

СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 10, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- О спектральных свойствах классических операторов Дирака и операторов с инволюцией в однородных пространствах функций
А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова 1299
- Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера
М. М. Васьковский 1305
- Уточнение оценок собственных значений для струны с сингулярным весом
А. С. Иванов 1318
- К задаче о разделении переменных в системах обыкновенных дифференциальных уравнений
В. В. Козлов 1325
- О генеральных показателях условно-периодических систем
Ю. Д. Козлов 1333
- Вычисление отображения Пуанкаре для двумерных периодических систем и уравнений Риккати
В. И. Мироненко, В. В. Мироненко 1339
- Об асимптотической устойчивости в целом стационарных решений нелинейных дифференциальных уравнений некоторого класса в гильбертовом пространстве
И. П. Рязанцева 1346
- Метод интегральных дисперсионных уравнений в задаче о нелинейных волнах круглого волновода
Ю. Г. Смирнов 1359
- О существовании периодических решений у нелинейной системы третьего порядка
В. В. Фомичев, А. В. Ильин, А. И. Rogovskiy, Р. Р. Бегишев, Р. П. Митрев, Т. С. Тодоров 1367
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Об одной задаче с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода
М. Мирсабуров, Н. Б. Исломов 1384
- Представление обратимых линейных дифференциальных операторов в виде композиции треугольных
В. Н. Четвериков 1397
- О поведении спектра возмущённой краевой задачи Стеклова со слабой сингулярностью
А. Г. Чечкина 1407
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Точные решения трёх соболевских уравнений, содержащих псевдолапласианы четвёртого порядка	
<i>А. И. Аристов</i>	1421
Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами	
<i>В. В. Власов, Н. А. Раутиан</i>	1426
Об одном обратимом расширении несамосопряжённого сингулярного дифференциального оператора на полуоси	
<i>Л. К. Кушаинова, Я. Т. Султанаев, А. С. Касым</i>	1431
Об одном вырождающемся особом интегральном операторе	
<i>А. А. Полосин</i>	1436

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА И ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

© 2021 г. А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

Приводятся теоремы о локализации спектра операторов Дирака и операторов с инволюцией в некотором классе пространств функций, введённом в статье, опубликованной в [Contemp. Math. 2018. V. 706. P. 93–114].

DOI: 10.31857/S0374064121100010

Введение. В работе рассматривается дифференциальное выражение первого порядка, определяющее дифференциальный оператор в некотором классе однородных пространств (см. определение ниже, а также [1]). Класс задаётся таким образом, чтобы спектр оператора не зависел от выбора конкретного однородного пространства, причём одно из пространств в классе является гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$ функций со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В $\mathfrak{H}$ спектр дифференциального оператора возможно оценить. Таким образом, оценка спектра распространяется и на другие однородные пространства. В данной работе мы аккуратно определяем пространства и операторы, для которых эта схема работает, а также приводим соответствующие оценки. В качестве примера рассматривается оператор Дирака на прямой из [2], и полученная в [2] оценка его спектра обобщается на целый класс однородных пространств, в частности, на пространства Степанова. Другим примером является оператор с инволюцией из [3]. Для него полученные в [3] оценки также распространяются на другие функциональные пространства.

Введём используемые в статье функциональные пространства.

Для любого комплексного банахова пространства $\mathcal{X}$ через $\text{End } \mathcal{X}$ обозначим банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Далее комплексное гильбертово пространство обозначим через $\mathcal{H}$, а символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – двусторонний идеал операторов Гильберта–Шмидта из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$.

В работе систематически используются пространства Бохнера–Лебега $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$. Для $p \in [1, \infty]$ через $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ обозначается банахово пространство измеримых по Бохнеру и суммируемых на $\mathbb{R}$ со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) классов эквивалентности функций со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Нормы в пространствах $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{X}}^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \text{и} \quad \|x\|_{\infty} = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{X}}.$$

В первой части статьи используются пространства $L_1 = L_1(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $L_2 = L_2(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Пространство L_1 будем рассматривать как банахову алгебру со свёрткой функций в качестве операции умножения. Пространство $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ (и, в частности, пространство L_2) является гильбертовым пространством со стандартным скалярным произведением. Через $W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, обозначаем пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$, производная которых также принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$.

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $L_{1,s} = L_{1,s}(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{X})$ – пространство, состоящее из всех таких функций $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, для которых выполняются следующие два свойства (см. также [1]):

а) для каждого $x \in \mathcal{X}$ функция из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{X}$, действующая по правилу $s \mapsto F(s)x$, измерима;

б) существует функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|F(s)\|_{\text{End } \mathcal{X}} \leq f(s). \quad (1)$$

Для $F \in L_{1,s}$ положим $\|F\| = \|F\|_1 = \inf \|f\|$, где инфимум берётся по всем таким функциям $f \in L_1(\mathbb{R})$, для которых выполнено неравенство (1).

Отметим, что введённое пространство $L_{1,s}$ является банаховой алгеброй со свёрткой

$$(F_1 * F_2)(t)x = \int_{\mathbb{R}} F_1(s)F_2(t-s)x \, ds, \quad F_1, F_2 \in L_{1,s}, \quad x \in \mathcal{X},$$

в качестве операции умножения; в частности, $\|F_1 * F_2\|_1 \leq \|F_1\|_1 \|F_2\|_1$.

Мы далее также будем использовать линейное пространство $L_{1,\text{loc}} = L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) классов эквивалентности функций со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, в частности [1], для любых компакта $K \subset \mathbb{R}$ и функции $f \in L_{1,\text{loc}}$ имеем

$$\int_K \|f(t)\|_{\mathcal{X}} \, dt < \infty.$$

Через $S_p = S_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, +\infty)$, обозначаем пространство Степанова [4, с. 37], состоящее из функций $f \in L_{1,\text{loc}}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|f(t+s)\|_{\mathcal{X}}^p \, dt \right)^{1/p},$$

принимаемая за норму в S_p .

Определение [1]. Банахово пространство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ функций, определённых на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$, называется *однородным*, если выполнены следующие пять условий:

- i) пространство $\mathfrak{F}$ непрерывно вложено в S_1 ;
- ii) представление $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathfrak{F}$, определяемое правилом

$$(S(s)x)(t) = x(t+s), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{F}, \quad (2)$$

является изометрическим представлением группы $\mathbb{R}$ операторами из $\text{End } \mathfrak{F}$ [5, 6];

iii) для $x \in \mathfrak{F}$ и $C \in \text{End } \mathcal{X}$ функция $y(t) = C(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и справедливо неравенство $\|y\| \leq \|C\| \|x\|$;

iv) для $x \in \mathfrak{F}$ и $F \in L_{1,s}$ свёртка $(F * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} F(s)x(t-s) \, ds$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и имеет место неравенство $\|F * x\| \leq \|F\|_1 \|x\|$;

v) если для некоторого $x \in \mathfrak{F}$ равенство $x * f = 0$ верно для всех $f \in L_1$, то $x = 0$.

Следующие банаховы пространства являются однородными пространствами (или имеется эквивалентная норма, в которой они однородны):

- 1) пространство Степанова $S_p = S_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, +\infty)$;
- 2) пространство $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, +\infty)$;
- 3) пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ограниченных непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ и нормой $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$, $x \in C_b$;
- 4) подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ функций из $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, исчезающих на бесконечности, т.е. $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\|_{\mathcal{X}} = 0$ для любой $x \in C_0(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

Подчеркнём, что это далеко не все интересные однородные пространства функций, другие можно найти в [1, 7, 8], но они в данной работе не используются. Все результаты будем формулировать только для указанных выше однородных пространств 1)–4), обозначая их символом $\mathfrak{F}$. Кроме того, предполагается, что пространство значений $\mathcal{X}$ функций из $\mathfrak{F}$ является некоторым гильбертовым пространством, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{H}$.

Перейдём к определению рассматриваемых дифференциальных операторов L . Пусть

$$L \equiv -\frac{d}{dt} - B : D(L) \subseteq \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F},$$

где область определения $D(L) \subseteq \mathfrak{F}$ оператора L совпадает с областью определения $D(A) \subseteq \mathfrak{F}$ оператора $A = -d/dt$, и оператор $B : D(B) \subseteq \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ – линейный замкнутый оператор умножения на функцию $b : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, подчинённый оператору A ; поэтому считаем, что $D(B) = D(A)$.

Напомним, что оператор B подчинён оператору A , если $D(A) \subseteq D(B)$ и при некоторой постоянной $C > 0$ справедливо неравенство $\|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)$, $x \in D(A)$. Пространство операторов, подчинённых оператору A , обозначим через $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{F})$.

Область определения $D(A)$ оператора A состоит из всех таких $x \in \mathfrak{F}$, для которых существует $y \in \mathfrak{F}$, для которой при всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ имеют место равенства

$$x(t) = x(s) - \int_s^t y(\tau) d\tau, \quad s \leq t.$$

В работе [9, теорема 4] доказана следующая

Теорема 1. *Спектр $\sigma(L)$ оператора L не зависит от выбора пространства $\mathfrak{F}$.*

Приведём также без доказательства ещё один результат [3, теорема 4.1], на который будем опираться.

Теорема 2. *Пусть $A : D(A) \subset \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ – самосопряжённый оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и оператор B принадлежит идеалу операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. Тогда существует такая непрерывная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, что для всех $\lambda \in \sigma(A - B)$ имеет место неравенство $|\text{Im } \lambda| \leq f(\text{Re } \lambda)$.*

Таким образом, существует такая непрерывная вещественная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, что спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ лежит между графиками функций f и $-f$.

Из теоремы 1 немедленно вытекает, что если имеет место теорема о локализации спектра для оператора

$$L \equiv -\frac{d}{dt} - B : D(L) \subseteq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad B \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}),$$

то такая же теорема имеет место для оператора L , действующего в однородных пространствах $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty)$, $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$.

Если включение $B \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, места не имеет, то можно использовать любое преобразование подобия оператора $A - B$, $B \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$, в оператор $A - B_0$, $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. В [2] в качестве такого преобразования подобия выступает предварительное преобразование подобия метода подобных операторов. Приведём его краткое описание.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ её преобразование Фурье $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для построения преобразования подобия понадобятся следующие функции из $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Для $a > 0$ рассмотрим трапецевидную функцию τ_a , заданную условиями

$$\tau_a(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi| \leq a, \\ a^{-1}(2a - |\xi|), & \text{если } a < |\xi| \leq 2a, \\ 0, & \text{если } |\xi| > 2a. \end{cases}$$

Непосредственный подсчёт показывает, что $\tau_a \in L_2(\mathbb{R})$ и $\tau_a = \hat{\varphi}_a$, где

$$\varphi_a(t) = \frac{2 \sin(3at/2) \sin(at/2)}{\pi at^2}.$$

Рассмотрим также функцию $\omega_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную равенствами: $\omega_a(\xi) = (1 - \tau_a(\xi))/\xi$, если $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и $\omega_a(0) = 0$. Пусть функция ψ_a такова, что $\widehat{\psi}_a = \omega_a$. Известно [3], что $\psi_a \in L_1$ и $\|\psi_a\|_1 \leq 1.35/a$.

Напомним, что $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Наряду с представлением $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathfrak{H}$, определённым формулой (2), введём в рассмотрение также представление $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } (\mathfrak{L}_A(\mathfrak{H}))$, заданное формулой

$$T(t)X = S(t)XS(-t), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$ определим оператор $T(f)X \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$ равенством

$$(T(f)X)x = \int_{\mathbb{R}} f(t)(T(-t)X)x dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)S(-t)XS(t)x dt, \quad x \in D(A).$$

В рассматриваемом случае B – оператор умножения на функцию $b : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ и

$$(T(f)Bx)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)b(s-t)x(s) dt = (f * b)(s)x(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Из [2, теорема 2] и приведённых выше теорем 1, 2 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть $A : D(A) \subseteq \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ – самосопряжённый оператор и $B \in \mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$. Пусть также выполнены условия:

a) $T(\psi_a)B \in \text{End } \mathfrak{H}$ и существует такое $a > 0$, что $\|T(\psi_a)B\|_{\text{End } \mathfrak{H}} < 1$;

b) $(T(\psi_a)B)D(A) \subseteq D(A)$;

c) $BT(\psi_a)B + T(\varphi_a)B \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$;

d) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \rho(A)$, при котором $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$ и существует такая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, что спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ лежит между графиками функций f и $-f$.

Перейдём к оператору Дирака на прямой. Пусть

$$(\mathcal{L}x)(t) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} - \mathcal{V}(t)x(t) = Ax(t) - Vx(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1(t) \\ v_2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1, v_2 \in L_2(\mathbb{R}, \text{End } \mathcal{H}), \quad D(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}^2) \subseteq L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^2) = \mathfrak{H}.$$

В [2, теорема 4] для $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ доказана

Теорема 4. Существует такая непрерывная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, что для $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$ имеет место оценка $|\text{Im } \lambda| \leq f(\text{Re } \lambda)$.

Непосредственная проверка показывает, что результаты теоремы 4 остаются верными и в случае произвольного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (не только для $\mathcal{H} = \mathbb{C}$).

Из свойства 5) в [2, лемма 3] следует, что возмущение V в теореме 4 принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathfrak{H})$. Однако в общем случае V не является ограниченным оператором, и тем более оператором из идеала $\mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. Поэтому при доказательстве теоремы 4 перед применением теоремы 2 строится преобразование подобия оператора $A - V$ в оператор $A - V_0$, где $V_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathfrak{H})$. По существу доказательство теоремы 4 сводится к проверке того, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.

Пусть теперь $\mathcal{L} = A - V : D(\mathcal{L}) = D(A) \subseteq \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – одно из указанных однородных пространств. Представим оператор $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(i \frac{d}{dt} - \begin{pmatrix} 0 & -v_1 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i\tilde{\mathcal{L}}.$$

Для операторов $\mathcal{L}$ и $i\tilde{\mathcal{L}}$ имеет место локализационная теорема 4 при $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Поэтому из теорем 1 и 4 вытекает

Теорема 5. *Существует непрерывная неотрицательная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, для которой спектр оператора Дирака $\mathcal{L}$, действующего в любом из указанных выше однородных пространств $\mathfrak{F}$, заключён между графиками функций f и $-f$.*

Перейдём к оператору с инволюцией. Вначале приведём результат из [3, теорема 1.1].

Теорема 6. *Пусть*

$$L_I = -i \frac{d}{dt} - V : W_2^1(\mathbb{R}) \subseteq L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}) \quad (3)$$

и $(Vx)(t) = v(t)x(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда существует такая непрерывная вещественная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(L_I)$ имеет место неравенство $|\operatorname{Im} \lambda| \leq f(\operatorname{Re} \lambda)$.

Зачастую исследование спектра оператора с инволюцией сводится к исследованию спектра оператора Дирака [10]. Именно, спектр оператора с инволюцией L_I , заданного формулой (3), совпадает со спектром оператора Дирака

$$\mathcal{L} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - \begin{pmatrix} 0 & v(t) \\ v(-t) & 0 \end{pmatrix},$$

где $v \in L_2(\mathbb{R}, \operatorname{End} \mathcal{H})$ и $D(\mathcal{L}) \subseteq W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \subset L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Существует непрерывная неотрицательная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что спектр оператора L_I , действующего в любом из однородных пространств $\mathfrak{F}$, допускает для всех $\lambda \in \sigma(L_I)$ оценку $|\operatorname{Im} \lambda| \leq f(\operatorname{Re} \lambda)$.*

Отметим, что обычно рассматриваются операторы Дирака и операторы с инволюцией на конечном отрезке $[0, \omega]$. Интересные результаты, касающиеся спектральных свойств таких операторов, содержатся, например, в [10–15].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Spectral properties of an operator polynomial with coefficients in a Banach algebra // Contemp. Math. 2018. V. 706. P. 93–114.
2. Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б. О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 153–161.
3. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 492. № 2. P. 124473.
4. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., 1978.
5. Баскаков А.Г., Криштал И.А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 3–54.
6. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Совр. мат. Фунд. напр. 2004. Т. 9. С. 3–151.
7. Баскаков А.Г., Струков В.Е., Струкова И.И. Гармонический анализ периодических и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и гармонических распределений // Мат. сб. 2019. Т. 210. № 10. С. 37–90.
8. Баскаков А.Г., Дикарев Е.Е. Спектральная теория функций в исследовании дифференциальных операторов с частными производными // Уфимск. мат. журн. 2019. Т. 11. № 1. С. 3–18.
9. Баскаков А.Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функци. анализ и его приложения. 1996. Т. 30. Вып. 3. С. 1–11.
10. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2233–2246.
11. Джаков П., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. Вып. 4 (370). С. 77–182.

12. *Савчук А.М.* О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 113–139.
13. *Савчук А.М., Садовнича Я.В.* Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентами-распределениями // Совр. мат. Фунд. напр. 2020. Т. 66. Вып. 3. С. 373–530.
14. *Владыкина В.Е., Шкаликов А.А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 1. С. 12–17.
15. *Kopzhassarova A.A., Lukashov A.L., Sarsenbi A.M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution // Abstr. Appl. Anal. 2012. Art. ID 590781.

Воронежский государственный университет,
Северо-Осетинский государственный университет
им. К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ,
Университет Северного Иллинойса,
г. Де-Калб, США,
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.
После доработки 10.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.911

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СЛАБО УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА

© 2021 г. М. М. Васьковский

Разработан функциональный вариант теории грубых траекторий с произвольным показателем Гёльдера. С его помощью для класса обыкновенных и класса стохастических одномерных дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным показателем Гёльдера, доказана теорема существования и единственности решения и для уравнений первого из этих классов получена формула замены переменных.

DOI: 10.31857/S0374064121100022

Введение. Дифференциальные уравнения вида $dY_t = f(Y_t) dX_t$, где X – некоторая α -гёльдеровская функция, $\alpha \leq 1/2$, не могут быть исследованы с использованием интегралов Римана–Стилтьеса. В работе Т. Лайонса [1] предложен принципиально новый подход к интегрированию по α -гёльдеровским функциям и разработаны его приложения к теории дифференциальных уравнений. Метод Лайонса основан на включении в интегральные суммы членов тейлоровских разложений высших порядков, соответствующих уравнению $dY_t = f(Y_t) dX_t$, и получил название теории грубых траекторий. М. Губинелли [2] разработал функциональный вариант теории грубых траекторий, позволяющий исследовать дифференциальные уравнения, управляемые негеометрическими грубыми траекториями. Однако теория грубых траекторий применима лишь при $\alpha > 1/3$. Ф.А. Харан [3] показал, что подход Губинелли может быть расширен и использован для интегрирования по гёльдеровским функциям с показателем $\alpha > 1/4$. Однако подход Харана реализован лишь для геометрических грубых траекторий.

Теория грубых траекторий имеет наиболее значительное применение в теории стохастических дифференциальных уравнений и, в частности, для уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями [4]. Первые работы, посвящённые таким приложениям теории грубых траекторий, принадлежат Л. Кутэн, Ж. Кьяну, Ф. Бадуэну [5, 6]. В дальнейшем эти результаты уточнялись и обобщались в работах [7–11]. В статье [5] показано, что для дробных броуновских движений с индексами Хёрста $H \leq 1/4$ их кусочно-линейные аппроксимации не являются сходящимися по вероятности. Поэтому стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста $H \leq 1/4$, не могут быть исследованы в рамках известной теории грубых траекторий.

Опираясь на идеи Губинелли и Харана, в настоящей статье разработана теория грубых траекторий с произвольным показателем Гёльдера α , которая, в отличие от теории Лайонса, не требует сходимости кусочно-линейных аппроксимаций процесса X , что позволяет применять построенную теорию к исследованию проблемы существования и единственности решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с произвольным показателем Хёрста $H \in (0, 1)$. Недостатком теории грубых траекторий являются жёсткие условия относительно гладкости и ограниченности функции f . Для стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста, большими $1/2$, результаты могут быть значительно усилены, что, в частности, показано в работах [12–20].

Определение грубых траекторий. Зафиксируем какие-либо $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Через $C^\alpha([0, T], V)$ и $C_2^\alpha([0, T], V)$ обозначим множества функций $f : [0, T] \rightarrow V$ и $g : [0, T]^2 \rightarrow V$ соответственно таких, что величины

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s, t \in [0, T] \\ s \neq t}} \frac{|f_t - f_s|}{|t - s|^\alpha}, \quad \|g\|_{\alpha, 2} := \sup_{\substack{s, t \in [0, T] \\ s \neq t}} \frac{|g_{s, t}|}{|t - s|^\alpha}$$

конечны. Как и в [4, гл. 2], далее для функции двух переменных $g_{s, t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha, 2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s, t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Для целого неотрицательного k и конечномерных евклидовых пространств V и W через $C_b^k(V, W)$ обозначим множество функций $h : V \rightarrow W$ таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^k \|D^i h\|_\infty$$

конечна, где $\|D^i h\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |D^i h_t|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ множество α -непрерывных по Гёльдеру *грубых траекторий*, т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0, T], V^{\otimes i})$ для любого $i = \overline{1, n}$, и для любых $s, u, t \in [0, T]$ выполняется тождество Чена $\mathbf{X}_{s, t} = \mathbf{X}_{s, u} \boxplus \mathbf{X}_{u, t}$, где

$$(\mathbf{X}_{s, u} \boxplus \mathbf{X}_{u, t})^i = \sum_{j=0}^i \mathbf{X}_{s, u}^j \otimes \mathbf{X}_{u, t}^{i-j}.$$

Отметим, что операция $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^n V^{\otimes i}$, где $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X} : [0, T]^2 \rightarrow T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0, t}$, $t \in [0, T]$, поскольку $\mathbf{X}_{s, t} = (\mathbf{X}_{0, s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0, t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0, t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ называется *геометрической*, если

$$\text{Sym}(\mathbf{X}_{s, t}^i) = \frac{1}{i!} (\mathbf{X}_{s, t}^1)^{\otimes i} \quad \text{для всех } i = \overline{1, n},$$

где $\text{Sym}(\mathbf{X}_{s, t}^i)$ обозначает симметрическую часть тензора $\mathbf{X}_{s, t}^i$. Множество геометрических грубых траекторий обозначаем через $\mathcal{C}_g^\alpha([0, T], V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ является *грубой траекторией* над $X \in C^\alpha([0, T], V)$, если $\mathbf{X}_{0, t}^1 = X_t$ для любых $t \in [0, T]$.

Определение слабо управляемых грубых траекторий. Пусть $X \in C^\alpha([0, T], V)$, а $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ – грубая траектория над X . Пусть W – конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0, T], W)$ *слабо управляется* грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$, если существуют функции $Y^{(1)} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $\dots$, $Y^{(n-1)} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes (n-1)}, W)$ такие, что

$$Y_{s, t} = Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-1} + R_{s, t}^{Y, n}, \quad Y_s^{(1)} = Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^{n-2} + R_{s, t}^{Y, n-1}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad Y_{s, t}^{(n-2)} = Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s, t}^1 + R_{s, t}^{Y, 2}, \quad Y_{s, t}^{(n-1)} = R_{s, t}^{Y, 1},$$

а величина $\|R^{Y, i}\|_{i\alpha}$, $i = \overline{1, n}$, конечна для каждого из остаточных членов $R^{Y, i}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *грубой производной* порядка i от Y (если $\alpha \in (1/2, 1/3]$, то грубая производная $Y^{(1)}$ является производной Губинелли [4, гл. 4]).

Так как пространство $C^\alpha([0, T], W)$ банахово, то множество

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], W) = \left\{ (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) : Y \in C^\alpha([0, T], W), \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty \right\}$$

также образует банахово пространство относительно нормы

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} := \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| + \|(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha},$$

где $Y_t^{(0)} = Y_t$, $\|(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} = \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$ [4, гл. 4].

Определение интеграла по грубым траекториям. Пусть V, W – некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$, $Y \in C^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, W))$, $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, W))$. Возьмём некоторые $s, t \in [0, T]$, $s < t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s, t]$ точками, а через $|\mathcal{P}|$ – наибольшую из длин отрезков разбиения.

Потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$ назовём следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s, t]$ точками):

$$\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

Предложение 1. Пусть V, W – конечномерные евклидовы пространства, $\alpha \in (0, 1]$, $n = [1/\alpha]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$, $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, W))$. Тогда для любых $s, t \in [0, T]$ интеграл $\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$ корректно определён и существует постоянная $C = C(\alpha)$ такая, что выполняется оценка

$$\left| \int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-1} Y_s^{(i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i+1} \right| \leq C \sum_{i=1}^n \|\mathbf{X}^{n+1-i}\|_{(n+1-i)\alpha} \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} |t - s|^{(n+1)\alpha} \quad (1)$$

для всех $s, t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть

$$\psi_{s,t} = \sum_{i=0}^{n-1} Y_s^{(i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i+1}, \quad 0 < s < t < T,$$

$$\delta\psi_{s,u,t} = \psi_{s,t} - \psi_{s,u} - \psi_{u,t}, \quad 0 < s < u < t < T.$$

Непосредственной подстановкой несложно убедиться в справедливости равенства

$$\delta\psi_{s,u,t} = - \sum_{i=1}^n R_{s,u}^{Y,i} \mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}. \quad (2)$$

Докажем, что существует постоянная $\beta > 1$ такая, что $\|\psi\|_{\alpha,\beta} := \|\psi\|_\alpha + \|\delta\psi\|_{\beta,3} < \infty$, где

$$\|\psi\|_\alpha = \sup_{s < t} \frac{|\psi_{s,t}|}{|t - s|^\alpha}, \quad \|\delta\psi\|_{\beta,3} = \sup_{s < u < t} \frac{|\delta\psi_{s,u,t}|}{|t - s|^\beta}.$$

Имеем

$$\|\psi\|_\alpha \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_s |Y_s^{(i)}| \sup_{s < t} \frac{|\mathbf{X}_{s,t}^{i+1}|}{|t - s|^\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_s \left(|Y_0^{(i)}| + \sum_{j=i+1}^{n-1} |Y_0^{(j)} \mathbf{X}_{0,s}^{j-i} + R_{0,s}^{Y,n-i}| \right) \|\mathbf{X}^{i+1}\|_\alpha \leq$$

$$\leq c_{T,\alpha,\mathbf{X}}(1 + \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha}) < \infty,$$

здесь $c_{T,\alpha,\mathbf{X}}$ – постоянная, зависящая от T , α , $\max_{i=0, n-1} \|\mathbf{X}^{i+1}\|_\alpha$.

Покажем теперь, что $\|\delta\psi\|_{\beta,3} < \infty$ при $\beta = (n+1)\alpha$. Вследствие равенства (2) имеем

$$\|\delta\psi\|_{\beta,3} = \sup_{s < u < t} \frac{|\delta\psi_{s,u,t}|}{|t-s|^{(n+1)\alpha}} = \sup_{s < u < t} \frac{|\sum_{i=1}^n R_{s,u}^{Y,i} \mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}|}{|t-s|^{(n+1)\alpha}} \leq \sum_{i=1}^n \sup_{s < u < t} \frac{|R_{s,u}^{Y,i}|}{|t-s|^{i\alpha}} \frac{|\mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}|}{|t-s|^{(n+1-i)\alpha}}. \quad (3)$$

Существуют постоянные $c = c_{T,\alpha,\mathbf{X}}$, $l = l_{T,\alpha,\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha}}$ такие, что для любых $i = \overline{1, n}$ и всех s, u, t , $0 < s < u < t < T$, выполняются неравенства

$$|R_{s,u}^{Y,i}| \leq l|s-u|^{i\alpha}, \quad |\mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}| \leq c|t-u|^{(n-i+1)\alpha}. \quad (4)$$

Учитывая неравенства (4) в (3), получаем, что $\|\delta\psi\|_{\beta,3} < \infty$.

Таким образом, согласно лемме 4.2 [4], интеграл $\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$ корректно определён.

Перейдём к доказательству оценки (1). Из доказательства леммы 4.2 [4] следует, что существует постоянная $C = C(\beta)$ такая, что выполняется неравенство

$$\left| \int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-1} Y_s^{(i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i+1} \right| \leq C \|\delta\psi\|_{\beta,3} |t-s|^\beta \quad \text{для всех } s, t, \quad 0 < s < t < T. \quad (5)$$

Используя равенство (2), получаем

$$\begin{aligned} \|\delta\psi\|_{\beta,3} &= \sup_{s < u < t} \frac{|\sum_{i=1}^n R_{s,u}^{Y,i} \mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}|}{|t-s|^\beta} \leq \sum_{i=1}^n \sup_{s < u < t} \frac{|R_{s,u}^{Y,i} \mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}|}{|t-s|^\beta} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{s < u < t} \frac{|R_{s,u}^{Y,i}|}{|u-s|^{i\alpha}} \frac{|\mathbf{X}_{u,t}^{n-i+1}|}{|t-u|^{(n-i+1)\alpha}} \leq \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} \|\mathbf{X}^{n+1-i}\|_{(n+1-i)\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, из соотношений (5) и (6) вытекает оценка (1). Предложение доказано.

Следствие. Пусть $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1]$, $n = [1/\alpha]$. Если $F \in C_b^n(\mathbb{R}, W)$, где W – конечномерное евклидово пространство, то $(F(X), DF(X), \dots, D^{n-1}F(X)) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], W)$ и для любых $s, t \in [0, T]$ корректно определён интеграл $\int_s^t F(X_r) d\mathbf{X}_r$.

Доказательство. Пусть $Y_t^{(i)} = D^i F(X_t)$, $i = \overline{0, n-1}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$F(X_t) = F(X_s) + DF(X_s) \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + D^{n-1}F(X_s) \mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + D^n F(X_s + \theta X_{s,t}) \mathbf{X}_{s,t}^n, \quad \theta \in (0, 1).$$

Отсюда следует, что $R_{s,t}^{Y,n} = D^n F(X_s + \theta X_{s,t}) \mathbf{X}_{s,t}^n$. Так как $D^n F(X) \in C_b(\mathbb{R}, W)$, $\|\mathbf{X}^n\|_{n\alpha} < \infty$, то $\|R^{Y,n}\|_{n\alpha} < \infty$.

Аналогичными рассуждениями, раскладывая $D^i F(X_t)$ по формуле Тейлора, доказываем, что $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty$ для любого $i < n$.

Таким образом, $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], W)$ и, согласно предложению 1, интеграл $\int_s^t F(X_r) d\mathbf{X}_r$ корректно определён.

Композиция слабо управляемых грубых траекторий с гладкими функциями. Пусть $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$. Пусть $Y \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$; $f \in C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Определим $Z_t = f(Y_t)$. По аналогии с формулой Фаа-Ди-Бруно [21, с. 137] положим

$$Z^{(k)} = \sum_{j=1}^k D^j f(Y) B_{k,j}(Y^{(1)}, \dots, Y^{(k-j+1)}), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (7)$$

где $B_{k,j}(x_1, \dots, x_{k-j+1})$ – многочлены Белла [21, с. 133].

Предложение 2. Пусть $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $f \in C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Если

$$(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R}),$$

то $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, где $Z = f(Y)$, а грубые производные $Z^{(k)}$ определяются по формулам (7). Кроме того, для любого $M > 0$ существует такое $C_M > 0$, что для любого $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, для которого $\|(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| \leq M$, выполняется оценка

$$\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} \leq C_M.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $X_t = t$, а Y – произвольная функция из $C_b^n([0, T], \mathbb{R})$. В данном случае грубые производные $Y_t^{(i)}$ совпадают с обычными производными $D^i Y_t$.

Возьмём произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$. С одной стороны, справедливость равенства

$$Z_t^{(i)} = Z_s^{(i)} + Z_s^{(i+1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-i-1} + R_{s,t}^{Z, n-i}, \quad (8)$$

где $R_{s,t}^{Z, n-i} = O(|t-s|^{n-i})$, вытекает из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

С другой стороны, согласно формуле (7), справедливо равенство

$$Z_t^{(i)} = \sum_{j=1}^i D^j f(Y_t) B_{i,j}(Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(i-j+1)}). \quad (9)$$

В силу формулы Тейлора получаем

$$\begin{aligned} D^j f(Y_t) &= \sum_{k=j}^{n-1} D^k f(Y_s) Y_{s,t}^{k-j+1} + O(Y_{s,t}^{n-j}) = \\ &= \sum_{k=j}^{n-1} \left(D^k f(Y_s) \left(\sum_{l=1}^{n-1} Y_s^{(l)} \mathbf{X}_{s,t}^l + R_{s,t}^{Y, n} \right)^{k-j+1} \right) + O(Y_{s,t}^{n-j}). \end{aligned} \quad (10)$$

По определению грубых производных имеем

$$\begin{aligned} B_{i,j}(Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(i-j+1)}) &= B_{i,j}(Y_s^{(1)} + Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y, n-1}, \dots, \\ &Y_s^{(i-j+1)} + Y_s^{(i-j+2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-i+j-2} + R_{s,t}^{Y, n-i+j-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (9) и приводя подобные, приходим к соотношению

$$Z_t^{(i)} = \sum_{r=0}^{n-i-1} \mathbf{X}_{s,t}^r \sum_{j=1}^{n-1} D^j f(Y_s) P_{r,j}(Y_s^{(1)}, \dots, Y_s^{(n-1)}) + O(|t-s|^{n-i}), \quad (12)$$

где $P_{r,j}(x_1, \dots, x_{n-1})$ – некоторые многочлены, не зависящие от $\mathbf{X}$, Y , f .

Принимая во внимание равенства (7), будем иметь

$$Z_s^{(i)} + Z_s^{(i+1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-i-1} = \sum_{r=0}^{n-i-1} \mathbf{X}_{s,t}^r \sum_{j=1}^{r+i} D^j f(Y_s) B_{r+i,j}(Y_s^{(1)}, \dots, Y_s^{(r+i-j+1)}). \quad (13)$$

Теперь из формулы Фаа-Ди-Бруно [21, с. 137], соотношений (8), (12), (13), выполненных для произвольных функций $Y \in C_b^n([0, T], \mathbb{R})$, $f \in C_b^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $X_t = t$, вытекает, что

$$P_{r,j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = B_{r+i,j}(x_1, \dots, x_{r+i-j+1}) \quad (14)$$

для всех $j \leq r+i$, и $P_{r,j}(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv 0$ при $j > r+i$.

Пусть $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$. В силу соотношений (7) справедливо равенство (13), а также равенство (12) с теми же множителями $P_{r,j}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Теперь из равенств (14) следуют соотношения (8). При этом постоянные, входящие в оценку для O большого в соотношениях (10), (12), могут быть выбраны одними и теми же для всех $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ из шара радиуса M (следовательно, таким же свойством обладает и постоянная, входящая в оценку для O большого в соотношении (8)). Таким образом, $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ и $\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} = O(M)$. Предложение доказано.

В дальнейшем нам понадобится многомерный аналог формул Фаа-Ди-Бруно для грубых производных.

Пусть $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$, $\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \dots, \tilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $g \in C_b^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $Z_t = g(Y_t, \tilde{Y}_t)$. Положим

$$Z_t^{(k)} = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^j D_{x_l y^{j-l}}^j g(Y_t, \tilde{Y}_t) Q_{j,l}(Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(k)}, \tilde{Y}_t^{(1)}, \dots, \tilde{Y}_t^{(k)}), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

где $Q_{j,l}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = \sum k! \prod_{i=1}^k ((i!)^{m_i} q_{i1}! q_{i2}!)^{-1} x_i^{q_{i1}} y_i^{q_{i2}}$, а суммирование осуществляется по всем целым неотрицательным числам m_i , q_{i1} , q_{i2} ($i \in \{1, \dots, k\}$) таким, что $m_1 + \dots + km_k = k$, $q_{11} + \dots + q_{k1} = l$, $q_{12} + \dots + q_{k2} = j-l$, $q_{i1} + q_{i2} = m_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Предложение 3. Пусть $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $g \in C_b^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Если

$$(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}), (\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \dots, \tilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R}),$$

то $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, где $Z = g(Y, \tilde{Y})$, а грубые производные $Z^{(k)}$ определяются по формулам (15). Для любого $M > 0$ существует такое $C_M > 0$, что для любых $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}), (\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \dots, \tilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, для которых

$$\|(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| \leq M, \quad \|(\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \dots, \tilde{Y}^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |\tilde{Y}_0^{(i)}| \leq M,$$

выполняется оценка $\|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} \leq C_M$.

Доказательство предложения 3 проводится по той же схеме, что и предложения 2, при этом необходимо воспользоваться формулой Тейлора для функции двух переменных и двумерным аналогом формулы Фаа-Ди-Бруно из [22].

В завершение настоящего пункта докажем, что произведение управляемых грубых траекторий является управляемой грубой траекторией.

Пусть

$$\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R}), \quad \mathbf{G} = (G, G^{(1)}, \dots, G^{(n-1)}),$$

$$\mathbf{H} = (H, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R}), \quad Z_t = G_t H_t.$$

Положим

$$Z_t^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j G_t^{(j)} H_t^{(k-j)}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (16)$$

Предложение 4. Пусть $\alpha \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, $g \in C_b^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Если

$$\mathbf{G} = (G, G^{(1)}, \dots, G^{(n-1)}), \quad \mathbf{H} = (H, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R}),$$

то $(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, где $Z = GH$, а грубые производные $Z^{(k)}$ определяются по формулам (16). Кроме того, выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \|(Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} \leq \\ & \leq C \left(\|(G, G^{(1)}, \dots, G^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |G_0^{(i)}| \right) \left(\|(H, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha} + \sum_{i=0}^{n-1} |H_0^{(i)}| \right), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от G и H .

Доказательство. Возьмём произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$ и рассмотрим остаточный член

$$R_{s,t}^{Z,i} = Z_{s,t}^{(n-i)} - Z_s^{(n-i+1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 - \dots - Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{i-1}.$$

Нетрудно убедиться, что для любых функций $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо тождество $(fg)_{s,t} = f_s g_{s,t} + g_s f_{s,t} + f_{s,t} g_{s,t}$. Поэтому

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{Z,i} &= \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j (G_s^{(j)} H_{s,t}^{(n-i-j)} + G_{s,t}^{(j)} H_s^{(n-i-j)} + G_{s,t}^{(j)} H_{s,t}^{(n-i-j)}) - \sum_{l=1}^{i-1} \mathbf{X}_{s,t}^l \sum_{j=0}^{n-i+l} C_{n-i+l}^j G_s^{(j)} H_s^{(n-i+l-j)} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j G_s^{(j)} \left(\sum_{r=1}^{i+j-1} H_s^{(n-i-j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{H,i+j} \right) + \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j H_s^{(n-i-j)} \left(\sum_{r=1}^{n-j-1} G_s^{(j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{G,n-j} \right) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j \left(\sum_{r=1}^{n-j-1} G_s^{(j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{G,n-j} \right) \left(\sum_{r=1}^{i+j-1} H_s^{(n-i-j+r)} \mathbf{X}_{s,t}^r + R_{s,t}^{H,i+j} \right) - \\ &- \sum_{l=1}^{i-1} \mathbf{X}_{s,t}^l \sum_{j=0}^{n-i+l} C_{n-i+l}^j G_s^{(j)} H_s^{(n-i+l-j)}. \end{aligned}$$

Приводя подобные и группируя члены, получаем

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{Z,i} &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{X}_{s,t}^j \sum_{r=0}^{n-1} H_s^{(r)} P_{j,r}(G_s^{(1)}, \dots, G_s^{(n-1)}, R_{s,t}^{G,i}, \dots, R_{s,t}^{G,n}) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{X}_{s,t}^j \sum_{r=i}^n R_{s,t}^{H,r} Q_{j,r}(G_s^{(1)}, \dots, G_s^{(n-1)}, R_{s,t}^{G,i}, \dots, R_{s,t}^{G,n}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $P_{j,r}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_i, \dots, y_n)$, $Q_{j,r}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_i, \dots, y_n)$ – некоторые линейные многочлены с нулевыми свободными членами, коэффициенты которых не зависят от $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{X}$.

Полагая $X_t = t$, $G, H \in C^n([0, T], \mathbb{R})$ и раскладывая $Z_t^{(n-i)}$ по формуле Тейлора в точке s , заключаем, что $P_{j,r}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_i, \dots, y_n)$ не зависят от $x_1, \dots, x_{n-1}$ при $j < i$. Следовательно, из соотношения (17) вытекает существование постоянной $C_i = C_i(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ такой, что

$$\|R^{Z,i}\|_{i\alpha} \leq C_i \left(\|(G, G^{(1)}, \dots, G^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} + \sum_{i=0}^{n-1} |G_0^{(i)}| \right) \left(\|(H, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} + \sum_{i=0}^{n-1} |H_0^{(i)}| \right).$$

Предложение доказано.

Дифференциальные уравнения, управляемые грубыми траекториями. Пусть $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^{\beta}([0, T], \mathbb{R})$ – геометрическая грубая траектория над $X \in C^{\beta}([0, T], \mathbb{R})$; $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Выберем произвольно и зафиксируем $\alpha \in (0, \beta)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t) d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0, T]. \quad (18)$$

Определение 1. Решением уравнения (18) с начальным условием $Y_0 = x \in \mathbb{R}$ будем называть элемент $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], \mathbb{R})$ такой, что для любого $t \in [0, T]$ выполнено равенство

$$Y_t = x + \int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s, \quad (19)$$

где интеграл в правой части соотношения (19) понимается как грубый потраекторный интеграл, а соответствующие ему грубые производные от $Z = f(Y)$ определяются по формулам (7), а $Y_0^{(1)} = f(Y_0)$, $Y_0^{(2)} = Df(Y_0)f(Y_0)$, $Y_0^{(3)} = D^2f(Y_0)f^2(Y_0) + (Df(Y_0))^2f(Y_0)$ и т.д.

Определение 2. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что уравнение (18) с начальным условием

$$Y_0 = x \quad (20)$$

имеет *единственное* решение, если для любых решений $\mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], \mathbb{R})$ уравнения (18) таких, что $Y_0 = \tilde{Y}_0 = x$, следует, что $\mathbf{Y}_t = \tilde{\mathbf{Y}}_t$ для любых $t \in [0, T]$.

Теорема 1. Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^{\beta}([0, T], \mathbb{R})$. Если $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ уравнение (18) с начальным условием (20) имеет *единственное* решение.

Доказательство. Не нарушая общности, можем предполагать, что $[0, T] = [0, 1]$. Докажем, что существует $T_0 > 0$ такое, что уравнение (18) с начальным условием (20) имеет единственное решение в единичном шаре

$$\mathcal{B}_{T_0} = \{\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T_0], \mathbb{R}) : \mathbf{Y}_0 = (x, f(x), Df(x)f(x), \dots), \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} \leq 1\}.$$

Определим аналог отображения Ито–Лайонса $\mathcal{M}_{T_0} : \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T_0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T_0], \mathbb{R})$, задав его равенством

$$\mathcal{M}_{T_0}(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) = \left(x + \int_0^{\cdot} Z_s d\mathbf{X}_s, Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(n-2)} \right),$$

где грубые производные $Z^{(i)}$ определяются по формулам (7).

Воспользовавшись предложениями 1 и 2, получаем

$$\|\mathcal{M}_{T_0}(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} = \sup_{s \neq t} \frac{|Z_{s,t}^{(n-2)}|}{|t-s|^{\alpha}} + \sum_{k=3}^n \sup_{s \neq t} |t-s|^{-(k-1)\alpha} \left| Z_{s,t}^{(n-k)} - \sum_{i=1}^{k-2} Z_s^{(n-k+i)} \mathbf{X}_{s,t}^i \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{s \neq t} |t - s|^{-n\alpha} \left| \int_s^t Z_r d\mathbf{X}_r - \sum_{i=0}^{n-2} Z_s^{(i)} \mathbf{X}_{s,t}^{i+1} \right| = \left[Z_{s,t}^{(n-k)} = \sum_{i=1}^{k-1} Z_s^{(n-k+i)} \mathbf{X}_{s,t}^i + R_{s,t}^{Z,k} \right] \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{n-1} \sup_{s \neq t} \frac{|Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^k + R_{s,t}^{Z,k+1}|}{|t - s|^{k\alpha}} + \\
& + \sup_{s \neq t} |t - s|^{-n\alpha} \left| \sum_{i=1}^n \|\mathbf{X}^{n+1-i}\|_{(n+1-i)\alpha} \|R^{Z,i}\|_{i\alpha} |t - s|^{(n+1)\alpha} + Z_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^n \right| \leq CT_0^{\beta-\alpha} < 1,
\end{aligned}$$

где постоянная C может быть выбрана не зависящей от $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}_{T_0}$. Таким образом, существует $T_0 > 0$ такое, что $\mathcal{M}_{T_0}(\mathcal{B}_{T_0}) \subset \mathcal{B}_{T_0}$.

Докажем, что отображение $\mathcal{M}_{T_0}$ является сжимающим в шаре $\mathcal{B}_{T_0}$.

Пусть $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$, $\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \dots, \tilde{Y}^{(n-1)}) \in \mathcal{B}_{T_0}$. Применяя композицию с функцией f , определим соответствующие элементы $(Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(n-1)})$, $(\tilde{Z}, \tilde{Z}^{(1)}, \dots, \tilde{Z}^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T_0], \mathbb{R})$ согласно формулам (7).

Положим

$$(\Delta, \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n-1)}) = (Z - \tilde{Z}, Z^{(1)} - \tilde{Z}^{(1)}, \dots, Z^{(n-1)} - \tilde{Z}^{(n-1)}).$$

Аналогично, воспользовавшись предложением 1, получаем

$$\|\mathcal{M}_{T_0}(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) - \mathcal{M}_{T_0}(\tilde{Y}, \tilde{Y}^{(1)}, \dots, \tilde{Y}^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} \leq \quad (21)$$

$$\leq C(|\Delta_0^{(1)}| + \dots + |\Delta_0^{(n-1)}|) + \|(\Delta, \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} T_0^{\beta-\alpha} = C\|(\Delta, \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} T_0^{\beta-\alpha}.$$

Положим $\tilde{\Delta}_s = G_s H_s$, где

$$G_s = g(Y_s, \tilde{Y}_s), \quad H_s = Y_s - \tilde{Y}_s, \quad g(x, y) = \int_0^1 Df(xt + (1-t)y) dt,$$

и определим грубые производные $G^{(i)}$ согласно формулам (15), грубые производные $H^{(i)}$ согласно формулам (7) и грубые производные $\tilde{\Delta}^{(i)}$ согласно формулам (16).

Как показано в [4, с. 115], имеет место равенство $\Delta_t = \tilde{\Delta}_t$ для любых $t \in [0, T_0]$. Если $X_t = t$, $Y, \tilde{Y} \in C^n([0, T_0], \mathbb{R})$, то $\Delta^{(i)} = \tilde{\Delta}^{(i)}$ в силу единственности производной. Так как коэффициенты многочленов, входящих в формулы (7), (15), (16), не зависят от $\mathbf{Y}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{X}$, то равенство $\Delta^{(i)} = \tilde{\Delta}^{(i)}$ для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$ сохраняется для произвольных $\mathbf{Y}$, $\tilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{B}_{T_0}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^{\beta}([0, T_0], \mathbb{R})$.

Используя предложения 3 и 4, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\|(\Delta, \Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} & \leq C \left(\sum_{i=0}^{n-1} G_0^{(i)} + \|(G, G^{(1)}, \dots, G^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} \right) \|(H, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} \leq \\
& \leq C\|(Y - \tilde{Y}, Y^{(1)} - \tilde{Y}^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)} - \tilde{Y}^{(n-1)})\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}}, \quad (22)
\end{aligned}$$

где постоянная C может быть выбрана не зависящей от $\mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{Y}} \in \mathcal{M}_{T_0}(\mathcal{B}_{T_0})$.

Таким образом, из соотношений (21) и (22) вытекает, что, уменьшив при необходимости значение T_0 , можно добиться того, чтобы отображение $\mathcal{M}_{T_0}$ являлось сжимающим в шаре $\mathcal{B}_{T_0}$.

Так как значение T_0 может быть выбрано независимо от заданного начального условия (20), то существует единственное решение уравнения (18) с начальным условием (20) на всём отрезке $[0, 1]$. Теорема доказана.

Докажем формулу замены переменных в дифференциальном уравнении (18).

Теорема 2. Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})$, $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ – единственное решение уравнения (18) с начальным условием (20). Тогда для любого $g \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ имеет место равенство

$$g(Y_t) - g(Y_s) = \int_s^t Dg(Y_\tau) f(Y_\tau) d\mathbf{X}_\tau, \quad s, t \in [0, T], \quad (23)$$

где грубые производные от $Dg(Y)f(Y)$ определяются по формулам (7).

Доказательство. Пусть $s < t$, возьмём произвольное конечное разбиение $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ отрезка $[s, t]$. Разложим $g(Y_t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$g(Y_t) - g(Y_s) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} D^j g(Y_{t_i}) Y_{t_i, t_{i+1}}^j + \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} g(Y_{t_i} + \theta_i Y_{t_i, t_{i+1}}) Y_{t_i, t_{i+1}}^{n+1} \right), \quad (24)$$

где $\theta_i \in (0, 1)$.

Нетрудно видеть, что справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=0}^{N-1} D^{n+1} g(Y_{t_i} + \theta_i Y_{t_i, t_{i+1}}) Y_{t_i, t_{i+1}}^{n+1} \right| \leq C \|Y\|_\alpha^{n+1} \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{(n+1)\alpha} = O(|\mathcal{P}|^{(n+1)\alpha-1}). \quad (25)$$

Используя предположение 1, получаем соотношение

$$Y_{t_i, t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(Y_\tau) d\mathbf{X}_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} Z_{t_i}^{(k)} \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^{k+1} + O(|t_{i+1} - t_i|^{(n+1)\alpha}), \quad (26)$$

где $Z^{(k)}$ – грубые производные от $Z = f(Y)$, вычисленные по формулам (7).

Таким образом, из соотношений (24)–(26) следует, что

$$g(Y_t) - g(Y_s) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} D^j g(Y_{t_i}) \left(\sum_{k=0}^{n-1} Z_{t_i}^{(k)} \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^{k+1} \right)^j + o(1) \quad \text{при } |\mathcal{P}| \rightarrow 0. \quad (27)$$

Приводя подобные и группируя слагаемые в соотношении (27), получаем

$$\begin{aligned} g(Y_t) - g(Y_s) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^k \sum_{j=1}^n D^j g(Y_{t_i}) P_{k,j}(Z_{t_i}, Z_{t_i}^{(1)}, \dots, Z_{t_i}^{(n-1)}) + o(1) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^k \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{n-1} D^j g(Y_{t_i}) D^l f(Y_{t_i}) Q_{k,j,l}(Y_{t_i}, Y_{t_i}^{(1)}, \dots, Y_{t_i}^{(n-1)}) + o(1) \quad \text{при } |\mathcal{P}| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $P_{k,j}(x_0, \dots, x_{n-1})$, $Q_{k,j,l}(x_0, \dots, x_{n-1})$ – некоторые многочлены, коэффициенты которых не зависят от f , g , $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$.

Пусть $h(Y) = Dg(Y)f(Y)$, обозначим $H_t = h(Y_t)$. Пусть $H^{(j)}$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$, – грубые производные от H , определённые по формулам (7). Если $X_t = t$, $Y \in C^n([0, T], \mathbb{R})$, то

$$g(Y_t) - g(Y_s) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^k H_{t_i}^{(k-1)} + o(1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^1 h(Y_{t_i}) + \sum_{k=2}^n \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^k \sum_{j=1}^{k-1} D^j h(Y_{t_i}) B_{k-1, j}(Y_{t_i}^{(1)}, \dots, Y_{t_i}^{(k-j)}) \right) + o(1) = \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^k \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{n-1} D^j g(Y_{t_i}) D^l f(Y_{t_i}) \tilde{Q}_{k, j, l}(Y_{t_i}, Y_{t_i}^{(1)}, \dots, Y_{t_i}^{(n-1)}) + o(1) \quad \text{при } |\mathcal{P}| \rightarrow 0, \quad (28)
\end{aligned}$$

где $\tilde{Q}(x_0, \dots, x_{n-1})$ – некоторые многочлены, коэффициенты которых не зависят от $f, g, \mathbf{Y}, \mathbf{X}$. В силу единственности производных от $Y \in C^n([0, T], \mathbb{R})$ заключаем, что $Q_{k, j, l} = \tilde{Q}_{k, j, l}$ для любых k, j, l . Так как многочлены $Q_{k, j, l}$ не зависят от $\mathbf{Y}, \mathbf{X}$, то соотношения (28) сохраняются для произвольных $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R}), \mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})$.

Переходя к пределу при $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$ в соотношении

$$g(Y_t) - g(Y_s) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_{t_i, t_{i+1}}^k H_{t_i}^{(k-1)} + o(1),$$

получаем требуемое равенство (23). Теорема доказана.

Наряду с уравнением (18) рассмотрим отвечающее ему ОДУ

$$dZ_t = f(Z_t) dt, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Пусть $S_t, t \in \mathbb{R}$, – поток, соответствующий уравнению (29), т.е. $Z_t = S_t Z_0$.

Теорема 3. Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n], \alpha < \beta, \mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})$. Если $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ единственное решение $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$ уравнения (18) с начальным условием (20) может быть найдено по формулам

$$Y_t = S_{X_t - X_0} x, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad t \in [0, T], \quad (30)$$

где $(D_f h)(z) = f(z) Dh(z)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$dU_t = d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0, T], \quad (31)$$

с начальным условием $U_0 = X_0, U_0^{(1)} = 1, U_0^{(2)} = \dots = U_0^{(n-1)} = 0$. Очевидно, что единственным решением уравнения (31) является элемент $\mathbf{U}_t = (X_t, 1, 0, \dots, 0)$.

Применяя теорему 2 к $g(U_t)$, где $g(y) = S_y(S_{X_0})^{-1}x, U_t = X_t$, получаем

$$g(U_t) - g(U_s) = \int_s^t f(g(U_\tau)) d\mathbf{X}_\tau.$$

Таким образом, элемент $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$ является единственным решением уравнения (18) с начальным условием (20), где $Y_t = g(X_t), Y_t^{(1)} = f(Y_t), Y_t^{(2)} = Df(Y_t)f(Y_t), Y_t^{(3)} = D^2f(Y_t)(f(Y_t))^2 + (Df(Y_t))^2 f(Y_t)$ и так далее. Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 3 выполняется для произвольной функции $f \in C^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: решение $\mathbf{Y}$ уравнения (18) с начальным условием (20) существует, единственно и находится по формулам (30) на некотором достаточно малом отрезке $[0, a] \subset [0, T], a > 0$.

Стохастические дифференциальные уравнения, управляемые грубыми траекториями с произвольным показателем Гёльдера. Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ задан $\mathcal{F}_t$ -согласованный случайный процесс $X_t, t \in [0, T]$, такой, что почти все траектории процесса X_t принадлежат пространству

$C^\beta([0, T], \mathbb{R})$, $\beta \in (1/(n+1), 1/n]$. Определим процесс $\mathbf{X}_\cdot = (1, \mathbf{X}_{0,\cdot}^1, \dots, \mathbf{X}_{0,\cdot}^n)$ как случайную величину, принимающую значения в $\mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})$ п.н. где $\mathbf{X}_{s,t}^i = (X_{s,t})^i / (i!)$. Выберем и зафиксируем произвольное $\alpha \in (0, \beta)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dY_t = f(Y_t) d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0, T]. \quad (32)$$

Определение 3. Пусть $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина. Решением уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$ будем называть $\mathcal{F}$ -измеримую случайную величину $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$ со значениями в $D_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$ п.н. такую, что для почти всех $\omega \in \Omega$ элемент $\mathbf{Y}(\omega)$ является решением детерминированного уравнения $dY_t(\omega) = f(Y_t(\omega)) d\mathbf{X}_t(\omega)$ в смысле определения 1. Решение уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$ назовём *единственным*, если для любых двух решений $\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}$ уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}}) = 1$.

Теорема 4. Пусть $\alpha, \beta \in (1/(n+1), 1/n]$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})$ п.н. Если $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то для любой $\mathcal{F}_0$ -измеримой случайной величины $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ существует единственное решение $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)})$ уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$, и п.н. выполняются равенства

$$Y_t = S_{X_{0,t}} \xi, \quad Y_t^{(i)} = D_f^{i-1} f(Y_t), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad t \in [0, T], \quad (33)$$

где S_t , $t \in \mathbb{R}$, – поток, соответствующий уравнению (29).

Доказательство. Пусть $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in \mathcal{C}_g^\beta([0, T], \mathbb{R})\}$. Возьмём произвольное $\omega \in \Omega_0$. Из теоремы 1 вытекает, что существует единственный элемент $\mathbf{Y}(\omega) \in D_{\mathbf{X}}^\alpha([0, T], \mathbb{R})$, который является решением детерминированного уравнения $dY_t = f(Y_t) d\mathbf{X}_t(\omega)$, $t \in [0, T]$, с начальным условием $Y_0 = \xi(\omega)$. Согласно теореме 3 выполняются равенства

$$Y_t(\omega) = S_{X_{0,t}(\omega)} \xi(\omega), \quad Y_t^{(i)}(\omega) = D_f^{i-1} f(Y_t(\omega)), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad t \in [0, T]. \quad (34)$$

Для каждого $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ положим $\mathbf{Y}(\omega) = 0$. Из соотношений (34) вытекает, что $\mathbf{Y}_t$ является $\mathcal{F}_t$ -согласованным случайным процессом. Так как $P(\Omega_0) = 1$, то процесс $\mathbf{Y}$ является решением уравнения (32) с начальным условием $Y_0 = \xi$. В силу теоремы 1 построенное решение является единственным. Справедливость соотношений (33) вытекает из равенств (34). Теорема доказана.

Замечание 2. В частности, теорема 3 остаётся в силе, если выбрать $X_t = B_t^H$, где B_t^H – дробное броуновское движение с показателем Хёрста $H \in (\beta, 1)$.

Замечание 3. Дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (18), рассматривалось в работах [23–25], в которых под его решением понимался предел последовательности решений уравнений со сглаженным возмущением X_t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lyons T. Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14. № 2. P. 215–310.
2. Gubinelli M. Controlling rough paths // J. of Funct. Anal. 2004. V. 216. № 1. P. 86–140.
3. Harang F.A. On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance: dissertation ... master of mathematics. Oslo, 2015.
4. Friz P., Hairer M. A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham, 2014.
5. Coutin L., Qian Z. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions // Probab. Theory Related Fields. 2002. V. 122. № 1. P. 108–140.
6. Baudoin F., Coutin L. Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions // Stoch. Proc. and their Appl. 2007. V. 117. P. 550–574.
7. Neuenkirch A., Nourdin I., Robler A., Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations // Ann. de Inst. Henri Poincaré (B) Probab. and Stat. 2009. V. 45. № 1. P. 157–174.

8. Васьюковский М.М., Качан И.В. Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 4. С. 398–405.
9. Vaskouski M., Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than $1/3$ // Stoch. Anal. and Appl. 2018. V. 36. № 6. P. 909–931.
10. Васьюковский М.М. Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста, большими $1/3$ // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 36–50.
11. Леваков А.А., Васьюковский М.М. Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск, 2019.
12. Guerra J., Nualart D. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stoch. Anal. and Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 1053–1075.
13. Mishura Y.S., Shevchenko G.M. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$ // Comm. in Stat. Theory and Methods. 2011. V. 40. № 19–20. P. 3492–3508.
14. Леваков А.А., Васьюковский М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 187–200.
15. Леваков А.А., Васьюковский М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1060–1076.
16. Васьюковский М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.
17. Леваков А.А., Васьюковский М.М. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 997–1003.
18. Леваков А.А., Васьюковский М.М. Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1011–1019.
19. Васьюковский М.М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 160–173.
20. Васьюковский М.М., Качан И.В. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 2. С. 135–151.
21. Comtet L. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht, 1974.
22. Mishkov R.L. Generalization of the formula of Faa Di Bruno for a composite function with a vector argument // Int. J. Math. & Math. Sci. 2000. V. 24. № 7. P. 481–491.
23. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.
24. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equation // Czech. Math. J. 1958. V. 8. № 1. P. 360–388.
25. Yablonski A. Differential equations with generalized coefficients // Nonlin. Anal. 2005. V. 63. P. 171–197.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.2+517.984.46

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ДЛЯ СТРУНЫ С СИНГУЛЯРНЫМ ВЕСОМ

© 2021 г. А. С. Иванов

Рассматривается линейный дифференциальный пучок $A(\lambda) \equiv L - \lambda V$, где $L \equiv -y'' + q(x)y$ – оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом $q(x)$, V – оператор умножения на сингулярный вес $\rho(x)$, $x \in (0, \pi)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр. Предполагается, что потенциал q и вес ρ принадлежат пространству Соболева $W_2^{-1}[0, \pi]$ с отрицательным индексом гладкости, причём q – вещественно-, а ρ – комплекснозначные функции. Доказано, что для собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}$, пучка $A(\lambda)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка $|\lambda_n| \geq Cn$, где C – постоянная, не зависящая от номера n .

DOI: 10.31857/S0374064121100034

Введение. В статье изучается дифференциальное уравнение

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda \rho(x)y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

и ассоциированный с ним линейный операторный пучок $A(\lambda) := L - \lambda V$, где L – оператор Штурма–Лиувилля, порождённый дифференциальным выражением $l(y) := -y'' + q(x)y$ и краевыми условиями типа Штурма, V – оператор умножения на функцию ρ , а λ – спектральный параметр. Здесь функции q и ρ являются распределениями первого порядка сингулярности (т.е. обобщёнными производными функций из класса $L_2[0, \pi]$). Уравнение (1) представляет собой математическую модель для описания малых поперечных колебаний нагруженной струны. Функция $y(x)$ показывает отклонение струны от положения равновесия, $q(x)$ – функция, задающая плотность внешних сил, действующих на струну в точке x , а $\rho(x)$ – функция плотности струны.

Изучение задачи о колебаниях нагруженной струны имеет большую историю. В частности, связанные с этой задачей вопросы изучались в работах [1–7]. Данная статья является продолжением работы [8], по которой можно более подробно ознакомиться с историей вопроса и актуальностью темы. Один из результатов статьи [8] состоял в доказательстве для операторного пучка $A(\lambda)$ оценок его собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{N}$, вида $|\lambda_n| \geq Cn/\ln n$. Целью настоящей работы является уточнение этих оценок. Именно, в теореме 2 доказано, что $|\lambda_n| \geq Cn$, здесь и выше C – постоянная, не зависящая от n .

1. Предварительные сведения. Прежде чем переходить к изложению результатов работы, дадим точное определение операторного пучка $A(\lambda) := L - \lambda V$. Подробное описание этого пучка и его свойств приведено в работе [8]. Для замкнутости изложения в данном пункте повторим, следуя [9], определения нужных в дальнейшем функциональных пространств и действующих в них операторов, а также отметим необходимые их свойства (подробности можно найти в работе [9]).

1.1. Определения пространств. Через $\mathcal{H}$ будем обозначать пространство $L_2[0, \pi]$, через $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}$, а через $\|\cdot\|$ – L_2 -норму.

Далее, $W_2^1[0, \pi]$ – классическое пространство Соболева, $W_2^1[0, \pi] = \{f \in AC[0, \pi] : f' \in \mathcal{H}\}$, с нормой $\|f\|_1 := (\|f\|^2 + \|f'\|^2)^{1/2}$ и соответствующим скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_1$. Введём подпространства пространства $W_2^1[0, \pi]$, отвечающие трём различным типам краевых условий: Дирихле, Дирихле–Неймана и Неймана–Дирихле, именно, положим

$$W_{2,D}^1[0, \pi] = \{f \in AC[0, \pi] : f' \in \mathcal{H}, \quad f(0) = f(\pi) = 0\},$$

$$W_{2,DN}^1[0, \pi] = \{f \in AC[0, \pi] : f' \in \mathcal{H}, \quad f(0) = 0\},$$

$$W_{2,ND}^1[0, \pi] = \{f \in AC[0, \pi] : f' \in \mathcal{H}, \quad f(\pi) = 0\}.$$

Для четвёртого типа условий – условий Неймана – через $W_{2,N}^1[0, \pi]$ обозначим всё пространство $W_2^1[0, \pi]$.

Поясним, что мы понимаем под соответствием описанных выше пространств и краевых условий. Зададим оператор T , действующий в пространстве $\mathcal{H}$, любым из следующих способов. Положим

$$Ty = -y'', \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0, \pi] : y(0) = y(\pi) = 0\}, \quad (2)$$

$$Ty = -y'', \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0, \pi] : y(0) = y'(\pi) = 0\}, \quad (3)$$

$$Ty = -y'', \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0, \pi] : y'(0) = y(\pi) = 0\}, \quad (4)$$

$$Ty = -y'' + y, \quad \mathfrak{D}(T) = \{y \in W_2^2[0, \pi] : y'(0) = y'(\pi) = 0\}. \quad (5)$$

В каждом из этих случаев оператор T самосопряжён и равномерно положителен, а значит, корректно определён его квадратный корень $T^{1/2}$.

Гильбертово пространство с нормой графика $(\|T^{1/2}x\|^2 + \|x\|^2)^{1/2}$ обозначим через $\mathcal{H}_1$. Несложно видеть, что пространства $\mathcal{H}_1$ в случаях (2)–(5) совпадают с пространствами $W_{2,D}^1[0, \pi]$, $W_{2,DN}^1[0, \pi]$, $W_{2,ND}^1[0, \pi]$ и $W_{2,N}^1[0, \pi]$ соответственно.

Введём пространство $W_2^{-1}[0, \pi]$ как пространство распределений, дуальное к пространству Соболева $W_2^1[0, \pi]$ относительно действия $(\cdot, \cdot)$. Любой линейный непрерывный функционал F на пространстве $W_2^1[0, \pi]$ допускает представление

$$F(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = f_0\varphi(0) + f_\pi\varphi(\pi) - \int_0^\pi \varphi'(x)w(x)dx, \quad f \in W_2^{-1}[0, \pi], \quad \varphi \in W_2^1[0, \pi], \quad w \in \mathcal{H}.$$

Такое представление неоднозначно, поскольку тройки (w, f_0, f_π) и $(w + c, f_0 - c, f_\pi + c)$ порождают одинаковые функционалы. Функцию w , определённую таким образом с точностью до константы, будем называть *обобщённой первообразной* функции $f \in W_2^{-1}$.

Будем также рассматривать пространства распределений над подпространствами $\mathcal{H}_1$ пространства $W_2^1[0, \pi]$. Их мы введём аналогично – как дуальные к $\mathcal{H}_1$ относительно действия $(\cdot, \cdot)$ и будем обозначать через $\mathcal{H}_{-1}$.

1.2. Определения операторов. Перейдём к определению операторов. Опишем сначала оператор L . Пусть $u \in \mathcal{H}$ – обобщённая первообразная потенциала q . Всюду далее считаем потенциал q вещественным. Отметим, что оператор L может быть корректно определён и для комплексного потенциала, однако это требует иной техники. Строго говоря (см. [10]),

$$Ly = l(y) = -(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x), \quad y^{[1]}(x) := y'(x) - u(x)y(x),$$

$$\mathfrak{D}(L) = \{y, y^{[1]} \in AC[0, \pi] : l(y) \in \mathcal{H}, \quad y^{[1]}(0) + h_0y(0) = y^{[1]}(\pi) + h_\pi y(\pi) = 0\}. \quad (6)$$

Условимся, что равенство $h_0 = \infty$ (или $h_\pi = \infty$) означает, что первое (или второе) краевое условие принимает вид $y(0) = 0$ (соответственно, $y(\pi) = 0$).

В работе [10] получено представление для квадратичной формы (Ly, y) и доказана её замкнутость. Тогда, согласно второй теореме о представлении (см., например, [11, гл. VI, теорема 2.23]), форма $(Ly, y) + c$ для любого достаточно большого $c > 0$ порождает в $\mathcal{H}$ самосопряжённый оператор (совпадающий, естественно, с оператором $L + c$), причём $\mathfrak{D}((L + c)^{1/2}) = \mathfrak{D}((Ly, y)) = \mathcal{H}_1$, а $(L + c)^{1/2}$ является изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}$. Переходя к дуальным пространствам, получаем, что оператор $(L + c)^{1/2}$ является также изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{-1}$, а $L + c$ – изоморфизмом между пространствами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_{-1}$.

Обратимся к оператору V . Определим его действие следующим правилом:

$$\langle Vy, \varphi \rangle = \langle \rho, y\varphi \rangle = \rho_0y(0)\varphi(0) + \rho_\pi y(\pi)\varphi(\pi) - \int_0^\pi v(x)(y(x)\varphi(x))'dx. \quad (7)$$

Таким образом, оператор $V : W_2^1 \rightarrow W_2^{-1}$ корректно определён. Пользуясь неравенством $\|\cdot\|_C \leq C_{\text{abs}} \|\cdot\|_1$, проведём оценку

$$\begin{aligned} |\langle Vy, \varphi \rangle| &\leq (|\rho_0| + |\rho_\pi|) \|y\|_C \|\varphi\|_C + \|v\|_{L_2} (\|y\|_C \|\varphi'\|_{L_2} + \|y'\|_{L_2} \|\varphi\|_C) \leq \\ &\leq C_{\text{abs}} (|\rho_0| + |\rho_\pi| + \|v\|_{L_2}) \|y\|_1 \|\varphi\|_1 \leq C_{\text{abs}} \|\rho\|_{-1} \|y\|_1 \|\varphi\|_1, \end{aligned}$$

из которой следует ограниченность оператора $V : W_2^1 \rightarrow W_2^{-1}$.

Ограничив оператор $Vy = \rho y$ на подпространство $\mathcal{H}_1 \subseteq W_2^1$ (это эквивалентно проектированию векторов Vy на $\mathcal{H}_{-1}$), получим ограниченный оператор из W_2^1 в $\mathcal{H}_{-1}$. Этот оператор в свою очередь можно ограничить на подпространство $\mathcal{H}_1 \ni y$ и получить ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

Итак, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ нами определён ограниченный оператор $A(\lambda) = L - \lambda V$, действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Отметим, что для каждого фиксированного λ квадратичная форма оператора $A(\lambda)$, заданная на пространстве H_1 , имеет вид

$$\langle Ay, \bar{y} \rangle = \|y\|^2 - (h_0 + \lambda \rho_0) |y(0)|^2 + (h_\pi - \lambda \rho_\pi) |y(\pi)|^2 + \int_0^\pi (\lambda v(x) - u(x)) (y(x) \bar{y}(x))' dx$$

(с описанными выше корректировками в случае $h_0 = \infty$ или $h_\pi = \infty$). Согласно [10] эта форма определяет замкнутый оператор

$$Ay = -(y' + (\lambda v - u)y)' + (\lambda v - u)y'$$

в пространстве $\mathcal{H}$ с областью определения

$$\mathfrak{D}(A) = \{y, y' + (\lambda v - u)y \in AC : Ay \in \mathcal{H},$$

$$(y' + (\lambda v - u)y + (h_0 + \lambda \rho_0)y)(0) = (y' + (\lambda v - u)y + (h_\pi - \lambda \rho_\pi)y)(\pi) = 0\}. \quad (8)$$

Таким образом, пучок $A(\lambda) = L - \lambda V$ можно рассматривать и как семейство замкнутых плотно определённых неограниченных операторов в $\mathcal{H}$. При этом, однако, область определения $\mathfrak{D}(A)$ может изменяться в зависимости от значения параметра λ .

1.3. Спектральные свойства операторов. Спектр оператора L , действующего в пространстве $\mathcal{H}$, описан в работе [10]. Он дискретен и имеет единственную точку накопления $+\infty$. Далее будем предполагать, что $0 \notin \sigma(L)$. Все собственные значения μ_n вещественны, их геометрическая и алгебраическая кратности совпадают друг с другом и равны единице.

Обозначим через $\{\varphi_n\}_1^\infty$ систему соответствующих собственных функций оператора L , нормированных условием $\|\varphi_n\| = 1$. Из [10, теорема 2.9] вытекает, что система $\{\varphi_n\}_1^\infty$ является ортонормированным базисом в пространстве $\mathcal{H}$.

Спектральные свойства оператора V следуют из его компактности. Они приведены и доказаны в работе [9].

2. Вспомогательные утверждения. Нам понадобится хорошо известная лемма Гронуолла, формулируемая в классическом случае для класса непрерывных функций. В работе [1] эта лемма обобщена на существенно более широкий класс функций, чем непрерывные.

Лемма Гронуолла. Пусть (a, b) – интервал вещественной прямой, а ω – положительная борелевская мера на (a, b) . Если $c \in (a, b)$ и вещественнозначная функция $v \in L_{1, \text{loc}}((a, b); \omega)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq v(x) \leq K + \int_c^x v(\xi) d\omega(\xi), \quad x \in [c, b),$$

с некоторой вещественной постоянной K , то для функции v справедлива оценка

$$v(x) \leq K e^{\int_c^x \omega(\xi)}.$$

Далее эта лемма применяется для функций, суммируемых по Лебегу на конечном отрезке.

Напомним некоторые факты из теории целых функций. Подробно они изложены, например, в монографии [12]. Пусть $f(z)$ – целая функция. Обозначим $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Если существует такое положительное число k , что

$$M_f(r) < e^{r^k},$$

то такую функцию называют функцией *конечного порядка*, а точную нижнюю грань таких k – *порядком* целой функции $f(z)$. *Типом* целой функции $f(z)$ порядка ρ называется точная нижняя грань чисел A , для которых выполнено неравенство

$$M_f(r) < e^{Ar^\rho}.$$

Нам понадобится следующее утверждение (см. [13, гл. I, теорема 2.3]), дающее оценку роста нулей целой функции в терминах её порядка и типа.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, и конечного типа σ , имеющая бесконечно много нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, причём $\lambda_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n|\lambda_n|^{-\rho}) \leq \sigma e \rho.$$

Целые функции, имеющие порядок $\rho = 1$ и конечный тип, принято называть *целыми функциями экспоненциального типа*. Для данного класса функций неравенство теоремы 1 принимает вид

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n|\lambda_n|^{-1}) \leq \sigma e,$$

откуда следует оценка $|\lambda_n| \geq Cn$ роста нулей целой функции экспоненциального типа, в которой C – константа, не зависящая от номера n .

3. Оценки собственных значений. Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. Пусть функции $q(x)$ и $\rho(x)$ принадлежат пространству H_{-1} , а операторы L и V определены соотношениями (6) и (7) соответственно. Тогда собственные значения операторного пучка $A(\lambda)$ удовлетворяют при всех $n \in \mathbb{N}$ оценке $|\lambda_n| \geq Cn$, где C – постоянная, не зависящая от номера n .

Доказательство. В исходном дифференциальном уравнении $-y'' + q(x)y = \lambda\rho(x)y$ произведём замену переменных

$$y_1 = \lambda y, \quad y_2 = y' + \lambda v y - u y. \quad (9)$$

Вычислим производные введённых функций:

$$y_1' = \lambda y' = \lambda y_2 - \lambda^2 v y + \lambda u y = \lambda y_2 - \lambda v y_1 + u y_1 = \lambda(y_2 - v y_1) + u y_1,$$

$$y_2' = y'' + \lambda \rho y + \lambda v y' - q y - u y'.$$

В силу исходного уравнения имеем

$$\begin{aligned} y_2' &= (\lambda v - u)y' = (\lambda v - u)(y_2 - \lambda v y + u y) = \lambda v y_2 - \lambda^2 v^2 y + \lambda v u y - u y_2 + \lambda v u y - u^2 y = \\ &= \lambda v y_2 - \lambda v^2 y_1 + 2v u y_1 - u y_2 - \lambda^{-1} u^2 y_1 = \lambda(v y_2 - v^2 y_1) + (2v u y_1 - u y_2) - \lambda^{-1} u^2 y_1. \end{aligned}$$

Отметим, что вследствие (8) выполняется включение $y_1, y_2 \in AC[0, \pi]$.

В результате получаем систему дифференциальных уравнений

$$Y' = \lambda T(x)Y + Q(x)Y + \lambda^{-1}S(x)Y, \quad (10)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -v & 1 \\ -v^2 & v \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 2vu & -u \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что поскольку обобщённые первообразные u , v принадлежат пространству $\mathcal{H}$, каждая из матриц T , Q , S является суммируемой на отрезке $[0, \pi]$.

Далее для системы (10) будем рассматривать задачу Коши с некоторым начальным условием

$$Y(0) = Y_0. \quad (11)$$

Задача (10), (11), вообще говоря, не эквивалентна в силу произвольности выбора вектора Y_0 исходной дифференциальной задаче, но эквивалентна интегральному уравнению

$$Y(x) = Y_0 + \int_0^x (\lambda T(\xi) + Q(\xi) + \lambda^{-1} S(\xi)) Y(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Через $R(\xi)$ обозначим 2×2 -матричнозначную функцию $\lambda T(\xi) + Q(\xi) + \lambda^{-1} S(\xi)$; пусть $R(\xi) = (r_{ij}(\xi))_{i,j=1}^2$. Пусть также $Y_0 = \text{col}(y_{01}, y_{02})$.

Нам необходимо оценить левую часть уравнения (12). Рассмотрим отдельно первую компоненту функционального вектора $Y(x)$, т.е. функцию, определяемую равенством

$$y_1(x) = y_{01} + \int_0^x (r_{1,1}(\xi)y_1(\xi) + r_{1,2}(\xi)y_2(\xi)) d\xi. \quad (13)$$

Возьмём модуль от обеих частей равенства (13) и воспользуемся свойствами интеграла и неравенством треугольника:

$$|y_1(x)| \leq |y_{01}| + \left| \int_0^x (r_{11}(\xi)y_1(\xi) + r_{12}(\xi)y_2(\xi)) d\xi \right| \leq |y_{01}| + \int_0^x (|r_{11}(\xi)||y_1(\xi)| + |r_{12}(\xi)||y_2(\xi)|) d\xi.$$

Аналогично для второй компоненты $Y(x)$ получаем

$$|y_2(x)| \leq |y_{02}| + \int_0^x (|r_{21}(\xi)||y_1(\xi)| + |r_{22}(\xi)||y_2(\xi)|) d\xi.$$

Сложив два последних неравенства, будем иметь

$$|y_1(x)| + |y_2(x)| \leq |y_{01}| + |y_{02}| + \int_0^x (|y_1(\xi)|(|r_{11}(\xi)| + |r_{21}(\xi)|) + |y_2(\xi)|(|r_{12}(\xi)| + |r_{22}(\xi)|)) d\xi.$$

Ослабим это неравенство, заменяя в нём каждую из сумм $|r_{i1}(\xi)| + |r_{i2}(\xi)|$, $i = 1, 2$, не меньшей величиной $\tilde{R}(\xi) := \sum_{i,j=1}^2 |r_{ij}(\xi)|$ — l_1 -нормой матрицы $R(\xi)$; придём к неравенству

$$|y_1(x)| + |y_2(x)| \leq |y_{01}| + |y_{02}| + \int_0^x (|y_1(\xi)| + |y_2(\xi)|) \left(\sum_{i,j=1}^2 |r_{ij}(\xi)| \right) d\xi. \quad (14)$$

Обозначим $\tilde{Y}(x) := |y_1(x)| + |y_2(x)|$, $\tilde{Y}_0 := |y_{01}| + |y_{02}|$, тогда с учётом введённого выше обозначения $\tilde{R}(\xi)$ неравенство (14) примет вид

$$\tilde{Y}(x) \leq \tilde{Y}_0 + \int_0^x \tilde{Y}(\xi) \tilde{R}(\xi) d\xi.$$

Так как каждая из матричнозначных функций T , Q и S является суммируемой на $[0, \pi]$, матричнозначная функция $\tilde{R}$ также суммируема на $[0, \pi]$. Поэтому последнее неравенство можно записать в виде

$$\tilde{Y}(x) \leq \tilde{Y}_0 + \int_0^x \tilde{Y}(\xi) d\omega(\xi).$$

Компоненты векторнозначной функции Y принадлежат пространству $AC[0, \pi]$ и неотрицательны. Таким образом, функция $\tilde{Y}$ удовлетворяет условиям леммы Гронуолла. Следовательно,

$$\tilde{Y}(x) \leq \tilde{Y}_0 e^{\int_0^x \tilde{R}(\xi) d\xi}. \quad (15)$$

Воспользуемся определением матрицы R и оценим в (15) каждое из слагаемых в показателе экспоненты, используя суммируемость функциональных матриц T , Q и S ; имеем

$$\tilde{Y}(x) \leq \tilde{Y}_0 \exp \left\{ |\lambda| \int_0^x \sum_{i,j=1}^2 |t_{i,j}(\xi)| d\xi + \int_0^x \sum_{i,j=1}^2 |q_{i,j}(\xi)| d\xi + \frac{1}{|\lambda|} \int_0^x \sum_{i,j=1}^2 |s_{i,j}(\xi)| d\xi \right\} \leq e^{C_1|\lambda|+C_2},$$

где C_1 , C_2 – функции переменной x , не зависящие от $|\lambda|$. Так как $\tilde{Y}(x) = |y_1(x)| + |y_2(x)| \leq e^{C_1|\lambda|+C_2}$, то и каждая компонента вектора $Y(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|y_i(x)| \leq e^{C_1|\lambda|+C_2}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Поставим теперь для системы (10) краевую задачу. Граничные условия при этом выберем таким образом, чтобы при подстановке в эту систему y_1 и y_2 в соответствии с заменой (9) получить в точности равенства, описывающие область определения оператора A согласно (8):

$$\lambda^{-1}(h_0 + \lambda\rho_0)y_1(0) + y_2(0) = 0, \quad \lambda^{-1}(h_\pi + \lambda\rho_\pi)y_1(\pi) + y_2(\pi) = 0. \quad (17)$$

Для краевой задачи (10), (17) составим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$. Пусть

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

– фундаментальная система решений линейной системы (10). Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(h_0 + \lambda\rho_0)\phi_1(0) + \phi_2(0) & \lambda(h_0 + \lambda\rho_0)\psi_1(0) + \psi_2(0) \\ \lambda(h_\pi + \lambda\rho_\pi)\phi_1(\pi) + \phi_2(\pi) & \lambda(h_\pi + \lambda\rho_\pi)\psi_1(\pi) + \psi_2(\pi) \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Раскрывая определитель в (18), видим, что каждое слагаемое состоит из произведения $|\phi_i(x)|$, $|\psi_j(x)|$, $i, j = 1, 2$, в точках $x = 0$ или $x = \pi$, и сомножителей, содержащих $|\lambda|$ в степени не выше 2, поэтому вследствие оценки (16) порядок по $|\lambda|$ каждого слагаемого характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ равняется в точности 1. Тогда и сам характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ – целая функция комплексного переменного λ порядка $\rho = 1$ и конечного типа.

Согласно утверждению теоремы 1 нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ удовлетворяют неравенству $\lambda_n \geq Cn$, где C – константа, не зависящая от номера n .

Благодаря выбору граничных условий, характеристический определитель краевой задачи (10), (17) в точности совпадает с характеристическим определителем оператора $A(\lambda)$. Из этого следует, что собственные значения пучка $A(\lambda)$ совпадают с корнями характеристического определителя (18), что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в работе [3] построена последовательность весов $\rho_n(x)$, для которых при тривиальном потенциале m -е собственное значение задачи мажорируется величиной $Cm \ln m$, где C – постоянная, не зависящая от номера m . Однако построение предельного веса из

пространства W_2^{-1} , для которого полученная в настоящей работе оценка достигается, остаётся нерешённой задачей.

Автор выражает благодарность проф. И.В. Садовничей и проф. А.М. Савчуку за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eckhardt J., Teschl G.* Sturm–Liouville operators with measure-valued coefficients // *J. Anal. Math.* 2013. V. 120. № 1. P. 151–224.
2. *Владимиров А.А., Шейнак И.А.* Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом // *Мат. заметки.* 2010. Т. 88. № 5. С. 662–672.
3. *Владимиров А.А.* Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса // *Дальневост. мат. журн.* 2015. Т. 15. № 2. С. 156–165.
4. *Садовничий В.А., Подольский В.Е.* Следы операторов // *Успехи мат. наук.* 2006. Т. 61. Вып. 5 (371). С. 89–156.
5. *Constantin A., Gerdjikov V.S., Ivanov R.I.* Inverse scattering transform for the Camassa–Holm equation // *Inverse Problems.* 2006. V. 22. P. 2197–2207.
6. *Eckhardt J., Kostenko A.* An isospectral problem for global conservative multi-peakon solutions of the Camassa–Holm equation // *Comm. in Math. Phys.* 2014. V. 329. № 3. P. 893–918.
7. *Назаров А.И.* Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2 -норме относительно самоподобной меры // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* 2004. Т. 311. С. 190–213.
8. *Иванов А.С., Савчук А.М.* След порядка (-1) для струны с сингулярным весом // *Мат. заметки.* 2017. Т. 102. № 2. С. 197–215.
9. *Иванов А.С.* Следы высших отрицательных порядков для струны с сингулярным весом // *Дифференц. уравнения.* 2018. Т. 54. № 10. С. 1338–1348.
10. *Савчук А.М., Шкалик А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 2003. Т. 64. С. 159–212.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
12. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.
13. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 13.04.2021 г.
После доработки 13.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.912

К ЗАДАЧЕ О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В СИСТЕМАХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. В. В. Козлов

Обсуждаются условия разделения переменных в автономных системах дифференциальных уравнений общего вида. Подход основан на идее Лиувилля о включении такой системы в гамильтонову систему в фазовом пространстве удвоенной размерности. Для разделения переменных используются координаты Штекеля и введенные Якоби эллиптические координаты.

DOI: 10.31857/S0374064121100046

1. Уравнения Лиувилля. Пусть v – гладкое векторное поле на n -мерном многообразии M , порождающее автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x). \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ обозначает набор локальных координат на M . Пусть T^*M – пространство кокасательного расслоения M и $y = (y_1, \dots, y_n)$ – декартовы координаты в векторном пространстве T_x^*M .

На T^*M инвариантным образом определена функция

$$H(x, y) = (y, v(x)) = \sum y_i v_i(x). \quad (1.2)$$

Скобки $(,)$ обозначают спаривание: значение ковектора на векторе. С другой стороны, на T^*M имеется естественная (каноническая) симплектическая структура – невырожденная замкнутая 2-форма

$$d(y, x) = \sum dy_i \wedge dx_i,$$

которая позволяет поставить в соответствие функции (1.2) (как гамильтониану) систему дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = v(x), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^* y. \quad (1.3)$$

Первая группа уравнений совпадает с исходной системой дифференциальных уравнений (1.1), а вторая – это сопряжённая система уравнений в вариациях для системы (1.1).

Эти наблюдения, восходящие к Лиувиллю, позволяют свести исследование системы (1.1) к задаче о гамильтоновой системе (1.3) с линейным по импульсам гамильтонианом. С гамильтонианом (1.2) полезно связать уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}, v(x)\right) = 0. \quad (1.4)$$

В гамильтоновом формализме S имеет смысл действия по Гамильтону, а для системы (1.1) – это её первый интеграл.

Напомним, что *полным* решением уравнения (1.4) называется функция $S(t, x, \alpha)$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор параметров), удовлетворяющая уравнению (1.4) при каждом фиксированном α и условию невырожденности

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_j} \right] \neq 0. \quad (1.5)$$

Так как поле v не зависит от времени, то можно положить

$$S = -h(\alpha)t + W(x, \alpha),$$

тогда, как легко видеть, функция W подчиняется уравнению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}, v(x) \right) = h \quad (1.6)$$

и удовлетворяет условию (1.5) (с заменой в нём S на W).

По теореме Якоби, если известно полное решение уравнения (1.4), общее решение соответствующей гамильтоновой системы (1.3) находится из соотношений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Возможность нахождения переменных $x_1, \dots, x_n$ как функций времени t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i ($1 \leq i \leq n$) гарантирует теорема о неявных функциях с учётом условия (1.5). Решения сопряжённой линейной системы в вариациях находятся по формулам

$$y_j = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

в которые вместо x следует подставить найденные решения системы (1.1).

Будем говорить, что переменные $x_1, \dots, x_n$ в системе обыкновенных дифференциальных уравнений *разделяются*, если полное решение уравнения (1.6) имеет вид

$$W(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n W_i(x_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Это общее определение является ключевым для дальнейшего анализа. В пп. 2 и 3 будут указаны содержательные примеры нелинейных систем, решаемых методом разделения переменных.

Однако уже при $n = 2$ имеются системы дифференциальных уравнений, которые принято относить к системам с разделяющимися переменными и которые не подпадают под наше рассмотрение. Речь идёт о системах следующего вида:

$$\dot{x}_1 = v_1(x_2), \quad \dot{x}_2 = v_2(x_1). \quad (1.7)$$

Чтобы устранить это противоречие, условимся не различать системы, правые части которых отличаются множителем в виде всюду положительной (или отрицательной) гладкой функции. Такие системы имеют одни и те же фазовые траектории и интегрируются (или не интегрируются) в квадратурах одновременно. Так как рассматриваются автономные системы дифференциальных уравнений, то задача отыскания их траекторий (а не решений) представляется даже более естественной. Если разделить правые части (1.7) на произведение $v_1 v_2$ (в области, где система (1.7) не имеет особых точек), то получим систему с разделяющимися переменными в смысле нашего общего определения.

В заключение этого пункта приведём одно соотношение, важное для дальнейшего анализа. Пусть

$$\Phi_1 = (y, w_1(x)) \quad \text{и} \quad \Phi_2 = (y, w_2(x))$$

– две линейные по импульсам функции на T^*M , w_1 и w_2 – гладкие векторные поля на M . Тогда скобка Пуассона $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ равна

$$(y, [w_1, w_2]),$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор векторных полей. Следовательно, функции Φ_1 и Φ_2 находятся в инволюции тогда и только тогда, когда поля w_1 и w_2 коммутируют между собой.

Пусть функции

$$F_1 = H = (y, v), \quad F_2 = (y, w_2), \quad \dots, \quad F_n = (y, w_n) \quad (1.8)$$

находятся попарно в инволюции друг с другом. В частности, все они – интегралы гамильтоновой системы (1.3). Пусть, кроме того, векторные поля $w_1 = v, w_2, \dots, w_n$ линейно независимы в каждой точке M и нестеснены на M . Тогда каждая связная компонента многообразия M будет цилиндром (диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$, $\mathbb{T}^m$ – m -мерный тор) и на этом цилиндре можно ввести k линейных координат $\psi_1, \dots, \psi_k$ и $n - k$ угловых координат $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi$ так, что в этих координатах система (1.1) принимает вид

$$\dot{\psi}_i = c_i, \quad \dot{\varphi}_j = \omega_j; \quad c, \omega = \text{const}. \quad (1.9)$$

Сформулированное утверждение – глобальный вариант теоремы о выпрямлении траекторий (см., например, [1, гл. II, § 4]). В компактном случае (т.е. когда $k = 0$) получаем условно-периодические движения на $\mathbb{T}^n$. Сведение системы уравнений к виду (1.9) часто называют её линеаризацией (поскольку переменные $\psi_i, 1 \leq i \leq k$, и $\varphi_j, k+1 \leq j \leq n$, линейно меняются со временем).

Применение уравнений Лиувилля к интегрированию нелинейных систем дифференциальных уравнений содержится в работе [2]. Эту заметку следует рассматривать как дополнение к ней.

2. Штекелевы системы. Рассмотрим невырожденную $n \times n$ -матрицу

$$[\varphi_{ij}(x_j)], \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.1)$$

и пусть Φ – её определитель, а Φ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента φ_{ij} (зависящего только от координаты x_j). Рассмотрим n систем дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x}_j = \frac{f_j(x_j)\Phi_{mj}(x)}{\Phi(x)}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.2)$$

где f_j – не обращающиеся в нуль гладкие функции одного переменного. Целое m ($1 \leq m \leq n$) нумерует эти системы. Утверждается, что каждая из этих систем интегрируется методом разделения переменных. Более того, в случае тора (когда $M = \mathbb{T}^n$) все эти нелинейные системы линеаризуются одним и тем же преобразованием.

Уравнение (1.6) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n f_j \Phi_{mj} \frac{\partial W}{\partial x_j} = \alpha_m \Phi \quad (h = \alpha_m), \quad (2.3)$$

или

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{mj} \left(f_j \frac{\partial W}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_{kj} \right) = 0.$$

Положим

$$W = \sum W_s(x_s, \alpha), \quad (2.4)$$

где W_s (как функция от одной переменной x_s) удовлетворяет уравнению

$$f_s \frac{\partial W_s}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_{ks}(x_s). \quad (2.5)$$

Оно тривиально решается, и (поскольку матрица (2.1) невырождена) функция (2.4) даёт полное решение уравнения (2.3).

Подчеркнём, что все n систем (2.2) дифференциальных уравнений одновременно решаются разделением переменных $x_1, \dots, x_n$. Легко понять, что n функций вида (1.8)

$$F_k = \sum_j \Phi_{kj} f_j y_j / \Phi, \quad 1 \leq k \leq n,$$

образуют полный набор интегралов в инволюции. Так как по предположению функции $f_1, \dots, f_n$ нигде не обращаются в нуль, то

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0.$$

Следовательно, фазовые потоки систем дифференциальных уравнений (2.2) при разных m коммутируют между собой.

Указанный способ разделения переменных впервые применил Штекель для решения уравнений динамики (см., например, монографию [3, п. 2.3] и имеющиеся в ней ссылки). В частности, он указал римановы метрики, геодезические которых находятся с помощью квадратур. Те же переменные разделяются и в соответствующем операторе Лапласа–Бельтрами.

Из уравнения (2.5) следует, что

$$W_s = \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{\sum \alpha_k \varphi_{ks}(z)}{f_s(z)} dz.$$

Следовательно, по теореме Якоби

$$\begin{aligned} \sum_s \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{\varphi_{ks}(z)}{f_s(z)} dz &= \beta_k, \quad k \neq m, \\ \sum_s \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{\varphi_{ms}(z)}{f_s(z)} dz &= t + \beta_m, \end{aligned} \quad (2.6)$$

что даёт общее решение системы дифференциальных уравнений (2.2) с номером m . В качестве произвольных постоянных можно взять $x_1^0, \dots, x_n^0$ или $\beta_1, \dots, \beta_n$.

3. Уравнения Абеля. Рассмотрим частный случай системы Штекеля, когда матрица (2.1) является матрицей Вандермонда

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Запишем в явном виде систему дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (2.2) в самом простом случае, когда $m = n$:

$$\dot{x}_j = f_j(x_j) / \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^n (x_j - x_s), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.1)$$

Если не принимать во внимание содержание п. 2, то здесь непосредственно не видно, что эта система может быть решена с помощью разделения переменных.

Во многих проинтегрированных задачах механики $f_1 = \dots = f_n = f$ и

$$f(z) = \sqrt{P(z)}, \quad (3.2)$$

где P – многочлен степени $2n + 1$ или $2n + 2$ без кратных корней. В частности, при $n = 2$ уравнения (3.1) (функция f определяется равенством (3.2)) возникают при интегрировании уравнений вращения тяжёлого твёрдого тела в случаях Ковалевской и Горячева–Чаплыгина (см., например, [1, гл. II, § 5]).

Уравнения (2.6) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} &= \beta_1, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{z^{n-2} dz}{\sqrt{P(z)}} &= \beta_{n-1}, \\ \sum \int_{x_s^0}^{x_s} \frac{z^{n-1} dz}{\sqrt{P(z)}} &= t + \beta_n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Задача их обращения (нахождение $x_1, \dots, x_n$) – предмет классических исследований, начатых Абелем, Якоби и Риманом (современный подход изложен, например, в [4]). Если P – многочлен степени $2n - 1$, то (как доказал Абель) решение трансцендентной системы (3.3) сводится к алгебраической задаче о решении некоторой системы полиномиальных уравнений. Якоби связал разделяющиеся переменные $x_1, \dots, x_n$ с эллиптическими координатами в $\mathbb{R}^n$ [5, с. 209]. Связь уравнений Абеля (3.1) с системами Штекеля обсуждалась также в работах [6; 7, гл. 3, § 3] с точки зрения задачи интегрирования уравнений динамики.

4. Системы на торе с многозначными интегралами. Пусть M – n -мерный тор $\mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi\}$ и $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая положительная функция. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений на $\mathbb{T}^n$:

$$\dot{x}_j = \omega_j / f(x), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.1)$$

Здесь $\omega_1, \dots, \omega_n$ – постоянные числа, отличные от нуля.

Очевидно, система (4.1) интегрируется с помощью квадратур. Более того, она допускает многозначные интегралы

$$F_{ij} = \omega_j x_i - \omega_i x_j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Среди них ровно $n - 1$ функционально независимых. Отметим, что при некоторых дополнительных предположениях верно и обратное: если система на торе допускает $n - 1$ независимых многозначных интегралов, то в некоторых угловых переменных эта система приводится к виду (4.1) (см. [8]). Случай $n = 3$ рассмотрен В.И. Арнольдом [9]. Система (4.1) допускает инвариантную меру $f(x) d^n x$. Как показал А.Н. Колмогоров [10], любая система без особых точек на двумерном торе, допускающая инвариантную меру с положительной гладкой плотностью, приводится к виду (4.1).

Сначала сделаем простое замечание. Если

$$f = \sum f_j(x_j),$$

то система (4.1) решается разделением переменных. Кстати сказать, этот случай реализуется в интегрируемых задачах динамики твёрдого тела: после введения угловых переменных уравнения Абеля (3.1) (при $n = 2$) принимают именно такой вид.

В общем случае уравнение (1.6) имеет простую форму:

$$\sum \omega_j \frac{\partial W}{\partial x_j} = h(\alpha) f. \quad (4.2)$$

Положим $f = \bar{f} + \tilde{f}$, где $\bar{f}$ – среднее значение функции f и на $\mathbb{T}^n$, а среднее $\tilde{f} = f - \bar{f}$ равно нулю. Тогда решение уравнения (4.2) представляется как сумма функций $\bar{W}$ и $\tilde{W}$, где

$$\bar{W} = \alpha_j x_j, \quad \sum \omega_j \alpha_j = h(\alpha) \bar{f},$$

а

$$\sum \omega_j \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_j} = h \tilde{f}. \quad (4.3)$$

Как хорошо известно, для почти всех наборов $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ уравнение (4.3) допускает гладкое решение (причём единственное, если считать среднее $\tilde{W}$ нулём).

Тогда $S = -h(\alpha)t + W(x, \alpha)$ и переменные $x_1, \dots, x_n$ как функции времени находятся из соотношений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = -\frac{\omega_j}{\bar{f}} t + x_j + \frac{\omega_j}{\bar{f}} W'(x) = \beta_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Здесь $W' = \tilde{W}/h$. Следовательно, замена переменных

$$x_j + \omega'_j W'(x) = \varphi_j, \quad \omega'_j = \omega_j / \bar{f} \quad (4.4)$$

переводит систему (4.1) в систему

$$\dot{\varphi}_j = \omega'_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.5)$$

задающую условно-периодическое движение по тору. Частоты ω'_j – это средние значения правых частей системы (4.1) относительно инвариантной меры $f d^n x$.

Формулы (4.4) указаны в книге [11, с. 156]; этот же результат о приведении системы (4.1) к системе (4.5) для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ похожим способом доказан в работе [12]. Доказательство А.Н. Колмогорова [10] для $n = 2$ основано на другой идее.

5. Условия разделения переменных. Следующее утверждение отвечает на вопрос о разделении переменных $x_1, \dots, x_n$ в системе дифференциальных уравнений (1.1), т.е. в системе

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5.1)$$

Теорема. *Переменные $x_1, \dots, x_n$ в системе (5.1) разделяются тогда и только тогда, когда компоненты векторного поля v удовлетворяют следующим $n(n-1)$ условиям:*

$$v_j v_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} - v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j < k \leq n. \quad (5.2)$$

Доказательство основано на известном результате Леви-Чивиты о критерии разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби с гамильтонианом $H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$:

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial^2 H}{\partial y_j \partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad (5.3)$$

для всех $1 \leq j < k \leq n$ (суммирование по повторяющимся индексам нет). Доказательство этого факта и его обсуждение можно найти, например, в [3, п. 2.3].

Подставляя теперь гамильтониан (1.2) в соотношения (5.3), получаем условия (5.2) разделения переменных в системе дифференциальных уравнений (1.1).

Вряд ли возможно отыскать в самом общем случае все векторные поля, удовлетворяющие системе (5.2). Рассмотрим упоминавшийся в п. 1 частный случай, когда $n = 2$, – систему (1.7). Система (5.2) в этом случае сводится к двум уравнениям в частных производных:

$$\begin{aligned} v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) &= 0, \\ v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Они легко преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial v_1 / \partial x_2}{v_1 v_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial v_2 / \partial x_1}{v_1 v_2} = 0.$$

Отсюда очевидно вытекают равенства

$$\partial v_1 / \partial x_2 = \varphi(x_2) v_1 v_2, \quad \partial v_2 / \partial x_1 = \psi(x_1) v_1 v_2 \quad (5.4)$$

с некоторыми гладкими функциями φ и ψ .

Пусть сначала $\varphi \equiv 0$ (случай $\psi \equiv 0$ рассматривается аналогично). Тогда из первого соотношения в (5.4) вытекает, что $v_1 = \alpha(x_1)$, где α – гладкая функция. Но тогда из второго равенства в (5.4) следует, что

$$v_2 = \beta(x_2) \gamma(x_1),$$

где $\gamma_1 = \exp \int \psi(x_1) \alpha(x_1) dx_1$. В этом случае уравнение Гамильтона–Якоби (1.6) решается разделением переменных.

Пусть теперь функции φ и ψ не обращаются в нуль. Положим

$$v_1 = w_1 / \psi, \quad v_2 = w_2 / \varphi. \quad (5.5)$$

Тогда из соотношений (5.4) вытекает, что $\partial w_1 / \partial x_2 = \partial w_2 / \partial x_1$. Следовательно, поле $w = (w_1, w_2)$ потенциально:

$$w_1 = \partial a / \partial x_1, \quad w_2 = \partial a / \partial x_2, \quad (5.6)$$

причём гладкий потенциал a удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_2}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = c_1(x_1) e^a, \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} = c_2(x_2) e^a \quad (5.7)$$

с некоторыми гладкими функциями c_1 и c_2 одной переменной. Значит, согласно равенствам (5.5) и (5.6), будем иметь

$$v_1 = \frac{c_1(x_1)}{\psi(x_1)} e^a, \quad v_2 = \frac{c_2(x_2)}{\varphi(x_2)} e^a. \quad (5.8)$$

Наконец, из первого уравнения в (5.7) получаем

$$-e^{-a} = \int c_1(x_1) dx_1 + d(x_2).$$

В итоге представления (5.8) дают следующий вид правых частей нашей системы дифференциальных уравнений:

$$v_1 = \frac{A(x_1)}{C(x_1) + D(x_2)}, \quad v_2 = \frac{B(x_2)}{C(x_1) + D(x_2)},$$

где A , B , C , D – гладкие функции. В этом случае мы имеем систему Штекеля с разделяющимися переменными из п. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.
2. Козлов В.В. Замечания об интегрируемых системах // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 3. С. 459–478.
3. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М., 1990.
4. Дубровин Б.А. Тета-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
5. Якоби К. Лекции по динамике. М.; Л., 1936.
6. Цыганов А.В. Однородные системы типа систем Штекеля // Теор. и мат. физика. 1998. Т. 115. № 1. С. 3–28.
7. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.; Ижевск, 2003.
8. Козлов В.В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2007. Т. 256. С. 201–218.
9. Арнольд В.И. Полиинтегрируемые потоки // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 6. С. 54–62.
10. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
11. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М., 1980.
12. Herman M.R. Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. 1991. Sér. 1. V. 312. № 13. P. 989–994.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
г. Москва,
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 12.07.2021 г.
После доработки 12.07.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.52+517.926.4

О ГЕНЕРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ
УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2021 г. Ю. Д. Козлов

Доказано, что верхние генеральные показатели всех систем из Н-класса системы линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами равны между собой. Указана их связь со спектральным радиусом оператора монодромии этой системы.

DOI: 10.31857/S0374064121100058

Введение. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$x' = a(t)x. \quad (1)$$

Здесь a – действительная условно-периодическая матричная функция, т.е. $a(t) = A(et)$, где $A = A(\varphi)$ – непрерывная $n \times n$ -матричная функция переменного $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m$, являющаяся ω_j -периодической по φ_j ($j = \overline{1, m}$), $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ и частоты $\beta_i = 2\pi/\omega_i$, $i = \overline{1, m}$, рационально независимы. Обозначим $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ и $\hat{\omega} = (\omega_2, \dots, \omega_m)$.

Введём ещё несколько обозначений. Пусть $P_n(\hat{\omega})$ – банахово пространство ω_j -периодических по φ_j ($j = \overline{2, m}$) непрерывных вектор-функций $u: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ переменного $\hat{\varphi} = (\varphi_2, \dots, \varphi_m)$ с нормой $\|u\|_{\hat{\omega}} = \max_{\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}} \|u(\hat{\varphi})\|$, где $\|\cdot\|$ – какая-либо норма вектора в конечномерном пространстве (согласованная с ней норма матрицы обозначается также через $\|\cdot\|$), $\hat{e} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{m-1}$; E – единичная $n \times n$ -матрица. Если $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}^m$, то запись $\varphi = \varphi' \pmod{\omega}$ (или $\|\varphi - \varphi'\| < \epsilon \pmod{\omega}$) означает, что найдутся целые числа $r_1, \dots, r_m$ такие, что $\varphi = \varphi' + (r_1\omega_1, \dots, r_m\omega_m)$ (или $\|\varphi - \varphi' + (r_1\omega_1, \dots, r_m\omega_m)\| < \epsilon$). В этом же смысле следует понимать запись $\varphi^j \rightarrow \varphi \pmod{\omega}$ при $j \rightarrow \infty$.

Пусть $n \times n$ -матричная функция X является решением матричного уравнения

$$X(\varphi) = \int_0^{\varphi_1} A(\varphi - e\xi)X(\varphi - e\xi) d\xi + E,$$

тогда X невырождена при всех $\varphi \in \mathbb{R}^m$, а матричные функции X и X^{-1} непрерывны на $\mathbb{R}^m$ и ω_j -периодичны по φ_j ($j = \overline{2, m}$) [1, 2].

Рассмотрим систему

$$X(\omega_1, \hat{\varphi})u(\hat{\varphi} - \hat{e}\omega_1) - \lambda u(\hat{\varphi}) = g(\hat{\varphi}) \quad (2)$$

относительно неизвестной вектор-функции u . Мы используем следующее условие разрешимости этой системы (не претендуя на его новизну, возможно, в теории операторов взвешенного сдвига имеется результат, из которого оно следует). Система (2) для любой функции $g \in P_n(\hat{\omega})$ имеет единственное решение $u \in P_n(\hat{\omega})$, если $|\lambda| > \nu(\hat{\varphi})$ для некоторого $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$, где

$$\nu(\hat{\varphi}) = \overline{\lim}_{j, s \rightarrow \infty} \sqrt[j+1]{\|X_{j+s} \cdots X_s\|} \quad (3)$$

и $X_j = X(\omega_1, \hat{\varphi} + j\omega_1\hat{e})$ (этот предел конечен, так как функция $X(\omega_1, \cdot)$ ограничена).

С помощью этого условия мы показываем, что все системы из Н-класса системы (1) на полуоси $t \geq 0$ имеют один и тот же верхний генеральный показатель $\mu = \omega_1^{-1} \ln \rho$, где ρ –

спектральный радиус оператора монодромии системы (1). Последнее равенство является аналогом классического результата для периодической системы (см. теорему 1.1 из [3, с. 282]).

Аналогичное соотношение между генеральным показателем Н-класса системы (1) и спектральным радиусом оператора монодромии ранее было получено в работе [4]. Множество систем из Н-класса системы (1) можно рассматривать как одно дифференциальное уравнение в пространстве $P_n(\hat{\omega})$. Генеральный показатель κ этого уравнения – это и есть генеральный показатель Н-класса, для него справедлива формула [4]

$$\kappa = \overline{\lim}_{t, \xi \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \sup_{\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}} \|X(t + \xi, \hat{e}(t + \xi) + \hat{\varphi})X^{-1}(\xi, \hat{e}\xi + \hat{\varphi})\|.$$

Если в этой формуле под знаком логарифма убрать операцию $\sup$, то для каждого $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ получим выражение верхнего генерального показателя некоторой системы из Н-класса (см. [4, формула (5)]). При этом выражение под знаком логарифма (без значка $\sup$) зависит от $\hat{\varphi}$, а предел – нет. Кроме того, оказывается, что и $\nu(\hat{\varphi})$ не зависит от $\hat{\varphi}$, а именно, $\nu(\hat{\varphi}) = \rho$ для всех $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Понятие генерального показателя введено П.Г. Болем (см. [5, с. 456–486]). Он же является одним из основателей теории условно периодических функций. В работе мы опираемся на его идею периодического пространственного расширения этих функций. Мы также используем идеи и технику, которые применяются для исследования периодических систем в монографии [3].

Обзор теории показателей линейных систем, включая условно-периодические системы, можно найти в [6]. Отметим, что устойчивость системы (1) при постоянно действующих возмущениях равносильна отрицательности её верхнего генерального показателя [5]. Следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях всех систем из Н-класса системы (1) является условие $\rho < 1$.

1. Решение системы (2). Зафиксируем произвольные векторы $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $u_{-1} \in \mathbb{C}^n$, положим $u_k = u(\hat{\varphi} + k\omega_1\hat{e})$, $g_k = g(\hat{\varphi} + k\omega_1\hat{e})$ и найдём u_k ($k = 0, 1, \dots$) из системы (2):

$$u_0 = \lambda^{-1}(X_0 u_{-1} - g_0), \quad \dots$$

$$\dots, \quad u_k = \lambda^{-1}(X_k u_{k-1} - g_k) = \lambda^{-(k+1)} X_k \dots X_0 u_{-1} - \sum_{s=1}^k \lambda^{-(k-s+2)} X_k \dots X_s g_{s-1} - \lambda^{-1} g_k. \quad (4)$$

Исследуем полученную последовательность $\{u_k\}$.

Лемма 1. Пусть функция $\nu(\hat{\varphi})$ определяется формулой (3) и $|\lambda| > \nu(\hat{\varphi})$, тогда последовательность $\{u_k\}$ ограничена.

Доказательство. Поскольку $|\lambda| > \nu(\hat{\varphi})$, то по определению верхнего предела для произвольного $\varepsilon \in (0, |\lambda| - \nu(\hat{\varphi}))$ возьмём $s_0 \in \mathbb{N}$ такое, что из неравенств $k > s > s_0$ следует

$$|\lambda|^{-(k-s+1)} \|X_k \dots X_s\| \leq \alpha^{k-s+1} \quad (\alpha = |\lambda|^{-1}(\nu(\hat{\varphi}) + \varepsilon) < 1).$$

Кроме того, существует $c > 0$ такое, что $|\lambda|^{-(s_0-s+1)} \|X_{s_0} \dots X_s\| \leq c$ для $s = \overline{0, s_0}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u_k\| &\leq |\lambda|^{-k-1} \|X_k \dots X_{s_0+1} X_{s_0} \dots X_0 u_{-1}\| + \sum_{s=s_0+1}^k |\lambda|^{-(k-s+2)} \|X_k \dots X_s\| \|g_{s-1}\| + \\ &+ |\lambda|^{-1} \sum_{s=1}^{s_0} |\lambda|^{-(k-s_0)} \|X_k \dots X_{s_0+1}\| |\lambda|^{-(s_0-s+1)} \|X_{s_0} \dots X_s\| \|g_{s-1}\| + |\lambda|^{-1} \|g_k\| \leq \\ &\leq \alpha^{k-s_0} c \|u_{-1}\| + |\lambda|^{-1} \|g\| \hat{\omega} \left(\sum_{s=s_0+1}^k \alpha^{k-s+1} + \alpha^{k-s_0} c s_0 + 1 \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq c\|u_{-1}\| + |\lambda|^{-1}\|g\|_{\hat{\omega}}((1-\alpha)^{-1} + cs_0 + 1).$$

Эта оценка завершает доказательство леммы.

Вследствие рациональной независимости частот β_i , $i = \overline{1, m}$, по теореме Кронекера [7, с. 68] для произвольного $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{m-1}$ найдётся возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$ такая, что

$$\hat{\varphi} + k_j\omega_1\hat{e} \rightarrow \hat{\eta} \pmod{\hat{\omega}}$$

при $j \rightarrow \infty$. Для краткости назовём её $\hat{\varphi}\hat{\eta}$ -последовательностью.

Лемма 2. Пусть $\{k_j\}$ является $\hat{\varphi}\hat{\eta}$ -последовательностью и выполняются условия леммы 1, тогда подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$ последовательности $\{u_k\}$ из леммы 1 сходится.

Доказательство. Используя представления (4), докажем, что последовательность $\{u_{k_j}\}$ фундаментальна. Для этого запишем k_j в виде $k_j = p_0 + q_j + r_j$, где $p_0, q_j, r_j \in \mathbb{N}$ и $p_0 + q_j$ также является членом последовательности $\{k_j\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Благодаря ограниченности $\{u_k\}$, так же, как в лемме 1, найдутся $r_0, p_0 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|\lambda|^{-(p_0+1)}\|X_{p_0+q_j+r_j} \cdots X_{q_j+r_j}u_{q_j+r_j-1}\| < \varepsilon/4, \quad |\lambda|^{-(p_0+1)}\|X_{p_0+q_j} \cdots X_{q_j}u_{q_j-1}\| < \varepsilon/4$$

для $q_j > r_0$ и $r_j \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем p_0 . Принимая во внимание, что матричная $X(\omega_1, \cdot)$ и векторная g функции непрерывны и ω_j -периодичны по φ_j ($j = \overline{2, m}$), мы можем выбрать r_0 так, чтобы для $q_j > r_0$ и $r_j \in \mathbb{N}$ расстояние между точками $\hat{\varphi} + (p_0 + q_j + r_j)\omega_1\hat{e}$ и $\hat{\varphi} + (p_0 + q_j)\omega_1\hat{e}$ по $\text{mod } \hat{\omega}$ было настолько малым, что выполняются неравенства

$$\sum_{s=1}^{p_0} |\lambda|^{-(p_0+s+2)} \|X_{p_0+q_j+r_j} \cdots X_{q_j+r_j+s}g_{q_j+r_j+s-1} - X_{p_0+q_j} \cdots X_{q_j+s}g_{q_j+s-1}\| < \varepsilon/4$$

и

$$|\lambda|^{-1}\|g_{p_0+q_j+r_j} - g_{p_0+q_j}\| < \varepsilon/4.$$

Подставляя $\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}$ вместо $\hat{\varphi}$ в (4), получаем

$$\begin{aligned} u_{p+q} &= u_p(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}) = \lambda^{-(p+1)}X_p(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}) \cdots X_0(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e})u_{-1}(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}) - \\ &- \sum_{s=1}^p \lambda^{-(p-s+2)}X_p(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}) \cdots X_s(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e})g_{s-1}(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}) - \lambda^{-1}g_p(\hat{\varphi} + q\omega_1\hat{e}) = \\ &= \lambda^{-(p+1)}X_{p+q} \cdots X_qu_{q-1} - \sum_{s=1}^p \lambda^{-(p-s+2)}X_{p+q} \cdots X_{q+s}g_{q+s-1} - \lambda^{-1}g_{p+q} \end{aligned}$$

для $p, q \in \mathbb{N}$.

Используя это соотношение и предыдущие оценки, имеем неравенство

$$\|u_{p_0+q_j+r_j} - u_{p_0+q_j}\| = \|u_{p_0}(\hat{\varphi} + (q_j + r_j)\omega_1\hat{e}) - u_{p_0}(\hat{\varphi} + q_j\omega_1\hat{e})\| < \varepsilon$$

при $q_j > r_0$, $r_j \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\{u_{k_j}\}$ сходится. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $|\lambda| > \nu(\hat{\varphi})$ ($\nu(\hat{\varphi})$ определено формулой (3)) для некоторого $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$, тогда система (2) для любой функции $g \in P_n(\hat{\omega})$ имеет единственное решение $u \in P_n(\hat{\omega})$.

Доказательство. Существование. Пусть $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{m-1}$ произвольно и $\{k_j\}$ является $\hat{\varphi}\hat{\eta}$ -последовательностью. В силу леммы 2 можно положить $u(\hat{\eta}) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j}$. Если взять другую

$\hat{\varphi}\hat{\eta}$ -последовательность $\{r_j\}$, то $u_{r_j} \rightarrow u(\hat{\eta})$. Действительно, если допустить, что $u_{r_j} \rightarrow v \neq u(\hat{\eta})$, то последовательность $u_{k_1}, u_{r_1}, u_{k_2}, u_{r_2}, \dots$ сходится и расходится одновременно. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Только что определённая вектор-функция является ω_r -периодической по φ_r , так как не только $\hat{\varphi} + k_j\omega_1\hat{e} \rightarrow \hat{\eta} \pmod{\hat{\omega}}$, но и $\hat{\varphi} + k_j\omega_1\hat{e} \rightarrow \hat{\eta} + \underbrace{(0, \dots, 0, \omega_r, 0, \dots, 0)}_r \pmod{\hat{\omega}}$ при $j \rightarrow \infty$

($r = \overline{2, m}$). Поэтому $u(\hat{\eta}) = u(\hat{\eta} + (0, \dots, 0, \omega_r, 0, \dots, 0))$.

Докажем, что эта функция непрерывна. Возьмём произвольное $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{m-1}$ и последовательность $\{\hat{\varphi}^j\}$, сходящуюся к $\hat{\eta}$ по $\text{mod } \hat{\omega}$ при $j \rightarrow \infty$. Согласно определению $u(\hat{\varphi}^j)$, для каждого натурального j выберем $l_j \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\hat{\varphi}^j - l_j\omega_1\hat{e} - \hat{\varphi}\| < j^{-1} \pmod{\hat{\omega}}$ и $\|u(\hat{\varphi}^j) - u_{l_j}\| < j^{-1}$. Тогда $\hat{\varphi} + l_j\omega_1\hat{e} \rightarrow \hat{\eta} \pmod{\hat{\omega}}$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} u(\hat{\varphi}^j) = \lim_{j \rightarrow \infty} u(l_j\omega_1\hat{e} + \hat{\varphi}) = u(\hat{\eta})$.

Это доказывает, что вектор-функция u непрерывна на $\mathbb{R}^{m-1}$.

Так как матричная $X(\omega_1, \cdot)$ и векторная g функции непрерывны и периодичны и $\hat{\varphi} + k_j\omega_1\hat{e} \rightarrow \hat{\eta} \pmod{\hat{\omega}}$, то $g_{k_j} = g(\hat{\varphi} + k_j\omega_1\hat{e}) \rightarrow g(\hat{\eta})$ и $X_{k_j} = X(\omega_1, \hat{\varphi} + k_j\omega_1\hat{e}) \rightarrow X(\omega_1, \hat{\eta})$ при $j \rightarrow \infty$. Кроме того, $\hat{\varphi} + (k_j - 1)\omega_1\hat{e} \rightarrow \hat{\eta} - \hat{e}\omega_1 \pmod{\hat{\omega}}$ и $X_{k_j}u_{k_j-1} - \lambda u_{k_j} = g_{k_j}$. Поэтому, переходя к пределу в предыдущем равенстве, получаем, что $X(\omega_1, \hat{\eta})u(\hat{\eta} - \hat{e}\omega_1) - \lambda u(\hat{\eta}) = g(\hat{\eta})$ для $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{m-1}$. Существование решения доказано.

Единственность. Допустим противное. Тогда существует нетривиальное решение $u \in P_n(\hat{\omega})$ системы

$$X(\omega_1, \hat{\eta})u(\hat{\eta} - \hat{e}\omega_1) - \lambda u(\hat{\eta}) = 0.$$

Пусть $u_k = u(\hat{\varphi} + k\omega_1\hat{e})$, тогда $u_k = \lambda^{-(k+1)}X_k \cdots X_0 u_{-1}$. Покажем, что $u_k \rightarrow 0$. Пусть ε , s_0 и c будут такими же, как в лемме 1. Для $\delta > 0$ найдём $s_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|\lambda|^{-(k-s+1)}\|X_k \cdots X_s\|\|u_{-1}\| < \delta$$

для $k > s > s_1$. Тогда будем иметь

$$\|u_k\| \leq |\lambda|^{-(k-s_1)}\|X_k \cdots X_{s_1+1}\| |\lambda|^{-(s_1-s_0)}\|X_{s_1} \cdots X_{s_0+1}\| |\lambda|^{-(s_0+1)}\|X_{s_0} \cdots X_0\|\|u_{-1}\| < \delta \cdot 1 \cdot c = \delta c$$

для $k > s_1 > s_0$ и

$$\|u_k\| \leq |\lambda|^{-(k-s_0)}\|X_k \cdots X_{s_0+1}\| |\lambda|^{-(s_0+1)}\|X_{s_0} \cdots X_0\|\|u_{-1}\| < \delta c$$

для $k > s_0 \geq s_1$. Следовательно, последовательность $\{u_k\}$ является бесконечно малой. Взяв произвольное $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $\hat{\varphi}\hat{\eta}$ -последовательность $\{k_j\}$, получим, что $u(\hat{\eta}) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j} = 0$.

Это противоречит нетривиальности вектор-функции u и завершает доказательство теоремы.

2. Верхние генеральные показатели систем из Н-класса системы (1). Рассмотрим систему

$$x' = b(t)x,$$

принадлежащую Н-классу системы (1), т.е. существует последовательность $\{et_k\}$, сходящаяся по $\text{mod } \omega$, и $a(t + t_k) \rightarrow b(t)$ равномерно на действительной прямой.

Так как матричная функция A периодична и непрерывна, то она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$. Поэтому, если $et_k \rightarrow \varphi \pmod{\omega}$, где $\varphi \in \mathbb{R}^m$, то $a(t + t_k) = A(e(t + t_k)) \rightarrow A(et + \varphi)$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ при $k \rightarrow \infty$. Значит, в нашем случае Н-классом системы (1) является множество систем

$$x' = A(et + \varphi)x,$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Характеристические и генеральные показатели системы (1) инвариантны относительно сдвига аргумента матрицы a . Следовательно, множество генеральных показателей систем

$$x' = A(t, \hat{e}t + \hat{\varphi})x, \quad (5)$$

где $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$, совпадает с множеством генеральных показателей систем из Н-класса системы (1). Поэтому далее будем рассматривать систему (5).

Для каждого $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ матрица $X(t, \hat{e}t + \hat{\varphi})$ является нормированной фундаментальной матрицей системы (5) [2]. Поэтому, следуя теореме 4.4 из [3, с. 175], верхний генеральный показатель этой системы на полуоси $t \geq 0$ можно представить в виде

$$\mu(\hat{\varphi}) = \overline{\lim}_{t, \xi \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|X(t + \xi, \hat{e}(t + \xi) + \hat{\varphi})X^{-1}(\xi, \hat{e}\xi + \hat{\varphi})\|. \quad (6)$$

Кроме того, функция X обладает свойством

$$X(\varphi_1 + l\omega_1, \hat{\varphi}) = X(\varphi)X(l\omega_1, \hat{\varphi} - \varphi_1\hat{e}), \quad (7)$$

где $\varphi_1 \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $l \in \mathbb{Z}$ [1, 2]. Это равенство является аналогом известного свойства фундаментальной матрицы периодической системы.

Лемма 3. Пусть $\mu(\hat{\varphi})$ – верхний генеральный показатель системы (5) на полуоси $t \geq 0$ и $\nu(\hat{\varphi})$ определяется формулой (3). Тогда равенство $\mu(\hat{\varphi}) = \omega_1^{-1} \ln \nu(\hat{\varphi})$ справедливо для всех $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Доказательство. Используя равенство (7) (для $l = 1$), получаем

$$\begin{aligned} X(p\omega_1, \hat{\varphi} + p\omega_1\hat{e}) &= X((p-1)\omega_1, \hat{\varphi} + p\omega_1\hat{e})X(\omega_1, \hat{\varphi} + \omega_1\hat{e}) = \dots \\ &\dots = X(\omega_1, \hat{\varphi} + p\omega_1\hat{e})X(\omega_1, \hat{\varphi} + (p-1)\omega_1\hat{e}) \dots X(\omega_1, \hat{\varphi} + \omega_1\hat{e}) = X_p \dots X_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} X_{j+s} \dots X_s &= X_{j+s} \dots X_1 (X_{s-1} \dots X_1)^{-1} = \\ &= X((j+s)\omega_1, \hat{\varphi} + (j+s)\omega_1\hat{e})X^{-1}((s-1)\omega_1, \hat{\varphi} + (s-1)\omega_1\hat{e}). \end{aligned}$$

Пусть $t + \xi = (j+s)\omega_1 + \gamma$ и $\xi = (s-1)\omega_1 + \delta$, где $\gamma, \delta \in [0, \omega_1]$ и $j, s \in \mathbb{N}$, тогда в силу (7) имеем

$$X(t + \xi, (t + \xi)\hat{e} + \hat{\varphi}) = X(\gamma, (j+s+\gamma)\omega_1\hat{e} + \hat{\varphi})X((j+s)\omega_1, \hat{\varphi} + (j+s)\omega_1\hat{e})$$

и

$$X(\xi, \xi\hat{e} + \hat{\varphi}) = X(\delta, (s-1+\delta)\omega_1\hat{e} + \hat{\varphi})X((s-1)\omega_1, \hat{\varphi} + (s-1)\omega_1\hat{e}).$$

Вследствие непрерывности функций X и X^{-1} и их периодичности по φ_r ($r = \overline{2, m}$) найдётся число $\beta > 0$ такое, что $\|X^{-1}(\gamma, \hat{\varphi})\| < \beta$ и $\|X(\gamma, \hat{\varphi})\| < \beta$, а значит, $\|X^{-1}(\gamma, \hat{\varphi})y\| > \beta^{-1}\|y\|$ и $\|X(\gamma, \hat{\varphi})y\| > \beta^{-1}\|y\|$ для $\gamma \in [0, \omega_1]$, $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Таким образом, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \beta^{-2}\|X_{j+s} \dots X_s\| &= \beta^{-2}\|X((j+s)\omega_1, \hat{\varphi} + (j+s)\omega_1\hat{e})X^{-1}((s-1)\omega_1, \hat{\varphi} + (s-1)\omega_1\hat{e})\| \leq \\ &\leq \|X(t + \xi, (t + \xi)\hat{e} + \hat{\varphi})X^{-1}(\xi, \hat{e}\xi + \hat{\varphi})\| \leq \\ &\leq \beta^2\|X((j+s)\omega_1, \hat{\varphi} + (j+s)\omega_1\hat{e})X^{-1}((s-1)\omega_1, \hat{\varphi} + (s-1)\omega_1\hat{e})\| = \beta^2\|X_{j+s} \dots X_s\| \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} t^{-1} \ln(\beta^{-2}\|X_{j+s} \dots X_s\|) &\leq t^{-1} \ln \|X(t + \xi, (t + \xi)\hat{e} + \hat{\varphi})X^{-1}(\xi, \hat{e}\xi + \hat{\varphi})\| \leq \\ &\leq t^{-1} \ln(\beta^2\|X_{j+s} \dots X_s\|), \end{aligned} \quad (8)$$

$t = (j+1)\omega_1 + \gamma - \delta$.

Переходя к верхнему пределу в этих неравенствах при j и s , стремящихся к бесконечности, приходим к нужному результату, так как левая и правая части неравенства (8) стремятся к $\omega_1^{-1} \ln \nu(\hat{\varphi})$, а средняя часть – к $\mu(\hat{\varphi})$. Лемма доказана.

Рассмотрим оператор монодромии L [1, 2] системы (1), определённый на $P_n(\hat{\omega})$ равенством $Lu = X(\omega_1, \hat{\varphi})u(\hat{\varphi} - \hat{e}\omega_1)$, $u \in P_n(\hat{\omega})$.

Теорема 2. Пусть ρ – спектральный радиус оператора L и $\mu(\hat{\varphi})$ – верхний генеральный показатель системы (5) на полуси $t \geq 0$. Тогда для всех $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$ справедлива формула $\mu(\hat{\varphi}) = \omega_1^{-1} \ln \rho$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что $\nu(\hat{\varphi}) \geq \rho$ и, следовательно, $\mu(\hat{\varphi}) \geq \omega_1^{-1} \ln \rho$ для всех $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$. В противном случае, если допустить, что $\nu(\hat{\varphi}) < \rho$ для некоторого $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}$, то система (2), согласно теореме 1, имеет единственное решение $u \in P_n(\hat{\omega})$, как только $g \in P_n(\hat{\omega})$ и $|\lambda| = \rho$. Следовательно, окружность $|\lambda| = \rho$ состоит из регулярных точек оператора L . Это противоречит тому, что значение ρ является спектральным радиусом этого оператора.

В работе [4] доказано соотношение

$$\omega_1^{-1} \ln \rho = \lim_{t, \xi \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \max_{\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^{m-1}} \|\mathfrak{X}(t + \xi, \hat{e}(t + \xi) + \hat{\varphi}; \xi)\|, \quad (9)$$

в котором $\mathfrak{X}(t + \xi, \hat{e}(t + \xi) + \hat{\varphi}; \xi) = X(t + \xi, \hat{e}(t + \xi) + \hat{\varphi})X^{-1}(\xi, \hat{e}\xi + \hat{\varphi})$. Сравнивая равенства (9) и (6), заключаем, что $\mu(\hat{\varphi}) \leq \omega_1^{-1} \ln \rho$ и, следовательно, $\mu(\hat{\varphi}) = \omega_1^{-1} \ln \rho$. Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013 между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов Ю.Д. О приводимости системы л.д.у. с условно-периодическими коэффициентами. Екатеринбург, 1995. Деп. в ВИНТИ 06.05.95, N1278-B95.
2. Козлов Ю.Д. О дихотомии системы линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 294–299.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
4. Козлов Ю.Д. О показателях Н-класса условно-периодической системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1402–1405.
5. Боля П. Собр. тр. Рига, 1974.
6. Изобов Н. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Т. 12. М., 1974. С. 71–146.
7. Корнфельд Н.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М., 1980.

Уральский федеральный университет
им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 08.01.2020 г.
После доработки 08.06.2020 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.2+517.925.52

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

© 2021 г. В. И. Мироненко, В. В. Мироненко

Получены формулы вычисления отображения Пуанкаре за период для двумерной линейной периодической системы дифференциальных уравнений и для дифференциального уравнения Риккати.

DOI: 10.31857/S037406412110006X

Введение. Данная работа представляет собой продолжение работы [1]. Ограничимся в ней рассмотрением двумерных линейных периодических по времени дифференциальных систем. Чтобы обратить внимание читателя на тот факт, что основные идеи работы приложимы и к нелинейным системам, мы рассмотрим также и уравнение Риккати.

Далее будем пользоваться понятием отображения Пуанкаре за период [2, с. 209; 3, с. 216].

Напомним вначале необходимые для понимания работы сведения из теории отражающей функции [4–11].

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и D – открытая область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D, \quad (1)$$

задача Коши для которой имеет единственное решение для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$. Пусть $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ – общее решение этой системы в форме Коши. *Отражающая функция* $F(t, x)$ системы (1) определяется формулой $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$. Очевидно, что $F(0, x) \equiv x$, $x \in D$. Для $x \in D$ через $\mathcal{I}_x = (-\alpha_x, \alpha_x)$ обозначим максимальный симметричный относительно нуля интервал существования решения $\varphi(t; 0, x)$. Графики решений $\varphi(t; 0, x)$, $t \in \mathcal{I}_x$, заполняют некоторую открытую область, которая и является областью определения отражающей функции $F(t, x)$.

Главное свойство отражающей функции состоит в том, что для любого решения $x(t)$ системы (1) справедливо тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$, $t \in \mathcal{I}_{x(0)}$. Другими словами, отражающая функция каждому будущему состоянию $x(t)$ реальной системы, моделируемой дифференциальной системой (1), ставит в соответствие её прошлое состояние $x(-t)$ в симметричный относительно настоящего $t = 0$ момент времени. Отсюда вытекают следующие утверждения (см. [5, 6]).

1. Если система (1) 2ω -периодична по t и $F(t, x)$ – её отражающая функция, то отображение Пуанкаре на отрезке $[-\omega, \omega]$ для этой системы задаётся правилом $x \mapsto F(-\omega, x)$.

2. Если $F(t, x)$ является отражающей функцией 2ω -периодической системы (1), то продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t) = \varphi(t; -\omega, x_0)$ будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда $F(-\omega, x_0) = x_0$. Характер устойчивости этого решения совпадает с характером устойчивости неподвижной точки x_0 отображения Пуанкаре $x \mapsto F(-\omega, x)$.

3. Дифференцируемая функция $F(t, x)$, определённая в некоторой окрестности гиперплоскости $t = 0$ пространства (t, x) , является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она представляет собой решение задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0, x) = x.$$

4. Для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

отражающая функция линейна и имеет вид $\bar{x} = F(t)x$, где матрица $F(t)$ выражается через фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ системы (2) формулой $F(t) = \Phi(-t)\Phi^{-1}(t)$. Эта матрица называется *отражающей матрицей* и является решением следующей задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dF}{dt} + FP(t) + P(-t)F = 0, \quad F(0) = E, \quad (3)$$

где E – единичная матрица.

5. Если система (2) получена из системы $dy/dt = Q(t)y$, имеющей отражающую функцию $\bar{y} = F(t)y$, заменой переменных $x = S(t)y$, то отражающая функция системы (2) задаётся формулой $\bar{x} = S(-t)F(t)S^{-1}(t)x$.

1. Отражающая матрица и периодические решения линейных двумерных систем. Каждую линейную систему (2) с непрерывной матрицей коэффициентов можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = P_{\text{ev}}(t)x + P_{\text{od}}(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где $P_{\text{ev}}(t) = (P(t) + P(-t))/2$ и $P_{\text{od}}(t) = (P(t) - P(-t))/2$ – соответственно чётная и нечётная непрерывные матрицы. Сделав в системе (4) замену переменных

$$y = x \exp\left(-\frac{1}{n} \int_0^t \text{tr } P_{\text{ev}}(\tau) d\tau\right),$$

где tr – след матрицы, получим систему вида (4), у которой матрица чётной части $P_{\text{ev}}(t)$ имеет тождественно нулевой след. Поэтому в дальнейшем, рассматривая двумерную систему (4), без нарушения общности считаем, что она имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_3(t) & -p_1(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

здесь

$$P_{\text{ev}}(t) := \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_3(t) & -p_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P_{\text{od}}(t) := \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

– чётная и нечётная непрерывные матрицы.

В дальнейшем мы будем рассматривать именно эту систему, если не оговорено противное.

Теорема 1. Пусть в системе (5) при всех $t \in \mathbb{R}$ матрица $P_{\text{ev}}(t)$ непрерывно дифференцируема, а матрица $P_{\text{od}}(t)$ непрерывна. Пусть также выполнены следующие условия:

- 1) при всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $-\det P_{\text{ev}}(t) \equiv p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t) > 0$;
- 2) функции

$$m(t) := \frac{-p_1(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t)}}, \quad n(t) := \frac{-p_2(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t)}}, \quad r(t) := \frac{-p_3(t)}{\sqrt{p_1^2(t) + p_2(t)p_3(t)}}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dm}{dt} + n\gamma - \beta r = 0, \quad \frac{dn}{dt} + n(\delta - \alpha) + 2m\beta = 0, \quad \frac{dr}{dt} + r(\alpha - \delta) - 2m\gamma = 0. \quad (6)$$

Тогда отражающая матрица системы (5) задаётся формулой

$$F(t) = E \operatorname{ch} \varphi(t) + M(t) \operatorname{sh} \varphi(t),$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} m(t) & n(t) \\ r(t) & -m(t) \end{pmatrix} \quad u \quad \varphi(t) = 2 \int_0^t \sqrt{p_1^2(\tau) + p_2(\tau)p_3(\tau)} d\tau.$$

Доказательство. Для того чтобы доказать теорему, достаточно проверить справедливость основного соотношения (3) для отражающей матрицы, дифференциальное уравнение в котором в нашем случае принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dt} + F(P_{\text{ev}} + P_{\text{od}}) + (P_{\text{ev}} - P_{\text{od}})F = \\ &= \frac{d}{dt}(E \operatorname{ch} \varphi + M \operatorname{sh} \varphi) + (E \operatorname{ch} \varphi + M \operatorname{sh} \varphi)(P_{\text{ev}} + P_{\text{od}}) + (P_{\text{ev}} - P_{\text{od}})(E \operatorname{ch} \varphi + M \operatorname{sh} \varphi) = \\ &= E \operatorname{sh} \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dM}{dt} \operatorname{sh} \varphi + M \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{ch} \varphi + 2P_{\text{ev}} \operatorname{ch} \varphi + (MP_{\text{ev}} + P_{\text{ev}}M) \operatorname{sh} \varphi + (MP_{\text{od}} - P_{\text{od}}M) \operatorname{sh} \varphi = \\ &= \left(M \frac{d\varphi}{dt} + 2P_{\text{ev}} \right) \operatorname{ch} \varphi + \left(E \frac{d\varphi}{dt} + MP_{\text{ev}} + P_{\text{ev}}M \right) \operatorname{sh} \varphi + \left(\frac{dM}{dt} + MP_{\text{od}} - P_{\text{od}}M \right) \operatorname{sh} \varphi = 0. \end{aligned}$$

Действительно, здесь каждое из выражений в скобках обращается в нуль. В этом легко убедиться, если учесть, что из условия 2 следует тождество

$$P_{\text{ev}} = -M \sqrt{p_1^2 + p_2 p_3} = -\frac{1}{2} M \frac{d\varphi}{dt}.$$

Условие $F(0) = E$ очевидно выполнено. Теорема доказана.

Замечание 1. В соответствии с общим положением теории отражающей функции отображение Пуанкаре 2ω -периодической системы (5) на отрезке $[-\omega, \omega]$ задаётся формулой

$$F(-\omega, x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi(\omega) - m(\omega) \operatorname{sh} \varphi(\omega) & -n(\omega) \operatorname{sh} \varphi(\omega) \\ -r(\omega) \operatorname{sh} \varphi(\omega) & \operatorname{ch} \varphi(\omega) + m(\omega) \operatorname{sh} \varphi(\omega) \end{pmatrix} x.$$

Теорема 2. Пусть в системе (5) при всех $t \in \mathbb{R}$ матрица $P_{\text{ev}}(t)$ непрерывно дифференцируема, а матрица $P_{\text{od}}(t)$ непрерывна. Пусть также выполнены следующие условия:

1. При всех $t \in \mathbb{R}$ верно неравенство $-\det P_{\text{ev}}(t) \equiv p_1^2 + p_2(t)p_3(t) < 0$.
2. Функции

$$m(t) := \frac{-p_1(t)}{\sqrt{-p_1^2(t) - p_2(t)p_3(t)}}, \quad n(t) := \frac{-p_2(t)}{\sqrt{-p_1^2(t) - p_2(t)p_3(t)}}, \quad r(t) := \frac{-p_3(t)}{\sqrt{-p_1^2(t) - p_2(t)p_3(t)}}$$

удовлетворяют соотношениям (6).

Тогда отражающая матрица системы (5) задаётся формулой

$$F(t) = E \cos \varphi(t) + M(t) \sin \varphi(t),$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} m(t) & n(t) \\ r(t) & -m(t) \end{pmatrix} \quad u \quad \varphi(t) = 2 \int_0^t \sqrt{-p_1^2(\tau) - p_2(\tau)p_3(\tau)} d\tau.$$

Доказательство. Сведём доказательство теоремы 2 к доказательству теоремы 1, воспользовавшись формулировкой последней. При этом мы будем считать, что в этой формулировке использованы обозначения φ_1 , m_1 , n_1 , r_1 вместо φ , m , n , r соответственно. Тогда

$$\varphi_1(t) = 2 \int_0^t \sqrt{p_1^2(\tau) + p_2(\tau)p_3(\tau)} d\tau = 2i \int_0^t \sqrt{-p_1^2(\tau) - p_2(\tau)p_3(\tau)} d\tau = -i\varphi(t),$$

$$m_1(t) = \frac{m(t)}{i}, \quad n_1(t) = \frac{n(t)}{i}, \quad r_1(t) = \frac{r(t)}{i}, \quad i^2 = -1.$$

Поэтому для отражающей матрицы рассматриваемой системы получим соотношение

$$F(t) = E \operatorname{ch}(i\varphi(t)) + M(t) \frac{\operatorname{sh}(i\varphi(t))}{i} = E \cos \varphi(t) + M(t) \sin \varphi(t).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Провести доказательство можно также, непосредственно проверив соотношение (3).

Следствие 1. Пусть для 2ω -периодической системы (5) выполнены все условия теоремы 2 и

$$\int_0^\omega \sqrt{-p_1^2(\tau) - p_2(\tau)p_3(\tau)} d\tau = \pi \frac{q}{p},$$

где $p, q \in \mathbb{N}$ и q/p – несократимая дробь.

Тогда все решения этой системы являются $2\omega p$ -периодическими.

Доказательство. Так как функция $\varphi(t)$ из формулировки теоремы 2 является, согласно её определению, нечётной, то функция $\dot{\varphi}(t)$ чётная и в силу условий следствия 2ω -периодическая. Хорошо известно, что для всякой 2ω -периодической чётной функции $\dot{\varphi}(t)$ существуют 2ω -периодическая функция $\psi(t)$ и постоянная $c = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^\omega \dot{\varphi}(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \dot{\varphi}(\tau) d\tau$, для которых $\int_0^t \dot{\varphi}(\tau) d\tau = ct + \psi(t)$.

Поэтому функция

$$\cos \varphi(t) = \cos(ct + \psi(t)) = \cos\left(t \frac{\pi q}{\omega p} + \psi(t)\right)$$

является $2\omega p$ -периодической. Отсюда следует, что отображение Пуанкаре $F(-\omega)x = Ex$ на отрезке $[-\omega p, \omega p]$ является тождественным. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда все решения 2ω -периодической системы (5) ограничены на $\mathbb{R}$ и она устойчива не асимптотически.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 [11, с. 81].

Замечание 2. Будем рассматривать три дифференциальных соотношения, которым должны удовлетворять функции $m(t)$, $n(t)$, $r(t)$ согласно второму условию теоремы 2, как систему дифференциальных уравнений для этих функций. Легко убедиться в том, что такая система имеет первый интеграл $m^2 + rn = \text{const}$, что согласуется с определяющими эти функции формулами, из которых следует, что $m^2 + rn = 1$. Это означает, что вместо трёх дифференциальных соотношений (6) достаточно требовать выполнения только следующих двух дифференциальных соотношений:

$$\frac{dn}{dt} + n(\delta - \alpha) + 2\beta\sqrt{1 - rn} = 0, \quad \frac{dr}{dt} + r(\alpha - \delta) - 2\gamma\sqrt{1 - rn} = 0.$$

В качестве примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & k(t) \\ p^2(t)k(t) & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} x, \quad (7)$$

где $k(t)$ – чётная непрерывная функция, $p(t)$ – чётная, принимающая только положительные значения, непрерывно дифференцируемая функция, а функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ – непрерывные и нечётные.

Для рассматриваемой системы находим: $d\varphi(t)/dt = 2\sqrt{p_1^2 + p_3 p_4} = 2p(t)k(t)$,

$$m(t) \equiv 0, \quad n(t) \equiv \frac{-p_2}{\dot{\varphi}} \equiv \frac{-k}{2pk} \equiv \frac{-1}{2p(t)}, \quad r(t) \equiv \frac{-p_3}{\dot{\varphi}} \equiv -\frac{p(t)}{2}; \quad M(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/p(t) \\ p(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Условия (6), как показывают вычисления, сводятся к следующим двум:

$$\gamma(t) = \beta(t)p^2(t) \quad \text{и} \quad \frac{dp(t)}{dt} = p(t)(\delta(t) - \alpha(t)). \quad (8)$$

Поэтому следствием теоремы 1 является

Следствие 3. Пусть для системы (7) выполняются следующие условия:

1) $p(t)$ – чётная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, принимающая только положительные значения;

2) $k(t)$ – чётная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция;

3) справедливы тождества (8).

Тогда отражающая матрица рассматриваемой системы задаётся формулой

$$F(t) = E \operatorname{ch} \varphi(t) + M(t) \operatorname{sh} \varphi(t),$$

где

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 2 \int_0^t p(\tau)k(\tau) d\tau, \quad M(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/p(t) \\ p(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение сделаем следующее важное при практическом использовании полученных результатов

Замечание 3. Рассмотрим двумерную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + P(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + Q(t, x, y), \quad (9)$$

где $P(t, x, y)$ и $Q(t, x, y)$ – ряды (или многочлены) по степеням x и y с зависящими от времени t коэффициентами.

Если

$$\begin{pmatrix} F_1(t, x, y) \\ F_2(t, x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

– отражающая функция системы линейного приближения

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y,$$

то нередко эта отражающая функция является отражающей функцией и всей системы (9). Это происходит тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$f_1(t)P(t, x, y) + f_2(t)Q(t, x, y) + P(-t, f_1(t)x + f_2(t)y, f_3(t)x + f_4(t)y) \equiv 0,$$

$$f_3(t)P(t, x, y) + f_4(t)Q(t, x, y) + Q(-t, f_1(t)x + f_2(t)y, f_3(t)x + f_4(t)y) \equiv 0.$$

Проверить эти соотношения при известных $f_k(t)$, $k = \overline{1, 4}$, можно простыми, хотя и громоздкими при больших степенях у P и Q вычислениями. При этом для однородных по x , y многочленов $P_s(t, x, y)$, $Q_s(t, x, y)$ степени s , для которых

$$P(t, x, y) = \sum_{s=2}^n P_s(t, x, y), \quad Q(t, x, y) = \sum_{s=2}^n Q_s(t, x, y),$$

вычисления проводятся для каждого s отдельно.

2. Отражающая функция уравнения Риккати. Дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 \quad (10)$$

с дифференцируемыми коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = (a_{\text{ev}}(t) + b_{\text{ev}}(t)x + c_{\text{ev}}(t)x^2) + (a_{\text{od}}(t) + b_{\text{od}}(t)x + c_{\text{od}}(t)x^2),$$

где выражение в первых скобках представляет собой сумму чётных по t слагаемых, а выражение во вторых скобках – сумму нечётных по t слагаемых.

Теорема 3. Пусть $b_{\text{ev}}^2(t) - 4a_{\text{ev}}(t)c_{\text{ev}}(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и функции

$$r(t) := \frac{-2a_{\text{ev}}}{\sqrt{b_{\text{ev}}^2 - 4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}}}}, \quad s(t) := \frac{2c_{\text{ev}}}{\sqrt{b_{\text{ev}}^2 - 4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}}}}, \quad n(t) := \frac{-b_{\text{ev}}}{\sqrt{b_{\text{ev}}^2 - 4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}}}}$$

удовлетворяют системе соотношений

$$\frac{dr}{dt} = b_{\text{od}}(t)r - 2a_{\text{od}}(t)n, \quad \frac{ds}{dt} = -b_{\text{od}}(t)s - 2c_{\text{od}}(t)n, \quad \frac{dn}{dt} = c_{\text{od}}(t)r + a_{\text{od}}(t)s. \quad (11)$$

Тогда отражающая функция уравнения (10) задаётся формулой

$$F(t, x) = \frac{(\text{ch } \varphi(t) + n(t) \text{sh } \varphi(t))x + r(t) \text{sh } \varphi(t)}{xs(t) \text{sh } \varphi(t) + \text{ch } \varphi(t) - n(t) \text{sh } \varphi(t)},$$

где $\varphi(t) := \int_0^t \sqrt{b_{\text{ev}}^2(\tau) - 4a_{\text{ev}}(\tau)c_{\text{ev}}(\tau)} d\tau$.

Доказательство этой теоремы можно провести, проверив основное соотношение для отражающей функции из свойства 3.

Следствие 4. При выполнении условий теоремы 3 продолжимое на отрезок $[-\omega, \omega]$ решение $x(t; \omega, x(\omega))$ уравнения (10) является решением краевой задачи

$$G(x(\omega), x(-\omega)) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$G(x(\omega), F(\omega, x(\omega))) = 0.$$

Это утверждение следует из главного свойства $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$ отражающей функции.

В случае $b_{\text{ev}}^2(t) - 4a_{\text{ev}}(t)c_{\text{ev}}(t) < 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\varphi(t) = i \int_0^t \sqrt{4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}} - b_{\text{ev}}^2} =: \psi(t)i,$$

и отражающая функция уравнения (10) принимает вид

$$F(t, x) = \frac{(\cos \varphi(t) + n(t) \sin \varphi(t))x + r(t) \sin \varphi(t)}{xs(t) \sin \varphi(t) + \cos \varphi(t) - n(t) \sin \varphi(t)},$$

где

$$r(t) := \frac{-2a_{\text{ev}}}{\sqrt{4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}} - b_{\text{ev}}^2}}, \quad s(t) := \frac{-2c_{\text{ev}}}{\sqrt{4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}} - b_{\text{ev}}^2}}, \quad n(t) := \frac{-b_{\text{ev}}}{\sqrt{4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}} - b_{\text{ev}}^2}}. \quad (12)$$

Если при этом коэффициенты уравнения (10) 2ω -периодичны, то

$$\int_0^t \sqrt{4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}} - b_{\text{ev}}^2} d\tau = c_0 t + \theta(t),$$

где постоянная $c_0 = \omega^{-1} \int_0^\omega \sqrt{4a_{\text{ev}}c_{\text{ev}} - b_{\text{ev}}^2} d\tau$, а $\theta(t)$ – 2ω -периодическая функция.

Отсюда приходим к следующей теореме.

Теорема 4. Пусть все непрерывно дифференцируемые коэффициенты уравнения Риккати (10) 2ω -периодичны и $4a_{ev}(t)c_{ev}(t) - b_{ev}^2(t) < 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть также функции (12) удовлетворяют соотношениям (11).

Тогда все продолжимые на отрезок $[-\omega, \omega]$ решения уравнения (10) являются $2\omega p$ -периодическими, если

$$\int_0^\omega \sqrt{4a_{ev}c_{ev} - b_{ev}^2} d\tau = \pi \frac{q}{p},$$

где $p, q \in \mathbb{N}$ и q/p – несократимая дробь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мироненко В.И., Мироненко В.В. Явное вычисление отображения Пуанкаре линейной периодической системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 196–202.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.
3. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.
4. Мироненко В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1635–1638.
5. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
6. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
7. Mironenko V.I., Mironenko V.V. How to construct equivalent differential systems // Appl. Math. Let. 2009. V. 22. P. 1356–1359.
8. Mironenko V.I., Mironenko V.V. Time symmetries and in-period transformations // Appl. Math. Let. 2011. V. 24. P. 1721–1723.
9. Мироненко В.И., Мироненко В.В. The new method for the searching periodic solutions of periodic differential systems // J. of Appl. Anal. and Comp. 2016. V. 6. № 3. P. 876–883.
10. Zhou Zhengxin. The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications. Beijing, 2014.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ
СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРОГО
КЛАССА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 г. И. П. Рязанцева

В гильбертовом пространстве для дифференциальных уравнений третьего порядка, линейных относительно производных, с действительнозначными коэффициентами, являющимися функциями независимой переменной, и с нелинейным относительно искомой функции членом, задаваемым сильно монотонным оператором, удовлетворяющим условию Липшица, продемонстрирован метод установления достаточных условий асимптотической устойчивости в целом стационарных решений. Приведены неравенства, позволяющие оценить для указанных уравнений скорость сходимости их решений к стационарному решению.

DOI: 10.31857/S0374064121100071

1. Постановка задачи. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H , оператор $A : H \rightarrow H$ является, вообще говоря, нелинейным и обладает свойствами:

A – сильно монотонный на H оператор, т.е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \text{для всех } u, v \in H, \quad \text{где } M = \text{const} > 0; \quad (1)$$

A удовлетворяет на H условию Липшица, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \text{для всех } u, v \in H, \quad \text{где } L = \text{const} > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим в пространстве H уравнение

$$Ax = f, \quad (3)$$

в котором f – фиксированный элемент из H . В силу предположений (1) и (2) уравнение (3) имеет единственное решение $x \in H$ при любом элементе $f \in H$ (см., например, [1, теорема 18.5; 2, теорема 1.7.5]). Кроме того, задача Коши

$$y'''(t) + \varphi_1(t)y''(t) + \varphi_2(t)y'(t) + \varphi_3(t)(Ay(t) - f) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (4)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad y''(t_0) = y''_0 \quad (5)$$

однозначно разрешима при любых непрерывных при $t \geq t_0$ действительнозначных функциях $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ и любых элементах y_0 , y'_0 , y''_0 из H (см. [3, § 33.4]).

Тождественно постоянная функция $y(t) = x \in H$ при всех $t \geq t_0$, где x – решение уравнения (3), является решением уравнения (4). Это решение называется *стационарным* решением (см. [4, § 1]) уравнения (4). Для приложений представляет интерес поведение решения $y(t) \neq \text{const}$ задачи (4), (5) относительно стационарного решения уравнения (4). Если $H = \mathbb{R}$ и $Ay = ay$, $a = \text{const} > 0$, $f = 0$, $\varphi_k(t) = \varphi_k = \text{const}$, $k = \overline{1, 3}$, то эта задача является линейной и легко решается с помощью критерия Рауса–Гурвица. В наших предположениях уравнение (4) на H в общем случае не является линейным.

Цель данной работы состоит в установлении условий на функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ и параметры M , L , при которых выполняется соотношение

$$\|y(t) - x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

при любых начальных условиях (5), т.е., другими словами, нас интересуют достаточные условия асимптотической устойчивости в целом стационарного решения x уравнения (4). Решение поставленной задачи получим, используя методику, предложенную в работах [5, 6], для некоторого определяемого ниже класса функций $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, 3}$. Для решения построим вспомогательное линейное дифференциальное неравенство третьего порядка относительно некоторой скалярной функции, для которого можно использовать критерий Рауса–Гурвица.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть действительнзначная функция $x(t) \in C^2[t_0, \infty)$ удовлетворяет линейному дифференциальному неравенству второго порядка

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) \leq a(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0,$$

где p и q – действительные числа, а функция $a(t)$, $t \geq t_0$, непрерывна. Пусть также k_1, k_2 – корни уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если k_1 и k_2 – действительные различные числа, то верно неравенство

$$x(t) \leq \frac{1}{k_2 - k_1} \left((x_0 k_2 - x'_0) \exp\{k_1(t - t_0)\} + (x'_0 - k_1 x_0) \exp\{k_2(t - t_0)\} + \int_{t_0}^t a(s) [\exp\{k_2(t - s)\} - \exp\{k_1(t - s)\}] ds \right); \quad (6)$$

2) если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, α и β – действительные числа, то выполняется оценка

$$x(t) \leq \left(\frac{x'_0 - \alpha x_0}{\beta} \sin(\beta(t - t_0)) + x_0 \cos(\beta(t - t_0)) \right) \exp\{\alpha(t - t_0)\} + \frac{1}{\beta} \int_{t_0}^t a(s) \exp\{\alpha(t - s)\} \sin(\beta(t - s)) ds; \quad (7)$$

3) если $k_1 = k_2 = \alpha$, то справедливо неравенство

$$x(t) \leq (x_0(1 + \alpha t_0) - t_0 x'_0) \exp\{\alpha(t - t_0)\} + (x'_0 - \alpha x_0) t \exp\{\alpha(t - t_0)\} + \int_{t_0}^t a(s)(t - s) \exp\{\alpha(t - s)\} ds. \quad (8)$$

Неравенство (6) установлено, например, в [7]. Оценки (7) и (8) можно получить, в частности, следующим образом. Для случаев 2), 3) решим задачу Коши

$$v''(t) + pv'(t) + qv(t) = a(t), \quad v(t_0) = x(t_0) = x_0, \quad v'(t_0) = x'(t_0) = x'_0,$$

и на основании результатов [8, § 24.3] запишем неравенство $x(t) \leq v(t)$, что приведёт к оценкам (7) и (8).

Лемма 2. Пусть действительнзначная функция $x(t) \in C^3[t_0, \infty)$ удовлетворяет линейному дифференциальному неравенству третьего порядка

$$x'''(t) + px''(t) + qx'(t) + gx(t) \leq \eta(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad x''(t_0) = x''_0,$$

где p , q и g – действительные числа, а функция $\eta(t)$, $t \geq t_0$, непрерывна. Пусть также k_1 , k_2 , k_3 – корни уравнения

$$k^3 + pk^2 + qk + g = 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

i) если корни k_1 , k_2 , k_3 – действительные попарно различные числа, то верна оценка

$$\begin{aligned} x(t) \leq & \frac{1}{k_2 - k_3} \left(u_1 \exp\{k_2(t - t_0)\} + u_2 \exp\{k_3(t - t_0)\} + \right. \\ & + u_0 \left[\frac{1}{k_1 - k_2} (\exp\{k_1(t - t_0)\} - \exp\{k_2(t - t_0)\}) - \frac{1}{k_1 - k_3} (\exp\{k_1(t - t_0)\} - \exp\{k_3(t - t_0)\}) \right] + \\ & + \frac{1}{k_1 - k_2} \int_{t_0}^t \eta(\theta) (\exp\{k_1(t - \theta)\} - \exp\{k_2(t - \theta)\}) d\theta - \\ & \left. - \frac{1}{k_1 - k_3} \int_{t_0}^t \eta(\theta) (\exp\{k_1(t - \theta)\} - \exp\{k_3(t - \theta)\}) d\theta \right), \end{aligned}$$

где $u_0 = x_0'' - (k_2 + k_3)x_0' + k_2k_3x_0$, $u_1 = x_0' - k_3x_0$, $u_2 = k_2x_0 - x_0'$;

ii) если k_1 – действительное число, а $k_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные взаимно сопряжённые числа, то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} x(t) \leq & [x_0 \cos(\beta(t - t_0)) + u_3 \sin(\beta(t - t_0))] \exp\{\alpha(t - t_0)\} + \\ & + \frac{u_0}{\beta(\bar{k}^2 + \beta^2)} [\beta \exp\{k_1(t - t_0)\} - \exp\{\alpha(t - t_0)\} (\beta \cos(\beta(t - t_0)) + \bar{k} \sin(\beta(t - t_0)))] + \\ & + \frac{1}{\bar{k}^2 + \beta^2} \left[\exp(k_1 t) \int_{t_0}^t \eta(\xi) \exp(-k_1 \xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \exp(\alpha t) \int_{t_0}^t \eta(\xi) \exp(-\alpha \xi) \left(\cos(\beta(t - \xi)) - \frac{\bar{k}}{\beta} \sin(\beta(t - \xi)) \right) d\xi \right], \end{aligned}$$

где $u_0 = x_0'' - 2\alpha x_0' + (\alpha^2 + \beta^2)x_0$, $\bar{k} = k_1 - \alpha$, $u_3 = (x_0' - \alpha x_0)/\beta$;

iii) если $k_1 = k_2 = k$, $k_3 \neq k$, то выполнена оценка

$$\begin{aligned} x(t) \leq & w_1 \exp\{k(t - t_0)\} + w_2 t \exp\{k(t - t_0)\} - \\ & - \frac{u_0}{k_3 - k} \left[(t - t_0) \exp\{k(t - t_0)\} - \frac{1}{k_3 - k} (\exp\{k_3(t - t_0)\} - \exp\{k(t - t_0)\}) \right] + \\ & + \frac{1}{k_3 - k} \int_{t_0}^t \eta(\xi) \left[(\xi - t) \exp\{k(t - \xi)\} + \frac{1}{k_3 - k} (\exp\{k_3(t - \xi)\} - \exp\{k(t - \xi)\}) \right] d\xi, \end{aligned}$$

здесь $w_1 = x_0(1 + kt_0) - t_0 x_0'$, $w_2 = x_0' - kx_0$, $u_0 = x_0'' - 2kx_0' + k^2x_0$;

iv) если $k_1 = k_2 = k_3 = k$, то верно неравенство

$$x(t) \leq (v_1 + v_2 t + v_3 t^2) \exp\{k(t - t_0)\} + \frac{\exp(kt)}{2} \int_{t_0}^t (s - t)^2 \eta(s) \exp(-ks) ds,$$

где $v_1 = (1 + t_0 k + t_0^2 k^2 / 2)x_0 - t_0(1 + t_0 k)x'_0 + t_0^2 x''_0 / 2$, $v_2 = -k(1 + t_0 k)x_0 + (1 + 2kt_0)x'_0 - t_0 x''_0$, $v_3 = (k^2 x_0 - 2kx'_0 + x''_0) / 2$.

3. Основной результат. Пусть $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, 3}$, – действительнзначные положительные четырежды непрерывно дифференцируемые убывающие и выпуклые вниз функции, $t \geq t_0 \geq 0$. Тогда имеют место неравенства (см. [9, гл. 2, § 10])

$$\varphi_k(t) - \varphi_k(\tau) \leq \varphi'_k(t)(t - \tau), \quad t \leq \tau, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (9)$$

Кроме того, считаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \varphi_k^0 > 0, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (10)$$

При исследовании поведения решения задачи (4), (5) при $t \rightarrow \infty$ важную роль играет ограниченность норм производных $y^{(k)}(t)$ ($k = \overline{0, 2}$). Приведём достаточное условие, при котором эти свойства для решения $y(t)$ уравнения (4) выполняются (см. [5]).

Пусть существует положительное число R_0 такое, что при всех достаточно больших t справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \varphi_1(t) \|y''(t)\|^2 - (y(t) + y''(t), y'(t)) + \varphi_2(t)(y'(t), y''(t)) + \\ & + \varphi_3(t)(Ay(t) - f, y''(t)) \geq 0, \quad \text{если} \quad \|y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2 + \|y''(t)\|^2 \geq R_0 > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

тогда найдётся постоянная $r_0 > 0$, для которой

$$\|y^{(k)}(t)\| \leq r_0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad t \geq t_0. \quad (12)$$

Далее считаем условие (11) выполненным.

Обратимся к задаче (4), (5) и определим скалярную функцию

$$r(t) = \frac{\|y(t) - x\|^2}{2};$$

несложно видеть, что справедливы тождества

$$\begin{aligned} r'(t) &= (y'(t), y(t) - x), \quad r''(t) = \|y'(t)\|^2 + (y''(t), y(t) - x), \\ r'''(t) &= (y'''(t), y(t) - x) + 3(y''(t), y'(t)). \end{aligned}$$

Здесь и всюду далее x – стационарное решение уравнения (4).

Умножив равенство (4) скалярно на $y(t) - x$ и воспользовавшись свойством (1) оператора A , получим неравенство

$$r'''(t) + \varphi_1(t)r''(t) + \varphi_2(t)r'(t) + 2M\varphi_3(t)r(t) \leq \varphi_1(t)\|y'(t)\|^2 + 3\|y''(t)\|\|y'(t)\|. \quad (13)$$

Построим следующие вспомогательные функции:

$$\rho(t) = \frac{\|y'(t)\|^2}{2}, \quad R(t) = \frac{\|y''(t)\|^2}{2},$$

для них очевидны тождества

$$\rho'(t) = (y''(t), y'(t)), \quad \rho''(t) = (y'''(t), y'(t)) + \|y''(t)\|^2, \quad (14)$$

$$R'(t) = (y'''(t), y''(t)). \quad (15)$$

Используя числовое неравенство $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ и определения функций $\rho(t)$ и $R(t)$, от неравенства (13) приходим к неравенству

$$r'''(t) + \varphi_1(t)r''(t) + \varphi_2(t)r'(t) + 2M\varphi_3(t)r(t) \leq (2\varphi_1(t) + 3)\rho(t) + 3R(t) \equiv F(t). \quad (16)$$

Найдём оценки сверху функций $\rho(t)$ и $R(t)$. Умножив равенство (4) скалярно на $y'(t)$, будем иметь

$$(y'''(t), y'(t)) + \varphi_1(t)(y''(t), y'(t)) + \varphi_2(t)\|y'(t)\|^2 = -\varphi_3(t)(Ay(t) - Ax, y'(t)). \quad (17)$$

С учётом определения функции $\rho(t)$, тождеств (14) и свойства (2) оператора A от неравенства (17) придём к неравенству

$$\rho''(t) + \varphi_1(t)\rho'(t) + 2\varphi_2(t)\rho(t) \leq \|y''(t)\|^2 + L\varphi_3(t)\|y(t) - x\|\|y'(t)\|. \quad (18)$$

Последнее слагаемое в правой части неравенства (18), воспользовавшись указанным выше числовым неравенством и определением функций $r(t)$ и $\rho(t)$, оценим следующим образом:

$$L\varphi_3(t)\|y(t) - x\|\|y'(t)\| \leq L\varphi_3(t)(r(t) + \rho(t)). \quad (19)$$

Значит, от неравенства (18) приходим к неравенству

$$\rho''(t) + \varphi_1(t)\rho'(t) + (2\varphi_2(t) - L\varphi_3(t))\rho(t) \leq 2R(t) + L\varphi_3(t)r(t).$$

Применяя в последнем неравенстве метод замороженных коэффициентов и учитывая свойства функций $\varphi_k(t)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + (2\varphi_2(\tau) - L\varphi_3(\tau))\rho(t) &\leq 2R(t) + L\varphi_3(t)r(t) + \\ &+ (\varphi_1(\tau) - \varphi_1(t))\rho'(t) + L(\varphi_3(t) - \varphi_3(\tau))\rho(t), \quad t \leq \tau. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание оценки (9) и (12), выводим неравенство

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + (2\varphi_2(\tau) - L\varphi_3(\tau))\rho(t) \leq 2R(t) + L\varphi_3(t)r(t) + c_1g_2(t, \tau), \quad (20)$$

в котором $g_2(t, \tau) \equiv (t - \tau)(\varphi_1'(t) + \varphi_3'(t))$, $t \leq \tau$. Здесь и далее через c_k , $k \in \mathbb{N}$, обозначаем положительные постоянные.

Умножив равенство (4) скалярно на $y''(t)$, после простых преобразований получим неравенство

$$(y'''(t), y''(t)) + \varphi_1(t)\|y''(t)\|^2 \leq \varphi_2(t)\|y'(t)\|\|y''(t)\| + \varphi_3(t)\|Ay(t) - Ax\|\|y''(t)\|.$$

С учётом определения функции $R(t)$ и тождества (15), используя оценку типа (19) для слагаемых в правой части последнего неравенства, будем иметь

$$R'(t) + 2\varphi_1(t)R(t) \leq \varphi_2(t)(\rho(t) + R(t)) + L\varphi_3(t)(r(t) + R(t)),$$

или

$$R'(t) + (2\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - L\varphi_3(t))R(t) \leq \varphi_2(t)\rho(t) + L\varphi_3(t)r(t). \quad (21)$$

Пусть

$$m_1(t) \equiv 2\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - L\varphi_3(t) \geq m_0 = \text{const} > 1 \quad \text{для всех } t \geq t_0, \quad (22)$$

тогда из неравенства (21) вытекает, что

$$R'(t) + m_0R(t) \leq \varphi_2(t)\rho(t) + L\varphi_3(t)r(t),$$

и лемма 1 из [9, гл. 2, § 10] приводит к оценке

$$R(t) \leq R(t_0) \exp\{-m_0(t - t_0)\} + \int_{t_0}^t (\varphi_2(\xi)\rho(\xi) + L\varphi_3(\xi)r(\xi)) \exp\{-m_0(t - \xi)\} d\xi.$$

Применив к её интегральному слагаемому правило Лопиталя, будем иметь

$$R(t) \leq R(t_0) \exp\{-m_0(t - t_0)\} + \frac{\bar{\alpha}}{m_0}(\varphi_2(t)\rho(t) + L\varphi_3(t)r(t)), \quad \bar{\alpha} > 1, \quad t \geq t_0. \quad (23)$$

При этом считаем, что $\bar{\gamma} = 1 - \bar{\alpha}/m_0 > 0$. Значит, верны неравенства

$$1 < \bar{\alpha} < m_0, \quad 0 < \bar{\gamma} < 1. \quad (24)$$

Учитывая в неравенстве (20) оценки (23), (9), (12) и предположение (22), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + (2(1 - \bar{\alpha}/m_0)\varphi_2(\tau) - L\varphi_3(\tau))\rho(t) &\leq \\ &\leq L(1 + 2\bar{\alpha}/m_0)\varphi_3(t)r(t) + c_2(\exp(-m_0t) + g(t, \tau)), \end{aligned} \quad (25)$$

в котором

$$g(t, \tau) \equiv (t - \tau) \sum_{k=1}^3 \varphi'_k(t), \quad t \leq \tau. \quad (26)$$

Для упрощения записи введём обозначение

$$m_2(t) \equiv 2\bar{\gamma}\varphi_2(t) - L\varphi_3(t) \quad (27)$$

и запишем неравенство (25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + m_2(\tau)\rho(t) &\leq \\ &\leq \gamma_0 L\varphi_3(t)r(t) + c_2(\exp(-m_0t) + g(t, \tau)) \equiv G(t, \tau), \quad \gamma_0 = 1 + 2\bar{\alpha}/m_0. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу предположения (10) у функций $m_1(t)$ и $m_2(t)$ существуют пределы при $t \rightarrow \infty$. На основании неравенства (22) заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_1(t) = 2\varphi_1^0 - \varphi_2^0 - L\varphi_3^0 \equiv m_1^0 > 1. \quad (29)$$

Предел функции $m_2(t)$ при $t \rightarrow \infty$ считаем положительным, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_2(t) = 2\bar{\gamma}\varphi_2^0 - L\varphi_3^0 \equiv m_2^0 > 0, \quad \bar{\gamma} = 1 - \bar{\alpha}/m_0, \quad 0 < \bar{\gamma} < 1. \quad (30)$$

Для однородного дифференциального уравнения

$$\rho''(t) + \varphi_1(\tau)\rho'(t) + m_2(\tau)\rho(t) = 0,$$

определяемого левой частью неравенства (28), характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \varphi_1(\tau)k + m_2(\tau) = 0. \quad (31)$$

Так как в силу (27) корни уравнения (31) выражаются через функции $\varphi_k(\tau)$ при $k = \overline{1, 3}$, которые положительны и непрерывны при $\tau \geq t_0$, а также убывают и имеют конечные пределы при $\tau \rightarrow \infty$, то модули указанных корней непрерывны и ограничены при $\tau \geq t_0$. Кроме того, учитывая соотношение (30), будем считать, что $m_2(\tau) > 0$ при $\tau \geq t_0$.

Установим оценки сверху для функции $\rho(t)$ на основании неравенства (28). Прежде всего отметим, что корни уравнения (31) имеют отрицательные действительные части. Пусть $-\mu(\tau)$ – максимальная действительная часть корней уравнения.

Предположим, что

$$|(\varphi_1^0)^2/4 - m_2^0| = D^0 \neq 0. \quad (32)$$

Значит, дискриминант $D(\tau)$ квадратного уравнения (31) не равен нулю при достаточно больших τ , а корни этого уравнения различны и имеют отрицательные действительные части. Тогда в силу (6) и (7) верна оценка

$$\rho(t) \leq c_3 \exp(-\mu(\tau)t) + \tilde{\psi}(\tau) \int_{t_0}^t G(s, \tau) \exp\{-\mu(\tau)(t-s)\} ds, \quad (33)$$

в которой

$$\tilde{\psi}(\tau) \equiv \begin{cases} 1/(2\sqrt{D(\tau)}), & \text{если } D(\tau) > 0, \\ 1/\sqrt{|D(\tau)|}, & \text{если } D(\tau) < 0, \end{cases}$$

а функция $G(t, \tau)$ определена в (28).

Пусть

$$\tilde{\psi}(\tau)/\mu(\tau) \leq \psi^0 \quad \text{для всех } \tau \geq t_0. \quad (34)$$

Применив к интегралу в (33) правило Лопиталья по переменной t , получим, что при достаточно больших t справедлива следующая оценка:

$$\rho(t) \leq c_3 \exp(-\mu(\tau)t) + \alpha \psi^0 G(t, \tau), \quad \alpha > 1, \quad t \leq \tau.$$

Отсюда с учётом определения функции $G(t, \tau)$ (см. (28)) приходим к неравенству

$$\rho(t) \leq c_4 \Phi(t, \tau) + \alpha \gamma_0 \psi^0 L \varphi_3(t) r(t), \quad (35)$$

здесь

$$\Phi(t, \tau) \equiv \exp(-\mu(\tau)t) + \exp(-m_0 t) + g(t, \tau), \quad (36)$$

функция $g(t, \tau)$ определена равенством (26). Теперь, приняв во внимание в оценке (23) неравенство (35), получаем

$$R(t) \leq c_5 \Phi(t, \tau) + \frac{\bar{\alpha}}{m_0} L \varphi_3(t) (\alpha \gamma_0 \psi^0 \varphi_2(t) + 1) r(t). \quad (37)$$

Далее, используя неравенства (35) и (37), построим оценку сверху для функции $F(t)$, определённой в (16):

$$F(t) \leq c_6 \Phi(t, \tau) + \frac{\bar{\alpha} L \varphi_3(t)}{m_0} \Psi(t) r(t), \quad t \leq \tau,$$

где

$$\Psi(t) \equiv \gamma_0 \psi^0 (2m_0 \varphi_1(t) + 3\alpha \varphi_2(t) + 3m_0) + 3. \quad (38)$$

Таким образом, от неравенства (16) приходим к следующему дифференциальному неравенству третьего порядка:

$$r'''(t) + \varphi_1(t) r''(t) + \varphi_2(t) r'(t) + W(t) r(t) \leq c_6 \Phi(t, \tau),$$

в котором

$$W(t) \equiv \varphi_3(t) \left(2M - \frac{\bar{\alpha} L}{m_0} \Psi(t) \right), \quad 1 < \bar{\alpha} < m_0, \quad t \leq \tau. \quad (39)$$

Применив в левой части последнего неравенства метод замороженных коэффициентов, придём к неравенству

$$r'''(t) + \varphi_1(\tau) r''(t) + \varphi_2(\tau) r'(t) + W(\tau) r(t) \leq c_7 \Phi(t, \tau), \quad t \leq \tau, \quad (40)$$

с некоторыми начальными условиями

$$r(t_0) = \|y_0 - x\|^2/2, \quad r'(t_0) = (y'_0, y_0 - x), \quad r''(t_0) = \|y'_0\|^2 + (y''_0, y_0 - x). \quad (41)$$

Теперь для скалярной функции $r(t)$, удовлетворяющей неравенству (40) и начальным условиям (41), найдём оценку сверху, зависящую от t и τ ($t \leq \tau$). Используя лемму 2, установим оценку сверху для решения $r(t)$ задачи (40), (41) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$k^3 + \varphi_1(\tau)k^2 + \varphi_2(\tau)k + W(\tau) = 0. \quad (42)$$

Так как нас интересуют условия, при которых $r(t) = \|y(t) - x\|^2/2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то корни уравнения (42) должны иметь отрицательную действительную часть. Согласно критерию Рауса–Гурвица для этого необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\varphi_1(\tau) > 0, \quad \varphi_1(\tau)\varphi_2(\tau) - W(\tau) > 0, \quad W(\tau) > 0 \quad \text{для всех } \tau \geq t_0. \quad (43)$$

Далее считаем, что неравенства (43) выполнены.

В наших предположениях коэффициенты уравнения (42) непрерывны, положительны и имеют конечные пределы при $\tau \rightarrow \infty$ (см. (10), (38), (39)). Значит, корни уравнения (42) ограничены в совокупности при $\tau \geq t_0$.

Для упрощения записи введём некоторые обозначения. Пусть функция $h(t)$ дифференцируема достаточное число раз при $t \geq t_0$. Построим функции $G_k(h(t))$ по следующему рекуррентному правилу:

$$G_1(h(t)) = (h(t)t)', \quad G_k(h(t)) = (h(t)t)'G_{k-1}(h(t)) + G'_{k-1}(h(t)), \quad k \geq 2. \quad (44)$$

Далее через $-\lambda(\tau)$ будем обозначать максимальную действительную часть корней уравнения (42). Заметим, что $\lambda(\tau) > 0$ при всех $\tau \geq t_0$ в силу (43).

а) Сначала предположим, что корни уравнения (42) попарно различные. Тогда вследствие леммы 2 для решения $r(t)$ задачи (40), (41) имеем оценку

$$r(t) \leq c_8 \left\{ \exp(-\lambda(\tau)t) + \int_{t_0}^t \Phi(s, \tau) \exp(-\lambda(\tau)(t-s)) ds \right\}, \quad t \leq \tau. \quad (45)$$

Полагая в этой оценке $t = \tau$ и учитывая определение (36) функции $\Phi(t, \tau)$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r(\tau) &\leq c_8 \left\{ \exp(-\lambda(\tau)\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \Phi(s, \tau) \exp(-\lambda(\tau)(\tau-s)) ds \right\} = c_8 \left\{ \exp(-\lambda(\tau)\tau) + \right. \\ &+ \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \left[\int_{t_0}^{\tau} \exp(-\mu(\tau)s) \exp(\lambda(\tau)s) ds + \int_{t_0}^{\tau} \exp(-m_0s) \exp(\lambda(\tau)s) ds + \right. \\ &\left. \left. + \int_{t_0}^{\tau} (s-\tau) \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) ds \right] \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Предположим, что выполняются условия

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \lambda(\tau) = \infty, \quad (47)$$

$$\lambda'(\tau) \leq 0, \quad \tau \geq t_0, \quad (48)$$

тогда первое слагаемое, стоящее в фигурных скобках в (46), является бесконечно малой величиной при $\tau \rightarrow \infty$. Применение правила Лопиталя при $\tau \rightarrow \infty$ приводит к эквивалентности

$$\frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \int_{t_0}^{\tau} \exp(-m_0s) \exp(\lambda(\tau)s) ds \sim$$

$$\sim \frac{\exp(-m_0\tau)}{G_1(\lambda(\tau))} + \frac{\lambda'(\tau)}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))} \int_{t_0}^{\tau} s \exp(-m_0s) \exp(\lambda(\tau)s) ds. \quad (49)$$

Предположим, что неравенства

$$G_k(\lambda(\tau)) > 0 \quad \text{для всех } \tau \geq t_0, \quad k = \overline{1, k_0}, \quad (50)$$

имеют место при $k_0 = 2$. Тогда из эквивалентности (49) с учётом условия (48) следует, что третье слагаемое, стоящее в фигурных скобках в (46), сходится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, если выполнено соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(-m_0\tau)}{G_1(\lambda(\tau))} = 0, \quad (51)$$

постоянная m_0 в котором удовлетворяет оценке (22).

Далее рассмотрим последнее слагаемое в оценке (46). Применив дважды правило Лопиталья и отбросив отрицательные слагаемые, с учётом определения (44) и неравенств (50) при $k_0 = 2$ запишем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \int_{t_0}^{\tau} (s - \tau) \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) ds &\sim - \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))} \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) ds + \\ &+ \frac{\lambda'(\tau)}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))} \int_{t_0}^{\tau} (s - \tau) \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) s ds \leq \\ &\leq - \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_1(\lambda(\tau))} \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) ds \sim \\ &\sim - \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)G_2(\lambda(\tau))} \left(\sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau) \exp(\lambda(\tau)\tau) + \lambda'(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau) \exp(\lambda(\tau)s) s ds \right) \leq \\ &\leq - \frac{1}{G_2(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau). \end{aligned}$$

Следовательно, последнее слагаемое в (46) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{G_2(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau) = 0. \quad (52)$$

Теперь предположим, что имеет место равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \int_{t_0}^{\tau} \exp(\varphi_\lambda(\tau)s) ds = 0, \quad \varphi_\lambda(\tau) = -\mu(\tau) + \lambda(\tau), \quad (53)$$

где $-\mu(\tau)$ – максимальная из действительных частей корней уравнения (31).

Таким образом, при попарно различных корнях уравнения (42) в предположениях (47), (48), (50) при $k_0 = 2$, (51)–(53) установлено, что решение $r(\tau)$ уравнения (40) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

б) Пусть теперь все корни уравнения (42) действительные, причём $k_1(\tau) = k_2(\tau) = \bar{k}(\tau)$, $k_3(\tau) \neq \bar{k}(\tau)$, и неравенства (50) верны при $k_0 = 3$. Отметим, что в силу предположений (43)

справедливы неравенства $k_i(\tau) < 0$, $i = \overline{1, 3}$. В данном случае величина $\lambda(\tau) > 0$ определяется равенством $-\lambda(\tau) = \max\{\bar{k}(\tau), k_3(\tau)\}$.

Если $-\lambda(\tau) = k_3(\tau)$, то оценка (45) и вытекающие из неё соотношения сохраняются.

Пусть $-\lambda(\tau) = \bar{k}(\tau)$, тогда, используя оценку из утверждения iii) леммы 2, приходим к следующей оценке решения $r(t)$ задачи (40), (41):

$$r(t) \leq c_9 \left\{ t \exp(-\lambda(\tau)t) + \int_{t_0}^t \Phi(s, \tau)(t-s) \exp(-\lambda(\tau)(t-s)) ds \right\}, \quad t \leq \tau, \quad (54)$$

где функция $\Phi(t, \tau)$ определена равенством (36). Полагая в (54) $t = \tau$, аналогично (46) получаем оценку

$$r(\tau) \leq c_9 \left\{ \tau \exp(-\lambda(\tau)\tau) + \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \left[\int_{t_0}^{\tau} (\tau-s) \exp(\varphi_{\lambda}(\tau)s) ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_0}^{\tau} (\tau-s) \exp(-m_0 s) \exp(\lambda(\tau)s) ds - \int_{t_0}^{\tau} (\tau-s)^2 \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) ds \right] \right\}. \quad (55)$$

Вследствие предельного равенства (47) и неубывания функции $\lambda(\tau)\tau$ при $\tau \geq t_0$ (см. неравенство (50) при $k = 1$) с помощью правила Лопиталья заключаем, что первое слагаемое в правой части оценки (55) стремится к нулю при выполнении условия

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(-\lambda(\tau)\tau)}{G_1(\lambda(\tau))} = 0. \quad (56)$$

Учитывая неравенство (50) при $k = 1$ и применяя в правой части оценки (55) правило Лопиталья для третьего слагаемого дважды, а для четвёртого слагаемого трижды и отбрасывая при этом отрицательные члены, устанавливаем сходимость этих слагаемых к нулю при выполнении соответственно следующих предельных равенств:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(-m_0\tau)}{G_2(\lambda(\tau))} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{G_3(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau) = 0. \quad (57)$$

Предположим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \int_{t_0}^{\tau} (\tau-s) \exp(\varphi_{\lambda}(\tau)s) ds = 0, \quad \varphi_{\lambda}(\tau) = -\mu(\tau) + \lambda(\tau), \quad (58)$$

тогда и второе слагаемое в правой части оценки (55) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Таким образом, если у уравнения (42) ровно два различных корня, то решение $r(\tau)$ уравнения (40) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ при выполнении условий (56)–(58) и (50) при $k_0 = 3$.

в) Пусть уравнение (42) имеет корень $k = -\lambda(\tau) < 0$ кратности три. В этом случае лемма 2 обеспечивает следующую оценку для решения задачи (40), (42):

$$r(\tau) \leq c_{10} \left\{ \tau^2 \exp(-\lambda(\tau)\tau) + \frac{1}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \int_{t_0}^{\tau} (\tau-s)^2 \Phi(s, \tau) \exp(\lambda(\tau)s) ds \right\}. \quad (59)$$

Считаем, что неравенства (50) выполнены при $k_0 = 4$. Применение дважды правила Лопиталья при $\tau \rightarrow \infty$ приводит к эквивалентности

$$\frac{\tau^2}{\exp(\lambda(\tau)\tau)} \sim \frac{2}{\exp(\lambda(\tau)\tau) G_2(\lambda(\tau))}.$$

Значит, первое слагаемое в правой части оценки (59) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(-\lambda(\tau)\tau)}{G_2(\lambda(\tau))} = 0. \quad (60)$$

Далее, используя правило Лопиталя, заключаем, что

$$\exp(-\lambda(\tau)\tau) \int_{t_0}^{\tau} (\tau - s)^2 \exp(-m_0 s) \exp(\lambda(\tau)s) ds \rightarrow 0$$

при $\tau \rightarrow \infty$, если выполняется соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(-m_0 \tau)}{G_3(\lambda(\tau))} = 0. \quad (61)$$

Пусть

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp(-\lambda(\tau)\tau) \int_{t_0}^{\tau} (\tau - s)^2 \exp(\varphi_\lambda(\tau)s) ds = 0. \quad (62)$$

Применяя четырежды правило Лопиталя и отбрасывая отрицательные слагаемые, приходим к неравенству

$$-\exp(-\lambda(\tau)\tau) \int_{t_0}^{\tau} (\tau - s)^3 \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(s) \exp(\lambda(\tau)s) ds \leq -\frac{6}{G_4(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau).$$

Следовательно, при выполнении условий (60)–(62) и предельного равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{G_4(\lambda(\tau))} \sum_{j=1}^3 \varphi'_j(\tau) = 0 \quad (63)$$

решение $r(\tau)$ уравнения (40) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ и в условиях п. в).

Подведём итог проведённым рассуждениям, сформулировав доказанное утверждение.

Теорема. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, оператор $A: H \rightarrow H$ является, вообще говоря, нелинейным и обладает свойствами (1) и (2), а $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, 3}$, – действительнoзначные положительные функции класса $C[t_0, \infty)$, $t_0 = \text{const} \geq 0$. Тогда задача Коши для дифференциального уравнения третьего порядка (4) при любых начальных условиях (5) имеет единственное решение $y: [t_0, \infty) \rightarrow H$ класса $C^3[t_0, \infty)$.

Пусть, дополнительно, существует такая постоянная $R_0 > 0$, что при всех достаточно больших t выполняется неравенство (11), а $\varphi_k(t)$, $k = \overline{1, 3}$, – убывающие выпуклые вниз функции класса $C^4[t_0, \infty)$, для которых имеют место условия (43) с функцией W , заданной равенством (39). Пусть также функции $m_1(t)$ и $m_2(t)$, определённые в (22) и (27) соответственно, обладают свойствами (29) и (30), и справедливы условия (24), (32) и (34). Пусть, кроме того, $-\mu(\tau)$ и $-\lambda(\tau)$ – максимальные действительные части корней уравнений (31) и (42) соответственно, причём выполнены условия (47), (48), а функции $G_k(\lambda(\tau))$, $k = \overline{1, 4}$, определены равенствами (44) при $h(t) = \lambda(t)$. Пусть, наконец, при достаточно больших τ , если корни уравнения (42) попарно различны, выполнены неравенства (50) при $k_0 = 2$ и условия (51)–(53); если совпадают ровно два корня уравнения (42), то имеют место неравенства (50) при $k_0 = 3$ и условия (56)–(58); если же все три корня уравнения (42) совпадают между собой, то справедливы неравенства (50) при $k_0 = 4$ и условия (60)–(63).

Тогда единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (4) при любых начальных условиях (5) стремится при $t \rightarrow \infty$ к единственному стационарному решению уравнения (4), т.е. стационарное решение уравнения (4) асимптотически устойчиво в целом.

4. Замечания. Укажем величину $\mu(\tau)$, равную модулю максимальной действительной части корней уравнения (31):

$$\mu(\tau) = \begin{cases} (\varphi_1(\tau) - \sqrt{\varphi_1^2(\tau) - 4m_2(\tau)})/2, & \text{если } D(\tau) > 0, \\ \varphi_1(\tau)/2, & \text{если } D(\tau) < 0. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что в наших предположениях $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mu(\tau) \neq 0$.

Кроме того, нетрудно убедиться, что в наших условиях

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\psi}(\tau)}{\mu(\tau)} = \begin{cases} 1/(\sqrt{D^0}(\varphi_1^0 - \sqrt{(\varphi_1^0)^2 - 4m_2^0})), & \text{если } D(\tau) > 0, \\ 2/(\sqrt{D^0}\varphi_1^0), & \text{если } D(\tau) < 0, \end{cases} \quad (64)$$

причём здесь неравенства $D(\tau) > 0$ или $D(\tau) < 0$ выполняются при достаточно больших τ . Величина D^0 определена равенством (32). Значение предела (64) можно использовать для нахождения величины ψ^0 , обеспечивающей оценку (34). Найти величину $\lambda(\tau)$ и проверить условия теоремы, содержащие эту величину, можно с помощью численных расчётов.

Отметим, что в условиях теоремы дифференциальное уравнение (4) при любых начальных условиях (5) определяет приближённый метод нахождения решения уравнения (3).

Уравнения вида (4) возникают в задачах изучения классического движения в соответствии со вторым законом Ньютона при выполнении некоторых дополнительных условий, а также в задачах, уравнения которых получаются из закона изменения энергии во времени.

Пусть коэффициенты в уравнении (4) постоянны, т.е. $\varphi_k(t) = \varphi_k = \text{const}$, $k = \overline{1, 3}$. Тогда $\lambda(t) = \lambda > 0$, $G_k(\lambda(t)) = \lambda^k$, $k \geq 1$. Значит, условия (47), (48) и (50) теоремы очевидно выполнены. Справедливость предположений (51)–(53), (56)–(58), (60)–(63) при соответствующих значениях k_0 в рассматриваемом случае проверяется без труда.

Заметим, что случаи совпадающих корней квадратного уравнения (31) и наличия хотя бы двух одинаковых корней у кубического уравнения (42) на практике реализуются редко.

Пусть $\eta(t)$ – положительная четырежды непрерывно дифференцируемая убывающая выпуклая вниз функция, для которой

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \eta_0 > 0,$$

и для коэффициентов уравнения (4) справедливы равенства

$$\varphi_1(t) = a_1 + \eta(t), \quad \varphi_2(t) = a_2 + a_3\eta(t), \quad \varphi_3(t) = a_4\eta(t),$$

где a_k ($k = \overline{1, 4}$) – положительные постоянные. Свойства функций $\varphi_k(t)$ ($k = \overline{1, 3}$) определяются значениями параметров η_0 и a_k , $k = \overline{1, 4}$. Например, соотношения (9) и (10), очевидно, имеют место, второе неравенство в условиях (43) будет верно, если a_1 и a_2 достаточно велики по сравнению с a_4 . Из определения функции $m_1(t)$ (см. (22)) вытекает, что

$$m_1(t) = 2a_1 - a_2 + (2 - a_3 - La_4)\eta(t).$$

Пусть $2 - a_3 - La_4 \geq 0$, тогда приходим к неравенству $m_1(t) \geq 2a_1 - a_2$, т.е. можно принять, что $m_0 = 2a_1 - a_2$. Таким образом, оценка (22) имеет место, если $2a_1 - a_2 > 1$.

Соотношения (29) и (30) принимают соответственно вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_1(t) = 2a_1 - a_2 + (2 - a_3 - La_4)\eta_0 = m_1^0 \geq m_0 > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_2(t) = 2\bar{\gamma}(a_2 + a_3\eta_0) - La_4\eta_0 = m_2^0 > 0,$$

а равенство (26) запишется в виде

$$g(t, \tau) = (1 + a_3 + a_4)(t - \tau)\eta'(t),$$

$$W(t) = a_4 \eta(t) \left(2M - \frac{\bar{\alpha} L}{m_0} (\gamma_0 \psi^0 [\eta(t) (2m_0 + 3\alpha a_3) + 2m_0 a_1 + 3\alpha a_2 + 3m_0] + 3) \right).$$

Условие (32) в рассматриваемом случае будет следующим:

$$0 \neq D^0 = \left| \frac{(\varphi_1^0)^2}{4} - m_2^0 \right| = \frac{1}{4} |\eta_0^2 + (2a_1 - 8\bar{\gamma}a_3 + 4La_4)\eta_0 + a_1^2 - 8\bar{\gamma}a_2|.$$

Значит, $D^0 \neq 0$, если действительное число η_0 не является корнем квадратного уравнения

$$z^2 + (2a_1 - 8\bar{\gamma}a_3 + 4La_4)z + a_1^2 - 8\bar{\gamma}a_2 = 0.$$

Предложенная методика применима и для исследования асимптотической устойчивости стационарного решения дифференциального уравнения второго порядка. Для установления же достаточных условий асимптотической устойчивости стационарного решения дифференциального уравнения, линейного относительно производных, порядка выше третьего, необходимо получить утверждения, аналогичные леммам 1 и 2, для скалярных дифференциальных неравенств соответствующих порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972.
2. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear Ill-Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht, 2006.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1988.
4. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб, 1996.
5. Рязанцева И.П. О непрерывном методе третьего порядка с постоянными коэффициентами для уравнений с монотонными операторами в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 267–275.
6. Ryazantseva I. Regularized continuous third-order method for monotone operator equations in Hilbert space // Appl. Anal. and Optimization. 2019. V. 3. № 2. P. 231–239.
7. Рязанцева И.П. Непрерывный метод решения задач условной минимизации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1999. Т. 39. № 5. С. 734–742.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб, 2003.
9. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981.

Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.
После доработки 24.03.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.25+517.958:621.372.8

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ
КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

© 2021 г. Ю. Г. Смирнов

Исследуются ТЕ-поляризованные электромагнитные волны, распространяющиеся в неоднородном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненном нелинейной средой, в которой нелинейность описывается законом Керра. Доказано существование бесконечного множества нелинейных как поверхностных, так и вытекающих волн. Найдены достаточные условия, при выполнении которых может распространяться несколько волн, и определены области локализации соответствующих постоянных распространения.

DOI: 10.31857/S0374064121100083

Введение. Распространение светового луча в однородной нелинейной среде или волноводной структуре, заполненной нелинейной средой, описывается законом Керра (см. [1]). Впервые уравнения, описывающие распространение волн в нелинейной среде с нелинейностью, выраженной законом Керра, получены в начале 70-х годов прошлого века в пионерских работах П.Н. Елеонского и В.П. Силина (см., например, [2]). Метод дисперсионных уравнений применяется для исследования распространения волн в нелинейном слое [3, 4]. Однако при изучении других структур, например, круглого диэлектрического волновода, применять этот метод уже невозможно.

Аналитические и численные результаты, связанные с распространением ТЕ-поляризованных волн в круглом нелинейном диэлектрическом волноводе, полученные с использованием метода возмущений, представлены в работах [5–8].

В данной работе исследуются электромагнитные волны, распространяющиеся в неоднородном диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненном средой, нелинейность которой описывается законом Керра. В ней получен важный результат, составляющий суть теории распространения нелинейных волн в открытых металлодиэлектрических волноводах: существует бесконечный спектр нелинейных поверхностных или вытекающих волн.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$, заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_c\varepsilon_0 = \text{const}$ и магнитную проницаемость μ_0 , где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая проницаемость и проницаемость вакуума. Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль линии передачи $\Sigma := \{(\rho, \varphi) : r_0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, расположенной в $\mathbb{R}^3$, с образующей, параллельной оси Oz . Поперечное сечение волновода состоит из двух концентрических окружностей радиусов r_0 и r , где r_0 – радиус внутреннего идеально проводящего цилиндра, а $r - r_0$ – толщина диэлектрической цилиндрической оболочки.

Предполагаем, что поля зависят гармонически от времени как $\exp(-i\omega t)$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Нахождение поверхностных ТЕ-поляризованных волн сводится [9] к определению нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла с зависимостью от координаты z (вдоль которой структура регулярна) в виде $e^{i\gamma z}$,

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{H},$$

$$\mathbf{E} = (0, E_\varphi(\rho)e^{i\gamma z}, 0), \quad \mathbf{H} = (H_\rho(\rho)e^{i\gamma z}, 0, H_z(\rho)e^{i\gamma z}),$$

удовлетворяющих условиям сопряжения для тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на поверхности разрыва диэлектрической проницаемости ($\rho = r_0$ и $\rho = r$)

$$[E_\varphi]|_{\rho=r_0} = 0, \quad [H_z]|_{\rho=r_0} = 0, \quad [E_\varphi]|_{\rho=r} = 0, \quad [H_z]|_{\rho=r} = 0, \quad (1)$$

где $[f]|_{\rho=\rho_0} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0-0} f(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow \rho_0+0} f(\rho)$. Решение также должно быть ограниченным и удовлетворять условиям на бесконечности. Для поверхностных волн электромагнитное поле должно убывать как $O(1/\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$, а для вытекающих волн оно должно возрастать при $\rho \rightarrow \infty$. Ниже будут рассмотрены оба случая.

Предполагаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всём пространстве имеет вид $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\rho) + \alpha(\rho)|\mathbf{E}|^2$ при $r_0 \leq \rho \leq r$, и $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$ при $\rho > r$ и $\rho < r_0$, где $\alpha(\rho)$ и $\varepsilon(\rho)$ – непрерывные функции при $\rho \in [r_0, r]$ и

$$|\mathbf{E}|^2 = |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\rho)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_\varphi)|^2 + |(\mathbf{E}e^{-i\omega t}, \mathbf{e}_z)|^2.$$

Задача о распространении волн является задачей на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ , который является постоянной распространения волновода. Пусть $\lambda = \gamma^2$ – новый спектральный параметр. Задача нахождения ТЕ-поляризованных волн в круговом волноводе может быть сведена к следующей краевой задаче. Требуется найти $\lambda > \omega^2 \varepsilon_c$ такие, что для заданной константы $A \neq 0$ существует нетривиальная функция $u(\rho; \lambda) := E_\varphi$, удовлетворяющая уравнению

$$(\rho u')' + \left(\omega^2 \rho (\varepsilon(\rho) + \alpha(\rho) u^2) - \frac{1}{\rho} \right) u - \lambda \rho u = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u(r_0) = 0, \quad (3)$$

$$u'(r_0) = A > 0, \quad (4)$$

$$u'(r) = \beta u(r), \quad (5)$$

в которых

$$\beta := \kappa \frac{K_1'(\kappa r)}{K_1(\kappa r)}, \quad \beta < 0,$$

для поверхностных волн, $\kappa = \sqrt{\lambda - \omega^2 \varepsilon_c}$ (> 0), и

$$\beta := \kappa \frac{I_1'(\kappa r)}{I_1(\kappa r)}, \quad \beta > 0,$$

для вытекающих волн. Здесь $K_1(x)$ и $I_1(x)$ – соответственно функции Макдональда и Инфеляда, т.е. модифицированные функции Бесселя (см. [10, гл. 9.6]). Так как $K_1(x) > 0$ и $I_1(x) > 0$ для $x > 0$, то $\beta = \beta(\lambda)$ непрерывно дифференцируемая функция на $(\omega^2 \varepsilon_c, \infty)$ и $\beta(\omega^2 \varepsilon_c) = -1/r$ для поверхностных волн, $\beta(\omega^2 \varepsilon_c) = 1/r$ для вытекающих волн (см. [10, гл. 9.6]).

Замечание 1. Постоянная β определяется из решения уравнения (2) в области $\rho \geq r$ при $\alpha = 0$:

$$u(\rho) = \tilde{C} K_1(\kappa \rho), \quad \rho \geq r,$$

с учётом условий на бесконечности и условий сопряжения (1) для поверхностных волн [11]. Постоянная β также определяется из решения уравнения (2) в области $\rho \geq r$ при $\alpha = 0$:

$$u(\rho) = \tilde{C} I_1(\kappa \rho), \quad \rho \geq r,$$

с учётом условия возрастания решения на бесконечности и условий сопряжения (1) для вытекающих волн.

2. Интегральное дисперсионное уравнение для нелинейной задачи на собственные значения. Введём новую неизвестную функцию $v = \sqrt{\rho} u$ и выберем функции ε и α такими, чтобы выполнялись равенства

$$\varepsilon(\rho, \omega) = \varepsilon + \frac{3}{4\rho^2 \omega^2} \quad \text{и} \quad \alpha(\rho, \omega) = \frac{\alpha_0 \rho}{\omega^2},$$

где ϵ и α_0 – вещественные положительные постоянные. Тогда задача (2)–(5) переходит в следующую задачу: найти решение уравнения

$$v'' + \omega^2 \epsilon v + \alpha_0 v^3 = \lambda v \quad (6)$$

с краевыми условиями

$$v(r_0) = 0, \quad (7)$$

$$v'(r_0) = A\sqrt{r_0}, \quad (8)$$

$$v'(r) = \beta_0 v(r),$$

где $\beta_0 = 1/(2r) + \beta$. Так как $1/2x + K_1'(x)/K_1(x) = -1/2x - K_0(x)/K_1(x) < 0$ при $x > 0$ (см. [10, гл. 9.6]), то $\beta_0 < 0$ для поверхностных волн. Очевидно, что $\beta_0 > 0$ для вытекающих волн.

Умножая уравнение (6) на v' , получаем

$$v'v'' + \omega^2 \epsilon v'v + \alpha_0 v'v^3 - \lambda v'v = 0,$$

или, равносильно,

$$((v')^2)' + \omega^2 \epsilon (v^2)' + \frac{\alpha_0}{2} (v^4)' - \lambda (v^2)' = 0,$$

что приводит к равенству

$$(v')^2 + \omega^2 \epsilon v^2 + \frac{\alpha_0}{2} v^4 - \lambda v^2 = C_0, \quad (9)$$

где C_0 – константа. Это первый интеграл уравнения (6).

Принимая во внимание непрерывную дифференцируемость функции $u(\rho)$, в силу условий (7) и (8) находим

$$C_0 = A^2 r_0 > 0.$$

Отсюда и из равенства (9) следует, что

$$v' = \pm \sqrt{A^2 r_0 - (\omega^2 \epsilon - \lambda) v^2 - \frac{\alpha_0}{2} v^4}. \quad (10)$$

Замечание 2. Так как функция $v(\rho)$ может изменять знак на отрезке $[r_0, r]$, то выбор знака в уравнении (10) пока не определён. Имеем

$$A^2 r_0 - (\omega^2 \epsilon - \lambda) v^2 - \frac{\alpha_0}{2} v^4 = -\frac{\alpha_0}{2} (v^2 - z_1)(v^2 - z_2), \quad (11)$$

где

$$z_1 = \frac{\lambda - \omega^2 \epsilon + \sqrt{D}}{\alpha_0} > 0, \quad z_2 = \frac{\lambda - \omega^2 \epsilon - \sqrt{D}}{\alpha_0} < 0,$$

и $D := (\omega^2 \epsilon - \lambda)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0$. Из (9) вытекает, что левая часть равенства (11) неотрицательна. Поэтому, принимая во внимание неравенство $z_2 < 0$, имеем $v^2 - z_1 \leq 0$. Следовательно, $|v| \leq z_1$.

Пусть $r_i \in (r_0, r)$, $i = \overline{1, N}$, – точки экстремума функции v . В силу дифференцируемости этой функции необходимо, чтобы $v'(r_i) = 0$. Из (10) и (11) следует, что в точках r_i экстремума функции v выполняется равенство $|v(r_i)| = \sqrt{z_1}$. Более того, с учётом условия $v'(r_0) > 0$ заключаем, что r_{2j-1} и r_{2j} являются соответственно точками максимума и минимума функции $v(\rho)$, т.е. $v(r_{2j-1}) = \sqrt{z_1}$, $v(r_{2j}) = -\sqrt{z_1}$.

Таким образом, интервалами возрастания функции $v(\rho)$ являются (r_0, r_1) , (r_2, r_3) и т.д., а интервалами убывания – (r_1, r_2) , (r_3, r_4) и т.д. Общее число интервалов возрастания и убывания функции $v(\rho)$ равно $N + 1$. Знание поведения функции на этих интервалах позволяет определить знак на них в уравнении (10).

Теперь рассмотрим биквадратное уравнение

$$\beta_0^2 v^2(r) + (\omega^2 \epsilon - \lambda) v^2(r) + \frac{\alpha_0}{2} v^4(r) - A^2 r_0 = 0.$$

Обозначая в нём $v^2(r) = t \geq 0$, получаем квадратное уравнение

$$\frac{\alpha_0}{2}t^2 + (\beta_0^2 + \omega^2\epsilon - \lambda)t - A^2r_0 = 0$$

с дискриминантом $d = (\beta_0^2 + \omega^2\epsilon - \lambda)^2 + 2\alpha_0A^2r_0$. Корни этого квадратного уравнения имеют вид

$$t_1 = \frac{\lambda - \beta_0^2 - \omega^2\epsilon + \sqrt{d}}{\alpha_0} > 0, \quad t_2 = \frac{\lambda - \beta_0^2 - \omega^2\epsilon - \sqrt{d}}{\alpha_0} < 0.$$

Положим $v_{\pm} := \pm\sqrt{t_1}$. Тогда получаем следующие краевые условия:

$$v(r_0) = 0, \quad v'(r_0) = A\sqrt{r_0}, \quad v(r) = v_{\pm}.$$

Обозначим

$$w = \left(A^2r_0 + (\lambda - \omega^2\epsilon)v^2 - \frac{\alpha_0}{2}v^4 \right)^{-1/2} (> 0).$$

Интегрируем уравнение (10) на интервале (r_0, r_1) с учётом выбора знака “+” перед квадратным корнем в (10) в силу условия $v'(r_0) > 0$. Имеем

$$\int_0^{v(\rho)} w dv = C_1 + \rho - r_0, \quad \rho \in (r_0, r_1),$$

где C_1 – константа. Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_0 (и вычисляя предел), находим, что $C_1 = 0$. Следовательно,

$$\int_0^{v(\rho)} w dv = \rho - r_0, \quad \rho \in (r_0, r_1). \quad (12)$$

Затем, заменяя в тождестве (12) ρ на r_1 , приходим к равенству

$$\int_0^{\sqrt{z_1}} w dv = r_1 - r_0. \quad (13)$$

Далее повторяем те же действия на всех интервалах (r_i, r_{i+1}) , выбирая знак “+” или “−” производной функции $v(\rho)$ перед радикалом в (10) в зависимости от того, возрастает или убывает функция на этом интервале. Повторяя процедуру для интервалов (r_{2j-1}, r_{2j}) ($j \geq 1$), получаем

$$-\int_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho + C_{2j}, \quad \rho \in (r_{2j-1}, r_{2j}),$$

с некоторыми константами C_{2j} . Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_{2j-1} (и вычисляя предел), находим, что $C_{2j} = -r_{2j-1}$. Следовательно,

$$-\int_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho - r_{2j-1}, \quad \rho \in (r_{2j-1}, r_{2j}). \quad (14)$$

Затем, заменяя в тождестве (14) ρ на r_{2j} , приходим к равенству

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w dv = r_{2j} - r_{2j-1}. \quad (15)$$

Повторяя эту процедуру для интервалов (r_{2j}, r_{2j+1}) ($j \geq 1$), получаем

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho + C_{2j+1}, \quad \rho \in (r_{2j}, r_{2j+1}),$$

с некоторой константой C_{2j+1} . Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_{2j} (и вычисляя предел), находим, что $C_{2j+1} = -r_{2j}$, и поэтому

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho - r_{2j}, \quad \rho \in (r_{2j}, r_{2j+1}). \quad (16)$$

Далее, заменяя в тождестве (16) ρ на r , получаем равенство

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w dv = r_{2j+1} - r_{2j}. \quad (17)$$

На последнем интервале (r_N, r) в случае чётного N будем иметь

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho + C_{N+1}, \quad \rho \in (r_N, r),$$

с некоторой константой C_{N+1} . Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_N (и вычисляя предел), находим, что $C_{N+1} = -r_N$ и, значит,

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho - r_N, \quad \rho \in (r_N, r). \quad (18)$$

Затем, заменяя в тождестве (18) ρ на r , получаем равенство

$$\int_{-\sqrt{z_1}}^{v(r)} w dv = r - r_N. \quad (19)$$

В случае нечётного N на последнем интервале (r_N, r) будем иметь

$$-\int_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho + C_{N+1}, \quad \rho \in (r_N, r),$$

с некоторой константой C_{N+1} . Подставляя в это тождество вместо ρ значение r_N (и вычисляя предел), находим, что $C_{N+1} = -r_N$. Следовательно,

$$-\int_{\sqrt{z_1}}^{v(\rho)} w dv = \rho - r_N, \quad \rho \in (r_N, r). \quad (20)$$

Затем, заменяя в тождестве (20) ρ на r , приходим к равенству

$$\int_{v(r)}^{\sqrt{z_1}} w dv = r - r_N. \quad (21)$$

Теперь, суммируя равенства (13), (15), (17) и (19) (или (21)), получаем интегральное дисперсионное уравнение

$$\mp \int_0^{v_+} w dv + NT = r - r_0 \quad (N \geq 1), \quad (22)$$

в котором

$$T = \int_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w dv;$$

в формуле (22) знак “–” соответствует поверхностным волнам, а знак “+” – вытекающим волнам. В (22) учтено, что $v(r)$ и $v'(r)$ имеют разные знаки для поверхностных волн, потому что $\beta_0 < 0$, и одинаковые знаки для вытекающих волн, потому что в этом случае $\beta_0 > 0$.

Замечание 3. Все встречающиеся выше интегралы являются либо собственными, либо абсолютно сходящимися несобственными, в силу равенства (11).

3. Теоремы о существовании бесконечного множества собственных значений. Учитывая, что $z_1 z_2 = -2A^2 r_0 / \alpha_0$, и изменяя переменную в интеграле (22), получаем

$$T = \int_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w dv = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\alpha_0 z_1 \sin^2 t + 2A^2 r_0 / z_1}}.$$

Последний интеграл можно оценить сверху следующим образом:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\alpha_0 z_1 \sin^2 t + 2A^2 r_0 / z_1}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2Ar_0 \sqrt{2\alpha_0} \sin t}} = M,$$

где M – константа, не зависящая от z_1 . Отсюда следует, что существуют пределы

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} T(z_1) = 0, \quad \lim_{z_1 \rightarrow +\infty} T(z_1) = 0.$$

Так как

$$z_1 = z_1(\lambda) = \frac{\lambda - \omega^2 \epsilon + \sqrt{(\lambda - \omega^2 \epsilon)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0}}{\alpha_0} = \frac{2A^2 r_0}{-\lambda + \omega^2 \epsilon + \sqrt{(\lambda - \omega^2 \epsilon)^2 + 2\alpha_0 A^2 r_0}},$$

то $z_1(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $z_1(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow -\infty$. Значит, существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} T(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T(\lambda) = 0. \quad (23)$$

Очевидно, что функция $T(\lambda)$ положительна и непрерывна для $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. В силу соотношений (23) существует $H = \max_{\lambda \in (-\infty, +\infty)} T(\lambda)$.

Рассмотрим функцию $v_+ = v_+(\lambda)$ на $[\omega^2 \varepsilon_c, \infty)$. Так как $v_+ \leq \sqrt{z_1}$, то

$$\int_0^{v_+} w dv \leq T/2.$$

Для поверхностных волн получаем

$$\left(N - \frac{1}{2}\right)T \leq - \int_0^{v_+} w dv + NT \leq NT \quad (N \geq 1). \quad (24)$$

Зафиксируем $N \geq 1$. Из двойного неравенства (24) следует, что если $r - r_0 < (N - 1/2) \times T(\omega^2 \varepsilon_c)$, то существует по крайней мере одно решение уравнения (22). Следовательно, верна

Теорема 1. *Существует число $N^* \geq 1$ такое, что для любого $N \geq N^*$ уравнение (22) имеет по крайней мере одно решение, и решения различны для разных N . Существует бесконечно много решений λ_N^+ уравнения (22), соответствующих поверхностным волнам и таких, что $\lambda_N^+ > \omega^2 \varepsilon_c$ и $\lambda_N^+ \rightarrow \infty$ для $N \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Для достаточно большого N справедливо неравенство $r - r_0 < (N - 1/2)T(\omega^2 \varepsilon_c)$. Поэтому достаточно выбрать $N^* > 1/2 + (r - r_0)/T(\omega^2 \varepsilon_c)$. Предположение о совпадении решений для различных N_1 и N_2 сразу же приводит к противоречию с неравенствами (24).

Далее, в силу соотношений (23) собственное значение λ_N^+ больше $\omega^2 \varepsilon_c$ и стремится к $+\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Для вытекающих волн получаем

$$NT \leq \int_0^{v_+} w dv + NT \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)T \quad (N \geq 1). \quad (25)$$

Зафиксируем $N \geq 1$. Из двойного неравенства (25) следует, что если $r - r_0 < NT(\omega^2 \varepsilon_c)$, то существует по крайней мере одно решение уравнения (22). Следовательно, верна

Теорема 2. *Существует число $N^{**} \geq 1$ такое, что для любого $N \geq N^{**}$ уравнение (22) имеет по крайней мере одно решение, и решения различны для разных N . Существует бесконечно много решений λ_N^{++} уравнения (22), соответствующих вытекающим волнам и таких, что $\lambda_N^{++} > \omega^2 \varepsilon_c$ и $\lambda_N^{++} \rightarrow \infty$ для $N \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Для достаточно большого N справедливо неравенство $r - r_0 < NT(\omega^2 \varepsilon_c)$. Поэтому достаточно выбрать $N^{**} > (r - r_0)/T(\omega^2 \varepsilon_c)$. Предположение о совпадении решений для различных N_1 и N_2 сразу же приводит к противоречию с неравенствами (25).

Далее, в силу соотношений (23) собственное значение λ_N^{++} больше $\omega^2 \varepsilon_c$ и стремится к $+\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Легко проверить, что $v_+ = \sqrt{t_1} < \sqrt{z_1}$, поэтому

$$0 < \int_0^{v_+} w dv < T/2.$$

Тогда в неравенствах (24) и (25) все нестрогие знаки можно заменить на строгие. Отсюда следует, что собственные значения $\lambda_{N_1}^+$ и $\lambda_{N_2}^{++}$ для поверхностных и вытекающих волн не совпадают ни при каких N_1 и N_2 .

С помощью более детального анализа функции $T(\lambda)$ можно установить более точное асимптотическое поведение собственных значений, но в данной статье результаты по асимптотическому поведению не представлены.

Аналогичные результаты для нелинейных задач на собственные значения для плоских структур получены в работе [12].

Заключение. В статье доказано существование бесконечного множества нелинейных как поверхностных, так и вытекающих ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе, заполненном керр-нелинейной средой. Найдены достаточные условия, при выполнении которых могут распространяться несколько волн, определены области локализации соответствующих постоянных распространения.

Разработанный метод может быть эффективно применён и для расчёта ТЕ-волн в цилиндрическом нелинейном волноводе, а также для численного определения постоянных распространения поляризованных волн в многослойных открытых металлодиэлектрических цилиндрических круглых волноводах с более сложными нелинейностями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akhmediev N.N., Ankiewicz A. Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. London, 1997.
2. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Cylindrical nonlinear waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. V. 35. P. 44–47.
3. Smirnov Y.G., Valovik D.V. Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // Adv. in Math. Phys. 2012. P. 609765.
4. Smirnov Y.G., Valovik D.V. Calculation of the propagation constants of TM electromagnetic waves in a nonlinear layer // J. of Commun. Tech. and Electronics. 2008. V. 53. № 8. P. 883–889.
5. Kupriyanova S.N., Smirnov Y.G. Propagation of electromagnetic waves in cylindrical dielectric waveguides filled with a nonlinear medium // Comput. Math. and Math. Phys. 2004. V. 44. № 10. P. 1762–1772.
6. Smirnov Y.G. Propagation of electromagnetic waves in cylindrical dielectric waveguides filled with a nonlinear medium // J. of Commun. Tech. and Electronics. 2005. V. 50. № 2. P. 179–185.
7. Smirnov Y.G., Schurmann H.-W., Shestopalov Y.V. Integral equation approach for the propagation of TE-waves in a nonlinear dielectric cylindrical waveguide // J. of Nonlin. Math. Phys. 2004. V. 11. № 2. P. 256–268.
8. Schurmann H.-W., Smirnov Y.G., Shestopalov Y.V. Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 1. P. 016614-10.
9. Smirnov Y.G., Smol'kin E.Y., Valovik D.V. Nonlinear transmission eigenvalue problem describing TE wave propagation in two-layered cylindrical dielectric waveguides // Comput. Math. and Math. Phys. 2013. V. 53. № 7. P. 973–983.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
11. Smirnov Y.G. Eigenvalue transmission problems describing the propagation of TE and TM waves in two-layered inhomogeneous anisotropic cylindrical and planar waveguides // Comput. Math. and Math. Phys. 2015. V. 55. № 3. P. 461–469.
12. Смирнов Ю.Г. Метод интегральных дисперсионных уравнений для решения нелинейных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. P. 1331–1338.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
У НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА© 2021 г. В. В. Фомичев, А. В. Ильин, А. И. Роговский,
Р. Р. Бегисhev, Р. П. Митрев, Т. С. Тодоров

Рассматривается нелинейная автономная система ОДУ третьего порядка, зависящая от числовых параметров, которая описывает движения энергетического комбайна, преобразующего остаточную тепловую энергию в электрическую. Для правильной работы комбайна необходимо, чтобы указанная система имела периодическое решение, поэтому ставится задача отыскания параметров системы, при которых оно существует. Сформулированная задача решается с использованием метода малого параметра.

DOI: 10.31857/S0374064121100095

Введение. Рассматривается нелинейная система ОДУ 3-го порядка

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2 + E(\Delta - z_1) \operatorname{th}(z_3 - T), \quad \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1). \quad (1)$$

Здесь положительные постоянные α , β , γ_1 , γ_2 , E , Δ , ζ и действительная постоянная T – параметры системы. Система уравнений (1) (упрощённая для уменьшения числа её параметров) предложена в работе [1] и описывает движения энергетического комбайна, перерабатывающего остаточную тепловую энергию в электрическую. Ключевым фактором для правильной работы комбайна является периодическое движение пьезоэлектрической консоли [1]. Таким движениям соответствуют периодические решения системы (1).

В статье [2] указаны некоторые значения параметров системы (1), при которых у неё существуют периодические решения. Однако этот результат подтверждается лишь численным интегрированием уравнений системы, без строгого доказательства периодичности решений. В данной работе даётся строгое доказательство того, что у системы (1) существуют такие значения её параметров, при которых она имеет периодические решения.

Исследование системы ОДУ на наличие периодических решений является классической задачей теории дифференциальных уравнений, которая рассматривалась многими исследователями. Для некоторых классов систем эта задача хорошо изучена (например, доказано существование периодических решений у консервативных систем [3, с. 41], систем Ляпунова [4, с. 148]; в некоторых случаях исследование на наличие периодических решений у двумерных автономных систем может быть проведено с использованием теоремы Пуанкаре–Бендиксона [5, с. 426] и её обобщений [6]; исследовано большое число частных систем ОДУ [7–9]; разрабатываются численные методы нахождения периодических решений [10] и т.п.). Важным частным случаем этой задачи является рассмотрение её для систем ОДУ с малым параметром [11, с. 75]. В этом случае при условии наличия у невозмущённой системы периодического решения ставится вопрос о существовании таких решений при достаточно малых возмущениях правой части. Метод малого параметра успешно применяется как для неавтономных систем ОДУ, у которых правая часть является периодической функцией времени (см., например, [12, с. 478]), так и для автономных систем (см., например, [5, с. 396; 4, с. 25]).

В данной работе доказывается, что значения параметров, при которых у системы (1) имеются периодические решения, существуют. Для доказательства мы используем незначительную модификацию метода малого параметра, изложенного в монографии [5, с. 396].

1. Достаточные условия существования периодических решений. Введём малый параметр μ , положив $E = \mu$, $\gamma_2 = \gamma\mu$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Для удобства дальнейших выкладок положим также $\gamma_1 = 1$, $T = 0$. Тогда уравнения системы (1) примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -z_1 + \mu(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3), \quad \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1). \quad (2)$$

Так как решение $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$ этой системы зависит от начальных условий $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^3$ и от параметра μ , далее обозначаем его как $z(t, z_0, \mu)$ (остальные параметры системы – $\alpha, \beta, \gamma, \Delta, \zeta$ – считаем фиксированными, поэтому зависимость от них не отмечаем).

В силу автономности системы (2) её решение $z(t, z_0, \mu)$ будет периодическим, если и только если $z(\xi, z_0, \mu) - z_0 = 0$ для некоторого $\xi > 0$. Согласно формуле Коши решение $z(t, z_0, \mu)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(z(s)) ds.$$

Здесь e^{At} – матрица Коши линейной части невозмущённой системы, $f(z(s))$ – нелинейная вектор-функция в правой части системы (2) (мы также относим к ней линейное слагаемое $-\mu\gamma z_2$ из второго уравнения, чтобы при $\mu = 0$ решение было периодическим), т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}, \quad f(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1) \end{pmatrix},$$

$$e^{A(t-s)} f(z) = \begin{pmatrix} \mu \sin(t-s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ \mu \cos(t-s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ e^{-\beta(t-s)} \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1) \end{pmatrix}.$$

Решение $z(t)$ будет периодическим с периодом $2\pi + \tau$, если и только если $z(2\pi + \tau) - z(0) = 0$ при некотором $\tau > -2\pi$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \cos \tau - 1 & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau - 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta(2\pi+\tau)} - 1 \end{pmatrix} z_0 + \int_0^{2\pi+\tau} e^{A(2\pi+\tau-s)} f(z(s)) ds = 0. \quad (3)$$

Мы приходим к следующему утверждению:

Утверждение 1. Пусть на некотором отрезке $[0, \hat{\mu}]$ определены такие непрерывные функции $z_{01}(\mu), z_{02}(\mu), z_{03}(\mu)$ и $\tau(\mu)$, что решение $z(t, (z_{01}(\mu), z_{02}(\mu), z_{03}(\mu))^T, \mu)$ системы (2) удовлетворяет уравнению (3) при $\tau = \tau(\mu)$ для каждого фиксированного μ из отрезка $[0, \hat{\mu}]$, причём решение $z(t, (z_{01}(0), z_{02}(0), z_{03}(0))^T, 0)$ отлично от константы и $\tau(\mu) > -2\pi$ при $\mu \in [0, \hat{\mu}]$. Тогда найдётся такое число $\bar{\mu} \leq \hat{\mu}$, что при всех $\mu \in [0, \bar{\mu}]$ система (3) имеет периодическое решение с периодом (не обязательно наименьшим) $2\pi + \tau(\mu)$, отличное от константы.

Доказательство. Так как по условию решение $z(t, (z_{01}(\mu), z_{02}(\mu), z_{03}(\mu))^T, \mu)$ удовлетворяет уравнению (3) при всех $\mu \in [0, \hat{\mu}]$, то в силу автономности системы (2) это решение периодически. Покажем, что при достаточно малых μ оно не является положением равновесия.

Все положения равновесия системы (2) (и только они) удовлетворяют системе уравнений

$$z_2 = 0, \quad -z_1 + \mu(\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3 = 0, \quad -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1)) + \alpha = 0.$$

Из второго уравнения выразим $z_1 = \mu\Delta \operatorname{th} z_3 / (1 + \mu \operatorname{th} z_3)$. Правая часть этого выражения при $\mu < 1$ очевидно непрерывна. Подставляя её вместо z_1 в третье уравнение, получаем

$$\Phi(z_3, \mu) \equiv -\beta z_3 + \alpha \cos\left(\zeta \operatorname{arctg} \frac{\mu\Delta \operatorname{th} z_3}{1 + \mu \operatorname{th} z_3}\right) + \alpha = 0. \quad (4)$$

При $\mu = 0$ из этого уравнения найдём $z_3 = 2\alpha/\beta$. Несложно проверить, что $\partial\Phi(z_3, 0)/\partial z_3 = -\beta \neq 0$. Тогда, согласно теореме о неявной функции, на некотором отрезке $[0, \check{\mu}]$, $\check{\mu} < 1$, существует функция $z_3 = z_3(\mu)$, удовлетворяющая уравнению (4), причём эта функция непрерывна и единственна (так как функция в левой части (4) монотонна по переменной z_3 при

малых μ). Таким образом, положение равновесия $z^c(\mu)$ системы (2) при $\mu \in [0, \check{\mu}]$ единственно и непрерывно зависит от μ . Рассмотрим функцию

$$\varphi(\mu) = \|z^c(\mu) - (z_{01}(\mu), z_{02}(\mu), z_{03}(\mu))^T\|^2$$

на отрезке $[0, \min(\check{\mu}, \hat{\mu})]$. Эта функция непрерывна: непрерывность первого под знаком нормы слагаемого установлена выше, а непрерывность второго – одно из предположений утверждения 1. Согласно условию решение $z(t, (z_{01}(0), z_{02}(0), z_{03}(0))^T, 0)$ не является положением равновесия системы (2), поэтому $\varphi(0) > 0$. Тогда, поскольку функция $\varphi(\mu)$ непрерывна, найдётся такое число $\bar{\mu} > 0$, что на отрезке $[0, \bar{\mu}]$ справедливо неравенство $\varphi(\mu) > 0$. При таких μ в силу единственности положения равновесия решение $z(t, (z_{01}(\mu), z_{02}(\mu), z_{03}(\mu))^T, \mu)$ является периодическим (см. выше) и отличным от константы. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть на некотором отрезке $[0, \hat{\mu}]$ определены такие непрерывные функции $z_{01}(\mu)$, $z_{03}(\mu)$ и $\nu(\mu)$, что решение $z(t, (z_{01}(\mu), 0, z_{03}(\mu))^T, \mu)$ системы (2) удовлетворяет уравнению

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\mu\nu(\mu)) - 1}{\mu} z_{01}(\mu) \\ -\frac{\sin(\mu\nu(\mu))}{\mu} z_{01}(\mu) \\ (e^{-\beta(2\pi + \mu\nu(\mu))} - 1) z_{03}(\mu) \end{pmatrix} + \int_0^{2\pi + \mu\nu(\mu)} \begin{pmatrix} \sin(\mu\nu(\mu) - s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ \cos(\mu\nu(\mu) - s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ \alpha e^{-\beta(2\pi + \mu\nu(\mu) - s)} (\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1) \end{pmatrix} ds = 0, \quad (5)$$

причём $(z_{01}(0), 0, z_{03}(0))^T$ не является положением равновесия системы (2). Тогда найдётся такое число $\bar{\mu} \leq \hat{\mu}$, что при всех $\mu \in [0, \bar{\mu}]$ система (3) имеет отличное от константы периодическое решение с периодом $2\pi + \mu\nu(\mu)$ (не обязательно наименьшим).

Доказательство. Покажем, что решение $z(t, (z_{01}(\mu), 0, z_{03}(\mu))^T, \mu)$ удовлетворяет системе (3) при $\tau = \mu\nu(\mu)$. В самом деле, домножив уравнение (5) на матрицу $\operatorname{diag}(\mu, \mu, 1)$, будем иметь

$$\begin{pmatrix} \cos(\mu\nu(\mu)) - 1 & \sin(\mu\nu(\mu)) & 0 \\ -\sin(\mu\nu(\mu)) & \cos(\mu\nu(\mu)) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta(2\pi + \mu\nu(\mu))} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{01}(\mu) \\ 0 \\ z_{03}(\mu) \end{pmatrix} + \\ + \int_0^{2\pi + \mu\nu(\mu)} \begin{pmatrix} \mu \sin(\mu\nu(\mu) - s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ \mu \cos(\mu\nu(\mu) - s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} z_3) \\ \alpha e^{-\beta(2\pi + \mu\nu(\mu) - s)} (\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1) \end{pmatrix} ds = 0.$$

Полученная система совпадает с системой (3) при $\tau(\mu) = \mu\nu(\mu)$. При этом $\tau(0) = 0$, поэтому при достаточно малых μ верно неравенство $\tau(\mu) > -2\pi$. Таким образом, выполняются все условия утверждения 1, следовательно, система (2) имеет нетривиальное периодическое решение при малых μ . Утверждение доказано.

Итак, достаточно показать, что выполняются условия утверждения 2. Для этого воспользуемся теоремой о неявной функции.

Теорема 1. Пусть функция $H(p)$, $p \in \mathbb{R}$, задана равенством

$$H(p) = \gamma\pi p + \int_0^{2\pi} (\Delta - p \cos s) \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s \, ds,$$

где

$$\omega(s, p) = e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) \, dq + \alpha \int_0^s e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) \, dq \right) + \frac{\alpha}{\beta}. \quad (6)$$

Пусть также параметры α , β , γ , Δ , ζ таковы, что существует число $\hat{p} > 0$, при котором $H(\hat{p}) = 0$, $dH(\hat{p})/dp \neq 0$. Тогда найдётся такое число $\bar{\mu} > 0$, что система (2) имеет отличное от константы периодическое решение при всех $\mu \in [0, \bar{\mu}]$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию

$$F(p_1, p_2, \nu, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\mu\nu) - 1}{\mu} p_1 \\ -\frac{\sin(\mu\nu)}{\mu} p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi+\mu\nu} \sin(\mu\nu - s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} \bar{\omega}(s, p_1, p_2, \nu, \mu)) ds \\ \int_0^{2\pi+\mu\nu} \cos(\mu\nu - s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} \bar{\omega}(s, p_1, p_2, \nu, \mu)) ds \\ \frac{\alpha}{e^{2\pi\beta+\beta\mu\nu} - 1} \int_0^{2\pi+\mu\nu} e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) ds + \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix},$$

где

$$z = z(s, (p_1, 0, p_2)^T, \mu), \quad \bar{\omega}(s, p_1, p_2, \nu, \mu) = e^{-\beta s} \times \\ \times \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta+\beta\mu\nu} - 1} \int_0^{2\pi+\mu\nu} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) dq + \alpha \int_0^s e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) dq \right) + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Заметим, что для функции $\bar{\omega}(s, p_1, p_2, \nu, \mu)$ справедливо равенство

$$\bar{\omega}(2\pi + \mu\nu, p_1, p_2, \nu, \mu) - \bar{\omega}(0, p_1, p_2, \nu, \mu) = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \bar{\omega}(2\pi + \mu\nu, p_1, p_2, \nu, \mu) = \\ & = e^{-2\pi\beta-\beta\mu\nu} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta+\beta\mu\nu} - 1} \int_0^{2\pi+\mu\nu} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) dq + \alpha \int_0^{2\pi+\mu\nu} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) dq \right) + \frac{\alpha}{\beta} = \\ & = \frac{\alpha}{e^{2\pi\beta+\beta\mu\nu} - 1} \int_0^{2\pi+\mu\nu} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) dq + \frac{\alpha}{\beta} = \bar{\omega}(0, p_1, p_2, \nu, \mu). \end{aligned} \quad (7)$$

Несложно проверить, что функция $F(p_1, p_2, \nu, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^4$ (если функции $(\cos(\mu\nu) - 1)/\mu$, $\sin(\mu\nu)/\mu$ доопределить при $\mu = 0$ по непрерывности). Покажем, что найдутся такие числа p_1^* , p_2^* , ν^* , при которых $F(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0) = 0$. Найдём решение $z(s, (p_1, 0, p_2)^T, 0)$. При $\mu = 0$ система (2) принимает вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -z_1, \quad \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \alpha(\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) + 1).$$

Решение этой системы, соответствующее начальным условиям $(p_1, 0, p_2)^T$, таково:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= p_1 \cos t, \quad z_2(t) = -p_1 \sin t, \\ z_3(t) &= e^{-\beta t} p_2 + \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} (\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p_1 \cos s)) + 1) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что при $p_1 \neq 0$ первые две компоненты решения являются 2π -периодическими, отличными от константы.

Учитывая вид решения (8), нетрудно заметить, что при $\mu = 0$ справедливо равенство

$$\bar{\omega}(s, p_1, p_2, \nu, 0) = \omega(s, p_1),$$

поэтому вектор-функция $F(p_1, p_2, \nu, 0)$ имеет следующий вид:

$$F(p_1, p_2, \nu, 0) = \begin{pmatrix} F_1(p_1, p_2, \nu, 0) \\ F_2(p_1, p_2, \nu, 0) \\ F_3(p_1, p_2, \nu, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \sin(-s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} \omega(s, p_1)) ds \\ \int_0^{2\pi} \cos(-s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} \omega(s, p_1)) ds \\ \frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1) ds + \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix},$$

где, как и выше, $z(s) = z(s, (p_1, 0, p_2)^T, 0)$. При этом

$$\begin{aligned} F_1(p_1, p_2, \nu, 0) &= \int_0^{2\pi} \sin(-s)(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} \omega(s, p_1)) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(-s)(-\gamma(-p_1 \sin s)) ds + \int_0^{2\pi} (\Delta - p_1 \cos s) \operatorname{th} \omega(s, p_1) \sin(-s) ds = \\ &= -\pi\gamma p_1 - \int_0^{2\pi} (\Delta - p_1 \cos s) \operatorname{th} \omega(s, p_1) \sin s ds = -H(p_1). \end{aligned}$$

Таким образом, если $p_1^* = \hat{p} > 0$, то, согласно условию, $F_1(p_1^*, p_2, \nu, 0) = 0$ для всех $p_2, \nu \in \mathbb{R}$. Далее найдём такое ν^* , при котором $F_2(p_1^*, p_2, \nu^*, 0) = 0$. Имеем

$$F_2(p_1^*, p_2, \nu) = -\nu p_1^* + \int_0^{2\pi} \cos s(-\gamma z_2 + (\Delta - z_1) \operatorname{th} \omega(s, p_1^*)) ds.$$

Тогда, если

$$\nu^* = \frac{1}{p_1^*} \int_0^{2\pi} \cos s(\gamma p_1^* \sin s + (\Delta - p_1^* \cos s) \operatorname{th} \omega(s, p_1^*)) ds,$$

то $F_2(p_1^*, p_2, \nu^*, 0) = 0$ для любого $p_2 \in \mathbb{R}$. Наконец, найдём p_2^* такое, что $F_3(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0) = 0$. Справедливо равенство

$$F_3(p_1^*, p_2, \nu^*, 0) = -p_2 + \frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p_1^* \cos s)) ds + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда следует, что если

$$p_2^* = \frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p_1^* \cos s)) ds + \frac{\alpha}{\beta},$$

то $F_3(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0) = 0$.

Таким образом, найдены такие значения $p_1^* = \hat{p}$, p_2^* , ν^* , при которых $F(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0) = 0$.

Найдём якобиан вектор-функции F по переменным p_1, p_2, ν в точке $(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0)$. Учтём при этом, что $F_1(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0) = H(p_1^*)$ (см. выше) и $F_3(p_1, p_2, \nu, 0)$ не зависит от ν . Тогда

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(p_1, p_2, \nu)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(p_1^*, p_2^*, \nu^*, 0)}{\partial p_1} & 0 & 0 \\ * & * & -p_1^* \\ * & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dH(p_1^*)}{dp} & 0 & 0 \\ * & * & -p_1^* \\ * & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{dH(p_1^*)}{dp} p_1^*.$$

По условию $dH(p_1^*)/dp \neq 0$, $p_1^* \neq 0$, поэтому якобиан отличен от нуля. Тогда, согласно теореме о неявной функции, на отрезке $[0, \bar{\mu}]$ определены такие непрерывные функции $p_1(\mu)$, $p_2(\mu)$, $\nu(\mu)$, что $F(p_1(\mu), p_2(\mu), \nu(\mu), \mu) = 0$ для всех $\mu \in [0, \bar{\mu}]$, причём $p_1(0) = p_1^*$, $p_2(0) = p_2^*$, $\nu(0) = \nu^*$.

Так как $F_3(p_1(\mu), p_2(\mu), \nu(\mu), \mu) = 0$ для всех $\mu \in [0, \bar{\mu}]$, то третья компонента решения $z(t)$ системы (2), соответствующего начальным условиям $(p_1(\mu), 0, p_2(\mu))^T$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_3(t) &= e^{-\beta t} p_2(\mu) + \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} (\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1(s)) + 1) ds = \\ &= e^{-\beta t} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta + \beta\mu\nu(\mu)} - 1} \int_0^{2\pi + \mu\nu(\mu)} e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1(s)) ds + \frac{\alpha}{\beta} \right) + \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} (\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1(s)) + 1) ds = \\ &= e^{-\beta t} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta + \beta\mu\nu(\mu)} - 1} \int_0^{2\pi + \mu\nu(\mu)} e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1(s)) ds + \frac{\alpha}{\beta} \right) + \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1(s)) ds + \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) = \bar{\omega}(t, p_1(\mu), p_2(\mu), \nu(\mu), \mu). \end{aligned} \quad (9)$$

Причём в силу (7) для функции $z_3(t)$ при всех μ из отрезка $[0, \bar{\mu}]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} z_3(2\pi + \mu\nu(\mu)) - z(0) &= \\ &= (e^{-\beta(2\pi + \mu\nu(\mu))} - 1)p_2(\mu) + \alpha \int_0^{2\pi + \mu\nu} e^{-\beta(2\pi + \mu\nu(\mu) - s)} (\cos(\zeta \operatorname{arctg} z_1(s)) + 1) ds = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая равенство (9) и равенства $F_i(p_1(\mu), p_2(\mu), \nu(\mu), \mu) = 0$, $i = 1, 2$, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos \mu\nu(\mu) - 1}{\mu} p_1(\mu) \\ -\frac{\sin \mu\nu(\mu)}{\mu} p_1(\mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi + \mu\nu(\mu)} \sin(\mu\nu - s) (-\gamma z_2(s) + (\Delta - z_1(s)) \operatorname{th} z_3(s)) ds \\ \int_0^{2\pi + \mu\nu(\mu)} \cos(\mu\nu - s) (-\gamma z_2(s) + (\Delta - z_1(s)) \operatorname{th} z_3(s)) ds \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, при всех $\mu \in [0, \bar{\mu}]$ справедливы равенства (10), (11). Это означает, что при указанных μ и $\tau(\mu) = \mu\nu(\mu)$ решение $z(t, (p_1(\mu), 0, p_2(\mu)), \mu)$ удовлетворяет уравнению (5). Тогда, согласно утверждению 2, система (2) имеет нетривиальное периодическое решение при малых μ . Теорема доказана.

Замечание 1. Применённый при доказательстве теоремы 1 метод почти полностью повторяет метод из [5, с. 396]. Отличие лишь в том, что в данном случае порождающая система является нелинейной, хотя и легко интегрируемой (а в работе [5, с. 396] рассматривались возмущённые линейные системы). Заметим, что применить для системы (2) указанный метод без

изменений нельзя. В самом деле, если рассматривать возмущённую линейную систему (т.е. положить $\alpha = \mu$), то при $\mu = 0$ для периодичности решения необходимо выполнение равенства $z_3 \equiv 0$, поэтому $F_1(p_1, p_2, \nu, 0) = -\gamma \pi p_1$, т.е. указанная функция обращается в нуль только при $p_1 = 0$.

Следствие 1. Пусть параметры α , β , Δ , ζ таковы, что существуют числа $\bar{p} > \bar{p} > 0$, для которых справедливы неравенства

$$I(\bar{p}) < 0, \quad I(\bar{p}) > 0.$$

Тогда найдётся такое число $\gamma > 0$, что система (2) имеет периодическое решение при каждом $\mu \in [0, \bar{\mu}]$. Здесь

$$I(p) = \int_0^{2\pi} (\Delta - p \cos s) \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s \, ds, \quad (12)$$

а функция $\omega(s, p)$ определяется равенством (6).

Доказательство. Заметим, что $H(p) = \pi \gamma p + I(p)$. Нетрудно видеть, что функция $I(p)$ непрерывно дифференцируема. Так как $I(\bar{p}) < 0$ и $I(\bar{p}) > 0$, то найдётся такая точка $p^* \in (\bar{p}, \bar{p})$, в которой $I(p^*) = 0$. Заметим также, что $I(0) = 0$. В самом деле,

$$\omega(s, 0) = e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\beta q} \, dq + \alpha \int_0^s e^{\beta q} \, dq \right) + \frac{\alpha}{\beta} = e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta s} - 1) \right) + \frac{\alpha}{\beta} = 2 \frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда

$$I(0) = \operatorname{th} \frac{2\alpha}{\beta} \int_0^{2\pi} (\Delta - p \cos s) \sin s \, ds = 0.$$

Рассмотрим функцию $I(p)$ на отрезке $[0, p^*]$. Так как функция непрерывна на этом отрезке, она достигает на нём своего минимума m_I . Поскольку $\bar{p} \in [0, p^*]$, справедливо неравенство $m_I < 0$. Это означает, что найдётся число $p^{**} \in (0, p^*)$ такое, что $I(p^{**}) < 0$, $I'(p^{**}) = 0$. Положим $\gamma = -I(p^{**})/(\pi p^{**}) > 0$, тогда $H(p^{**}) = -I(p^{**}) + I(p^{**}) = 0$. При этом

$$\frac{dH(p^{**})}{dp} = \pi \gamma + I'(p^{**}) = \pi \gamma > 0.$$

Таким образом, при указанном $\gamma > 0$ выполняются все условия теоремы 1. Следствие доказано.

Итак, для доказательства существования периодических решений у системы (2) достаточно найти такие значения $0 < \bar{p} < \bar{p}$, что интеграл $I(p)$ принимает при этих значениях p отрицательное и положительное значения соответственно. Для вычисления $I(p)$ можно непосредственно применять квадратурные формулы. Однако выражение под интегралом является довольно громоздким (содержит интеграл с переменным верхним пределом), поэтому такой подход затруднительно реализовать с вычислительной точки зрения. Покажем, как можно преобразовать функцию $I(p)$ и получить для неё более простые оценки. Для этого нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

2. Вспомогательные утверждения. Для удобства дальнейшего изложения введём следующие обозначения:

$$C(s, p) = \int_0^s e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) \, dq, \quad S(s, p) = \int_0^s e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin q)) \, dq. \quad (13)$$

Утверждение 3. *Имеют место равенства*

$$C(s + \pi, p) = C(\pi, p) + e^{\beta\pi} C(s, p), \quad C(s + \pi/2, p) = C(\pi/2, p) + e^{\beta\pi/2} S(s, p),$$

$$S(s + \pi, p) = S(\pi, p) + e^{\beta\pi} S(s, p), \quad S(s + \pi/2, p) = S(\pi/2, p) + e^{\beta\pi/2} C(s, p).$$

Доказательство. Воспользовавшись определением (13) и очевидными преобразованиями, получаем

$$\begin{aligned} C(s + \pi, p) &= \int_0^{s+\pi} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq = \\ &= \int_0^{\pi} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq + \int_{\pi}^{\pi+s} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq = \\ &= \int_0^{\pi} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq + \int_0^s e^{\beta(q+\pi)} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos(q + \pi))) dq = C(\pi, p) + e^{\beta\pi} C(s, p); \\ C(s + \pi/2, p) &= \int_0^{s+\pi/2} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq = \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq + \int_{\pi/2}^{s+\pi/2} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq = \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq + \int_0^s e^{\beta(q+\pi/2)} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos(q + \pi/2))) dq = \\ &= C(\pi/2, p) + e^{\beta\pi/2} S(s, p). \end{aligned}$$

Для функции $S(s, p)$ выкладки аналогичны. Утверждение доказано.

Следствие 2. *Для функции $\omega(s, p)$, определяемой равенством (6), справедливо представление*

$$\omega(s, p) = e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi} - 1} C(\pi, p) + \alpha C(s, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Доказательство. С учётом утверждения 3 имеем

$$\begin{aligned} \omega(s, p) &= e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} C(2\pi, p) + \alpha C(s, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta} = \\ &= e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{2\pi\beta} - 1} (1 + e^{\beta\pi}) C(\pi, p) + \alpha C(s, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta} = e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi} - 1} C(\pi, p) + \alpha C(s, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 3. *Функция $\omega(s, p)$, определяемая равенством (6), является π -периодической по переменной s .*

Доказательство. Согласно следствию 2 и утверждению 3 получаем

$$\omega(s + \pi, p) = e^{-\beta(s+\pi)} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi} - 1} C(\pi, p) + \alpha C(s + \pi, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\beta(s+\pi)} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} C(\pi, p) + \alpha C(\pi, p) + \alpha e^{\beta\pi} C(s, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta} = \\
&= e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} C(\pi, p) + \alpha C(s, p) \right) + \frac{\alpha}{\beta} = \omega(s, p).
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 4. Для функции $I(p)$, определяемой равенством (12), справедливо представление

$$I(p) = -p \int_0^{\pi} \sin(2s) \operatorname{th} \omega(s, p) ds.$$

Доказательство. Преобразовывая интеграл в определении (12), получаем

$$\begin{aligned}
I(p) &= \int_0^{2\pi} (\Delta - p \cos s) \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds = \\
&= \int_0^{\pi} (\Delta - p \cos s) \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\Delta - p \cos s) \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds = \\
&= \int_0^{\pi} (\Delta - p \cos s) \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds + \int_0^{\pi} (\Delta - p \cos(s + \pi)) \operatorname{th}(\omega(s + \pi, p)) \sin(s + \pi) ds = \\
&= \Delta \int_0^{\pi} \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds - p \int_0^{\pi} \cos s \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds - \\
&\quad - \Delta \int_0^{\pi} \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds - p \int_0^{\pi} \cos s \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds = \\
&= -2p \int_0^{\pi} \cos s \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin s ds = -p \int_0^{\pi} \operatorname{th}(\omega(s, p)) \sin(2s) ds.
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 5. При $s \in [0, \pi/2]$ справедливо равенство

$$\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p) = e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi/2} + 1} (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) - \alpha(C(s, p) - S(s, p)) \right).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение из условия и воспользуемся утверждением 3, а также следствием 2:

$$\begin{aligned}
e^{\beta s} (\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)) &= e^{-\beta\pi/2} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} C(\pi, p) + \alpha C(s + \pi/2, p) \right) - \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} C(\pi, p) + \alpha C(s, p) \right) = \\
&= e^{-\beta\pi/2} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} (C(\pi/2, p) + e^{\beta\pi/2} S(\pi/2, p)) + \alpha C(\pi/2, p) + \alpha e^{\beta\pi/2} S(s, p) \right) - \\
&\quad - \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} (C(\pi/2, p) + e^{\beta\pi/2} S(\pi/2, p)) + \alpha C(s, p) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C(\pi/2, p) \left(\frac{e^{-\beta\pi/2}\alpha}{e^{\beta\pi}-1} + \alpha e^{-\beta\pi/2} - \frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} \right) + S(\pi/2, p) \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi}-1} - \frac{\alpha e^{\beta\pi/2}}{e^{\beta\pi}-1} \right) - \alpha(C(s, p) - S(s, p)) = \\
&= \frac{\alpha}{e^{\beta\pi/2}+1} (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) - \alpha(C(s, p) - S(s, p)).
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Утверждение 4. Пусть функции $g(s)$, $h(s)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $m \leq h(s) \leq M$, $s \in [a, b]$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\frac{m-M}{2} \int_a^b |g(s)| ds + \frac{M+m}{2} \int_a^b g(s) ds &\leq \int_a^b g(s)h(s) ds \leq \\
&\leq \frac{M-m}{2} \int_a^b |g(s)| ds + \frac{M+m}{2} \int_a^b g(s) ds.
\end{aligned}$$

Доказательство. Согласно условию, если s таково, что $g(s) > 0$, то

$$g(s)m \leq g(s)h(s) \leq g(s)M.$$

Если же s таково, что $g(s) < 0$, то

$$g(s)M \leq g(s)h(s) \leq g(s)m.$$

Таким образом, при всех $s \in [a, b]$ справедливы неравенства

$$\left(\frac{m-M}{2} \operatorname{sgn} g(s) + \frac{M+m}{2} \right) g(s) \leq g(s)h(s) \leq \left(\frac{M-m}{2} \operatorname{sgn} g(s) + \frac{M+m}{2} \right) g(s),$$

т.е.

$$\frac{m-M}{2} |g(s)| + \frac{M+m}{2} g(s) \leq g(s)h(s) \leq \frac{M-m}{2} |g(s)| + \frac{M+m}{2} g(s).$$

Интегрируя это двойное неравенство, получаем требуемое. Утверждение доказано.

3. Основной результат. Установленные утверждения позволяют сформулировать и доказать основной результат работы. Сначала для упрощения записи введём обозначения величин

$$a_1 = a_1(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right), \quad a_2 = a_2(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(1 + \operatorname{ch}^{-2}(2\alpha/\beta))}{\beta^2 + 4} \quad (14)$$

и интеграла

$$\Omega(p) = \int_0^{\pi/2} \cos(2s) (\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))) ds, \quad (15)$$

а также обозначим

$$\bar{I}(p) = a_1(\alpha, \beta) + a_2(\alpha, \beta)\Omega(p) \quad \text{и} \quad \underline{I}(p) = -a_1(\alpha, \beta) + a_2(\alpha, \beta)\Omega(p). \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть числа α , β , ζ , $\bar{p}$, $\bar{\bar{p}}$ таковы, что

$$\bar{I}(\bar{p}) < 0, \quad \underline{I}(\bar{\bar{p}}) > 0 \quad (17)$$

для некоторых $0 < \bar{p} < \bar{\bar{p}}$. Тогда найдётся такое число $\gamma > 0$, что система (2) (при данных значениях α , β , γ , ζ) имеет периодическое решение при всех μ из некоторого отрезка $[0, \bar{\mu}]$.

Доказательство. Представим функцию $I(p)$ в удобном для дальнейшего виде:

$$\begin{aligned} I(p) &= -p \int_0^{\pi} \operatorname{th} \omega(s, p) \sin(2s) ds = -p \int_0^{\pi/2} \operatorname{th} \omega(s, p) \sin(2s) ds - p \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{th} \omega(s, p) \sin(2s) ds = \\ &= -p \int_0^{\pi/2} \operatorname{th} \omega(s, p) \sin(2s) ds - p \int_0^{\pi/2} \operatorname{th} \omega(s + \pi/2, p) \sin 2(s + \pi/2) ds = \\ &= p \int_0^{\pi/2} [\operatorname{th} \omega(s + \pi/2, p) - \operatorname{th} \omega(s, p)] \sin(2s) ds = p \int_0^{\pi/2} \Psi(s) (\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)) \sin(2s) ds. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Psi(s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{th} \omega(s + \pi/2, p) - \operatorname{th} \omega(s, p)}{\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)}, & \text{если } \omega(s + \pi/2) - \omega(s) \neq 0, \\ \operatorname{ch}^{-2} \omega(s, p), & \text{если } \omega(s + \pi/2) - \omega(s) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция $\Psi(s)$ непрерывна, при этом, согласно теореме Лагранжа,

$$\Psi(s) = \operatorname{ch}^{-2} \xi(s),$$

где $\xi(s) \in [\min(\omega(s + \pi/2, p), \omega(s, p)), \max(\omega(s + \pi/2, p), \omega(s, p))]$. Таким образом, справедливы неравенства

$$\operatorname{ch}^{-2} \max_{s \in [0, \pi]} |\omega(s, p)| \leq \Psi(s) \leq 1.$$

Оценим функцию $\omega(s, p)$:

$$\begin{aligned} |\omega(s, p)| &\leq \left| e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi} - 1} \int_0^{\pi} e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq + \alpha \int_0^s e^{\beta q} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos q)) dq \right) + \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq \\ &\leq e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi} - 1} \int_0^{\pi} e^{\beta q} dq + \alpha \int_0^s e^{\beta q} dq \right) + \frac{\alpha}{\beta} = e^{-\beta s} \frac{\alpha}{e^{\beta\pi} - 1} \frac{1}{\beta} (e^{\beta\pi} - 1) + e^{-\beta s} \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta s} - 1) + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{ch}^{-2}(2\alpha/\beta) \leq \Psi(s) \leq 1.$$

Тогда, согласно утверждению 4, для $I(p)$ при $p > 0$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right) I_1(p) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right) I_2(p) &\leq \frac{I(p)}{p} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right) I_1(p) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right) I_2(p), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$I_1(p) = \int_0^{\pi/2} |(\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)) \sin(2s)| ds, \quad I_2(p) = \int_0^{\pi/2} (\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)) \sin(2s) ds.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \int_0^{\pi/2} |(\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)) \sin(2s)| ds \leq \int_0^{\pi/2} (|\omega(s + \pi/2, p)| + |\omega(s, p)|) \sin(2s) ds \leq \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{4\alpha}{\beta} \sin(2s) ds = \frac{4\alpha}{\beta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем, как можно упростить $I_2(p)$:

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \int_0^{\pi/2} (\omega(s + \pi/2, p) - \omega(s, p)) \sin(2s) ds = [\text{Следствие 5}] = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(e^{-\beta s} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi/2} + 1} (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) - \alpha(C(s, p) - S(s, p)) \right) \right) \sin(2s) ds = \\ &= -\frac{1}{\beta^2 + 4} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi/2} + 1} (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) - \alpha(C(s, p) - S(s, p)) \right) de^{-\beta s} (2 \cos(2s) + \beta \sin(2s)) = \\ &= \frac{-1}{\beta^2 + 4} \left\{ \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi/2} + 1} (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) - \alpha(C(s, p) - S(s, p)) \right) e^{-\beta s} (2 \cos(2s) + \beta \sin(2s)) \right\} \Big|_0^{\pi/2} + \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2 + 4} \int_0^{\pi/2} -\alpha(C(s, p) - S(s, p))' e^{-\beta s} (2 \cos(2s) + \beta \sin(2s)) ds = \\ &= \frac{-1}{\beta^2 + 4} \left(-2e^{-\beta\pi/2} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta\pi/2} + 1} - \alpha \right) (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) - \frac{2\alpha}{e^{\beta\pi/2} + 1} (C(\pi/2, p) - S(\pi/2, p)) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2 + 4} \int_0^{\pi/2} \alpha(S(s, p) - C(s, p))' e^{-\beta s} (2 \cos(2s) + \beta \sin(2s)) ds = \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2 + 4} \int_0^{\pi/2} (\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))) (2 \cos(2s) + \beta \sin(2s)) ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Из неравенства (18) с учётом (19), (20) получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{2\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right) + \frac{\alpha(1 + \operatorname{ch}^{-2}(2\alpha/\beta))}{2(\beta^2 + 4)} I_3(p) \leq \frac{I(p)}{p} \leq \\ &\leq \frac{2\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\alpha/\beta)} \right) + \frac{\alpha(1 + \operatorname{ch}^{-2}(2\alpha/\beta))}{2(\beta^2 + 4)} I_3(p). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$I_3(p) = \int_0^{\pi/2} (\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))) (2 \cos(2s) + \beta \sin(2s)) ds.$$

Покажем, что

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))) \sin(2s) ds = 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s)) \sin(2s) ds &= - \int_{\pi/2}^0 \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos(\pi/2 - s))) \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - s\right) ds = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) \sin(2s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, $I_3(p) = \Omega(p)$ (см. (15)), а значит, оценки (21) вследствие обозначений (14)–(16) примут вид $\underline{I}(p) \leq I(p)/p \leq \bar{I}(p)$. Отсюда вследствие условия (17) вытекают неравенства $I(\bar{p}) < 0$, $I(\bar{p}) > 0$, которые, согласно следствию 1, означают, что система (2) имеет периодические решения при малых неотрицательных μ . Теорема доказана.

Итак, согласно теореме 2, для того, чтобы утверждать существование периодического решения у системы (2), достаточно найти значения параметров, при которых существуют такие $0 < \bar{p} < \bar{p}$, что $\bar{I}(\bar{p}) < 0$ и $\underline{I}(\bar{p}) > 0$. Для вычисления интеграла (15), входящего в функции (16), можно использовать квадратурные формулы.

Поиск подходящих параметров. Для проверки условий (17) достаточно приближённо вычислить интегралы, указанные в этих условиях, и показать, что они имеют требуемые знаки с учётом погрешности.

Для вычисления интегралов воспользуемся методом трапеций. При этом, поскольку вычисления будут проводиться на ЭВМ, необходимо также учесть погрешность при вычислении значений подынтегральной функции.

Утверждение 5. Пусть $g(s)$ – дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Пусть далее числа $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n$ таковы, что $|g(a + ih) - \tilde{g}_i| \leq \varepsilon$, $i = \overline{0, n}$, где $h = (b - a)/n$. Тогда

$$\left| \int_a^b g(s) ds - h \left(\frac{\tilde{g}_0 + \tilde{g}_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{g}_i \right) \right| \leq M_2 \frac{(b-a)h^2}{12} + \varepsilon(b-a),$$

где $M_2 = \max_{s \in [a, b]} |g''(s)|$.

Доказательство. Известно [13, с. 164], что формула трапеций имеет погрешность h^2 . Более точно, если $g_i = g(a + i(b-a)/n)$, $i = \overline{0, n}$, то

$$\left| \int_a^b g(s) ds - h \left(\frac{g_0 + g_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \right) \right| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} M_2.$$

Оценим указанную в условии разность:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(s) ds - h \left(\frac{\tilde{g}_0 + \tilde{g}_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{g}_i \right) \right| &\leq \left| \int_a^b g(s) ds - h \left(\frac{g_0 + g_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \right) \right| + \\ &+ \left| \frac{g_0 - \tilde{g}_0 + g_n - \tilde{g}_n}{2} + h \sum_{i=1}^{n-1} (g_i - \tilde{g}_i) \right| \leq h^2 \frac{b-a}{12} M_2 + \varepsilon n h, \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $nh = b - a$. Утверждение доказано.

Для вычисления интегралов в $\bar{I}(p)$, $\underline{I}(p)$ воспользуемся формулой трапеций, при этом для получения значений подынтегральной функции будем использовать библиотеку `npmath` [14], позволяющую проводить вычисления с любой заданной точностью.

Оценим погрешность при вычислении $\bar{I}(p)$. Далее пользуемся обозначениями (14)–(16).

Пусть $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ – приближённые значения коэффициентов a_1 и a_2 соответственно, вычисленные с точностью ε , т.е.

$$|a_1 - \tilde{a}_1| \leq \varepsilon, \quad |a_2 - \tilde{a}_2| \leq \varepsilon.$$

Пусть, далее, $\tilde{\Omega}(p)$ – приближённое значение интеграла, вычисленное по приближённым значениям подынтегральной функции:

$$\tilde{\Omega}(p) = h \left(\frac{\tilde{g}_0 + \tilde{g}_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{g}_i \right), \quad |\tilde{g}_i - \cos(2s_i)(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s_i)) + \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s_i)))| \leq \varepsilon,$$

$$s_i = ih, \quad i = \overline{0, n}, \quad h = \frac{\tilde{\pi}}{2n}, \quad |\tilde{\pi} - \pi| \leq \varepsilon.$$

Здесь $\tilde{\pi}$ – рациональное приближение числа π . Таким образом, $\tilde{\Omega}(p)$ – это приближённое значение интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2s)(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))) ds.$$

Тогда, с учётом утверждения 5, получим

$$\begin{aligned} |\Omega(p) - \tilde{\Omega}(p)| &= \left| \int_0^{\pi/2} g(q) dq - \tilde{\Omega}(p) \right| \leq \left| \int_0^{\pi/2} g(q) dq - \int_0^{\tilde{\pi}/2} g(q) dq \right| + \left| \int_0^{\tilde{\pi}/2} g(q) dq - \tilde{\Omega}(p) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\tilde{\pi}}{2} \right| \max_{s \in [0, \pi/2]} |g(s)| + M_2 \frac{\tilde{\pi} h^2}{24} + \varepsilon \frac{\tilde{\pi}}{2} \leq 2\varepsilon + M_2 \frac{\tilde{\pi} h^2}{24} + \varepsilon \frac{\tilde{\pi}}{2} = \\ &= \frac{\tilde{\pi}}{2} \left(M_2 \frac{h^2}{12} + \varepsilon + \frac{4\varepsilon}{\tilde{\pi}} \right) \leq 2 \left(M_2 \frac{h^2}{12} + 3\varepsilon \right), \end{aligned}$$

где

$$g(s) = \cos(2s)(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))), \quad |g(s)| \leq 2, \quad M_2 = \max_{s \in [0, \pi/2]} |g''(s)|.$$

Таким образом, если $\tilde{\bar{I}}(p) = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{\Omega}(p)$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |\bar{I}(p) - \tilde{\bar{I}}(p)| &= |a_1 + a_2 \Omega(p) - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \tilde{\Omega}(p)| \leq |a_1 - \tilde{a}_1| + |a_2 - \tilde{a}_2| |\Omega(p)| + |\Omega(p) - \tilde{\Omega}(p)| |\tilde{a}_2| \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \pi + 2 \left(M_2 \frac{h^2}{12} + 3\varepsilon \right) |\tilde{a}_2| \leq 5\varepsilon + 2 \left(M_2 \frac{h^2}{12} + 3\varepsilon \right) \left(\frac{2\alpha}{\beta^2 + 4} + \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$|\tilde{a}_2| \leq 2\alpha/(\beta^2 + 4) + \varepsilon, \quad |\Omega(p)| \leq \pi.$$

Точно такая же оценка получается для разности $|\underline{I}(p) - \tilde{\underline{I}}(p)|$.

Найдём, наконец, коэффициент M_2 :

$$g''(s) = -4 \cos(2s)(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))) -$$

$$-4 \sin(2s) \left(-\frac{p\zeta \cos s \sin(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s))}{p^2 \sin^2(s) + 1} - \frac{p\zeta \sin s \sin(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))}{p^2 \cos^2(s) + 1} \right) + \\ + \cos(2s)(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s)))'',$$

где

$$(\cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s)))'' = \\ = \frac{p^2 \zeta^2 \sin^2 s \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s)) + 2p^3 \zeta \sin^2 s \cos s \sin(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))}{(p^2 \cos^2 s + 1)^2} + \\ + \frac{2p^3 \zeta \sin s \cos^2 s \sin(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s)) - p^2 \zeta^2 \cos^2 s \cos(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s))}{(p^2 \sin^2 s + 1)^2} + \\ + \frac{p\zeta \sin s \sin(\zeta \operatorname{arctg}(p \sin s))}{p^2 \sin^2 s + 1} - \frac{p\zeta \cos s \sin(\zeta \operatorname{arctg}(p \cos s))}{p^2 \cos^2 s + 1}.$$

Таким образом,

$$|g''(s)| \leq 8 + 10p\zeta + 2p^2\zeta^2 + 4p^3\zeta = M_2.$$

Рассмотрим систему (2) при следующих значениях параметров:

$$\alpha = 0.3, \quad \beta = 2, \quad \zeta = 5.6, \quad \bar{p} = 2.1, \quad \bar{\bar{p}} = 9, \quad \Delta = 0.1.$$

Здесь параметр Δ можно взять произвольным, поскольку, как показано выше, он не влияет на величину $I(p)$. Вычисляя для этих значений параметров приближённые значения $\tilde{I}(\bar{p})$ и $\underline{\tilde{I}}(\bar{\bar{p}})$, найдём, что

$$\tilde{I}(\bar{p}) \approx -0.0598, \quad \underline{\tilde{I}}(\bar{\bar{p}}) \approx 0.0213.$$

При этом погрешность вычисления функции была выбрана равной $\varepsilon = 10^{-50}$, а шаг – равным $h = \tilde{\pi}/(2 \cdot 10^5)$, общая погрешность вычислений составила менее 10^{-7} . Таким образом, при указанных значениях параметров система удовлетворяет условиям теоремы 2.

График функции $I(p)$ и её оценок $p\bar{I}(p)$, $p\underline{I}(p)$, вычисленных при указанных значениях параметров, приведён на рис. 1, а. При $\gamma = 0.02$ прямая $y(p) = -\pi\gamma p$ пересекает график функции $I(p)$ (см. рис. 1, б), поэтому система имеет периодическое решение при малых μ . График этого решения при $\mu = 0.01$ приведён на рис. 2.

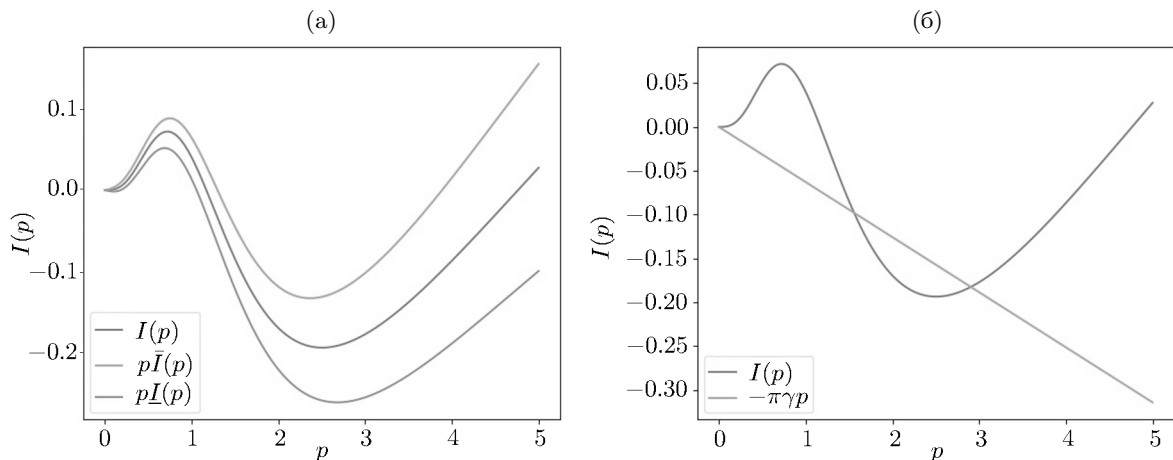


Рис. 1. График функции $I(p)$ и её оценок $p\bar{I}(p)$, $p\underline{I}(p)$.

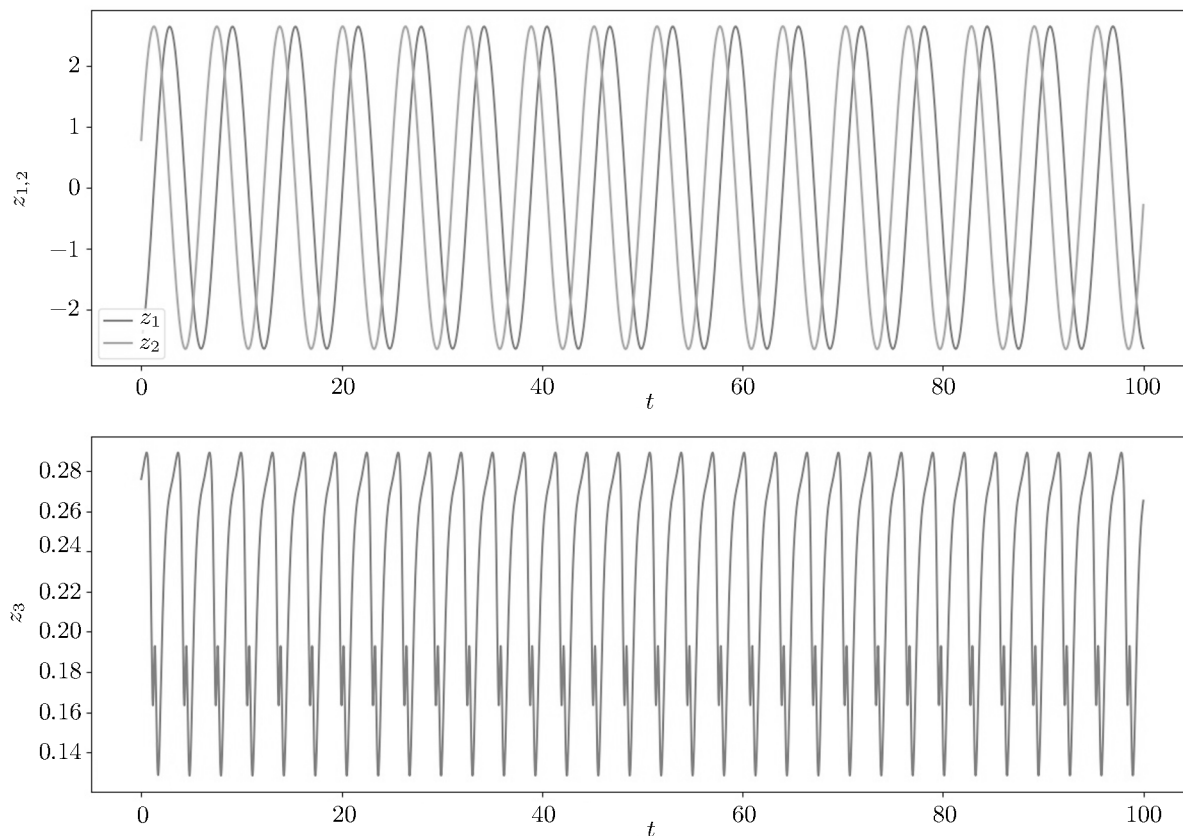


Рис. 2. График решения, приведённого на рис. 1, б.

Заключение. В работе получены достаточные условия существования периодических решений у дифференциальной системы (2). Эти условия формулируются в виде требований к знаку некоторых определённых интегралов. Данные интегралы вычислены с достаточно высокой точностью, позволяющей однозначно говорить об их знаке и, следовательно, о выполнении установленных достаточных условий. Численное интегрирование системы (2) подтверждает наличие у неё периодических решений при указанных значениях параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-57-18006 Болг_а, 20-07-00827 и 20-57-00001 Бел_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Todorov T., Nikolov N., Todorov G., Ralev Ya.* Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web Conf. 2018. V. 148. P. 12002.
2. *Fomichev V.V., Iline A.V., Rogovskii A.I., Todorov G.D., Sofronov Ya. P.* Search for periodic regimes in an energy-harvester model by simulation // Comput. Math. and Model. 2020. V. 31. № 1. P. 293–307.
3. *Муссеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969.
4. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М., 2014.
5. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
6. *Grasman W.* Periodic solutions of autonomous differential equations in higher dimensional spaces // The Rocky Mountain J. of Math. 1977. V. 7. № 3. P. 457–466.
7. *Lefschetz S.* Existence of periodic solutions for certain differential equations // Proc. of the Nat. Acad. of Sci. of the USA. 1943. V. 29. № 1. P. 29–32.

8. *Browder F.E.* Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution // Proc. of the Nat. Acad. of Sci. of the USA. 1965. V. 53. № 5. P. 1100–1103.
9. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О существовании циклов в автономных системах // Докл. РАН. 2002. Т. 384. С. 161–166.
10. *Голицын Д.Л., Рябков О.И., Буров Д.А.* Алгоритм численного доказательства существования периодических траекторий в двумерных неавтономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 216–222.
11. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Т. 1. Новые методы небесной механики. М., 1972.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
13. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М., 1989.
14. *Johansson F. et al.* mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 1.2). 2021-02.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Технический университет,
г. София, Болгария

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.
После доработки 27.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© 2021 г. М. Мирсабуров, Н. Б. Ислотов

Для уравнения смешанного типа второго рода доказаны единственность и существование решения краевой задачи с условием Трикоми на части граничной характеристики и условием Бицадзе–Самарского на граничной и параллельной ей внутренней характеристике.

DOI: 10.31857/S0374064121100101

1. Постановка задачи А. Пусть Ω – конечная односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой

$$\Gamma : x^2 + \frac{4}{(2-m)^2} y^{2-m} = 1$$

с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = -1 \quad \text{и} \quad BC : x + \frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения

$$u_{xx} + (\operatorname{sign} y)|y|^m u_{yy} + \alpha|y|^{m-1} u_y = 0, \quad (1)$$

где m и α – постоянные, причём

$$0 < m < 2, \quad m-1 < \alpha < m/2. \quad (2)$$

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 части области Ω , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 – точки пересечения характеристик AC и BC соответственно с характеристикой, выходящей из точки $E(c, 0)$, где $(c, 0) \in J = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}$. Через Ω_{21} обозначим характеристический треугольник EC_1B .

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи с условием Трикоми [1, с. 29] на характеристике AC_0 и условием Бицадзе–Самарского [2] на параллельных характеристиках C_0C и EC_1 .

Задача А. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) справедливо включение $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$;
- 2) функция $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) в области Ω_1 ;
- 3) функция $u(x, y)$ является обобщённым решением из класса R_2 [3; 4, с. 113] уравнения (1) в области $\Omega_2 \setminus (EC_0 \cup EC_1)$;
- 4) имеют место включения $y^\alpha u_y(x, y) \in C(\Omega_1 \cup J_1 \cup J_2)$, $(-y)^\alpha u_y(x, y) \in C(\Omega_2 \cup J_1 \cup J_2)$, и на интервалах $J_1 \cup J_2$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = - \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad (x, 0) \in J_1 \cup J_2, \quad (3)$$

где $J_1 = \{(x, y) : -1 < x < c, y = 0\}$, $J_2 = \{(x, y) : c < x < 1, y = 0\}$;

5) функция $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{\bar{\Gamma}} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Gamma}, \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2], \quad (5)$$

$$u(\theta(x)) = \mu u(\theta^*(x)) + \rho(x), \quad x \in [c, 1], \quad (6)$$

где $\varphi(x, y)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ – заданные функции, причём

$$\varphi(-1, 0) = \psi(-1) = 0, \quad \rho(c) = \psi((c-1)/2) = 0, \quad (7)$$

$$\mu = \text{const} < 0, \quad (8)$$

$$\varphi(x, y) = y^{\varepsilon+1} \varphi_1(x, y), \quad \varphi_1(x, y) \in C(\bar{\Gamma}), \quad \varepsilon > 0, \quad (9)$$

$$\rho(x) \in C^1[c, 1] \cap C^2[c, 1), \quad \psi(x) \in C^1[-1, (c-1)/2] \cap C^2[-1, (c-1)/2); \quad (10)$$

функции $\rho''(x)$ и $\psi''((x-1)/2)$ при $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow c$ соответственно могут обращаться в бесконечность, порядок которой меньше $1-\beta$, где $2\beta = (2\alpha - m)/(2-m)$, $2\beta \in (-1, 0)$; здесь

$$\theta(x) = \left(\frac{x-1}{2}, -\left(\frac{2-m}{4}(x+1) \right)^{2/(2-m)} \right), \quad \theta^*(x) = \left(\frac{x+c}{2}, -\left(\frac{2-m}{4}(x-c) \right)^{2/(2-m)} \right), \quad (11)$$

$\theta(x)$ ($\theta^*(x)$) – точки пересечения характеристики C_0C (характеристики EC_1) с характеристикой, исходящей из точки $M(x, 0)$ где $x \in [c, 1]$.

Заметим, что условие (5) является условием Трикоми на характеристике AC_0 , а условие (6) – условием Бицадзе–Самарского, заданным на параллельных характеристиках C_0C и EC_1 .

Задача A для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом первого рода в случае, когда краевое условие на первой части характеристики задаётся локально, а на второй части и параллельной ей внутренней характеристике задаётся условие типа Бицадзе–Самарского, изучена в работах [2, 5]. Такие задачи для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода исследованы в работах [6, 7].

2. Основные функциональные соотношения. При исследовании задачи A важную роль играют функциональные соотношения между функциями $\nu^\pm(x)$ и $\tau(x)$, привнесённые на интервал J из эллиптической и гиперболической части области Ω , где

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu^-(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu^+(x), \quad (x, 0) \in J. \quad (13)$$

Обобщённое решение из класса R_2 задачи Коши с данными (12), (13) для уравнения (1) в области Ω_2 даётся формулой [3; 4, с. 230, формула (27.5)]

$$u(\xi, \eta) = \int_{-1}^{\xi} (\eta - t)^{-\beta} (\xi - t)^{-\beta} T(t) dt + \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{-\beta} (t - \xi)^{-\beta} N(t) dt, \quad (14)$$

в которой

$$\xi = x - \frac{2}{2-m} (-y)^{(2-m)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{2-m} (-y)^{(2-m)/2}, \quad (15)$$

$$N(t) = T(t)/2 \cos(\pi\beta) - \gamma_1 \nu^-(t), \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)} \left(\frac{2-m}{4} \right)^{1-2\beta}, \quad (16)$$

$$\tau(x) = \tau(-1) + \int_{-1}^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt, \quad -1 < x < 1, \quad (17)$$

функции $T(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны в $(-1, 1)$ и интегрируемы на $[-1, 1]$, а функция $\tau(x)$ обращается в нуль, который имеет порядок не меньше -2β при $x \rightarrow -1$.

Обобщённое решение из класса R_2 задачи Коши с данными (12), (13) для уравнения (1) в области Ω_{21} даётся формулой

$$u(\xi, \eta) = \int_c^\xi (\eta-t)^{-\beta} (\xi-t)^{-\beta} T(t) dt + \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} N(t) dt, \quad (18)$$

где ξ , η и $N(t)$ определяются соответственно равенствами (15) и (16);

$$\tau(x) = \tau(c) + \int_c^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt, \quad c < x < 1, \quad (19)$$

функции $T(x)$ и $\nu^-(x)$ непрерывны в $(c, 1)$ и интегрируемы на $[c, 1]$, а функция $\tau(x)$ обращается в нуль, который имеет порядок не меньше -2β при $x \rightarrow c$.

В силу (7), (8) из условий (5) и (6) следует, что

$$\tau(-1) = 0, \quad \tau(c) = 0. \quad (20)$$

Положив $\xi = -1$, $\eta = x$ и $\xi = c$, $\eta = x$ соответственно в формулах (14) и (18), с учётом равенств (11) после несложных преобразований получим, что

$$u(\theta(x)) = \int_{-1}^x (x-t)^{-\beta} (1+t)^{-\beta} N(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

$$u(\theta^*(x)) = \int_c^x (x-t)^{-\beta} (t-c)^{-\beta} N(t) dt, \quad c \leq x \leq 1. \quad (22)$$

Дифференцируя тождество (6) по x , а затем применяя к обеим частям полученного равенства оператор $D_{c,x}^{-\beta}[\cdot]$, будем иметь

$$\begin{aligned} D_{-1,x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u(\theta(x)) - \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_{-1}^c (x-t)^\beta \frac{d}{dt} u(\theta(t)) dt = \\ = \mu D_{c,x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u(\theta^*(x)) + D_{c,x}^{-\beta} \rho'(x), \quad c < x < 1, \end{aligned} \quad (23)$$

где $D_{c,x}^\alpha[\cdot]$ – оператор интегро-дифференцирования дробного порядка α [4, с. 16].

Подставляя представления (21), (22) в равенство (23) с учётом (5), (16) и тождеств

$$D_{-1,x}^{-\beta} D_{-1,x}^\beta (x+1)^{-\beta} N(x) = (x+1)^{-\beta} N(x), \quad -1 < x < 1,$$

$$D_{c,x}^{-\beta} D_{c,x}^\beta (x-c)^{-\beta} N(x) = (x-c)^{-\beta} N(x), \quad c < x < 1,$$

получаем

$$\gamma_1 \nu^-(x) = \frac{T(x)}{2 \cos(\pi\beta)} + F_1(x), \quad c < x < 1, \quad (24)$$

где

$$F_1(x) = d_0(x)D_{c,x}^{-\beta}\rho'(x) + \frac{d_0(x)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{d}{dx}\int_{-1}^c (x-t)^\beta\psi'((t-1)/2)dt, \quad (25)$$

$$d_0(x) = (\Gamma(1-\beta)(\mu(x-c)^{-\beta} - (1+x)^{-\beta}))^{-1}.$$

Равенство (24) представляет собой первое функциональное соотношение между функциями $T(x)$ и $\nu^-(x)$, привнесённое на интервал J_2 из области Ω_{21} .

Точно так же, положив $\xi = -1$ и $\eta = x$ в формуле (14), с учётом условия (5) получим второе функциональное соотношение между функциями $T(x)$ и $\nu^-(x)$, привнесённое на интервал J_1 из области Ω_2 :

$$\gamma_1\nu^-(x) = \frac{1}{2\cos(\pi\beta)}T(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)}D_{-1,x}^{-\beta}\psi'(x), \quad -1 < x < c. \quad (26)$$

Решение задачи E_α с условиями (4) и (13) для уравнения (1) в области Ω_1 существует, единственно и представимо в виде [4, формула (10.41)]

$$u(x, y) = -\gamma_2 \int_{-1}^1 \nu^+(t) \left\{ \left((t-x)^2 + \frac{4}{(2-m)^2} y^{2-m} \right)^{-\beta} - \left((1-xt)^2 + \frac{4t^2}{(2-m)^2} y^{2-m} \right)^{-\beta} \right\} dt - \\ - \gamma_2 \beta (2-m)(1-R^2) \int_0^l \varphi[\xi(s), \eta(s)] \eta^{\alpha-1}(s) (r_1^2)^{-\beta-1} F(\beta, \beta+1, 2\beta; 1-\sigma) \frac{d\xi(s)}{ds} ds, \quad (27)$$

где

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} = (\xi-t)^2 + \frac{4}{(2-m)^2} (\eta^{(2-m)/2} \mp y^{(2-m)/2})^2, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(2-m)^2} y^{2-m},$$

а s – длина дуги кривой Γ , отсчитываемая от точки $B(1, 0)$, и l – длина всей дуги кривой Γ .

Используя уравнение нормальной кривой Γ и полагая в формуле (27) $y = 0$, с учётом соотношений (12), (9) получаем функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$, привнесённое на интервал J из области Ω_1 :

$$\tau(x) = -\gamma_2 \int_{-1}^1 (|x-t|^{-2\beta} - (1-xt)^{-2\beta}) \nu^+(t) dt + F_2(x), \quad (x, 0) \in \overline{J}, \quad (28)$$

где

$$F_2(x) = \gamma_2 \beta \left(\frac{2-m}{2} \right)^{(1-2\beta)(\varepsilon+\alpha)/((1-\alpha)+1)} (1-x^2) \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{(1-2\beta)(\varepsilon+\alpha)/(2(1-\alpha))} \varphi_1(t) dt}{(1-2xt+x^2)^{1+\beta}}, \quad (29)$$

$$\varphi_1(x) = \varphi \left(x, \left(\frac{2-m}{2} \right)^{2/(2-m)} (1-x^2)^{1/(2-m)} \right).$$

Отметим, что соотношение (28) справедливо для всего промежутка J .

3. Единственность решения задачи А. Для доказательства единственности решения задачи А важную роль играют следующие три леммы.

Лемма 1. Если функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $k > -2\beta$ при $-1 < x < 1$ (т.е. $\tau(x) \in C^{(1,k)}(-1, 1)$), то функция

$$T(x) = \frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta} \frac{d}{dx} \int_a^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta} dt \quad (30)$$

представима в виде

$$T(x) = \frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta} \left(\tau'(x)(x-a)^{2\beta} + 2\beta \int_a^x (\tau'(t) - \tau'(x))(x-t)^{2\beta-1} dt \right), \quad (31)$$

где a принимает значение -1 или $с$.

Доказательство. В силу определения оператора интегро-дифференцирования дробного порядка [4, с. 16] и тождества $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ из представлений (17) и (19) с учётом равенства (20) вытекает, что

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{a,x}^{1-2\beta} \tau(x), \quad (32)$$

или

$$T(x) = \frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \tau(t)(x-t)^{2\beta} dt = \frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta} \frac{d}{dx} \int_a^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta} dt. \quad (33)$$

Рассмотрим функцию

$$T_1(x, \varepsilon) = \int_a^{x-\varepsilon} \tau'(t)(x-t)^{2\beta} dt \quad (34)$$

и найдём её производную

$$\begin{aligned} \frac{dT_1(x, \varepsilon)}{dx} &= \tau'(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta} + 2\beta \int_a^{x-\varepsilon} \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt = \\ &= 2\beta \int_a^x (\tau'(t) - \tau'(x))(x-t)^{2\beta-1} dt + (x-a)^{2\beta} \tau'(x) - \varepsilon^{2\beta} (\tau'(x) - \tau'(x-\varepsilon)). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $k > -2\beta$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\frac{dT_1(x)}{dx} = \tau'(x)(x-a)^{2\beta} + 2\beta \int_a^x (\tau'(t) - \tau'(x))(x-t)^{2\beta-1} dt,$$

откуда с учётом определения (34) в силу равенства (33) имеем представление (31). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия

$$\tau(x) \in C[-1, 1] \cap C^{(1,k)}(-1, 1), \quad k > -2\beta, \quad -1 < 2\beta < 0, \quad (35)$$

и функция $\tau(x)$ в точке $x = x_0$ ($x_0 \in (-1, 1)$) принимает наибольшее положительное значение (НПЗ) (наименьшее отрицательное значение (НОЗ)). Тогда функцию $T(x)$, определённую равенством (32), в точке $x = x_0$ можно представить в виде

$$T(x_0) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{a,x}^{1-2\beta} \tau(x)|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{2\beta}{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left((x_0 - a)^{2\beta-1} \tau(x_0) + (1-2\beta) \int_a^{x_0} \frac{\tau(x_0) - \tau(t)}{(x_0 - t)^{2-2\beta}} dt \right), \quad (36)$$

причём

$$T(x_0) < 0 \quad (T(x_0) > 0), \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (37)$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_1 \in (-1, x)$ и запишем интеграл, входящий в представление (31), в виде суммы двух интегралов – по промежуткам (a, x_1) и (x_1, x) . Далее используя формулу интегрирования по частям для интеграла по промежутку (a, x_1) , получаем

$$T(x) = \frac{\sin(2\pi\beta)}{2\pi\beta} \left\{ -2\beta(1-2\beta) \int_a^{x_1} (\tau(t) - \tau(x))(x-t)^{2\beta-2} dt + 2\beta(x-a)^{2\beta-1} \tau(x) + \right. \\ \left. + 2\beta \int_{x_1}^x \frac{\tau'(t) - \tau'(x)}{(x-t)^{1-2\beta}} dt + (x-x_1)^{2\beta} \tau'(x) + 2\beta(x-x_1)^{2\beta-1} (\tau(x_1) - \tau(x)) \right\}. \quad (38)$$

Полагая в тождестве (38) $x = x_0$ и затем переходя к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$, с учётом включения (35) придём к представлению (36).

Пусть в точке $(x_0, 0) \in J$ функция $\tau(x)$ достигает своего НПЗ (НОЗ), тогда из (36) с учётом предположений (2) и неравенств $-1 < 2\beta < 0$, $\tau(x_0) - \tau(x) > 0$ ($\tau(x_0) - \tau(x) < 0$) получим неравенство (37). Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой аналог принципа экстремума А.В. Бицадзе.

Лемма 3. Если выполнены условия (2) и (8), то решение $u(x, y)$ задачи А при $\psi(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 0$ своих НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\overline{\Omega_1}$ достигает только в точках кривой $\bar{\Gamma}$.

Доказательство. В силу принципа Хопфа [8, с. 25; 9, 10] решение $u(x, y)$ уравнения (1) внутри области Ω_1 не может достигать своих НПЗ или НОЗ. Допустим, что решение $u(x, y)$ достигает своих НПЗ или НОЗ в точках интервала $(-1, 1)$ оси $y = 0$.

Рассмотрим отдельно три случая:

1. Пусть $u(x, y)$ своего НПЗ (НОЗ) достигает в некоторой точке $Q(x_0, 0) \in J_1$. Тогда равенство (26) при $\psi(x) \equiv 0$ принимает вид $\gamma_1 \nu^-(x) = T(x)/(2 \cos(\pi\beta))$, $-1 < x < c$. Отсюда в силу (2), (3), (13) и (37) заключаем, что в точке $Q(x_0, 0)$ НПЗ (НОЗ) выполняется неравенство $\nu^+(x_0) > 0$ ($\nu^+(x_0) < 0$).

Это неравенство противоречит принципу Заремба–Жиро [4, с. 88, лемма 11.1] (т.е. противоречит неравенству $\nu^+(x_0) < 0$ ($\nu^+(x_0) > 0$)), поэтому $Q(x_0, 0) \notin J_1$.

2. Пусть решение $u(x, y)$ своего НПЗ (НОЗ) достигает в некоторой точке $P(x_0, 0) \in J_2$. Тогда, положив в (24) $\psi(x) \equiv \rho(x) \equiv 0$, будем иметь $\gamma_1 \nu^-(x) = T(x)/(2 \cos(\pi\beta))$, $c < x < 1$. Отсюда, принимая во внимание (2), (3), (13) и (37), заключаем, что в точке $P(x_0, 0) \in J_2$ НПЗ (НОЗ) справедливо неравенство $\nu^+(x_0) > 0$ ($\nu^+(x_0) < 0$).

Это неравенство противоречит неравенству $\nu^+(x_0) < 0$ ($\nu^+(x_0) > 0$) [4, с. 88, лемма 11.1], поэтому $P(x_0, 0) \notin J_2$.

3. Пусть $x_0 = c$, тогда из соответствующего однородного условия (5) (с $\varphi(x) \equiv 0$) следует, что $u(c, 0) = 0$, тогда в силу (6) (с $\rho(x) \equiv 0$) получаем $u(C_0) = \mu u(E)$, откуда $u(E) = 0$, т.е. $\tau(c) = 0$, или $u(c, 0) = 0$. Следовательно, функция $u(x, y)$ не достигает своего экстремума в точке $E(c, 0)$, т.е. $x_0 \neq c$.

Таким образом, при выполнении условий леммы 3 функция $u(x, y)$ своих НПЗ и НОЗ достигает в точках кривой $\bar{\Gamma}$. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и (8), то задача А имеет не более одного решения.

Доказательство. При однородных краевых данных (4)–(6) из леммы 3 следует тождество $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega_1}$. Тогда в силу непрерывности решения задачи А в смешанной области

$\overline{\Omega}$ и условия сопряжения (3) имеем

$$u(x, -0) \equiv 0, \quad (x, 0) \in \overline{J}_j, \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \equiv 0, \quad (x, 0) \in J_j \quad (j = 1, 2). \quad (39)$$

Теперь, восстанавливая решение задачи A в области Ω_2 как решение задачи Коши с однородными данными (39) по формуле (14), с учётом (16), (32) получаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ во всей смешанной области $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

4. Существование решения задачи A .

Теорема 2. Если выполнены условия (2), (7)–(10) и

$$-1 < 2\beta < 0, \quad \rho'(c) = 0, \quad \psi'(-1) = \psi'\left(\frac{c-1}{2}\right) = 0, \quad (40)$$

то решение задачи A в области Ω существует.

Доказательство. В силу равенств (19) и (32) из представлений (24) следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{c,x}^{1-2\beta} \tau(x) = \gamma_3 \nu^-(x) - 2 \cos(\pi\beta) F_1(x), \quad c < x < 1, \quad (41)$$

здесь $\gamma_3 = 2\gamma_1 \cos(\pi\beta)$.

Точно так же в силу равенств (17) и (32) из представления (26) вытекает, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{-1,x}^{1-2\beta} \tau(x) = \gamma_3 \nu^-(x) - F_3(x), \quad -1 < x < c, \quad (42)$$

где

$$F_3(x) = \frac{2 \cos(\pi\beta)(1+x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_{-1,x}^{-\beta} \psi'(x). \quad (43)$$

Применяя оператор $\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{c,x}^{-2\beta}$ к соотношению (28), с учётом равенства (30) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{c,x}^{1-2\beta} \tau(x) = & -\gamma_2(1 - \cos(2\pi\beta)) \nu^+(x) - \frac{\gamma_2 \sin(2\pi\beta)}{\pi} \left\{ \int_{-1}^c \left(\frac{c-s}{x-c} \right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(s) ds}{s-x} + \right. \\ & \left. + \int_c^1 \left(\frac{s-c}{x-c} \right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(s) dt}{s-x} - \int_{-1}^1 \left(\frac{1-cs}{x-c} \right)^{-2\beta} \frac{s \nu^+(s) ds}{1-xs} \right\} + \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{c,x}^{-2\beta} F_2'(x). \end{aligned} \quad (44)$$

Вследствие (44) соотношения (41) и (42) с учётом условия (3) запишем соответственно в виде

$$\nu^+(x) = -\lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1+x} \right)^{-2\beta} \left[\frac{1}{s-x} - \frac{s}{1-xs} \right] \nu^+(s) ds + F_4(x), \quad -1 < x < c, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \nu^+(x) = & -\lambda \left\{ \int_{-1}^c \left(\frac{c-s}{x-c} \right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(s) ds}{s-x} + \int_c^1 \left(\frac{s-c}{x-c} \right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(s) ds}{s-x} - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^1 \left(\frac{1-cs}{x-c} \right)^{-2\beta} \frac{s \nu^+(s) ds}{1-xs} \right\} + F_5(x), \quad c < x < 1, \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\lambda = \frac{\cos(\pi\beta)}{\pi(1 + \sin(\pi\beta))},$$

$$F_4(x) = \frac{1}{2\gamma_2(1 + \sin(\pi\beta))\sin(\pi\beta)} \left(F_3(x) + \frac{1}{\Gamma(1 - 2\beta)} D_{-1,x}^{-2\beta} F_2'(x) \right), \quad (47)$$

$$F_5(x) = \frac{1}{2\gamma_2(1 + \sin(\pi\beta))\sin(\pi\beta)} \left(2\cos(\pi\beta)F_1(x) + \frac{1}{\Gamma(1 - 2\beta)} D_{c,x}^{-2\beta} F_2'(x) \right). \quad (48)$$

В силу (7), (9), (10), (40) с учётом равенств (25), (29), (43) из представлений (47) и (48) следует, что функция $F_4(x)$ принадлежит классу $C(-1, c] \cap L_1[-1, c]$ и обращается в бесконечность порядка, меньшего -2β при $x \rightarrow -1$, а при $x \rightarrow c$ ограничена, функция же $F_5(x)$ принадлежит классу $C(c, 1] \cap L_1[c, 1]$ и обращается в бесконечность порядка, меньшего -2β при $x \rightarrow c$, а при $x \rightarrow 1$ ограничена.

Заметим, что соотношения (45) и (46) имеют место для $x \in (-1, c)$ и $x \in (c, 1)$ соответственно. Чтобы рассматривать их на одном промежутке $(-1, 1)$, заменим в (45) x на $ax - b$, а в (46) x на $bx + a$ (здесь $a = (c + 1)/2$, $b = (1 - c)/2$, $a + b = 1$, $a - b = c$), тогда получим

$$\begin{aligned} \nu^+(ax - b) = & -\lambda \int_{-1}^c \left(\frac{1+s}{a(1+x)} \right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{s - ax + b} - \frac{1}{1 - (ax - b)s} \right) \nu^+(s) ds - \\ & - \lambda \int_c^1 \left(\frac{1+s}{a(1+x)} \right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{s - ax + b} - \frac{1}{1 - (ax - b)s} \right) \nu^+(s) ds + F_4(ax - b), \quad x \in J, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \nu^+(bx + a) = & -\lambda \left\{ \int_{-1}^c \left(\frac{c-s}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(s) ds}{s - bx - a} + \int_c^1 \left(\frac{s-c}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(s) ds}{s - bx - a} - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^c \left(\frac{1-cs}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{s\nu^+(s) ds}{1 - (bx + a)s} - \int_c^1 \left(\frac{1-cs}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{s\nu^+(s) ds}{1 - (bx + a)s} \right\} + F_5(bx + a), \quad x \in J. \end{aligned} \quad (50)$$

Далее в интегралах правой части равенств (49) и (50) сделаем замену переменной интегрирования $s = at - b$ для интегралов по промежутку $(-1, c)$ и $s = bt + a$ для интегралов по промежутку $(c, 1)$, в результате получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_1(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\begin{aligned} \nu_1(x) + \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1 - (ax-b)(at-b)} \right) \nu_1(t) dt = \\ = -\lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{b\nu_2(t) dt}{bt - ax + 1} + T_1[\nu_2] + F_6(x), \quad x \in J, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \nu_2(x) + \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1 - (bx+a)(bt+a)} \right) \nu_2(t) dt = \\ = -\lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{a(1-t)}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{a\nu_1(t) dt}{at - bx - 1} + H_1[\nu_1] + H_2[\nu_2] + F_7(x), \quad x \in J, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$T_1[\nu_2] = \lambda \int_{-1}^1 \frac{(a+bt)b\nu_2(t) dt}{1-(ax-b)(bt+a)},$$

$$H_1[\nu_1] = \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1-c(at-b)}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{(at-b)a\nu_1(t) dt}{1-(bx+a)(at-b)},$$

$$H_2[\nu_2] = \lambda \int_{-1}^1 \left((bt+a) \left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} - \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{-2\beta} \right) \frac{b\nu_2(t) dt}{1-(bx+a)(bt+a)}$$

– регулярные операторы; здесь

$$\nu_1(x) = \nu^+(ax-b), \quad \nu_2(x) = \nu^+(bx+a), \quad F_6(x) = F_5(ax-b), \quad F_7(x) = F_6(bx+a).$$

Уравнения системы (51), (52) являются неклассическими сингулярными интегральными уравнениями Трикоми, так как они имеют следующие две особенности:

1) “несингулярные” части ядер имеют некарлемановские сдвиги видов $ax-b$, $at-b$ в (51) и $bx+a$, $bt+a$ в (52);

2) первые интегральные операторы в их правых частях не являются регулярными, поскольку при $x=1$, $t=-1$ в (51) и при $x=-1$, $t=1$ в (52) ядра этих операторов имеют изолированные особенности первого порядка (и поэтому они выделены отдельно).

Временно считая правые части уравнений (51) и (52) известными функциями, систему уравнений (51) и (52) запишем в виде

$$\nu_1(x) + \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \nu_1(t) dt = g_1(x), \quad x \in J, \quad (53)$$

$$\nu_2(x) + \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \nu_2(t) dt = g_2(x), \quad x \in J, \quad (54)$$

где

$$g_1(x) = -\lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{b\nu_2(t) dt}{bt-ax+1} + T_1[\nu_2] + F_6(x), \quad x \in J, \quad (55)$$

$$g_2(x) = -\lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{a(1-t)}{b(1+x)} \right)^{-2\beta} \frac{a\nu_1(t) dt}{at-bx-1} + H_1[\nu_1] + H_2[\nu_2] + F_7(x), \quad x \in J. \quad (56)$$

Лемма 4. Если функция $g_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in (-1, 1)$ и принадлежит классу $L_p(-1, 1)$, $p > 1$, то решение уравнения (53) в классе функций $H(-1, 1)$, в котором функция $(1+x)^{-2\beta}\nu_1(x)$ ограничена на левом конце $x=-1$ интервала $(-1, 1)$ и может быть неограниченной на его правом конце $x=1$, выражается формулой

$$\nu_1(x) = \frac{1+\cos(2\theta\pi)}{2} g_1(x) + \frac{\sin(2\theta\pi)}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{2\theta} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\theta} \left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)} \right)^{\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) g_1(t) dt, \quad (57)$$

где $\theta = -\beta/2$, $0 < \theta < 1/4$.

Лемма 5. Если функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in (-1, 1)$ и принадлежит классу $L_p(-1, 1)$, $p > 1$, то решение уравнения (54) в классе $H(-1, 1)$, в котором функция $(1+x)^{-2\beta}\nu_2(x)$ ограничена на левом конце $x = -1$ интервала $(-1, 1)$ и может быть неограниченной на его правом конце $x = 1$, выражается формулой

$$\begin{aligned} \nu_2(x) = & \frac{1 + \cos(2\theta\pi)}{2} g_2(x) + \frac{\sin(2\theta\pi)}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{3\theta} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{2\theta} \times \\ & \times \left(\frac{1 - c(bx+a)}{1 - c(bt+a)} \right)^\theta \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1 - (bx+a)(bt+a)} \right) g_2(t) dt. \end{aligned} \quad (58)$$

Доказательства лемм 4 и 5 идентичны доказательству соответствующих утверждений из работ [2, 11, 12].

Теперь выражения для функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ из (55) и (56) подставим соответственно в формулы (57) и (58). После стандартных вычислений [5, с. 129] систему уравнений (57) и (58) преобразуем к виду

$$\tilde{\nu}_1(x) = - \int_{-1}^1 m \left(\frac{1+x}{1+s} \right) \frac{\nu_2(s) ds}{1+s} + H_3[\nu_2] + F_7(-x), \quad (59)$$

$$\nu_2(x) = - \int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \frac{\tilde{\nu}_1(t) dt}{1+t} + H_4[\tilde{\nu}_1] + H_5[\nu_2] + F_8(x), \quad (60)$$

где $H_3[\nu_2]$, $H_4[\tilde{\nu}_1]$, $H_5[\nu_2]$ – регулярные операторы и

$$\tilde{\nu}_1(x) = \nu_1(-x), \quad m(y) = \frac{A(ay/b)^{-\theta}}{1 + ay/b}, \quad A = \frac{\sin(\theta\pi)}{\pi}, \quad (61)$$

$$n(y) = \frac{B}{1 + by/a}, \quad y = \frac{1+x}{1+t}, \quad B = \frac{\sin(\theta\pi)}{\pi}. \quad (62)$$

Таким образом, уравнение (59) совместно с уравнением (60) составляют систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{\nu}_1(x)$ и $\nu_2(x)$ с сингулярной особенностью в ядре [2, 12]. Характерной особенностью уравнения (59) является то, что оно разрешено относительно функции $\tilde{\nu}_1(x)$, что позволяет исключить её из уравнения (60).

Подставляя в уравнение (60) выражение для функции $\tilde{\nu}_1(x)$ из (59), получаем

$$\begin{aligned} \nu_2(x) = & - \int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \frac{1}{1+t} \left(- \int_{-1}^1 m \left(\frac{1+t}{1+s} \right) \frac{\nu_2(s) ds}{1+s} + H_3[\nu_2(t)] + F_6(-t) \right) dt + \\ & + H_4 \left[- \int_{-1}^1 m \left(\frac{1+x}{1+s} \right) \frac{\nu_2(s) ds}{1+s} + H_3[\nu_2(x)] + F_6(-x) \right] + H_5[\nu_2(x)] + F_7(x), \end{aligned}$$

или

$$\nu_2(x) = \int_{-1}^1 \frac{K(x, t) \nu_2(t) dt}{1+t} + H_6[\nu_2(x)] + F_8(x), \quad (63)$$

где

$$K(x, t) = \int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+s} \right) m \left(\frac{1+s}{1+t} \right) \frac{ds}{1+s}, \quad (64)$$

$$H_6[v_2(x)] = - \int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \frac{H_3[v_2(t)]}{1+t} dt + H_4 \left[- \int_{-1}^1 m \left(\frac{1+x}{1+s} \right) \frac{v_2(s)}{1+s} ds + H_3[v_2(x)] \right] + H_5[v_2(x)]$$

– регулярный оператор, а

$$F_8(x) = - \int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \frac{F_6(-t)}{1+t} dt + H_4[F_6(-x)] + F_7(x) \quad (65)$$

– известная функция.

Теперь оценим ядро $K(x, t)$. Для этого сделав в интеграле (64) замену $(1+s)/(1+t) = r$, будем иметь

$$K(x, t) = \int_0^{2/(1+t)} n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) m(r) \frac{dr}{r} = K_1(x, t) - K_2(x, t),$$

где

$$K_1(x, t) = \int_0^{+\infty} n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) m(r) \frac{dr}{r}, \quad K_2(x, t) = \int_{2/(1+t)}^{+\infty} n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) m(r) \frac{dr}{r}.$$

Оценим сначала интеграл $K_2(x, t)$. В силу (61) и (62) справедливы оценки

$$n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) = B \left(1 + \frac{b}{a} \frac{1+x}{r(1+t)} \right)^{-1} \leq B, \quad m(r) \leq A \left(\frac{b}{a} \right)^\theta r^{-\theta},$$

вследствие которых получаем

$$\begin{aligned} |K_2(x, t)| &= \left| \int_{2/(1+t)}^{+\infty} n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) m(r) \frac{dr}{r} \right| \leq \left| \int_{2/(1+t)}^{+\infty} BA \left(\frac{b}{a} \right)^\theta r^{-\theta-1} dr \right| \leq \\ &\leq \left| BA \left(\frac{b}{a} \right)^\theta \frac{r^{-\theta}}{-\theta} \Big|_{r=2/(1+t)}^{r=\infty} \right| = \frac{BA}{\theta} \left(\frac{b}{a} \right)^\theta \left(\frac{1+t}{2} \right)^\theta. \end{aligned}$$

Следовательно, $K_2(x, t)/(1+t)$ – регулярное ядро.

Теперь вычислим интеграл

$$K_1(x, t) = \int_0^{+\infty} n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) m(r) \frac{dr}{r} = \int_0^{+\infty} n \left(\frac{y}{r} \right) m(r) \frac{dr}{r},$$

где $y = (1+x)/(1+t)$. Тогда в силу (61) и (62) имеем

$$K_1(x, t) = \int_0^{+\infty} B \left(1 + \frac{by}{ar} \right)^{-1} \frac{A(ar/b)^{-\theta}}{1+ba/r} \frac{dr}{r} = ABa^{1-\theta}b^{1+\theta} \int_0^{+\infty} \frac{r^{-\theta} dr}{(ar+by)(a+br)}. \quad (66)$$

Вычислим получившийся несобственный интеграл

$$L(y) = \int_0^{+\infty} \frac{r^{-\theta} dr}{(ar+by)(a+br)} = \frac{1}{b(y-1)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{r^{-\theta} dr}{a+br} + \int_0^{+\infty} \frac{r^{-\theta} dr}{ar+by} \right). \quad (67)$$

В интегралах правой части равенства (67) сделаем соответственно замену переменных интегрирования $r = bt/a$ и $r = byt/a$, затем, используя интеграл Эйлера [13, с. 168]

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\delta-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \delta \pi} \quad (0 < \delta < 1),$$

найдем, что

$$L(y) = \frac{1}{b^2} \left(\frac{b}{a} \right)^{1-\theta} \frac{\pi}{\sin \theta \pi} \frac{y^\theta - 1}{y^\theta (y - 1)}. \quad (68)$$

Учитывая равенства (67), (68), из представления (66) получаем

$$K_1(x, t) = B \frac{y^\theta - 1}{y^\theta (y - 1)}, \quad y = \frac{1+x}{1+t}. \quad (69)$$

В силу (66) и (69) уравнение (63) запишем в виде

$$\omega(x) = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{1+x}{1+t} \right)^\theta - 1 \right) \left(\frac{1+x}{1+t} - 1 \right)^{-1} \frac{\omega(t) dt}{1+t} + H_8[\omega(x)] + F_9(x), \quad (70)$$

где $\omega(x) = (1+x)^\theta \nu_2(x)$, $H_8[\omega(x)] = (1+x)^\theta H_7[\omega(x)]$, $F_9(x) = (1+x)^\theta F_8(x)$, здесь $F_8(x)$ определяется из (65), а

$$H_7[\nu_2(x)] = H_6[\nu_2(x)] - \int_{-1}^1 \frac{K_2(x, t) \nu_2(t) dt}{1+t}$$

– регулярный оператор.

Сделав в уравнении (70) замену переменных $1+t = 2e^{-s}$, $1+x = 2e^{-z}$, получим уравнение Винера–Хопфа [14, с. 55]:

$$\tilde{\omega}(z) = B \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(\theta(z-s)/2) \tilde{\omega}(s) ds}{\text{sh}((z-s)/2)} + H_9[\tilde{\omega}(z)], \quad (71)$$

где $\tilde{\omega}(z) = \omega(2e^{-z} - 1)e^{(\theta-1)z/2}$, $H_9[\tilde{\omega}] = H_8[e^{(1-\theta)z/2}\omega(z)] + e^{(\theta-1)z/2}F_9(2e^{-z} - 1)$.

Обозначим

$$K_3(x) = \frac{B \text{sh}(\theta x/2)}{\text{sh}(x/2)}.$$

Индекс $\varkappa$ уравнения (71) совпадает с индексом выражения $1 - K^*(y)$, взятым с обратным знаком [14, с. 56], где

$$K^*(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} K_3(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(yx) - i \sin(yx)) K_3(x) dx. \quad (72)$$

В силу формулы [15, с. 518]

$$\int_0^{+\infty} \cos(ax) \frac{\text{sh}(px)}{\text{sh}(qx)} dx = \frac{\pi}{2q} \frac{\sin(p\pi/q)}{\text{ch}(a\pi/q) + \cos(p\pi/q)}$$

из (72) с учётом (62) и того, что $0 \leq y < \infty$, $0 < \theta < 1/4$, вследствие нечётности функции $\sin(yx)K_3(x)$ получим

$$K^*(y) = 2B \int_0^{+\infty} \cos(xy) \frac{\operatorname{sh}(\theta x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} dx = \frac{2 \sin^2(\theta\pi)}{\operatorname{ch}(2y\pi) + \cos(\theta\pi)} < 1. \quad (73)$$

Поэтому $\operatorname{Re}(1 - K^*(y)) > 0$.

Из равенства (73) очевидно, что $K^*(y) = O(1/\operatorname{ch}(2\pi y))$ для достаточно больших $|y|$, поэтому [14, с. 56]

$$\begin{aligned} \varkappa &= -\operatorname{Ind}(1 - K^*(y)) = -\frac{1}{2\pi}(\arg(1 - K^*(y)))|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= -\frac{1}{2\pi}(\arg(1 - K^*(+\infty)) - \arg(1 - K^*(-\infty))) = -\frac{1}{2\pi}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 0) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (71) так же, как в [2; 5, с. 140], редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [14, с. 46], однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи А. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.; Л., 1947.
2. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281–1284.
3. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 2. С. 197–200.
4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1985.
5. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент, 2005.
6. Салахитдинов М.С., Исламов Н.Б. Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе–Самарского для уравнения парабола-гиперболического типа второго рода // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 43–52.
7. Исламов Н.Б. Аналог задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнений парабола-гиперболического типа второго рода // Уфимский мат. журн. 2015. Т. 7. № 1. С. 31–45.
8. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
9. Сабитов К.Б. О постановке краевых задач для уравнения смешанного типа с вырождением второго рода на границе бесконечной области // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 4. С. 146–150.
10. Хайруллин Р.С. К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 927–936.
11. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении Ф. Трикоми // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 6. С. 1053–1056.
12. Полосин А.А. Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для специальной области // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 394–401.
13. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. М., 1968.
14. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Термезский государственный университет,
Узбекистан,
Национальный университет Узбекистана
им. М. Улугбека, г. Ташкент

Поступила в редакцию 04.07.2020 г.
После доработки 05.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.951

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В ВИДЕ КОМПОЗИЦИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ

© 2021 г. В. Н. Четвериков

Исследуются обратимые линейные дифференциальные операторы по двум переменным. Задача их описания актуальна вследствие её связи с задачами преобразования систем уравнений в частных производных. В работе применяются алгебраические методы теории спектральных последовательностей цепных комплексов. Доказывается, что любой обратимый линейный дифференциальный оператор с двумя независимыми переменными в прямой сумме с тождественным отображением представляется в виде композиции не более чем четырёх треугольных обратимых операторов. Сформулирован алгоритм разложения в такую композицию, который продемонстрирован на примере.

DOI: 10.31857/S0374064121100113

Введение. В работе рассматриваются обратимые дифференциальные операторы, обратные к которым также являются дифференциальными операторами. Такие операторы возникают при решении многих математических задач (см., например, [1, § 2.3]). Среди них – задачи преобразования систем дифференциальных уравнений в случае, когда используются обратимые преобразования, в которых переменные одной системы выражаются не только через переменные другой системы, но и через производные до какого-либо конечного порядка зависимых переменных по независимым. Такие преобразования называются *C-преобразованиями* [2, п. 6.3.6]. Отсутствие законченной теории *C-преобразований* затрудняет их применения к задачам преобразования дифференциальных уравнений. *C-преобразования* линейных систем являются обратимыми линейными дифференциальными операторами. В случае нелинейных систем линеаризации *C-преобразований* интерпретируются как обратимые линейные дифференциальные операторы. Поэтому актуальна задача описания обратимых линейных дифференциальных операторов.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах [3–6]. В [3] доказано, что действие любого обратимого дифференциального оператора по двум переменным можно расширить на больший модуль так, что полученный оператор будет композицией треугольных обратимых операторов. В данной работе этот результат уточняется и показывается, что существует композиция, состоящая не более чем из четырёх треугольных обратимых операторов. Указанный результат доказывается более прозрачным (по сравнению с [3]) методом с целью обобщения его на случай большего количества переменных. Используемый подход аналогичен подходу, применявшемуся ранее в работах [4–6] в случае одной независимой переменной, и основан на анализе спектральных последовательностей цепных комплексов, связанных с обратимым дифференциальным оператором.

Статья организована следующим образом. В п. 1 определяются обратимые линейные дифференциальные операторы и приводится пример такого оператора. Таблицы чисел, классифицирующие обратимые операторы, вводятся в п. 2. Определение треугольных обратимых операторов и основной результат формулируются в п. 3, п. 4 посвящён последовательностям Спенсера, необходимым для доказательства основной теоремы. Само доказательство, а также алгоритм разложения обратимых операторов в виде композиции треугольных обратимых операторов приводятся в п. 5. В заключении обосновывается, почему обобщение на большее число переменных полученных результатов представляется весьма правдоподобным.

1. Обратимые линейные дифференциальные операторы. Имея в виду возможные дальнейшие обобщения, мы используем наиболее общее (алгебраическое) определение линейных дифференциальных операторов (подробное изложение алгебраической теории таких операторов см. в [2, гл. 1]).

Пусть A – $\mathbb{R}$ -алгебра, P и Q – два A -модуля, $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q)$ – линейное пространство $\mathbb{R}$ -гомоморфизмов из P в Q . В этом пространстве введём две A -модульные структуры, определённые умножениями

$$(a\Delta)(p) = a\Delta(p), \quad (a^+\Delta)(p) = \Delta(ap), \quad a \in A, \quad p \in P, \quad \Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q). \quad (1)$$

Обозначим

$$\delta_a(\Delta) = a^+\Delta - a\Delta, \quad \delta_{a_0, \dots, a_k} = \delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}, \quad a_0, \dots, a_k \in A.$$

$\mathbb{R}$ -гомоморфизм $\Delta: P \rightarrow Q$ называют *линейным дифференциальным оператором* порядка, не превосходящего k , над алгеброй A , если $\delta_{a_0, \dots, a_k}(\Delta) = 0$ для всех $a_0, \dots, a_k \in A$.

Линейный дифференциальный оператор из A в A называют *скалярным*.

Через $\text{ord } \Delta$ будем обозначать *порядок* дифференциального оператора Δ , т.е. $k = \text{ord } \Delta$, если Δ – оператор порядка, не превосходящего k , но не $k - 1$.

В случае, когда $A = C^\infty(M)$ – $\mathbb{R}$ -алгебра гладких (бесконечно дифференцируемых) функций на многообразии M , а P и Q – модули гладких сечений двух локально тривиальных векторных расслоений ξ и ζ над M соответственно (о теории расслоений см. [7, гл. 2 и 3]), сформулированное определение эквивалентно обычному определению линейного дифференциального оператора. В частности, скалярный такой оператор на двумерном многообразии M представляет собой конечную сумму производных по координатам x_1, x_2 на M с коэффициентами из A :

$$\Delta = \sum_{i+j \leq k} a_{ij}(x_1, x_2) \partial_1^i \partial_2^j, \quad a_{ij}(x_1, x_2) \in A, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Если расслоения ξ и ζ тривиальны и многомерны, то P и Q – модули векторных функций на M соответствующей размерности, а любой оператор представляет собой матрицу скалярных операторов.

Множество всех линейных дифференциальных операторов порядка, не превосходящего k , действующих из P в Q , представляет собой A -модуль относительно и того, и другого умножения из (1). Обозначим через $\text{Diff}_k^+(P, Q)$ A -модуль относительно второго умножения, и пусть

$$\text{Diff}_*^+(P, Q) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Diff}_k^+(P, Q).$$

Заметим, что если P, Q, R – A -модули, $\Delta \in \text{Diff}_k^+(P, Q)$, $\nabla \in \text{Diff}_l^+(Q, R)$, то $\nabla \circ \Delta: P \rightarrow R$ – оператор порядка, не большего $k + l$. Это утверждение вытекает из формулы

$$\delta_a(\nabla \circ \Delta) = \delta_a(\nabla) \circ \Delta + \nabla \circ \delta_a(\Delta)$$

и того факта, что отображение δ_a уменьшает порядок оператора на единицу, т.е.

$$\delta_a: \text{Diff}_s^+(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_{s-1}^+(P, Q), \quad s > 0, \quad a \in A.$$

Отметим также, что в общем случае композиция линейных дифференциальных операторов некоммутативна, даже если операторы скалярные.

Дифференциальный оператор $\Delta: P \rightarrow Q$ называют (*двусторонне*) *обратимым*, если существует такой дифференциальный оператор $\Delta^{-1}: Q \rightarrow P$, что композиция $\Delta^{-1} \circ \Delta$ является тождественным отображением модуля P , а композиция $\Delta \circ \Delta^{-1}$ – тождественным отображением модуля Q . В этом случае оператор Δ^{-1} называют *обратным* к Δ .

Отметим, что приведённое определение симметрично относительно замены Δ на Δ^{-1} . Поэтому оператор Δ^{-1} также обратим, а Δ – обратный к нему оператор.

В данной работе рассматриваются обратимые линейные дифференциальные операторы по двум переменным, т.е. на двумерном многообразии M . Рассуждения локальны, поэтому можно считать, что $M = \mathbb{R}^2$ – плоскость, а P и Q – модули векторных функций на $\mathbb{R}^2$.

Нетрудно показать, что если существует обратимый линейный дифференциальный оператор из P в Q , то векторные функции из P и Q имеют одинаковую размерность, которую мы обозначаем через m , т.е. $P = A^m = Q$, $A = C^\infty(\mathcal{M})$.

Приведём пример обратимого оператора рассматриваемого типа.

Пример 1. Рассмотрим в случае $m = 2$ операторы Δ и Δ^{-1} , которые заданы матрицами

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 - \partial_1 \partial_2^2 + \partial_1^4 \partial_2 & \partial_2^3 - \partial_1^2 - \partial_1^3 \partial_2^2 \\ -\partial_1^2 \partial_2 & 1 + \partial_1 \partial_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \partial_1 \partial_2^2 & -\partial_2^3 + \partial_1^2 + \partial_1^3 \partial_2^2 \\ \partial_1^2 \partial_2 & 1 - \partial_1 \partial_2^2 + \partial_1^4 \partial_2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти операторы являются обратными друг к другу.

2. Таблицы чисел обратимых операторов. Пусть $\mathcal{M}$ – двумерное многообразие, $A = C^\infty(\mathcal{M})$, P, Q – A -модули гладких сечений двух локально тривиальных векторных расслоений, $\Delta: P \rightarrow Q$ – дифференциальный оператор порядка l . Рассмотрим следующие A -модули:

$$G_p = \text{Diff}_p^+(A, Q), \quad F_k = \{\alpha \in \text{Diff}_{k+l}^+(A, Q) : \alpha = \Delta \circ \beta, \beta \in \text{Diff}_k^+(A, P)\}, \quad p, k \geq 0.$$

Так как G_p и F_k – подмодули модуля $\text{Diff}_s^+(A, Q)$, где $s = \max(p, k + l)$, то их пересечение $F_k \cap G_p$ – также подмодуль модуля $\text{Diff}_s^+(A, Q)$. Модули G_p и F_k являются модулями гладких сечений локально тривиальных векторных расслоений над $\mathcal{M}$. Обозначим соответствующие расслоения через ξ_p и ζ_k . Слои этих расслоений над точкой $\theta \in \mathcal{M}$ состоят из линейных дифференциальных операторов в точке θ , и размерность слоёв не зависит от точки. Пересечение модулей $F_k \cap G_p$ является модулем гладких сечений пересечения векторных расслоений ξ_p и ζ_k . Слои пересечения векторных расслоений могут иметь разную размерность, зависящую от точки $\theta \in \mathcal{M}$. Такой объект называют *векторным расслоением с особенностями*. Под *размерностью модуля* R гладких сечений векторного расслоения с особенностями над многообразием $\mathcal{M}$ мы понимаем целочисленную функцию, которая точке $\theta \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие размерность слоя этого расслоения над θ . Обозначим её через $\dim R$. Набор элементов $\beta_1, \dots, \beta_k$ модуля сечений векторного расслоения ξ будем называть *базисом* этого модуля в окрестности $\mathcal{U}$ точки $\theta \in \mathcal{M}$, если в каждой точке $\tilde{\theta} \in \mathcal{U}$ ограничения $\beta_{1,\tilde{\theta}}, \dots, \beta_{k,\tilde{\theta}}$ этих элементов образуют базис слоя расслоения ξ над точкой $\tilde{\theta}$.

Пусть оператор $\Delta: P \rightarrow Q$ обратим, $l = \text{ord } \Delta$, а L – порядок обратного оператора. Точку $\theta \in \mathcal{M}$ назовём *d-регулярной* точкой обратимого оператора Δ , если в некоторой окрестности этой точки пересечение слоёв расслоений ξ_p и ζ_k имеет постоянную размерность для любых $p = \overline{0, l}$ и $k = \overline{0, L}$. Таким образом, в окрестности *d-регулярной* точки функция $\dim(F_k \cap G_p)$ постоянна для указанных k и p . Далее будем рассматривать обратимые операторы только в окрестности *d-регулярных* точек.

В работах [4–6] использовался подход к классификации обратимых операторов на одномерном $\mathcal{M}$, основанный на исследовании размерностей $d_{k,p} = \dim(F_k \cap G_p)$. А именно, считалось, что одному классу принадлежат те и только те обратимые операторы, которые имеют одинаковые наборы чисел $d_{k,p}$, $k, p \geq 0$. Этот подход применим и к рассматриваемому в данной работе случаю двумерного многообразия $\mathcal{M}$. В частности, важную роль играют наборы чисел

$$\varkappa_{k,p} = d_{k,p} - d_{k-1,p} - d_{k,p-1} + d_{k-1,p-1}, \quad d_{-1,p} = 0 = d_{k,-1} = \varkappa_{-1,p} = \varkappa_{k,-1},$$

которые совпадают с размерностями модулей, исследуемых далее.

3. Треугольные обратимые операторы. Пусть $A = C^\infty(\mathcal{M})$, а P, Q – A -модули гладких сечений локально тривиальных векторных расслоений. Линейный дифференциальный оператор $\nabla: P \rightarrow Q$ называется *треугольным обратимым оператором* в окрестности точки $\theta \in \mathcal{M}$, если в этой окрестности существуют базисы модулей Q и P , в которых матрица оператора ∇ имеет верхнетреугольный вид, т.е. на диагонали стоят единицы, под ней – нули, а над ней – скалярные операторы.

Из определений композиции операторов и умножения матриц легко вытекает, что любой треугольный обратимый оператор обратим и что обратный к нему оператор также является

треугольным. Заметим, кроме этого, что если M – матрица оператора $\nabla: P \rightarrow Q$ в некоторых базисах модулей Q и P , а R – какой-либо A -модуль и id_R – его тождественное отображение, то матрица оператора $\nabla \oplus \text{id}_R: P \oplus R \rightarrow Q \oplus R$, $(\nabla \oplus \text{id}_R)(p \oplus r) = \nabla(p) \oplus r$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где 0 – нулевые матрицы, E – единичная матрица.

Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ – двумерное многообразие, $A = C^\infty(\mathcal{M})$, $P = A^m = Q$. Тогда для любого обратимого линейного дифференциального оператора $\Delta: P \rightarrow Q$ ненулевого порядка существует модуль R такой, что в окрестности d -регулярной точки оператора Δ оператор $\Delta \oplus \text{id}_R$ является композицией не более чем четырёх треугольных обратимых операторов.

4. Последовательности Спенсера модуля. Введём алгебраические структуры, необходимые для описания модулей $F_k \cap G_p$ и доказательства теоремы. $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\nabla: A \rightarrow P$ называется дифференцированием алгебры A со значениями в A -модуле P , если $\nabla(ab) = a\nabla(b) + b\nabla(a)$ для любых $a, b \in A$. $\mathbb{R}$ -линейное отображение $\nabla: A \otimes A \rightarrow P$ называется кососимметричным 2-дифференцированием алгебры A со значениями в A -модуле P , если

$$\nabla(a_1, a_2) + \nabla(a_2, a_1) = 0, \quad \nabla(ab, a_2) = a\nabla(b, a_2) + b\nabla(a, a_2) \quad \text{для любых } a, b, a_1, a_2 \in A.$$

Через $D_1(P)$ обозначим множество всех дифференцирований алгебры A со значениями в A -модуле P , а через $D_2(P)$ – множество всех кососимметричных 2-дифференцирований алгебры A со значениями в P . Так как любое дифференцирование является дифференциальным оператором порядка 1, то $D_1(P) \subset \text{Diff}_1^+(A, P)$.

В рассматриваемом нами случае любой элемент из $D_1(G_p)$ имеет вид $\nabla_1 \partial_1 + \nabla_2 \partial_2$, где $\nabla_1, \nabla_2 \in G_p$, а любой элемент из $D_2(G_p)$ – вид $\nabla \partial_1 \wedge \partial_2$, где $\nabla \in G_p$. Определим операторы

$$S_0: G_p \rightarrow Q, \quad S_1: D_1(G_p) \rightarrow G_{p+1}, \quad S_2: D_2(G_p) \rightarrow D_1(G_{p+1}),$$

называемые операторами Спенсера [2, п. 1.1.8], соотношениями

$$S_0(\nabla) = \nabla(1), \quad S_1(\nabla_1 \partial_1 + \nabla_2 \partial_2) = \nabla_1 \circ \partial_1 + \nabla_2 \circ \partial_2, \quad S_2(\nabla \partial_1 \wedge \partial_2) = (\nabla \circ \partial_1) \partial_2 - (\nabla \circ \partial_2) \partial_1,$$

в которых $\nabla, \nabla_1, \nabla_2 \in \text{Diff}_*^+(A, Q)$. Последовательность

$$0 \rightarrow D_2(G_{p-1}) \xrightarrow{S_2} D_1(G_p) \xrightarrow{S_1} G_{p+1} \xrightarrow{S_0} Q \rightarrow 0$$

точна и называется *Diff-комплексом Спенсера порядка $p+1$ модуля Q* [2, п. 1.1.9].

В [2, п. 1.2.16] сформулированы условия на $\mathbb{R}$ -алгебру A , при выполнении которых имеют место изоморфизмы A -модулей

$$\frac{D_i(G_p)}{D_i(G_{p-1})} \simeq D_i\left(\frac{G_p}{G_{p-1}}\right), \quad i = 1, 2, \quad p \geq 1. \quad (3)$$

Показано также, что эти изоморфизмы имеются в случае $A = C^\infty(\mathcal{M})$.

Модуль G_p/G_{p-1} называется *модулем символов порядка p модуля Q* . Факторизуя *Diff-комплекс Спенсера порядка $p+1$ модуля Q* по *Diff-комплексу Спенсера порядка p этого модуля*, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow D_2\left(\frac{G_{p-1}}{G_{p-2}}\right) \xrightarrow{S_2} D_1\left(\frac{G_p}{G_{p-1}}\right) \xrightarrow{S_1} \frac{G_{p+1}}{G_p} \rightarrow 0, \quad (4)$$

которая называется *δ -последовательностью Спенсера порядка $p+1$ модуля Q* для символов [2, п. 1.2.16]. Отображения S_1 и S_2 этой последовательности являются гомоморфизмами модулей [2, п. 1.5.10].

5. Доказательство теоремы. Для описания модулей $F_k \cap G_p$ применим теорию цепных комплексов и их спектральных последовательностей (см. [8, гл. 4, § 1 и гл. 9, § 1]). По возможности далее будем формулировать используемые понятия и доказывать необходимые факты этой теории.

Обозначим $L = \text{ord } \Delta^{-1}$. Тогда $G_p \subset F_{p+L}$ для любого $p \geq 0$, так как если $\alpha \in G_p$, то $\alpha = \Delta \circ \beta$, где $\beta = \Delta^{-1} \circ \alpha \in \text{Diff}_{+L}^+(A, P)$. Модули G_p/G_{p-1} имеют фильтрацию

$$\frac{G_p}{G_{p-1}} \supset \frac{G_p \cap F_{p+L-1} + G_{p-1}}{G_{p-1}} \supset \dots \supset \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_{p-1}} \supset \dots \supset \frac{G_p \cap F_0 + G_{p-1}}{G_{p-1}}.$$

Так как

$$S_1: D_1(F_k) \rightarrow F_{k+1}, \quad S_2: D_2(F_k) \rightarrow D_1(F_{k+1}),$$

то для $p \geq 0$, $k = \overline{0, p+L}$, определены последовательности

$$0 \longrightarrow D_2\left(\frac{G_{p-1} \cap F_{k-1} + G_{p-2}}{G_{p-2}}\right) \xrightarrow{S_2} D_1\left(\frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_{p-1}}\right) \xrightarrow{S_1} \frac{G_{p+1} \cap F_{k+1} + G_p}{G_p} \longrightarrow 0.$$

Это означает, что мы имеем фильтрацию комплексов (4), $p \geq 0$, и их спектральные последовательности (см. [8, гл. 9, § 1, п. 2]). Обозначим

$$E_{k,p} = \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1}}. \quad (5)$$

Тогда последовательности (E^0, d^0) (см. [8, гл. 9, § 1, п. 2]) записываются в виде

$$0 \longrightarrow D_2(E_{k-1,p-1}) \xrightarrow{S_2} D_1(E_{k,p}) \xrightarrow{S_1} E_{k+1,p+1} \longrightarrow 0, \quad k \geq 0, \quad p \geq 0, \quad (6)$$

и представляют собой факторизации Diff-комплексов Спенсера. Именно, если элемент $\xi \in D_2(E_{k-1,p-1})$ (или $\xi \in D_1(E_{k,p})$) – фактор-элемент элемента $\alpha \in D_2(G_{p-1})$ ($\alpha \in D_1(G_p)$) в представлении (5), то $S_2(\xi)$ – фактор-элемент элемента $S_2(\alpha) \in D_1(G_p)$ ($S_1(\alpha) \in G_{p+1}$ соответственно).

Отметим, что мы используем отличные от обычных обозначения и нумерацию элементов E^0 , потому что для дальнейших рассуждений удобно иметь нумерацию, симметричную относительно p , k . Для доказательства симметричности $E_{k,p}$ используем следующий известный факт.

Теорема Нётер об изоморфизме (см. [8, гл. 4, введение, § 4]). Пусть X и Y – некоторые подмодули A -модуля Z , и пусть $X+Y$ – подмодуль, порождённый множеством $X \cup Y$. Тогда вложение $X \subset X+Y$ переводит $X \cap Y$ в Y и индуцирует изоморфизм A -модулей

$$\frac{X}{X \cap Y} \longrightarrow \frac{X+Y}{Y}.$$

Обозначим $X = G_p \cap F_k$ и $Y = G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1}$. Так как $F_{k-1} \subset F_k$, то

$$X+Y = G_p \cap F_k + G_{p-1}, \quad X \cap Y = G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k.$$

Применяя теорему Нётер, получаем симметричную относительно k и p формулу

$$E_{k,p} = \frac{G_p \cap F_k}{G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k}, \quad p, k \geq 0. \quad (7)$$

Используя известные факты о размерностях пространств (модулей), в окрестности d -регулярной точки получаем

$$\dim E_{k,p} = \dim(G_p \cap F_k) - \dim(G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= d_{k,p} - \dim(G_p \cap F_{k-1}) - \dim(G_{p-1} \cap F_k) + \dim(G_p \cap F_{k-1} \cap G_{p-1} \cap F_k) = \\
&= d_{k,p} - d_{k-1,p} - d_{k,p-1} + d_{k-1,p-1} = \varkappa_{k,p}.
\end{aligned}$$

По построению $F_k \subset G_{k+l}$ для $l = \text{ord } \Delta$, $k \geq 0$. Поэтому применимы рассуждения, приведённые выше, с заменой Δ на Δ^{-1} . Так как модуль $\text{Diff}_k^+(A, P)$ изоморфен модулю F_k , а модуль

$$\{\alpha \in \text{Diff}_{p+L}^+(A, P) : \alpha = \Delta^{-1} \circ \beta, \quad \beta \in \text{Diff}_p^+(A, Q)\}$$

– модулю G_p для $p, k \geq 0$, то мы получим те же элементы $E_{k,p}$, только с заменой p на k и k на p (этим и объясняется такое представление элементов E^0).

Рассмотрим теперь для разных k и p модули гомологий комплекса (6) (они составляют член E^1 спектральной последовательности, см. [8, гл. 9, § 1, п. 2]). Так как $F_{-1} = 0$, то $E_{-1,p} = 0$ и поэтому модуль гомологий в члене $E_{0,p}$ совпадает с $E_{0,p} = G_p \cap F_0 / G_{p-1} \cap F_0$ для любого $p \geq 0$. Так как $F_0 \subset G_l$, то $E_{0,p} = 0$ при $p > l$. Аналогично, модуль гомологий в члене $E_{k,0}$ совпадает с $E_{k,0} = G_0 \cap F_k / G_0 \cap F_{k-1}$, $k \geq 0$, и $E_{k,0} = 0$ при $k > L$.

Отметим, что если $E_{0,0} \neq 0$, то существует такой подмодуль P_0 модуля P , что ограничение оператора Δ на P_0 представляет собой дифференциальный оператор нулевого порядка (изоморфизм ввиду обратимости Δ). Выберем в окрестности d -регулярной точки какой-либо базис $\mathcal{B}_0$ модуля P_0 . Образ $\Delta(P_0)$ является подмодулем модуля Q , а образ базиса $\mathcal{B}_0$ – базисом в $\Delta(P_0)$. Дополним базисы $\mathcal{B}_0$ и $\Delta(\mathcal{B}_0)$ до базисов в P и Q соответственно. В этих базисах матрица оператора Δ имеет блочный вид (2), и мы можем рассматривать обратимый оператор с матрицей M меньшей размерности. Поэтому далее считаем, что $E_{0,0} = 0$.

Последовательно для $p = \overline{l, 1}$ в окрестности d -регулярной точки рассмотрим базисы модулей $E_{0,p}$ и какие-либо элементы из $G_p \cap F_0$, факторами которых они являются. Обозначим их через $\beta_1, \dots, \beta_m$. Получим базис модуля F_0 .

По определению модуль гомологий в члене $D_2(E_{k-1,p-1})$ совпадает с ядром S_2 , а значит, является подмодулем в $D_2(E_{k-1,p-1})$. Модуль гомологий в члене $D_1(E_{k,p})$ представляет собой фактор-модуль ядра S_1 по образу S_2 . Наконец, модуль гомологий в члене $E_{k+1,p+1}$ – это фактор-модуль модуля $E_{k+1,p+1}$ по образу S_1 . Из соотношений (3) и (7) следуют равенства

$$D_i(E_{k,p}) = \frac{D_i(G_p \cap F_k)}{D_i(G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k)}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, элементы гомологий комплексов (6) представляют собой факторы элементов из $D_i(G_p \cap F_k)$, $i = 1, 2$, или из $G_p \cap F_k$. Далее фактор элемента $\beta \in D_i(G_p \cap F_k)$ в $D_i(E_{k,p})$, $i = 1, 2$, (или $\beta \in G_p \cap F_k$ в $E_{k,p}$) будем обозначать через $[\beta]$. При этом элемент β может быть определён или не определён, но определён фактор-элемент.

Отметим, что если $[\alpha]$ – ненулевой элемент модуля гомологий в члене $D_2(E_{k-1,p-1})$, то $\alpha \in D_2(G_{p-1} \cap F_{k-1})$, $\alpha \notin D_2(G_{p-2} \cap F_{k-1})$, $\alpha_1 = S_2(\alpha) \in D_1(G_i \cap F_k + F_{k-1})$ для некоторого $i \leq p-1$ и $S_1[\alpha_1] = 0$, поскольку $S_1 \circ S_2 = 0$. Но так как $\alpha \notin D_2(G_{p-2} \cap F_{k-1})$, то $[\alpha_1] \notin S_2(D_2(E_{k-1,i-1}))$, а значит, $[\alpha_1]$ – элемент модуля гомологий в члене $D_1(E_{k,i})$. Таким образом, S_2 отображает элемент модуля гомологий в члене $D_2(E_{k-1,p-1})$ в элемент модуля гомологий в члене $D_1(E_{k,i})$. Аналогично S_1 отображает каждый ненулевой элемент $[\alpha_2]$ модуля гомологий в члене $D_1(E_{k,p})$ в элемент модуля гомологий в члене $E_{k+1,i+1}$ для некоторого номера $i \leq p-1$, зависящего от $[\alpha_2]$.

С другой стороны, используя известные свойства спектральных последовательностей [8, гл. 9, § 1, п. 2], несложно доказать, что любой ненулевой элемент $[\alpha_1]$ модуля гомологий в члене $D_1(E_{k,p})$ представляет собой образ относительно S_2 некоторого элемента $[\alpha]$ модуля гомологий в члене $D_2(E_{k-1,i-1})$, $i > p$. Аналогично любой ненулевой элемент модуля гомологий в члене $E_{k+1,p+1}$ является образом относительно S_1 некоторого элемента модуля гомологий в члене $D_1(E_{k,i})$, $i > p$.

Покажем, как в окрестности d -регулярной точки выбрать элементы из $E_{k,p}$, $p, k \geq 0$, порождающие над A модули гомологии комплексов (6), и как получить все возможные дифференциальные соотношения на них. Используем для этого индукцию по k . Случай $k = 0$

мы уже рассмотрели: фактор-элементы $[\beta_1], \dots, [\beta_m]$ порождают A -модули $E_{0,p}$, $p \geq 0$, а значит, и модули гомологий в членах $D_2(E_{0,p})$, $D_1(E_{0,p})$, $E_{0,p}$, $p \geq 0$.

Предположим, что элементы $[\beta_1], \dots, [\beta_{m_1}]$ ($m_1 \geq m$) порождают модули гомологий в членах $D_2(E_{i,p})$, $D_1(E_{i,p})$, $E_{i,p}$, $i = \overline{0, k-1}$, $p \geq 0$. Для каждого $p \geq 0$ рассмотрим базисы модулей гомологий в членах $D_2(E_{k,p})$, $D_1(E_{k,p})$, $E_{k,p}$. Базисный элемент гомологий из $D_2(E_{k,p})$ имеет вид $[\nabla_1]\partial_1 + [\nabla_2]\partial_2$, где $[\nabla_1], [\nabla_2] \in E_{k,p}$, а базисный элемент гомологий из $D_1(E_{k,p})$ – вид $[\nabla]\partial_1 \wedge \partial_2$, $[\nabla] \in E_{k,p}$. Таким образом, все указанные базисные элементы порождаются набором элементов из $E_{k,p}$. Выберем в окрестности d -регулярной точки какой-либо базис этого набора и проделаем эту процедуру для каждого $p \geq 0$. Получим элементы $[\beta_{m_1+1}], \dots, [\beta_{m_2}]$ из $E_{k,p}$, $p \geq 0$ ($m_2 \geq m_1$).

Найдём теперь дифференциальные соотношения на $[\beta_1], \dots, [\beta_{m_2}]$. Рассмотрим какой-либо элемент $[\beta_l]$, $l = \overline{m_1+1, m_2}$. По построению этот элемент порождает гомологию или в члене $E_{k,p}$, или в члене $D_1(E_{k,p})$ для некоторого $p \geq 0$. В первом случае, как отмечалось выше, существует такой элемент $[\alpha_2] = [\nabla_1]\partial_1 + [\nabla_2]\partial_2$ модуля гомологий в члене $D_1(E_{k-1,i})$ для некоторого $i > p$, что $S_1[\alpha_2] = [\nabla_1] \circ \partial_1 + [\nabla_2] \circ \partial_2 = [\beta_l]$. По предположению шага индукции имеем $[\nabla_s] = \sum_{j=1}^{m_1} [\beta_j] \circ a_{sj}$, $a_{sj} \in A$, $s = 1, 2$, а значит,

$$[\beta_l] = \sum_{j=1}^{m_1} [\beta_j] \circ \nabla_{lj}, \quad (8)$$

где ∇_{lj} – скалярные дифференциальные операторы. Во втором случае существует элемент $[\alpha] = [\nabla]\partial_1 \wedge \partial_2$ модуля гомологий в члене $D_2(E_{k-1,i-1})$, $i > p$, такой, что элемент $S_2[\alpha] = ([\nabla] \circ \partial_1)\partial_2 - ([\nabla] \circ \partial_2)\partial_1$ равен или $[\beta_l]\partial_1 + [\beta_0]\partial_2$, или $[\beta_0]\partial_1 + [\beta_l]\partial_2$ для некоторого $[\beta_0] \in E_{k,p}$. Таким образом, в обоих случаях имеем соотношения (8).

Результатом этих рассуждений для всех k является набор $[\beta_l]$, $l = \overline{1, m_0}$ ($m_0 \geq m$), и соотношения вида

$$[\beta_l] = \sum_{j=1}^{l-1} [\beta_j] \circ \nabla_{lj}, \quad l = \overline{m+1, m_0}. \quad (9)$$

Выберем какие-либо представители $\beta_1, \dots, \beta_m$ из классов эквивалентностей $[\beta_1], \dots, [\beta_m]$. Тогда в силу соотношений

$$\beta_l = \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j \circ \nabla_{lj}, \quad l = \overline{m+1, m_0}, \quad (10)$$

получаем представителей $\beta_{m+1}, \dots, \beta_{m_0}$ из классов эквивалентностей $[\beta_{m+1}], \dots, [\beta_{m_0}]$.

Соотношения (10) можно записать в матричном виде

$$-\beta^{(1)}M_1 + \beta^{(23)}(E - M_2) = 0,$$

где $\beta^{(1)}$ – матрица, составленная из столбцов $\beta_1, \dots, \beta_m$, а $\beta^{(23)}$ – матрица, составленная из столбцов $\beta_{m+1}, \dots, \beta_{m_0}$, матрицы M_1 и M_2 определяются равенствами $M_1 = (\nabla_{lj})$, где $l = \overline{m+1, m_0}$, $j = \overline{1, m}$, $M_2 = (\nabla_{lj})$, где $l = \overline{m+1, m_0}$, $j = \overline{m+1, m_0}$, причём $\nabla_{lj} = 0$ при $j \geq l$. Из последнего равенства следует, что матрица $E - M_2$ является верхнетреугольной с единицами на диагонали. Поэтому соответствующий оператор является треугольным обратимым.

Последовательно для $k = \overline{l, \bar{L}}$ в окрестности d -регулярной точки найдём базисы модулей $E_{k,0}$ и какие-либо элементы из $G_0 \cap F_k$, факторами которых они являются. Обозначим их через $e_1, \dots, e_m$. Получим базис модуля F_0 . Операторы $\beta_1, \dots, \beta_m$, $e_1, \dots, e_m$ линейно независимы над A и являются A -линейными комбинациями операторов $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$. Среди элементов β_l , $l = \overline{m+1, m_0}$, выберем такие, которые вместе с $\beta_1, \dots, \beta_m$, $e_1, \dots, e_m$ образуют базис A -линейной оболочки $\text{span}_A\{\beta_1, \dots, \beta_{m_0}\}$. Обозначим матрицу, составленную

из этих элементов, через $\beta^{(3)}$, а матрицу, составленную из элементов $e_1, \dots, e_m$, через $\beta^{(2)}$. Тогда матрица $\beta^{(23)}$ представляется в виде

$$\beta^{(23)} = \beta^{(1)}T_2 + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})T_1,$$

где $(\beta^{(2)}\beta^{(3)})$ – блочная матрица, составленная из матриц $\beta^{(2)}$ и $\beta^{(3)}$, а T_2 и T_1 – матрицы элементов из A , матрица T_1 обратима. Соотношения (10) записываются в блочно-матричном виде

$$\beta^{(1)}M_3 + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})\Delta_1 = 0, \quad (11)$$

где $M_3 = T_2(E - M_2) - M_1$, а $\Delta_1 = T_1(E - M_2)$ – матрица треугольного обратимого оператора по определению. Отметим также, что каждое соотношение в (11) представляет собой A -линейную комбинацию соотношений (10) и наоборот.

Аналогично, меняя в рассуждениях местами $\{F_k\}$ и $\{G_p\}$, получаем элементы $[\tilde{\beta}_l]$, $l = \overline{1, m_0}$, и соотношения вида (9) на них. Так как и $[\beta_l]$, $l = \overline{1, m_0}$, и $[\tilde{\beta}_l]$, $l = \overline{1, m_0}$, порождают модули гомологий одних и тех же комплексов (6), то A -линейные оболочки $\{[\beta_l]\}$ и $\{[\tilde{\beta}_l]\}$ совпадают, а значит, наборы $\mathcal{B} = ([\beta_1], \dots, [\beta_{m_0}])$ и $\tilde{\mathcal{B}} = ([\tilde{\beta}_1], \dots, [\tilde{\beta}_{m_0}])$ образуют разные базисы одного и того же модуля. Пусть T – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\tilde{\mathcal{B}}$. Тогда T – обратимая матрица элементов из A , т.е. обратимый дифференциальный оператор нулевого порядка, и $\tilde{\mathcal{B}} = T\mathcal{B}$. Дифференциальные соотношения на $[\tilde{\beta}_1], \dots, [\tilde{\beta}_{m_0}]$ аналогичны соотношениям (9), но матрицы $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ меняются местами. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем соотношения вида

$$\beta^{(2)}N_3 + (\beta^{(1)}\beta^{(3)})\Delta_2 = 0, \quad (12)$$

где Δ_2 – матрица треугольного обратимого оператора.

Так как соотношения (12) и (11) определяются гомологиями одних и тех же комплексов (6), то соотношения (12) дифференциальным образом выражаются через соотношения (11), и наоборот, соотношения (11) выражаются через соотношения (12). Это означает, что существует обратимый дифференциальный оператор с матрицей Δ_3 такой, что соотношения (12) совпадают с соотношениями

$$\beta^{(1)}M_3\Delta_3 + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})\Delta_1\Delta_3 = 0. \quad (13)$$

Отметим также, что соотношения и из (11), и из (12) разбиваются на две группы: 1) соответствующие гомологиям в членах $E_{k,p}$ и 2) соответствующие гомологиям в членах $D_1(E_{k,p})$. Соотношения первой группы из (12) выражаются A -линейным образом через соотношения первой группы из (11). А соотношения второй группы из (12) определяются с точностью до образа S_2 , а значит, выражаются A -линейным образом через соотношения второй группы из (11) и дифференциальным образом через соотношения первой группы из (11). Поэтому Δ_3 является матрицей треугольного обратимого оператора.

Кроме того, так как столбцы матрицы $\beta^{(1)}$ составляют базис модуля F_0 , то $\beta^{(1)}$ – матрица оператора Δ в соответствующих базисах модулей P и Q . Аналогично столбцы матрицы $\beta^{(2)}$ составляют базис модуля G_0 , а значит $\beta^{(2)}$ – единичная матрица. Учитывая это, в силу соотношений (12) получаем, что матрица N_3 представляется в виде произведения блочной матрицы $(-\Delta - \beta^{(3)})$ и матрицы Δ_2 .

Умножая соотношения (12) справа на матрицу Δ_2^{-1} , получаем

$$(\beta^{(1)}\beta^{(2)}\beta^{(3)}) \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\Delta & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix} = 0. \quad (14)$$

Аналогично умножая соотношения (13) справа на матрицу Δ_2^{-1} , будем иметь

$$\beta^{(1)}M_3\Delta_3\Delta_2^{-1} + (\beta^{(2)}\beta^{(3)})\Delta_1\Delta_3\Delta_2^{-1} = 0. \quad (15)$$

Так как соотношения (12) и (13) совпадают между собой, то совпадают между собой и соотношения (14) и (15), а значит, матрица $\Delta_1 \Delta_3 \Delta_2^{-1}$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} -\Delta & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Delta_4 \begin{pmatrix} -\Delta & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} -E & -\beta^{(3)} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеем разложение

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Delta_4 \Delta_1 \Delta_3 \Delta_2^{-1}. \quad (16)$$

Следовательно, оператор $\Delta \oplus \text{id}_R$ представляется в виде композиции треугольных обратимых операторов с матрицами Δ_4 , Δ_1 , Δ_3 и Δ_2^{-1} . Теорема доказана.

Из сформулированных результатов и доказательства теоремы вытекает, что для разложения обратимых линейных дифференциальных операторов в композицию треугольных можно применять следующий

Алгоритм.

Шаг 1. Последовательно для $k = \overline{0, L}$ найти образующие модулей $E_{k,p}$ и модулей гомологий комплекса (6) для $p \geq 0$. Получить набор $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ и соотношения вида (10) на них.

Шаг 2. Преобразовать соотношения вида (10) к виду (11) и вычислить матрицу Δ_1 .

Шаг 3. Поменять модули G_p и F_k местами и преобразовать соотношения вида (10) к виду (12), вычислить матрицы Δ_2 и Δ_2^{-1} .

Шаг 4. Найти матрицу Δ_3 .

Шаг 5. Записать представление (16).

Пример 2. Применим данный алгоритм к оператору Δ из примера 1. Для этого введём следующие обозначения для операторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \Delta \circ e_1, \quad \beta_2 = \Delta \circ e_2.$$

На шаге $k = 1$ алгоритма получаем элемент β_3 и соотношение

$$\beta_3 = \beta_1 \circ \partial_2 + \beta_2 \circ \partial_1 = \begin{pmatrix} -\partial_1^3 + \partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

на шаге $k = 3$ – элемент β_4 и соотношения

$$\beta_4 = \beta_3 \circ \partial_2^2 - \beta_2 = \begin{pmatrix} \partial_1^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \beta_3 \circ \partial_1 \partial_2 + \beta_1,$$

а на шаге $k = 5$ – соотношение

$$e_2 = e_1 \circ \partial_1^2 - \beta_4.$$

Поменяв модули G_p и F_k местами, приходим к тем же соотношениям, кроме соотношения (17). Вместо него получаем соотношение

$$\beta_3 = e_1 \circ \partial_2 - \beta_4 \circ \partial_1. \quad (18)$$

Разность между равенствами (17) и (18) даёт соотношение $(\beta_1 - e_1) \circ \partial_2 + (\beta_2 + \beta_4) \circ \partial_1 = 0$, которое является следствием остальных соотношений. Вычисляя матрицы Δ_3 , Δ_1 , Δ_2 , Δ_2^{-1} и Δ_4 , получаем искомое разложение:

$$\begin{pmatrix} 1 - \partial_1 \partial_2^2 + \partial_1^4 \partial_2 & \partial_2^3 - \partial_1^2 - \partial_1^3 \partial_2^2 & 0 & 0 \\ -\partial_1^2 \partial_2 & 1 + \partial_1 \partial_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \partial_1^3 - \partial_2 & -\partial_1^2 \\ 0 & -1 & -\partial_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\partial_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\partial_2^2 & -\partial_1 \partial_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\partial_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\partial_1 \partial_2 & \partial_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1^2 \partial_2 & -1 - \partial_1 \partial_2^2 & -\partial_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение. В работе доказано, что обратимые линейные дифференциальные операторы с двумя независимыми переменными разлагаются в композицию треугольных обратимых операторов. В качестве следствия доказательства этого результата сформулирован алгоритм разложения, который продемонстрирован на примере. Основой приведённого доказательства является использование δ -последовательности Спенсера, определяемой для любого количества переменных. Поэтому обобщение полученных результатов на большее количество переменных представляется вполне возможным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0705-2020-0047) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-00817 и 20-07-00279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М., 1990.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1986.
3. Chetverikov V.N. Invertible linear differential operators on two-dimensional manifolds. Preprint of the Erwin Schrodinger Intern. Inst. for Math. Physics. Vienna, 1993. № 55.
4. Четвериков В.Н. Анализ и синтез обобщённых обратимых дифференциальных операторов с одной независимой переменной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1534–1544.
5. Chetverikov V.N. Invertible linear ordinary differential operators // J. of Geom. and Phys. 2017. V. 113. P. 10–27.
6. Chetverikov V.N. Invertible linear ordinary differential operators and their generalizations // J. of Geom. and Phys. 2020. V. 151. Art. 103617.
7. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М., 1970.
8. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М., 1971.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 09.06.2021 г.
После доработки 09.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.956.227

О ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРА
ВОЗМУЩЁННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА
СО СЛАБОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

© 2021 г. А. Г. Чечкина

Для уравнения Лапласа в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, граница которой содержит кусок Γ гиперплоскости L , рассматривается краевая задача типа Стеклова с однородным условием Дирихле на одной части границы и условием Стеклова на другой. Вне Γ задано условие Дирихле. На Γ граничные условия задаются следующим образом. Пусть R_δ – $(n-1)$ -мерная решётка с ребром δ в L , а $A_{\varepsilon\delta}$ и $A_{2\varepsilon\delta}$ – совокупности шаров с центрами в вершинах решётки R_δ радиусов $\varepsilon\delta$ и $2\varepsilon\delta$ соответственно, $B_{\varepsilon\delta} = A_{2\varepsilon\delta} \setminus A_{\varepsilon\delta}$, $\tilde{A}_{\varepsilon\delta} = \Gamma \cap A_{\varepsilon\delta}$ и $\tilde{B}_{\varepsilon\delta} = \Gamma \cap B_{\varepsilon\delta}$, где ε – малый параметр и $\delta = \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. На куске Γ условие Дирихле задано только на множестве $\tilde{A}_{\varepsilon\delta}$. Вне этого множества задано спектральное условие Стеклова, коэффициент в котором вне множества $\tilde{B}_{\varepsilon\delta}$ равен единице, а на множестве $\tilde{B}_{\varepsilon\delta}$ он равен $(\varepsilon\delta)^{-m}$, где $m < 2$. Для предельных (усреднённых) задач и исходной задачи получены отклонения их решений в норме соболевского пространства W_2^1 , а также оценки отклонения собственных значений.

DOI: 10.31857/S0374064121100125

Введение. Исследования краевых задач в областях с сингулярно возмущённой плотностью были начаты более века назад (см., например, [1]).

В [2] авторы изучали случай одной сингулярности для обыкновенного дифференциально-го оператора. В работе [3] рассматривалось колебание тела, имеющего большой набор собственных сингулярностей, расположенных периодически вдоль границы (более общий случай см. [4]). Дальнейшее развитие эти задачи получили в работах [5–7]. Работы [8] и [9] посвящены изучению аналогичных задач для стационарной системы линейной теории упругости с непериодическими быстро меняющимися граничными условиями и большим количеством концентрированных масс около границы. В работах [10] и [11] детально изучено поведение собственных значений и собственных функций оператора Лапласа в областях с непериодическими слабыми сингулярностями (стохастический случай см. в [12] и [13]). В работе [14] применён “unfolding”-метод для изучения задач с сингулярностями. Отметим также работу [15], в которой обнаружены новые эффекты влияния одной массы на другую. В работах [16] и [17] построены асимптотики собственных значений задач с концентрированными массами, периодически расположенными вдоль части границы, причём расстояния между массами имеют тот же порядок, что и диаметр масс. Изучены “лёгкие”, “средние” и “тяжёлые” массы.

Задачи с краевым условием Стеклова исследовались во многих работах. В работе [18] проанализирована вся совокупность случаев, возникающих при быстрой смене условия Стеклова и условия Дирихле. Особенности асимптотики спектра задач Стеклова в областях с сингулярностями обнаружены в работах [19–24]. В работах [19–21] найдены асимптотики собственных значений и собственных функций задачи в области, разделённой перфорированным интерфейсом (так называемым “ситом”), на котором поставлено условие Стеклова. Работы [22–24] посвящены построению асимптотик собственных значений и собственных функций в областях с малой полостью при стремлении малого параметра, характеризующего размер полости, к нулю. В статье [25] рассматривается плоская задача с условием Стеклова, чередующимся с условием Дирихле, при этом предполагается, что размеры участков Дирихле и Стеклова имеют один и тот же порядок малости. Получены асимптотики собственных значений. Задачи с быстро меняющимся типом граничных условий изучались также в работах [26–31], в которых рассматривались в том числе и спектральные задачи.

Более подробно остановимся на недавних работах [32–34]. В работе [32] исследуется задача для системы теории упругости в анизотропной трёхмерной среде с условием Дирихле, которое чередуется со спектральным условием Винклера–Стеклова. В ней с помощью техники декомпозиции Флоке–Блоха строится семейство спектральных задач типа Винклера–Стеклова в полубесконечной призме, которое потом используется в доказательстве теорем о сходимости собственных значений и собственных функций исходной задачи. Масштабированные пределы собственных значений исходной задачи оказываются нижними гранями соответствующих семейств собственных значений задач в призме. Кроме низкочастотных колебаний рассмотрены также высокочастотные колебания и доказаны теоремы о сходимости соответствующих семейств собственных значений исходной задачи. В работах [33] и [34] рассматриваются спектральные задачи для системы теории упругости в ограниченной области с чередующимися условиями Винклера–Робэна (упругое закрепление) и однородного условия Неймана (нулевое напряжение). В зависимости от значений параметров (диаметра пятен, на которых задано условие Винклера–Робэна, и расстояния между ближайшими пятнами) и коэффициентов в условии Винклера–Робэна исходной задачи получены различные предельные краевые условия (однородные условия Винклера–Робэна, Неймана и Дирихле). При этом применена техника асимптотического анализа для построения усреднённого спектра и доказательства сходимости собственных значений и собственных функций.

В настоящей работе рассматривается многомерная задача (размерность больше или равна трём) с быстрой сменой однородного условия Дирихле и условия Стеклова со слабой сингулярностью. Предполагается, что размеры сингулярностей и расстояния между ними имеют различный порядок, что приводит к нетривиальному смещению спектра в критическом случае. В работе даются в соответствующих нормах оценки отклонения (оценки скорости сходимости) решений соответствующих краевых задач от решений предельных краевых задач при стремлении малого параметра к нулю, кроме этого аналогичные оценки получены для собственных значений соответствующей спектральной задачи.

В п. 1 работы ставится задача и даются определения нужных в дальнейшем понятий, а также формулируются основные её теоремы. В п. 2 доказываются вспомогательные утверждения. В п. 3 приводятся те результаты из монографии [35], которые используются в п. 4 при доказательстве основных утверждений работы.

1. Постановка задачи. Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_n)$ декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_2 – область в гиперплоскости $x_n = 0$, состоящая из трёх частей α_ε , β_ε и γ_ε . Здесь $\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$ – дизъюнктивное объединение $(n-1)$ -мерных шаров, а $\beta_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \beta_\varepsilon^i$ – дизъюнктивное объединение $(n-1)$ -мерных шаровых слоёв, $\alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \setminus (\beta_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon)$. Обозначим $\Gamma_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \cup \beta_\varepsilon$.

Поясним строение области Γ_2 . Через $\xi = x/\delta$ обозначим “растянутые” координаты, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, а через γ_0 и β_0 – $(n-1)$ -мерные шар

$$\{\xi : \|\xi\|_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2, \quad \xi_n = 0\}$$

и шаровой слой

$$\{\xi : \varepsilon^2 < \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < 2\varepsilon^2, \quad \xi_n = 0\}$$

соответственно. Пусть γ и β – множества, полученные всевозможными сдвигами множеств γ_0 и β_0 на целочисленные векторы $(k_1, \dots, k_{n-1}, 0)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, n-1}$, а $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ и $\tilde{\beta}_\varepsilon$ – гомотетичные сжатия $\delta\gamma$ и $\delta\beta$ множеств γ и β соответственно. Тогда (рис. 1)

$$\gamma_\varepsilon = \tilde{\gamma}_\varepsilon \cap \partial\Omega, \quad \beta_\varepsilon = \tilde{\beta}_\varepsilon \cap \partial\Omega, \quad \alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \setminus (\beta_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon).$$

Подчеркнём, что рассматривается случай, когда параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между шарами γ_ε^i , стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим также, что $N_\delta = O(1/\delta^{n-1})$. В дальнейшем буквой C с нижними индексами или без них обозначаются постоянные.

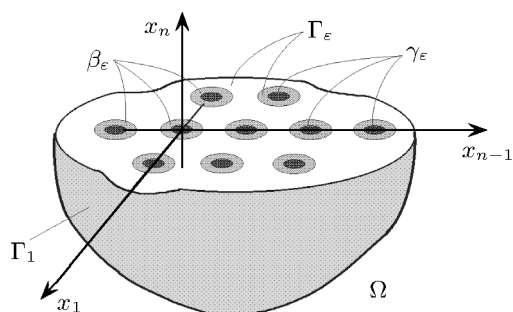


Рис. 1. Область с микронеоднородной структурой границы.

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon^k = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_n} = \lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} (\varepsilon\delta)^{-m}, & \text{если } x \in \beta_\varepsilon, \\ 1, & \text{если } x \in \alpha_\varepsilon. \end{cases}$$

Изучается случай $m < 2$ (слабая сингулярность).

Собственные значения λ_ε^k , $k \in \mathbb{N}$, занумерованы в порядке неубывания, т.е. $\lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots$ $\dots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \dots$, и повторяются с учётом кратности. При этом

$$\int_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon(\hat{x}, 0) u_\varepsilon^k(\hat{x}, 0) u_\varepsilon^l(\hat{x}, 0) d\hat{x} = \delta_{kl},$$

здесь $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Для формулировки теорем нам понадобится следующая величина:

$$P := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}.$$

Обозначим (рис. 2)

$$D = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -1/2 < \xi_i < 1/2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi_n < 0\},$$

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -1/2 < \xi_i < 1/2, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi_n = 0\}.$$

Пусть функция W^ε , периодическая по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, является первой собственной функцией задачи с условием Стеклова

$$\begin{cases} \Delta W^\varepsilon = 0 & \text{в } D, \\ W^\varepsilon = 0 & \text{на } \gamma_0, \\ \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \theta_\varepsilon W^\varepsilon & \text{на } \Sigma \setminus \gamma_0. \end{cases}$$

Зададим функцию w_ε^δ формулой

$$w_\varepsilon^\delta(x) = 1 + \psi(x_n)(W^\varepsilon(x/\delta) - 1) \quad (2)$$

и продолжим её по периодичности относительно $\hat{x}$. Здесь $\psi(t)$ – гладкая срезающая функция одной переменной, $0 \leq \psi \leq 1$, причём $\psi \equiv 1$ в некоторой достаточно малой окрестности области Γ_2 . Свойства функции w_ε^δ приведены в лемме в начале следующего пункта и подробно изучены в работе [18].

Сформулируем далее основные результаты, которые будут доказаны в п. 4. Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} = \rho^\varepsilon(x) f(x) & \text{на } \Gamma_\varepsilon; \end{cases} \quad (3)$$

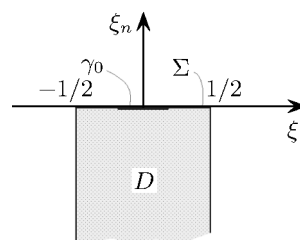


Рис. 2. Ячейка периодичности.

и

$$\begin{cases} \Delta u^0 = 0 & \text{в } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{на } \partial\Omega \quad (P = +\infty), \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} + P \frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u^0 = f(x) \quad \text{на } \Gamma_2, \\ u^0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \end{array} \right] & (P < +\infty), \end{cases} \quad (4)$$

где σ_n – площадь единичной n -мерной сферы, а $c_{\gamma_0} := \text{сар } \gamma_0$ – гармоническая ёмкость $(n-1)$ -мерного шара γ_0 .

Оценки решений этих задач даёт

Теорема 1. Пусть u^ε и u^0 – обобщённые решения задач (3) и (4) соответственно. Если $P < +\infty$, то существует такая постоянная $C_1(f, \gamma_0, n)$, не зависящая от ε и δ , что для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\|u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1(\varepsilon^{(n-2)/2} + |\varepsilon^{n-2}/\delta - P| + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m}).$$

Если $P = +\infty$, то существует постоянная $C_2(f, \gamma_0, n)$ такая, что

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2(\delta^{1/2}/\varepsilon^{(n-2)/2} + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m}).$$

Теперь рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} \Delta u_0^k = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_0^k = 0 & \text{на } \partial\Omega \quad (P = +\infty), \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\partial u_0^k}{\partial x_n} + P \frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u_0^k = \lambda_0^k u_0^k \quad \text{на } \Gamma_2, \\ u_0^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \int_{\Gamma_2} u_0^k u_0^l d\hat{x} = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \leq \lambda_0^2 \leq \dots, \end{array} \right] & (P < +\infty). \end{cases} \quad (5)$$

Связь между собственными значениями и собственными функциями задач (5) и (1) устанавливает

Теорема 2. Пусть λ_0^k и λ_ε^k – k -е собственные значения задач (5) и (1) соответственно. Тогда

$$|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k| \leq C_3(\varepsilon^{(n-2)/2} + |\varepsilon^{n-2}/\delta - P| + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m}), \quad \text{если } P < +\infty,$$

$$\lambda_\varepsilon^k \rightarrow +\infty \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{если } P = +\infty,$$

где постоянная C_3 не зависит от ε .

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (5) равна r , т.е.

$$\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \dots = \lambda_0^{l+r-1},$$

то для любой собственной функции u_0^l задачи (5), соответствующей собственному значению λ_0^l , $\|u_0^l\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u}^\varepsilon$ собственных функций задачи (1), соответствующих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^l, \dots, \lambda_\varepsilon^{l+r-1}$, такая, что

$$\|\overline{u}^\varepsilon - u_0^l\|_{L_2(\Omega)} \leq C_4(\varepsilon^{(n-2)/2} + |\varepsilon^{n-2}/\delta - P| + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m}), \quad \text{если } P < +\infty,$$

$$\|\overline{u}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C_5(\delta^{1/2}/\varepsilon^{(n-2)/2} + \varepsilon^{2-m} \delta^{2-m}), \quad \text{если } P = +\infty,$$

где постоянные C_4, C_5 не зависят от ε и u_0^l .

2. Вспомогательные утверждения. Будем изучать предельное поведение решений спектральной задачи (1) при ε , стремящемся к нулю. Существование и единственность решения u_ε^k задачи (1) в пространстве $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ могут быть доказаны на основании леммы Лакса–Мильграма. Пространство $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ определяем как пополнение по норме

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \equiv \left(\int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{1/2}$$

множества функций из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности множества $\Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon$. Пространство $H^1(D, \gamma_0)$ – замыкание по норме

$$\|u\|_1 \equiv \left(\int_D |\nabla_\xi u|^2 d\xi + \int_\Sigma u^2 d\hat{\xi} \right)^{1/2}$$

множества 1-периодических по $\hat{\xi} \equiv (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ функций из $C^\infty(\overline{D})$, обращающихся в нуль в окрестности шара γ_0 и обладающих конечным интегралом Дирихле по области D .

Пусть

$$\theta_\varepsilon = \inf_{v \in H^1(D, \gamma_0) \setminus \{0\}} \left(\int_D |\nabla_\xi v|^2 d\xi \Big/ \int_\Sigma v^2 d\hat{\xi} \right). \quad (6)$$

В работе [27] исследовался вопрос поведения собственного значения θ_ε и установлена следующая его асимптотика (см. [27, формула (25)]).

Лемма 1. Пусть σ_n – площадь единичной n -мерной сферы, а c_{γ_0} – гармоническая ёмкость шара γ_0 . Тогда

$$\theta_\varepsilon = \varepsilon^{n-2} \frac{\sigma_n}{2} c_{\gamma_0} + o(\varepsilon^{n-2}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В работе [18] доказана

Лемма 2. Существует гармоническая в D функция $W^\varepsilon(\xi) \in H^1(D, \gamma_0)$, на которой достигается нижняя грань в (6), т.е.

$$\int_D |\nabla_\xi W^\varepsilon|^2 d\xi = \theta_\varepsilon, \quad \|W^\varepsilon\|_{L_2(\Sigma)} = 1,$$

причём граничное условие

$$\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \theta_\varepsilon W^\varepsilon \quad \text{на } \Sigma \setminus \gamma_0 \quad (7)$$

выполняется в следующем смысле:

$$\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} v d\hat{\xi} \rightarrow \theta_\varepsilon \int_\Sigma W^\varepsilon v d\hat{\xi} \quad \text{при } \rho \rightarrow 0 \text{ для любой } v \in H^1(D, \gamma_0).$$

Здесь

$$\Sigma_\rho := \{\xi \in \mathbb{R}^n : 0 < \xi_i < 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi_n = -\rho\}.$$

В работе [18] подробно обсуждается вопрос о существовании таких функций и их свойствах.

Рассмотрим функцию $w_\varepsilon^\delta(x)$, определённую равенством (2). Заметим, что в силу условия (7) выполняется соотношение

$$\frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} = \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} w_\varepsilon^\delta \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon.$$

Аналогично тому, как это сделано в [18], несложно получить следующую оценку:

$$\left| \iint_{\Omega} \Delta w_{\varepsilon}^{\delta} v \, dx \right| \leq C_6 \theta_{\varepsilon}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})} \quad (8)$$

для любой функции $v \in H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})$.

Через $\mathfrak{C}_{\varepsilon}^j$ обозначим цилиндр с основанием $\gamma_{\varepsilon}^j \cup \beta_{\varepsilon}^j$ и высотой $\varepsilon\delta$, т.е. $\mathfrak{C}_{\varepsilon}^j = \{x \in \Omega : (\hat{x}, 0) \in \gamma_{\varepsilon}^j \cup \beta_{\varepsilon}^j, -\varepsilon\delta < x_n < 0\}$.

Лемма 3. Для функций $v \in H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathfrak{C}_{\varepsilon}^j} v^2 \, dx \leq C(\varepsilon\delta)^2 \int_{\mathfrak{C}_{\varepsilon}^j} |\nabla v|^2 \, dx, \quad j = \overline{1, N_{\delta}}. \quad (9)$$

Доказательство. Доказательство этого неравенства типа Фридрихса проводится в два этапа. На первом этапе получаем классическое неравенство в растянутой области в координатах $\eta = x/(\varepsilon\delta)$, поскольку функции имеют нулевой след на фиксированной части границы растянутой области. Далее, делая обратную замену координат, замечаем, что в градиенте появляется множитель $\varepsilon\delta$ и, таким образом, получаем неравенство (9) (см. похожий приём в [35], а также неравенство Фридрихса в [36] и [37]).

Лемма 4. Для функций $v \in H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})$ справедливо неравенство

$$\int_{\beta_{\varepsilon}^j} v^2 \, d\hat{x} \leq C_8(\varepsilon\delta)^2 \int_{\mathfrak{C}_{\varepsilon}^j} |\nabla v|^2 \, dx, \quad j = \overline{1, N_{\delta}}. \quad (10)$$

Доказательство. В растянутых координатах $\eta = x/(\varepsilon\delta)$ имеем неравенство для следов

$$\|v\|_{L_2(\partial\mathfrak{C})} \leq C\|v\|_{H^1(\mathfrak{C})},$$

где $\mathfrak{C} = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \varepsilon\delta\eta \in \mathfrak{C}_{\varepsilon}^j\}$. Далее, используя лемму 3 и проводя обратную замену переменных, приходим к доказываемому неравенству.

Лемма 5. Для последовательности функций $\{v_{\varepsilon}\} \in H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})$ выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon\delta)^{-2} \int_{\beta_{\varepsilon}^i} |v_{\varepsilon}|^2 \, dx = 0,$$

если $\|v_{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_9$, где постоянная C_9 не зависит от ε .

Доказательство. Пусть $v \in H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})$. Для любого числа $\varkappa > 0$ существует функция $v_{\varkappa} \in C^{\infty}(\Omega, \gamma_{\varepsilon})$ такая, что

$$\sqrt{C_7} \|v - v_{\varkappa}\|_{H^1(\Omega)} < \varkappa,$$

где C_7 – постоянная из неравенства (9). Тогда, применяя оценки (9) и (10) к функции $v - v_{\varkappa}$, а также учитывая неравенство для следов и ограниченность градиента функции $v_{\varkappa}$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{\beta_{\varepsilon}^i} (\varepsilon\delta)^{-2} |v|^2 \, dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\beta_{\varepsilon}^i} (\varepsilon\delta)^{-2} |v - v_{\varkappa}|^2 \, dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\beta_{\varepsilon}^i} (\varepsilon\delta)^{-2} |v_{\varkappa}|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{C_7} \left(\int_{\Omega} |\nabla(v - v_{\varkappa})|^2 \, dx \right)^{1/2} + C_{\varkappa} (\varepsilon\delta)^{-1+n/2} \leq \varkappa + C_{\varkappa} (\varepsilon\delta)^{-1+n/2}. \end{aligned}$$

Так как $n \geq 3$, по определению предела завершаем доказательство леммы.

Лемма 6. Для решения $u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ задачи (3) справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq C_{10} \left(\int_{\alpha_\varepsilon} f^2 d\hat{x} + (\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{\beta_\varepsilon} \rho^\varepsilon f^2 d\hat{x} \right).$$

Доказательство. Вследствие интегрального тождества, учитывая леммы 3, 4 и неравенство типа Фридрихса (см., например, [28, 30, 36]), получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho^\varepsilon f u^\varepsilon d\hat{x} = \int_{\alpha_\varepsilon} f u^\varepsilon d\hat{x} + (\varepsilon\delta)^{-m} \int_{\beta_\varepsilon} f u^\varepsilon d\hat{x} \leq \\ &\leq \left(\int_{\alpha_\varepsilon} f^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\alpha_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 d\hat{x} \right)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{-m} \left(\int_{\beta_\varepsilon} f^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\beta_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C \left(\int_{\alpha_\varepsilon} f^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + C(\varepsilon\delta)^{-m+1} \left(\int_{\beta_\varepsilon} f^2 d\hat{x} \right)^{1/2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

для разных постоянных C . Отсюда непосредственно вытекает доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Пусть $f \in C(\Gamma_2)$. Если $u^0 \in H^1(\Omega)$ – обобщённое решение задачи (4), то, согласно теории регулярности решений эллиптических уравнений [38], $u^0 \in W_r^2(\Omega)$ для любого $r > 1$. Тогда в силу теорем вложения Соболева $u^0, \nabla_x u^0 \in C(\overline{\Omega})$; из первого уравнения задачи (4) следует, что $u^0 \in C(\overline{\Omega})$, причём

$$\|u^0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\nabla_x u^0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\Delta u^0\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_{11} \|f\|_{C(\Gamma_2)}. \quad (11)$$

Слабая сходимость u^ε к u^0 в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ доказана в [18].

Обозначим

$$p := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{n-2} \sigma_n c_{\gamma_0}}{2\delta(\varepsilon)}, \quad \text{т.е.} \quad p = \frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} P.$$

Имеет место

Лемма 7. Пусть $f \in C(\Gamma_2)$, а u^ε и u^0 – обобщённые решения задач (3) и (4) соответственно. Если $p < +\infty$, то существует постоянная C_{12} , не зависящая от ε , δ и f , такая, что для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\|u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{12} \|f\|_{C(\Gamma_2)} ((\theta_\varepsilon)^{1/2} + |\theta_\varepsilon/\delta - p| + (\varepsilon\delta)^{2-m}).$$

Доказательство. Рассмотрим область

$$\Omega_\mu = \{x \in \Omega : x_n \leq -\mu\},$$

обозначим $\Gamma_{2\mu}$ – часть границы $\partial\Omega_\mu \setminus \partial\Omega$. С учётом гладкости функций u^0 , w_ε^δ и u^ε (см., например, [38]), следующее интегральное выражение

$$\int_{\Omega_\mu} (\nabla_x (u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v) dx$$

корректно для любой функции $v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$. Вычисляя этот интеграл по частям и учитывая, что $\Delta u^0 = 0$, получаем

$$\int_{\Omega_\mu} (\nabla_x (u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v) dx = \int_{\Omega_\mu} (\nabla_x (u^0 w_\varepsilon^\delta), \nabla_x v) dx - \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v d\hat{x} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega_\mu} \Delta(u^0 w_\varepsilon^\delta) v \, dx + \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial(u^0 w_\varepsilon^\delta)}{\partial x_n} v \, d\hat{x} - \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v \, d\hat{x} = \\
&= - \int_{\Omega_\mu} (2(\nabla_x u^0, \nabla_x (w_\varepsilon^\delta - 1)) + u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta) v \, dx + \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v \, d\hat{x} + \int_{\Gamma_{2\mu}} u^0 \frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} v \, d\hat{x} - \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v \, d\hat{x} = \\
&= 2 \int_{\Omega_\mu} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0) \, dx + \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v \, d\hat{x} + \int_{\Gamma_{2\mu}} u^0 \frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} v \, d\hat{x} - \\
&\quad - \int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v \, d\hat{x} - 2 \int_{\Gamma_{2\mu}} (w_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^0}{\partial x_n} v \, d\hat{x} - \int_{\Omega_\mu} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v \, dx. \tag{12}
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $\mu \rightarrow 0$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\mu} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0) \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0) \, dx, \\
\int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v \, d\hat{x} &\rightarrow \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} w_\varepsilon^\delta v \, d\hat{x}, \\
\int_{\Gamma_{2\mu}} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v \, d\hat{x} &\rightarrow \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} v \, d\hat{x} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho_\varepsilon f v \, d\hat{x}, \\
\int_{\Omega_\mu} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v \, dx &\rightarrow \int_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v \, dx,
\end{aligned}$$

а

$$\int_{\Gamma_{2\mu}} (w_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^0}{\partial x_n} v \, d\hat{x} \rightarrow \int_{\Gamma_2} (w_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^0}{\partial x_n} v \, d\hat{x}.$$

В силу свойств функции w_ε^δ , заданной равенством (2), заключаем, что

$$\int_{\Gamma_{2\mu}} u^0 \frac{\partial w_\varepsilon^\delta}{\partial x_n} v \, d\hat{x} \rightarrow \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \int_{\Gamma_2} u^0 w_\varepsilon^\delta v \, d\hat{x} \quad \text{при } \mu \rightarrow 0.$$

Перейдём в (12) к пределу при $\mu \rightarrow 0$. Вследствие граничного условия задачи (4), т.е. условия $\partial u^0 / \partial x_n = -p u^0 + f$ на Γ_2 , получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla_x (u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v) \, dx &= 2 \int_{\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0) \, dx + \left(d \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p \right) \int_{\Gamma_2} u^0 w_\varepsilon^\delta v \, d\hat{x} - \\
&- \int_{\Gamma_2} (w_\varepsilon^\delta - 1) f v \, d\hat{x} - \int_{\beta_\varepsilon} ((\varepsilon \delta)^{-m} - 1) f v \, d\hat{x} + 2 \int_{\Gamma_2} (w_\varepsilon^\delta - 1) p u^0 v \, d\hat{x} - \int_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v \, dx. \tag{13}
\end{aligned}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (13). Для первого интеграла имеем

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1)(\nabla_x v, \nabla_x u^0) \, dx \right| &= \|w_\varepsilon^\delta - 1\|_{L_2(\Omega)} \left(\int_{\Omega} (\nabla_x u^0, \nabla_x v)^2 \, dx \right)^{1/2} \leq \\
&\leq C(\theta_\varepsilon \delta)^{1/2} \|f\|_{C(\Gamma_2)} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)}
\end{aligned}$$

в силу свойств функций u^0 и w_ε^δ (см. (11) и лемму 2). Используя неравенства (11) и (8), для последнего интеграла в (13) получаем оценку

$$\left| \int_{\Omega} u^0 \Delta w_\varepsilon^\delta v \, dx \right| \leq C_6 \theta_\varepsilon^{1/2} \|u^0 v\|_{H^1(\Omega)} \leq C'_6 \theta_\varepsilon^{1/2} \|u^0\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C''_6 \theta_\varepsilon^{1/2} \|f\|_{C(\Gamma_2)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Далее, воспользовавшись неравенством (11) и свойствами функции w_ε^δ (см. [18]), второй интеграл в (13) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| (\theta_\varepsilon/\delta - p) \int_{\Gamma_2} u^0 (w_\varepsilon^\delta - 1) v \, d\hat{x} + (\theta_\varepsilon/\delta - p) \int_{\Gamma_2} u^0 v \, d\hat{x} \right| \leq \\ & \leq |\theta_\varepsilon/\delta - p| C'_{11} \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \|f\|_{C(\Gamma_2)} + C''_{11} |\theta_\varepsilon/\delta - p| \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \|f\|_{C(\Gamma_2)} \leq \\ & \leq C'''_{11} |\theta_\varepsilon/\delta - p| \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \|f\|_{C(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Оставшиеся интегралы допускают следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1) p u^0 v \, ds \right| \leq C \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \|f\|_{C(\Gamma_2)}, \\ & \left| \int_{\partial\Omega} (w_\varepsilon^\delta - 1) f v \, ds \right| \leq C \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \|f\|_{C(\Gamma_2)}, \\ & \left| \int_{\beta_\varepsilon} ((\varepsilon\delta)^{-m} - 1) f v \, d\hat{x} \right| \leq C (\varepsilon\delta)^{m-2} \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \|f\|_{C(\Gamma_2)} \end{aligned}$$

для разных постоянных C ввиду неравенства (11), леммы 4 и свойств функции w_ε^δ (см. [18]). Окончательно имеем

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla_x (u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v) \, dx \right| \leq C \|f\|_{C(\Gamma_2)} \left(\theta_\varepsilon^{1/2} + |\theta_\varepsilon/\delta - p| + (\varepsilon\delta)^{m-2} \right) \|v\|_{H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)} \quad (14)$$

для произвольной функции $v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$.

Положим $v = u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon$. На основании оценки (14), применяя неравенство типа Фридрихса, получаем нужную оценку. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $f \in C(\Gamma_2)$. Если $p = +\infty$, то существует постоянная C_{13} такая, что

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{13} \|f\|_{C(\Gamma_2)} ((\delta/\theta_\varepsilon)^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m}).$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 7 с использованием результатов работы [18].

3. Предварительные замечания. Поведение собственных значений и собственных функций задачи (1) будем изучать основываясь на общей схеме, предложенной в монографии [35].

Пусть H_ε , H_0 – сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(u, v)_\varepsilon$, $(u, v)_0$ и нормами $\|u\|_\varepsilon$, $\|u\|_0$ соответственно, ε – малый положительный параметр. Пусть также $A_\varepsilon \in \mathcal{L}(H_\varepsilon)$, $A_0 \in \mathcal{L}(H_0)$ – линейные непрерывные операторы, причём $\text{Im } A_0 \subset C \subset V \subset H_0$; где V – линейное подпространство в H_0 .

Будем предполагать, что выполнены следующие условия С1–С4.

С1. Существуют линейные непрерывные операторы $R_\varepsilon : H_0 \rightarrow H_\varepsilon$ такие, что для любого элемента $f \in V$ имеет место сходимость $(R_\varepsilon f, R_\varepsilon f)_\varepsilon \rightarrow \kappa(f, f)_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\kappa = \text{const} > 0$ не зависит от f .

С2. Операторы A_ε и A_0 являются положительными, компактными и самосопряжёнными в пространствах H_ε и H_0 соответственно, причём

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon)} < \infty.$$

С3. Для любого элемента $f \in V$ имеет место сходимость $\|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

С4. Семейство операторов A_ε равномерно компактно в следующем смысле. Из любой последовательности $\{f^\varepsilon\}$, $f^\varepsilon \in H_\varepsilon$, такой, что $\sup_\varepsilon \|f^\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$, можно выбрать подпоследовательность $\{f^{\varepsilon'}\}$ и найти функцию $w \in V$ такие, что

$$\|A_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - R_{\varepsilon'} w\|_{\varepsilon'} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon' \rightarrow 0.$$

Для операторов A_ε и A_0 рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^k = \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (u_\varepsilon^i, u_\varepsilon^j) = \delta_{ij}, \quad (15)$$

$$A_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (u_0^i, u_0^j) = \delta_{ij}, \quad (16)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а собственные значения μ_ε^k и μ_0^k занумерованы в порядке невозрастания, причём каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Теорема (Олейник–Иосифьян–Шамаев). Пусть выполнены условия С1–С4. Тогда справедлива оценка

$$|\mu_\varepsilon^k - \mu_0^k| \leq M_\varepsilon \sup_f \|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_\varepsilon, \quad k \in \mathbb{N},$$

в которой μ_ε^k и μ_0^k – k -е собственные значения задач (15) и (16) соответственно, верхняя грань берётся по всем функциям $f \in N(\mu_0^k, A_0) = \{v \in H_0 : A_0 v = \mu_0^k v\}$ таким, что $\|f\|_0 = 1$, а постоянные M_ε удовлетворяют условиям

$$\sup\{M_\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq 1\} < +\infty$$

и $M_\varepsilon \rightarrow \text{const} > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{N}$ и кратность собственного значения μ_0^{k+1} задачи (16) равна l , т.е.

$$\mu_0^{k+1} = \dots = \mu_0^{k+l}.$$

Тогда для любой функции $u_0 \in N(\mu_0^{k+1}, A_0)$ существует линейная комбинация $\overline{u}_\varepsilon$ собственных функций $u_\varepsilon^{k+1}, \dots, u_\varepsilon^{k+l}$ задачи (15) такая, что

$$\|\overline{u}_\varepsilon - R_\varepsilon u_0\|_\varepsilon \leq M_k \|A_\varepsilon R_\varepsilon u_0 - R_\varepsilon A_0 u_0\|_\varepsilon,$$

где постоянная M_k не зависит от ε .

Для того чтобы воспользоваться схемой исследования, дающей возможность применять сформулированную теорему, нужно подходящим образом ввести пространства H_0 , H_ε , V , операторы A_0 , A_ε , R_ε и проверить для них выполнимость условий С1–С4.

Отождествим пространства H_ε и H_0 с пространством $L_2(\Gamma_2)$, в котором заданы скалярные произведения

$$(h^\varepsilon, g^\varepsilon)_{H_\varepsilon} \equiv \int_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon h^\varepsilon g^\varepsilon d\widehat{x} \quad \text{и} \quad (h^0, g^0)_{H_0} \equiv \int_{\Gamma_2} h^0 g^0 d\widehat{x}$$

соответственно. В качестве V возьмём пространство $L_2(\Gamma_2)$. Положим $R_\varepsilon f = f$ для любого $f \in H_0$.

Если $f \in V$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$(R_\varepsilon f, R_\varepsilon f)_{H_\varepsilon} = \int_{\alpha_\varepsilon} f^2 d\hat{x} + (\varepsilon\delta)^{-m} \int_{\beta_\varepsilon} f^2 d\hat{x} \rightarrow \int_{\Gamma_2} f^2 d\hat{x} = (f, f)_{H_0}$$

в силу леммы 5. Действительно, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon\delta)^{-m} \int_{\beta_\varepsilon} f^2 d\hat{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{\beta_\varepsilon} f^2 (\varepsilon\delta)^{-2} d\hat{x},$$

но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon\delta)^{-2} \int_{\beta_\varepsilon} f^2 d\hat{x} = 0,$$

а $m < 2$. Это означает, что справедливо условие С1 при $\kappa = 1$.

Обозначим через $A_\varepsilon : H_\varepsilon \rightarrow H_\varepsilon$ оператор, ставящий в соответствие функции $f \in H_\varepsilon$ след $u^\varepsilon|_{\Gamma_2}$ решения $u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ задачи (3). Через $A_0 : H_0 \rightarrow H_0$ обозначим оператор, переводящий $f \in H_0$ в след $u^0|_{\Gamma_2}$ решения $u^0 \in H^1(\Omega, \Gamma_1)$ задачи (4).

Нетрудно проверить, что операторы A_ε и A_0 являются положительными, компактными и самосопряжёнными в пространствах H_ε и H_0 соответственно (см. [18]). Равномерная ограниченность семейства операторов в соответствующей операторной норме

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(H_\varepsilon)} < M$$

вытекает из леммы 6, поскольку при $m < 2$ в силу лемм 4 и 6 и неравенства типа Фридрихса получаем

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f\|_{H_\varepsilon}^2 &= \int_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2 d\hat{x} \leq \left(\int_{\alpha_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 d\hat{x} + (\varepsilon\delta)^{-2} \int_{\beta_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 d\hat{x} \right) \leq C \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \\ &\leq C \left((\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{\beta_\varepsilon} \rho^\varepsilon f^2 d\hat{x} + \int_{\alpha_\varepsilon} \rho^\varepsilon f^2 d\hat{x} + \int_{\beta_\varepsilon} f^2 d\hat{x} \right) \leq C \left(\int_{\alpha_\varepsilon} \rho^\varepsilon f^2 d\hat{x} + \int_{\beta_\varepsilon} \rho^\varepsilon f^2 d\hat{x} \right) = C_6 \|f\|_{H_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, условие С2 имеет место.

Докажем выполнимость условия С3. Пусть $f \in H_0$. Тогда

$$A_\varepsilon R_\varepsilon f = u^\varepsilon|_{\Gamma_2}, \quad R_\varepsilon A_0 f = u^0|_{\Gamma_2},$$

где u^ε – решение задачи (3), а u^0 – решение задачи (4). Пользуясь леммой 3 и неравенством Фридрихса, устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon R_\varepsilon f - R_\varepsilon A_0 f\|_{H_\varepsilon}^2 &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho^\varepsilon |u^\varepsilon - u^0|^2 d\hat{x} \leq \int_{\alpha_\varepsilon} |u^\varepsilon - u^0|^2 d\hat{x} + \int_{\beta_\varepsilon} (\varepsilon\delta)^{-m} |u^\varepsilon - u^0|^2 d\hat{x} \leq \\ &\leq C \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - u^0)|^2 dx + C(\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{\mathfrak{E}_\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - u^0)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - u^0)|^2 dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla(u^\varepsilon - u^0 w_\varepsilon^\delta)|^2 dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla u^0|^2 (1 - w_\varepsilon^\delta)^2 + (u^0)^2 |\nabla(1 - w_\varepsilon^\delta)|^2 \right) dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь мы воспользовались свойствами функций u^0 и w_ε^δ , а также леммами 5, 7 и 8. Таким образом, условие С3 проверено.

Докажем справедливость условия С4. Если $\sup_{\varepsilon} \|f\|_{H_{\varepsilon}} < \infty$, то из леммы 6 и неравенства Фридрихса вытекает, что

$$\sup_{\varepsilon} \|u^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega, \gamma_{\varepsilon})} < \infty,$$

где u^{ε} – решение задачи (3). Следовательно, по теореме Реллиха найдутся $U^* \in V$ и подпоследовательность $\varepsilon' \rightarrow 0$, для которых

$$u^{\varepsilon'} \rightarrow U^* \quad \text{слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega).$$

При этом из единственности решения предельной задачи с помощью интегрального тождества несложно показать (аналогично [31]), что

$$u^{\varepsilon'} \rightarrow U^* \quad \text{сильно в } H^1(\Omega). \quad (17)$$

Поэтому, пользуясь леммой 3, получаем оценки

$$\begin{aligned} \|A_{\varepsilon}f - R_{\varepsilon}U^*\|_{H_{\varepsilon}}^2 &= \int_{\Omega} \rho^{\varepsilon}(x)|u^{\varepsilon} - U^*|^2 dx \leq \int_{\alpha_{\varepsilon}} |u^{\varepsilon} - U^*|^2 d\hat{x} + (\varepsilon\delta)^{-m} \int_{\beta_{\varepsilon}} |u^{\varepsilon} - U^*|^2 d\hat{x} \leq \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla(u^{\varepsilon} - U^*)|^2 dx + (\varepsilon\delta)^{2-m} \int_{\Omega} |\nabla(u^{\varepsilon} - U^*)|^2 dx \right), \end{aligned}$$

где $u^{\varepsilon} = A_{\varepsilon}f$ и постоянная C не зависит от ε . Отсюда следует соотношение из условия С4, так как $m < 2$ и имеет место сходимость (17).

Таким образом, выполнены условия С1–С4 и мы можем применить теорему Олейник–Иосифьяна–Шамаева о сходимости спектров последовательности операторов, заданных в разных гильбертовых пространствах.

Задача на собственные значения для оператора A_0 имеет вид (16), где $\mu_0^k = 1/\lambda_0^k$, а λ_0^k – собственные значения задачи (5).

Итак, имеет место

Теорема 3. Пусть λ_0^k и λ_{ε}^k – k -е собственные значения задач (5) и (1) соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} |\lambda_0^k - \lambda_{\varepsilon}^k| &\leq C_{14}((\theta_{\varepsilon})^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + |\theta_{\varepsilon}/\delta - p|), \quad \text{если } p < +\infty, \\ \lambda_{\varepsilon}^k &\rightarrow +\infty \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{если } p = +\infty, \end{aligned}$$

где постоянная C_{14} не зависит от ε .

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (5) равна r , т.е.

$$\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \dots = \lambda_0^{l+r-1},$$

то для любой собственной функции u_0^l задачи (5), соответствующей собственному значению λ_0^l , $\|u_0^l\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u^{\varepsilon}}$ собственных функций задачи (1), соответствующих собственным значениям $\lambda_{\varepsilon}^{l+1}, \dots, \lambda_{\varepsilon}^{l+r-1}$, такая, что

$$\begin{aligned} \|\overline{u^{\varepsilon}} - u_0^l\|_{L_2(\Omega)} &\leq C_{15}((\theta_{\varepsilon})^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m} + |\theta_{\varepsilon}/\delta - p|), \quad \text{если } p < +\infty, \\ \|\overline{u^{\varepsilon}}\|_{L_2(\Omega)} &\leq C_{16}((\delta/\theta_{\varepsilon})^{1/2} + (\varepsilon\delta)^{2-m}), \quad \text{если } p = +\infty, \end{aligned}$$

где постоянные C_{15} , C_{16} не зависят от ε и u_0^l .

4. Доказательство основных утверждений. Воспользовавшись леммами 1, 7, 8 и теоремой 3 с учётом асимптотики (6), получаем утверждения теорем 1 и 2.

Автор выражает благодарность рецензенту, замечания которого позволили существенно улучшить представление результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах // Изв. Николаевской морской академии. 1913. Вып. 2. С. 325–348.
2. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29. № 5. С. 71–91.
3. Lobo M., Pérez E. Asymptotic behavior of the vibrations of a body having many concentrated masses near the boundary // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Série II. 1992. V. 314. P. 13–18.
4. Sanchez-Palencia É., Tchatat H. Vibration de systemes elastiques avec masses concentrees // Rend. del Semi. mat. della Univer. e politecnico di Torino. 1984. V. 42. № 3. P. 43–63.
5. Gómez D., Lobo M., Pérez E. On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. P. 841–865.
6. Chechkin G.A. On vibration of partially fastened membrane with many “light” concentrated masses on the boundary // Comp. Rend. Mécanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.
7. Чечкин Г.А. Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. Вып. 4. С. 205–206.
8. Доронина Е.И., Чечкин Г.А. О собственных колебаниях тела с большим количеством непериодически расположенных концентрированных масс // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2002. Т. 236. С. 158–166.
9. Rybalko V. Vibration of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions // Asymptot. Anal. 2002. V. 32. № 1. P. 27–62.
10. Перес М.Е., Чечкин Г.А., Яблокова (Доронина) Е.И. О собственных колебаниях тела с “лёгкими” концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.
11. Chechkin G.A., Pérez M.E., Yablokova E.I. Non-periodic boundary homogenization and “light” concentrated masses // Indiana Univ. Math. J. 2005. V. 54. № 2. P. 321–348.
12. Chechkin G.A., Chechkina T.P. Asymptotic behavior of spectrum of an elliptic problem in a domain with aperiodically distributed concentrated masses // Comp. Rend. Mécanique. 2017. V. 345. № 10. P. 671–677.
13. Chechkin G.A., Chechkina T.P. Random homogenization in a domain with light concentrated masses // Mathematics. 2020. V. 8. № 5. Art. 788.
14. Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A., Piatnitski A.L. On boundary value problem with singular inhomogeneity concentrated on the boundary // J. de Math. Pures et Appl. 2012. V. 98. № 2. P. 115–138.
15. Cainzos J., Pérez M.E., Vilasanchez M. Asymptotics for the eigenelements of the Neumann spectral problem with concentrated masses // Indiana Univ. Math. J. 2007. V. 56. № 4. P. 1939–1987.
16. Nazarov S.A., Pérez M.E. New asymptotic effects for the spectrum of problems on concentrated masses near the boundary // Comp. Rend. Mécanique. 2009. V. 337. № 8. P. 585–590.
17. Nazarov S.A., Pérez M.E. On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary // Rev. Mat. Complut. 2018. V. 31. № 1. P. 1–62.
18. Чечкина А.Г. Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // Изв. РАН. Сер. Мат. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
19. Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Asymptotics of a spectral-sieve problem // J. of Math. Anal. and Appl. 2016. V. 435. № 2. P. 1652–1671.
20. Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. О спектральной задаче с условием Стеклова на тонком перфорированном интерфейсе // Докл. РАН. 2016. Т. 466. № 4. С. 389–394.
21. Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Об асимптотическом поведении собственных пар краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Изв. РАН. 2018. Т. 82. № 6. С. 37–64.
22. Gryshchuk S., Lanza de Cristoforis M. Simple eigenvalues for the Steklov problem in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. V. 37. № 12. P. 1755–1771.
23. Назаров С.А. Моделирование сингулярно возмущенной спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач // Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49. № 1. С. 31–48.
24. Chiado Piat V., Nazarov S.A. Steklov spectral problems in a set with a thin toroidal hole // Partial Differ. Equat. in Appl. Math. 2020. V. 1. P. 100007.
25. Pérez M.E. On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-band and the spectral homogenization problem // Discrete Contin. Dyn. Systems. Ser. B. 2007. V. 7. № 4. P. 859–883.
26. Chechkin G.A. On vibration of partially fastened membrane with many “light” concentrated masses on the boundary // Comp. Rend. Mécanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.

27. Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
28. Олейник О.А., Чечкин Г.А. О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48. Вып. 6. С. 163–164.
29. Беляв А.Ю., Чечкин Г.А. Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой граничных условий // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 4. С. 496–510.
30. Oleinik O.A., Chechkin G.A. Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity // Rend. Lincei: Math. Appl. Ser. 9. 1996. V. 7. № 1. P. 5–15.
31. Gadyl'shin R.R., Chechkin G.A. On boundary-value problems for the laplacian in bounded domains with micro inhomogeneous structure of the boundaries // Acta Math. Sinica. 2007. V. 23. № 2. P. 237–248.
32. Gómes D., Nazarov S.A., Pérez M.E. Homogenization of Winkler–Steklov spectral conditions in three-dimensional linear elasticity // Zeitschr. für Angew. Math. und Physik. 2018. Bd. 69. № 2. S. 35.
33. Gómes D., Nazarov S.A., Pérez–Martinez M.E. Spectral homogenization problems in linear elasticity with large reaction terms concentrated in small regions of the boundary // Computational and Analytic Methods in Science and Engineering. Cham, 2020. P. 121–143.
34. Gómes D., Nazarov S.A., Pérez–Martinez M.E. Asymptotics for spectral problems with rapidly alternating boundary conditions on a strainer Winkler foundation // J. of Elasticity. 2020. V. 142. P. 89–120.
35. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М., 1990.
36. Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Persson L.-E. On the precise asymptotics of the constant in the Friedrich's inequality for functions, vanishing on the part of the boundary with microinhomogeneous structure // J. of Inequalities and Appl. 2007. V. 2007. Art. ID 34138.
37. Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E. On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems // Rus. J. of Math. Phys. 2009. V. 16. № 1. P. 1–16.
38. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., 1962.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30.08.2020 г.
После доработки 23.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

УДК 517.957+517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЁХ СОБОЛЕВСКИХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПСЕВДОЛАПЛАСИАНЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. И. Аристов

Построено несколько классов точных решений для трёх нелинейных, содержащих псевдо-лапласианы четвёртого порядка, соболевских уравнений, описывающих квазистационарные процессы в полупроводниках с учётом отрицательной дифференциальной проводимости.

DOI: 10.31857/S0374064121100137

Введение. Работа посвящена построению классов точных решений следующих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_4 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u = \Delta_4 u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \Delta u = \Delta_4 u. \quad (3)$$

В (1)–(3) функция u зависит от трёхмерного вектора пространственных $\omega = (x, y, z)$ и временной $t > 0$ переменных, а через $\Delta_p u$ (здесь $p = 4$) обозначен псевдолапласиан порядка p , т.е. $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. Операторы ∇ и Δ действуют только по пространственным переменным.

В монографии [1, гл. 7, § 2] для уравнения (1) и более общих, чем (2) и (3), уравнений (содержащих псевдолапласианы произвольного порядка; при этом в ней подчёркивалось, что $p = 4$ – это “физически важный случай”) изучалась разрешимость (локальная и глобальная) начально-краевых задач и в случае только локальной разрешимости получены оценки времени существования их решений. Уравнения, подобные (1)–(3), описывают квазистационарные процессы в полупроводниках с учётом отрицательной дифференциальной проводимости.

Отметим, что существуют обширные исследования в области качественной теории соболевских уравнений, в которых изучаются вопросы существования и единственности решений, их разрушения и асимптотики (например, [1–3]), но в литературе о точных решениях уравнений в частных производных (например, [4–6]) такие уравнения встречаются редко.

В данной работе построено несколько классов точных решений уравнений (1)–(3), выражающихся через элементарные и специальные функции.

В дальнейшем через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначаются, вообще говоря, произвольные действительные постоянные, через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – произвольный постоянный ненулевой трёхмерный вектор, через $k(\cdot), k_1(\cdot), k_2(\cdot), \dots$ – произвольные дифференцируемые функции скалярного аргумента. Для векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\omega = (x, y, z)$ их скалярное произведение обозначаем через $\langle \alpha, \omega \rangle$, т.е. $\langle \alpha, \omega \rangle = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$. Далее считаем, что для рассматриваемых параметров, переменных и функций выполняемые с ними действия и преобразования корректны.

Введём функцию

$$\chi(w; c) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(w+c)^2}{w^2 - cw + c^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2w-c}{c\sqrt{3}} \right) \quad (4)$$

переменной w (для $c \neq 0$). Несложно убедиться, что

$$\int \frac{dw}{w^3 + c^3} = \chi(w; c) + \text{const.}$$

1. Построение решения уравнения (1). Построим два класса точных решений уравнения (1). Для построения используем метод бегущей волны и поиск автомодельных решений.

1. Построим решение типа бегущей волны. Пусть $u(\omega; t) = v(\xi)$, где $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle + t$. Подставив эту функцию в уравнение (1), получим

$$\langle \alpha, \alpha \rangle v'''(\xi) + \alpha_1 v(\xi) v'(\xi) = \langle \alpha, \alpha \rangle^2 ((v'(\xi))^3)', \quad \text{или} \quad v'' + \frac{\alpha_1}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} v^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle (v')^3 = c.$$

Положив $v'(\xi) = w(v)$, откуда $v''(\xi) = w dw/dv$, придём к уравнению

$$w \frac{dw}{dv} - \langle \alpha, \alpha \rangle w^3 + \frac{\alpha_1}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} v^2 = c. \quad (5)$$

Замена $w = 1/y$ приводит уравнение (5) к уравнению Абеля первого рода (см. [7, гл. 1, § 4.10]). В частности, если $\alpha_1 = 0$ и $c \neq 0$, то, выполнив такую замену и проинтегрировав с учётом равенства (4) полученное уравнение, после обратной замены будем иметь неявное соотношение $\chi(1/w; \sqrt[3]{\langle \alpha, \alpha \rangle / c}) = -cv + c_1$. При $\alpha_1 = c = 0$, непосредственно решая уравнение (5) и возвращаясь к исходным переменным, получаем, что рассматриваемые решения уравнения (1) выражаются через элементарные функции и разрушаются за конечное время: $v = c_2 \pm \sqrt{c_1 - 2\langle \alpha, \alpha \rangle^{-1}(\langle \alpha, \omega \rangle + t)}$.

2. Положим $u(\omega; t) = v(\xi; t)$, где $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle$. Здесь, не нарушая общности, можем считать, что $|\alpha| = 1$. Подставив эту функцию в уравнение (1), получим после упрощений:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t} + \frac{\alpha_1}{2} v^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^3 - k(t) = 0.$$

Построим автомодельные решения этого уравнения. Пусть $v = t^a f(\theta)$, где $\theta = \xi t^b$. Вычислив нужные производные, подставим их в уравнение. Затем, заменив входящую в него переменную ξ на θt^{-b} , придём к следующему уравнению:

$$t^{a+b-1}((a+b)f' + b\theta f'') + \frac{\alpha_1}{2} t^{2a} f^2 - t^{3(a+b)} f'^3 = k(t).$$

Поделив его левую и правую части на t^{a+b-1} , видим, что в уравнении останутся только следующие зависящие от t коэффициенты: t^{-b+1} , $t^{2(a+b)+1}$, $t^{1-a-b}k(t)$. Для того чтобы они были постоянными, нужно наложить условия:

$$a - b + 1 = 0, \quad 2(a + b) + 1 = 0, \quad t^{1-a-b}k(t) = \text{const.}$$

Следовательно, $a = -3/4$, $b = 1/4$, $k(t) = ct^{-3/2}/4$. Таким образом,

$$u(\omega; t) = t^{-3/4} f(\langle \alpha, \omega \rangle t^{1/4}),$$

где функция $f(\cdot)$ – решение уравнения $\theta f''(\theta) - 2f'(\theta) - 4f'^3(\theta) + 2\alpha_1 f^2(\theta) = c$.

2. Построение решения уравнения (2). Для построения решения уравнения (2) используем методы бегущей волны, неполной бегущей волны, метод мультипликативного разделения переменных и поиск сферически-симметричных решений.

1. Пусть $u(\omega; t) = v(\xi)$, где $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle + t$. Подставив эту функцию в уравнение (2), получим

$$v'''(\xi) = \langle \alpha, \alpha \rangle ((v'(\xi))^3). \quad (6)$$

Проинтегрируем уравнение (6) почленно, взяв для удобства постоянную интегрирования в виде $\langle \alpha, \alpha \rangle c^3$, и введём переменную $w(\xi) = v'(\xi)$. В результате придём к уравнению

$$\frac{dw}{d\xi} = \langle \alpha, \alpha \rangle (w^3 + c^3). \quad (7)$$

Возможны только следующие два случая.

1.1. Пусть $c = 0$. Интегрируя уравнение (7), получаем $-w^{-2}/2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \xi - c_1/2$, откуда $w = \pm(c_1 - 2\langle \alpha, \alpha \rangle \xi)^{-1/2}$. Возвращаясь к исходной переменной, находим, что

$$v = \pm(c_1 - 2\langle \alpha, \alpha \rangle \xi)^{1/2} / \langle \alpha, \alpha \rangle + c_2.$$

1.2. Пусть $c \neq 0$. Интегрируя уравнение (7) и учитывая равенство (4), получаем неявное соотношение

$$\chi(w; c) = \langle \alpha, \alpha \rangle \xi + c_1.$$

2. Под решениями типа *неполной бегущей волны* понимаются решения вида $u(\omega; t) = v(\xi; t)$, где $\xi = \langle \alpha, \omega \rangle$. Такие решения мы уже рассматривали для уравнения (1). Как и выше, не нарушая общности, можем считать, что $|\alpha| = 1$. Подставив функцию искомого вида в уравнение (2), получим

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t \partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^3 \right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^3 + k(t).$$

Положив $w = \partial v / \partial \xi$, придём к уравнению первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w^3 + k(t). \quad (8)$$

Ограничимся рассмотрением трёх частных случаев.

2.1. Пусть $k(t) = 0$. Интегрируя уравнение (8), находим, что $w = \pm(k_1(\xi) - 2t)^{-1/2}$, откуда для $v(\cdot)$ получаем квадратуру

$$v = \int \frac{d\xi}{\sqrt{k_1(\xi) - 2t}}.$$

2.2. Пусть $k(t) = \text{const} = c^3 \neq 0$. Интегрирование уравнения (8) даёт неявную формулу

$$\chi(w; c) = t + k_1(\xi).$$

2.3. Пусть $k(\cdot)$ – пока произвольная дифференцируемая функция скалярного аргумента. Построим обобщённо-автомодельные решения уравнения (8) и найдём достаточные условия на функцию $k(\cdot)$, при которых такие решения существуют.

Пусть $w = \varphi(t)f(\theta)$, $\theta = \xi\psi(t)$. Подставив эти выражения в уравнение (8) и заменив ξ на $\theta/\psi(t)$, придём к равенству

$$\varphi'(t)f(\theta) + \varphi(t)\psi'(t)\frac{\theta}{\psi(t)}f'(\theta) = \varphi^3(t)f^3(\theta) + k(t),$$

откуда

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi^3(t)}f(\theta) + \frac{\psi'(t)}{\varphi^2(t)\psi(t)}\theta f'(\theta) = f^3(\theta) + \frac{k(t)}{\varphi^3(t)}.$$

Для того чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(\theta)$, потребуем, чтобы коэффициенты, зависящие от t , были постоянными:

$$\varphi^{-3}(t)\varphi'(t) = c_1, \quad \varphi^{-2}(t)\psi^{-1}(t)\psi'(t) = c_2, \quad \varphi^{-3}(t)k(t) = c_3. \quad (9)$$

Во-первых, пусть $c_1 \neq 0$. Из первого уравнения в (9) находим $\varphi(t) = \pm(c_4 - 2c_1 t)^{-1/2}$. Не нарушая общности, можем выбрать $c_1 = 1/2$ и знак “плюс”: это соответствующим образом масштабирует f . Тогда из второго уравнения в (9) получаем, что $\psi(t) = c_5(c_4 - t)^{-c_2}$, а из третьего следует равенство $k(t) = c_3(c_4 - t)^{-3/2}$. Уравнение для $f(\cdot)$ примет следующий вид: $f(\theta)/2 + c_2\theta f'(\theta) = f^3(\theta) + c_3$. Переобозначая c_5 через c_1 , а $2c_3$ – через c_3 , получаем, что $w = (c_4 - t)^{-1/2}f(c_1\xi(c_4 - t)^{-c_2})$, где $f(\cdot)$ – решение уравнения

$$f(\theta) + 2c_2\theta f'(\theta) = 2f^3(\theta) + c_3.$$

Во-вторых, пусть $c_1 = 0$. Из первого уравнения в (9) вытекает, что $\varphi(t) = \text{const}$. Не нарушая общности, возьмём $\varphi(t) = 1$. Тогда второе и третье уравнения дадут соответственно $\psi(t) = c_3 t^{c_2}$ и $k(t) = c_3$. Таким образом, $w = f(c_3 \xi t^{c_2})$, а $f(\cdot)$ – решение уравнения

$$c_2 \theta f'(\theta) = f^3(\theta) + c_3, \quad \text{т.е.} \quad c_2 \int \frac{df}{f^3 + c_3} = \ln |\theta| + c_4.$$

Пусть $c_3 \neq 0$ (иначе – $\psi(t) = 0$). Тогда с учётом равенства (4) получим неявную формулу

$$c_2 \chi(f; \sqrt[3]{c_3}) = \ln |\theta| + c_4.$$

3. Пусть $u(\omega; t) = f(\omega)g(t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – пока произвольные ненулевые функции соответственно от трёхмерного вектора и от скалярного аргумента. Подставив это выражение в уравнение (3), получим $\Delta f \cdot g'(t) = g^3(t) \Delta_4 f$, откуда $g^{-3}(t)g'(t)\Delta f = \Delta_4 f$. Для того чтобы получить уравнение только для $f(\omega)$, потребуем, чтобы множитель, зависящий от t , был постоянным. Не нарушая общности, считаем эту постоянную единицей: $g^{-3}(t)g'(t) = 1$, откуда $g(t) = (c - 2t)^{-1/2}$. Таким образом, $u(\omega; t) = (c - 2t)^{-1/2} f(\omega)$, где функция $f(\cdot)$ – решение уравнения $\Delta f = \Delta_4 f$. Этому уравнению удовлетворяет, например, любая линейная функция.

Важным свойством так построенных решений является то, что они разрушаются за конечное время, поскольку $\lim_{t \rightarrow c/2} u = \infty$.

4. Положим $u(\omega; t) = f(\rho; t)$, где $\rho = x^2 + y^2 + z^2$. Вычислив нужные производные, подставив их в уравнение (2) и введя переменную $g(\rho; t) = \partial f / \partial \rho$, получим

$$2\rho \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \rho} + 3 \frac{\partial g}{\partial t} = 20\rho g^3 + 24\rho^2 g^2 \frac{\partial g}{\partial \rho}.$$

Построим автомодельные решения: пусть $g = t^a h(\theta)$, где $\theta = \rho t^b$. Рассуждая так же, как при поиске автомодельных решений уравнения (1), получаем уравнение

$$2\theta((3a+1)h' + (2a+1)\theta h'') + 3(ah + (2a+1)\theta h') = 20\theta h^3 + 24\theta^2 h^2 h'. \quad (10)$$

Здесь a – числовой параметр. В частности, при $a = -1/2$ уравнение (10) можно упростить. Запишем его в следующем виде:

$$Pdh + Qdh = 0, \quad P = 40\theta h^3 + 3h, \quad Q = 48\theta^2 h^2 + 2\theta.$$

Заметим, что оно инвариантно относительно преобразования $\bar{\theta} = e^{-2\varepsilon}\theta$, $\bar{h} = e^\varepsilon h$, которому соответствует инфинитезимальный оператор $X = \xi \partial / \partial \theta + \eta \partial / \partial h$, где $\xi = -2\theta$, $\eta = h$. Тогда, как известно из [8, с. 198], это уравнение имеет интегрирующий множитель вида $\mu = (P\xi + Q\eta)^{-1}$. Здесь $\mu = (-32\theta^2 h^3 - 4\theta h)^{-1}$. Для удобства умножим его на -4 : $\mu = (8\theta^2 h^3 + \theta h)^{-1}$. Таким образом, уравнение можно записать в виде $d\Phi = 0$, где функция Φ удовлетворяет условиям $\partial \Phi / \partial \theta = P\mu$, $\partial \Phi / \partial h = Q\mu$.

Из уравнения $\partial \Phi / \partial h = Q\mu$ найдём, что $\Phi = 2 \ln h + 2 \ln(8\theta h^2 + 1) + k(\theta)$. Подставив это выражение в равенство $\partial \Phi / \partial \theta = P\mu$, определим функцию $k(\cdot)$:

$$\frac{16h^2}{8\theta h^2 + 1} + k'(\theta) = \frac{40\theta h^2 + 3}{8\theta^2 h^2 + \theta}, \quad \text{или} \quad k'(\theta) = \frac{3}{\theta},$$

откуда $k(\theta) = 3 \ln |\theta| + c$.

Значит, уравнение (10) при $a = -1/2$ имеет общее решение $\Phi = \text{const}$, которое приводится к виду $h^2(8\theta h^2 + 1)^2 \theta^3 = c/8$. Решая это кубическое относительно h^2 алгебраическое уравнение по формуле Кардано, находим, что

$$h(\theta) = \pm \sqrt{(3R(\theta) - 2)/(24\theta)},$$

где

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2}\right)^2 - \frac{1}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{81} + \frac{c}{2\theta^2}\right)^2 - \frac{1}{729}}}.$$

Заметим, что если $u = v(\omega; t)$ – решение уравнения (2), то $u = v(\omega; t) + k(t)$ – тоже его решение. Значит, “классическое” решение задачи Коши для этого уравнения может не быть единственным.

Приведённые построения показывают, что верна

Теорема 1. Уравнения (1) и (2) имеют решения, выражающиеся через элементарные функции и разрушающиеся за конечное время (т.е. существующие локально по времени, но не глобально).

3. Построение решения уравнения (3).

Теорема 2. Если $u = v(\omega; t)$ – решение уравнения (2), то $u = e^{-t}v(\omega; e^{2t}/2)$ – решение уравнения (3).

Доказательство. Уравнение (3) сводится к уравнению (2) заменой переменных. Положим сначала $u = ve^{-t}$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{1}{e^{2t}} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} = \Delta_4 v.$$

Перейдя теперь к переменной $\tau = e^{2t}/2$, получим уравнение (2) с переменной τ вместо t и функцией v вместо u .

Следовательно, если $u = v(\omega; t)$ – решение уравнения (2), то $u = e^{-t}v(\omega; e^{2t}/2)$ – решение уравнения (3). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10085мк) и частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М., 2010.
3. Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I. Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Berlin; Heidelberg, 2006.
4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Жуков А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М., 2002.
6. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный, 2010.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
8. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. М., 2012.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 06.06.2021 г.
После доработки 28.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

УДК 517.968.72

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

© 2021 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

В сепарабельном гильбертовом пространстве изучаются заданные на положительной полуоси абстрактные линейные неоднородные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с операторными коэффициентами, имеющие ядра с интегрируемыми особенностями. Рассматриваемые уравнения представляют собой операторные модели задач, возникающих в теории вязкоупругости. Приводится метод сведения начальной задачи для изучаемого уравнения к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения в расширенном функциональном пространстве. Найдены достаточные условия, которым должны удовлетворять ядра интегральных операторов интегро-дифференциального уравнения, чтобы у соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения в расширенном пространстве существовала сжимающая и экспоненциально устойчивая полугруппа. Получены оценки решений задачи Коши для линейного уравнения в расширенном пространстве. Рассматривается пример использования полученных результатов в случае дробно-экспоненциальных ядер (функции Работнова) интегральных операторов.

DOI: 10.31857/S0374064121100149

Введение. В работе рассматриваются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Эти абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, которые возникают в теории линейной вязкоупругости (см. [1, с. 130; 2, с. 54; 3, с. 477]). К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью (см. [4–6]). В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости (см. [7, с. 29]). Результаты, представленные в данной работе, являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [8–10], посвящённых спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

1. Определения. Обозначения. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный, $A^* = A \geq \kappa_0 I$ ($\kappa_0 = \text{const} > 0$), оператор, действующий в пространстве H и имеющий ограниченный обратный. Пусть B – симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H , с областью определения $\text{Dom } B$ ($\text{Dom } A \subseteq \text{Dom } B$), неотрицательный, $(Bx, x) \geq 0$ для любых $x, y \in \text{Dom } B$, и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa = \text{const} < 1$, для любого $x \in \text{Dom } A$; тождественный оператор в пространстве H обозначаем через I .

Рассмотрим в пространстве H следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (A + B)u(t) - \sum_{k=1}^N \int_0^t R_k(t-s)(a_k A + b_k B)u(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (2)$$

Предположим, что функции $R_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$R_k(t) - \text{положительные невозрастающие функции, } R_k(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad k = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Замечание 1. Из условий (3) следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_k(t) = 0$, $k = \overline{1, N}$.

Кроме того, будем предполагать, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^N \left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s) ds \right) < 1, \quad \sum_{k=1}^N \left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s) ds \right) < 1. \quad (4)$$

Пусть

$$A_0 := \left(1 - \sum_{k=1}^N \left(a_k \int_0^{+\infty} R_k(s) ds \right) \right) A + \left(1 - \sum_{k=1}^N \left(b_k \int_0^{+\infty} R_k(s) ds \right) \right) B, \quad A_k := a_k A + b_k B.$$

Из известных результатов (см. [11, с. 361]) вытекает, что операторы A_0 и A_k , $k = \overline{1, N}$, являются самосопряжёнными и положительными.

Превратим область определения $\text{Dom } A_0^\beta$ оператора A_0^β , $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β , введя на $\text{Dom } A_0^\beta$ норму, эквивалентную норме его графика.

Замечание 2. Из свойств операторов A и B следует, что операторы A_0 и A_k , $k = \overline{1, N}$, являются обратимыми. Кроме того, из неравенства Гайнца (см. [12, с. 177–178]) вытекает, что операторы $Q_k := A_k^{1/2} A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в H для всех $k = \overline{1, N}$, и что A_0^{-1} – ограниченный оператор.

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

2. Полугруппа в расширенном функциональном пространстве. Через Ω_k обозначим весовое пространство $L_{r_k}^2(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H , снабжённое нормой

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s) \|u(s)\|_H^2 ds \right)^{1/2}, \quad r_k(\tau) := 1/R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad k = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [13, с. 33]): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \partial\xi(\tau)/\partial\tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $\text{Dom } \mathbb{T}_k = \{\xi \in \Omega_k : \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [13, с. 66]).

Введём операторы $\mathbb{B}_k : H \rightarrow \Omega_k$ и $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \rightarrow H$ ($k = \overline{1, N}$), действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = R_k(\tau) Q_k v, \quad \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^\infty \xi(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, N}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

а также гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus (\oplus_{k=1}^N \Omega_k)$, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|\xi_k\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

которое будем называть *расширенным* гильбертовым пространством.

Зададим в расширенном пространстве $\mathbb{H}$ линейный оператор $\mathbb{A}$ с областью определения

$$\text{Dom } \mathbb{A} = \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \right. \\ \left. \xi_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in \text{Dom } (\mathbb{T}_k), \quad k = \overline{1, N} \right\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_N(\tau)) = \left(-A_0^{1/2} \left(\xi_0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right), A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k v + \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), \quad k = \overline{1, N} \right).$$

Введём $(2 + N)$ -компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \dots, \xi_{N0}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

В расширенном пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

$$Z(0) = z. \quad (6)$$

Определение 2. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau))$, $t \in [0, \infty)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (5), (6), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1([0, \infty))$, $\xi_k(t, \tau) \in C^1([0, \infty), H)$ при каждом $\tau \in \mathbb{R}_+$ и любом $k = \overline{1, N}$, $Z(t) \in C([0, \infty), D(\mathbb{A}))$ и вектор-функция $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (5) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (6).

Теорема 1. Оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $\text{Dom } \mathbb{A}$ является максимально диссипативным, т.е. $\text{Re } (\mathbb{A}x, x) \leq 0$ при $x \in \text{Dom } \mathbb{A}$ и оператор $\mathbb{A}$ не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

Теорема 2. Линейный оператор $\mathbb{A}$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$, при этом решение задачи (5), (6) представимо в виде $Z(t) = S(t)z$, $t \in \mathbb{R}_+$, и для любого $z \in \text{Dom } \mathbb{A}$ справедливо энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt} \|S(t)z\|_{\mathbb{H}}^2 = - \sum_{k=1}^N \left(\lim_{\tau \rightarrow 0+} r_k(\tau) \|\xi_k(t, \tau)\|_H^2 + \int_0^{+\infty} r'_k(\tau) \|\xi_k(t, \tau)\|_H^2 d\tau \right).$$

Замечание 3. Так как функции $r_k(\tau)$ являются монотонными, то, согласно теореме Лебега [14, с. 15], их производные $r'_k(\tau)$ существуют почти всюду при $\tau \in [0, \infty)$.

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в работе [15].

3. Экспоненциальная устойчивость. Предположим, что ядра $R_k(\tau)$, $k = \overline{1, N}$, интегральных операторов удовлетворяют следующим условиям:

$$R'_k(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leq 0 \quad (7)$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ при некотором $\gamma > 0$. Условие (7) хорошо известно в литературе (см., например, монографию [3, с. 481], а также цитированную в ней литературу). Положим

$$M_k(t) = \int_t^{+\infty} R_k(s) ds = \int_0^{+\infty} R_k(t+s) ds, \quad k = \overline{1, N}.$$

Приведём результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t)$, $t \geq 0$.

Теорема 3. Пусть $S(t)z$ – решение задачи (5), (6) при $t \in \mathbb{R}_+$ и пусть функции $R_k(\tau)$ ($k = \overline{1, N}$) удовлетворяют условиям (3), (4) и условию (7) для некоторого $\gamma > 0$ и любого $\tau \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $z \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leq \sqrt{3}\|z\|_{\mathbb{H}}e^{-\omega t}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \omega &= \max_{\beta > 0} \omega_\beta, \quad \omega_\beta = \frac{1}{6} \min \left\{ \frac{\gamma}{\gamma_1(\beta)}, \frac{1}{\gamma_2(\beta)} \right\}, \\ \gamma_1(\beta) &:= \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \frac{3}{2} \frac{M_k(0)}{M(\beta)} \left[\frac{1}{M_k(\beta)} \left(6\|Q_k^{-1}\|^2 + \frac{1}{\lambda_k \beta^2} \right) + N \left(\|Q_k^{-1}\|^2 + \left(1 + \frac{2}{3} M(\beta) \right) \|Q_k\|^2 \right) \right] + \frac{1}{2} \right\}, \\ \gamma_2(\beta) &:= \frac{3}{M(\beta)} \max \left\{ 1, N \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \frac{M_k(0)}{\lambda_k} \right\} \right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}, \\ \lambda_m &= \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \text{Dom } A_m}} (A_m x, x), \quad m = \overline{0, N}, \quad M_k(\beta) := \int_{\beta}^{+\infty} R_k(s) ds, \quad k = \overline{1, N}, \quad M(\beta) := \sum_{k=1}^N M_k(\beta). \end{aligned}$$

4. Корректная разрешимость. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

$$Z(0) = z. \quad (9)$$

Относительно неоднородности $F(t)$ и начального вектора z будем предполагать, что они имеют вид $F(t) = (f_1(t), \underbrace{0, \dots, 0}_{N+1})$, где $f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^N M_k(t) A_k \varphi_0$, и $z = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, \underbrace{0, \dots, 0}_N)$

(свойства вектор-функции $f(t)$ и векторов φ_0 , φ_1 указаны в формулировке теоремы 4).

На основании теоремы 6.5 из монографии [12, с. 166] получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть функции $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $k = \overline{1, N}$, удовлетворяют условиям (3), (4), (7) и выполнено одно из следующих двух условий:

1) вектор-функция $A_0^{1/2} f(t)$ принадлежит пространству $C([0, +\infty), H)$, функция $M_k(t)$ – пространству $C([0, +\infty))$, $k = \overline{1, N}$, а векторы φ_0 и φ_1 – пространствам $H_{3/2}$ и $H_{1/2}$ соответственно;

2) вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $C^1([0, +\infty), H)$, функция $M_k(t)$ – пространству $C^1([0, +\infty))$, $k = \overline{0, N}$, а векторы φ_0 и φ_1 – пространствам H_1 и $H_{1/2}$ соответственно.

Тогда задача (8), (9) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_N(t, \tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, а $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), и справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq d \left[(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2} \varphi_0\|_H^2) e^{-2\omega t} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left\| f(s) - \sum_{k=1}^N \left(\left(\int_s^{+\infty} R_k(p) dp \right) ds \right) A_k \varphi_0 \right\|_H ds \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции F , векторов φ_0 , φ_1 и постоянной ω , определённой в формулировке теоремы 3.

5. Пример. Рассмотрим ядра интегральных операторов следующего вида:

$$R_k(t) =: \mathfrak{A}_{\alpha-1}(-\beta_k, t) := t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_k)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad k = \overline{1, N},$$

– функции Работнова (см. [7, с. 29]), где $0 < \alpha < 1$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, N}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Отметим, что условия (4) примут соответственно вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

При этом оценка (10) переходит в оценку

$$E(t) := \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2) \leq \frac{1}{2} \|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq d \left[(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2} \varphi_0\|_H^2) e^{-2\omega t} + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left\| f(s) - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{k=1}^N \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-s\tau} d\tau}{\tau(\tau^\alpha + 2\beta_k \cos(\pi\alpha) + \beta_k^2 \tau^{-\alpha})} \right) A_k \varphi_0 \right\|_H ds \right)^2 \right].$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 (теорема 3) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (теорема 4) (проект № 20-01-00288 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M. Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. Gurtin M.E., Pipkin A.C. General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. Eremenko A., Ivanov S. Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
6. Лыков А.В. Проблема тепло- и массообмена. Минск, 1976.
7. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.
8. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
9. Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 574–587.
10. Vlasov V.V., Rautian N.A. A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics // J. of Math. Sci. (N.Y.). 2020. V. 244. № 2. P. 170–182.
11. Като Т. Теорема возмущений линейных операторов. М., 1972.
12. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
13. Engel K.J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
14. Русс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
15. Раутиан Н.А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 14.06.2021 г.
После доработки 14.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

УДК 517.983.35

ОБ ОДНОМ ОБРАТИМОМ РАСШИРЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОЛУОСИ

© 2021 г. Л. К. Кусаинова, Я. Т. Султанаев, А. С. Касым

Рассматривается дифференциальный оператор, порождаемый в классе финитных функций на положительной полуоси несамосопряжённым дифференциальным выражением $-a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f$ с коэффициентами, локально интегрируемыми по Лебегу. Не исключаются случаи, когда $a_j(x)$ ($j = 0, 1$) являются знакопеременными или могут иметь бесконечные пределы при $x \rightarrow \infty$ (с любым знаком). Даны описания внутренних связей между коэффициентами a_j ($j = 0, 1, 2$), при которых рассматриваемый оператор допускает замкнутое обратимое расширение в пространстве $L_2(0, \infty)$.

DOI: 10.31857/S0374064121100150

В работе рассматривается несамосопряжённый оператор

$$L_0 f \equiv -a_2(x)f'' + a_1(x)f' + a_0(x)f, \quad (1)$$

заданный на классе $C_0^\infty(I)$ бесконечно дифференцируемых и финитных функций f , определённых на полуоси $I = (0, \infty)$. Будем предполагать, что коэффициенты a_j ($j = 1, 2$) принадлежат классу $L_{2,\text{loc}}(I)$, а коэффициент a_0 – классу $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ (здесь и ниже $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$), кроме того, считаем, что коэффициент a_2 положителен на I и что $a_2^{-1} = 1/a_2 \in L_2(I)$, а коэффициенты a_j ($j = 0, 1$) невырождены на ∞ , т.е. $|a_{j,(t)}| > 0$ для любого $t > 0$, где $a_{j,(t)} = \{x \geq t : a_j(x) \neq 0\}$. Выше и в дальнейшем через $|G|$ для измеримого множества $G \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ обозначается его мера Лебега, а через $L_p(G)$ и $L_{p,\text{loc}}(G)$ – соответственно пространство Лебега функций $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|g\|_{L_p(G)} = \|g; L_p(G)\| = \left(\int_G |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

и пространство всех функций g , принадлежащих для любого $[a, b] \subset G$ классу $L_p([a, b])$.

Известно, что к исследованию сингулярных дифференциальных операторов, порождаемых несамосопряжёнными дифференциальными выражениями, не существует общих подходов. В данной работе коэффициенты не являются гладкими, $a_j(\cdot)$ при $j = 0, 1$ могут менять знак в любой окрестности $+\infty$, в частности, не исключается случай, когда $\lim_{x \rightarrow \infty} a_0(x) = -\infty$.

В ней решается одна из основных задач теории операторов – задача о существовании замкнутого обратимого расширения минимального оператора L_0 . Для решения этой задачи применяется метод локальных оценок на “характеристических” промежутках. Для этого строится односторонняя двухвесовая модификация “бегущих средних” Отелбаева (см. [1]). В работе выявлены внутренние связи между коэффициентами a_j ($j = 0, 1, 2$), при которых минимальный оператор L_0 допускает существование обратимого расширения. Исследование публикаций показало, что поставленная задача при принятых в работе условиях на переменные коэффициенты решалась впервые.

Перейдём к построению характеристического размера. Обозначим через $L_{\text{loc}}^+(I)$ класс невырожденных локально суммируемых в I функций $f \geq 0$ (весовых функций). Пусть $x \geq 0$, $h > 0$, $\Delta = [x, x+h]$, $\mathfrak{R}_{x,h}$ – совокупность всех аффинных функций $R(t) = c_0 + c_1 t$ ($c_0, c_1 \in \mathbb{R}$), для которых $\|R; L_2(\Delta)\| = 1$. Далее, пусть $v \in L_{\text{loc}}^+(I)$, $\rho(\cdot) > 0$ в I и $\rho^{-1} = 1/\rho \in L_1(I)$.

Положим

$$S^\#(x, h; v) = \inf_{R \in \mathfrak{R}_{x,h}} \|vR^2; L_1(\Delta)\|,$$

$$M^\#(x, h; \rho, v) = (h^3 \|\rho^{-1}; L_1(\Delta)\| S^\#(x, h; v))^{1/2}.$$

Заметим, что $R(t) \equiv h^{-1/2} \in \mathfrak{R}_{x,h}$. Поэтому $S^\#(x, h; v) \leq h^{-1} \|v; L_1(\Delta)\|$.

Произвольную функцию $h(x) > 0$, $x \geq 0$, будем называть *функцией длины* (ф.д.) в $\mathbb{R}^+$. Скажем, что пара (ρ, v) удовлетворяет *условию* $(\Pi^\#)$ *относительно* ф.д. $h(\cdot)$, если

$$M^\#(x, h(x); \rho, v) \geq 1 \quad \text{для любого } x \geq 0.$$

Запись: $(\rho, v) \in \Pi^\#$ относительно ф.д. $h(\cdot)$. Для заданной ф.д. $h(\cdot)$ примем обозначение $\Delta(x) = [x, x + h(x)]$ и будем называть такой отрезок *характеристическим*.

Будем говорить, что вес $v \in L_{\text{loc}}^+(\mathbb{R}^+)$ удовлетворяет *условию регулярности* $(\mathfrak{R})$ *относительно* ф.д. $h(\cdot)$, если существует такое $\eta \in (0, 1)$, что

$$\eta h(x)^{-1} \|v; L_1(\Delta)\| \leq S^\#(x, h(x); v). \quad (2)$$

Запись: $v \in (\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$.

На промежутках $\Delta \subset \mathbb{R}^+$ положим

$$\|f; W_p^l(\Delta; \rho, v)\| = \|\rho^{1/p} f^{(l)}; L_p(\Delta)\| + \|v^{1/p} f; L_p(\Delta)\| \quad (l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p < \infty).$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_p^l(\rho, v)$ пополнение класса $C_0^\infty(I)$ по норме $\|f; W_p^l(I; \rho, v)\|$. Далее для $w \in L_{\text{loc}}^+(I)$ и $r = 0, 1$ обозначим

$$K_r(x, h; \rho, w) = h^{1-r} (\|\rho^{-1}; L_1(\Delta)\| \|w; L_1(\Delta)\|)^{1/2}.$$

Лемма 1. Пусть $(\rho, v) \in \Pi^\#$ и $v \in (\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$. Существует такая постоянная $c = c(r) > 0$, что для всех $f \in W_2^2(\Delta(x); \rho, v)$ справедливо неравенство

$$\|w^{1/2} f^{(r)}; L_2(\Delta(x))\| \leq c K_r(x, h(x); \rho, w) \|f; W_2^2(\Delta(x); \rho, v)\|. \quad (3)$$

Неравенство (3) представляет собой простое следствие из основного неравенства на характеристических отрезках $\Delta(x)$:

$$c(\eta) h(x)^{-3/2} \|f; L_2(\Delta(x))\| \leq \int_{\Delta(x)} |f''| dt + \left[\int_{\Delta(x)} \rho^{-1} dt + \int_{\Delta(x)} |f|^2 v(t) dt \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где $c(\eta) = \sqrt{\eta}/2(1 + \sqrt{\eta})$. Неравенство (4) несложно вывести из доказательств основных неравенств для “односторонней бегущей средней” [1] и “двухвесовой бегущей средней” [2, § 1.6; 3].

Пример 1. Функция $v(x) = (1+x)^{2m}$ ($m \in \mathbb{N}$) удовлетворяет условию $(\mathfrak{R})$ относительно произвольной функции длины $h(\cdot)$ в $\mathbb{R}^+$.

Пример 2. Если функция v удовлетворяет условию (2) и $|v(t)| > 0$ для всех $t > 0$, то функция

$$h^\#(x) = h^\#(x; \rho, v) = \sup\{h > 0 : M^\#(x, h; \rho, v) \leq 1\}$$

конечна и положительна в $\mathbb{R}^+$. При этом пара $(\rho, v) \in \Pi^\#$ относительно ф.д. $h^\#(\cdot)$, а именно справедливо

Утверждение 1. Пусть $h^\# = h^\#(x; \rho, v)$. Тогда $M^\#(x, h^\#; \rho, v) = 1$.

Лемма 2. Пусть $(a_2^2, a_0^2) \in \Pi^\#$ и $a_0^2 \in (\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$, $W = \overset{\circ}{W}_2^2(a_2^2, a_0^2)$ и

$$K(a_2, a_0) = \sup_{x \geq 0} \max_{r=0,1} \{h(x)^{-r+3/2} \|a_2^{-1}; L_2(\Delta(x))\|\} < \infty, \quad (5)$$

$$N(a_2, a_1) = \sup_{x \geq 0} \|a_1; L_2(\Delta(x))\| \|a_2^{-1}; L_2(\Delta(x))\| < \infty. \quad (6)$$

Тогда для каждой фундаментальной по норме $\|\cdot\|_W = \|\cdot; \overset{\circ}{W}_2^2(a_2^2, a_0^2)\|$ последовательности $\{f_k\} \subset C_0^\infty(I)$ справедливы следующие утверждения:

а) последовательность имеет в $L_2(I)$ предел $f = \|\cdot\|_{L_2(I)}\text{-}\lim f_k$, при этом функция f имеет непрерывную в I производную $f' = \|\cdot\|_{L_2(I)}\text{-}\lim f'_k$ и п.в. конечную в I производную $f''(x) = \|\cdot\|_{L_1(I)}\text{-}\lim f''_k$; кроме того, $a_r f^{(r)} = \|\cdot\|_{L_2(I)}\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} a_r f_k^{(r)}$, $r = 0, 1, 2$;

б) для предельной функции f выполняется оценка

$$\|f; L_2(I)\| \leq cK(a_2, a_0)\|f\|_W.$$

Доказательство утверждения а) леммы 2 опирается на оценки леммы 1. При этом используются свойства пределов $\lim f_k^{(r)}$ ($r = 0, 1, 2$) в $L_{p,\text{loc}}(I)$ ($1 \leq p < \infty$). Для доказательства утверждения б) леммы 1 возьмём представление

$$\|f; L_2(I)\|^2 = \sum_{j \geq 1} \|f; L_2(\Delta_j)\|^2,$$

в котором $\Delta_j = [x_j, x_{j+1})$, $x_{j+1} = x_j + h(x_j)$, $x_1 = 0$. Затем к каждому слагаемому $\|f; L_2(\Delta_j)\|^2$ применим оценку (3) при $r = 0$ и $w \equiv 1$.

Теорема 1. Пусть $(a_2^2, a_0^2) \in \Pi^\#$ и $a_0^2 \in (\mathfrak{R})$ относительно ф.д. $h(\cdot)$. Пусть, кроме того, выполнены условия (5) и (6). Тогда оператор L_0 допускает замкнутое расширение

$$L : L_2(I) \rightarrow L_2(I), \quad D(L) \subset W. \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1 следует из леммы 2, в силу которой $D(L) \subset W$ и имеет место импликация

$$\{f_k\} \subset C_0^\infty(I), \quad \|f_k\|_W \rightarrow 0, \quad \|L_0 f_k - z; L_2(I)\| \rightarrow 0 \Rightarrow z = 0.$$

Теорема 2. Пусть a_i ($i = 0, 2$) удовлетворяют условиям теоремы 1. Если к тому же

$$A(a_0, a_1, a_2) = \sup_{x \geq 0} \left(x \int_x^\infty w_-(t) dt \right)^{1/2} < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (8)$$

где $w_-(x) = \max\{0, -(2a_0(x)a_2(x) - a_1^2(x))/a_2^2(x)\}$, то оператор L в (7) обратим.

Доказательство. Допустим, что найдётся такая функция $f = \|\cdot\|_W\text{-}\lim f_k \neq 0$ ($f_k \in C_0^\infty(I)$) из области определения $D(L)$ оператора L , для которой

$$Lf = 0. \quad (9)$$

Справедливо неравенство $\|f'\|_{L_2(I)} = \lim \|f'_k\|_{L_2(I)} > \delta > 0$, иначе в силу непрерывности функции f' имели бы $f'(x) \equiv 0$ в I , а значит, $f(x) \equiv c > 0$ в I и $\|f\|_{L_2(I)} = \infty$. Пусть

$$\|f'_k\|_{L_2(I)} > 2^{-1}\delta \quad (k \geq N_\delta). \quad (10)$$

Равенство (9) равносильно равенству $\tilde{L}f = 0$ для оператора

$$\tilde{L}f \equiv -f'' + b_1(x)f' + b_0(x)f, \quad b_r = a_r a_2^{-1} \quad (r = 0, 1).$$

Поэтому

$$-(f'', f_k) + \sum_{r=0,1} (b_r f^{(r)}, f_k) = (\tilde{L}f, f_k) = 0, \quad (11)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(I)$. Последовательно применяя оценки леммы 1 на каждом характеристическом отрезке Δ_j при $\rho = a_2^2$, $v = a_0^2$, получаем

$$|(f'', f_k) - (f_k'', f_k)| \leq c_1(\eta)C(K(a_2, a_0))^2 \|a_2 f'' - a_2 f_k''; L_2(I)\| (\rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty),$$

где $C = \sup_{k \geq 0} \|f_k\|_W < \infty$. Далее,

$$(b_r f^{(r)}, f_k) = (a_r f^{(r)}, a_2^{-1} f_k), \quad k \geq 1.$$

Пусть $w(x) = 2b_0(x) - b_1^2(x)$, $w_+(x) = \max\{0, w(x)\}$, $w_-(x) = \max\{0, -w(x)\}$. Применяя оценку (10), показываем, что для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_k = (\tilde{L}f_k, f_k) &\geq 2^{-1} \|f_k'; L_2(I)\|^2 + 2^{-1} (\|w_+^{1/2} f_k; L_2(I)\|^2 - \|w_-^{1/2} f_k; L_2(I)\|^2) \geq \\ &\geq 2^{-1} (\|f_k'; L_2(I)\|^2 - \|w_-^{1/2} f_k; L_2(I)\|^2) \geq \frac{\delta}{8}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для вывода последнего неравенства в (12) мы использовали оценку

$$\|w_-^{1/2} f_k; L_2(I)\| \leq 2A(a_0, a_1, a_2) \|f_k'; L_2(I)\|$$

(см. [4, § 1.3]). Далее равенство (11) запишем как $0 = \lambda_k + \mu_k$. Так как $\mu_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то в силу (12) при достаточно больших k имеем $0 = \lambda_k + \mu_k \geq \lambda_k - |\mu_k| \geq \delta/16$. Следовательно, допущение (9) при $f \neq 0$ места не имеет. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и

$$A = \sup_{x \geq 0} x \int_x^\infty (2(1+t)^m a_2^{-1}(t) - a_2^{-2}(t)) dt \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда оператор

$$L_0 y \equiv -a_2(x)y'' + y' - (1+x)^m y$$

имеет инъективное замкнутое расширение

$$L : L_2(I) \rightarrow L_2(I), \quad D(L) \subset \overset{\circ}{W}_2^2(I; a_2, (1+x)^{2m}).$$

В силу утверждения 1 пара (a_2^2, a_0^2) , $a_0(t) = -(1+t)^m$, удовлетворяет условиям теоремы 1 относительно ф.д. $h(x) = h^\#(x; a_2^2, a_0^2)$. Обратимся к условиям (5), (6) теоремы 1, где

$$K(a_2, a_0) = \sup_{x \geq 0} \{\max_{r=0,1} K_r(x, h(x); a_2^2)\},$$

$$[K_0(x, h(x); a_2^2)]^2 = h(x)^3 \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt = \frac{1}{S^\#(x, h(x); a_0^2)} \leq \frac{1}{\eta},$$

$$[K_1(x, h(x); a_2^2)]^2 = h(x) \int_x^{x+h(x)} a_2^{-2} dt \leq \min\{\|a_2^{-1}; L_2(I)\|^2, \eta^{-1}\} \leq \eta^{-1} + \|a_2^{-1}; L_2(I)\|^2,$$

$$N(a_2, a_1) = \sup_{x \geq 0} K_1(x; h(x), a_2^2) \leq (\eta^{-1} + \|a_2^{-1}; L_2(I)\|^2)^{1/2}.$$

Осталось заметить, что $w_-(x) = 2(1+x)^m a_0^{-1}(x) + a_2^{-2}(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP08856104 – Л.К. Кусаинова, Я.Т. Султанаев, А.С. Касым) и финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 (Я.Т. Султанаев).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Отелбаев М.О., Кусаинова Л.К., Булабаев А.* Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов // Збірник праць Інституту математики НАН України. 2009. Т. 6. № 1. С. 165–190.
2. *Кусаинова Л.К.* Теоремы вложения и интерполяция весовых пространств Соболева: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Караганда, 1998.
3. *Кусаинова Л.К., Султанаев Я.Т., Мурат Г.К.* Аппроксимативные оценки для одного дифференциального оператора в весовом гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1644–1651.
4. *Мазья В.Г.* Пространства Л.С. Соболева. Л., 1985.

Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
После доработки 13.05.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ
ОСОБОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ

© 2021 г. А. А. Полосин

Проведена регуляризация одного вырождающегося особого интегрального оператора с переменными коэффициентами.

DOI: 10.31857/S0374064121100162

Рассмотрим уравнение

$$xf(x) - \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t+x} = g(x), \quad 0 < x < +\infty. \quad (1)$$

Это вырождающееся сингулярное (особое) интегральное уравнение с переменными коэффициентами. Сингулярные интегральные уравнения играют важную роль в различных областях математики, им посвящена обширная литература (см., например, [1–6]). Уравнение (1) связано, в частности, с так называемым уравнением “плавного перехода” [3].

В дальнейшем считаем, что $0 < x < +\infty$. Будем предполагать, что функция $g(x)$ принадлежит классу $C^2[0, +\infty)$ и такова, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t) dt}{t+1}$$

существует.

Решение уравнения (1) будем искать в классе непрерывных при $0 < x < +\infty$ функций, возможно, имеющих особенность интегрируемого порядка в нуле, для которых существует интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Определим классический сингулярный интегральный оператор

$$(Sf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t-x}$$

и особый оператор

$$(Tf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) dt}{t+x}.$$

Несложно убедиться в том, что в рассматриваемом классе функций справедливо тождество

$$T^2 f = (S^2 - I)f,$$

где I – тождественный оператор.

Применяя оператор T к обеим частям уравнения (1), приходим к уравнению

$$(x^2 - 1 + S^2)f(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) dt + (xI - T)g(x). \quad (2)$$

Обозначим

$$b(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1, \\ i/\sqrt{x^2-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $b(x)$ допускает аналитическое продолжение с вещественной оси в верхнюю полуплоскость.

Запишем уравнение (2) в виде

$$(I - b^2(x)S^2)f(x) = -b^2(x) \left(\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) dt + (xI - T)g(x) \right).$$

Факторизуем оператор, стоящий в левой части этого равенства, т.е. представим его главную часть в виде произведения сингулярных операторов, допускающих обращение в явном виде:

$$I - b^2S^2 = (I + bS)(I - bS) + b[S, b]S,$$

где $[S, b] \equiv Sb - bS$, $b[S, b]S$ – регулярный оператор.

Обозначив

$$(I - bS)f = v, \quad (3)$$

$$w(x) = (b[S, b]Sf)(x) - b^2(x) \left(\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) dt + (xI - T)g(x) \right),$$

представим уравнение (2) в виде

$$(I + bS)v = w. \quad (4)$$

Таким образом, регуляризация уравнения (2) сведена к последовательному решению уравнений (4) и (3). Это сингулярные интегральные уравнения с вырождением на конце.

Решим уравнение (4) стандартным методом сведения к задаче сопряжения аналитических функций [2, с. 97]. Пусть

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t - z},$$

тогда уравнение (4) сводится к задаче сопряжения

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + 2w(x)/(1 + b(x)),$$

где

$$D(x) = \frac{1 - b(x)}{1 + b(x)} = \begin{cases} -x^2/(1 + \sqrt{1-x^2})^2, & 0 < x < 1, \\ x^2/(i + \sqrt{x^2-1})^2, & x > 1. \end{cases}$$

Определим каноническую функцию $X(z)$ условиями $X^+(x) = D(x)X^-(x)$, $X(\infty) = 1$. Заметим, что $X(z) = \sqrt{1-1/z}X_0(z)$, где

$$X_0(z) = \exp \left(\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{t}{\sqrt{1-t^2}+1} \frac{dt}{t-z} + \frac{1}{\pi i} \int_1^{+\infty} \ln \frac{t}{\sqrt{t^2-1}+i} \frac{dt}{t-z} \right),$$

и

$$\begin{aligned}
X^+(x) &= \sqrt{x} X_0(x) \cdot \begin{cases} i\sqrt{1-x}/(\sqrt{1-x^2}+1), & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x-1}/(\sqrt{x^2-1}+i), & x > 1, \end{cases} \\
X^-(x) &= \frac{X_0(x)}{x^{3/2}} \cdot \begin{cases} -i\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x^2}+1), & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x-1}(\sqrt{x^2-1}+i), & x > 1, \end{cases} \\
X(-x) &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} X_0(-x).
\end{aligned}$$

Решая задачу сопряжения, получаем

$$v(x) = \frac{1}{1-b^2(x)} \left(w(x) - \frac{b(x)}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1+b(t)}{1+b(t)} \frac{X^+(x)}{X^+(t)} \frac{w(t)}{t-x} dt \right). \quad (5)$$

Отметим некоторые свойства канонической функции.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(t)/X^+(t)}{1+b(t)} \frac{dt}{t-x} = \frac{1/X^+(x)}{1+b(x)} - 1.$$

Доказательство проводится прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(t)/X^+(t)}{1+b(t)} \frac{dt}{t-x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{X^+(t)} - 1 \right) - \left(\frac{1}{X^-(t)} - 1 \right) \right) \frac{dt}{t-x} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X^+(x)} + \frac{1}{X^-(x)} - 2 \right) = \frac{1/X^+(x)}{1+b(x)} - 1.
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1/X^+(s)}{1+b(s)} \left(\frac{1}{s-t} - \frac{1}{s-x} \right) ds = \\
&= \frac{1}{b(t)} \left(\frac{1/X^+(t)}{1+b(t)} - 1 \right) - \frac{1}{b(x)} \left(\frac{1/X^+(x)}{1+b(x)} - 1 \right) + R(t) - R(x), \quad x, t > 0,
\end{aligned}$$

в котором

$$r(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ i(1/X^-(x) - 1)\sqrt{x^2-1}, & x > 1, \\ -i(1/X(x) - 1)\sqrt{x^2-1}, & x < -1, \end{cases} \quad R(x) = r(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{|s|>1} \frac{r(s) ds}{s-x}.$$

Заметим, что функция $R(t)$ аналитична в окрестности нуля. В дальнейшем такие функции будем называть *регулярными*.

Вычисляя интегралы, содержащие каноническую функцию, как в леммах 1 и 2, преобразуем правую часть соотношения (5). В результате получим

$$v(x) = \frac{b(x)X^+(x)}{1-b(x)} \tilde{v}(x),$$

здесь

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x) = & g(x)R_1(x) - \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1-b(t)}{tX^+(t)} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(t)}{X(-t)} \frac{g(t)}{t+x} dt - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{R_2(x)-R_3(t)}{t+x} g(t) dt + \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} R_4(x,t) f(t) dt,\end{aligned}$$

где R_k , $k = \overline{1,4}$, – регулярные функции.

Найденное решение имеет особенность порядка выше единицы в нуле. Для устранения этой особенности потребуем соблюдения дополнительного условия (условия ортогональности):

$$\tilde{v}(0) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что $\tilde{v}(x) - \tilde{v}(0) = O(x)$ при $x \rightarrow +0$ в силу равенства

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(t)}{X(-t)} \frac{g(t)}{t+x} dt = \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(t)}{X(-t)} \frac{g(t)-g(0)}{t+x} dt + g(0) \frac{b(-x)}{X^-(x)} - \frac{g(0)}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(-t)}{X^-(t)} \frac{dt}{t-x}.$$

Перейдём к построению решения уравнения (3) с учётом условия (6).

Стандартный способ решения оказывается неприменим, поскольку получающаяся подынтегральная функция имеет особенность слишком высокого порядка в нуле. По этой причине сначала проведём некоторые преобразования.

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$f(x) = \frac{v(x)}{2} + \frac{b(x)/X^+(x)}{1+b(x)} \left(\frac{([S, b]Sf)(0)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} X(-t) \frac{g(t)}{t+x} dt \right) + f_1(x).$$

Тогда в силу (4) и свойств канонической функции функция $f_1(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$f_1(x) - \frac{b(x)}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f_1(t)}{t-x} dt = v_1(x), \quad (7)$$

где

$$v_1(x) = b(x) \left(\frac{([S, b]Sf)(x) - ([S, b]Sf)(0)}{2} + \frac{1-b(x)}{2\pi i} \int_0^{+\infty} f(t) dt - \frac{xb(x)}{2} g(x) + \frac{b(x)-1}{2} Tg(x) \right).$$

Решение уравнения (7) уже может быть построено стандартным образом:

$$f_1(x) = \frac{v_1(x)}{1-b^2(x)} + \frac{b(x)}{1+b(x)} \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{X^+(t)}{X^+(x)} \frac{1}{1-b(t)} \frac{v_1(t)}{t-x} dt. \quad (8)$$

Так же, как и в случае уравнения (4), преобразуем правую часть соотношения (8), основываясь на свойствах канонической функции, аналогичных указанным в леммах 1 и 2:

$$f_1(x) = \frac{b(x)/X^+(x)}{1+b(x)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} R_5(x,t) f(t) dt - \frac{b(x)g(x)}{X^+(x)} R_6(x) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{b(x)}{1+b(x)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{X^+(t)}{X^+(x)} \frac{tb^2(t)}{1-b(t)} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} dt - \frac{b(x)}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1-b(t)}{1+b(x)} \frac{X(-t)}{X^+(x)} \frac{g(t)dt}{t+x} + \\
& + \frac{b(x)/X^+(x)}{1+b(x)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} R_7(x,t)g(t) dt,
\end{aligned}$$

где R_k , $k = \overline{5,7}$, – регулярные функции.

Таким образом, уравнение (2) сведено к регулярному уравнению.

Автор благодарит академика Е.И. Моисеева за интерес к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-51-18006 Болг-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
3. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
4. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
5. *Солдатов А.П.* Об индексе операторов с концевым символом // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63. № 4. С. 171–206.
6. *Полосин А.А.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1213–1220.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 16.06.2021 г.
После доработки 16.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.