

ВТОМАТИКА И ЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году Выходит 12 раз в год

9 сентябрь 12020

Москва

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Васильев С.Н.

Заместители главного редактора:

Кулешов А.П., Поляк Б.Т., Рубинович Е.Я.

Ответственный секретарь:

Хлебников М.В.

Редакционный совет:

Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Васильев В.И., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Галяев А.А., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65 Тел./факс: (495) 334-87-70 Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией Е.А. Мартехина

Москва ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

[©] Российская академия наук, 2020

[©] Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2020

Нелинейные системы

© 2020 г. Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, д-р техн. наук (boris.andrievsky@gmail.com) (Институт проблем машиноведения РАН;
Санкт-Петербургский государственный университет;
Балтийский государственный технический университет,
Санкт-Петербург, Россия),
И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия)

НАБЛЮДАТЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЙ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ЧАСТЬ 1. МЕТОДЫ 1

Обзор посвящен изложению истории развития и современного состояния теоретических методов построения наблюдателей возмущений, появление которых в теории и практике управления восходит к середине 60-х гг. прошлого века и связано с расширением алгебраических методов синтеза регуляторов, появлением компьютерно-ориентированных процедур синтеза и усложнением круга решаемых задач и стремлением оптимизировать процесс управления. В обзоре описываются наблюдатели гармонических возмущений, излагается метод внутренней модели, рассматриваются наблюдатели ограниченных возмущений и описываются методы оценки возмущений с использованием вспомогательных фильтров в форме передаточных функций и наблюдателей состояния.

Ключевые слова: возмущения, оценивание, наблюдатель.

DOI: 10.31857/S0005231020090019

1. Введение

История появления наблюдателей возмущений в теории и практике управления восходит к середине 60-х гг. XX в. и связана с расширением алгебраических методов синтеза регуляторов, появлению компьютерно-ориентированных процедур синтеза, с усложнением круга решаемых задач и стремлением оптимизировать процесс управления. В теории оптимального управления стало уделяться все большее внимание решению таких сложных задач, как управление нелинейными и многосвязными (МІМО) системами, а используемые в то время методы управления часто оказывались более чувствительными к возущениям и помехам, чем классические [1]. В начале 1970-х гг. появились многие публикации о неудаче в применении имеющихся методов

 $^{^1}$ Результаты разделов 1–4 получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-38-20037). Результаты раздела 5 получены в ИПМаш РАН в рамках госзадания Минобрнауки РФ (Рег. № НИОКТР АААА-А19-119120290136-9).

оптимального управления из-за отсутствия робастности синтезированных регуляторов [2–4]. Решением явилось понимание важности учета при синтезе регуляторов существенных возмущений, что в 1970-х гг. инициировало разработку методов робастного управления [2, 5–7]. Для снижения чувствительности к возмущениям обычных наблюдателей состояния (Калмана, Луенбергера) в то время были предложены робастные варианты наблюдателей, учитывающие внешние неизмеряемые возмущения. Сюда же можно отнести и наблюдателей неизвестных входных сигналов [1, 8–15]. В настоящее время робастность по отношению к возмущениям и помехам, как и выполнение требований устойчивости и качества работы системы, стали ключевой задачей синтеза регуляторов в обратной связи [1]. Как хорошо известно и из классической теории управления, робастность по отношению к возмущениям может достигаться подавлением влияния возмущений обратной связью или их компенсацией в разомкнутом контуре [16–18]. Возможно также комбинированное управление, сочетающее оба метода [19, гл. 9].

Поскольку в рассматриваемых в данном обзоре публикациях принято, что возмущения непосредственно не измеряются, то компенсация в разомкнутом контуре становится подавлением возмущений по измерениям выхода, т.е. также с помощью обратной связи. В обзорах [20, 21] аннотированы появившиеся за период 1980–1998 гг. публикации по оцениванию изменяющихся во времени входных сигналов (в том числе и возмущений) для различных классов динамических систем.

К публикациям по проблеме идентификации (восстановления) нестационарного входного сигнала, действующего на динамический объект относятся публикации по аппроксимационным методам идентификации с использованием глобальной аппроксимации [22–25], локальной аппроксимации [26–29], по методам на основе теории инвариантных наблюдателей [30, 31], теории обращения и смежных подходов [32–35] и некоторые другие публикации [36–39].

Чтобы преодолеть проблему, возникающую при невозможности непосредственного измерения возмущений для их компенсации в разомкнутом контуре, разработаны наблюдатели, позволяющие оценивать возмущения на основе доступных измерению переменных состояния объекта и модели его динамики. Робастность регулятора достигается использованием оценок возмущений вместо их истинных значений. Тем самым неявно синтезируется регулятор в обратной связи. Поэтому для задач подавления неизмеряемых возмущений разница между указанными двумя подходами имеет методический характер, относящийся больше к способу синтеза регулятора, а не к свойствам полученной системы. Поскольку для синтеза наблюдателя возмущений используется их представление как процесс на выходе некоторой динамической системы, которая дополняет модель самого объекта управления, то в большом числе публикаций такая структура трактуется в качестве реализации "принципа внутренней модели" (англ. — Internal Model Principle), см., например, [1, 6, 13, 17, 40–52].

Методы синтеза наблюдателей возмущений получили дальнейшее развитие в направлениях применения адаптивного подхода [48, 51, 53–64], скользящих режимов [65–69], нелинейных наблюдателей [70, 71], наблюдателей для объектов с запаздыванием [57, 59, 60, 63, 72–79] и других. Следует отметить,

что задача оценивания и подавления возмущений может иметь более широкое применение, чем просто парирование влияния внешней среды: под возмущениями можно также понимать неопределенность параметров объекта, несоответствие принятой модели динамики объекта его поведению и действие других факторов. Подавление таких возмущений позволяет повысить робастность системы управления по отношению к данным условиям [80].

В данной части обзора приводятся сведения о теоретических результатах по наблюдателям возмущений. Оценка возмущений с использованием наблюдателей состояния описывается в разделе 2. Оценке возмущений с использованием вспомогательных фильтров в форме передаточных функций посвящен раздел 3. Наблюдателям ограниченных возмущений посвящен раздел 4. В разделе 5 описываются наблюдатели гармонических возмущений и связанный с ними метод внутренней модели.

Практическому применению наблюдателей возмущений будет посвящена следующая часть обзора [81].

В статье используются следующие обозначения и аббревиатуры: \mathbb{R} — множество вещественных чисел, \mathbb{C} — множество комплексных чисел, \mathbb{O} У — объект управления, $\Pi\Phi$ — передаточная функция, $\Pi\Pi$ В — инвариантные по времени (системы) — системы с постоянными параметрами. Для таких систем в литературе используется также термин "стационарные системы". Π MH — линейное матричное неравенство (англ. — Linear Matrix Inequality, LMI), SISO системы — системы со скалярными входами и выходами (англ. — Single-Input, Single-Output), MIMO системы — системы с векторными входами и выходами (англ. — Multiple-Input, Multiple-Output). Для SISO и МІМО систем в отечественной литературе часто используются термины "одноканальные" ("односвязные") или соответсвенно "многоканальные" ("многосвязные") системы.

2. Оценка возмущений с использованием наблюдателей состояния

Для решения поставленной задачи — оценивания и компенсации аддитивных возущений в течение более 60-ти лет известен подход, связанный с применением наблюдателей состояния (а в стохастической постановке — оптимальных фильтров Калмана-Бъюси), см., например, [82–88]. Приведем краткие сведения.

В реальных условиях измерение вектора состояния ОУ, как правило, неосуществимо из-за необходимости установки датчиков в труднодоступных местах, измерения производных высоких порядков и т.д. Еще более сложной задачей является измерение возмущений. Преодолеть (или уменьшить) эти трудности можно, если наиболее полно использовать имеющуюся априорную информацию о модели объекта и текущие измерения его входов и выходов. С этой целью в систему управления вводится подсистема (алгоритм) оценивания состояния объекта и возмущений. Рассматриваемая задача оценивания состояния системы по доступной текущей информации о ее входах и выходах принципиально разрешима, если имеется взаимно однозначное соответствие между переменными вход-выход и состоянием объекта. Это соответствие имеется для полностью наблюдаемых объектов [84–87, 89, 90]. При этом предполагается, что имеется достаточно полная априорная информация об объекте

в виде его математической модели и значений параметров. Задачи оценивания при неполной априорной информации относятся к робастным [9, 91-93] или к адаптивным [64, 85, 89, 91, 94, 95].

Рассмотрим модель ОУ в виде уравнений состояния

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + d(t),$$
(2.1)
$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geqslant t_0.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта; $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — входной и выходной векторы; A(t), B(t), C(t) — известные матричные функции. Объект подвержен действию возмущений d(t) и шума (погрешности) измерений v(t). Во время работы системы датчиками измеряются переменные u(t), y(t), а переменные x(t), d(t), v(t) — не измеряются. Рассматривается задача получения оценки состояния объекта $\hat{x}(t)$, в некотором смысле близкой к x(t). Для полностью наблюдаемого ИПВ объекта при отсутствии возмущений и шумов измерения можно получить асимптотически точную оценку состояния с любым заданным временем переходного процесса. Более того, полная наблюдаемость теоретически позволяет построить алгоритм оценивания, обладающий конечным временем сходимости оценок состояния. Влияние возмущений и шумов измерения приводит к появлению ошибок оценивания.

Наблюдатель состояния (идентификатор состояния, наблюдающее устройство, наблюдатель) можно представить в виде модели объекта управления, на вход которой поступает то же управляющее воздействие, что и на объект управления, и дополнительный сигнал коррекции (обратной связи), который получается из невязки между выходами объекта и модели. Для линейных систем наблюдатель описывается уравнением [82–88]

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - \hat{y}(t)),$$
(2.2)
$$\hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \ t \geqslant t_0.$$

Здесь $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния наблюдателя, служащий оценкой состояния объекта; $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ — вектор выхода; L(t) — подлежащая выбору при синтезе $(n \times l)$ -матрица коэффициентов обратной связи.

У наблюдателя (2.2) размерность вектора состояния $\hat{x}(t)$ такая же, как и у объекта управления (так называемый наблюдатель полного порядка, или наблюдатель Калмана), и равна n. Порядок наблюдателя можно понизить, используя непосредственно содержащуюся в выходных переменных информацию о состоянии объекта. Это дает возможность построить алгоритм оценивания порядка n-p, где $p=\mathrm{rank}\,C$. Такие наблюдатели пониженного порядка часто называются наблюдателями Луенбергера [82–85]. Известны и наблюдатели повышенного порядка — адаптивные наблюдатели [64, 85, 89, 94, 95].

Рассмотрим теперь *ошибку оценивания* $\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t)$. Вычитая из (2.1) уравнение (2.2), получим

$$(2.3) \dot{\varepsilon}(t) = (A(t) - L(t)C(t))\,\varepsilon(t) + d(t) - L(t)v(t), \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, t \geqslant t_0.$$

Как видно из (2.3), источниками ошибки $\varepsilon(t)$ являются начальное рассогласование $\varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0$, возмущение d(t) и помеха измерений v(t). Динамика переходного процесса $\varepsilon(t)$ определяется матрицей $A_{\rm obs}(t) = A(t) - L(t)C(t)$.

Если матрица $A_{\rm obs}$ постоянна (не меняется со временем), то динамика $\varepsilon(t)$ определяется ее собственными числами. Если эти собственные числа имеют отрицательные вещественные части, а возмущения d(t) и шумы v(t) отсутствуют, то $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)=0$ для любых начальных значений $x_0,\ \hat{x}_0.$ Матрица $A_{\rm obs}$ зависит от A, C и от выбираемой при синтезе матрицы L. Как известно [84–87, 90], для полностью наблюдаемого объекта всегда имеется такая матрица L, что собственные числа матрицы $A_{\rm obs}$ будут заданными. Матрица L влияет и на точность процесса оценивания при внешних воздействиях. Как видно из (2.3), это влияние оказывается разным по отношению к возмущениям d(t), с одной стороны, и помехам измерений v(t) — с другой. Поэтому при определении L следует учитывать характеристики внешних воздействий, обеспечивая компромисс между требованиями быстродействия и точности системы. Обычно повышение быстродействия связано с увеличением элементов матрицы L и, следовательно, с подавлением влияния возмущений и усилением действия помех измерения. Для более детального анализа можно использовать передаточные функции по ошибке от возмущений $W_d^{\varepsilon}(s)$ и помех $W_v^{\varepsilon}(s)$, определяемые формулами:

(2.4)
$$W_d^{\varepsilon}(s) = (s\mathbf{I}_n - A + LC)^{-1}, \quad W_v^{\varepsilon}(s) = -(s\mathbf{I}_n - A + LC)^{-1}L.$$

Оптимальный в стохастическом смысле выбор матрицы L(t) приводит к оптимальному фильтру Калмана-Бъюси [86].

Перейдем к задаче оценивания возмущений и помех. Как видно из (2.3), неизмеряемые внешние воздействия (возмущения и помехи) приводят к появлению дополнительных составляющих ошибки оценивания переменных состояния и снижают точность системы управления. Уменьшить их влияние можно путем совместного оценивания состояния ОУ и неизмеряемых внешних воздействий.

Основная идея использования наблюдателей для оценивания возмущений и помех измерения состоит в следующем [84, 85, 96]. Для внешних воздействий строится некоторая математическая модель ("модель внешней среды", англ. "internal model of disturbances") [6, 13, 17, 41–44]. В этой модели возмущения обычно представлются как решения системы однородных дифференциальных (или разностных) уравнений с известными коэффициентами и неизвестными начальными условиями, в которых и содержится вся неопределенность относительно внешних воздействий². Затем модель внешних воздействий объединяется с моделью объекта управления, и для полученной расширенной системы строится наблюдатель. Полученные с помощью наблюдателя оценки содержат как собственно оценки состояния объекта, так и оценки внешних воздействий. Естественно, что для этого требуется полная наблюдаемость расширенной системы.

Подход к синтезу систем управления на основе постулирования динамических моделей для отдельных подсистем и сигналов нашел широкое применение и называется "принципом внутренних моделей" ("internal model principle"). Для построения эффективных алгоритмов проектирования, оценива-

 $^{^2}$ Случай неизвестных параметров модели среды рассматривается в рамках meopuu адаптивного оценивания [56, 58, 64, 85, 87–89, 95, 97].

ния, управления системами модели в виде уравнений состояния могут задаваться не только для возмущающих воздействий, но и для помех измерений, командных сигналов ("эталонные модели"), динамики изменения параметров объекта и т.д.

Процедура синтеза выглядит достаточно просто, если внешние процессы можно представить как *квазимногочлены* — выражения вида $\sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t} P_i(t)$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}$ — известные постоянные, $P_i(t)$ — многочлены с заданными коэффициентами [85, 98, 99]. Сюда относятся степенные функции, гармоники с заданной частотой, экспоненты с заданным показателем затухания, произведения гармоник на экспоненты и их линейные комбинации. Рассмотрим процедуру оценивания для этого случая более подробно.

Пусть внешние воздействия d(t), v(t) можно представить в виде процессов на выходе линейной системы, заданной уравнениями

(2.5)
$$\dot{x}_s(t) = A_s(t)x_s(t), \quad y_s(t) = C_sx_s(t), \quad x_s(t_0) = x_{s_0}, \quad t \geqslant t_0.$$

Здесь $x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ — вектор состояния "среды", $y_s(t) \in \mathbb{R}^{n+l}$ — выход модели источника возмущений — вектор внешних по отношению к объекту воздействий, $y_s(t) = \operatorname{col} \left\{ d(t), v(t) \right\};$ A_s, C_s — известные матрицы; $C_s = \begin{bmatrix} C_d \\ C_v \end{bmatrix};$ C_d, C_v — подматрицы размеров $n \times n_s, \ l \times n_s,$ определяющие связь между состоянием $x_s(t)$ модели внешних воздействий, возмущениями d(t) и помехами v(t) в (2.1). Начальное состояние x_{s_0} системы (2.5) неизвестно. Введем расширенный вектор состояния, включающий состояние объекта и среды: $\bar{x}(t) = \operatorname{col} \left\{ x(t), \ x_s(t) \right\} \in \mathbb{R}^{n+n_s}$. Объединяя уравнения (2.1), (2.5), получим уравнения расширенной системы в виде

(2.6)
$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad y(t) = \bar{C}\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \geqslant t_0,$$

в которых матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ имеют следующую блочную структуру:

(2.7)
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & C_d \\ \mathbf{0}_{n_s \times n} & A_s \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0}_{n_s \times m} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C, C_v].$$

Расширенная система (2.6) рассматривается как некоторый новый объект порядка $\bar{n} = n + n_s$, для которого строится наблюдатель (2.2).

Рассмотрим возможность приведения системы с компенсацией возмущения с помощью наблюдателя (2.2) для расширенной системы (2.6) с "внутренней моделью" возмущений [6, 13, 17, 41–44] к традиционному виду с корректирующими звеньями в прямой цепи и местной корректирующей обратной связью [19, 100–102], аналогичным (3.2). Для определенности будем считать, что возмущение d(t) — скалярная переменная, действующая аддитивно со скалярным управлением u(t). Структурная схема системы представлена на рис. 1.

Здесь через $u_r(t)$ обозначено воздействие, вырабатываемое регулятором с $\Pi\Phi\ R(s)$ в главной обратной связи, через u(t) — сигнал управления, поступающий на объект с передаточной функцией ($\Pi\Phi$) P(s), на который действу-

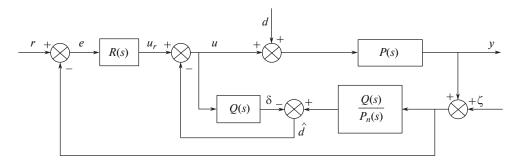


Рис. 1. Структура системы управления с компенсацией возмущений по [103].

ет аддитивное возмущение d(t), которое считается низкочастотным и описывает как воздействие со стороны среды, так и нелинейность и неопределенность модели ОУ. (Стоит заметить, что при неопределенности и нелинейности ОУ d(t) зависит от его состояния, что следует учитывать при анализе.) Выход объекта y(t) измеряется вместе с аддитивным "шумом измерения" $\zeta(t)$, который предполагается высокочастотным. Через $\hat{d}(t)$ обозначена оценка возмущения, вырабатываемая как разность между фильтрованным сигналом управления $\delta = Q(s)u$ и выходом фильтра сигнала измерений с передаточной функцией $Q(s)P_n(s)^{-1}$. Передаточная функция $P_n(s)$ соответствует "номинальной" модели объекта. Управление u(t) получается как разность между сигналом $u_r(t)$ и оценкой возмущений $\hat{d}(t)$.

Найдем связь между сигналами $u_r(t)$ (выходом регулятора в цепи главной обратной связи, $v(t) = y(t) + \zeta(t)$ (сигналом измерений выхода), с одной стороны, и управлением u(t) — с другой. В качестве примера, используем следующие приведеные в [103] выражения для передаточных функций:

$$P_n(s) = \frac{k_0}{(Ts+1)s}, \quad R(s) = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}, \quad Q(s) = \frac{1}{\tau s^2 + 2\tau s + 1}.$$

При синтезе наблюдателя для расширенной системы (2.6) возмущение d(t) считаем неизвестной постоянной величиной: $\dot{d}(t) = 0$, а модель шума измерений $\zeta(t)$ в процесс оценивания включать не будем.

Для ОУ, имеющего ПФ $P_n(s) = \frac{k_0}{(Ts+1)s}$, запишем следующие уравнения состояния в канонической форме фазовой переменной [84, 85]:

(2.8)
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & y(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = T^{-1} \left(-x_2(t) + k_0 \left(u(t) + d(t) \right) \right). \end{cases}$$

Введем матрицу (вектор-строку) $\bar{C}_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_s}$ так, что для расширенного наблюдателя имеет место $\hat{d}(t) = \bar{C}_d \hat{\bar{x}}(t)$. (В рассмотренном выше примере, так как $\bar{d}(t) = \hat{\bar{x}}_3(t)$, выполнено $\bar{C}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.) По уравнениям состояния наблюдателя расширенной системы с матрицами (2.7) и \bar{C}_d получим его передаточные функции $W_u^{\hat{d}}(s)$ — от сигнала управления u к оценке возмущения \hat{d} и

 $W_v^{\hat{d}}(s)$ — от сигнала измерений $v=y+\zeta$ к \hat{d} . Получим

(2.9)
$$W_u^{\hat{d}}(s) = \bar{C}_d(s\mathbf{I} - A_{\text{obs}})^{-1}\bar{B}, \qquad W_v^{\hat{d}}(s) = \bar{C}_d(s\mathbf{I} - A_{\text{obs}})^{-1}L.$$

Учитывая что $u(t)=u_r(t)-\hat{d}(t),$ запишем $\left(1+W_u^{\hat{d}}(s)\right)u=u_r-W_v^{\hat{d}}(s)v,$ откуда следует что

(2.10)
$$W_1(s) = \frac{1}{1 + W_u^{\hat{d}}(s)}, \qquad W_2(s) = \frac{W_v^{\hat{d}}(s)}{1 + W_u^{\hat{d}}(s)},$$

где $W_{v}^{\hat{d}}(s)$, $W_{v}^{\hat{d}}(s)$ приведены в (2.9).

В [104] рассмотрен синтез линейных регуляторов для линейных с постоянными параметрами (ИПВ, англ. – $linear\ time-invariant,\ LTI$) ОУ с векторными входом и выходом, обеспечивающих заданное расположение корней характеристического многочлена замкнутой системы, и асимптотическое подавление постоянных возмущений. Рассматриваются ОУ, заданные уравнениями состояния

(2.11)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d(t),$$
$$y(t) = Cx(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geqslant t_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ $(m \leqslant n), y(t) \in \mathbb{R}^l$ — входной и выходной векторы; A, B, C — матрицы соответствующих размеров. Принято, что $\mathrm{rank}\,C = l$. Неизвестное и неизмеряемое возмущение $d(t) \in \mathbb{R}^n$ представляет собой сумму импульсных $(\delta$ -Дирака) или ступенчатых $(e\partial u h u u h a \pi \phi y n k u u k a b u k a$

$$d(t) = \sum_{i=1}^{p_1} d_i^1(t) \cdot 1(t - t_i^*) + \sum_{j=1}^{p_2} d_j^2 \cdot \delta(t - t_j^*),$$

$$0 \leqslant t_i^* \leqslant T_1 < \infty, \quad i = 1, \dots, p_1,$$

$$0 \leqslant t_j^* \leqslant T_2 < \infty, \quad j = 1, \dots, p_j,$$

$$(2.12)$$

причем для вектор-функций $d_i^1(t) \in \mathbb{R}^n$ выполнено

(2.13)
$$\lim_{t \to \infty} d_i^1(t) = \vec{d}_i^1, \quad ||\vec{d}_i^1|| < \infty.$$

Требуется найти минимальный реализуемый динамический ИПВ регулятор в обратной связи, решающий задачу модального управления [84–86, 89, 105], т.е. обеспечивающий заданное, с отрицательными вещественными частями расположение полюсов замкнутой системы (при естественных условиях комплексной сопряженности невещественных полюсов и полной управляемости ОУ) и асимптотическое стремление выхода y(t) к нулю для всех возмущений d(t) указанного класса.

Замечание 1. С нашей точки зрения, в обобщенном представлении возмущений (2.12) нет необходимости, и оно только усложняет восприятие основной идеи. Действительно, в силу свойств суперпозиции и инвариантности во времени ИПВ систем достаточно рассмотреть только случай $p_1 = p_2 = 1$ и совместить моменты времени t_0, t_1^*, t_2^* , полагая $t_0 = t_1^* = t_2^* = 0$. Кроме того, естественным образом (см., например, [85]) δ -образное воздействие $d_1^2 \cdot \delta(t)$ пересчитывается в начальные условия: $x(0_+) \equiv \lim_{t \to 0} x(t) = x_0 + d_1^2$, и затухание реакции y(t) на такое возмущение тривиально следует из асимптотической устойчивости замкнутой системы. Следовательно, δ -образную компоненту возмущений можно не включать. Что касается компоненты $d_1^1(t) \cdot 1(t-t_1^*)$, то при $t_0 = t_1^* = 0$ выполнено $1(t - t_1^*) \equiv 1$, поэтому этот сомножитель можно не записывать. Таким образом, возмущение имеет смысл представить в виде $d(t) \equiv d_1^1(t)$ с условием (2.13). В силу этого условия $d_1^1(t)$ можно представить как сумму ограниченного затухающего сигнала и постоянной составляющей \bar{d}_i^1 . Поскольку реакция асимптотически устойчивой линейной системы на ограниченный затухающий сигнал тоже стремится к нулю, то указанное выше требование компенсации возмущений обеспечивается известным в классической теории управления свойством астатизма по возмущению, которое может быть обеспечено введением интегральной составляющей (И-, ПИ-, ПИД-регулятор) в закон управления [19, 102]. К такому управлению приводит и работа [104]. Некоторая специфика заключается в рассмотрении многосвязных (МІМО) систем.

Основной результат работы [104] заключается в том, что искомый закон управления минимального порядка (равного l) имеет вид пропорциональной обратной связи по состоянию и интегральной — по выходу:

(2.14)
$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t y(\tau) d\tau + u_0,$$

где $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times l}$ — матричные коэффициенты регулятора, значение вектора $u_0 \in \mathbb{R}^m$ несуществененное (например, им могут быть начальные состояния интеграторов или приведенные ко входу системы δ -образные компоненты возмущения, см. замечание 1). Обратная связь по состоянию служит для получения желаемого расположения полюсов замкнутой системы, а интегральная составляющая от выхода y(t) — для обеспечения астатизма первого порядка [19] по возмущению.

Коэффициенты K_1 , K_2 должны быть выбраны на основе заданного спектра матрицы уравнений состояния расширенной (включающей интеграторы выхода) замкнутой системы

(2.15)
$$A^* = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ C & \mathbf{0}_{l \times l} \end{bmatrix}.$$

Матрица A^* уравнений состояния замкнутой системы вида (2.15) получается из (2.11), (2.14), если ввести для интеграторов в (2.14) вектор состояния

 $v(t) \in \mathbb{R}^l$. Этот вектор подчиняется уравнению $\dot{v}(t) = y(t)$. Введением расширенного вектора состояния $\bar{x} = \operatorname{col}\{x,v\}$ и после подстановки (2.14) в (2.11) получим указанную матрицу A^* уравнений состояния расширенной системы.

Показано [104, теорема 2], что задача разрешима, если выполнены следующие условия: пара (A,B) – управляема, и

(2.16)
$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0}_{l \times l} \end{bmatrix} = n + l.$$

Как отмечено в [104], результат не изменится при отклонении параметров ОУ и регулятора, не нарушающего условий асимптотической устойчивости матрицы A^* . Показано, что при отсутствии вариаций матрицы C выполняется и условие (2.16). Свойство подавления постоянных возмущений независимо от параметров объекта типично для систем со скалярными входом и выходом (односвязные системы, англ. — $single-input\ single-output,\ SISO$) и с интегралом в контуре управления, так как оно является структурным (не зависящим от параметров) [19, 102]. От системы требуется только асимптотическая устойчивость.

Отметим, что при выполнении (2.16) возможна полная компенсация постоянного возмущения $d \in \mathbb{R}^n$ управлением $u \in \mathbb{R}^m$ меньшей размерности. В выполнении условия согласованности (которое имеет место при возмущении, действующем аддитивно управлению) тоже нет необходимости. В качестве примера рассмотрим систему

(2.17)
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + d_1, \\ \dot{x}_1(t) = -a_2 x_1(t) - a_2 x_1(t) + u(t) + d_2, \\ y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \\ t \end{cases}$$

(2.18)
$$u(t) = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Легко получить, что выход замкнутой системы (2.17), (2.18) отвечает уравнению

(2.19)
$$\alpha(p)y(t) = \beta_1(p)d_1(t) + \beta_2(p)d_2(t),$$

где $\alpha(p),\ \beta_1(p),\ \beta_2(p)$ — многочлены от оператора дифференцирования p=d/dt:

$$\alpha(p) = p^{3} + (a_{1} + k_{2})p^{2} + (a_{2} + k_{1} + c_{2}k_{I})p + c_{1}k_{I},$$

$$\beta_{1}(p) = c_{1}s^{2} + (a_{1}c_{1} - a_{2}c_{2} + c_{1}k_{2} - c_{2}k_{1})p,$$

$$\beta_{1}(p) = (c_{1}p + a_{1}c_{1} - a_{2}c_{2} + c_{1}k_{2} - c_{2}k_{1})p,$$

$$\beta_{1}(p) = (c_{2}p + c_{1})p.$$

Условием разрешимости задачи в данном случае будет $c_1 \neq 0$, и поскольку $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$, то вынужденная составляющая ошибки от постоянных возмущений d_1 , d_2 будет равна нулю. Если известны оценки \hat{d}_1 , \hat{d}_2 постоянных

возмущений d_1, d_2 , то эффекта их компенсации можно добиться заменой (или дополнением) интегральной составляющей в законе управления (2.18) компенсирующим сигналом

$$u_c = -\hat{d}_1(a_1c_1 - a_2c_2 + c_1k_2 - c_2k_1)c_1^{-1} - \hat{d}_2 \quad (c_1 \neq 0).$$

Заметим, что закон управления с компенсацией возмущений через u_c , в отличие от интегрального (2.18), чувствителен к отклонению параметров от расчетных. Кроме того, могут появиться проблемы с оценкой возмущений, так как ОУ (2.17), расширенный уравнениями внутренней модели $\dot{d}_1=0,\,\dot{d}_2=0,\,$ при $a_1c_1=a_2c_2$ не полностью наблюдаем по компоненте d_1 . Далее, при таком сочетании параметров возникает сложность в использовании наблюдателя при оценке состояния x(t) для перехода от управления по состоянию (2.18) к управлению по выходу. Эти трудности устраняются использованием вместо (2.18) стандартного ПИ-регулятора $u(t)=-k_Py(t)-k_I\int_0^t y(\tau)\,d\tau$ (см., например, [19, 102]). ПИ-регулятор, в отличие от (2.18), не дает возможности обеспечить здесь заданное расположение полюсов замкнутой системы, но это требование имеет скорее академическое, чем практическое, значение при разработке систем управления.

В [40] получены необходимые и достаточные условия управления системой (2.11) линейным динамическим регулятором при действии неизмеряемых возмущений $d_1(t), \ldots, d_n(t)$, которые можно представить в виде решений следующего однородного линейного дифференциального уравнения r-го порядка

$$(2.20) d_k^{(r)}(t) + \alpha_r d_k^{(r-1)}(t) + \dots + \alpha_2 \dot{d}_k(t) + \alpha_1 d_k(t) = 0, k = 1, \dots, n,$$

с заданными коэффициентами $\alpha_1, \dots \alpha_r$ и неизвестными начальными условиями $d_k^{(r-1)}(0), \dots, \dot{d}_k(0), d_k(0),$ у которого все корни $\lambda_i, i=1,\dots,r,$ характеристического многочлена $\lambda^r + \alpha_r \lambda^{(r-1)} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1$ имеют неотрицательные вещественные части, $\operatorname{Re} \lambda_i \geqslant 0$. Требуется, чтобы независимо от действующих на систему возмущений, ее выход $y(t) \in \mathbb{R}^l$ асимптотически приближался к вектор-функции $y^*(t) \in \mathbb{R}^l$, компоненты $y_k(t)$ которой известны заранее и удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению

$$(2.21) y_k^{(r)}(t) + \alpha_r y_k^{(r-1)}(t) + \dots + \alpha_2 \dot{y}_k(t) + \alpha_1 y_k(t) = 0, k = 1, \dots, l,$$

с известными начальными условиями $y_k^{(r-1)}(0), \ldots, \dot{y}_k(0), y_k(0)$. Заметим, что характеристические многочлены "генераторов" возмущений (2.20) и задающего воздействия (2.21) совпадают, поэтому процессы $d_k(t)$ и $y_k(t)$ отличаются только начальными условиями.

Синтез регулятора выполняется так, чтобы либо оптимизировать заданный интегральный квадратичный функционал [86, 87, 95, 101], либо получить требуемое расположение полюсов замкнутой системы. Кроме того, обеспечивается ее полная управляемость. Как и в [104], закон управления в [40] содержит интегральную составляющую.

Условиями разрешимости задачи являются полная управляемость пары (A,B) и аналогичный публикации [104] ранговый критерий. Критерии, приведенные в [104], где рассмотрены постоянные возмущения, и в [12, 13], в которых принято что rank C=n, получаются из критерия [40] как частные случаи. Показано, что, как и в [40], полученная система робастна по отношению к вариациям параметров. Отметим, что, хотя описание возмущений в виде квазимногочленов (решения (2.20)) оправдано и часто используется на практике, представление программного воздействия $y^*(t)$ в форме (2.21) является довольно специфичным. В частности, указанный вид $y^*(t)$ не позволяет воспользоваться результатами [40] для задачи слежения, в которой поведение задающего воздействия заранее не известно [19].

Принцип внутренней модели работы [40] нашел применение в статье [106], которая посвящена классу *гибридных систем*, образованных семейством ИПВ подсистем (называемых *модами*), с дискретными событиями переключения из одной моды на другую. Рассматриваются *переключающиеся* (англ. — *switching*) системы, в которых переключение наступает в зависимости от текущего состояния системы. Ставится задача обеспечения асимптотического отслеживания периодических траекторий такими системами при условии, что динамика каждой моды линейна. В [106] показано, как обеспечить робастность асимптотического слежения по отношению в вариациям параметров у этого класса гибридных систем.

Задача построения робастных следящих систем (сервомеханизмов) рассматривается в [6, 107]. Получены необходимые и достаточные условия, а также дана характеристика всех робастных регуляторов, позволяющих осуществлять асимптотическое слежение, независимо от действующих на ОУ возмущений, погрешности измерения и изменения параметров объекта и регулятора.

Линейный объект управления с постоянными параметрами в [6] описывается следующими уравнениями состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t),$$

$$(2.22) \qquad y(t) = C(t)x(t) + Du(t) + Fd(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — вектор выхода (подлежащая управлению переменная); A, B, C, D, E, F — матрицы соответствующих размеров; $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ — вектор возмущений, содержащий как измеряемые, так и неизмеряемые компоненты. Вводится $ouu b ka c neecehus e(t) = y(t) - y^*(t) \in \mathbb{R}^l$, где $y^*(t) \in \mathbb{R}^l$ — задающее (командное) воздействие. Предполагается, что вектор возмущений удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению

$$(2.23) \dot{x}_s(t) = A_s(t)x_s(t), d(t) = C_sx_s(t), x_s(t_0) = x_{s_0}, t \geqslant t_0.$$

Здесь $x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ — вектор состояния модели возмущений (см. также (2.5)-(2.7)). Пара (A_s,C_s) считается полностью наблюдаемой.

 $3 \, a \, Me \, 4 \, a \, Hu \, e \, 2$. Наблюдаемость пары (A_s, C_s) с первого взгляда кажется естественным требованием, но заметим, что ее отсутствие говорит о том, что

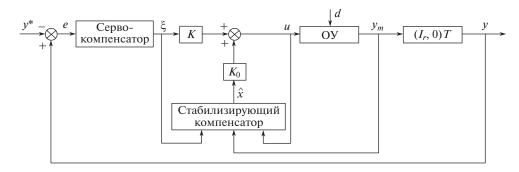


Рис. 2. Обобщенная структурная схема робастного серворегулятора по [6].

некоторые компоненты x_s или их комбинации не участвуют в формировании возмущения. Следовательно, такая модель была бы избыточной. Выбор же этой модели определяется не физическими свойствами среды — источника возмущений, а возлагается на разработчика системы управления.

Предполагается, кроме того, что задающее воздействие $y^*(t) \in \mathbb{R}^l$ также подчиняется аналогичному однородному уравнению состояния порядка n_y с матрицами A_y , C_y соответствующих размеров. Пара (A_y, C_y) считается наблюдаемой, а начальное значение вектора состояния генератора задающего воздействия — известным (тем самым заранее известно и $y^*(t)$). Принято, что измеряется только сигнал $y_m(t) = C_m(t)x(t) + D_m u(t) + F_m d(t)$. При этом требуется с помощью регулятора обеспечить асимптотическое стремление к нулю ошибки e(t) при всех начальных значениях состояния объекта и "генераторов" возмущающего и задающего воздействий.

Далее в [6] вводится новый тип компенсатора, называемый сервокомпенсатором, который соответствует интегральному регулятору в классической теории управления и в обобщенном виде описывается уравнением $\dot{\xi} = \mathcal{S}\xi + \mathcal{B}e, e = y - y^*$, где \mathcal{S}, \mathcal{B} — матрицы соответствующих размеров, определяемые при синтезе, ξ — выход сервокомпенсатора. Второй структурой,
входящей в серворегулятор, является стабилизирующий компенсатор — динамический регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой стистемы.
Его выход — оценка \hat{x} состояния ОУ, полученная с помощью наблюдателя по входным сигналам y_m , u, ξ . Окончательно управление u имеет вид $u = K_0 \hat{x} + K \xi$ с некоторыми выбираемыми при синтезе матрицами K_0 , K. Обобщенная структурная схема робастного серворегулятора по [6] представлена на рис. 2. Эта структура объединяет идею введения в закон управления
интеграла от ошибки (развивая результаты [40, 104]) и метод внутренней модели в сочетании с наблюдателем для оценивания состояния ОУ и источников
входных сигналов.

Замечание 3. Заметим, что в [6] предполагается, что $y^*(t)$ известно заранее. Это допустимо для систем программного регулирования [19], но не для следящих систем, у которых $y^*(t)$ известно только для моментов времени $s \leq t$. Кроме того, в [6, 40, 107] и ряде следующих работ рассматривается весьма узкий класс функций $y^*(t)$ ("квазимногочлены" [98, 99]), в то время как для сервоприводов $y^*(t)$ может иметь сложный, в том числе случайный харак-

тер. Исходя из принципа суперпозиции можно заметить, что рассмотренные в этих работах регуляторы обеспечивают инвариантность (стремление ошибки регулирования к нулю) только частично, а именно для тех составляющих внешних воздействий, которые описываются принятыми моделями.

Работа [108] посвящена наблюдателю возмущений, названному "оценивающий возмущения фильтр" (англ. — Disturbance Estimating Filter, DEO). В [108] отмечено, что преимуществом наблюдателя возмущений является то, что он компенсирует влияние возмущений в системе обычным регулятором в обратной связи без влияния на качество процессов в системе. Это свойство разделения обеспечивает два независимых этапа синтеза всего регулятора: один этап — обеспечение качества системы, а другой — для подавления помех. Через несколько лет после введения наблюдателя возмущения этот подход привел к концепции регулятора с "двумя степенями свободы" (2-dof), см., например, [109–111]. В [108] показано, что свойства подавления возмущений 2-dof-регулятора для линейных объектов и некоторых методологий проектирования эквивалентны давно известному наблюдателю возмущений Джонсона (Johnson), названному "наблюдателем неизвестных входных возмущений" (англ. — Unknown Input Disturbance Observer, UIDO) [14]. Авторы [108] отмечают, что в силу эквивалентности результатов термины UIDO и DEO относятся только к методикам синтеза, а не к наблюдятелям как таковым. В [108] показана также эквивалентность регуляторов, основанных на наблюдателях возмущений и на обеспечении пассивности. С этой целью показано, как наблюдатель возмущений может быть преобразован к классической структуре систем с обратной связью, откуда следует, что любой метод проектирования регуляторов с обратной связью можно использовать для синтеза наблюдателей возмущений.

Структура наблюдателя возмущений в [108] идентична внутреннему контуру системы управления с компенсацией возмущений работы [103], показанной на рис. 1^3 . В [108, 112] приведена эквивалентная система наблюдателя возмущений, соответствующая введению в контур управления последовательного корректирующего звена и местной обратной связи объекта управления, идентичная представленной уравнениями (3.2) (в [108] сигнал местной обратной связи поступает на вход последовательного корректирующего звена, что приводит к ПФ обратной связи $W_2'(s) = Q(s)P_n(s)^{-1}$, не такой, как в (3.2). Принципиального значения это не имеет). В [108] обсуждается выбор фильтра Q(s), при котором обеспечивается подавление возмущений, которые могут быть представлены решениями однородного уравнения $p^{n_j}d(t) = 0$ (где $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$), т.е. многочленов от t степени $n_j - 1$. Со ссылкой на метод внутренней модели в изложении [43] указано, что тогда ПФ фильтра должна иметь вид

(2.24)
$$Q(s) = \frac{1 + \sum_{m=1}^{n_q - \rho_q} \alpha_m s^m}{1 + \sum_{m=1}^{n_q} \alpha_m s^m},$$

³ Точнее говоря, структура [103] идентична структуре [108] как хронологически более ранней.

где ρ_q — относительная степень Q(s), выбор которой определяется требованием неотрицательности относительной степени $Q(s)P_n^{-1}(s)$. Коэффициенты α_m , $m=1,\ldots,n_q$, должны обеспечивать гурвицевость многочлена $1+\sum_{m=1}^{n_q}\alpha_m s^m$. Кажущаяся разница с [103] при определении Q(s) состоит в том, что в последней работе используется ПИ-регулятор в основном контуре обратной связи, что и обеспечивает астатизм по возмущению. В [108] этого регулятора нет и астатизм достигается выбором Q(s). При таком виде Q(s) выполнено

(2.25)
$$\frac{1}{1 - Q(s)} = \frac{1 + \sum_{m=1}^{n_q} a_m s^m}{s^{n_j} \left(a_{n_j} + \sum_{m=1}^{\rho_q - 1} a_{n_j + m} s^m \right)},$$

где выполнено $n_j=n_q-\rho_q+1$. Как видно из (2.25), для компенсации степенных возмущений, последовательное корректирующее звено в регуляторе должно содержать n_j "чистых" интеграторов, что полностью согласуется с классическим методом обеспечения астатизма системы по отношению к возмущениям [19, гл. 9]. Авторы [108] отмечают, что структура (2.24) была изложена ранее в [109, 110, 113], а в своей работе они предлагают новую (по отношению к (2.24)) структуру, преимуществом которой является возможность ее применения к неминимально-фазовым объектам (см. замечание 4). С этой целью в [108] производится сепарация ПФ объекта управления, т.е. представление ее числителя произведением устойчивого $N_s(s)$ степени n_s и неустойчивого $N_u(s)$ степени $n_u=n-n_s$ многочленов:

(2.26)
$$P_n(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_u(s)N_s(s)}{D(s)}.$$

Тогда Q(s) формируется в виде

(2.27)
$$Q(s) = \frac{1 + \sum_{m=1}^{n_j - 1} \alpha_m s^m + \sum_{m=1}^{n_u} g_m s^{n_j + m - 1}}{1 + \sum_{m=1}^{n_q} \alpha_m s^m}.$$

В этой структуре коэффициенты g_1, \ldots, g_n выбираются так, чтобы числитель Q(s) для некоторых r_0, \ldots, r_{n-1} можно было представить в виде $N_u(s) \cdot (r_{n_j-1}s^{n_j-1}+\cdots+r_1s+r_0)$. Далее в [108] излагается пошаговая процедура синтеза наблюдателя возмущений с фильтром (2.27), продемонстрировано преобразование наблюдателя возмущений к форме системы с обратной связью, показана эквивалентность структур с DEF-наблюдателем и с UIDO-наблюдателем работы [14], обсуждается использование общих моделей возмущений, попадающих под определение "квазимногочленов" (т.е. решений (2.20)), в том числе гармонических процессов. Рассмотрено применение изложенных методов к синтезу систем управления роботами-манипуляторами с n степенями свободы и систем слежения.

3. Оценка возмущений с использованием вспомогательных фильтров в форме передаточных функций

В [103], основываясь на предложенном в [114, 115] подходе, рассматривается система с компенсацией возмущений, структурная схема которой представлена на рис. 1. Скорректированная система замыкается обратной связью по ошибке от задающего воздействия r(t) через регулятор с $\Pi\Phi$ R(s). Заметим, что если шумы измерения отсутствуют, $\zeta\equiv 0$, а $P_n(s)\equiv P(s)$, то при устойчивости замкнутой системы по окончании переходных процессов сигнал управления u(t) содержит слагаемое -Q(s)d, которое частично (в полосе пропускания частот фильтра D(s)) компенсирует возмущение d(t). Выбор D(s) производится таким образом, чтобы обеспечить реализуемость (отсутствие упреждения, т.е. "идеального дифференцирования") у звена с $\Pi\Phi$ $Q(s)P_n(s)^{-1}$, что достигается, если относительная степень (разность между порядками знаменателя и числителя) $\Pi\Phi$ Q(s) превосходит или равна относительной степени $\Pi\Phi$ $P_n(s)$.

Нетрудно получить, что для номинальных значений параметров, при $P_n(s) \equiv P(s)$, выходной сигнал y(t) ОУ определяется через входы выражением

(3.1)
$$y = P(s)u_r + P(s)(1 - Q(s))d + P(s)Q(s)\zeta.$$

С учетом замыкания системы главной обратной связью с регулятором R(s) по окончании переходных процессов выход y(t) выражается через внешние воздействия как

$$y = D(s)^{-1} ((P(s)(1 - Q(s))d + (R(s) + Q(s))\zeta + R(s)r),$$

где

$$D(s) = 1 + R(s)P(s).$$

Отсюда видно, что в области частот ω , для которых $|Q(i\omega)| \ll 1$, происходит подавление шума измерений, а при $|Q(i\omega)| \approx 1$ — подавляется внешнее возмущение. Близкие соотношения (но с дополнительными искажениями) имеют место и при некотором отличии между ПФ P(s) и $P_n(s)$. Изложенный подход, связанный с формированием полосы пропускания системы с подавлением возмущений и шумов в характерных для них областях частот, весьма распространен в инженерной практике (см., например, [19, 100–102]) и вряд ли представляет собой что-то принципиально новое. Очевидно, что рассматриваемую систему можно представить в виде, типичном для традиционных систем автоматического управления с последовательным корректируюим звеном и местной отрицательной обратной связью, охватывающей ОУ [19, 102], представив сигнал управления в виде $u=W_1(s)u_r-W_2(s)v$, где $v=y+\zeta$ — сигнал измерений выхода ОУ. Для рассматриваемой структуры выполнены выражения

(3.2)
$$W_1(s) = \frac{1}{1 - Q(s)}, \qquad W_2(s) = \frac{Q(s)}{(1 - Q(s))P_n(s)}.$$

 $3\,a\,m\,e\,v\,a\,h\,u\,e\,4$. Подход работы [103] можно рассматривать в качестве некоторой регулярной процедуры синтеза корректирующих звеньев систем управления. Надо, однако, учесть, что он непригоден (приводит к неустойчивости) для неминимально-фазовых ОУ (числитель ПФ $P_n(s)$ должен быть гурвицевым многочленом). Действительно, при $P(s) \equiv P_n(s)$ ПФ представленной на рис. 1 замкнутой системы от r к y содержит в качестве общих множителей числитель ПФ объекта $P_n(s)$, что говорит о неполной управляемости данной системы, а если этот множитель не гурвицев, то о ее нестабилизируемости [84–86, 89, 90] (при любом выборе регулятора R(s) замкнутая система будет неустойчивой).

4. Наблюдатели и оценка ограниченных возмущений

Для компенсации ограниченных возмущений в [116] предложен метод вспомогательного контура. Рассмотрим линейный ОУ

(4.1)
$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t),$$

где f(t) — ограниченная функция, операторы Q(p) и R(p) порядков n и m содержат неизвестные коэффициенты. Для получения информации о возмущении вводится вспомогательный контур (параллельная эталонная модель) в виде

$$(4.2) Q_0(p)y_0(t) = R_0(p)u(t),$$

где $Q_0(p)$ и $R_0(p)$ — известные операторы порядков n и m. В силу уравнений (4.1) и (4.2) разность $e(t)=y(t)-y_0(t)$ можно переписать в виде

(4.3)
$$Q_0(p)e(t) = R_0(p)u(t) + \varphi(t),$$

откуда будет определено новое возмущение

$$\varphi(t) = \Delta R(p)u(t) - \Delta Q(p)y(t) + f(t),$$

которое включает в себя параметрическую неопределенность и сигнал f(t). Если производные y(t) измеряемы, то закон управления $u(t)=-\frac{Q_0(s)}{R_0(s)}e(t)$ обеспечит полную компенсацию параметрических и внешних возмущений. Если же производные y(t) не измеряются, то используется закон управления $u(t)=-\frac{Q_0(s)}{R_0(s)}\hat{e}(t)$, где $\hat{e}(t)$ — оценка сигнала e(t), полученная с помощью наблюдателя с большим коэффициентом усиления [117]

(4.4)
$$\dot{\hat{\xi}}(t) = G\hat{\xi}(t) + B(\hat{e}(t) - e(t)), \\ \hat{e}(t) = L\hat{\xi}(t).$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}^{\rho}$, $\rho = \deg Q(s) - \deg R(s)$ — относительная степень ОУ,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\mu}, & \dots, \frac{d_{\rho}}{\mu^{\rho}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

 d_1, \ldots, d_ρ выбираются из условия гурвицевости матрицы $G - [d_1, \ldots, d_\rho]^{\mathrm{T}} L$, $L = [1, 0, \ldots, 0]$. По сути, наблюдатель (4.4) является наблюдателем возмущений, поскольку сигнал $\xi(t)$ содержит информацию о новом возмущении $\varphi(t)$.

В [118] результат [116] обобщен для управления объектами с неизвестными параметрами, возмущениями и неизвестным переменным порядком ОУ. На базе [118] в [76–78] рассмотрена компенсация возмущений в динамических сетях, в том числе и сетях с коммуникационным запаздыванием.

В [72] рассмотрено применение метода [116] для компенсации возмущений в линейных объектах с запаздыванием в канале управления. В [119] предложена компенсация ограниченных возмущений вместе с заданным количеством производных в линейных объектах, которые могут быть неустойчивыми. Показано, что интегральный предиктор [120] на практике не может быть реализован точно, вследствие чего есть возможность компенсации возмущений в неустойчивых объектах только определенного класса.

В [121] предложен новый метод компенсации возмущений, основанный на схеме [116] и применении процедуры многошагового прогнозирования вектора состояния и возмущения (суб-предикторы состояния и возмущения). По-казано, что такая схема позволяет управлять объектом с большей величиной возмущения, чем при использовании численной реализации интегрального предиктора [120]. Итак, рассматривается объект управления

(4.5)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h) + Bf(t),$$

$$t \geqslant 0, \quad u(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — измеряемый вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение с ограниченными r+3 производными, $r \geqslant 0$ — параметр, который будет использоваться при синтезе алгоритма управления, h>0 — известное время запаздывания, A и B — известные матрицы соответствующих размеров, пара (A,B) управляема и выполнено условие $B^+B=I,\ B^+$ — псевдообратная матрица для матрицы B. Схема управления состоит из:

1) субпредиктора вектора состояния

$$\dot{\bar{x}}_{i}(t) = A\bar{x}_{i}(t) + D_{i}\left(\bar{x}_{i+1}(t) - \bar{x}_{i}(t-\bar{h})\right) + Bu_{1}(t-(i-1)\bar{h}),$$

$$i = 1, \dots, M-1,$$

$$\dot{\bar{x}}_{M}(t) = A\bar{x}_{M}(t) + D_{M}\left(x(t) - \bar{x}_{M}(t-\bar{h})\right) + Bu_{1}(t-(M-1)\bar{h}),$$

где $\bar{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{h} = \frac{h}{M}$. Число M задается разработчиком, а матрицы D_i выбираются из условия устойчивости субпредиктора;

2) вспомогательного контура

(4.7)
$$\dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - De_a(t-h) + Bu_2(t-h),$$

где $e_a(t) \in \mathbb{R}^n$;

3) субпредиктора возмущения

$$\tilde{f}(t+\hat{h}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \hat{f}(t-\hat{h}(j-1)),$$

$$\tilde{f}(t+l\hat{h}) = \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \tilde{f}(t-\hat{h}(j-l)) + \sum_{j=l}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \times \hat{f}(t-\hat{h}(j-l)), \ l=2,\ldots,r+1$$
(или $l=2,\ldots,N,$ если $N< r+2),$

$$\tilde{f}(t+k\hat{h}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^{j} \tilde{f}(t-\hat{h}(j-k)), \ k=r+2,\ldots,N$$
(если $N\geqslant r+2);$

4) закона управления

(4.9)
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

$$u_1(t) = -K\bar{x}_1(t),$$

$$u_2(t) = -\tilde{f}(t+h), \quad \hat{\xi}_i(t) = \frac{p}{\mu p + 1}\xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

где матрица K задается из условия гурвицевости матрицы $A-BK,\,\mu>0$ — достаточно малое число.

В [122] решена задача компенсации возмущений в условиях ограничений на сигнал управления. Идея решения состоит в следующем. С одной стороны, выделяется информация о возмущении в виде некоторой доступной измерению функции (или ее оценки с помощью наблюдателя возмущений). Сигнал управления противоположен значению новой функции возмущения. С другой стороны, по условию задачи на сигнал управления наложены ограничения в виде насыщения. Следовательно, для решения задачи на функцию возмущения накладываются соответствующие ограничения.

Совершенно другой подход к компенсации возмущений рассморен в [123]. Здесь параметрические и внешние возмущения выделяются в виде новой функции. Для компенсации возмущений требуется существование правого делителя нуля матрицы управления, с помощью которого реализуется управление, инвариантное к возмущениям. Более общие условия существования инвариантного управления получены в [124] в виде так называемого "универсального регулятора".

В [125] предложены методы каскадного синтеза наблюдателей состояний линейных и нелинейных динамических систем. При синтезе алгоритмов управления исходная динамическая система представляется в блочнонаблюдаемой форме. Затем используются алгоритмы с большим коэффициентом усиления в обратной связи и/или с разрывными управлениями. В отличие от других существующих схем управления здесь предлагается декомпозиция многомерной задачи синтеза корректирующих воздействий наблюдателя на независимые подсистемы меньшей размерности по сравнению с

исходной системой. Решена задача инвариантного управления по отношению к параметрической неопределенности и внешним возмущениям. В [66, 71, 125] также предложены наблюдатели возмущений. Остановимся более подробно на некоторых результатах по компенсации возмущений с использованием наблюдателей возмущений.

В [71, 125] предложен наблюдатель возмущений в нелинейных системах вида

$$\dot{x} = f(x, u) + Q(x)\eta,$$

где $x\in X\subset \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u\in U\subset \mathbb{R}^r$ — вектор управления, $\eta\in H\subset \mathbb{R}^p$ — вектор неконтролируемых внешних возмущений, f(x,u) — вектор-функция, Q(x) — нелинейная матрица соответствующих размеров. Если в системе доступна оценка вектора состояния $\hat{x}(t)\in \mathbb{R}^n$, то возмущение можно оценить в виде

$$Q(x(t))\eta(t) = \left(\dot{\hat{x}}(t) - f(x(t), u(t))\right).$$

В более общем виде в [71, 125] наблюдатель возмущений формируется в виде

$$\hat{\eta}(t) = \tilde{Q}^{-1}(x(t))(\tau(t)),$$

где $\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + v_i, \ i=1,\dots,n, \ \mu_i>0, \ v$ — вектор разрывных корректирующих воздействий, полученный с помощью соотношений

$$\begin{split} \hat{z} &= f(z,u) + v, \\ \dot{\varepsilon} &= f(x,u) - f(z,u) + Q(x)\eta - v, \\ v &= M \mathrm{sign} \varepsilon, \quad M > 0. \end{split}$$

В [66, 125] рассмотрен синтез наблюдателя возмущений для системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

 $\dot{x}_2 = f(x,t) + b(x_1)u,$

где $x \in X \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$ — вектор управления, $b(x_1) \neq 0$ — известная функция, f(x,u) — неизвестная ограниченная функция, которая зависит от внешних возмущений, причем \dot{f} — также ограниченная функция. Для решения задачи используется наблюдатель на скользящих режимах

$$\dot{z}_1 = z_2 + v_1,$$

 $\dot{z}_2 = b(x_1)u + v_2,$

где $\mu_2 \dot{\tau}_2 = -\tau_2 + v_2$, $v_1 = M_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1)$, $v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1)$, μ_2 , M_1 , M_2 , k_1 и k_2 — положительные константы, $\sigma(kx) = 2/(1 + e^{-kx}) - 1$, k > 0.

Достоинства алгоритмов компенсации ограниченных возмущений по сравнению с алгоритмами компенсации гармонических возмущений состоят в возможности рассмотрения более общих возмущений, что расширяет класс рассматриваемых задач, а также независимость структуры алгоритма от источника возмущений.

Работа [21], посвященная в основном идентификации нестацинарных и нелинейных объектов, содержит раздел, относящийся к идентификации входных воздействий. Указано, что в [126] обсуждается история вопроса и приводятся результаты теоретических исследований по восстановлению нестационарных сигналов, проходящих через линейную стационарную систему. Согласно [126] в обшей постановке эта задача сводится к обратной — решению интегрального уравнения Вольтерра. В [126] рассматриваются различные (аппроксимационные, итерационные и алгебраические) методы решения основного интегрального уравнения и проблема борьбы с шумами в канале измерения (некорректностью). Обсуждаются регуляризационные методы решения задачи и вопросы их численной реализации.

Суть этой теории состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления по принципу обратной связи некоторой подходящим образом сконструированной вспомогательной динамической системы — моделью. Такой алгоритм, выходом которого служит, в частности, реализация управления в модели, по своему определению является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени обеспечивает малое возрастание некоторого специальным образом выбранного функционала типа Ляпунова. При этом обратная связь в цитированных выше работах строится на основе известного в теории позиционных дифференциальных игр принципа экстремального сдвига, локально регуляризованного с помощью широко применяемых в теории некорректных задач методов сглаживающего функционала или невязки.

В [127] рассматривается нелинейная система с запаздыванием по состоянию

$$(4.11) \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\nu)) + Bu(t), x(s) = x_0(s), s \in [-\nu, 0],$$

 $t \in [0,T], x(t) \in \mathbb{R}^q; f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \times \mathbb{R}^q; B (q \times n)$ -мерная матрица. $u(t) \in \mathbb{R}^n$ — возмущение (управление) неизвестно, $u(\cdot) \in P(\cdot) = L_{\infty}([0,T];\mathbb{R}^n)$ — принадлежит множеству допустимых возмущений $P(\cdot)$.

Цель: реконструкция $u(\cdot)$ с некоторой точностью μ — построить алгоритм вычисления $v(\cdot)$ такой, что

$$||u(\cdot) - v(\cdot)||_{L_2([0,T];\mathbb{R}^n)} < \mu.$$

Входные данные — результат измерения состояния x(t). Динамический алгоритм реконструкции: а) вычисление $v(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, на основе измерения состояния $x(\tau)$ при $\tau < t$; б) только после вычисления $v(\tau)$ на промежутке $0 \le \tau \le t$ возможно использование новой информации о состоянии x(t) для вычисления $v(\tau)$ при $\tau > t$.

Следуя подходу [26, 128–130], вводится вспомогательная система — "модель":

(4.12)
$$\dot{w}_n(t) = f(\tau_{k,n}, \xi_{k,n}, \xi_{k-r_k,n}) + Bv_n(t), \quad w_n(0) = x_0(0)$$

при почти всех $t \in \delta_{k,n} = [\tau_{k,n}, \tau_{k+1,n})$, где входное воздействие (управление) аппроксимирует $u(\cdot)$, а $\tau_{k-r_k,n}$ — единственная точка наблюдения, принадлежащая интервалу $[\tau_{k,n} - \nu, \tau_{k,n} - \nu + \delta)$. С другими результатами данного направления можно ознакомиться в [131–139].

В статье [140] для некоторых классов систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дается обзор алгоритмов динамического восстановления входов. Предлагаемые алгоритмы, устойчивые к помехам измерений и погрешностям вычислений, основаны на методах теории некорректных задач и на подходящих модификациях известного в теории гарантированного управления метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского. Траектория системы зависит от меняющегося во времени входного воздействия (управления). Заранее как вход, так и траектория не заданы. Однако известно множество, ограничивающее допустимую реализацию входа. Требуется сконструировать алгоритм приближенного восстановления ненаблюдаемой "части" координат, а также входа, обладающий свойствами динамичности (текущие значения приближения соответствующих координат и входа вырабатываются в реальном времени) и устойчивости (приближения сколь угодно точны при достаточной точности наблюдения).

Рассматриваются динамические системы, функционирующие на конечном интервале времени $T=[t_0,\vartheta],\ \vartheta<+\infty,$ заданные системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) + F(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $t \in T, x(t) \in \mathbb{R}^n, x(t_0) = x_0, u(t) \in \mathbb{R}^N, F(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ — заданная функция, суммируемая с квадратом нормы, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ — выход системы, C — матрица размера $r \times n$. Траектория $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n, t \in T$, системы (4.13) зависит от начального состояния x_0 и изменяющегося во времени неизвестного входного воздействия $u(\cdot) \in P(\cdot) \subset L_2(T; \mathbb{R}^n)$, где P — некоторое заданное "множество допустимых управлений".

Измерения y(t) происходят в некоторые дискретные моменты времени $\tau_i = \delta i, \ \tau_m = \vartheta, \ \delta$ — интервал дискретности, полученный равномерным разбиением промежутка T на m подынтервалов, $i = 0, 1, \ldots, m$. Выход измеряется некоторой ошибкой, так что результатом являются неточные измерения $\xi_i \in \mathbb{R}^r$, удовлетворяющие неравенствам $\|\xi_i - y(\tau_i)\| \le h$, где 0 < h < 1 — уровень ошибки измерений. Требуется построить алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса по результатам неточных измерений $y(\cdot)$ восстанавливать как весь фазовый вектор $x(\cdot)$, так и управление $u(\cdot)$, порождающее выход $y(\cdot)$. При $C = \mathbf{I}_n$ задача трансформируется к оценке входа u(t) по неточным измерениям состояния $x(\tau_i)$.

Метод решения задачи базируется на одном из известных принципов позиционного управления — принципе вспомогательных моделей, восходящем к работам Н.Н. Красовского [141, 142]. Согласно этому принципу после разбиения отрезка T на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$ выбирается система M (называеая моделью), движение которой $w(t), t \in T$, описывается некоторым дифференциальным уравнением

(4.14)
$$\dot{w}(t) = \varphi(t, w(t), \xi_i, \hat{u}(t), \hat{v}(t)), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где $i=0,1,\ldots,m-1,\ w(t_0)=w_0,\ \hat{u}(t),\ \hat{v}(t)$ — два входных сигнала (управления). Размерность вектора w(t) априори не оговаривается. Обозначение $w(t)=w(t;w_0,\hat{u}(\cdot),\hat{v}(\cdot))$ используется для решения системы (4.14).

После того как задано уравнение (4.14), алгоритм решения задачи отождествляется с законом формирования управлений в модели по принципу обратной связи. При этом процедуре управления моделью предшествует выбор ее начального состояния w_0 . Законы формирования управлений $\{\hat{u}(\cdot),\hat{v}(\cdot)\}$ в модели, называемые по терминологии, принятой в теории гарантированного управления [141, 142], стратегиями, отождествляются с парами $S = (\Delta, \mathcal{U})$, где $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, \mathcal{U} — функция, ставящая в соответствие позиции $q^{(i)}(\cdot)$ вектор $\mathcal{U}\left(q^{(i)}(\cdot)\right) = \{\hat{u}_i,\hat{v}_i\}$. Позицией, например, может являться тройка $q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i,\xi_i,\hat{w}(\tau_i)\}$ или вектор, содержащий предысторию, как $q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i,\xi_i,\xi_{i-1}\hat{w}(\tau_i)\}$, и т.д.

4.2. Наблюдатели входных и выходных возмущений

В отличие от вышеприведенных результатов, в настоящем разделе будет рассмотрена задача оценки и компенсации возмущений при наличии помех измерения (выходного возмущения). Рассмотрим объект управления

(4.15)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t), z(t) = x(t) + \xi(t).$$

Здесь все обозначения несут тот же смысл, что и раньше, $x \in \mathbb{R}^n$, f(t) — ограниченное возмущение, $\xi(t)$ — ограниченная помеха измерения (выходное возмущение).

В [143] на базе метода вспомогательного контура [116] предложен метод компенсации входных и выходных возмущений, когда хотя бы одно уравнение (4.15) содержит нулевую компоненту вектора выходного возмущения. В [119] предложено обобщение результата [143] на случай, когда вектор $\xi(t)$ может не содержать нулевых компонент. Синтез алгоритма осуществляется по следующей схеме: 1) выделяется произвольная j-я строка во втором уравнении (4.15) и синтезируется алгоритм оценки помехи измерения без j-й компоненты; 2) выделяется информация о возмущении f из первого уравнения (4.15) с учетом восстановленной информации о помехе измерения. Такая схема позволяет свести к нулю ошибку регулирования в установившемся режиме, зависящей от максимального значения f и j-й компоненты ξ .

Алгоритм [119] представлен следующими уравнениями:

— алгоритм оценки вектора выходных возмущения без i-й компоненты $(\tilde{\xi}=[\xi_1,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_n]^{\mathrm{T}})$

(4.16)
$$\hat{\xi} = \int_{0}^{t} \left(\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_{1}z(s) \right) ds + \tilde{z},$$

где $\hat{\xi}$ — вектор оценки сигнала $\tilde{\xi}$, $\tilde{z}=\tilde{I}z$, $\tilde{A}=\tilde{I}A\tilde{I}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{A}_1=\tilde{I}A$, \tilde{I} — матрица размера $(n-1)\times n$, полученная из единичной матрицы порядка n путем вычеркивания i-й строки;

алгоритм оценки вектора состояния

$$(4.17) \hat{x} = z - \tilde{I}^{\mathrm{T}} \hat{\xi};$$

— алгоритм компенсации входных возмущений

(4.18)
$$u = -\frac{1}{\mu} \left(E_i^{\mathrm{T}} B \right)^{-1} \left(\hat{x}_i - E_i^{\mathrm{T}} A \int_0^t \hat{x}(s) ds \right).$$

Как отмечалось ранее, качество работы алгоритма (4.16)–(4.18) зависит от величины ξ_i и f. Если $\xi_i = 0$, то уменьшением значения μ можно сколь угодно уменьшить величину $\lim_{t\to\infty} \sup |x(t)|$, которая будет зависеть только от $\sup |f(t)|$.

4.3. Робастное обращение систем

Во многих работах, см., например, [26, 115, 127–139, 144–152], задача оценивания неизвестного внешнего воздействия (в том числе возмущения) по результатам измерения выхода трактуется как задача обращения (инверсии) динамической системы, в качестве которой выступает объект управления. Налагается естественное для задач управления требование получения оценки в реальном времени, т.е. в темпе с управляемым процессом. В качестве дополнительных условий также выступают обеспечение наименьшего порядка уравнений динамики инвертора, робастности системы оценивания по отношению к параметрам модели объекта и снижение влияния погрешностей измерения выхода [146–149, 153].

Ранние работы, см., например, [144], приводят к алгоритмам инверсии, которые непригодны для решения задач реального времени, а подход [115] связан с построением нереализуемой инверсной системы (с порядком числителя ПФ большим порядка знаменателя). В последующих работах эти недостатки устранены, а метод инверсии был развит и распространен на дискретные, нелинейные и нестационарные системы, системы с запаздыванием и пространственно-распределенные системы [24, 33, 35, 127, 131, 134, 135].

Для иллюстрации, следуя [150, гл. 1], рассмотрим применение этого подхода для обращения линейных стационарных скалярных (SISO) систем.

Рассматривается линейная динамическая система вида 4

(4.19)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bd(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ — измеряемый выход, $d(t) \in \mathbb{R}^1$ — неизвестное неизмеряемое входное воздействие (возмущение), A, B, C — матрицы соответствующих размеров с постоянными вещественными коэффициентами. Пара (A,B) считается полностью управляемой, а пара (A,C) — полностью наблюдаемой. Необходимо по известному выходу y(t) построить (в темпе с процессом) оценку неизвестного входного сигнала d(t). Известные

⁴ Использованы обозначения, принятые в данном обзоре.

внешние воздействия (например, управляющее) в модель (4.19) не входят, так как их оценивать не требуется, и в силу свойства суперпозиции линейных систем реакции на эти воздействия и d(t) можно рассматривать независимо.

В силу управляемости системы (4.19) можно считать, что матрицы A, B, C записаны в следующей канонической форме управляемости [84, 85]:

$$(4.20) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Передаточная функция системы (4.19) от входа d к выходу y имеет вид

(4.21)
$$W(s) = C(sI - A)^{-1} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad s \in \mathbb{C},$$

с многочленами A(s), B(s) вида

(4.22)
$$A(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1, \quad B(s) = c_n s^{n-1} + \dots + c_1.$$

Рассмотрим сначала *строго-минимально-фазовую* систему (4.19), т.е. такую, у которой многочлен B(s) – гурвицев (устойчивый) многочлен с положительными коэффициентами. (При $c_n \neq 0$ говорят, что система (4.19) имеет относительный порядок $r = \deg A(s) - \deg B(s) = 1$.)

Для решения поставленной задачи оценивания возмущения d(t) вводится (согласно терминологии работ [146, 148, 153]) следующая управляемая модель:

(4.23)
$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bv(t), \quad \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t),$$

где $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния модели, $v(t) \in \mathbb{R}^1$ — подлежащее выбору управляющее воздействие. Введя отклонение $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ и вычитая (4.19) из (4.23), получим уравнение в отклонениях

$$(4.24) e(t) = Ae(t) + B(v(t) - d(t)), \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{y}(t) - y(t) \equiv C\tilde{e}(t).$$

Для нахождения сигнала v(t), стабилизирующего систему (4.24), используются стандартные методы теории управления. Рассмотрим это подробнее.

Выполним в (4.24) невырожденное преобразование координат $\bar{e} = Pe$, $\det P \neq 0$, чтобы получить новый вектор состояния $\bar{e} = \operatorname{col} \{e', \varepsilon\}$, где компоненты вектора $e' \in \mathbb{R}^{n-1}$ совпадают с соответствующими компонентами исходного вектора $e, e'_i = e_i, i = 1, \ldots, n-1$. Учитывая уравнение выхода $\varepsilon = Ce$, получим, что матрица преобразования P должна иметь вид

(4.25)
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix}.$$

Так как $CB \neq 0$, то нормировкой можно привести уравнения системы к виду, в котором CB = 1. В результате система (4.24) приводится к форме

(4.26)
$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}'(t) = A_1 \bar{e}'(t) + B_1 \varepsilon(t), \\ \dot{\varepsilon}(t) = A_2 \bar{e}'(t) + B_2 \varepsilon(t) + (v(t) - d(t)) \end{cases}$$

с соответствующими матрицами $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, A_2 \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}, B^{(n-1)\times 1}$ и скаляром B_2 (подробные выражения приведены в [150]).

Далее в [150] рассматриваются два способа стабилизации системы (4.26): линейное управление с "глубокой обратной связью" с большим коэффициентом $v \equiv v_{\mu} = -\mu \varepsilon$; и с наблюдателем состояния и разрывной обратной связью $v = -A_2 \bar{e}' - (B_2 + \alpha) \varepsilon + F \mathrm{sign} \varepsilon$ с некоторыми выбираемыми разработчиком константами $\alpha, F > 0$. В случае разрывного управления, начиная с некоторого момента времени t^* , в системе возникает скользящий режим на плоскости $\varepsilon = Ce = 0$.

При использовании линейного управления в качестве оценки $\tilde{d}(t)$ процесса d(t) берется сигнал управления $v_{\mu}(t)$ в предположении, что μ достаточно велико: $\tilde{d}(t) = v_{\infty}(t) \equiv \lim_{\mu \to \infty} u_{\mu}(t)$. При разрывном управлении аналогичная оценка выполняется на основе метода эквивалентного управления [154, 155] фильтрацией разрывного процесса v(t) по методу скользящего среднего, т.е. $\tilde{d}(t) = 1/T \int_{t-T}^{t} v(\tau) \, \mathrm{d}\tau$.

Заметим, что преобразование координат для приведения уравнений состояния к виду (4.26) и последующий синтез наблюдателя со скользящим режимом аналогичны приведенным в [155, гл. 13], см также [64].

Обратимся теперь к инвертированию систем с максимальным относительным порядком, полагая r=n в (4.21) [150]. Тогда многочлен B(s) в (4.22) будет константой, $B(s)=c_n$. Для решения задачи обращения используется следующая вспомогательная система

(4.27)
$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Lv(t), \quad \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t),$$

где $L \in \mathbb{R}^n$ — подлежащий выбору вектор параметров. Уравнение относительно отклонения $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ имеет вид

(4.28)
$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Lv(t) - Bd(t), \quad \varepsilon(t) = Ce(t).$$

Выбором $v(t) = -\varepsilon(t)$ получаем замкнутую систему

$$\dot{e}(t) = A_L e(t) - B d(t), \quad \varepsilon(t) = C e(t),$$

где $A_L = A - LC$. В силу наблюдаемости пары (A,C) подходящим выбором L можно получить любой заданный спектр матрицы A_L . В [150] предлагается следующая процедура: вводятся вещественные значения $\bar{\lambda}_i,\ i=1,\ldots,n,$ такие что $\bar{\lambda}_1 = -1,\ \bar{\lambda}_{i+1} < \lambda_i$. Затем находятся желаемые собственные числа λ_i матрицы A_L как $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i,$ где $\mu > 0$ — выбираемый при синтезе параметр (по смыслу он должен быть взят достаточно большим). Стандартными процедурами синтеза наблюдателя находится вектор L, обеспечивающий требуемый спектр $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ матрицы A_L .

Искомая оценка входного процесса получается по формуле

(4.30)
$$\tilde{d}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{CA_L^{-1}B}.$$

Далее в [148] рассматривается инвертирование системы с произвольным относительным порядком $1\leqslant r\leqslant n$. Для такой системы выполнены условия $c_{m+2}=c_{m+3}=\cdots=c_n=0,\ c_{m+1}=CA^{r-1}B\neq 0.$ По-прежнему считается, что система (4.24) — минимально-фазовая (числитель B(s) ее $\Pi\Phi$ (4.21) — гурвицев многочлен). Как и выше, здесь используется невырожденная замена переменных состояния уравнения ошибки (4.24), при которой первые m переменных состояния в новом базисе (считается что исходная система (4.24) уже приведена к канонической форме управляемости) совпадают с исходными, а остальные n-m переменные пересчитываются с коэффициентами c_1,\ldots,c_m . Уравнения полученной в результате преобразования первой подсистемы копируются в алгоритм оценивания, а для второй подсистемы строится наблюдатель состояния порядка n-m. Затем по сигналу обратной связи наблюдателя пересчитывается оценка входного сигнала $\tilde{d}(t)$ (подробное изложение можно найти в [148]).

Для неминимально-фазовых систем, у которых многочлен B(s) не гурвицев, данный метод непосредственно неприменим в силу неустойчивости нуль-динамики уравнения ошибки оценивания. Эта задача также исследуется в [148]. Выполняется сепарация системы на подсистемы с устойчивой и неустойчивой нуль-динамикой. Для первой из них задача обращения решается описанным выше методом. Для оценки неизвестного сигнала d(t) выполняется вычисление интеграла свертки на некотором временном интервале $\Delta>0$, соответствующим выбором которого при заданном μ и заданной скорости изменения d(t) можно обеспечить требуемую точность оценивания. Как отмечено авторами [148], "Главным недостатком предложенной схемы обращения является тот факт, что для восстановления сигнала d в момент времени t необходимо знать значение $\tilde{y}(t)$ (а значит, и y(t)) на промежутке $[t,t+\Delta]$, причем для увеличения точности оценки необходимо увеличивать промежуток наблюдения Δ , т.е. оценивание происходит с запаздыванием по времени на величину Δ ."

В [148] описывается также ситуация, когда имеется дополнительная информация о процессе d(t) — например, если известна (по терминологии авторов) его волновая модель, для которой d(t) описывается однородным дифференциальным уравнением с известными параметрами и неизвестными начальными условиями. Это предположение позволяет свести задачу обращения системы к задаче восстановления вектора состояния расширенной системы, что, в частности, дает возможность избежать неустойчивости процесса оценивания для неминимально-фазовых объектов. Такой подход достаточно стандартен для публикаций по оцениванию возмущений и достаточно подробно представлен в разделе 2 настоящего обзора.

Проиллюстрируем подход работы [148] для приведенного в разделе 2 примера из [103]. Объект задан передаточной функцией $P(s) = \frac{k_0}{(Ts+1)s}$. На его вход поступает неизвестное возмущение d(t), а измерения выхода y(t) содер-

жат аддитивную погрешность (шум) $\zeta(t)$. Матрицы (4.20) уравнений состояния системы в канонической форме (см. (2.8)) имеют вид

$$(4.31) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} k_0 T^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Введем вектор-столбец $L=\begin{bmatrix}l_1&l_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ с подлежащими выбору при синтезе элементами l_1,l_2 . Характеристический многочлен D(s) матрицы $A_L=A-LC$ имеет вид

$$D(s) = \det(sI - A) = s^{2} + (1 + k_{0}l_{1})T^{-1}s + (k_{0}l_{1} + Tk_{0}l_{2})T^{-2}.$$

Согласно методике [148] зададим значения $\bar{\lambda}_1 = -1$, $\bar{\lambda}_2 = -2$ и запишем желаемые собственные числа матрицы A_L в виде $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i$, i=1,2, где $\mu>0$ — выбранное (большое) значение. Получим желаемый характеристический многочлен D(s) в виде

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + 3\mu s + 2\mu^2.$$

Приравнивая выражения для коэффициентов желаемого и располагаемого многочленов, получим

$$l_1 = (3T\mu - 1)k_0^{-1}, \quad l_2 = (2T^2\mu^2 - 3T\mu + 1) \cdot (Tk_0)^{-1}.$$

Для исследования точности оценивания выпишем уравнение для ошибки $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$, принимая также во внимание действие погрешностей измерения $\zeta(t)$. Для этого будем считать, что на вход системы оценивания поступает сигнал $y(t) = Cx(t) + \zeta(t)$. Уравнение (4.29) в отклонениях относительно e(t) тогда принимает вид

(4.32)
$$\dot{e}(t) = A_L e(t) - B d(t) + L \zeta(t), \quad \varepsilon(t) = C e(t) - \zeta(t).$$

Формула (4.30) с учетом погрешности измерений $\zeta(t)$ приводит к следующему выражению

(4.33)
$$\tilde{d}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{CA_L^{-1}B} = -2T\mu^2 k_0^{-1} \varepsilon(t) = -2T\mu^2 k_0^{-1} \left(Ce(t) - \zeta(t)\right).$$

Исходя из выражений (4.32), (4.33) получаются следующие формулы для передаточных функций к ошибке оценивания $\Delta d(t) = d(t) - \tilde{d}(t)$ от входных сигналов d(t) и $\zeta(t)$:

(4.34)
$$W_d(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{d} \right\} = \frac{s(s+3\mu)}{s^2 + 3\mu s + 2\mu^2},$$

(4.35)
$$W_{\zeta}(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{\zeta} \right\} = -\frac{2\mu^2 s (Ts+1)}{k_0 (s^2 + 3\mu s + 2\mu^2)}.$$

Как видно из (4.34), (4.35), частотные характеристики системы по ошибке от возмущения и шума измерений имеют сходную асимптотику: нулевой коэффициент передачи для постоянного сигнала и пропускание сигналов верхних частот.

Обратимся теперь к использованию описанного в разделе 2 подхода, основанного на представлении процесса d(t) как неизвестного постоянного сигнала и включении его модели $\dot{d}(t)=0$ в уравнения состояния системы, с последующим использованием наблюдающего устройства для оценивания. Следуя этому подходу, введем расширенную систему вида (2.6) и сформируем матрицы (2.7) ее уравнений состояния как

(4.36)
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -T^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} k_0 T^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Введем вектор конструктивных параметров наблюдателя $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^T$, которые вычислим, исходя из заданного расположения корней характеристического многочлена $\bar{D}(s) = \det(s\mathbf{I} - \bar{A}_L), \ \bar{A}_L = \bar{A} - L\bar{C}$. Получим $\bar{D}(s) = s^3 + (1 + k_0 l_1) T^{-1} s^2 + k_0 (l_1 + T l_2) T^{-2} s + k_0 l_3 T^{-1}$. Для удобства сравнения, как и выше, зададимся вещественными корнями характеристического многочлена в форме $\bar{\lambda}_1 = -1, \ \bar{\lambda}_2 = -2, \ \bar{\lambda}_3 = -3$ и запишем желаемые корни многочлена $\bar{D}(s)$ в виде $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i, \ i = 1, 2, 3$, для выбранного $\mu > 0$. Отсюда получаем следующий вектор L:

(4.37)
$$L = k_0^{-1} \begin{bmatrix} 6T\mu - 1 \\ (11T^2\mu^2 - 6T\mu + 1)T^{-1} \\ 6T\mu^3 \end{bmatrix}.$$

Передаточные функции по ошибке оценивания от входного сигнала и погрешностей измерения получаются для этой системы в виде:

(4.38)
$$\bar{W}_d(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{d} \right\} = \frac{s(s^2 + 6\mu s + 11\mu^2)}{s^3 + 6\mu s^2 + 11\mu^2 s + 6\mu^3},$$

(4.39)
$$W_{\zeta}(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{\zeta} \right\} = \frac{6\mu^3 s (Ts+1)s}{s^3 + 6\mu s^2 + 11\mu^2 s + 6\mu^3}.$$

Из сравнения $\Pi\Phi$ (4.35) и (4.39) видно, что за счет повышения порядка наблюдатель для расширенной системы позволяет отфильтровать высокочастотные погрешности измерений.

5. Метод внутренней модели. Наблюдатели гармонических возмущений

В [17, 41–44] систематически излагается принцип внутренней модели (англ. — Internal Model Principle) в теории автоматического управления. Согласно этому принципу для устранения ошибок, вызванных внешними воздействиями (задающими, возмущающими), в систему должна быть введена

"внутренняя модель" — автономная система, которая порождает эти сигналы. Например, с этой точки зрения, интегрирование сигнала рассогласования в регуляторе, обеспечивающее астатизм системы, есть воплощение такой модели, поскольку постоянное воздействие можно представить выходом интегрирующего звена (при нулевом входе) [44, §8.2]. Введение внутренней модели дает возможность представить замкнутую систему однородными уравнениями, и тогда решение задачи асимптотической стабилизации такой автономной системы влечет стремление к нулю ошибок регулирования по задающему и возмущающему воздействиям. Более того, это свойство робастно по отношению к параметрическим возмущениям в силу непрерывной зависимости корней многочлена от параметров, см. также [6].

В [41–43] рассматриваются подверженные возмущениям объекты, для управления которыми вводится компенсатор, обрабатывающий результаты измерений, задающее (опорное) воздействие r(t), и, возможно, некоторые возмущения. Компенсатор служит для обеспечения устойчивости замкнутого контура, а также управления переменной z(t), которая представляет собой функцию от выхода ОУ y(t) и r(t). Обычно в качестве z(t) выступает ошибка слежения e(t) = e(t) - y(t). Замкнутая система с этими двумя свойствами ("синтез" по [43]) называется структурно устойчивой, если эти два свойства сохраняются при некоторых возмущениях параметров системы.

Рассматриваются ИПВ системы, заданные следующими обобщенными уравнениями

(5.1)
$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + A_3 x_2(t) + B_1 u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t),$$

$$(5.3) z(t) = D_1 x_1(t) + D_2 x_2(t),$$

$$(5.4) y_1(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t),$$

(5.5)
$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t),$$

(5.6)
$$u(t) = F_c x_c(t) + F y(t).$$

Здесь введены

— векторы состояния: x_1 — объекта, x_2 — модели источника возмущений и задающего воздействия (тем самым характер этих сигналов задан, и они подчиняются однородному линейному дифференциальному уравнению (5.2), см. также (2.5)), x_c — вектор состояния динамического компенсатора (5.5), (5.6); — переменные: z — выходная переменная, относительно которой формулируется цель управления (далее — "управляемая переменная"), y — выходная переменная, измеряемая датчиками, u — управление, вырабатываемое компенсатором (5.5), (5.6). Считается, что переменные x, y, z принадлежат конечномерным вещественным линейным пространствам \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} (в порядке перечисления).

Вводится совокупный вектор состояния $x_L = \operatorname{col}(x_1, x_c)$, относительно которого из (5.1)–(5.6) следуют уравнения замкнутой системы

(5.7)
$$\dot{x}_L(t) = A_L x_L(t) + B_L x_2(t), \quad z_l(t) = D_L x_L(t) + D_2 x_2(t),$$

$$A_L = \begin{bmatrix} A_1 + B_1FC_1 & B_1F_c \\ B_cC_1 & A_c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_3 + B_1FC_2 \\ B_cC_2 \end{bmatrix}, \quad D_L = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Назначение компенсатора, таким образом, заключается в обеспечении гурвицевости матрицы A_L , а регулирование выхода — в выполнении требования $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$. Для определения регулятора, обеспечивающего указанную структурную устойчивость, вводятся понятия читабельности (англ. — readability) и внутренней модели.

Определение 1 [43]. Считается, что z читабельно (readable) из y, если имеется отображение $Q: \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ такое, что z = Qy. Это значит, что $D_1 = QC_1$, $D_2 = QC_2$.

Определение 2 [43]. Считается, что отображение $A: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ включает в себя внутреннюю модель A_2 , если минимальный многочлен матрицы A_2 есть делитель не менее d(Z) инвариантных сомножителей матрицы A.

Таким образом, внутренняя модель представляет собой l-кратную редупликацию в A максимальной циклической компоненты A_2 , где $l \geqslant d(Z) =$ числу независимых выходов, которые подлежат управлению.

В [41, 43] сформулирована следующая теорема о необходимости читабельности для структурной устойчивости.

 $Teopema\ 1\ [41,\ 43,\ {
m теоpema}\ 1].$ Необходимым условием структурной устойчивости синтеза при $(A_3,B_c|\mathscr{Z})$ является читабельность z по y.

Для получения основного результата о необходимости внутренней модели в [41, 43] делается следующее предположение.

Предположение 1. Имеет место соотношение

(5.8)
$$\operatorname{Im} B_{cw} \subset \langle A_c | B_{cw} E_1 \operatorname{Ker} D_1 \rangle.$$

Предположение 1 говорит о том, что информация, отправленная от w и обработанная компенсатором, относится только к объекту управления и недоступна из z. В [41] показана необходимось выполнения (5.8) для структурной устойчивости. На основе этого сформулирована следующая теорема.

 $Teopema\ 2\ [41,\ 43,\ Teopema\ 2].\ Пусть\ z\ читабельно\ из\ y\ u\ выполне$ $но\ (5.8).\ Тогда\ синтез\ структурно\ устойчив\ в\ A_3,\ только\ если\ компенсатор\ включает\ внутреннюю\ модель\ A_2,\ которая\ управляема\ no\ z\ u\ наблюдаема\ no\ u.$

В заключение авторы [43] справедливо отмечают: "Задача регулирования, которую мы рассмотрели, несколько идеализирована: например, мы потребовали точного асимптотического подавления возмущений. На практике эта задача ставится в нечетких терминах; таким образом, может потребоваться ослабление возмущений только в определенной степени". Далее авторы указывают, что использованная в работе идеализация позволила дать точную постановку задачи, в результате чего получен рациональный базис и

качественное понимание для практического синтеза многосвязных регуляторов. Заметим, что реальные задачи проектирования отличаются не столько ослабленными и нечеткими требованиями к характеристикам разработанной системы, сколько наличием ряда спецификаций, которые естественнее представить в виде системы ограничений, а не одного критерия.

Компенсация внешних возмущений в дискретных по времени системах на базе метода внутренней модели и принципа поглощения рассмотрена в [46, 50]. Рассматриваются объекты, в которых частотные характеристики известны не полностью, а внешнее возмущение описывается линейным разностным уравнением. Предложена структура управления в форме обратной связи, гарантирующего робастную устойчивость и устраняющего влияние внешних возмущений за минимальное число шагов. Результат [46, 50] обобщен в [156] для непрерывных по времени объектов. Предложены полиномиальные соотношения многочленов объекта и алгоритма управления, выполнение которых обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы.

В [96] предложены наблюдатели возмущений для стабилизации линейных ОУ в окрестности точки равновесия. Модель ОУ задана уравнениями

(5.9)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

с известными матрицами A, B и D. По сравнению с (5.68), здесь динамика возмущений описывается внутренней моделью вида

(5.10)
$$\dot{w}(t) = Rw(t) + lf(t), \quad f(t) = Nw(t),$$

где $w \in \mathbb{R}^q$. Показано [96], что модель возмущения f(t) может быть переписана в виде

(5.11)
$$f(t) = N^{T} \hat{\zeta}(t) + \varepsilon_{f}(t),$$
$$\hat{\zeta}(t) = \eta(t) + Tx(t),$$
$$\dot{\eta}(t) = R\eta(t) + (RT - TA)x(t) - TBu(t).$$

Здесь $\varepsilon_f(t)$ — экспоненциально затухающая функция, матрица T удовлетворяет равенству TD=l. Если же параметры ОУ неизвестны, то наблюдатель возмущений описывается следующими уравнениями [56]:

$$\dot{\eta}_0(t) = \eta_0 + (RT - TA_0)x(t),
\dot{\eta}_i(t) = R\eta_i(t) + Ta_0x_i(t), \quad 1 \le i \le n,
\dot{\eta}_u(t) = R\eta_u(t) - Tb_0u(t).$$

Здесь матрицы A_0 , a_0 и b_0 полагаются известными и находятся из условий структурных согласований: $A=A_0+a_0\tau^{\rm T}$ и $b=\beta b_0$, τ и β — неизвестные вектор и число.

В отличие от [96] в статье [48] решена задача слежения за эталонным сигналом линейным ОУ с неизвестными постоянными параметрами при измерении только его выхода. Модель неизвестного эталонного сигнала описывается

внутренней моделью с неизвестными параметрами. Разработан адаптивный наблюдатель для оценок производных по времени эталонного сигнала и получена адаптивная система управления с неявной эталонной моделью.

В работах [48, 96] рассмотрено управление линейными и нелинейными объектами. В отличие от [48, 96] в [49] предложена компенсация возмущений в нелинейных SISO системах с неизвестными постоянными параметрами и неизвестным входным возмущением. Доступны измерению только скалярные входные и выходные сигналы ОУ. Модель ОУ задана в следующей форме metric-strict-feedback

$$\dot{x}_j = x_{j+1} + \theta^{\mathrm{T}} \varphi(x_1, \dots, x_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n - 1,$$
$$\dot{x}_n = \beta(x) + \theta^{\mathrm{T}} \varphi_n(x) + \gamma(x)(u + f),$$
$$y = x_1.$$

Закон управления u задается в виде $u=u_y+u_f$, где сигнал u_y необходим для управления объектом с целью слежения за эталонным сигналом y_m , сигнал u_f необходим для компенсации возмущений. Возмущение f описывается внутренней моделью вида (5.68). Вначале строится наблюдатель возмущений, подобный наблюдателю (5.11). Затем с использованием процедуры бэкстеппинга синтезируется первая компонента закона управления u_y . Из-за громоздкости структуры алгоритма для u_y он в обзоре не приводится. Результаты [48, 49, 96] более подробно описаны в монографии [157].

В результате основное достоинство описанных выше алгоритмов состоит в улучшении качества регулирования, по крайней мере в установившемся режиме, за счет предположения о том, что возмущение описывается суммой синусоидальных сигналов. Однако данные алгоритмы зачастую сложны в расчете и реализации при увеличении числа синусоид. Поэтому в описанных выше источниках численные примеры работы алгоритмов в основном тестируются на сумме двух или трех синусоид. Кроме того, качество регулирования таких алгоритмов существенно зависит от величины несинусоидальной составляющей. Если данная составляющая принимает большие значения, то рекомендуется использовать алгоритмы подавления или компенсации ограниченных возмущений, которые будут приведены далее.

5.1. Нелинейные наблюдатели гармонических возмущений

В [70] рассматривается задача стабилизации подверженной гармоническим возмущениям нелинейной системы на основе наблюдателя возмущений.

Модель ОУ со скалярными входом и выходом описывается нелинейными аффинными по управлению и возмущению уравнениями

(5.13)
$$\dot{x}(t) = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(t), \quad y = h(x),$$

где $x=x(t)\in\mathbb{R}^n$ — вектор состояния ОУ; $y(t),\ u(t),\ g(t)$ — выход, управление и неизмеряемое возмущение (соответственно) — скалярные переменные. Внешние гармонические возмущения d(t) с известной частотой ω_0 моделируются гармоническим осциллятором

(5.14)
$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t), \quad d(t) = C\xi(t)$$

с состоянием $\xi(t) \in \mathbb{R}^2$, неопределенными начальными условиями $x_s(0)$ и матрицами

(5.15)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предложен следующий нелинейный наблюдатель возмущения d(t)

(5.16)
$$\begin{cases} \dot{z} = (A - L(x)g_2(x)C)z + Ap(x) - L(x)f(x) - L(x)g_1(x)u - L(x)g_2(x)Cp(x), \\ \dot{\xi} = z + p(x), \\ \hat{d} = C\xi, \end{cases}$$

где ξ — вектор состояния наблюдателя возмущений, \hat{d} — оценка возмущений; $p(x) \in \mathbb{R}^2, L(x) \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ — подлежащие определению при синтезе вспомогательная функция и матричный коэффициент усиления наблюдателя, связанные соотношением

(5.17)
$$L(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x}.$$

Для асимптотического затухания ошибки оценивания $e(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ требуется существование L(x), обеспечивающей асимптотическую устойчивость с желаемой скоростью затухания ошибки $\dot{e}(t) = (A - L(x)g_2(x)C)e(t)$ для всех x, принадлежащих рабочей области. Если g_2 не зависит от x, то задача решается выбором L(x) = Lx. В общем случае можно задаться одной из функций p(x) или L(x) и найти другую из (5.17).

В [70] разработана следующая регулярная процедура синтеза, использующая предположение, что *относительный порядок* ρ [47, 158] объекта (5.13) вполне определен во всей рабочей области. Для синтеза устойчивого наблюдателя используется концепция naccuehocmu [64, 159, 160]. Коэффициент усиления ищется в виде

(5.18)
$$L(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \frac{\partial L_f^{\rho-1} h(x)}{\partial x},$$

где k_1, k_2 — постоянные, подлежащие определению при синтезе. Тогда из (5.17) следует, что

$$(5.19) p(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} L_f^{\rho-1} h(x).$$

Вводится в рассмотрение функция

(5.20)
$$n(x) = \frac{\partial L_f^{\rho-1} h(x)}{\partial x} g_2(x),$$

так что $L(x)g_2(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} n(x)$. В предположении, что n(x) > 0 во всей рабочей области, вводится величина $n_0 > 0$, такая что $0 < n_0 < n(x)$. Доказано, что

области, вводится величина $n_0 > 0$, такая что $0 < n_0 < n(x)$. Доказано, что если имеются постоянные k_1 и k_2 , такие что передаточная функция

(5.21)
$$H(s) = \frac{k_1 s + k_2 \omega_0}{s^2 + k_1 n_0 s + \omega_0 (\omega_0 + k_2 n_0)}$$

асимптотически устойчива и *положительно вещественна* (см. [64, 159, 160]), то при сделанном предположении об относительном порядке выход $\hat{d}(t)$ нелинейного наблюдателя (5.16) асимптотически отслеживает гармоническое возмущение d(t), действующее на ОУ (5.13).

В [70] обсуждается вопрос использования наблюдателя (5.16) совместно с регулятором, который стабилизирует нелинейную систему без возмущений, для стабилизации подверженного гармоническим возмущениям ОУ. На первом этапе синтеза разрабатывается закон управления для объекта, не подверженного влиянию возмущений, после чего в замкнутую систему добавляется наблюдатель возмущений (5.16). Исследована задача управления нелинейными системами в условиях гармонических помех неизвестной частоты. Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3 [70, теорема 3]. Рассмотрим нелинейную систему (5.13), подверженную влиянию гармонических возмущений (5.14). Замкнутая система, включающая традиционный (линейный или нелинейный) регулятор, нелинейный наблюдатель (5.16) и ОУ (5.13), является \mathcal{L}_2 -устойчивой если: — нелинейный коэффициент усиления L(x) и дополнительная переменная p(x) выбраны согласно (5.18), (5.19), и выполнены условия [70, теорема 2]:

— коэффициенты
$$k_1$$
, k_2 удовлетворяют неравенствам $k_2 > 0$, $k_1 > \sqrt{\frac{k_2 \omega_0}{n_0}}$.

В [161] рассматривается класс систем, модели которых имеют "номинальную" линейную часть и неопределенную, нелинейную и, возможно, изменяющуюся во времени часть в виде аддитивного воздействия, зависящего от состояния и времени, а именно:

(5.22)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t, x), \quad y(t) = C(t)x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ — измеряемый в каждый момент времени t вектор выхода, A, B, C — известные матрицы соответствующих размеров. Неизвестная непрерывная функция $f(t,x) \in \mathbb{R}^m$ моделирует имеющиеся в системе неопределенность и нестационарность. Рассматривается задача построения наблюдателя состояния x и неизмеряемого "входного воздействия" f.

Сделаны следующие предположения.

Предположение 2.

- 1) $\operatorname{rank} CB = \operatorname{rank} B$;
- 2) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, такого что $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$, выполнено

(5.23)
$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + \operatorname{rank} B.$$

Как отмечено в [161], нарушение предположения 2.2 для некоторого λ может повлечь неотличимость по измерениям выхода процессов $x(t) \equiv 0$ и $f(t,x) \equiv 0$, с одной стороны, от процессов $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} x_0$, $f(t,x) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ при некоторых $x_0 \neq 0$ и $v \neq 0$ — с другой, поэтому оно является естественным с точки зрения принципиальной возможности решения поставленной задачи оценивания. При выполнении предположений о том, что rank B=m, rank C=p, сделанных в [162] для аналогичной задачи, выполняются и предположения 1, 2.

В [161, лемма 3] устанавливается следующее условие, эквивалентное выполнению предположений 1, 2:

S с л о в и е 1. Имеются $(n \times p)$ -матрица L, $(m \times p)$ -матрица G и $(n \times n)$ -матрица P, $P = P^{T} > 0$, такие что:

(5.24)
$$P(A + LC) + (A + LC)^{\mathrm{T}}P < 0,$$

$$(5.25) BTP = GC.$$

Замечание 5. Указанное условие встречается в работах по адаптивному управлению под названием гиперминимально-фазовости по отношению к выходу $\sigma = Gy$ [163–166].

Для нахождения матриц P, L, G, в [161] предлагается процедура, основанная на решении ЛМН [167–169]. Отмечено, что выполнение условия 1 эквивалентно тому, что следующая задача минимизации

Задача.

$$(5.26) P > I,$$

$$(5.27) PA + KC + (PA + KC)^{T} < 0,$$

(5.28)
$$\begin{bmatrix} \delta I & B^{\mathrm{T}}P - GC \\ * & \delta I \end{bmatrix} \geqslant 0$$

имеет минимум при $\delta=0$. Матричный коэффициент наблюдателя L находится при этом из соотношения

$$(5.29) L = P^{-1}K.$$

Далее, после некоторых дополнительных предположений, таких как rank B = m, существование известной ("номинальной") функции f_0 и известных неотрицательных констант β_1 и \varkappa_1 таких, что для всех $t \in \mathbb{R}$, $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\|f(t,x) - f_0(t,\hat{x})\| \leqslant \beta_1 + \varkappa \|x - \hat{x}\|$, а также ограниченности по норме производных функций f, f_0 (см. подробнее в [161]), несмотря на то что асимптотически точное оценивание в рамках данной схемы не может быть обеспечено, наблюдатель

(5.30)
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{f}(t,x) + L(C\hat{x}(t) - y(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

(5.31)
$$\hat{f}(t) = f_0(t, \hat{x}) - \gamma G(C\hat{x}(t) - y(t))$$

при достаточно большом коэффициенте усиления $\gamma > 0$ вырабатывает, асимптотически, оценки переменных x, f в виде \hat{x}, \hat{f} (соответственно) с любой заданной точностью, см. [161, теорема 1].

Основываясь на подходе [161], в [170] рассматриваются линейные системы вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gd(t), \quad y(t) = C(t)x(t),$$

подверженные действию измеряемого $u(t) \in \mathbb{R}^m$ и неизмеряемого $d(t) \in \mathbb{R}^q$ входов. Переменная d(t) может моделировать как внешние возмущения, так и присущие системе нелинейность, неопределенность описания и нестационарность параметров. G — известная $(n \times q)$ -матрица. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (5.22). Предполагается, что матрицы C, G имеют полный ранг.

В [170] предлагается использовать близкую к (5.30), (5.31) структуру наблюдателя, но, основываясь на [54], с интегрированием оценки \hat{d} возмущения d:

(5.33)
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G\hat{d}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)),$$

(5.34)
$$\dot{\hat{d}}(t) = \rho K(y(t) - C\hat{x}(t)),$$

где $\rho > 0$ — коэффициент усиления (названный в [170] "скоростью обучения")⁵. В работе утверждается, что если условия [161, теорема 1] выполнены, т.е. если существуют матрицы $P = P^{\rm T} > 0, \ Q = Q^{\rm T} > 0$ такие, что

(5.35)
$$P(A - LC) + (A - LC)^{\mathrm{T}}P = -Q, \quad G^{\mathrm{T}}P = KC,$$

то точное асимптотическое оценивание может быть достигнуто как для состояния, так и для входа, но при этом наблюдатель (5.33), (5.34) "может оперировать только с медленно меняющимися входами" [170].

В [170] ставится задача перехода от наблюдателей полного порядка (5.30), (5.31) и (5.33), (5.34) к наблюдателям пониженного порядка. Первый из предложенных наблюдателей описывается уравнениями

(5.36)
$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Ly(t) + TBu(t) + TG\hat{d}(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

(5.37)
$$\hat{d}(t) = \gamma (Wy(t) - Nz(t)),$$

где z(t), $\hat{d}(t)$ — оценки Tx(t) и d(t) соответственно, $\gamma > 0$ — коэффициент усиления, F, T, L, N, W — матрицы, подлежащие выбору при синтезе. В [170, теорема 2]) найдены достаточные условия предельной ограниченности норм ошибок оценивания $\|z(t) - Tx(t)\|$, $\|\hat{d}(t) - d(t)\|$ произвольными положительными константами ε_1 , ε_2 . В условия теоремы входят как матричные соотношения, так и ограничения на $\|d(t)\|$ и $\|d(t)\|$.

Второй, "адаптивный", наблюдатель пониженного порядка имеет вид

(5.38)
$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Ly(t) + TBu(t) + TG\hat{d}(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

(5.39)
$$\dot{\hat{d}}(t) = \rho(Wy(t) - Nz(t)),$$

 $^{^5}$ Неясно, почему в [170] наблюдатель (5.33), (5.34) называется "адаптивным" — это обычная линейная система с интегралом от ошибки оценивания по выходу.

 $\rho>0$. Для постоянного возмущения, $d={\rm const.}$ в [170, теорема 3] получено, что при выполнении условий [170, теорема 2] на матрицы наблюдателя (5.38), (5.39) имеет место асимптотическое стремление к нулю ошибок z(t)-Tx(t) и $\hat{d}(t)-d$.

Далее, в [170] излагаются алгоритмы синтеза (выбора матриц F, T, L, N, W) наблюдателей. В частности, показано [170, теорема 4], что для существования матриц, удовлетворяющих [170, теорема 2], необходимо и достаточно, чтобы: 1) rank $(CG) = \operatorname{rank} G$ и 2) все неустойчивые полюса системы (A, G, C) соответствовали ненаблюдаемым модам пары (A, C). Тем самым оказывается, что возможна оценка входа и для некоторых неминимально-фазовых объектов, а для состояния x(t) ненаблюдаемых объектов возможна оценка значений линейной функции Tx(t).

По мнению авторов, наблюдатель (5.38), (5.39) не отличается от наблюдателя Луенбергера [82–85], построенного для расширенной системы (2.6) с матрицей $A_s=0_q$.

Для класса нелинейных систем вида $\dot{x}(t) = F(x) + D(x)u(t) + Dd(t)$ в [51] синтезируется наблюдатель возмущений, благодаря использованию которого задача компенсации возмущений переводится в задачу адаптивного управления. В [51] используется метод внутренней модели, в рамках которого возмущения рассматриваются как выход d(t) линейной системы $\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t)$, $d(t) = C_s x_s(t), x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$. Для решения задачи адаптивного управления используется метод бэкстеппинга ("обратного шага") [64, 158, 171–174]. Порядок n_s модели возмущений известен, пара (A_s, C_s) считается полностью наблюдаемой, но матрицы A_s , C_s — неизвестны. На основе результатов [96, лемма 1], [48, 49] возмущение d(t) представляется как выход системы $\dot{z}(t) = Gz(t) + l d(t), d(t) = \theta^{\mathrm{T}} z(t),$ где $z \in \mathbb{R}^{n_s}, \theta^{\mathrm{T}} = C_s M^{-1}, G$ — гурвицева матрица порядка n с попарно различными собственными значениями, l матрица размера $(n_s \times n)$ и пара (G, l) полностью управляема. Матрица Mпорядка n_s удовлетворяет уравнению Сильвестра MS - GM = lC. Нетрудно заметить, что $z = Mx_s$. Используя результаты [96], неопределенность параметров модели возмущений (матрицы A_s) трансформируется в неопределенность коэффициентов матрицы θ . Для устранения этой неопределенности в [51] используется метод бэкстеппинга [158, 172]. В качестве иллюстрации рассматривается задача управления беспилотным гидросамолетом при различных волнениях.

В [73] рассматривается задача граничной стабилизации гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с помощью обратной связи. Для синтеза регулятора используется метод бэкстеппинга [158, 172]. В работе показано, что предложенный метод может быть использован и для граничного управления распределенными системами третьего порядка типа Кортевега—де Фриза. Для систем с временным запаздыванием исполнительного устройства авторами [73] предложен наблюдатель состояния. Рассматривается следующая система с постоянным запаздыванием $\tau > 0$:

$$\dot{X}(t) = AX(t),$$

$$(5.41) Y(t) = CX(t - \tau),$$

пара (A,C) считается полностью наблюдаемой. Уравнение выхода (5.41) преобразуется к следующему гиперболическому уравнению первого порядка в частных производных:

$$(5.42) u_t(x,t) = u_x(x,t),$$

$$(5.43) u(x,\tau) = CX(t),$$

$$(5.44) Y(t) = u(0,t),$$

где обозначено: $u_t = \partial u(x,t)/\partial t$, $u_x = \partial u(x,t)/\partial x$. Для системы (5.40), (5.42)–(5.44) строится наблюдатель [73, теорема 5]

(5.45)
$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t)e^{A\tau}L(Y(t) - \hat{u}(0,t)),$$

(5.46)
$$\hat{u}_t(x,t) = \hat{u}_x(x,t) + Ce^{Ax}L(Y(t) - \hat{u}(0,t)),$$

$$\hat{u}(x,\tau) = C\hat{X}(t),$$

где $\hat{u}_t(x,t)$, $\hat{u}_x(x,t)$ — оценки переменных $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$ (соответственно). Матрица L выбирается так, чтобы обеспечить гурвицевость матрицы A-LC. Результаты получили развитие в [175].

Адаптивное подавление несогласованных (англ. — unmatched) неизмеряемых гармонических возмущений с неизвестными параметрами, действующих на линейную инвариантную по времени систему (система, имеющая постоянные параметры, англ. — LTI) методом бэкстеппинга на основе обратной связи по производной от состояния объекта, рассматривается в [61]. Исследование мотивируется задачей стабилизации судна при морском волнении, см. [176], для которой характерна возможность измерения ускорений, и вычисления скоростей движения, но не координат. Синтез состоит из следующих шагов: 1) параметризация синусоидальных возмущений в виде выхода известной с неизвестным выходом, который зависит от неизвестных параметров возмущений; 2) синтез адаптивного наблюдателя возмущений как для самого возмущения, так и его производной; 3) синтез адаптивного регулятора с виртуальным управлением; 4) окончательный синтез регулятора введением уравнения ошибки на основе процедуры бэкстеппинга [158, 172].

В [61] рассматривается следующая инвариантная по времени линейная система со скалярным управлением и многочастотным гармоническим возмущением:

(5.48)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(p(t) + v(t)),$$

(5.49)
$$\dot{p}(t) = a^{\mathrm{T}}x(t) + b_p p(t) + b_u u(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, \, p(t) \in \mathbb{R}, \, u(t) \in \mathbb{R}, \, v(t) \in \mathbb{R}$ — синусоидальное возмущение вида

(5.50)
$$v(t) = \sum_{i=1}^{q} g_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

где ω_i , g_i , φ_i — неизвестные вещественные параметры, причем частоты ω_i попарно различны ($\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$), а сам процесс возмущений v(t) не измеряется датчиками. Возмущение v(t) представляется как выход линейной

экзосистемы (см. также (2.5)-(2.7) и (5.68))

(5.51)
$$\dot{w}(t) = Sw(t), \quad v(t) = h^{\mathrm{T}}w(t),$$

где $(2q \times 2q)$ -матрица S и вектор-столбец $h \in \mathbb{R}^{2q}$ выбраны соответствующим образом (см., например, (5.15)).

Делаются следующие предположения.

Предположение 3.

- 3.1. Матрица A обратима.
- $3.2.\ \Pi$ ара (A,B) управляема.
- 3.3. $b_u \neq 0$.
- 3.4. Переменные x(t) и v(t) неизмеряемые, а $\dot{x}(t)$ и p(t) измеряемые.
- 3.5. Пара (S, h^{T}) наблюдаема.
- 3.6. Собственные числа матрицы S мнимые, различные и рациональные.
- 3.7. натуральное число q известно.
- $3.8. \ S$ и h неизвестны.
- 3.9. $g_i \neq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, q\}$.

В рамках указанных предположений для системы (5.48)–(5.51) в [61] строится следующий адаптивный регулятор с наблюдателем возмущений:

$$u = \frac{1}{(1+KB)b_u} \Big((\dot{\theta}^{\mathrm{T}}l - (1+KB)(b_p - a^{\mathrm{T}}A^{-1}B))p - (\dot{\theta}^{\mathrm{T}}N + (\hat{\theta}^{\mathrm{T}}N + K)A + (1+KB)a^{\mathrm{T}}A^{-1} - (A^{-1}B)^{\mathrm{T}}P)\dot{x} + (1+KB)(a^{\mathrm{T}}A^{-1}B)\hat{\theta}^{\mathrm{T}}\xi - (KB + \hat{\theta}^{\mathrm{T}}l)\hat{\beta}^{\mathrm{T}}\xi - \dot{\hat{\theta}}^{\mathrm{T}}\eta - \hat{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\eta} - ((KB + \hat{\theta}^{\mathrm{T}}l)^2 + c)e \Big),$$

$$(5.52)$$

где $c > \frac{1}{2}$ и

$$(5.53) e = p + K\dot{x} + \hat{\theta}^{\mathrm{T}}\xi.$$

Алгоритмы настройки параметров регулятора $\hat{\theta}(t)$ и $\hat{\beta}(t)$ имеют вид

(5.54)
$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma_t \xi \Big(A^{-1} B^{\mathrm{T}} P \dot{x} + (1 + KB) (a^{\mathrm{T}} A^{-1} B) e \Big),$$

(5.55)
$$\dot{\hat{\beta}} = \gamma_b \xi \left(KB + \hat{\theta}^{\mathrm{T}} l \right),$$

где $\gamma_t, \gamma_b > 0$ — выбранные разработчиком коэффициенты усиления алгоритма, а матрица $P = P^{\rm T}$ удовлетворяет матричному уравнению

(5.56)
$$(A^{-1} + A^{-1}BK)^{\mathrm{T}} P + P (A^{-1} + A^{-1}BK) = -2I.$$

Используется следующий наблюдатель возмущений

$$\dot{\eta} = G(\eta + N(\dot{x} - Bp)) - NA\dot{x},$$

$$\xi = \eta + N(\dot{x} - Bp),$$

где $G-(2q\times 2q)$ -гурвицева матрица с попарно различными собственными числами, образующая управляемую пару с выбранным вектором $l\in\mathbb{R}^{2q}$, а N- матрица размера $2q\times n$, которая отвечает уравнению NB=l, одним из решений которого является

$$(5.59) N = \frac{1}{B^{\mathrm{T}}B}lB^{\mathrm{T}}.$$

В [61] приводится иллюстративный пример для системы с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_{u} = b_{p} = 1,$$
$$v(t) = 1, 2\sin(0.8t + \pi/4) - 0.5\sin(t + \pi/2), \quad c = 0.8, \quad \gamma_{t} = \gamma_{b} = 2.$$

Результаты моделирования показывают асимптотическую стабилизацию системы и сходимость оценки возмущения $\hat{\theta}^{\mathrm{T}}\xi$ к самому процессу v(t).

Адаптивный регулятор, построенный методом бэкстеппинга предлагается в [62] для подавления синусоидальных возмущений, действующих на линейную инвариантную во времени скалярную систему с одним входом и неизвестными параметрами, имеющую каноническое управляемое представление [84, 85, 177], на входе которой имеется линейная подсистема, параметры которой тоже неизвестны. Рассматриваемая система, таким образом, описывается уравнениями

(5.60)
$$\dot{x} = A_0 x + B(\bar{\gamma}_1^{\mathrm{T}} x + v + \bar{b}_p p),$$

(5.61)
$$\dot{p} = \bar{\gamma}_2^{\mathrm{T}} x + \bar{b}_1 p + \bar{b}_2 u,$$

где

(5.62)
$$A_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

(5.63)
$$\bar{\gamma}_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\gamma}_2 = [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}]^{\mathrm{T}},$$

 $\mathbf{0}_{n-1} = [0,\dots,0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-1}, \ x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $p(t) \in \mathbb{R}$ — "виртуальный вход" системы $(5.60), u(t) \in \mathbb{R}$ — управление, $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_p, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ — неизвестные постоянные, $v(t) \in \mathbb{R}$ — синусоидальное возмущение вида (5.50). Как обычно, возмущение v(t) представляется в форме решения однородного уравнения (5.51). По (5.60)—(5.62) видно, что возмущение v не согласовано с управлением u. Принято, что сигнал управления должен вырабатываться с использованием только измерений производных по времени от переменных состояния основной системы и состояния входной подсистемы (прикладной смысл такого представления поясняется в [61], см. выше). Регулятор предназначен для подавления синусоидальных возмущений, действующих на систему. Синтез регулятора состоит из следующих этапов: 1) параметризация возмущения в форме выхода известных параметров возмущения; 2) синтез

адаптивного наблюдателя возмущения для оценки самого возмущения и его производной по времени; 3) синтез адаптивного регулятора для виртуального управления; 4) синтез окончательного адаптивного регулятора на основе процедуры бэкстеппинга [158, 172].

В [62] для параметризации возмущений используются результаты [56, 96]. С этой целью выполняется преобразование координат модели возмущений (5.51), при котором возмущения представляются скалярным произведением неизвестного постоянного вектора и производной от вектора состояния преобразованной модели. Для оценки этой производной вводится наблюдатель специального вида, включающий набор фильтров и использующий избыточную параметризацию. В [62] доказано, что состояние равновесия замкнутой адаптивной системы устойчиво и обеспечивается точная асимптотическая оценка возмущения. Эффективность предложенного регулятора иллюстрируется результатами моделирования системы третьего порядка.

В последующей статье [63] этих авторов рассмотрена задача подавления гармонических возмущений одновременно с компенсацией задержек входного сигнала. В статье отмечено, что задача синтеза регулятора для подавления неизвестных синусоидальных возмущений с запаздыванием по управлению рассмотрена в [57, 59, 74, 75], но в этих работах алгоритмы подавления возмущений получены для систем, параметры которых известны. Целью работы [63] является разработка метода, для которого не требуется знания фактических значений параметров системы, что имеет важное прикладное значение. В [63] адаптивный регулятор предназначен для оценки и подавления неизвестных синусоидальных возмущений, действующих на линейную инвариантную во времени систему в управляемой канонической форме с неизвестными параметрами и запаздыванием по входу через обратную связь по состоянию объекта. Возмущение представляется в параметризованной форме на основе методики работы [56]. Суть подхода для компенсации запаздывания заключается в использовании обратной связи предиктора, предложенной в [73] в качестве вида граничного управления на основе бэкстеппинга для систем в частных производных [178]. Результаты работ [56, 73] и позволяют переформулировать рассматриваемую задачу как задачу адаптивного управления для неопределенной системы, описываемой уравнениями в частных производных и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Аналогично подходу работы [179], законы уточнения оценок неизвестных параметров основаны на методе Ляпунова.

Синтез регулятора состоит из трех этапов: 1) параметризация синусои-дального возмущения; 2) представление запаздывания в качестве транспортного уравнения с распределенными параметрами; 3) разработка адаптивного управления граничными условиями системы с распределенными параметрами на основе метода бэкстеппинга для распределенных систем. В [63] доказано, что состояние равновесия замкнутой адаптивной системы устойчиво и обеспечивается точная асимптотическая оценка возмущения. Эффективность предложенного регулятора иллюстрируется результатами моделирования системы второго порядка.

В [180] приведена улучшенная версия так называемого "расширенного наблюдателя". Улучшение достигается распространением леммы Даяванса

(Dayawansa) [181] на случай систем, нормальная форма которых включает изменяющиеся во времени (и измеряемые) коэффициенты передачи в системе, моделируемой цепочкой интеграторов между входом и выходом. Именно: рассматриваются линейные системы с изменяющимися параметрами

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad y = C(t)x,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, матрицы A(t), B, C(t) имеют вид

$$(5.65) A(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1}g_1(t) & g_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-2}g_1(t) & 0 & g_3(t) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1g_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & g_n(t) \\ -a_0g_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_0g_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

с зависящими от времени непрерывными функциями $g_i(t)$ такими, что для некоторых фиксированных g_{\min} , g_{\max} для всех $t\geqslant 0$ и $i=1,2,\ldots,n$ выполнено $0< g_{\min}\leqslant g_i(t)\leqslant g_{\max}$. Доказано [180, лемма 2], что для любого $\gamma>1$ имеется набор параметров a_0,\ldots,a_{n-1} и некоторое $\lambda>0$, таких что вдоль траекторий системы (5.64) может быть обеспечено выполнение неравенства диссипации вида

(5.66)
$$D^{+}_{(5.64)}V + \leq -\lambda V(x) + \gamma |u| - |y|,$$

где $D^+_{(5.64)}V(x(t))$ — производная Дини (Dini) [182] в силу системы (5.64):

$$D^{+}_{(5.64)}V(x(t)) = \limsup_{h \to 0^{+}} \frac{1}{h} (V(x(h+t)) - V(x(t))),$$

где x(t) подчиняется (5.64). В качестве примера в [183] рассматривается задача удержания положения квадротора без измерения углов тангажа и крена (см. [81]).

5.2. Наблюдатели синусоидальных возмущений

Огромный пласт работ посвящен синтезу наблюдателей синусоидальных возмущений, где сами возмущения представлены выражением

(5.67)
$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i).$$

Здесь A_0 определяет смещение синусоидального сигнала, A_i, ω_i и φ_i задают амплитуду, частоту и фазу i-й составляющей синусоидального сигнала. В зависимости от решаемой задачи сигнал f(t) либо измеряется, либо оценивается. Однако в обоих случаях необходимо восстановить оценку сигнала f(t), для

чего восстанавливается информация о величинах A_0, A_i, ω_i и $\varphi_i, i = 1, \dots, n$. Предполагается, что частоты ω_i различны.

Представление возмущений в виде суммы синусоидальных сигналов обусловлено несколькими факторами:

- 1) существует ряд периодических процессов, которые могут описываться синусоидальными функциями: вращение пропеллера в вентиляционных системах, гашение колебаний в некоторых типах вибрационных систем и т.п.;
- 2) возможность представления возмущений в виде синусоидальных сигналов позволяет синтезировать алгоритмы управления, которые могут улучшить качество регулирования по сравнению с алгоритмами, разработанными в предположении только ограниченности возмущений;
- 3) возможность представления синусоидальных возмущений в виде системы дифференциальных уравнений порядка 2n, что позволяет применять большинство алгоритмов управления и идентификации, разработанных в теории автоматического управления динамическими объектами.

Перепишем сигнал (5.67) в виде следующего дифференциального уравнения

(5.68)
$$\dot{w}(t) = Rw(t), \quad f(t) = Nw(t),$$

где $w(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, матрицы R и N получены при переходе от (5.67) к (5.68). В литературе представление возмущений в виде некоторого генератора возмущений, в частности в виде (5.68), называется внутренней моделью [44, 47].

С использованием градиентного алгоритма в [55] при $A_0 = 0$ получен следующий простой адаптивный идентификатор возмущения

(5.69)
$$\dot{\Theta}(t) = \alpha(\hat{f} - f)W(t),$$

где $\alpha>0$ — коэффициент, от значения которого зависит скорость идентификации частоты, $\hat{f}=\sum_{i=1}^n\lambda_{2i}h_{2i}+\sum_{i=1}^n\hat{\varphi}_{i-1}h_{2i-1}, h=[h_1,\dots,h_{2n}], \lambda_i$ — коэффициенты гурвицевого полинома $\gamma(s)=s^{2n}+\lambda_{2n}s^{2n-1}+\dots+\lambda_2s+\lambda_1, s$ — комплексная переменная,

$$\dot{h} = \Lambda h + bf, \quad b = [0, \dots, 0, 1]^{\mathrm{T}}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \dots & -\lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\varphi}_i = \lambda_{2i+1} - \hat{\theta}_{n-i}, \quad \Theta = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n]^{\mathrm{T}}, \quad W(t) = \operatorname{col}\{h_1(t), h_3(t), \dots, h_{2n-1}(t)\}.$$

Сигналы $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ являются репараметризованными оценками исходных неизвестных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Алгоритмы, подобные [55], рассматривались в [184, 185]. В [186] решена задача идентификации сигнала (5.67) с неизвестным значением n. Достоинства данных алгоритмов состоят в простоте их вывода и реализации. Моделирование показывает, что не всегда можно получить удовлетворительное качество

переходных процессов в смысле малого значения перерегулирования и времени переходного процесса. При этом сложность и динамический порядок алгоритмов существенно возрастает при увеличении числа синусоидальных сигналов. Кроме того, качество идентификации значительно зависит от наличия несинусоидальных составляющих.

В [187] приведен алгоритм оценки возмущения (5.67) (при n=1) с наличием несинусоидальной аддитивной ограниченной составляющей $\Delta f(t)$. В данном случае идентификатор возмущения описывается уравнениями

$$\hat{\omega}(t) = \max \left\{ \underline{\omega}, \sqrt{|\hat{\theta}_{1}(t)|} \right\},$$

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{\omega}(t)^{-2} \hat{\theta}_{2}(t),$$

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k\dot{\xi}(t)\varphi(t),$$

$$\dot{\chi}(t) = -k\varphi(t)\varphi(t)^{\mathrm{T}}\hat{\theta}(t) - k\dot{\xi}(t)\dot{\varphi}(t),$$

$$\dot{\zeta}_{1}(t) = \zeta_{2}(t),$$

$$\dot{\zeta}_{2}(t) = -2\lambda\zeta_{2}(t) - \lambda^{2}\zeta_{1}(t) + \lambda^{2}f(t),$$

где $\varphi(t) = [-\zeta_1(t) \ 1]^{\mathrm{T}}, \ \hat{\theta}(t) = [\hat{\theta}_1(t) \ \hat{\theta}_2(t)]^{\mathrm{T}}, \ \lambda > 0$ и k > 0. Однако для реализации алгоритма (5.70) нижние оценки $\underline{\omega} \leqslant \omega, \ \underline{A}_0 \leqslant A_0$ и $\underline{A}_1 \leqslant A_1$ должны быть известны.

В отечественной литературе также предложено много оригинальных работ по построению наблюдателей и идентификаторов синусоидальных сигналов с дальнейшей компенсацией возмущений. Подавляющая часть работ в данном направлении опубликована сотрудниками Университета ИТМО с целью уменьшения времени идентификации и уменьшения величины перерегулирования. В отличие от [55, 184–186] далее будут представлены работы по оценке и компенсации возмущений, которые действуют на объект управления и не подлежат прямому измерению. В работе [188] рассматривается компенсация синусоидальных возмущений для минимально-фазовых SISO ОУ с измеряемым выходным сигналом, представленных в виде

(5.71)
$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + c(p)f(t),$$

где возмущение f определено выражением (5.67) при $n=1,\ p=d/dt$ — оператор дифференцирования, $a(p),\ b(p)$ и c(p) — линейные дифференциальные операторы с постоянными неизвестными коэффициентами, y и u — скалярные сигналы. Центральным моментом в [188] является представление гармонического сигнала со смещением как линейного выхода линейной канонической системы с неизвестным параметром θ

$$\dot{x}_1 = x_2,
\dot{x}_2 = x_3,
\dot{x}_3 = -\theta x_2,
f = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3,$$

где $k_1 = \alpha^3, \ k_2 = 3\alpha^2, \ k_3 = 3\alpha, \ \alpha > 0$, параметр θ подлежит оценке. Для решения задачи закон управления представляется в виде суммы

$$(5.72) u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

где сигнал u_1 необходим для стабилизации ОУ, а сигнал u_2 – для компенсации возмущений. Для оценки синусоидального возмущения и его компенсации строится следующий наблюдатель и закон управления u_2 :

(5.73)
$$\dot{\xi}(t) = A_0 \hat{x}(t) - d\hat{\theta} \hat{x}_2(t) + d\mu y(t),$$

$$\hat{x}(t) = \xi(t) + d\mu y(t),$$

$$u_2(t) = -k_1 \hat{x}_1(t) - k_2 \hat{x}_2(t) - k_3 \hat{x}_3(t).$$

Здесь
$$A_0=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ d=[0\ 0\ 1]^\mathrm{T},\ \hat{x}=[\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3]^\mathrm{T},\ \mu$$
 можно выбирать как

положительное число или настраивать согласно алгоритму $\mu(t) = \int_0^t r(g)dg$, где $r(t) = r_0 > 0$ при $|y(t)| > \varepsilon$ или r(t) = 0 при $|y(t)| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — точность регулирования в установившемся режиме. Стабилизирующая составляющая задается в виде $u_1 = -\gamma y$ с алгоритмом настройки $\dot{\gamma} = \gamma_0 y^2$. Алгоритм (5.73) по сравнению с [55, 184–186] позволяет оценить и скомпенсировать синусоидальные возмущения по косвенным измерениям, т.е. по измерениям только выходного сигнала ОУ. При этом условия согласования для ОУ могут быть не выполнены, что не позволит реализовать непосредственную компенсацию возмущений.

В работе [189] рассматривается компенсация синусоидальных возмущений для SISO ОУ вида

(5.74)
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bf(t),$$
$$y(t) = Cx(t),$$

где $f = A\sin(\omega t + \varphi)$. Модель ОУ преобразуем к виду

$$a(p)y(t) = b(p)(u(t) + f(t)),$$

где полином a(s) гурвицев и коэффициенты полиномов a(s) и b(s) известны. Поскольку ОУ устойчивый с известными постоянными параметрами, то ресурс управления тратится только на компенсацию возмущения. Для компенсации синусоидального возмущения используется следующий алгоритм

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{\hat{L}}\bar{w}(t+R-\hat{T}),$$

$$\bar{w} = \frac{2}{\alpha}\dot{\zeta}(t) + \zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2}\hat{\theta}(t)\zeta(t),$$

$$R = \left|\frac{\hat{\varphi}}{\hat{w}}\right|,$$

$$\hat{T} = \frac{2\pi}{\hat{\omega}} \quad \text{при} \quad \hat{\omega} \neq 0,$$

$$\hat{L} = \left| \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})} \right|,$$

$$\hat{\varphi} = \arg \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})},$$

$$\hat{w}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|},$$

$$\dot{\theta}(t) = k\alpha^2 \zeta(t)(y(t) - u(t) - \hat{\omega}(t)),$$

$$(p + \alpha)^2 \zeta(t) = \alpha^2 (y(t) - u(t)),$$

$$a(p)u(t) = b(p)\bar{u}(t),$$

где $j=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. По сравнению с [190] в [189] алгоритм управления позволяет сократить время оценивания параметров возмущения. Однако данный факт можно проиллюстрировать только на численных примерах моделирования.

В [58] рассматривается компенсация возмущения (5.67) при $A_0=0$ и n=1, которое аддитивно действует только на выходе ОУ (5.74) в виде y(t)=Cx(t)+f(t). Строится следующий наблюдатель

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma}\sin(\hat{\omega}t),$$

$$p\gamma(p)\hat{\sigma}(t) = \beta a(p)\sin(\hat{\omega}t)(w(t) - \hat{w}(t)),$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\varsigma(t)(z(t) - \hat{z}(t)), \quad \hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|},$$

$$z(t) = w(t) - 2\dot{\varsigma}(t) - \varsigma(t),$$

$$\dot{\varsigma}_1(t) = \varsigma_2(t),$$

$$\dot{\varsigma}_2(t) = -2\varsigma_2(t) - \varsigma_1(t) + w(t),$$

$$\varsigma(t) = \varsigma_1(t),$$

$$\gamma(p)w(t) = \gamma(p)y(t) - a_1(p)y(t) - b(p)u(t).$$

Здесь $\beta > 0$, $\gamma(s)$ — произвольный гурвицев полином степени $n, a_1(p) = \gamma(p) - a_1(p)$.

В работах [189, 190] результаты из [57, 59, 60] используются для решения задачи адаптивной компенсации возмущений в линейных и нелинейных ОУ с известным запаздыванием в канале управления. Модель нелинейного ОУ представлена в виде дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) + G\varphi(y(t)) + Ef(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, u — скалярное управление, y — скалярный выходной сигнал, φ — неизвестная нелинейность. Матрицы ОУ и запаздыва-

ние известны. Предполагается, что модель $\dot{x}(t) = Ax(t) + G\varphi(y(t))$ — экспоненциально устойчивая. Возмущение описывается функцией вида (5.67). Для компенсации возмущений используется сигнал управления

$$u(t) = -\frac{1}{L_0}\hat{\sigma} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\hat{L}_i}\hat{f}_i\left(t + \tau - \frac{\hat{\varphi}_i}{\hat{\omega}_i}\right),\,$$

где $L_0 = \left| \frac{b(0)}{a(0)} \right|$, $L_i = \left| \frac{b(j\hat{\omega}_i)}{a(j\hat{\omega}_i)} \right|$, $\hat{\varphi}_i = \arg \frac{b(j\hat{\omega}_i)}{a(j\hat{\omega}_i)}$ — оценка фазы возмущения φ_i , $\hat{\omega}_i$ — оценка частоты возмущения ω_i , которая получена с помощью алгоритма, аналогичного (5.75). Теоретические результаты работ [189, 190] экспериментально исследованы на маятнике на тележке в [60].

В [79] результаты [57, 59, 60] обобщены на решение задачи управления объектом при наличии неизвестного запаздывания в канале управления. В данном случае с учетом того что возмущение периодическое, оно оценивалось вместе с неизвестным запаздыванием и строился прогноз возмущения на время запаздывания.

6. Заключение

Наблюдатели возмущений находят все более широкое применение в теории и практике построения систем управления, и им посвящена обширная литература. Так, по состоянию на сентябрь 2019 г. в системе Scopus по ключевым словам "disturbance" "& "observer" имеется более 16 тысяч цитирований. В частности, статья [18] в течение 10 лет после опубликования получила 2122 цитирования, статья [107] — 750 цитирований, обзор [80] за три года получил 525 цитирований. Это говорит о высокой востребованности данного направления для современной теории и практики построения автоматических систем. В настоящем обзоре авторами сделана попытка представить основные теоретические результаты и направления исследований по синтезу и применению наблюдателей возмущений. Практическим приложениям будет посвящена следующая часть обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Sariyildiz E., Oboe R., Ohnishi K. Disturbance Observer-Based Robust Control and Its Applications: 35th Anniversary Overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2020. V. 67. No. 3. P. 2042–2053.
- 2. Athans M. On the LQG Problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Dec. V. 16. No. 6. P. 528–528.
- 3. Rosenbrock H., McMorran P. Good, Bad, or Optimal? // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Dec. V. 16. No. 6. P. 552–554.
- 4. Doyle J. Guaranteed Margins for LQG Regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Aug. V. 23. No. 4. P. 756–757.
- 5. Pearson J., Staats P. Robust Controllers for Linear Regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. Jun. V. 19. No. 3. P. 231–234.
- 6. Davison E.J., Goldenberg A. Robust Control of a General Servomechanism Problem: The Servo Compensator // Automatica. 1975. V. 11. No. 5. P. 461–471.

- 7. Davison E. the Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. Feb. V. 21. No. 1. P. 25–34.
- 8. Schweppe F. Recursive State Estimation: Unknown But Bounded Errors and System Inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
- 9. Bhattacharyya S. the Structure of Robust Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. August. V. 21. No. 4. P. 581–588.
- 10. Bhattacharyya S. Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. 23. No. 3. P. 483–484.
- 11. Meditch J., Hostetter G. Observers for Systems with Unknown And Inaccessible Inputs // Int. J. Control. 1974. V. 19. No. 3. P. 473–480.
- 12. Johnson C.D. Optimal Control of the Linear Regulator with Constant Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. 13. No. 4. P. 416–421.
- 13. Johnson C.D. Further Study of the Linear Regulator with Disturbances the Case of Vector Disturbances Satisfying a Linear Differential Equation // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. V. AC-15. No. 2. P. 222–228.
- 14. Johnson C. Accommodation of External Disturbances in Linear Regulator and Servomechanism Problems // IEEE Trans. Automatic Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 635–644.
- 15. Johnson C. Accommodation of Disturbances in Optimal Control Problems // Int. J. Control. 1972. V. 15. No. 2. P. 209–231.
- Doyle J.C. Structured Uncertainty in Control System Design // Proc. Conf. Decision and Control (CDC'85), Fort Lauderdale, USA. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1985. P. 260–265.
- Francis B.A., Wonham W.M. The Internal Model Principle of Linear Control Theory // IFAC Proc. Volumes. 1975. V. 8. No. 1, Part 1. P. 331–336. (6th IFAC World Congress (IFAC 1975) Part 1: Theory, Boston/Cambridge, MA, USA, August 24–30, 1975). URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017677565.
- 18. Han J. From PID to Active Disturbance Rejection Control // IEEE Trans. Ind. Electron. 2009. V. 56. No. 3. P. 900–906.
- 19. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Изд. 4-е, перераб. и дополн. СПб: "Профессия", 2003.
- 20. *Клейман Е.Г., Мочалов И.А.* Идентификация нестационарных объектов // AuT. 1994. № 2. С. 3–22.
 - Kležman E.G., Mochalov I.A. Identification of Time-Dependent Plants // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 2. P. 149–163.
- 21. *Клейман Е.Г.* Идентификация входных сигналов в динамических системах // AиT. 1999. № 12. С. 3–15.
 - ${\it Kle\~iman~E.G.}$ Identification of Input Signals in Dynamical Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 12. P. 1675–1685.
- 22. Sunahara Y. Identification of Distributed-Parameter Systems // Distrib. param. control syst. Theory and appl. 1982. P. 57–86.
- 23. Ohnaka K., Uosaki K. Identification of the External Input of Distributed-Parameter Systems by the Boundary-Element Approach // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 4. P. 1125–1133.
- 24. Ohnaka K., Uosaki K. Simultaneous Identification of the External Input and Parameters of Diffusion Type Distributed Parameter Systems // Int. J. Control. 1989. V. 46. No. 3. P. 889–895.

- 25. Ohnaka K., Uosaki K. Boundary Element Approach for Identification of Point Forces of Distributed Parameter Systems // Int. J. Control. 1989. V. 49. No. 1. P. 119–127.
- 26. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1983. № 2. С. 29–41.
- 27. *Ким А.В.*, *Короткий А.М.* Динамическое моделирование возмущения в параболических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 6. С. 78–84.
- 28. Короткий А.И., Осипов Ю.С. Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. С. 154–164.
- 29. *Богуславский И.А.*, *Пятенко Т.В.* Идентификация возмущений динамической системы // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 3. С. 549–553.
- 30. Kurek J. Observation of the State Vector of Linear Multivariable Systems with Unknown Inputs // Int. J. Control. 1982. V. 36. No. 3. P. 511–515.
- 31. Любчик Л.М., Толстопятова С.В. Оптимальное оценивание входных сигналов дискретных стохастических систем // Вестн. Харьков. ун-та. 1988. № 252. С. 5–7.
- 32. *Херманис Э.Х.* Сведение задачи восстановления сигнала к задаче идентификации системы // Аналого-дискретное преобразование сигналов. 1981. № 5. С. 103-111.
- 33. *Борухов В.Г., Колесников П.М.* Идентификация входных воздействий систем с распределенными параметрами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 3. С. 168–174.
- 34. Корноушенко Е.К. Восстановление скалярного сигнала на входе дискретной линейной нестационарной системы // AuT. 1991. № 6. С. 84–94. Kornoushenko E.K. Reconstruction of Scalar Input Signals for Discrete Linear Non-stationary Systems // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 6. P. 815–824.
- 35. Корноушенко Е.К. Восстановление входных сигналов в дискретных линейных нестационарных системах по накопленным данным // AuT. 1992. № 12. С. 40–51.
 - $Kornoushenko\ E.K.$ Reconstruction of Input Signals in Discrete Linear Time-Dependent Systems on the Basis of Accumulated Data // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 12. P. 1852–1862.
- 36. Fhirin M. ARMAX Lattice Algorithm for Identification and Prediction of Dynamic Systems // Int. J. Syst. Sci. 1990. V. 21. No. 4. P. 771–781.
- 37. Murio D., Hinestroza D. Numerical Identification of Forcing Terms by Discrete Mollification // Computers & Mathematics with Applications 1988. V. 17. No. 11. P. 1441-1447.
- 38. Kobayashi T. Discrete-Time Observers and Parameter Determination for Distributed Parameter Systems with Discrete-Time Input-Output Data // SIAM J. Contr. Optim. 1983. V. 21. No. 3. P. 331–351.
- 39. Ahlén A. Identifiability of the Deconvolution Problem // Automatica. 1990. V. 26. No. 1. P. 177–181.
- 40. Davison E.J. the Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Oct. V. 17. No. 5. P. 621–630.
- 41. Francis B.A., Wonham W.M. The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators // Appl. Math. Opt. 1975. V. 2. No. 2. P. 170–194.

- 42. Francis B.A., Wonham W.M. The Role of Transmission Zeros in Linear Multivariable Regulators // Int. J. Control. 1975. V. 22. No. 5. P. 657–681.
- 43. Francis B.A., Wonham W.M. The Internal Model Principle of Control Theory // Automatica. 1976. V. 12. No. 5. P. 457–465.
- 44. Wonham W.M. Linear Multivariable Control: a Geometric Approach (3rd Ed.) / Ed. A.V. Balakrishnan, I. Karatzas, M. Yor. N.Y.: Springer-Verlag, 1985. V. 10 of Applications of Mathematics.
- 45. Gorez R., Galardini D., Zhu K.Y. Internal Model Control and Disturbance Observers // Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control (CDC'91), Brighton, UK. V. 1. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1991. P. 229–234.
- 46. Цыпкин Я.З. Адаптивно-инвариантные дискретные модели управления // АиТ. 1991. № 5. С. 96–121.
 - Tsypkin Ya.Z. Adaptively Invariant Discrete Control System // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 5. P. 673–696.
- 47. Isidori A. Nonlinear Control Systems (3rd edn). N.Y.: Springer, 1995.
- 48. Nikiforov V.O. Adaptive Servomechanism Controller with an Implicit Reference Model // Int. J. Control. 1997. V. 68. No. 2. P. 277–286.
- 49. Nikiforov V.O. Adaptive Non-Linear Tracking with Complete Compensation of Unknown Disturbances // Europ. J. Control. 1998. V. 4. No. 2. P. 132–139.
- Цыпкин Я.З. Робастно оптимальные дискретные системы управления // АиТ. 1999. № 3. С. 25–37.
 - Tsypkin Ya.Z. Robustly Optimal Discrete Control Systems // Autom. Remote Control. 1991. V. 60. No. 3. P. 315–324.
- 51. Du H., Fan G., Yi J., et al. Disturbance Compensated Adaptive Backstepping Control for an Unmanned Seaplane // Proc. 2014 IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014), Bali, Indonesia. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014. Dec. 5–10. P. 1725–1730.
- 52. Sariyildiz E., Ohnishi K. A Guide to Design Disturbance Observer // J. Dyn. Sys. Meas. Control. 2014. V. 136. No. 2.
- 53. Johnson C. Adaptive Controller Design Using Disturbance-Accommodation Techniques // Int. J. Control. 1985. V. 42. No. 1. P. 193–210.
- 54. Wang H., Daley S. Actuator Fault Diagnosis: an Adaptive Observer-Based Technique // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. V. 41. P. 1073–1078.
- 55. Xia X. Global Frequency Estimation Using Adaptive Identifiers // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. V. 47. No. 7. P. 1188–1193.
- 56. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // АиТ. 2004. № 11. С. 40–48. URL: http://mi.mathnet.ru/at1658.
 - Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. II. Objects With Unknown Parameters // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
- 57. *Бобцов А.А.*, *Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 19–23.
- 58. *Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Адаптивный наблюдатель неизвестного синусоидального выходного возмущения для линейного объекта // AuT. 2009. № 11. С. 108–116. URL: http://mi.mathnet.ru/at558.

- Aranovskii S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Adaptive Observer of an Unknown Sinusoidal Output Disturbance for Linear Plants // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 11. P. 1862–1870.
- 59. Pyrkin A.A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Rejection of Sinusoidal Disturbance of Unknown Frequency for Linear System with Input Delay // Proc. American Control Conf. (ACC 2010), Baltimore, USA. IEEE, 2010. 30 June–2 July. P. 5688–5693.
- 60. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Kapitanyuk Y.A., et al. Adaptive Cancellation of Unknown Multiharmonic Disturbance for Nonlinear Plant with Input Delay // Proc. 19th Mediterranean Conf. Control Automation (MED 2011), Corfu, Greece. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011. 20–23 June.
- 61. Baştürk H. İ., Krstic M. Adaptive Backstepping Cancelation of Unmatched Unknown Sinusoidal Disturbances for Unknown LTI Systems by State Derivative Feedback // Proc. ASME 5th Annual Dynamic Systems and Control Conf. joint with the JSME 11th Motion and Vibration Conf. (DSCC2012-MOVIC2012). Fort Lauderdale, Florida, USA: 2012. Oct. 17–19. P. 6054–6059.
- 62. Basturk H.I., Krstic M. State Derivative Feedback for Adaptive Cancellation of Unmatched Disturbances in Unknown Strict-Feedback LTI Systems // Automatica. 2014. V. 50. P. 2539–2545.
- 63. Basturk H.I., Krstic M. Adaptive Sinusoidal Disturbance Cancellation for Unknown LTI Systems Despite Input Delay // Automatica. 2015. V. 58. P. 131–138.
- 64. Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л. Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. М.–Ижевск: ИКИ, 2018.
- 65. *Utkin V.*, *Guldner J.*, *Shi J.* Sliding Mode Control In Electromechanical Systems. Boka Raton, London, N.Y.: Taylor & Francis, 1999.
- 66. Krasnova S.A., Utkin V.A. Prelimit Implementation of States and Disturbances Observer on Sliding Modes // Proc. 2015 Int. Workshop on Recent Advances in Sliding Modes, RASM 2015. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. 9–11 Apr.
- 67. Brown M., Shtessel Y.B. Disturbance Rejection Techniques for Finite Reaching Time Continuous Sliding Mode Control // Proc. American Control Conference (ACC 2001), Arlington, Virginia, USA. V. 6. Piscataway, NJ: IEEE Publications, 2001. June, 24. P. 4998–5003.
- 68. Massey T., Shtessel Y. Continuous Traditional and High-Order Sliding Modes for Satellite Formation Control // J. Guid., Contr. Dynam. 2005. July–Aug. V. 28. No. 4. P. 826–831.
- 69. Besnard L., Shtessel Y.B., Landrum B. Quadrotor Vehicle Control Via Sliding Mode Controller Driven by Sliding Mode Disturbance Observer // J. Franklin I. 2012. V. 349. No. 2. P. 658–684.
- Chen W.-H. Nonlinear Disturbance Observer Based Control for Nonlinear Systems with Harmonic Disturbances // IFAC Proc. Volumes. 2001. V. 34. No. 6. P. 329–334. (Proc. 5th IFAC Sympos. on Nonlinear Control Systems 2001, St. Petersburg, Russia, 4–6 July 2001.)
- 71. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах // AuT. 2005. № 10. С. 54–69. URL: http://mi.mathnet.ru/at1443.
 - Krasnova S.A., Kyznetsov S.I. Uncontrollable Perturbations of Nonlinear Dynamic Systems: Estimation on Moving Modes // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 10. P. 1580–1593.

- 72. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 8. С. 7–12.
- 73. Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping Boundary Control for First-Order Hyperbolic PDEs and Application to Systems with Actuator and Sensor Delays // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. No. 9. P. 750–758.
- 74. *Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // АиТ. 2010. № 11. С. 136–148.
 - Bobtsov A.A, Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Multi-Harmonic Disturbances in Nonlinear Plants with Delayed Control // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 11. P. 2383–2394.
- 75. Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Output Control Algorithm for Unstable Plant with Input Delay and Cancellation of Unknown Biased Harmonic Disturbance // IFAC Proc. Volumes. 2010. V. 43. No. 2. P. 39–44.
- 76. Зайцева М.В., Паршева Е.А. Компенсация возмущений и помех при управлении линейным объектом // АиТ. 2011. № 10. С. 28–38. URL: http://mi.mathnet.ru/ at2287.
 - Zaitseva M.V., Parsheva E.A. Compensating for Noise And Perturbances in Linear Object Control // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 2031–2040.
- 77. Фуртат И.Б. Робастная синхронизация динамической сети с компенсацией возмущений // АиТ. 2011. № 12. С. 104–114.
 - Furtat I.B. Robust Synchronization of Dynamical Networks With Compensation of Disturbances // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 12. P. 2516–2526.
- 78. Фуртат И.Б. Робастное управление определенным классом неминимальнофазовых динамических сетей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 35–48.
- 79. Borisov O.I., Gromov V.S., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Stabilization of Linear Plants with Unknown Delay and Sinusoidal Disturbance Compensation // Proc. 24th Mediterranean Conf. Control and Automation (MED 2016). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2016. June 21–24. P. 426–430.
- 80. Chen W.-H., Yang J., Guo L., Li S. Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods an Overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2016. Feb. V. 63. No. 2. P. 1083–1095.
- 81. *Андриевский Б.Р.*, *Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений. Методы и приложения. Часть 2. Приложения // АиТ. 2020.
- 82. Luenberger D.G. Observing the State of a Linear System // IEEE Trans. Mil. Electron. 1964. April. V. 8. No. 2. P. 74–80.
- 83. Luenberger D.G. an Introduction To Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Dec. V. 16. P. 596–602.
- 84. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- 85. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.
- 86. Квакернаак X., Cuван P. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1986.
- 87. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Уч. пос. М.: Наука, 1986.

- 88. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Физматлит, 1987.
- 89. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
- 90. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
- 91. Chen Y.H. Adaptive Robust Observers for Non-Linear Uncertain Systems // Int. J. Syst. Sci. 1990. V. 21. No. 5. P. 803–814.
- 92. Wang Z., Huang B., Unbehauen H. Robust H_{∞} Observer Design of Linear Time-Delay Systems with Parametric Uncertainty // Syst. Control Lett. 2001. V. 42. No. 4. P. 303–312.
- 93. Lin H., Zhai G., Antsaklis P.J. Set-Valued Observer Design for A Class of Uncertain Linear Systems with Persistent Disturbance and Measurement Noise // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 16. P. 1644–1653.
- 94. Lüders G., Narendra K. an Adaptive Observer and Identifier for A Linear System // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. October. V. 18. No. 5. P. 496–499.
- 95. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. Учебное пособие. М.: Высш. шк., 1989.
- 96. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений І. Объекты с известными параметрами // АиТ. 2004. № 10. С. 13–24. URL: http://mi.mathnet.ru/at1642.
 - Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects With Known Parameters // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
- 97. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
- 98. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- 99. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. 2-е изд. М.: Наука, 1998.
- 100. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
- 101. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Госэнергоиздат, 1982.
- 102. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для втузов. Второе издание, пероработанное и дополненное. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1989.
- 103. Sun J., Wang C., Xin R. Anti-Disturbance Study of Position Servo System Based on Disturbance Observer // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 4. P. 202–207.
- 104. Davison E.J., Smith H.W. Pole Assignment in Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Constant Disturbances // Automatica. 1971. V. 7. No. 4. P. 489–498.
- 105. Simon J.D., Mitter S.K. a Theory of Modal Control // Inform. Control. 1968. V. 13. No. 4. P. 316–353.
- 106. Galeani S., Menini L., Potini A. Robust Trajectory Tracking for A Class of Hybrid Systems: an Internal Model Principle Approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57. No. 2. P. 344–359.
- 107. Davison E.J. the Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. Feb. V. 21. No. 1. P. 25–34.

- 108. Schrijver E., van Dijk J. Disturbance Observers for Rigid Mechanical Systems: Equivalence, Stability, and Design // J. Dyn. Sys. Meas. Control. 2002. Dec. V. 124. No. 4. P. 539–548.
- 109. Lee H.S., Tomizuka M. Robust Motion Controller Design for High-Accuracy Positioning Systems // IEEE Trans. Ind. Electron. 1996. V. 43. No. 1. P. 48–55.
- 110. Mita T., Hirata M., Murata K., Zhang H. H-infinity Control Versus Disturbance-Observer-Based Control // IEEE Trans. Ind. Electron. 1998. Jun. V. 45. No. 3. P. 488–495.
- 111. Bickel R., Tomizuka M. Passivity-Based Versus Disturbance Observer Based Robot Control: Equivalence and Stability // J. Dyn. Sys. Meas. Control. 1999. V. 121. No. 1. P. 41–47.
- 112. Umeno T., Kaneko T., Hori Y. Robust Servosystem Design with Two Degrees of Freedom and Its Application To Novel Motion Control of Robot Manipulators // IEEE Trans. Ind. Electron. 1993. Oct. V. 40. No. 5. P. 473–485.
- 113. Umeno T., Hori Y. Robust Speed Control of DC Servomotors Using Modern Two Degrees-of-Freedom Controller Design // IEEE Trans. Ind. Electron. 1991. Oct. V. 38. No. 5. P. 363–368.
- 114. Ohishi K., Ohnishi K., Miyachi K. Torque-Speed Regulation of DC Motor Based On Load Torque Estimation Method // Proc. Int. Power Electronics Conf. (IPEC–Tokyo '83) Tokyo, Japan / Ed. D. Gakkai. Inst. Electrical Engineers of Japan, 1983. March 27–31. V. 2. P. 1209–1218.
- 115. Ohnishi K. New Development of Servo Technology in Mechatronics // IEEE Trans. Ind. Applicat. 1987. V. 107. No. 1. P. 83–86.
- 116. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // АиТ. 2007. № 7. С. 103–115. *Tsykunov A.M.* Robust Control Algorithms With Compensation of Bounded Perturbations // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
- 117. Atassi A.N., Khalil H.K. a Separation Principle for The Stabilization of a Class of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. Sep. V. 44. No. 9. P. 1672–1687.
- 118. Фуртат И.Б., Цыкунов А.М. Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Пробл. управления. 2008. N 5. C. 2–7.
- 119. Furtat I., Fridman E., Fradkov A.L. Disturbance Compensation With Finite Spectrum Assignment for Plants with Input Delay // IEEE Trans. Automat. Control. 2018. V. 63. No. 1. P. 298–305.
- 120. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. V. AC-24. No. 4. P. 541–553.
- 121. Фуртат И.Б., Гущин П.А. Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // АиТ. 2019. № 2. С. 3–21.
 - Furtat I.B., Gushchin P.A. A Control Algorithm for an Object with Delayed Input Signal Based on Subpredictors of the Controlled Variable and Disturbance // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 201–216.
- 122. Фуртат И.Б. Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. № 9. С. 579–587.
- 123. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд–во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

- 124. *Проскурников А.В.*, *Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в задачах оптимального управления с эталонной моделью при неизвестных внешних сигналах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 49–62.
- 125. *Краснова С.А.*, *Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
- 126. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. М.: Сов. радио, 1979.
- 127. *Близорукова М.С., Максимов В.И., Пандолфи Л.* Динамическая реконструкция входа в нелинейной системе с запаздыванием // AuT. 2002. № 2. С. 3–13. *Blizorukova M.S., Maksimov V.I., Pandolfi L.* Dynamic Input Reconstruction for a Nonlinear Time-Delay System // Autom. Remote Control. V. 63. No. 2. P. 171–180.
- 128. Osipov Y., Kryazhimskii A. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995. ISBN: 2-88124-944-2.
- 129. $Maksimov\ V.I.$ On the Reconstruction of a Control Through Results of Observations // Proc. 3rd Europ. Control Conf. (ECC'95). Rome, Italy. 1995. P. 3766–3771.
- 130. *Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осилов Ю.С.* О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47. N 6. С. 815–825.
- 131. $\it Максимов В.И.$ О реконструкции граничных возмущений: случай краевых условий Неймана // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 160–176.
- 132. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамической реконструкции входных воздействий при измерении части координат // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1007–1017.
- 133. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамического восстановления входного воздействия // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 88–100.
- 134. *Максимов В.И.* О применении конечномерных управляемых моделей к задаче реконструкции входа в линейной системе с запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 196–204.
- 135. *Максимов В.И.* К проблеме реконструкции входа нелинейной системы с постоянным запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 121–130.
- 136. *Максимов В.И.* О динамической реконструкции возмущений системы по неточным дискретным измерениям фазовых координат // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 3. С. 15–32.
- 137. *Максимов В.И.* Реконструкция входного воздействия динамической системы при измерении части координат фазового вектора // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 752–761.
- 138. *Максимов В.И.* Реконструкция возмущения нелинейной системы при измерении части координат фазового вектора // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1836–1845.
- 139. Kryazhimskii A., Maksimov V. On Identification of Nonobservable Contamination Inputs // Environ. Modell. Software. 2005. V. 20. P. 1057–1061.
- 140. Осилов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161
- 141. *Красовский Н.Н.*, *Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- 142. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

- 143. Цыкунов А.М. Компенсация возмущений при управлении линейным объектом по косвенным измерениям // АиТ. 2010. № 4. С. 120–129.
 Tsykunov A.M. Indirect Measurements-Based Compensation of Disturbances At Control of A Linear Plant // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 654–662.
- 144. Silverman L.D.M. Inversion of Multivariable Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. V. 14. No. 3. P. 270–276.
- 145. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 34. № 6. С. 744–750.
- 146. Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В. Метод управляемой модели в задачах обращения динамических систем // Докл. РАН. Теория управления. 1997. Т. 354. \mathbb{N} 2. С. 171–173.
- 147. *Ильин А.В.*, *Коровин С.К.*, *Фомичев В.В.* Робастное обращение векторных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 11. С. 1478–1486.
- 148. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
- 149. *Ильин А.В.*, *Емельянов С.В.*, *Фомичев В.В.* Синтез робастных инверторов минимального порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 4. С. 575–585.
- 150. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009.
- 151. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Обращение линейных динамических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 405–413.
- 152. Атамась Е.И., Ильин А.В., Фомичев В.В. Обращение векторных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1363–1369.
- 153. *Ильин А.В.*, *Коровин С.К.*, *Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 329–339.
- 154. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
- 155. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
- 156. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: Физматлит, 2012.
- 157. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
- 158. *Халил Х.К.* Нелинейные системы / Под ред. А.Л. Фрадкова. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Ин-т компьютерных исследований, 2009.
- 159. Дезоер Ч., Видъясагар М. Системы с обратной связью. Вход-выходные соотношения / Под ред. Ю.С. Попкова. М.: Наука, 1983.
- 160. Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д. Пассивность и пассификация нелинейных систем // AuT. 2000. Т. 3. С. 3–37.

 Polushin I.G., Fradkov A.L., Hill D.D. Passivity And Passification of Nonlinear
 - Systems // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 3. P. 355–388.
- 161. Corless M., Tu J. State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems // Automatica. 1998. June. V. 34. No. 6. P. 757–764.
- 162. Kudva P., Viswanadham N., Ramakrishna A. Observers for Linear Systems with Unknown Inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. V. AC-25. P. 113–115.

- 163. Fradkov A.L. Passification of Non-square Linear Systems and Feedback Yakubovich–Kalman–Popov Lemma // Eur. J. Control. 2003. No. 6. P. 573–582.
- 164. Efimov D. V., Fradkov A.L. Adaptive Tuning To Bifurcation for Time-Varying Nonlinear Systems // Automatica. 2006. V. 42. P. 417–425.
- 165. *Андриевский Б.Р.*, *Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.
- 166. Андриевский Б.Р., Селиванов А.А. Новые результаты по применению метода пассификации. Обзор // АиТ. 2018. № 6. С. 3–48. Andrievskii B.R., Selivanov A.A. New Results on the Application of the Passification Method. A Survey // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 957–995.
- 167. Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, 1994.
- 168. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд.-во СПбГУ, 2004.
- 169. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Использование LMI toolbox пакета Matlab в синтезе законов управления. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобаческого, 2006.
- 170. Xiong Y., Saif M. Unknown Disturbance Inputs Estimation Based On A State Functional Observer Design // Automatica. 2003. V. 39. P. 1389–1398.
- 171. Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. Nov. V. 36. No. 11. P. 1241–1253.
- 172. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley, 1995.
- 173. *Мирошник И.В.*, *Никифоров В.О.*, *Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- 174. *Фуртат И.Б.*, *Нехороших А.Н*. Метод бэкстеппинга для структурно неопределенных объектов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 1. С. 61–67.
- 175. Bekiaris-Liberis N., Krstic M. Compensation of Transport Actuator Dynamics with Input-Dependent Moving Controlled Boundary // IEEE Trans. Automat. Control. 2018. Nov. V. 63. No. 11. P. 3889–3896.
- 176. Sorensen A.J., Egeland O. Design of Ride Control System for Surface Effect Ships Using Dissipative Control // Automatica. 1995. Feb. V. 31. No. 2. P. 183–199.
- 177. Luenberger D.G. Canonical Forms for Linear Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1967. June. V. 12. No. 3. P. 290–293.
- 178. Krstic M., Smyshlyaev A. Boundary Control of PDEs: A Course On Backstepping Designs. SIAM, 2008.
- 179. Bresch-Pietri D., Krstic M. Adaptive Trajectory Tracking Despite Unknown Input Delay and Plant Parameters // Automatica. 2009. Sep. V. 45. No. 9. P. 2074–2081.
- 180. Isidori A., Pyrkin A., Borisov O. an Extension of a Lemma of Dayawansa and Its Application in the Design of Extended Observers for Nonlinear Systems // Automatica. 2019. Aug. V. 106. P. 178–183.
- 181. Gauthier J.-P., Kupka I. Solutions to Part I Exercises // Deterministic Observation Theory and Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001. P. 195–216.
- 182. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

- 183. Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. Application of Enhanced Extended Observer in Station-Keeping of a Quadrotor with Unmeasurable Pitch and Roll Angles // Proc. Joint 8th IFAC Symp. Mechatronic Systems and 11th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems (MECHATRONICS & NOLCOS 2019), Vienna, Austria. IFAC, 2019. Sept. 4–6.
- 184. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances with Unknown Frequency // IFAC Proc. Volumes. 1996. June–July. V. 29. No. 1. P. 5168–5173.
- 185. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances with Unknown Frequency // Automatica. 1997. Dec. V. 33. No. 12. P. 2213–2221.
- 186. Marino R., Tomei P. Global Estimation of n Unknown Frequencies // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. Aug. V. 47. No. 8. P. 1324–1328.
- 187. Bobtsov A.A., Efimov D., Pyrkin A.A., Zolghadri A. Switched Algorithm for Frequency Estimation with Noise Rejection // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. Sept. V. 57. No. 9. P. 2400–2404.
- 188. *Бобцов А.А.* Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // AuT. 2008. № 8. C. 25–32. URL: http://mi.mathnet.ru/at701.
 - Bobtsov A.A. Output Control Algorithm With The Compensation of Biased Harmonic Disturbances // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 8. 1289–1296.
- 189. *Бобцов А.А.*, *Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // AиT. 2009. № 3. С. 114–122. URL: http://mi.mathnet.ru/at436.
 - Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Sinusoidal Disturbances in Linear Plants of Arbitrary Relative Degree // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
- 190. *Бобцов А.А.* Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // АиТ. 2002. № 11. С. 108–117. URL: http://mi.mathnet.ru/at2180.
 - Bobtsov A.A. Robust Output-Control for a Linear System with Uncertain Coefficients // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 11. P. 1794–1802.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 20.09.2019

После доработки 10.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020

© 2020 г. А. ЭРНАНДЕС (capricornale_1415@hotmail.com), А.С. ПОЗНЯК, д-р техн. наук (apoznyak@ctrl.cinvestav.mx) (Исследовательский центр CINVESTAV, Мехико, Мексика)

НЕЛИНЕЙНОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ: ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КАК ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ¹

В данной статье представлены две численные процедуры идентификации параметров гамильтоновых систем непрерывного времени. Предложенный подход использует свойства первых интегралов и их характеристики, позволяя рассматривать процесс параметрической идентификации как стабилизацию производных первых интегралов. Эта идея реализуется с помощью двух численных процедур, использующих дифференциатор типа "супер-твист" для оценки производных обобщенных координат и импульсов в реальном времени. Показана сходимость указанных процедур идентификации и их применение для скалярного и векторного случаев. Численные примеры демонстрируют хорошую работоспособность предложенных методов.

Ключевые слова: функция Гамильтона, первые интегралы, идентификапия, стабилизапия.

DOI: 10.31857/S0005231020090020

1. Введение

Идентификация систем — это совокупность методов определения характеристик математической модели системы по измерениям ее входов и выходов. Методы оценки параметров нелинейных систем зависят от структуры модели и основаны либо на линейных, либо на нелинейных (по параметрам) моделях. Выбор между этими двумя подходами часто диктуется исследуемым процессом. Если известна структура дифференциального уравнения, описывающего процесс, то алгоритмы оценивания параметров могут быть применены непосредственно для оценки неизвестных параметров. Когда априорной информации не достаточно, и процесс рассматривается как черный ящик, то стандартным подходом является описание оператора входа/выхода с помощью подходящей модели представления, которая обычно выбирается нелинейной во входных и выходных переменных, но линейной по оцениваемым параметрам. В этом случае для оценивания параметров обычно применяются различные варианты методов наименьших квадратов (МНК).

Применение МНК требует выполнения так называемого "условия постоянного возбуждения". Если неизвестные параметры, подлежащие оценке, участвуют в описании модели в нелинейной форме, прямое применение такого

 $^{^{-1}}$ Работа выполнена при финансовой поддержке CONACYT-Mexico (грант № CB 2015-251552-Y).

подхода приводит к глобальной многоэкстремальной оптимизационной задаче, решение которой может быть получено с помощью МНК или любого другого градиентного метода (см. [1, 2]). Последние достижения в этой области включают в себя комбинированный алгоритм сглаживания и оценивания параметров [3, 5], который компенсирует неопределенную структуру модели и внешние возмущения путем введения в модель изменяющихся во времени параметров, и рекурсивный алгоритм, предполагающий повторное использование данных [6].

Гамильтоновы системы представляют собой особый класс консервативных нелинейных систем [7, 17], в которых отсутствует "потеря энергии", а некоторые функции координат и обобщенных импульсов поддерживаются неизменными (первые интегралы) [8]. Эти консервативные свойства предоставляют новые возможности для успешной параметрической идентификации неизвестных параметров, участвующих нелинейно в описании модели. В данной работе реализован такой подход, предусматривающий использование двух новых процедур идентификации в непрерывном времени. Доказана сходимость этих процедур, два численных примера иллюстрируют хорошую работоспособность предлагаемого подхода.

1.1. Основные допущения и ограничения

Существует множество работ, посвященных идентификации линейных параметров, но которые не могут быть реализованы для моделей, содержащих нелинейные параметры. Как было уже отмечено выше, эта ситуация имеет место из-за того, что многие модели систем основаны на динамике особого вида: нелинейность параметров может спровоцировать сингулярность и многоэкстремальность соответствующих оптимизационных задач. Основные допущения, которые ограничивают класс гамильтоновых систем, рассматриваемых в данной работе, могут быть сформулированы в следующем виде:

- доступная (измеряемая в реальном времени) информация представляет собой обобщенные координаты (q_1, \ldots, q_n) и импульсы (p_1, \ldots, p_n) , но не их производные;
- специальное условие принадлежности "конусу", о котором будет говориться ниже, требуется для обеспечения работоспособности двух предложенных процедур идентификации; оно основано на так называемом условии σ -стабилизации (локальной выпуклости).

1.2. Основные результаты

Основные результаты данной статьи состоят в следующем:

- переформулирована задача параметрической идентификация для широкого класса гамильтоновых систем как задача стабилизации специальных функций (первых интегралов), остающихся постоянными на траекториях систем; их число не обязательно должно соответствовать полной системе независимых первых интегралов и может варьироваться от 1 до 2n;
- применен наблюдатель типа "супер-твист" [9] для оценки соответствующих производных состояний и обобщенных импульсов в реальном времени;

- предложены две численные процедуры для реализации процедуры идентификации: одинарная и двойная "сигнум-коррекция";
- проанализирована сходимость (асимптотическая и на конечном горизонте) этих процедур;
- приведены два численных примера, иллюстрирующие работоспособность предложенного подхода, где функции Гамильтона содержат неизвестные параметры в нелинейном виде.

1.3. Структура работы

Структура работы выглядит следующим образом. Вторая часть, следующая за Введением, представляет собой краткое описание лагранжева и гамильтонова формализма. В следующей части (третьей) дано определение первых интегралов и приведены их возможные структуры. В четвертой части представлена постановка задачи и кратко описан подход к решению проблемы. В пятой части задача идентификации рассмотрена как стабилизация с использованием методов оптимизации. Затем обсуждаются две предложенные численные процедуры и их сходимость. Наконец, два примера численного моделирования, реализованных в MATLAB/SIMULINK®, показывают эффективность предложенных методов.

2. Гамильтонов формализм и постановка задачи

2.1. Лагранжев формализм

Описание динамических моделей для широкого класса электромеханических систем задается классическим уравнением Лагранжа вида

(1)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{i}}L\left(q,\dot{q},t\right) - \frac{\partial}{\partial q_{i}}L\left(q,\dot{q},t\right) = Q_{i,non-potential}\left(q,\dot{q},t\right), \quad i = \overline{1,n},$$

где $q=(q_1,\ldots,q_n)^\intercal$ и $\dot{q}=(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)^\intercal$ — вектора обобщенных координат и скоростей, $L(q,\dot{q},t)$ — гладкая функция Лагранжа 2n+1 переменных, заданная в форме

(2)
$$L\left(q,\dot{q},t\right):=T\left(q,\dot{q},t\right)-V\left(q,t\right).$$

Для "натуральных" механических систем $T(q,\dot{q},t)$ — кинетическая энергия рассматриваемой системы, а V(q,t) — потенциальная энергия, $Q_{i,non-potential}(q,\dot{q},t)$ — обобщенная непотенциальная сила, действующая на i-ую координату $(i=\overline{1,n})$.

Ниже будет рассмотрен только класс консервативных систем, в которых непотенциальные силы отсутствуют, т.е. для всех $i=\overline{1,n}$ и всех $t\geqslant 0$

$$Q_{i,non-potential}\left(q,\dot{q},t\right)=0,$$

что обеспечивает выполнение равенства

(3)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q,\dot{q},t) - \frac{\partial}{\partial q_i}L(q,\dot{q},t) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Говоря о траектории системы, используем обозначения $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))^\intercal$ и $\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t))^\intercal$ — векторы обобщенных координат и скоростей как функции времени $t \geqslant 0$.

2.2. Гамильтонов формализм

В соответствии с гамильтоновым подходом определим обобщенные импульсы

(4)
$$p_{i} := \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{i}} L\left(q, \dot{q}, t\right), \quad i = \overline{1, n},$$

и функцию Гамильтона (преобразование Лежандра)

(5)
$$H\left(q,p,t\right) := \left[p^{\mathsf{T}}\dot{q} - L\left(q,\dot{q},t\right)\right]_{\dot{q} = \dot{q}\left(q,p,t\right)},$$

где вектор \dot{q} получен из условия (4) в предположении разрешимости этой системы. Таким образом, $\dot{q}=\dot{q}\,(q,p,t)$. Из уравнений (3) и (4) напрямую следует, что обобщенные координаты и импульсы удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона

(6)
$$\begin{cases} \dot{q}_{i} = \frac{\partial}{\partial p_{i}} H\left(q, p, t\right), \\ \dot{p}_{i} = -\frac{\partial}{\partial q_{i}} H\left(q, p, t\right), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

2.3. Неизвестные параметры динамических уравнений

Предположим, что и кинетическая энергия $T\left(q,\dot{q},t\right)$, и, вообще говоря, потенциальная $V\left(q,t\right)$ зависят от вектора неизвестных параметров $\alpha^*\in\mathbb{R}^r$, а именно

$$T = T(q, \dot{q}, t | \alpha^*), \quad V = V(q, t | \alpha^*),$$

причем подразумевается, что функция Лагранжа $L\left(q,\dot{q},t\right)$ (2) и соответствующая функция Гамильтона $H\left(q,p,t\right)$ (5) становятся зависящими также от α^* , т.е.

$$L = L(q, \dot{q}, t | \alpha^*), \quad H = H(q, p, t | \alpha^*).$$

Отметим, что на траектории системы переменные состояния, обобщенные координаты и импульсы (и их производные), также зависят от этого неизвестного параметра:

$$q = q\left(t|\alpha^*\right), \quad \dot{q} = \dot{q}\left(t|\alpha^*\right), \quad p = p\left(t|\alpha^*\right), \quad \dot{p} = \dot{p}\left(t|\alpha^*\right),$$

а уравнения (6) переходят в равенства

(7)
$$\begin{cases} \dot{q}_{i}\left(t|\alpha^{*}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{i}}H\left(q\left(t|\alpha^{*}\right),p\left(t|\alpha^{*}\right),t|\alpha^{*}\right), \\ \dot{p}_{i}\left(t|\alpha^{*}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_{i}}H\left(q\left(t|\alpha^{*}\right),p\left(t|\alpha^{*}\right),t|\alpha^{*}\right). \end{cases}$$

 $3 \, a \, Me \, 4 \, a \, Hue \, 1$. Отметим, что ввиду равенства (4) могут возникнуть два различных случая:

Случай 1: когда для всех $i = \overline{1,n}$

(8)
$$\frac{\partial^{2}}{\partial \alpha^{*} \partial \dot{q}_{i}} L\left(q\left(t|\alpha^{*}\right), \dot{q}\left(t|\alpha^{*}\right), t|\alpha^{*}\right) = 0,$$

что влечет за собой независимость импульса p от α^* и возможность оценить его напрямую из (4), используя измерения $q = q(t|\alpha^*)$ и оценки производной $\hat{q}(t|\alpha^*)$.

Случай 2: когда по крайней мере для одного $i=i_0$

(9)
$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^* \partial \dot{q}_{i_0}} L\left(q\left(t|\alpha^*\right), \dot{q}\left(t|\alpha^*\right), t|\alpha^*\right) \neq 0,$$

что требует использования специальной процедуры, которая в дальнейшем будет названа p-адаптивным оцениванием.

2.4. Постановка задачи

 $3 a \, д \, a \, 4 \, a \, 1$. Основываясь на онлайн-измерении координат $q \, (t | \alpha^*)$ (предположим, что эти измерения точны, т.е. не содержат никакого шума в измерениях), получить оценку векторного параметра $\alpha \, (t) \in \mathbb{R}^r$, которая является acumnmomuvecku состоятельной, а именно, удовлетворяет

(10)
$$\alpha(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \alpha^*.$$

Для успешного решения поставленной задачи, нужно получить онлайноценки $\dot{q}(t|\alpha^*)$, $p(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$, которые будут обозначены ниже как $\hat{q}(t)$, $\hat{p}(t)$ и $\hat{p}(t)$. Это можно сделать путем применения так называемого точного дифференциатора, реализованного по схеме "супер-твист" [9].

Заметим, что вектор α^* неизвестных параметров может участвовать в канонических уравнениях (7) нелинейным образом. Таким образом, во многих случаях прямое применение метода наименьших квадратов (или его модификации) невозможно, что порождает новые задачи для исследователей и инженеров: требуется разработать конкретные методы (численные процедуры) для успешной идентификации неизвестного векторного параметра α^* .

3. Первые интегралы

3.1. Определение первых интегралов

Напомним, что функция f(t,q,p), которая принимает постоянное значение на траекториях гамильтоновой системы (6), называется *первым интегралом* системы. Класс первых интегралов характеризует следующее свойство [10].

 \mathcal{H} емма 1. Функция f(t,q,p) является первым интегралом гамильтоновой системы (6) с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда

(11)
$$\frac{\partial f(t,q,p)}{\partial t} + [f,H] = 0,$$

 $\mathit{rde}\left[f,H\right]$ называют **скобками Пуассона** и задают с помощью выражения

(12)
$$[f,H] := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

3.2. Характеристика первых интегралов путем исследования гамильтоновой структуры

Проверяя выполнение свойства (11) (подставляя функции H в (11)), несложно убедиться, что следующие функции являются первыми интегралами:

1) если

(13)
$$\frac{\partial H(q,p)}{\partial t} = 0, \quad \text{to} \quad H = \underset{t}{\text{const}},$$

2) если

(14)
$$H = H(f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m), q_{m+1}, p_{m+1}, \dots, q_n, p_n, t),$$

$$\text{To } f(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m) = \text{const},$$

3) если

(15)
$$H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \dots, \varphi_n(q_n, p_n), t),$$
$$\operatorname{TO} \varphi_i(q_i, p_i) = \operatorname{const}, \quad i = \overline{1, n},$$

4) если

(16)
$$H = H(\varphi_j(\dots \varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \dots), q_{j+1}, p_{j+1}, \dots, q_n, p_n, t),$$

$$\text{To } \varphi_k(\dots \varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \dots, q_k, p_k) = \underset{t}{\text{const}}, \quad k = \overline{1, j},$$

5) если

(17)
$$H = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(q_i, p_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i, p_i)},$$

$$\text{To } f_i(q_i, p_i) - H\varphi_i(q_i, p_i) = \underset{t}{\text{const}}, \quad i = \overline{1, n},$$

6) если

(18)
$$H = \phi(t) \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(q_i, p_i)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(q_i, p_i)}, \quad \text{to} \quad f_i(q_i, p_i) = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}.$$

4. Задача идентификации как задача стабилизации

4.1. Производная первого интеграла

Неизвестные параметры, вообще говоря, входят аналитически в каждый первый интеграл $f(t,q,p|\alpha)$, поэтому нужно помнить, что измеренные или оцененные траектории зависят от реальных значений неизвестного α^* , т.е. $q=q\left(t|\alpha^*\right)$ и $p=p\left(t|\alpha^*\right)$. Это означает, что

$$f(t, q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*)|\alpha) = \text{const}, \text{ если } \alpha = \alpha^*.$$

Другими словами, для идентификации неизвестного параметра $\alpha \in \mathbb{R}^r$ придется использовать свойство (19), рассматривая параметр α как управляющее (корректирующее) воздействие, которое будет выбрано для стабилизации функции $f(t, q(t|\alpha^*), p(t|\alpha^*)|\alpha)$.

Это требование можно выразить в виде

$$\sigma\left(t,\alpha\right):=\frac{d}{dt}f(t,q\left(t|\alpha^{*}\right),p\left(t|\alpha^{*}\right)|\alpha)\equiv0,\ \text{ если }\alpha=\alpha^{*}.$$

Таким образом, выполнение условия стабилизации (19) можно интерпретировать как построение управляющего воздействия $u \in \mathbb{R}^r$, обеспечивающего σ -стабилизацию

(21)
$$\sigma\left(t,u\right) = 0$$

для любого $t \geqslant 0$.

4.2. Мотивирующий пример

Для иллюстрации свойства (20) рассмотрим стандартный маятник, динамика которого описана уравнением

(22)
$$\dot{q} = \frac{p}{\alpha^{*2}}, \quad \dot{p} = -mg\alpha^{*}\sin(q) + (\nu\alpha^{*})^{2}\sin(q)\cos(q), \quad \alpha^{*} > 0$$

(r=n=1) с гамильтонианом

(23)
$$H(q, p|\alpha^*) = \frac{p^2}{2\alpha^{*2}} + mg\alpha^* (1 - \cos(q)) - \frac{1}{2} (\nu \alpha^*)^2 \sin^2(q).$$

Отметим, что неизвестный параметр α^* входит в это уравнение нелинейно. Следуя (20) и обозначая для простоты $q^* = q(t|\alpha^*)$ и $p^* = p(t|\alpha^*)$, определим

$$\sigma(t,u) = \frac{p^*}{u^2}\dot{p}^* + \left[mgu\sin(q^*) - (\nu u)^2\sin(q^*)\cos(q^*)\right]\dot{q}^* =$$

$$= -\frac{p^*}{u^2}\frac{\partial H}{\partial q} + \left[mgu\sin(q^*) - (\nu u)^2\sin(q^*)\cos(q^*)\right]\frac{\partial H}{\partial p} =$$

$$= -\frac{p^*}{u^2}\left[mgu\sin(q^*) - (\nu u^2)\sin(q^*)\cos(q^*)\right] +$$

$$+ \left[mgu \sin(q^*) - (\nu u)^2 \sin(q^*) \cos(q^*) \right] \frac{p^*}{u^2} =$$

$$= p^* \left(\frac{u^2 - \alpha^{*2}}{\alpha^{*2} u^2} \right) \left[mg \sin(q^*) (\alpha^* + u) - (\alpha^{*2} + u^2) \nu^2 \sin(q^*) \cos(q^*) \right].$$

Когда $u=\alpha^*$, имеем $\sigma\left(t,\alpha^*\right)=0$. Для иллюстрации зависимости $\sigma(t,u)$ от u для различных $t\geqslant 0$ рассмотрим ситуацию, когда $\alpha^*=0.5,\,m=1,\,g=9.82$ и $\nu=1$. График соответствующей функции $\sigma(t,u)$ показан на рис. 1 для различных значений $t=t_k$ $(k=1,2,\ldots)$.

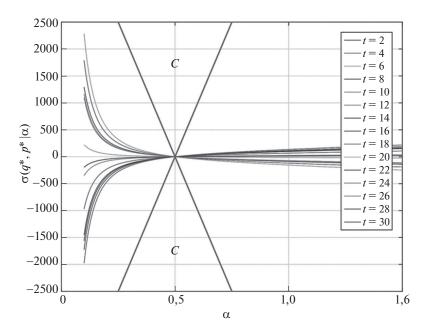


Рис. 1. График $\sigma(t, u)$.

Отметим, что все кривые на рисунке лежат за пределами конуса C.

5. Задача идентификации как задача оптимизации

5.1. Дифференциальные оптимизаторы

Условие (21), которое нужно реализовать, также может быть представлено в виде следующей задачи оптимизации:

(24)
$$|\sigma(t,\alpha)| \to \min_{\alpha}$$

для всех $t \ge 0$ или, другими словами,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} |\sigma(t, \alpha)| = \operatorname{sign} \left(\sigma(t, \alpha)\right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha).$$

Рассмотрим следующие численные дифференциальные процедуры (оптимизаторы) [15, 16]:

1) Процедура 1 (использование одной сигнум-функции):

(25)
$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t)\operatorname{sign}\left(\sigma(t, \alpha(t))\right) \frac{\partial}{\partial \alpha}\sigma(t, \alpha(t));$$

2) Процедура 2 (использование двух сигнум-функций):

(26)
$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t)\operatorname{sign}\left(\sigma(t,\alpha(t))\right)\operatorname{sign}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma(t,\alpha(t))\right).$$

В обеих процедурах функция усиления $\gamma\left(t\right)$ удовлетворяет предположению

(27)
$$\gamma(t) \geqslant 0, \quad \int_{t=0}^{\infty} \gamma(t) dt = \infty.$$

5.2. Наблюдатель типа "cynep-meucm" для оценивания $\dot{q}(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$ Сначала отметим, что, если $\partial f/\partial t \equiv 0$ в (20), то

$$\sigma\left(t,\alpha\left(t\right)\right) = \left[\frac{\partial}{\partial q} f\left(t,\alpha\left(t\right)\right)\right]^{\mathsf{T}} \dot{q}\left(t|\alpha^{*}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial p} f\left(t,\alpha\left(t\right)\right)\right]^{\mathsf{T}} \dot{p}\left(t|\alpha^{*}\right),$$

в результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma\left(t,\alpha\left(t\right)\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial q}f\left(t,\alpha\left(t\right)\right)\right]^{\mathsf{T}}\dot{q}\left(t|\alpha^{*}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial p}f\left(t,\alpha\left(t\right)\right)\right]^{\mathsf{T}}\dot{p}\left(t|\alpha^{*}\right).$$

Несложно заметить, что получена функция $\frac{\partial}{\partial \alpha} \sigma(t, \alpha(t))$, которая используется в обеих процедурах (25) и (26). Для нахождения ее значения необходимо знать вектор-функции $\dot{q}(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$, или, если первое невозможно, использовать их онлайн-оценки $\hat{q}(t)$ и $\hat{p}(t)$. Эти оценки можно получать в реальном времени, применяя следующий "супер-твист" алгоритм [9, 11]:

— для случая 1 (8):

(28)
$$\left(\frac{\dot{x}_2(t)}{\hat{q}(t|\alpha^*)} \right) = \begin{cases} q(t|\alpha^*) - \beta \operatorname{sign}(\hat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \\ x_2(t) - \theta ||q(t|\alpha^*) - \hat{q}(t)||^{1/2} \operatorname{sign}(\hat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \end{cases}$$

(29)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \hat{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} p(t) - \beta \operatorname{sign}(\widehat{p}(t) - p(t)), \\ x_2(t) - \theta ||p(t) - \widehat{p}(t)||^{1/2} \operatorname{sign}(\widehat{p}(t) - p(t)), \end{cases}$$

— для случая 2 (9) *p*-адаптивная оценка:

(30)
$$\left(\begin{array}{c} \dot{x}_2(t) \\ \hat{q}(t|\alpha^*) \end{array} \right) = \begin{cases} q(t|\alpha^*) - \beta \operatorname{sign}(\widehat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \\ x_2(t) - \theta ||q(t|\alpha^*) - \widehat{q}(t)||^{1/2} \operatorname{sign}(\widehat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \end{cases}$$

$$(31) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_{2}\left(t\right) \\ \widehat{p}(t|\alpha(t)) \end{pmatrix} = \begin{cases} p(t|\alpha\left(t\right)) - \beta \mathrm{sign}(\widehat{p}(t|\alpha\left(t\right)) - p(t|\alpha\left(t\right))), \\ x_{2}(t) - \theta ||p(t|\alpha(t)) - \widehat{p}(t|\alpha(t))||^{1/2} \mathrm{sign}(\widehat{p}(t|\alpha(t)) - p(t|\alpha(t))), \end{cases}$$

где параметры дифференциаторов θ и β удовлетворяют условиям [28, 29, 30, 31]

$$\beta > 5L, \quad \theta^2 \in \left\{32L, 8[\beta - L]\right\},$$
$$\max \left\{ \sup_t |\dot{q}(t|\alpha^*)|; \sup_t |\dot{p}(t|\alpha^*)| \right\} \leqslant L,$$

если производные обобщенных координат и импульсов ограничены на всей числовой оси времени.

Замечание 2. Заметим, что оценки $\hat{q}(t)$ и $\hat{p}(t)$ сходятся за конечное время к реальным значениям $\dot{q}(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$, если в онлайн-измерениях $q(t|\alpha^*)$ и $p(t|\alpha^*)$ нет шума и возмущений.

5.3. Анализ сходимости процедуры оптимизации

Следующая теорема представляет собой достаточные условия работоспособности предлагаемых процедур идентификации (25)–(26). Зададим функцию Ляпунова $V(\alpha)$ в виде

(32)
$$V(\alpha) := \frac{1}{2} \|\alpha - \alpha^*\|^2.$$

Теорема 1. Предположим, что

- 1. Условие (27) выполнено при ограниченных $\gamma(t)$.
- 2. Для всех $t\geqslant 0$ и всех $\alpha\in\mathbb{R}^r$ специальное условие принадлежности "конусу" выполнено

$$\operatorname{sign}\left(\sigma\left(t,\alpha\right)\right)\left(\alpha-\alpha^{*}\right)^{\intercal}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\sigma\left(t,\alpha\right)\right]\geqslant\rho V^{\varkappa}\left(\alpha\right),\quad\rho>0,$$

 $e \partial e \varkappa \in (0,1].$

Тогда

— процедура (25) обеспечивает асимптотическую сходимость

$$\alpha(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \alpha^*,$$

— процедура (26) при $\gamma(t) = \text{const} > 0$ и $\varkappa = 0.5$ обеспечивает сходимость за конечное время, а именно, для всех $t > t_{reach}$ $\alpha(t) = \alpha^*$, где

(33)
$$t_{reach} := \sqrt{2} \frac{||\alpha(0) - \alpha^*||}{\gamma \rho}.$$

Доказательство. Из (32) следует, что

$$\dot{V}\left(\alpha\left(t\right)\right) = \left(\alpha\left(t\right) - \alpha^{*}\right)^{\mathsf{T}} \dot{\alpha}\left(t\right) =$$

$$= -\gamma\left(t\right) \operatorname{sign}\left(\sigma\left(t, \alpha\left(t\right)\right)\right) \left(\alpha\left(t\right) - \alpha^{*}\right)^{\mathsf{T}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sigma\left(t, \alpha\left(t\right)\right)\right].$$

По условиям этой теоремы

(34)
$$\dot{V}(\alpha(t)) \leqslant -\gamma(t) \rho V^{\varkappa}(\alpha(t)).$$

Принимая $\varkappa=1$ для процедуры (25) и учитывая предположение (27), получаем

$$V\left(\alpha\left(t\right)\right) \leqslant V\left(\alpha\left(0\right)\right) \exp\left(-\rho \int\limits_{\tau=0}^{t} \gamma\left(\tau\right) d\tau\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что влечет за собой $\alpha(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \alpha^*$. Если же $\varkappa = 0,5$ и $\gamma = \mathrm{const} > 0$, то для процедуры (26) имеем

(35)
$$\dot{V}\left(\alpha\left(t\right)\right) \leqslant -\gamma\rho\sqrt{V\left(\alpha\left(t\right)\right)},$$

что влечет

$$0 \leqslant \sqrt{V\left(\alpha\left(t\right)\right)} = \frac{\left|\left|\alpha(t) - \alpha^*\right|\right|}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{V\left(\alpha\left(0\right)\right)} - \frac{1}{2}\gamma\rho t$$

И

$$||\alpha(t) - \alpha^*|| \le ||\alpha(0) - \alpha^*|| - \frac{\gamma \rho}{\sqrt{2}}t$$

и приводит к выполнению условия (33).

6. Численное моделирование

 $\Pi p u m e p 1$ (наклонная плоскость). Рассмотрим простую механическую систему, представленную на рис. 2.

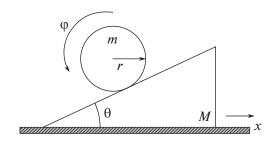


Рис. 2. Наклонная плоскость.

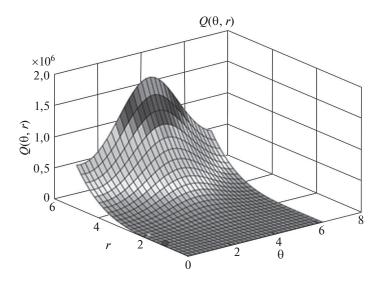


Рис. 3. Функция $Q(\theta, r)$.

Кинетическая энергия этой системы задана в виде

$$T(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mr\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\theta) + \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2,$$

а потенциальная энергия равна

$$V(x, \varphi, t) = -gm\varphi r \sin(\theta).$$

Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mr\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\theta) + \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + gm\varphi r\sin(\theta),$$

а уравнения Эйлера-Лагранжа заданы как

$$f_1(\theta, r, t) := (M + m)\ddot{x}(t) - mr\ddot{\varphi}(t)\cos(\theta) = 0,$$

$$f_2(\theta, r, t) := -mr\ddot{x}(t)\cos(\theta) + \frac{3}{2}mr^2\ddot{\varphi}(t) - gmr\sin(\theta) = 0.$$

Для численного моделирования выберем $M=0,1,\,m=1$ и g=9,81. Для применения МНК для оценки двух параметров θ и r, зададим функцию затрат в виде

(36)
$$Q(\theta, r) = \int_{t=0}^{T=50} \left[f_1^2(\theta, r, t) + f_2^2(\theta, r, t) \right] dt.$$

График этой функции $Q(\theta,r)$ приведен на рис. 3, где каждый может увидеть разные локальные экстремумы. Соответствующий гамильтониан задан в виде

(37)
$$H(q(t), p(t)) = \frac{2(m+M)p_{\varphi}^2 + 3mp_x^2r^2 + 4mp_{\varphi}p_xr\cos(\theta)}{2mr^2(m+3M+2m\sin^2(\theta))} - gm\varphi r\sin(\theta),$$

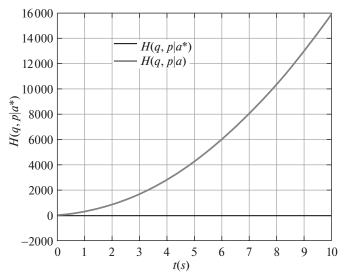


Рис. 4. $H(q, p|\alpha^*)$ и $H(q, p|\alpha)$.

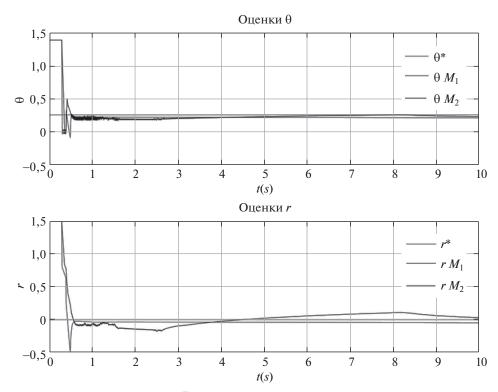


Рис. 5. α —сходимость.

который получен с учетом первого интеграла и $\alpha^* = \left[\begin{array}{cc} \theta & r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\pi}{12} & 2 \end{array}\right]$. Как видно на рис. 4, $H(q(t),p(t)|\alpha^*) = \operatorname*{const}_t$, а $H(q(t),p(t)|\alpha)$ с "неправильным" $\alpha = \left[\begin{array}{cc} \frac{\pi}{3} & 5 \end{array}\right]$ осциллирует по времени. Этот результат подтверждает тот факт, что стабилизация $H(q(t),p(t)|\alpha)$ имеет смысл и соответствует идентификации

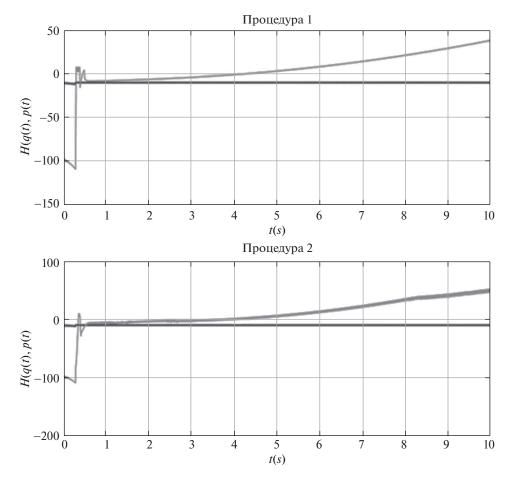


Рис. 6. Гамильтониан.

точного значения параметра α^* . Используя процедуры (25)–(26), получим процесс идентификации, представленный на рис. 5.

В данных экспериментах $\gamma(t)$ была задана в виде

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma/\eta, & \text{если} \quad t \in [0, t_0), \\ \frac{\gamma}{\eta(t - t_0 + 1)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0. \end{cases}$$

Для процедуры (25) были использованы $\gamma=1,\,\gamma=15$ и $\eta=1000,\,$ а для процедуры (26) были взяты значения $\gamma=20$ и $\eta=1.$ Динамика изменения гамильтониана (23) показана на рис. 6.

 $\Pi p u m e p 2$ (электрическая цепь). Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 7. Кинетическая энергия задана в виде

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{\dot{q}_1^2 L_1}{2} + \frac{\dot{q}_2^2 L_2}{2},$$

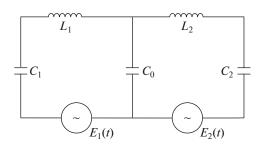


Рис. 7. Электрическая цепь.

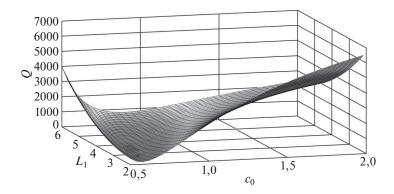


Рис. 8. Функция $Q(c_0, L_1)$.

а потенциальная энергия - выражением

$$V(q,t) = \frac{(c_0 + c_1)q_1^2}{2c_0c_1} + \frac{(c_0 + c_2)q_2^2}{2c_0c_2} - e_1q_1 - e_2q_2 - \frac{q_1q_2}{c_0}.$$

Тогда, получим следующую функцию Лагранжа L = T - V:

$$L(q,\dot{q},t) = e_1 q_1 + e_2 q_2 + \frac{\dot{q}_1^2 L_1}{2} + \frac{\dot{q}_2^2 L_2}{2} + \frac{q_1 q_2}{c_0} - \frac{(c_0 + c_1)q_1^2}{2c_0 c_1} - \frac{(c_0 + c_2)q_2^2}{2c_0 c_2}.$$

Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$f_1(c_0, L_1, t) := \ddot{q}_1 L_1 - e_1 + \frac{q_1}{c_0} + \frac{q_1}{c_1} - \frac{q_2}{c_0} = 0,$$

$$f_2(c_0, t) := \ddot{q}_2 L_2 - e_2 + \frac{q_2}{c_0} + \frac{q_2}{c_2} - \frac{q_1}{c_0} = 0.$$

Для проведения численного моделирования были выбраны следующие значения: $L_2 = 7$, $c_1 = 0.5$ и $c_2 = 2.2$. Для использования МНК снова зададим функцию затрат вида (36), которая будет минимизирована с помощью подходящего выбора двух параметров c_0, L_1 . График функции $Q(c_0, L_1)$ показан на рис. 8, видно, что функция имеет несколько экстремумов.

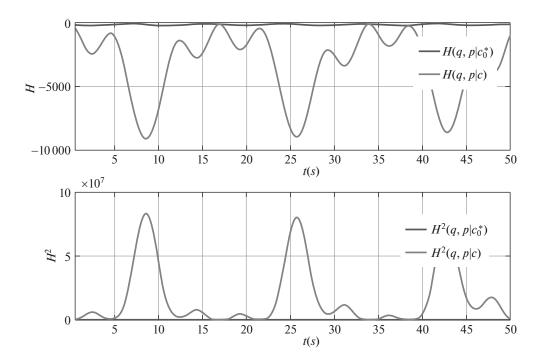


Рис. 9. $H(q, p|\alpha^*)$ и $H(q, p|\alpha)$.

Соответствующий гамильтониан представлен в виде

(39)
$$H(q(t), p(t), t) = \frac{p_1}{2L_1} + \frac{p_2}{2L_2} + \frac{(c_0 + c_1)q_1^2}{2c_0c_1} + \frac{(c_0 + c_2)q_2^2}{2c_0c_2} - e_1q_1 - e_2q_2 - \frac{q_1q_2}{c_0}.$$

Фактически он совпадает с первым интегралом при реальных значениях $\alpha = \alpha^* = \begin{bmatrix} c_0 & L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 5 \end{bmatrix}$. Как видно, на рис. 9 $H(q(t), p(t) | \alpha^*) = \text{const}$, а $H(q(t), p(t) | \alpha)$ при $\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ осциллирует со временем, что подтверждает предположение о необходимости идентификации неизвестного вектора α^* путем решения задачи стабилизации $H(q(t), p(t) | \alpha)$.

В этом случае имеем дело со случаем 2, когда обобщенный импульс зависит от неизвестного параметра. т.е. $p=p(t,\alpha^*)$. Таким образом, используя p-адаптивную оценку (31), можно увидеть, что $p(t,\alpha(t))$ быстро сходится к $p(t,\alpha^*)$ (см. рис. 10).

Применяя процедуры (25), (26), получим процесс идентификации, показанный на рис. 11.

Для данного примера были использованы $\gamma=0,00000148$ для процедуры (25), а для процедуры (26) — $\gamma=2$ и тот же вид $\gamma(t)$ (38). Динамика гамильтониана (39) представлена на рис. 12.

Как видно из примеров, численное моделирование динамических систем, которые нелинейно содержат неизвестные параметры в описании, показывает

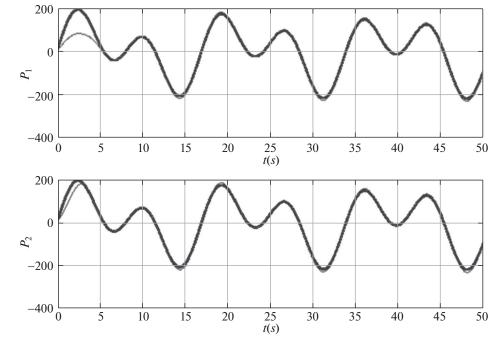


Рис. 10. $p(t, \alpha(t))$.

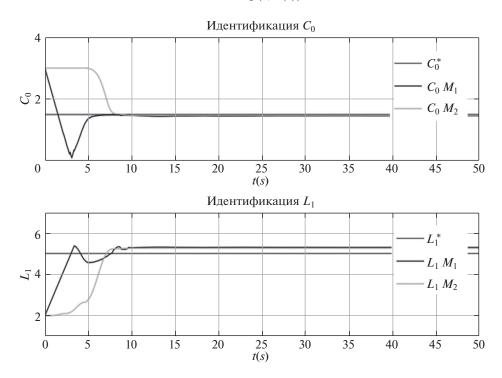


Рис. 11. α —сходимость.

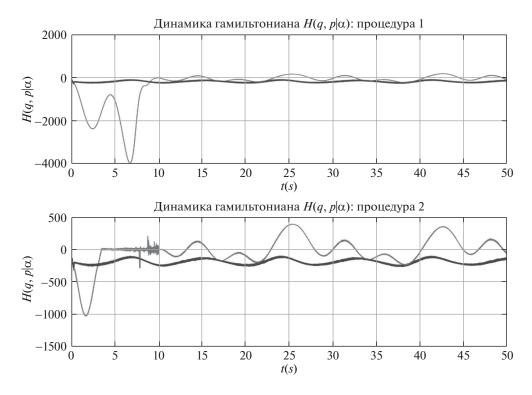


Рис. 12. Гамильтониан.

хорошую работоспособность предложенного подхода в то время, как МНК практически не работает, застревая в точках локальных экстремумов.

Замечание 3. Предложенный подход может быть эффективно применен к большому классу физических моделей, где рассматривается движение релятивистских частиц в электромагнитных полях, так как в этих системах отсутствуют непотенциальные силы, а следовательно, их можно отнести к классу консервативных систем, допускающих применение формализма Гамильтона.

7. Выводы

- В настоящей работе предложен подход для параметрической идентификации, основанный на первых интегралах гамильтоновой системы.
- Этот подход требует онлайн-измерений соответствующих обобщенных координат и применения наблюдателя типа "супер-твист" для оценки их производных и обобщенных импульсов.
- Численное моделирование процедур "стабилизации" (25) и (26) иллюстрирует работоспособность предложенного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Astrom, K.J. and Eykhoff, P., System Identification-A Survey, *Automatica*, 1971, vol. 7, no. 2, pp. 123–162.

- Seinfeld, J.H., Nonlinear Estimation Theory Industrial & Engineering Chemistry. 1970. V. 62. No. 1. P. 32–42.
- 3. Billings S.A. Identification of nonlinear systems—a survey // IEE Proc. D (Control Theory and Applications). 1980. V. 127(6). P. 272–285.
- 4. Bard J. Nonlinear parameter estimation. Academic Press. New York and London. 1974.
- 5. Leal D.J., Georgantzis G., Roberts P.D. Parameter estimation in uncertain models of nonlinear dynamic systems // Electron. Lett. 1977. V. 14. No. 22. P. 718–720.
- Lawrence P.J., Rogers G.J. Recursive identification for system models of transfer function type // IFAC Proc. Darmstadt. 1979. V. 12. No. 8. P. 283–288.
- 7. Kenneth R.M., Glen R.H., Dan O. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and N-Body Problem. Second Edition. Springer Nature Switzerland AG, 2017.
- 8. Primera J.R., Sanchez M., Romero M., Sierraalta A., Ruette F. Analysis of parametric functionals in semiempirical approaches using simulation techniques // Journal of Molecular Structure: THEOCHEM. 1999. V. 469. P. 177–190.
- 9. Levant A. Robust exact differentiation via sliding mode technique // Automatica. 1998. V. 34. No. 3. P. 379–384.
- 10. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.
- Shtessel Yu., Edwards C., Fridman L., Levant A. Sliding Mode Control and Observation. Birkhauser. New York. 2014.
- 12. Noel J., Kerschen C. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. V. 83. P. 2–35.
- 13. Kerschen G., Worden K., Vakakis A., Golinval J.-C. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. V. 20. No. 3. P. 505–592.
- 14. Norton J. An Introduction to Identification // Academy Press London. 1986.
- 15. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983.
- Poznyak A. Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Systems. Elsevier. Amsterdam-NY. 2008. V. 1.
- 17. Reyhanoglu M., van der Schaft A., McClamroch N.H., Kolmanovsky I. Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. No. 9. P. 1663–1671.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 30.01.2020

После доработки 20.05.20209

Принята к публикации 25.05.2020

© 2020 г. А.Д. ИСКЕНДЕРОВ, д-р физ.-мат. наук (asaf.iskander@mail.ru) (Национальная академия авиации, Баку), Р.А. ГАМИДОВ, канд. физ.-мат. наук (rqamidov@mail.ru) (Ленкоранский Государственный Университет, Ленкорань)

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ГРАДИЕНТОМ УПРАВЛЕНИЯ В КОЭФФИЦИЕНТАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача оптимального управления для линейных эллиптических уравнений с коэффициентами, зависящими от управляющей функции и ее градиента. Доказывается существование и единственность решения рассматриваемой задачи, результаты применены к задаче оптимального управления границей области.

Kлючевые слова: оптимальное управление, эллиптические уравнения, существование и единственность решения, корректность постановки, управление границей области.

DOI: 10.31857/S0005231020090032

1. Введение

Задачи с управлениями в коэффициентах уравнений в частных производных относятся к наиболее важным прикладным классам задач, которые являются наиболее трудными для теоретического исследования и численного решения. Вариационные методы решения обратных задач для уравнений математической физики тесно связаны с задачами оптимального управления в коэффициентах этих уравнений [1–3]. В [1–9] и др. для ряда постановок задач с управлениями в коэффициентах основных типов уравнений математической физики исследуются вопросы корректности, необходимые и достаточные условия оптимальности, разработки вычислительных методов их решения.

В данной работе рассматриваются задачи оптимального управления для эллиптических уравнений с коэффициентами, зависящими не только от управляющей функции, но и от ее градиента. Именно зависимость коэффициентов уравнения от градиента функции управления создает дополнительные трудности для применения известных методов доказательства разрешимости и условий оптимальности решения. Критерий качества в постановке рассматриваемой задачи оптимального управления связан с теорией обратных задач, и частные случаи этого критерия применены в [2–7] и др. В заключении даны приложения результатов к задаче оптимального управления границей области [4, 8].

Изучаемая в работе задача связана с такими важными прикладными задачами, как задачи управления границей области, задачи с неизвестной границей, процессы управления, когда коэффициенты уравнения состояния зависят не только от управляющего фактора, но и от его градиента. Для теоретического и прикладного исследования подобных задач наряду с их разрешимостью важным является также установление условий оптимальности решения, а также другие вопросы применения в практике. Поэтому данная работа частично носит и подготовительный характер; в ней излагаются вопросы разрешимости рассматриваемых задач и их связь с главными представителями процессов из этого класса практики, т.е. с задачами управления границей области, а также даются основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения. В последующей работе будут рассмотрены вопросы об условиях оптимальности управления для основной задачи, а также задачи с неизвестной границей области и др. Поэтому последующая работа посвящена необходимому условию оптимальности для задач оптимизации с градиентом управления в коэффициентах уравнений эллиптического типа.

2. Постановка задачи

Пусть D — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n — с достаточно гладкой границей Γ , \overline{D} — замыкание области D, $x==(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная точка области \overline{D} . Общеизвестные функциональные пространства $L_p(D),\ W_p^l(D),\ W_p^l(D)$ и др., где $p\geq 1,\ l\geq 0$ — заданные числа, которые ниже используются, определены, например, в [10], обозначения \forall означает «для любого», ψ означает «при почти всех».

Рассмотрим процесс с управлениями в коэффициентах эллиптического уравнения

(1)
$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + c(x, v, v_x(x)) u_k = f(x, v, v_x(x)), \quad k = 1, 2,$$

и с краевыми условиями

(2)
$$u_1|_{\Gamma} = g_1(x), \quad x \in \Gamma,$$

(3)
$$\frac{\partial u_2}{\partial N}\Big|_{\Gamma} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \cos(x_i, \hat{N}) \Big|_{\Gamma} = g_2(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, $g_2(x) \in L_2(\Gamma)$ — заданные функции, коэффициенты уравнения (1) $a_{ij}(x,v,w)$, $b_i(x,v,w)$, $i,j=1,\ldots,n$, c(x,v,w) и правая часть уравнения f(x,v,w) — заданные функции своих аргументов, v=v(x) — функция управления, которая принадлежит множеству

$$V = \left\{ v : \ v = v(x) \in W^1_{\infty}(D), \ 0 < v_1 \le v(x) \le v_2(x), \ |v_x(x)| \le v_3, \ \forall x \in D \right\},$$

 v_1, v_2, v_3 — заданные положительные постоянные, $u_k = u_k(x) = u_k(x, v),$ k = 1, 2, — решения, соответственно первой и второй краевых задач для урав-

нения (1), N — внешний конормаль границы Γ . Пусть требуется минимизировать функционал

(4)
$$J_{\alpha}(v) = \left\| \omega(v(E)) \left[u_{1}(x) - u_{2}(x) \right] \right\|_{L_{2}(D)}^{2} + \alpha \left\| v(x) - \bar{v}(x) \right\|_{L_{2}(D)}^{2} \to \inf, \quad \alpha \ge 0,$$

на множестве V при условиях (1)–(3), где $\omega(v)$ — непрерывно-дифференцируемая функция определенная на отрезке $[v_1,v_2],\ \bar{v}\in L_2(D)$ — заданный элемент, $\alpha\geq 0$ — заданное число. Предположим, что функции $u_k\equiv u_k(x)\equiv u_k(x,v),\ k=1,2,$ для каждого выбранного $v(x)\in V$ являются обобщенными решениями из $W_2^1(D)$ краевых задач (1),(2) и (1),(3), соответственно. Ниже всюду предполагается, что:

1) $a_{ij}(x,v,w), b_i(x,v,w), i,j=\overline{1,n}, c(x,v,w), f(x,v,w)$ — заданные непрерывные функции своих аргументов в области

$$\Pi \equiv \left\{ (x, v, w) : x \in \bar{D}, v \in [v_1, v_2], w \in [-v_3, v_3] \right\};$$

2) коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям равномерной эллиптичности:

$$\mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,v,w) \xi_i \xi_j \le \mu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a_{ij}(x,v,w) = a_{ji}(x,v,w),$$

$$0 < \mu_1 \le c(x, v, w) \le \mu_3, \ \forall (x, v, w) \in \Pi, \ \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \ i, j = \overline{1, n},$$

 $\mu_m, m = \overline{1,3}$ — заданные положительные числа;

3) операторы суперпозиции $F(v) \equiv f(x,v(x),v_x(x)), \ C(v) \equiv c(x,v(x),v_x(x)), \ B_i(v) \equiv b_i(x,v(x),v_x(x)), \ A_{ij}(v) \equiv a_{ij}(x,v(x),v_x(x))$ для всех $i,j=1,\ldots,n,$ непрерывно действуют из $W^1_\infty(D)$ в пространства $L_2(D),\ L_\infty(D),\ L_\infty(D),$ соответственно. Нетрудно указать достаточные условия, обеспечивающие справедливость этого предположения [11].

Из теории эллиптических уравнений [10] следует, что при принятых выше предположениях если число μ_2 «достаточно большое», то задачи Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений разрешимы. Точнее, доказывается [10], что для каждого выбранного v из множества V при принятых выше предположениях, решения задач (1), (2) и (1), (3) из пространства $W_2^1(D)$ существуют, единственны и верны априорные оценки

(5)
$$||u_1||_{W_2^1(D)} \le C_1 \left[||f||_{L_2(D)} + ||g_1||_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \right],$$

(6)
$$||u_2||_{W_2^1(D)} \le C_2 \left[||f||_{L_2(D)} + ||g_2||_{L_2(\Gamma)} \right],$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 определяются параметрами v_i и μ_i , i=1,2,3. Нетрудно проверить, что [10] при условиях $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$,

 $g_2(x) \in L_2(\Gamma)$ и при принятых выше предположениях заменой неизвестных функций граничные условия (2), (3) всегда могут быть приведены к однородному виду

$$(7) u_1|_{\Gamma} = 0,$$

(8)
$$\frac{\partial u_2}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Поэтому в дальнейшем предположим, что граничные условия (2) и (3) приведены к однородному виду (7) и (8). Ниже воспользуемся определением.

Определение 1. При каждом выбранном управлении $v \in V$ функцию $u_1(x) \in \mathring{W}_2^1(D)$ назовем решением краевой задачи (1), (7), функцию $u_2(x) \in W_2^1(D)$ назовем решением краевой задачи (1), (8), если для любых функций $\eta_1(x) \in \mathring{W}_2^1(D)$ и $\eta_2(x) \in W_2^1(D)$ они удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{D} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, v(x), v_{x}(x)) \frac{\partial u_{k}(x)}{\partial x_{j}} \frac{\partial \eta_{k}(x)}{\partial x_{i}} + \frac{\partial u_{k}(x)}{\partial x_{i}} \right) dx + \left[\sum_{i=1}^{n} b_{i}(x, v(x), v_{x}(x)) \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{i}} + c(x, v(x), v_{x}(x)) u_{k}(x) - f(x, v(x), v_{x}(x)) \right] \eta_{k}(x) dx = 0, \quad k = 1, 2.$$

Ниже используется теорема, которая доказана в [12].

T е о p е м а 1 [12]. Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство, U — замкнутое, ограниченное в метрике X множество, функционал I(v) на U полунепрерывен снизу и снизу ограничен, $r \ge 1$, $\alpha > 0$ — заданные числа. Тогда существует плотное подмножество K пространства X такая, что для любых $\bar{v} \in K$ функционал $I_{\alpha}(v) \equiv I_{0}(v) + \alpha \|v - \bar{v}\|_{X}^{r}$ достигает своего наименьшего значения на U и при любом r > 1 это решение единственно.

3. Существование и единственность решения

Задачу о минимизации функционала (4), т.е. функционала $J_{\alpha}(v)$ на множестве V при условиях (1), (7), (8), назовем задачей (4).

T е о р е м а 2. При любом $\alpha > 0$ существует плотное подмножество K пространства $L_2(D)$ такое, что для любого $\bar{v} \in K$ задача (4) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы дано в Приложении.

Замечание. Одним из центральных вопросов в теории экстремальных задач являются условия оптимальности решения. Методика доказательства теоремы 2 и способы установления необходимых условий, изложенных в [5, 7, 9], указывают на то, что этими способами можно доказать не только непрерывность, но и дифференцируемость функционала $J_{\alpha}(v)$. Градиент функционала $J_{\alpha}(v)$ дает возможность выразить необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства (см. [5, 7, 9]).

4. Задача оптимального управления границей области

Задачи управления границей области часто возникают в практике, они имеют разные корни происхождения. Исследованы различные аспекты теории этих задач. Ниже изучена задачи оптимального управления границей многомерной области. Эта задача преобразованием системы координат сводится к задаче с управлениями в коэффициентах эллиптического уравнения.

Области границы, которые выражаются функциями, равномерно удовлетворяющими условию Липшица, называются строго липшицевыми областями [10]. Линейно нормированное пространство функций, равномерно удовлетворяющих условию Липшица в области \overline{D} , обозначим через $Lip(\overline{D})$. Известно, что это пространство эквивалентно пространству $W^1_{\infty}(\bar{D})$ [10]. Следовательно, границы строго липшицевых областей выражаются функциями из $W^1_{\infty}(D)$. Ниже рассматриваются задачи управления границей строго липшицевых областей.

Пусть D_0' — ортогональная проекция области D_0 на (n-1)-мерное евклидово подпространство R^{n-1} , Γ_0 — граница области D_0 , $x=(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ — произвольная точка области D_0 , $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $x'\in D_0'\subset R^{n-1}$ при $x\in D_0$.

Пусть Γ_+ — известная часть, а Γ_- — неизвестная часть границы Γ_0 , т.е. $\Gamma_0 = \Gamma_+ \bigcup \Gamma_-$. Если Γ_+ — пустое множество, тогда вся граница Γ_0 неизвестна. Обозначим через $\Omega_a = \{x = (x', x_n) : x' \in D'_0, 0 \le x_n \le a\}$ область в R^n , где a — положительное число. Предположим, что

- 4) Γ_{+} известная часть границы Γ_{0} и она строго липщицева;
- 5) Γ_- неизвестная часть границы Γ_0 и однозначно выражается функцией $v = v(x_1, \ldots, x_{n-1}) = v(x')$ при $x' \in D'_0$;
- 6) существует такое положительное число a, что $D_0 \subset \Omega_a$. Множество

$$V_1 = \left\{ v : \ v = v(x') \in W^1_{\infty}(D'_0), \ 0 < v_1 \le v(x') \le v_2, \ \left| v_x(x') \right| \le v_3, \ \stackrel{\circ}{\forall} x' \in D'_0 \right\}$$

назовем множеством допустимых управлений границей области D_0 , где v_i , i=1,2,3— заданные положительные постоянные.

Рассмотрим эллиптическое уравнение с измеримыми ограниченными коэффициентами $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, c(x):

(10)
$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in D_0,$$

с первым

(11)
$$u|_{\Gamma} = g_1(x), \quad x \in \Gamma_0$$

и со вторым

(12)
$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = g_2(x), \quad x \in \Gamma_0$$

краевыми условиями. Предположим, что

7) $f(x)\in L_2(D_0),\ g_1(x)\in W_2^{1/2}(\varGamma_0),\ g_2(x)\in L_2(\varGamma_0),\ a_{ij}(x)\in L_\infty(D_0),\ b_i(x)\in L_\infty(D_0),\ c(x)\in L_\infty(D_0),\ a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ \forall\ i,j=\overline{1,n},$ — заданные функции;

8)
$$\mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$
, $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \mu_1 \le 1$

 $\leq c(x) \leq \mu_3$, где μ_i — заданные положительные числа, i=1,2,3.

Ради простоты изложения граничные условия (11), (12) примем однородными, т.е. предположим, что $g_1(x) = g_2(x) = 0$. Если же эти функции отличны от нуля, но принадлежат к указанным выше классам, то, как это было отмечено, при принятых выше предположениях граничные условия (11), (12) могут быть сведены к однородным граничным условиям [10]. Решение уравнения (10) с первым краевым условием (11) обозначим через $u_1(x)$, а с вторым краевым условием (12) через $u_2(x)$. При предположении однородности граничных условий соотношения (10)–(12) вкратце могут быть записаны в следующем виде:

(13)
$$Au_k(x) = f(x), \quad x \in D_0, \quad k = 1, 2,$$

(14)
$$u_1(x)|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_2(x)}{\partial N}\Big|_{\Gamma_0} = 0.$$

Определение 2. Решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $\overset{\circ}{W}_2^1(D_0)$ и $W_2^1(D_0)$ соответственно краевых задач (13) и (14) понимаются в смысле выполнения ими следующих интегральных тождеств:

(15)
$$\int_{D_0} \left\{ \sum_{i=1} a_{ij}(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_k(x)}{\partial x_i} + \left[\sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i} + c(x) u_k(x) - f(x) \right] \eta_k(x) \right\} dx = 0$$

для любых $\eta_k(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_0), \ k = 1, 2.$

Пусть требуется найти минимум функционала

(16)
$$J_{\alpha}(v) = \|\omega(v(E))[u_1(x) - u_2(x)]\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|v(x) - \bar{v}(x)\|_{L_2(D)}^2, \quad \alpha \ge 0,$$

$$V_1 = \left\{ v : \ v = v(x') \in W^1_{\infty}(D'_0), \ 0 < v_1 \le v(x') \le v_2, \ \left| v_x(x') \right| \le v_3, \ \stackrel{\circ}{\forall} x' \in D'_0 \right\},$$

где $\omega(v)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[v_1,v_2]$, $\bar{v}(x)$ — заданный элемент пространства $L_2(D_0)$, $\alpha \geq 0$ — числовой параметр, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются решениями краевых задач (13), (14) в смысле тождества (15). Частные случаи функционала (16) с $\omega(v)=1$ были рассмотрены в [2–7] и др. Ввод множителя $\omega(v)$ в выражение функционала качества (16) обобщает его и связан с другими применениями результатов, в том числе к задачам управления границей области.

T е о р е м а 3. При любом $\alpha > 0$ существует плотное подмножество K пространства $L_2(D_0)$ такое, что для любого $\bar{v} \in K$ задача управления границей области (13)–(16) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы дано в Приложении.

5. Заключение

Рассмотренные выше задачи относятся к классу некорректных задач [1,3-5]. Нетрудно привести примеры, подобно работам [4,5], которые показывают, что решения этих задач являются неустойчивыми. Условие $\alpha>0$ в теоремах 2 и 3 является достаточно точным. Примерами подобно [4,5] проверяется, что при $\alpha=0$, с сохранением других условий этих теорем, решения задач (1)–(4) и (13)–(16) могут не существовать и быть неединственными.

Для задач с управлениями в коэффициентах уравнений в частных производных в [1–3, 5, 9] разработан ряд итеративных методов регуляризации для их численного решения. Эти алгоритмы не только теоретически обоснованы, но и практически неоднократно испытаны. Для задач оптимального управления границей области также имеются ряд вычислительных методов, которые успешно применялись для решения прикладных задач [8]. Неустойчивость подобных задач создает немало трудностей для их численного решения [4, 5]. Однако сведение задачи оптимального управления границей области к задачам с управлениями в коэффициентах дифференциальных уравнений расширяет класс методов их решения. Так как методы решения вариационных задач относительно развиты, то вариационные методы дают дополнительные возможности для применения разных вычислительных алгоритмов решения рассматриваемых задач. Одним из основных выводов данной работы является еще то, что в ней указывается на принадлежность задач оптимального управления в коэффициентах дифференциальных уравнений, обратных задач и задач с неизвестной границей, а также управления границей области к одному классу в смысле неустойчивости их решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

 \mathcal{A} оказательство теоремы 2. Сначала докажем непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Обозначим через $u_k(x;v+\Delta v)$ и $u_k(x;v)$

решения задач (1), (7) и (1), (8), соответствующие управлениям $v + \Delta v \in V$ и $v \in V$. Пусть $\Delta u_k(x) \equiv u_k(x; v + \Delta v) - u_k(x; v)$, k = 1, 2. Если из уравнения для $u_k(x; v + \Delta v)$ вычтем соответствующее уравнение для $u_k(x; v)$, то получим, что функция $\Delta u_k(x)$, k = 1, 2, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{D} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) \frac{\partial \Delta u_{k}}{\partial x_{j}} \frac{\partial \eta_{k}}{\partial x_{i}} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_{i}(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) \frac{\partial \Delta u_{k}}{\partial x_{j}} \eta_{k} + c(x, v + \Delta v) \Delta u_{k} \eta_{k} \right] dx =$$

$$= -\int_{D} \left[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - a_{ij}(x, v, v_{x})) \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{j}} \frac{\partial \eta_{k}}{\partial x_{i}} + \right.$$

$$+ \left. \left(\sum_{i=1}^{n} (b_{i}(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - b_{i}(x, v, v_{x})) \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{i}} + \right.$$

$$+ \left. \left(c(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - c(x, v, v_{x}) \right) u_{k} - \right.$$

$$- \left. \left(f(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - f(x, v, v_{x}) \right) \right] dx, \quad k = 1, 2,$$

$$\forall \eta_{1} = \eta_{1}(x) \in \mathring{W} \left[D \right] \text{ if } \forall \eta_{2} = \eta_{2}(x) \in W_{2}^{1}(D).$$

моте идП

$$\Delta u_k(x) \in W_2^1(D), \quad k = 1, 2.$$

Примем обозначения:

$$\bar{A}_{ij}(x) = a_{ij}(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$\bar{B}_i(x) = b_i(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\bar{C}(x) = c(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x),$$

$$F_{jk}(x) = \sum_{i=1}^n \left[a_{ij}(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - a_{ij}(x, v, v_x) \right] \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

$$F_{0k}(x) = \left(f(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - f(x, v, v_x) \right) - \left(c(x, v + \Delta v, v_x + v) - c(x, v, v_x) \right) u_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[b_i(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - b_i(x, v, v_x) \right] \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, n}, k = 1, 2.$$

Если в этих обозначениях учитывать соотношение (9) из определения 1 обобщенного решения из $W_2^1(D)$, то получим, что функции Δu_1 и Δu_2 являются

обобщенными решениями соответственно первой и второй краевых задач. Тогда из [10] следует, что эти краевые задачи для функций Δu_1 и Δu_2 имеют единственные решения и для них верны аналоги априорных оценок типа (5) и (6). Если в этих оценках учесть вид функции F_{jk} , $j=\overline{0,n}$, то получим

$$\|\Delta u_{k}\|_{W_{2}^{1}(D)} \leq$$

$$\leq C_{3} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ij}(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - a_{ij}(x, v, v_{x}) \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{i}} \right]^{2} \right\|_{L_{2}(D)}^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(b_{i}(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - b_{i}(x, v, v_{x}) \right) \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{i}} \right\|_{L_{2}(D)} +$$

$$+ \| f(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - f(x, v, v_{x}) \|_{L_{2}(D)} +$$

$$+ \| \left(c(x, v + \Delta v, v_{x} + \Delta v_{x}) - c(x, v, v_{x}) \right) u_{k} \|_{L_{2}(D)} \right\},$$

где $C_3>0$ — некоторая постоянная. Согласно принятому выше предположению 3) операторы $A_{ij}(v)\equiv a_{ij}(x,v,v_x),\ i,j=\overline{1,n},\ B_i(v)\equiv b_i(x,v,v_x),\ i=\overline{1,n},\ C(v)\equiv c(x,v,v_x)$ и $F(v)\equiv f(x,v,v_x)$ непрерывно действуют из $W_\infty^1(D)$ в $L_\infty(D),\ L_\infty(D),\ L_\infty(D),\ L_2(D)$ соответственно. Поэтому правая часть неравенства (П.2) оценивается через Δv и Δv_x в норме $L_\infty(D),\$ другими словами в норме $\|\Delta v\|_{W_\infty^1}$. Следовательно, доказывается, что $\|\Delta u_k\|_{W_2^1(D)}\to 0$ при $\|\Delta v\|_{W_\infty^1(D)}\to 0,\ k=1,2$. Тем самым доказывается, что решения задач (1), (7) и (1), (8) в $W_2^1(D)$ непрерывно зависят от Δv в норме $W_\infty^1(D)$. Очевидно, что приращение функционала $J_0(v)$ представимо в виде

$$\Delta J_0(v) = J_0(v + \Delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$= \|\omega(v(E) + \Delta v(x))[u_1(x) + \Delta u_1(x) - u_2(x) - \Delta u_2(x)]\|_{L_2(D)}^2 -$$

$$- \|\omega(v(E))[u_1(x) - u_2(x)]\|_{L_2(D)}^2.$$

Из непрерывно дифференцируемости функции $\omega(v)$ на отрезке $[v_1,v_2]$ следует, что $\omega(v+\Delta v)=\omega_v(v)+0\left(\|\Delta v\|_{L_2(D)}\right)$. Тогда из формулы (П.3) для приращения функционала $\Delta J_0(v)$ и из того, что $\|\Delta u_k\|_{W_2^1(D)}\to 0$, k=1,2, при $v\in V, v+\Delta v\in V$ и $\|\Delta v\|_{W_\infty^1(D)}\to 0$ следует, что приращение $\Delta J_0(v)\to 0$ при $\|\Delta v\|_{W_\infty^1(D)}\to 0$. Другими словами, функционал $J_0(v)$ является непрерывным на множестве V.

Теперь воспользуемся теоремой 1. В условиях этой теоремы в качестве пространства X, множества U и функционала $I_0(v)$ примем, соответственно, пространство $L_2(D)$, множество V и функционал $J_0(v)$. Согласно доказанному выше утверждению функционал $J_0(v)$ непрерывен на V. Ограниченность снизу функционала $J_0(v)$ непосредственно следует из его вида. Множество V замкнутое и ограниченное в $L_2(D)$. Пространство $L_2(D)$ равномерно

выпукло. Тогда из теоремы 1 следует существование такого плотного подмножества K пространства $L_2(D)$, что для любого $\bar{v} \in K$ задача (4) имеет единственное решение при любом $\alpha > 0$.

Теорема 2 доказана.

 \mathcal{A} о к а з а t е n ь c t в o р е m ы 3. В задаче оптимального управления границей области произведем преобразование системы координат. Докажем, что эта задача сводится к задаче с управлениями в коэффициентах эллиптического уравнения типа (2). В системе (13)–(16) введем новые переменные: $t_i = x_i, i = 1, \ldots, n-1, t_n = x_n/v(x'), t = (t', t_n)$. Отсюда получим, что $x' = t', x_n = t_n v(t')$. Обозначим $z(t', t_n)$ через z(t). Нетрудно проверить, что в новых переменных $z(t) = z(x', x_n)/v(x') = u(t', t_n v(t')) = u(x', x_n) = u(x)$ и область D_0 преобразуется к области D_1 с границей Γ_1 .

Преобразованием системы координат получим, что решения эллиптического уравнения (13) с граничными условиями (14), которые удовлетворяют интегральным тождествам (15), будут преобразованы, к тождествам

$$\int_{D_{1}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{0}(t) \left(\frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{j}} - \frac{t_{n}}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_{i}} \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{n}} \right) \left(\frac{\partial \varphi_{k}(t)}{\partial t_{i}} - \frac{y_{n}}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_{i}} \frac{\partial \varphi_{k}(t)}{\partial t_{n}} \right) + \right. \\
+ \left. \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}^{0}(t) \left(\frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{j}} - \frac{t_{n}}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_{j}} \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{n}} \right) \frac{1}{v(y')} \frac{\partial \varphi_{k}(t)}{\partial t_{n}} + \right. \\
\left(\Pi.4 \right) + \left. \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^{0}(t) \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{n}} \frac{1}{v(t')} \left(\frac{\partial \varphi_{k}(t)}{\partial t_{i}} - \frac{t_{n}}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_{i}} \cdot \frac{\partial \varphi_{k}(t)}{\partial t_{n}} \right) + \right. \\
+ \left. \left. \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_{i}^{0}(t) \left(\frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{i}} - \frac{t_{n}}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_{i}} \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{n}} \right) + \right. \\
+ \left. \left. b_{n}^{0}(t) \frac{1}{v(y')} \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{n}} + c^{0}(t) z_{k}(t) - f^{0}(t) \right] \varphi_{k}(t) \right\} \sqrt{v(t)} dt = 0, \quad k = 1, 2,$$

где приняты следующие обозначения:

$$z_{k}(t) = u_{k}(t', t_{n}v(t')), \quad \varphi_{k}(t) = \eta_{k}(t', t_{n}v(t')),$$

$$a_{ij}^{0}(t) = a_{ij}(t', t_{n}v(t')), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad b_{i}^{0}(t) = b_{i}(t', t_{n}v(t')), \quad i = \overline{1, n},$$

$$c^{0}(t) = c(t', t_{n}v(t')), \quad f^{0}(t) = f(t', t_{n}v(t')).$$

Функционал $J_{\alpha}(v)$ в новых переменных имеет вид

(II.5)
$$J_{\alpha}(v) = \left\| \omega(v(t)) \sqrt{v(t)} \left(z_1(t) - z_2(t) \right) \right\|_{L_2(D_1)}^2 + \alpha \left\| v(t) - \bar{v}(t) \right\|_{L_2(D_0')}^2,$$
$$\alpha > 0.$$

При этом тождество (П.4) окончательно может быть записано в виде

$$\int_{D_1} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \overline{a}_{ij}(t,v(t'),v_t(t')) \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_j} \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_i} + \left[\sum_{i=1}^n \overline{b}_i(t,v(t'),v_t(t')) \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_i} + \overline{c}(t,v(t'))z_k(t) - \overline{f}(t,v(t')) \right] \varphi_k(t) \right\} dt = 0, \quad k = 1, 2,$$

для любых $\varphi_1(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ и $\varphi_2(t) \in W_2^1(D_1)$, где $z_1(t) \overset{\circ}{W}_2^1(D_1)$, $z_2(t) W_2^1(D_1)$ — решения интегрального тождества (П.4). Здесь приняты следующие обозначения:

$$\overline{a}_{ij}(t, v(t'), v_t(t')) = a_{ij}(t', t_n v(t')),
\overline{a}_{in}(t, v(t'), v_t(t')) = a_{in}^0(t) \frac{1}{v(t')} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^0(t) \frac{t_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_j},
\overline{a}_{nn}(t, v(t'), v_t(t')) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^0(t) \frac{t_n^2}{v^2(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial v(t')}{\partial t_j} -
- \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}^0(t) \frac{t_n}{v^2(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(t) \frac{t_n}{v^2(t'')} \cdot \frac{\partial v(t')}{\partial t_i},
\overline{b}_i(t, v(t'), v_t(t')) = b_i^0(t) = b_i(t', t_n v(t')),
\overline{b}_n(t, v(t'), v_t(t')) = b_n^0(t) \frac{1}{v(t')} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^0(t) \frac{t_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_i},
\overline{c}(t, v(t'), v_y(t'')) = c^0(t) = c(t', t_n v(t')),
\overline{f}(t, v(t'), v_t(t')) = f^0(t) = f(t', t_n v(y')), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Нетрудно убедиться, что последнее тождество является интегральным тождеством для решения следующих краевых задач для эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах:

(II.6)
$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_{i}} \left(\overline{a}_{ij}(t, v(t'), v_{t}(t')) \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{j}} \right) + \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_{i}(t, v(t'), v_{t}(t')) \frac{\partial z_{k}(t)}{\partial t_{i}} + \overline{c}(t, v(t')) z_{k}(t) = \overline{f}(t, v(t')),$$

$$(II.7) \qquad z_{1} \Big|_{\Gamma_{1}} = \frac{\partial z_{2}}{\partial N} \Big|_{\Gamma_{1}} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, исходная задача оптимального управления границей области после преобразования, указанного выше, системы координат сводится к задаче об оптимальном управлении в коэффициентах эллиптического уравнения (П.6) в области D_1 с граничными условиями (П.7) и с функционалом качества (П.5), который минимизируется на множестве допустимых управлений V_1 . Для этой задачи выполняются все условия теоремы 2. Из этой теоремы следует справедливость утверждения теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
- 2. Леонс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
- 3. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики. М.: Наука. ДАН СССР. Т. 274. № 3. 1984. С. 531–535.
- 4. Iskenderov A.D. On conditional well-posedness of problems with an unknown boundary of the domain // Soviet. Math. Dokl. 1991. V. 42. No. 2. P. 588–592.
- 5. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Идентификация квантовых потенциалов. Баку: Чашьоглы, 2012.
- 6. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантомеханическими системами // AuT. 1989. № 12. С. 27–38.

 Iskenderov A.D., Yadubov G.Ya. Optimal Control of Nonlinear Quantum-Mechanical
 - Systems // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 12. P. 1631–1641.
- 7. Искендеров А.Д., Гамидов Р.А. Оптимальная идентификация коэффициентов эллиптических уравнений // АиТ. 2011. № 12. С. 144–156.

 Iskenderov A.D., Gamidov R.A. Optimal Identification of Coefficients of Elliptic Equations // Automat. Remote Control. 2011. V. 72. No. 12. P. 2553–2563.
- 8. Баничук Н.Б. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
- 9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
- 10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
- 11. Функциональный анализ. Справочная математическая литература. М.: Наука, 1972.
- 12. Gaebel M. On the existence of optimal control // Math. Nachr. 1979. V. 93. P. 67–73.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 03.11.2018

После доработки 08.12.2019

Принята к публикации 30.01.2020

© 2020 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ 1

Рассматривается механическая система с *n* степенями свободы, подверженная действию позиционных сил и малого гладкого управления. Предполагается, что в отсутствие управления система допускает семейство одночастотных колебаний. Находится универсальное управление — нелинейная сила, посредством которой в управляемой системе реализуется и одновременно стабилизируется цикл. Приводится пример. Ранее управление строилось для двумерного многообразия системы.

Ключевые слова: механическая система, малое гладкое универсальное управление, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231020090044

1. Введение

Исследования релаксационных режимов регенеративного приемника показывают, как можно управлять колебаниями. Включение триода в линейную цепь позволило получить управляющую силу для реализации в системе изолированного устойчивого колебания. Сила нелинейна, носит диссипативный характер и создается анодным током триода. Сама модель описывается известным уравнением Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$$

 $(\mu - \text{малый параметр}).$

Механическая аналогия позволяет применить подход Ван дер Поля к нелинейной системе. Так, Понтрягин в [1] рассмотрел гамильтонову систему на плоскости, допускающую семейство периодических движений, и получил условия на возмущения, гарантирующие существование в возмущенной системе предельного цикла. В [2] для осциллятора Дуффинга используется нелинейная диссипация $v|v|^{p-1}$, $p=\overline{1,4}$, пропорциональная скорости v, а в микромеханике нелинейная диссипация учитывается в Дуффинг-подобных моделях [3]. В [4] подход Ван дер Поля применялся к голономной механической системе, подверженной действию позиционных сил — потенциальных и неконсервативных позиционных, и допускающей одночастотное колебание (периодическое движение). Выделялось двумерное многообразие периодических движений, на котором динамика описывается системой с одной степенью

 $^{^1}$ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

свободы. Находилось универсальное автономное управление, гарантирующее существование и одновременно стабилизацию цикла управляемой механической системы. В системе с произвольным числом степеней свободы притяжение траекторий к выделенному многообразию обеспечивалось линейными диссипативными силами.

В системе с n>1 степенями свободы выделение многообразия периодических движений представляет собой самостоятельную непростую задачу. Поэтому возникает задача построения управления в фазовом пространстве размерности 2n, в котором задана исходная система. Задача решается в данной статье. Для механической системы с n степенями свободы находится управление, которое не зависит явно от времени и используется с малым коэффициентом регулятора. В частном случае n=1 получается управление из [4].

Заметим, что в [5] решалась задача об орбитальной стабилизации периодических решений малоприводных нелинейных систем (с числом независимых приводов на единицу меньше числа степеней свободы неуправляемой консервативной системы). Синтезированный нелинейный закон управления с обратной связью зависит от времени.

2. Семейство симметричных периодических движений

Рассмотрим голономную склерономную механическую систему с n степенями свободы, стесненную стационарными геометрическими связями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s(q), \quad s = 1, \dots, n$$

(T- кинетическая энергия), и подверженную действию позиционных сил $Q_s(q)$ – потенциальных и неконсервативно позиционных.

Для этой системы кинетическая энергия T представляет собой знакоположительную форму скоростей и уравнения движения инвариантны относительно замены

$$(q, \dot{q}, t) \rightarrow (q, -\dot{q}, -t).$$

Следовательно, модель принадлежит к классу обратимых механических систем [6], а фазовый портрет системы симметричен относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. Из симметричности фазового портрета выводятся два следствия: 1) периодическое движение системы является симметричным и пересекает неподвижное множество M с нулевой скоростью \dot{q} , 2) периодическое движение системы не может быть асимптотически устойчивым.

Скорость $\dot{q} = \dot{q}(q_1^0,\dots,q_n^0,t)$ на симметричном периодическом движении (СПД) зависит только от начальной точки $q^0 \in M$. Поэтому условия существования СПД в виде одночастотного колебания с периодом τ записываются (см., например, [7]) в виде равенств

(1)
$$\dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau/2) = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

Приведенные равенства числом n связывают n+1 неизвестных. Следовательно, СПД обратимой механической системы всегда образуют семейства. Составим матрицу

$$A = \left\| \frac{\partial \dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau/2)}{\partial q_j^0} \right\|,$$

где частные производные вычисляются для решения системы (1). Тогда используется определение, данное в [4].

 $O \pi p e g e neh u e 1$. Случай rank A = n называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само $C\Pi \mathcal{I}$ – невырожденным.

Невырожденные СПД системы всегда образуют двумерные многообразия, на которых период монотонно зависит от одного параметра (см. [7]). Для такого многообразия в [4] построена управляемая механическая система.

3. Условия существования цикла в системе

Из изложенного в разделе 2 следует, что цикл не реализуется при действии на систему дополнительных сил, сохраняющих симметричность фазового пространства. Симметрия разрушается только надлежащим управлением, в результате приложения которого получается управляемая механическая система. Имея в виду, чтобы цикл системы был близок к колебанию неуправляемой системы, управление применяется с малым коэффициентом усиления. Далее приводятся необходимые и (отдельно) достаточные условия существования цикла. Эти условия приводят к требованиям, наложенным на искомое управление.

Обозначим через $\Sigma(h)$ семейство СПД, на котором координата дается формулой: $q=\varphi(h,t+\gamma)$. Здесь: h – параметр семейства, γ – сдвиг начальной точки по траектории. Момент пересечения решением неподвижного множества полагается равным нулю: $\gamma=0$. Период τ на Σ зависит от h: $\tau=\tau(h)$.

Пусть на рассматриваемую механическую систему действует управление $\mu R(q,\dot{q})$ (μ – малый параметр). Тогда решение управляемой системы зависит от μ . Вычисляется производная по μ при $\mu=0$ от решения управляемой системы: она удовлетворяет линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений. Для последней системы записываются необходимые и достаточные условия существования τ^* -периодического решения, $\tau^*=\tau(h^*)$, с нулевыми начальными условиями. В результате получается амплитудное (бифуркационное) уравнение

(2)
$$I(h) \equiv \int_{0}^{\tau^*} R(\varphi(h,t),\dot{\varphi}(h,t))\psi(h,t)dt = 0,$$

где ψ — периодическое решение сопряженной линейной системы.

Известно (см. [8, 9]), что корень $h=h^*$ амплитудного уравнения, удовлетворяющий неравенству $dI(h^*)/dh \neq 0$, обеспечивает существование функции $q(\mu,q^0,t)$, описывающей цикл.

Таким образом, получены два условия для нахождения силы R. Эти условия использовались в [4] для построения управления на двумерном многообразии периодических движений. При этом учитывалось, что управление разрушает семейство колебаний, поэтому представляется нечетной функцией скорости. Управление должно быть пригодным для всех точек семейства, включая предельную точку — равновесие. Другие соображения, включая простоту управления, связаны с реализацией управления в виде нелинейной лиссипапии.

4. Нахождение управления

Условия, использованные для нахождения управления в [4], применяются далее к системе с n степенями свободы. При этом учитывается, что управление должно быть нечетной функцией векторной скорости \dot{q} . Тогда требование единообразности вида управления для равновесия и СПД приводит к наличию в функции R множителя, задаваемого квадратичной формой скоростей. Другой множитель (a) в функции R, зависящий в общем случае от векторов q и \dot{q} , характеризует СПД с параметром h. Поэтому a содержит некоторую характеристику K — функцию, зависящую от h. В случае равновесия a=1, а для цикла в окрестности СПД со значением $h=h^*$ вычисляется: $K=K(h^*)$. Наконец, для R должно удовлетворятся амплитудное уравнение (2).

В результате получается, что функция $R = (R_1, \dots, R_n)$ имеет вид

(3)
$$R_{s} = [1 - K(h^{*})b(q, \dot{q})] \sum_{j=1}^{n} l_{sj}\dot{q}_{j}, \quad a = 1 - K(h^{*})b,$$
$$b > 0, \quad l_{sj} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Зависимость K(h) служит характеристикой семейства СПД и определяется из тождества

(4)
$$\int_{0}^{\tau(h)} \left[1 - K(h)b(\varphi(h,t),\dot{\varphi}(h,t))\right] \sum_{s,j=1}^{n} l_{sj}\dot{\varphi}_{j}(h,t)\psi_{s}(h,t)dt \equiv 0.$$

В результате получается

$$K(h) = \frac{\int_0^{\tau(h)} \sigma(h, t) dt}{\int_0^{\tau(h)} b(\varphi(h, t), \dot{\varphi}(h, t)) \sigma(h, t) dt}, \quad \sigma = \sum_{s,j=1}^n l_{sj} \dot{\varphi}_j(h, t) \psi_s(h, t).$$

Продифференцируем по h тождество (4) и учтем нечетность функций $\dot{\varphi}_j$ в (4). Тогда производная интеграла по верхнему пределу обратиться в нуль, а остальные слагаемые приводят $\tau = \tau^*$ к конструктивно проверяемому условию простоты корня

(5)
$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \chi \nu, \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = \int_0^{\tau^*} b(\varphi(h, t), \dot{\varphi}(h, t)) \sigma(h, t) dt.$$

Из (5) получается, что в точках, где dK = 0, достаточные условия существования цикла не выполняются. Поэтому, как и в [4], используется определение 2.

Определение 2. Точка h-семейства СПД механической системы, в которой производная от функции K(h) равна нулю, называется критической.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

T е о р е м а 1. Если механическая система, находящаяся под действием позиционных сил, допускает h-семейство СПД, то при действии управления с функцией (3) в каждой некритической по характеристике K(h) точке $h=h^*$ рождается цикл, если число $\nu \neq 0$.

 $3 a \, {\it Me} \, {\it Vahue} \, 1$. Для системы с одной степенью свободы теорема 1 установлена в [4].

Замечание 2. Характеристика K(h) конструктивно вычисляется по формуле (4). Так, для уравнения Ван дер Поля получается $K=4/h^2$, для математического маятника функция K(h) монотонно убывает (см. [4]).

Для определенности положим, что период цикла равен $\tau^* = 2\pi$.

5. Стабилизация цикла управляемой механической системы

При действии на механическую систему управления с функцией (3) система остается автономной; цикл системы представляет собой изолированное периодическое решение. Найдем условия на управление, которые обеспечивают орбитальную асимптотическую устойчивость цикла. В результате одновременно с нахождением условий устойчивости решается вопрос стабилизации цикла. При этом стабилизация происходит без привлечения дополнительных управлений и в этом смысле будет естественной. Характеристические показатели (XП) СПД разделяются на пары $\pm \lambda$ и находятся из квадратных уравнений (см., например, [7]). В управляемой механической системе коэффициенты характеристического полинома для вычисления ХП непрерывно зависят от параметра μ . Поэтому XП СПД, принадлежащие при $\mu = 0$ положительной (отрицательной) полуплоскости, при достаточно малом $\mu > 0$ остаются в положительной (отрицательной) полуплоскости. Следовательно, цикл возмущенной механической системы может быть орбитально устойчивым, если все XП опорного СПД, для которого $h = h^*$, имеют нулевые действительные части: в управляемой механической системе устойчивый цикл возможен только в окрестности устойчивого в линейном приближении СПД.

Вычисление ХП цикла управляемой механической системы проводится следующим образом.

Составляются уравнения в вариациях для цикла. Получается линейная периодическая система с параметром μ . При $\mu=0$ система обратима и совпадает с уравнениями в вариациях для СПД. Последние уравнения посредством преобразования Ляпунова приводятся к системе с постоянными коэффициентами. При этом выбирается преобразование, обеспечивающее сохранение свойства обратимости; само преобразование системы уравнений в вариациях для цикла описывается в Приложении. Через $\delta q, \delta \dot q$ обозначаются вариации координат и скоростей соответственно.

В результате выполненного преобразования получается линейная 2π -периодическая система

(6)
$$\dot{x} = Py + \mu X(x, y, t), \quad \dot{y} = Gx + \mu Y(x, y, t),$$

в которой

$$X = \Sigma_x(t)\delta R(\delta q, \delta \dot{q}), \quad Y = \Sigma_y(t)\delta R(\delta q, \delta \dot{q}),$$

$$\delta R_s(\delta q, \delta \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial R_s}{\partial q_j} \right)_* \delta q_j + \left(\frac{\partial R_s}{\partial \dot{q}_j} \right)_* \delta \dot{q}_j \right], \quad s = 1, \dots, n.$$

В приведенных формулах $\Sigma_x(t)$ и $\Sigma_y(t) - 2\pi$ -периодические функции, а звездочка означает вычисление производных на решение $q = q(h^*, t)$.

Каждому X Π вида $\lambda + \mu \alpha$ системы (6) по определению отвечает решение

$$x = \zeta(t) \exp(\lambda + \mu \alpha)t, \quad y = \chi(t) \exp(\lambda + \mu \alpha)t$$

с 2π -периодическими функциями $\zeta(t), \chi(t)$. С учетом этого обстоятельства в системе (6) выполняется замена

$$x = w \exp(\lambda + \mu \alpha)t$$
, $y = z \exp(\lambda + \mu \alpha)t$.

Тогда получается система

(7)
$$\dot{w} = Pz - (\lambda + \mu\alpha)w + \mu X(w, z, t), \quad \dot{z} = Gw - (\lambda + \mu\alpha)z + \mu Y(w, z, t).$$

Система (7) имеет по крайнем мере один нулевой XП и соответствующее ему 2π -периодическое решение. Для его нахождения решение системы (6) представляется в виде

$$w = w_0(t) + \mu w_1(t) + o(\mu), \quad z + z_0(t) + \mu z_1(t) + o(\mu).$$

В результате для переменных w_0 и z_0 получается система

(8)
$$\dot{w}_0 = Pz_0 - \lambda w_0, \quad \dot{z}_0 = Gw_0 - \lambda z_0,$$

распадающаяся по числу пар XП СПД на k подсистем, которые описываются переменными w_{0s}, z_{0s} .

Выпишем уравнения для переменных w_1 и z_1 :

(9)
$$\dot{w}_1 = Pz_1 - \lambda w_1 - \alpha w_0 + X(w_0, z_0, t), \\ \dot{z}_1 = Gw_1 - \lambda z_1 - \alpha z_0 + Y(w_0, z_0, t).$$

Видно, что при подстановке $w_{0j}(t)=0$, $z_{0j}(t)=0$, $j\neq s$, система (9) содержит многообразие Υ_s , соответствующее s-й подсистеме в (8). Тогда число α для s-й подсистемы находится из условия существования периодического решения на многообразии Υ_s . Теперь, перебирая все возможные многообразия Υ_s , найдем все ХП системы (7).

В системе (9) возможны три типа многообразий. Первый тип отвечает паре нулевых XП в жордановой клетке. В системе (8) имеем $\lambda=0$, а соответствующая подсистема допускает единственное (с точностью до постоянного множителя) периодическое решение.

Отметим, что циклу возмущенной механической системы всегда отвечает один нулевой XП. Поэтому бифуркация жордановой клетки происходит с рождением действительного XП. Соответствующее значение для α находится из (9).

На многообразиях, отвечающих паре чисто мнимых λ или паре простых нулевых λ , подсистемы в (8) допускают два периодических решения. Поэтому из условий существования в (9) периодических решений находятся два значения α . Явные формулы для вычисления α получаются из средних значений на периоде функций $X_0(t) = X(w_0, z_0, t)$ и $Y_0(t) = Y(w_0, z_0, t)$.

Функции

(10)
$$X_0(t) = \Sigma_x(t)\delta R(\delta q_0, \delta \dot{q}_0), \quad Y_0(t) = \Sigma_y(t)\delta R(\delta q_0, \delta \dot{q}_0)$$

в каждом из перечисленных случаев пар XП получаются при преобразовании Ляпунова. Через $(\delta q_0, \delta \dot{q}_0)$ обозначается периодическое решение системы (6) при $\mu=0$. Что касается функции δR , то она содержит постоянную квадратную матрицу $L=||l_{sj}||$ размерами $n\times n$. Согласно формулам (10) средние значения $\bar{X}_0(t)$ и $\bar{Y}_0(t)$ зависят линейно от элементов l_{sj} $(s,j=\overline{1,n})$.

Для асимптотически орбитально устойчивого цикла все числа α , кроме одного — нулевого, должны быть отрицательными. Из системы (9) следует, что неравенства $\alpha < 0$ приводят к неравенствам для средних $\bar{X}_0(t)$ и $\bar{Y}_0(t)$. Поэтому условия устойчивости выполняются, если совместна линейная по l_{sj} система неравенств.

В механической системе с одной степенью свободы имеется одна пара нулевых XII в жордановой клетке, матрица состоит из одного элемента L и условие $\alpha < 0$ достигается выбором знака числа L. В системе с двумя степенями свободы матрица L состоит из четырех элементов, на числа α , зависящие от четырех постоянных, накладываются три условия отрицательности: условия совместны. В общем случае системы с n степенями свободы асимптотическая орбитальная устойчивость цикла обеспечивается 2n-1 условиями отрицательности чисел α , зависящих от n^2 постоянных. Понятно, что в общем случае $n^2 \geq 2n-1$, а равенство имеет место только при n=1.

Таким образом, система неравенств для нахождения отрицательных чисел α всегда совместна. В итоге получается, что функции R_s , определяемые равенствами (3), обеспечивают асимптотическую орбитальную устойчивость цикла.

Теорема 2. Пусть механическая система, подверженная действию позиционных сил, допускает h-семейство СПД. Тогда управление, задаваемое формулами (3) с надлежащим образом выбранной постоянной матрицей L, обеспечивает асимптотическую орбитальную устойчивость цикла управляемой механической системы. Замечание 3. При выполнении условий теоремы 2 стабилизация цикла управляемой механической системы осуществляется естественным образом, т.е. без привлечения дополнительных управлений.

3амечание 4. Посредством управления μR решается проблема конструирования цикла и устойчивого цикла независимо от действующих на механическую систему позиционных сил: потенциальных, неконсервативно позиционных, совместно действующих потенциальных и неконсервативно позиционных. Выводы по существованию цикла (теорема 1) и его стабилизации (теорема 2) не зависят от типа семейства СПД: семейство изохронных колебаний (пример — линейный осциллятор), семейство невырожденных колебаний (пример — математический маятник). Управление μR решает задачу о цикле и асимптотически орбитально устойчивом цикле независимо от конкретной механической системы. Наконец, сила μR имеет достаточно простой вид и находит аналог в природе. В силу указанных причин управление с функцией, задаваемой формулами (3), называется универсальным.

6. Пример

Рассмотрим систему уравнений (см. [10])

$$\ddot{\theta}_{1} + \sin \theta_{1} + \kappa (1 - 1/f) \left(\frac{c^{2}}{4} \sin(\theta_{1} - \theta_{2}) - \frac{c}{2} \cos \theta_{1} \right) = 0,$$

$$(11) \qquad \ddot{\theta}_{2} + \sin \theta_{2} + \kappa (1 - 1/f) \left(-\frac{c^{2}}{4} \sin(\theta_{1} - \theta_{2}) + \frac{c}{2} \cos \theta_{2} \right) = 0,$$

$$f^{2} = 1 + \frac{c^{2}}{2} - c \sin \theta_{1} + c \sin \theta_{2} - \frac{c^{2}}{2} \cos(\theta_{2} - \theta_{1}),$$

описывающую движение двух связанных пружиной неуправляемых идентичных маятников, точки подвесов которых лежат на горизонтальной прямой; $\theta_{1,2}$ – углы отклонения маятников от вертикали, κ, c – положительные постоянные. Система (11) допускает интегральное многообразие $\tilde{\Xi}$

$$\ddot{\eta}_1 + \sin \eta_1 = 0$$
, $\eta_1 = (\theta_1 + \theta_2)/2$ $\eta_2 = (\theta_1 - \theta_2)/2 \equiv 0$,

которое описывает движение двух независимых маятников (пружина недеформирована).

Перейдем к управляемой системе. Тогда на соответствующем $\tilde{\Xi}$ многообразии Ξ управляемой механической системы динамика описывается (см. [4]) уравнением

(12)
$$\ddot{\eta}_1 + \sin \eta_1 = \mu [1 - K \eta_1^2] \dot{\eta}_1.$$

При $\mu=0$ колебания в (12) образуют семейство $\eta_1=\eta_1(h,t)$ по постоянной интеграла энергии $h\colon K(h)$ – характеристика семейства. В [4] показано, что управление, в котором положено $K=K(h^*),\ \eta_1=\eta_1(h,t),$ обеспечивает существование и стабилизацию цикла управляемой системы (12) в окрестности

колебания с параметром $h=h^*$. При этом притяжение траекторий управляемой системы к многообразию Ξ обеспечивается линейной диссипацией.

Выпишем уравнения в вариациях для цикла по переменной η_2

(13)
$$\delta \ddot{\eta}_2 + (1 - 2c\cos\eta_1(h^*, t))\delta\eta_2 = 0.$$

Видно, что при c=0 уравнение (13) имеет пару чисто мнимых XП, равных $\pm i$. Уравнение (13) инвариантно относительно преобразования: $(\eta_2,\dot{\eta}_2,t)\to (\eta_2,-\dot{\eta}_2,-t)$. Поэтому XП всегда образуют пару $\pm \lambda$ (см. [8]), а чисто мнимые $\pm \lambda$ существуют по крайней мере при малых c. Для этих λ диссипация вводится добавлением в левую часть уравнения (13) слагаемого $\mu\delta\dot{\eta}_2$.

В исходной системе (11) с учетом формул, задающих переменные $\psi_{1,2}$, получается, что действие на механическую систему (11) управлений $\mu R_{1,2}$ с функциями

$$R_{1} = \left[1 - K(\theta_{1} + \theta_{2})^{2}\right] (\dot{\theta}_{1} + \dot{\theta}_{2}) + \left[1 - K(\theta_{1} - \theta_{2})^{2}\right] (\dot{\theta}_{1} - \dot{\theta}_{2}),$$

$$R_{2} = \left[1 - K(\theta_{1} + \theta_{2})^{2}\right] (\dot{\theta}_{1} + \dot{\theta}_{2}) - \left[1 - K(\theta_{1} - \theta_{2})^{2}\right] (\dot{\theta}_{1} - \dot{\theta}_{2})$$

приводит к существованию орбитально асимптотически устойчивого цикла в окрестности выбранного на многообразия $\tilde{\Xi}$ колебания системы (теорема 2). При этом в линейном приближении получается диссипативный член $\mu(\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2)$.

Таким образом, в примере иллюстрируется теорема 2 и показывается соотношение между результатами, полученными ранее в [4] и в данной статье.

7. Заключение

Ван дер Поль дал пример управления колебаниями путем добавления в осциллятор нелинейной диссипации и последующим переходом к управляемой системе. Подход можно применить к произвольной механической системе, подверженной действию позиционных сил.

В статье находится универсальное малое гладкое управление — нелинейная сила типа диссипации в уравнении Ван дер Поля, гарантирующая существование и стабилизацию цикла управляемой механической системы с n степенями свободы. При этом управляемая механическая система ведет себя подобно регенеративному приемнику в радиотехнике, собственные (релаксационные) колебания которого описываются уравнением Ван дер Поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование Ляпунова для системы в вариациях

Для цикла управляемой системы получается система уравнений в вариациях вида

(II.1)
$$\delta \ddot{q}_{s} = \sum_{j=1}^{n} p_{sj}(t)\delta q_{j} + \sum_{j=1}^{n} r_{sj}(t)\delta \dot{q}_{j} + \mu \delta R_{s}(\delta q, \delta \dot{q}),$$
$$p_{sj}(t) = p_{sj}(-t), \quad r_{sj}(t) = -r_{sj}(-t), \quad p_{sj}(t+2\pi) = p_{sj}(t), \quad r_{sj}(t+2\pi) = r_{sj}(t).$$

Система (П.1) при $\mu=0$ представляет собой обратимую линейную периодическую систему вида

$$(\Pi.2) \qquad \dot{u} = A_{-}(t)u + A_{+}(t)v, \quad \dot{v} = B_{+}(t)u + B_{-}(t)v, \quad u, v \in \mathbb{R}^{n},$$

с двумя неподвижными множествами

$$M_u = \{u, v, t : v = 0, \sin t = 0\}, \quad M_v = \{u, v, t : u = 0, \sin t = 0\}.$$

Символом плюс (минус) обозначены матрицы и векторы, содержащие четные (нечетные) 2π -периодические функции.

Сопряженная к (П.2) система

$$(\Pi.3) \qquad \dot{\xi} = -A_{-}^{\mathrm{T}}(t)\xi - B_{+}^{\mathrm{T}}(t)\eta, \quad \dot{\eta} = -A_{+}^{\mathrm{T}}(t)\xi - B_{-}^{\mathrm{T}}(t)\eta$$

(Т – знак транспонирования) также обратима и допускает два неподвижных множества:

$$M_{\xi} = \{\xi, \eta, t : \eta = 0, \sin t = 0\}, \quad M_{\eta} = \{\xi, \eta, t : \xi = 0, \sin t = 0\}.$$

Поэтому с учетом решения $(\xi(t),\eta(t))$ системы (П.3) записывается первый интеграл

$$(\Pi.4) f = \xi_1(t)u_1 + \ldots + \xi_n(t)u_n + \eta_1(t)v_1 + \ldots + \eta_n(t)v_n$$

системы (П.2). Отсюда, к слову, следует нечетность функции $\psi(t)$ в амплитудном уравнении (2).

Система (П.2) приводится к системе с постоянными коэффициентами посредством преобразования Ляпунова. Учитывается, что система (П.2) содержит n решений, симметричных относительно M_{ξ} , и столько же решений, симметричных относительно M_{η} . Выбирая 2n указанных решений, получаем 2n интегралов f для приведения обратимой системы (П.2) к системе с постоянными коэффициентами. При этом согласно [8] выбирается преобразование

(II.5)
$$x_s = p_s^+(t)u + q_s^-(t)v, \quad y_s = p_s^-(t)u + q_s^+(t)v, \quad s = 1, \dots, n,$$

с векторными функциями $p_s^\pm(t), q_s^\pm(t),$ имеющими период $2\pi;$ преобразованная система содержит неподвижные множества

$$M_x = \{x, y, t : y = 0, t = 0\}, \quad M_y = \{x, y, t : x = 0, t = 0\}.$$

В результате одновременно преобразуется система (П.1).

Опорное СПД имеет XП с нулевыми действительными частями. Поэтому рассматриваются следующие случаи: а) пара нулевых XП в жордановой клетке, б) пара $\pm i\omega$, $\omega > 0$, чисто мнимых XП, в) пара простых нулевых XП. Выпишем интегралы вида (П.4) и соответствующие приведенные уравнения в перечисленных случаях.

а. Пара нулевых ХП в жордановой клетке. Ей отвечают первые интегралы

$$f_1 = g_*^- = \text{const}, \quad f_2 = tg_*^- - g_*^+ = \text{const},$$

$$g_*^{\pm} = \xi_{*1}^{\pm}(t)\delta q_1 + \dots + \xi_{*n}^{\pm}(t)\delta q_n + \eta_{*1}^{\mp}(t)\delta \dot{q}_1 + \dots + \eta_{*n}^{\mp}(t)\delta \dot{q}_n.$$

Найдем производные \dot{f}_1 и \dot{f}_2 в силу системы (П.1). Тогда

$$\dot{f}_1 = \mu \sum_{s=1}^n \eta_{*s}^+(t) \delta R_s(\delta q, \delta \dot{q}), \quad \dot{f}_2 = -\mu \sum_{s=1}^n \eta_{*s}^-(t) \delta R_s(\delta q, \delta \dot{q}).$$

Обозначим $x_*=g_*^+,\ y_*=g_*^-.$ Тогда при $\mu=0$ получим $\dot{y}_*=\dot{f}_1=0,\ \dot{x}_*=y_*-\dot{f}_2,\ \dot{f}_2=0.$ При $\mu\neq0$ из (П.1) получаются уравнения

$$\dot{x}_* = y_* + \mu \sum_{s=1}^n \eta_{*s}^-(t) \delta u_s, \quad \dot{y}_* = \mu \sum_{s=1}^n \eta_{*s}^+(t) \delta u_s.$$

б. Пара $\pm i\omega$ чисто мнимых XП. В этом случае первые интегралы записываются в комплексном виде

$$f_{\pm} = \exp\left(\pm i\omega t\right) g_{\omega}^{\pm}(\delta q, \delta \dot{q}),$$

$$g_{\omega}^{\pm} = \xi_{\omega 1}^{\pm}(t) \delta q_1 + \dots + \xi_{\omega n}^{\pm}(t) \delta q_n + \eta_{\omega 1}^{\mp}(t) \delta \dot{q} + \dots + \eta_{\omega n}^{\mp}(t) \delta \dot{q}_n.$$

Вычислим полные производные от функций f_{\pm} в силу системы (П.1). Получим

$$\dot{f}_{\pm} = \mu \exp\left(\pm i\omega t\right) \sum_{s=1}^{n} \eta_{\omega s}^{\mp}(t) \delta R_{s}(\delta q, \delta \dot{q}).$$

Далее находится

$$\dot{g}_{\omega}^{\pm} = \dot{f}_{\pm} \exp(\mp i\omega t) \pm i\omega f_{\pm} \exp(\mp i\omega t).$$

Тогда для переменных $x_{\omega} = g_{\omega}^+, y_{\omega} = ig_{\omega}^-$ получается, что

$$\dot{x}_{\omega} = \omega y_{\omega} + \mu \sum_{s=1}^{n} \eta_{\omega s}^{-}(t) \delta u_{s}, \quad \dot{y}_{\omega} = -\omega x_{\omega} + \mu \sum_{s=1}^{n} \eta_{\omega s}^{+}(t) \delta u_{s}.$$

Результатом перехода к действительным переменным станут два уравнения в системе (7).

в. Пара простых нулевых XП. В этом случае получаются первые интегралы

$$f_{1,2} = g^{\pm} = \xi_1^{\pm}(t)\delta q_1 + \ldots + \xi_n^{\pm}(t)\delta q_n + \eta_1^{\mp}(t)\delta \dot{q}_1 + \ldots + \eta_n(t)^{\mp}\delta \dot{q}_n.$$

Тогда соответствующие уравнения системы (П.1) приобретают вид

$$\dot{x}_{+} = \mu \sum_{s=1}^{n} \eta_{s}^{-}(t) \delta R_{s}, \quad \dot{y}_{-} = \mu \sum_{s=1}^{n} \eta_{s}^{+}(t) \delta R_{s}.$$

Таким образом, использование групп переменных (x_*,y_*) , (x_ω,y_ω) и (x_+,y_-) позволяет преобразовать систему (П.1) к виду, удобному к вычислению ХП. При этом применяется преобразование (П.5), в котором $u=\delta q$, $v=\delta\dot{q}$, вектор x(y) состоит из векторов x_*,x_ω,x_+ (y_*,y_ω,y_+) , а в функции $\delta R(\delta q,\delta\dot{q})$ векторы δq и $\delta\dot{q}$ заменяются на векторы x и y по формулам обратного к (П.5) преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
- 2. Patidar V., Sharma A., Purohit G. Dynamical Behaviour of Parametrically Driven Duffing and Externally Driven Helmholtz-Duffing Oscillators under Nonlinear Dissipation // Nonlin. Dynam. 2016. V. 83. No. 1–2. P. 375–388.
- 3. Zaitsev S., Shtempluck O., Gottlieb E.B. Nonlinear Damping in a Micromechanical Oscillator // Nonlin. Dynam. 2016. V. 67. No. 1. P. 859–883.
- Тхай В.Н. Стабилизация колебаний управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
 Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
- 5. Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C. Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach // IEEE T. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
- 6. Txaй B.H. Обратимость механических систем // Прикл. матем. и механ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
- 7. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
- 8. Txaй B.H. Периодические движения возмущенной обратимой механической системы // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 181–195.
- 9. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
- 10. *Евдокименко А.П.* О равновесных конфигурациях двух связанных маятников и их устойчивости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 47–58.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 14.10.2019

После доработки 14.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020

© 2020 г. А.З. МЕЛИКОВ, чл.-корр. НАН Азербайджана (agassi.melikov@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку),
С.Г. АЛИЕВА, канд. техн. наук (s@aliyeva.info)
(Бакинский государственный университет),
М.О. ШАХМАЛЫЕВ (mamed.shahmaliyev@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СИСТЕМЫ С МГНОВЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Изучена марковская модель системы обслуживания с одним сервером и мгновенной обратной связью. После завершения обслуживания часть вызовов согласно схеме Бернулли либо покидают систему, либо мгновенно возвращается для получения повторного обслуживания, при этом для повторного обслуживания потребуется положительное (случайное) время переключения сервера. Интенсивность входящего потока зависит от состояния сервера, который может быть в рабочем режиме или в режиме переключения. Найдено условие эргодичности соответствующей двумерной цепи Маркова и предложены три метода для ее исследования: метод производящих функций, метод спектрального расширения и метод фазового укрупнения состояний. Приводятся результаты численных экспериментов.

Kлючевые слова: система обслуживания, м
гновенная обратная связь, метод расчета.

DOI: 10.31857/S0005231020090056

1. Введение

В последние годы системы массового обслуживания (СМО) с обратной связью все больше привлекают внимание исследователей. Это объясняется тем, что учет эффекта обратной связи позволяет повысить адекватность изучаемых моделей к реальной ситуации, где получившие один раз обслуживание заявки могут потребовать повторного обслуживания по целому ряду различных причин. Так, например, в коммуникационных сетях ошибочно переданные данные передаются повторно. Другим примером служат производственные системы, где бракованные детали требуют повторной обработки. Третьим примером могут быть современные сервисные интеграторы, в которых получивший один раз качественное обслуживание клиент может еще раз обратиться для обслуживания именно к ним.

В классе СМО с обратной связью различают системы с мгновенной и отсроченной (задерживающей) обратной связью. История исследования этих систем берет свое начало от пионерских работ Такача [1, 2]. После опубликования указанных работ подобные системы некоторое время не привлекали

внимания исследователей СМО, исследования в этом направлении получили интенсивное продолжение лишь в последние два десятилетия. Здесь наряду с прочими следует отметить работы [3–13]. Подробный обзор работ можно найти в [12, 13], и поэтому здесь не будем останавливаться на изложении известных фактов.

В указанных выше работах, как правило, предполагается, что сервер может мгновенно начинать обслуживание заявки, которая требует повторного обслуживания. Вместе с тем это предположение зачастую плохо соотносится с действительностью. На практике зачастую для начала процесса обслуживания заявок указанного типа потребуется некоторое время "разогрева" сервера, т.е. время переключения сервера для обслуживания этих заявок является положительной случайной величиной (с.в.). Подобные ситуации, как правило, наблюдаются в производственных системах, где для обработки бракованной детали потребуется некоторое время переналадки сервера.

Здесь изучается модель СМО с одним сервером и мгновенной обратной связью, в которой время переключения сервера для повторного обслуживания является положительной с.в. Изучаются модели с неограниченной общей очередью для первичных заявок и заявок, которые требуют повторного обслуживания. Предлагаются и сравниваются три метода расчета характеристик модели: метод производящих функций, метод спектрального расширения [14, 15] и метод фазового укрупнения состояний многомерных цепей Маркова (ЦМ) [12, 13].

Отметим, что при соответствующем изменении термина "переключение сервера" получаются модели систем: а) с прогулками сервера, где независимо от длины очереди вызовов прогулки могут быть осуществлены после каждого акта обслуживания; б) с ненадежным сервером, где поломки сервера возможны лишь в моменты завершения обслуживания вызовов. Полученные в данной работе результаты могут быть использованы и для анализа указанных систем.

2. Описание модели системы и постановка задачи

Рассматривается система обслуживания с одним сервером и неограниченным числом мест для ожидания. На вход системы извне поступает пуассоновский поток первичных вызовов. Времена обслуживания этих вызовов являются независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) с.в. и имеют общую показательную функцию распределения со средним μ^{-1} . После завершения процесса обслуживания вызовы независимо друг от друга и согласно схеме Бернулли либо с вероятностью σ мгновенно требуют повторного обслуживания, либо с дополнительной вероятностью $1-\sigma$ покидают систему. Времена обслуживания повторных вызовов также являются н.о.р. с.в. с тем же средним μ^{-1} .

Для начала процесса обслуживания вызовов, которые требуют повторного обслуживания, требуется некоторое положительное случайное время (время переключения сервера), которое имеет показательную функцию распределения со средним θ^{-1} . Иными словами, в любой момент времени сервер может находиться в одном из двух состояний: в рабочем режиме или в режиме пе-

реключения. Считается, что не допускается прерывать время переключения сервера. При этом вызов, который требует повторного обслуживания, из-за запрета на прерывание переключения сервера остается на нем.

Первичные вызовы имеют информацию о статусе сервера, т.е. если сервер находится в режиме переключения, то интенсивность p-вызовов равна λ_0 , иначе она равна λ_1 .

Считается, что случайные процессы поступления вызовов, их обслуживания и времена переключения сервера являются не зависимыми друг от друга.

Требуется найти совместное распределение числа вызовов в системе и состояние сервера (задача A), а также среднее число вызовов в системе и производительность системы, т.е. интенсивность потока обслуженных вызовов, выходящих из системы (задача B).

3. Метод производящих функций

Состояние системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором (n,k), где n — число вызовов в системе, k — состояние сервера, т.е.

$$k = \left\{ egin{array}{ll} 0, & \mbox{если сервер находится в режиме переключения,} \\ 1, & \mbox{если сервер находится в рабочем режиме.} \end{array} \right.$$

Работа системы описывается двумерной ЦМ со следующим пространством состояний:

$$(3.1) E = E_0 \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

где $E_0 = \{(0,1)\}, E_n = \{(n,0),(n,1)\}, n = 1,2,...$

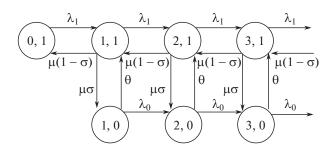


Рис. 1. Граф переходов.

Интенсивность перехода из состояния (n,k) в состояние (n',k') обозначим через q((n,k),(n',k')). Эти величины определяются как (см. рис. 1):

(3.2)
$$q((n,1),(n+1,1)) = \lambda_1;$$

(3.3)
$$q((n,1),(n-1,1)) = \mu(1-\sigma), \quad n > 0;$$

(3.4)
$$q((n,1),(n,0)) = \mu \sigma, \quad n > 0;$$

(3.5)
$$q((n,0),(n,1)) = \theta;$$

$$(3.6) q((n,0),(n+1,0)) = \lambda_0.$$

Пусть p(n,k) обозначает стационарную вероятность состояния $(n,k) \in E$ (условие эргодичности устанавливается ниже). Эти величины удовлетворяют следующей бесконечной системе уравнений равновесия (СУР):

(3.7)
$$\lambda_1 p(0,1) = \mu(1-\sigma) p(1,1);$$

Для случаев $n \ge 1$:

$$(3.8) \qquad (\lambda_1 + \mu) \, p(n, 1) = \mu \, (1 - \sigma) \, p(n + 1, 1) + \lambda_1 p(n - 1, 1) + \theta p(n, 0) \, ;$$

(3.9)
$$(\lambda_0 + \theta) p (1, 0) = \mu \sigma p (1, 1);$$

Для случаев $n \geq 2$:

$$(3.10) \qquad (\lambda_0 + \theta) p(n, 0) = \lambda_0 p(n - 1, 0) + \mu \sigma p(n, 1).$$

Введем следующие производящие функции:

$$P_k(z) = \sum_{n=\overline{k}}^{\infty} p(n,k) z^n, \quad k = 0, 1,$$

где
$$\overline{k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 1, \\ 1, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Из (3.8) имеем

(3.11)
$$\left(-\lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + \mu) z - \mu (1 - \sigma) \right) P_1(z) - \theta z P_0(z) =$$

$$= ((\lambda_1 + \mu) z - \mu (1 - \sigma)) p(0, 1) - \mu (1 - \sigma) z p(1, 1) .$$

С учетом (3.7) из (3.11) получаем

(3.12)
$$\left(-\lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + \mu) z - \mu (1 - \sigma) \right) P_1(z) - \theta z P_0(z) = \mu (z - 1 + \sigma) p(0, 1).$$

Аналогичным образом из уравнений (3.9) и (3.10) имеем

$$(3.13) -\mu \sigma P_1(z) + (\theta + \lambda_0(1-z)) P_0(z) = -\mu \sigma p(0,1).$$

Из (3.13) получаем

$$(3.14) P_1(z) = p(0,1) + a(z) P_0(z),$$

где

$$a(z) = \frac{1}{\mu\sigma} \left(-\lambda_0 z + \lambda_0 + \theta \right).$$

С учетом (3.12) из (3.14) получаем

(3.15)
$$P_{0}(z) = \frac{\lambda_{1}z^{2} - \lambda_{1}z}{a(z)b(z) - \theta z}p(0, 1),$$

где

$$b(z) = -\lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + \mu) z - \mu (1 - \sigma).$$

Из (3.14) и (3.15) имеем

(3.16)
$$P_{1}(z) = \left(1 + a(z) \frac{\lambda_{1}z^{2} - \lambda_{1}z}{a(z)b(z) - \theta z}\right) p(0, 1).$$

Для нахождения неизвестной величины p(0,1) используем следующее условие: $\lim_{z\to 1} \left(P_0\left(z\right) + P_1\left(z\right)\right) = 1$. При вычислении пределов получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, и согласно правилу Лопиталя находим, что

(3.17)
$$p(0,1) = \left(1 + \frac{\lambda_1 (\theta + \mu \sigma)}{\theta \mu (1 - \sigma) - \lambda_1 \theta - \lambda_0 \mu \sigma}\right)^{-1}.$$

 $3 a \, {\it Me} \, {\it Vahue} \, 1$. При выводе формулы (3.17) находим следующее необходимое условие эргодичности системы:

(3.18)
$$\lambda_1 \theta + \lambda_0 \mu \sigma < \theta \mu (1 - \sigma).$$

Далее, при выполнении условия эргодичности (3.18) условные средние значения числа вызовов в системе, когда сервер находится в рабочем режиме (L_1) и в режиме переключения (L_0), а также безусловное значение среднего числа вызовов в системе (L) определяются как

(3.19)
$$L_1 = P'_1(1), \quad L_0 = P'_0(1), \quad L = L_1 P_1(1) + L_0 P_0(1).$$

Производительность системы вычисляется следующим образом:

(3.20)
$$\Lambda = \mu (1 - \sigma) (P_1 (1) - p (0, 1)).$$

Ввиду очевидности получения и громоздкости явный вид формул (3.19) и (3.20) здесь не приводится (лишь отметим, что для его получения правило Лопиталя применяется 2 раза).

Таким образом, метод производящих функций позволяет решить задачу B, но не позволяет решить задачу A.

4. Метод спектрального расширения

Применение метода спектрального расширения [14, 15] позволяет решить обе задачи, А и В. Поскольку этот метод подробно описан в указанных работах, то здесь описываются лишь его основные этапы.

Вводятся следующие матрицы:

A — элементы этой матрицы определяют одношаговые вертикальные переходы между состояниями (см. рис. 1), т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q\left(\left(n,0\right),\left(n,1\right)\right) \\ q\left(\left(n,1\right),\left(n,0\right)\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \mu\sigma & 0 \end{pmatrix};$$

B — элементы этой матрицы определяют одношаговые горизонтальные переходы вправо (см. рис. 1), т.е.

$$B = \begin{pmatrix} q((n,0), (n+1,0)) & 0 \\ 0 & q((n,1), (n+1,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$
$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q(n,1), (n+1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix};$$

C — элементы этой матрицы определяют одношаговые горизонтальные переходы влево (см. рис. 1), т.е.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q\left((n,1), (n-1,1)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu\left(1-\sigma\right) \end{pmatrix}.$$

Считается, что A_0 и C_0 являются нулевыми матрицами. На базе указанных выше матриц определяются диагональные матрицы D^A , D^B и D^C , в которых элементы главных диагоналей равны сумме элементов соответствующих строк матриц A, B и C, т.е.

$$D^A = \left(\begin{array}{cc} \theta & 0 \\ 0 & \mu \sigma \end{array} \right), \quad D^B = \left(\begin{array}{cc} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{array} \right), \quad D^C = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \mu \left(1 - \sigma \right) \end{array} \right).$$

Балансовые уравнения для вероятностей состояний из однородной части графа (см. рис. 1) с учетом введенных матриц записывается так:

(4.1)
$$v_n(D^A + D^B + D^C) = v_{n-1}B + v_nA + v_{n+1}C, \quad n \ge 1,$$

где

$$v_n = (p(n, 0), p(n, 1)), n \ge 1.$$

Уравнения (4.1) представляются в виде матрично-разностных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

(4.2)
$$v_nQ_0 + v_{n+1}Q_1 + v_{n+2}Q_2 = 0, \quad n \ge 1,$$

где

$$Q_0 = B$$
, $Q_1 = A - (D^A + D^B + D^C)$, $Q_2 = C$.

Характеристический матричный полином уравнения (4.2) имеет следующий вид:

$$(4.3) Q(\eta) = Q_0 + Q_1 \eta + Q_2 \eta^2.$$

Далее собственные значения η_0 , η_1 и соответствующие им левые собственные векторы $\psi = (\psi_0(k), \psi_1(k))$, k = 0, 1, матрицы $Q(\eta)$ определяются из следующих уравнений:

$$\det\left(Q\left(\eta\right)\right) = 0,$$

$$\psi Q(\eta) = \mathbf{0},$$

где правая часть уравнения (4.5) является нулевой вектор-строкой.

В указанных выше работах разработаны эффективные алгоритмы решения уравнений (4.4) и (4.5). После нахождения решений уравнений (4.4) и (4.5) вероятности состояний определяются как

$$(4.6) p(n,k) = a_0 \psi_0(k) \eta_0^n + a_1 \psi_1(k) \eta_1^n, n = 0, 1, \dots; k = 0, 1,$$

где a_0 , a_1 являются параметрами, которые определяются с помощью балансовых уравнений для вероятностей состояний из неоднородной части графа (способ их нахождения также подробно описан в [14, 15]).

С помощью данного метода можно найти необходимое и достаточное условие эргодичности системы. Формулируется оно следующим образом [16]: цепь Маркова является эргодической тогда и только тогда, когда в однородной части графа суммарные интенсивности переходов вправо должны быть меньше, чем суммарные интенсивности переходов влево, т.е. требуется выполнение условия

$$(4.7) vBe < vCe,$$

где $e = (1,1)^{\mathrm{T}}$, и $v = (\nu_0,\nu_1)$ представляет собой вектор вероятностей состояний ЦМ с двумя состояниями и инфинетизимальным генератором A, т.е. $\nu_0 = \frac{\mu\sigma}{\theta+\mu\sigma}$, $\nu_1 = \frac{\theta}{\theta+\mu\sigma}$. Тогда из (4.7) получаем условие эргодичности, которое совпадает с условием (3.18).

Условные средние значения числа вызовов в системе, когда сервер находится в рабочем режиме (L_1) и в режиме переключения (L_0), определяются как

(4.8)
$$L_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} np(n,1); \quad L_{0} = \sum_{n=1}^{\infty} np(n,0).$$

Безусловное значение среднего числа вызовов в системе (L) определяется как

(4.9)
$$L = L_1 \sum_{n=0}^{\infty} p(n,1) + L_0 \sum_{n=1}^{\infty} p(n,0).$$

Производительность системы вычисляется так:

(4.10)
$$\Lambda = \mu \left(1 - \sigma \right) \sum_{n=1}^{\infty} p(n, 1).$$

5. Метод фазового укрупнения

Хотя метод спектрального расширения позволяет решить обе задачи A и B, иногда при определенных значениях исходных данных системы появляются проблемы вычислительной неустойчивости. Ниже рассматривается применение метода фазового укрупнения состояний двумерных ЦМ [12, 13] для решения поставленных задач A и B. Он корректно может быть применен для систем, в которых время переключения сервера существенно меньше, чем интервалы между поступлениями вызовов, т.е. предполагается, что имеет место соотношение $\theta \gg \max{(\lambda_0, \lambda_1)}$. При выполнении этого условия интенсивности переходов внутри классов E_n (см. (3.1) и рис. 1) существенно больше, чем интенсивности переходов между состояниями из разных классов.

Согласно алгоритму метода фазового укрупнения состояний двумерных ЦМ, каждый класс $E_n,\ n=0,1,2,\ldots$ представляется в виде одного укрупненного состояния $< n>,\ n=0,1,2,\ldots$ При этом класс E_0 содержит лишь одно состояние (0,1), а каждый класс $E_n,\ n>0$ содержит два состояния (n,1) и (n,1).

Вероятности состояний внутри классов E_n , $n=0,1,2,\ldots$ обозначаются через $\rho_n(k)$, k=0,1. Поскольку класс E_0 содержит лишь одно состояние (0,1), то имеем $\rho_0(1)=1$.

Интенсивности переходов между состояниями класса E_n , n > 0 определяются из (3.4) и (3.5), т.е. вероятности состояний внутри каждого класса E_n , n > 0 не зависят от индекса n и вычисляются как

(5.1)
$$\rho_n(0) = \frac{\mu\sigma}{\theta + \mu\sigma}, \quad \rho_n(1) = \frac{\theta}{\theta + \mu\sigma}.$$

Замечание 2. Поскольку вероятности состояний внутри классов E_n , $n = 0, 1, 2, \ldots, \rho_n(k)$, k = 0, 1, не зависят от индекса n (см. (5.1)), то далее у этих величин индекс опускается.

С учетом (5.1) находим, что интенсивности переходов между укрупненными состояниями $< n >, n = 0, 1, 2, \dots$ определяются следующим образом:

$$(5.2) q(<0>,<1>) = \lambda_1.$$

Для случаев n > 0

(5.3)
$$q(\langle n \rangle, \langle n+1 \rangle) = \tilde{\lambda}; \quad q(\langle n \rangle, \langle n-1 \rangle) = \tilde{\mu}.$$

Здесь
$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\theta + \mu \sigma} (\lambda_1 \theta + \lambda_0 \mu \sigma), \ \tilde{\mu} = \frac{\theta}{\theta + \mu \sigma} \mu (1 - \sigma).$$

Из соотношений (5.2) и (5.3) заключаем, что укрупненная модель описывается бесконечным процессом размножения — гибели с переменными параметрами. Условием эргодичности этого процесса является $\tilde{\lambda} < \tilde{\mu}$ или $\lambda_1 \theta + \lambda_0 \mu \sigma < \theta \mu (1 - \sigma)$.

 $3 \, \mathrm{ame} \, \mathrm{vahue} \, 3$. Полученное здесь условие эргодичности полностью совпадает с условием (3.18), найденным выше с помощью метода производящих функций. Там трудно было дать интерпретацию этого условия. Здесь, однако, можно дать его вероятностную интерпретацию. Когда сервер находится в

рабочем режиме, интенсивность поступления вызовов равна $\lambda_1 \rho(1)$, а когда сервер находится в режиме переключения, эта величина равна $\lambda_0 \rho(0)$. Иными словами, $\tilde{\lambda}$ представляет собой суммарную интенсивность поступления вызовов при различных режимах работы сервера. Вызовы обслуживаются лишь тогда, когда сервер находится в рабочем режиме, т.е. интенсивность обслуживания равна $\mu(1-\sigma)\rho(1)$. Следовательно, условие эргодичности (3.18) имеет простую вероятностную интерпретацию: суммарная интенсивность поступления вызовов при различных режимах работы сервера должна быть меньше, чем интенсивность обслуживания.

Из соотношений (5.2) и (5.3) вычисляются вероятности укрупненных состояний π (< n >), n \geq 0:

(5.4)
$$\pi\left(\langle n \rangle\right) = \frac{\lambda_1}{\tilde{\lambda}} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \pi\left(\langle 0 \rangle\right), \quad n \ge 1,$$

где

$$\pi\left(<0>\right) = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\tilde{\lambda}} \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}.$$

С учетом (5.1)–(5.4) находим приближенные значения вероятностей состояний исходной ЦМ:

(5.5)
$$\tilde{p}(0,1) = \pi(<0>);$$

(5.6)
$$\tilde{p}(n,0) = \rho(0) \pi(< n >);$$

(5.7)
$$\tilde{p}(n,1) = \rho(1) \pi(< n >).$$

Приближенные значения (ПЗ) характеристики (4.8)–(4.10) определяются как

$$(5.8) L_1 \approx \sum_{n=1}^{\infty} np(n,1) = \rho(1) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(\langle n \rangle) = \frac{\theta}{\theta + \mu\sigma} \frac{\lambda_1}{\tilde{\lambda}} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \pi(\langle 0 \rangle);$$

(5.9)
$$L_0 \approx \sum_{n=1}^{\infty} np(n,0) = \rho(0) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(\langle n \rangle) = \frac{\mu\sigma}{\theta + \mu\sigma} \frac{\lambda_1}{\tilde{\lambda}} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \pi(\langle 0 \rangle);$$

(5.10)
$$L \approx \frac{\theta}{\theta + \mu \sigma} L_1 + \frac{\mu \sigma}{\theta + \mu \sigma} L_0.$$

(5.11)
$$\Lambda \approx \mu (1 - \sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n (1) \pi (\langle n \rangle) = \mu (1 - \sigma) \rho (1) (1 - \pi (\langle 0 \rangle)).$$

6. Численные результаты

Далее приводятся результаты расчета вероятностей состояний и характеристик изучаемой системы с помощью предложенных методов. Очевидно, что с методологической точки зрения, а также по времени выполнения метод спектрального расширения и метод фазового укрупнения существенно

выигрывают перед методом производящих функций. Метод фазового укрупнения позволяет приближенно решить поставленные задачи А и В, при этом он существенно выигрывает у метода спектрального расширения в части реализации, так как этим методом удается решить указанные задачи с помощью простых формул.

Основная цель проведения вычислительных экспериментов сводится к оценке точности результатов, полученных с помощью метода фазового укрупнения, а также к определению области его применения в зависимости от исходных параметров конкретной системы. При этом точные значения (ТЗ) вероятностей состояний и характеристик системы вычисляются с помощью метода спектрального расширения.

Точность вычисления вероятностей состояний оценивается с помощью двух норм подобия: подобия косинуса $(\|N\|_1)$ и максимума разностей между точными и приближенными значениями этих величин $(\|N\|_2)$, т.е.

(6.1)
$$\|\mathbf{N}\|_{1} = \frac{\sum\limits_{(n,k)\in E} p\left(n,k\right)\tilde{p}\left(n,k\right)}{\left(\sum\limits_{(n,k)\in E} (p\left(n,k\right))^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{(n,k)\in E} (\tilde{p}\left(n,k\right))^{2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\|\mathbf{N}\|_{2} = \max_{(n,k)\in E} |p\left(n,k\right) - \tilde{p}\left(n,k\right)|.$$

Отметим, что подобие косинуса, как правило, применяется для оценки близости ориентации векторов, а не для оценки их длины. Однако здесь это применение правомерно, так как согласно условию

$$\sum_{(n,k)\in E} p\left(n,k\right) = \sum_{(n,k)\in E} \tilde{p}\left(n,k\right) = 1$$

конечные точки этих векторов находятся в одной гиперплоскости.

Некоторые результаты численных экспериментов, в которых имеет место соотношение $\theta \gg \max(\lambda_0, \lambda_1)$, показаны в табл. 1 (поскольку рассматривается проблема определения точности вычисления вероятностей состояний и характеристик системы, а не характер их поведения относительно исходных данных, то результаты численных экспериментов представлены в виде таблицы. Кроме того, в проводимых экспериментах зачастую точные и приближенные значения характеристик отличаются друг от друга в четвертом знаке после запятой. Именно с такой точностью и проводились вычисления). Здесь и далее принято, что $\sigma = 0.2$. Из таблицы видно, что точные и приближенные значения вероятностей состояний почти совпадают, так как норма подобия косинуса почти всегда равна единице и максимум разностей между точными и приближенными значениями является достаточно малой величиной. Более того, в этих экспериментах характеристики L_0 и L_1 также вычисляются с очень высокой точностью. Так, относительная погрешность (ОП) вычисления характеристики L_0 в наихудшем случае не превышает $0,1\,\%$ (т.е. почти совпадает с точными значениями) и ОП при вычислении характеристики L_1 не превышает 4%.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов для системы, в которой удовле-

творяется условие $\theta \gg \max(\lambda_0, \lambda_1)$

The product of γ max (λ_0, λ_1)										
(μ, θ)	(λ_0,λ_1)	$\ \mathbf{N}\ _1$	$\ \mathbf{N}\ _2$	L_1			L_0			
				ТЗ	ПЗ	ОΠ	ТЗ	ПЗ	ОП	
(50, 75)	(3, 5)	1	0,0006	0,1436	0,1436	0,0004	0,0198	0,0191	0,0338	
	(4, 10)	1	0,0012	0,3329	0,3327	0,0007	0,0461	0,0444	0,0385	
	(5, 15)	0,99	0,0018	0,5972	0,5966	0,0011	0,0829	0,0795	0,0400	
(55, 75)	(3, 5)	1	0,0006	0,1289	0,1288	0,0004	0,0196	0,0189	0,0342	
	(4, 10)	1	0,0013	0,2936	0,2934	0,0007	0,0448	0,0430	0,0396	
	(5, 15)	0,99	0,0019	0,5141	0,5135	0,0011	0,0786	0,0753	0,0421	
(60, 75)	(3, 5)	1	0,0006	0,1169	0,1168	0,0004	0,0194	0,0187	0,0346	
	(4, 10)	1	0,0013	0,2626	0,2624	0,0007	0,0438	0,0420	0,0405	
	(5, 15)	0,99	0,0020	0,4513	0,4508	0,0011	0,0754	0,0721	0,0438	
(50, 80)	(3, 5)	1	0,0005	0,1436	0,1435	0,0004	0,0185	0,0179	0,0318	
	(4, 10)	1	0,0011	0,3330	0,3327	0,0006	0,0432	0,0416	0,0361	
	(5, 15)	1	0,0016	0,5973	0,5967	0,0010	0,0775	0,0746	0,0376	
(55, 80)	(3, 5)	1	0,0005	0,1288	0,1288	0,0004	0,0183	0,0177	0,0322	
	(4, 10)	1	0,0011	0,2936	0,2935	0,0006	0,0419	0,0403	0,0372	
	(5, 15)	1	0,0017	0,5142	0,5137	0,0010	0,0736	0,0706	0,0396	
(60, 80)	(3, 5)	1	0,0005	0,1168	0,1168	0,0004	0,0181	0,0175	0,0325	
	(4, 10)	1	0,0011	0,2626	0,2625	0,0006	0,0409	0,0394	0,0381	
	(5, 15)	1	0,0018	0,4515	0,4510	0,0010	0,0706	0,0677	0,0412	
(50, 85)	(3, 5)	1	0,0004	0,1435	0,1435	0,0003	0,0174	0,0169	0,0300	
	(4, 10)	1	0,0010	0,3330	0,3328	0,0006	0,0405	0,0391	0,0341	
	(5, 15)	1	0,0015	0,5974	0,5969	0,0009	0,0728	0,0702	0,0355	
(55, 85)	(3, 5)	1	0,0004	0,1288	0,1287	0,0003	0,0172	0,0167	0,0303	
	(4, 10)	1	0,0010	0,2936	0,2935	0,0006	0,0394	0,0380	0,0351	
	(5, 15)	1	0,0015	0,5144	0,5139	0,0009	0,0691	0,0665	0,0373	
(60, 85)	(3, 5)	1	0,0004	0,1168	0,1167	0,0003	0,0170	0,0165	0,0306	
	(4, 10)	1	0,0010	0,2626	0,2625	0,0006	0,0384	0,0371	0,0359	
	(5, 15)	1	0,0016	0,4516	0,4512	0,0009	0,0663	0,0637	0,0389	

Интересными являются результаты численных экспериментов, в которых не выполняется соотношение $\theta\gg\max(\lambda_0,\lambda_1)$. Соответствующие результаты показаны в табл. 2, откуда видно, что в этих экспериментах точные и приближенные значения вероятностей состояний также вычисляются с высокой точностью. Здесь однако при вычислении характеристик L_0 и L_1 имеются большие погрешности. Так, при вычислении характеристики L_0 относительная погрешность в наихудшем случае составляет почти $28\,\%$, а эта же величина при вычислении характеристики L_1 достигает $45\,\%$. Эти результаты доказывают, что принятое условие $\theta\gg\max(\lambda_0,\lambda_1)$ является важным для корректного применения метода фазового укрупнения состояний.

В связи с приведенными выше результатами численных экспериментов интерес представляет изучение зависимостей значений указанных выше норм подобия (6.1) и (6.2) относительно изменения параметра θ . Некоторые резуль-

Таблица 2. Результаты численных экспериментов для системы, в которой не удо-

влетворяется условие $\theta \gg \max(\lambda_0, \lambda_1)$

ылетворяется условие $v \gg \max(\lambda_0, \lambda_1)$										
(μ, θ)	(λ_0,λ_1)	$\ \mathbf{N}\ _1$	$\ \mathbf{N}\ _2$	L_1			L_0			
				ТЗ	ПЗ	ОΠ	ТЗ	ПЗ	ОΠ	
(50, 4)	(3, 5)	0,99	0,0818	0,1843	0,1616	0,1233	0,6692	0,4040	0,3962	
	(4, 10)	0,97	0,1136	0,4545	0,3636	0,2000	1,5909	0,9091	0,4286	
	(5, 15)	0,94	0,1002	1,0269	0,7385	0,2809	3,2885	1,8462	0,4386	
(55, 4)	(3, 5)	0,99	0,0832	0,1649	0,1445	0,1233	0,6617	0,3975	0,3993	
	(4, 10)	0,96	0,1188	0,3953	0,3162	0,2000	1,5415	0,8696	0,4359	
	(5, 15)	0,94	0,1111	0,8417	0,6053	0,2809	3,0359	1,6646	0,4517	
(60, 4)	(3, 5)	0,99	0,0843	0,1491	0,1307	0,1233	0,6556	0,3922	0,4019	
	(4, 10)	0,96	0,1231	0,3497	0,2797	0,2000	1,5035	0,8392	0,4419	
	(5, 15)	0,94	0,1202	0,7131	0,5128	0,2809	2,8606	1,5385	0,4622	
(50, 7)	(3, 5)	0,99	0,0384	0,1589	0,1519	0,0439	0,2984	0,2171	0,2727	
	(4, 10)	0,99	0,0649	0,3668	0,3391	0,0755	0,6920	0,4844	0,3000	
	(5, 15)	0,98	0,0734	0,6979	0,6189	0,1131	1,2789	0,8842	0,3086	
(55, 7)	(3, 5)	0,99	0,0390	0,1424	0,1361	0,0439	$0,\!2951$	0,2139	0,2753	
	(4, 10)	0,99	0,0674	0,3214	0,2971	0,0755	0,6731	0,4669	0,3063	
	(5, 15)	0,98	0,0790	0,5894	0,5228	0,1131	1,2082	0,8215	0,3201	
(60, 7)	(3, 5)	0,99	0,0394	0,1289	0,1233	0,0439	0,2925	0,2113	0,2774	
	(4, 10)	0,99	0,0694	0,2860	0,2644	0,0755	0,6584	0,4533	0,3115	
	(5, 15)	0,98	0,0837	0,5102	0,4524	0,1131	1,1565	0,7756	0,3293	
(50, 10)	(3, 5)	0,99	0,0220	0,1522	0,1488	0,0220	0,1879	0,1488	0,2079	
	(4, 10)	0,99	0,0404	0,3478	0,3344	0,0385	0,4348	0,3344	0,2308	
	(5, 15)	0,99	0,0500	0,6375	0,6000	0,0588	0,7875	0,6000	0,2381	
(55, 10)	(3, 5)	0,99	0,0223	0,1364	0,1334	0,0220	0,1857	0,1467	0,2101	
	(4, 10)	0,99	0,0418	0,3055	0,2938	0,0385	0,4230	0,3231	0,2361	
	(5, 15)	0,99	0,0534	0,5426	0,5106	0,0588	0,7468	0,5617	0,2479	
(60, 10)	(3, 5)	0,99	0,0226	0,1236	0,1209	0,0220	0,1840	0,1450	0,2118	
	(4, 10)	0,99	0,0430	0,2724	0,2619	0,0385	0,4138	0,3143	0,2405	
	(5, 15)	0,99	0,0562	0,4722	0,4444	0,0588	0,7167	0,5333	0,2558	

таты этих исследований показаны на рис. 2, где исходные данные выбраны так: $\mu=50,\ \lambda_0=5,\ \lambda_1=10.$ Из этих графиков видно, что с ростом значений параметра θ норма подобия (6.1) систематически растет и приближается к единице, а норма подобия (6.2) систематически убывает и приближается к нулю. Эти результаты были вполне ожидаемыми, так как с ростом значений параметра θ увеличиваются интенсивности переходов между состояниями внутри классов $E_n,\ n\geq 0$ и тем самым уменьшаются интенсивности переходов между состояниями из разных классов (см. рис. 1).

Предложенные простые формулы позволяют изучить поведение характеристик системы (3.19) и (3.20) относительно любых параметров. Для конкретности изложения на рис. З показано поведение указанных характеристик относительно параметра θ . Эти результаты также были ожидаемыми, т.е. с ростом параметра θ увеличивается доля времени пребывания сервера в рабо-

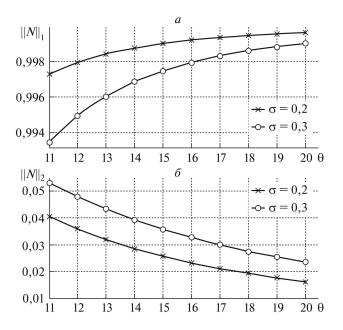


Рис. 2. Зависимость норм подобия (6.1) (a) и (6.2) (б) от параметра θ .

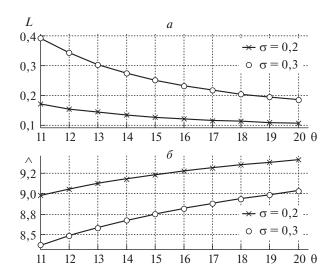


Рис. 3. Зависимость характеристик (3.19) (а) и (3.20) (б) от параметра θ .

чем режиме, тем самым уменьшается среднее число вызовов в системе (см. рис. 3,a) и увеличивается производительность системы (см. рис. 3,6). При этом с ростом вероятности мгновенного повторения обслуживания (т.е. σ) увеличивается среднее число вызовов в системе (см. рис. 3,a) и одновременно уменьшается производительность системы (см. рис. 3,6). Действительно, с ростом указанной вероятности увеличивается доля времени пребывания сервера в режиме переключения (при котором не производится обслуживание

вызовов), тем самым увеличивается среднее число вызовов в системе и, следовательно, уменьшается ее производительность.

7. Заключение

В работе изучается модель системы обслуживания с одним сервером, неограниченным числом мест для ожидания и мгновенной обратной связью. После завершения обслуживания часть вызовов согласно схеме Бернулли либо покидает систему, либо мгновенно требует повторного обслуживания. Для начала процесса повторного обслуживания вызовов серверу потребуется некоторое случайное время переключения, которое имеет показательную функцию распределения. Считается, что когда сервер находится в статусе переключения, он не может осуществлять обслуживание вызовов. При этом не допускается прерывание периода переключения. Интенсивность поступления вызовов зависит от статуса сервера.

Показано, что математической моделью изучаемой системы является двумерная ЦМ с бесконечномерным пространством состояний. Найдено условие эргодичности модели и предложены три метода исследования соответствующей двумерной ЦМ: метод производящих функций, метод спектрального расширения и метод фазового укрупнения состояний двухмерных ЦМ. Первые два из них являются точными методами, а третий — приближенный. С помощью численных экспериментов показана высокая точность разработанных приближенных формул для решения поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Takacs L. A single-server queue with feedback // Bell Syst. Tech. J. 1963. V. 42. P. 505–519.
- 2. Takacs L. A queuing model with feedback // Oper. Res. 1977. V. 11. P. 345–354.
- 3. *Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С.* Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Выч. технол. 2008. Т. 13. Вып. 5. С. 88–92.
- 4. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., et.al. The queuing model MAP/PH/ 1/N with feedback operating in a Markovian random environment // Austrian J. Stat. 2005. V. 34. Iss. 2. P. 101–110.
- 5. Krishnamoorthy A., Manjunath A.S. On queues with priority determined by feedback // Calcutta Stat. Assos. Bul. 2018. V. 70. Iss. 1. P. 33–56.
- 6. Boxma O.J., Yechiali U. An M/G/1 queue with multiple types of feedback and gated vacations // J. Appl. Probab. 1997. V. 34. Iss. 3. P. 773–784.
- 7. Choi B.D., Kim B. M/G/1 queueing system with fixed feedback policy // The ANZIAM J. 2002, V. 44, Iss. 2. P. 283–297.
- 8. Choi B.D., Kim B., Choi S.H. An M/G/1 queue with multiple types of feedback, gated vacations and FCFS policy // Comput. & Oper. Res. 2003. V. 30. Iss. 9. P. 1289–1309.
- 9. Krishna Kumar B., Madheswari S.P., Vijayakumar A. The M/G/1 retrial queue with feedback and starting failures // Appl. Math. Model. 2002. V. 26. Iss. 11. P. 1057-1075.

- 10. Krishna Kumar B., Rukmani R., Thangaraj V. On multiserver feedback retrial queue with finite buffer // Appl. Math. Model. 2009. V. 33. Iss. 4. P. 2062–2083.
- 11. Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., et.al. A single server feedback retrial queue with collisions // Comput. & Oper. Res. 2010. V. 37. Iss. 7. P. 1247–1255.
- 12. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., et.al. Methods for analysis of multichannel queuing models with instantaneous and delayed feedbacks // Cyber. Syst. Anal. 2016. V. 52. Iss. 1. P. 58–70.
- 13. Melikov A.Z., Aliyeva S.H., Sztrik J. Analysis of queuing system MMPP/M/ K/K with delayed feedback // Mathematics. 2019. V. 7. 1128. 14 p. doi:10.3390/math7111128
- 14. Mitrani I., Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method // Perform. Eval. 1995. V. 23. P. 241–260.
- 15. Chakka R. Spectral expansion solution for some finite capacity queues // Oper. Res. 1998. V. 79. P. 27–44.
- 16. Neuts M.F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: John Hopkins Univer. Press, 1981. 332 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 09.12.2019

После доработки 02.03.2020

Принята к публикации 25.05.2020

© 2020 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru) (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Доказаны необходимые условия существования решения системы нелинейных уравнений, включающих в себя степенные функции. На основе разложения степенных функций в ряды Тейлора проведена линеаризация системы уравнений оптимальных реакций агентов. В результате линеаризованная система зависит от вектора параметров линеаризации, а расчет игровых равновесий сводится к подбору неподвижных точек нелинейных отображений. Исследованы отклонения значений приближенного равновесия от точного решения. Выведены аналитические формулы расчета равновесий в игре олигополистов для произвольного уровня лидерства по Штакельбергу. Анализ дуополии и триполии показал, что равновесие в игре является следствием двух факторов: во-первых, вогнутость функции издержек агента, т.е положительный эффект расширения масштаба, ведет росту его выигрыша по сравнению с агентами, имеющими выпуклые функции издержек, т.е отрицательный эффект расширения масштаба; во-вторых, выигрыш агента повышается, если он является лидером, однако преимущество окружения по типу функции издержек снижает воздействие второго фактора.

Kлючевые слова: олигополия, игра Штакельберга, степенная функция издержек, многоуровневое лидерство, линеаризация.

DOI: 10.31857/S0005231020090068

1. Введение

Линейная модель выбора оптимальных действий агентов рынка олигополии, в которой обратная функция спроса и функции издержек агентов являются линейными, широко использовалась [1–5] для анализа равновесий в игре олигополистов, поскольку эта модель допускает простое аналитическое решение в виде равновесия Курно–Нэша [6, 7]. Нелинейная модель выбора оптимальных действий, в которой обратная функция спроса линейная, а функции издержек агентов являются нелинейными, использовалась реже [8–11], так как не позволяет найти аналитическое решение. В этом случае особенные вычислительные трудности возникают при анализе игры агентов с лидером (лидерами) по Штакельбергу [12] первого и последующих уровней [13, 14], поскольку для нахождения предположительных вариаций [15] необходимо решать системы нелинейных уравнений на каждом уровне и для каждого агента. Формы таких систем уравнений получены [16] для лидеров по Штакельбергу первого и второго уровня, однако равновесия были рассчитаны численными методами. Формулы предположительных вариаций в

явном виде [17] позволяют анализировать характер их изменения при вариациях действий агентов, что необходимо для вычисления равновесий при наличии лидеров по Штакельбергу второго и более высоких уровней, а ограничение [17] на модуль суммы предположительных вариаций позволяет оценить диапазоны возможных равновесий.

В данной статье ставится задача поиска аналитического решения равновесий Курно–Нэша в нелинейной модели олигополии для произвольного уровня лидерства.

2. Методология

Рассмотрим следующую нелинейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

(1)
$$\Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad Q_i \ge 0, \quad i \in \mathbb{N} = \{1, \dots, n\}$$

при линейной функции цены спроса на товар от суммарного объема предложения всех агентов рынка

(2)
$$P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

и нелинейных (степенных) функциях издержек агентов

(3)
$$C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} > 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0, 2), \quad i \in N,$$

где Q_i , Π_i — действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль) i-го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов, т.е. количество элементов множества N; P, Q — равновесная цена и суммарный объем рынка; C_{Fi} , B_i , β_i — коэффициенты функций издержек агентов, C_{Fi} интерпретируется как постоянные издержки; a, b — коэффициенты обратной функции спроса. Степенная функция издержек (3) в диапазоне коэффициентов $\beta_i \in (0,2)$ обобщает два типа агентов: агент с положительным эффектом расширения масштаба описывается вогнутой функцией издержек при $0 < \beta_i < 1$, агент с отрицательным эффектом — выпуклой функцией при $1 < \beta_i < 2$.

Модели выбора оптимальных (символ «*») действий агентов с учетом условий (1)–(3) запишем в виде

(4)
$$Q_i^* = \arg \max_{Q_i > 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i > 0} \left\{ (a - bQ)Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Равновесие Нэша в системе (4) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при некотором известном векторе предположительных вариаций):

(5)
$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, x_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $x_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i-го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j-го агента в ответ на единичный прирост выпуска i-го агента. Поскольку согласно модели (4) оптимумы агентов зависят не только от собственного действия i-го агента Q_i , но и от действий окружения через Q, то последняя зависимость представлена в системе (5) как функция полезности $\Pi_i(Q_i, x_{ij})$ от вектора предположительных вариаций, характеризующих влияние действий окружения на изменение Q.

Стратегическая игра Γ есть кортеж множества агентов, множества стратегий агентов, множества функций полезности (прибыли) агентов и множества уровней лидерства

(6)
$$\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G\rangle,$$

где $G=(M_0,M_1,\ldots,M_L)$ — множество уровней лидерства агентов; L — количество уровней лидерства агентов; M_r $(r=0,\ldots,L)$ — множества агентов; M_0 — множество ведомых агентов; M_r $(r=1,\ldots,L)$ — множество лидеров r-го уровня.

В дальнейшем подмножество агентов окружения i-го агента, имеющих один и тот же уровень лидерства, обозначено символом $M = \{l \in N \setminus i\}$, число элементов этого множества обозначено символом m = n - 1.

Уровни лидерства определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0 -му агенту, имеет место, если в η_0 -м уравнении системы (5) полагается $x_{\eta oj}^0 = 0 \ \forall j \in N \backslash \eta_0$, где верхний индекс предположительной вариации обозначает уровень лидерства r. Первый уровень лидерства η_1 -го агента возникает, если в η_1 -м уравнении системы (5) вариации $x_{\eta_1 j}^1$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных (N-1) уравнений (5), в которых полагается $x_{ij}^0 = 0 \ \forall j \in N \backslash i$. Произвольный r-й уровень лидерства η_r -го агента возникает, если в η_r -м уравнении системы (5) вариации $x_{\eta_r j}^r$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_r} остальных (N-1) уравнений (5), в которых полагается $x_{ij} = x_{ij}^{r-1} \ \forall j \in N \backslash i$.

Решения игры (6) на r-м уровне лидерства i-го агента для модели выбора действий (4) были получены [16] в виде системы (5) уравнений равновесия Нэша:

(7)
$$F_i^r = a - bQ - bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1} = 0, \quad Q_i > 0, \quad i \in N,$$

при условии

$$(8) u_i - S_i^r < 0, \quad i \in N,$$

с учетом следующих обозначений:

(8a)
$$u_i = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b}, \quad S_i^r = \sum_{l \in N \setminus i} x_{il}^r, \quad i \in N,$$

где u_i (•), $i \in N$, — непрерывные и дифференцируемые по Q_i функции, характеризующие влияние нелинейности функций издержек агентов на унимодальность функции полезности i-го агента (при $u_i = -2$ система (3) является линейной); S_i^r — величина суммы предположительных вариаций i-го агента относительно действий окружения на r-м уровне лидерства; F_i^r (•), $i \in N$, — непрерывные и дифференцируемые по Q_i функции.

По сравнению с линейной моделью, для которой условие (8) имеет вид $-2-S_i^r<0,\,i\in N$, в нелинейной модели (4) функция полезности агента может быть неунимодальной не только вследствие влияния действий окружения, т.е. ситуаций, когда $S_i^r<-2$, но и в результате положительного эффекта расширения масштаба функции издержек агента. Поэтому введем предположение о том, что темп снижения предельных издержек при возрастающей отдаче от масштаба (т.е. $\beta_i<1$) не может быть больше темпа снижения цены при увеличении объема предложения

(8b)
$$|MC'_{iQ_i}| = B_i \beta_i |\beta_i - 1| Q_i^{\beta_i - 2} < b \, \forall \beta_i < 1,$$

где $MC_i=C'_{iQ_i}=B_i\beta_iQ_i^{\beta_i-1}$ — предельные издержки i-го агента. Предположение (8b) гарантирует выполнение условия (8), если не выполнено условие $|S_i^r|<1$, так как $|u_i|>1$ при условии (8b).

В дальнейшем символом «*» обозначены оптимальные действий агентов как решения системы уравнений (7).

Поставим задачу нахождения приближенного решения системы (7) в явном виде при некотором известном векторе предположительных вариаций, соответствующем заданному множеству уровней лидерства G.

3. Результаты

Система нелинейных уравнений (7) не имеет аналитического решения, поэтому проведем линеаризацию уравнений (7), которая позволяет свести решение к подбору неподвижных точек нелинейных отображений относительно параметров линеаризации. Линеаризация основана на следующем утверждении, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. Система (7) имеет решение $\mathbf{Q}^* = \{Q_i^*, i \in N\}$, если выполняются условие (8) и следующие условия:

$$\bar{Q}_{i} \leq Q_{i}^{*} \leq Q_{\max}, \quad |x_{ji}| \neq |u_{i} - S_{i}^{r}|,$$
(9a)
$$F_{i}^{r}(\boldsymbol{\kappa}_{j}) \begin{cases} > 0 & \text{при } |x_{ji}^{r}| < |u_{i} - S_{i}^{r}|, \\ < 0 & \text{при } |x_{ji}^{r}| > |u_{i} - S_{i}^{r}|, \end{cases} \forall i, j \in N,$$

где

$$\kappa_{j} = \frac{a}{b} - \sum_{k \in N \setminus (i,j)} \bar{Q}_{k} - Q_{\max} - Q_{\max} \left(1 + S_{j}^{r}\right) - \frac{B_{j}\beta_{j}Q_{\max}^{\beta_{j}-1}}{b},$$

$$Q_{\max} = \frac{a - MC_{\min}}{b}, \quad MC_{\min} = \min_{i \in N} \left(B_{i}\beta_{i}Q_{i}^{\beta_{i}-1}\right),$$

$$F_{i}(\boldsymbol{\kappa}_{j}) = a - b \left(Q_{\max} + \sum_{k \in N \setminus (i,j)} \bar{Q}_{k} + \boldsymbol{\kappa}_{j} \right) - b \boldsymbol{\kappa}_{j} \left(1 + S_{i}^{r} \right) - B_{i} \beta_{i} \boldsymbol{\kappa}_{j}^{\beta_{i} - 1},$$

$$\bar{Q}_{j} = \left(\frac{B_{j} \beta_{j} \left| \beta_{j} - 1 \right|}{b \left(2 + S_{j}^{r} \right)} \right)^{\frac{1}{2 - \beta_{j}}} \quad npu \quad \beta_{j} < 1, \quad \bar{Q}_{j} = 0 \quad npu \quad \beta_{j} > 1.$$

Если система (7) имеет решение, то уравнения

(9b)
$$\hat{F}_{i}^{r} = \hat{a} - \hat{b}q - \hat{b}q_{i} \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^{r} \right) - \hat{B}_{i}\beta_{i}\nu_{i}^{\beta_{i}-1} - \hat{B}_{i}\beta_{i} \left(\beta_{i} - 1 \right)\nu_{i}^{\beta_{i}-2} \left(q_{i} - \nu_{i} \right) = 0, \quad i \in N$$

относительно неизвестных $q_i=rac{Q_i}{Q_{\max}}\in(0,1)$ при $q=\sum\limits_{i\in N}q_i$ с коэффициентами

(9c)
$$\hat{a} = Q_{\max}a, \quad \hat{b} = Q_{\max}^2b, \quad \hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i}B_i, \quad i \in N$$

имеют решения \hat{Q}_i^* , отклонения которых $\Delta Q_i^* = Q_i^* - \hat{Q}_i^*$ от точного решения Q_i^* при условиях $|q_i - \nu_i| < r_i, \ \nu_i < q_i, \ i \in N$ не превышают по модулю значения

(9d)
$$|\Delta Q_i^*| \le \xi_i$$
, $\xi_i = Q_{\max} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{|u_{i\max} + 2| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{|2 - (u_{i\max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_{\max}|}$, $i \in N$,

причем

(9e)
$$\lim_{r \to 0} |\Delta Q_i^*| = 0, \quad i \in N,$$

где

$$\Omega_{i} = \nu_{i} + \theta_{i} (q_{i} - \nu_{i}), \quad \theta_{i}, \nu_{i} \in (0, 1), \quad r_{i} \in (0, \Omega_{i}), \quad u_{i \max} = u_{i} (Q_{\max}),$$

$$S_{\max} = \frac{m}{m - 1 - \nu_{\max}}, \quad \nu_{\max} = \frac{1 - \varepsilon}{m} \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1},$$

 $arepsilon \ll 1$ — малое положительное число, $m \geq 2$ — количество агентов окружения i-го агента.

Условия (9а) в случае дуополии (n=2) допускают следующую геометрическую интерпретацию: построим численно по уравнению (7) второго агента линию реакции $Q_2^*(Q_1)$, а линию реакции первого агента $Q_2(Q_1^*)$ построим, выразив Q_2 из уравнения (7) первого агента. Тогда первое условие (9а) устанавливает интервалы монотонного убывания этих реакций, второе условие (9а) обеспечивает различие их угловых коэффициентов, т.е. наличие точки пересечения реакций, а третье условие (9а) требует, чтобы точка пересечения принадлежала интервалам монотонности.

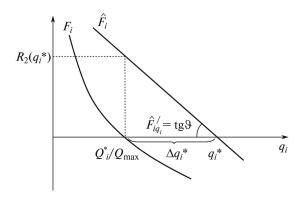


Рис. 1. Графический анализ погрешности линеаризации.

Условия (9d), (9e) показывают, что корректный подбор параметров ν_i с учетом $|q_i - \nu_i| < r_i$ и $\nu_i < q_i$ при заданном малом положительном числе $r_i \in (0, \Omega_i)$ позволяет достичь необходимой точности решения системы (7). Существование параметров ν_i , удовлетворяющих этим условиям, доказано ниже, в утверждении 2.

Графический анализ отклонения (9d) решения q_i^* системы (9b) от точного решения Q_i^* системы (7) показан на рис. 1.

На основе результатов утверждения 1 систему уравнений (7) после линеаризации можно привести к более компактному виду, для которого легко получить общее решение, что сформулировано в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. Уравнения (9b) сводятся к виду

(10a)
$$\delta_{i}q_{i} + q_{-i} = \alpha_{i}, \quad i \in N, \quad \alpha_{i} = \frac{\hat{a} - \hat{B}_{i}\beta_{i} (2 - \beta_{i}) \nu_{i}^{\beta_{i} - 1}}{\hat{b}},$$
$$\delta_{i}^{r} = 2 + \frac{\hat{B}_{i}\beta_{i} (\beta_{i} - 1)}{\hat{b}} \nu_{i}^{\beta_{i} - 2} + S_{i}^{r}, \quad S_{i}^{r} = \sum_{k \in N \setminus i} x_{ik}^{r},$$

где $q_{-i} = \sum\limits_{k \in N \setminus i} q_k$ — сумма действий окружения i-го агента; если выполняются условия

(10b)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\delta_j^r - 1} \neq -1 \wedge \delta_j^r \neq 1 \ \forall j \in N,$$

то система (10a) имеет единственное решение и корни вычисляются по следующим формулам:

$$(10c) \quad q_i^* = \frac{\alpha_i \left[\prod\limits_{j=1\backslash i}^n \left(\delta_j^r - 1 \right) + \sum\limits_{j=1\backslash i}^n \prod\limits_{\gamma=1\backslash j,i}^n \left(\delta_\gamma^r - 1 \right) \right] - \sum\limits_{j=1\backslash i}^n \left[\alpha_j \prod\limits_{\gamma=1\backslash i,j}^n \left(\delta_\gamma^r - 1 \right) \right]}{\prod\limits_{j=1}^n \left(\delta_j^r - 1 \right) + \sum\limits_{j=1}^n \prod\limits_{\gamma=1\backslash j}^n \left(\delta_\gamma^r - 1 \right)}.$$

Для решения (10c) существует набор параметров ν_i^* , при котором выполняются следующие условия утверждения 1:

(10d)
$$|q_i - \nu_i^*| < r_i, \quad \Omega_i = \nu_i^* + \theta_i (q_i - \nu_i^*), \quad \theta_i, \nu_i^* \in (0, 1), \\ r_i \in (0, \Omega_i), \quad \nu_i^* < q_i, \quad i \in N,$$

если для всех $i \in N$

(10e)
$$n < \frac{a}{bQ_{\max}} + u_{i\max}, \quad \theta_i \in \left(\frac{r_i - \nu_i^*}{r_i}, 1\right) \quad npu \quad r_i > \nu_i^*.$$

В частных практически важных случаях формула (10с) имеет следующий вид:

$$q_{i}^{*} = \frac{\alpha_{i}\delta_{j}^{r} - \alpha_{j}}{\delta_{1}^{r}\delta_{2}^{r} - 1}, \quad i \neq j = 1, 2 \quad \text{при} \quad n = 2,$$

$$q_{i}^{*} = \frac{\alpha_{i}\left(\prod_{j=1\backslash i}^{3} \delta_{j}^{r} - 1\right) - \sum_{j=1\backslash i}^{3} \prod_{\gamma=1\backslash i}^{3} \alpha_{j}\delta_{\gamma}^{r} + \sum_{j=1\backslash i}^{3} \alpha_{j}}{\delta_{1}^{r}\delta_{2}^{r}\delta_{3}^{r} - \delta_{1}^{r} - \delta_{2}^{r} - \delta_{3}^{r} + 2} \quad \text{при} \quad n = 3.$$

Таким образом, решение системы уравнений (7) сведено к задаче поиска неподвижной точки отображения $q_i(\nu_i) = \nu_i$, заданного формулами (10c), причем существование этой неподвижной точки доказано при условиях (10e). Подбор параметров линеаризации ν_i^* , удовлетворяющих условиям (10d), осуществляется эвристически, путем последовательного вычисления равновесий по формулам (10c) и проверки условий (10d).

Сравнение формул (8а) и (10а) показывает, что в случае выполнения условия (9e) имеет место равенство $\delta_i^r = -(u_i - S_i^r)$. Поэтому выполнение условий (8), (9a) существования решения системы (7) не гарантирует выполнение условия (10b) и наоборот. Следовательно, применение формул (10c) должно сопровождаться проверкой условий (8), (9a).

Решение (10f) для случая дуополии допускает сравнение с известным равновесием Курно [18] при линейных функциях издержек. В этом случае $\beta_i = 1$, а параметр B_i имеет смысл предельных издержек агентов, поэтому из формул (10a) с учетом формул (9c) следует, что

$$\alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i}{\hat{b}} = \frac{a - B_i}{bQ_{\text{max}}}, \quad \delta_i = 2,$$

следовательно, из формулы (10f) при n=2 получим

$$q_i^* = \frac{2(a - B_i) - (a - B_j)}{3bQ_{\text{max}}}, \quad i, j = 1, 2,$$

а в случае равенства параметров типа агентов, т.е. $B_i = B_j = B$, отсюда следует формула равновесного выпуска агентов Курно $q_i^* = \frac{a-B}{3bQ_{\text{max}}} \Rightarrow Q_i^* = \frac{a-B}{3b}$, идентичная формуле [18].

4. Численные эксперименты

На точность линеаризации нелинейных уравнений реакции (7) в виде (9b) влияет характер функций F_i^r и их близость к функциям \hat{F}_i^r в достаточно широком диапазоне значений параметров рынка а, b и параметров типов агентов $B_i, \beta_i, i \in N$. Поскольку $b \neq 0$, то допустимо представление функций (7) в следующем виде: $F_i^r = \frac{a}{b} - Q - Q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - \frac{B_i}{b} \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$. Анализ [19] телекоммуникационных компаний $\dot{P}\Phi$ показал, что у всех фирм наблюдается положительный эффект расширения масштаба, т.е. $\beta_i < 1$, коэффициент издержек $B_i \in (1,3)$, если $Q_i \in (0,500)$ млрд мин, параметр функции спроса $a \approx$ $\approx B_i$, параметр b=0,0009 руб./мин. Поэтому будем рассматривать соотношение, далее называемое коэффициентом спроса и издержек, $\sigma = \frac{B_i}{h} \approx \frac{a}{h} \approx 1000$ как параметр функции F_i^r , а при моделировании отрицательного эффекта масштаба в связи с отсутствием эмпирических данных примем $\sigma = \frac{a}{b}$ и $\frac{B_i}{h} = k\sigma, \ k < 1$. Также в качестве параметра этой функции рассмотрим сумму предположительных вариаций в функции F_i^r *i*-го агента S_i^r . Отметим, что было получено [17] следующее ограничение на сумму предположительных вариаций: $|S_i^r|<\frac{m}{m-1-\upsilon}$, где $\upsilon<1$ $\forall m\geq 2$, причем если для всех агентов имеет место убывающая отдача от расширения масштаба, т.е. $\beta_i > 1$ $\forall i \in N$, то данное ограничение более жесткое: $|S_i^r| < 1 \ \forall m \geq 1$. Поэтому исследуем трехпараметрическую функцию $F_i^r = \sigma - Q - Q_i (1 + S_i^r) - k\sigma \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$, $k=\left\{egin{array}{ll} 1\ oralleta_i<1,\ 0,3\ oralleta_i>1 \end{array}
ight.$ в диапазоне $Q_i\in\left(100,Q_{ ext{max}}
ight),Q_{ ext{max}}=500$ млрд мин при различных значениях параметров σ, β_i, S_i^r .

Аналогично проведем моделирование линеаризованных функций (9b), которые представим в виде

$$\hat{F}_{i}^{r} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} - q - q_{i} \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^{r} \right) - \frac{\hat{B}_{i}}{\hat{b}} \beta_{i} \nu_{i}^{\beta_{i} - 1} - \frac{\hat{B}_{i}}{\hat{b}} \beta_{i} \left(\beta_{i} - 1 \right) \nu_{i}^{\beta_{i} - 2} \left(q_{i} - \nu_{i} \right).$$

С учетом (9с) коэффициенты этих функций вычисляются по формулам

$$\frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{Q_{\text{max}}a}{Q_{\text{max}}^2b} = \frac{a}{Q_{\text{max}}b} = \sigma Q_{\text{max}}^{-1}, \quad \frac{\hat{B}_i}{\hat{b}} = \frac{Q_{\text{max}}^{\beta_i}B_i}{Q_{\text{max}}^2b} = k\sigma Q_{\text{max}}^{\beta_i-2}.$$

Поэтому вместо функции \hat{F}_i^r исследуем функцию

$$F_{i}^{\sim} = \sigma Q_{\max}^{-1} - q - q_{i} (1 + S_{i}^{r}) - k \sigma Q_{\max}^{\beta_{i}-2} \beta_{i} \left[\nu_{i}^{\beta_{i}-1} + (\beta_{i} - 1) \nu_{i}^{\beta_{i}-2} (q_{i} - \nu_{i}) \right]$$

при $Q_{\max} = 500$ и различных значениях параметров σ, β_i, S_i^r , причем ось абсцисс переведем в единицы измерения $Q_i = q_i Q_{\max}$.

Исследуем адекватность оценки линеаризации (9b) по формуле (9d), для чего сравним фактическое отклонение решения линеаризованной системы уравнений (9b) от точного решения системы (7), вычисленное по формуле $\left|\Delta Q_{i \text{факт}}^*\right| = \left|Q_i^* - \hat{Q}_i^*\right|$, и оценку максимального отклонения ξ_i , вычисленную

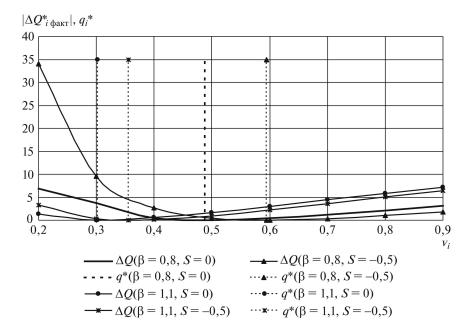


Рис. 2. Фактическое отклонение $|\Delta Q^*_{i ф \text{акт}}|$ решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q^*_i при $n=2,\,\sigma=1000.$

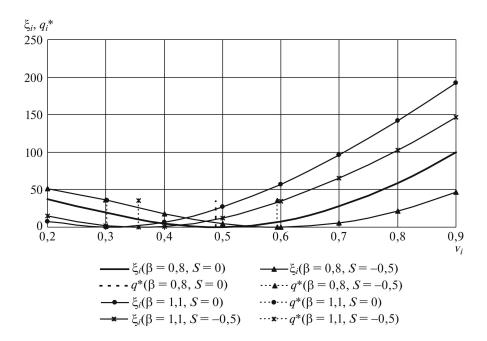


Рис. 3. Максимальное отклонение ξ_i решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $n=2,\,\sigma=1000.$

по формуле (9d). При моделировании отклонения ξ_i используем двухпараметрическую функцию (8) в виде

$$u_{i} = -2 - \frac{B_{i}\beta_{i}(\beta_{i}-1)Q_{i}^{\beta_{i}-2}}{b} = -2 - k\sigma\beta_{i}(\beta_{i}-1)Q_{i}^{\beta_{i}-2}$$

при различных значениях σ, β_i .

На рис. 2, 3 в зависимости от параметра линеаризации ν_i показаны отклонения $|\Delta Q_{i ф \text{акт}}^*|$ и ξ_i , а также точное решение q_i^* для случая дуополии (т.е. при n=2) при коэффициенте спроса и издержек, равном $\sigma=1000$, для случая однотипных агентов (т.е. $\beta=\beta_i \ \forall i\in N$) при различных типах эффекта расширения масштаба ($\beta<1$ и $\beta>1$) и различных значениях суммы предположительных вариаций ($S_i^r=0$ и $S_i^r=-0.5$). На рис. 4, 5 отклонения показаны для дуополии и триполии (т.е. при n=2,3) при положительном эффекте расширения масштаба ($\beta<1$) и нулевой сумме предположительных вариаций для различных значений коэффициента спроса и издержек σ .

Во всех случаях видно, что $|\Delta Q_{i \phi \text{акт}}^*| < \xi_i$, т.е. фактическая точность линеаризации существенно превышает предельную оценку, так как для наглядности высоты линий q_i^* на обоих рисунках одинаковы. Кроме того, видно, что отклонения $|\Delta Q_{i \phi \text{акт}}^*|$ и ξ_i практически совпадают и достигают наименьших значений, близких к нулю, при $\nu_i = q_i^*$, что подтверждает выполнение условий (10d), т.е. возможность нахождения достаточно точного решения системы (7) по линеаризованной системе (9b).

На рис. 6 в зависимости от действия каждого из агентов Q_i при значении параметра линеаризации $\nu_i=q_i^*$ показаны сплошными линиями функции оптимальных реакций F_i и пунктирными линиями линеаризованные функции F_i^\sim для случая дуополии (т.е. при n=2) при коэффициенте спроса и издержек, равном $\sigma=1000$; графики иллюстрируют точность совпадения решения уравнений (7) и (9b), т.е. совпадения точек пересечения этих функций с осью абсцисс.

Проведем анализ чувствительности решения системы линеаризованных уравнений (10a), вычисленных по формулам (10d), к изменениям параметров рынка и типа агентов. С использованием коэффициента спроса и издержек σ , формулы коэффициентов системы (10a) имеют вид трехпараметрических функций

$$\alpha_{i} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} - \frac{\hat{B}_{i}\beta_{i}^{2}\nu_{i}^{\beta_{i}-1}}{\hat{b}} = \sigma Q_{\max}^{-1} - k\sigma Q_{\max}^{\beta_{i}-2}\beta_{i}^{2}\nu_{i}^{\beta_{i}-1},$$
$$\delta_{i} = 2 + k\sigma Q_{\max}^{\beta_{i}-2}\beta_{i} (\beta_{i}-1)\nu_{i}^{\beta_{i}-2} + S_{i}^{r}$$

при различных значениях параметров σ, β_i, S_i^r .

Рассмотрим случай *дуополии*, когда функция издержек первого агента имеет положительный эффект расширения масштаба, а именно $\beta_1=0.8$, а у второго агента может быть положительный или отрицательный эффект. Опишем эти констелляции с помощью переменного соотношения параметров типа агентов $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ при $\beta_1=0.8$: если $\frac{\beta_2}{\beta_1}<1.25$, то второй агент имеет положи-

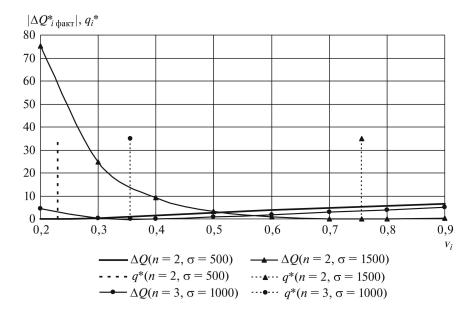


Рис. 4. Фактическое отклонение $|\Delta Q_{i \to \kappa \tau}^*|$ решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $\beta=0.8,\,S_i^\tau=0.$

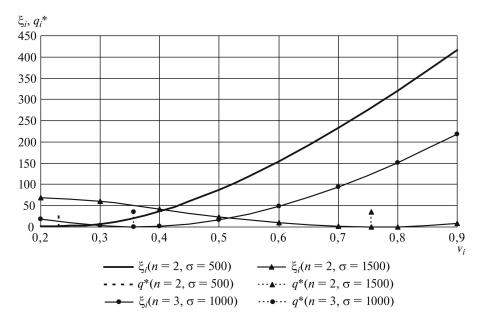


Рис. 5. Максимальное отклонение ξ_i решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $\beta=0.8,\,S_i^T=0.$

тельный эффект расширения масштаба, т.е. $\beta_2 < 1$; если $\frac{\beta_2}{\beta_1} > 1,25$, то второй агент имеет отрицательный эффект расширения масштаба, т.е. $\beta_2 > 1$. На рис. 7 изображены зависимости равновесных значений действий агентов q_1^*, q_2^* в дуополии как функции от соотношения параметров типа агентов $\frac{\beta_2}{\beta_1}$.

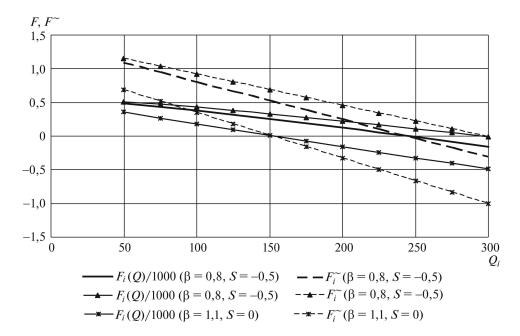


Рис. 6. Функция оптимальной реакции F_i и линеаризованная функция F_i^\sim при $n=2,\,\sigma=1000$ для $\nu_i=q_i^*$.

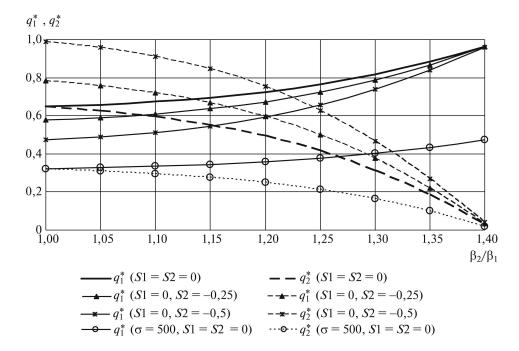


Рис. 7. Зависимости равновесных относительных действий в дуополии от соотношений параметров типа агентов при $n=2,~\sigma=1000,~Q_{\rm max}=500,~\beta_1=0.8,~k=0.2.$

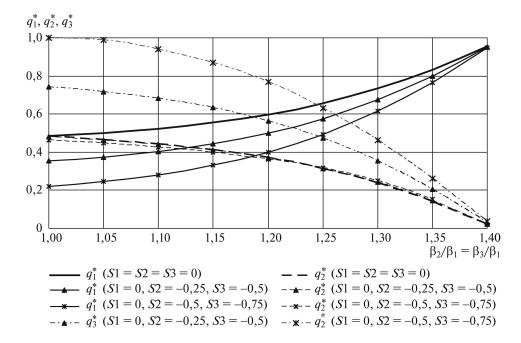


Рис. 8. Зависимости равновесных относительных действий в триполии от соотношений параметров типа агентов при $n=3,~\sigma=1000,~Q_{\rm max}=500,~\beta_1=0,8,~k=0,2.$

Все графики построены при значении коэффициента спроса и издержек, равного $\sigma=1000$, за исключением равновесия при $\sigma=500$, которое иллюстрирует влияние этого параметра. Базой сравнения является случай агентов Курно при нулевых предположительных вариациях ($S_1=S_2=0$), в котором влияние изменения параметра типа второго агента вполне объяснимо: равновесные действия первого агента увеличиваются, а второго уменьшаются с ростом $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, что обусловлено относительным опережением прироста издержек второго агента. Далее, показано влияние лидерства по Штакельбергу второго агента, т.е. увеличения модуля предположительной вариации этого агента ($S_2=-0.25;\ S_2=-0.5;\ S_2=-0.75$), которое выражается в том, что при малых значениях $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ равновесные действия второго агента существенно превышают действия первого, однако при $\frac{\beta_2}{\beta_1} > 1.25$ (т.е. $\beta_2 > 1$) первый агент вновь выигрывает в равновесии. Наконец, влияние изменения коэффициента спроса и издержек до $\sigma=500$ вызывает одновременный сдвиг равновесных действий агентов в сторону уменьшения.

На рис. 8 представлены зависимости равновесных значений действий агентов в триполии как функции от соотношения параметров типа агентов $\frac{\beta_i}{\beta_1}$, i=2,3 при $\beta_1=0,8$, т.е. параметры типа второго и третьего агентов одинаковы. Поэтому в случае $S_1=S_2=S_3=0$ графики q_2^* и q_3^* совпадают и характер влияния относительного изменения параметров функций издержек этих агентов по сравнению с первым агентом аналогичен случаю дуополии: равновесные действия первого агента увеличиваются, а второго и третьего

уменьшаются с ростом $\frac{\beta_i}{\beta_1}$. Далее рассмотрены ситуации, в которых первый агент считается ведомым, второй агент — лидером по Штакельбергу, а третий — лидером по Штакельбергу более высокого уровня, т.е. при $S_1=0$ имеет место $S_2=-0.25;\ S_2=-0.5$ и $S_3=-0.5;\ S_3=-0.75$ соответственно. В результате лидеры получают преимущество в равновесии до тех пор, пока их функции издержек характеризуются положительным эффектом масштаба, т.е. $\frac{\beta_i}{\beta_1}<1.25,$ а в случае $\frac{\beta_i}{\beta_1}>1.25$ равновесные действия первого агента становятся больше, чем действия лидеров.

5. Заключение

Процессы, протекающие в экономических и технических системах, зачастую нелинейны, поэтому нелинейные модели описывают их наиболее точно. Однако системы нелинейных уравнений, которые описывают оптимальные действия агентов в многоагентных системах, не имеют аналитического решения, что затрудняет исследование таких систем в случае, если одни их состояния зависят от других состояний, например при анализе динамики систем. В игре олигополии эта сложность возникает при анализе лидерства по Штакельбергу различных уровней, когда равновесие на данном уровне вычисляется в зависимости от равновесия на предшествующем уровне.

В статье рассмотрен первый этап разрешения этой проблемы, состоящий в редукции системы нелинейных уравнений оптимальных реакций агентов к системе линейных уравнений, зависящих от вектора параметров линеаризации. Для линеаризованной системы получено аналитическое решение как функция этих параметров. В результате расчет игровых равновесий сводится к подбору неподвижных точек нелинейных отображений. На этом этапе подбор параметров линеаризации осуществлялся эвристически, что тем не менее позволило получить решения игры с удовлетворительной точностью.

Моделирование равновесий для достаточно широкого спектра параметров состояния агентов подтвердило удовлетворительную точность линеаризации, а также продемонстрировало возможности данного подхода в задачах анализа влияния изменения параметров состояния на результирующее равновесие в игре.

Исследование позволило сделать следующие выводы. В игре олигополистов преимущество одного агента по типу функции издержек, т.е. наличие положительного эффекта расширения масштаба, ведет к повышению выигрыша этого агента по сравнению с выигрышами окружения. Лидерство по Штакельбергу одного из агентов также способствует повышению его выигрыша по сравнению с выигрышами окружения, однако преимущество других агентов по типу функции издержек корректирует влияние этого фактора.

Развитие исследований видится, во-первых, в нахождении замкнутой формы решения линеаризованной системы уравнений на основе процедуры вычисления неподвижных точек нелинейных отображений; во-вторых, в направлении применения разработанных расчетных методик к проблеме вычисления равновесий на реальных рынках, например рынке телекоммуникаций, при различных уровнях лидерства агентов с целью оценки их фактических

уровней путем сравнения с реальными состояниями. Результаты также актуальны в связи с увеличением количества агентов свыше трех, например на российском рынке телекоммуникаций, что приводит к усложнению анализа их взаимодействий. Наряду с этим, результаты могут быть использованы при анализе игр на других рынках, а именно на рынках розничной продажи электроэнергии [23–25], поскольку возможность анализа нелинейных систем обеспечивает более точные оценки результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

 \mathcal{A} о казательство утверждения 1. Проведем нормализацию вектора действий агентов из условия $q_i \in (0,1)$, которому удовлетворяет следующая формула:

(II.1)
$$q_i = \frac{Q_i}{Q_{\text{max}}}, \quad i \in N, \quad Q_{\text{max}} > Q_i, \quad i \in N.$$

Значение $Q_{\max} = \frac{a - MC_{\min}}{b}$, $MC_{\min} = \min_{i \in N} \left(B_i Q_i^{\beta_i - 1}\right)$ определено из формулы объема рынка олигополии при бесконечно большом количестве фирм [18]. Коэффициенты уравнений (7) для нормализованного вектора действий найдем из условия равенства критерия (1) при векторах действий q_i , $i \in N$ и Q_i , $i \in N$:

$$(\Pi.2) \qquad (\hat{a} - \hat{b}q) q_i - C_{Fi} - \hat{B}_i q_i^{\beta_i} = (a - bQ) Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i}, \quad i \in N.$$

Подставив в это выражение (Π .1) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях вектора действий, получим формулы (9c). Следовательно, (7) можно записать в виде

$$(\Pi.3) \qquad \hat{F}_i = \hat{a} - \hat{b}q - \hat{b}q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r\right) - \hat{B}_i \beta_i q_i^{\beta_i - 1} = 0, \quad i \in N.$$

Нелинейный компонент уравнений (П.3) есть функция $f(q_i) = \hat{B}_i \beta_i q_i^{\beta_i - 1}$. В окрестности числа ν_i , такого что $\nu_i \in (0,1), \nu_i < q_i$, разложение этой функции в ряд Тейлора имеет вид

$$\bar{f}(q_i) = f(\nu_i) + f'(\nu_i)(q_i - \nu_i) + \frac{f''(\nu_i)}{2!}(q_i - \nu_i)^2 + \dots$$

Если существует такое число $\Omega_i = \nu_i + \theta_i (q_i - \nu_i)$, что $\nu_i < \Omega_i < q_i$, иначе говоря $\theta \in (0,1)$, то этот ряд имеет остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа [20], вычисляемый по следующей формуле:

$$(\Pi.4) R_k(q_i) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\Omega_i) (q_i - \nu_i)^k = \frac{(q_i - \nu_i)^k}{k!} \frac{\Omega_i^{\beta_i}}{\Omega_i^{k+1}} \hat{B}_i \beta_i \prod_{j=1}^k (\beta_i - j).$$

Ряд сходится, если $|q_i-\nu_i| < r_i$ и $\lim_{k\to\infty} R_k\left(q_i\right)=0$, поэтому зададим малое число r_i , такое что $0 < r_i < \Omega_i$, и при этом покажем существование предела последовательности остаточных членов. Поскольку $r_i \in (0,\Omega_i)$, то $\Omega_i > q_i - \nu_i$, значит, $\frac{(q_i-\nu_i)^k}{\Omega_i^k} > \frac{(q_i-\nu_i)^{k+1}}{\Omega_i^{k+1}}$, и $k! = \prod_{j=1}^k j, \ j \geq |\beta_i-j|$, значит, $\frac{\prod_{j=1}^k |\beta_i-j|}{\prod_{j=1}^k j} > \frac{\prod_{j=1}^{k+1} |\beta_i-j|}{\prod_{j=1}^{k+1} j}$. Поэтому $\lim_{k\to\infty} R_k\left(q_i\right) = 0$, значит, ряд Тейлора с остаточным членом (П.4) сходится к функции $f\left(q_i\right) = \hat{B}_i\beta_iq_i^{\beta_i-1}$.

С учетом только первого члена ряда разложение функции $f(q_i)$ имеет вид $\bar{f}(q_i) = \hat{B}_i \beta_i \nu_i^{\beta_i-1} + \hat{B}_i \beta_i \left(\beta_i - 1\right) \nu_i^{\beta_i-2} \left(q_i - \nu_i\right)$. Поэтому (П.3) можно представить в виде (9b). Остаточный член (П.4) при этом равен

(II.5)
$$R_2(q_i) = \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1) (\beta_i - 2) \Omega_i^{\beta_i - 3}.$$

Оценим погрешность замены решения системы (7) на решение системы (9b). Функции F_i , описывающие левые части уравнений (7), в окрестности локального максимума критерия (1) являются убывающими по Q_i , поскольку $F'_{iQ_i} = u_i - S^r_i < 0$ выполняется при условии (8). Функции \hat{F}_i левых частей уравнений (9b) также убывающие, поскольку неравенство

(II.6)
$$\hat{F}'_{iq_i} = -2\hat{b} - \hat{b}S_i^r - \hat{B}_i\beta_i (\beta_i - 1)\nu_i^{\beta_i - 2} < 0$$

выполняется при условии (8). В (П.6) учтено, что согласно [17] $\frac{\partial S_i^r}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = 0$.

Как видно из рис. 1, отклонение решения q_i^* системы (9b) от точного решения Q_i^* системы (7), приведенного по нормализации (П.1) к единицам измерения Q_i , т.е. отклонение $\Delta Q_i^* = Q_i^* - \hat{Q}_i^*$, равно

(II.7)
$$|\Delta Q_i^*| = Q_{\text{max}} \frac{|R_2(q_i^*)|}{|\hat{F}'_{iq_i}|}.$$

С учетом коэффициентов, вычисленных по формулам (9c), выражение (Π .6) имеет вид

$$\begin{split} \hat{F}'_{iq_{i}} &= -2Q_{\max}^{2}b - Q_{\max}^{2}bS_{i}^{r} - Q_{\max}^{\beta_{i}}B_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i} - 1\right)\nu_{i}^{\beta_{i} - 2} = \\ &= -bQ_{\max}^{2}\left(2 + S_{i}^{r} + \frac{B_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i} - 1\right)}{b}Q_{\max}^{\beta_{i} - 2}\nu_{i}^{\beta_{i} - 2}\right). \end{split}$$

Это выражение с учетом (8а) равно $\hat{F}'_{iq_i} = -bQ^2_{\max}\left[2 - (u_{i\max} + 2)\nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r\right]$, где $u_{i\max} = u_i\left(Q_{\max}\right)$. Подставим это выражение, а также (П.5) в (П.7), по-

$$|\Delta Q_i^*| = Q_{\text{max}} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{B_i Q_{\text{max}}^{\beta_i} \beta_i |\beta_i - 1| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{b Q_{\text{max}}^2 \left| 2 - (u_{i \text{max}} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r \right|} =$$

$$= Q_{\text{max}} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{|u_{i \text{max}} + 2| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{\left| 2 - (u_{i \text{max}} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r \right|}.$$

Было показано [17], что выполняется ограничение $|S_i^r| < S_{\max} = \frac{m}{m-1-v_{\max}}$, где $v_{\max} = \frac{\psi_{\max}\left(1+\sqrt{\psi_{\max}}\right)^2}{m\sqrt{\psi_{\max}}}$, $\psi_{\max} \approx 1$, $\psi_{\max} < 1$, m — количество агентов окружения i-го агента, $m \geq 2$, тогда, приняв $\psi_{\max} = 1-\varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, получим приближенно $v_{\max} \approx \frac{1-\varepsilon}{m} \left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}$. Поэтому в общем можно записать следующее ограничение:

$$|\Delta Q_i^*| \le Q_{\max} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{|u_{i\max} + 2| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{|2 - (u_{i\max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_{\max}|}.$$

Поскольку $u_{i\,\mathrm{max}}$ есть ограниченная величина по (8a), S_{max} также ограниченная величина [17] при $m\geq 2$, поэтому если $r_i\to 0$, то $|q_i-\nu_i|\to 0$, значит, $\lim_{r\to 0}|\Delta Q_i^*|=0$.

Исследуем проблему существования решения системы уравнений (7). Рассмотрим следующую систему уравнений, решение которой, очевидно, такое же, как и системы (7):

(II.8)
$$f_i^r = -F_i^r = -a + bQ + bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) + B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1} = 0,$$
$$Q_i > 0, \quad i \in N.$$

Используем условия, сформулированные в теореме 3 [21] для вектор-функции $\mathbf{f}^r = \{f_i^r, i \in N\}$ (в дальнейшем индекс r опущен): если матрица Якоби системы (7) $\mathbf{J} = \left\{f_{iQ_j}', i, j \in N\right\}$ имеет диагональное преобладание, т.е.

(II.9)
$$f'_{iQ_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \left| f'_{iQ_j} \right| > 0, \quad i \in N,$$

то система (П.8) имеет единственное решение.

Поскольку $f'_{iQ_i}=-b\,(u_i-S_i),\ f'_{iQ_j}=b\,\Big(1+S^{r/}_{iQ_j}\Big)$ и в [17] показано, что $\lim_{Q_j\to\infty} \frac{\partial S^r_i}{\partial Q_j}=0$, поэтому при достаточно больших Q_i матрица Якоби ${\bf J}_n$ n-го порядка для системы (П.8) имеет вид

$$\mathbf{J}_{n} = \begin{bmatrix} -b(u_{1} - S_{1}) & b & \dots & b \\ b & -b(u_{2} - S_{2}) & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & -b(u_{n} - S_{n}) \end{bmatrix} =$$

$$= b \begin{bmatrix} -g_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -g_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -g_n \end{bmatrix},$$

где $g_i = u_i - S_i < 0, i \in N$ согласно (8). Обратная матрица \mathbf{J}_n^{-1} существует, если определитель матрицы Якоби $\Delta \mathbf{J}_N \neq 0$; этот определитель [17] вычисляется по формуле

$$\Delta \mathbf{J}_n = b \left(\prod_{i=1}^n (-g_i - 1) + \sum_{\gamma=1}^n \prod_{j=1 \mid \gamma}^n (g_i - 1) \right).$$

Поэтому условие $\Delta \mathbf{J}_n \neq 0$ равносильно $\sum_{i \in N} \frac{1}{g_i+1} \neq 1$ и $g_i \neq 0$ $\forall i \in N$ (см. [17]). В этом случае условие (П.9) имеет вид $-g_i - (n-1) > 0, \ i \in N$, откуда следует, что

$$(\Pi.10) n < |u_i - S_i^r| + 1, \quad i \in N.$$

Отметим, что условия теорем 1, 2 [21] для системы (7) не выполняются (а именно, не выполняется условие различных знаков производных F'_{iQ_i} и F'_{iQ_j}), поэтому нельзя гарантировать существования неотрицательного решения; этот вопрос рассматривался в [22].

Однако условие (П.10) не является необходимым, т.е. если оно не выполняется, система (7) может иметь решение. Сформулируем необходимое условие существования решения системы (7), базируясь на геометрическом смысле решения как точки пересечения линий оптимальных реакций в случае n=2. Предположим, что существуют функции \bar{F}_i , полученные путем выражения из уравнений (7) действий i-го агента от действий окружения (обозначено символом «-i»), т.е. функции оптимальных реакций $Q_i = \bar{F}_i (Q_{-i})$, и введем функции отклонений реакций i-го и j-го агентов вида $G_{ij} (Q_i, Q_j) = \bar{F}_i - \bar{F}_{ij}^{-1}$, где \bar{F}_{ij}^{-1} — обратная функция для \bar{F}_j , полученная выражением Q_i из F_j . Если решение $\{Q_i^*, i \in N\}$ системы (7) существует, то

$$(\Pi.11) G_{ij}\left(Q_i^*, Q_j^*\right) = 0 \ \forall i, j \in N.$$

Поскольку $\bar{F}'_{iQ_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = x_{ji}$, $\left(\bar{F}_{ij}^{-1}\right)'_{Q_j} = u_i - S_i$, причем $x_{ji} < 0$ согласно [17] и $u_i - S_i < 0$ согласно (8), то функции \bar{F}_i и \bar{F}_{ij}^{-1} являются монотонно убывающими по Q_j в интервале, на котором выполняются указанные условия. Поэтому при данном Q_i^* функции $G_{ij}\left(Q_i^*,Q_j\right)$ являются монотонно возрастающими (или убывающими при альтернативно возможной форме $G_{ij} = \bar{F}_{ij}^{-1} - \bar{F}_i$) по Q_j на интервале $\left(\bar{Q}_j,Q_{\max}\right)$, т.е.

$$G'_{ijQ_j} = \bar{F}'_{iQ_j} - \left(\bar{F}_{ij}^{-1}\right)'_{Q_j} > 0,$$

если выполнено условие $|x_{ji}|<|u_i-S_i|$ (или $|x_{ji}|>|u_i-S_i|$ при $G_{ij}=\bar{F}_{ij}^{-1}-\bar{F}_i$). Иначе говоря условие монотонности функции G_{ij} имеет вид

$$(\Pi.12) |x_{ji}| \neq |u_i - S_i|.$$

Граница интервала \bar{Q}_j вычисляется из условия (8) с учетом (8а) по следующей формуле:

$$\bar{Q}_j = \left(\frac{B_j\beta_j \, |\beta_j - 1|}{b\left(2 + S_j^r\right)}\right)^{\frac{1}{2 - \beta_j}} \quad \text{при} \quad \beta_j < 1, \quad \bar{Q}_j = 0 \quad \text{при} \quad \beta_j > 1.$$

Монотонная функция ограничена на замкнутом интервале $A_j = [\bar{Q}_j, Q_{\max}],$ т.е. по теореме Вейерштрасса

$$m \leq G_{ij}\left(Q_i^*,Q_j\right) \leq M$$
, где $m = \inf_{Q_j \in A_j} G_{ij}$, $M = \sup_{Q_j \in A_j} G_{ij}$.

Отсюда следует, что при условии (П.11) $m \le 0 \le M$. При этом по теореме Больцано–Коши о промежуточном значении имеем $\bar{Q}_j \le Q_j^* \le Q_{\max}$, следовательно, совместное выполнение (П.12) и $0 \le \bar{Q}_j \le Q_{\max}$ есть необходимое условие для (П.11) на интервале (\bar{Q}_j, Q_{\max}).

Это условие является также достаточным, если, кроме того, m и M имеют противоположные знаки, т.е.

(II.13)
$$G_{ij}(Q_i^*, \bar{Q}_j) G_{ij}(Q_i^*, Q_{\max}) < 0,$$

поскольку при (П.12) функция G_{ij} монотонна, а с учетом (П.13) интервал монотонности включает в себя точку $G_{ij}\left(Q_i^*,Q_j\right)=0$. Выведем удобную для проверки форму условия (П.13): выражение \bar{F}_{ij}^{-1} для уравнений системы (7) имеет вид

$$(\Pi.14) \qquad \bar{F}_{ij}^{-1} = Q_i = \frac{a}{b} - \sum_{k \in N \setminus (i,j)} Q_k - Q_j - bQ_j (1 + S_j) - \frac{B_j \beta_j Q_j^{\beta_j - 1}}{b}.$$

Поскольку условия (П.13) должны выполняться при всех значениях действий, то рассмотрим случай, когда действия всех агентов, кроме i-го и j-го, равны \bar{Q}_k ; поэтому из выражения (П.14) следует

$$\bar{F}_{ij}^{-1}(Q_{\max}) \equiv \kappa_j = \frac{a}{b} - \sum_{k \in N \setminus (i,j)} \bar{Q}_k - Q_{\max} - Q_{\max}(1+S_j) - \frac{B_j \beta_j Q_{\max}^{\beta_j - 1}}{b}.$$

Пусть $\bar{F}_i\left(\bar{Q}_j\right) < \bar{F}_{ij}^{-1}\left(\bar{Q}_j\right)$, т.е. $G_{ij}\left(Q_i^*, \bar{Q}_j\right) < 0$; тогда в силу монотонного убывания $\bar{F}_i\left(Q_j\right)$ условие $\bar{F}_i\left(Q_{\max}\right) > \bar{F}_{ij}^{-1}\left(Q_{\max}\right)$, т.е. $G_{ij}\left(Q_i^*, Q_{\max}\right) > 0$,

выполняется при $|x_{ji}|<|u_i-S_i|$. Подставим в i-е уравнение системы (7) $Q_j=Q_{\max}$ и \bar{Q}_k , получим

$$F_{i}\left(\boldsymbol{\kappa}_{i}\right) = a - b\left(Q_{\max} + \sum_{k \in N\setminus\left(i,j\right)} \bar{Q}_{k} + \boldsymbol{\kappa}_{i}\right) - b\boldsymbol{\kappa}_{i}\left(1 + S_{i}\right) - B_{i}\beta_{i}\boldsymbol{\kappa}_{i}^{\beta_{i}-1} = 0,$$

где символом κ_i обозначено решение этого уравнения. Поскольку функции F_i являются монотонно убывающими при условии (8), то из неравенства $F_i(\kappa_j) > 0$ следует $\kappa_j < \kappa_i$, и наоборот. Следовательно, условие (П.13) можно представить в виде: если $F_i(\kappa_j) > 0$ и $|x_{ji}| < |u_i - S_i|$ для всех $i, j \in N$, то m и M имеют противоположные знаки.

Доказательство утверждения 2. Из уравнений (9а) следует, что

$$\begin{split} \hat{a} - \hat{b}q_{-i} - \hat{b}q_{i} - \hat{b}q_{i} \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^{r}\right) - \hat{B}_{i}\beta_{i}\nu_{i}^{\beta_{i}-1} - \hat{B}_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i}-1\right)\nu_{i}^{\beta_{i}-2}q_{i} + \\ + \hat{B}_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i}-1\right)\nu_{i}^{\beta_{i}-2}\nu_{i} = 0, \\ -\hat{b}\left(2 + \frac{\hat{B}_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i}-1\right)}{\hat{b}}\nu_{i}^{\beta_{i}-2} + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^{r}\right)q_{i} - \hat{b}q_{-i} + \hat{a} - \hat{B}_{i}\beta_{i}\nu_{i}^{\beta_{i}-1} + \\ + \hat{B}_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i}-1\right)\nu_{i}^{\beta_{i}-1} = 0, \\ -\hat{b}\left(2 + \frac{\hat{B}_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i}-1\right)}{\hat{b}}\nu_{i}^{\beta_{i}-2} + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^{r}\right)q_{i} - \hat{b}q_{-i} + \hat{a} - \hat{B}_{i}\beta_{i}\left(2 - \beta_{i}\right)\nu_{i}^{\beta_{i}-1} = 0, \\ \left(2 + \frac{\hat{B}_{i}\beta_{i}\left(\beta_{i}-1\right)}{\hat{b}}\nu_{i}^{\beta_{i}-2} + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^{r}\right)q_{i} + q_{-i} - \frac{\hat{a} - \hat{B}_{i}\beta_{i}\left(2 - \beta_{i}\right)\nu_{i}^{\beta_{i}-1}}{\hat{b}} = 0, \end{split}$$

поэтому можно записать (10а).

Система (10a) решается методом Крамера. Используем материалы приложения статьи [17]. Левые части системы (10a) аналогичны системе (Π .2) из [17], поэтому главный определитель имеет вид

$$\Delta = \prod_{j=1}^{n} (\delta_j - 1) + \sum_{j=1}^{n} \prod_{\gamma=1 \setminus j}^{n} (\delta_{\gamma} - 1).$$

Условие существования решения системы (10a) определяется по теореме Крамера [20]: система имеет единственное решение, если главный определитель $\Delta \neq 0$. Из формулы главного определителя следует, что

$$\frac{\Delta}{\sum_{j=1}^{n} (\delta_j - 1)} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\delta_j - 1}$$
 при $\delta_j - 1 \neq 0 \ \forall j \in N$,

поэтому решение системы (10а) существует, если

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\delta_j - 1} \neq -1 \wedge \delta_j - 1 \neq 0 \ \forall j \in N.$$

Вспомогательный определитель системы (10a), соответствующий i-й неизвестной, вычисляется путем следующих преобразований: 1) из i-й строки выносится множитель α_i , 2) в i-м столбце создаются нули, 3) определитель разлагается по элементам i-го столбца с понижением порядка, 4) полученный определитель последовательно разлагается на суммы определителей по каждой строке, 5) в этом разложении определители, имеющие одинаковые строки (столбцы), равны нулю, а остальные определители соответствуют либо главному определителю, либо вспомогательному определителю системы (П.2) из [17]. Эти преобразования (например, при i=2) имеют вид

$$\begin{split} \Delta_2 &= \left| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 & \alpha_1 & 1 \\ 1 & \alpha_2 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & \delta_3 \end{array} \right| = \alpha_2 \left| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & \delta_3 \end{array} \right| = \alpha_2 \left| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 0 & 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & 0 & \delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{array} \right| = \\ &= \alpha_2 \left| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & \delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{array} \right| = \alpha_2 \left| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{array} \right| - \alpha_2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left| \begin{array}{ccc|c} \delta_1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| - \alpha_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{array} \right| + \\ &+ \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = \alpha_2 \Delta_{-2} - \alpha_3 \left(\delta_1 - 1\right) - \alpha_1 \left(\delta_2 - 1\right), \end{split}$$

где Δ_{-i} — главный определитель системы (10a) без *i*-го уравнения и без *i*-й неизвестной. Для вспомогательного определителя системы четвертого порядка (например, при i=1) эти преобразования имеют вид

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} \alpha_{1} & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{2} & \delta_{2} & 1 & 1 \\ \alpha_{3} & 1 & \delta_{3} & 1 \\ \alpha_{4} & 1 & 1 & \delta_{4} \end{vmatrix} = \alpha_{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \delta_{2} - \frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}} \\ 0 & 1 - \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} & \delta_{3} - \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \\ 0 & 1 - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} & \delta_{4} - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \end{vmatrix} = \alpha_{1} \begin{vmatrix} \delta_{2} - \frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}} \\ 1 - \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} & \delta_{3} - \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}} \\ 1 - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} & 1 - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} & \delta_{4} - \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \end{vmatrix} = \alpha_{1} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{3} & 1 \\ 1 & 1 & \delta_{4} \end{vmatrix} - \alpha_{1} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_{1} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \delta_{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_{1} \frac{\alpha_{3}}{\alpha_{1}} \frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}} \begin{vmatrix} \alpha_{4} & \alpha_{4} & \alpha_{4} \\ \alpha_{1} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$-\alpha_{1}\frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{3} & 1 \\ 1 & 1 & \delta_{4} \end{vmatrix} + \alpha_{1}\frac{\alpha_{2}}{\alpha_{1}}\frac{\alpha_{4}}{\alpha_{1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{1}\Delta_{-1} - \alpha_{2}(\delta_{3} - 1)(\delta_{4} - 1) - \alpha_{3}(\delta_{2} - 1)(\delta_{4} - 1) - \alpha_{4}(\delta_{2} - 1)(\delta_{3} - 1).$$

Обобщение этих выражений для системы произвольного порядка по индукции приводит к формуле

$$\Delta_i = \alpha_i \Delta_{-i} - \sum_{j=1 \setminus i}^n \left[\alpha_j \prod_{\gamma=1 \setminus i,j}^n (\delta_\gamma - 1) \right],$$

что позволяет записать формулу (10b).

Покажем, в каких случаях для корней (10c) выполняются условия (10d), т.е.

(II.15)
$$|q_i - \nu_i| < r_i, \quad \Omega_i = \nu_i + \theta_i (q_i - \nu_i), \quad \theta_i, \nu_i \in (0, 1),$$

$$r_i \in (0, \Omega_i), \quad \nu_i < q_i, \quad i \in N.$$

Условия $|q_i - \nu_i| < r_i$ и $\nu_i < q_i$ совместно выполняются, если для корней (10c) существует функция $G_i = q_i^* (\nu_i) - \nu_i$, причем $G_i \in (0, r_i)$ на интервале $\nu_i \in (0, 1)$. В этом случае условие $r_i \in (0, \Omega_i)$ выполняется, если $\Omega_i = \nu_i + \theta_i (q_i^* - \nu_i) > r_i$, т.е. $\theta_i > \frac{r_i - \nu_i}{q_i^* - \nu_i} > \frac{r_i - \nu_i}{r_i}$, значит, $1 > \theta_i > \frac{r_i - \nu_i}{r_i}$. Отметим, что в последнем неравенстве для малых значений ν_i возможен случай $r_i - \nu_i < 0$, поэтому в этом случае условие (П.15) выполняется при любом $\theta_i \in (0, 1)$.

Поскольку функция G_i непрерывна при условии (10b), то условие $G_i \in (0, r_i)$ выполняется, если на интервале $\nu_i \in (0, 1)$ функция G_i имеет хотя бы один ноль. В дальнейшем индекс i опущен, поскольку условия (П.15) должны выполняться для всех $i \in N$, поэтому из (10c) следует, что

$$q^* = \frac{\alpha \left(\chi^{n-1} + (n-1)\chi^{n-2}\right) - (n-1)\alpha\chi^{n-2}}{\chi^n + n\chi^{n-1}} = \frac{\alpha}{\chi + n},$$
 где $\chi = \delta - 1.$

Исследуем функцию G_i на границах интервала $\nu \in (0,1)$, для чего найдем пределы справа (при $\nu \to 0+0$) коэффициентов $\alpha(\nu)$, $\delta(\nu)$:

$$\lim_{\nu \to 0+0} \alpha = \begin{cases} \mu_1 & \text{при } \beta > 1, \\ -\infty & \text{при } \beta < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{\nu \to 0+0} \delta = \begin{cases} \infty & \text{при } \beta > 1, \\ -\infty & \text{при } \beta > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{\nu \to 0+0} \delta = \begin{cases} \infty & \text{при } \beta > 1, \\ -\infty & \text{при } \beta < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{\nu \to 0+0} \delta = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta < 1, \end{cases}$$

Поэтому $\lim_{\nu\to 0+0}q^*=0$, значит, $\lim_{\nu\to 0+0}G=-0$, т.е. при $\nu\to 0$ справа функция $G\to 0$ снизу, или $G\left(\nu\to 0+0\right)<0$. Найдем пределы слева (при $\nu\to 1-0$) коэффициентов $\alpha\left(\nu\right),\delta\left(\nu\right)$:

$$\lim_{\nu \to 1-0} \alpha = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i)}{\hat{b}} = \frac{a}{bQ_{\text{max}}} + \frac{\beta}{\beta - 1} (u_{\text{max}} + 2) \approx \frac{a}{bQ_{\text{max}}},$$

поскольку согласно (8a) $\lim_{Q \to Q_{\text{max}}} (u_i + 2) = 0;$

$$\lim_{\nu \to 1-0} \delta = 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} + S_i^r = -(u_{\text{max}} - S_i^r) > 0$$

согласно (8). Поэтому

$$\lim_{\nu \to 1-0} q^* = \frac{a}{bQ_{\text{max}}} \frac{1}{-(u_{\text{max}} - S_i^r) - 1 + n};$$

так как согласно [17] $|S_i^r| \le 1$, то

$$\lim_{\nu \to 1-0} q^* \ge \frac{a}{bQ_{\text{max}}} \frac{1}{-u_{\text{max}} + n};$$

это число будет больше единицы, т.е.

$$\lim_{\nu \to 1-0} G = +0,$$

при условии

$$\frac{a}{bQ_{\max}} \frac{1}{-u_{\max} + n} > 1 \Rightarrow n < \frac{a}{bQ_{\max}} + u_{\max}.$$

Поскольку на интервале $\nu_i \in (0,1)$ функция G_i меняет знак, то по теореме Коши [20] она имеет хотя бы один нуль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Karmarkar U.S., Rajaram K. Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // Eur. J. Oper. Res. 2012. No. 223 (3). P. 680–689.
- 2. Ledvina A., Sigar R. Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // Math. Financ. Econom. 2012. No. 6 (4). P. 261–293.
- 3. Currarini S., Marini M.A. Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // Appl. Math. Sci. 2013. No. 7 (1–4). P. 197–200.
- 4. Vasin A. Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // Procedia Comput. Sci. 2014. No. 31. P. 124–132.
- Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J. Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // 2016 IEEE Int. Conf. Communicat., ICC 2016. No. 7511340.
- 6. Nash J. Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
- 7. Cournot A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
- 8. Naimzada A.K., Sbragia L. Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes // Chaos. Solit. Fractal. 2006. No. 29 (3). P. 707–722.
- 9. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // Chaos. Solit. Fractal. 2016. No. 84. P. 15–22.

- 10. Naimzada A., Tramontana F. Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // J. Differ. Equat. Appl. 2015. No. 21 (7). P. 553–563.
- 11. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Geterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. No. 23 (1–3). P. 245–262.
- 12. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin: Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934.)
- 13. Chong J.-K., Ho T.-H., Camerer C. A Generalized Cognitive Hierarchy Model of Games // Games Econom. Behavior. 2016. No. 99. P. 257–274.
- 14. Berger U., De Silva H., Fellner-Ruhling G. Cognitive Hierarchies in the Minimizer Game // J. Econom. Behavior Organizat. 2016. No. 130. P. 337–348.
- 15. Bowley A.L. The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univers. Press, 1924.
- 16. Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1631–1650.
- 17. Герасъкин М.И. Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // AuT. 2020. № 6. С. 105–130. Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 6. P. 1051–1072.
- 18. Intriligator M.D. Mathematical Optimization and Economic Theory. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.
- Geras'kin M.I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.
- Korn A., Korn M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems and Formulas for References and Review. New York: McGraw-Hill, 1968.
- 21. Яковлев М.Н. Неотрицательные решения систем нелинейных (в частности, разностных) уравнений // Тр. МИАН СССР. 1968. Т. 96. С. 111–116.
- Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.
- 23. Aizenberg N., Stashkevich E., Voropai N. Forming Rate Options for Various Types of Consumers in the Retail Electricity Market by Solving the Adverse Selection Problem // Int. J. Public Administrat. 2019. No. 42(15–16). P. 1349–1362.
- 24. Paccagnan D., Kamgarpour M., Lygeros J. On Aggregative and Mean Field Games with Aapplications to Electricity Markets // 2016 Eur. Control Conf., ECC 2016. 2017. No. 7810286. P. 196–201.
- 25. Prosvirkin N., Blinova E., Gerasimov K. Multicriteria Optimization Model of the Interaction of Elements when Managing Network Integrated Structures // Espacios. 2019. No. 40(40). P. 1–10.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 23.09.2019

После доработки 27.12.2019

Принята к публикации 30.01.2020

© 2020 г. А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (e-mail agolubin@hse.ru) (Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва; Центр информационных технологий в проектировании РАН, Одинцово, Московская обл.), В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (e-mail info@ditc.ras.ru) (Центр информационных технологий в проектировании РАН, Одинцово, Московская обл.)

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ СТРАХОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РИСКА С ПОШАГОВЫМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРИРАЩЕНИЯ ПРОЦЕССА¹

Исследована проблема построения оптимальной стратегии страхования в новой многошаговой модели страхования, где введены пошаговые вероятностные ограничения (Value at Risk (VaR) ограничения) на капитал страховщика, т.е. вероятностные ограничения на приращения капитала страховщика в течение одного шага. В качестве целевого функционала используется математическое ожидание финального капитала страховщика. Суммарный ущерб страховщика на каждом шаге моделируется нормальным распределением с параметрами, зависящими от выбранной функции дележа риска. В отличие от традиционных динамических моделей оптимизации стратегий страхования, предлагаемый подход, учитывающий пошаговые ограничения, позволяет свести построение функций Беллмана — а значит, и нахождение оптимальных дележей риска — просто к решению последовательности статических задач оптимизации страхования. Доказано, что оптимальными дележами риска являются так называемые stop loss страхования.

 ${\it K. nroveesue}$ слова: оптимальное страхование, вероятностное ограничение, процесс риска.

DOI: 10.31857/S000523102009007X

1. Введение

Проблемы оптимального управления риском в динамических моделях страхования, основанных на процессе риска Крамера—Лундберга, изучались в [1–7]. В [2] исследована задача минимизации вероятности разорения страховой компании выбором перестрахования в классе так называемых stop loss дележей, применяемых к риску каждого отдельного страхователя. Публикация [3] посвящена решению той же задачи, но в случае, когда страховщику доступны различные виды перестрахования и инвестирование в безрисковый и рисковый активы. Процесс риска, возникающий как диффузионная аппроксимация процесса Крамера—Лундберга, изучался в [3]. Управляемый процесс

 $^{^1}$ Работа поддержана Госзаданием № 0071-2019-0001.

риска на бесконечном временном интервале с одновременным выбором стратегий страхования и перестрахования индивидуальных ущербов рассмотрен в [4, 5] при дополнительных ограничениях на допустимые стратегии. Задача с иным критерием оптимальности, а именно с максимизируемым коэффициентом Лундберга в оценке вероятности разорения, решена в [6] для процесса риска с дискретным временем и целого класса принципов начисления премии перестраховщику. В [7] критерием оптимальности для процесса риска на конечном интервале был функционал полезности типа Марковица. Получены дифференциальные уравнения для определения оптимальных стратегий перестрахования и инвестирования с использованием так называемого time-consistent подхода, который позволяет получить уравнение оптимальности беллмановского типа для этого типа критериев оптимальности. С точки зрения выбора целевого функционала близкие по постановке задачи изучались в [5, 7]. Но в [7] был рассмотрен процесс риска с непрерывным временем (и была предусмотрена возможность инвестирования текущего капитала страховщика), что привело к необходимости решения уравнения Гамильтона— Якоби-Беллмана и отсутствию явного вида оптимальных стратегий. В обоих случаях в отличие от предлагаемой статьи предусматривалось только перестрахование и не учитывались вероятностные ограничения.

Популярным направлением исследований в последние годы стал поиск оптимальных дележей риска в статических моделях при так называемом "Value at Risk" (VaR) ограничении, которое означает установление нижней границы на вероятность падения капитала ниже заданного уровня (см., например, [8, 9]). Одношаговая задача с целевым функционалом типа Марковица и VaR ограничением была исследована в [10] (там же приведена библиография по оптимизации дележа риска в страховании при VaR ограничениях).

Главным отличием данной статьи от предыдущих исследований, известных авторам, является то, что предложена новая модификация управляемого процесса риска с дискретным временем, где предусмотрены пошаговые VaR ограничения на приращения капитала страховщика. Такой подход позволяет учесть естественное желание страховщика не иметь больших потерь на каждом шаге с заданной вероятностью а, с другой стороны, позволяет свести динамическую задачу оптимального управления процессом риска к решению последовательности относительно простых одношаговых оптимизационных задач. Анализ таких задач основан на результатах [10]. Показано, что на каждом шаге оптимальным с точки зрения страховщика оказывается так называемое stop loss страхование. Приведен численный пример, иллюстрирующий доказанные результаты в случае экспоненциального распределения страховой выплаты.

2. Предварительные результаты

В этом разделе рассматривается одношаговая задача выбора дележа страхования между страховщиком и страхователями при VaR ограничении, где максимизируемым функционалом является средний финальный капитал страховщика. Решение такой задачи будет использоваться в дальнейшем при анализе многошаговой задачи страхования. Результаты, приведенные в этом

разделе, есть просто модификация утверждений, доказанных в [10], на случай отсутствия дополнительного ограничения сверху с вероятностью единица на риск страховщика и при использовании среднего значения финального капитала вместо целевого функционала типа Марковица.

Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика и n клиентов. Потенциальные ущербы (риски) клиентов — независимые неотрицательные случайные величины $X_j,\ j=1\dots,n$, определенные на одном вероятностном пространстве (Ω,\mathcal{F},P) . В дальнейшем эта группа клиентов предполагается однородной: все X_j имеют одинаковое распределение $F_1(x)\stackrel{def}{=} P\{X_1 \leq x\}$, причем математическое ожидание X_1^2 конечно: $\operatorname{E} X_1^2 < \infty$. Отметим характерную особенность функции распределения $F_1(x)$, а именно скачок в нуле: $F_1(0) \in (0,1)$ — вероятность отсутствия страхового случая для клиента предполагается ненулевой и не равной единице. Страховщик выбирает функцию дележа страхования I(x) из класса борелевских функций, определенных на $[0,\infty)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 \leq I(x) \leq x$, которые означают, что возмещение не может быть отрицательным и не может превосходить величины ущерба. Случайная величина $I(X_j)$ есть возмещаемая j-му клиенту часть ущерба, а суммарный риск страховщика $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$.

Дополнительное ограничение на дележи I(x), отражающие желание страховщика защититься от больших потерь, состоит в том, что вероятность превышения капитала страховщика $S^I \stackrel{def}{=} w + nP - X^I$ над заданным уровнем a удовлетворяет неравенству

$$(2.1) P\left\{S^I \ge a\right\} \ge \beta.$$

Здесь w — собственный капитал страховщика, a — заданная константа, уровень доверия предполагается достаточно высоким $\beta \in (0,5;1)$, а страховая премия P вычисляется по формуле среднего значения, известного в актуарной литературе (см., например, [1]): $P = (1+\alpha) \operatorname{E} I(X_1)$, где $\alpha > 0$ — заданный коэффициент нагрузки страховщика.

Максимизируемым функционалом является математическое ожидание финального капитала страховщика $S^I.$ Таким образом, исследуемая задача имеет вид

$$(2.2) J[I] \equiv ES^I \to \max$$

при ограничении $0 \le I(x) \le x$ и ограничении (2.1).

Считая численность группы страхователей n достаточно большой (не менее нескольких десятков) и $n(1-F_1(0))>10$, применим достаточно широко используемую в актуарной математике нормальную модель для аппроксимации распределения суммарного риска $X^I=\sum_{j=1}^n I(X_j)$ (см., например, [1,10]). Тогда ограничение (2.1) переписывается как

$$P\left\{\frac{S^I - ES^I}{\sigma(S^I)} \ge \frac{a - ES^I}{\sigma(S^I)}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{a - ES^I}{\sigma(S^I)}\right) \ge \beta,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины, а $\sigma(S^I) = \sqrt{\mathrm{D}S^I}$ — стандартное отклонение капитала страховщика. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $\mathrm{E}S^I - a - x_\beta^N \sigma(S^I) \geq 0$, здесь x_β^N — квантиль уровня β стандартного нормального распределения. В результате (2.2) преобразуется в задачу

$$J[I] \equiv w + \alpha n E I(X_1) \rightarrow \max$$
 при ограничении $I \in A$,

т.е.

$$(2.4) 0 \le I(x) \le x$$

И

(2.5)
$$w + \alpha n \mathbb{E}I(X_1) - a - x_{\beta}^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1)} \ge 0.$$

Всюду далее будем использовать обозначения

$$\bar{F}_1(x) \stackrel{def}{=} 1 - F_1(x)$$
 и $I_k(x) \stackrel{def}{=} x \wedge k$, где $x \wedge k = \min\{x, k\}$.

Для дальнейшего анализа рассмотрим вспомогательную задачу максимизации функционала в левой части ограничения (2.5)

(2.6)
$$J_0[I] \equiv w + \alpha n EI(X_1) - a - x_\beta^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1)} \to \max,$$

где максимум берется по множеству дележей $\{I: 0 \le I(x) \le x\}$. Выполнение условия регулярности Слейтера (см., например, [3, гл. 3, с. 119]) для задачи (2.3)–(2.5) гарантируется следующим утверждением.

Утверждение 1. Условие Слейтера выполнено, если

(2.7)
$$J_0[I^0] > 0 \quad u \quad \alpha \sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} > 0,$$

где $I^0(x)$ есть stop loss страхование, $I^0(x)=x\wedge k^0$. Здесь k^0 — минимальный корень на промежутке $(0,\infty)$ уравнения

$$(2.8) \psi(k) = 0,$$

функция

$$\psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} x_{\beta}^{N}(\mathrm{E}I_{k}(X_{1}) - k) / \sqrt{\mathrm{D}I_{k}(X_{1})} + \alpha \sqrt{n}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие Слейтера (см. (2.7)), тогда задача (2.3)–(2.5) имеет единственное решение — stop loss страхование $I^*(x) = x \wedge k^*$. Допустимый дележс $I^*(\cdot)$ оптимален в (2.3)–(2.5) тогда и только тогда, когда существует $\mu \geq 0$:

(2.9)
$$\mu J_0[I^*] = 0,$$

$$(2.10) I^*(x) = x \wedge k^*,$$

где

$$(2.11) k^* = 0,$$

 $m.e. I^*(X_1) = 0$ почти наверное (п.н.) при

(2.12)
$$(1+\mu)\alpha\sqrt{n} - x_{\beta}^{N}\mu\sqrt{F_{1}(0)/\bar{F}_{1}(0)} \le 0,$$

иначе $k^* > 0$ — минимальный корень уравнения

$$\phi(k) = 0,$$

где

$$\phi(k) \stackrel{def}{=} x_{\beta}^{N} \mu(EI_{k}(X_{1}) - k) / \sqrt{DI_{k}(X_{1})} + (1 + \mu)\alpha\sqrt{n}.$$

Заметим, что условие (2.12) в теореме 1 является необходимым и достаточным условием отказа страховщика от сделки, т.е. его возмещение клиенту $I^*(X_1) = 0$ п.н.

3. Многошаговая задача страхования

Рассмотрим процесс риска с дискретным временем (см., например, [6]) на интервале $\{0, \ldots, T\}$, где на каждом шаге $t = 0, \ldots, T - 1$ страховщик заключает сделку с n клиентами однородной группы. Обозначая через Z_t капитал страховщика на шаге t, получаем уравнение динамики

(3.1)
$$Z_{t+1} = Z_t + n(1+\alpha)EI^t(X_1^t) - \sum_{j=1}^n I^t(X_j^t), \quad Z_0 = w.$$

Здесь (X_1^t,\ldots,X_n^t) , $t=0,\ldots,T-1$, — независимые векторы ущербов клиентов с независимыми одинаково распределенными компонентами, имеющими функцию распределения $F_1^t(x)$. Дележ риска $I^t(x)$ на шаге t выбирается из множества

$$A_t = \{I(\cdot): 0 \le I(x) \le x, P\{Z_{t+1} \ge a^t + Z_t\} \ge \beta^t\}, \quad t = 0, \dots, T - 1.$$

Константы $a^t>0$ и $\beta^t\in(0,5;1)$ обозначают соответственно заданную нижнюю границу допустимого приращения капитала и уровень доверия. Таким образом, VaR ограничения наложены не на значения процесса Z_t , а на его приращения на каждом шаге, обеспечивая "плавность" поведения процесса на всем интервале функционирования. Близкий подход был использован в [11], но для иной модели, где объектом изучения был процесс риска с непрерывным временем и возможностью инвестирования с пропорциональным страхованием рисков.

После применения нормальной аппроксимации для

$$n(1+\alpha)EI^{t}(X_{1}^{t}) - \sum_{j=1}^{n} I^{t}(X_{j}^{t})$$

имеем (см. (2.5), где сейчас w = 0)

(3.2)
$$A_t = \left\{ I(\cdot) : 0 \le I(x) \le x, \ \alpha n \mathbb{E}I(X_1) - a^t - x_{\beta^t}^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1)} \ge 0 \right\},$$

где $\alpha>0$ и $x_{\beta^t}^N>0$ — коэффициент нагрузки и квантиль уровня β^t стандартного нормального распределения.

В результате объектом исследования оказывается задача оптимального управления марковским процессом с дискретным временем

(3.3)
$$\begin{cases} \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{A}} \mathrm{E} Z_T \\ \text{при ограничениях} \\ (14) \text{ и } I^t \in A_t, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{cases}$$

Стратегией страхования является вектор-функция $\mathcal{I} = (I^0(\cdot), \dots, I^{T-1}(\cdot))$, а максимум берется по множеству \mathcal{A} всех допустимых стратегий страхования, предсказуемых относительно естественной фильтрации процесса. Ограничимся рассмотрением класса марковских стратегий страхования, который (см., например, [12]) достаточен для поиска решения задачи (3.3).

Определим функции Беллмана $V_t(z) = \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{A}} \mathrm{E} Z_T$ для рассматриваемого управляемого процесса на интервале [t;T] (точнее на множестве точек $\{t,\ldots,T\}$) с начальным состоянием $Z_t=z$. Обозначим через

$$Y_t = n(1 + \alpha)EI^t(X_1^t) - \sum_{j=1}^n I^t(X_j^t)$$

приращение $Z_{t+1} - Z_t$, которое, в рамках нормальной модели, есть случайная величина с нормальным распределением и параметрами

$$\mu_I^t = n\alpha \mathbf{E} I^t(X_1^t)$$
 и $\sigma_I^t = \sqrt{n}\sqrt{\mathbf{D} I^t(X_1^t)}$.

Тогда

$$V_{T}(z) = z,$$

$$V_{T-1}(z) = \max_{I \in A_{T-1}} z + EY_{T-1} = z + \max_{I \in A_{T-1}} G_{T-1}[I] = z + G_{T-1}[I_*^{T-1}],$$

$$V_{T-2}(z) = \max_{I \in A_{T-2}} z + EY_{T-2} + G_{T-1}[I_*^{T-1}] = z + G_{T-1}[I_*^{T-1}] + G_{T-2}[I_*^{T-2}],$$

 $V_0(z) = \max_{I \in A_0} z + \sum_{t=1}^{T-1} G_t \left[I_*^t \right] + EY_0 = z + \sum_{t=0}^{T-1} G_t \left[I_*^t \right],$

где A_t — множество допустимых дележей страхования I(x) на шаге t определено в (3.2). Отметим, что введенные выше функции

$$G_t[I] \stackrel{def}{=} \mathrm{E} Y_I^t = n\alpha \mathrm{E} I^t(X_1^t) \quad \text{if} \quad G_t[I_*^t] \stackrel{def}{=} \max_{I \in A_t} G_t[I], \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Следующая теорема устанавливает форму оптимальных дележей риска $I_*^t(x)$ на каждом шаге t и приводит условия оптимальности для параметров этих функций.

T е о р е м а 2. Пусть для каждого набора входных параметров α, a^t, β^t и распределения $F^t(x), t=0,\ldots,T-1$, выполнено условие (2.7) с w=0. Тогда задача (3.3) имеет решение $\mathcal{I}_*=(I_*^0(x),\ldots,I_*^{T-1}(x))$, где каждый дележ риска есть stop loss страхование, $I_*^t(x)=x\wedge k_*^t$, не зависящий от текущего значения z состояния процесса Z_t . Допустимый дележ $I_*^t(x)=x\wedge k_*^t$ оптимален тогда и только тогда, когда существует $\mu\geq 0$:

$$\mu J_0^t[I_*^t] = 0,$$

где выражение для $J_0^t[I]$ (2.6) с $w=0,\ k_*^t>0$ — минимальный корень уравнения

$$\phi_t(k) = 0,$$

где

$$\phi_t(k) \stackrel{def}{=} x_{\beta^t}^N \mu(\mathrm{E}I_k(X_1^t) - k) / \sqrt{\mathrm{D}I_k(X_1^t)} + (1 + \mu)\alpha\sqrt{n}.$$

 \mathcal{A} о казательство. Как было показано выше, вычисление оптимального дележа $I_*^t(x)$ на шаге t состоит в решении задачи максимизации

(3.6)
$$G_t[I] \equiv n(1+\alpha)EI(X_1^t) - E\sum_{j=1}^n I(X_j^t) = n\alpha EI(X_1^t)$$

на множестве A_t , где нет зависимости от текущего состояния процесса $z=Z_t$. Применяя для каждой такой задачи теорему 1, в которой теперь $a^t>0$ и, следовательно, случай $I_*^t(x)\equiv 0$ исключен, получаем требуемый результат. Теорема 2 доказана.

Согласно утверждению теоремы 2 оптимальной является так называемая "близорукая" стратегия, где на каждом шаге t максимизируется на множестве A_t среднее значение приращения капитала страховщика, которое не зависит от текущего значения капитала Z_t .

3а m е ч а n и е 1. В частном случае однородной модели, где параметры a^t, β^t и распределение ущерба клиента $F_1^t(x)$ не зависят от t, легко показать, что с вероятностью β финальный капитал превысит определенное значение s при использовании оптимальной стратегии. Действительно, финальный капитал

$$Z_T = w + Tn(1+\alpha)EI_*(X_1) - \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^n I_*(X_i^t)$$

имеет нормальное распределение со средним $w+Tn\alpha EI_*(X_1)$ и дисперсией $TnDI_*(X_1)$. Неравенство $n\alpha EI_*(X_1)-x_\beta^N\sqrt{n}\sqrt{DI_*(X_1)}\geq a$ (см. (3.2)) эквивалентно

$$w + Tn\alpha EI_*(X_1) - x_\beta^N \sqrt{T} \sqrt{n} \sqrt{DI_*(X_1)} \ge w + \sqrt{T}a + (T - \sqrt{T})n\alpha EI_*(X_1).$$

Отсюда получаем требуемый результат

$$(3.7) P\{Z_T \ge s\} \ge \beta,$$

где

$$s = w + \sqrt{T}a + (T - \sqrt{T})n\alpha EI_*(X_1).$$

4. Многошаговая задача страхования с учетом ограничений на приращения капитала

В этом разделе будет получен основной результат данной статьи, касающийся обобщения рассмотренной выше многошаговой задачи страхования. Именно: теперь страховщик может установить уровень "безопасности" $r \leq 0$ такой, что если на момент t выбора дележа риска I^t предыдущее приращение капитала $Z_t - Z_{t-1}$ превышает r, то (см. (3.2)) множество допустимых дележей есть

$$A_{t}^{+} = \left\{ I(\cdot): \ 0 \le I(x) \le x, \ P\left\{ (1+\alpha)n EI(X_{1}^{t}) - \sum_{i=1}^{n} I(X_{i}^{t}) \ge a_{+}^{t} \right\} \ge \beta_{+}^{t} \right\} =$$

$$(4.1) \qquad = \left\{ I(\cdot): \ 0 \le I(x) \le x, \ \alpha n EI(X_{1}^{t}) - a_{+}^{t} - x_{\beta_{+}^{t}}^{N} \sqrt{n} \sqrt{DI(X_{1}^{t})} \ge 0 \right\}.$$

Если же $Z_t - Z_{t-1} \le r$, то это не означает "банкротства", но на шаге t дележ риска выбирается уже из другого множества

$$(4.2) \quad A_t^- = \left\{ I(\cdot): \ 0 \le I(x) \le x, \ \alpha n \mathbf{E} I(X_1^t) - a_-^t - x_{\beta_-^t}^N \sqrt{n} \sqrt{\mathbf{D} I(X_1^t)} \ge 0 \right\}.$$

В последнем случае представляется естественным сузить множество A_t^+ путем увеличения допустимого уровня приращения $a_-^t > a_+^t \ (>0)$ и/или увеличением уровня доверия $\beta_-^t > \beta_+^t \ (>0,5)$ с тем, чтобы добиться на следующем шаге увеличения (в вероятностном смысле, т.е. в смысле значения VaR) приращения капитала. Такой подход, с одной стороны, обеспечивает плавность изменения капитала страховщика от шага к шагу с учетом изменения значений его приращений, а с другой — как будет показано, дает относительно простое решение задачи оптимального управления риском в многошаговой задаче страхования, в которой на каждом шаге оптимальный дележ риска зависит лишь от номера шага и знака $Z_t - Z_{t-1} - r$.

Динамика процесса Z_t по-прежнему описывается уравнением (3.1), целевым функционалом остается среднее значение финального капитала $\mathbf{E}Z_T$, но теперь множество допустимых дележей в момент t есть

$$A_t = \begin{cases} A_t^+ \text{ при } Z_t - Z_{t-1} > r, \\ A_t^- \text{ при } Z_t - Z_{t-1} \le r. \end{cases}$$

Формально, рассматриваемая задача не является задачей оптимального управления марковским процессом, поскольку множество допустимых решений A_t зависит не только от значения процесса Z_t , но и от Z_{t-1} . Перейдем

к сдвинутому на один шаг процессу приращений $W_t = Z_t - Z_{t-1}$, который задается уравнением

(4.3)
$$W_t = (1+\alpha)nEI^{t-1}(X_1^{t-1}) - \sum_{i=1}^n I^{t-1}(X_i^{t-1}), \quad t = 1, \dots, T, \quad W_0 = w.$$

Тогда целевой функционал

(4.4)
$$J[\mathcal{I}] = EZ_T = E\sum_{t=0}^T W_t,$$

а множество допустимых дележей

(4.5)
$$A_t(W_t) = \begin{cases} A_t^+ & \text{при } W_t > r, \\ A_t^- & \text{при } W_t \le r, \end{cases}$$

t = 0, ..., T - 1, зависит только от текущего значения W_t .

Найдем функции Беллмана для задачи (4.3)–(4.5) оптимального управления марковским процессом $\{W_t\}$. Обозначим $V_t(y) = \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{A}} \operatorname{E} \sum_{m=t}^T W_m$ для рассматриваемого процесса на интервале [t;T] с начальным состоянием $W_t = y$.

Уравнение динамического программирования здесь имеет вид

$$V_t(y) = y + \max_{I \in A_t(y)} EV_{t+1}(W_{t+1}),$$

где $A_t(y) = A_t^+$ при y > r, $A_t(y) = A_t^-$ при $y \le r$. Тогда

$$V_T(y) = y,$$

при y > r

$$V_{T-1}(y) = y + \max_{I \in A_{T-1}^+} EV_T(W_T) = y + n\alpha \max_{I \in A_{T-1}^+} EI(X_1^{T-1}) = y + n\alpha EI_+^{T-1}(X_1^{T-1}),$$

при $y \le r$

$$V_{T-1}(y) = y + \max_{I \in A_{T-1}^-} EV_T(W_T) = y + n\alpha \max_{I \in A_{T-1}^-} EI(X_1^{T-1}) =$$
$$= y + n\alpha EI_-^{T-1}(X_1^{T-1}).$$

Здесь и далее, с целью упрощения обозначений, положим $I_+^t \stackrel{def}{=} I_+^t(X_1^t)$ и $I_-^t \stackrel{def}{=} I_-^t(X_1^t)$. Для нахождения

$$V_{T-2}(y) = y + \max_{I \in A_{T-2}(y)} EV_{T-1}(W_{T-1})$$

заметим, что случайная величина W_{T-1} может быть выше или ниже r с вероятностями соответственно $P\{W_{T-1}>r\}$ и $1-P\{W_{T-1}>r\}$. Следовательно, при y>r

$$\begin{split} V_{T-2}(y) &= y + \max_{I \in A_{T-2}^+} \mathrm{E}[W_{T-1}|W_{T-1} > r] P\{W_{T-1} > r\} + \\ &+ \mathrm{E}[W_{T-1}|W_{T-1} \le r] P\{W_{T-1} \le r\} = \\ &= y + \alpha n \left\{ \mathrm{E}I_-^{T-1} + \max_{I \in A_{T-2}^+} \mathrm{E}I + \left(\mathrm{E}I_+^{T-1} - \mathrm{E}I_-^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} \right\}, \end{split}$$

при $y \leq r$

$$V_{T-2}(y) = y + \alpha n \left\{ EI_{-}^{T-1} + \max_{I \in A_{T-2}^{-}} EI + \left(EI_{+}^{T-1} - EI_{-}^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} \right\}.$$

При y > r

$$V_{T-3}(y) = y + \alpha n \left\{ EI_{-}^{T-1} + EI_{+}^{T-2} + \left(EI_{+}^{T-1} - EI_{-}^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} |_{I^{T-2} = I_{+}^{T-2}} + \frac{1}{I + A_{T-3}^{T-2}} EI_{-}^{T-2} + \left(EI_{+}^{T-2} - EI_{-}^{T-2} \right) P\{W_{T-2} > r\} \right\},$$

при $y \le r$

$$\begin{split} V_{T-3}(y) &= \\ &= y + \alpha n \bigg\{ \mathrm{E}I_{-}^{T-1} + \mathrm{E}I_{-}^{T-2} + \left(\mathrm{E}I_{+}^{T-1} - \mathrm{E}I_{-}^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\}|_{I^{T-2} = I_{-}^{T-2}} + \\ &+ \max_{I \in A_{T-3}^{T-2}} \mathrm{E}I + \left(\mathrm{E}I_{+}^{T-2} - \mathrm{E}I_{-}^{T-2} \right) P\{W_{T-2} > r\} \bigg\} \end{split}$$

и т.д.

Нетрудно видеть, что каждый оптимальный дележ риска $I_*^t(\cdot,y)$ на шаге t при текущем состоянии процесса $y=W_t$ есть решение задачи максимизации функционала

$$(4.6)$$
 $H_t[I] \equiv EI + (EI_+^{t+1} - EI_-^{t+1})P\{W_{t+1} > r\}$ при ограничении $I \in A_t(y)$,

где дележи I_+^{t+1} и I_-^{t+1} являются соответственно решениями задач максимизации $H_{t+1}[I]$ на множествах A_{t+1}^+ и A_{t+1}^- , $t=0,\ldots,T-2$, причем $H_{T-1}[I]\equiv EI$.

Учитывая, что W_{t+1} моделируется нормальной случайной величиной со средним $\mu[I^t] = \alpha n \mathbf{E} I^t$ и дисперсией $\sigma^2[I^t] = n \mathbf{D} I^t$, получаем, что

$$P\{W_{t+1} > r\} = \bar{\Phi}\left((r - \mu[I^t])/\sigma[I^t]\right),\,$$

где $\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$ и $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Тогда (4.6) преобразуется к виду

$$(4.7) H_t[I] \equiv EI + (EI_+^{t+1} - EI_-^{t+1}) \bar{\Phi}((r - \mu[I]) / \sigma[I]) \to \max, I \in A_t(y).$$

Соотношение (4.7) является рекуррентной формулой для вычисления оптимальных дележей I_+^t и I_-^t , начиная с I_+^{T-1} и I_-^{T-1} , которые определяются максимизацией $H_{T-1}[I] \equiv \mathrm{E} I$ на $A_{T-1}(y)$. Таким образом, каждый оптимальный дележ зависит от текущего состояния процесса $y=W_t$ очень простым образом: если y>r, то решается задача (4.7) на A_t^+ , в противном случае решается задача с той же целевой функцией, но на A_t^- .

Теорема 3. Пусть для каждого набора параметров α , a_+^t , β_+^t , a_-^t , β_-^t и распределения $F^t(x)$, $t=0,\ldots,T-1$, выполнено условие (2.7) с w=0. Тогда задача (4.3)–(4.5) имеет решение $\mathcal{I}_*=(I_*^t(\cdot,y),\ldots,I_*^{T-1}(\cdot,y))$, где каждый дележ риска есть stop loss страхование,

$$I_*^t(x,y) = \begin{cases} x \wedge k_+^t & npu \ y > r, \\ x \wedge k_-^t & npu \ y \le r. \end{cases}$$

Уровни k_+^t и k_-^t являются соответственно решениями задач максимизации функций от скалярной переменной:

(4.8)
$$\max_{k>0} H_t[I_k] \text{ npu ограничении } I_k \in A_t^+,$$

(4.9)
$$\max_{k>0} H_t[I_k] \text{ при ограничении } I_k \in A_t^-,$$

где $I_k(x) = x \wedge k$, а выражение для $H_t[I]$ приведено в (4.7).

 \mathcal{A} о казательство. Как было показано, вычисление оптимального дележа $I_*^t(\cdot,y)$ состоит в решении задачи (4.7), которая зависит лишь от номера шага t и от знака y-r. Отметим, что, как и в теореме 2, нулевой дележ исключен в силу условия (2.5), где сейчас w=0 и $a=a_+^t$ (или a_-^t) > 0. Следующая лемма устанавливает существование решения в этой задаче.

 Π емма. Для каждого фиксированного у задача (4.7) имеет решение.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Начнем с изучения случая y>r. Обозначим через $M_+^t=\mathrm{E}I_+^t(X_1^t)$, где I_+^t — решение (4.7), существование которого гарантируется леммой. Заметим, что в силу ограничения $P\{W_{t+1}\geq a_+^t\}\geq \beta_+^t$ с $a_+^t>0$ среднее значение $M_+^t>0$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$H_t[I] \to \max$$
, $EI = M_+^t$ и $I \in A_t^+$, где $t = 0, \dots, T-2$,

где выражение для $H_t[I]$ задано в (4.7). Напомним, что задача $H_{T-1}[I] \equiv \equiv \mathrm{E}I \to \max, \ I \in A_{T-1}^+,$ уже была изучена в теореме 2. Поскольку $A_{t+1}^- \subset A_{t+1}^+,$ то в (4.7) множитель $\mathrm{E}I_+^{t+1} - \mathrm{E}I_-^{t+1} \geq 0.$ Учитывая, что по предположению $r \leq 0$, получаем $r - \mu[I^t] = r - \alpha n M_+^t < 0.$ Тогда вспомогательная задача эквивалентна

$$(4.10) EI^2(X_1^t) \to \min$$

при ограничениях

(4.11)
$$0 \le I(x) \le x, \quad EI(X_1^t) = M_+^t,$$

(4.12)
$$J_1[I] \stackrel{def}{=} -\alpha n M_+^t + a_+^t + x_{\beta_+^t}^N \sqrt{n} \sqrt{EI^2(X_1^t) - (M_+^t)^2} \le 0.$$

Поскольку выполнено условие Слейтера и целевой функционал является выпуклым, а функционал в ограничении (4.12) является сильно квазивыпуклым (см. [10]), то применима теорема Куна–Таккера (см., например, [13]). Согласно этой теореме дележ $I_+^t(\cdot) \in A_+^t$ оптимален в (4.10)–(4.12) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа λ и $\gamma \geq 0$ такие, что $\gamma J_1[I_+^t] = 0$ и $I_+^t(\cdot)$ является решением задачи минимизации функционала Лагранжа

$$(4.13) \quad L[I] \equiv \mathrm{E}I^2\left(X_1^t\right) + \lambda \left(\mathrm{E}I\left(X_1^t\right) - M_+^t\right) + \gamma J_1[I] \to \min_{I}, \quad 0 \le I(x) \le x.$$

Необходимое и достаточное условие оптимальности дележа I_+^t в задаче (4.13) есть выполнение неравенства

$$\frac{d}{d\rho}L\left[\rho I_{+}^{t} + (1-\rho)I\right]\Big|_{\rho=1} \le 0$$

для любой функции дележа $0 \le I(x) \le x$. При подстановке выражения для функционала $J_1[I]$ после дифференцирования получаем, что левая часть неравенства равна

$$\int_{0}^{\infty} \eta(x) \left(I_{+}^{t}(x) - I(x) \right) dF_{1}^{t}(x),$$

где

$$\eta(x) = I_+^t(x) \left[2 + \gamma x_{\beta_+^t}^N \sqrt{n} / \sqrt{\mathbf{E}(I_+^t(X_1^t))^2 - (M_+^t)^2} \right] + \lambda.$$

Используя лемму Неймана–Пирсона [14], имеем, что оптимальный дележ определяется как

(4.14)
$$I_{+}^{t}(x) = \begin{cases} 0, & \eta(x) > 0, \\ x, & \eta(x) < 0, \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1^t .

Рассмотрим сначала ситуацию, когда $\lambda < 0$. Поскольку $\eta(0) = \lambda < 0$, то при возрастании x от нуля значение $\eta(x)$ возрастает (при этом $I_+^t(x) = x$ в силу (4.14)). После касания в точке k_+^t этой функции оси абсцисс, $\eta(x)$ не может принимать положительных значений, поскольку для таких x (см. (4.14)) значение $I_+^t(x) = 0$, т.е. приходим к противоречию: $\eta(x) < 0$. Убывание $\eta(x)$ от нуля также исключено, так как для таких x выполнено $I_+^t(x) = x$, что означает $\eta(x) > 0$. В результате, $I_+^t(x) = x \wedge k_+^t$.

В случае $\lambda \ge 0$ аналогичные рассуждения приводят к тому, что $I_+^t(x) \equiv 0$, но тогда неравенство $M_+^t > 0$, где $M_+^t = \mathrm{E} I_+^t(X_1^t)$, оказывается нарушенным.

Случай $y \leq r$ рассматривается аналогично. Теорема 3 доказана.

3а m е ч а n и е 2. Даже в частном случае однородной модели, где параметры a_+^t , a_-^t , β_+^t , β_-^t и распределение ущерба клиента $F_1^t(x)$ не зависят от t, оптимальной является не "близорукая" стратегия, как в теореме 2, а стратегия, где каждый оптимальный дележ риска $I_*^t(x,y)$ зависит, в частности, от номера шага t. С точки зрения вычислений нахождение оптимальной стратегии в задаче (4.3)–(4.5) сводится к определению 2T значений k_+^{T-1} , k_-^{T-1} , ..., k_+^0 , k_-^0 путем решения последовательности относительно простых задач (4.8)–(4.9) максимизации функций от скалярной переменной. Выбор k_+^0 (k_-^0) в начальный момент t=0 означает, что начальный капитал w>r ($\leq r$).

5. Пример

Ниже рассмотрен численный пример, иллюстрирующий теорему 3 о решении многошаговой задачи (4.3)–(4.5) управления риском при ограничениях на приращения процесса. Пусть ущербы клиентов имеют распределение $F_1(x) = p(1-\exp(-0,1x))+1-p$, не зависящее от номера шага t, где вероятность страхового случая p=0,1. Таким образом, функция распределения страховых выплат [1] $F_1^0(x) \stackrel{def}{=} P\{X_1 \le x | X_1 > 0\} = 1-\exp(-0,1x)$ экспоненциальна. Пусть численность группы клиентов n=250, уровни доверия $\beta_+^t = \beta_-^t = 0,95$ и начальный капитал страховщика w=1. Интервал функционирования процесса $\{0,\ldots,T\}=\{0,\ldots,3\}$. Уровень безопасности, устанавливаемый страховщиком, равен r=0, т.е. если приращение капитала страховщика на предыдущем шаге положительно, то дележ риска выбирается из множества A_t^+ , иначе — из A_t^- (см. (4.1)–(4.2)). Нижняя граница приращения капитала страховщика a_t^+ в A_t^+ равна 10, нижняя граница a_t^- в A_t^- установлена равной 20 для всех $t=0,\ldots,2$.

Напомним, что по теореме 3 оптимальными дележами являются stop loss страхования

$$I_*^t(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} x \wedge k_+^t \text{ при } y > r, \\ x \wedge k_-^t \text{ при } y \le r. \end{array} \right.$$

Результаты численного расчета уровней удержания страховщика k_+^t, k_-^t и значения целевого функционала $J^* = J[\mathcal{I}_*]$ при варьировании коэффициента нагрузки α приведены в таблице.

П	Γ		
	Lan.	πи	Ha.

α	k_{+}^{0}	k_+^1	k_{-}^{1}	k_{+}^{2}	k_{-}^{2}	J^*
0,5	118,6861	118,6907	23,6634	119,3200	23,6634	361,0311
0,55	119,3200	119,3200	119,3200	118,8242	118,8242	413,3536

Отметим, что в задачах вычисления оптимального дележа риска на каждом шаге условие регулярности Слейтера оказывается выполненным, поскольку даже для "наихудшего" случая с наименьшим коэффициентом нагрузки $\alpha=0.5$ и наибольшей нижней границей приращения капитала $a_t^-=20$

соотношение (2.7) выполнено:

$$J_0[I^0] = 2{,}4980 > 0$$
 и $\alpha\sqrt{n} - x_{\beta}^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} = 2{,}9711 > 0.$

Во втором столбце таблицы выбор k_+^0 , а не k_-^0 объясняется тем, что начальный капитал w=1>0=r. С ростом коэффициента нагрузки α оптимальное значение J^* ожидаемо увеличивается, поскольку растет цена страхования. Как показывает вторая строка таблицы, уровни k_-^t значимо ниже k_+^t . Причина в том, что максимум в задаче $H_t[I_k] \to \max$, $I_k \in A_t^-$ при $\alpha=0.5$ достигается для значения k_-^t , принадлежащего границе допустимого множества $\{k: I_k \in A_t^-\}, t=1,2$. Увеличение коэффициента нагрузки α , т.е. стоимости страхования, до $\alpha=0.55$ означает расширение множеств A_t^- . При этом значения k_-^t оказываются уже внутренними точками и, учитыая, что $A_t^- \subset A_t^+$, имеем (см. третью строку таблицы): $k_-^t = k_+^t$.

6. Заключение

Исследована новая задача построения оптимальной стратегии страхования в процессе риска с дискретным временем, пошаговыми вероятностными (VaR) ограничениями на капитал страховщика на каждом шаге процесса и средним значением финального капитала в качестве целевого функционала. Доказана оптимальность "близорукой" (myopic) стратегии страхования, где в каждый момент принятия решения максимизируется среднее приращение капитала на следующем шаге. В обобщении этой модели, где страховщик устанавливает "уровень безопасности" (неположительный) на предыдущее приращение капитала, показано, что определение компонент оптимальной стратегии сводится к решению последовательности относительно простых оптимизационных задач. В обоих случаях оптимальным для страховщика на каждом шаге оказывается stop loss страхование.

ПРИЛОЖЕНИЕ

 \mathcal{A} оказательство леммы. Рассмотрим сначала случай y>r. Пусть $\{I_n\}$ — максимизирующая последовательность допустимых дележей в задаче (4.7), т.е.

$$\lim_{n\to\infty}H_{t}\left[I_{n}\right]=H_{t}^{*}\overset{def}{=}\sup_{I}H_{t}\left[I\right].$$

Применяя теорему Хэлли отдельно к числителю и знаменателю для дроби $(r-\mu[I_n])/\sigma[I_n]=(r-\alpha n \mathrm{E} I_n(X_1^t))/\sqrt{n \mathrm{D} I^t(X_1^t)}$ в целевом функционале (4.7), получаем, что существует подпоследовательность случайных величин $\{I_m\left(X_1^t\right)\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу ξ . Для доказательства того, что ξ есть собственная случайная величина, т.е. $P\left\{\xi<\infty\right\}=1$, достаточно заметить, что в силу определения функций дележа выполняется $I_m\left(X_1^t\right)\leq X_1^t$ п.н. Поскольку ξ измерима относительно сигма-алгебры $\sigma\left(X_1^t\right)$, то эта случайная величина может быть представлена как $\xi=I^*\left(X_1^t\right)$ для некоторого дележа $I^*(\cdot)$, причем $I^*\in A_t^+$.

Покажем, что для максимизирующей последовательности $\{I_m\}$ знаменатель $\sigma[I_m]$ в (4.7) отделен от нуля. Действительно (см. (4.1)), выполнение ограничения $I^* \in A_t^+$, т.е.

$$P\left\{(1+\alpha)n\mathrm{E}I^*(X_1^t)-\sum_{i=1}^nI^*(X_i^t)\geq a_+^t\right\}\geq \beta_+^t\ (>0),$$
 где по предположению $a_+^t>0,$

означает, что из множества допустимых исключен нулевой дележ риска $I^*(X_1^t)=0$ п.н. и, таким образом, $\sigma[I^*]>0$.

Равенство $H_t^* = H_t[I^*]$ теперь следует из слабой сходимости $\{I_m(X_1^t)\}$ и непрерывности целевого функционала в (4.7) по $\mathrm{E}I(X_1^t)$ и $\mathrm{D}I(X_1^t)$.

Случай $y \leq r$ рассматривается аналогично с заменой множества A_t^+ на A_t^- . Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., et al. Actuarial Mathematics. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
- 2. Hipp C., Vogt M. Optimal Dynamical XL Reinsurance // ASTIN Bulletin. 2003. V. 33. P. 193–207.
- 3. Hipp C., Taksar M. Optimal Non-proportional Reinsurance Control // Insur. Math. Econom. 2010. V. 47. P. 246–254.
- 4. Golubin A.Y. Optimal Insurance and Reinsurance Policies in the Risk Process // ASTIN Bulletin. 2008. V. 38. No. 2. P. 383–398.
- 5. Голубин А.Ю., Гридин В.Н. Оптимизация страхования и перестрахования в динамической модели Крамера-Лундберга // АиТ. 2012. Т. 9. С. 111–123. Golubin A.Y., Gridin V.N. Optimizing Insurance and Reinsurance in the Dynamic Cramer-Lundberg Model // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 9. P. 1529–1538.
- 6. Guerra M., Centeno M.L. Optimal Reinsurance Policy: The Adjustment Coefficient and the Expected Utility Criteria // Insur. Math. Econ. 2008. V. 42. P. 529–539.
- 7. Li Y., Li Z. Optimal Time-consistent Investment and Reinsurance Strategies for Mean variance Insurers with State Dependent Risk Aversion // Insur. Math. Econ. 2013. V. 53. P. 86–97.
- 8. *Кибзун А.И.*, *Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит. 2009.
- 9. Zhou C., Wu C. Optimal Insurance Under the Insurer's VaR Constraint // GRIR. 2009. V. 34. P. 140–154.
- 10. Голубин А.Ю., Гридин В.Н. Оптимальная стратегия страхования в модели индивидуального риска при вероятностном ограничении на величину финального капитала // АиТ. 2019. № 4. С. 144–155.
 - Golubin A.Y., Gridin V.N. Optimal Insurance Strategy in the Individual Risk Model under a Stochastic Constraint on the Value of the Final Capital // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 708–717.
- 11. Bi J., Cai J. Optimal investment and reinsurance strategies with state dependent risk aversion and VaR constraints in correlated markets // Insur. Math. Econ. 2019. V. 85. P. 1–14.

- 12. Fleming W.H., Rishel R.W. Deterministic and Stochastic Optimal Control. Berlin. Springer-Verlag, 1975.
- 13. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
- 14. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 11.11.2019

После доработки 04.03.2020

Принята к публикации 25.05.2020

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2020 г. С.В. СОЛОВЬЕВ, канд.техн.наук (sergey.soloviev@scsc.ru) (Публичное акционерное общество "Ракетно-космическая корпорация "Энергия", Королев, Московская обл.)

МЕТОДИКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ РЕСУРСОВ РОССИЙСКОГО СЕГМЕНТА МЕЖДУНАРОДНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ НА ОСНОВЕ ЦИФРОВЫХ ИДЕНТИФИКАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрена методика интеллектуального анализа телеметрических данных на основе современных математических методов обработки информации. Определены актуальные задачи анализа и прогнозирования с учетом 20-летнего опыта эксплуатации российского сегмента международной космической станции (РС МКС). Дано принципиальное описание этих методов. Представлены результаты апробации на основе реальных данных, полученных из телеметрической информации РС МКС.

Ключевые слова: международная космическая станция, космический аппарат, управление полетом, идентификационная модель, интеллектуальный анализ, прогнозирование, контроль.

DOI: 10.31857/S0005231020090081

1. Введение

Наиболее масштабным, амбиционным и продолжительным международным научно-техническим экспериментом в настоящее время является проект Международной космической станции (МКС). В нем участвуют на постоянной основе 15 стран, а всего в научной и образовательной деятельности МКС уже приняли участие 82 страны. Начавшись в начале 90-х гг. ХХ в., проект МКС продолжает активно работать, и в настоящее время. Летная эксплуатация первого элемента МКС была начата 20 ноября 1998 г. с запуска функционального грузового модуля. По состоянию на начало 2019 г. в состав МКС входит 15 основных орбитальных модулей (ОМ) общей массой около 420 т, в том числе:

- российский сегмент (PC) МКС, включающий пять ОМ и транспортные корабли типа "Союз" и "Прогресс";
- американский сегмент (AC) МКС, включающий $10~\mathrm{OM},$ различные фермы и солнечные батареи;
 - европейский лабораторный модуль "Колумбус";
 - японский модуль "Кибо";

Японский и европейский модули входят в состав AC MKC. Таким образом, MKC — это грандиозный рукотворный космический объект, на котором осуществляется большое количество разноплановых работ в интересах различных участников.

Очевидно, что непрерывная эксплуатация МКС — это многогранная и насыщенная деятельность, которая реализуется за счет многофункционального процесса управления полетом [1]. Контроль состояния составных частей ОМ, ОМ и МКС в целом является неотъемлемой частью данного процесса и служит основой для принятия решений на продолжение штатной программы полета или, при выявлении отклонений в состоянии МКС, на перевод в режим полета с ограниченной функциональностью. Однако в ходе полета изменение состояния происходит не только в результате целенаправленного воздействия для реализации процесса управления полетом, но и под влиянием внешних и внутренних неконтролируемых возмущающих факторов, а также естественного износа оборудования составных частей МКС. Источником внешних возмущающих факторов, или воздействий является в основном среда, в которой проходит полет МКС. Внутренние возмущающие воздействия являются следствием функционирования приборов и агрегатов МКС, возникновения в них неисправностей, а также некорректных воздействий при управлении вследствие сбоев в аппаратуре управления или иных причин. Естественный износ и процессы деградации свойств и характеристик, неизбежно происходящие в оборудовании и конструкции в процессе длительной эксплуатации, также накладывают дополнительные ограничения. Таким образом, процесс управления полетом не только сложен сам по себе, но и осуществляется при постоянно изменяющейся ситуации.

В РС МКС наиболее "свежий" ОМ (малый исследовательский модуль 1) провел на орбите в составе МКС уже более 10 лет. В соответствии с требованиями эксплуатационной документации непрерывно осуществляется анализ технического состояния РС МКС. Результаты данного анализа включаются в состав оперативных и ресурсных отчетов по результатам летных испытаний ОМ, на основании которых ежегодно выпускается заключение о подтверждении готовности к эксплуатации на следующий год. В указанных отчетах приводится информация о выполненных работах, затраченных ресурсах, наработке, изменению ключевых телеметрических параметров (ТМП) и описываются возникшие отказы или нештатные ситуации (НШС) с указанием причин их возникновения.

Однако ключевой особенностью отчетов является тот факт, что в них содержится только качественная оценка (работает/не работает) состояния оборудования и составных частей ОМ РС МКС. Анализ значений характеристик оборудования не проводится, а также не определяется деградация параметров состояния. Существенно, что не рассматривается возможная корреляция аномальных событий (отказов) в оборудовании и внешних возмущающих факторов полета МКС. Детальный анализ для подтверждения технических характеристик, взаимовлияние, особенности и прогноз состояния в отчетах не содержатся, хотя ранее такая практика существовала для других изделий.

Значительным показателем, способным существенно повлиять на работоспособность оборудования РС МКС, являются внешние воздействия факторов космического пространства. Давно известно вредное воздействие космического излучения не только на электронные приборы, но и на материалы, основным источником которого является Солнце как ближайшая к Земле звезда. При этом состояние Солнца или солнечная активность изменяется в течение 11-летнего цикла в широких пределах и выражается в условных величинах (число Вольфа), хотя диапазон изменения весьма велик от нуля до 150 и более единиц. В настоящее время, т.е. в 2018–2019 гг., солнечная активность находится на уровне минимальных значений (от 0 до 10 условных величин), что соответствует середине солнечного цикла. Последний период солнечной активности пришелся на 2012–2014 гг. В ближайшие 3–5 лет солнечная активность будет повышаться и, следовательно, увеличится внешнее воздействие солнечного излучения на РС МКС, что потенциально повышает вероятность отказов и увеличивает скорость деградации характеристик оборудования.

С учетом сложившихся обстоятельств, принимая во внимание необходимость осуществления эксплуатации РС МКС как минимум до 2028 г. и далее возникает закономерный вопрос, возможно ли, используя накопленную за 20 лет архивную телеметрическую информацию (ТМИ), более точно, обосновано и детально определить состояние РС МКС и осуществить прогноз его дальнейшего функционирования с определением остаточного ресурса оборудования.

2. Интеллектуальный анализ ТМИ на основе цифровых идентификационных моделей

Исследование динамики процессов при решении задач контроля в процессе управления полетом космических аппаратов (КА) позволяет сделать вывод о перспективности и практической значимости разработки систем анализа информации, использующих современные технологии обработки данных и методов интеллектуального анализа (Data Mining) [2].

Состояние комплекса ресурсов КА является ключевым фактором при осуществлении управления космическим полетом. Представляется целесообразным в качестве идентификационной модели комплекса ресурсов рассматривать цифровой двойник КА. Под цифровым двойником будем понимать результат обработки ТМИ, актуальный для текущего момента времени [3]. Этот результат позволит оценить, как состояние отдельных ресурсов и уровень деградации определенных технических характеристик, так и степень взаимовлияния ресурсов. По сути актуальный результат обработки ТМИ представляет собой динамический слепок (текущий набор) аналитических выводов о состоянии комплекса на основе анализа реальных данных ТМИ (текущих и архивных). В этом состоит основное отличие от имитационной модели, которая может лишь приближенно моделировать реальное функционирование КА на основе математического описания свойств элементов реального КА или его составных частей.

Анализ возможностей математического аппарата обработки данных и обобщения опыта управления полетом различных КА с учетом практических потребностей специалистов управления полетом позволил определить следующие методы исследования [4]:

- кластерный анализ данных для определения аномалий или отклонений в состоянии КА или его составных частей;
- вейвлет-преобразование для определения и локализации аномалий в отдельной составной части KA;
- прогнозирование на основе определения тенденций изменения телеметрических показателей ("параметров") KA с применением методов анализа временных рядов.

Основной целью методики интеллектуального анализа и прогнозирования состояния является поиск скрытых и неочевидных закономерностей, отклонений или аномалий в больших объемах накопленной (архивной) ТМИ. Наибольший интерес с практической точки зрения представляет анализ состояния для незаменяемого или заменяемого с высокой трудоемкостью оборудования РС МКС. К настоящему времени задача управления на основе прогнозирующих моделей применительно к приборам и агрегатам РС МКС не ставилась. Они заменялись или после отказа, или по выработке ресурса.

На первом этапе обучения по данным ТМИ, собранным при номинальной работе КА, с использованием различных алгоритмов строится база данных номинальных состояний, соответствующих нормальному (среднестатистическому) или штатному функционированию КА, что определяется по анализу технического состояния КА на предыдущих этапах полета или на аналогичных КА. Обработанные данные при этом формируют базу знаний — номинальных состояний. На втором этапе "рабочем" производится анализ состояния КА, при котором в режиме реального времени поступает текущая ТМИ от КА, производится анализ (на основе соответствующих алгоритмов Data Mining) и результаты обработки соотносятся с данными из базы номинальных состояний. Если устанавливается соответствие (по определенному критерию) данных из базы с поступившими данными, то входящие данные пополняют «номинальную» базу данных. При несоответствии фиксируется отклонение и происходит предупреждение оператора о выявленной аномалии.

3. Алгоритмы интеллектуального анализа

Интеллектуальный анализ состояния комплекса ресурсов РС МКС предлагается осуществлять с использованием следующих алгоритмов:

- кластерного анализа методом k-средних с еклидовой метрикой;
- непрерывного вейвлет-преобразования;
- процедуры кумулятивных сумм для временного ряда телеметрических параметров.

Данные, которые передаются в составе ТМИ КА, содержат значение телеметрических параметров (ТМП), по которым реализуется функция контроля состояния КА в процессе управления полетом. При этом значения ТМП, сформированные на борту КА специализированной аппаратурой в данный момент времени, будут образовывать многомерный вектор состояния. Таким образом, под вектором технического состояния КА, или его системы, будем понимать многомерный вектор X_m , образованный значениями ТМП x_i , $(i=1,\ldots,N,$ где N- общее количество фиксируемых ТМП) сформиро-

ванных на определенный момент времени. Процедурам кластеризации будем подвергать получаемые векторы.

Необходимость осуществить кластеризацию векторов технического состояния КА данных обусловлена наличием различных режимах работы КА в процессе полета и соответственно номинальных, но различных значений ТМП. Процесс орбитального движения КА, его ориентация в пространстве и внутреннее взаимовлияние оборудования КА при функционировании, также следует приводить к различным, но штатным состояниям КА.

Выбор алгоритма кластеризации основывался на следующих факторах:

- возможность использования для анализа данных (текущих и архивных) функционирования любой составной части KA;
- высокая скорость вычислительного процесса для работы с ТМИ, поступающей с борта КА в режиме реального времени;
- оперативность (без задержек в процессе анализа) обнаружения аномалий в поступающих данных.

Были проанализированы как иерархические, так и неиерархические методы кластерного анализа. Учитывая значительные объемы накопленных данных за 20-летний период эксплуатации МКС, иерархические методы были исключены из рассмотрения сразу из-за их большой трудоемкости использования на начальном этапе. Для неиерархических методов, из-за большого количества их разновидностей, ограничились изучением методов: k-средних, c-средних, EM-алгоритма, FOREL, распространения близости (AP). Для вычисления расстояния между векторами исследовались различные метрики. Выбор метрики является ключевым моментом исследования, от которого в основном зависит окончательный вариант разбиения объектов на классы при данном алгоритме разбиения. В конечном итоге, были использованы метрики: евклидово расстояние, манхэттенское расстояние и расстояние Чебышева.

В целях апробации анализа эффективности применения представленного метода кластерного анализа было проведено создание кластерной базы данных ТМИ системы исполнительных органов спуска (СИОС) транспортного пилотируемого корабля (ТПК) "Союз". Контроль состояния и функционирования данной системы осуществляется на основе восьми значений ТМП, которые измеряются независимыми аналоговыми датчиками температуры (четыре штуки) и давления (четыре штуки). При построении кластерной базы данных номинального и штатного состояния СИОС использовались восьмимерные векторы X_8 , образованные четырьмя значениями датчиков температуры и четырьмя значениями датчиков давления в топливных баках и баллонах наддува.

В отборе для построения базы знаний была использована архивная ТМИ, полученная при полете двух ТПК типа "Союз", при которых было зафиксировано штатное состояние СИОС. Используя эти данные, были получены 2252 восьмимерных вектора, которые описывают номинальное состояние СИОС. Далее, для кластеризации методом k-средних, определено оптимальное количество кластеров с учетом следующих средних значений разных критериев кластеризации, в том числе: силуэтный коэффициент, индекс Калинского—Харабаза, индекс Дэвиса—Болдина, среднее внутрикластерное

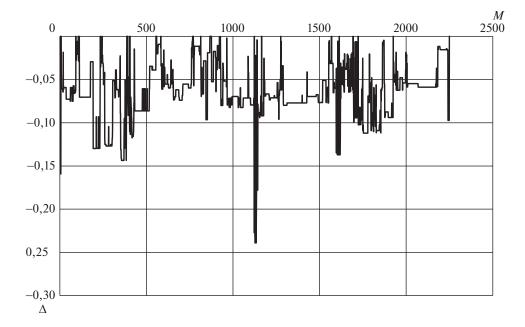


Рис. 1. График отклонений Δ векторов при номинальном функционировании СИОС.

расстояние и коэффициент нечеткости разбиения. В результате было выбрано 25 кластеров для метода k-средних.

Все восьмимерные векторы, образованные значениями ТМП, прошли процедуру нормирования:

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij}}{\max(X_j)}.$$

Визуализация созданной базы данных номинальных состояний состоит в вычислении Евклидова расстояния от отдельного вектора до центра ближайшего кластера:

$$\Delta = \rho\left(x_i, x_k\right) - \rho_k^{\max}$$

где:

$$\rho(x_i, x_k) = \sqrt{\sum_{e=1}^{n} (x_{ie} - x_{ke})^2}, \quad \mathbf{e} = e = \overline{1, 8},$$

 $ho_k^{
m max}$ — максимальное значение расстояния от центра кластера до вектора или радиус кластера.

Расчет отклонения Δ визуально представляет сравнение радиусов сфер в восьмимерном пространстве. Если значение Δ отрицательное, то радиус сферы для данного вектора меньше, чем радиус соответствующего ему кластера, т.е. вектор находится внутри номинального кластера. Положительное же значение Δ соответствует случаю нахождения вектора вне границ номинальной области функционирования. Как видно из графика на рис. 1, при

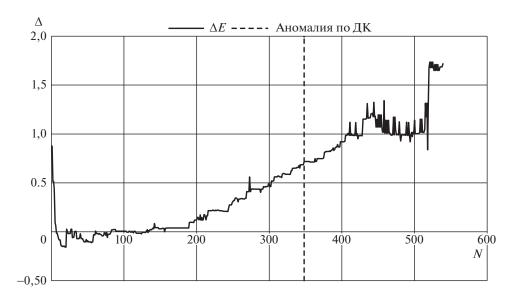


Рис. 2. График отклонений Δ "аномальных" векторов.

номинальном функционировании бортовой системы отклонения Δ векторов всегда отрицательны (кроме случаев, когда $\Delta=0$, т.е. на границе кластера), что соответствует входимости вектора в кластер, т.е. номинальному функционированию.

С базой данных номинальных состояний были соотнесены и векторы, полученные с использованием данных, полученных при полете другого ТПК "Союз", при котором были отмечены незначительные отклонения в значениях температурных параметров. С использованием этих векторов, условно назовем их "аномальными", получен график отклонений, представленный на рис. 2.

Вертикальная прерывистая линия на графике означает момент обнаружения аномалии в функционировании СИОС ТПК "Союз" в реальном полете на основании экспертного анализа специалиста по контролю. Критерием проявления аномалии в состоянии контролируемого объекта для метода кластерного анализа служит появление отклонения Δ в области положительных значений, что может сигнализировать о возникшей аномалии в работе системы. В рассмотренном примере, начиная с примерно 200-го вектора, имеется тенденция в постоянном увеличении значения Δ . Так как каждому вектору ставится в соответствие временное значение (реальные дата и время), можно сказать, что состояние системы постепенно отклоняется от своей номинальной работы. Момент обнаружения такого отклонения N=200 соответствует 31.07.2013, в то время, как в реальных условиях аномалия достигает предельно допустимых значений при N=348, что соответствует 08.10.2013, т.е. предлагаемый метод обнаруживает аномалию раньше на 2 мес (2 мес и 7 дней).

Практически важным результатом анализа при управлении полетом КА является определение места возникновения аномалий как предвестников нештатных ситуаций (НШС). Для этого предлагается комплексировать

несколько методов интеллектуального анализа в рамках одной задачи определения аномалий с целью уменьшения пределов неоднозначности ее решения.

Основной принцип предлагаемой методики состоит в том, что после кластерного анализа совокупности телеметрических параметров КА, каждый отдельно взятый физический телеметрический параметр проходит дополнительный специальный способ исследования, а именно применение процедуры вейвлет-анализа. Задача интеллектуального анализа решает вопрос не только выявления факта аномалий, но и определения причин и источников возникшей аномалии, а также в определении тенденций ее развития в последующие интервалы времени.

Как известно, значения ТМП КА на начальных этапах обработки рассматриваются в определенной шкале времени. В результате сплайновой аппроксимации значений получается кривая, которую можно интерпретировать как частотный сигнал.

Предлагаемый метод диагностики аномалий в работе составных частей KA состоит в том, чтобы выполнить анализ сигнала, сформированного из ряда значений ТМП, с выявлением в нем нежелательных изменений и аномалий, предшествующих возможным НШС. Анализ выполняется с использованием специального математического аппарата — вейвлет-анализа.

Вейвлет-преобразование представляет собой интегральное преобразование, в котором осуществляется свертка двух функций, одна из которых — вейвлет, а вторая — функция исследуемого сигнала [5]. Анализирующей функцией вейвлет-преобразования является не синусоида (комплексная экспонента), "растянутая" по всей временной оси, а локализованный "всплеск", или "вейвлет".

С точки зрения интеллектуального анализа ТМИ получаем частотное наполнение сигнала и моменты времени возникновения соответствующих этим частотам изменений в сигнале, т.е. обнаруживаем факт появления аномалии или НШС. Данному анализу подвергаются отдельные ТМП, которые описывают состояние характерных мест контролируемого оборудования КА, тем самым локализуя аномалию в конструкции КА.

Апробация предлагаемого метода интеллектуального анализа проведена следующим образом. На вход алгоритма поступает ТМИ, прошедшая стадию предварительной обработки и представляющая собой конкретный параметры, отражающие состояния КА, привязанные к конкретному моменту времени и имеющие установленную размерность физических величин. Выбор вейвлета осуществляется на основе информации о диапазоне значений ТМП, количестве локальных максимумов в ряде значений исследуемого ТМП на рассматриваемом интервале времени, а также на основе сопоставления величины модулей вейвлет-коэффициентов преобразования для случаев применения различных вейвлет-функций. Результатом процедуры вейвлет-преобразования является матрица вейвлет-коэффициентов, и ее анализ позволяет обнаружить в исследуемом сигнале аномальное изменение его значений и выявить возникающую НШС по величине и характеру поведения вейвлет-коэфициента. Обнаружение и локализация аномалий или НШС решает задачу выделения из общего числа вычисленных вейвлет-

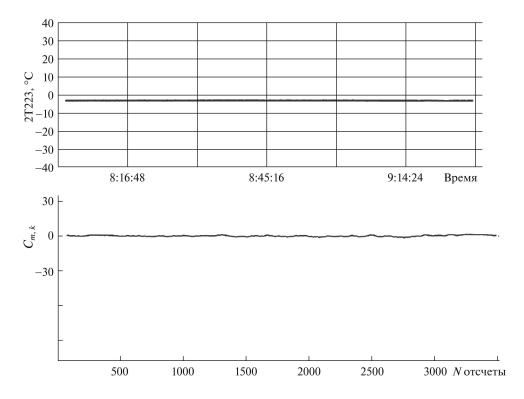


Рис. 3. Номинальное состояние ТМП и график вейвлет-коэффициентов.

коэффициентов и производится фиксирование момента времени возникновения аномалии или НШС.

Проверка работы методики анализа ТМИ с помощью предлагаемого специального математического аппарата выполнялась для системы кондиционирования воздуха (СКВ) из состава служебных систем РС МКС. Был выбран ТМП температуры хладона 2Т223 на входе компрессора СКВ как характерный ТМП для данной системы. Номинальная работа СКВ показана на рис. 3. При этом верхний график демонстрирует значение ТМП температуры хладона 2Т223, а нижний график величину соответствующего вейвлеткоэффициента.

На рис. 4 представлены обработанные значения этого ТМП на интервале времени, когда была зафиксирована НШС. При этом автоматика отключила компрессор СКВ на основе внутренней логики управления, а специалист управления не идентифицировал и не локализовал ситуацию, поскольку изменение ТМП было весьма незначительно и составило 6 градусов, что визуально заметить очень тяжело на фоне значений остальных ТМП.

Как видно из рис. 4 вейвлет-преобразование более наглядно отражает изменение значения ТМП на том самом участке, где происходит НШС. Резкое (более чем в 10 раз) изменение вейвлет-коэффициента служит критерием для автоматизированного обнаружения и локализации НШС, что позволяет повысить оперативность ее выявления. Предлагаемая методика позволяет

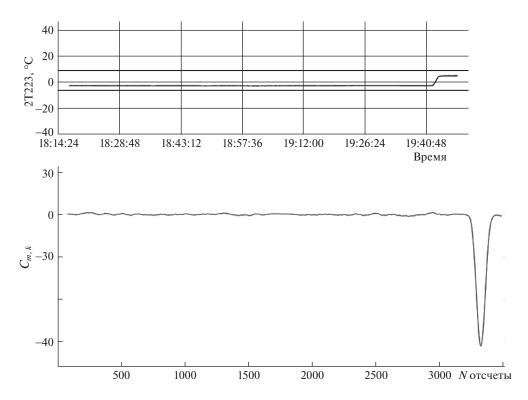


Рис. 4. Значение ТМП и график вейвлет-коэффициентов при НШС.

автоматически исследовать процесс изменения значения ТМП и развития НШС с использованием обновляемой базы данных вейвлет-коэффициентов, характеризующих номинальное поведение этих параметров.

Для решения задачи прогнозирования технического состояния на основе определения тенденций изменения параметров состояния КА рассмотрена возможность применения методов анализа временных рядов. Поскольку значения ТМП в потоке ТМИ от КА следуют через определенные и равные промежутки времени, то эта последовательность представляет собой классический временной ряд. Для его анализа применим методы исследования временных рядов. Наиболее применимой для задач прогнозирования характеристикой временного ряда следует считать величину тренда. Тренд ряда выявляет прямое влияние процесса или режима, происходящего на борту КА на контролируемый ТМП.

Исходя из опыта управления KA и свойств процессов и режимов работы, происходящих на борту, можно выделить:

- номинальный тренд для определенной группы ТМП характерно и достоверно описывает номинальный процесс на борту KA;
- неноминальный отклонение от номинального тренда ТМП выше допустимой величины, а также иное направление изменения величины ТМП;
- нехарактерный появление тренда у $\text{ТМ}\Pi,$ для которых он не характерен или не запланирован.

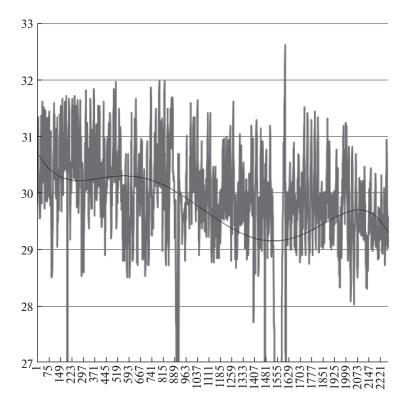


Рис. 5. Тренд напряжения на АБ на длительном интервале.

В основе рассматриваемого метода контроля состояния на основе анализа временных рядов лежит именно выявление тренда. Для практических задач анализа при управлении полетом КА важен факт перехода в тренд значения какого-либо ТМП или группы ТМП. Величина тренда и возможная динамика в будущем необходимы для соотнесения с привлекаемыми ресурсами или запасами и последующего вычисления располагаемого времени до достижения предельно допустимых значений ТМП или исчерпания ресурсов или запасов КА. При этом "располагаемое время" является самостоятельным параметром, сгенерированным в результате подобного интеллектуального анализа ТМИ КА.

Для апробации метода был применен метод кумулятивных сумм. Момент изменения свойств случайной независимой последовательности ТМП $(Y_1 \dots Y_t)$, которая до момента наступления нехарактерного/неноминального тренда описывается распределением с плотностью $f_{\theta_0}(Y_t)$, а после — распределением с плотностью $f_{\theta_1}(Y_t)$.

Достаточно наглядно данный метод продемонстрировал поведение аккумуляторной батареи (АБ), что представлено на рис. 5.

Принципиальная схема описанной методики интеллектуального анализа и прогнозирования состояния российского сегмента международной космической станции на основе цифрового двойника изображена на рис. 6. При этом номинальные данные получаются на начальном этапе полета ОМ в про-



Рис. 6. Принципиальная схема интеллектуального анализа.

цессе проведения летных испытаний. В этот период все ТМП подвергаются детальному анализу и определяются параметры номинальных состояний. На базе этих данных формируется цифровой двойник, имитирующий номинальное состояние объекта. Вновь поступающие данные соотносятся с использованием трех вышеперечисленных методов, формируются данные о текущем состоянии и осуществляется прогноз.

4. Заключение

Задача интеллектуального анализа ТМИ для управления полетом КА является своевременной, обоснованной и актуальной по следующим основным причинам:

- наличие базы информации за 20 лет эксплуатации РС МКС;
- продолжающаяся в настоящий момент эксплуатация PC МКС и предполагаемое в дальнейшем продолжение полета;
- необходимость прогнозирования поведения приборов, агрегатов и составных частей PC МКС в будущем с учетом возрастания внешних воздействующих факторов космического пространства.

Имеющийся математический аппарат и архивные данные позволяют приступить к решению поставленной задачи.

Решение задачи обеспечит наличие эффективного инструмента, методик и данных, перспективного для будущего применения, и позволит реализовать:

- прогноз вероятности выходов из строя или изменения эксплуатационных характеристик, входящих в состав PC МКС приборов и агрегатов;
- прогноз вероятности выходов из строя или изменения эксплуатационных характеристик составных частей МКС с учетом взаимного влияния функционирования приборов и элементов;

— подготовку работ по замене прибора до формальной выработки ресурса или формирование комплекта запасного оборудования на основе полученного прогноза "располагаемого времени" и выявленных тенденций изменения характеристик элементов, если расчетный прогноз выявит тенденции к отказу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Соловьёв В.А., Лысенко Л.Н., Любинский В.Е. Управление космическими полетами: Уч. пос. в 2 ч. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
- Bakhtadze N., Lototsky V., Pyatetsky V., Lototsky A. Identification Algorithms Basedonthe Associative Search of Analogs and Association Rules // Proc. Int. Conf. Time Ser. Forecast (ITISE 2018) Granada, Spain, 19–21 September, 2018. P. 783–794. ISBN: 978-84-17293-57-4.
- 3. Теория управления. Дополнительные главы. Уч. пос. Под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019.
- 4. Соловьев С.В. Направления интеллектуализации операций контроля, применимых для оперативного управления полетом КА // Инженер. Журн.: наука и инновации. 2018. Вып. 11. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-11-1824
- 5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 07.11.2019

После доработки 18.03.2020

Принята к публикации 25.05.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Ч. 1
Эрнандес А., Позняк А.С. Нелинейное параметрическое оценивание гамильтоновых систем: задача идентификации как задача стабилизации
Искендеров А.Д., Гамидов Р.А. Задачи оптимизации с градиентом управления в коэффициентах эллиптических уравнений
Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы с n степенями свободы
Стохастические системы
Меликов А.З., Алиева С.Г., Шахмалыев М.О. Методы расчета системы с мгновенной обратной связью и переменной интенсивностью входящего потока
Гераськин М.И. Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации
Интеллектуальные системы управления, анализ данных
Соловьев С.В. Методика интеллектуального анализа и прогнозирования состояния ресурсов российского сегмента международной космической стан-

CONTENTS

Nonlinear Systems

Andrievsky B.R., Furtat I.B. Disturbance Observers: Methods and Applications. I. Methods
Hernandez A., Poznyak A.S. Nonlinear Parametric Estimation of Hamiltonian Systems: Identification as Stabilization
Iskenderov A.D., Gamidov R.A. Optimization Problems with Gradient of Control's in the Coefficients of Elliptic Equations
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System with n Degrees of Freedom93
Stochastic Systems
Melikov A.Z., Aliyeva S.H., Shahmaliyev M.O. Methods for Computing a System with Instantaneous Feedback and Variable Input Stream Intensity
Control in Social Economic Systems
Geraskin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach
Golubin A.Yu., Gridin V.N. Optimal Insurance Strategy Design in a Risk Process under Value-at-Risk Constraints on Capital Increments
Intellectual Control Systems, Data Analysis
Solov'ev S.V. Methodology of Intelligent Analysis and Forecasting for the State of Resources in the Russian Segment of the International Space Station Based on Digital Identification Models