зарядом провода и зарядами всех остальных проводов бесконечной системы, имеет вид:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r_0^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2}} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \times 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (kD)^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2 + (kD)^2}} \right), \quad (17)$$

где  $q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0)$  – погонный заряд провода,  $E(r_0)$  – напряженность поля на его поверхности;  $z$  – координата вдоль провода,  $k$  – номер провода, отсчитываемый от рассматриваемого. Первый интеграл в (17) описывает вклад в потенциал от собственного заряда провода, а второе слагаемое – от всех остальных проводов бесконечной системы с двух сторон.

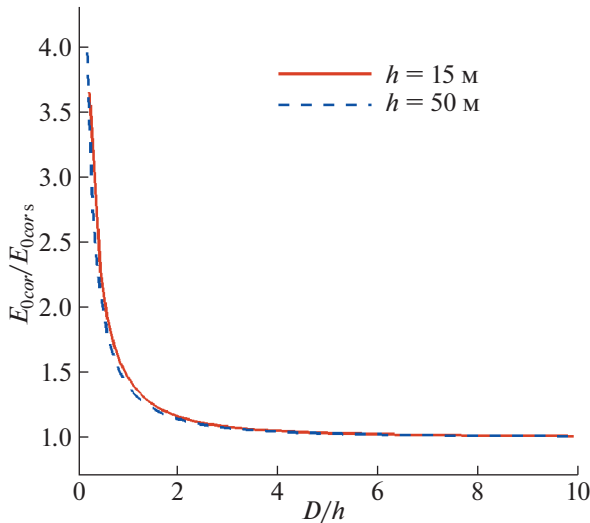
Вычисляя интегралы в (17), получаем

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{2h}{r_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[ 1 + \left( \frac{2h}{kD} \right)^2 \right] \right) \quad (18)$$

Бесконечный ряд в (18) сводится к бесконечному произведению под знаком логарифма. Применяя к произведению формулу Эйлера [57]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 + \left( \frac{x}{k\pi} \right)^2 \right] = \frac{\text{sh } x}{x}, \text{ найдем, что}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[ 1 + \left( \frac{2h}{kD} \right)^2 \right] = \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 + \left( \frac{2h}{kD} \right)^2 \right] = = \ln \left[ \frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi 2h/D} \right] \quad (19)$$



**Рис. 3.** Пороговое грозовое поле  $E_{0cor}$  для зажигания короны от провода бесконечной периодической системы заземленных проводов, нормированное на порог зажигания короны от одиночного провода  $E_{0cor_s}$ , в зависимости от отношения расстояния между соседними проводами к высоте их подвеса над землей  $D/h$ . Радиусы проводов  $r_0 = 1$  см.  $E_{0cor_s} = 216.4$  и  $74.7$  В/см при  $h = 15$  и  $50$  м, соответственно.

Подставляя (19) в (18) и переходя от погонного заряда  $q$  к полю  $E(r_0)$ , получим:

$$U = E(r_0)r_0 \left( \ln \frac{2h}{r_0} + \ln \left[ \frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi 2h/D} \right] \right) \quad (20)$$

Отсюда пороговое грозовое поле  $E_{0cor}$  для зажигания короны от бесконечной системы проводов равно:

$$E_{0cor}h = E_{cor}(r_0)r_0 \left( \ln \frac{2h}{r_0} + \ln \left[ \frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi 2h/D} \right] \right), \quad (21)$$

где  $E_{cor}(r_0)$  дается выражением (6).

Величины  $E_{0cor}$ , рассчитанные по формуле (21) и нормированные на пороговое грозовое поле для зажигания короны от одиночного провода  $E_{0cor_s}$ , для двух высот подвеса проводов  $h$  даны на рис. 3. Видно, что для данной высоты подвеса  $h$  при уменьшении расстояния между проводами  $D$  пороговое поле  $E_{0cor}$  резко возрастает.

#### 4.2. Плоскопараллельная система из восьми одинаковых проводов

Поскольку теперь положение каждого провода по отношению к другим различно, поля на проводах  $E(r_0)$ , индуцированные зарядами проводов и их отражениями в земле, не одинаковы. Ясно, что при заданном потенциале провода заряды и поля у срединных проводов меньше, чем у крайних,

т.к. срединные провода подвергается действию ближних зарядов с двух сторон, а крайние — только с одной. Поэтому за порог зажигания короны в такой системе следует принять порог возбуждения короны от крайних проводов.

Составим систему для погонных зарядов проводов  $q_k$ . Потенциал  $\phi'$  в центре каждого провода,  $\phi' = E_0(t)h \equiv U$  складывается из потенциала, создаваемого собственным зарядом провода и зарядами соседних проводов. Например, для крайнего левого провода системы с зарядом  $q_1$ , расположенного в точке с координатой  $x = -7/2D$  (рис. 1б), по аналогии с (17) мы находим

$$U = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r_0^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2}} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=2}^8 q_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dz}{\sqrt{z^2 + [(k-1)D]^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2 + [(k-1)D]^2}} \right), \quad (22)$$

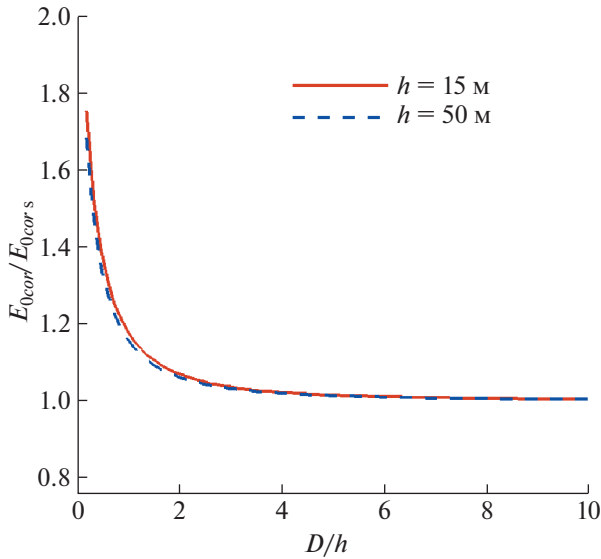
где  $z$  — координата вдоль проводов,  $k$  — номер провода с зарядом  $q_k$ . Вычисляя интегралы в (22), получаем:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ q_1 \ln \left( \frac{2h}{r_0} \right)^2 + \sum_{k=2}^8 q_k \ln \left[ 1 + \left( \frac{2h}{kD} \right)^2 \right] \right\} \quad (23)$$

Принимая в качестве избранного провода поочередно все провода системы, и записывая выражения для потенциала, аналогичные (23), получим линейную систему уравнений для зарядов  $q_k$ . Поскольку заряды на проводах, расположенных симметрично относительно прямой  $x = 0$  одинаковы, число неизвестных зарядов равно четырем. Решая систему для  $q_k$  при заданном  $E_0(t)$  находим такое внешнее поле  $E_{0cor}$ , при котором поле на крайних проводах  $E_1(r_0) = q_1/(2\pi\epsilon_0 r_0)$  (либо  $E_8$ ) достигает порога (6). Величина  $E_{0cor}$ , нормированная на порог зажигания короны от одиночного провода, приведена на рис. 4.

### 5. РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА, ИНДУЦИРОВАННОГО ЗАРЯДАМИ ПРОВОДОВ В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Простой проверкой численного метода решения уравнения электростатики в свободном пространстве, является расчет распределения поля, создаваемого зарядами системы проводов в отсутствие короны и сравнение с аналитическим решением, которое можно легко получить, если  $D \gg r_0$  и  $h \gg r_0$ , и которое справедливо на расстояниях от проводов  $r_1 \gg r_0$ . Для периодической системы проводов эта задача полностью эквива-



**Рис. 4.** Пороговое грозовое поле  $E_{0cor}$  для зажигания короны от крайнего провода плоскопараллельной системы, состоящей из восьми заземленных проводов, нормированное на порог зажигания короны от одиночного провода  $E_{0cor_s}$  в зависимости от отношения расстояния между соседними проводами  $D$  к высоте их подвеса  $h$  для двух высот подвеса проводов. Радиус проводов  $r_0 = 1$  см.  $E_{0cor_s} = 216.4$  и  $74.7$  В/см при  $h = 15$  и  $50$  м, соответственно.

лентна давно вошедшей в учебники [58, 59] задаче о поле бесконечной периодической плоскопараллельной решетки одинаковых проводов, которая имеет потенциал  $U$  и находится на некотором расстоянии от параллельной ей заземленной плоскости.

При аналитическом расчете потенциала в произвольной точке плоскости  $\varphi'(x, y)$  будем считать, что погонный заряд каждого провода  $q$  и его отражения в земле сосредоточен в его центре. Тогда в случае бесконечной периодической системы проводов над проводящей плоскостью, суммируя вклады в потенциал  $\varphi'(x, y)$  от каждого провода и от всех отражений в земле, получим (см. Приложение)

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \ln \left\{ \frac{\text{ch} [2\pi(h + y)/D] + \cos(2\pi x/D)}{\text{ch} [2\pi(h - y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\}, \quad (24)$$

$$q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0) = \frac{2\pi \epsilon_0 U}{\ln \left[ \frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi r_0/D} \right]}$$

Перепишем это выражение в виде ряда. Пусть  $y > h$ . Вынося за скобки под знаком логарифма  $\exp[2\pi(y + h)/D] > 1$  в числителе и  $\exp[2\pi(y - h)/D] >$

$> 1$  в знаменателе и преобразуя логарифм отношения этих экспонент, получим:

$$\varphi'(x, y) = \frac{qh}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + 2a_1 \cos(2\pi x/D) + a_1^2}{1 + 2a_2 \cos(2\pi x/D) + a_2^2} \right\}, \quad (25)$$

где  $a_1 = \exp[-2\pi(y + h)/D] < 1$ ,  $a_2 = \exp[-2\pi(y - h)/D] < 1$ , если  $y > h$ .

Пользуясь известной формулой [57]:

$$\ln(1 + 2a \cos \theta + a^2) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a^m}{m} \cos(m\theta), \quad (26)$$

$$|a| < 1,$$

из (25) получаем

$$\varphi'(x, y) = \frac{qh}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \exp \left[ -\frac{2\pi m(y + h)}{D} \right] - \exp \left[ -\frac{2\pi m(y - h)}{D} \right] \right\} \cos \left( \frac{2\pi m x}{D} \right), \quad y > h \quad (27)$$

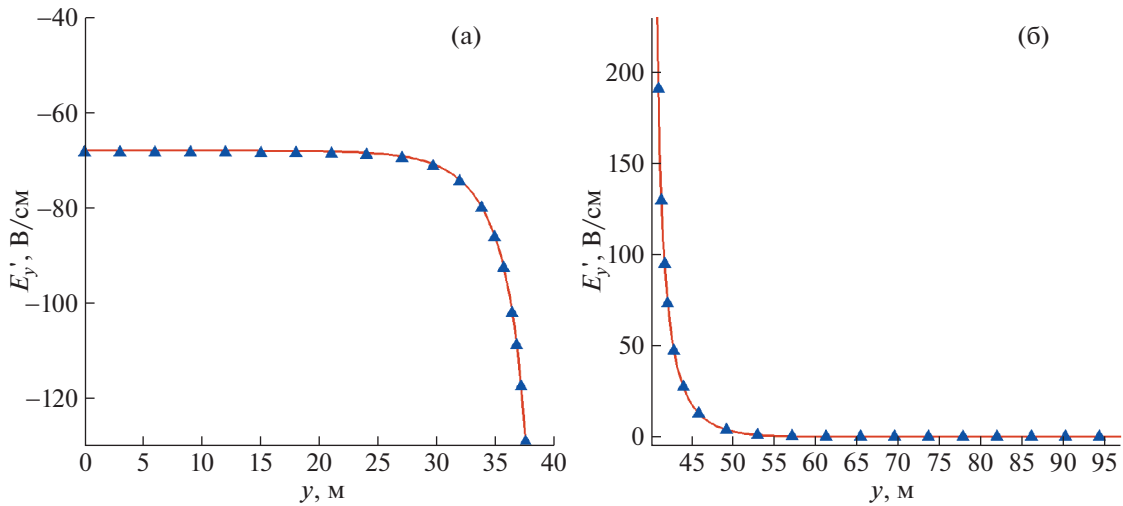
Из выражения (27) видно, что над проводами, т.е. при  $y \gg h$ , потенциал  $\varphi'$  быстро стремится к постоянной величине,  $\varphi'(x, y) = qh/(\epsilon_0 D)$ . Поэтому при удалении от проводов вверх на расстояния в несколько длин  $\Delta y \approx D/(2\pi)$ , электрическое поле  $E' = -\nabla\varphi'$ , индуцированное зарядами системы проводов, практически исчезает.

При  $y < h$  представим (24) в виде аналогичном (25). В (24) под знаком логарифма в числителе снова выносим за скобки множитель  $\exp[2\pi(y + h)/D] > 1$ , тогда как в знаменателе теперь выделяем множитель  $\exp[2\pi(h - y)/D] > 1$ . Преобразуя логарифм отношения последних экспонент, перепишем (24) в виде

$$\varphi'(x, y) = \frac{qy}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + 2a_1 \cos(2\pi x/D) + a_1^2}{1 + 2\tilde{a}_2 \cos(2\pi x/D) + \tilde{a}_2^2} \right\}, \quad (28)$$

где  $a_1 = \exp[-2\pi(y + h)/D] < 1$ ,  $\tilde{a}_2 = \exp[2\pi(y - h)/D] < 1$ , если  $y < h$ . С помощью (26) из (28) находим разложение потенциала в ряд

$$\varphi'(x, y) = \frac{qy}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \exp \left[ -\frac{2\pi m(y + h)}{D} \right] - \exp \left[ \frac{2\pi m(y - h)}{D} \right] \right\} \cos \left( \frac{2\pi m x}{D} \right), \quad y < h \quad (29)$$



**Рис. 5.** Распределение поля  $E_y'$ , индуцированного периодической системой заземленных проводов, подвешенных над землей, вдоль вертикальной прямой, проходящей через центр провода. (а) под проводом, (б) над проводом. Непрерывная кривая – двумерное моделирование,  $\blacktriangle$  – расчет по формуле (31),  $h = 40$  м,  $D = 20$  м. Провода помещены во внешнее грозовое поле  $E_0 = 100$  В/см, которое ниже порога зажигания короны  $E_{0cor} = 185.8$  В/см.

Из (29) следует, что если высота подвеса проводов достаточно велика,  $h \gg D$ , то при смещении от проводов вертикально вниз на расстояния в несколько длин  $D/(2\pi)$ , потенциал  $\phi'$  фактически перестает зависеть от  $x$  и растет линейно с высотой  $y$ . Это соответствует однородному, направленному вниз электрическому полю,  $E_y' = -q/(\epsilon_0 D)$ .

В общем случае для компонент электрического поля  $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$  из (24) получаем

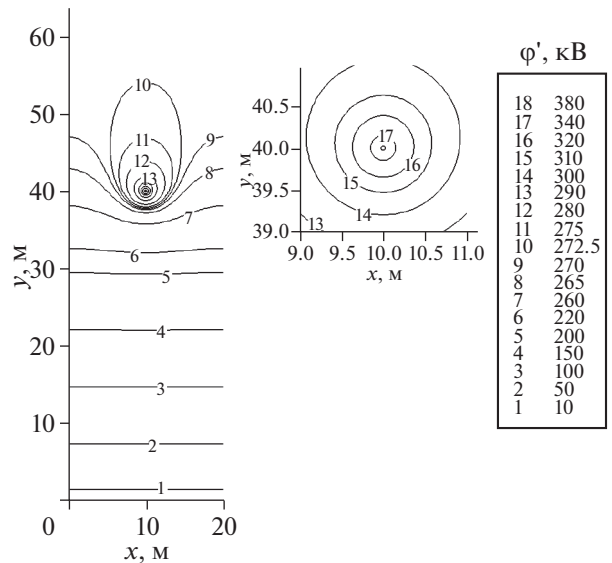
$$E_x' = \frac{q}{2\epsilon_0 D} \left\{ \frac{\sin(2\pi x/D)}{\text{ch}[2\pi(h+y)/D] + \cos(2\pi x/D)} - \frac{\sin(2\pi x/D)}{\text{ch}[2\pi(h-y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\} \quad (30)$$

$$E_y' = -\frac{q}{2\epsilon_0 D} \left\{ \frac{\text{sh}[2\pi(h+y)/D]}{\text{ch}[2\pi(h+y)/D] + \cos(2\pi x/D)} + \frac{\text{sh}[2\pi(h-y)/D]}{\text{ch}[2\pi(h-y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\} \quad (31)$$

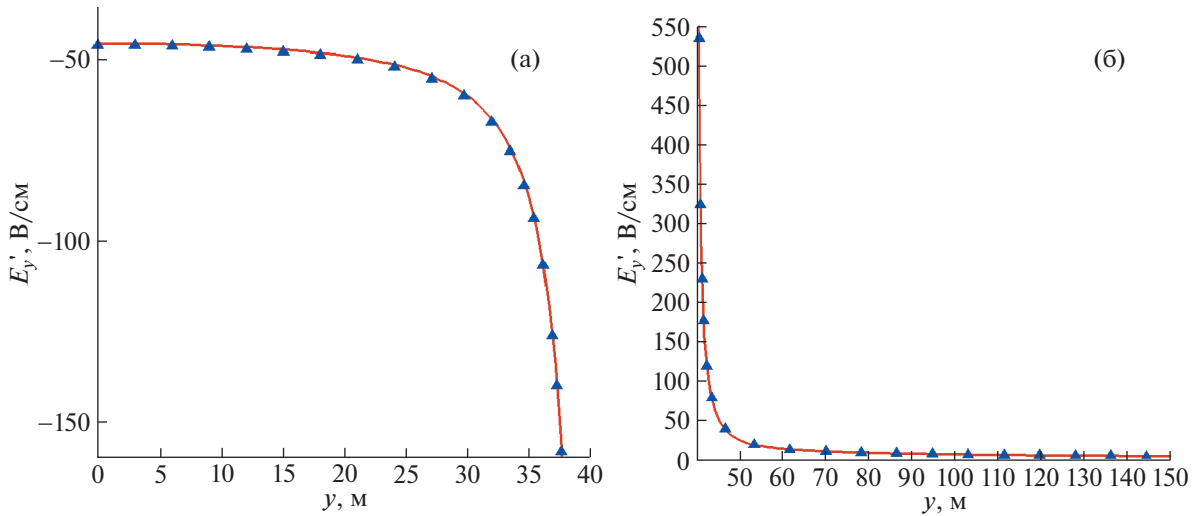
Сравнение полей  $E_y'$ , полученных аналитическим расчетом и двумерным численным расчетом по методике раздела 3, дано на рис. 5 для расстояний от проводов больше 1 м. Видно, что согласие результатов очень хорошее. Также хорошо согласуются и соответствующие распределения потенциала  $\phi'(x, y)$ . Анализ показывает, что в масштабе рис. 6, где построены эквипотенциальные кривые, рассчитанные численно, различие с аналитическим выражением (24) заметить трудно.

В случае системы, состоящей из восьми параллельных заземленных проводов, подвешенных над землей, выражение для потенциала  $\phi'(x, y)$ , индуцированного зарядами проводов и их отражений в земле, имеет вид

$$\phi'(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^8 q_k \ln \left[ \frac{(x - x_k)^2 + (y + h)^2}{(x - x_k)^2 + (y - h)^2} \right], \quad (32)$$



**Рис. 6.** Линии равного потенциала  $\phi'$ , индуцированного периодической системой заземленных проводов для условий рис. 5.



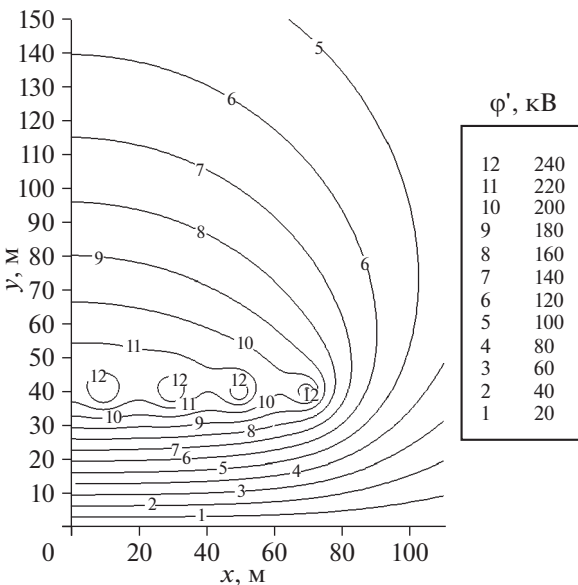
**Рис. 7.** Зависимость от высоты вертикального поля  $E'_y$ , индуцированного зарядами плоскопараллельной системы восьми одинаковых заземленных проводов, подвешенных над землей, вдоль прямой, проходящей через центр крайнего провода с координатами  $(x, y) = (7/2D, h)$ : (а) под проводом, (б) над проводом. Непрерывная кривая – двумерное численное решение,  $\blacktriangle$  – расчет по формуле (34).  $D = 20$  м,  $h = 40$  м, внешнее грозное поле  $E_0 = 100$  В/см. Порог зажигания короны от крайнего провода системы  $E_{0\text{cor}} = 122.1$  В/см.

где  $x_k = -7D/2 + (k - 1)D$ ,  $y_k = h$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , – координаты центров проводов, несущих погонные заряды  $q_k = 2\pi r_0 \epsilon_0 E_k(r_0)$ , которые находятся, как описано в предыдущем разделе.

Компоненты электрического поля  $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$  от названной системы проводов даются формулами:

$$E'_x = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^8 \frac{q_k y h}{(x - x_k)^3} \times \frac{1}{[1 + (y - h)^2 / (x - x_k)^2][1 + (y + h)^2 / (x - x_k)^2]} \quad (33)$$

$$E'_y = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^8 \frac{q_k h}{(x - x_k)^2} \times \frac{1}{[1 + (h^2 - y^2) / (x - x_k)^2][1 + (y - h)^2 / (x - x_k)^2][1 + (y + h)^2 / (x - x_k)^2]} \quad (34)$$



**Рис. 8.** Линии равного потенциала  $\phi'$ , индуцированного зарядами плоскопараллельной системы из восьми одинаковых заземленных проводов, подвешенных над землей и помещенных в грозное поле  $E_0 = 100$  В/см. Остальные параметры – те же, что на рис. 7.

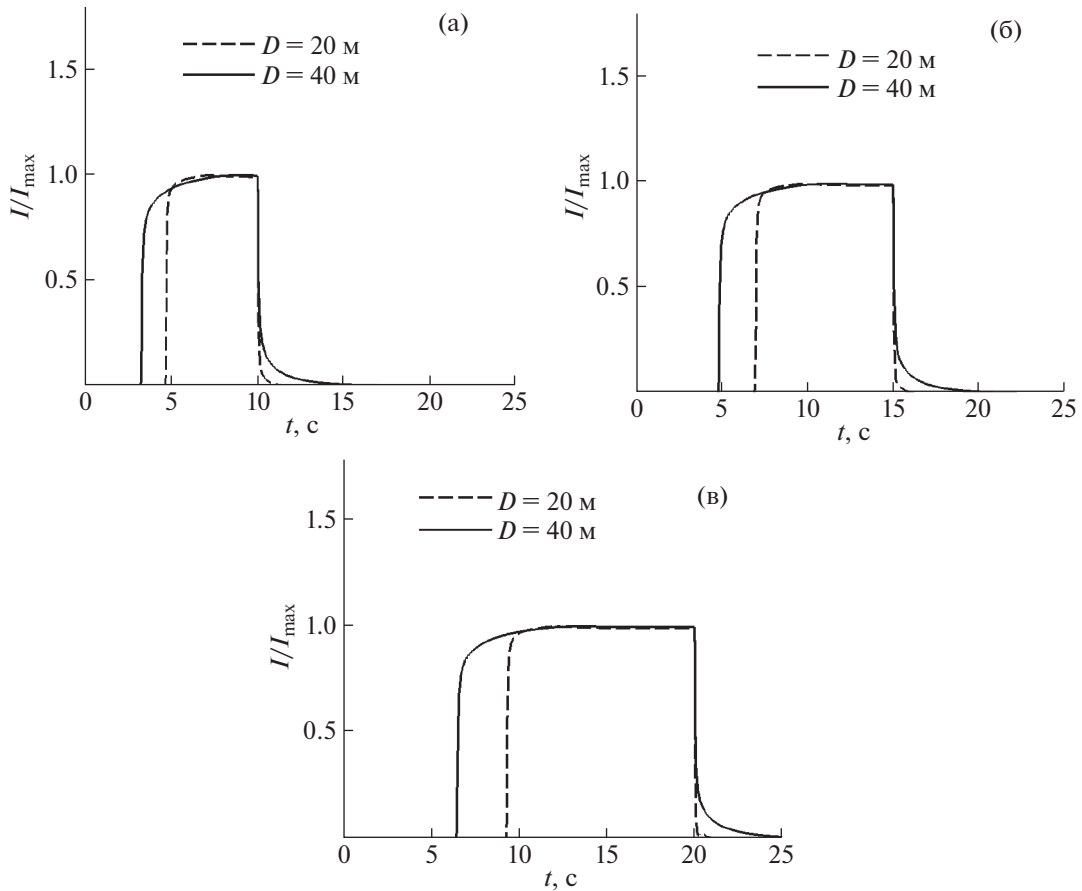
Поле, полученное двумерным расчетом, хорошо согласуется с формулой (34) (см. рис. 7). Распределение потенциала  $\phi'(x, y)$ , рассчитанное по двумерной программе, также очень близко  $\phi'(x, y)$  по формуле (32) во всем пространстве за исключением малой области вблизи проводов. Опуская детали этого сравнения, на рис. 8 мы приводим распределение потенциала, полученное двумерным расчетом.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ДВУМЕРНЫХ РАСЧЕТОВ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОРОНЫ

### 6.1. Бесконечная периодическая система проводов

Уравнения (3) и (4) численно решались методом, описанным в разд. 3. На рис. 9 представлены





**Рис. 9.** Зависимость от времени нормированного тока короны  $I(t)/I_{\max}$  от бесконечной периодической системы заземленных проводов, подвешенных на высоте  $h = 40$  м, для различных характерных времен нарастания грозового поля  $\tau$  в линейном законе (1) с  $E_{0\max} = 400$  В/см и для двух расстояний между соседними проводами  $D$ . (а)  $\tau = 10$  с,  $I_{\max} = 0.71$   $\mu\text{А/м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 1.417$   $\mu\text{А/м}$  при  $D = 40$  м; (б)  $\tau = 15$  с,  $I_{\max} = 0.473$   $\mu\text{А/м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 0.944$   $\mu\text{А/м}$  при  $D = 40$  м; (в)  $\tau = 20$  с,  $I_{\max} = 0.355$   $\mu\text{А/м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 0.707$   $\mu\text{А/м}$  при  $D = 40$  м.

рассчитанные зависимости тока короны на единицу длины провода, нормированные на максимальное значение тока в каждом расчете. Для удобства анализа результатов принимается “линейный” закон роста грозового поля (1). В расчетах варьировались два входных параметра: расстояние между проводами  $D$  и постоянная времени  $\tau$  в формуле (1). Рис. 9а построен для самого малого из принятых  $\tau$ ,  $\tau = 10$  с; рис. 9в – для самого большого,  $\tau = 20$  с. В системе проводов, в которой соседние провода расположены ближе друг к другу, пороговое поле  $E_{0\text{cor}}$  выше (рис. 3), поэтому для любого  $\tau$  при  $D = 20$  м корона зажигается несколько позднее, чем при  $D = 40$  м.

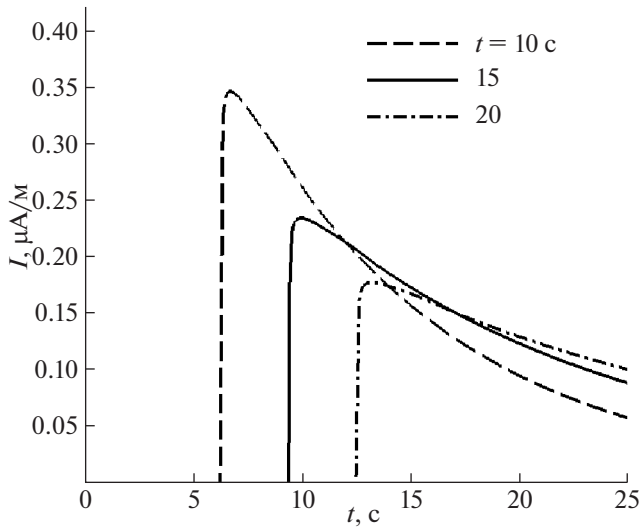
После зажигания короны ток на единицу длины провода сначала растет, а потом выходит на насыщение до тех пор, пока рост грозового поля не прекращается. Рассчитанная величина погон-

ного коронного тока на плато хорошо согласуется с теоретической формулой

$$I = jD, \quad j = \epsilon_0 \frac{dE_0(t)}{dt}, \quad (35)$$

где  $j$  – предельная плотность коронного тока от идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы. Формула для  $j$  выведена в [15] (см. также [24, 25]). Например, при  $E_{0\max} = 400$  В/см,  $\tau = 15$  с,  $D = 20$  м, ток по формуле (35) равен  $I = 0.471$   $\mu\text{А/м}$ , тогда как в двумерном расчете получилось 0.473  $\mu\text{А/м}$ .

Как видно из рис. 9, время выхода коронного тока на насыщение, отсчитанное от момента зажигания короны, при  $D = 20$  м меньше, чем при  $D = 40$  м. Когда грозовое поле перестает расти, ток коронного разряда резко падает и быстро стремится к нулю (см. рис. 9). Согласно формуле (35), для плоского ионного слоя ток должен был бы прекратиться мгновенно. Как видно из рис. 9,



**Рис. 10.** Зависимость от времени тока короны от бесконечной периодической системы заземленных проводов для различных характерных времен нарастания грозового поля  $\tau$  в релаксационном законе (2) с  $E_{0\max} = 400$  В/см,  $D = 20$  м. Высота подвеса проводов  $h = 40$  м.

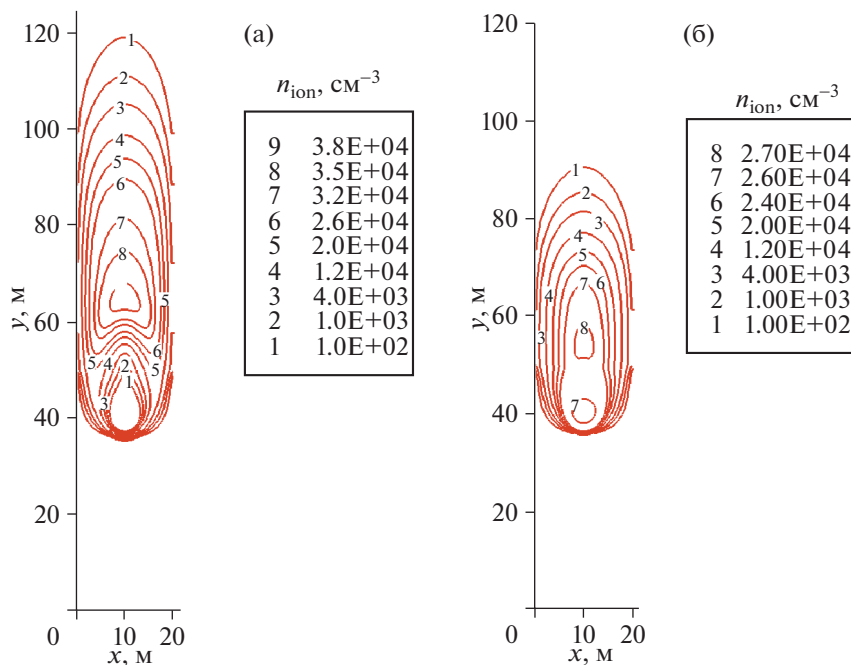
при меньшем расстоянии между проводами, ток с проводов спадает быстрее. Аналогичные эффекты проявились в 1D-модели короны от сферических проводников [24].

Эволюция во времени тока короны от бесконечной периодической системы проводов в случае, когда грозовое поле нарастает по релаксационному закону (2) дана на рис. 10. Рассчитанное значение тока через некоторое время после зажигания короны также хорошо согласуется с формулой (35) для тока плоского слоя. Например, при  $\tau = 10$  с в момент  $t = 15$  с ток короны, согласно численному расчету равный  $I = 0.158$   $\mu\text{А/м}$ , практически не отличается от тока по (35).

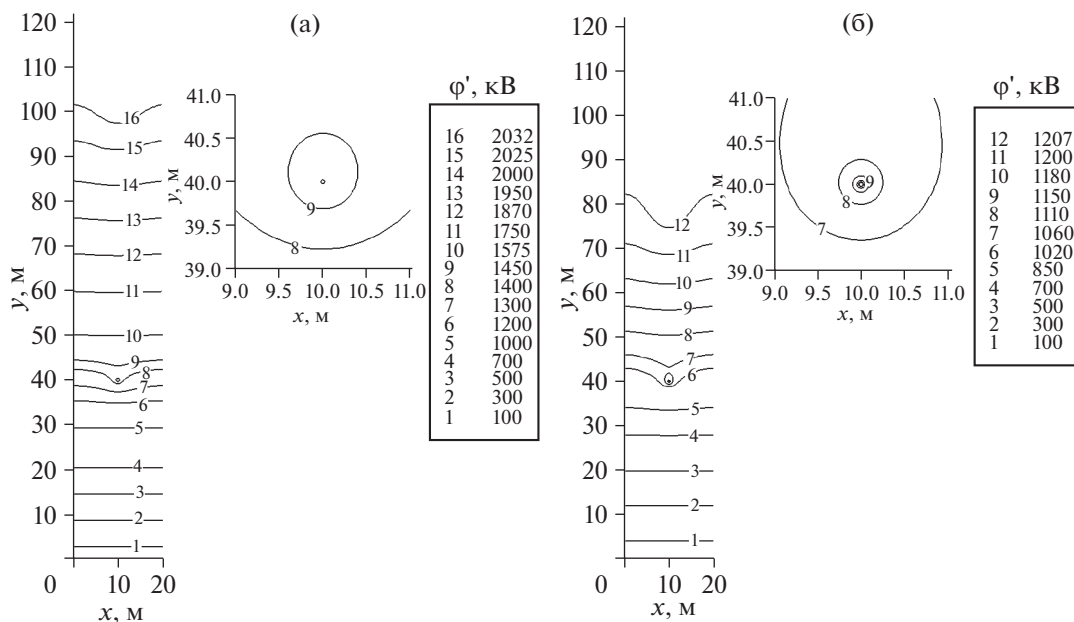
На рис. 11 показаны двумерные распределения плотности ионов  $n_{\text{ion}}$  около проводов в заданный момент времени  $t = 15$  с для двух случаев: при расчете рис. 11а задавалось, что грозовое поле  $E_0(t)$  растет по “линейному” закону (1), а при расчете рис. 11б – по релаксационному (2) и прочих равных условиях. Эволюции во времени погонного тока короны для условий рис. 11(а) и рис. 11б показаны пунктирными кривыми на рис. 9а и на рис. 10, соответственно.

Когда грозовое поле нарастает по “линейному” закону, к моменту  $t = 15$  с ток короны уже прекратился. С этим связан резкий спад концентрации ионов вблизи провода, который можно видеть из рис. 11а.

Интересно отметить, что рассчитанные на рис. 11 распределения  $n_{\text{ion}}(x, y)$  для обоих законов нарастания поля двумерны: на данной высоте у концентрация ионов зависит от координаты  $x$ ,



**Рис. 11.** Линии равных плотностей ионов, внедренных коронным разрядом от бесконечной периодической системы проводов в момент времени  $t = 15$  с от начала роста грозового поля (а) по линейному закону (1), (б) по релаксационному закону (2). Высота подвеса проводов  $h = 40$  м, расстояние между соседними проводами  $D = 20$  м,  $E_{0\max} = 400$  В/см,  $\tau = 10$  с.

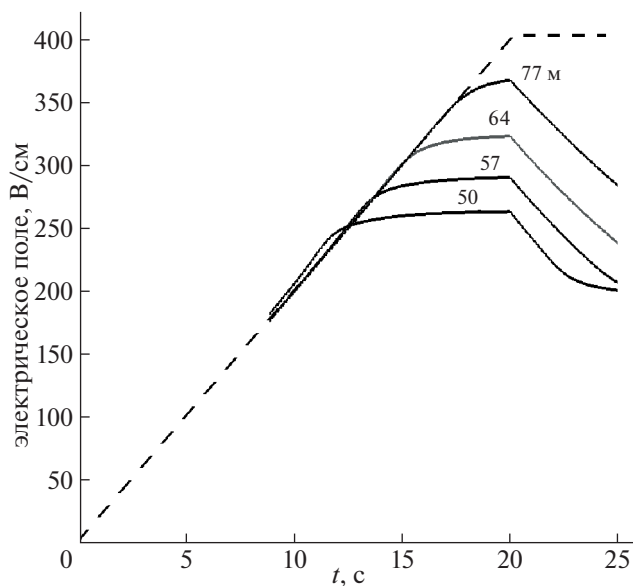


**Рис. 12.** Линии равного потенциала  $\varphi'$ , индуцированного объемным зарядом короны и зарядами бесконечной периодической системы проводов. Рисунки (а) и (б) сделаны для условий рис. 11 (а) и (б), соответственно.

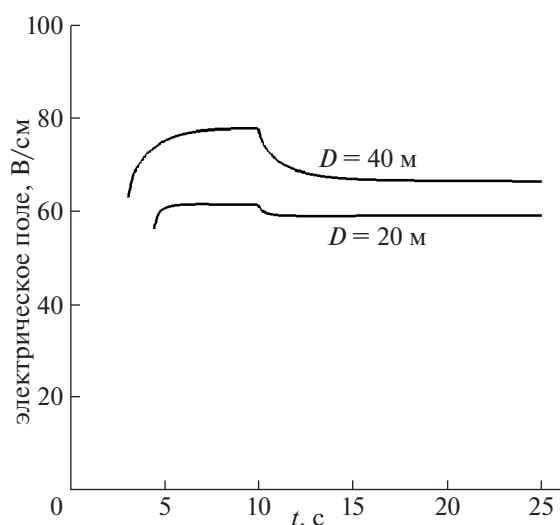
будучи симметричной относительно вертикальной плоскости  $x = D/2$ , проходящей через центр провода. Такая картина отличается от однородного вдоль  $x$  распределения, которое получилось бы в случае короны от идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы.

С другой стороны, в двумерном ионном облаке электрическое поле, созданное объемным зарядом, перераспределяется так, что его горизонтальная составляющая становится малой. Это видно из рассчитанного двумерного распределения потенциала  $\varphi'$  (см. рис. 12). На высотах 50–70 м, где поле зарядов проводов уже очень мало, эквипотенциали идут практически параллельно оси  $x$ , а электрическое поле, созданное объемным зарядом, направлено вниз. Под действием суммарного поля, грозового и поля объемного заряда, заряды движутся в основном вверх. Вблизи верхней границы ионного облака появляются небольшие горизонтальные составляющие поля объемного заряда.

Поскольку вопрос о динамике электрического поля в разных точках важен, ниже мы приводим рассчитанные зависимости от времени суммарного вертикального электрического поля, складывающегося из грозового поля  $E_0$  и поля  $E'_y$ , индуцированного объемным зарядом и зарядами проводов, на разных высотах над проводами (рис. 13).



**Рис. 13.** Зависимость от времени суммарного вертикального электрического поля на разных высотах, указанных на рисунке, над проводом коронирующей бесконечной периодической системы проводов. Высота подвеса проводов  $h = 40$  м, расстояние между проводами  $D = 20$  м. Порог зажигания короны в этих условиях  $E_{0\text{кор}} = 185.8$  В/см. Пунктирной кривой показана эволюция внешнего грозового поля: оно растет линейно от нуля до  $E_{0\text{max}} = 400$  В/см в течение  $\tau = 20$  с, а затем поддерживается постоянным.



**Рис. 14.** Зависимость от времени электрического поля на земле под проводом бесконечной периодической системы коронирующих заземленных проводов для двух расстояний  $D$  между соседними проводами. Грозовое поле растет по линейному закону (1) с  $E_{0\max} = 400$  В/см и  $\tau = 10$  с;  $h = 40$  м.

Как видно из рис. 13, суммарное поле на данной высоте сначала практически совпадает с внешним полем  $E_0$  и растет линейно, затем его рост резко замедляется и оно стремится к постоянной величине, зависящей от высоты. После того как внешнее грозовое поле перестает расти, суммарное поле на данной высоте начинает падать. Такое поведение поля качественно согласуется как с теорией, так и с расчетами [25]. Отметим, что, как показано в [25], в случае идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы, в поле  $E_0$ , растущем линейно, электрическое поле над коронирующей плоскостью становится постоянным во времени, как только плоский ионный фронт достигает высоты рассматриваемого места. В нашем случае ионный фронт не является плоским. У нас фронт также размыт счетной диффузией. Поэтому мы не приводим здесь сравнения результатов с теорией.

Суммарное электрическое поле на земле под проводом коронирующей бесконечной периодической системы дано на рис. 14. При линейном законе роста внешнего поля  $E_0$ , поле на земле после зажигания короны немного возрастает, выходит на насыщение, а после прекращения роста  $E_0$  слегка спадает. Когда соседние провода системы находились на расстоянии  $D = 20$  м, вариации поля на земле за все время расчета короны при выбранных входных параметрах не превышали 10%.

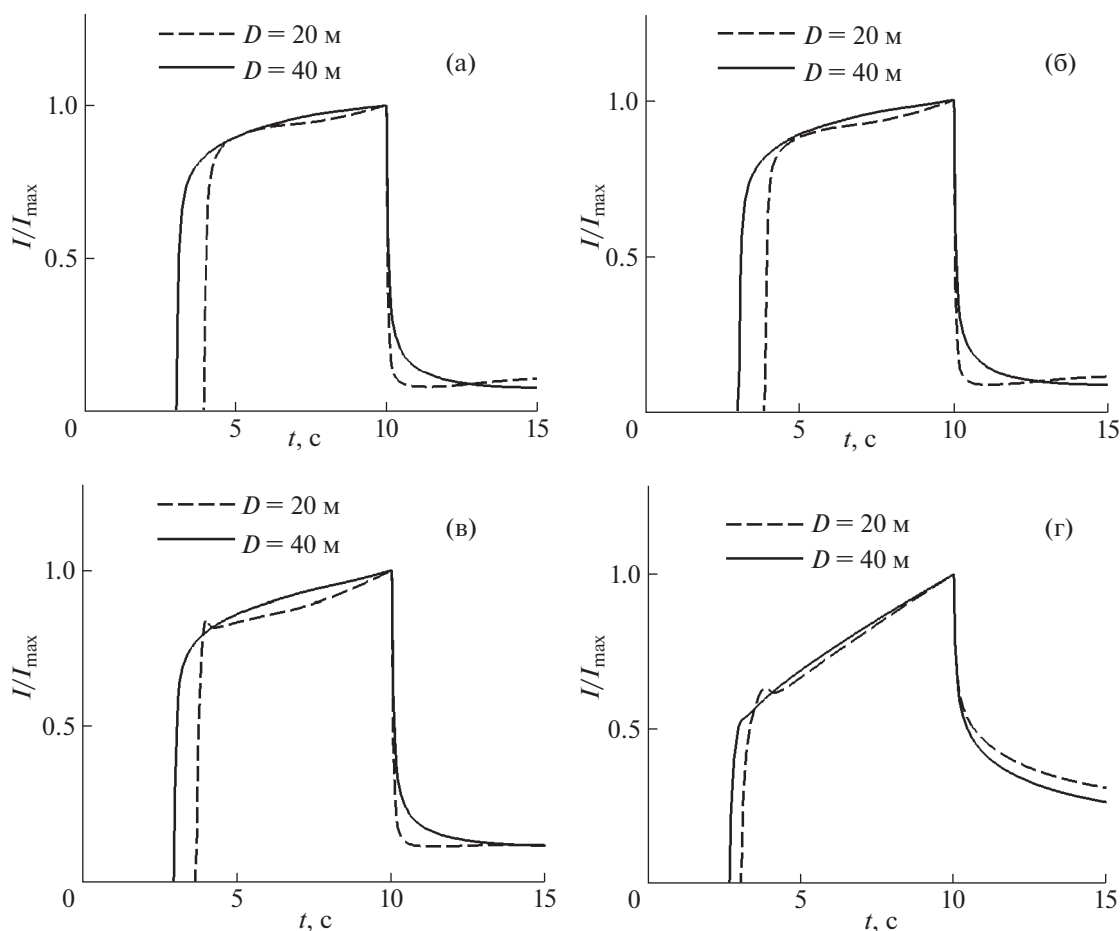
## 6.2. Плоскопараллельная система из восьми одинаковых проводов

Приведем характеристики коронного разряда для системы из восьми заземленных проводов. На рис. 15 дан приведенный ток  $I(t)/I_{\max}$  на единицу длины провода для четырех пар проводов, расположенных симметрично относительно срединной плоскости  $x = 0$ , где  $I_{\max}$  — это максимальный достигнутый ток в каждом расчете. Из рис. 15 видно, что крайние провода системы, расположенные в точках  $x = \pm 7D/2$ , коронируют более интенсивно. Динамика тока от остальных трех пар проводов приблизительно одинакова. Тем не менее, ток от проводов, ближайших к центру системы, получился меньше, чем от проводов в точках  $x = \pm 5D/2$ : на 17% и 11% при  $D = 20$  и 40 м, соответственно. Масштабом плотности тока короны служит величина  $j = I_{\max}/D$ . Для проводов, расположенных в точках  $x = \pm D/2$ , плотность тока равна  $j = 0.047$   $\mu\text{A}/\text{m}^2$  и  $j = 0.043$   $\mu\text{A}/\text{m}^2$  при  $D = 20$  и 40 м, соответственно. В рассматриваемых условиях эти величины на 34% и 22% выше, чем предельная плотность тока  $j = 0.035$   $\mu\text{A}/\text{m}^2$  (35) от идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы. Поэтому следует ожидать, что концентрация ионов, генерируемых срединными проводами, будет выше той, которая получилась при моделировании короны от бесконечной системы проводов, при прочих равных условиях.

На рис. 16 дано распределение плотности ионов  $n_{\text{ion}}$ , внедренных в окружающее пространство коронным разрядом от системы из восьми заземленных проводов. Грозовое поле, расстояние между проводами, и момент окончания расчета были выбраны такими же, что и на рис. 1а, где рассчитывалась периодическая система проводов. Сравнивая плотность ионов над тремя проводами, ближайшими к срединной плоскости  $x = 0$  на рис. 16, и величину  $n_{\text{ion}}$  на рис. 1а, мы видим, что на рис. 16 плотность ионов на данной высоте на десятки процентов выше. При этом ионное облако более вытянуто вверх (на 10–20 м) по сравнению с рис. 1а.

Более существенно отличается распределение плотности ионов  $n_{\text{ion}}$  у крайнего провода. Из рис. 16 видно, что плотность ионов над крайним проводом оказывается в несколько раз выше по сравнению с величиной  $n_{\text{ion}}$  над остальными проводами. Из-за краевых эффектов заряды в ионном облаке у крайнего провода, двигаясь под действием грозового поля  $E_0$  вверх, также смещаются вправо.

На рис. 17 приведены линии потенциала  $\phi'$ , индуцированного объемным зарядом ионов и зарядами проводов. Рисунок 17 сделан для тех же условий и того же момента времени, что рис. 16. Видно, что на высотах 50–70 м над первой, вто-



**Рис. 15.** Зависимость от времени нормированного коронного тока от плоскопараллельной системы восьми одинаковых заземленных проводов, подвешенных над землей, для двух расстояний между соседними проводами  $D$ . Высота всех проводов  $h = 40$  м. Каждый рисунок соответствует одной паре проводов, помещенных в точки  $x$ , симметричные относительно прямой  $x = 0$ , (а)  $x = \pm D/2$ ,  $I_{\max} = 0.94 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 1.71 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 40$  м; (б)  $x = \pm 3D/2$ ,  $I_{\max} = 0.98 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 1.76 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 40$  м; (в)  $x = \pm 5D/2$ ,  $I_{\max} = 1.13 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 1.92 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 40$  м; (г)  $x = \pm 7D/2$ ,  $I_{\max} = 3.15 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 20$  м,  $I_{\max} = 3.64 \mu\text{A}/\text{м}$  при  $D = 40$  м. Грозовое поле растет по закону (1)  $E_{0\max} = 400$  В/см,  $\tau = 10$  с.

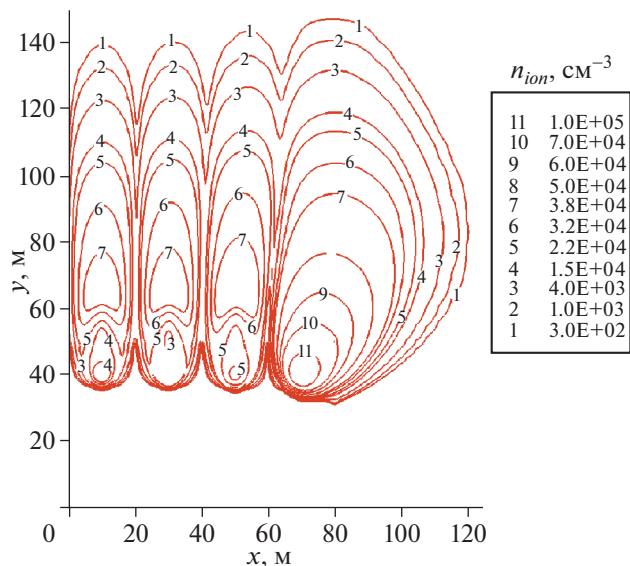
рой и третьей парами проводов, которым соответствуют точки с координатами  $x = 10, 30$  и  $50$  м, эквипотенциали идут практически параллельно оси  $x$ . На расстояниях  $10$  м от проводов вверх и вплоть до высот  $110$  м, горизонтальная составляющая поля  $E'$  над этими проводами не превышает  $15$  В/см. Отмеченное выше движение вправо ионов у крайнего провода связано с горизонтальной составляющей поля  $E'_x \approx 200$  В/см, которая сравнима с масштабом заданного вертикального грозового поля  $E_{0\max}$ .

Заметим, что из результатов, представленных на рис. 17, следует, что потенциал  $\phi'$  на верхней  $BC$  и боковой  $AB$  границах расчетной области (см. рис. 16) создается в основном объемным зарядом. Действительно вклад первого члена от объемного заряда в потенциал (15) на отрезках  $AB$

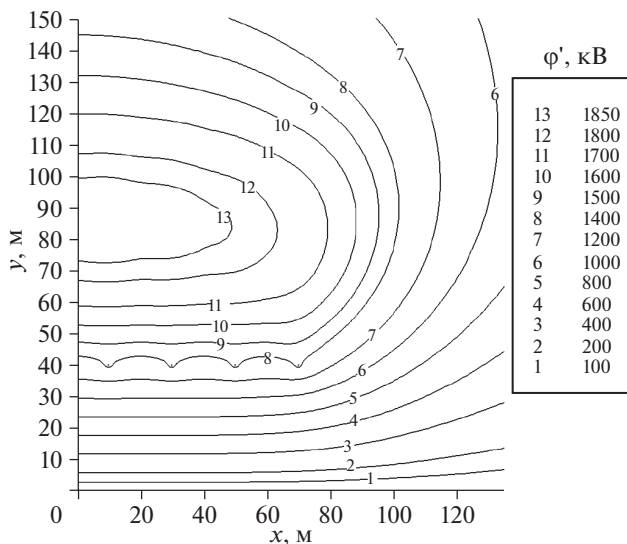
и  $BC$  составляет почти  $90\%$  от суммарного потенциала.

На рис. 18 приведены зависимости от времени суммарного вертикального электрического поля на разных высотах над крайними проводами в случае, когда внешнее грозовое поле сначала растет линейно, а потом стабилизируется. Ход кривых рис. 18 трудно интерпретировать теоретически; качественно он отличается от того, что получилось при расчете временной эволюции суммарного поля в различных точках над проводом периодической системы (рис. 13)..

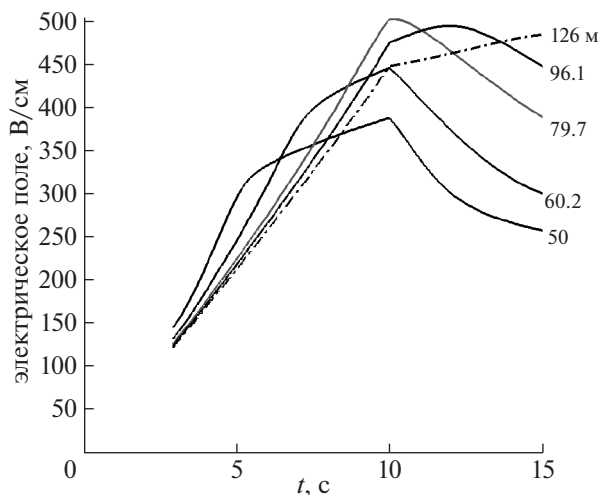
На рис. 19 приведено суммарное поле на земле под крайними проводами системы после зажигания короны. Это поле сначала растет, достигает максимума в момент прекращения линейного роста грозового поля, а потом начинает падать.



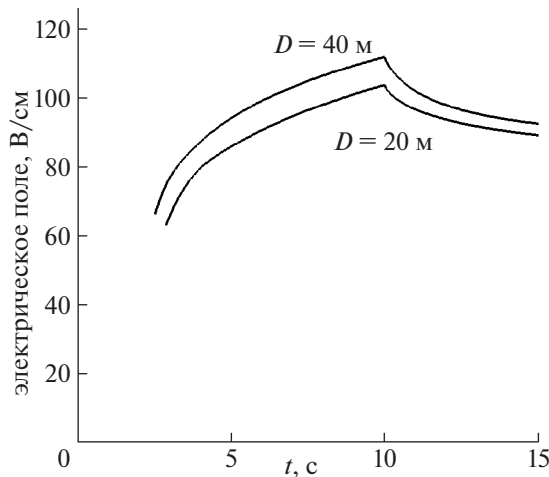
**Рис. 16.** Линии равных плотностей ионов  $n_{ion}$ , внедренных коронным разрядом от системы из восьми заземленных проводов в момент времени  $t = 15$  с от начала роста грозового поля по линейному закону (1). Высота подвеса проводов  $h = 40$  м, расстояние между соседними проводами  $D = 20$  м,  $E_{0max} = 400$  В/см,  $\tau = 10$  с. Провода, лежащие при  $x < 0$ , заменялись в расчете граничным условием симметрии при  $x = 0$ .



**Рис. 17.** Линии равного потенциала  $\phi'$ , создаваемого объемным зарядом и зарядами восьми проводов в момент времени  $t = 15$  с от начала роста грозового поля. Входные данные те же, что на рис. 16.



**Рис. 18.** Зависимость от времени суммарного вертикального электрического поля на разных высотах, указанных на рисунке, над крайними проводами, расположенными в точках  $x = \pm 70$  м, системы из восьми коронирующих заземленных проводов. Расстояние между соседними проводами  $D = 20$  м, высота подвеса  $h = 40$  м. Грозовое поле растет по линейному закону (1) с  $E_{0max} = 400$  В/см и  $\tau = 10$  с. Порог зажигания короны от крайнего провода  $E_{0cor} = 122.1$  В/см.



**Рис. 19.** Зависимость от времени электрического поля на земле под крайними проводами, расположенными в точках  $x = \pm 7/2D$ , системы из восьми коронирующих проводов для двух расстояний  $D$  между соседними проводами. Высота подвеса проводов и внешнее грозовое поле взяты такими же, как при расчете рис. 18.

Для анализа зависимостей рис. 18 и 19 следовало бы провести дополнительные численные эксперименты, варьируя число проводов в системе. Эта работа требует отдельного исследования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработана двумерная компьютерная модель для расчета нестационарного коронного разряда от плоскопараллельных систем заземленных проводов, подвешенных над землей и находящихся во внешнем однородном поле грозового облака.

Рассмотрен случай бесконечной периодической системы проводов, когда теоретический анализ сводится к расчету короны от одного провода с периодическими граничными условиями и случай системы из восьми проводов. В последнем случае вычислительная работа была сокращена путем применения условия симметрии, т.е. сокращения вдвое числа проводов, рассматриваемых непосредственно.

Для проверки метода решения двумерной электростатической задачи, проведено сравнение с аналитическими решениями рассчитанных по двумерной программе распределений потенциала, создаваемого зарядами проводов, в пустом пространстве над землей.

Найдено пороговое внешнее грозовое поле  $E_{0\text{сог}}$  для возбуждения короны от провода бесконечной периодической системы и от крайних проводов системы, состоящей из восьми проводов.

Рассчитаны характеристики короны от двух названных систем: тока, распределения объемного заряда и потенциала, индуцированного зарядами проводов и объемным зарядом. Приведены рассчитанные зависимости от времени суммарного электрического поля на разных высотах над проводами и на земле.

Для бесконечной периодической системы проводов расчет сделан для режима, рассмотренного ранее в случае короны от многоэлектродной системы многих стержней, когда ток короны зависит только от расстояния  $D$  между соседними коронирующими электродами, а плотность коронного тока  $j = \epsilon_0 dE_0(t)/dt$  — только от скорости нарастания внешнего грозового поля.

Работа одного из авторов (М.С. Мокрова) поддержана РФФИ, грант № 18-38-00051-мол-а.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОТЕНЦИАЛ В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СОЗДАВАЕМЫЙ ЗАРЯДАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

Этот потенциал  $\varphi'(x, y)$  дается формулой

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{dz}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-h)^2 + z^2}} - \frac{dz}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y+h)^2 + z^2}} \right), \quad (П.1)$$

где  $x_k = D/2 + kD$  — координаты центров проводов, а  $k = 0, \pm 1, \pm 2,$  и т.д (см. рис. 1(а)),  $q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0)$  — погонный заряд каждого провода.

Вычисляя интегралы в (П.1), получим

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \ln \left[ \frac{(x-x_k)^2 + (y+h)^2}{(x-x_k)^2 + (y-h)^2} \right] \quad (П.2)$$

Переходя в (П.2) к суммированию по положительным  $k$ , находим

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(x-D/2)^2 + (y+h)^2}{(x-D/2)^2 + (y-h)^2} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left\{ \left[ \frac{(x-D/2+kD)^2 + (y+h)^2}{(x-D/2+kD)^2 + (y-h)^2} \right] \times \left[ \frac{(x-D/2-kD)^2 + (y+h)^2}{(x-D/2-kD)^2 + (y-h)^2} \right] \right\} \quad (П.3)$$

Вводя новую переменную  $\xi = x - D/2$  и переходя во втором члене в (П.3) от суммирования логарифмов к произведению под знаком логарифма, имеем

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\xi^2 + (y+h)^2}{\xi^2 + (y-h)^2} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \prod_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{(\xi+kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi+kD)^2 + (y-h)^2} \right] \times \left[ \frac{(\xi-kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi-kD)^2 + (y-h)^2} \right] \right\} \quad (П.4)$$

Вводя комплексные переменные,  $z_1 = \frac{\xi}{D} + i \frac{(y+h)}{D}$ ,  $z_2 = \frac{\xi}{D} + i \frac{(y-h)}{D}$  и комплексно-сопряженные им  $\bar{z}_1$  и  $\bar{z}_2$ , перепишем произведение в (П.4) в виде

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{(\xi+kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi+kD)^2 + (y-h)^2} \right] \left[ \frac{(\xi-kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi-kD)^2 + (y-h)^2} \right] = \prod_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{(1+z_1/k)(1-\bar{z}_1/k)(1+\bar{z}_1/k)(1-\bar{z}_1/k)}{(1+z_2/k)(1-\bar{z}_2/k)(1+\bar{z}_2/k)(1-\bar{z}_2/k)} \right]$$

Используя в последнем выражении известное разложение синуса,  $\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right)$  [57], находим, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(1 + z_1/k)(1 - z_1/k)(1 + \bar{z}_1/k)(1 - \bar{z}_1/k)}{(1 + z_2/k)(1 - z_2/k)(1 + \bar{z}_2/k)(1 - \bar{z}_2/k)} \right] = \frac{z_2 \bar{z}_2 \sin \pi z_1 \sin \pi \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1 \sin \pi z_2 \sin \pi \bar{z}_2}$$

Возвращаясь обратно к переменным  $\xi$ ,  $y$  и раскрывая по формулам тригонометрии произведение синусов, получим выражение для бесконечного произведения под знаком логарифма, входящего в (П.4)

$$\frac{z_2 \bar{z}_2 \sin \pi z_1 \sin \pi \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1 \sin \pi z_2 \sin \pi \bar{z}_2} = \frac{\left[ \xi^2 + (y-h)^2 \right] \operatorname{ch} [2\pi(h+y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)}{\left[ \xi^2 + (y+h)^2 \right] \operatorname{ch} [2\pi(h-y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)} \quad (\text{П.5})$$

Заменяя бесконечное произведение в (П.4) правой частью (П.5) и объединяя стоящие в (П.4) два логарифма, имеем

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch} [2\pi(h+y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)}{\operatorname{ch} [2\pi(h-y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)} \right\} \quad (\text{П.6})$$

Формула (П.6) для  $\varphi'(x, y)$  подобна формуле, приведенной в книге [58], где рассматривается та же задача о распределении потенциала, создаваемого периодической системой заряженных нитей. Однако, там вместо  $4\pi\epsilon_0$  написан множитель  $2\pi\epsilon_0$ , а в аргументах гиперболического и обычного косинусов вместо  $2\pi$  стоит множитель  $\pi$ . Переходя от  $\xi$  к исходной переменной  $x$ ,  $\xi = x - D/2$  и выражая погонный заряд  $q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0)$  через потенциал  $U$  с помощью формулы (20), из (П.6) окончательно получим

$$\varphi'(x, y) = \frac{U}{2 \ln \left[ \frac{\operatorname{sh}(\pi 2h/D)}{\pi r_0/D} \right]} \times \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch} [2\pi(h+y)/D] + \cos(2\pi x/D)}{\operatorname{ch} [2\pi(h-y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\} \quad (\text{П.7})$$

Отметим также, если в формуле из книги [59] для поля плоскопараллельной периодической решетки проводов при условии  $r_0 \ll D$ ,  $h$  сделать разложение по малому параметру  $(r_0/D)^2$  и затем пренебречь слагаемыми с  $r_0/D$  высокого порядка, то та формула сведется к (П.7).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* // УФН. 2000. Т. 170. С. 753–769 [Bazelyan E.M. and Raizer Yu.P. The mechanism of lightning attraction and the problem of lightning initiation by lasers // Phys. Usp. 2000. Vol. 43. P. 701–16].
2. *Golde, R.H.* (Ed.), *Lightning*. New York: Academic, 1977.
3. *Rakov V.A. and Uman M.A.* *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
4. *Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M., Carpenter R.B. Jr, Drabkin M.M. and Raizer Yu.P.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. V. 34. P. 3256–66.
5. *Montanya J., van der Velde O., and Williams E.R.* // J. Geophys. Res. Atmos. 2014. V. 119. P. 1455–1462, <https://doi.org/10.1002/2013JD020225>
6. *Standler R.B. and Winn W.P.* // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1979. V. 105. P. 285–302.
7. *Soula S. and Chauzy S.* // Journal of Geophysical Research. 1991. V. 96. P. 22327–22336.
8. *Soula S.* // Journal of Geophysical Research. 1994. V. 99. P. 10759–10765.
9. *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* *Физика молнии и молниезащиты*. М.: Физматлит, 2001. [Bazelyan E.M. and Raizer Yu.P. *Lightning physics and lightning protection*. Bristol: IOP, 2000.]
10. *Bazelyan E.M. and Drabkin M.M.* Scientific and technical basis for preventing lightning strikes to earth bound objects // In: Power Engineering Society General Meeting, IEEE, 13–17 July. 2003. V. 4. P. 2201–2208.
11. *Rizk F.A.M.* Analysis of space charge generating devices for lightning protection: performance in slow varying fields // IEEE Trans. Power Deliv. 2010. V. 25. P. 1996–2006.
12. *Э.М. Базелян*, частное сообщение, 2015.
13. *Александров Н.Л., Базелян Э.М., Драбкин М.М., Карпентер Р.Б., Райзер Ю.П.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 11. С. 1032–1045. [Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M., Carpenter R.B. Jr, Drabkin M.M. and Raizer Yu.P. // Plasma Phys. Rep. 2002. Vol. 28. P. 953–964].
14. *Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M., D'Alessandro F. and Raizer Yu.P.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. V. 38. P. 1225–38.
15. *Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V. 17. P. 024015.
16. *Bazelyan E.M., Raizer Yu.P., Aleksandrov N.L. and D'Alessandro F.* // Atmos. Res. 2009. V. 94. P. 436–47.
17. *Becerra M.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. V. 46. P. 135205.
18. *Becerra M.* // Atmospheric Research. 2014. V. 149. P. 316.
19. *Becerra M. and Cooray V.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. P. 3708.
20. *Becerra M. and Cooray V.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. P. 4695.
21. *Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L.* // Atmospheric Research. 2015. V. 153. P. 74–86.



22. Rizk F.A.M. // IEEE Trans. Power Deliv. 2011. V. 26. P. 1156–65.
23. Mokrov M.S., Raizer Yu.P. and Bazelyan E.M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. V. 46. P. 455202.
24. Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L. // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2014. V. 109. P. 80.
25. Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L. // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2014. V. 109. P. 91.
26. Neimarlija N., Demirdzic I. and Muzafjerija S. // Journal of Electrostatics. 2009. V. 67. P. 37–47.
27. Medlin A. J., Fletcher C.A.J. and Morrow R. // J. Electrostat. 1998. V. 43. P. 39–60.
28. Guo B.Y., Guo J., Yu A.B. // Journal of Electrostatics. 2014. V. 72. P. 301–310.
29. Davis J.L. and Hoburg J.F. // Journal of Electrostatics. 1986. V. 18. P. 1–22.
30. Nguyen N.C., Guerra-Garcia C., Peraire J. and Martinez-Sanchez M. // Journal of Electrostatics. 2017. V. 89. P. 1.
31. Medlin A.J., Morrow R. and Fletcher C.A.J. // J. Electrostat. 1998. V. 43. P. 61–77.
32. Lu T., Feng H., Cui X., Zhao Z. and Li L. // IEEE Transactions on Magnetics. 2010. V. 46. № 8. P. 2939–2942. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2010.2044149>
33. Qiao J., Zou J., Yuan J., Lee J. B. and Ju M. // IEEE Transactions on Magnetics. 2016. V. 52. № 3. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2481725>
34. Guerra-Garcia C., Nguyen N.C., Mouratidis T. and Martinez-Sanchez M. // J. Geophys. Res. Atmos. 2020. 125(16): e2020JD032908.
35. Chauzy S. and Rennela C. // Journal of Geophysical Research. 1985. V. 90. № D4. P. 6051–6057.
36. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. [Tamm I.E. Fundamentals of The Theory of Electricity. Mir, 1979.]
37. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. [Birdsall C.K. and Langdon A.B. Plasma Physics via Computer Simulation. Taylor & Francis, 2004. Chapter 14. P. 318–322].
38. Zheng Y., Zhang B., and He J. // Physics of Plasmas. 2011. Vol. 18. P. 123503.
39. Liu L. and Becerra M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2016. V. 49. P. 225202.
40. Dordizadeh P., Adamiak K. and Castle P.G.S. // Plasma Sources Sci. Technol. 2016. V. 25. P. 065009.
41. Ferreira N.G.C., Santos D.F.N., Almeida P.G.C., Naidis G.V. and Benilov M.S. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2019. V. 52. P. 355206.
42. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2009. [Raizer Yu.P. Gas Discharge Physics. Berlin: Springer, 1991. Chapter 12].
43. Waters R. T., Rickard T.E.S., Stark W.B. // International Symposium on Hochspannungstechnik Munchen, 1972. P. 104.
44. Bogdanova N.B., Pevchev B.G., Popkov V.I. // Izv. Akad. Nauk SSSR: Energ. Transp. 1978. V. 16. P. 96–100.
45. Morrow R. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1997. V. 30. P. 3099–3114.
46. Gopalakrishnan V., Pawar S.D., Murugavel P. and Johare K.P. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2011. V. 73. P. 1876–82.
47. Azarenok B.N. // Comput. Math. Math. Phys. 2009. V. 49. P. 797–809.
48. Fletcher C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. V. 1. Fundamental and general techniques. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
49. Ferziger J.H. and Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer. 2002.
50. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Berlin: Springer. 2001.
51. Toselli A. and Widlund O. Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
52. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. [Jackson J.D. Classical Electrodynamics. New York-London: John Wiley & Sons, Inc., 1962].
53. Greenberg M.D. Applications of Green’s Functions in Science and Engineering. New York: Dover Publications, 2015.
54. Miller G.H. // Journal of Computational Physics. 2008. V. 227. P. 7917–7928.
55. Hagenow K.V. and Lackner K., Proc. 7th Conf. on the Numerical Simulation of Plasmas, New York, 1975. P. 140.
56. Lackner K. Computation of ideal MHD equilibria // Computer Physics Communication. 1976. V. 12. P. 33–44.
57. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
58. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей, М.: ИЛ, 1961. [Buchholz H. Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1957].
59. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. Гл. 4. С. 111. [Smythe W.R. Static and dynamic electricity. Taylor & Francis, 1989. Chapter 4. P. 107].

## ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА ПОСТОЯННОГО ТОКА В КСЕНОНЕ

© 2021 г. Г. М. Григорьян<sup>а</sup>, А. В. Демьянов<sup>б, \*</sup>, Н. А. Дятко<sup>б</sup>, И. В. Кочетов<sup>б, с, \*\*</sup>

<sup>а</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>б</sup> ГНЦ РФ «Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», Москва, Россия

<sup>с</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

\*e-mail: demyanov@triniti.ru

\*\*e-mail: kochet@triniti.ru

Поступила в редакцию 21.12.2020 г.

После доработки 25.01.2021 г.

Принята к публикации 26.01.2021 г.

Выполнены экспериментальные и расчетно-теоретические исследования параметров плазмы положительного столба тлеющего разряда постоянного тока в ксеноне. В экспериментах использовалась разрядная трубка радиусом 2 см с расстоянием между электродами 56 см. Эксперименты проводились для давления газа 0.1 и 1 Торр, а величина разрядного тока варьировалась в диапазоне 10–50 мА. Измерена напряженность электрического поля в положительном столбе разряда и населенность нижнего метастабильного состояния  $1s_5$  атома ксенона (населенность измерена только для давления 0.1 Торр) на оси разрядной трубки. Разработана самосогласованная 0-мерная кинетическая модель разряда в ксеноне и проведена ее верификация путем сравнения результатов расчетов с опубликованными в литературе данными. Расчеты, выполненные для указанных выше экспериментальных условий, показали, что теоретические значения напряженности электрического поля заметно отличаются от измеренных. Обсуждаются возможные причины этого отличия. Показано, что при значениях приведенного электрического поля, которые реализуются в плазме разряда при давлении 1 Торр, электрон-электронные соударения существенно влияют на вид функции распределения электронов по энергии и, соответственно, на скорость процессов образования и гибели электронов. Что касается населенности нижнего метастабильного уровня атома Хе, то расчетные значения хорошо согласуются с результатами измерений. В рамках разработанной модели разряда рассчитан также спектр излучения разрядной плазмы в диапазоне 119–3400 нм. Показано, что большая часть энергии излучается в УФ-области на длине волны 147 нм.

*Ключевые слова:* ксенон, тлеющий разряд, метастабильные состояния, вольт-амперная характеристика, моделирование

DOI: 10.31857/S0367292121060068

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ксенон широко используется в различных газоразрядных устройствах, таких как ультрафиолетовые лампы [1], плазменные дисплеи [2], лазеры [3], плазменные двигатели [4, 5] и др. Широкое практическое применение обуславливает интерес к фундаментальным экспериментальным и теоретическим исследованиям характеристик различных типов разряда в ксеноне и процессов, которые определяют свойства ксеноновой плазмы.

Например, в работе [6] для условий тлеющего разряда низкого давления с термоэмиссионным катодом выполнен расчет радиального распределения населенности метастабильного  $1s_5$  и резонансного  $1s_4$  состояний Хе в смеси 2% Хе–Не с

использованием различных приближений для описания переноса резонансного излучения. Показано, что традиционный метод описания переноса резонансного излучения, который использует приближение эффективного времени жизни, не позволяет воспроизвести измеренное пространственное распределение возбужденных атомов. Показано также, что возбужденные атомы появляются на периферии разряда в основном за счет переноса резонансного излучения. В работе [7] по измерению динамики населенности  $6s$  уровней Хе в импульсном разряде, инициируемым пучком быстрых электронов, найдены константы скорости тушения этих уровней атомами гелия (в двухчастичных и трехчастичных столкновениях). Аналогичным методом в смеси Ar–Хе измерены константы скорости тушения  $6s$  уров-

ней Хе атомами аргона [8]. Константы скорости тушения указанных уровней Хе атомами Не изменены в работе [9].

Что касается тлеющего разряда постоянного тока в чистом ксеноне, то количество работ, посвященных исследованию такого разряда, относительно невелико. Нам известны только работы [10–13]. В работе [10] приведены зависимости  $E/P$  от  $PR$  для различных значений разрядного тока ( $E$  – напряженность электрического поля,  $R$  – радиус трубки,  $P$  – давление газа). В работах [11–13] исследовался разряд в трубках малого радиуса: 0.32 см [11], 0.025 см и 0.04 см [12], 0.15 см [13]. В этих работах была измерена величина электрического поля в разряде. Кроме того, в [11] экспериментально определена концентрация метастабильных атомов ксенона  $Xe(1s_5)$ . В этой же работе предложены две модели для расчета параметров разряда при низких давлениях (для условий, когда длина пробега электронов значительно больше или значительно меньше радиуса трубки). Получено хорошее согласие расчетных и измеренных параметров разряда в диапазонах давлений 0.01–0.04 Торр и 0.1–0.15 Торр. В работе [13] измерена также концентрация электронов и их температура. Измерения проводились с использованием цилиндрических электростатических зондов. Концентрация и температура электронов определялись по ВАХ двойного зонда, по методикам, предложенным в работах [14] (для давлений  $P < 1$  Торр) и [15] (для  $P > 1$  Торр).

В настоящей работе выполнено экспериментальное и расчетно-теоретическое исследование параметров плазмы положительного столба тлеющего разряда постоянного тока в ксеноне: напряженности электрического поля и населенности нижнего метастабильного состояния  $Xe(1s_5)$  на оси разрядной трубки, – в зависимости от давления газа и тока разряда. В экспериментах использовалась разрядная трубка радиусом 2 см. Давление газа варьировалось в диапазоне 0.1–1 Торр, а величина разрядного тока – в диапазоне 10–50 мА. Для расчета параметров плазмы в указанных условиях разработана самосогласованная 0-мерная кинетическая модель разряда в ксеноне.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Разряд постоянного тока возбуждался в отпаянной разрядной трубке из молибденового стекла с внутренним диаметром  $2R = 4$  см и плоскими торцами. Цилиндрические электроды, вынесенные в вертикальные отрезки трубки, были изготовлены из тантала. Длина зоны разряда составляла 56 см. Эксперименты проводились для давления ксенона 0.1 и 1 Торр, ток разряда изменялся в диапазоне 10–50 мА.

Населенность метастабильного состояния  $Xe(1s_5)$  на оси трубки измерялась с использованием метода оптического поглощения, известного как метод двух идентичных трубок [16]. В этом методе в качестве источника излучения используется разряд в трубке, идентичной той (при таком же давлении и величине разрядного тока), в которой измеряется концентрация метастабильных атомов. Использование двух одинаковых трубок обеспечивает совпадение контуров линий излучения и поглощения. Для измерения концентрации атомов  $Xe(1s_5)$  использовался переход  $2p_6-1s_5$ , имеющий длину волны 823.16 нм. Детальное описание экспериментальной установки и методики измерений приведено, например, в [17]. Отметим только, что в отличие от работы [17], в настоящей работе разряд зажигался в отпаянных трубках. Измерения населенности метастабильного состояния  $Xe(1s_5)$  на оси трубки выполнены только для давления 1 Торр.

Величина напряженности электрического поля в положительном столбе разряда оценивалась как  $E = (U_d - U_{el})/L_d$ , где  $U_d$  – измеренное падение напряжения на разрядном промежутке,  $U_{el}$  – сумма катодного и анодного падений напряжения,  $L_d$  – длина зоны разряда. Величина  $U_{el}$  определялась в дополнительных экспериментах, в которых измерялось напряжение на электродах при разных межэлектродных расстояниях при фиксированных значениях давления газа и тока разряда. В этих экспериментах использовалась газоразрядная трубка с внутренним радиусом 2 см, которая имела несколько боковых отрезков с установленными танталовыми электродами. Электроды были точно такими же, как и в трубках, использованных в экспериментах по определению концентрации метастабильных атомов. Длина зоны разряда  $L_d$  варьировалась путем подключения источника напряжения к разным электродам. Согласно измерениям, для рассмотренных в настоящей статье условий, величина  $U_{el} \approx 115$  В. Следует отметить, что в литературе практически отсутствуют данные по величине катодного падения в тлеющем разряде постоянного тока в ксеноне. Результаты измерений величины электрического поля и населенности метастабильного уровня  $1s_5$  приведены в разд. 4.

По измеренным значениям разрядного тока и напряженности электрического поля мы оценили температуру газа на оси трубки с учетом выноса части энергии из объема за счет излучения. При этом предполагалось, что температура стенки трубки равна комнатной (20°C). Согласно оценкам, в зависимости от величины тока температура на оси трубки варьируется в пределах 300–320 К (для  $P = 0.1$  Торр) и 305–335 К (для  $P = 1$  Торр).

### 3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРЯДА В КСЕНОНЕ И ЕЕ ВЕРИФИКАЦИЯ

#### 3.1. Описание модели

За основу используемой в настоящей работе кинетической модели была взята модель, разработанная в работе [18]. Модель [18] позволяет рассчитывать спектр излучения ксенона, возбуждаемого пучком быстрых электронов, для давлений газа выше 100 Торр. Модель включает систему балансных уравнений для населенностей электронных уровней атомов ксенона (14 уровней, 7 из которых являются эффективными, объединяющими несколько уровней с близкими энергиями), электронов, ионов ( $\text{Xe}^+$ ,  $\text{Xe}_2^+$ ,  $\text{Xe}_3^+$ ), эксимерных молекул, включая колебательно-возбужденные состояния с одним эффективным колебательным уровнем для каждого из эксимерных состояний ( $\text{Xe}_2(^1\Sigma)$ ,  $\text{Xe}_2(^3\Sigma)$ ,  $\text{Xe}_2(^1\Sigma, v)$  и  $\text{Xe}_2(^3\Sigma, v)$ ) и локальное уравнение Больцмана для функции распределения электронов по энергии (ФРЭЭ) в двучленном приближении. В уравнении Больцмана учитываются упругие, неупругие, сверхупругие процессы рассеяния электронов на атомах ксенона и электрон-электронные соударения. В модель включены процессы с участием ионов и процессы радиационного и столкновительного тушения возбужденных атомов и молекул. Модель описывает излучение 30-ти наиболее интенсивных переходов. В том числе резонансное излучение  $\text{Xe}^*$  (119, 125, 130 и 147 нм), эксимерное  $\text{Xe}_2^*$  (150, 172 нм), а также излучение на переходах  $6p(6p') \rightarrow 6s(6s')$  (764, 789, 826, 835, 890, 905, 916, 985 и 1080 нм) и  $5d \rightarrow 6p$  переходах (1.73, 2.03, 2.63, 2.65 и 3.37 мкм). Перенос резонансного излучения учитывается в приближении эффективного радиационного времени жизни.

В модели [18] были сделаны следующие изменения и дополнения. Включены процессы ухода электронов и ионов на стенки трубки за счет амбиполярной диффузии. Добавлено уравнение электрической цепи, включающей источник постоянного напряжения, балластное сопротивление и положительный столб разряда.

В кинетической модели [18] метастабильное  $1s_5$  (в обозначениях Пашена) и резонансное состояние  $1s_4$  Xe объединены в один эффективный уровень. В настоящей модели эти уровни учитываются отдельно. Список учитываемых в модели уровней показан в табл. 1.

Согласно рекомендациям [19], сечения возбуждения уровней  $\text{Xe}(1s_5)$  и  $\text{Xe}(1s_4)$  электронным ударом из основного состояния взяты из работы Nakazaki [20]. Зависимость от энергии сечений ступенчатой ионизации состояний  $\text{Xe}(1s_5)$  и  $\text{Xe}(1s_4)$  взята из [21], а их абсолютные величины увеличены в 1.88 раза, как предложено в [19]. В отличие от работы [19], где для процессов ступен-

**Таблица 1.** Учитываемые в модели электронные уровни. Символом \* обозначены эффективные уровни. Энергия, приписываемая эффективному уровню, показана жирным шрифтом

Номер уровня	Электронные уровни в обозначениях Рака и Пашена	Статвес (суммарный для эффективных уровней)	Энергия уровня, эВ
1	$6s[3/2]_2, 1s_5$	5	8.315
2	$6s[3/2]_1, 1s_4$	3	8.437
3*	$6s'[1/2]_0, 1s_3$	4	<b>9.447</b>
	$6s'[1/2]_1, 1s_2$		9.570
4	$6p[1/2]_1, 2p_{10}$	3	9.580
5	$6p[5/2]_2, 2p_9$	5	9.686
6	$6p[5/2]_3, 2p_8$	7	9.721
7	$6p[3/2]_1, 2p_7$	3	9.789
8	$6p[3/2]_2, 2p_6$	5	9.821
9	$6p[1/2]_0, 2p_5$	1	9.934
10*	$5d[1/2]_0, 3d_6$	25	<b>9.891</b>
	$5d[1/2]_1, 3d_5$		9.917
	$5d[7/2]_4, 3d'_4$		9.943
	$5d[3/2]_2, 3d_3$		9.959
	$5d[7/2]_3, 3d_4$		10.039
11*	$5d[5/2]_2, 3d'_1$	12	<b>10.158</b>
	$5d[5/2]_3, 3d'_1$		10.220
12	$5d[3/2]_1, 3d_2$	3	10.401
13*	$7s[3/2]_2, 2s_5$	8	<b>10.562</b>
	$7s[3/2]_1, 2s_4$		10.593
14*	$7p[1/2]_1, 3p_{10}$	65	<b>10.902</b>
	$7p[5/2]_2, 3p_9$		10.954
	$6p[3/2]_1, 2p_4$		10.958
	$7p[5/2]_3, 3p_8$		10.969
	$6d[1/2]_0, 4d_6$		10.972
	$6d[1/2]_1, 4d_5$		10.979
	$7p[3/2]_2, 3p_6$		10.996
	$6d[3/2]_2, 4d_3$		10.999
	$7p[3/2]_1, 3p_7$		11.008
	$7p[1/2]_0, 3p_5$		11.015
	$6d[7/2]_4, 4d'_4$		11.024
	$6d[7/2]_3, 4d_4$		11.038
	$6p'[3/2]_2, 2p_3$		11.055
	$6d[5/2]_2, 4d'_1$		11.065
	$6p'[1/2]_1, 2p_2$		11.069
15*	$6d[5/2]_3, 4d'_1$	21	<b>11.101</b>
	$6p'[1/2]_0, 2p_1$		11.141
	$6d[3/2]_1, 4d_2$		11.163
	$8s[3/2]_2$		11.259
	$9s[3/2]_2$		11.580

**Таблица 2.** Процессы, включенные в модель дополнительно к процессам модели [18]

Амбиполярная диффузия		
1	$e, \text{Xe}^+, \text{Xe}_2^+, \text{Xe}_3^+ \rightarrow$ стенка трубки	[24, 25]
Возбуждение электронных состояний		
2	$\text{Xe} + e \leftrightarrow \text{Xe}(1s_5) + e$	ФРЭЭ <sup>б)</sup> [14]
3	$\text{Xe} + e \leftrightarrow \text{Xe}(1s_4) + e$	ФРЭЭ [14]
4	$\text{Xe}(1s_5) + e \leftrightarrow \text{Xe}^{*a)} + e$	ФРЭЭ [19]
5	$\text{Xe}(1s_4) + e \leftrightarrow \text{Xe}^{*a)} + e$	ФРЭЭ [19], см. текст
Ступенчатая ионизация		
6	$\text{Xe}(1s_5) + e \rightarrow \text{Xe}^+ + e + e$	ФРЭЭ [23], см. текст
7	$\text{Xe}(1s_4) + e \rightarrow \text{Xe}^+ + e + e$	ФРЭЭ [23], см. текст

<sup>a)</sup>Xe\* обозначают электронно-возбужденные состояния Xe, энергия которых выше энергии рассматриваемого уровня (Xe(1s<sub>5</sub>) или Xe(1s<sub>4</sub>)). <sup>б)</sup>Находятся из решения уравнения Больцмана.

чатого возбуждения из состояний Xe(1s<sub>5</sub>) и Xe(1s<sub>4</sub>) использовались эмпирические сечения [22], мы использовали сечения ступенчатого возбуждения из состояния Xe(1s<sub>5</sub>), измеренные в работе [23]. Сечение ступенчатого возбуждения из состояния Xe(1s<sub>4</sub>) взято таким же, как для Xe(1s<sub>5</sub>), но со сдвижкой на разницу в порогах возбуждения. Процессы, дополняющие модель [18], приведены в табл. 2.

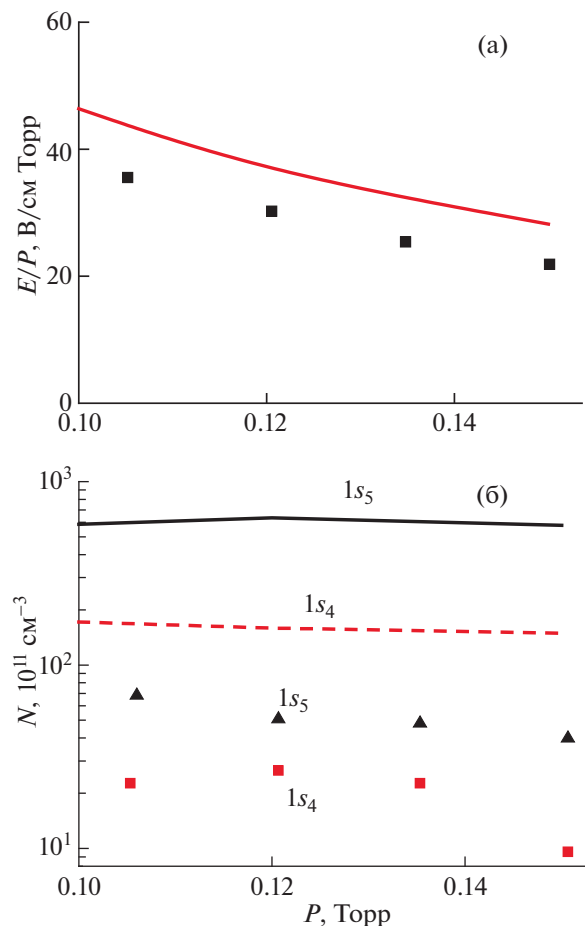
Для заданного значения напряжения источника питания, величины балластного сопротивления, давления газа и радиуса разрядной трубки модель позволяет самосогласованным образом рассчитать электрическое поле в положительном столбе разряда, ток разряда, концентрации электронов и ионов и населенности электронных уровней.

### 3.2. Верификация модели путем сравнения результатов расчетов с опубликованными в литературе экспериментальными данными

Так как в наших экспериментах измерялась населенность метастабильных уровней и напряженность электрического поля в положительном столбе разряда, то при верификации программы мы уделили основное внимание сравнению именно этих величин.

В работе [11] измерялись напряженность электрического поля на оси трубки и населенности метастабильного Xe(1s<sub>5</sub>) и резонансного Xe(1s<sub>4</sub>) состояний. Исследования проводились в разрядной трубке с внутренним радиусом 0.32 см в диапазоне давлений 0.01–0.15 Торр при фиксированном токе разряда 100 мА. На рис. 1а и 1б сравниваются измеренные [11] и расчетные величины приведенного электрического поля на оси трубки и населенностей метастабильного и резонансного состояний Xe в зависимости от давления в диапазоне 0.1–0.15 Торр. Как видно из рис. 1а, расчетные значения величины приведенного

электрического поля  $E/P$  достаточно хорошо согласуются с измеренными. В то же время полученные в расчетах населенности 1s<sub>5</sub> и 1s<sub>4</sub> состояний оказываются заметно больше измеренных



**Рис. 1.** Измеренные (символы) [11] и расчетные (линии) зависимости от давления: а) — приведенного электрического поля на оси трубки; б) — населенностей метастабильного (1s<sub>5</sub>) и резонансного (1s<sub>4</sub>) уровней Xe.  $I = 100$  мА,  $R = 0.32$  см.

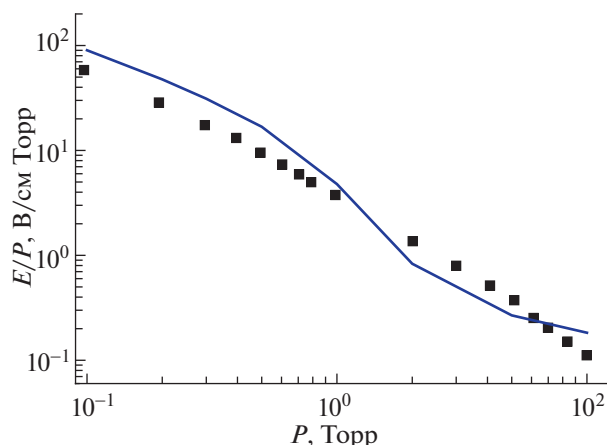


Рис. 2. Измеренная (символы) [13] и расчетная (линия) зависимости приведенного электрического поля на оси трубки от давления.  $R = 0.15$  см,  $I = 30$  мА.

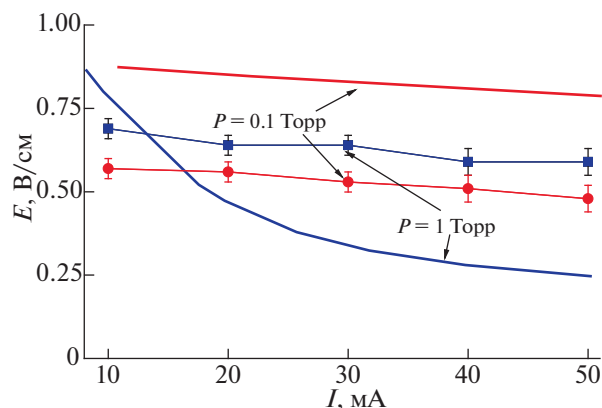


Рис. 3. Измеренные (символы) и расчетные (линии) зависимости напряженности электрического поля от тока разряда. Сплошные линии – результаты расчета по разработанной модели.

(рис. 1б). Путем варьирования величин используемых в расчетах сечений (в рамках имеющихся неопределенностей) нам не удалось добиться более хорошего согласия. Как уже было указано во Введении, в работе [11] также предложена модель разряда и выполнены расчеты для экспериментальных условий. И результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными измерений. Следует отметить, что в модели [11] учитываются только три электронных уровня:  $1s_5$ ,  $1s_4$  и эффективный, объединяющий все вышележащие уровни. При этом возбуждение метастабильного уровня  $1s_5$  электронным ударом описывается эффективным сечением возбуждения, учитывающим каскадное заселение с более высоких уровней. По-видимому, согласие с экспериментом удастся получить путем соответствующего выбора величины этого сечения.

В экспериментах [13] использовались трубки с внутренним радиусом 0.025, 0.04 и 0.15 см. Давление газа менялось от 0.1 до 10 Торр, а ток поддерживался постоянным: для трубок радиуса 0.025 см – 20 мА, для трубок радиуса 0.04 см – 20 и 30 мА, а для трубок радиуса 0.15 см – 30 мА. Поле на оси трубки измерялось с использованием двух зондов. Мы провели расчеты для трубки наибольшего радиуса. На рис. 2 показано сравнение

расчетных и экспериментальных [13] зависимостей приведенного электрического поля на оси трубки от давления газа для тока разряда 30 мА. Как видно из рисунка, расчетные значения  $E/P$  удовлетворительно согласуются с измеренными.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

##### 4.1. Напряженность электрического поля в плазме

Результаты измерений напряженности электрического поля показаны на рис. 3. На этом же рисунке сплошными линиями показаны теоретические значения, рассчитанные по разработанной модели (в расчетах температура газа считалась равной 300 К).

Как видно из рис. 3, при давлении газа 0.1 Торр расчетные значения электрического поля (сплошная линия) оказываются выше экспериментальных на  $\approx 50\%$ , но при этом в расчетах воспроизводится полученная в эксперименте слабая зависимость поля от тока разряда. Для давления  $P = 1$  Торр измеренные значения напряженности поля оказываются несколько выше, чем в случае  $P = 0.1$  Торр, а зависимость поля от тока такая же слабая, как и для  $P = 0.1$  Торр. Расчетная зависимость напряженности электрического поля от тока (сплошная линия) для давления 1 Торр более

Таблица 3. Экспериментальные и расчетные значения напряженности электрического поля  $E$  и приведенного поля  $E/N$ , а также расчетные значения концентрации электронов  $n_e$ , степени ионизации  $n_e/N$  и средней энергии электронов  $u_m$

$P$ , Торр	$I$ , мА	$E$ , В/см, эксперим.	$E/N$ , Тд, эксперим.	$E$ , В/см, расчет.	$E/N$ , Тд, расчет.	$n_e$ , см <sup>-3</sup> , расчет.	$n_e/N$ , расчет.	$u_m$ , эВ, расчет.
0.1	10	0.57	18	0.87	27	$6.5 \times 10^9$	$2.0 \times 10^{-6}$	3.76
	50	0.48	15	0.78	24	$3.5 \times 10^{10}$	$1.1 \times 10^{-5}$	3.62
1	10	0.69	2.2	0.78	2.4	$3.2 \times 10^9$	$1.0 \times 10^{-7}$	2.61
	50	0.59	1.8	0.25	0.8	$1.1 \times 10^{11}$	$2.2 \times 10^{-6}$	1.94

резко уменьшается при увеличении тока разряда. Причем при  $I \leq 12.5$  мА расчетные значения оказываются больше экспериментальных, а при  $I \geq 12.5$  мА – меньше. При  $I \sim 50$  мА расчетные значения оказываются приблизительно на 50% меньше экспериментальных.

Для наглядности, в табл. 3 для двух (крайних) значений разрядного тока,  $I = 10$  мА и  $I = 50$  мА, приведены экспериментальные и расчетные значения  $E$  и  $E/N$ , а также расчетные значения концентрации электронов, степени ионизации и средней энергии электронов. Согласно расчетам, для всех рассмотренных случаев основным каналом ионизации является ступенчатая ионизация с нижнего метастабильного состояния  $\text{Xe}(1s_5)$ . Причем скорость рождения электронов составляет приблизительно 30% от скорости возбуждения этого состояния электронным ударом из основного состояния. Основным каналом гибели электронов является амбиполярная диффузия на стенки трубки, а основным ионом является ион  $\text{Xe}^+$ .

Хорошо известно, что при относительно низких значениях  $E/N$  константы скоростей процессов с высоким порогом сильно зависят от степени ионизации плазмы (вследствие влияния электрон-электронных соударений на ФРЭЭ) [26]. На рис. 4 показана зависимость константы скорости возбуждения нижнего метастабильного уровня ксенона  $\text{Xe}(1s_5)$  от  $E/N$ , рассчитанная для различных значений степени ионизации плазмы  $n_e/N$ .

Значения  $E/N$ , которые реализуются в разряде при давлении 0.1 Торр, составляют 15–18 Тд (эксперимент) и 24–27 Тд (расчет), см. табл. 3. Как следует из рис. 4, при таких значениях  $E/N$  константа скорости возбуждения  $\text{Xe}(1s_5)$  практически не зависит от степени ионизации. В случае  $P = 1$  Торр значения  $E/N$  существенно меньше: 1.8–2.2 Тд (эксперимент) и 0.8–2.4 Тд (расчет), см. табл. 3. При таких значениях  $E/N$  константа скорости возбуждения резко возрастает при увеличении степени ионизации в диапазоне  $10^{-7}$ – $10^{-5}$  (см. рис. 4). Анализ расчетных данных показал, что именно этот эффект приводит к значительному снижению  $E/N$  с ростом тока (ростом концентрации электронов и, соответственно, ростом степени ионизации). Заметим, что в тлеющем разряде в аргоне (в трубке такого же радиуса) при  $P = 1$  Торр значения  $E/N$  приблизительно равны 6 Тд (измеренные) и 9 Тд (расчетные) [17]. При таких значениях  $E/N$  константа скорости возбуждения нижнего метастабильного уровня атома аргона относительно слабо зависит от степени ионизации [26], и расчетное значение  $E/N$  почти не зависит от тока разряда.

Как было отмечено выше, расчетные значения напряженности электрического поля достаточно заметно отличаются от полученных в экспери-

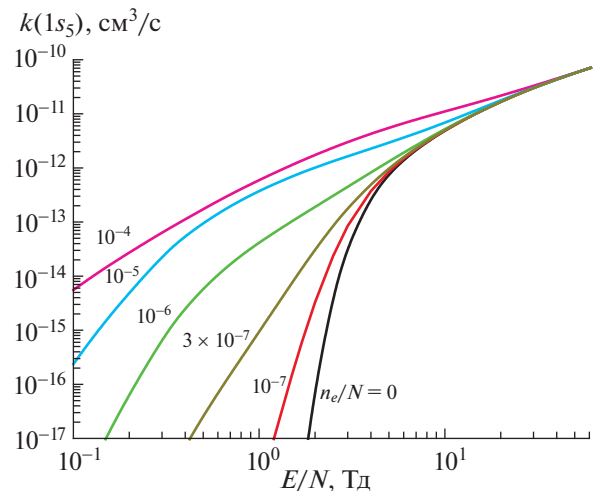


Рис. 4. Зависимость константы скорости возбуждения нижнего метастабильного уровня ксенона  $\text{Xe}(1s_5)$  от  $E/N$ , рассчитанная для различных значений степени ионизации плазмы  $n_e/N$ .

менте. Причем варьированием (в пределах существующих неопределенностей) таких параметров, как сечения возбуждения электронных уровней, сечение ступенчатой ионизации и сечения ступенчатого возбуждения, не удается получить лучшего согласия расчетных данных с экспериментальными во всем диапазоне рассматриваемых условий.

Следует отметить, что в нашей модели уравнение Больцмана для функции распределения электронов по энергии решается в локальном приближении, применимость которого в рассматриваемых условиях не очень обоснована. Корректный критерий применимости можно получить только путем сравнения решений, полученных в локальном и нелокальном приближениях. Для разряда в аргоне таким способом был получен критерий  $PR > (5-10)$  см · Торр [27]. Насколько нам известно, для разряда в ксеноне такие сравнительные расчеты отсутствуют. Приближенным критерием применимости локального приближения может служить соотношение  $L_u < R$ , где  $L_u$  – характерная длина установления функции распределения. Величину  $L_u$  можно определить как расстояние, на котором электрон (дрейфующий в электрическом поле) рассеивает энергию, равную средней энергии электронов [24]:  $L_u = u_m / (eE)$ , где  $u_m$  – средняя энергия электронов, а  $e$  – заряд электрона. Для рассматриваемых в настоящей работе условий расчетные значения  $L_u$  составляют (3.3–7.7) см (значения  $u_m$  и  $E$  приведены в табл. 3), т.е.  $L_u > R$ .

С уверенностью сказать, как повлияет учет нелокальности ФРЭЭ на результаты расчетов, не представляется возможным. Более того, не очень понятно, как вообще учитывать нелокальные эф-

фекты в рамках 0-мерной модели. Если говорить о том, что известно в этом отношении из литературы, то есть несколько работ, в которых сравниваются результаты расчетов параметров разряда (в рамках 1-мерной модели по радиусу трубки), полученные с учетом нелокальности ФРЭЭ и в приближении локальной ФРЭЭ (см., например, [28, 29] и приведенные там ссылки). Например, для разряда в аргоне ( $R = 1$  см,  $PR = 0.28$  Торр · см и  $PR = 0.85$  Торр · см) учет нелокальности приводит к некоторому уменьшению величины продольного электрического поля [28]. А для разряда в неоне ( $R = 1$  см,  $PR = 0.1$  Торр · см), наоборот, к небольшому росту электрического поля [28]. В работе [29] для разряда в аргоне ( $R = 1$  см,  $PR = 6$  Торр · см,  $I = 3$  мА) показано, что учет нелокальности приводит к снижению концентрации электронов и населенности нижнего метастабильного уровня на оси трубки. Аналогичные данные по разряду в ксеноне отсутствуют.

Отметим также еще один момент, связанный с методом определения напряженности электрического поля в эксперименте. При межэлектродном расстоянии в 56 см падение напряжения на положительном столбе разряда существенно меньше, чем приэлектродное падение напряжения. В этом случае даже незначительное изменение в величине приэлектродного падения напряжения будет приводить к заметному изменению рассчитанного значения  $E$ . Например, если изменить величину приэлектродного падения напряжения на 5 В (т. е. приблизительно на 4% по отношению к использованному значению 115 В), то рассчитанная величина  $E$  изменится приблизительно на 0.1 В/см, что составляет 15–20% по отношению к значениям  $E$ , указанным в табл. 3. Как было отмечено выше, величина приэлектродного падения измерялась в отдельной (специальной) разрядной трубке с несколькими боковыми отроостками с установленными электродами. Нельзя исключать, что в экспериментах с обычной трубкой (хотя и такого же диаметра и с такими же электродами) приэлектродное падение напряжения было несколько другим.

#### 4.2. Населенность нижнего метастабильного состояния на оси трубки

Как было отмечено в разд. 2, измерение населенности нижнего метастабильного уровня  $\text{Xe}(1s_5)$  на оси трубки было выполнено только для давления 0.1 Торр. Сравнение измеренных и рассчитанных значений населенности в зависимости от величины разрядного тока показано на рис. 5. Как видно из рисунка, при токах разряда  $\geq 20$  мА расчетные значения практически совпадают с измеренными. При этом населенность слабо изменяется с ростом тока и приблизительно равна  $4.1 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . При токе разряда 10 мА в расчете

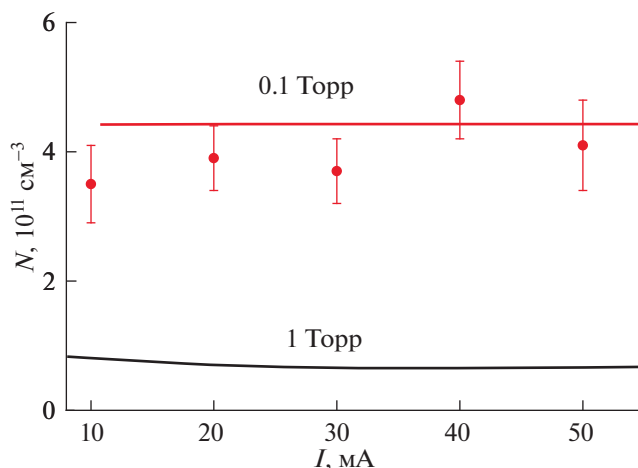


Рис. 5. Измеренные (символы) и рассчитанные (линия) значения населенности метастабильного уровня  $\text{Xe}(1s_5)$  на оси трубки в зависимости от величины разрядного тока для давления газа 0.1 и 1 Торр.

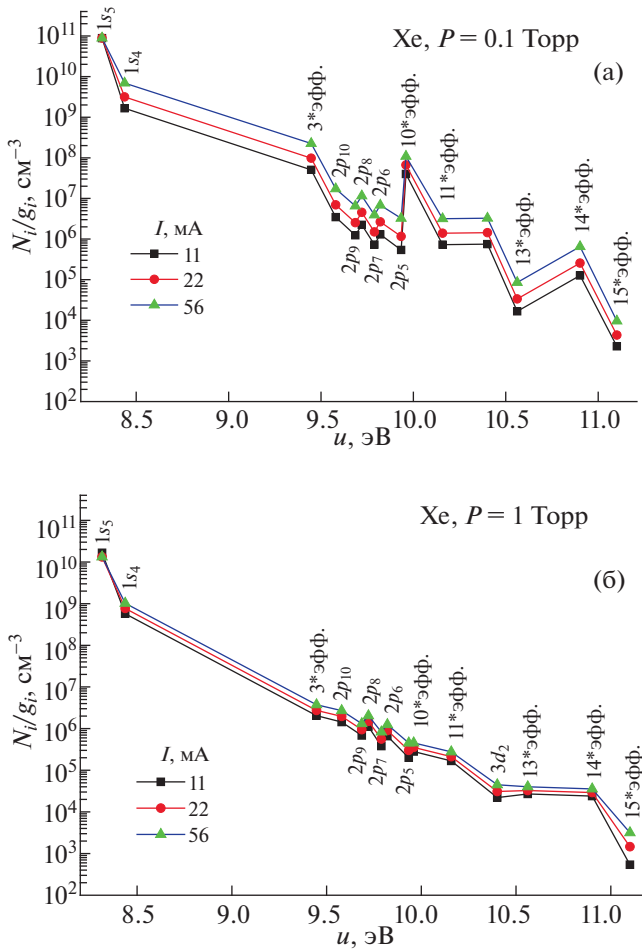
получаются несколько меньшие значения населенности, чем в эксперименте. Для давления  $P = 1$  Торр расчетные значения населенности уровня  $\text{Xe}(1s_5)$  оказываются меньше (приблизительно в 7 раз), чем при давлении  $P = 0.1$  Торр. Заметим, что аналогичная зависимость населенности метастабильного уровня от давления имеет место и в разряде в аргоне [30].

Согласно расчетам, основным каналом заселения уровня  $\text{Xe}(1s_5)$  является возбуждение электронным ударом из основного состояния, а расселение происходит частично за счет процесса ступенчатой ионизации и в большей степени за счет ступенчатого возбуждения более высоких уровней. В свою очередь, тушение более высоких уровней (радиационные переходы, столкновительное тушение) приводит, в частности, к заселению резонансного состояния  $\text{Xe}(1s_4)$ . Так как скорости возбуждения и гибели уровня  $\text{Xe}(1s_5)$  пропорциональны концентрации электронов, то его населенность слабо зависит от тока разряда.

#### 4.3. Расчетные значения населенности всех учитываемых в модели электронных уровней

На рис. 6а и 6б представлена расчетная населенность электронных уровней, деленная на статистический вес этих уровней как функция энергии уровней. Согласно расчетам, при  $P = 0.1$  Торр (рис. 6а) населенность электронных уровней (за исключением нижнего метастабильного уровня, см. выше) возрастает приблизительно пропорционально величине тока. Это связано с тем, что скорость возбуждения электронных уровней пропорциональна концентрации электронов (и, соответственно, величине тока, так как  $E/N$  почти не зависит от тока), а девозбуждение определяет





**Рис. 6.** Приведенные значения населенности электронных уровней Хе в зависимости от энергии уровня, рассчитанные для различных давлений и разрядных токов. а) –  $P = 0.1$  Торр,  $I = 11, 22$  и  $56$  мА; б) –  $P = 1$  Торр,  $I = 8, 24$  и  $50$  мА. Эффективные уровни обозначены номерами, соответствующими их номерам в табл. 1:  $3^*$  ( $1s_2, 1s_3$ ),  $10^*$  ( $3d_6, 3d_5, 3d'_4, 3d_3, 3d_4$ ),  $11^*$  ( $3d'_1, 3d'_1$ );  $13^*$  ( $2s_5, 2s_4$ );  $14^*$  ( $3p_{10}, 3p_9, 2p_4, 3p_8, 4d_6, 4d_5, 3p_6, 4d_3, 3p_7, 3p_5, 4d'_4, 4d_4, 2p_3, 4d'_1, 2p_2$ ) и  $15^*$  ( $4d'_1, 2p_1, 4d_2, 8s[3/2]_2, 9s[3/2]_2$ ).

ся в основном радиационными процессами. В этом случае значение населенности конкретного уровня зависит, в том числе, и от его радиационного времени жизни. В частности, радиационные времена жизни уровней Хе ( $2p_{10}-2p_5$ ) заметно меньше, чем радиационные времена жизни других высоко лежащих уровней [18], что обуславливает относительно низкую населенность Хе ( $2p_{10}-2p_5$ ) состояний (рис. 6а).

Для давления 1 Торр (рис. 6б) рассчитанные населенности электронных уровней незначительно увеличиваются с ростом тока. Исключение составляет самый верхний из учитываемых уровней (эффективный уровень  $15^*$ , табл. 1), за-

селение которого происходит в процессе диссоциативной рекомбинации Хе $_2^+$  с электроном. В отличие от случая  $P = 0.1$  Торр, в случае  $P = 1$  Торр расчетные значения напряженности электрического поля заметно уменьшаются с ростом тока (рис. 3). Потому энерговклад в разряд хотя и увеличивается с ростом тока, но в меньшей степени, чем в случае  $P = 0.1$  Торр. Соответственно, скорость заселения электронных уровней и их населенности увеличиваются с ростом тока разряда незначительно. Отметим также, что с увеличением давления возрастает роль процессов тушения возбужденных состояний в столкновениях с атомами. Согласно расчетам, именно эти процессы приводят к тому, что для 1 Торр (рис. 6б) зависимость населенностей от энергии уровней не такая изрезанная, как для 0.1 Торр (рис. 6а).

Для давления 1 Торр значения приведенных населенности уровней от  $1s_4$  до  $10^*$  эфф. лежат приблизительно на одной прямой. Это означает, что населенности этих уровней описываются распределением Больцмана с некоторой “локальной” температурой. Приблизительное значение “локальной температуры равно 0.18 эВ. Эта величина значительно больше газовой температуры (0.0258 эВ) и значительно меньше температуры электронов (1.22–1.76 эВ).

#### 4.4. Рассчитанные спектры излучения

Определим энергетическую эффективность (далее просто эффективность) радиационного перехода с уровня  $i$  на уровень  $j$  как отношение мощности излучения на этом переходе из единицы объема к удельной мощности разряда:

$$\eta_{ij} = \frac{\left( \frac{N_i \Delta_{ij}}{\tau_{ij}} \right)}{JE}, \quad (1)$$

где  $N_i$  – населенность излучающего уровня, для переходов между возбужденными состояниями атома и для излучения эксимерных молекул  $\tau_{ij} = 1/A_{ij}$ , где  $A_{ij}$  – коэффициент Эйнштейна для данного перехода, для резонансных переходов  $\tau_{ij}$  – эффективное (учитывающее эффект пленения излучения) радиационное время жизни,  $\Delta_{ij}$  – энергия перехода,  $J$  – плотность тока разряда.

На рис. 7а–в приведены эффективности излучения отдельных линий для давлений 0.1 и 1 Торр, рассчитанные для близких значений разрядных токов: 56 и 50 мА, соответственно. Как следует из расчетов, при давлении 0.1 Торр суммарно в излучение идет  $\approx 45\%$  вкладываемой в плазму энергии, а при 1 Торр – приблизительно 23%. Уменьшение доли энергии, идущей на излучение, при увеличении давления обусловлено следующими причинами. При  $P = 0.1$  Торр и

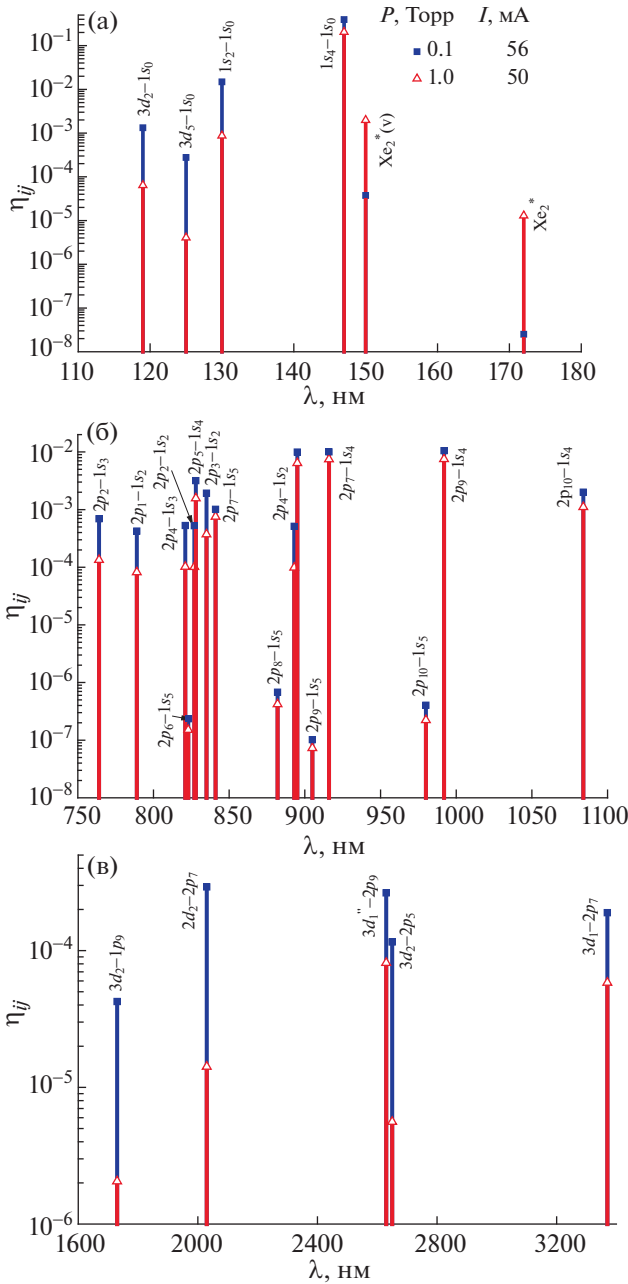


Рис. 7. Расчетные эффективности излучения отдельных линий для  $P = 0.1$  Торр,  $I = 56$  мА и  $P = 1$  Торр,  $I = 50$  мА: а) – в УФ; б) и в) – в ИК-области спектра. Для каждой длины волны указан соответствующий радиационный переход.

$I = 56$  мА расчетное значение  $E/N$  достаточно велико:  $\approx 24$  Тд. Согласно проведенному анализу, при таком значении  $E/N$  почти вся энергия, получаемая электронами от электрического поля, расходуется в неупругих процессах (возбуждение электронных уровней и ионизация из основного состояния, ступенчатое возбуждение и ступенчатая ионизация). Доля потерь энергии электронов в упругих соударениях с атомами ксенона состав-

ляет всего  $\sim 2\%$ . Большая часть вложенной энергии уходит из разрядной плазмы в виде излучения ( $\sim 45\%$ ) и уносится электронами и ионами на стенки трубки в процессе амбиполярной диффузии. При  $P = 1$  Торр и  $I = 50$  мА расчетное значение  $E/N$  мало:  $\approx 0.8$  Тд. В этом случае доля энергии, расходуемая электронами в упругих соударениях с атомами ксенона, составляет  $\sim 60\%$ , и только  $\sim 40\%$  энергии расходуется на возбуждение и ионизацию атомов. Далее, 23% (из 40%) энергии уходит из плазмы в виде излучения, а оставшиеся 17% энергии уносятся электронами и ионами на стенку трубки или идут на нагрев газа за счет процессов тушения возбужденных состояний атомами ксенона.

Как видно из рис. 7а, основная доля излучаемой энергии приходится на УФ-излучение с длиной волны 147 нм (переход  $1s_4-1s_0$ ): 39% из 45% для 0.1 Торр и 21% из 23% для 1 Торр. Эффективность резонансного излучения на других переходах (длины волн 119, 125 и 130 нм, см. рис. 7а) намного меньше и очень сильно уменьшается при увеличении давления. Эффективность эксимерного излучения  $\text{Xe}_2^*$  (150, 172 нм) растет с увеличением давления (рис. 7а), так как эксимерные молекулы образуются в тройных столкновениях. Но при рассматриваемых давлениях эффективность эксимерного излучения остается незначительной. Эффективность отдельных линий ИК-излучения (рис. 7б) на переходах  $6p(6p') \rightarrow 6s(6s')$  (764, 789, 826, 835, 890, 905, 916, 985 и 1080 нм) достигает 1%. В целом, эффективность ИК-линий уменьшается с ростом давления, но степень уменьшения для разных линий существенно различна. Эффективность излучения на переходах  $5d \rightarrow 6p$  переходов (1.73, 2.03, 2.63, 2.65 и 3.37 мкм) (рис. 7в) мала и значительно уменьшается с ростом давления.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнены экспериментальное и расчетно-теоретическое исследование характеристик плазмы положительного столба тлеющего разряда постоянного тока в ксеноне. Эксперименты проводились в трубке с внутренним диаметром 4 см и плоскими торцами. Цилиндрические электроды были установлены в боковых отростках трубки, межэлектродное расстояние равнялось 56 см. Исследования выполнены для давлений 0.1 Торр и 1 Торр, разрядный ток варьировался в пределах 10–50 мА. По измеренному напряжению на электродах, известному межэлектродному расстоянию и величине приэлектродного падения напряжения (115 В, определено в специальных экспериментах) оценивалась напряженность электрического поля в положительном столбе разряда. Для давления 0.1 Торр значе-

ние  $E$  уменьшается с ростом тока с 0.57 В/см (при 10 мА) до 0.48 В/см (при 50 мА). При давлении 1 Торр значения  $E$  несколько выше: 0.69 В/см (при 10 мА) и 0.59 В/см (при 50 мА). Для давления 0.1 Торр методом оптического поглощения измерена населенность метастабильного состояния  $\text{Xe}(1s_5)$  на оси трубки. Полученное значение населенности возрастает с ростом тока разряда с  $3.5 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$  (при  $I = 10 \text{ мА}$ ) до  $4.8 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$  (при  $I = 40 \text{ мА}$ ).

Для расчета параметров плазмы тлеющего разряда постоянного тока в ксеноне разработана 0-мерная модель разряда. Верификация модели выполнена путем сравнения результатов расчетов с опубликованными в литературе экспериментальными данными. С использованием разработанной модели выполнены расчеты для экспериментальных условий. Для давления  $P = 0.1$  Торр рассчитанные значения  $E$  незначительно уменьшаются с ростом тока разряда (как и в эксперименте), но оказываются приблизительно на 50% больше измеренных. При этом рассчитанная населенность нижнего метастабильного уровня хорошо согласуется с измеренной. Для давления  $P = 1$  Торр вид рассчитанной зависимости  $E(I)$  значительно отличается от экспериментальной. В отличие от измеренной, рассчитанная величина  $E$  значительно уменьшается с ростом тока: с 0.78 В/см (при  $I = 10 \text{ мА}$ ) до 0.25 В/см (при  $I = 50 \text{ мА}$ ). Как показал проведенный анализ, причиной такой резкой зависимости  $E(I)$  является то, что при низких значениях  $E/N$  имеет место резкая зависимость констант скорости возбуждения электронных уровней от степени ионизации (тока разряда) вследствие влияния электрон-электронных соударений на ФРЭЭ.

Для экспериментальных условий рассчитаны также населенности всех учитываемых в модели электронных уровней атома ксенона и энергетическая эффективность всех учитываемых радиационных переходов. Показано, что при токе разряда  $\sim 50 \text{ мА}$  энергия, уносимая из плазмы излучением, составляет 45% (для  $P = 0.1$  Торр) и 23% (для  $P = 1$  Торр) по отношению к вкладываемой в плазму энергии. При этом большая часть энергии излучается в УФ-области на длине волны 147 нм (переход  $1s_4-1S_0$ ).

Работа поддержана РФФИ, проект № 20-02-00270.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uhrlandt D., Bussiahn R., Gorchakov S., Lange H., Loffhagen D., Nötzold D.* // J. Phys. D. 2005. V. 38. P. 3318.
2. *Hayashi D., Heusler G., Hagelaar G., Kroesen G.* // J. Appl. Phys. 2004. V. 95. P. 1656.
3. *Demyanov A.V., Kochetov I.V., Mikheyev P.A., Azyazov V.N., Heaven M.C.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2018. V. 51. 045201.
4. *Chiu Y., Austin B.L., Williams S., Dressler R.A., Karabadzhak G.F.* // J. Appl. Phys. 2006. V. 99. 113304.
5. *Karabadzhak G.F., Chiu Y., Dressler R.A.* // J. Appl. Phys. 2006. V. 99. 113305.
6. *Golubovskii Yu.B., Gorchakov S., Lange H., Timofeev A., Uhrlandt D., Winter J.* // Phys. D: Appl. Phys. 2012. V. 45. 055205.
7. *Заярный Д.А., Семенова Л.В., Устиновский Н.Н., Холин И.В., Чугунов А.Ю.* // Квантовая электроника. 1998. Т. 25. С. 229.
8. *Семенова Л.В., Устиновский Н.Н., Холин И.В.* // Квантовая электроника. 2004. Т. 34. С. 189.
9. *Wieme W., Lenaerts J.* // J. Chem. Phys. 1980. V. 72. P. 2708.
10. *Engel A.* Ionized Gases. Clarendon, Oxford, 1965.
11. *Egorov V.S., Golubovski Yu.B., Kindel E., Mekhov I.B., Schimke C.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 5971.
12. *Kaneda T., Kubota T., Chang J.-S.* // Japan J. Appl. Phys. 1989. V. 28. P. 947.
13. *Kaneda T., Kubota T., Chang J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. V. 23. P. 500.
14. *Dote T.A.* // Japan. J. Appl. Phys. 1968. V. 7. P. 964.
15. *Chang J.S., Laframboise J.G.* // 1976 J. Phys. D: Appl. Phys. 1976. V. 9. P. 1699.
16. *Фруш С.Э.* Спектроскопия газоразрядной плазмы. Л.: Наука, 1970.
17. *Grigorian G.M., Dyatko N.A., Kochetov I.V.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2015. V. 48. 445201.
18. *Бабичев В.Н., Демьянов А.В., Дятко Н.А., Паль А.Ф., Старостин А.Н., Филиппов А.В.* // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 421.
19. *Gortchakov S., Lange H., Uhrlandt D.* // J. Appl. Phys. 2003. V. 93. P. 9508.
20. *Nakazaki S., Berrington K.A., Eissner W.B., Itikawa Y.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1997. V. 30. P. 5805.
21. *Deutsch H., Becker K., Matt S., Märk T.D.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1999. V. 32. P. 4249.
22. *Vriens L., Smeets A.H.M.* // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. P. 940.
23. *Jung R.O., Boffard John B., Anderson L.W., Lin Chun C.* // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. 022723.
24. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1992.
25. *Biondi M.A., Chanin L.M.* // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 910.
26. *Dyatko N.A., Kochetov I.V., Napartovich A.P.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2014. V. 23. 043001.
27. *Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И., Кудрявцев В.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. С. 35.
28. *Ingold J. H.* DC Positive Column in the Nonlocal Regime. In: *Kortshagen U., Tsendin L.D.* (eds) Electron Kinetics and Applications of Glow Discharges. NATO Science Series: B (Advanced Science Institutes Series), vol. 367. Springer, Boston, MA. 2002.
29. *Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. С. 44.
30. *Григорьян Г.М., Дятко Н.А., Кочетов И.В.* // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 471.

## САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ГАУССОВА ПУЧКА МИКРОВОЛН В СОЗДАВАЕМОМ ИМ РАЗРЯДЕ В ВОЗДУХЕ В ПОДПОРОГОВОМ ПОЛЕ

© 2021 г. Г. М. Батанов<sup>а</sup>, В. Д. Борзосеков<sup>а</sup>, Л. В. Колик<sup>а</sup>, Е. М. Кончечков<sup>а,\*</sup>,  
Д. В. Малахов<sup>а</sup>, А. Е. Петров<sup>а</sup>, К. А. Сарксян<sup>а</sup>, В. Д. Степахин<sup>а</sup>, Н. К. Харчев<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: konchekov@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 19.11.2020 г.

После доработки 20.01.2021 г.

Принята к публикации 22.01.2021 г.

Микроволновый пучок (длина волны 4 мм, мощность 150–300 кВт) создает в воздухе волну ионизации в подпороговом поле в виде конгломерата нитевидных каналов, движущуюся навстречу пучку. Периферийная часть пучка испытывает рефракцию в плазме несамостоятельного разряда в УФ-ореоле нитевидных разрядов и самофокусировку в рекомбинирующей плазме за фронтом плазмоида из нитевидных каналов. Процесс самофокусировки периферийных участков волнового пучка вызывает локальные вспышки ионизации за фронтом головного плазмоида.

*Ключевые слова:* самофокусировка, самоподдерживающийся несамостоятельный разряд, подпороговый микроволновый разряд, газовый разряд, гиротрон

DOI: 10.31857/S0367292121060019

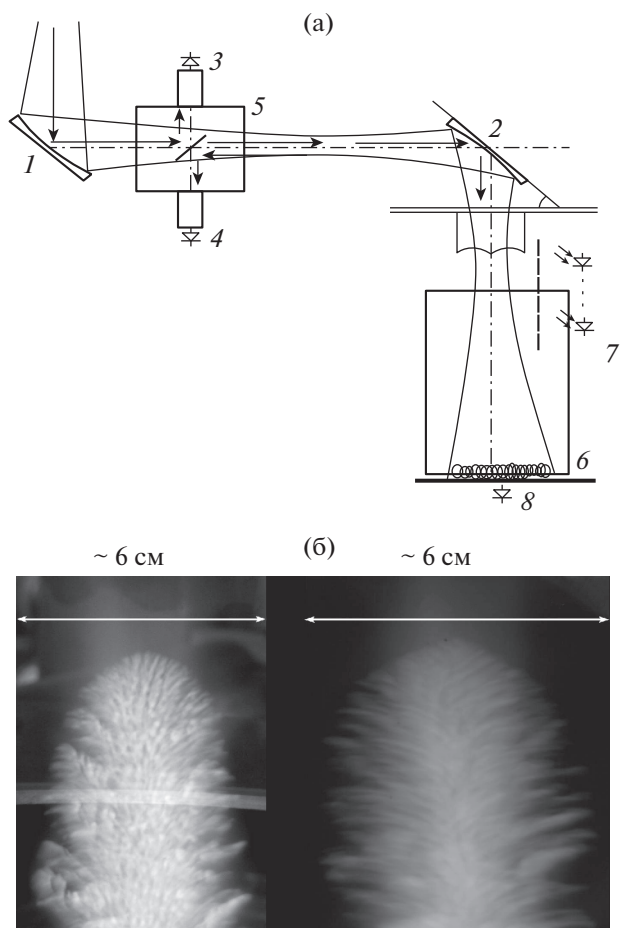
### 1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на обширные исследования процессов взаимодействия микроволновых пучков с создаваемыми ими плазменными образованиями [1–3], вопросы нелинейной рефракции микроволнового излучения в таких образованиях остаются неизученными. Исключение, по-видимому, представляет работа [4], в которой наблюдалась самофокусировка лазерного пучка при генерации светодетонационной волны.

Подпороговый микроволновый разряд в воздухе при атмосферном давлении представляет собой ионизационную волну, движущуюся по газу навстречу волновому пучку. Головная часть этой ионизационной волны представляет собой конгломерат линейных разрядов (нитей), вытянутых вдоль вектора электрического микроволнового поля, погруженного в плазму несамостоятельного разряда УФ-излучения нитевидных разрядов (см, например, [5, 6]). Поперечный размер конгломерата нитей несколько меньше поперечного сечения волнового пучка. Вследствие этого можно ожидать рефракцию внешних участков волнового пучка, как на периферии конгломерата нитей, так и в области несамостоятельного разряда УФ-ореола.

### 2. УСЛОВИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА, РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Эксперимент выполнялся с помощью микроволнового излучения гиротрона “Борец 75/0.8” (длина волны 4 мм). Сходящийся пучок волн с линейной поляризацией формировался эллиптическим зеркалом и имел сечение  $20 \times 33 \text{ мм}^2$  в перетяжке волнового пучка. Протяженность каустики составляла  $\sim 20$  см. Кольцевой инициатор разряда располагался на оси пучка в 10 см от центра каустики. Скорость фронта разряда измерялась локационным методом [7] по измерению граничной частоты биений отраженного и опорного сигналов. За кольцевым инициатором располагался экранированный детекторный узел для измерения прошедшего по оси пучка микроволнового излучения. На рис. 1 представлена схема эксперимента и фото головной части разряда. На рис. 2 представлены продетектированные сигналы отраженного излучения, смешанного с опорным сигналом и сигналы прошедшего излучения. Представленные на рис. 3 трехмерные спектры биений сигнала отраженного излучения, смешанного с опорным, демонстрируют понижение частоты биений по мере перемещения головной части разряда от инициатора к эллиптическому зеркалу, что соответствует замедлению распро-



**Рис. 1.** а) — Схема эксперимента. 1, 2 — фокусирующие зеркала; 3 — детекторная секция регистрации мощности излучения гиротрона; 4 — детекторная секция регистрации отраженного излучения; 5 — квазиоптический ответвитель; 6 — кольцевой инициатор разряда; 7 — линейка УФ-детекторов; 8 — детекторная секция регистрации прошедшего излучения; б) — интегральные фотографии разрядов при мощности микроволн 180 кВт: слева — разряд 53508, длительность 5 мс, в плоскости нормальной к вектору электрического поля волны; справа — разряд 53510, длительность 5.5 мс, в плоскости вектора электрического поля волны.

странения разряда в течение микроволнового импульса.

Как видно на рис. 2 за передним фронтом микроволнового импульса возникает десятикратное ослабление прошедшего сигнала. Длительность прошедшего сигнала до перекрытия микроволнового пучка  $\sim 0.1$  мс. При мощности излучения 170 кВт десятикратное ослабление прошедшего сигнала продолжается 0.75 мс. Средняя скорость в этом интервале времени, согласно рис. 3, составляет  $1.5 \times 10^4$  см/с, т.е. фронт разряда в момент 52.75 мс оказывается в центре каустики (в перетяжке) волнового пучка, что и соответствует максимуму скорости согласно спектру на рис. 3.

Далее, по мере распространения фронта разряда наблюдается рост величины прошедшего излучения, второе его ослабление в течение  $\sim 0.75$  мс и последующий рост с сильными колебаниями до конца импульса. Удвоение мощности микроволнового импульса вызывает сокращение интервала понижения уровня прошедшего излучения до 0.11–0.15 мс, что соответствует смещению фронта разряда почти до центра каустики согласно росту скорости (рис. 3). Таким образом, усиление прошедшего сигнала происходит после того, как фронт разряда пересечет координату центра каустики волнового пучка. Как следует из рис. 2 к концу импульса уровень сигнала прошедшего излучения достигает 1/2 величины прошедшего сигнала на переднем фронте импульса.

Головная часть разряда непрозрачна для микроволн из-за высокой концентрации плазмы в нитях ( $\sim 10^{17}$  см $^{-3}$  [8]) и сильного поглощения при высоких частотах столкновений электрон-нейтрал при атмосферном давлении воздуха. Таким образом, за фронтом разряда формируется пучок волн кольцевой формы. На выпуклом фронте разряда в плазме его УФ-излучения, где плотность электронов нарастает к оси волнового пучка, рефракция смещает центр каустики пучка к регистрирующему микроволновому детектору. За головной частью разряда кольцевой пучок распространяется в релаксирующей плазме возмущенного, возбужденного и нагретого головной частью газа. Если предположить, что ионизационный баланс в этой области сильно неоднородного микроволнового поля определяется процессами ударной электронной ионизации, электрон-ионной рекомбинации и прилипания электронов, т.е. частота электронной ионизации  $\nu_i = \alpha_e N_e + \nu_a$  (где  $\alpha_e$  — коэффициент рекомбинации,  $N_e$  — концентрация электронов,  $\nu_a$  — частота прилипания электронов), то из-за сильной зависимости частоты ионизации от поля ( $\nu_i = 4 \times 10^{-12} N_0 (E/E_0)^5$ , где  $N_0$  — концентрация нейтральных частиц,  $E_0$  — величина пробойного поля при атмосферном давлении) даже при слабой зависимости коэффициента рекомбинации от температуры электронов ( $\alpha_e = 10^{-7} (0.03/T_e)^{1/2}$ , где  $T_e$  в эВ) следует ожидать сильного падения плотности плазмы по радиусу с периферии к оси волнового пучка [9]. Такой “провальный” профиль плотности плазмы может привести к фокусировке внутренней части кольцевого пучка [10]. И процесс рефракции в плазме УФ-ореола на фронте головной части разряда и процесс самофокусировки за фронтом головной части в релаксирующей плазме протекают в условиях сильного поглощения излучения из-за столкновений электрон-нейтрал при частоте столкновений большей частоты микроволнового излучения  $\nu_{en} > \omega$ . Это приводит к изменению величины и распределе-

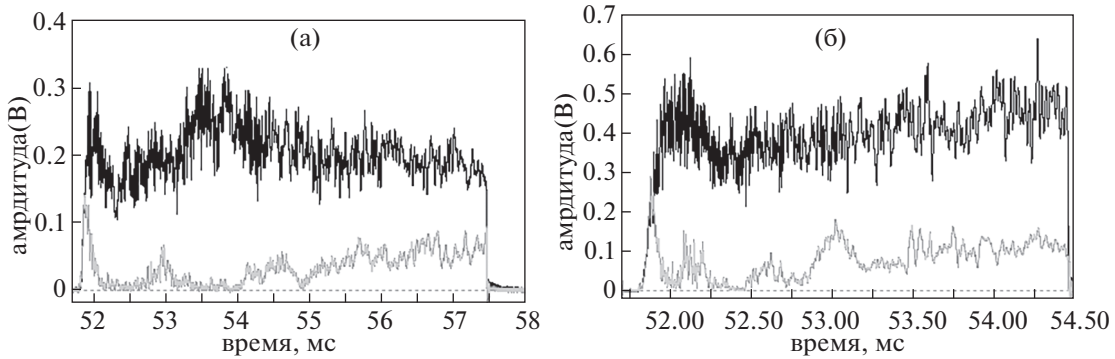


Рис. 2. Продетектированные сигналы отраженного излучения, смешанного с опорным сигналом (черная кривая) и сигналы прошедшего излучения (серая кривая). Разряды 50153 (170 кВ) (а) и 50162 (340 кВ) (б).

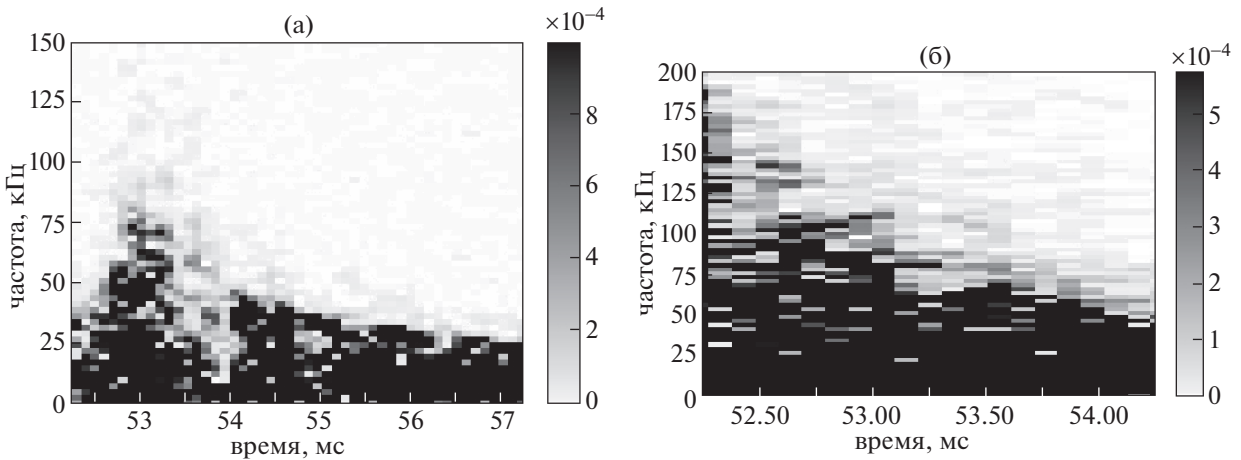


Рис. 3. 3D Фурье-спектры сигнала отраженного излучения в разрядах 50153 (а) и 50162 (б).

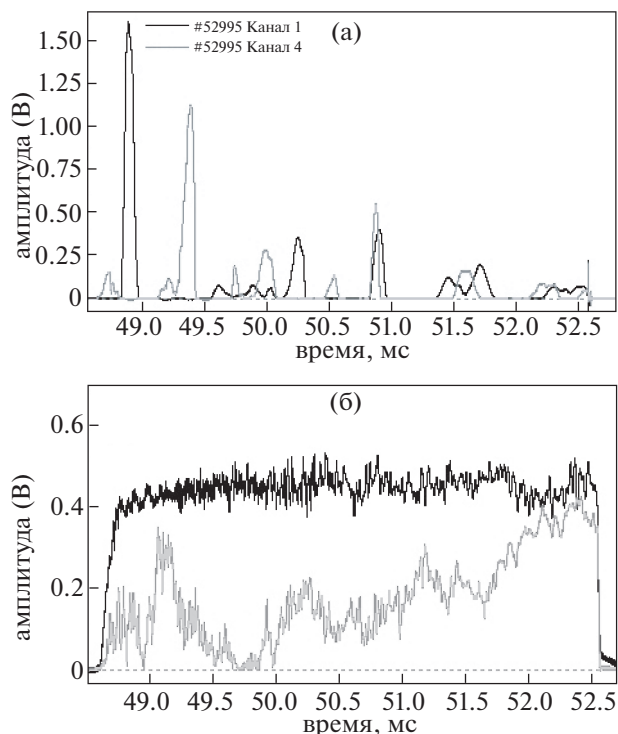
ния интенсивности прошедшего излучения и его временной эволюции. Действительно, длина поглощения  $L_v = \frac{mcv_{en}}{4\pi N_e e^2}$ , а угол сходимости пучка

$$\Delta\theta = \frac{c}{v_{en}\Delta r},$$

где  $e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона,  $c$  – скорость света,  $N_e$  – плотность плазмы,  $v_{en} = 1.7 \times 10^{-7} N_0$  – частота электрон-нейтральных соударений,  $N_0$  – концентрация нейтральных частиц. Положим  $\Delta r = 1$  см, при характерной плотности электронов в ореоле  $N_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  [11] и невозмущенной концентрации молекул  $N_0 = 2.7 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$  оценка дает  $L_v = 4.3$  см, а  $\Delta\theta = 0.4^\circ$ . Время нагрева в плазме УФ-ореола и изменения концентрации газа в три раза ( $\Delta\tau = \frac{\Delta T_g N_0}{\sigma E^2}$ , где  $\sigma = \frac{N_e e^2}{mv_{en}}$ ,  $E$  – напряженность поля волны, а  $\Delta T_g$  – прирост температуры газа) составляет  $4 \times 10^{-5}$  с. Время рекомбинации на порядок меньше. Таким образом, в релаксирующей плазме за счет падения плотности плазмы на порядок величины, длина поглощения может вырасти и при уменьшении частоты

столкновений, а угол сходимости возрастает в несколько раз. При этом из-за перемещения фронта разряда вдоль оси волнового пучка возможно перемещение и областей его самофокусировки за фронтом разряда.

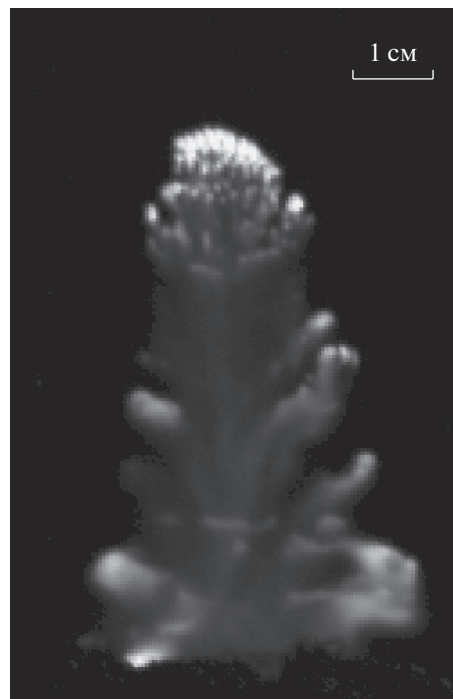
Однако вернемся к анализу временной эволюции сигналов прошедшего излучения (рис. 2). На переднем фронте импульса микроволнового излучения, при отсутствии разряда, микроволновое излучение достигает детектора прошедшего излучения. На осциллограмме сигнала прошедшего излучения в этот момент имеется крутой фронт. После возникновения разряда микроволновое излучение практически полностью поглощается в области разряда. Это приводит к глубокому провалу на сигнале прошедшего микроволнового излучения. Затем сигнал прошедшего микроволнового излучения несколько раз возрастает до уровня около 50% от уровня первого всплеска и снова падает почти до нуля. Дальше прошедшее микроволновое излучение выходит на уровень около 50% и колеблется около этого уровня. Длительность первого провала и первого повторного всплеска прошедшего через область разряда микроволнового излучения зави-



**Рис. 4.** а) Сигналы первого (черная кривая) и четвертого (серая кривая) диодов, расположенных на расстоянии 15 см, линейки детекторов УФ-излучения в разряде 52995. б) Продетектированные сигналы отраженного излучения, смешанного с опорным сигналом (черная кривая) и сигналы прошедшего излучения (серая кривая). Разряд 52995.

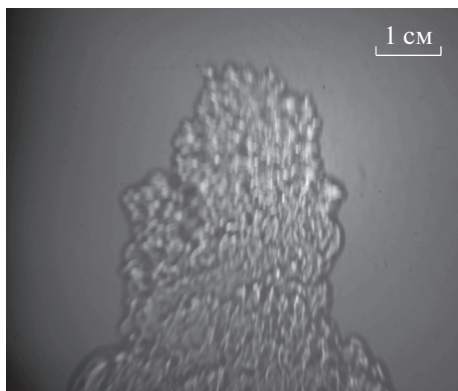
сит от мощности микроволнового излучения. С удвоением мощности микроволнового излучения длительность первого всплеска сокращается в четыре раза. В то же время, первый интервал низкого уровня прошедшего микроволнового излучения сокращается в 5–7 раз.

Возникновение второго провала в уровне прошедшего излучения и его последующие интенсивные колебания объясняются возникновением за головной частью разряда новых областей повышенной ионизации из-за фокусировки на оси волнового пучка излучения кольцевого пучка, возникающего за фронтом головной части разряда. Подтверждением этому служит регистрация повторных импульсов УФ-излучения после прохождения головной части разряда. Такие импульсы хорошо видны на рис. 4. Они регистрируются с помощью линейки из пяти коллимированных фотодиодов УФ-диапазона GUYA-S12SD, ориентированной вдоль микроволнового пучка. На рисунке приведены результаты регистрации сигналов отраженного и прошедшего микроволнового излучения и сигналов 1-го и 4-го диодов линейки, расстояние между которыми составляет 15 см. Первые всплески на 1-м и 4-м фотодиодах происходят на 48.9 мс и 49.4 мс, что соответствует ско-



**Рис. 5.** Фотография разряда 59301. Мощность микроволнового излучения 250 кВт, экспозиция 5 мкс.

рости головного плазмоида  $3 \times 10^4$  см/с и совпадает с результатами локационных измерений [12] в разряде 52995. Не анализируя детально форму сигналов, обратим внимание только на широкий провал в прошедшем сигнале в интервале 49.5–49.9 мс и соответствующие этому провалу всплески УФ-сигналов 1-го диода в интервале 49.6–50.1 мс и 4-го диода на 49.75 мс и в интервале 49.9–50.1 мс. Подтверждением образования за фронтом головного плазмоида вторичных плазмоидов могут также служить кадры видеокamеры (рис. 5, разряд 59301). Поскольку фото разряда – это проекция его свечения на плоскость, то яркое точечное свечение, отстоящее вдоль оси на размер диаметра и по радиусу на величину радиуса, можно интерпретировать как области ионизационной перегретой неустойчивости при огибании волновым пучком головной части разряда. Локальное усиление свечения на слабом фоне вблизи инициатора, по-видимому, можно приписать областям фокусировки кольцевого пучка в релаксирующей плазме в областях понижения концентрации нейтральных частиц, т.е. в условиях, близких к выполнению условий локального ионизационного равновесия:  $\nu_i = \alpha_e N_e + \nu_a$ . Естественно, ожидать усиление поглощения микроволн и ослабления прошедшего за разряд излучения в результате таких локальных в пространстве и во времени увеличений плотности плазмы. Таким образом, в некоторые интервалы времени, соответствующие провалам мощности в прошед-



**Рис. 6.** Теневые фото возмущений плотности воздуха в области перетяжки волнового пучка. Мощность излучения 260 кВт. Инициатор на удалении ~26 см от перетяжки. Экспозиция 10 мкс, задержка относительно фронта микроволнового импульса 2.52 мс (разряд 56337).

шем излучении, на трассе волнового пучка существует более двух локализованных плазмоидов: на фронте разряда и на некотором расстоянии за фронтом. Этот второй и следующие плазмоиды оказываются результатом фокусировки периферийной части волнового пучка, распространяющегося в плазме УФ-ореола головного плазмоида и в релаксирующей плазме за ним. Действительно, согласно теневым фотографиям разряда [13, 14] (рис. 6) сечение головной части разряда, представляет собой конгломерат нитевидных разрядов, поперечник которых в перетяжке волнового пучка равен половине характерного диаметра волнового пучка, т.е. в головной части разряда может поглощаться только 39% мощности пучка. Еще около 40% мощности находится в кольце толщиной  $\Delta r = 1$  см за областью конгломерата нитевидных разрядов (эта часть несамостоятельного разряда в УФ-ореоле, создаваемая излучением нитевидных каналов). Частично эта мощность поглощается в плазме несамостоятельного разряда УФ-ореола, а частично фокусируется в результате нелинейной рефракции на оси волнового пучка, вызывая дополнительную ионизацию газа, возмущенного прохождением головной части разряда. Таким образом, эффект самовоздействия волнового пучка увеличивает энергию микроволн, поглощаемую в плазме разряда.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В протяженных подпороговых микроволновых (СНС) разрядах при атмосферном давлении воздуха возникает своеобразное явление самовоздействия волнового пучка. Головная часть разряда — плазмоид, состоящий из конгломерата нитевидных каналов, создает за своим фронтом кольцевой пучок микроволн. В плазме несамостоятельного разряда УФ-ореола этого плазмоида

и релаксирующей (рекомбинирующей) плазме за ним, кольцевой пучок испытывает самофокусировку, создавая на оси пучка за головным плазмоидом новые локализованные области повышения плотности плазмы в виде отдельных плазмоидов.

Работа выполнена за счет средств проекта РНФ № 17-12-01352-п.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Ким А.В., Литвак А.Г., Семенов В.Е. Электродинамика неравновесного разряда в волновых полях // В сб.: Высоочастотный разряд в волновых полях. Горький: ИПФ АН СССР. 1988. С. 41–135.
2. Борисов Н.Д., Гуревич А.В., Милух Г.М. Искусственная ионизованная область в атмосфере // Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн, АН СССР, Москва, 1986. С. 184.
3. Matveyev A.A., Silakov V.P. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 4. P. 4121–4133.
4. Аскарьян Г.А., Манзон Б.М. // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 27. В. 2. С. 113–117.
5. Batanov G.M., Gritsinin S.I., Kossyi I.A., Magunov A.N., Silakov V.P., Tarasova N.M. // Plasma Physics and Plasma Electronics. Ed. L.M. Kovrizhnykh. Nova Science Publishers. Comack. 1985. P. 241–282.
6. Высоочастотный разряд в волновых полях, ИПФ АН СССР, Горький, 1988, С.В. Голубев, С.И. Грицинин, В.Г. Зорин, И.А. Косский, В.Е., Семенов СВЧ-разряд высокого давления в пучках электромагнитных волн, стр. 136–197.
7. Артемьев К.В., Батанов Г.М., Бережецкая Н.К., Борзосекоев В.Д., Давыдов А.М., Колик Л.В., Кончечков Е.М., Косский И.А., Петров А.Е., Сарксян К.А., Степахин В.Д., Харчев Н.К. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 10. С. 952–960.
8. Artem'ev K.V., Batanov G.M., Berezhetskaya N.K., Borzosekov V.D., Davydov A.M., Kossyi I.A., Nefedov V.I., Sarksyian K.A., Kharchev N.K. // Journal of Physics: Conference series. 2017. № 907. P. 012022.
9. Kossyi I.A., Kostinsky A. Yu., Matveyev A.A., Silakov V.P. // Plasma Sources Science and Technology. 1992. V. 1. № 3. P. 207–220.
10. Аскарьян Г.А., Студенов В.В. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10. № 3. С. 113–116.
11. Бородачева Т.В., Голубев С.В., Зорин В.Г., Еремеев А.Г., Семенов В.Е. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. В. 1. С. 107–113.
12. Artem'ev K.V., Batanov G.M., Berezhetskaya N.K., Borzosekov V.D., Davydov A.M., Kolik L.V., Konchekov E.M., Kossyi I.A., Petrov A.E., Sarksyian K.A., Stepakhin V.D., Kharchev N.K. // Plasma Physics Reports. 2018. V. 44. № 12. P. 1146.
13. Kossyi I.A., Artem'ev K.V., Batanov G.M., Berezhetskaya N.K., Borzosekov V.D., Davydov A.M., Sarksyian K.A., Kharchev N.K. // 24th International symposium on plasma chemistry Naples, Italy, June 9–14, 2019. Abstracts, ID73.
14. Артемьев К.В., Батанов Г.М., Бережецкая Н.К., Борзосекоев В.Д., Давыдов А.М., Колик Л.В., Кончечков Е.М., Косский И.А., Моряков И.В., Петров А.Е., Сарксян К.А., Степахин В.Д., Харчев Н.К. // Физика плазмы. 2021. Т. 47. № 1. С. 88–94.