

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Номер 4, 2022

---

---

## ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и  $l_1$ -ограничениями

*Д. Н. Ибрагимов, А. В. Осокин, А. Н. Сиротин, К. И. Сыпало*

3

---

## УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Управление амплитудой колебаний механических систем

*Ю. Ф. Голубев*

22

---

## УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Байесовское распознавание состояния информационно-измерительной системы движущегося объекта: исследование алгоритма коррекции веса априорной информации

*О. В. Ермолин, С. М. Мужичек, В. И. Павлов, Г. Г. Себряков,  
А. А. Скрынников, С. В. Толстых*

31

---

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной

*А. С. Бортаковский*

38

---

## УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пространственно-временное управление системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств

*Ю. Э. Пleshивцева, Э. Я. Рапопорт*

49

---

## ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Минимизация бинарных диаграмм решений систем не полностью определенных булевых функций с использованием алгебраических разложений кофакторов

*П. Н. Бибило*

66

---

## РОБОТОТЕХНИКА

Предотвращение колебаний сферического робота в продольном движении

*В. М. Буданов, Ю. Д. Селюцкий, А. М. Формальский*

95

---

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Численное исследование системы обслуживания-запасания с двумя источниками поставок и разрушающими заявками

*А. З. Меликов, Р. Р. Мирзоев, С. С. Наур*

109

---

## ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Применение нейронных сетей в исследованиях на полиграфе

*Л. А. Дерезягин, В. В. Макаров, А. Ю. Молчанов, В. И. Цурков, А. Н. Яковлев*

128

Исследование и применение архитектур глубоких нейронных сетей  
для классификации на многомерных временных рядах

*А. С. Есенков, Е. М. Захарова, М. Д. Ковалева, Д. Е. Константинов,  
И. С. Макаров, Е. А. Панковец*

133

---

## **СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

Исследование алгоритмов определения углового движения наноспутника  
на лабораторном стенде

*А. А. Болотских, Р. Н. Жарких, Д. С. Иванов, С. В. Лебедев, С. С. Ткачев*

143

Метод формирования треугольной вращающейся тросовой группировки  
космических аппаратов с использованием электромагнитных сил

*Ю. М. Заболотнов, А. А. Назарова*

160

---

---

---

---

**ТЕОРИЯ СИСТЕМ  
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

---

---

УДК 62-40

**О СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ  
ДЛЯ КЛАССА НЕУСТОЙЧИВЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И  $l_1$ -ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

© 2022 г. Д. Н. Ибрагимов<sup>а,\*</sup>, А. В. Осокин<sup>а</sup>, А. Н. Сиротин<sup>а,\*\*</sup>, К. И. Сыпало<sup>а</sup>

<sup>а</sup> МАИ (национальный исследовательский ун-т), ФГУП ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия

\*e-mail: rikk.dan@gmail.com

\*\*e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.02.2022 г.

После доработки 03.03.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Обсуждаются вопросы построения множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарным ограничением на скалярное управление в смысле  $l_1$ -нормы. Для классов не полностью управляемых и не полностью достижимых линейных систем предельные множества управляемости и достижимости соответственно построены явным образом. Приведены примеры.

DOI: 10.31857/S0002338822040102

**Введение.** При решении задач управления динамическими системами нередко приходится учитывать различные ограничения, связанные с техническими аспектами изучаемой системы. Такого рода ограничения приводят к тому, что система из заданного начального состояния может быть переведена в ограниченное множество терминальных состояний даже при бесконечном временном горизонте. Данный факт делает актуальным исследование не только вопросов достижимости и управляемости различных динамических систем, но и разработку методов построения и оценивания предельных множеств достижимости и управляемости для произвольной системы управления. Кроме того, множества управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления [1, 2] для систем с дискретным временем.

В случае линейных систем с дискретным временем и скалярным управлением, не ограниченным в смысле  $l_p$ -нормы, известно, что множества достижимости и управляемости за конечное число шагов представляют собой выпуклые многогранники [1]. Однако данное свойство при переходе к бесконечному времени может не сохраняться. Более того, в [3–5] продемонстрировано, что в общем случае предельное множество управляемости и достижимости представляет собой цилиндрическое множество с выпуклым сечением. Принципиальная управляемость и достижимость такой линейной системы управления определяется структурой ее матрицы, а именно расположением ее собственных значений относительно круга единичного радиуса с центром в нуле на комплексной плоскости.

Тем не менее данные результаты относятся к линейным системам без суммарного ограничения на последовательность управляющих воздействий [1, 3, 4]. С другой стороны, зачастую ограничения на функцию управления являются гладкими [2, 6, 7], что связано с необходимыми условиями применимости классических оптимизационных методов [8, 9], хотя с точки зрения технической реализации рассматриваемой математической модели более корректно было бы использовать линейные или кусочно-линейные ограничения. Например, при описании задачи коррекции орбиты спутника [10, 11] следует учитывать два типа ограничений на управление: ограничение на силу каждого корректирующего импульса, обусловленное мощностью двигателя, и ограничение, связанное с количеством топлива. Последнее в математической модели движения спутника может быть представлено в виде ограничения на сумму модулей всех управляющих воздействий.

В статье изучаются вопросы построения предельных множеств достижимости и управляемости систем с интегральным ограничением на управление в смысле  $l_1$ -нормы. Принципиальной особенностью данной работы является то, что данные множества удается построить явным образом. В разд. 2 в виде леммы сформулированы основные свойства множеств достижимости линейных систем с дискретным временем и скалярным ограниченным управлением, в частности доказано, что каждое такое множество представляет собой выпуклый и симметричный относительно начала координат многогранник. Также в разд. 2 доказано, что аналогичные свойства справедливы и для предельных множеств управляемости не полностью управляемых систем. В разд. 3 приведены важные следствия из данных утверждений, в частности доказаны аналогичные свойства для множеств управляемости не полностью управляемых систем и представлены оценки множества вершин предельных множеств управляемости и достижимости. В разд. 4 полученные теоретические результаты продемонстрированы на примерах построения множеств управляемости и достижимости для различных систем управления.

**1. Формулировка задачи.** Рассматривается автономная линейная система с дискретным временем

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\} \quad (1.1)$$

и скалярным ограниченным по импульсу управлением

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u(k)| \leq t, \quad t \in (0, \infty). \quad (1.2)$$

Это ограничение можно рассматривать как ограничение на  $l_1$ -норму последовательностей управлений  $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ . Здесь  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  – соответствующие матрицы системы;  $u(k) \in \mathbb{R}$  – скалярное управление в момент времени  $k \in \mathbb{Z}_+$ ;  $t \in (0, \infty)$  – произвольный параметр, характеризующий суммарные энергозатраты для управления.

Считается, что система (1.1) без ограничений на управления является управляемой, т.е. выполнено ранговое условие Калмана

$$\text{rank}(b | Ab | \dots | A^{n-1}b) = n. \quad (1.3)$$

Пусть  $\mathcal{Y}_t(k) \subset \mathbb{R}^n$  – множество достижимости системы (1.1), (1.2) за  $k$  шагов, т.е. это множество всех возможных терминальных состояний системы, в которые она может попасть из 0 за  $k$  шагов посредством использования допустимых в смысле ограничений (1.2) управлений:

$$\mathcal{Y}_t(k) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b u(k-1-i), \sum_{i=0}^{k-1} |u(i)| \leq t \right\}, \quad k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}.$$

Через  $\mathcal{Y}_t$  обозначается предельное множество достижимости:

$$\mathcal{Y}_t = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_t(k).$$

Аналогично вводится множество  $\mathcal{X}_t(k)$  0-управляемости за  $k$  шагов дискретной системы, определяемой соотношениями (1.1) и (1.2). Это множество всех возможных начальных состояний  $x(0)$  системы, из которых она может попасть в 0 за  $k$  шагов посредством использования допустимых в смысле ограничений (1.2) управлений:

$$\mathcal{X}_t(k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b u(k-1-i) + A^k x, \sum_{i=0}^{k-1} |u(i)| \leq t \right\}, \quad k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}.$$

Здесь  $\mathcal{X}_t$  – предельное множество 0-управляемости:

$$\mathcal{X}_t = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_t(k).$$

Обозначим через  $\sigma(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$  спектр матрицы  $A$ , т.е. множество всех собственных значений  $A$  с учетом кратности. Целью статьи является исчерпывающее описание множеств  $\mathcal{X}_t$  и  $\mathcal{Y}_t$  для одного класса систем, удовлетворяющих соотношениям (1.1)–(1.3). Более точно будут

изучаться предельные множества достижимости  $\mathcal{Y}_t$  для асимптотически устойчивых систем, т.е. тех систем, для которых справедливо условие

$$\rho(A) := \max_{\alpha_i \in \sigma(A)} |\alpha_i| < 1. \quad (1.4)$$

Аналогично изучаются множества 0-управляемости  $\mathcal{X}_t$  для неустойчивых систем с условием

$$\min_{\alpha_i \in \sigma(A)} |\alpha_i| > 1. \quad (1.5)$$

Оказывается, что для выделенного класса систем (1.1)–(1.3) множества управляемости могут быть описаны явным образом, что приводит к возможности конструктивного построения допустимых управлений в задачах оптимального управления.

**2. Множества достижимости.** Охарактеризуем основные свойства множеств достижимости  $\mathcal{Y}_t(k)$  системы (1.1)–(1.2). В данном случае не требуется использование условия управляемости Калмана (1.3). Здесь и везде далее через  $\text{conv}(\mathcal{Y})$  обозначена выпуклая оболочка множества  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$  – наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее  $\mathcal{Y}$  в качестве подмножества [9, 12].

**Л е м м а.** Для каждого натурального  $k$  справедливы утверждения:

- (i)  $\mathcal{Y}_t(k)$  – полиэдр;
- (ii) множество  $\mathcal{Y}_t(k)$  замкнуто, ограничено и симметрично относительно 0;
- (iii)  $\mathcal{Y}_t(k)$  – выпуклый многогранник, т.е.

$$\mathcal{Y}_t(k) = t \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b).$$

Здесь

$$\text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b) := \text{conv}(b, Ab, \dots, A^{k-1}b, -b, -Ab, \dots, -A^{k-1}b);$$

- (iv)  $0 \in \text{int } \mathcal{Y}_t(k)$  при  $k \geq n$ ;
- (v)  $\mathcal{Y}_t(k) \subset \mathcal{Y}_t(m)$  при  $m \geq k$ ;
- (vi)  $\mathcal{Y}_t(k) = t\mathcal{Y}_1(k)$ ;
- (vii)  $\mathcal{Y}_t(k) \cap \mathcal{Y}_t(m) \neq \emptyset$  при  $k, m \in \mathbb{N}$ .

Доказательство леммы приведено в Приложении.

В силу определения предельное множество достижимости  $\mathcal{Y}_t$  есть счетное объединение множеств достижимости  $\mathcal{Y}_t(k)$  за  $k$  шагов, и поэтому некоторые перечисленные выше свойства могут перестать быть верными. Здесь будут рассмотрены особенности предельного множества достижимости  $\mathcal{Y}_t$  для асимптотически устойчивой системы, определяемой соотношениями (1.1), (1.2) и (1.4), т.е. когда все собственные значения матрицы  $A$  лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости. Как известно [3, 4], данная ситуация соответствует системе, которая не является полностью достижимой, т.е. вектор состояния которой может попасть за конечное число шагов из 0 не во все точки пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**Т е о р е м а.** Пусть для системы (1.1)–(1.2) выполняются условия (1.3) и (1.4). Тогда существует  $K \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_t(K). \quad (2.1)$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

**3. Следствия теоремы.** Нижним пределом последовательности множеств  $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  [13, Гл. 1, § 1, п. 1] называется множество  $\liminf \mathcal{Y}_t(k)$ , состоящее из точек, принадлежащих всем множествам  $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , кроме, быть может, конечного их числа.

**С л е д с т в и е 1.** Пусть для системы (1.1)–(1.2) выполняются условия (1.3), (1.4). Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_t(k).$$

Доказательство. Формализуя определение нижнего предела последовательности множеств, получаем

$$\liminf \mathcal{Y}_t(k) = \{x : \exists k \quad \forall m \geq k \quad x \in \mathcal{Y}_t(m)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m).$$

В силу утверждения (v) леммы находим

$$\bigcap_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m) = \mathcal{Y}_t(k),$$

что приводит к равенству

$$\liminf \mathcal{Y}_t(k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k).$$

Аналогично верхним пределом последовательности множеств  $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  [13, Гл. 1] называется множество  $\limsup \mathcal{Y}_t(k)$ , состоящее из точек, принадлежащих бесконечному числу различных множеств  $\{\mathcal{Y}_t(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Формализуя определение, получаем

$$\limsup \mathcal{Y}_t(k) = \{x : \forall k \quad \exists m \geq k \quad x \in \mathcal{Y}_t(m)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m).$$

В силу утверждения (v) леммы приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \bigcup_{m=k}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m) &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(m), \\ \limsup \mathcal{Y}_t(k) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k) = \liminf \mathcal{Y}_t(k) = \limsup \mathcal{Y}_t(k) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_t(k) = \mathcal{Y}_t.$$

Следствие 2. Предельное множество достижимости  $\mathcal{Y}_t$  обладает всеми свойствами (i), (ii), (iv), (vi) леммы множеств достижимости  $\mathcal{Y}_t(k)$  для конечного числа шагов  $k \geq n$ .

Данное утверждение вполне объясняется использованием предельного перехода в следствии 1.

Из теоремы вытекает, что число  $K$  определяется не единственным образом. Тем не менее, выберем соответствующее минимальное число из (2.1):

$$K_{\min} = \min \{K : \mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_t(K)\}. \quad (3.1)$$

Число  $K_{\min}$  из (3.1) можно эффективно оценить сверху. Действительно, поскольку в конечномерном линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$  нормы эквивалентны [14, Гл. 3, § 4], то имеется хотя бы одно число  $\gamma \in (0, \infty)$ , такое, что для произвольного  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|y\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq \gamma \|y\|_1, \quad (3.2)$$

где

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|.$$

Введем в рассмотрение функционал Минковского выпуклого множества  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ , у которого  $0 \in \text{int } \mathcal{A}$ , определяемый [9, 12, 14] по формуле

$$\mu(x, \mathcal{A}) = \inf \{\lambda > 0 : x \in \lambda \mathcal{A}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

В силу [12, теорема 15.2; 14, Гл. III, § 2, теорема 3] определения (3.3), эта формула задает некоторую норму в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\|_{\mathcal{Y}_t(k)} := \mu(x, \mathcal{Y}_t(k)), \quad k \geq n, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) получаем

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{Y}_t(n)} &= \min\{\lambda > 0 : y \in \lambda \mathcal{Y}_t(n)\} = \\ &= \min\{\lambda > 0 : y \in \lambda t \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{n-1}b)\} = \\ &= t^{-1} \min\{\lambda > 0 : y \in \lambda \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{n-1}b)\} = \\ &= t^{-1} \min\left\{\lambda > 0 : y = \lambda \sum_{i=1}^n A^{n-i} b u_i, \sum_{i=1}^n |u_i| = 1\right\} = \\ &= t^{-1} \min\left\{\lambda > 0 : y = \sum_{i=1}^n A^{n-i} b u_i, \sum_{i=1}^n |u_i| = \lambda\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, найдется вектор  $u^n = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , такой, что

$$\|u^n\|_1 = \lambda, \quad y = A_n u^n.$$

По условию (1.3) матрица  $A_n$  невырождена и тогда

$$u^n = A_n^{-1} y.$$

Теперь получаем последовательно

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{Y}_t(n)} &= t^{-1} \min\{\lambda > 0 : y = A_n u^n, \|u^n\|_1 = \lambda\} = \\ &= t^{-1} \min\{\lambda > 0 : \|A_n^{-1} y\|_1 = \lambda\} = t^{-1} \|A_n^{-1} y\|_1 \leq t^{-1} \|A_n^{-1}\|_1 \|y\|_1. \end{aligned}$$

Таким образом, можно положить

$$\gamma = t^{-1} \|A_n^{-1}\|_1,$$

и, следовательно, неравенство (3.2) установлено.

Если найдется  $K_1 \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$\|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq 1 \quad \text{при} \quad k \geq K_1, \quad (3.5)$$

то

$$K_1 \geq \max\{K_{\min}, n\}. \quad (3.6)$$

Действительно, из (3.4) и (3.5) следует включение

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(n) \quad \text{при} \quad k \geq K_1.$$

В силу п. (v) леммы верно включение

$$\mathcal{Y}_t(n) \subset \mathcal{Y}_t(K_1),$$

и, следовательно,

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(K_1) \quad \text{при} \quad k \geq K_1.$$

Так как

$$\mathcal{Y}_t(K_1) = t \operatorname{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{K_1} b),$$

то

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(K_1) \quad \text{при} \quad k = 0, \dots, K_1,$$

и поэтому

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(K_1) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом,

$$\text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^k b) \subset \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{K_1} b) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathcal{Y}_t(k) \subset \mathcal{Y}_t(K_1), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{Y}_t(K_{\min}) = \mathcal{Y}_t = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{Y}_t(k) \subset \mathcal{Y}_t(K_1),$$

т.е. верно (3.6).

В силу теоремы Шура [15, теорема 2.3.1] об унитарности триангуляции найдутся унитарная матрица  $U$  и верхняя треугольная матрица  $\Lambda$ , такие, что

$$A = U \Lambda U^T.$$

Положим

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2,n-1} & \lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots & \lambda_{3,n-1} & \lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выберем  $\delta > 0$  и соответствующую матрицу

$$D_\delta = \text{diag}\{\delta, \delta^2, \delta^3, \dots, \delta^n\}.$$

Затем вычислим матрицу

$$\begin{aligned} D_\delta \Lambda D_\delta^{-1} &= D_\delta \begin{pmatrix} \delta^{-1}\lambda_{11} & \delta^{-2}\lambda_{12} & \delta^{-3}\lambda_{13} & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{1,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{1n} \\ 0 & \delta^{-2}\lambda_{22} & \delta^{-3}\lambda_{23} & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{2,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \delta^{-3}\lambda_{33} & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{3,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta^{-(n-1)}\lambda_{n-1,n-1} & \delta^{-n}\lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta^{-n}\lambda_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \delta^{-1}\lambda_{12} & \delta^{-2}\lambda_{13} & \cdots & \delta^{-n+2}\lambda_{1,n-1} & \delta^{-n+1}\lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \delta^{-1}\lambda_{23} & \cdots & \delta^{-n+3}\lambda_{2,n-1} & \delta^{-n+2}\lambda_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots & \delta^{-n+4}\lambda_{3,n-1} & \delta^{-n+3}\lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1,n-1} & \delta^{-1}\lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь положим

$$C_\delta = D_\delta U^T$$

и введем соответствующую векторную норму  $\|\cdot\|_{C_\delta} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , определяемую по формуле

$$\|x\|_{C_\delta} := \|C_\delta x\|_1 \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Соответствующая матричная норма  $\|\cdot\|_{C_\delta} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow [0, \infty)$  порождается векторной нормой  $\|\cdot\|_{C_\delta}$  и для  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \|A\|_{C_\delta} &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{C_\delta}}{\|x\|_{C_\delta}} = \max_{x \neq 0} \frac{\|C_\delta Ax\|_1}{\|C_\delta x\|_1} = \max_{x \neq 0} \frac{\|C_\delta A C_\delta^{-1} C_\delta x\|_1}{\|C_\delta x\|_1} = \\ &= \max_{y \neq 0} \frac{\|C_\delta A C_\delta^{-1} y\|_1}{\|y\|_1} = \|C_\delta A C_\delta^{-1}\|_1. \end{aligned}$$

Далее получаем для  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|A^k b\|_{y,(n)} &\leq \gamma \|A^k b\|_1 = \gamma \|C_\delta^{-1} C_\delta A^k b\|_1 \leq \gamma \|C_\delta^{-1}\|_1 \|C_\delta A^k b\|_1 = \\ &= \gamma \|C_\delta^{-1}\|_1 \|A^k b\|_{C_\delta} \leq \gamma \|C_\delta^{-1}\|_1 \|A\|_{C_\delta}^k \|b\|_{C_\delta}. \end{aligned}$$

Полагая  $\delta > 1$ , оценим величину

$$\begin{aligned} \|A\|_{C_\delta} &= \|C_\delta A C_\delta^{-1}\|_1 = \|D_\delta U^T U \Lambda U^T U D_\delta^{-1}\|_1 = \|D_\delta \Lambda D_\delta^{-1}\|_1 = \\ &= \max \{|\lambda_{11}|, |\delta^{-1} \lambda_{12}| + |\lambda_{22}|, |\delta^{-2} \lambda_{13}| + |\delta^{-1} \lambda_{23}| + |\lambda_{33}|, \dots, \\ &\quad |\delta^{-n+1} \lambda_{1n}| + \dots + |\delta^{-1} \lambda_{n-1,n}| + |\lambda_{nn}|\} \leq \\ &\leq \max \{|\lambda_{11}|, |\lambda_{22}| + \delta^{-1} |\lambda_{12}|, |\lambda_{33}| + \delta^{-1} (|\lambda_{13}| + |\lambda_{23}|), \dots, \\ &\quad \leq |\lambda_{nn}| + \delta^{-1} (|\lambda_{1n}| + \dots + |\lambda_{n-1,n}|)\} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_{ii}| + \delta^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n |\lambda_{ij}| = \rho(A) + \delta^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n |\lambda_{ij}|. \end{aligned}$$

Выберем число  $\delta$  произвольно из условия

$$\delta > \max \left\{ 1, \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n |\lambda_{ij}|}{1 - \rho(A)} \right\}.$$

Здесь используется условие (1.4). Зафиксируем выбранную постоянную  $\delta$  из этого неравенства, тогда верно неравенство

$$\|A\|_{C_\delta} < 1,$$

и

$$\|A\|_{C_\delta}^k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Поскольку  $\delta$  не зависит от параметра  $k$ , то соответствующие величины

$$\|C_\delta^{-1}\|_1 \neq 0, \quad \|b\|_{C_\delta} \neq 0$$

также не зависят от  $k$ . Следовательно, найдется, по крайней мере, одно число  $K_2 \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$\gamma \|C_\delta^{-1}\|_1 \|A\|_{C_\delta}^{K_2} \|b\|_{C_\delta} \leq 1 \tag{3.7}$$

или

$$\|A\|_{C_\delta}^{K_2} \leq \gamma^{-1} \|C_\delta^{-1}\|_1^{-1} \|b\|_{C_\delta}^{-1}.$$

Таким образом,

$$K_2 \geq \max \{K_{\min}, n\}, \tag{3.8}$$

и выполняется неравенство

$$\|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq 1 \quad \text{при} \quad k \geq K_2. \quad (3.9)$$

Действительно, получаем

$$\|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq \gamma \|C_\delta^{-1}\|_1 \|A\|_{C_\delta}^{K_2} \|b\|_{C_\delta} \leq 1,$$

что доказывает требуемое.

Сказанное представляет собой соответствующее утверждение.

**С л е д с т в и е 3.** Для минимального числа шагов множеств достижимости из (3.1) справедливы оценки

$$K_{\min} \leq \max\{K_1, K_2\},$$

определяемые соотношениями (3.5), (3.6) и (3.8), (3.9).

Представленные ранее результаты могут быть расширены на некоторый более широкий класс систем (1.1), (1.2). При этом доказательства изменяются незначительно, и поэтому они опущены.

**С л е д с т в и е 4.** Пусть имеется последовательность вещественных чисел  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ , такая, что

$$v_k > 0, \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} v_k^{-1} < \infty,$$

которая порождает для системы (1.1), (1.4) множества управлений:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k |u(k)| \leq t, \quad t \in (0, \infty).$$

Если  $\mathcal{Y}_t^v(k)$  и  $\mathcal{Y}_t^v$  – соответствующие множества достижимости, то выполняются аналогичные условия леммы и теоремы и, следовательно,  $\mathcal{Y}_t^v$  – выпуклый многогранник.

Поскольку предельное множество достижимости есть выпуклый многогранник, то существует возможность воспользоваться классическим результатом из выпуклого анализа и оценить количество допустимых управлений, необходимых для достижения заданного терминального состояния.

**С л е д с т в и е 5.** Для каждого  $y \in \mathcal{Y}_t$  найдутся не более  $n + 1$  ненулевых допустимых управлений  $\{u^*(k_1), \dots, u^*(k_{n+1})\}$ , таких, что

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} A^{k_i} b u^*(k_i), \quad \sum_{i=1}^{n+1} |u^*(k_i)| \leq t.$$

При этом минимальное число шагов для терминального состояния  $y \in \mathcal{Y}_t$  определяется числом  $K_{\min}$  и оценками из следствия 3.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу теоремы для произвольного  $y \in \mathcal{Y}_t$  верно включение

$$y \in t \operatorname{conv}(b, Ab, \dots, A^{K-1}b, -b, -Ab, \dots, -A^{K-1}b)$$

для некоторого  $K$ . Построим множество

$$\mathcal{G} := \{c_1, \dots, c_M\}, \quad \mathcal{Y}_t = \operatorname{conv} \mathcal{G}, \quad c_i \in \mathcal{Y}_t,$$

в котором расположены вершины  $c_i$  многогранника  $\mathcal{Y}_t$  и  $M \leq 2K$ . Воспользуемся теоремой Каратеодори [9, теорема 1.14.1; 12, теорема 17], используя ее геометрическое описание [16, теорема 2.4]: множество  $\mathcal{Y}_t$  представляет собой выпуклую оболочку множества  $\mathcal{G}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и поэтому есть объединение всех  $m$ -симплексов в  $\mathbb{R}^n$  с вершинами в  $\mathcal{Y}_t$  при  $m \leq n$ . Следовательно, каждая точка  $y \in \mathcal{Y}_t$  принадлежит хотя бы одному  $m$ -симплексу из вершин  $c_i$  множества  $\mathcal{G}$ . Тогда по определению найдутся числа  $v_1, \dots, v_{n+1}$ , такие, что

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} v_i c_{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 1, \quad v_i \geq 0, \quad c_{k_i} \in \mathcal{G}.$$

Положим

$$u^*(k_i) = t \begin{cases} v_i, & c_{k_i} \in t\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}, \\ -v_i, & c_{k_i} \in t\{-b, -Ab, \dots, -A^{k-1}b\}. \end{cases}$$

Тогда получаем запись, эквивалентную утверждению следствия.

Опишем аналогичные свойства множеств 0-управляемости для рассматриваемого класса систем.

**С л е д с т в и е 6.** Для систем (1.1)–(1.3) и (1.5) множества 0-управляемости  $\mathcal{X}_t(k)$  за конечное число шагов обладают свойствами, аналогичными свойствам леммы.

Для предельного множества 0-управляемости  $\mathcal{X}_t$  выполняется утверждение, аналогичное теореме.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для систем (1.1), (1.2) введем обозначения

$$\mathcal{X}_{t,A}(k) := \mathcal{X}_t(k), \quad \mathcal{X}_{t,A} := \mathcal{X}_t, \quad \mathcal{Y}_{t,A}(k) := \mathcal{Y}_t(k), \quad \mathcal{Y}_{t,A} := \mathcal{Y}_t,$$

отвечающие матрице  $A$ . Также для системы

$$y(k+1) = A^{-1}y(k) + bv(k), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |v(k)| \leq t,$$

построим аналогичные множества управляемости  $\mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k)$ ,  $\mathcal{X}_{t,A^{-1}}$ ,  $\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k)$ ,  $\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}$ , отвечающие матрице  $A^{-1}$ . В силу предположения (1.5) матрица  $A$  не вырождена.

Справедливо равенство

$$\mathcal{X}_{t,A}(k) = A^{-1}\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k). \tag{3.10}$$

Действительно, согласно определению  $y \in \mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k)$ , если и только если

$$y = A^{-(k-1)}bv(0) + \dots + bv(k-1), \quad \sum_{i=0}^{k-1} |v(i)| \leq t,$$

$$A^{k-1}y = A^k(A^{-1}y) = bv(0) + \dots + A^{k-1}bv(k-1), \quad \sum_{i=0}^{k-1} |v(i)| \leq t.$$

Полагая

$$u(0) = -v(k-1), \dots, u(k-1) = -v(0),$$

приходим к выводу, что

$$A^{-1}y \in \mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k),$$

т.е.

$$A^{-1}\mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k) \subset \mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k).$$

Обратно, если  $x \in \mathcal{X}_{t,A^{-1}}(k)$ , то

$$x = -A^{-1}bu(0) - \dots - A^{-k}bu(k-1), \quad \sum_{i=0}^{k+1} |u(i)| \leq t,$$

$$Ax = -A^{(k-1)}bu(k-1) - \dots - bu(0), \quad \sum_{i=0}^{k+1} |u(i)| \leq t.$$

Снова делая замену

$$v(0) = -u(k-1), \dots, v(k-1) = -u(0),$$

приходим к выводу, что

$$Ax \in \mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k),$$

т.е.

$$A\mathcal{X}_{t,A}(k) \subset \mathcal{Y}_{t,A^{-1}}(k).$$

Равенство (3.10) доказано.

Ясно, что теперь следствие 6 вытекает из (3.10) и утверждений леммы и теоремы.

**4. Комментарии и примеры.** В данном разделе построим различные примеры, демонстрирующие основные результаты леммы и теоремы.

**Пример 1.** Положим размерность фазового пространства  $n = 2$ , матрицу системы определим следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

При этом для любого  $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  данная система удовлетворяет условиям (1.3) и (1.4).

Величина  $K_{\min}$ , определяемая соотношениями (3.1), в действительности сильно зависит от вектора  $b$ . В общем случае справедливо равенство

$$A^k b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} b_1 & \frac{k}{2^{k-1}} b_2 \\ 0 & \frac{1}{2^k} b_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Если предположить, что  $b_2 = 0$ , то с учетом п. (iii) леммы и теоремы получим, что

$$\mathcal{Y}_t(k) = t \cdot \text{conv}\{\pm b\} = [-t|b_1|, t|b_1|] \times \{0\}.$$

Таким образом,  $K_{\min} = 1$ .

Если предположить, что  $b_1 = 0$ , то с учетом п. (iii) леммы верно равенство

$$\mathcal{Y}_t(k) = t|b_2| \cdot \text{conv}\left\{\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \dots, \pm \begin{pmatrix} k \\ 2^{k-1} \\ 1 \\ 2^k \end{pmatrix}\right\}.$$

Если положить

$$\lambda_1 = \frac{2k-1}{2^k}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{2^k},$$

то для  $k \geq 3$  верно, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 1,$$

$$\lambda_1 b + \lambda_2 (-A^2 b) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k}{2^{k-1}} \\ \frac{-1}{2^k} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют включения

$$-A^k b \in \text{conv}\{b, -A^2 b, 0\},$$

$$A^k b \in \text{conv}\{-b, A^2 b, 0\}.$$

Тогда с учетом теоремы верно, что

$$\mathcal{Y}_t(k) = \mathcal{Y}_t(3), \quad k \geq 3,$$

$$K_{\min} \leq 3.$$

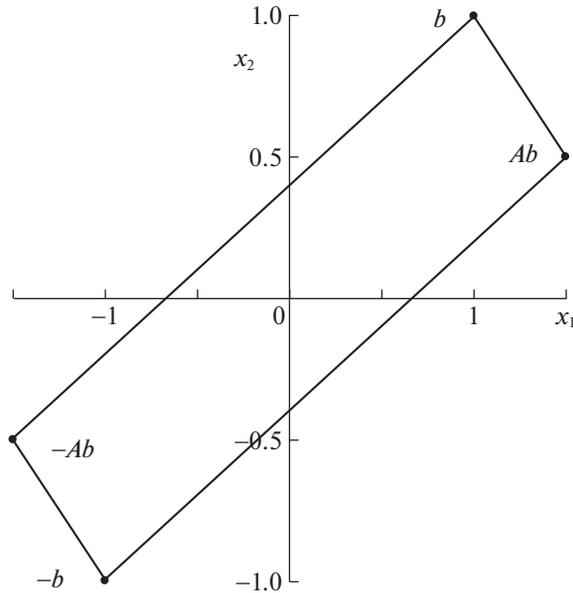


Рис. 1. Множество  $\mathcal{Y}_t(2)$

При этом следующая система несовместна:

$$\begin{cases} \lambda_1 b - \lambda_2 b + \lambda_3 Ab - \lambda_4 Ab = A^2 b, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $tA^2 b \notin \mathcal{Y}_t(2)$ , т.е.

$$\mathcal{Y}_t(2) \neq \mathcal{Y}_t(3),$$

$$K_{\min} \geq 3.$$

Окончательно получим равенство  $K_{\min} = 3$ .

Для случая  $b = (1 \ 1)^T$ ,  $t = 1$  построим соответствующие множества достижимости графически. Результаты проиллюстрированы на рис. 1–3.

**Пример 2.** С учетом следствия 5 и равенства (3.10) построенные в примере 1 множества достижимости  $\mathcal{Y}_t(k)$  можно преобразовать в множества 0-управляемости системы (1.1), порождаемой матрицей системы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно [12, следствие 19.5.1], для случая  $b_1 = 0$  справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A^{-1},t} &= \mathcal{X}_{A^{-1},t}(3) = A^0 \mathcal{Y}_{A,t}(3) = t \cdot \text{conv} \{ \pm Ab, \pm A^2 b, \pm A^3 b \} = \\ &= t |b_2| \cdot \text{conv} \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

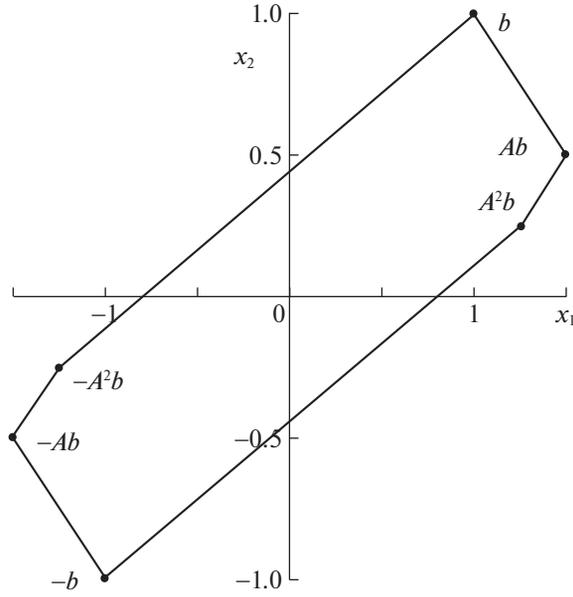


Рис. 2. Множество  $\mathcal{U}_t(3)$

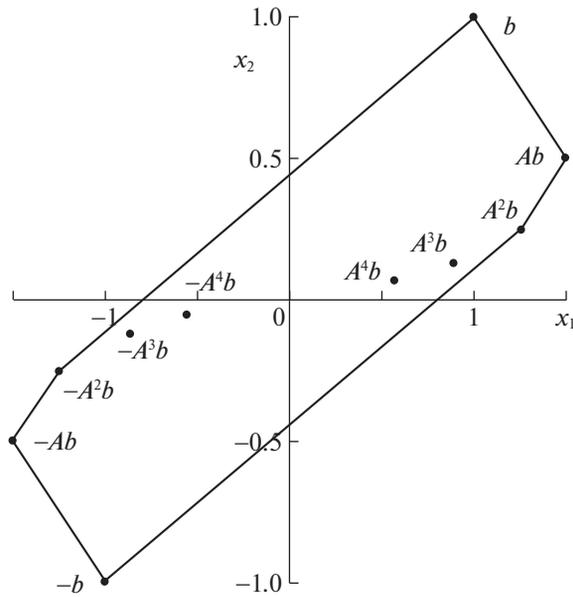


Рис. 3. Множества  $\mathcal{U}_t(4) = \mathcal{U}_t(5) = \mathcal{U}_t$

**Пример 3.** Рассмотрим случай комплексных собственных значений матрицы  $A$ , удовлетворяющих условию (1.4):

$$A = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

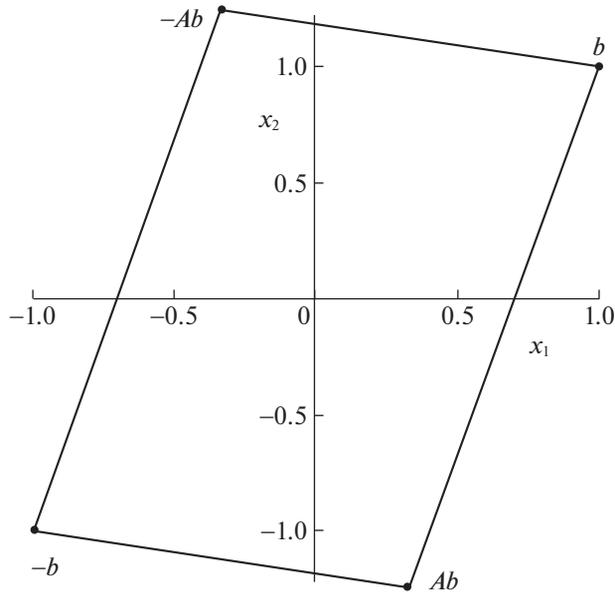


Рис. 4. Множество  $\mathcal{Y}_t(2)$

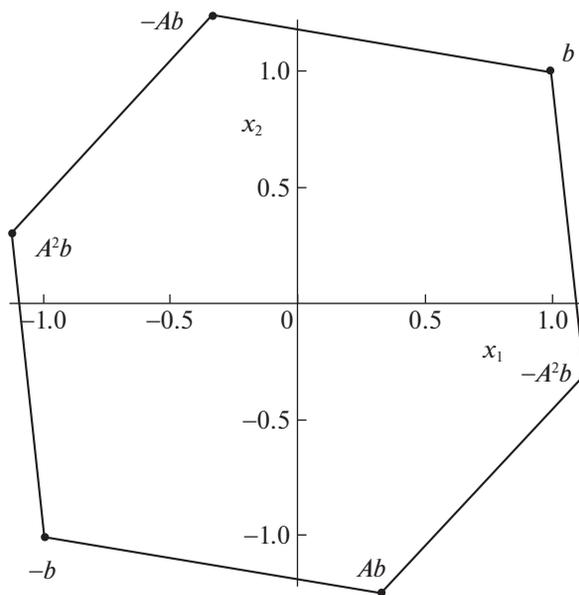


Рис. 5. Множество  $\mathcal{Y}_t(3) = \mathcal{Y}_t$

Тогда для любых  $b \in \mathbb{R}^2$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  справедливо представление

$$A^k b = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^k} Ab, & k = 3i + 1, \\ \frac{1}{\alpha^k} A^2 b, & k = 3i + 2, \\ \frac{1}{\alpha^k} b, & k = 3i, \end{cases} \text{ где } i \in \mathbb{Z}_+,$$

откуда следует, что  $K_{\min} \leq 3$ . Также для случая  $b = (1 \ 1)^T$ ,  $t = 1$ ,  $\alpha = 1.1$  множества достижимости  $\mathcal{Y}_t(2)$  и  $\mathcal{Y}_t(3)$ , построенные на основе п. (iii) леммы, представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

Следует также отметить, что в силу теоремы множество  $\mathcal{U}_l(3)$  совпадает с предельным множеством достижимости  $\mathcal{U}_l$ .

**Заключение.** Рассмотрены методы построения предельных множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограниченным скалярным управлением. Предполагается, что управление как функция времени является ограниченной последовательностью в смысле  $l_1$ -нормы.

Для случая, когда собственные значения матрицы системы не превосходят 1 по модулю, т.е. для не полностью достижимых систем, предельные множества достижимости удается построить явным образом: доказано, что они представляют собой выпуклый, симметричный относительно начала координат многогранник. При этом в п. (iii) леммы дано описание вершин данного многогранника. Также доказано, что последовательность множеств управляемости за конечное число шагов в этом случае представляет собой, начиная с некоторого  $K_{\min}$ , постоянную последовательность. В следствии 3 предложена конструктивная оценка величины  $K_{\min}$ .

Полученные результаты для множеств достижимости обобщены и для построения множеств 0-управляемости не полностью управляемых систем, т.е. тех систем собственные значения матриц которых по модулю строго больше 1. Данный факт сформулирован в следствии 6.

В качестве демонстрации основных результатов данной работы приведены примеры и иллюстрации построения множеств управляемости и достижимости для различных линейных систем с дискретным временем.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство леммы.** (i). По определению [8, Гл. 2, § 4, п. 1] множество  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  называется полиэдром, если его можно представить как множество решений системы из конечного числа  $m$  линейных неравенств:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T a^j \leq b_j, a^j \in \mathbb{R}^n, j = \overline{1, m}\}.$$

Обозначим через  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n}$  замкнутый шар в  $\mathbb{R}^n$  с метрикой  $l_1$ :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}.$$

Множество  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n}$  – полиэдр, поскольку

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T \tilde{a}^j \leq 1, j = \overline{1, 2^n}\}, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\tilde{a}^j = (\tilde{a}_1^j, \dots, \tilde{a}_n^j)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{a}_i^j \in \{-1, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, 2^n}.$$

Действительно, если для  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\beta \geq 0$  верно неравенство

$$|\alpha| \leq \beta,$$

то получаем соотношение

$$\alpha \leq \beta, \quad -\alpha \leq \beta$$

или

$$\pm \alpha \leq \beta. \quad (\text{П.2})$$

Далее рассуждения проводятся по индукции. Пусть  $k = 1$ , тогда для любого  $x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^n}$  находим

$$|x_1| \leq 1 - \sum_{i=2}^n |x_i|. \quad (\text{П.3})$$

Из (П.2) и (П.3) имеем

$$\pm x_1 \leq 1 - \sum_{i=2}^n |x_i|$$

или

$$\sum_{i=2}^n |x_i| \leq 1 \pm x_1.$$

Допустим, для произвольного  $k = \overline{2, n-1}$  верно неравенство

$$\sum_{i=k}^n |x_i| \leq 1 \pm x_1 \pm \dots \pm x_{k-1} = 1 \pm \sum_{i=1}^{k-1} x_i. \quad (\text{П.4})$$

Тогда

$$|x_k| \leq 1 \pm \sum_{i=1}^{k-1} x_i - \sum_{i=k+1}^n |x_i|.$$

Из (П.2) получаем

$$\begin{aligned} \pm x_k &\leq 1 \pm \sum_{i=1}^{k-1} x_i - \sum_{i=k+1}^n |x_i|, \\ \sum_{i=k+1}^n |x_i| &\leq 1 \pm \sum_{i=1}^k x_i. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Таким образом, из утверждения (П.4) для  $k$  следует (П.5) и справедливость утверждения (П.4) для  $k + 1$ . Следовательно, по принципу математической индукции приходим к выводу об эквивалентности неравенства

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$$

неравенству

$$\sum_{i=1}^n \pm x_i \leq 1,$$

что совпадает с (П.1).

Введем матрицу  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}$  по формуле

$$A_k := (b | Ab | \dots | A^{k-1} b).$$

Пусть

$$v_{i+1} := u(k-1-i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad v = (v_1, \dots, v_k)^T \in {}^t\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k} \subset \mathbb{R}^k. \quad (\text{П.6})$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^i b u(k-1-i) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b v_{i+1} = A_k v.$$

Следовательно, получаем представление

$$\mathcal{Y}_t(k) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = A_k v, v \in {}^t\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}\} = {}^t A_k \mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}.$$

В силу [12, теорема 19.3, Гл. IV, § 19] множество  $\mathcal{Y}_t(k)$  – полиэдр как линейное отображение полиэдрального выпуклого множества.

(ii) Множество  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}$  есть по построению замкнутый единичный шар с центром 0 в метрическом пространстве  $\mathbb{R}^k$  с метрикой  $l_1$ . Поэтому множество  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_1^k}$  замкнуто, ограничено и симмет-

рично относительно 0 как соответствующий шар. Наконец, утверждения (ii) следуют из линейного представления

$$\mathfrak{Y}_t(k) = tA_k \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_1^k}.$$

(iii) В силу теоремы Минковского–Вейля [8, Гл. 2, § 8, теорема 8.14] множество  $\mathfrak{Y}_t(k)$  есть выпуклый многогранник, поскольку оно является ограниченным полиэдром в силу (ii).

Справедливо равенство

$$\text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b) = \text{conv}(0, \pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b),$$

и поэтому верно представление

$$\begin{aligned} & \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b) = \\ & = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b \lambda_{i+1} - \sum_{i=0}^{k-1} A^i b \mu_{i+1}, \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \leq 1, \lambda_i, \mu_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Действительно, получаем

$$\begin{aligned} & \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b) = \text{conv}(0, \pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b) = \\ & = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = 0 \cdot (\lambda_0 + \mu_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} (-A^i b), \right. \\ & \quad \left. (\lambda_0 + \mu_0) + \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) = 1, \lambda_i, \mu_i \geq 0, i = \overline{0, k} \right\} = \\ & = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} (-A^i b), \right. \\ & \quad \left. \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) = 1 - (\lambda_0 + \mu_0), \lambda_i, \mu_i \geq 0, i = \overline{0, k} \right\} = \\ & = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} (-A^i b), \right. \\ & \quad \left. \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \leq 1, \lambda_i, \mu_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательства утверждения (iii) достаточно при  $t = 1$ , поэтому обозначим

$$\mathfrak{Y}(k) := \mathfrak{Y}_1(k).$$

Справедливо включение

$$\mathfrak{Y}(k) \subset \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1}b). \quad (\text{П.8})$$

Действительно, если

$$y \in \mathfrak{Y}(k),$$

то

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b v_{i+1}, \quad \sum_{i=1}^k |v_i| \leq 1. \quad (\text{П.9})$$

Положим

$$\lambda_i = \max\{0, -v_i\}, \quad \mu_i = \max\{0, v_i\},$$

тогда

$$\lambda_i + \mu_i = |v_i|, \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0, \quad \lambda_i \cdot \mu_i = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Следовательно,

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} A^i b v_{i+1} = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} A^i b, \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \leq 1, \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0.$$

В силу (П.7) получаем

$$y \in \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1} b).$$

Теперь покажем, что верно обратное включение

$$\text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1} b) \subset \mathcal{Y}(k). \tag{П.10}$$

Действительно, пусть  $y \in \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{k-1} b)$ , тогда верно разложение

$$y = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i+1} A^i b + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{i+1} A^i b, \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \leq 1, \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0.$$

Положим

$$v_i = \mu_i - \lambda_i.$$

Тогда верно равенство

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} (\mu_{i+1} - \lambda_{i+1}) A^i b = \sum_{i=0}^{k-1} v_{i+1} A^i b,$$

и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^k |v_i| = \sum_{i=1}^k |\mu_i - \lambda_i| = \sum_{i=1}^k (\mu_i + \lambda_i) \leq 1.$$

Это означает, что по определению

$$y \in \mathcal{Y}(k).$$

Из (П.8) и (П.10) вытекает требуемое утверждение (iii).

(iv) Так как по построению  $\mathcal{Y}(k)$  – непустое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$  и  $0 \in \mathcal{Y}_t(k)$ , по утверждению (ii) из [8, Гл. 3, § 7, п. 7, теорема 7.14] следует, что  $0 \in \text{ri } \mathcal{Y}_t(k)$ . По условию (1.3) имеем  $\text{aff } \mathcal{Y}_t(k) = \mathbb{R}^n$  и  $\text{ri } \mathcal{Y}_t(k) = \text{int } \mathcal{Y}_t(k)$ , что доказывает требуемое.

Доказательства утверждений (v), (vi), (vii) очевидны.

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** В силу утверждения (iii) леммы имеем

$$\mathcal{Y}_t(n) = t \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^{n-1} b).$$

Тогда из (1.3) и леммы выводим, что множество  $\mathcal{Y}_t(n)$  есть симметричное ограниченное выпуклое множество, для которого  $0 \in \text{int } \mathcal{Y}_t(n)$ .

Построим последовательность векторов  $\{A^k b\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Тогда найдется число  $K \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(n) \quad \text{при } k \geq K. \tag{П.11}$$

Действительно, по условию (1.4) имеем  $\rho(A) < 1$ , тогда [15, теорема 5.6.12] верно равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O.$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k b = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} = 0.$$

По определению сходимости числовой последовательности  $\left\{ \|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  найдется натуральное  $K$ , такое, что

$$\|A^k b\|_{\mathcal{Y}_t(n)} \leq 1 \quad \text{при} \quad k \geq K.$$

Теперь из (3.3) и (3.4) получаем требуемое включение (П.11).

Для произвольных векторов  $a^1, \dots, a^m, c \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 1$ , справедливо равенство

$$\text{conv}\{a^1, \dots, a^m, c\} = \text{conv}\{a^1, \dots, a^m\}, \quad (\text{П.12})$$

если

$$c \in \text{conv}\{a^1, \dots, a^m\}. \quad (\text{П.13})$$

Действительно, по определению выпуклой оболочки верно включение

$$\text{conv}\{a^1, \dots, a^m\} \subset \text{conv}\{a^1, \dots, a^m, c\}.$$

С другой стороны, из (П.13) следует также цепочка включений

$$\begin{aligned} \text{conv}\{a^1, \dots, a^m, c\} &\subset \text{conv}\{\text{conv}\{a^1, \dots, a^m\} \cup \text{conv}\{c\}\} = \\ &= \text{conv}\{\text{conv}\{a^1, \dots, a^m\} \cup c\} = \text{conv}\{\text{conv}\{a^1, \dots, a^m\}\} = \text{conv}\{a^1, \dots, a^m\}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к равенству (П.12).

В силу (iii) леммы имеем при  $k \geq K$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t(k) &= t \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^k b, \pm A^{k+1} b, \dots, \pm A^k b) = \\ &= t \text{conv}(\pm b, \pm Ab, \dots, \pm A^k b) = \mathcal{Y}_t(K), \end{aligned}$$

поскольку

$$A^k b \in \mathcal{Y}_t(n) \subset \mathcal{Y}_t(K) \quad \text{при} \quad k \geq K.$$

Здесь используется равенство (П.12). Следовательно, в силу п. (v) леммы заключаем

$$\mathcal{Y}_t(n) \subset \dots \subset \mathcal{Y}_t(K) = \mathcal{Y}_t(K+1) = \dots,$$

что доказывает равенство (2.1).

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // АИТ. 2015. № 9. С. 3–30.
2. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
3. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем // Изв. АН. ТИСУ. 2002. № 4. С. 5–16.
4. Formalsky A.M., Sirotin A.N. On the Geometric Properties of Reachable and Controllable Sets for Linear Discrete Systems // J. Optimization Theory and Applications. 2004. V. 122. № 2. P. 17–44.
5. Сиротин А.Н. Точное аналитическое описание множеств достижимости асимптотически устойчивых линейных дискретных систем с ограниченным по  $l_1$ -норме скалярным управлением // Вестн. МАИ. 2008. Т. 15. № 2. С. 142–146.
6. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 447 с.
7. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. 280 с.
8. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
9. Половинкин У.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

10. Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И. Решение навигационной задачи при автономном выведении полезной нагрузки на геостационарную орбиту с помощью двигателя малой тяги // Изв. АН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 106–118.
11. Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И. Интегрированная навигационная система космического аппарата на геостационарной и высокоэллиптической орбитах, функционирующая в условиях активных помех // Изв. АН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 143–154.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.
13. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
15. Хорн Р., Джонсон И. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 667 с.
16. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1983. 336 с.

---

---

**УПРАВЛЕНИЕ  
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

---

---

УДК 531.38

**УПРАВЛЕНИЕ АМПЛИТУДОЙ КОЛЕБАНИЙ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

© 2022 г. Ю. Ф. Голубев

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

*e-mail: golubev@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 26.01.2022 г.

После доработки 31.01.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Предложен оригинальный метод поиска оптимального управления амплитудой колебаний в окрестности положения равновесия склерономной многомерной механической системы. Одна степень свободы системы не поддается непосредственному управлению. На ее движение влияют другие, непосредственно управляемые степени свободы. В число непосредственно управляемых могут входить как позиционные, так и циклические координаты. Метод не содержит сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина и не увеличивает размерность анализируемой исходной системы дифференциальных уравнений. На примере конкретной маятниковой системы продемонстрирована эффективность применения предложенного метода.

**DOI:** 10.31857/S0002338822040084

**Введение.** Задачи управления амплитудой нелинейных колебаний представляют издавна значительный интерес для исследований как с теоретической, так и с практической точек зрения. К настоящему времени существует развитая теория резонансного возбуждения колебаний, которая широко используется в практических приложениях [1, 2]. Проблема построения оптимального управления как для линейных, так и для нелинейных колебательных систем имеет существенные отличия от резонансных постановок. Она часто ставится и исследуется в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [3, 4]. Среди колебательных систем особый интерес вызывают колебательные системы с дефицитом управления, когда система содержит степени свободы, для которых невозможно непосредственное управление, а их требуемое изменение достигается опосредованно за счет подходящего управления по другим степеням свободы [5, 6]. Примеры решения некоторых задач с дефицитом управления системами, находящимися в окрестности положения равновесия и содержащими одну неуправляемую степень свободы, можно найти в [7–10]. Как следует из указанных работ, системы могут быть весьма непростыми. На первоначальном этапе исследования таких систем представляется разумным выбрать координаты управляемых степеней свободы в качестве функций управления, считая, что возможна их идеальная реализация. Основная трудность применения принципа максимума Понтрягина в таком случае состоит в том, что координаты управляемых степеней свободы, как правило, входят в уравнения движения вместе со своими производными. Из-за этого размерность фазового пространства может быть уменьшена лишь на число управляемых координат системы, что может быть недостаточно для эффективного решения задачи по методу Понтрягина.

В предлагаемой статье для решения задач оптимального управления колебаниями позиционных систем с дефицитом управления по одной степени свободы развивается оригинальный метод оптимизации, формализм которого основан на подходе Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева [11] к решению проблем оптимального управления. Метод позволяет получить решение в виде синтеза управления колебаниями в классе кусочно-непрерывных управляющих координат в зависимости от неуправляемой координаты. Управление колебаниями понимается в смысле увеличения или уменьшения амплитуды колебаний, которая служит критерием оптимальности.

**1. Постановка проблемы.** Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad n \geq 2,$$

где  $n$  – число степеней свободы системы,  $q_i$  – обобщенные координаты,  $\dot{q}_i$  – обобщенные скорости, а симметричная матрица  $(a_{ij})$  зависит от координат и положительно определена. Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

в которых  $t$  – время,  $Q_i$  – обобщенные силы. Пользуясь произволом в нумерации обобщенных координат, будем считать, что первая обобщенная координата не поддается непосредственному активному управлению, а остальные обобщенные силы могут быть сформированы нужным образом за счет доступного управляющего воздействия. Выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой  $x$ :

$$q_1 = x.$$

Обобщенную силу  $Q_1$  будем считать позиционной в том смысле, что она может зависеть только от  $x$  и других обобщенных координат, а от обобщенных скоростей не зависит. Пусть первыми в наборе  $(q_2, \dots, q_n)$  идут  $s-1$  координат, от которых обобщенная сила  $Q_1$  зависит явно. Остальные  $(n-s)$  координат не входят явно в выражение для  $Q_1$ . Все координаты переобозначим:  $u_j = q_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, s-1}$  и  $w_k = q_{s+k}$ ,  $k = \overline{1, n-s}$ , причем  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{s-1}) \in R^{s-1}$  – вектор координат, непосредственно влияющих на значение  $Q_1$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-s}) \in R^{n-s}$  – вектор координат, от которых  $Q_1$  явно не зависит, так что  $\partial Q_1 / \partial w_k = 0$ ,  $k = \overline{1, n-s}$ . В число  $w$ -координат могут входить, например, циклические координаты. Кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[ a_{11} \dot{x}^2 + 2 \dot{x} \left( \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) \right] + T^*,$$

где  $s-1$  – число  $u$ -координат и

$$T^*(x, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j,r=1}^{s-1} a_{j+1,r+1} \dot{u}_j \dot{u}_r + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n-s} a_{j+1,k+s} \dot{u}_j \dot{w}_k + \sum_{k,r=1}^{n-s} a_{k+s,r+s} \dot{w}_k \dot{w}_r \right).$$

В системе (1.1) выделим уравнение для координаты  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.2)$$

где  $F(x, \mathbf{u}) = Q_1(x, u_1, \dots, u_{s-1})$ . Примем координату  $x$  в качестве независимой переменной на участке ее монотонного изменения:  $\dot{x} \neq 0$  и обозначим буквой  $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ , где  $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$ ,  $\mathbf{w}' = d\mathbf{w}/dx$ , вектор управляющих координат и их производных по координате  $x$ . Тогда уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$\dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] - p(x, \mathbf{y}) \dot{x}^2 = F(x, \mathbf{u}), \quad (1.3)$$

где

$$f(x, \mathbf{y}) = a_{11} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_k,$$

$$p(x, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial x} u'_j + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial x} w'_k \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y})}{\partial x}.$$

Будем считать, что векторы  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x)$  каким-либо образом назначены и ограничены:

$$\begin{cases} |u_j^m \leq u_j(x) \leq u_j^M|, & |w_k^m \leq w_k(x) \leq w_k^M|, \\ |\dot{u}_j^m \leq \dot{u}_j(x) \leq \dot{u}_j^M|, & |\dot{w}_k^m \leq \dot{w}_k(x) \leq \dot{w}_k^M|, \end{cases} \quad j = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{1, n-s}. \quad (1.4)$$

Эти вектор-функции будем рассматривать как функции управления системой. Тогда обобщенные силы  $Q_2, \dots, Q_n$  вычисляются в соответствии с уравнениями (1.1) таким образом, чтобы указанные вектор-функции  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\mathbf{w}(x)$  реализовались. Предположим, что это сделано, так что ограничения (1.4) удовлетворяются, и можно написать уравнение

$$\int_{x_0}^x \lambda \left\{ F(x, \mathbf{u}) + p(x, \mathbf{y}) \dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y}) \dot{x}] \right\} dx = 0, \quad (1.5)$$

где  $x_0$  – начальное значение независимой переменной  $x$ ,  $\lambda(x, \mathbf{y})$  – любая функция. Уравнение (1.5) эквивалентно уравнению (1.3). Заметим, что если  $f(x, \mathbf{y}) \neq 0$ , то уравнение (1.3) допускает интегрирующий множитель. Выберем его в качестве  $\lambda$ :

$$\lambda = f(x, \mathbf{y}) \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right), \quad f(x, \mathbf{y}) \neq 0. \quad (1.6)$$

Тогда равенство (1.5) можно преобразовать к виду

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx - \frac{1}{2} [\dot{x}^2 f(x, \mathbf{y}) \lambda(x, \mathbf{y})]_{x_0}^x = 0$$

или

$$\int_{x_0}^x \lambda F(x, \mathbf{u}) dx = \frac{1}{2} [f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})]_{x_0}^x, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= a_{11} \dot{x} + \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k, \\ \lambda^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= f^*(x, \dot{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{2p(x, \mathbf{y})}{f(x, \mathbf{y})} dx \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В том случае, когда  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  обращается в нуль, интеграл в левой части равенства (1.7) становится несобственным из-за того, что при  $\dot{x} = 0$  значения  $\mathbf{u}' = \dot{\mathbf{u}}/\dot{x}$  и  $\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{w}}/\dot{x}$  могут стать бесконечно большими. Однако та же формула (1.7) показывает, что этот интеграл существует и принимает конечное значение. Заметим, что переменные  $f^*$  и  $\lambda^*$  не содержат отмеченной особенности.

Предположим, что силовая функция

$$U(x, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^x F(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (1.9)$$

имеет изолированный максимум по координате  $x$  при  $\mathbf{u}(\tau) \equiv 0$  и этот максимум остается изолированным, когда  $\mathbf{u}(\tau)$  меняется. Будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что равенство  $\dot{x}_0 = \dot{x}(x_0) = 0$  выполнено, когда  $x = x_0$ . Назовем амплитудой колебаний величину  $J = x_1 - x_0$ , где  $x_1 > x_0$  – следующее значение координаты  $x$ , когда  $\dot{x}_1 = \dot{x}(x_1)$  обращается в ноль. В этом случае аргумент изолированного максимума силовой функции  $U(x, \mathbf{u}(\cdot))$  будет принадлежать отрезку  $[x_0, x_1]$ . В общем случае этот аргумент может меняться в зависимости от выбранных вектор-функций  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\mathbf{w}(x)$ . На концах отрезка должно быть выполнено

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0, \quad (1.10)$$

а также

$$\begin{aligned}
 f^*(x_0, \dot{x}_0, \mathbf{u}(x_0), \dot{\mathbf{u}}(x_0), \mathbf{w}(x_0), \dot{\mathbf{w}}(x_0)) &= \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j(x_0) + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x_0), \\
 f^*(x_1, \dot{x}_1, \mathbf{u}(x_1), \dot{\mathbf{u}}(x_1), \mathbf{w}(x_1), \dot{\mathbf{w}}(x_1)) &= \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j(x_1) + \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k(x_1).
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Требуется найти кусочно-непрерывные управления  $\mathbf{u}(x)$ ,  $\mathbf{w}(x)$ , при которых достигается максимум (минимум) функционала  $J$ .

Теперь рассмотрим обратное движение маятника. Для того, чтобы сохранить смысл введенного функционала, обозначим  $\xi = -x$ . Пусть  $\mathbf{y}_\xi = (\mathbf{u}, \mathbf{u}'_\xi, \mathbf{w}, \mathbf{w}'_\xi)$ , где  $\mathbf{u}'_\xi = d\mathbf{u}/d\xi$ ,  $\mathbf{w}'_\xi = d\mathbf{w}/d\xi$ , вектор управляющих координат и их производных по координате  $\xi$  в этом случае. Уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( a_{11} \dot{\xi} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j - \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} \dot{w}_k \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -F(-\xi, \mathbf{u}).
 \tag{1.12}$$

Уравнение (1.3) можно представить как

$$\xi \frac{d}{d\xi} [f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) \dot{\xi}] - p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) \dot{\xi}^2 = -F(-\xi, \mathbf{u}),
 \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) &= a_{11} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} u'_{j\xi} - \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k} w'_{k\xi}, \\
 p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi} + 2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial a_{1,j+1}}{\partial \xi} u'_{j\xi} + 2 \sum_{k=1}^{n-s} \frac{\partial a_{1,s+k}}{\partial \xi} w'_{k\xi} \right) + \frac{\partial T^*(x, \mathbf{y}_\xi)}{\partial \xi}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\lambda_\xi = f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi) \exp \left( - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)} d\xi \right),
 \tag{1.14}$$

и формулу (1.7) можно переписать следующим образом:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \lambda_\xi F(-\xi, \mathbf{u}) d\xi = - \frac{1}{2} [f_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \lambda_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})] \Big|_{\xi_0}^{\xi},
 \tag{1.15}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= a_{11} \dot{\xi} - \sum_{j=1}^{s-1} a_{1,j+1} \dot{u}_j - \sum_{k=1}^{n-s+1} a_{1,s+k} \dot{w}_k, \\
 \lambda_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= f_\xi^*(-\xi, \xi, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \exp \left( - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2p_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)}{f_\xi(-\xi, \mathbf{y}_\xi)} d\xi \right).
 \end{aligned}$$

Амплитуда колебаний имеет вид  $J = \xi_1 - \xi_0$ , где  $\xi_1 > \xi_0$ ,  $\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}(\xi_0) = 0$ ,  $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}(\xi_1) = 0$  и  $\dot{\xi}(\xi) \neq 0$ , если  $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$ . Требуется найти кусочно-непрерывные управления  $\mathbf{u}(\xi)$ ,  $\mathbf{w}(\xi)$ , при которых значение функционала  $J$  максимально (минимально).

**2. Оптимальное раскачивание (успокоение) колебаний.** Пусть  $\lambda$  определена формулой (1.6). Тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1** (принцип наилучшего раскачивания). Предположим, что движение системы описывается уравнением (1.2) и существуют две точки  $x_0$  и  $x_1$ , причем  $x_0 < x_1$  и  $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Необходимыми условиями оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$ ,  $\mathbf{w}_M(x_1)$ , которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении  $x_0$  обеспечивают максимум величины  $x_1$ , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_1) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$ .

II. Необходимыми условиями оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_m(x_0)$ , которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении  $x_1$  обеспечивают минимум величины  $x_0$ , служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_0) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$ .

**Теорема 2** (принцип оптимального успокоения колебаний). Предположим, что движение системы описывается уравнениями (1.2) и имеются две точки  $x_0$  и  $x_1$ , такие, что  $x_0 < x_1$   $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Необходимые условия оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_m(\tau)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_m(x_1)$ , которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении  $x_0$  обеспечивают минимум величины  $x_1$ , выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x) &= \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_m(x_1) &= \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_1, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_1 - 0, \mathbf{y}(x_1 - 0))]$ .

II. Необходимые условия оптимальности управлений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(x)$ ,  $\dot{\mathbf{w}}_M(x_0)$ , которые, будучи стесненными ограничениями (1.4), при фиксированном значении  $x_1$  обеспечивают максимум величины  $x_0$ , выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M(x) &= \arg \max_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(x, \mathbf{u})], \\ \dot{\mathbf{w}}_M(x_0) &= \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\chi = \text{sign}[f(x, \mathbf{y}(x))f(x_0 + 0, \mathbf{y}(x_0 + 0))]$ .

Доказательство приведенных теорем достигается применением формул (1.7) и (1.15), а также с учетом того, что в уравнении (1.2) коэффициент  $a_{11} > 0$ . Обозначим

$$\Upsilon = F(x, \mathbf{u}) + p(x, \mathbf{y})\dot{x}^2 - \dot{x} \frac{d}{dx} [f(x, \mathbf{y})\dot{x}].$$

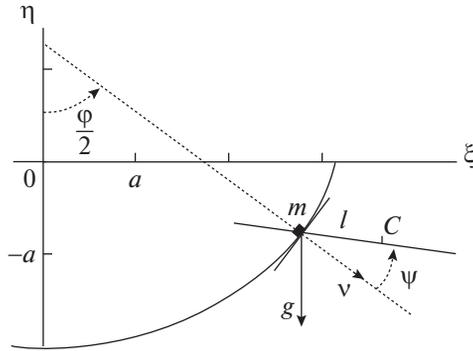


Рисунок. Маятник с точкой подвеса на циклоиде

При варьировании управляющих функций будем считать тождественно выполненным уравнение движения:  $\Upsilon \equiv 0$ . Интегрирующий множитель будет меняться вместе с изменением управления. Вместе с тем вариация тождества (1.5) примет вид

$$\int_{x_0}^x (\Upsilon \delta \lambda + \lambda \delta \Upsilon) dx = \int_{x_0}^x \lambda \delta \Upsilon dx = 0.$$

Поэтому при анализе влияния управления в формулах (1.7) и (1.15) множители  $\lambda$  и  $\lambda_\xi$  играют вспомогательную роль и не участвуют в процессе оптимизации. Они служат лишь для тождественного преобразования уравнения движения. Заметим также, что из формул (1.6) и (1.14) следует, что знаки множителей  $\lambda$  и  $\lambda_\xi$  совпадают со знаками функций  $f(x, y)$  и  $f(-\xi, y_\xi)$  соответственно.

Рассмотрим сначала утверждение I теоремы 1. Пусть значение координаты  $x = x_1$  соответствует максимально достижимому отклонению системы от положения равновесия, но первое равенство формулы (2.1) в какой-нибудь внутренней точке отрезка  $[x_0, x_1]$  нарушено. Тогда, как следует из формулы (1.7), в этой точке можно за счет управления  $\mathbf{u}$ , оставив значения других управлений неизменными, увеличить подинтегральную функцию в (1.7), а за счет этого увеличить значение скорости  $\dot{x}_1 > 0$ . Тогда вырастет и новое значение координаты  $x = x_1$ , при котором скорость  $\dot{x}$  делается равной нулю. Полученное противоречие доказывает необходимость выполнения первого соотношения равенства (2.1). Второе соотношение равенства (2.1) аналогичным образом следует из того, что функции  $f^*$  в (1.8), (1.11) линейно зависят от скоростей системы.

Для доказательства утверждения II теоремы 1 следует воспользоваться формулой (1.15) с следующей интерпретацией полученного результата в терминах независимой переменной  $x$ . Действительно, тогда должно быть

$$\mathbf{u}_m = \arg \max_{\mathbf{u}} [-\chi(\xi, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}'_M, \mathbf{w}_M, \mathbf{w}'_M) F(-\xi, \mathbf{u})] = \arg \min_{\mathbf{u}} [\chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}'_m) F(x, \mathbf{u})],$$

$$\dot{\mathbf{w}}_m = \arg \min_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ -\sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(\xi_l, \mathbf{u}_M, \mathbf{w}_M) \dot{w}_k \right] = \arg \max_{\dot{\mathbf{w}}} \left[ \sum_{k=1}^{n-s} a_{1,s+k}(x_0, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m) \dot{w}_k \right].$$

Теорема 2 является взаимной по отношению к теореме 1, и поэтому доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Подробное доказательство приведенных выше теорем с помощью метода первой вариации читатель может найти в [12].

**3. Пример. Маятник с точкой подвеса на перевернутой циклоиде.** Материальная точка массы  $m$  движется без трения в вертикальной плоскости по перевернутой циклоиде (брахистохроне). К этой точке подвешен стержень, имеющий массу  $M$  и центральный момент инерции  $I$ . Стержень способен совершать колебания в той же плоскости. Требуется, управляя движением стержня, заставить точку  $m$  двигаться по циклоиде с возрастающей амплитудой колебаний около ее нижней точки. Обозначим буквой  $l$  расстояние от центра масс  $C$  стержня до точки подвеса. Пусть  $\mathbf{v}$  — внешняя нормаль к циклоиде в точке подвеса стержня, а  $\psi$  — угол между стержнем и вектором  $\mathbf{v}$ . Угол  $\psi$  примем в качестве управления с целью раскачивания системы, ограничив его допустимые значения:  $\psi_m \leq \psi \leq \psi_M$  (рисунок).

Для описания движения введем абсолютную правоориентированную декартову систему координат  $O\xi\eta\zeta$ . Ось  $O\eta$  направим вертикально вверх. Ось  $O\xi$  расположим в плоскости движения. Тогда ось  $O\zeta$  будет перпендикулярна указанной плоскости. Уравнение перевернутой циклоиды представим в виде

$$\xi = a(\varphi + \sin \varphi), \quad \eta = -a(1 + \cos \varphi), \quad \zeta = 0,$$

где  $a > 0$  – постоянная, а  $\varphi$  – обобщенная координата, задающая положение точки  $m$  на циклоиде. Циклоида выпукла вниз. Ее внешняя нормаль  $\mathbf{v} = (v_\xi, v_\eta, 0)$  имеет координаты

$$v_\xi = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad v_\eta = -\cos \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{v}$  образует с отрицательным направлением оси  $O\eta$  угол  $\varphi/2$ .

Центр масс стержня имеет координаты

$$\xi_c = a(\varphi + \sin \varphi) + l \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right), \quad \eta_c = -a(1 + \cos \varphi) - l \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right).$$

Далее

$$\dot{\xi}_c = 2a\dot{\varphi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + l \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right), \quad \dot{\eta}_c = a\dot{\varphi} \sin \varphi + l \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right).$$

Кинетическая энергия системы принимает вид

$$T = 2(m + M)a^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) + 2Mla\dot{\varphi} \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I}{2} \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right)^2.$$

Найдем силовую функцию:

$$U = mga(1 + \cos \varphi) + Mg \left[ a(1 + \cos \varphi) + l \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right) \right].$$

Система уравнений Лагранжа записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A_\psi \dot{\varphi} + B_\psi \dot{\psi}) + C_\psi &= -Mlg \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right) + Q_\psi, \\ \frac{d}{dt} (A_\varphi \dot{\varphi} + B_\varphi \dot{\psi}) + C_\varphi &= -(m + M)ga \sin \varphi - \frac{Mgl}{2} \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_\psi &= \left( 2Mla \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I}{2} \right), \\ B_\psi &= (Ml^2 + I), \quad C_\psi = 2Mla\dot{\varphi} \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \psi. \\ \begin{cases} A_\varphi = 4(m + M)a^2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) + 2Mla \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I}{4}, \\ B_\varphi = 2Mla \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I}{2}, \\ C_\varphi = \left[ 2(m + M)a^2\dot{\varphi}^2 + 2Mla\dot{\varphi} \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \right) \cos \psi \right] \sin \varphi, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$Q_\psi$  – обобщенная сила, обеспечивающая требуемое изменение угла  $\psi$ .

В уравнениях (3.1) в качестве управляющей координаты выбирается угол  $\psi$ . В соответствии с уравнением (1.3) получим

$$f = A_\varphi + B_\varphi \psi', \quad p = - \left[ 2(m + M)a^2 + 2Mla \left( \frac{1}{2} + \psi' \right) \cos \psi \right] \sin \varphi, \quad (3.3)$$

где  $\psi'$  – производная по  $\varphi$ . Знак множителя  $\lambda$ , вычисляемого по формуле (1.6), совпадает со знаком функции  $f$ . Правая часть второго уравнения (3.1) зависит от угла  $\psi$ . Оптимизируемая по величине  $\psi$  функция в формулировке теорем 1 и 2 принимает вид

$$\Phi = \chi(x, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m, \mathbf{w}'_m)F(x, \mathbf{u}) = -\chi \left[ (m + M)ga \sin \varphi + \frac{Mgl}{2} \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \psi \right) \right]. \quad (3.4)$$

Естественно принять  $|\psi| \leq \pi/2$ , так как при превышении этих пределов конструкция системы может быть нарушена. Экстремальные значения функции  $\Phi$  достигаются при

$$\psi = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \rightarrow \psi' = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, для указанных экстремалей будем иметь

$$f = A_\varphi - \frac{B_\varphi}{2} = 4(m + M)a^2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) + Mla \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \psi > 0.$$

Поэтому коэффициент  $\chi > 0$ . Сузим допустимые границы изменения угла  $\psi$ :

$$-\frac{\pi}{2} < \psi_m < 0, \quad 0 < \psi_M < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда оптимальными могут быть также режимы постоянства функции  $\psi(\varphi)$ , для которых  $\psi' = 0$ , и будет выполнено

$$f = A_\varphi = 4(m + M)a^2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) + 2Mla \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \psi + \frac{Ml^2 + I}{4} > 0.$$

Следовательно, и в этом случае оказывается  $\chi > 0$ .

Применим утверждение I теоремы 1. Пусть  $\varphi_0 < 0$  есть левая граница отклонения по углу  $\varphi$ , а  $\varphi_1 > 0$  – соответственно правая граница, и в начальный момент  $\varphi = \varphi_0$ . Из формулы (2.1) видим, что наилучший способ достичь максимума положительного полукослабления состоит в применении правила

$$\psi = \begin{cases} \psi_M, & \text{если } \frac{\varphi}{2} + \psi_M < -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, & \text{если } \frac{\varphi}{2} + \psi_m \leq -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} + \psi_M, \\ \psi_m, & \text{если } \frac{\varphi}{2} + \psi_m > -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Применим утверждение II теоремы 1. Пусть теперь в начальный момент  $\varphi = \varphi_1 > 0$ . Тогда, напротив, требуется минимизировать значение  $\varphi_0$  отрицательного полуразмаха. Из (2.2) заключаем, что наилучший режим для достижения минимума отклонения отрицательного полуразмаха состоит в применении формулы

$$\psi = \begin{cases} \psi_m, & \text{если } \frac{\varphi}{2} + \psi_m > \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, & \text{если } \frac{\varphi}{2} + \psi_m \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} + \psi_M, \\ \psi_M, & \text{если } \frac{\varphi}{2} + \psi_M < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.6)$$

В итоге получается синтез управления для оптимального раскачивания маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (3.3); после достижения минимального отрицательного отклонения – формулы (3.2) и т.д.

Из теоремы 2 выводится синтез управления для оптимального успокоения колебаний маятника: после достижения максимального положительного отклонения маятника следует применять формулы (3.2), после достижения минимального отрицательного отклонения – формулы (3.3) и т.д.

Когда зависимость  $\psi(\varphi)$  установлена, второе уравнение системы (3.1) становится замкнутым и его можно решать различными известными методами [2]. В частности, для решения можно применить формулу (1.7). После определения функции  $\varphi(t)$  становится возможным из первого уравнения (3.1) найти обобщенную силу  $Q_\psi$ , обеспечивающую требуемое изменение угла  $\psi$ .

Из системы уравнений (3.1) видим, что при  $l = 0$  угол  $\psi$  становится циклической координатой. Тогда, чтобы обеспечить раскачивание, достаточно воспользоваться правилами разд. 2 для управления скоростями в конце полуразмаха.

**Заключение.** Применение предложенных алгоритмов управления, получаемых из необходимых условий оптимальности (2.1)–(2.4), предполагает учет информации о моментах времени достижения экстремальных значений оптимизируемой координаты и информации о направлении соответствующего полукоса. Условия оптимальности (2.1)–(2.4) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина [4]. Это облегчает применение указанных условий для рассмотренного класса задач. Дополнительным преимуществом предложенного метода служит то, что закон оптимального управления получается непосредственно в виде зависимости от оптимизируемой координаты. Используя предложенные условия оптимальности, можно получить аналитические решения для некоторых новых нетривиальных модельных задач. Эти условия упрощают решение соответствующих задач в многомерном пространстве управляющих функций по сравнению с известными методами. Они эффективны как для задач раскачивания, так и для задач успокоения колебаний.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2, испр. М.: МЦНМО, 2018. 344 с. ISBN 978-5-94057-907-6.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 393 с.
4. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Фантони И., Лозано Р. Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий / Пер. с франц. Ижевск: К-Динамика, 2012. 312 с. ISBN 978-5-906268-01-3.
6. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с. ISBN 978-5-9221-1460-8.
7. Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. К построению оптимальных режимов раскачивания двузвенного физического маятника // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 217–226. ISSN 0032-8235.
8. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения “вверх ногами” // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 163–176. ISSN: 0002-3388. <https://doi.org/10.1134/S0002338819060052>
9. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 4. С. 165–173.
10. Лавровский Э.К., Формальский А.М. О качении колеса посредством управления его дисбалансом // ПММ. Т. 70. Вып. 3. 2006. С. 371–383.
11. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. Т. 63. Вып. 1а. С. 5–32.
12. Golubev Yu.F. Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 11. P. 2596–2607. ISSN: 1995-0802. <https://doi.org/10.1134/S199508022111010X>

---

---

**УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

---

---

УДК 681.746.3

**БАЙЕСОВСКОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ СОСТОЯНИЯ  
ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ  
ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА: ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА  
КОРРЕКЦИИ ВЕСА АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ<sup>1</sup>****© 2022 г. О. В. Ермолин<sup>a</sup>, С. М. Мужичек<sup>b</sup>, В. И. Павлов<sup>c,\*</sup>, Г. Г. Себряков<sup>b</sup>,  
А. А. Скрынников<sup>d</sup>, С. В. Толстых<sup>c</sup>**<sup>a</sup> ЦНИИ ВВС Минобороны России, Москва, Россия<sup>b</sup> Государственный научно-исследовательский ин-т авиационных систем, Москва, Россия<sup>c</sup> Тамбовский государственный технический ун-т, Тамбов, Россия<sup>d</sup> МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

\*e-mail: vpavl@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2022 г.

После доработки 24.01.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

В рамках байесовского подхода разработан метод распознавания сигнально-помеховых ситуаций, возникающих при функционировании информационно-измерительной системы подвижного объекта. Предложен метод коррекции веса априорной информации в случае ее существенного отличия от апостериорной. Приведен вариант коррекции с использованием так называемых индикаторов сопутствующих признаков сигналов и помех. Показана целесообразность разработки новых методов обработки информации для конкретных практических приложений, в частности для информационно-измерительной системы подвижного объекта.

DOI: 10.31857/S0002338822040060

**Введение.** Информационно-измерительные системы (ИИС) подвижных объектов, как правило, подвержены действию естественных и преднамеренных помех в спектральном диапазоне их датчиков информации. Это, в частности, относится к бортовым радиолокационным станциям летательных аппаратов в силу открытости их информационных каналов [1–6]. Из-за действия помех, особенно преднамеренных [7–11], измерения фазовых координат относительного положения летательного аппарата и цели, выполняемые бортовой радиолокационной станцией, осуществляются с ошибками [12–14]. Одним из приемов обеспечения помехоустойчивости ИИС является адаптация их структуры к изменениям сигнально-помеховой обстановки [15–19]. Данную адаптацию целесообразно выполнять методами теории систем со случайной сменой структуры в пространстве состояний [20–23].

В [24] в рамках байесовского подхода разработан алгоритм распознавания сигнально-помеховых ситуаций, возникающих в результате воздействия организованных помех на ИИС, в котором помимо измерителей фазовых координат и априорной информации об интенсивностях смены сигнально-помеховых ситуаций используются так называемые индикаторы сопутствующих признаков сигналов и помех [25, 26]. В данном алгоритме при задержках принятия решений предусмотрена возможность оперативной коррекции априорной информации, в том числе за счет использования индикаторов сопутствующих признаков помех. В статье на упрощенном примере применительно к бортовой радиолокационной станции летательного аппарата исследуется целесообразность коррекции веса априорной информации в алгоритме распознавания сигнально-помеховых ситуаций.

**1. Постановка задачи.** В качестве подвижного объекта рассматривается летательный аппарат, располагающий ИИС на базе бортовой радиолокационной станции. Математические модели

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 20-08-00091 а; 19-08-00487 а; 19-08-00502 а; 19-29-06077 мк).

**Таблица 1.** Классификация сигнально-помеховых ситуаций

$s$	Маскирующая помеха					Имитирующая помеха			
	ШШ	УШ	СШ	ХИ	...	УД	УС	МП	...
1	–	–	–	–		–	–	–	
2	+	–	–	–		+	+	–	
...									
$s$	–	–	–			+	–	–	
...									
$l$	–	–	+	+		–	–	+	
...									
$S$	–	+	–	–		–	+	–	

векторов фазовых координат подвижного объекта  $\mathbf{x}$ , сигналов измерений  $\mathbf{z}$  и индикации сопутствующих признаков сигналов и помех  $\mathbf{r}$ , размерность которых соответственно равна  $i_x, i_z, n_r$ , имеют вид

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}^{(s)}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\xi}_k), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}^{(s)}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\zeta}_k), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{r}_k = \boldsymbol{\pi}(J_k, Pr_k). \quad (1.3)$$

Здесь  $k$  – номер дискрета времени;  $\mathbf{u}$  – вектор управлений размерностью  $n_u$ ;  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}$  – соответственно векторы шумов состояния и измерения с размерностями  $n_\xi = i_x, n_\zeta = i_z$ ;  $\mathbf{f}, \mathbf{h}$  – известные вектор-функции векторных аргументов;  $\boldsymbol{\pi}(J_k, Pr_k)$  – матрица-строка условных вероятностей переходов индикаторов из состояния  $r_{k-1}$  в состояние  $r_k$  с элементами  $\pi_{n,k}(r_k | r_{k-1}, Pr) = P[r_k, k, J_n, Pr | r_{k-1}, k-1, J_n, Pr]$ ,  $n = \overline{1, N}$  – номер признака;  $P[\cdot]$  – символ вероятности;  $J_n = q(Pr, k | s, k)$  – входная индикаторная функция, характеризующая наличие признака организованной помехи;  $Pr$  – регистрируемый признак,  $Pr = 0, 1$ ;  $s$  – номер сигнально-помеховой ситуации (см. табл. 1), каждой из которых соответствует аналогично обозначенная, предварительно разработанная структура ИИС,  $s = \overline{1, S}$ ;  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, \dots, x_{i,k}]^\top$  – вектор фазовых координат подвижного объекта,  $i = \overline{1, I}$ ,  $I$  – количество измеряемых фазовых координат.

Алгоритм распознавания сигнально-помеховых ситуаций, в котором предусматривается возможность коррекции веса априорной информации, имеет следующий вид [24]:

$$\hat{P}_k^{(s)} = \frac{\tilde{P}_k^{(s)} \boldsymbol{\pi}(J_k, Pr_k) \exp[-0.5g^{(s)}(\mathbf{z})]}{\sum_{s=1}^S \tilde{P}_k^{(s)} \boldsymbol{\pi}(J_k, Pr_k) \exp[-0.5g^{(s)}(\mathbf{z})]}, \quad (1.4)$$

$$\tilde{P}_k^{(s)} = \hat{P}_{k-1}^{(s)} - B\Delta t \left( \hat{P}_{k-1}^{(s)} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^S \tilde{\gamma}^{(sl)} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^S \tilde{\gamma}^{(ls)} \hat{P}_{k-1}^{(l)} \right), \quad B = \frac{1}{b\Delta\tau + 1}, \quad (1.5)$$

$$g^{(s)}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^I g^{(s)(i)}(z^{(i)}), \quad s = \overline{1, S}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (1.6)$$

$$g^{(s)(i)}(z^{(i)}) = \left[ \frac{z^{(i)} - \hat{x}^{(s)(i)}}{\sigma^{(i)}} \right]^2, \quad (1.7)$$

$$\hat{s} = \arg \max_S (\hat{P}_k^{(s)}). \quad (1.8)$$

**Таблица 2.** Выходные сигналы информационных устройств

$s$	Измеритель				Индикатор			
	$\alpha\beta$	$D$	$V$	...	ИМ	СИ	ЧФ	...
1	$\alpha\beta$	$D$	$V$		0	0	0	
2	$\alpha\beta$	$\sigma_D$	$\sigma_V$		1	0	0	
...								
$s$	$\alpha\beta$	$D_{и}$	$V_{и}$		1	1	0	
...								
$l$	$\alpha\beta$	$\sigma_D$	$\sigma_V$		1	1	1	
...								
$S$	$\alpha\beta$	$\sigma_D$	$\sigma_V$		1	0	1	

Здесь  $z^{(i)}$ ,  $\sigma^{(i)}$  – соответственно выходной сигнал  $i$ -го измерителя и его среднего квадратического отклонения;  $\hat{x}^{(s)(i)}$  – среднее значение  $i$ -й фазовой координаты в  $s$ -й сигнально-помеховой ситуации;  $\tilde{\gamma}^{(ls)}$ ,  $\tilde{\gamma}^{(sl)}$  – априорные интенсивности смены сигнально-помеховых ситуаций;  $b$  – оптимизируемый коэффициент;  $\Delta t$  – промежуток времени от момента изменения состояния любого из индикаторов сопутствующих признаков помех до момента изменения номера структуры  $s$  в соответствии с критерием (1.8);  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ .

Требуется на основании (1.1)–(1.8) определить степень влияния соответствия априорных  $\tilde{\gamma}^{(ls)}$ ,  $\tilde{\gamma}^{(sl)}$  и фактических  $\gamma^{(ls)}$ ,  $\gamma^{(sl)}$  интенсивностей смены сигнально-помеховых ситуаций на эффективность принятия решения о сложившейся сигнально-помеховой ситуации и соответственно номере структуры ИИС подвижного объекта. Также требуется предложить рациональный вариант коррекции веса априорной информации в случаях ее несоответствия фактической.

**2. Вариант исследования алгоритма распознавания сигнально-помеховых ситуаций.** В общем случае основными измерительными каналами бортовой радиолокационной станции летательного аппарата являются угломерный  $\alpha\beta$ , дальности  $D$  и скорости сближения  $V$  с целью [27]. В качестве организованных помех измерительным каналам могут применяться маскирующие – широкополосные шумовые (ШШ), узкополосные шумовые (УШ), скользящие шумовые (СШ), хаотические импульсные (ХИ) и др., а также имитирующие – уводящие по дальности (УД), скорости (УС), мерцающие (МП) и др. в различных сочетаниях. При воздействии помех могут наблюдаться такие явления, как скачкообразное увеличение мощности принимаемого сигнала, увеличение количества принимаемых импульсов, интенсивное изменение частоты и др. Подобные явления могут регистрироваться соответствующими устройствами, называемыми индикаторами сопутствующих признаков – индикатором мощности (ИМ), счетчиком импульсов (СИ), частотным фильтром (ЧФ) и др.

Пусть по результатам предварительного анализа определены: перечень организованных помех; возможные сигнально-помеховые ситуации, составляющие полную группу несовместных событий; априорные интенсивности смены  $\tilde{\gamma}^{(sl)}$  из  $s$ -й в  $l$ -ю и  $\tilde{\gamma}^{(ls)}$  из  $l$ -й в  $s$ -ю сигнально-помеховых ситуаций; множество  $N$  сопутствующих признаков  $Pr$  воздействия помех на ИИС. Вариант классификации сигнально-помеховых ситуаций при функционировании ИИС показан в виде табл. 1. Ожидаемые выходные сигналы измерителей и индикаторов сопутствующих признаков в соответствующих ситуациях приведены в табл. 2. На рис. 1 представлен фрагмент графа возможных взаимных переходов между ситуациями, а на рис. 2 – возможная реализация их смены.

Исследование алгоритма (1.4)–(1.8) осуществлялось следующим образом. Моделировалось движение летательного аппарата и функционирование его бортовой радиолокационной станции в беспомеховой обстановке в соответствии с рекомендациями из [27]. Воздействие организованных помех моделировалось путем изменения в случайные моменты времени сигнально-помеховых ситуаций из табл. 1. При этом априорные интенсивности переходов  $\tilde{\gamma}^{(ls)}$ ,  $\tilde{\gamma}^{(sl)}$  назначались в соответствии с правилами постановки помех, в то время как фактические  $\gamma^{(ls)}$ ,  $\gamma^{(sl)}$  задавались с

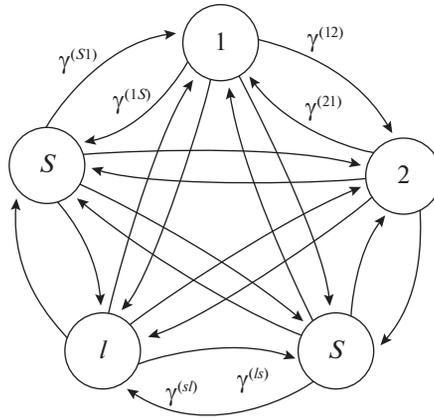


Рис. 1. Граф переходов

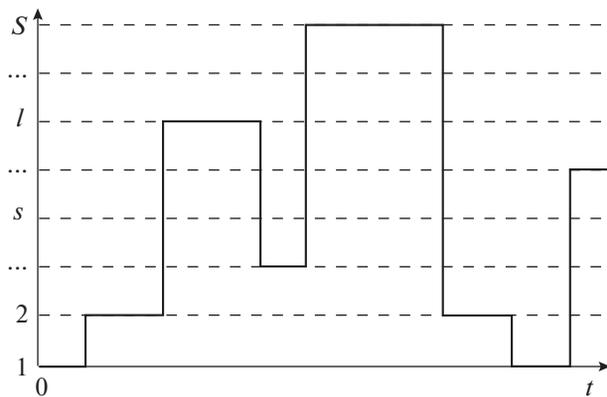


Рис. 2. Реализация смены структур

помощью ключа на базе датчика случайных чисел. Предполагалось, что воздействие организованных помех приводило к существенному изменению в выражении (1.7)  $\sigma^{(i)}$  из-за действия маскирующих и  $z^{(i)}$  из-за действия имитирующих помех.

Моделирование функционирования индикаторов сопутствующих признаков сигналов и помех является предметом отдельного исследования и в данной статье не рассматривается. Элементы матрицы  $\pi(J_k, Pr_k)$  условных вероятностей переходов индикаторов из состояния  $r_{k-1}$  в состояние  $r_k$  задавались в соответствии с физической сущностью воздействия помех на информационные каналы бортовой радиолокационной станции летательного аппарата.

В качестве показателей эффективности принятия решения о сложившейся сигнально-помеховой ситуации выступали: задержка  $\Delta\tau$  – промежуток времени от момента изменения состояния любого из индикаторов сопутствующих признаков помех до момента изменения номера  $s$  в соответствии с критерием (1.8); уровень вероятности  $\hat{P}_k^{(s)}$  сложившейся сигнально-помеховой ситуации относительно других ситуаций.

В процессе исследования рассматривались случаи изменения сигнально-помеховых ситуаций, при которых наблюдались низкие интенсивности шумов измерителей и корректное функционирование обнаружителей сопутствующих признаков помех. В первом случае априорно оцениваемые интенсивности переходов  $\tilde{\gamma}^{(sl)}$ , входящие в (1.5), соответствовали фактическим  $\gamma^{(sl)}$ . Время, затрачиваемое алгоритмом на принятие правильного решения, составляло величину порядка  $0.01 < \Delta\tau < 0.05$ , а значения апостериорных вероятностей ситуаций, складывающихся в текущий момент времени, находились в пределах  $0.95 < \hat{P}_k^{(s)} < 0.99$ . В описанных условиях

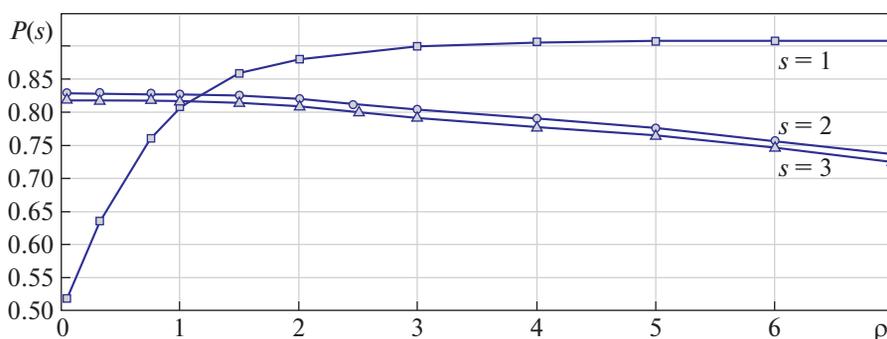


Рис. 3. Апостериорные вероятности структур

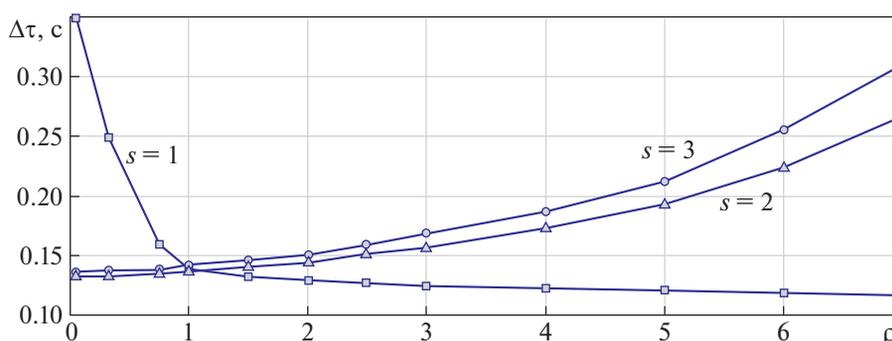


Рис. 4. Задержка принятия решения

алгоритм распознавания по своим динамическим характеристикам близок к ключевой схеме, что полностью подтверждает его работоспособность. Характеристики алгоритма существенно превосходят соответствующие характеристики оператора.

Во втором случае использовалась ложная априорная информация о переходах из  $s$ -й в  $l$ -ю помеховую ситуацию. Значения апостериорных вероятностей фиксировались после принятия решения об изменении помеховой ситуации. На рис. 3 и 4 показаны соответственно графики изменения  $\hat{P}_k^{(s)}$  и  $\Delta\tau$  в зависимости от  $\rho = \tilde{\gamma}^{(ls)}/\gamma^{(ls)}$  для различных значений  $b = 1...100 c^{-1}$  в формуле (1.5). Моделирование проводилось на примере трех ( $S = 3$ ) сигнально-помеховых ситуаций с использованием одного измерителя и одного индикатора сопутствующего признака помехи. При этом ложная интенсивность переходов задавалась только в первую ситуацию ( $\gamma^{(s1)} = false$ ).

Из анализа графиков на рис. 3 и 4 можно сделать следующие выводы: при малых интенсивностях шумов измерителей и корректном функционировании индикаторов сопутствующих признаков причиной задержек в принятии решения о смене структуры ИИС подвижного объекта является несоответствие априорных и фактических интенсивностей смены ситуаций. Ошибки при назначении априорных интенсивностей переходов порядка  $0.5 < \rho < 5$  оказывают слабое влияние на работу алгоритма, однако приводят к “затяжке” в принятии правильного решения до величины  $\Delta\tau \approx 0.2 c$ . Ложные решения появляются при значениях  $\rho < 0.1$  или  $\rho > 10$ , т.е. при априорных ошибках в 10 и более раз. Уменьшение  $\Delta\tau$  и соответственно увеличение  $\hat{P}_k^{(s)}$  может быть достигнуто путем оперативной коррекции веса априорной информации, например, путем введения коэффициента  $B$  в формуле (1.5). При этом снижение веса априорной информации для алгоритма (1.4)–(1.8) более чем в 5 раз нецелесообразно.

**Заключение.** Информационные системы подвижных объектов с открытыми входными каналами весьма часто функционируют в условиях сложной и изменчивой сигнально-помеховой обстановки. Для корректного функционирования информационных систем априорная информация о характеристиках помех становится особенно актуальной при их большой интенсивности.

Для случая, когда априорная информация является ложной, в статье предложен метод коррекции ее веса в алгоритме управления структурами информационной системы. Поиск правил решения (алгоритмов обработки информации), обеспечивающих минимизацию условного риска при изменяющихся параметрах сигналов и помех в процессе функционирования ИИС подвижных объектов, является актуальной задачей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верба В. С.* Анализ состояния и тенденций развития бортовых РЛС авиационных комплексов радиолокационного дозора и наведения // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 11. С. 2–15.
2. Авиационные радиолокационные комплексы и системы / Под ред. П.И. Дудника. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2006. 1112 с.
3. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория. Справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Радиотехника, 2007. 512 с.
4. *Нечаев Е.Е., Дерябин К.С.* Современные бортовые радиолокационные станции и антенные решетки многофункциональных авиационных комплексов военного назначения // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 221. С. 90–105.
5. *Куприяшкин И.Ф., Лихачёв В.П., Рязанцев Л.Б.* Малогабаритные РЛС с непрерывным частотно-модулированным излучением. Монография. М.: Радиотехника, 2020. 280 с.
6. *Буйлов Е.Н., Горшков С.А.* Моноимпульсный радиолокатор сопровождения по дальности и угловым координатам с широкополосным зондирующим сигналом // Журнал радиоэлектроники. 2021. № 6. С. 1–24.
7. Модели информационного конфликта средств поиска и обнаружения. Монография / Под ред. Ю.Л. Козирацкого. М.: Радиотехника, 2013. 232 с.
8. *Куприянов А.И., Шустов Л.Н.* Радиоэлектронная борьба. Основы теории. М.: Вузовская книга, 2011. 800 с.
9. *Леньшин А.В.* Бортовые системы и комплексы радиоэлектронного подавления. Воронеж: Научная книга, 2014. 590 с.
10. *Емельянов Ю.* Взгляды руководства ВС США на ведение электронной войны в операциях XXI века с использованием сил воздушно-космического нападения // Зарубежное военное обозрение. 2015. № 9. С. 63–72.
11. *Погодин С.* Обновление парка самолетов электронной войны ВВС США // Зарубежное военное обозрение. 2020. № 3. С. 55–58.
12. *Артюшенко В.М., Воловач В.И.* Статистические характеристики смеси сигнала и аддитивно-мультипликативных помех с негауссовским характером распределения // Радиотехника. 2017. № 1. С. 95–102.
13. *Klemm R.* Principles of Space-Time Adaptive Processing, 3rd ed. Radar, Sonar, Navigation and Avionics. Ser. 21. The Institution of Electrical Engineers and Technology. UK, 2006. 670 p.
14. *Поздняков А.А., Шаталов А.А., Шаталова В.А.* Алгоритм распознавания медленно и быстро флуктуирующих целей на фоне помех многочастотной РЛС с ФАР // Вестник воздушно-космической обороны. 2019. Вып. 2(22). С. 85–95.
15. *Abramovich Y.I., Spenser N.K., Gorokhov A.Y.* A Modified GLRT and AMF Framework for Diagonally Loaded and Fast Maximum-Likelihood Adaptive Detectors // IEEE Trans. on Aerospace and Electr. Systems. 2007. V. 43. № 3. P. 1017–1051.
16. *Анохин В.Д., Фаузи С., Кильдюшевская В.Г.* Обработка радиолокационных сигналов на фоне комбинированных помех // Радиотехника. 2009. № 5. С. 133–135.
17. *Макаров П.А., Колтышев Е.Е., Мухин В.В., Сусяков Д.Ю.* Адаптивная пространственно-временная обработка сигнала для селекции наземных движущихся целей в моноимпульсной РЛС // Вестник воздушно-космической обороны. 2014. № 4. С. 55–67.
18. *Xu J., Zhu S., Liao G.* Space-time-range Adaptive Processing for Airborne Radar Systems // IEEE Sensors J. 2015. V. 15. № 3. P. 1602–1610.
19. *Peto T., Seller R.* Space-time Adaptive Cancellation in Passive Radar Systems // Intern. J. Antennas Propag. 2018. V. 2018. P. 1–16.
20. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалёв В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
21. *Бухалёв В.А.* Оптимальное сглаживание в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит. 2013. 188 с.

22. *Болдинов В.А., Бухалёв В.А., Скрынников А.А.* Игровое управление случайной скачкообразной структурой объекта в чистых стратегиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 18–27.
23. *Павлов В.И.* Синтез помехоустойчивых информационных систем методами теории систем со случайной структурой // Радиотехника. 2000. № 3. С. 89–92.
24. *Muzhichek S.M., Sebryakov G.G., Pavlov V.I., Tolstych S.V., Kenzhekhanova M.B.* Bayesian Recognition of a Moving Object Information-measuring System State: A Priori Information Weight Correction // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering: 2020 Workshop on Materials and Engineering in Aeronautics (MEA 2020). Moscow, 2020.
25. *Бухалёв В.А.* Рекуррентные алгоритмы распознавания и оценивания состояния динамического объекта по информации от измерителей и индикаторов // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 148–156.
26. *Павлов В.И.* Оптимальное обнаружение изменения свойств случайных последовательностей по информации измерителя и индикатора // АиТ. 1998. № 1. С. 86–94.
27. Авиационные системы радиоуправления. Т. 1. Принципы построения систем радиоуправления. Основы синтеза и анализа / Под ред. А.И. Канащенкова и В.И. Меркулова. М.: Радиотехника, 2003. 192 с.

---

---

**ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

---

---

УДК 519.977

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ТРАЕКТОРИИ  
ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНОЙ**

© 2022 г. А. С. Бортаковский

МАИ (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*e-mail: [asbortakov@mail.ru](mailto:asbortakov@mail.ru)

Поступила в редакцию 18.03.2022 г.

После доработки 23.03.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Рассматривается задача быстродействия для управляемой динамической системы пятого порядка, описывающей плоское движение с ограниченным ускорением. Траектории движения предлагаемой модели отличаются от путей Маркова–Дубинса, траекторий машин Айзекса, Ридса–Шеппа и др. неограниченной кривизной, т.е. допускаются повороты на месте. Такая модель точнее описывает возможности некоторых видов дорожных машин и летательных аппаратов. Угловая скорость модели меняется непрерывно, тем самым исключаются скачки угловой скорости, характерные для траекторий машины Дубинса и ее обобщений. Описаны оптимальные по быстродействию траектории движения предлагаемой модели. Приведены примеры кратчайших траекторий, попадающих в заданное терминальное положение (цель).

DOI: 10.31857/S0002338822040035

**Введение.** Первые задачи поиска кратчайшего пути с ограниченной кривизной, связанные с проектированием железных дорог, были поставлены и решены Марковым А.А. [1]. Детальное исследование кратчайших кривых с ограниченной кривизной и заданными на концах касательными было проведено Дубинсом [2]. Эти задачи приобрели особый интерес после публикации работы Айзекса [3], поскольку кратчайшие кривые стали рассматриваться как оптимальные по быстродействию траектории движения управляемого объекта — машины (автомобиля) или летательного аппарата. Простота и адекватность модели Дубинса обуславливает широкое ее использование в различных задачах планирования маршрутов автомобилей, самолетов, морского транспорта, в задачах группового управления [4], в задачах перехвата подвижной цели [5] и др.

Практический интерес представляют обобщения машины Дубинса. Модель Ридса–Шеппа [6] допускает движение автомобиля задним ходом. В модели Бердышева [7] движение происходит с изменением линейной скорости при ограниченном ускорении. В перечисленных моделях допускаются скачки угловой скорости, которые соответствуют импульсным воздействиям (ударам), при этом кривизна траектории имеет разрывы. Такое движение не соответствует обычному (штатному) поведению объектов управления в технических приложениях. Заметим, что даже железнодорожные пути, на что обращал внимание Марков А.А., имеют промежуточные участки в местах сопряжения прямолинейного пути и дуги окружности [1], которые обеспечивают непрерывное изменение кривизны пути. Управление в модели Зеликина–Борисова [8] осуществляется угловым ускорением, а не угловой скоростью. Поскольку линейная скорость постоянна, кривизна траектории меняется линейно.

Во всех перечисленных моделях линейная скорость отлична от нуля, т.е. исключаются повороты на месте. Однако для некоторых типов машин (автопогрузчики, машины на гусеничной тяге, роботы), а также летательных аппаратов (вертолеты, квадрокоптеры) повороты на месте являются допустимыми. Более того, они могут быть составной частью оптимальной траектории.

В предлагаемой модели движения угловая и линейная скорости непрерывны и меняются с ограниченными ускорениями. При этом допускаются повороты на месте (движение с нулевой линейной скоростью), а также движение задним ходом. Возможны дополнительные ограничения на величину линейной и угловой скоростей. Практический интерес представляет также модель, в которой изменение линейной скорости допускается только на прямолинейных участках движения, а повороты выполняются с постоянной линейной скоростью. В этом случае траекто-

рия представляет собой клотоиду (спираль Эйлера, спираль Корню) [9], кривизна которой изменяется линейно. Такие кривые, в частности, используются в дорожном строительстве, поскольку управление автомобилем на такой дороге достигается плавным поворотом руля.

На основе принципа максимума показано, что при оптимальном управлении линейное и угловое ускорения кусочно-постоянны [10]. Поэтому оптимальная траектория представляет собой непрерывное соединение конечного числа частей — гладких участков движения с постоянными ускорениями. Количество участков определяется терминальными условиями и ограничениями на линейную и угловую скорости движения. Для постоянных ускорений система уравнений движения интегрируется аналитически. В случае ненулевых ускорений решение выражается через интегралы Френеля [9]. Таким образом, оптимальная траектория составляется из частичных участков, аналитическое представление которых известно. Поэтому остается найти только моменты переключения с одного участка на другой. Иначе говоря, задача сводится к конечномерной минимизации по моментам переключений, причем количество таких участков небольшое. Для задачи попадания в цель, т.е. заданное терминальное положение на плоскости, — не более трех, в общем случае, видимо, — не более шести. Такая минимизация выполняется без особого труда любым подходящим численным методом. Приводятся примеры оптимальных траекторий, попадающих в заданную цель. Показано, что оптимальные траектории имеют разное количество гладких участков для так называемых “дальних” и “ближних” целей. Получена граница, разделяющая множество этих целей.

**1. Постановка задачи.** Пусть на промежутке времени  $[0, T]$  движение системы управления описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \gamma(t), \quad \dot{y}(t) = v(t) \sin \gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \quad \dot{v}(t) = u(t), \quad \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t), \quad (1.1)$$

где  $x, y$  — координаты положения на плоскости,  $\gamma$  — угол направления движения (вперед), отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс,  $v, u$  — линейные скорость и ускорение, а  $\omega, \varepsilon$  — угловые скорость и ускорение соответственно. Управление осуществляется выбором ускорений  $u$  и  $\varepsilon$ , удовлетворяющих ограничениям  $|u(t)| \leq U, |\varepsilon(t)| \leq \mathcal{E}$ , где  $U$  и  $\mathcal{E}$  — заданные максимальные значения ускорений.

Начальное состояние системы задано

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad v(0) = v_0, \quad \omega(0) = \omega_0. \quad (1.2)$$

Конечное состояние может задаваться по-разному, в зависимости от постановки задачи. Для задачи попадания в точечную цель фиксировано только конечное положение  $(x_T, y_T)$  объекта управления:

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T. \quad (1.3)$$

Для задачи попадания в цель с заданным конечным направлением движения  $\gamma_T$  к равенствам (1.3) добавляется условие  $\gamma(T) = \gamma_T$  и, быть может, еще условие  $\omega(T) = 0$ ; для задачи остановки объекта в заданном положении к равенствам (1.3) добавляется требование  $v(T) = 0$ . Возможны и другие комбинации конечных условий [8], в частности, когда задано конечное состояние  $(x_T, y_T, \gamma_T, v_T, \omega_T)$  системы

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \gamma(T) = \gamma_T, \quad v(T) = v_T, \quad \omega(T) = \omega_T. \quad (1.4)$$

Допустимыми процессами считаем траектории  $x(\cdot), y(\cdot), \gamma(\cdot), v(\cdot), \omega(\cdot)$  — непрерывные и кусочно-гладкие на  $[0, T]$  функции и управления  $u(\cdot), \varepsilon(\cdot)$  — кусочно-непрерывные на  $[0, T]$  функции, удовлетворяющие уравнениям движения (1.3), терминальным условиям и ограничениям. Требуется найти наименьшее время  $\min T$  и оптимальный процесс, на котором это время достигается, т.е. решить задачу быстродействия.

В постановке задачи возможны дополнительные условия, отражающие особенности прикладных задач. В первую очередь это естественное ограничение линейной скорости:  $v(t) \in [0, V]$  при  $t \in [0, T]$ , где  $V$  — заданная величина максимальной линейной скорости. Менее естественно выглядят ограничения  $|v(t)| \leq V$  или  $V_- \leq v(t) \leq V_+$ , где  $V_- < 0, V_+ > 0$ , допускающие отрицательные значения линейной скорости. Такие значения скорости формально следует понимать как движение назад (задний ход). В этом случае, в отличие от модели Ридса–Шеппа [6], не требуется вводить дополнительный управляющий параметр, определяющий направление движения — вперед или назад.

Во-вторых, возможно дополнительное ограничение угловой скорости  $|\dot{\alpha}(t)| \leq \Omega$ , где  $\Omega$  – заданная величина максимальной по модулю допустимой скорости. Это ограничение менее “значимо”, чем ограничение линейной скорости. Действительно, рост угловой скорости не может быть продолжительным, так как полный поворот на угол, превосходящий  $2\pi$ , вряд ли возможен на оптимальной траектории [11]. Заметим, что ограничения скоростей относятся к фазовым ограничениям в задаче оптимального управления.

Представляет интерес модель гибридного движения, когда повороты выполняются с постоянной линейной скоростью, а изменение линейной скорости допустимо только при прямолинейном движении. Такое движение получается, если в (1.1) дополнительно потребовать  $u(t)\dot{\omega}(t) = 0$  при  $t \in [0, T]$ . Однако это смешанное ограничение (на управление и фазовую переменную) трудно учитывать. Поэтому проще записать гибридную (переключаемую) систему, прямолинейное движение которой чередуется с поворотами. Прямолинейное движение описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = v(t) \cos \gamma, \quad \dot{y}(t) = v(t) \sin \gamma, \quad \dot{v}(t) = u(t), \quad (1.5)$$

а повороты –

$$\dot{x}(t) = v \cos \gamma(t), \quad \dot{y}(t) = v \sin \gamma(t), \quad \dot{\gamma}(t) = \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t). \quad (1.6)$$

В моменты переключений координаты  $x, y, \gamma, v$  – непрерывны, а  $\omega = 0$ . Заметим, что модель (1.5), (1.6) относится к гибридным системам переменной размерности [12], так как количество координат вектора состояния в (1.5) и (1.6) разное.

Поставленная задача быстродействия является естественным обобщением задачи Маркова–Дубинса и вместе с дополнительными условиями относится к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями. Полный анализ всех типов оптимальных траекторий затруднителен из-за большого разнообразия терминальных и дополнительных условий. Однако практическое нахождение оптимальных траекторий для конкретных ограничений достаточно просто, так как задача сводится к конечномерной минимизации с небольшим числом параметров.

**2. Состав оптимальных траекторий.** Для задачи быстродействия системы (1.1) применяем принцип максимума. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H(\Psi_x, \Psi_y, \Psi_\gamma, \Psi_v, \Psi_\omega, x, y, \gamma, v, \omega, u, \varepsilon) = \Psi_x v \cos \gamma + \Psi_y v \sin \gamma + \Psi_\gamma \omega + \Psi_v u + \Psi_\omega \varepsilon - 1, \quad (2.1)$$

где  $\Psi_x, \Psi_y, \Psi_\gamma, \Psi_v, \Psi_\omega$  – вспомогательные переменные. Записываем сопряженную систему

$$\dot{\Psi}_x = 0, \quad \dot{\Psi}_y = 0, \quad \dot{\Psi}_\gamma = \Psi_x v \sin \gamma - \Psi_y v \cos \gamma, \quad \dot{\Psi}_v = -\Psi_x \cos \gamma - \Psi_y \sin \gamma, \quad \dot{\Psi}_\omega = -\Psi_\gamma. \quad (2.2)$$

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина по управлению приводит к равенствам

$$u = \arg \max_{|u| \leq U} H = U \operatorname{sign} \Psi_v, \quad \varepsilon = \arg \max_{|\varepsilon| \leq \mathcal{E}} H = \mathcal{E} \operatorname{sign} \Psi_\omega \quad (2.3)$$

при  $\Psi_v \neq 0$  или  $\Psi_\omega \neq 0$ . Если вспомогательные переменные  $\Psi_v(t) = 0$  или  $\Psi_\omega(t) = 0$  на некотором интервале, то условие максимума не позволяет однозначно найти оптимальное управление  $u$  или  $\varepsilon$  соответственно. На этом интервале возникает особое управление [8, 11].

Рассмотрим сначала неособые режимы. Если ограничений на скорости  $v$  и  $\omega$  нет, то ускорения  $u$  и  $\varepsilon$  – кусочно-постоянные, принимающие максимальные по модулю значения  $u \in \{\pm U\}$ ,  $\varepsilon \in \{\pm \mathcal{E}\}$ . Иначе говоря, оптимальные управления – релейные. Если имеется ограничение на скорость (линейную или угловую), то при достижении граничного значения соответствующее ускорение становится нулевым. Поэтому в задачах с ограничениями на скорости ускорения  $u$  и  $\varepsilon$  – кусочно-постоянные, принимающие либо нулевое, либо максимальные по модулю значения  $u \in \{0, \pm U\}$ ,  $\varepsilon \in \{0, \pm \mathcal{E}\}$ . Таким образом, оптимальное неособое управление (пара функций  $(u(\cdot), \varepsilon(\cdot))$ ) – кусочно-постоянное, принимающее девять возможных значений.

Исследуем особые управления в задаче попадания в точечную цель (1.3). В этом случае из условий трансверсальности получаем

$$\Psi_\gamma(T) = 0, \quad \Psi_v(T) = 0, \quad \Psi_\omega(T) = 0, \quad H(T) = 0. \quad (2.4)$$

Последнее условие означает, что функция Гамильтона–Понтрягина, вычисленная на оптимальном процессе в конечный момент времени  $T$ , равна нулю. Отсюда следует, что

$$v(T)[\Psi_x \cos \gamma(T) + \Psi_y \sin \gamma(T)] = 1. \quad (2.5)$$

Преобразуем выражение

$$\psi_x \cos \gamma + \psi_y \sin \gamma = \psi_{xy} \sin(\gamma + \varphi),$$

где  $\psi_{xy} = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}$ ,  $\sin \varphi = \psi_x / \psi_{xy}$ ,  $\cos \varphi = \psi_y / \psi_{xy}$ . При  $\psi_{xy} = 0$  вспомогательный угол  $\varphi$  не определен (можно считать его равным нулю). Используя эти обозначения, записываем уравнения для вспомогательных переменных  $\psi_\gamma$  и  $\psi_v$ :

$$\dot{\psi}_\gamma = -v\psi_{xy} \cos(\gamma + \varphi), \quad \dot{\psi}_v = -\psi_{xy} \sin(\gamma + \varphi). \quad (2.6)$$

Условие (2.5) принимает вид

$$v(T)\psi_{xy} \sin(\gamma(T) + \varphi) = 1. \quad (2.7)$$

Поскольку на оптимальном процессе функция Гамильтона–Понтрягина постоянна, то

$$v\psi_{xy} \sin(\gamma + \varphi) + \psi_\gamma \omega + \psi_v u + \psi_\omega \varepsilon \equiv 1. \quad (2.8)$$

Если  $\psi_\omega(t) = 0$  на некотором интервале  $t \in (t_1, t_2)$ , то  $\psi_\gamma(t) = 0$ , следовательно,  $\dot{\psi}_\gamma(t) = 0$ , значит

$$v(t)\psi_{xy} \cos(\gamma(t) + \varphi) = 0, \quad t \in (t_1, t_2). \quad (2.9)$$

Согласно (2.7),  $\psi_{xy} \neq 0$ . Поэтому равенство (2.9) возможно в двух вариантах:

либо  $\cos(\gamma(t) + \varphi) \equiv 0$ , т.е. происходит прямолинейное движение  $\gamma(t) \equiv \text{const}$ , тогда  $\omega(t) \equiv 0$ , значит,  $\varepsilon(t) \equiv 0$ ;

либо  $v(t) \equiv 0$ , т.е. происходит поворот на месте, следовательно,  $u(t) = 0$ , тогда, согласно (2.3), управление  $u(t)$  особое, значит,  $\psi_v(t) \equiv 0$ . Подставляя нулевые значения  $v$ ,  $\psi_\omega$ ,  $\psi_\gamma$ ,  $\psi_v$  в (2.8), приходим к противоречию ( $0 = 1$ ). Таким образом, при  $\psi_\omega(t) \equiv 0$  особое управление  $\varepsilon(t) \equiv 0$ .

Пусть теперь  $\psi_v(t) = 0$  на некотором интервале  $t \in (t_1, t_2)$ . Тогда  $\dot{\psi}_v(t) = 0$ , значит

$$\psi_{xy} \sin(\gamma(t) + \varphi) = 0, \quad t \in (t_1, t_2). \quad (2.10)$$

Учитывая, что  $\psi_{xy} \neq 0$ , заключаем, что  $\sin(\gamma(t) + \varphi) \equiv 0$ . Следовательно, это прямолинейное движение, т.е.  $\omega(t) \equiv 0$  и  $\varepsilon(t) \equiv 0$ . Подставляя нулевые значения  $\psi_v$ ,  $\sin(\gamma + \varphi)$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  в (2.8), приходим к противоречию ( $0 = 1$ ).

Рассмотрим особый случай – поворот на месте. Если  $v(t) = 0$  на некотором интервале  $t \in (t_1, t_2)$ , то  $u(t) = 0$  – особое управление. Условие (2.8) при этом будет иметь вид

$$\psi_\gamma \omega + \psi_\omega \varepsilon \equiv 1. \quad (2.11)$$

Предположим, что управление  $\varepsilon$  – особое. Тогда  $\psi_\omega \equiv 0$ , следовательно,  $\psi_\gamma = -\dot{\psi}_\omega = 0$ . Подставляя нулевые значения  $\psi_\gamma$ ,  $\psi_\omega$  в (2.11), получаем противоречие ( $0 = 1$ ). Следовательно, управление  $\varepsilon = \mathcal{E} \text{sign } \psi_\omega$  – неособое.

Таким образом, в задаче попадания в точечную цель особые управления – нулевые  $u(t) = 0$ ,  $\varepsilon(t) = 0$ . Можно считать, что оптимальные управления определяются равенствами (2.3), не исключая случаев  $\psi_v = 0$  или  $\psi_\omega = 0$ .

**3. Траектории системы при постоянных ускорениях.** Оптимальные траектории состояются из частичных траекторий – участков движения с постоянными ускорениями. Получим такие частичные траектории, интегрируя уравнения движения (1.1).

3.1. Движение с ненулевым угловым ускорением. Получим решение системы уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2) при постоянных ускорениях  $u(t) = \text{const}$ ,  $\varepsilon(t) = \text{const} \neq 0$ . Последние три уравнения в (1.1) интегрируются элементарно:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2, \quad \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t, \quad v(t) = v_0 + u t. \quad (3.1)$$

Подставляя  $v(t)$  и  $\gamma(t)$  в первые два уравнения в (1.1), получаем

$$\dot{x}(t) = (v_0 + u t) \cos\left(\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2\right), \quad \dot{y}(t) = (v_0 + u t) \sin\left(\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2\right). \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\hat{v}_0 = v_0 - \frac{u\omega_0}{\varepsilon}, \quad \hat{\gamma}_0 = \gamma_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}, \quad \tau = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \left( t + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right). \quad (3.3)$$

Тогда

$$t = \tau \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} - \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \quad v_0 + ut = v_0 - \frac{u\omega_0}{\varepsilon} + \tau u \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} = \hat{v}_0 + \tau u \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}}, \quad (3.4)$$

$$\gamma_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \left( t + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \right)^2 + \gamma_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \hat{\gamma}_0 + \tau^2 \text{sign } \varepsilon.$$

Первое уравнение в (3.2) будет иметь вид

$$\dot{x}(t) = \left( \hat{v}_0 + \tau u \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \right) (\cos \hat{\gamma}_0 \cos \tau^2 - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 \sin \tau^2). \quad (3.5)$$

Интегрируя на промежутке  $[0, t]$ , делаем замену времени  $t$ , согласно (3.4). Получаем

$$x(t) = x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left( \hat{v}_0 + \tau u \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \right) (\cos \hat{\gamma}_0 \cos \tau^2 - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 \sin \tau^2) \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} d\tau, \quad (3.6)$$

где

$$\tau_0 = \frac{\omega_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}, \quad \tau_1 = \left( \frac{\omega_0}{\varepsilon} + t \right) \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}.$$

Группируя слагаемые подынтегральной функции в (3.6), находим

$$x(t) = x_0 + \hat{v}_0 \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \left( \cos \hat{\gamma}_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \cos \tau^2 d\tau - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sin \tau^2 d\tau \right) + \quad (3.7)$$

$$+ u \left( \cos \hat{\gamma}_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \tau \cos \tau^2 d\tau - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \tau \sin \tau^2 d\tau \right).$$

Первые два интеграла в (3.7) являются интегралами Френеля [9]:

$$C(t) = \int_0^t \cos \tau^2 d\tau, \quad S(t) = \int_0^t \sin \tau^2 d\tau,$$

а последние два – интегрируются по частям. В результате имеем

$$x(t) = x_0 + \hat{v}_0 \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \{ \cos \hat{\gamma}_0 [C(\tau_1) - C(\tau_0)] - \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 [S(\tau_1) - S(\tau_0)] \} + \quad (3.8)$$

$$+ \frac{u}{\varepsilon} [ \cos \hat{\gamma}_0 (\sin \tau_1^2 - \sin \tau_0^2) + \text{sign } \varepsilon \sin \hat{\gamma}_0 (\cos \tau_1^2 - \cos \tau_0^2) ].$$

Аналогично интегрируем второе уравнение в (3.2):

$$y(t) = y_0 + \hat{v}_0 \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}} \{ \sin \hat{\gamma}_0 [C(\tau_1) - C(\tau_0)] + \text{sign } \varepsilon \cos \hat{\gamma}_0 [S(\tau_1) - S(\tau_0)] \} + \quad (3.9)$$

$$+ \frac{u}{\varepsilon} [ \sin \hat{\gamma}_0 (\sin \tau_1^2 - \sin \tau_0^2) - \text{sign } \varepsilon \cos \hat{\gamma}_0 (\cos \tau_1^2 - \cos \tau_0^2) ].$$

Таким образом, траектория системы (1.1) при постоянных ускорениях  $u(t) = \text{const}$ ,  $\varepsilon(t) = \text{const} \neq 0$  определяется формулами (3.1), (3.7), (3.8). Заметим, что эти формулы годятся при движении с постоянной линейной скоростью, т.е. при  $u(t) \equiv 0$ , а также в случае поворота на месте, когда  $u(t) \equiv 0$  и  $v_0 = 0$ .

3.2. Движение с нулевым угловым ускорением. Получим решение системы уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2) при постоянных ускорениях  $u(t) = \text{const}$ ,  $\varepsilon(t) = 0$ .

Нужно разобрать два случая, когда начальная угловая скорость равна нулю (прямолинейное движение) или отлична от нуля (поворот с постоянной угловой скоростью).

Рассмотрим сначала случай  $\omega_0 \neq 0$ . Последние три уравнения в (1.1) интегрируются элементарно:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t, \quad \omega(t) = \omega_0, \quad v(t) = v_0 + ut. \quad (3.10)$$

Подставляя  $v(t)$  и  $\gamma(t)$  в первые два уравнения в (1.1), получаем

$$\dot{x}(t) = (v_0 + ut) \cos(\gamma_0 + \omega_0 t), \quad \dot{y}(t) = (v_0 + ut) \sin(\gamma_0 + \omega_0 t).$$

Интегрируя по частям эти уравнения, находим

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\omega_0} [(v_0 + ut) \sin(\gamma_0 + \omega_0 t) - v_0 \sin \gamma_0] + \frac{u}{\omega_0^2} [\cos(\gamma_0 + \omega_0 t) - \cos \gamma_0], \quad (3.11)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{\omega_0} [(v_0 + ut) \cos(\gamma_0 + \omega_0 t) - v_0 \cos \gamma_0] + \frac{u}{\omega_0^2} [\sin(\gamma_0 + \omega_0 t) - \sin \gamma_0]. \quad (3.12)$$

Пусть теперь  $\omega_0 = 0$ . Тогда последние три уравнения в (1.1) имеют решения

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad \omega(t) = 0, \quad v(t) = v_0 + ut, \quad (3.13)$$

первые два уравнения в (1.1) принимают вид

$$\dot{x}(t) = (v_0 + ut) \cos \gamma_0, \quad \dot{y}(t) = (v_0 + ut) \sin \gamma_0.$$

Отсюда

$$x(t) = x_0 + \left(v_0 t + \frac{u}{2} t^2\right) \cos \gamma_0, \quad y(t) = y_0 + \left(v_0 t + \frac{u}{2} t^2\right) \sin \gamma_0. \quad (3.14)$$

Таким образом, при  $u(t) = \text{const}$ ,  $\varepsilon(t) = 0$  траектория определяется формулами (3.10)–(3.12), если  $\omega_0 \neq 0$ , и формулами (3.13), (3.14), если  $\omega_0 = 0$ . Заметим, что случай  $u(t) = 0$  не исключается. Например, при прямолинейном движении с постоянной скоростью  $v_0$  по формулам (3.13), (3.14) для  $\omega_0 = 0$  находим

$$x(t) = x_0 + tv_0 \cos \gamma_0, \quad y(t) = y_0 + tv_0 \sin \gamma_0, \quad \gamma(t) = \gamma_0, \quad \omega(t) = 0, \quad v(t) = v_0. \quad (3.15)$$

При повороте на месте с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 \neq 0$  по формулам (3.10)–(3.12) при  $v_0 = 0$  и  $u(t) = 0$  получаем

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0, \quad \gamma(t) = \gamma_0 + \omega_0 t, \quad \omega(t) = \omega_0, \quad v(t) = 0. \quad (3.16)$$

Отметим, что кривизна  $\kappa(t)$  плоской траектории  $(x(t), y(t))$  системы (1.1) имеет вид

$$\kappa(t) = \frac{\omega(t)}{v(t)} = \frac{\omega_0 + \varepsilon t}{v_0 + ut}, \quad (3.17)$$

т.е. является дробно-линейной функцией. Поэтому траектория представляет собой: либо дугу спирали ( $S$ ), когда кривизна изменяется, либо отрезок ( $L$ ), если кривизна нулевая, либо точку ( $P$ ) в случае бесконечной кривизны, когда машина разворачивается на месте и  $\omega(t) \neq 0$ ,  $v(t) = 0$ . В частности, возможно движение по окружности, когда кривизна постоянна и отлична от нуля, например при  $\omega_0 = 0$  и  $v_0 = 0$  или при  $\varepsilon = 0$ ,  $u = 0$ ,  $\omega_0 \neq 0$  и  $v_0 \neq 0$ . Если  $v(t) = \text{const}$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , то кривизна линейная, а траектория является клотоидой [9].

Таким образом, оптимальные траектории состояются из типовых участков вида  $S$ ,  $L$ ,  $P$ , которые соединяются гладким образом. Комбинации участков зависят от постановки задачи, в первую очередь от конечных условий. Например, для задачи попадания в точечную цель (1.3) оптимальной может быть траектория вида  $SSL$ . Эта траектория составлена из трех участков: движение по спирали с  $\varepsilon = \mathcal{E}$  (“закручивание” траектории), движение спирали с  $\varepsilon = -\mathcal{E}$  (“раскручивание”) и движение по прямой. Для перевода системы в заданное конечное состояние (1.4) оптимальной может быть траектория вида  $SSLSS$ , у которой пары дуг спиралей (“закручивание” и “раскручивание”) соединены отрезком. Напомним, что оптимальные траектории машины Дубинса [2, 11], приводящие в заданное конечное состояние, представляют собой либо гладкое со-

единение трех дуг окружностей (тип траектории –  $CCC$ ), либо гладкое соединение двух дуг отрезком (тип траектории –  $CLC$ ).

Предлагаемый подход не учитывает особые режимы с неограниченным количеством переключений управлений [8, 13]. Такие теоретически возможные процессы, точнее, минимизирующие последовательности, практически нереализуемы. Их можно исключить, например, добавляя к функционалу штрафные слагаемые – временные затраты на каждое переключение управления, как это делается в задачах оптимизации переключаемых и гибридных систем.

**4. Оптимальные траектории, попадающие в точечную цель.** Исследуем задачу наискорейшего достижения точечной цели. Предполагаем, что начальное состояние – нулевое:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad (4.1)$$

а конечное – задано условиями

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T. \quad (4.2)$$

В силу симметрии рассматриваем только случай  $y_T \geq 0$ . Пусть линейная скорость ограничена  $0 \leq v(t) \leq V$ , а угловая – нет ( $\Omega = +\infty$ ). Согласно неравенству  $v(t) \geq 0$ , движение назад (задний ход) исключается.

Определим состав попадающих траекторий, соединяющих терминальные состояния (4.1) и (4.2). Если цель (4.2) общего положения, то для скорейшего попадания машина (1.1) должна, выполняя поворот, продвигаться к цели. В частных случаях поворот может отсутствовать. Величина поворота, разумеется, не должна превышать  $2\pi$ . Будем называть цель *дальней*, если последний участок попадающей траектории прямолинейный. Такие траектории заведомо существуют. Действительно, если конечное положение  $(x_T, y_T)$  находится так далеко от начала координат, что машина успевает выполнить поворот, при котором угловая скорость сначала растет (“закручивание” траектории), а затем уменьшается (“раскручивание” траектории) до нулевого значения, а скорость движения после поворота будет направлена на цель. Если же последний участок оптимальной траектории криволинейный, цель будем называть *ближней*. Оптимальная траектория для ближних целей состоит из “закручивания” и, быть может, “раскручивания”. Кроме того, поскольку начальная скорость нулевая, попадающая траектория может начинаться с поворота на месте.

Таким образом, попадающие траектории имеют вид  $PSSL$  или  $PSS$  в зависимости от расположения цели. При этом не исключаются случаи, когда отсутствует тот или иной участок. Например, если цель находится прямо перед машиной ( $x_T > 0, y_T = 0$ ), то поворот не нужен, а оптимальная траектория – отрезок (траектория вида  $L$ ).

Выясним параметры, задающие попадающие траектории. Траектория вида  $PSSL$  состоит из четырех участков: поворот на месте ( $\varepsilon = \mathcal{E}, u = 0$ ); движение по спирали – “закручивание” ( $\varepsilon = \mathcal{C}$ ); “раскручивание” ( $\varepsilon = \mathcal{C}$ ), прямолинейное движение ( $\varepsilon = \mathcal{E}, \omega = 0$ ). Обозначим через  $t_1, t_2, t_3$  последовательные моменты переключений: при  $t \in [0, t_1)$  поворот на месте, при  $t \in [t_1, t_2)$  – “закручивание”, при  $t \in [t_2, t_3)$  – “раскручивание”, при  $t \in [t_3, T]$  – прямолинейное движение. Поскольку после “раскручивания” в момент  $t_3$  угловая скорость принимает опять нулевое значение, заключаем, что  $t_3 = 2t_2 - t_1$ . Кроме того, в момент  $t_3$  скорость движения машины направлена на цель, т.е. векторы  $(x(t_3) - x_T, y(t_3) - y_T)$  и  $(\dot{x}(t_3), \dot{y}(t_3))$  одинаково направлены:

$$(x(t_3) - x_T, y(t_3) - y_T) \uparrow \uparrow (\dot{x}(t_3), \dot{y}(t_3)). \quad (4.3)$$

Время  $\tau = T - t_3$  прямолинейного движения вычисляется по следующим формулам. Обозначим через  $S = \sqrt{(x(t_3) - x_T)^2 + (y(t_3) - y_T)^2}$  расстояние до цели, а через  $v_3 = v(t_3)$  – линейную скорость. Тогда:

если максимально допустимая скорость уже достигнута ( $v_3 = V$ ), полагаем  $\tau = S/V$ ;

если максимально допустимая скорость еще не достигнута ( $0 \leq v_3 < V$ ), то

$$\tau = \sqrt{\frac{v_3^2}{U^2} + \frac{2S}{U}} - \frac{v_3}{U} \quad \text{при} \quad S < \frac{V^2 - v_3^2}{2U} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{S}{V} + \frac{(V - v_3)^2}{2UV} \quad \text{при} \quad S \geq \frac{V^2 - v_3^2}{2U}. \quad (4.4)$$

Первое равенство в (4.4) – для случая, когда максимальная скорость достигается на прямолинейном участке, в второе равенство – в противном случае. Отметим, что первую формулу в (4.4) можно применять при неограниченной линейной скорости, полагая  $V = +\infty$ .

Таким образом, траектория вида *PSSL* определяется двумя параметрами  $t_1$  и  $t_2$ . Минимизация времени  $T$  достижения цели выполняется с условием (4.3). Момент  $t_V$  достижения максимальной скорости, при котором ускорение  $u(t)$  принимает нулевое значение, можно вычислить заранее  $t_V = V/U - t_1$ . После этого момента скорость не снижается, поскольку для наискорейшего достижения цели не может быть участков с торможением. В формулах (3.1), (3.8)–(3.14) при этом следует положить  $u = 0$ .

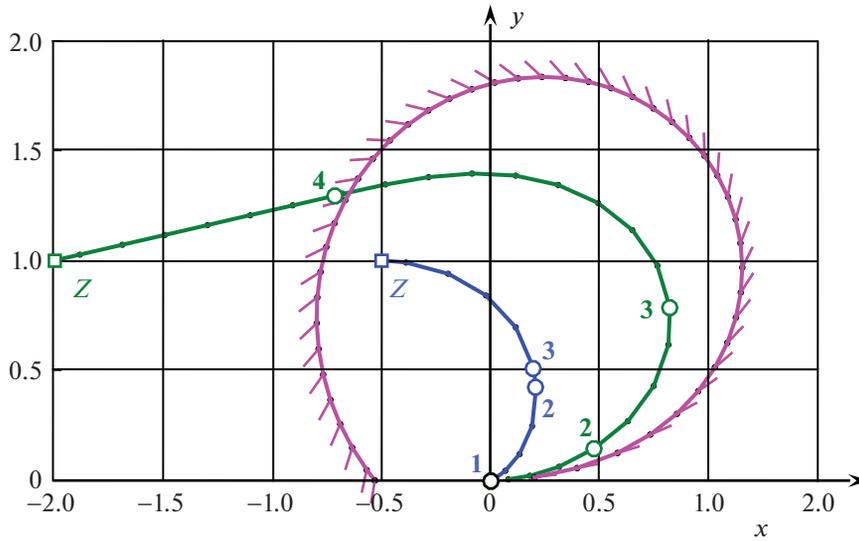
Рассмотрим теперь траекторию вида *PSS*, которая состоит из трех участков – поворота на месте и движения по спиралам с “закручиванием” и “раскручиванием” траектории. Пусть, как и ранее,  $t_1, t_2$  – последовательные моменты переключений: при  $t \in [0, t_1]$  поворот на месте, при  $t \in [t_1, t_2]$  – “закручивание” траектории, при  $t \in [t_2, T]$  – “раскручивание”. Как видим, эта траектория задается двумя параметрами. Минимизация времени  $T$  достижения цели по этим параметрам выполняется с условием (4.2).

Итак, задача наискорейшего достижения точечной цели сводится к двухпараметрической условной минимизации, которая выполняется численно. Линию разделения дальних и ближних целей можно построить приближенно, что затрудняет их классификацию. В таком случае приходится решать обе задачи, считая цель дальней или ближней. После нахождения наилучшей попадающей траектории нужно проверить необходимые условия оптимальности, найти решение сопряженной системы (2.2) для вспомогательных переменных с учетом условий (2.3).

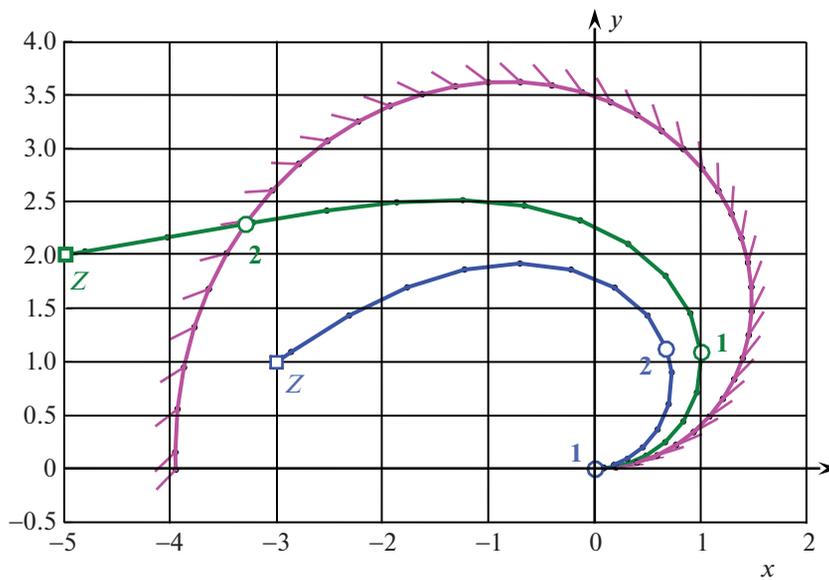
**4. Примеры.** Рассмотрим решение задачи попадания из нулевого начального состояния (4.1) в точечную цель (4.2). Расчеты проводились при следующих значениях параметров:  $U = 1, \mathcal{E} = 1, V = 1, \Omega = +\infty$  в двух случаях, когда линейная скорость ограничена  $V = 1$  или не ограничена  $V = +\infty$ .

Результаты расчетов для ограниченной скорости представлены на рис. 1, где изображены граница, разделяющая дальние и ближние цели (фиолетовая линия с маленькими отрезками (“иголочками”), показывающими направление последующего прямолинейного движения), а также две оптимальные траектории (зеленая и синяя линии), попадающие в дальнюю и ближнюю цели соответственно. Цели отмечены квадратами и обозначены буквами  $Z$ , точки переключений управления – окружностями и цифрами. Дальняя траектория вида *PSSL* составлена из пяти участков: вращение – поворот на месте до момента  $t_1 = 0.066$  при  $u = 0$  и  $\varepsilon = 1$ , “закручивание” с разгоном – движение по спирали до момента  $t_2 = 1.066$  (достижения максимально допустимой скорости  $V = 1$ ) при  $u = 1$  и  $\varepsilon = 1$ , “закручивание” без разгона до момента  $t_3 = 1.835$  при  $u = 0$  и  $\varepsilon = 1$ , “раскручивание” без разгона – движение по спирали до момента  $t_4 = 3.670$  при  $u = 0$  и  $\varepsilon = -1$ , равномерное прямолинейное движение до момента  $T = 4.991$  (попадания в цель) при  $u = 0, \varepsilon = 0$ . Ближняя траектория вида *PSS* составлена из четырех участков: вращение – поворот на месте до момента  $t_1 = 0.808$  при  $u = 0$  и  $\varepsilon = 1$ , “закручивание” с разгоном – движение по спирали до момента  $t_2 = 1.808$  (достижения максимально допустимой скорости  $V = 1$ ) при  $u = 1$  и  $\varepsilon = 1$ , “закручивание” без разгона до момента  $t_3 = 1.898$  при  $u = 0$  и  $\varepsilon = 1$ , “раскручивание” без разгона – движение по спирали до момента  $T = 2.810$  (попадания в цель) при  $u = 0$  и  $\varepsilon = -1$ . Поворот на месте на рис. 1 не изображается, так как нет поступательного движения и объект находится в начале координат. Наличие такого участка траектории отмечено цифрой **1** около начала координат.

Результаты расчетов для неограниченной линейной скорости представлены на рис. 2, где изображены граница, разделяющая дальние и ближние цели (фиолетовая линия с маленькими отрезками (“иголочками”), показывающими направление последующего прямолинейного движения); а также две оптимальные траектории (зеленая и синяя линии), попадающие в дальнюю и ближнюю цели соответственно. Цели отмечены квадратами и обозначены буквами  $Z$ , точки переключений управления – окружностями и цифрами. Дальняя траектория вида *PSSL* составлена из трех участков: “закручивание” с разгоном – движение по спирали до момента  $t_1 = 1.8196$  при  $u = 1$  и  $\varepsilon = 1$ , “раскручивание” с разгоном – движение по спирали до момента  $t_2 = 3.6392$  при  $u = 1$  и  $\varepsilon = -1$ , прямолинейное движение с ускорением до момента  $T = 4.087$  (попадания в цель) при  $u = 1$  и  $\varepsilon = 0$ . Отметим, что у дальней траектории отсутствует участок вращения (поворота



**Рис. 1.** Граница, разделяющая дальние и ближние цели, и оптимальные траектории при ограниченной линейной скорости



**Рис. 2.** Граница, разделяющая дальние и ближние цели, и оптимальные траектории при неограниченной линейной скорости

на месте). Ближняя траектория вида *PSS* составлена из трех участков: вращение – поворот на месте до момента  $t_1 = 0.217$  при  $u = 0$  и  $\epsilon = 1$ , “закручивание” с разгоном – движение по спирали до момента  $t_2 = 1.950$  при  $u = 1$  и  $\epsilon = 1$ , “раскручивание” с разгоном – движение по спирали до момента  $T = 3.598$  (попадания в цель) при  $u = 1$  и  $\epsilon = -1$ .

Покажем, что последняя траектория действительно оптимальная. Для этого нужно для найденного процесса управления получить соответствующие вспомогательные переменные и проверить выполнение соотношений (2.3) принципа максимума. Вспомогательные переменные удовлетворяют сопряженной системе

$$\dot{\psi}_\gamma = -v \psi_{xy} \cos(\gamma + \phi), \quad \dot{\psi}_\omega = -\psi_\gamma, \quad \dot{\psi}_v = -\psi_{xy} \sin(\gamma + \phi) \tag{5.1}$$

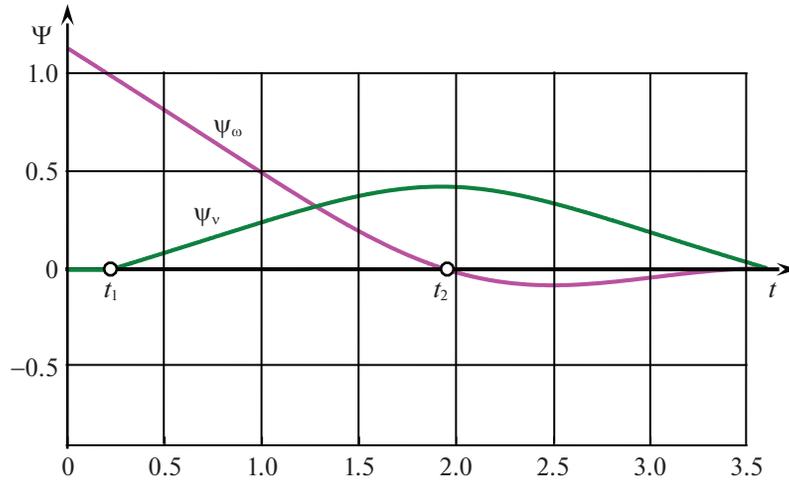


Рис. 3. Графики вспомогательных переменных:  $\psi_v(t)$  – зеленая линия;  $\psi_\omega(t)$  – фиолетовая линия

с нулевыми конечными условиями  $\psi_\gamma(T) = 0$ ,  $\psi_v(T) = 0$ ,  $\psi_\omega(T) = 0$ , а постоянные  $\psi_{xy}$  и  $\varphi$  удовлетворяют условию (2.7), т.е.

$$\psi_{xy} = \frac{1}{v(T) \sin(\gamma(T) + \varphi)}. \tag{5.2}$$

Оптимальное управление  $u(t) = \text{sign } \psi_v(t)$  имеет переключение в момент  $t_1 = 0.217$ , причем  $u(t) = 0$  и  $\psi_v(t) = 0$  при  $t < t_1$  (это особый участок);  $u(t) = 1$  и  $\psi_v(t) > 0$  при  $t > t_1$ . Оптимальное управление  $\varepsilon(t) = \text{sign } \psi_\omega(t)$  имеет переключение в момент  $t_2 = 1.950$ , т.е.  $\varepsilon(t) = 1$  и  $\psi_\omega(t) > 0$  при  $t < t_2$ ,  $\varepsilon(t) = -1$  и  $\psi_\omega(t) < 0$  при  $t > t_2$ . Поэтому нужно убедиться, что в моменты  $t_1$  и  $t_2$  вспомогательные переменные  $\psi_v$  и  $\psi_\omega$  равны нулю соответственно. Решения уравнений (5.1) зависят от параметра  $\varphi$ . Поэтому следует найти такое значение параметра  $\varphi$ , при котором  $\psi_v(t_1) = 0$  и  $\psi_\omega(t_2) = 0$ . Эта задача решается численно, причем линейная скорость и угол направления для оптимальной траектории находятся аналитически:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{1}{2}t^2 \quad \text{при } t < t_2, & \gamma(t) &= 2t_2t - t_2^2 - \frac{1}{2}t^2 \quad \text{при } t \geq t_2; \\ v(t) &= 0 \quad \text{при } t < t_1; & v(t) &= t \quad \text{при } t \geq t_1. \end{aligned}$$

В результате решения было получено значение  $\varphi = 1.295$ . Графики вспомогательных переменных представлены на рис. 3:  $\psi_v(t)$  – зеленая линия,  $\psi_\omega$  – фиолетовая линия. Окружностями обозначены моменты переключений управления. Погрешность определения моментов переключений составляет 0.022.

Таким образом, полученный процесс управления удовлетворяет принципу максимума. Погрешность можно считать незначительной, так как оптимизация моментов переключений выполнялась с точностью 0.001, а решения сопряженной системы, как известно, весьма чувствительны к погрешностям.

**Заключение.** Предложена модель плоского движения системы управления, обобщающая известную модель Маркова–Дубинса. Эта модель имеет более широкий набор оптимальных траекторий, в частности, траектории с участками торможения, повороты на месте, движение задним ходом. Несмотря на разнообразие поведения, решения уравнений движения найдены аналитически, что существенно упрощает построение оптимальных траекторий. Подробно исследована частная задача перехода из нулевого начального состояния в заданную точку координатной плоскости. Задачи с другими терминальными условиями хотя и поставлены, но фактически не исследованы. Предлагаемая модель может быть использована в многочисленных приложениях, в которых применяется модель Маркова–Дубинса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250–276.
2. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // *American Mathematics*. 1957. V. 79. № 3. P. 497–516.
3. *Isaacs R.* Games of Pursuit // Scientific Report of the RAND Corporation. Santa Monica, 1951.
4. *Tsourdos A., White B., Shanmugavel M.* Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. – N. Y.: Wiley&Sons, 2011. 190 p.
5. *Бузиков М.Э., Галяев А.А.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // *АиТ*. 2021. № 5. С. 3–19.
6. *Reeds J.A., Shepp L.A.* Optimal Paths for a Car that Goes Both Forwards and Backwards // *Pacific J. Math*. 1990. V. 145. № 2. P. 367–393.
7. *Бердышев Ю.И.* Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2016. Т. 22. № 1. С. 26–35.
8. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор*. 2002. Т. 90. С. 5–189.
9. *Савелов А.А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). М.: Физматгиз, 1960. 293 с.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
11. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
12. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // *Изв. РАН. ТИСУ*. 2022. № 1. С. 28–40.
13. *Sussmann H.J.* The Markov-Dubins Problem with Angular Acceleration Control // *Proc. 36th IEEE Conf. on Decision and Control*. San Diego, 1997. P. 2639–2643.

---

---

**УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

---

---

УДК 62-40

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЛИНЕЙНО-  
КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С РАВНОМЕРНЫМИ  
ОЦЕНКАМИ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ<sup>1</sup>**

© 2022 г. Ю. Э. Плешивцева<sup>a</sup>, Э. Я. Рапопорт<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Самарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

\*e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 28.10.2021 г.

После доработки 17.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи пространственно-временного управления в системах с распределенными параметрами параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления, распространяющем на широкий круг задач оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов с автономными модальными управлениями в открытой области их определения и с учетом ограничений на заданный по условиям технической реализации характер пространственного распределения управляющих воздействий сводятся к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи и заданной зависимостью от пространственных аргументов управляемой величины. Полученные результаты распространяются на задачи поиска неизменных во времени пространственно-распределенных управлений, рассматриваемых в роли искомого проектного решения объекта.

DOI: 10.31857/S0002338822030118

**Введение.** Одной из наиболее существенных особенностей систем с распределенными параметрами (СРП) по сравнению с сосредоточенными системами (ССП) является расширение класса допустимых управляющих воздействий за счет включения в их число пространственно-временных управлений (ПВУВ), описываемых подобно состоянию СРП функциями векторного аргумента – времени и пространственных координат [1–8]. Применение ПВУВ открывает принципиально новые возможности управления СРП, недостижимые в классе свойственных ССП сосредоточенных управлений, которые не зависят от пространственных переменных. В частности, именно использование ПВУВ специального вида привело к созданию нового перспективного класса СРП с подвижным воздействием, охватывающего широкий круг актуальных прикладных задач самого различного физического содержания [6–8].

В работе рассматривается задача оптимального по квадратичному критерию качества управления СРП, описываемой линейным пространственно-одномерным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с внутренним ПВУВ при заведомо неизвестном характере его зависимости как от времени, так и от пространственной координаты. Задача исследуется в специфических и типичных для приложений условиях оценки в равномерной метрике целевых множеств с негладкой границей в конечной точке оптимального процесса в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, исключающих применение классических условий трансверсальности при аналитическом синтезе оптимальных регуляторов [5, 9–11].

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБОУ ВО “Самарский государственный технический университет”.

Для частного случая использования скалярных сосредоточенных управлений с априори заданным характером пространственного распределения внутренних управляющих воздействий описываемая задача изучалась в [11] для детерминированных и не полностью определенных моделей объекта. В [12] были найдены оптимальные по критерию энергосбережения программные пространственно-временные управляющие воздействия для различных возможных вариантов их фактического представления.

**1. Постановка задачи.** Пусть управляемая величина  $Q(x, t)$  объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты  $x \in [x_0, x_1]$  и времени  $t \in [0, t_1]$  одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с самосопряженным дифференциальным оператором в его правой части:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x) Q(x, t) + u(x, t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

при кусочно-непрерывном [2] пространственно-временном внутреннем управлении  $u(x, t)$ ; заданных достаточно гладких функциях  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $c_1(x)$  и постоянных коэффициентах  $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ ;  $\beta_0, \beta_1 > 0$ . Управляющее воздействие  $u(x, t)$  не стесняется никакими дополнительными ограничениями.

Допустим, что необходимо обеспечить за фиксируемое априори конечное время  $t_1$  заданную точность  $\varepsilon$  равномерного приближения результирующего пространственного распределения управляемой величины  $Q(x, t_1)$  к требуемому  $Q^{**}(x) > Q_0 \forall x \in [x_0, x_1]$ , согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t_1) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.4)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [5, 9].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.4) оценивается типичным квадратичным функционалом качества, определяемым для простоты и наглядности без потери общности основных результатов в следующей типичной частной форме:

$$I(u) = \int_0^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\rho_Q Q^2(x, t) + u^2(x, t)] dx dt \rightarrow \min_{u(x, t)} \quad (1.5)$$

с постоянным весовым коэффициентом  $\rho_Q > 0$ .

Подобно тому, как применение преобразования Лапласа к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям модели объекта с сосредоточенными параметрами приводит к алгебраическим уравнениям относительно изображений управляемой величины, не содержащим ее производных по времени, известный аппарат конечных интегральных преобразований позволяет перейти от дифференциальных уравнений в частных производных (1.1)–(1.3) к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не содержащих производных управляемой величины по пространственной координате [13]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{u}_n(\mu_n, t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n),$$

относительно коэффициентов (временных мод)  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$  разложения  $Q(x, t)$  в сходящийся в среднем ряд

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x) \quad (1.7)$$

по ортонормированной системе собственных функций  $\varphi_n(\mu_n, x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определяемых вместе с собственными числами  $\mu_n^2$  известными способами [13]. Здесь  $\bar{u}_n(\mu_n, t)$  – временные моды разложения  $u(x, t)$  в ряд вида (1.7):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x), \tag{1.8}$$

рассматриваемые далее в качестве бесконечного числа автономных, независимых друг от друга сосредоточенных управляющих воздействий, и  $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$  – моды  $Q_0(x)$ .

При этом поведение каждой из модальных составляющих  $\bar{Q}_n$  управляемой величины  $Q(x, t)$  определяется только “своим” управляющим воздействием  $\bar{u}_n$ , согласно решению каждого из уравнений (1.6) в отдельности независимо от других, обеспечивая в итоге требуемое пространственно-временное состояние  $Q(x, t)$ , описываемое рядом (1.7).

Подобно [11], здесь и всюду далее в условиях выполнения усиленных условий Коши–Липшица [14] будем учитывать  $N_1$  слагаемых в суммах (1.7), (1.8). Здесь  $N_1 = \infty$  или  $N_1 = N < \infty$  в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления, ограничиваясь в случае  $N_1 = N$  с любой требуемой точностью решением “укороченной” системы  $N$  первых уравнений (1.6) при достаточно большой величине  $N$  и полагая при этом  $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0$ ,  $n > N$  [14].

Переход к описанию СРП в (1.6), (1.7) в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций к представлению критерия оптимальности (1.5) в следующем виде:

$$I_1(\bar{u}) = \int_0^{t_1} \left[ \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_n^2(\mu_n, t) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \tag{1.9}$$

$$\bar{u} = (\bar{u}_n), \quad n = \overline{1, N_1},$$

а требования (1.4) к конечному состоянию объекта представляются условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1) \varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon. \tag{1.10}$$

Рассматриваемая задача оптимизации сводится к определению программного оптимального управления  $u^*(x, t)$  и алгоритма обратной связи  $u^*(\bar{Q}, x, t)$ ,  $\bar{Q} = (\bar{Q}_n)$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , обеспечивающих при  $N_1 = \infty$  перевод объекта (1.6)–(1.8) за заданное время  $t_1$  в требуемое конечное состояние, удовлетворяющее (1.10) при минимально возможном значении критерия оптимальности (1.9).

При использовании усеченной модели объекта с  $N_1 = N < \infty$  все полученные далее результаты следует считать субоптимальными.

**2. Программное оптимальное пространственно-временное управление.** Структура модального управляющего воздействия. На сформулированную бесконечномерную задачу оптимального управления распространяется принцип максимума Понтрягина [5, 15]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}^*(t), \bar{u}^*(t), \psi^*(t)) = \max_{\bar{u}} H(\bar{Q}^*(t), \bar{u}, \psi^*(t)), \quad t \in [0, t_1] \tag{2.1}$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах  $\bar{Q}^*(t)$ ,  $\bar{u}^*(t)$ ,  $\psi^*(t)$  максимума функции Понтрягина  $H$  по векторному аргументу  $\bar{u}(t) = (\bar{u}_n(\mu_n, t))$  для рассматриваемой задачи оптимизации (1.6)–(1.10):

$$H(\bar{Q}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) = -\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) - \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{u}_n(\mu_n, t)), \tag{2.2}$$

где  $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , и вектор сопряженных переменных  $\psi(t) = (\psi_n(t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_p} = 2\rho_Q \bar{Q}_p(\mu_p, t) + \mu_p^2 \psi_p(t), \quad p = \overline{1, N_1}, \quad (2.3)$$

определяет в открытой области изменения управляющих воздействий каждое из автономных программных управлений  $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$  в форме явной функции от соответствующей сопряженной переменной  $\psi_n^*(t)$  независимо от других составляющих  $\bar{u}^*(t)$ :

$$\bar{u}_n^*(\mu_n, t) = \frac{1}{2} \psi_n^*(t), \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (2.4)$$

*Краевая задача принципа максимума для модальных управляющих воздействий.* Каждое из уравнений (1.6) после подстановки модального управления в виде (2.4) образует совместно с соответствующим уравнением (2.3) линейную программно-управляемую систему второго порядка относительно двух переменных  $\bar{Q}_n, \psi_n$  для каждого  $n = \overline{1, N_1}$ :

$$\frac{d\psi_n}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n, \quad \frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \psi_n. \quad (2.5)$$

Система (2.5) в отличие от подобной системы порядка  $2N_1$  для всей совокупности составляющих  $\bar{Q}(t), \psi(t)$  в задаче с сосредоточенным внутренним управлением [11] замыкается требованиями к ее конечному состоянию, которые считаются определенными, исходя из общего для всех  $n = \overline{1, N_1}$  условия (1.10).

Решение этой системы может быть представлено, подобно [11], в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(\mu_n, t) \end{bmatrix} = e^{A_n t} \begin{bmatrix} \psi_n(0) \\ \bar{Q}_n(\mu_n, 0) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $A_n - 2 \times 2$ -матрица коэффициентов системы (2.5),  $e^{A_n t} - 2 \times 2$ -матрица (матричная экспонента)

$$e^{A_n t} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t) & A_{n12}(t) \\ A_{n21}(t) & A_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где  $A_{nks}, k, s = 1, 2$ , – заданные в соответствии со структурой уравнений (2.5) элементы  $e^{A_n t}$ .

*Параметризация пространственно-временных управлений.* Согласно (2.6),  $\psi_n^*(t)$ , а следовательно, и программное управление  $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$  в (2.4) определяются с точностью до начальных значений  $\psi_n^*(0)$ , совокупность которых для всех  $n = \overline{1, N_1}$  выступает, таким образом, в качестве естественного параметрического представления  $u^*(x, t)$ , согласно (1.8), (2.4), (2.6). Однако подобный подход для СРП оказывается неконструктивным, прежде всего в силу бесконечной размерности вектора  $\psi^*(0)$  при  $N_1 = \infty$ .

В работе [16] применительно к требованиям (1.10), предъявляемым к  $\bar{Q}^*(t_1)$ , предложен конструктивный способ последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий (“ $\psi$ -параметризация”) на множестве  $M$ -мерных векторов  $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i), i = \overline{1, M}; \tilde{\psi}_i = \psi_i(t_1)$ ,  $M < N_1$ , конечных значений первых  $M$  сопряженных функций в (2.3) при равных нулю всех остальных значениях  $\psi_i(t_1)$ :

$$\psi(t_1) = (\psi_i(t_1)); \quad \psi_i(t_1) = \tilde{\psi}_i, \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t_1) = 0, \quad i > M. \quad (2.8)$$

С возрастанием  $M$  обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (2.8) управляющих воздействий в сужающееся к заданному состоянию  $Q^{**}(x)$  в пространстве  $(\bar{Q}_n)$  целевое множество, гарантируя выполнение условий (1.10) для допустимых значений  $\varepsilon$  при некотором конечном значении  $M \geq 1$  [16].

В целях определения в явной форме  $\psi$ -параметризованного модального управления получим по указанной в [11] схеме путем переноса (прогонки) начальных условий в (2.6) в конечный момент времени  $t_1$  следующее выражение в отдельности для каждой из сопряженных функций  $\psi_n^*(t)$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , в оптимальном процессе в зависимости от их конечных значений  $\psi_n^*(t_1)$  и начального состояния объекта  $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$ :

$$\psi_n^*(t) = K_n(t, t_1)\psi_n^*(t_1) + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), \quad n = \overline{1, N_1}, \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} K_n(t, t_1) &= \hat{A}_{n11}(t_1 - t) + \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_n(t_1), \\ K_{1n}(t, t_1) &= \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_{1n}(t_1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь  $\hat{A}_{nks}$ ,  $k, s = 1, 2$  – подобные (2.7) элементы обратной матрицы  $e^{-A_n t}$  и

$$B_n(t_1) = A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1); \quad B_{1n}(t_1) = A_{n22}(t_1) - A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1)A_{n12}(t_1). \tag{2.11}$$

При определении  $\psi^*(t_1)$  в форме (2.8) будем иметь, согласно (2.9),

$$\psi_n^*(t) = \begin{cases} K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), & n \leq M, \\ K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), & n > M, \end{cases} \tag{2.12}$$

где  $\tilde{\psi}_n^*$  – значения  $\tilde{\psi}_n$  в (2.8), соответствующие оптимальному процессу.

Подстановка (2.12) в (2.4) определяет  $\psi$ -параметризованные модальные управления в форме линейной зависимости от  $\tilde{\psi}_n^*$ :

$$\bar{u}_n^*(\mu_n, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0)], & n \leq M, \\ \frac{1}{2}K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0), & n > M. \end{cases} \tag{2.13}$$

Отсюда, в частности, следует, что  $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$  при  $n > M$  определяются только начальным значением  $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$ .

Последующая подстановка (2.13) в (1.8), где следует учесть  $N_1 \leq \infty$  слагаемых бесконечной суммы, приводит к  $\psi$ -параметризованной форме оптимального пространственно-временного управления:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* \varphi_n(\mu_n, x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(\mu_n, 0)\varphi_n(\mu_n, x). \tag{2.14}$$

Таким образом, искомое программное управление находится, согласно (2.13), (2.14), с точностью до выбора оптимального вектора параметров  $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$ ,  $i = \overline{1, M}$ , в (2.8). К его определению и сводится последующая задача, которая может быть решена специальным методом параметрической оптимизации [5, 9, 16].

*Переход к задаче полубесконечной оптимизации и метод ее решения.* Интегрирование системы уравнений (2.5) с  $\psi$ -параметризованным модальным управлением вида (2.8), (2.13) позволяет получить зависимости  $Q(x, \psi^{(M)})$  управляемой величины в конце процесса управления и критерия оптимальности  $I_1(\psi^{(M)})$  в (1.7), (1.9) для каждого значения  $\bar{Q}(0)$  в форме явных функций только своих аргументов. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [5, 9, 16]:

$$I_1(\psi^{(M)}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}}, \tag{2.15}$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)}) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon \tag{2.16}$$

на минимум функции  $I_1(\psi^{(M)})$  конечного числа  $M$  переменных  $\tilde{\psi}_i, i = \overline{1, M}$ , в (2.8) с бесконечным числом ограничений для всех  $x \in [x_0, x_1]$ , заменяемых одним эквивалентным ограничением (2.16) на максимум ошибки равномерного приближения  $Q(x, \psi^{(M)})$  к  $Q^{**}(x)$  в пределах всего отрезка  $[x_0, x_1]$ .

Для заданной величины  $\varepsilon$  в (2.16) размерность  $M$  вектора  $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i), i = \overline{1, M}$ , однозначно определяется соотношением [16]

$$M = \omega \forall \varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(\omega)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\omega-1)}, \quad (2.17)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\psi^{(\omega)}} \{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(\omega)}) - Q^{**}(x)| \} \quad (2.18)$$

и значения минимакса  $\varepsilon_{\min}^{(\omega)}$  образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием  $\omega$  [5, 9, 16].

Задача (2.15), (2.16) оказывается разрешимой, если  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$ . Здесь точная нижняя грань  $\varepsilon_{\inf}$  достижимых значений  $\varepsilon$  оказывается равной минимаксу  $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$ , где  $\rho = \infty$  при  $\varepsilon_{\inf} = 0$  и  $\rho < \infty$  при  $\varepsilon_{\inf} > 0$  соответственно для управляемых и неуправляемых объектов относительно заданного конечного состояния  $Q^{**}(x)$  [9].

Решение ЗПО (2.15), (2.16) относительно вектора параметров  $\psi^{(M)}$ , а также априори неизвестной величины минимакса  $\varepsilon_{\min}^{(M)}$  в случае, когда в (2.16)  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ , может быть получено альтернансным методом [5, 9, 16] в условиях малостеснительных допущений, которые всюду далее считаются выполненными.

Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого вектора  $\psi_*^{(M)}$ , являющихся аналогом условий экстремума в теории чебышевских приближений, и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения оптимального результирующего состояния  $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$  управляемой величины, диктуемой закономерностями предметной области рассматриваемой задачи.

Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине  $\varepsilon$  одинаковые значения максимальных отклонений  $\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)|$  достигаются в некоторых точках  $x_j^0, j = \overline{1, R}$ , на отрезке  $[x_0, x_1]$ . Общее число  $R$  этих точек, удовлетворяющее базовым соотношениям

$$R = \begin{cases} M, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}; \\ M + 1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}, \end{cases} \quad (2.19)$$

оказывается равным числу всех искомым неизвестных в ЗПО (2.15), (2.16), порождая тем самым замкнутую относительно этих неизвестных систему соотношений

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_j^0)| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \quad (2.20)$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой  $Q(x, \psi_*^{(M)})$  на отрезке  $[x_0, x_1] \ni x$ , позволяющей идентифицировать координаты  $x_j^0$  и знаки  $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$ , равенства (2.20), дополненные условиями существования экстремума функции  $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$  в точках  $x_{j_g}^0 \in \text{int}[x_0, x_1], g = \overline{1, R_1}$ , где  $R_1 \leq R$  и  $x_{j_g}^0 \in \{x_j^0\}$ , переводятся в систему уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_j^0) &= \pm \varepsilon, & j &= \overline{1, R}, \\ \frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{j_g}^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{**}(x_{j_g}^0)] &= 0, & g &= \overline{1, R_1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

с однозначно определяемым знаком  $\epsilon$  в каждой точке  $x_j^0$ , которая разрешается в условиях (2.19) относительно  $\tilde{\psi}_i^*$ ,  $i = \overline{1, M}$ , значений  $x_{j_g}^0$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ , а также  $\epsilon_{\min}^{(M)}$ , если в (2.17), (2.19)  $\epsilon = \epsilon_{\min}^{(M)}$ .

Явное выражение для зависимости  $Q(x_j^0, \Psi_*^{(M)})$  от своих аргументов в системе уравнений (2.21) представляется в форме бесконечной или укороченной суммы вида (1.10) разложения в ряд (1.7):

$$Q(x_j^0, \Psi_*^{(M)}) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, \Psi_*^{(M)}) \Phi_n(\mu_n, x_j^0), \tag{2.22}$$

где значения модальных переменных  $\bar{Q}_n(\mu_n, \Psi_*^{(M)})$  в конце оптимального процесса находятся, согласно (2.6), в подобном (2.9) виде [11]:

$$\bar{Q}_n(\mu_n, \Psi_*^{(M)}) = B_n(t_1) \Psi_n^*(t_1) + B_{1n}(t_1) \bar{Q}_n(\mu_n, 0). \tag{2.23}$$

В итоге решение системы уравнений (2.21) с подстановкой (2.22), (2.23) полностью определяет искомый алгоритм программного пространственно-распределенного управления в форме (2.14).

**3. Программное управление с ограничениями на характер его пространственно-временного распределения.** Техническая реализация алгоритма управления (2.14), не стесняемого дополнительными условиями, накладываемыми на форму его пространственно-временного распределения, может оказаться затруднительной, прежде всего, в виду сложной зависимости  $u^*(x, t)$  от пространственной координаты. В такой ситуации часто используются отвечающие подобным условиям различные частные варианты представления ПВУВ, заведомо обеспечивающие их осуществимость стандартными техническими средствами [5, 12, 17].

3.1. Редукция к задаче многоканального сосредоточенного управления и я. Во многих типичных случаях  $u(x, t)$  в (1.1) ищется в форме взвешенной суммы заранее фиксируемых проектными решениями объекта и заведомо технически реализуемых (чаще всего кусочно-постоянных) зависимостей  $F_m(x)$ ,  $m = \overline{1, s}$ ;  $s \geq 1$ , от пространственной координаты с весовыми коэффициентами, в роли которых выступают искомые сосредоточенные управляющие воздействия  $v_m(t)$  [5, 12, 17]:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^s F_m(x) v_m(t), \quad s \geq 1. \tag{3.1}$$

Исследуемая задача оптимизации (1.1)–(1.5) с подстановкой (3.1) в (1.1) при  $s = 1$  сводится к рассмотренной в [11] и является ее обобщением на случай многоканального управления при  $s > 1$  в (3.1). Конечное интегральное преобразование равенства (3.1) приводит к следующему выражению для модальных управляющих воздействий  $\bar{u}_n(\mu_n, t)$  в (1.6) [5, 13, 17]:

$$\bar{u}_n(\mu_n, t) = \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn}(\mu_n) v_m(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \tag{3.2}$$

где  $\bar{F}_{mn}$  –  $n$ -я мода разложения  $F_m(x)$  в ряд вида (1.7) по собственным функциям начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

При этом критерий оптимальности принимает вместо (1.9) следующий вид с учетом суммирования в подинтегральной функции квадратичного функционала качества эффекта многоканального управления:

$$I_1(v) = \int_0^{t_1} \left[ \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{m=1}^s v_m^2(t) \right] dt \rightarrow \min_v, \tag{3.3}$$

$$v = (v_m), \quad m = \overline{1, s}; \quad s > 1.$$

Рассматриваемая задача оптимального программного управления сводится к определению  $s$  сосредоточенных управлений  $v^*(t) = (v_m^*(t))$ ,  $m = \overline{1, s}$ , переводящих объект управления (1.6)–(1.8), (3.2) в конечное состояние (1.10) при минимально возможном значении критерия оптимальности (3.3).

Структура оптимальных управлений  $v_m^*(t)$  устанавливается с использованием аппарата принципа максимума Понтрягина по аналогичной разд. 2 схеме на основании базового условия вида (2.1), где теперь функция Понтрягина представляется вместо (2.2) в следующем виде:

$$H(\bar{Q}(t), v(t), \psi(t)) = -\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) - \sum_{m=1}^s v_m^2 + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) \left( -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn}(\mu_n) v_m(t) \right). \quad (3.4)$$

Отсюда, получаем оптимальные программные управления

$$v_m^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \bar{F}_{mn} \psi_n^*(t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m \psi^*(t); \quad \bar{F}_m = (F_{mn}), \quad m = \overline{1, s}, \quad (3.5)$$

теперь уже в форме взвешенной суммы всех  $N_1$  сопряженных переменных в отличие от (2.4), где автономные модальные управляющие воздействия зависят только от одной сопряженной функции. Здесь  $\bar{F}_m$  – матрица-строка,  $\psi^*(t)$  – матрица-столбец.

Уравнения (1.6) с подстановкой управляющих воздействий в форме (3.2), (3.5) образуют совместно с уравнениями для сопряженных переменных (2.3) краевую задачу принципа максимума относительно  $2N_1$  переменных  $\bar{Q}_n, \psi_n; n = \overline{1, N_1}$  в отличие от (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn}(\mu_n) \sum_{p=1}^{N_1} \bar{F}_{mp}(\mu_p) \psi_p(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

решение которой определяется в виде, подобном (2.6):

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \bar{Q}(0) \end{bmatrix}; \quad \psi(t) = (\psi_n(t)); \quad \bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t)); \quad n = \overline{1, N_1} \quad (3.7)$$

с блочным представлением матричной экспоненты

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Здесь  $A_{ij}, i, j = 1, 2$ , – известные матрицы размерности  $N_1 \times N_1$  в соответствии со структурой системы уравнений (3.6) [11].

Дальнейшее решение рассматриваемой задачи программного управления проводится по предложенной в [11] схеме, обобщающей результаты (2.8)–(2.23) на исследуемый случай многоканального управления.

На первом этапе осуществляется  $\psi$ -параметризация управлений (3.5) на конечномерном подмножестве значений  $\psi_n(t_1), n = \overline{1, M}$ , согласно соотношениям (2.8). Затем путем, указанным в [11], находится вместо (2.9), (2.10) линейная зависимость вектора  $\psi^*(t)$  в оптимальном процессе от его параметризуемой, согласно (2.8), конечной величины  $\psi^*(t_1)$  и начального состояния объекта  $\bar{Q}(0)$ :

$$\psi^*(t) = K(t, t_1) \psi^*(t_1) + K_1(t, t_1) \bar{Q}(0), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} K(t, t_1) &= \hat{A}_{11}(t_1 - t) + \hat{A}_{12}(t_1 - t) B(t_1); \quad K_1(t, t_1) = \hat{A}_{12}(t_1 - t) B_1(t_1), \\ B(t_1) &= A_{21}(t_1) A_{11}^{-1}(t_1); \quad B_1(t_1) = A_{22}(t_1) - A_{21}(t_1) A_{11}^{-1}(t_1) A_{12}(t_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

и  $\hat{A}_{ij}, i, j = 1, 2$ , – подобные (3.8) блоки обратной матрицы  $e^{-At}$ .

Искомое программное управление (3.5) находится в  $\psi$ -параметризуемой форме после подстановки в (3.5) выражения (3.9):

$$v_m^*(t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m [K(t, t_1) \psi^*(t_1) + K_1(t, t_1) \bar{Q}(0)], \quad m = \overline{1, s}. \quad (3.11)$$

Дальнейшая проблема сводится к определению оптимального вектора параметров  $\psi_*^{(M)}$  в составе вектора  $\psi^*(t_1)$  в (2.8) путем редукции к задаче полубесконечной оптимизации (2.15), (2.16). Альтернативные свойства (2.17)–(2.19) ее решений опять порождают замкнутую систему равенств (2.20), где в отличие от случая автономного модального управления по всем  $\bar{u}_n, n = \overline{1, N_1}$ , зависимость  $Q(x, \psi_*^{(M)})$  в виде явной функции своих аргументов определяется для вектора  $\bar{Q}(t_1) = \bar{Q}(\psi_*^{(M)})$  в (1.7) интегрированием системы уравнений (3.6) с подстановкой  $\psi^*(t)$  в параметризованной форме (3.9). При этом покоординатное представление  $\bar{Q}_n(\mu_n, \psi_*^{(M)})$  в (2.23) заменяется векторным равенством [11]

$$\bar{Q}^*(t_1) = B(t_1) \psi^*(t_1) + B_1(t_1) \bar{Q}(0) \quad (3.12)$$

и, согласно (1.7),

$$Q(x, \psi_*^{(M)}) = \Phi \bar{Q}^*(t_1); \quad \Phi = [\varphi_n(\mu_n, x)], \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (3.13)$$

Система равенств (2.20) опять сводится к однозначно формулируемой системе уравнений вида (2.21), решение которой относительно всех искомого неизвестных известными численными методами исчерпывает решение исходной задачи программного управления (1.6)–(1.8), (1.10), (3.2), (3.3).

Если можно ограничиться учетом только  $N_1 = N \bmod \bar{Q}_n$  при  $n = \overline{1, N}$  в (1.6) и если возможен выбор  $s = N$  в (3.1), то равенства (3.2) при  $n = \overline{1, N}, N = s$  образуют линейную систему уравнений относительно  $v_m^*(t), m = \overline{1, s}$ , для заданных значений  $\bar{u}_n^*(\mu_n, t)$  в (2.13), решение которой определяется формулами Крамера непосредственно по решению задачи с автономными модальными управлениями:

$$v_m^*(t) = \sum_{m=1}^s \frac{D_{mn}}{D} \bar{u}_n^*(\mu_n, t), \quad m = \overline{1, s}. \quad (3.14)$$

Здесь  $D = \det[\bar{F}_{mn}], m, n = \overline{1, s}; D_{mn}$  – алгебраическое дополнение  $n$ -го элемента  $m$ -го столбца  $D$ , и  $D \neq 0$  при линейно независимых функциях  $F_m(x)$ .

### 3.2. Оптимизация проектных решений. В частном варианте

$$u(x, t) = F(t) v(x) \quad (3.15)$$

с заданной функцией  $F(t)$  и неизменяемым во времени пространственным управляющим воздействием  $v(x)$ , в роли которого рассматриваются искомые проектные решения объекта, следует принять в (1.6):

$$\bar{u}_n(\mu_n, t) = F(t) \bar{v}_n. \quad (3.16)$$

Здесь  $\bar{v}_n$  – постоянные во времени моды управления  $v(x)$ , восстанавливаемого по значениям  $\bar{v}_n$  подобно (1.8):

$$v(x) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{v}_n \varphi_n(\mu_n, x). \quad (3.17)$$

Величины  $\bar{v}_n$  следует рассматривать далее в качестве автономных модальных управлений вместо  $\bar{u}_n$  в (1.6). Критерий оптимизации принимает в данном случае вместо (3.3) следующий вид:

$$I_1(\bar{v}) = \int_0^{t_1} \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) dt + \sum_{n=1}^{N_1} \bar{v}_n^2 \rightarrow \min_{\bar{v}}; \quad \bar{v} = (\bar{v}_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (3.18)$$

и требуется найти оптимальную величину  $\bar{v}^*$  и соответствующее ему, согласно (3.17), оптимальное проектное решение  $v^*(x)$ , обеспечивающие перевод объекта управления (1.6), (1.7), (3.16) в требуемое конечное состояние (1.10) при минимальной величине критерия оптимальности (3.18). Здесь вектор  $\bar{v}$  уже представляет собой неизменное во времени параметрическое представление искомого пространственного управления  $v(x)$ .

Действительно, для одинаковых конечных значений  $\bar{u}_n(\mu_n, t_1)$  в (2.4) и (3.16) получаем равенство

$$\bar{v}_n = \frac{\Psi_n(t_1)}{2F(t_1)}, \quad F(t_1) \neq 0, \quad n = \overline{1, N_1},$$

позволяющее рассматривать  $\bar{v}$  в роли вектора  $\Psi(t_1)$  финишных значений сопряженных переменных.

Последующее представление  $\bar{v}$  по правилу (2.8) приводит к описанию  $v(x)$  в виде укороченной суммы  $M$  первых слагаемых в (3.17):

$$v(x) = \sum_{n=1}^M \tilde{v}_n \varphi_n(\mu_n, x), \quad (3.19)$$

являющейся параметризуемым на конечномерном подмножестве векторов  $\bar{v}^{(M)} = (\bar{v}_n)$ ,  $n = \overline{1, M}$ , распределенным управлением, где аналогично (2.8)

$$\bar{v}_n = \tilde{v}_n, \quad n = \overline{1, M}; \quad \bar{v}_n = 0, \quad n > M. \quad (3.20)$$

В таком случае рассматриваемая задача оптимального управления непосредственно редуцируется к задаче полубесконечной оптимизации вида (2.15), (2.16):

$$\begin{aligned} I_1(\bar{v}^{(M)}) &\rightarrow \min_{\bar{v}^{(M)}}, \\ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \bar{v}^{(M)}) - Q^{**}(x)| &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.21)$$

относительно искомой величины  $\bar{v}_*^{(M)}$ . Здесь размерность  $M$  вектора  $\bar{v}^{(M)}$  определяется по правилу (2.17), где подобно (2.18) следует принять

$$\varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\bar{v}^{(\omega)}} \left\{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \bar{v}^{(\omega)}) - Q^{**}(x)| \right\}. \quad (3.22)$$

Явная форма зависимости  $Q(x, \bar{v}^{(M)})$  от своих аргументов в (3.21) определяется в форме ряда (1.7) при значениях  $\bar{Q}_n(\mu_n, t_1)$ , которые находятся интегрированием уравнений объекта (1.6) в условиях (3.16), (3.20):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1) &= \bar{Q}^{(0)}(\mu_n) e^{-\mu_n^2 t_1} + d_n(t_1) \bar{v}_n, \quad \bar{v}_n = \tilde{v}_n, \quad n = \overline{1, M}; \quad \bar{v}_n = 0, \quad n = \overline{M+1, N_1}, \\ d_n(t_1) &= \int_0^{t_1} F(t) e^{-\mu_n^2(t-t_1)} dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Решение ЗПО (3.21) по схеме альтернативного метода с последующей подстановкой результатов в (3.19) определяет искомую зависимость  $v^*(x)$ . Если, подобно (2.14), техническая реализация проектного решения в форме (3.17), (3.19) оказывается затруднительной, то подобно (3.1) поиск  $v(x)$  производится в классе заведомо реализуемых функций  $F_m(x)$ , суммируемых с весовыми коэффициентами  $h_m$ :

$$v(x) = \sum_{m=1}^s h_m F_m(x). \quad (3.24)$$

Тогда в (3.16) следует принять аналогично (3.2)

$$\bar{v}_n = \sum_{m=1}^s h_m \bar{F}_{mn}, \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (3.25)$$

Критерий оптимальности представляется в отличной от (3.18) форме

$$I_1(h) = \int_0^{t_1} \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) dt + \sum_{n=1}^{N_1} \left( \sum_{m=1}^s h_m \bar{F}_{mn} \right)^2 \rightarrow \min_h, \quad h = (h_m), \quad m = \overline{1, s}, \quad (3.26)$$

и опять осуществляется прямая редукция задачи оптимизации проектных решений к ЗПО вида (2.15), (2.16) теперь уже при заведомо фиксируемой размерности  $s$  вектора  $h$  в (3.24):

$$I_1(h) \rightarrow \min_h, \quad h = (h_m), \quad m = \overline{1, s}, \quad (3.27)$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, h) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon,$$

где  $Q(x, h)$  вычисляется в форме (1.7), (3.23) с подстановкой (3.25) для всех значений  $\bar{v}_n, n = \overline{1, N_1}$ . Решение задачи (3.27) относительно оптимальной величины  $h^*$  альтернансным методом определяет искомое распределенное управление в форме (3.24).

Если требуется выбрать значения  $h_m$  в (3.24) из условий достижения величины  $\bar{v}_*^{(M)}$  в задаче (3.21), то такой выбор реализуется только в условиях  $N_1 = M \leq s$  путем определения искомым коэффициентов  $h_m^*$  в подобной (3.14) форме решения относительно  $h_m^*$  линейной системы уравнений, образуемой равенствами (3.25) при  $N_1 = M = s$  для заданных величин  $\bar{v}_n^*, n = \overline{1, s}$ . Следовательно, достижимые значения  $\varepsilon$  в (3.27) ограничиваются в таком случае реализуемым числом  $s$  в (3.24).

**4. Синтез оптимального управления.** Рассмотрим далее задачу синтеза пространственно-временного оптимального управления  $u^*(\bar{Q}, x, t)$  с обратными связями по состоянию объекта при известных алгоритмах программных управляющих воздействий.

4.1. Синтез оптимального регулятора с модальными управляющими воздействиями. Перенос граничных условий при  $t = t_1$  в произвольный момент времени  $t \in [0, t_1]$  определяет, подобно [11], в краевой задаче (2.5) следующие зависимости конечных значений сопряженных переменных  $\psi_n^*(t_1)$  и временных мод  $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)$  от их текущих значений в оптимальном процессе ( $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \psi_n^*(t)$ ) для всех  $n = \overline{1, N_1}$ :

$$\psi_n^*(t_1) = A_{n11}(t_1 - t) \psi_n^*(t) + A_{n12}(t_1 - t) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad (4.1)$$

$$\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) = A_{n21}(t_1 - t) \psi_n^*(t) + A_{n22}(t_1 - t) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad (4.2)$$

где  $A_{nks}, k, s = 1, 2$  – элементы  $2 \times 2$ -матрицы (2.7).

После умножения равенств (4.1), (4.2) соответственно на известные, согласно результатам расчета программного управления значения  $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) = \bar{Q}_n^*(\mu_n, \psi_*^{(M)})$  и  $\psi_n^*(t_1)$  в (2.8), (2.23), левые части соотношений (4.1), (4.2) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\psi_n^*(t, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, 0), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t)) = T_{n1}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)) \times$$

$$\times T_{n2}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)) \bar{Q}_n^*(\mu_n, t), \quad n = \overline{1, N_1}; \quad (4.3)$$

$$T_{n1} = [\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) A_{n11}(t_1 - t) - \psi_n^*(t_1) A_{n21}(t_1 - t)]^{-1}; \quad (4.4)$$

$$T_{n2} = \psi_n^*(t_1) A_{n22}(t_1 - t) - \bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1) A_{n12}(t_1 - t), \quad (4.5)$$

однозначным образом определяющему зависимость  $\psi_n^*(t, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(\mu_n, 0), \bar{Q}_n^*(\mu_n, t))$  от своих аргументов. Здесь зависимость  $\psi_n^*$  от  $\bar{Q}_n^*(\mu_n, 0)$  в (4.3) характеризуется представлением  $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t_1)$  в (4.4), (4.5) в виде (2.23).

Подстановка (4.3) в выражение (2.4) для автономного программного управления приводит к линейному закону синтеза оптимального пространственно-временного управляющего воздей-

ствия в форме (1.8) с нестационарными коэффициентами обратных связей по измеряемому состоянию  $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ :

$$u^*(\bar{Q}(t), x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1} T_{n2} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x). \quad (4.6)$$

Значения  $T_{n1}$  и  $T_{n2}$  представляются, согласно (4.4), (4.5), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления величинами  $\bar{Q}_n(\mu_n, 0)$  в (2.23), которые находятся по результатам наблюдения  $\bar{Q}(t)$  в момент  $t = 0$ .

Переход в (4.6) от  $\bar{Q}(t)$  к измеряемому выходу объекта  $Q_u(x_u, t) = (Q(x_{uj}, t))$  в  $r$  точках  $x_{uj} \in [x_0, x_1]$ ,  $j = \overline{1, r}$ , определяется, согласно (1.7), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t); \quad \Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (4.7)$$

В условиях  $r < N_1$  неполного измерения состояния для восстановления вектора  $\bar{Q}(t)$  по значениям  $Q_u(x_u, t)$  требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [17].

Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.6) можно ограничиться учетом только  $M$  первых составляющих  $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$ ,  $n = \overline{1, M}$ , с минимальным их числом  $M < N_1$ , необходимым для решения системы уравнений (2.21) относительно вектора  $\psi_*^{(M)}$ , то  $\bar{Q}(t)$  непосредственно определяется решением уравнения (4.7) относительно  $\bar{Q}(t)$  при  $r = M$ ,  $N_1 = N = M$ :

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \quad (4.8)$$

Подстановка (4.8) в (4.6) приводит к линейному алгоритму синтеза по измеряемому выходу объекта:

$$u^*(Q_u, x, t) = \frac{1}{2} \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) \varphi(x, t), \quad (4.9)$$

$$\varphi(x, t) = (T_{n1} T_{n2} \varphi_n(\mu_n, x)), \quad n = \overline{1, M},$$

где  $\Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t)$  – матрица-строка;  $\varphi(x, t)$  – матрица-столбец.

4.2. Синтез оптимального регулятора с многоканальным сосредоточенным управлением. При затруднениях в решении задачи синтеза алгоритмов оптимального управления (4.6), (4.9), связанных со сложным характером зависимости  $u^*$  от  $x$  и использованием в связи с этим заведомо реализуемых управляющих воздействий вида (3.1), возникает задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов для многоканальных сосредоточенных управлений  $v_m(t)$  при  $s > 1$ .

Обобщение зависимостей (4.1)–(4.5) на этот случай приводит к соответствующим векторно-матричным равенствам, базирующимся на описании оптимального процесса решениями (3.7), (3.8) краевой задачи (3.6) [11]:

$$\psi^*(t_1) = A_{11}(t_1 - t) \psi^*(t) + A_{12}(t_1 - t) \bar{Q}^*(t), \quad (4.10)$$

$$\bar{Q}^*(t_1) = A_{21}(t_1 - t) \psi^*(t) + A_{22}(t_1 - t) \bar{Q}^*(t). \quad (4.11)$$

Умножение слева равенств (4.10) и (4.11) соответственно на известные по решениям задачи многоканального программного управления  $N_1 \times N_1$ -матрицы  $\text{diag}[\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1)]$ ,  $\bar{Q}^*(t_1) = (\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1))$ ,  $j = \overline{1, N_1}$ , и  $\text{diag}[\psi_j^*(t_1)]$ ,  $\psi^*(t_1) = (\psi_j^*(t_1))$ ,  $j = \overline{1, N_1}$ , и последующее вычитание результатов приводит вместо (4.3) к базовому векторному соотношению

$$\psi^*(t, \psi^*(t_1), \bar{Q}(0), \bar{Q}^*(t)) = T_1(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1)) T_2(t, t_1, \psi^*(t_1), \bar{Q}^*(t_1)) \bar{Q}^*(t), \quad (4.12)$$

где

$$T_1 = [W_1 A_{11}(t_1 - t) - W_2 A_{21}(t_1 - t)]^{-1}, \quad (4.13)$$

$$T_2 = [W_2 A_{22}(t_1 - t) - W_1 A_{12}(t_1 - t)], \tag{4.14}$$

$$W_1 = \text{diag}[\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1)], \quad W_2 = \text{diag}[\psi_j^*(t_1)], \quad j = \overline{1, N_1}, \tag{4.15}$$

и

$$\bar{Q}_j^*(\mu_j, t_1) = (B(t_1)\psi^*(t_1) + B_1(t_1)\bar{Q}(0))_j, \quad j = \overline{1, N_1}, \tag{4.16}$$

согласно (3.12).

Подстановка (4.12) в (3.5) определяет линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм синтеза для сосредоточенных управлений с обратными связями по  $\bar{Q}(t)$

$$v_m^*(\bar{Q}(t), t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m \psi^*(t) = \frac{1}{2} \bar{F}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t), \quad m = \overline{1, s}, \tag{4.17}$$

и уравнение оптимального регулятора для пространственно-временного управляющего воздействия в (3.1):

$$u^*(\bar{Q}, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{F}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t) F_m(x). \tag{4.18}$$

В условиях  $N_1 = N = M = r$  в (4.7) вектор  $\bar{Q}^*(t)$  в (4.18) находится непосредственно по измеряемому выходу объекта, согласно (4.8). После подстановки (4.8) в (4.18) получаем оптимальное управление с линейной обратной связью по управляемой величине:

$$u^*(Q_u, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{F}_m T_1 T_2 \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) F_m(x). \tag{4.19}$$

Здесь в (4.19) аналогично (4.6) матрицы  $T_1, T_2$  вычисляются с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями  $\bar{Q}(0)$  в (4.16), которые задаются по измерениям начального состояния объекта при  $t = 0$ .

**5. Пространственно-временное управление нестационарным процессом теплопроводности.** В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для пространственно-временного управления процессом нагрева неограниченной пластины.

Пусть температурное поле  $Q(x, t)$  пластины в процессе ее нагрева описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [10, 13]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, t^*], \tag{5.1}$$

с заданными начальными

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \tag{5.2}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial t} + \alpha Q(1, t) = 0, \tag{5.3}$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе пластины  $x = 1$  по закону конвективной теплопередачи с заданным значением  $\alpha$  критерия Био. Здесь  $u(x, t)$  – нестесняемое дополнительными ограничениями кусочно-непрерывное пространственно-временное управляющее воздействие по мощности внутреннего тепловыделения.

В пространстве модальных переменных  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , объект управления (5.1)–(5.3) описывается бесконечной системой уравнений (1.6) с автономными управлениями  $\bar{u}_n(\mu_n, t)$ . Температурное поле  $Q(x, t)$  представляется его разложением в ряд вида (1.7) по собственным функциям  $\varphi_n(\mu_n, x) = \cos(\mu_n x)$  [10, 13]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n} \bar{Q}_n(\mu_n, t), \tag{5.4}$$

где  $\mu_n, n = 1, 2, \dots$ , – бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0. \quad (5.5)$$

Задача заключается в определении алгоритма обратной связи  $u^*(Q, x, t)$ , обеспечивающего перевод объекта (1.6), (5.4) за заданное время  $t_1$  в требуемое конечное состояние  $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0$  с заданной точностью равномерного приближения  $\varepsilon$ , согласно (1.10), при минимальном значении квадратичного критерия качества (1.9), где примем  $\rho_Q = 1$ .

Аналитический синтез оптимального регулятора сводится на первом этапе к вычислению программного управления  $u^*(x, t)$  описанным в разд. 2 способом с последующим определением  $u^*(Q, x, t)$  при найденном управлении путем, указанным в разд. 4.1.

*Определение программного управления.* Решение краевой задачи (2.5) в форме (2.6) полностью определяется значениями элементов  $A_{nks}, k, s = 1, 2$ ,  $2 \times 2$ -матрицы  $e^{A_n t}$  в (2.7). Используя технологию вычисления матричной экспоненты, описанную в [11], получаем следующие выражения для  $A_{nks}$  в (2.7):

$$A_{nks}(t) = \sum_{i=1}^2 \gamma_k^{(i)} G_i^{(s)} e^{p_i t}; \quad k, s = 1, 2 \quad (5.6)$$

Здесь

$$\gamma_1^{(i)} = 1; \quad \gamma_2^{(i)} = \frac{1}{2(\mu_n^2 + p_i)}, \quad i = 1, 2; \quad (5.7)$$

$$G_i^{(s)} = \frac{G_{is}}{G}; \quad G = \det \begin{bmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} \end{bmatrix}; \quad (5.8)$$

$G_{is}$  – алгебраическое дополнение  $s$ -го элемента  $i$ -го столбца  $G$  и

$$p_1 = \sqrt{\mu_n^4 + 1}; \quad p_2 = -\sqrt{\mu_n^4 + 1} \quad (5.9)$$

– корни характеристического уравнения системы (2.5).

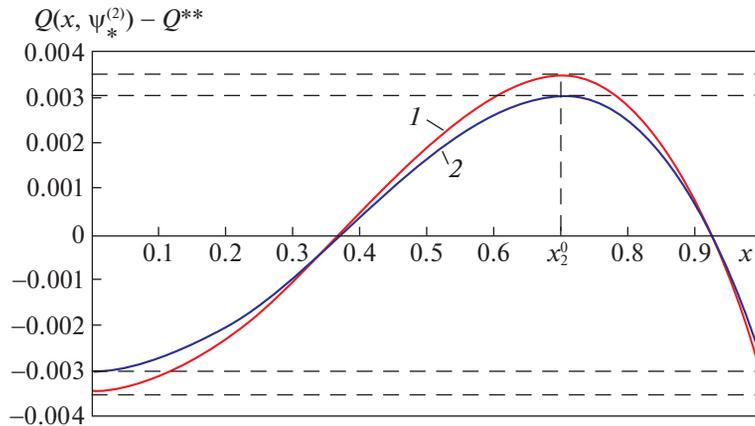
Явная форма параметрического представления модальных управляющих воздействий  $\bar{u}_n(\mu_n, t)$  и искомого программного управления  $u^*(x, t)$  на подмножестве  $M$ -мерных векторов  $\psi^{(M)}$  в (2.8) описывается выражениями (2.13) и (2.14) соответственно, где  $K_n(t, t_1), K_{1n}(t, t_1)$  вычисляются по формулам (2.10) при значениях  $A_{nks}$ , определяемых, согласно (5.6)–(5.9).

Последующий переход к задаче полубесконечной оптимизации (2.15), (2.16) приводит в силу альтернантных свойств (2.19) к замкнутой системе равенств (2.20) относительно оптимальной величины  $\psi_*^{(M)}$  вектора  $\psi^{(M)}$ , где  $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$  описывается разложением в ряд (2.22), (2.23). Последний представляется в форме (5.4) с учетом соотношений (2.11) для коэффициентов  $B_n(t_1), B_{1n}(t_1)$ , которые вычисляются опять по значениям  $A_{nks}$  в (5.6)–(5.9).

Ограничимся далее типичным в приложениях случаем  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  в (2.16), (2.20), для которого, согласно (2.17), (2.19), следует принять  $M = 2, R = 3$  в (2.14), (2.20)–(2.23).

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе управления нагревом пластины и альтернантные свойства  $Q(x, \psi_*^{(2)})$ , требующие выполнения строгих равенств в (2.20) в трех точках  $x_j^0 \in [0, 1], j = 1, 2, 3$ , при  $R = 3$ , определяют в таком случае при  $Q_0 = \text{const}$  в (1.2), подобно [5, 9, 10, 12], форму кривой  $Q(x, \psi_*^{(2)}) - Q^{**}$  результирующего распределения температуры по пространственной координате (см. далее рис. 1). Это позволяет перевести равенства (2.20) в систему уравнений (2.21) с заведомо идентифицируемыми точками  $x_1^0 = 0; x_2^0 \in (0, 1); x_3^0 = 1$  и знаками  $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**}$ :

$$Q(0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = \varepsilon_{\min}^{(2)};$$



**Рис. 1.** Температурные распределения в конце оптимального процесса пространственно-временного управления

$$Q(1, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = -\epsilon_{\min}^{(2)}; \quad \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} = 0, \tag{5.10}$$

разрешаемую стандартными численными методами поиска корней нелинейных систем трансцендентных уравнений относительно неизвестных  $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*), x_2^0$  и  $\epsilon_{\min}^{(2)}$ .

Последующая подстановка  $\psi_*^{(M)} = \psi_*^{(2)}$  в (2.13), (2.14) окончательно определяет искомое программное управление в рассматриваемой задаче оптимизации.

*Синтез оптимального регулятора.* Искомый алгоритм  $u^*(\bar{Q}(t), x, t)$  обратной связи определяется по найденному программному управлению уравнением регулятора (4.6) в условиях  $M = 2$  в (2.8), (2.23). Если в первом приближении достаточно учесть только две моды  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ ,  $n = 1, 2$ , в выражении (5.4) при  $N_1 = N = M = 2$ , то при наличии двух измерителей состояния  $Q(x_u, t) = (Q(x_{uj}, t))$ ,  $j = 1, 2$ , где, в соответствии с (4.7)

$$Q(x_{uj}, t) = \bar{Q}_1(\mu_1, t) \varphi_1(\mu_1, x_{uj}) + \bar{Q}_2(\mu_2, t) \varphi_2(\mu_2, x_{uj}), \quad j = 1, 2, \tag{5.11}$$

и, согласно (5.4),

$$\varphi_n(\mu_n, x_{uj}) = q_n \cos(\mu_n x_{uj}), \quad n = 1, 2; \quad q_n = \frac{2\alpha}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n}, \tag{5.12}$$

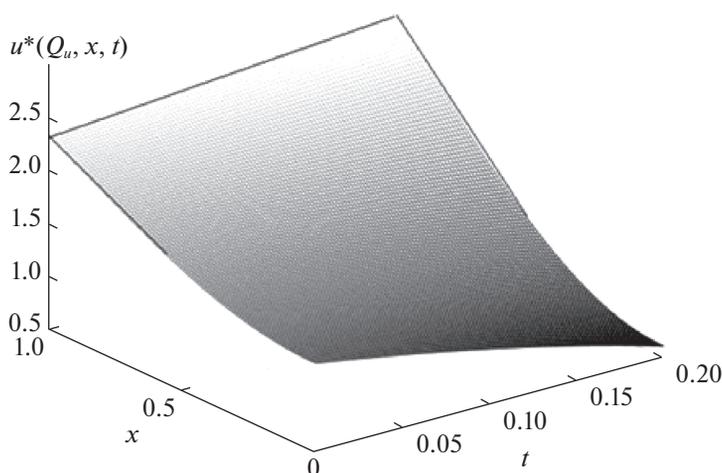
значения  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$  находятся по результатам измерения  $Q(x_{uj}, t)$  решением системы уравнений (5.11) в форме (4.8). Здесь

$$\Phi_u^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mu_1, x_{u1}) & \varphi_2(\mu_2, x_{u1}) \\ \varphi_1(\mu_1, x_{u2}) & \varphi_2(\mu_2, x_{u2}) \end{bmatrix}^{-1}. \tag{5.13}$$

В итоге оптимальное управление  $u^*(Q_u, x, t)$  с обратной связью по неполному измерению управляемой величины находится в форме (4.9) после подстановки (4.8), (5.13) в (4.6) при  $N_1 = M = 2$ . В частности, если  $x_{u1} = 1, x_{u2} = 0$ , то в (5.12), (5.13) будем иметь

$$\varphi_n(\mu_n, x_{u1}) = q_n \cos \mu_n; \quad \varphi_n(\mu_n, x_{u2}) = q_n, \quad n = 1, 2.$$

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при  $Q^{**} = 0.5$ ;  $\alpha = 0.5$ ;  $t_1 = 0.2$ . На рис. 1 показаны распределения температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса нагрева для двух различных значений  $Q_0$  (кривая 1 –  $Q_0 = 0.15$ ;  $\tilde{\psi}_1^* = 4.58$ ;  $\tilde{\psi}_2^* = -13.71$ ;  $\epsilon_{\min}^{(2)} = 0.0035$ ; кривая 2 –  $Q_0 = 0$ ;  $\tilde{\psi}_1^* = 5.99$ ;  $\tilde{\psi}_2^* = -13.15$ ;  $\epsilon_{\min}^{(2)} = 0.003$ ) при выборе двух измерителей выхода объекта в точках  $x_{u1} = 1, x_{u2} = 0$ . Рисунок 2 иллюстрирует для случая



**Рис. 2.** Поведение управляющих воздействий на пространственно-временной плоскости в зависимости от изменяющихся во времени сигналов обратной связи

$Q_0 = 0$  поведение в процессе нагрева на пространственно-временной плоскости оптимальных управляющих воздействий, изменяющихся во времени по алгоритму (4.9) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи с нестационарными коэффициентами передачи.

Как следует из приведенных данных, алгоритм (4.9) оптимального управления обеспечивает при различных начальных условиях заданную точность равномерного приближения к требуемому конечному состоянию объекта.

**Заключение.** Предлагаемые методы решения линейно-квадратичных задач пространственно-временного управления системами с распределенными параметрами параболического типа разработаны применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Полученные уравнения регуляторов с автономными модальными управлениями, не стесняемыми дополнительными ограничениями и с учетом ограничений по условиям технической реализуемости пространственного распределения управляющих воздействий, сводятся к линейным алгоритмам обратной связи по наблюдаемым переменным с фиксируемыми предварительным расчетом нестационарными коэффициентами передачи и заданными зависимостями от пространственных аргументов.

Допустимые погрешности реализации предлагаемых алгоритмов обратной связи непосредственно по неполному измерению состояния объекта определяются требованиями к точности описания его модели укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

Развиваемый подход к описанию оптимальных программных управлений распространен на задачи неизменяемого во времени пространственного управления, рассматриваемого в качестве искомого проектного решения объекта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
3. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб.: Лань, 2017.
4. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
5. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
6. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.
7. Чубаров Е.П. Управление системами с подвижными источниками воздействия. М.: Энергоатомиздат, 1985.

8. *Кубышкин В.А., Финягина В.И.* Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. М.: СИНТЕГ, 2005.
9. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
10. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993.
11. *Рапопорт Э.Я.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 23–38.
12. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 42–57.
13. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
14. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
15. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Мат. сборник (новая серия). 1964. Т. 64 (106). № 1. С. 79–101.
16. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22–33.
17. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.

---

---

**ДИСКРЕТНЫЕ  
СИСТЕМЫ**

---

---

УДК 519.714

**МИНИМИЗАЦИЯ БИНАРНЫХ ДИАГРАММ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ  
НЕ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ  
КОФАКТОРОВ**

© 2022 г. П. Н. Бибило

*Объединенный ин-т проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь**e-mail: bibilo@newman.bas-net.by*

Поступила в редакцию 18.03.2021 г.

После доработки 16.11.2021 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Основным критерием оптимизации при синтезе комбинационных схем из библиотечных логических элементов является число литералов в алгебраических многоуровневых представлениях систем полностью определенных булевых функций. После получения бинарных диаграмм решений исходных систем не полностью определенных (частичных) булевых функций, предлагается выполнять дополнительную логическую оптимизацию на основе поиска алгебраических представлений частичных подфункций (кофакторов) одного уровня бинарной диаграммы решений в виде дизъюнкции либо конъюнкции других подфункций данного уровня бинарной диаграммы решений. Предложенный метод позволяет уменьшать число литералов путем замены формул разложений Шеннона более простыми формулами при переходе к многоуровневому представлению системы полностью определенных функций, по которому осуществляется синтез комбинационной логической схемы.

DOI: 10.31857/S0002338822030027

**Введение.** Математический аппарат бинарных диаграмм решений (binary decision diagrams (BDD) – бинарные диаграммы решений, диаграммы двоичного выбора) в настоящее время используется в различных областях науки [1, 2], в последнее время он применяется для решения задач выполнимости конъюнктивных нормальных форм булевых функций [3]. BDD используются как структуры данных [4] для представления булевых функций, в [5] были предложены эффективные алгоритмы для сокращения BDD и выполнения логических (двухместных) операций над BDD. Статья [5] оказалась настолько актуальной, что она стала наиболее цитируемой в информатике, “поскольку революционизировала структуры данных, используемые для представления булевых функций” [1, с. 303]. Области применения BDD расширяются, этот аппарат явился вычислительной основой решения задач верификации параллельных систем с конечным числом состояний на основе метода model checking, что позволило “увеличить сложность анализируемых систем в миллионы миллионов раз” [2, с. 295]. В [2] приводится много примеров применения BDD, там же указываются и некоторые из модификаций BDD.

В системах проектирования цифровых сверхбольших интегральных схем (СБИС) графовый аппарат BDD применяется при верификации и тестировании СБИС [6], а также при технологически независимой оптимизации, выполняемой как первый этап синтеза логических схем в различных технологических базисах [7]. BDD представляет собой ациклический граф, задающий булеву функцию либо систему полностью определенных булевых функций. Каждой вершине этого графа соответствует полная либо редуцированная (сокращенная) формула разложения Шеннона. Поэтому при построении BDD стремятся сократить число вершин BDD – сложность функционального описания в виде взаимосвязанных формул разложений Шеннона [8–13].

Схемная реализация (логический синтез) исходных систем частичных булевых функций осуществляется чаще всего в три этапа. На первом этапе происходит логическая оптимизация систем частичных функций и их доопределение до систем полностью определенных функций. Логический синтез для полностью определенных булевых функций составляет содержание следующих двух этапов (логической технологически независимой оптимизации) и технологического

отображения в требуемый базис (целевую библиотеку) логических элементов. Однако методы логической оптимизации систем частичных функций, ориентированные на требуемую библиотеку элементов, развиты недостаточно. Чаще всего путем минимизации систем в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) на первом этапе осуществляется переход от систем частичных функций к системам полностью определенных функций, после чего может выполняться минимизация BDD-представлений, позволяющая уменьшать число литералов в многоуровневых представлениях систем функций. При синтезе логических схем из библиотечных элементов уменьшение числа литералов в представлениях систем полностью определенных булевых функций приводит к менее сложным схемам. Поэтому число литералов – это основной критерий минимизации алгебраических представлений функций на первых двух этапах синтеза логических схем [14].

В [15] предложено осуществлять поиск в графе BDD-представлений булевых функций в виде разложения кофакторов на две подфункции с алгебраической выходной функцией, в зарубежной литературе такие разложения называют *bi-decomposition* (англ.). В системе BDS [15] данный вид оптимизации был дополнен также факторизацией – поиском одинаковых логических подвыражений и поиском подфункций, допускающих простое (с одной промежуточной булевой переменной) функциональное разложение.

Различные виды декомпозиции BDD-представлений систем булевых функций изучены в [7], минимизация BDD-представлений может выполняться с нахождением пар взаимно инверсных кофакторов [16], что дает значительный эффект при синтезе схем. Для дополнительной логической оптимизации в [17] предложен метод, основанный на поиске алгебраических разложений подфункций, входящих в минимизированные BDD-представления. Метод позволяет заменять формулы разложения Шеннона двухоперандными формулами дизъюнкций и конъюнкций и формулами вида  $g_p = g_i \oplus g_j$ , что уменьшает число литералов в результирующих логических формулах, по которым выполняется заключительный этап синтеза схемы. Программная реализация алгоритмов и результаты вычислительных экспериментов, приведенные в [18], показали, что для разложений кофакторов целесообразно использовать только дизъюнктивные и конъюнктивные разложения. Причем кофакторы в таких разложениях могут быть как в инверсной, так и безынверсной форме. Эксперименты показали также, что наиболее эффективной эвристикой в данных алгоритмах, влияющей на сокращение площади схем, является эвристика, ориентированная на нахождение дизъюнктивных и конъюнктивных разложений не для всех кофакторов, а только для тех, которые представлены полными уравнениями разложений Шеннона. Эксперименты были проведены на 59 примерах схем из широко известной библиотеки [19] и 14 примерах схем модулярных сумматоров. Используя после BDD-оптимизации программы поиска алгебраических разложений кофакторов, для 33 схем из [19] было получено 10–15% сокращение площади, при этом площадь уменьшалась преимущественно для схем с достаточно большим числом (10–27) входных переменных. Для девяти (из 14) схем модулярных сумматоров было получено сокращение площади, достигающее 28%.

Для систем частичных функций в [7] была предложена модификация BDD, отличительной особенностью которой является то, что для частичных функций все листовые вершины “–” (неопределенные значения частичных функций) рассматриваются как различные, в отличие от вершин-констант 0, 1. Каждая вершина “–” отдельно доопределяется при оптимизации до 0 либо 1. Для таких BDD-представлений систем частичных функций в [20] были предложены методы, позволяющие доопределить частичные функции до полностью определенных и минимизировать сложность BDD, находя пары взаимно инверсных частичных кофакторов. При решении задач логической оптимизации систем частичных булевых функций поиск рациональных доопределений применяется не только при минимизации BDD-представлений [7, с. 102], но и при совместной минимизации функций в классе ДНФ [20, с. 258], сокращении числа аргументов [20, с. 269], декомпозиции [7, с. 146; 20, с. 287] и при решении других задач, возникающих на этапе технологической независимой оптимизации. По аналогии с минимизацией многоуровневых BDD-представлений систем полностью определенных функций для повышения эффективности логической минимизации BDD-представлений систем частичных функций целесообразно проводить дополнительную логическую минимизацию и находить в таких случаях соответствующие доопределения функций с целью увеличения числа кофакторов, которые будут иметь алгебраические (дизъюнктивные либо конъюнктивные) разложения.

В работе предлагается метод минимизации BDD-представлений систем *частичных* функций, основанный на поиске алгебраических разложений частичных кофакторов одного уровня BDD в виде дизъюнкции либо конъюнкции других кофакторов того же уровня BDD. При поиске ал-

гебраических разложений частичных кофакторов проводится их доопределение и используются как прямые (безынверсные), так и инверсные формы кофакторов. Суть предлагаемого метода состоит в нахождении алгебраических разложений кофакторов в классе частичных булевых функций, затем частичные функции доопределяются и для полученных многоуровневых представлений функций дополнительно ищутся алгебраические разложения кофакторов в классе полностью определенных булевых функций. Применение предлагаемого метода позволяет уменьшать число литералов в результирующих многоуровневых представлениях систем булевых функций, состоящих из формул разложения Шеннона и формул дизъюнктивного и конъюнктивного разложений. Приведенный в [7, 16–18] подход к оптимизации многоуровневых BDD-представлений систем полностью булевых функций, включающий:

минимизацию сложности BDD-представлений с нахождением взаимно инверсных кофакторов на каждом уровне BDD [16];

алгебраические разложения кофакторов [17];

программную реализацию и выбор эффективных эвристик [18],

распространяется и на случай систем частичных функций. Для BDD-представлений таких систем функций минимизация сложности BDD на первом этапе выполняется на основе сокращения числа пар взаимно инверсных частичных кофакторов [20], а на втором этапе – на базе предлагаемого в данной статье метода их алгебраических разложений. На третьем этапе предполагается программная реализация и проверка эффективности такого подхода к технологически независимой оптимизации при логическом синтезе схем из библиотечных элементов.

**1. Основные определения.** Булевыми называются двоичные  $(0, 1)$  функции  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  двоичных (булевых) переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Пусть  $V^x$  – булево пространство, построенное над переменными булева вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Элементами этого пространства являются  $n$ -компонентные наборы (векторы)  $x^*$  нулей и единиц. Булева функция, значения  $0, 1$  которой определены на всех элементах  $x^* \in V^x$ , называется *полностью определенной*. Множество  $M_f^1$  элементов  $x^*$  булева пространства, на которых полностью определенная булева функция принимает значение  $1$ , называется *характеристическим множеством функции*. Если же на некоторых элементах булева пространства  $V^x$  значения функции не определены, то такая функция будет *не полностью определенной*, или *частичной*. Частичная булева функция принимает единичное значение на элементах  $x^*$  подмножества  $M_f^1$  булева пространства  $V^x$  и нулевое значение на элементах подмножества  $M_f^0$ . На всех остальных элементах пространства  $V^x$ , образующих подмножество  $M_f^-$  пространства  $V^x$ , значения частичной функции не определены, подмножество  $M_f^-$  будем называть также областью *неопределенных значений* частичной функции. Неопределенное значение функции обозначается символом “–”. Очевидно, что  $M_f^1 \cap M_f^0 = \emptyset$ ,  $M_f^1 \cap M_f^- = \emptyset$ ,  $M_f^0 \cap M_f^- = \emptyset$ ,  $V^x = M_f^0 \cup M_f^1 \cup M_f^-$ .

Частичные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  равны, если и только если

$$M_{f_1}^1 = M_{f_2}^1, \quad M_{f_1}^0 = M_{f_2}^0, \quad M_{f_1}^- = M_{f_2}^- \quad (1.1)$$

Будем называть частичные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  *взаимно инверсными* ( $f_2 = \bar{f}_1, f_1 = \bar{f}_2$ ), если и только если

$$M_{f_1}^1 = M_{f_2}^0, \quad M_{f_1}^0 = M_{f_2}^1, \quad M_{f_1}^- = M_{f_2}^- \quad (1.2)$$

Согласно (1.2), инверсией частичной функции является частичная функция, при этом взаимно инверсные частичные функции имеют одну и ту же область неопределенных значений.

Частичная функция  $f_i$  реализуется частичной (либо полностью определенной) функцией  $f_j$  (обозначается  $f_i < f_j$ ), если и только если

$$M_{f_i}^1 \subseteq M_{f_j}^1, \quad M_{f_i}^0 \subseteq M_{f_j}^0 \quad (1.3)$$

Функцию  $f_j$  называют *доопределением* функции  $f_i$ . Для пары полностью определенных булевых функций  $f_i, f_j$  отношение реализации является отношением равенства. Под *векторной булевой*

функцией  $f(x)$  будем понимать упорядоченную систему частичных булевых функций  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ , значениями векторных функций на элементах  $x^*$  булева пространства являются  $m$ -компонентные троичные векторы  $f(x^*)$ .

Разложением Шеннона полностью определенной либо частичной булевой функции  $f = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , по переменной  $x_i$  называется представление

$$f = f(x) = \bar{x}_i f_0(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee x_i f_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Функции  $f_0 = f_0(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $f_1 = f_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  называются **кофакторами** (cofactors, англ.) разложения по переменной  $x_i$  либо *подфункциями*. Они получаются из функции  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  подстановкой вместо переменной  $x_i$  константы 0 и 1 соответственно. Каждая из подфункций  $f_0$  и  $f_1$  может быть разложена по одной из переменных из множества  $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ . Процесс разложения подфункций заканчивается, когда все  $n$  переменных будут использованы для разложения либо когда все подфункции вырождаются до констант 0, 1, “–” (неопределенное значение). На каждом шаге разложения выполняется сравнение на равенство полученных подфункций и оставляется одна из нескольких попарно равных подфункций.

Под *BDD-представлением* частичной векторной булевой функции  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  понимается ориентированный ациклический граф, задающий последовательные разложения Шеннона всех компонентных функций  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , по всем ее переменным  $x_1, \dots, x_n$  при одном и том же заданном порядке (перестановке) переменных, по которым проводятся разложения [7]. Для упрощения графа листовые вершины обычно дублируются, а ориентация дуг на рисунках графов BDD не показывается, так как всегда принимается, что дуги ориентированы сверху вниз.

Наиболее близкими к графам BDD для частичных векторных функций (назовем такие графы *частичными BDD*) являются широко известные в литературе сокращенные упорядоченные BDD (англ. *reduced ordered BDD, ROBDD*) для одной полностью определенной булевой функции, в которых каждой функциональной вершине соответствует одна функция (подфункция разложения Шеннона), при этом функциональные вершины лишь подразумеваются (отождествляются с вершинами-переменными). Подробное описание OBDD (упорядоченных BDD) дано в [12, 13], ROBDD – в [1]. Далее под BDD будут пониматься ROBDD для систем функций (векторных функций).

Будем изображать на рисунках графы BDD, содержащие три вида вершин: функциональные вершины, соответствующие разлагаемым функциям; вершины-переменные; листовые вершины-константы 0, 1 “–” [7, с. 16]. BDD-представлению соответствуют формулы разложения Шеннона, каждой функциональной вершине – своя формула. По BDD-представлению можно найти задание каждой из компонентных функций  $f_i(x)$  в виде трех ортогонализированных ДНФ: одна из таких ДНФ задает область  $M_{f_i}^1$  единичных значений компонентной функции, другая ДНФ – область  $M_{f_i}^0$  нулевых значений функции, третья ДНФ – область  $M_{f_i}^-$  неопределенных значений компонентной частичной функции  $f_i(x)$ . BDD является более компактной формой по сравнению с ортогонализированной формой представления булевых функций (такие формы будут рассмотрены далее). Так BDD – это граф, а ортогонализированная форма задает *все пути* из корневых вершин в листовые в этом графе. Задание графа более компактно, чем перечисление всех путей в нем. Поэтому BDD и нашли широкое применение не только при проектировании логических схем, но и в информатике в целом [1, 2].

**З а м е ч а н и е 1.** Рисунки и структуры данных классических BDD не содержат функциональных вершин. Функциональные вершины обычно показываются на рисунках для удобства изложения методов минимизации BDD и иллюстрации зависимостей переменных в формулах разложений Шеннона, в компьютерных структурах данных функциональные вершины не указываются [7, с. 177].

**2. Алгебраические разложения частичных функций.** **З а д а ч а 1.** Заданы частичные булевы функции  $\varphi(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ . Требуется найти, если это возможно, такие доопределения  $\varphi^*(x)$ ,  $f_1^*(x)$ ,  $f_2^*(x)$  соответствующих функций (запишем это в виде  $\varphi(x) \prec \varphi^*(x)$ ,  $f_1(x) \prec f_1^*(x)$ ,  $f_2(x) \prec f_2^*(x)$ ), что будет выполняться одно из алгебраических разложений:

$$\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \vee f_2^*(x)), \quad (2.1)$$

$$\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \& f_2^*(x)). \quad (2.2)$$

**Таблица 1.** Условия, не позволяющие провести разложение с выходной функцией “ $\vee$ ”

Значение функции			
$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi(x)$ ( $\varphi(x) \neq f_1(x) \vee f_2(x)$ )	Условие
0	0	1	(2.3)
1	–	0	(2.4)
–	1	0	(2.5)

Естественно, для каждого из разложений (2.1), (2.2) требуются свои доопределения функций  $\varphi(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ . Логические операторы  $\vee$  (дизъюнкция),  $\&$  (конъюнкция) в формулах (2.1), (2.2) называют также *выходными* функциями соответствующего разложения. В [7] логические операции над частичными булевыми функциями (троичными переменными) определены следующим образом:

функция $f_1$	0	0	0	–	–	–	1	1	1
функция $f_2$	0	–	1	0	–	1	0	–	1
отрицание $\bar{f}_1$	1	1	1	–	–	–	0	0	0
дизъюнкция $f_1 \vee f_2$	0	–	1	–	–	1	1	1	1
конъюнкция $f_1 \& f_2$	0	0	0	0	–	–	0	–	1

**У т в е р ж д е н и е 1.** Задача нахождения разложения (2.1) не имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий (2.3)–(2.5):

$$(M_{f_1}^0 \cap M_{f_2}^0) \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset, \quad (2.3)$$

$$M_{f_1}^1 \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset, \quad (2.4)$$

$$M_{f_2}^1 \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset. \quad (2.5)$$

Условие (2.3) говорит о том, что, если найдется хотя бы один набор значений переменных, на котором обе функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  принимают значение нуля, а функция  $\varphi(x)$  принимает значение единица, то через операцию дизъюнкции функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  нельзя выразить функцию  $\varphi(x)$ , так как дизъюнкция двух нулей не может быть равна единице. В случае (2.4) от значения функции  $f_2(x)$  ничего не зависит, дизъюнкция  $f_1(x) \vee f_2(x)$  не может принять значение нуля (значение нуля имеет функция  $\varphi(x)$ ), так  $f_1(x)$  принимает значение единица. Аналогично в случае (2.5). Условия (2.3)–(2.5) можно задать в табличном виде (табл. 1). Таблица 2 позволяет проверить возможность доопределения функций  $\varphi(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  для проверки реализации  $\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \vee f_2^*(x))$ . Рассмотрим третью строку табл. 2, в которой  $f_1(x) = 0$ ,  $f_2(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = “–”$ . Для выполнения дизъюнктивного разложения нужно заменить значение “–” на 0:  $\varphi(x) = 0$ . Аналогично можно доопределять значения “–” и для других строк из табл. 2, не содержащих пометку “Нет решения”.

**У т в е р ж д е н и е 2.** Задача нахождения разложения (2.2) не имеет решения тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из условий (2.6)–(2.8):

$$M_{f_1}^0 \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (2.6)$$

$$M_{f_2}^0 \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (2.7)$$

$$(M_{f_1}^1 \cap M_{f_2}^1) \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset. \quad (2.8)$$

Условия (2.6)–(2.8) можно задать в табличном виде (табл. 3). Таблица 4 позволяет проверить возможность доопределения функций  $\varphi(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  для проверки реализации  $\varphi^*(x) \prec (f_1^*(x) \& f_2^*(x))$ , замены неопределенных значений “–” нулями или единицами в строках, не содержащих пометку “Нет решения”, всегда могут быть выполнены для конъюнктивного разложения.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены условия доопределения функций  $\varphi(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  для получения алгебраических разложений по другим выходным функциям, например,

**Таблица 2.** Доопределения частичных функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $\varphi(x)$  для разложения  $\varphi^*(x) < (f_1^*(x) \vee f_2^*(x))$ 

Значения исходных функций			Значения реализующих функций $\varphi^*(x) < (f_1^*(x) \vee f_2^*(x))$		
$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi(x)$	$f_1^*(x)$	$f_2^*(x)$	$\varphi^*(x)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1		Нет решения	
0	0	–	0	0	<b>0</b>
0	1	0		Нет решения	
0	1	1	0	1	1
0	1	–	0	1	<b>1</b>
0	–	0	0	<b>0</b>	0
0	–	1	0	<b>1</b>	1
0	–	–	0	–	–
1	0	0		Нет решения	
1	0	1	1	0	1
1	0	–	1	0	<b>1</b>
1	1	0		Нет решения	
1	1	1	1	1	1
1	1	–	1	1	<b>1</b>
1	–	0		Нет решения	
1	–	1	1	–	1
1	–	–	1	–	<b>1</b>
–	0	0	<b>0</b>	0	0
–	0	1	<b>1</b>	0	1
–	0	–	–	0	–
–	1	0		Нет решения	
–	1	1	–	1	1
–	1	–	–	1	<b>1</b>
–	–	0	<b>0</b>	<b>0</b>	0
–	–	1	<b>1</b>	–	1
–	–	–	–	<b>1</b>	1
–	–	–	–	–	–

**Таблица 3.** Условия, не позволяющие провести разложение с выходной функцией “&”

Значение функции			
$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi(x)$ ( $\varphi(x) \neq f_1(x) \& f_2(x)$ )	Условие
0	–	1	(2.6)
–	0	1	(2.7)
1	1	0	(2.8)

таким, как инверсия дизъюнкции, инверсия конъюнкции, исключаящее ИЛИ, эквиваленция и т.д.

**Пример 1.** Приведем пример (табл. 5) такого доопределения частичных функций, заданных таблицами истинности, чтобы выполнялось алгебраическое разложение (2.2). В табл. 5 жирным курсивом выделены замены неопределенных значений функций определенными (0, 1).

**Таблица 4.** Доопределения частичных функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $\varphi(x)$  для разложения  $\varphi^*(x) < (f_1^*(x) \& f_2^*(x))$ 

Значения исходных функций			Значения реализующих функций $\varphi^*(x) < (f_1^*(x) \& f_2^*(x))$		
$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi(x)$	$f_1^*(x)$	$f_2^*(x)$	$\varphi^*(x)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1		Нет решения	
0	0	–	0	0	<b>0</b>
0	1	0	0	1	0
0	1	1		Нет решения	
0	1	–	0	<b>1</b>	<b>0</b>
0	–	0	0	<b>0</b>	0
0	–	1		Нет решения	
0	–	–	0	–	<b>0</b>
1	0	0	1	0	0
1	0	1		Нет решения	
1	0	–	1	0	<b>0</b>
1	1	0		Нет решения	
1	1	1	1	1	1
1	1	–	1	1	<b>1</b>
1	–	0	1	<b>0</b>	0
1	–	1	1	<b>1</b>	1
1	–	–	1	–	–
–	0	0	<b>0</b>	0	0
–	0	1		Нет решения	
–	0	–	–	0	<b>0</b>
–	1	0	<b>0</b>	1	0
–	1	1	<b>1</b>	1	1
–	1	–	–	1	–
–	–	0	<b>0</b>	–	0
–	–	–	–	<b>0</b>	0
–	–	1	<b>1</b>	<b>1</b>	1
–	–	–	–	–	–

**3. Ортогонализированные формы частичной векторной булевой функции.** Интервальная форма задания частичной векторной функции  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  состоит из троичной матрицы  $T^x$  задания элементарных конъюнкций и троичной матрицы  $T^f$  вхождений конъюнкций в ДНФ, представляющих области нулевых и единичных значений компонентных функций. Данная форма задания частичных функций подробно описана в литературе [21]. Если в матричном задании в троичной матрице  $T^x$  все строки (троичные векторы) ортогональны, то такая матричная форма представления векторной булевой функции называется *ортогонализированной*. Для ортогонализированной формы строки матрицы  $T^f$  задают значения функций на соответствующих интервалах булева пространства  $V^x$ . Алгоритмы получения ортогонализированных форм систем функций по исходным интервальным формам известны из [21, 22]. Более компактной по сравнению с ортогонализированной является *обобщенно ортогонализированная* форма, когда частичная векторная функция задается на *попарно ортогональных ДНФ*, а не на попарно ортогональных интервалах (конъюнкциях), как это осуществляется в ортогонализированных формах. Данная форма представления является более компактной и удобной для решения задач, возникающих при доопределении частичных функций, например с целью сокращения сложности BDD [7].

Таблица 5. Доопределения частичных функций (пример 1) для разложения с операцией “&”

$x_1 x_2 x_3$	Исходные функции			Реализующие функции разложения $f_2^* < (f_1^* \& f_3^*)$		
	$f_2$	$f_1$	$f_3$	$f_2^*$	$f_1^*$	$f_3^*$
0 0 0	–	–	–	–	–	–
0 0 1	1	–	1	1	<b>1</b>	1
0 1 0	–	0	0	<b>0</b>	0	0
0 1 1	–	1	1	<b>1</b>	1	1
1 0 0	1	1	–	1	1	<b>1</b>
1 0 1	0	0	0	0	0	0
1 1 0	–	–	–	–	–	–
1 1 1	0	–	1	0	1	1

Нахождение обобщенно ортогонализованной формы для частичной векторной булевой функции  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  сводится к решению задачи нахождения ее *минимального дизъюнктивного базиса*. Зададим каждую компонентную частичную булеву функцию  $f_i(x)$  тремя полностью определенными булевыми функциями  $\lambda_i^0(x), \lambda_i^1(x), \lambda_i^-(x)$ , такими, что функция  $\lambda_i^0(x)$  имеет характеристическое множество  $M_{f_i}^0$ , функция  $\lambda_i^1(x)$  – характеристическое множество  $M_{f_i}^1$ , функция  $\lambda_i^-(x)$  – характеристическое множество  $M_{f_i}^-$ . *Минимальным дизъюнктивным базисом* для  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  называется минимальная по мощности система попарно ортогональных полностью определенных булевых функций  $\Pi = \{\Pi^1(x), \dots, \Pi^k(x)\}$ , такая, что каждая полностью определенная функция  $\lambda_i^0(x), \lambda_i^1(x), \lambda_i^-(x)$  равна дизъюнкции некоторого подмножества функций системы  $\Pi$ . Частичная булева функция  $f_i(x)$  задает трехблочное разбиение  $R_i = \{M_{f_i}^0, M_{f_i}^1, M_{f_i}^-\}$  булева пространства  $V^x$  на попарно непересекающиеся подмножества. Нахождение для  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  минимального дизъюнктивного базиса (в теоретико-множественной интерпретации) может быть сведено к нахождению произведения разбиений  $R_i, i = \overline{1, m}$ , [23, с. 12] и составлению из непустых блоков полученного произведения разбиений каждого из исходных блоков  $M_{f_i}^0, M_{f_i}^1, M_{f_i}^-$ . Пусть каждая компонентная функция  $f_i$  задана тройкой попарно ортогональных ДНФ  $D_{f_i}^0, D_{f_i}^1, D_{f_i}^-$ , данные ДНФ представляют функции  $\lambda_i^0(x), \lambda_i^1(x), \lambda_i^-(x)$  соответственно. В этом случае нахождение минимального дизъюнктивного базиса  $\Pi$  может быть сведено к выполнению операций перемножения, инверсирования и сравнения на равенство ДНФ, алгоритм описан в [24, с. 124]. Он оперирует исходными данными для случая, когда каждая из функций задана элементарной конъюнкцией. Алгоритм пригоден и для случая задания функций  $\lambda_i^0(x), \lambda_i^1(x), \lambda_i^-(x)$  в виде ДНФ. Он программно реализован и использован при решении задачи декомпозиции системы булевых функций. Примеры разбиения булева пространства на непересекающиеся подмножества (характеристические множества попарно ортогональных базисных функций  $\Pi^1(x), \dots, \Pi^k(x)$ ) показаны в [7, с. 135; 24, с. 120].

**Пример 2.** Пусть каждая из частичных компонентных функций  $f_1, f_2, f_3$  векторной булевой функции  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)), x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , задана тремя ДНФ, представляющими области нулевых, единичных и неопределенных значений этой компонентной функции (табл. 6). Чтобы решить задачу нахождения дизъюнктивного разложения (2.1), построим для данных трех функций минимальный дизъюнктивный базис и обобщенно ортогонализованную форму.

Ортогонализованная форма векторной функции  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$  задана в табл. 7. Легко проверить, что каждая пара элементарных конъюнкций, соответствующих троичным векторам из левой части табл. 7, находится в отношении ортогональности (для ортогональных элементарных конъюнкций их произведение равно нулю). Например, рассмотрим первую пару: троичному вектору (0 0 0 –) соответствует элементарная конъюнкция  $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ , булеву вектору (0 1 0 1) –

Таблица 6. Задание областей значений функций (пример 2) в виде ДНФ

Частичная функция	$x_1 x_2 x_3 x_4$	Значение	Область значений	Функция $\lambda$	
$f_1$	0 0 - -	0	$M_{f_1}^0$	$\lambda_1^0$	
	0 1 0 1	0			
	1 0 - 0	1			
	1 - 0 -	1			
	0 1 1 1	1			
	1 - 1 1	1			
	- 1 1 0	-			
$f_2$	0 1 0 0	-	$M_{f_2}^-$	$\lambda_1^-$	
	- 1 1 0	0			
	0 1 0 0	0			
	1 - 0 -	1			
	0 0 1 -	1			
	0 0 0 -	-			
	0 - 0 1	-			
$f_3$	1 0 1 -	-	$M_{f_3}^-$	$\lambda_2^-$	
	1 - 1 1	-			
	- 1 1 1	-			
	0 0 0 -	0			
	0 1 0 1	0			
	- 1 1 0	1			
	0 1 - 0	1			
1 - 0 1	1	$M_{f_3}^0$	$\lambda_3^0$		
1 - 0 0	1				
- - 1 1	-				
- 0 1 0	-				
				$M_{f_3}^1$	$\lambda_3^1$

Таблица 7. Ортогонализованная форма функций (пример 2)

$T^x$	$T^f$
$x_1 x_2 x_3 x_4$	$f_1 f_2 f_3$
0 0 0 -	0 - 0
0 1 0 1	0 - 0
1 - 0 -	1 1 1
- 1 1 0	- 0 1
0 1 0 0	- 0 1
0 0 1 -	0 1 -
1 0 1 -	1 - -
- 1 1 1	1 - -

полная элементарная конъюнкция  $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ , они ортогональны по второй компоненте:  $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4) = 0$ .

Представление ДНФ, задающих области значений компонентных функций, в виде дизъюнкций ДНФ минимального дизъюнктивного базиса имеет следующий вид:

$$D_{f_1}^0 = \Pi^1 \vee \Pi^4; \quad D_{f_1}^1 = \Pi^2 \vee \Pi^5; \quad D_{f_1}^- = \Pi^3,$$

**Таблица 8.** Обобщенно ортогонализированная форма функций (пример 2)

$\Pi^i$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	$f_1 f_2 f_3$
$\Pi^1$	0 0 0 -	0 - 0
	0 1 0 1	
$\Pi^2$	1 - 0 -	1 1 1
	- 1 1 0	- 0 1
$\Pi^3$	0 1 0 0	
	0 0 1 -	0 1 -
$\Pi^4$	1 0 1 -	1 - -
	- 1 1 1	

**Таблица 9.** Доопределения частичных функций из примера 2 для алгебраического разложения с операцией “ $\vee$ ”

$\Pi^i$	Исходные функции			Реализующие функции разложения $f_3^* < (f_1^* \vee f_2^*)$		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1^*$	$f_2^*$	$f_3^*$
$\Pi^1$	0	-	0	0	<b>0</b>	0
$\Pi^2$	1	1	1	1	1	1
$\Pi^3$	-	0	1	<b>1</b>	0	1
$\Pi^4$	0	1	-	0	1	<b>1</b>
$\Pi^5$	1	-	-	1	-	<b>1</b>

$$D_{f_2}^0 = \Pi^3; \quad D_{f_2}^1 = \Pi^2 \vee \Pi^4; \quad D_{f_2}^- = \Pi^1 \vee \Pi^5,$$

$$D_{f_3}^0 = \Pi^1; \quad D_{f_3}^1 = \Pi^2 \vee \Pi^3; \quad D_{f_3}^- = \Pi^4 \vee \Pi^5.$$

Обобщенно ортогонализированная форма частичной векторной функции  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$  дана в табл. 8. Легко видеть, что значения функций на наборах, соответствующих полным элементарным конъюнкциям минимального дизъюнктивного базиса, являются одинаковыми. Теперь легко доопределить функции  $f_1, f_2, f_3$  из табл. 6 так, что возможно провести разложение  $f_3^* < (f_1^* \vee f_2^*)$  (табл. 9). Перейдя от ортогонализированной формы (табл. 7) либо от табл. 8 к таблице истинности (табл. 10) частичной векторной функции  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ , можно убедиться, что обобщенно ортогонализированная форма более компактна по сравнению с ортогонализированной формой и значительно более компактна по сравнению с таблицей истинности.

**У т в е р ж д е н и е 3.** Приведенные в табл. 2, 4 доопределения функций для построения разложений (2.1), (2.2) соответственно справедливы для задания функций таблицами истинности, ортогонализированными, обобщенно ортогонализированными формами и графами BDD.

При задании функций BDD проверка возможности доопределения функций, участвующих в разложениях (2.1), (2.2), сводится к логическим операциям над соответствующими BDD: сначала выполняется операция слияния BDD, реализующих  $f_1(x), f_2(x), \varphi(x)$ , т.е. строится BDD векторной функции  $f = (f_1(x), f_2(x), \varphi(x))$ , затем для листовых вершин, заданных трехкомпонентными троичными векторами, проверяются условия возможности доопределения, приведенные в табл. 2 либо табл. 4.

**4. Задача нахождения алгебраически представимых функций.** Обозначим через  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  множество частичных функций. Найдем в множестве  $G$  (если это возможно) максимальное по мощности подмножество  $G^c$  функций, которые могут быть выражены через дизъюнкцию либо конъюнкцию пар функций, не вошедших в множество  $G^c$ . Это, естественно, происходит при соответствующем доопределении частичных функций, входящих в разложения. Назовем функции

**Таблица 10.** Таблица истинности функций из примера 2 (строки в таблице истинности переставлены)

$x_1 x_2 x_3 x_4$	$f_1 f_2 f_3$
0 0 0 0	0 – 0
0 0 0 1	0 – 0
0 1 0 1	0 – 0
1 0 0 0	1 1 1
1 0 0 1	1 1 1
1 1 0 0	1 1 1
1 1 0 1	1 1 1
0 1 1 0	– 0 1
1 1 1 0	– 0 1
0 1 0 0	– 0 1
0 0 1 0	0 1 –
0 0 1 1	0 1 –
1 0 1 0	1 – –
1 0 1 1	1 – –
0 1 1 1	1 – –
1 1 1 1	1 – –

из множества  $G^b = G \setminus G^c$  основными (базисными), а функции из множества  $G^c$  – представимыми. Каждая функция из множества  $G^c$  при этом должна задаваться в алгебраическом (дизъюнктивном либо конъюнктивном) разложении своей парой базисных функций, т.е. каждая основная функция может входить в разложение только одной функции из  $G^c$ .

**З а д а ч а 2.** Для заданного множества  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  частичных функций требуется найти в  $G$  максимальное по мощности подмножество  $G^c$  представимых функций (главный критерий) и при этом требуется минимизировать суммарное множество наборов, на которых доопределяются базисные функции (дополнительный критерий оптимизации).

Составим множество всех неупорядоченных пар  $\{g_i, g_j\}$  функций,  $i, j = \overline{1, k}, i \neq j$ . Для каждой пары  $\{g_i, g_j\}$  проверим выполнение отношения реализации:

$$g_s^* \prec (g_i^* \vee g_j^*), \quad (4.1)$$

$$g_s^* \prec (g_i^* \& g_j^*), \quad (4.2)$$

т.е. решим задачу 1 нахождения разложений (2.1), (2.2) для троек функций  $g_i, g_j, g_s$  (с учетом возможности их доопределения). Если реализация (4.1) возможна, то присвоим ей вес  $\rho(g_i, g_j, g_s, \vee)$ , равный числу неопределенных значений функций  $g_i, g_j$ , которые надо заменить определенными.

Если реализация (4.2) возможна, то присвоим ей вес  $\rho(g_i, g_j, g_s, \&)$ , равный числу неопределенных значений функций  $g_i, g_j$ , которые надо заменить определенными. Составим двудольный неориентированный граф  $R$ , вершины первой доли помечены парами  $\{g_i, g_j\}$ , вершины второй доли – функциями множества  $G$ . Число вершин первой доли равно  $C_k^2$ , число вершин второй доли –  $k$ . Если пара  $\{g_i, g_j\}$  не реализует  $g_s$  ни в виде (4.1), ни в виде (4.2), то между вершинами  $\{g_i, g_j\}, g_s$  нет ребра. Если же реализация в виде (4.1) возможна, а реализация (4.2) невозможна, то ребру присваивается вес  $\rho(g_i, g_j, g_s, \vee)$ ; и наоборот, если реализация в виде (4.2) возможна, а реализация (4.1) невозможна, то ребру присваивается вес  $\rho(g_i, g_j, g_s, \&)$ . Если же частичные функции такие, что возможны обе реализации (4.1) и (4.2), то ребру между вершинами  $\{g_i, g_j\}$  и  $g_s$  присваивается вес

$$\min\{\rho(g_i, g_j, g_s, \vee), \rho(g_i, g_j, g_s, \&)\}.$$

Каждое ребро  $\langle \{g_i, g_j\}, g_s \rangle$  графа  $R$  задает тройку функций, реализующих дизъюнктивное (4.1) либо конъюнктивное (4.2) разложение.

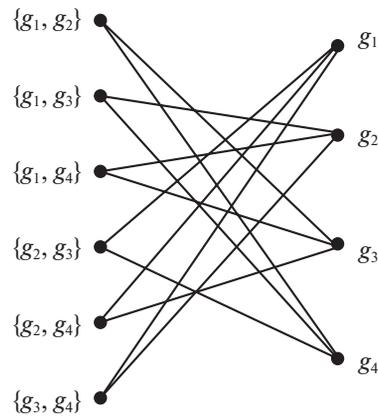


Рис. 1. Двудольный граф

Для построения графа  $R$  для каждой функции  $g_s$ ,  $s = \overline{1, k}$ , требуется рассмотреть  $C_k^2 - (k - 1)$  вариантов пар проверки возможности дизъюнктивного разложения (исключаются  $k - 1$  пар  $(g_i, g_s)$ ,  $i \neq s$ ;) и столько же  $C_k^2 - (k - 1)$  вариантов пар проверки возможности конъюнктивного разложения.

Таким образом, для построения графа  $R$  требуется проверить

$$Z = 2k(C_k^2 - (k - 1)) \quad (4.3)$$

вариантов получения формул (2.1), (2.2) для  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ .

Двудольный граф для  $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  для подсчета числа  $Z$  вариантов приведен на рис. 1. В графе на рис. 1 имеется 12 ребер ( $k = 4$ ) для проверки дизъюнктивного разложения и соответственно столько же ребер для проверки конъюнктивного разложения, поэтому  $Z = 2 \times 4 \times (C_4^2 - (4 - 1)) = 8(6 - 3) = 24$ .

С использованием графа  $R$  решение задачи 2 можно свести к нахождению такого паросочетания графа, которое содержит максимальное количество ребер имеющих минимальный суммарный вес. При этом пометки вершин каждого ребра, вошедшего в паросочетание, должны задавать различные тройки функций. Множество  $G^c$  представимых функций будут образовывать функции, помечающие вершины второй доли.

#### 4.1. Эвристический алгоритм решения задачи 2.

**Шаг 1.** Вычислить для каждого ребра  $\langle \{g_i, g_j\}, g_s \rangle$  графа  $R$  оценку  $\alpha(g_i, g_j, g_s)$  – число неизоллированных вершин в сокращенном графе  $R$ , из которого удалено ребро  $\langle \{g_i, g_j\}, g_s \rangle$  и исключены из первой доли графа  $R$  вершины-пары (в них входит  $g_i$  либо  $g_b$ , либо  $g_j$ ), а из второй доли исключена вершина  $g_s$ .

**Шаг 2.** Найти ребро между вершинами  $\langle \{g_a, g_b\}, g_c \rangle$  графа  $R$ , которое характеризуется максимальной оценкой  $\alpha(g_a, g_b, g_c)$ , и включить его в решение. Заметим, что каждое ребро помечено одним из видов разложения (конъюнктивным либо дизъюнктивным). Если таких ребер несколько, то выбрать ребро, характеризуемое минимальным значением веса  $\rho$ . Если и таких ребер несколько, то выбрать первое из них.

**Шаг 3.** Редуцировать граф, т.е. исключить из первой доли графа  $R$  вершины-пары, в которые входит  $g_a$  либо  $g_b$ , либо  $g_c$ , а также исключить вершину  $g_c$  из второй доли.

**Шаг 4.** Выполнять шаги 1, 2 до тех пор, пока в графе  $R$  не останется ребер. Перейти на шаг 5.

**Шаг 5.** Конец.

**5. Использование инверсий функций при их алгебраическом разложении.** Поиск алгебраических разложений может быть осуществлен с учетом инверсирования функций – некоторые функции нельзя представить в виде алгебраических разложений, но их инверсии могут быть представимы. Тогда в уравнение для соответствующей переменной добавляется оператор инверсии.

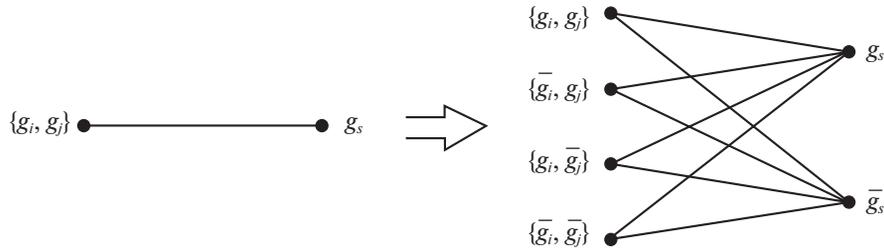


Рис. 2. Увеличение числа вершин и ребер двудольного графа при использовании инверсий кофакторов

Рассмотрим задачу 2 для случая, когда могут быть использованы для дизъюнктивных либо конъюнктивных разложений функции множества  $G$  как в инверсной  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k$ , так и прямой  $g_1, \dots, g_k$  форме.

Так как каждая из функций  $g_s$  рассматривается как в прямой  $g_s$ , так и инверсной  $\bar{g}_s$  форме, поэтому в первой (левой) доли графа  $R$  будет  $C_{2k}^2 - k$  неупорядоченных пар-вершин (пары  $\{g_i, g_i\}$ ,  $\{\bar{g}_i, \bar{g}_i\}$ ,  $\{g_i, \bar{g}_i\}$  не рассматриваются), в правой доли —  $2k$  вершин  $g_1, \bar{g}_1, g_2, \bar{g}_2, \dots, g_k, \bar{g}_k$ . По сути, каждое ребро  $(\{g_i, g_j\}, g_s)$  на рис. 1 заменяется подграфом, показанным на рис. 2. Описанный ранее эвристический алгоритм решения задачи 2 подвергается модификации: в шагах 1–3 алгоритма при нахождении оценки  $\alpha(g_i, g_j, g_s)$  ребра  $\langle \{g_i, g_j\}, g_s \rangle$  и ребра  $\langle \{g_a, g_b\}, g_c \rangle$ , включаемого в решение, из первой доли графа  $R$  исключаются вершины-пары, в которые входит любая функция из множества  $\{g_a, \bar{g}_a, g_b, \bar{g}_b, g_c, \bar{g}_c\}$ , из второй доли исключаются две вершины  $g_c$  и  $\bar{g}_c$ .

Очевидно, что комбинаторная сложность решения задачи 2 с учетом возможности инверсирования функций при поиске их алгебраических разложений значительно увеличивается. В данной работе алгебраическое разложение частичных кофакторов основывается на том, что частичный кофактор реализуется выбранной уникальной парой других частичных кофакторов, т.е. один и тот же частичный кофактор не участвует в алгебраическом разложении нескольких частичных кофакторов. Полностью определенные кофакторы, участвующие в алгебраических разложениях, не требуют доопределения, поэтому один и тот же полностью определенный кофактор может использоваться в алгебраических представлениях нескольких кофакторов [17].

**6. Пример BDD для частичной векторной функции.** П р и м е р 3. Рассмотрим BDD (рис. 3) для частичной векторной функции  $f(x) = (f_1, f_2, f_3)$ , заданной таблицей истинности (табл. 11), по перестановке переменных  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$ .

Алгоритм построения BDD для частичных векторных функций описан в [7, с. 56] и сводится к нахождению одинаковых подфункций, найденных в результате разложения Шеннона по переменной  $x_1$  исходных компонентных функций  $f_1, f_2, f_3$ , разложением Шеннона по переменной  $x_2$  различных частичных подфункций  $h_1, \dots, h_5$ , полученных на шаге 1 разложения, и т.д. Графу BDD (рис. 3) соответствуют формулы разложений Шеннона, заданные в правом столбце табл. 11, при этом частичные функции  $t_1, \dots, t_9$  первого уровня BDD приведены в табл. 12. Кофакторы первого уровня зависят от одной переменной  $x_5$  и являются частичными функциями. Число частичных булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, определяется по формуле  $3^{2^n}$ . Для  $n = 1$  имеется девять частичных функций, заметим, что все они заданы на первом уровне BDD (рис. 3).

На третьем уровне BDD имеется девять кофакторов  $g_1, \dots, g_9$ , на четвертом — пять кофакторов, на пятом (корневом уровне BDD) — три корневые вершины разлагаемых компонентных частичных функций. Если какая-то дуга BDD пересекает рассматриваемый уровень BDD и заходит в функциональную вершину  $\alpha$  более низкого уровня, то считается, что на данном уровне BDD есть кофактор  $\alpha$ , зависящий от меньшего числа аргументов. Позже будут представлены примеры таких BDD.

Из BDD можно получить области определения как исходных функций, так и любого из кофакторов, это подробно описано в [7, с. 37]. Каждому пути из корневой вершины BDD, помеченной функцией  $f_j$ , к листовой вершине 1 соответствует элементарная конъюнкция, включающая дуги (литералы)  $x_i, \bar{x}_i$  на этом пути. При этом дуге, помеченной символом 0, соответствует отрицательный литерал  $\bar{x}_i$ ; дуге, помеченной символом 1, — положительный литерал  $x_i$ , а всем путям

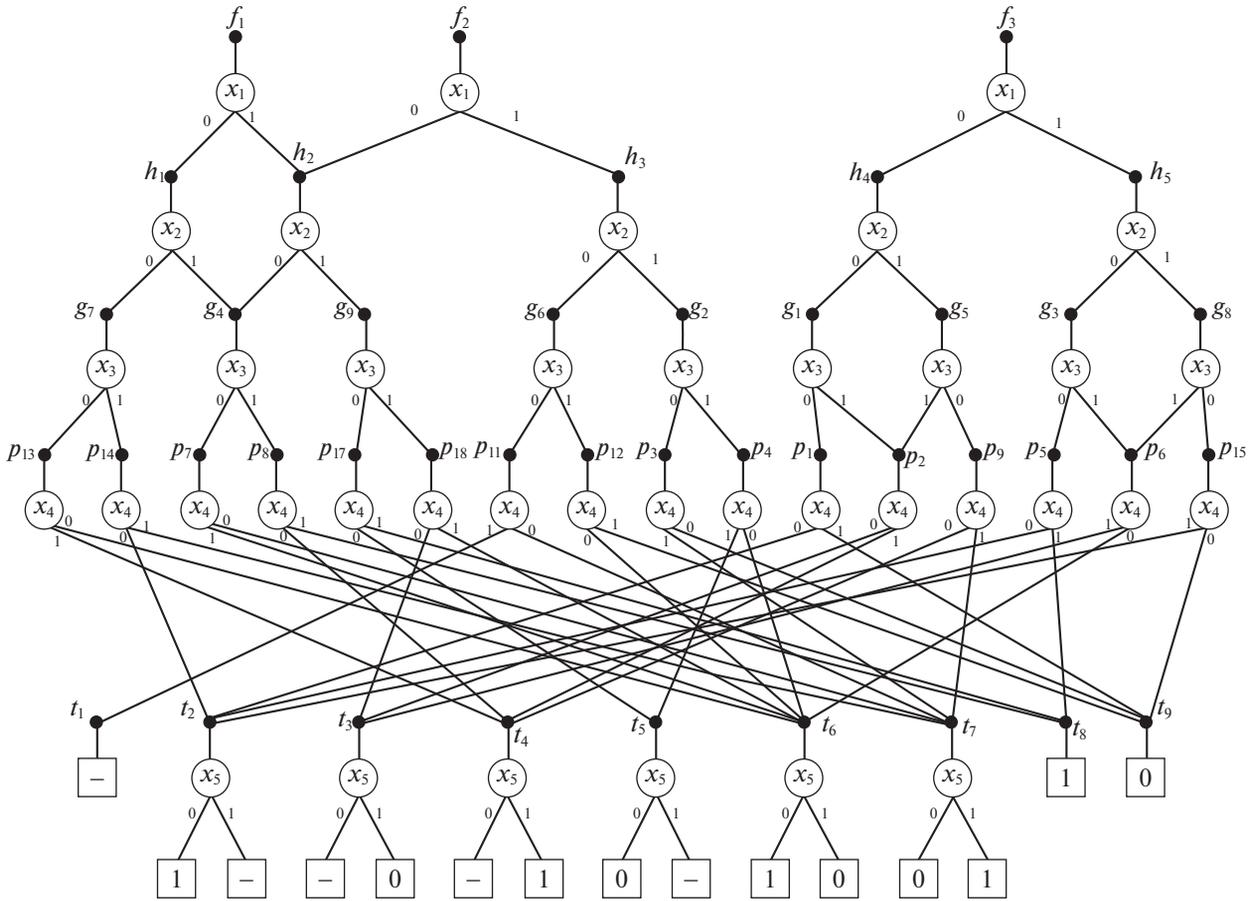


Рис. 3. BDD, представляющая частичную векторную булеву функцию (табл. 11)

между указанными вершинами – дизъюнкция получаемых элементарных конъюнкций, образующая ортогонализированную ДНФ  $D_{f_j}^1$ . Пути из корневой вершины  $f_j$  к листовой вершине 0 задают ортогонализированную ДНФ  $D_{f_j}^0$ , а пути к вершине “–” – ортогонализированную ДНФ  $D_{f_j}^-$ . При построении ДНФ, описывающих области определения кофактора, вместо корневой вершины BDD рассматривается функциональная вершина данного кофактора.

Например, области нулевых, единичных и неопределенных значений кофактора  $g_1$ , полученные из графа BDD (рис. 3), задаются следующими ортогонализированными ДНФ:

$$D_{g_1}^1 = \bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_3x_4x_5, \quad D_{g_1}^0 = \bar{x}_3x_4 \vee x_3\bar{x}_4x_5, \quad D_{g_1}^- = \bar{x}_3\bar{x}_4x_5 \vee x_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_3x_4\bar{x}_5.$$

**7. Метод минимизации многоуровневого BDD-представления частичной векторной функции.** Исходными данными для предлагаемого метода минимизации многоуровневого представления частичной векторной функции на основе нахождения алгебраических разложений кофакторов является граф BDD. Метод включает пять этапов.

Э т а п 1. Нахождения алгебраически представимых кофакторов.

Выполняется для каждого уровня BDD, начиная с уровня кофакторов, получаемых в результате разложения Шеннона по первой переменной, и исключая последний листовой уровень, на котором расположены константы 0, 1, “–”. Исключается из рассмотрения также первый уровень BDD, соответствующий разложению по последней переменной в заданной перестановке переменных, по которым ведется разложение Шеннона.

З а м е ч а н и е 2. Метод может быть применен с выбранного уровня BDD, двигаясь как вниз, так и вверх по уровням BDD. При движении вверх рассмотрение кофакторов начинается со второго уровня BDD.

Таблица 11. Задание частичной векторной функции (пример 3)

Таблица истинности		Многоуровневое представление (функциональные вершины BDD)
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	$f_1 f_2 f_3$	
0 0 0 0 0	1 0 1	$f_1 = \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2; f_2 = \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3;$
0 0 0 0 1	0 1 -	$f_3 = \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5;$
0 0 0 1 0	- 1 0	
0 0 0 1 1	1 0 0	
0 0 1 0 0	1 - -	$h_1 = \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4; h_2 = \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9;$
0 0 1 0 1	- 1 0	$h_3 = \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2;$
0 0 1 1 0	0 1 -	$h_4 = \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5; h_5 = \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8;$
0 0 1 1 1	1 1 1	
0 1 0 0 0	0 0 -	
0 1 0 0 1	1 - 1	
0 1 0 1 0	1 0 0	$g_1 = \bar{x}_3 p_1 \vee x_3 p_2;$
0 1 0 1 1	0 1 1	$g_2 = \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_4; g_3 = \bar{x}_3 p_5 \vee x_3 p_6;$
0 1 1 0 0	- - -	$g_4 = \bar{x}_3 p_7 \vee x_3 p_8;$
0 1 1 0 1	1 0 0	$g_5 = \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_2; g_6 = \bar{x}_3 p_{11} \vee x_3 p_{12};$
0 1 1 1 0	1 1 -	$g_7 = \bar{x}_3 p_{13} \vee x_3 p_{14}; g_8 = \bar{x}_3 p_{15} \vee x_3 p_6;$
0 1 1 1 1	1 0 1	$g_9 = \bar{x}_3 p_{17} \vee x_3 p_{18};$
1 0 0 0 0	0 0 1	
1 0 0 0 1	1 1 -	
1 0 0 1 0	1 - 1	
1 0 0 1 1	0 - 1	$p_1 = \bar{x}_4 t_2 \vee x_4 t_9 = \bar{x}_4 t_2; p_2 = \bar{x}_4 t_3 \vee x_4 t_4;$
1 0 1 0 0	- 1 1	$p_3 = \bar{x}_4 t_9 \vee x_4 t_7 = x_4 t_7; p_4 = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_5;$
1 0 1 0 1	1 0 0	$p_5 = \bar{x}_4 t_2 \vee x_4 t_8, p_6 = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_3;$
1 0 1 1 0	1 0 -	$p_7 = \bar{x}_4 t_7 \vee x_4 t_6;$
1 0 1 1 1	1 0 0	$p_8 = \bar{x}_4 t_4 \vee x_4 t_8 = \bar{x}_4 t_4 \vee x_4; p_9 = \bar{x}_4 t_4 \vee x_4 t_7;$
1 1 0 0 0	0 0 0	$p_{11} = \bar{x}_4 t_7 \vee x_4 t_1; p_{12} = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_9 = x_4 t_6;$
1 1 0 0 1	- 0 0	$p_{13} = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_4; p_{14} = \bar{x}_4 t_2 \vee x_4 t_7;$
1 1 0 1 0	0 0 1	$p_{15} = \bar{x}_4 t_9 \vee x_4 t_2 = x_4 t_2; p_{16} = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_3;$
1 1 0 1 1	1 1 -	$p_{17} = \bar{x}_4 t_5 \vee x_4 t_7; p_{18} = \bar{x}_4 t_3 \vee x_4 t_6$
1 1 1 0 0	- 1 1	
1 1 1 0 1	0 0 0	
1 1 1 1 0	1 0 -	
1 1 1 1 1	0 - 0	

На очередном уровне BDD решается задача нахождения наибольшего числа алгебраически представимых частичных кофакторов.

Шаг 1. Выбор формы представления кофакторов данного уровня BDD (таблица истинности; пара ДНФ, задающая области определения кофактора; подграф BDD) и задание кофакторов в требуемой форме.

Шаг 2. Нахождение на уровне BDD пар взаимно инверсных кофакторов и выбор одного кофактора из такой пары для получения алгебраических представлений выбранных кофакторов в виде конъюнкции либо дизъюнкции других частичных кофакторов данного уровня.

**Таблица 12.** Частичные кофакторы первого уровня BDD (рис. 3)

$x_5$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$
0	–	1	–	–	0	1	0	1	0
1	–	–	0	1	–	0	1	1	0

**Шаг 3.** Нахождение максимального по мощности множества частичных кофакторов, которые представимы в виде конъюнкции либо дизъюнкции базисных частичных кофакторов того же уровня BDD – решение задачи 2. Доопределение частичных кофакторов, участвующих в алгебраических разложениях, до полностью определенных.

**Шаг 4.** Исключение представимых кофакторов, участвующих в алгебраических разложениях, из шага 5.

**Шаг 5.** Построение BDD, реализующей доопределенные базисные кофакторы и неразложенные кофакторы (по той форме их задания, по которой они сравнивались при поиске алгебраически представимых) по старой перестановке переменных либо по новой (лучшей) перестановке переменных, т.е. по той, по которой получается BDD с возможно меньшим числом функциональных вершин.

**Шаг 6.** Сокращение BDD на верхних уровнях в случае, если сократилось число кофакторов рассматриваемого уровня за счет доопределения и появления одинаковых функциональных вершин.

**Этап 2.** Доопределение частичной BDD до полностью определенной.

Если после выполнения этапа 1 в BDD остаются листовые вершины “–”, то выполняется замена листовых значений “–” константами 0, 1, т.е. осуществляется доопределение частичной BDD до полностью определенной с возможным выполнением процедуры сокращения BDD [20].

**Этап 3.** Формирование функционального представления системы полностью определенных функций в виде формул разложений Шеннона и формул для представимых кофакторов.

**Этап 4.** Дополнительная оптимизация на основе метода [17] алгебраического разложения полностью определенных кофакторов.

На каждом (из рассматриваемых в методе) уровне BDD, на котором были найдены алгебраические разложения частичных кофакторов, исключаются представимые кофакторы, а для оставшихся решается задача нахождения алгебраических разложений [17], сокращаются множества базисных кофакторов и формируется результирующее многоуровневое представление.

**Этап 5.** Проверка отношения реализации “<” между исходной BDD частичной векторной функцией и результирующим многоуровневым представлением.

Общий вид многоуровневого представления векторной функции  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ , получаемого предлагаемым методом, показан на рис. 4. Нахождение алгебраически представимых кофакторов может быть выполнено и в процессе построения BDD при задании в виде ДНФ областей определения компонентных функций исходной частичной векторной функции. Кроме того, предлагаемый метод обобщается на случай других выходных функций алгебраических разложений, таких, как исключающее ИЛИ, эквиваленция, а также на случай, когда выходные функции представляют собой  $n$ -операндные алгебраические функции дизъюнкции, конъюнкции.

**8. Пример применения метода минимизации многоуровневого BDD-представления частичной векторной функции от верхних уровней BDD.** Проиллюстрируем метод на примере 3 (рис. 3) векторной булевой функции (табл. 11), начиная с третьего уровня BDD. Подграф BDD, построенный после разложения функций  $f_1, f_2, f_3$  по переменным  $x_1, x_2$ , показан на рис. 5. Данному подграфу соответствуют следующие формулы разложения Шеннона:

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2; & f_2 &= \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3; & f_3 &= \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5, \\ h_1 &= \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4; & h_2 &= \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9; & h_3 &= \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2; & h_4 &= \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5, \\ & & h_5 &= \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8. \end{aligned}$$

Таким образом, на третьем уровне BDD имеются девять кофакторов  $g_1, \dots, g_9$ .

**Этап 1.** Нахождения алгебраически представимых кофакторов на третьем уровне BDD.

**Шаг 1.** Выбор формы представления кофакторов.

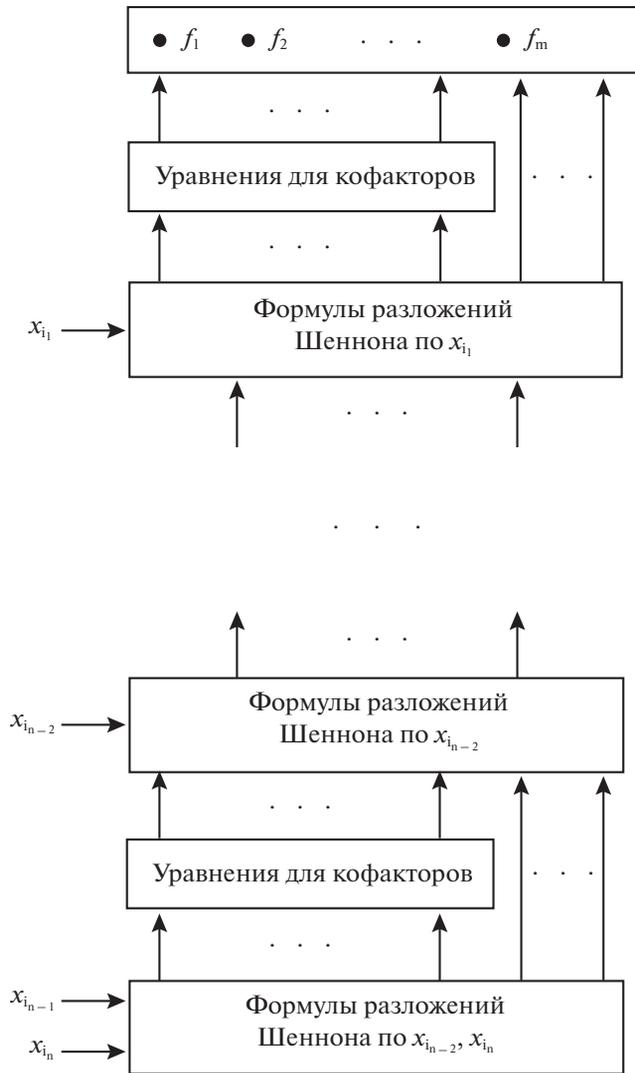


Рис. 4. Структура многоуровневого представления с использованием алгебраических разложений кофакторов

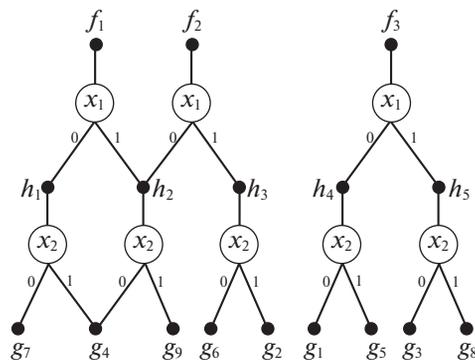


Рис. 5. Подграф BDD, полученный в результате разложения по переменным  $x_1, x_2$

Алгебраические разложения кофакторов можно проводить по ортогонализированным ДНФ либо по обобщенно ортогонализированным формам, либо по подграфам BDD. Для удобства изложения примера будем рассматривать *таблицу истинности* (табл. 13) кофакторов  $g_1, \dots, g_9$  (частичных подфункций, зависящих от переменных  $x_3, x_4, x_5$ ).

**Таблица 13.** Частичные кофакторы третьего уровня BDD (рис. 3)

$x_3 x_4 x_5$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$
0 0 0	1	0	1	0	–	0	1	0	0
0 0 1	–	0	–	1	1	1	0	0	–
0 1 0	0	0	1	1	0	–	–	1	0
0 1 1	0	1	1	0	1	–	1	–	1
1 0 0	–	1	1	–	–	1	1	1	–
1 0 1	0	0	0	1	0	0	–	0	0
1 1 0	–	0	–	1	–	0	0	–	1
1 1 1	1	–	0	1	1	0	1	0	0

**Шаг 2.** Нахождение на третьем уровне BDD пар взаимно инверсных кофакторов.

В данном примере нет пар взаимно инверсных кофакторов, поэтому на шаге 3 рассматриваются кофакторы  $g_1, \dots, g_9$ .

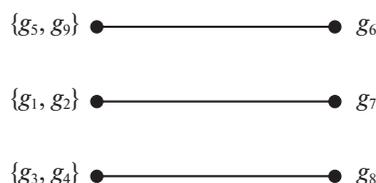
**Шаг 3.** Решение задачи 2 для кофакторов третьего уровня BDD и доопределение частичных кофакторов, участвующих в алгебраических разложениях, до полностью определенных.

Для третьего уровня BDD множество  $G = \{g_1, \dots, g_9\}$  составляют девять ( $k = 9$ ) кофакторов,  $C_9^2 = 36$  – множество всех неупорядоченных пар кофакторов из такого множества,  $Z$  – число перебираемых вариантов проверки существования разложений (4.2), (4.3) для построения графа  $R$ :

$$Z = 2 \times 9 \times (C_9^2 - (9 - 1)) = 18 \times (36 - 8) = 504.$$

В качестве одного из решений задачи 2 для множества  $G = \{g_1, \dots, g_9\}$  было получено решение (рис. 6) из шести базисных функций  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_7$  с разложениями  $g_7^* \prec (g_1^* \vee g_2^*)$ ,  $g_8^* \prec (g_3^* \& g_4^*)$ ,  $g_6^* = (g_5^* \& g_9^*)$  трех представимых функций  $g_6^*, g_7^*, g_8^*$  и с суммарным числом (девять) замен неопределенных значений определенными. В данном примере число заменяемых неопределенных значений функций определенными подсчитывалось по таблицам истинности функций. Если сравнение функций производится по ортогонализированным формам, то число замен неопределенных значений подсчитывается по таблицам, задающим ортогонализированные формы, если используются подграфы BDD, то – по заменам значений листовых вершин BDD.

Доопределения функций  $g_1, g_7, g_3, g_4, g_8, g_5, g_6, g_9$  для разложений  $g_7^* \prec (g_1^* \vee g_2^*)$ ,  $g_8^* \prec (g_3^* \& g_4^*)$ ,  $g_6^* = g_5^* \& g_9^*$  даны в табл. 14–16 соответственно, доопределенные значения выделены жирным курсивом. Выполнять доопределение частичных кофакторов нужно, используя табл. 2, 4. Если для некоторого набора значений переменных (см. последние строки в табл. 2, 4) значения всех кофакторов, участвующих в дизъюнктивном либо конъюнктивном разложениях, не определены, то замена всех значений “–” нулевыми значениями переведет частичные функции в класс полностью определенных и тогда отношение реализации можно заменить отношением равенства. Выполним, не нарушив отношения реализации, доопределения частичных кофакторов из табл. 14–16 следующим образом:  $g_1^*(1, 0, 0) = 0$ ;  $g_2^*(1, 1, 1) = 0$ ;  $g_3^*(1, 1, 0) = 0$ ;  $g_8^*(1, 1, 0) = 0$ , получим полностью определенные кофакторы (табл. 17). Теперь отношение реализации в формулах



**Рис. 6.** Пары функций, реализующие алгебраические разложения представимых функций (ребра графа  $R$ )

**Таблица 14.** Доопределения частичных кофакторов (пример 3) для дизъюнктивного разложения кофактора  $g_7$ 

$x_3x_4x_5$	Исходные функции			Реализующие функции разложения $g_7^* < (g_1^* \vee g_2^*)$		
	$g_1$	$g_2$	$g_7$	$g_1^*$	$g_2^*$	$g_7^*$
0 0 0	1	0	1	1	0	1
0 0 1	–	0	0	<b>0</b>	0	0
0 1 0	0	0	–	0	0	<b>0</b>
0 1 1	0	1	1	0	1	1
1 0 0	–	1	1	–	1	1
1 0 1	0	0	–	0	0	<b>0</b>
1 1 0	–	0	0	<b>0</b>	0	0
1 1 1	1	–	1	1	–	1

**Таблица 15.** Доопределения частичных кофакторов (пример 3) для конъюнктивного разложения кофактора  $g_8$ 

$x_3x_4x_5$	Исходные функции			Реализующие функции разложения $g_8^* < (g_3^* \vee g_4^*)$		
	$g_3$	$g_4$	$g_8$	$g_3^*$	$g_4^*$	$g_8^*$
0 0 0	1	0	0	1	0	0
0 0 1	–	1	0	<b>0</b>	1	0
0 1 0	1	1	1	1	1	1
0 1 1	1	0	–	1	0	<b>0</b>
1 0 0	1	–	1	1	<b>1</b>	1
1 0 1	0	1	0	0	1	0
1 1 0	–	1	–	–	1	–
1 1 1	0	1	0	0	1	0

$g_7^* < (g_1^* \vee g_2^*)$ ,  $g_8^* < (g_3^* \& g_4^*)$  можно заменить отношением равенства и записать формулы алгебраических разложений:

$$g_6^* = g_5^* \& g_9^*; \quad g_7^* = g_1^* \vee g_2^*; \quad g_8^* = g_3^* \& g_4^*.$$

Граф BDD с реализацией кофакторов в виде алгебраических разложений показан на рис. 7. Этому графу соответствуют логические формулы:

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1h_1 \vee x_1h_2; & f_2 &= \bar{x}_1h_2 \vee x_1h_3; & f_3 &= \bar{x}_1h_4 \vee x_1h_5, \\ h_1 &= \bar{x}_2g_7 \vee x_2g_4; & h_2 &= \bar{x}_2g_4 \vee x_2g_9; & h_3 &= \bar{x}_2g_6 \vee x_2g_2, \\ h_4 &= \bar{x}_2g_1 \vee x_2g_5; & h_5 &= \bar{x}_2g_3 \vee x_2g_8; & g_6^* &= g_5^* \& g_9^*; & g_7^* &= g_1^* \vee g_2^*, \\ & & & & g_8^* &= g_3^* \& g_4^*. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Все девять частичных кофакторов доопределились до полностью определенных. Это означает, что произошло доопределение частичной векторной функции до полностью определенной. Позже это доопределение будет показано и проведено его сравнение с доопределениями, полученными другими методами логической оптимизации.

**Шаг 4.** Исключение представимых кофакторов из рассмотрения. Кофакторы  $g_6^*$ ,  $g_7^*$ ,  $g_8^*$  удаляются из шага 5.

**Шаг 5.** Построение BDD, реализующей доопределенные базисные кофакторы.

**Таблица 16.** Доопределения частичных кофакторов (пример 3) для конъюнктивного разложения кофактора  $g_6$

$x_3 x_4 x_5$	Исходные функции			Реализующие функции разложения $g_6^* = g_5^* \& g_9^*$		
	$g_5$	$g_9$	$g_6$	$g_5^*$	$g_9^*$	$g_6^*$
0 0 0	–	0	0	<b>0</b>	0	0
0 0 1	1	–	1	1	<b>1</b>	1
0 1 0	0	0	–	0	0	<b>0</b>
0 1 1	1	1	–	1	1	<b>1</b>
1 0 0	–	–	1	<b>1</b>	<b>1</b>	1
1 0 1	0	0	0	0	0	0
1 1 0	–	1	0	<b>0</b>	1	0
1 1 1	1	0	0	1	0	0

**Таблица 17.** Доопределенные кофакторы (пример 3) третьего уровня BDD

$x_3 x_4 x_5$	$g_1^*$	$g_2^*$	$g_3^*$	$g_4^*$	$g_5^*$	$g_6^*$	$g_7^*$	$g_8^*$	$g_9^*$
0 0 0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
0 0 1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0 1 0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0 1 1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1 0 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1 1 1	1	0	0	1	1	0	1	0	0

**Таблица 18.** Полностью определенные кофакторы второго уровня BDD, полученные разложением базисных кофакторов по переменной  $x_3$

$x_4 x_5$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$w_{11}$	$w_{12}$
0 0	1	<b>0</b>	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
0 1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1 0	0	0	0	0	1	<b>0</b>	1	1	0	0	0	1
1 1	0	1	1	<b>0</b>	1	0	0	1	1	1	1	0

Дальнейшее построение многоуровневого представления связано с рассмотрением шести полностью определенных кофакторов  $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*, g_5^*, g_9^*$  из табл. 17. Разложение Шеннона по переменной  $x_3$ , кофакторов, заданных в табл. 17, приводит к следующим формулам (8.2), где кофакторы, зависящие от двух переменных  $x_4$  и  $x_5$ , приведены в табл. 18:

$$\begin{aligned}
 g_1^* &= \bar{x}_3 w_1 \vee x_3 w_2; & g_2^* &= \bar{x}_3 w_3 \vee x_3 w_4; & g_3^* &= \bar{x}_3 w_5 \vee x_3 w_6, \\
 g_4^* &= \bar{x}_3 w_7 \vee x_3 w_8; & g_5^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 w_{10}; & g_9^* &= \bar{x}_3 w_{11} \vee x_3 w_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

На рис. 8 показана BDD, реализующая полностью определенные кофакторы третьего уровня. Если сравнить три нижних уровня исходной BDD (рис. 3) и BDD из рис. 8, то можно легко увидеть, что BDD на рис. 8 не содержит неопределенных листовых вершин “–”.

Шаг 6 не выполняется – одинаковые функциональные вершины в результате преобразования графа BDD не появились.

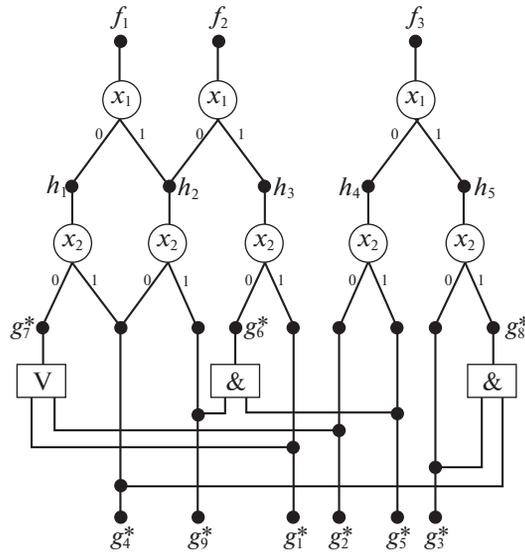


Рис. 7. Подграф BDD после алгебраического разложения кофакторов  $g_6, g_7, g_8$

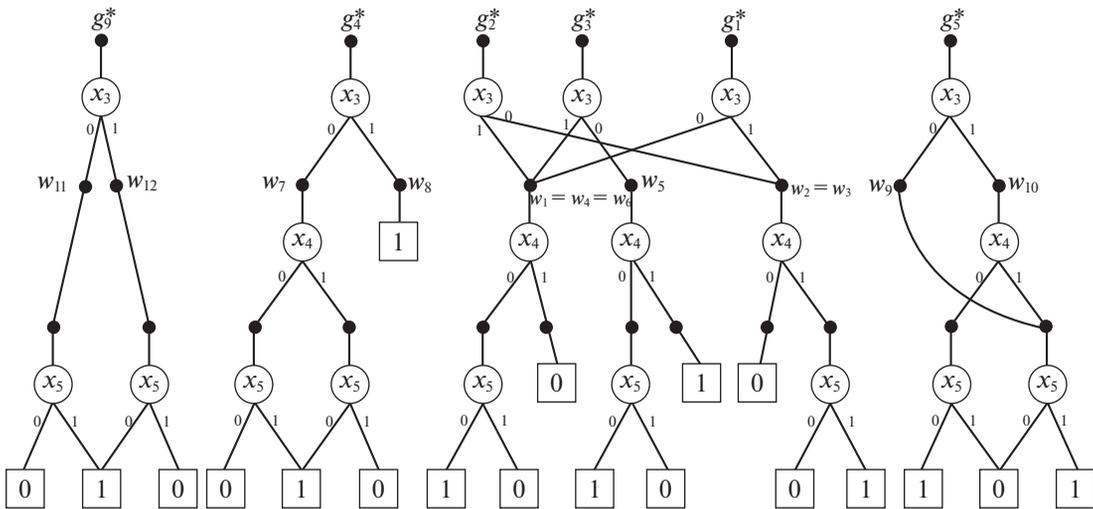


Рис. 8. BDD, реализующая базисные кофакторы третьего уровня BDD

Нахождение алгебраически представимых кофакторов на втором уровне BDD. Исходной является BDD на рис. 8.

Этап 1. Шаг 1. Выбор формы представления кофакторов.

Будем рассматривать кофакторы, заданные таблицей истинности (табл. 18).

Шаг 2. Нахождение пар взаимно инверсных кофакторов.

Для неконстантных функций с помощью метода из работы [20] найдем множество функций (табл. 19), к которым (либо к их инверсиям) доопределяются кофакторы из табл. 18. С учетом того, что  $w_8 = 1, w_2 = w_3, w_4 = w_1, w_6 = w_1, w_{10} = \bar{w}_7, w_{11} = w_9, w_{12} = \bar{w}_9$ , формулы (8.2) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
 g_1^* &= \bar{x}_3 w_1 \vee x_3 w_3; & g_2^* &= \bar{x}_3 w_3 \vee x_3 w_1; & g_3^* &= \bar{x}_3 w_5 \vee x_3 w_1, \\
 g_4^* &= \bar{x}_3 w_7 \vee x_3; & g_5^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_7; & g_9^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_9.
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

**Таблица 19.** Полностью определенные кофакторы для нахождения их алгебраических представлений

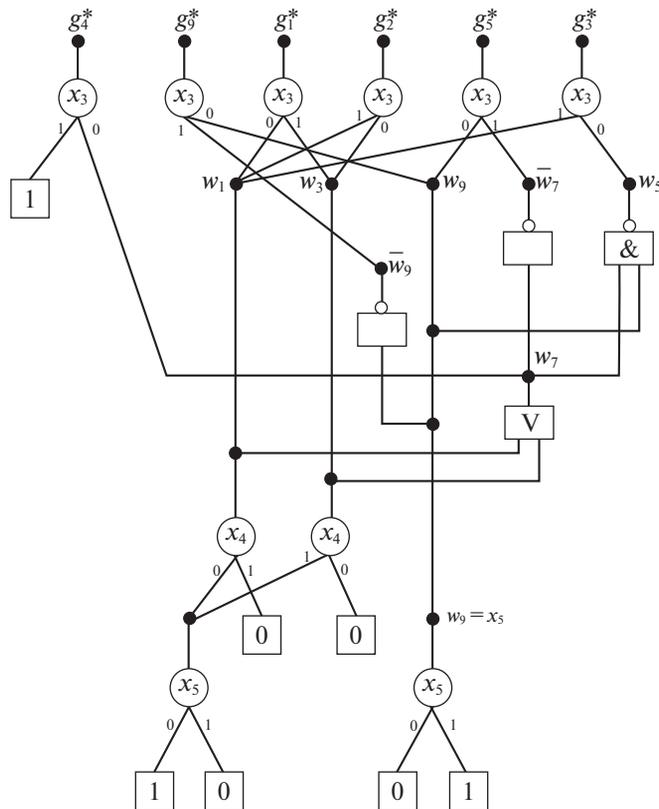
$x_4 x_5$	$w_1$	$w_3$	$w_5$	$w_7$	$w_9$
0 0	1	0	1	0	0
0 1	0	0	0	1	1
1 0	0	0	1	1	0
1 1	0	1	1	0	1

**Шаг 3.** Нахождение максимального по мощности множества кофакторов из табл. 19, которые представимы в виде конъюнкции либо дизъюнкции кофакторов рассматриваемого уровня BDD.

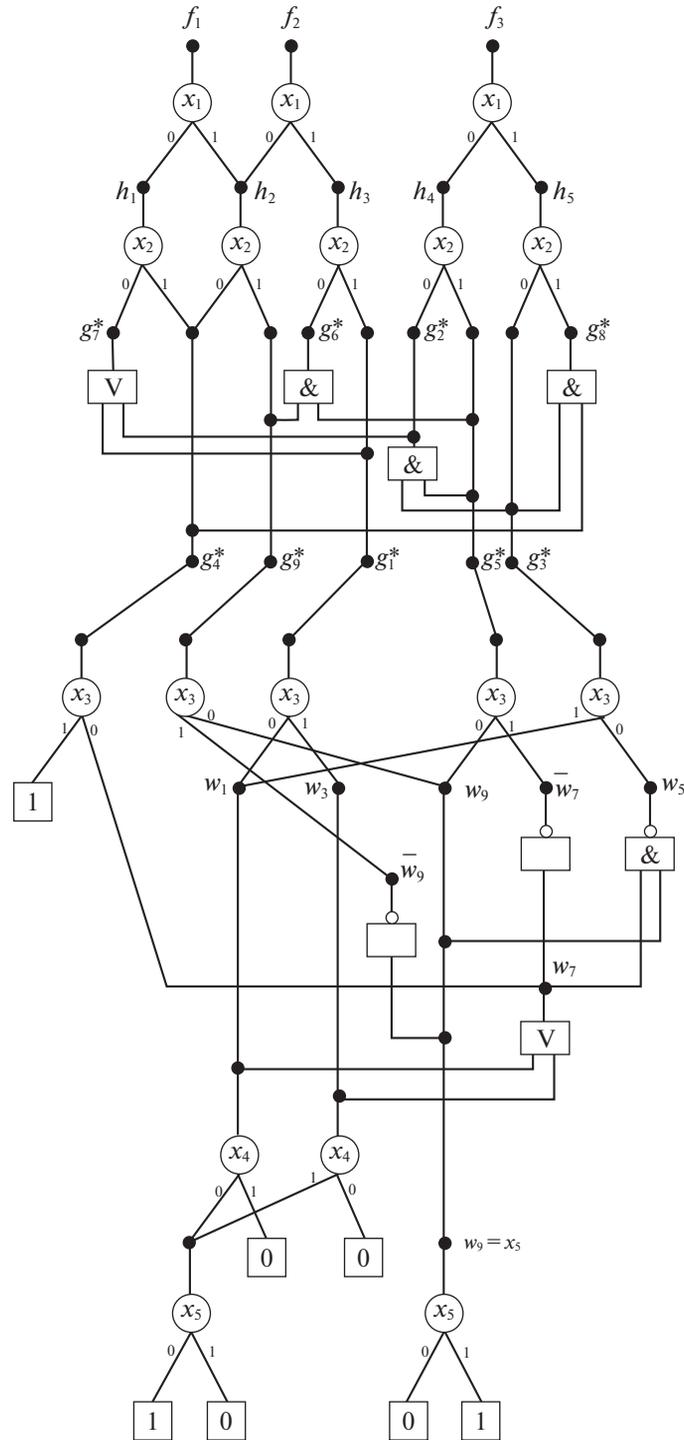
Будем искать алгебраические разложения полностью определенных кофакторов из табл. 19, используя другие кофакторы из этой же таблицы. Для случая полностью определенных функций не требуется доопределение базисных кофакторов, поэтому один и тот же кофактор может участвовать в разложении нескольких кофакторов. Метод решения этой задачи для полностью определенных кофакторов рассмотрен в [17]. Применяя данный метод, получим, то что инверсии  $\bar{w}_5$ ,  $\bar{w}_7$  представимых кофакторов  $w_5, w_7$  выражаются через основные кофакторы  $w_1, w_3, w_9$  следующим образом:  $\bar{w}_5 = w_7 \& w_9$ ,  $\bar{w}_7 = w_1 \& w_3$ . Последние формулы можно переписать как

$$w_5 = \overline{(w_7 \& w_9)}, \quad w_7 = \overline{(w_1 \vee w_3)}.$$

Итак, на втором уровне BDD остаются базисные кофакторы  $w_1, w_3, w_9$ , реализация которых в виде BDD приводит к формулам  $w_1 = \bar{x}_4 \bar{x}_5$ ;  $w_3 = x_4 x_5$ ;  $w_9 = x_5$ . Граф BDD, реализующий кофакторы второго уровня BDD с учетом возможности использования их инверсий, показан на рис. 9.



**Рис. 9.** Использование инверсий кофакторов, полученных после разложения по переменной  $x_3$



**Рис. 10.** Многоуровневое представление после алгебраического разложения кофакторов на втором и третьем уровнях BDD

Э т а п 2. Доопределение частичной BDD до полностью определенной.

Выполнение этапа 2 не требуется, так как все полученные кофакторы являются полностью определенными.

Э т а п 3. Формирование функционального представления в виде формул разложений Шеннона и формул для представимых кофакторов.

Логические уравнения после алгебраического разложения кофакторов на третьем и втором уровнях BDD будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2, & f_2 &= \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3, & f_3 &= \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5, \\
 h_1 &= \bar{x}_1 g_7^* \vee x_2 g_4^*; & h_2 &= \bar{x}_2 g_4^* \vee x_2 g_9^*; & h_3 &= \bar{x}_2 g_6^* \vee x_2 g_2^*, \\
 h_4 &= \bar{x}_2 g_1^* \vee x_2 g_5^*; & h_5 &= \bar{x}_2 g_3^* \vee x_2 g_8^*; & g_6^* &= g_5^* \& g_9^*, \\
 g_7^* &= g_1^* \vee g_2^*; & g_8^* &= g_3^* \& g_4^*, & g_1^* &= \bar{x}_3 w_1 \vee x_3 w_3; & g_2^* &= \bar{x}_3 w_3 \vee x_3 w_1, \\
 g_3^* &= \bar{x}_3 w_5 \vee x_3 w_1; & g_4^* &= \bar{x}_3 w_7 \vee x_3; & g_5^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_7, \\
 g_9^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_9; & w_5 &= \overline{(w_7 \& w_9)}; & w_7 &= \overline{(w_1 \vee w_3)}, \\
 w_1 &= \bar{x}_4 \bar{x}_5; & w_3 &= x_4 x_5; & w_9 &= x_5.
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Формулы (8.4) содержат 19 внутренних переменных и 70 литералов.

Э т а п 4. Дополнительная оптимизация на основе метода [17] алгебраического разложения полностью определенных кофакторов.

На втором уровне BDD рассматривались полностью определенные кофакторы, поэтому для этого уровня дополнительная оптимизация не выполняется. На третьем уровне BDD располагаются базисные кофакторы  $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*, g_5^*, g_9^*$ , которые изначально были частичными, а затем стали полностью определенными. Для них выполняется дополнительная оптимизация, в результате выясняется, что множество базисных кофакторов можно сократить (удалить кофактор  $g_2^*$ ), так как справедливо конъюнктивное разложение  $g_2^* = g_3^* \& g_5^*$ . Формируется результирующее многоуровневое представление:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2, & f_2 &= \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3, & f_3 &= \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5, \\
 h_1 &= \bar{x}_2 g_7^* \vee x_2 g_4^*; & h_2 &= \bar{x}_2 g_4^* \vee x_2 g_9^*; & h_3 &= \bar{x}_2 g_6^* \vee x_2 g_2^*, \\
 h_4 &= \bar{x}_2 g_1^* \vee x_2 g_5^*; & h_5 &= \bar{x}_2 g_3^* \vee x_2 g_8^*; & g_6^* &= g_5^* \& g_9^*, \\
 g_7^* &= g_1^* \vee g_2^*; & g_8^* &= g_3^* \& g_4^*, & g_1^* &= \bar{x}_3 w_1 \vee x_3 w_3; & g_2^* &= g_3^* \& g_5^*, \\
 g_3^* &= \bar{x}_3 w_5 \vee x_3 w_1; & g_4^* &= \bar{x}_3 w_7 \vee x_3; & g_5^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_7, \\
 g_9^* &= \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_9; & w_5 &= \overline{(w_7 \& w_9)}; & w_7 &= \overline{(w_1 \vee w_3)}, \\
 w_1 &= \bar{x}_4 \bar{x}_5; & w_3 &= x_4 x_5; & w_9 &= x_5.
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Формулы (8.5) содержат 19 внутренних переменных и 68 литералов. Результирующий граф BDD, соответствующий формулам (8.5), показан на рис. 10. Алгебраическое представление кофакторов в виде дизъюнкций и конъюнкций на третьем и втором уровнях BDD позволяет уменьшить общее число литералов в результирующем многоуровневом представлении полностью определенной векторной функции, которая реализует частичную векторную функцию из табл. 11. Получение многоуровневого представления системы полностью определенных функций позволяет применить для такого представления еще раз (на этапе 4) метод алгебраических разложений [17], на этот раз уже для полностью определенных кофакторов.

Э т а п 5. Проверка отношения реализации “ $\prec$ ” между исходной BDD частичной векторной функцией и многоуровневым представлением.

Доопределение исходной частичной векторной функции до полностью определенной для проверки отношения реализации дано далее (см. табл. 24). Легко видеть, что отношение реализации выполняется.

**9. Пример применения метода минимизации многоуровневого BDD-представления частичной векторной функции от нижних уровней BDD.** Применять предложенный метод можно не только от верхних, но и от нижних уровней BDD. Опишем вкратце использование метода на том же примере 3 (табл. 11, рис. 3), не привязываясь к этапам и шагам выполнения метода.

Рассмотрим частичные кофакторы на втором уровне BDD (табл. 20). С помощью методов из [20] найдем минимальное число кофакторов, к которым доопределяются частичные кофакторы из табл. 20 – это кофакторы  $p_3, p_7, p_9, p_{12}, p_{15}, p_5 = p_8 = 1$  (табл. 21). При этом частичные кофакторы  $p_9, p_{15}, p_5, p_8$  доопределены, им оставлены прежние обозначения. В нижней строке табл. 21

**Таблица 20.** Частичные кофакторы второго уровня BDD (рис. 3)

$x_4 x_5$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$	$p_{16}$	$p_{17}$	$p_{18}$
0 0	1	—	0	1	1	1	0	—	—	—	0	1	1	1	0	1	0	—
0 1	—	0	0	0	—	0	1	1	1	0	1	0	0	—	0	0	—	0
1 0	0	—	0	0	1	—	1	1	0	—	—	0	—	0	1	—	0	1
1 1	0	1	1	—	1	0	0	1	1	1	—	0	1	1	—	0	1	0

**Таблица 21.** Полностью определенные кофакторы второго уровня BDD

$x_4 x_5$	$p_3$	$p_7$	$p_9$	$p_{12}$	$p_{15}$	$p_5 = p_8 = 1$
0 0	0	0	<b>0</b>	1	0	1
0 1	0	1	1	0	0	<b>1</b>
1 0	0	1	0	0	1	1
1 1	1	0	1	0	<b>0</b>	1
Реализуемые кофакторы	$p_2 \prec p_3$ ; $p_{10} \prec p_3$ ; $p_{17} \prec p_3$	$p_{13} \prec \bar{p}_7$ ; $p_{14} \prec \bar{p}_7$ ;	$p_{11} \prec p_9$	$p_1 \prec p_{12}$ ; $p_4 \prec p_{12}$ ; $p_6 \prec p_{12}$ ; $p_{16} \prec p_{12}$	$p_{18} \prec p_{15}$	$p_5 \prec 1$ ; $p_8 \prec 1$

указаны кофакторы, которые реализуются соответствующими доопределенными кофакторами из верхней части этой таблицы. Найдем BDD-представление кофакторов  $p_3, p_7, p_9, p_{12}, p_{15}$  и выполним сокращение BDD, так как выясняется, что

$$g_7 = \bar{x}_3 p_{13} \vee x_3 p_{14} = \bar{x}_3 \bar{p}_7 \vee x_3 \bar{p}_7 (\bar{x}_3 \vee x_3) = \bar{p}_7.$$

Обозначим  $u_7 = \bar{p}_7$ , тогда многоуровневое представление из табл. 11 принимает вид

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2; & f_2 &= \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3; & f_3 &= \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5, \\
 h_1 &= \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4; & h_2 &= \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9; & h_3 &= \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2, \\
 h_4 &= \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5; & h_5 &= \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8; & g_1 &= \bar{x}_3 p_{12} \vee x_3 p_3, \\
 g_2 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_{12}; & g_3 &= \bar{x}_3 \vee x_3 p_{12}, \\
 g_4 &= \bar{x}_3 p_7 \vee x_3; & g_5 &= \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_3; & g_6 &= \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_{12}, \\
 g_7 &= u_7; & g_8 &= \bar{x}_3 p_{15} \vee x_3 p_{12}; & g_9 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_{15}; & p_3 &= x_4 x_5, \\
 p_7 &= \bar{x}_4 x_5 \vee x_4 \bar{x}_5; & p_9 &= x_5; & p_{12} &= \bar{x}_4 \bar{x}_5; & p_{15} &= x_4 \bar{x}_5; & u_7 &= \bar{p}_7.
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Сложность формул (9.1): 20 внутренних переменных, 78 литералов. Заметим, что доопределение снизу может потребовать выполнения процедуры сокращения верхней части BDD тогда, когда в результате доопределения появились одинаковые кофакторы.

Перейдем к нахождению алгебраических разложений кофакторов из табл. 21. Заметим, что кофакторы  $p_3 = x_4 x_5, p_{12} = \bar{x}_4 \bar{x}_5, p_{15} = x_4 \bar{x}_5$  реализуются одной логической операцией “конъюнкция” и нет смысла находить их алгебраические разложения, это касается и кофактора  $p_9 = x_5$ . Кофактор  $p_7 = \bar{x}_4 x_5 \vee x_4 \bar{x}_5$  можно представить в виде алгебраического разложения  $p_7 = p_3 \vee p_{12}$ .

Рассмотрим третий уровень BDD, на котором находятся полностью определенные кофакторы, заданные в табл. 22. По сравнению кофакторами из табл. 17, исходные частичные кофакторы  $g_3$  и  $g_9$  (табл. 22) доопределены по-другому (эти доопределения в табл. 22 отмечены жирным курсивом), в результате чего только один кофактор  $g_7$  может быть алгебраически разложен:  $g_7 = g_1 \vee g_2$ .

**Таблица 22.** Полностью определенные кофакторы третьего уровня BDD (пример 3)

$x_3 x_4 x_5$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$
0 0 0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
0 0 1	0	0	<b>1</b>	1	1	1	0	0	<b>0</b>
0 1 0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0 1 1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1	<b>0</b>
1 0 1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1 1 1	1	0	0	1	1	0	1	0	0

**Таблица 23.** Доопределения частичных кофакторов первого уровня BDD (рис. 3)

Частичные кофакторы									
$x_5$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$
0	–	1	–	–	0	1	0	1	0
1	–	–	0	1	–	0	1	1	0
Доопределяющие полностью определенные кофакторы									
$x_5$	$t_1^*$	$t_2^*$	$t_3^*$	$t_4^*$	$t_5^*$	$t_6^*$	$t_7^*$	$t_8^*$	$t_9^*$
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0

Многоуровневое представление при разложении кофакторов от нижних уровней BDD имеет вид (9.2) и сложность 20 внутренних переменных, 74 литералов:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2; & f_2 &= \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3; & f_3 &= \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5, \\
 h_1 &= \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4; & h_2 &= \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9; & h_3 &= \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2, \\
 h_4 &= \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5; & h_5 &= \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8; & g_1 &= \bar{x}_3 p_{12} \vee x_3 p_3, \\
 g_2 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_{12}; & g_3 &= \bar{x}_3 \vee x_3 p_{12}, & g_4 &= \bar{x}_3 p_7 \vee x_3; \\
 g_5 &= \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_3; & g_6 &= \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_{12}, & g_7 &= g_1 \vee g_2, \\
 g_8 &= \bar{x}_3 p_{15} \vee x_3 p_{12}; & g_9 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_{15}; & p_3 &= x_4 x_5, \\
 p_7 &= p_3 \vee p_{12}; & p_9 &= x_5; & p_{12} &= \bar{x}_4 \bar{x}_5; & p_{15} &= x_4 \bar{x}_5; & u_7 &= \bar{p}_7.
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$

**10. Сравнение с другими методами доопределения частичных векторных функций.**

10.1. “Нулевое доопределение”. Если не проводить алгебраические разложения кофакторов, а заменить в табл. 11 все неопределенные значения “–” компонентных функций нулевыми значениями (выполнить “нулевое” доопределение), то получим многоуровневое BDD-представление с 20 внутренними переменными и 79 литералами. Заметим, что при “нулевом” доопределении можно провести алгебраическое разложение только одного полностью определенного кофактора  $g_7$  в виде  $g_7 = g_1 \vee g_2$ .

10.2. “Совместная минимизация в классе ДНФ”. Совместная минимизация в классе ДНФ исходных частичных функций с помощью программы из [25] приводит к системе ДНФ, содержащей 21 элементарную конъюнкцию. BDD-представление (по найденной лучшей перестановке  $\langle x_1, x_3, x_2, x_4, x_5 \rangle$ ) полученной системы полностью определенных функций с помощью программы из [16] содержит 19 внутренних переменных в формулах разложений Шеннона и 76 литералов в этих формулах. Такой результат свидетельствует о том, что целесообразно развивать методы многоуровневой оптимизации для частичных функций, а не минимизировать функции в классе ДНФ и проводить для минимизированных ДНФ оптимизацию в классе BDD.

10.3. “Доопределение BDD”. Доопределение BDD (формул из табл. 11), начинаемое с листьев и выполняемое по правилам (табл. 23), где  $t_i < t_i^*$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , с последующим

**Таблица 24.** Сравнение доопределений частичной векторной функции

Частичная векторная функция (табл. 11)		Полностью определенная векторная функция – результат доопределения				
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	$f_1 f_2 f_3$	Доопределение BDD “снизу”, формулы (10.1)	“Нулевое” доопределение	Минимизация в классе ДНФ, программа [25]	Алгебраическое разложение кофакторов, сверху BDD, формулы (8.5)	Алгебраическое разложение кофакторов, снизу BDD, формулы (9.2)
		$f_1^* f_2^* f_3^*$	$f_1^* f_2^* f_3^*$	$f_1^* f_2^* f_3^*$	$f_1^* f_2^* f_3^*$	$f_1^* f_2^* f_3^*$
0 0 0 0 0	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1
0 0 0 0 1	0 1 –	0 1 <b>1</b>	0 1 <b>0</b>	0 1 <b>0</b>	0 1 <b>0</b>	0 1 <b>0</b>
0 0 0 1 0	– 1 0	<b>1</b> 1 0	<b>0</b> 1 0	<b>0</b> 1 0	<b>0</b> 1 0	<b>0</b> 1 0
0 0 0 1 1	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
0 0 1 0 0	1 – –	1 <b>1</b> <b>0</b>	1 <b>0</b> <b>0</b>	1 <b>1</b> <b>1</b>	1 <b>1</b> <b>0</b>	1 <b>1</b> <b>0</b>
0 0 1 0 1	– 1 0	<b>1</b> 1 0	<b>0</b> 1 0	<b>0</b> 1 0	<b>0</b> 1 0	<b>0</b> 1 0
0 0 1 1 0	0 1 –	0 1 <b>1</b>	0 1 <b>0</b>	0 1 <b>1</b>	0 1 <b>0</b>	0 1 <b>0</b>
0 0 1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
0 1 0 0 0	0 0 –	0 0 1	0 0 <b>0</b>	0 0 <b>0</b>	0 0 <b>0</b>	0 0 <b>0</b>
0 1 0 0 1	1 – 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>1</b> 1	1 <b>0</b> 1
0 1 0 1 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
0 1 0 1 1	0 1 1	0 1 1	0 1 1	0 1 1	0 1 1	0 1 1
0 1 1 0 0	– – –	<b>1</b> <b>0</b> <b>0</b>	<b>0</b> <b>0</b> <b>0</b>	<b>1</b> <b>1</b> <b>1</b>	<b>1</b> <b>1</b> <b>1</b>	<b>1</b> <b>0</b> <b>0</b>
0 1 1 0 1	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
0 1 1 1 0	1 1 –	1 1 <b>1</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>1</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>0</b>
0 1 1 1 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1	1 0 1
1 0 0 0 0	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1
1 0 0 0 1	1 1 –	1 1 <b>1</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>1</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>1</b>
1 0 0 1 0	1 – 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>0</b> 1	1 <b>0</b> 1
1 0 0 1 1	0 – 1	0 <b>0</b> 1	0 <b>0</b> 1	0 <b>0</b> 1	0 <b>1</b> 1	0 <b>1</b> 1
1 0 1 0 0	– 1 1	<b>1</b> 1 1	<b>0</b> 1 1	<b>1</b> 1 1	<b>1</b> 1 1	<b>1</b> 1 1
1 0 1 0 1	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
1 0 1 1 0	1 0 –	1 0 0	1 0 <b>0</b>	1 0 <b>1</b>	1 0 <b>0</b>	1 0 <b>0</b>
1 0 1 1 1	1 0 0	1 0 <b>0</b>	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0
1 1 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
1 1 0 0 1	– 0 0	<b>0</b> 0 0	<b>0</b> 0 0	<b>0</b> 0 0	<b>1</b> 0 0	<b>0</b> 0 0
1 1 0 1 0	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1
1 1 0 1 1	1 1 –	1 1 <b>1</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>0</b>	1 1 <b>0</b>
1 1 1 0 0	– 1 1	<b>0</b> 1 1	<b>0</b> 1 1	<b>1</b> 1 1	<b>1</b> 1 1	<b>0</b> 1 1
1 1 1 0 1	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
1 1 1 1 0	1 0 –	1 0 <b>0</b>	1 0 <b>0</b>	1 0 <b>1</b>	1 0 <b>0</b>	1 0 <b>0</b>
1 1 1 1 1	0 – 0	0 <b>0</b> 0	0 <b>0</b> 0	0 <b>0</b> 0	0 <b>0</b> 0	0 <b>0</b> 0
Число литералов в многоуровневом представлении		89	79	76	68	74

сокращением BDD приводит к нахождению одинаковых функциональных вершин:  $p_{17} = p_3$ ;  $p_5 = p_8 = 1$ ;  $p_4 = p_6 = p_{12}$ ;  $p_2 = p_{15}$  и получению следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2; & f_2 &= \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3; & f_3 &= \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5, \\
 h_1 &= \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4; & h_2 &= \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9; & h_3 &= \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2, \\
 h_4 &= \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5; & h_5 &= \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8, \\
 g_1 &= \bar{x}_3 p_1 \vee x_3 p_2; & g_2 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_4; & g_3 &= \bar{x}_3 \vee x_3 p_{18}, \\
 g_4 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3; & g_5 &= \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_2; & g_6 &= \bar{x}_3 p_{11} \vee x_3 p_4, \\
 g_7 &= \bar{x}_3 p_{13} \vee x_3 p_{14}; & g_8 &= \bar{x}_3 p_2 \vee x_3 p_4; & g_9 &= \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_{18}, \\
 p_1 &= \bar{x}_4, & p_2 &= x_4; & p_3 &= x_4 x_5; & p_4 &= \bar{x}_4 \bar{x}_5; & p_7 &= \bar{x}_4 x_5 \vee x_4 \bar{x}_5, \\
 p_9 &= \bar{x}_4 \vee x_4 x_5; & p_{11} &= \bar{x}_4 x_5; & p_{13} &= \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_4, \\
 p_{14} &= \bar{x}_4 \vee x_4 x_5; & p_{18} &= x_4 \bar{x}_5.
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Уравнения (10.1) содержат 24 внутренних переменных и 89 литералов.

Приведем в табл. 24 полностью определенные векторные функции, являющиеся доопределениями частичной векторной функции из табл. 11. Жирным курсивом в табл. 24 выделены полностью определенные значения (0, 1) функций, которые заменили неопределенные значения “—” исходных компонентных частичных функций.

**Заключение.** Предложен метод рационального доопределения систем частичных булевых функций до полностью определенных, позволяющий дополнительно упрощать многоуровневые BDD-представления, используя не только нахождение пар взаимно инверсных подфункций, но и алгебраические разложения подфункций, находящихся на одном уровне BDD. Такая дополнительная технологически независимая оптимизация по числу литералов в результирующих логических уравнениях приводит к более простым функциональным описаниям, по которым осуществляется синтез комбинационных логических схем в различных технологических базисах. Дальнейшие исследования предполагают программную реализацию предложенного метода, экспериментальное исследование программ на различных наборах практических примеров, а также сравнение новых экспериментальных результатов с известными результатами, получаемыми на основе перехода к системам полностью определенных булевых функций и минимизации BDD-представлений в классе полностью определенных функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4, А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1 / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2013.
2. Карпов Ю.Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
3. Handbook of Satisfiability / Eds A. Biere, M. Heule, H. Van Maaren, T. Walsh. Amsterdam, Berlin, Oxford, Tokyo, Washington: IOS Press., 2009.
4. Akers S.B. Binary Decision Diagrams // IEEE Trans. on Computers. 1978. V. C-27. № 6.
5. Bryant R.E. Graph-based Algorithms for Boolean Functions Manipulation // IEEE Trans. on Computers. 1986. V. C-35. № 8.
6. Чэнь М., Цинь К., Ку Х.-М., Мишра П. Валидация на системном уровне. Высокоуровневое моделирование и управление тестированием. М.: Техносфера, 2014.
7. Библио П.Н. Применение диаграмм двоичного выбора при синтезе логических схем. Минск: Беларус. навука, 2014.
8. Rudell R. Dynamic Variable Ordering for Ordered Binary Decision Diagrams // Computer-Aided Design: Proc. of the IEEE/ACM Intern. Conf. Santa Clara, Los Alamitos: IEEE Computer Society Press., 1993.
9. Ebdndt R., Gunther W., Drechsler R. An Improved Branch and Bound Algorithm for Exact BDD Minimization // Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2003. V. 22. № 12.
10. Ebdndt R., Fey G., R. Drechsler R. Advanced BDD Optimization. Dordrech: Springer, 2005.
11. Drechsler R., Becker B. Binary Decision Diagrams: Theory and Implementation. N. Y.: Springer, 1998.
12. Bryant R.E., Meinel C. Ordered Binary Decision Diagrams // Logic Synthesis and Verification / Eds S. Hason, T. Sasao, R.K. Brayton. Boston, MA: Springer, 2002.
13. Meinel C., Theobald T. Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – Foundations and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

14. *Брейтон Р.К., Хэчтел Г.Д., Санджованни-Винчензелли А.Л.* Синтез многоуровневых комбинационных логических схем // ТИИЭР. 1990. Т. 78. № 2.
15. *Yang S., Ciesielski M.* BDS: a BDD-based Logic Optimization System // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2002. V. 21. № 7.
16. *Бибило П.Н., Ланкевич Ю.Ю.* Использование полиномов Жегалкина при минимизации многоуровневых представлений систем булевых функций на основе разложения Шеннона // Программная инженерия. 2017. № 8.
17. *Бибило П.Н., Романов В.И.* Минимизация многоуровневых представлений систем полностью определенных булевых функций с использованием разложений Шеннона и алгебраических представлений кофакторов // Информатика. 2021. Т. 18. № 3.
18. *Бибило П.Н., Романов В.И.* Экспериментальное исследование алгоритмов минимизации BDDI-представлений систем булевых функций с использованием алгебраических разложений кофакторов // Программная инженерия. 2022. Т. 13. № 2.
19. The Tests in the Monograph “Logic Minimization Algorithms for VLSI Synthesis”. Available at: <http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples/ex> (accessed January 20, 2020).
20. *Бибило П.Н.* Минимизация BDDI-представлений систем не полностью определенных булевых функций // Программная инженерия. 2020. Т. 11. № 3.
21. *Закревский А.Д., Поттосин Ю.В., Черемисинова Л.Д.* Логические основы проектирования дискретных устройств. М. : Физматлит, 2007.
22. *Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А.* Ортогонализация системы полностью определенных булевых функций // Сб. науч. тр. Логическое проектирование. Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 2000. Вып.5.
23. *Романовский И.В.* Дискретный анализ: Учебное пособие для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. 4-е изд., испр. и доп. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2008.
24. *Бибило П.Н., Енин С.В.* Синтез комбинационных схем методами функциональной декомпозиции. Минск: Наука и техника, 1987.
25. *Торопов Н.Р.* Минимизация систем булевых функций в классе ДНФ // Сб. науч. тр. Логическое проектирование: Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. Вып. 4.

УДК 62-50

## ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО РОБОТА В ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

© 2022 г. В. М. Буданов<sup>a,\*</sup>, Ю. Д. Селюцкий<sup>a,\*\*</sup>, А. М. Формальский<sup>a,\*\*\*</sup><sup>a</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Институт механики, Москва, Россия

\*e-mail: vlbudanov@gmail.com

\*\*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

\*\*\*e-mail: formal@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 20.01.2022 г.

После доработки 26.01.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Рассматривается сферический робот (робот-шар), внутренний механизм которого содержит платформу, опирающуюся своими краями на внутреннюю поверхность сферы. К платформе крепится вилка, внутри которой смонтировано колесо, касающееся этой поверхности сферы. Механизм содержит два привода, один из которых поворачивает плоскость колеса относительно платформы, а другой “катит” колесо по ее внутренней поверхности. При помощи первого привода меняется направление движения робота, а другой привод осуществляет его маршевое движение (качение сферы) вдоль желаемого направления. Рассматривается закон управления, позволяющий предотвратить возникновение нежелательных колебаний сферы сравнительно большой амплитуды в ее продольном движении.

DOI: 10.31857/S0002338822040047

**Введение.** В настоящее время в литературе можно найти много работ, посвященных различным конструкциям сферических роботов, вопросам управления ими, теоретическим вопросам динамики, математическому моделированию, экспериментам. В [1] содержится значительное количество опубликованных ранее в разных изданиях работ, касающихся сферических роботов, а также ссылки на многие публикации, связанные с ними. В недавних работах [2, 3], в частности, рассматривается динамика робота-шара, приводимого в движение с использованием омниколеса.

Внутренний механизм робота-шара во многих случаях конструируют так, чтобы была возможность отклонить проекцию центра масс всего робота на опорную поверхность от точки (области) контакта сферы с этой поверхностью. Возникающий в этих случаях момент силы тяжести относительно точки контакта стремится повернуть сферу в ту сторону, в которую отклоняется эта проекция центра масс. При этом и происходит качение робота-шара по опорной поверхности. Качение робота может быть организовано также путем вращения расположенных внутри сферы массивных тел.

Робот-шар может применяться для мониторинга окружающей местности, для перемещения грузов и т.д. При мониторинге окружающей местности такой робот должен нести на борту видеокамеру, акустический датчик. Когда робот-шар используется для перемещения тех или иных грузов, эти грузы, естественно, размещаются на его борту. При этом вибрации и перегрузки, появляющиеся в процессе перемещения робота, могут быть нежелательны, и их необходимо предотвращать.

Перемещение робота-шара является, вообще говоря, пространственным. При этом причиной возникновения тех или иных колебаний робота или его частей может быть взаимное влияние продольного и поперечного движений. С этим связаны определенные трудности управления им. Теоретические исследования, проведенные в настоящей работе, показывают, что при *плоском* продольном движении (в отсутствие поперечного) неудачное управление также может вызвать нежелательные колебания.



Рис. 1. Сферический робот

Настоящая статья посвящена проблеме синтеза такого управления продольным (плоским) движением сферического робота, при котором в какой-то степени удастся предотвратить возникновение колебаний и перегрузок при перемещении робота.

**1. Конструкция робота.** В НИИ механики МГУ сконструирован робот-шар, фотография которого показана на рис. 1.

Корпус робота представляет собой прозрачную сферу. Внутри сферы находится круглая платформа, диаметр которой меньше диаметра сферы. Своими краями платформа опирается на нижнюю половину внутренней поверхности сферического корпуса и может скользить по ней. В середине платформы сделан круглый вырез, в котором смонтирована вилка. Ось вилки перпендикулярна плоскости платформы. Внутри вилки находится колесо, которое своим ободом опирается на внутреннюю поверхность сферы. Робот оснащен двумя электроприводами. Один из них поворачивает вилку колеса относительно платформы, управляя направлением движения робота. Другой электропривод – маршевый, поворачивает колесо вокруг его оси, заставляя колесо катиться по внутренней поверхности сферы. Управляя электроприводами, можно заставить колесо катиться в том или ином направлении по внутренней поверхности сферы с той или иной скоростью. При этом сама сфера будет катиться по опорной поверхности в желаемом направлении. Робот управляется оператором при помощи джойстика.

Описанный выше внутренний механизм робота, по существу, представляет собой маятник, центр масс которого располагается ниже центра сферы. Перемещая маятник так, чтобы проекция его центра масс на опорную поверхность отклонялась в том или ином направлении от точки контакта сферы с опорой, можно регулировать момент силы тяжести относительно точки контакта и, тем самым, управлять направлением и скоростью движения всего робота. Подобный механизм предложен в патентах [4, 5]. В [6] рассматривается аналогичный механизм, но с некоторыми модификациями.

При проведении теоретических и экспериментальных исследований продольного движения, показанного на рис. 1 робота, наблюдаются угловые колебания платформы, а также колебания скорости перемещения. В сравнительно недавней публикации [7] также указывается на возникновение подобных нежелательных явлений и предлагаются “интуитивные” способы борьбы с ними. Подход к синтезу управления, используемый в настоящей статье, описан в работах [8–10].

**2. Математическая модель продольного движения робота.** Ограничимся рассмотрением продольного движения робота по горизонтальной поверхности, при котором центр сферы  $C$  и плоскость колеса располагаются все время в одной и той же вертикальной плоскости. На рис. 2 приведена схема робота в его разрезе этой вертикальной плоскостью.

Римскими цифрами I–III на рис. 2 показаны сфера, плоская платформа и колесо соответственно. Буквами  $B$  и  $A$  обозначены геометрический центр платформы (он же – ее центр масс) и центр колеса, через  $L$  – расстояние  $CB$  от центра сферы  $C$  до центра масс платформы  $B$ . Здесь  $P$

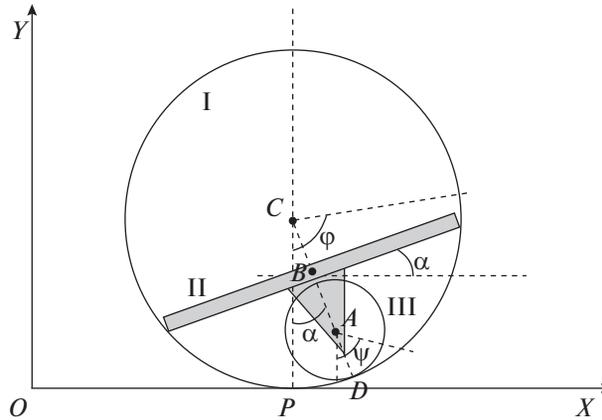


Рис. 2. Схема сферического робота с колесом

и  $D$  – точки контакта сферы с опорной поверхностью и колеса со сферой соответственно. Сферу, платформу, вилку колеса и само колесо считаем абсолютно твердыми телами. Будем предполагать, что колесо может без проскальзывания катиться по внутренней поверхности сферы, платформа может без сопротивления скользить по этой поверхности, а сфера может катиться без проскальзывания по опорной поверхности. Буквами  $\varphi$ ,  $\alpha$  и  $\psi$  на рис. 2 обозначены отсчитываемые против часовой стрелки угол между вертикалью и отмеченным в сфере радиусом, угол между горизонтальной плоскостью и платформой (он же – угол между вертикалью и вилкой колеса) и, наконец, угол между вертикалью и отмеченным в колесе радиусом соответственно. Вилка колеса приводится во вращение вокруг оси  $BA$  с помощью привода, статор которого жестко скреплен с платформой, а ротор – с вилкой. Масса платформы существенно больше массы вилки с колесом, поэтому не представляет труда поворачивать вилку относительно сферы на желаемый угол и благодаря этому перемещать (“катить”) сферу в нужном направлении.

В продольном (плоском) движении система имеет две степени свободы. В отсутствие проскальзывания колеса по внутренней поверхности сферы и сферы по опоре существует следующая связь между угловыми скоростями  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi}$ , и  $\dot{\alpha}$ :

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} \frac{R}{r} - \dot{\alpha} \frac{R-r}{r}. \tag{2.1}$$

Здесь  $R = CD$  – радиус сферы,  $r = AD$  – радиус колеса.

Составим уравнения продольного движения системы методом Лагранжа второго рода. Для этого выпишем выражения для кинетической  $T$ , потенциальной  $V$  энергии системы и виртуальной работы  $\delta W$ :

$$T = \frac{1}{2} [a_{11} \dot{\varphi}^2 + a_{22} \dot{\alpha}^2 + 2a_{12}(\alpha) \dot{\varphi} \dot{\alpha}], \tag{2.2}$$

$$V = (m_1 + m_2) g R - [m_1 L + m_2 (R - r)] g \cos \alpha, \tag{2.3}$$

$$\delta W = M (\delta \psi - \delta \alpha) = M \frac{R}{r} (\delta \varphi - \delta \alpha). \tag{2.4}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= J_0 + (m_0 + m_1 + m_2 + J_2/r^2) R^2, \\ a_{22} &= m_1 L^2 + J_1 + (R - r)^2 (m_2 + J_2/r^2), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$a_{12}(\alpha) = a_{21}(\alpha) = -\{[m_1 L + m_2 (R - r)] \cos \alpha + J_2 (R - r)/r^2\} R,$$

в которых  $m_0$  и  $J_0$  – масса сферы и ее момент инерции относительно диаметра соответственно,  $m_1$  и  $J_1$  – масса платформы и ее момент инерции относительно ее диаметра,  $m_2$  – масса колеса,  $J_2 = J_2' + J_{rot} n^2$ , где  $J_2'$  – момент инерции колеса относительно его оси вращения, проходящей че-

рез его центр  $A$ ,  $J_{rot}$  – момент инерции ротора маршевого двигателя колеса,  $n$  – коэффициент редукции маршевого привода. При выписывании выражения для виртуальной работы (2.4), в котором  $M$  – момент, развиваемый маршевым приводом, используется кинематическое соотношение (2.1).

Будем считать, что момент  $M$ , развиваемый электроприводом, имеет следующую структуру:

$$M = c_u u - c_v n (\dot{\psi} - \dot{\alpha}) = c_u u - c_v n \frac{R}{r} (\dot{\phi} - \dot{\alpha}). \quad (2.6)$$

В выражении (2.6)  $u$  – напряжение, подаваемое на маршевый двигатель, второе слагаемое в этом выражении описывает противоэлектродвижущую силу (противоЭДС), возникающую в обмотке двигателя,  $c_u$  и  $c_v$  – параметры двигателя (постоянные величины). Выражение (2.6) получается, если в уравнении Кирхгофа, описывающем баланс напряжений в обмотке электродвигателя, пренебречь индуктивностью или, другими словами, пренебречь электромагнитной постоянной времени [11–13].

Угол поворота сферы  $\phi$  является циклической координатой. Введем обозначение для соответствующей угловой скорости  $\dot{\phi} = \omega$  и, воспользовавшись соотношениями (2.2)–(2.6), запишем систему уравнений плоского движения:

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{\omega} + a_{12}(\alpha)\ddot{\alpha} + a_{13}\sin\alpha\dot{\alpha}^2 &= \frac{R}{r} \left[ c_u u - c_v n \frac{R}{r} (\omega - \dot{\alpha}) \right], \\ a_{21}(\alpha)\dot{\omega} + a_{22}\ddot{\alpha} + a_{23}\sin\alpha &= -\frac{R}{r} \left[ c_u u - c_v n \frac{R}{r} (\omega - \dot{\alpha}) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь в дополнение к (2.5) введены также следующие обозначения:

$$a_{13} = [m_1 L + m_2 (R - r)] R, \quad a_{23} = [m_1 L + m_2 (R - r)] g. \quad (2.8)$$

Будем считать, что напряжение  $u$ , подаваемое на двигатель, представляет собой кусочно-непрерывную функцию  $u(t)$ , ограниченную по абсолютной величине заданным значением  $u_0$ :

$$|u(t)| \leq u_0 \quad (u_0 = \text{const}). \quad (2.9)$$

При  $u(t) \equiv 0$  система (2.7) имеет тривиальное решение:

$$\phi(t) \equiv \text{const}, \quad \dot{\phi}(t) = \omega(t) \equiv 0, \quad \alpha(t) \equiv 0, \quad \dot{\alpha}(t) \equiv 0. \quad (2.10)$$

Наряду с полными нелинейными уравнениями (2.7) продольного движения будем рассматривать также приближенные линейные уравнения, отвечающие малым отклонениям фазовых переменных  $\omega, \alpha, \dot{\alpha}$  от значений (2.10):

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{\omega} + a_{12}(0)\ddot{\alpha} &= \frac{R}{r} \left[ c_u u - c_v n \frac{R}{r} (\omega - \dot{\alpha}) \right], \\ [a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)]\ddot{\alpha} + a_{11}a_{23}\alpha &= -[a_{11} + a_{21}(0)] \frac{R}{r} \left[ c_u u - c_v n \frac{R}{r} (\omega - \dot{\alpha}) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В уравнениях (2.11) для фазовых переменных используются те же обозначения  $\omega, \alpha, \dot{\alpha}$ , что и в полных уравнениях (2.7). В первом из уравнений (2.11) опущен член  $a_{13}\sin\alpha\dot{\alpha}^2$ . Кроме того, в соответствии с обозначениями (2.5) принято, что

$$a_{12}(0) = -[m_1 L + m_2 (R - r) + J_2 (R - r)/r^2] R < 0.$$

Уравнения (2.11) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{R}{a_{11}r} \left[ c_u u - c_v n \frac{R}{r} \left( \dot{y}_1 - \dot{y}_2 - \frac{a_{12}(0)}{a_{11}} \dot{y}_2 \right) \right], \\ \ddot{y}_2 + \frac{a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)} y_2 &= -\frac{[a_{12}(0) + a_{11}] R}{[a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)]r} \left[ c_u u - c_v n \frac{R}{r} \left( \dot{y}_1 - \dot{y}_2 - \frac{a_{12}(0)}{a_{11}} \dot{y}_2 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$y_1 = \phi + \frac{a_{12}(0)}{a_{11}} \alpha, \quad y_2 = \alpha. \quad (2.13)$$

Если величиной противоЭДС в обмотке электродвигателя пренебречь, то уравнения (2.12) упрощаются и принимают вид

$$\ddot{y}_1 = \frac{R}{a_{11}r} c_u u, \quad \ddot{y}_2 + \frac{a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)} y_2 = - \frac{[a_{12}(0) + a_{11}]R}{[a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)]r} c_u u. \quad (2.14)$$

При  $u(t) \equiv 0$  уравнения (2.14) становятся независимыми, а переменные  $y_1, y_2$  представляют собой не что иное, как нормальные координаты [14]. Из рассмотрения обозначений (2.5), (2.8) следует, что  $a_{11} > 0, a_{23} > 0$ . Кроме того,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0) > 0$ , поскольку квадратичная форма (2.2), описывающая кинетическую энергию системы, положительно определена. Таким образом, однородная (при  $u(t) \equiv 0$ ) система (2.14) имеет двукратное нулевое собственное значение и пару чисто мнимых:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\mu \quad \left( \mu^2 = \frac{a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)} \right). \quad (2.15)$$

Величина  $\mu$  представляет собой частоту собственных колебаний переменной  $y_2$  (или, другими словами, платформы), а  $\theta = 2\pi/\mu$  – период этих колебаний. Уравнения (2.14) перепишем в виде

$$\ddot{y}_1 = b_1 u, \quad \ddot{y}_2 + \mu^2 y_2 = -b_2 u, \quad (2.16)$$

где

$$b_1 = \frac{R}{a_{11}r} c_u > 0, \quad b_2 = \frac{[a_{12}(0) + a_{11}]R}{[a_{11}a_{22} - a_{12}^2(0)]r} c_u > 0.$$

**3. Синтез управления, предотвращающего нежелательные колебания.** Задаче управления колебательными системами посвящено значительное количество исследований. При этом для борьбы с нежелательными колебаниями механических систем, для их подавления, предотвращения применяются различные методы. В монографии [15] для управления колебаниями используются методы теории оптимального управления. В [16] для колебательных систем предлагается строить квазистационарное финитное управление, в [17] для управления одномерными колебательными системами с распределенными параметрами используется граничное кинематическое управление. В [18] предлагается способ гашения колебаний перемещающейся консоли, в [19] для гашения нежелательных колебаний применяется принцип Гаусса. В работе [20] рассматривается вопрос о гашении остаточных колебаний гибкого манипулятора при перемещении груза. В то время как в большинстве исследований рассматривается вопрос о *гашении* нежелательных колебаний, в [8–10, 21] предлагаются способы управления механическими системами, при использовании которых удастся *вообще предотвратить* их, причем как в переходном процессе, так и после его окончания. В большинстве описанных в литературе исследований, касающихся борьбы с нежелательными колебаниями, рассматриваются механические системы, содержащие “упругие” объекты. В отличие от них в настоящей работе изучается система, содержащая только абсолютно твердые тела. Однако, как оказывается, методы, описанные в [8–10], могут быть использованы и в подобном случае.

Пусть в начале процесса управления, т.е. при  $t = 0$ , угловая скорость сферы  $\dot{\phi} = \omega$  равна нулю, угол  $\alpha$  поворота платформы и его угловая скорость  $\dot{\alpha}$  также равны нулю:

$$\dot{\phi}(0) = \omega(0) = 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0. \quad (3.1)$$

Начальные условия (3.1) в переменных  $\dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2$ , вычисляемые при помощи формул (2.13), имеют аналогичный вид:

$$\dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим сначала *разрывное* управление, принимающее при  $t \geq 0$  максимально возможное (см. неравенство (2.9)) значение  $u_0$ :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ u_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

При управлении (3.3) и начальных условиях (3.2) производная  $\dot{y}_1$  при  $t \geq 0$  растет линейно во времени (см. уравнения (2.16)), а переменная  $y_1$  – как квадратичная функция:

$$\dot{y}_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ b_1 u_0 t & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ y_1(0) + b_1 u_0 t^2 / 2 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Что касается переменных  $y_2$  и  $\dot{y}_2$ , то их изменение при управлении (3.3) и начальных условиях (3.2) описывается выражениями

$$y_2(t) = \alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ -\frac{b_2 u_0}{\mu^2} (1 - \cos \mu t) & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\dot{y}_2(t) = \dot{\alpha}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ -\frac{b_2 u_0}{\mu} \sin \mu t & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что при управлении (3.3), изменяющемся в момент  $t = 0$  “скачкообразно”, угол  $\alpha$  отклонения маятника от вертикали колеблется около стационарного состояния  $-b_2 u_0 / \mu^2$  с частотой  $\mu$ . Напомним, что формулы (3.4)–(3.6) получены для линеаризованной модели (2.16) и в отсутствие противоЭДС.

Из соотношений (2.13), (3.4), (3.6) получаем, что при управлении (3.3) изменение угловой скорости вращения сферы описывается как

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) = \dot{y}_1(t) - \frac{a_{12}(0)}{a_{11}} \dot{y}_2(t) = u_0 \left[ b_1 t + \frac{a_{12}(0) b_2}{a_{11} \mu} \sin \mu t \right]. \quad (3.7)$$

Из выражения (3.7) следует, что угловая скорость  $\omega(t)$  при  $t \geq 0$  растет “в среднем” линейно во времени, но на ее поведение накладываются незатухающие колебания. На изменение угла поворота сферы  $\phi$ , очевидно, также накладываются колебания с частотой  $\mu$ . Амплитуда этих колебаний обратно пропорциональна величине  $\mu^2$ . Угловое ускорение сферы

$$\dot{\omega}(t) = u_0 \left[ b_1 + \frac{a_{12}(0) b_2}{a_{11}} \cos \mu t \right],$$

а значит, и ускорение ее центра масс  $\ddot{x}(t) = R\dot{\omega}(t)$  претерпевает колебания.

Построим теперь управление системой (2.16), при котором удастся предотвратить возникновение указанных выше колебаний. Для этого рассмотрим вместо разрывной (“скачкообразно” изменяющейся) управляющей функции (3.3) непрерывную, полученную “добавлением” к функции (3.3) участка, на котором она возрастает от 0 до величины  $u_0$  линейно во времени (см. рис. 3):

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{u_0}{\tau} t & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ u_0 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь  $\tau$  – постоянная положительная величина, которая *будет выбрана ниже*. Непрерывное управление (3.8) в отличие от “скачкообразно” изменяющегося (3.3) можно назвать “плавным” [16].

Решив уравнения (2.16), (3.8) при начальных условиях (3.2), найдем для производной  $\dot{y}_1$  выражение

$$\dot{y}_1(t) = \frac{b_1 u_0}{2} \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ t^2 & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ -\tau + 2t & \text{при } \tau \leq t. \end{cases} \quad (3.9)$$

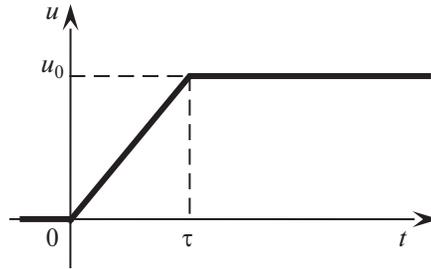


Рис. 3. Плавное управление (3.8)

Для переменных  $y_2$  и  $\dot{y}_2$  запишем следующие соотношения:

$$y_2(t) = \frac{b_2 u_0}{\mu^2} \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{\tau} \left( \frac{\sin \mu t}{\mu} - t \right) & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ \frac{1}{\mu \tau} [\sin \mu t + \sin \mu (\tau - t)] - 1 & \text{при } \tau \leq t, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_2(t) = \frac{b_2 u_0}{\mu^2 \tau} \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \cos \mu t - 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ \cos \mu t - \cos \mu (\tau - t) & \text{при } \tau \leq t. \end{cases} \quad (3.11)$$

Выражения (3.9)–(3.11) найдены путем приспособовывания решений уравнений (2.16), (3.8), полученных при  $0 \leq t < \tau$ , а затем при  $t \geq \tau$ . Промежуточные выкладки здесь опущены из-за их громоздкости.

Из соотношений (2.13), (3.9) и (3.11) видно, что при управлении (3.8) изменение угловой скорости сферы  $\omega$  при  $t \geq 0$  описывается как

$$\omega(t) = u_0 \begin{cases} \frac{b_1}{2\tau} t^2 - \frac{a_{12}(0)b_2}{a_{11}\mu^2\tau} (\cos \mu t - 1) & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ \frac{b_1}{2} (-\tau + 2t) - \frac{a_{12}(0)b_2}{a_{11}\mu^2\tau} [\cos \mu t - \cos \mu (\tau - t)] & \text{при } \tau \leq t. \end{cases} \quad (3.12)$$

Соотношения (3.10)–(3.12) показывают, что изменение угла  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega$  при “плавном” управлении (3.8) происходит с колебаниями так же, как и при разрывном управлении (3.3). Однако амплитуды этих колебаний можно уменьшить, увеличив время  $\tau$  “нарастания” управляющего сигнала (3.8). При управлении (3.8) эти амплитуды могут быть сделаны сколь угодно малыми путем выбора достаточно большого значения времени  $\tau$ . Таким образом, изменяя в законе управления (3.8) параметр  $\tau$ , можно влиять желаемым образом на амплитуду вибраций в системе, причем при любых значениях параметров системы. Не следует забывать, однако, что с увеличением времени  $\tau$  время переходного процесса также увеличивается, что нежелательно. Рассматривая выражения (3.10)–(3.12), удастся сделать и другой, *более важный*, вывод (см. ниже).

Допустим, что время  $\tau$  *кратно* периоду собственных колебаний платформы  $\theta = 2\pi/\mu$  с некоторым коэффициентом  $l$ , т.е.

$$\tau = l\theta, \quad (3.13)$$

где  $l = \overline{1, n}$ . Тогда формулы (3.10)–(3.12) при  $t \geq 0$  приобретают следующий вид:

$$y_2(t) = \frac{b_2 u_0}{\mu^2} \begin{cases} \frac{1}{l\theta} \left( \frac{\sin \mu t}{\mu} - t \right) & \text{при } 0 \leq t < l\theta, \\ -1 & \text{при } l\theta \leq t, \end{cases} \quad (3.14)$$

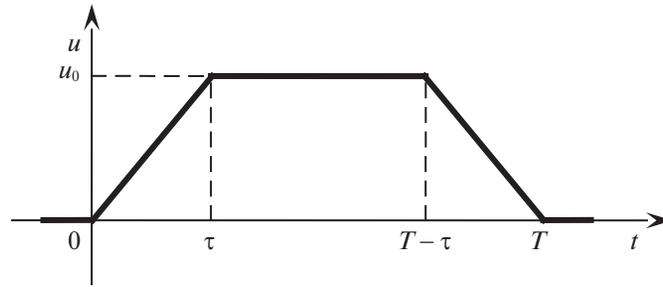


Рис. 4. Трапецеидальное управление (4.1)

$$\dot{y}_2(t) = \frac{b_2 u_0}{\mu^2} \begin{cases} \frac{1}{l\theta} (\cos \mu t - 1) & \text{при } 0 \leq t < l\theta, \\ 0 & \text{при } l\theta \leq t, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\omega(t) = u_0 \begin{cases} \frac{b_1}{2l\theta} t^2 - \frac{a_{12}(0)b_2}{a_{11}\mu^2 l\theta} (\cos \mu t - 1) & \text{при } 0 \leq t < l\theta, \\ \frac{b_1}{2} (-l\theta + 2t) & \text{при } l\theta \leq t. \end{cases} \quad (3.16)$$

Формулы (3.14)–(3.16) показывают, что при  $t \geq l\theta$ , когда управляющий сигнал (3.8) становится постоянным, угол  $\alpha = y_2$  остается постоянным (отрицательным), а угловая скорость сферы  $\omega$  растет линейно и *монотонно* во времени:

$$y_2(t) = \alpha(t) = -\frac{b_2 u_0}{\mu^2}, \quad \omega(t) = \frac{b_1 u_0}{2} (-l\theta + 2t).$$

При этом каких-либо колебаний по углу  $\alpha$  или по угловой скорости  $\omega$  нет.

Таким образом, если время  $\tau$  *кратно* периоду собственных колебаний платформы  $\theta$ , т.е. имеет место условие (3.13), то вибрации в системе на участке постоянства управляющего сигнала (3.8), т.е. при  $t \geq \tau$ , *отсутствуют вообще*. Но сформулированное утверждение справедливо, когда противоЭДС пренебрежимо мала. Однако вследствие непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от параметров при “малой” величине коэффициента  $c_v$  амплитуда колебаний на участке постоянства управляющей силы будет “малой”.

**4. Трапецеидальное управление.** Рассмотрим управление вида

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{u_0}{\tau} t & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ u_0 & \text{при } \tau \leq t < T - \tau, \\ -\frac{u_0}{\tau} (t - T) & \text{при } T - \tau \leq t < T, \\ 0 & \text{при } T \leq t. \end{cases} \quad (4.1)$$

График функции (4.1), графически изображенный на рис. 4, имеет вид равнобочной трапеции. Если имеет место условие (3.13), то, как нетрудно убедиться, при  $t \geq T$  угол  $\alpha$  при управлении (4.1) остается равным нулю, а угловая скорость сферы  $\omega$  остается постоянной величиной, отличной от нуля:

$$\alpha(t) = 0, \quad \omega(t) = (T - \tau) b_1 u_0. \quad (4.2)$$

Второе из равенств (4.2) получается при условии  $T \geq 2l\theta$ . Угловая скорость  $\omega(t)$  при  $t \geq T$  тем больше, чем больше время  $T$  и чем меньше величина  $l$ . Если же, например, желаемая скорость вращения сферы  $\omega_d = b_1 u_0 l\theta$ , то, как следует из второго равенства (4.2), должно иметь место соотношение  $T = 2l\theta$ , и управление (4.1) из “трапецеидального” превращается в “треугольное” (см. рис. 5). Если желаемая скорость  $\omega_d < b_1 u_0 l\theta$ , то у треугольного управления максимальное

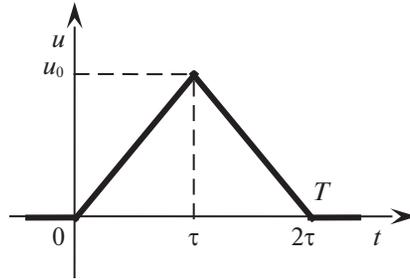


Рис. 5. “Треугольное” управление

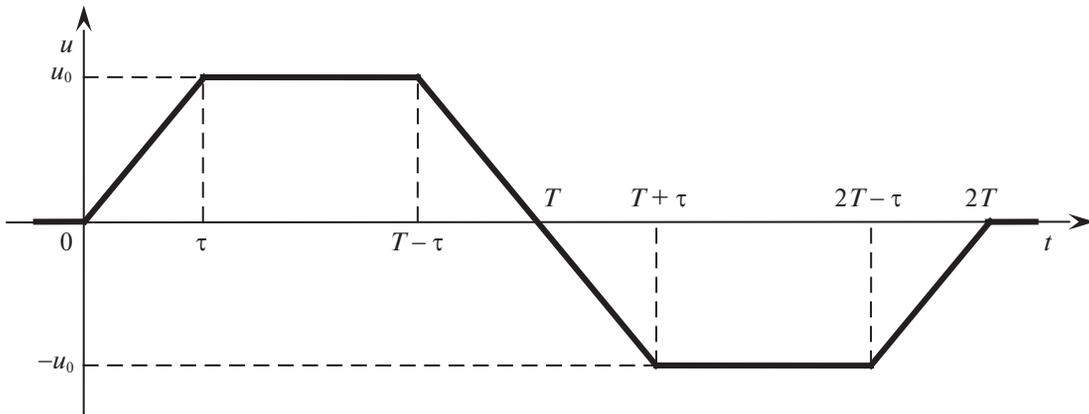


Рис. 6. Управление, “состоящее” из двух равнобедренных трапеций

значение управляющего сигнала  $u$  должно быть меньше величины  $u_0$ . Такое управление  $u(t)$  удовлетворяет строгому неравенству  $|u(t)| < u_0$  вместо нестрогого (2.9). При помощи управлений, показанных на рис. 4, 5, можно организовать движение робота-шара с желаемой скоростью.

Рассмотрим теперь управление, которое графически изображается на рис. 6 в виде двух равнобедренных трапеций. Одна из трапеций описывается выражением (4.1) и представлена на рис. 4, а другая симметрична ей относительно точки  $(t = T, u = 0)$ .

При  $t < 0$  и  $t > 2T$  управление  $u(t)$ , показанное на рис. 6, равно нулю. Момент времени, когда управление становится тождественно равным нулю, здесь обозначен через  $2T$ . Если время  $\tau$  удовлетворяет равенству (3.13), то при использовании этого управления на интервалах  $(\tau, T - \tau)$ ,  $(T + \tau, 2T - \tau)$ , а также при  $t > 2T$ , где управляющий сигнал принимает постоянное значение, колебания по углу  $\alpha$  и по угловой скорости  $\omega$  отсутствуют; при  $t \geq 2T$ , имеют место тождества  $\alpha(t) \equiv 0$ ,  $\omega(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv \varphi(2T) > 0$  (если  $\varphi(0) = 0$ ). Чем больше время  $T$ , тем больше угол поворота сферы  $\varphi(2T)$  и тем больше будет расстояние, на которое она переместится вдоль оси  $OX$  (см. рис. 2), поскольку  $x(2T) = R\varphi(2T)$ . График управляющей функции  $u(t)$  на рис. 6 симметричен относительно точки  $(t = T, u = 0)$ . Поэтому график соответствующей функции  $\dot{y}_1(t)$  симметричен относительно прямой  $t = T$  и, кроме того, если  $\dot{y}_1(0) = 0$ , то  $\dot{y}_1(t) > 0$  при  $t \in (0, 2T)$ . В свою очередь график функции  $y_1(t)$  симметричен относительно точки пересечения прямой  $t = T$  и кривой  $y_1 = y_1(t)$ . И, кроме того, если  $y_1(0) = 0$ , то  $y_1(t) > 0$  при  $t \in (0, 2T)$ . При условии (3.13) график функции  $y_2(t) = \alpha(t)$  симметричен относительно точки  $(t = T, \alpha = 0)$ . Из условия симметрии функции  $y_1(t)$  вытекает, что если  $y_1(0) = 0$ , то

$$y_1(T) = y_1(2T)/2 \tag{4.3}$$

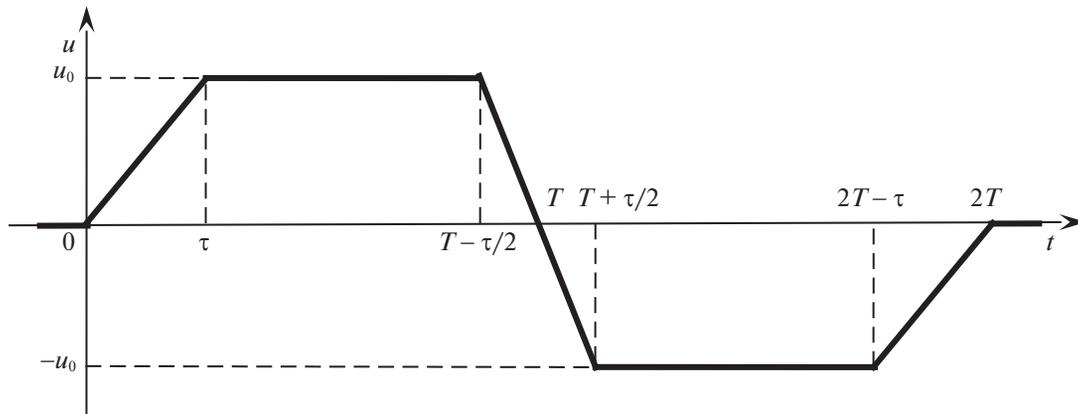


Рис. 7. Трапецеидальное управление с более быстрым переключением знака

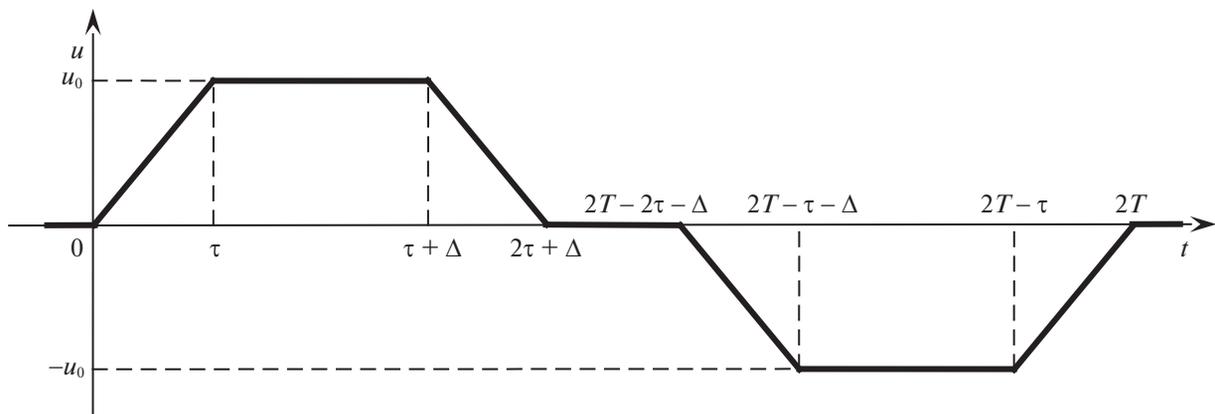


Рис. 8. Управление  $u(t) = 0$  на интервале “между” двумя трапециями

При начальных условиях (3.1), (3.2) ( $y_2(0) = \alpha(0) = 0$ ) и  $\varphi(0) = 0$  из равенства (4.3) следует, что  $2\varphi(T) = \varphi(2T)$ .

Рассмотрим теперь вместо управления, показанного на рис. 6, другое трапецеидальное управление (см. рис. 7).

Управление, изображенное на рис. 7, состоит из двух *неравнобоких* трапеций. Оно отличается от управления на рис. 6 размером интервала, на котором происходит смена знака управляющего сигнала. На рис. 6 длина этого интервала ( $T - \tau, T + \tau$ ) равна  $2\tau$ , а на рис. 7 длина соответствующего интервала ( $T - \tau/2, T + \tau/2$ ) равна  $\tau$ , т.е. в 2 раза меньше. Поэтому если имеет место условие (3.13), то и при управлении, представленном на рис. 7, ни угол  $\alpha$ , ни угловая скорость  $\omega$  не совершают колебаний на интервале ( $T + \tau/2, 2T - \tau$ ) постоянства управляющего сигнала.

Рассмотрим теперь управление, которое находится из управления, показанного на рис. 6, если вторую трапецию, начинающуюся в точке  $t = T$ , “отодвинуть” направо от первой и положить  $u(t) \equiv 0$  на получившемся между трапециями интервале (см. рис. 8).

Считается, что длина интервала ( $2\tau + \Delta, 2T - 2\tau - \Delta$ ) на рис. 8 не равна нулю, т.е. величина  $T$  настолько велика, что  $2T - 4\tau - 2\Delta > 0$ . При условии (3.13), на интервале ( $2\tau + \Delta, 2T - 2\tau - \Delta$ ) имеют место тождества:

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv b_1 u_0 (\Delta + \tau). \quad (4.4)$$

Таким образом, на этом интервале ( $2\tau + \Delta, 2T - 2\tau - \Delta$ ) робот-шар движется с постоянной скоростью. Второе из равенств (4.4) совпадает со вторым из равенств (4.2), если в (4.4) вместо

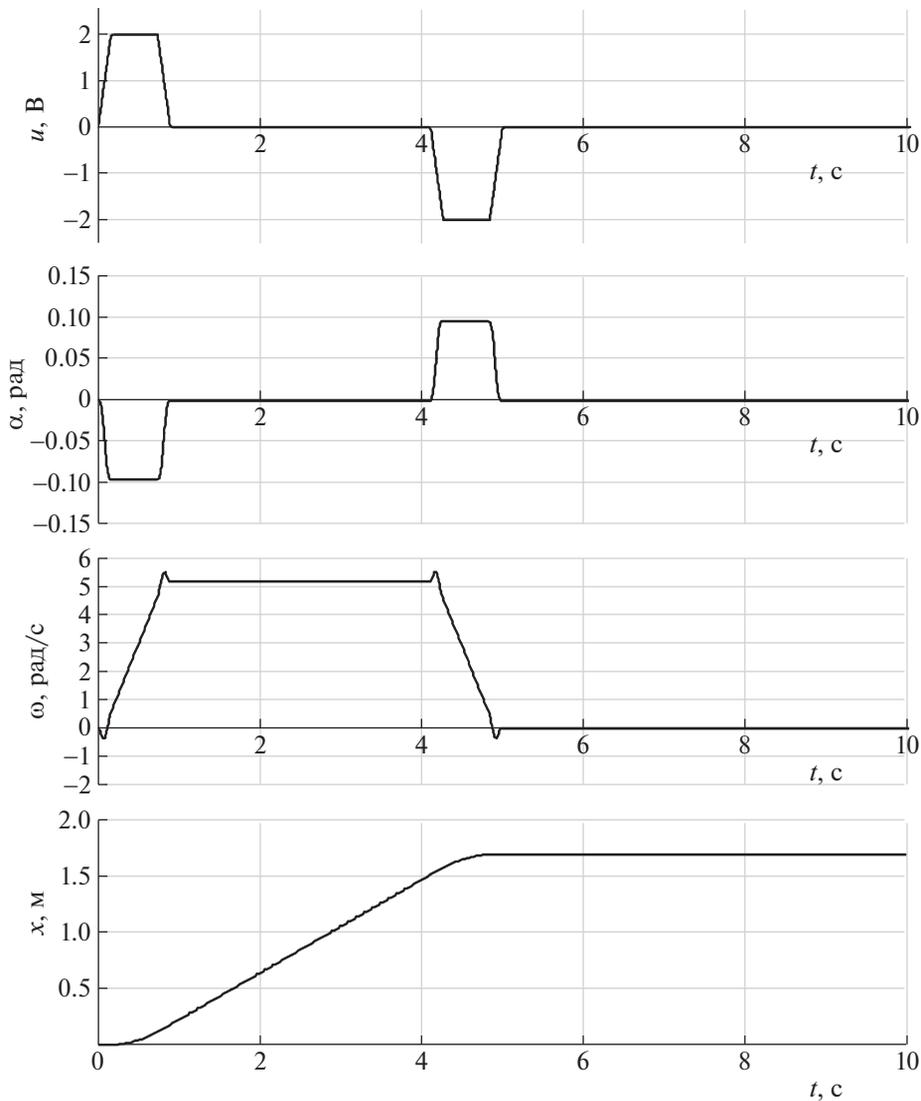
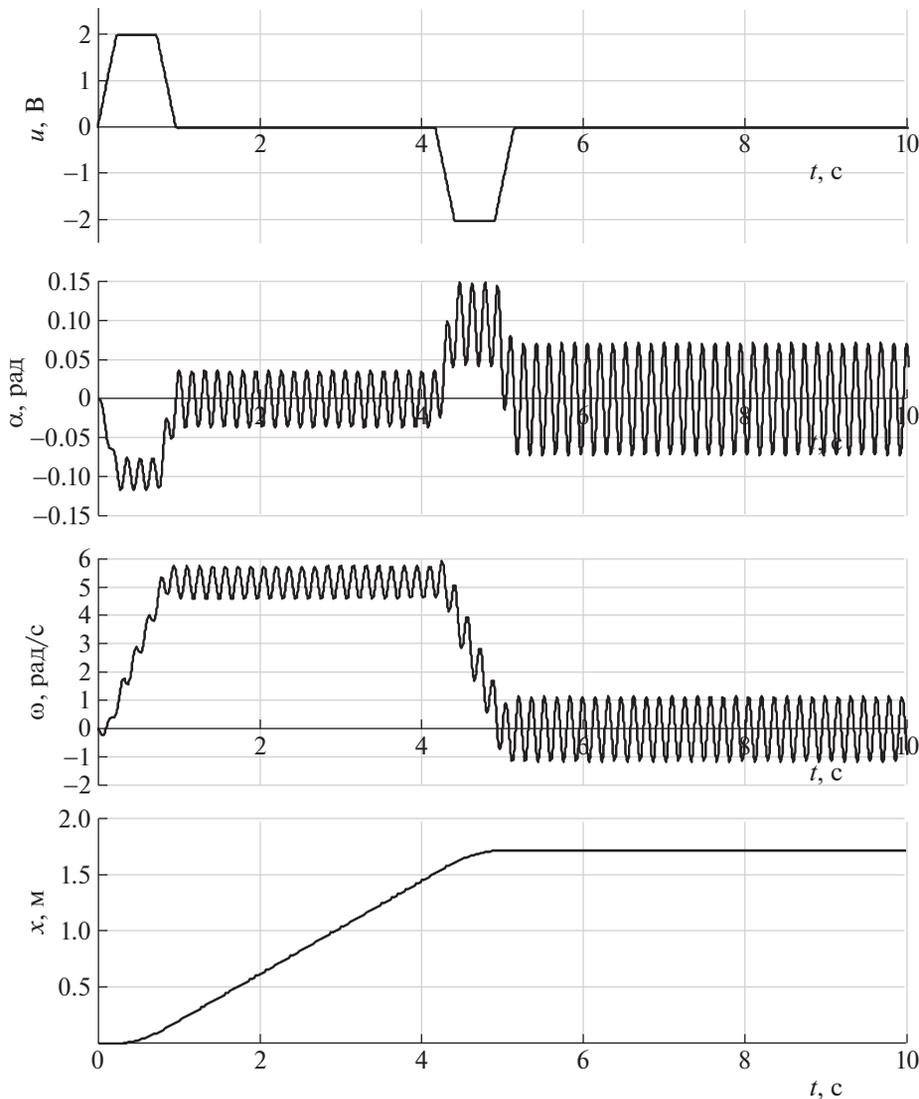


Рис. 9. Трапецидальное (см. рис. 8) управление  $u(t)$  при  $\tau = \theta$  ( $l = 1$ ) и соответствующие расчетные зависимости  $\alpha(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $x(t)$

величины  $\Delta$  подставить  $T - 2\tau$ . Это естественно, поскольку управление (4.1) (см. рис. 4) на интервале  $(0, T)$  совпадает с управлением на интервале  $(0, 2\tau + \Delta)$ , изображенном на рис. 8. При управлении, приведенном на рис. 8, сфера к моменту времени  $2T$  перемещается на большее расстояние, нежели при управлении на рис. 6, если управление на рис. 8 получается из управления на рис. 6 добавлением интервала  $(2\tau + \Delta, 2T - 2\tau - \Delta)$ , на котором сфера движется с постоянной скоростью. Управление, изображенное на рис. 8, может быть использовано, если скорость перемещения сферы по каким-нибудь причинам ограничена. При “длинном” интервале  $(2\tau + \Delta, 2T - 2\tau - \Delta)$  сфера будет “долго” перемещаться с постоянной скоростью.

**5. Численные исследования разомкнутой системы.** Рассмотрим следующие численные значения параметров сферического робота:

$$\begin{aligned}
 R &= 0.08 \text{ м}, & r &= 0.027 \text{ м}, & L &= 0.03 \text{ м}, & n &= 1, & m_0 &= 0.01 \text{ кг}, \\
 J_0 &= 2/3 m_0 R^2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & m_1 &= 0.8 \text{ кг}, & J_1 &= 0.0001 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & m_2 &= 0.05 \text{ кг} \\
 J_2 &= 0.000036 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & c_u &= 0.007 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-1}, & n &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$



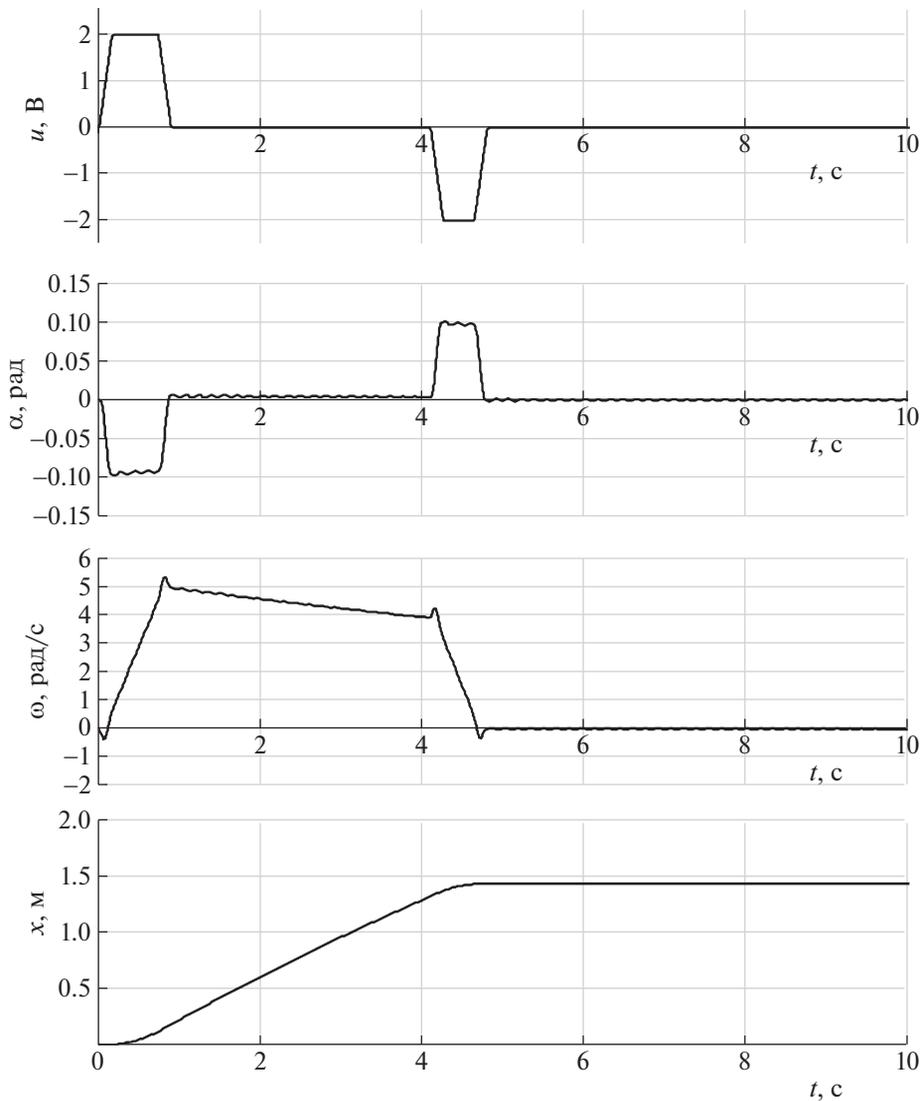
**Рис. 10.** Трапецидальное (см. рис. 8) управление  $u(t)$  при  $\tau = 1.5 \cdot \theta$ , т.е. когда длительность наклонных участков *не кратна* периоду собственных колебаний, и соответствующие расчетные зависимости  $\alpha(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $x(t)$

Эти значения соответствуют параметрам прототипа робота-шара, показанного на рис. 1. При значениях (5.1) параметров системы частота собственных колебаний платформы  $\mu \approx 39.9 \text{ с}^{-1}$ , а период этих колебаний  $\theta = 2\pi/\mu \approx 0.16 \text{ с}$ .

На рис. 9 приведены полученные при решении *линейной* системы уравнений (2.16), где  $c_v = 0$ , графики изменения во времени трапецидального управляющего сигнала  $u(t)$ , угла  $\alpha(t)$ , угловой скорости  $\omega(t)$  и расстояния  $x(t) = R\varphi(t)$ , пройденного центром сферы. При этом считается, что  $\tau = \theta$  ( $l = 1$ ), а максимальное напряжение, подаваемое на двигатель, равно 2 В.

Для сравнения на рис. 10 изображены графики, получающиеся в случае, когда длительность наклонных участков трапеции  $\tau = 1.5 \cdot \theta$ , т.е. *не кратна* периоду собственных колебаний  $\theta$ . Длительность этапа разгона подбирается таким образом, чтобы средняя угловая скорость на следующем этапе (где  $u(t) \equiv 0$ ) была такой же, как и в случае управления с  $\tau = \theta$ . Из рассмотрения рис. 10 следует, что при указанном управлении наблюдаются заметные колебания величин  $\alpha$  и  $\omega$ .

На рис. 11 графически показаны результаты решения *полных* нелинейных уравнений движения (2.7) с учетом противоЭДС ( $c_v = 5 \times 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ). При этом длительность этапа торможения



**Рис. 11.** Управляющий сигнал  $u(t)$  и соответствующие зависимости  $\alpha(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $x(t)$  для полной нелинейной модели (2.7) при учете противоЭДС

уменьшена с тем, чтобы в его конце угловая скорость робота-шара так же, как на рис. 9, обратилась в нуль. Длительность остальных этапов движения осталась такой же, как на рис. 9.

Из рассмотрения рис. 11 следует, что предложенный закон управления позволяет почти полностью предотвратить возникновение колебаний по углу наклона платформы  $\alpha$  и по угловой скорости  $\omega$ . Пройденное расстояние, как и следовало ожидать, оказывается несколько меньшим, чем в случае  $c_v = 0$ . Эту разницу можно компенсировать за счет изменения длительности этапов разгона и торможения.

На рис. 9–11 в начале и в конце участков линейного изменения напряжения  $u(t)$  видны “небольшие” промежутки времени, на которых угловая скорость  $\omega(t)$  изменяется немонотонно. Подобное поведение угловой скорости обнаруживается и аналитически. С увеличением коэффициента  $l$ , однако, промежутки такого немонотонного изменения скорости  $\omega(t)$  уменьшаются.

При каждом из управлений, изображенных на рис. 9–11, сфера перемещается на некоторое расстояние и останавливается. Изменяя длительность участков постоянства подаваемого на маршевый привод напряжения, можно изменять расстояние, на которое перемещается робот. Изменить это расстояние можно также, увеличив или уменьшив (после разгона робота) время, в течение которого управляющее напряжение равно нулю. При управлении роботом-шаром в су-

первизорном режиме (с оператором) имеет место визуальная обратная связь. В этом случае оператор во время движения робота или во время его остановок может вводить ту или иную коррекцию в управление в зависимости от решаемой задачи.

**Заключение.** Рассматривается продольное движение сферического робота, внутренний механизм которого содержит платформу, опирающуюся своими краями на внутреннюю поверхность сферы. К платформе прикреплен вилок, внутри которого смонтировано колесо, касающееся этой внутренней поверхности. Построено в виде непрерывной функции времени подаваемое на электропривод колеса управляющее напряжение, при котором удается избежать “больших” колебаний по углу наклона платформы и по угловой скорости робота в его продольном движении. Управляющее напряжение состоит из участков постоянства, перемежающихся с участками линейного во времени роста или убывания. Продолжительность участков линейного изменения напряжения выбирается кратной периоду собственных колебаний робота.

Результаты численного моделирования также свидетельствуют об эффективности предложенного алгоритма управления.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар. Сб. работ / Под ред. Борисова А.В., Мамаева И.С., Караева Ю.Л. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 522 с.
2. *Karavaev Y.L., Kilin A.A.* The Dynamics and Control of a Spherical Robot with an Internal Omniwheel Platform // Regul. Chaot. Dyn. 2015. V. 20. P. 134–152.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715020033>
3. *Liu Wei, Wang Runjiao, Duan Lunqin, Wang Yanyan, Wang Jiwu.* Spherical Mobile Robot Driven by Single Omni Wheel // J. of Robotics, Networking and Artificial Life. 2019. V. 6. № 3. P. 167–170.
4. *Шнигель Л.М.* Радиоуправляемая сферическая игрушка. Патент РФ № 2062631, 6 с., 27 июня 1996.
5. *Wang-Mine Ku.* Spherical Steering Toy. United State Patent No 5.692.946, 9 p., Dec. 2, 1997.
6. *Селюцкий Ю.Д., Симоненко М.М., Формальский А.М., Утешев А.В.* Робот-шар. Патент РФ № 188214, 6 с., 3 апреля 2019.
7. *Килин А.А., Караев Ю.Л.* Экспериментальные исследования динамики сферического робота комбинированного типа // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 721–734.
8. *Ганнел Л.В., Формальский А.М.* Управление, минимизирующее колебания систем с податливыми элементами // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 1. С. 122–134.
9. *Formalskii A., Gannel L.* Control to Avoid Vibrations in Systems with Compliant Elements // J. of Vibration and Control. 2015. V. 21. № 14. P. 2852–2865.
10. *Formalskii A.M.* Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects. Walter de Gruyter GmbH. Berlin/Boston, 2015. 239 p.
11. *Чиликин М.Г., Сандлер А.С.* Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.
12. *Гориневский Д.М., Формальский А.М., Шнейдер А.Ю.* Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях. М.: Физматлит, 1994. 368 с.
13. *Gorinevsky D.M., Formalsky A.M., Schneider A.Yu.* Force Control of Robotics Systems. N. Y.: CRC Press, Boca Raton, 1977. 368 p.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
15. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
16. *Акуленко Л.Д.* Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем // ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 183–192.
17. *Акуленко Л.Д.* Граничное кинематическое управление распределенной колебательной системой // ПММ. 2007. Т. 71. № 6. С. 956–963.
18. *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегрированных соотношений // ДАН. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.
19. *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х.* Применение обобщенного принципа Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 2. С. 20–25.
20. *Karisci S., Yildirim N., Yavuz H., Baysec S.* Suppression of Residual Vibrations of Translating-Swinging Load by a Flexible Manipulator // Mechatronics. 2008. V. 18. № 3. P. 121–128.
21. *Проурзин В.А.* Управление движением упругих объектов без возбуждения собственных колебаний // АиТ. 2017. № 12. С. 54–69.

---

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

---

УДК 519.872

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ  
ОБСЛУЖИВАНИЯ-ЗАПАСАНИЯ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ  
ПОСТАВОК И РАЗРУШАЮЩИМИ ЗАЯВКАМИ**© 2022 г. А. З. Меликов<sup>а, \*</sup>, Р. Р. Мирзоев<sup>б</sup>, С. С. Наир<sup>в</sup><sup>а</sup> *Институт систем управления, Национальная академия наук Азербайджана, Баку, Азербайджан*<sup>б</sup> *Национальная авиационная академия, Баку, Азербайджан*<sup>в</sup> *Государственный инженерный колледж, Триссур, Индия**\*e-mail: agassi.melikov@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.

После доработки 10.01.2022 г.

Принята к публикации 31.01.2022 г.

Исследуются модели систем обслуживания-запасания с двумя политиками пополнения запасов: с фиксированным объемом поставок и с переменным объемом поставок. Пополнения могут быть осуществлены из двух источников с различными временами выполнения заказа и стоимостями поставки запасов. Если уровень запасов опускается до точки заказа  $s$ , то генерируется обычный заказ на поставку запасов к медленному источнику. Если уровень запасов опускается ниже определенной пороговой величины  $r$ , где  $r < s$ , то система мгновенно аннулирует обычный заказ и генерируется экстренный заказ в быстрый источник. В систему поступают также разрушающие заявки, в результате которых уровень запасов мгновенно уменьшается. Случайные величины, участвующие в формировании модели, имеют показательные функции распределения с конечными средними. Найдены условия эргодичности исследуемых систем, вычисляются их стационарные распределения и предложены формулы для нахождения их характеристик. Решены задачи минимизации суммарных штрафов изучаемых систем за счет выбора надлежащих значений точки заказа  $s$  и пороговой величины  $r$  при использовании различных политик пополнения запасов.

DOI: 10.31857/S000233882203009X

**Введение.** Одним из основных допущений классической теории систем управления запасами (inventory control systems (ICS)) является допущение о том, что время продажи (отпуска) запаса потребителям равно нулю. Однако это предположение зачастую оказывается нереальным. В англоязычной литературе ICS с положительным временем обслуживания получили название систем обслуживания-запасания (queuing-inventory systems (QIS)) [1, 2]. Иными словами, системы управления запасами могут быть рассмотрены как QIS с мгновенным обслуживанием заявок. С другой стороны, QIS могут быть рассмотрены как системы массового обслуживания, которые имеют ограниченные запасы и обслуживание поступающих расходующих заявок (consumer customers,  $c$ -заявки) подразумевает продажу им запасов определенных размеров с помощью серверов системы. В отличие от теории ICS, которая имеет долгую историю [3], теория QIS интенсивно развивается лишь последние три десятилетия, так как первыми публикациями в этом направлении являются [4, 5]. Теория QIS в последние годы широко изучается различными авторами. Современное состояние теории QIS и ее приложения подробно описаны в недавней обзорной работе [6].

Каждая QIS старается найти баланс между доходами за обслуживания заявок, стоимостью заказов и хранением запасов. Подавляющее большинство публикаций посвящены изучению QIS, в которых поставка запасов осуществляется из одного источника. Однако в целях увеличения надежности своевременного обеспечения запасами необходимо организовать снабжения из нескольких источников. Применительно к моделям классических ICS эта проблема изучена достаточно подробно. Во многих работах показано, что политика снабжения от нескольких источников может быть более эффективной, чем политика, которая полагается на одного постав-

щика [7–13]. Заинтересованный читатель может найти библиографию в этом направлении в обзорных статьях [14–16] ([15] содержит 373 наименования в списке литературы).

Проблема выбора поставщика из конечного множества поставщиков с различными характеристиками (временами выполнения заказов и их стоимостями) рассмотрена в [17]. В отличие от [17] в настоящей работе рассматривается проблема разделения заказов между быстрым и дорогим поставщиком и медленным, но недорогим поставщиком.

Отметим, что когда используются несколько источников для снабжения, то необходимо определить правила для определения моментов поставки от различных источников, а также распределить объемы заказа между ними. Возможны два пути решения этих проблем: (1) общий объем заказа заранее распределяется между источниками по определенным критериям, при этом источники независимо друг от друга выполняют эти заказы; (2) заказы делаются разным источником в различных ситуациях, т.е. в конкретных ситуациях ожидается поставка лишь от одного источника.

Практическая реализация первой схемы не представляет никаких трудностей в QIS, где используется политика пополнения запасов (ППЗ) с фиксированным объемом заказа, например, в системах с  $(s, Q)$ -политикой пополнения запасов. Напомним, что с помощью  $(s, Q)$ -политики размер заказа является постоянной величиной и равен  $Q = S - s$ , где  $S$  – максимальный размер склада системы, а  $s$  называется точкой заказа, при этом считается, что  $s = 0, (S/2) - 1$ . В системах, где объем заказа зависит от текущего состояния системы (уровня запасов), например QIS с  $(s, S)$ -политикой, реализация указанной схемы оказывается нетривиальной задачей. При использовании  $(s, S)$ -политики размер заказа является переменной величиной и определяется так, что в момент его выполнения склад системы заполняется полностью.

В работе рассматриваются модели QIS, в которых применяется вторая схема распределения заказов между двумя источниками с различными характеристиками. Нами предлагается следующая схема распределения заказов между двумя источниками. Когда запас падает до уровня  $s$ ,  $s = 1, (S/2 - 1)$ , срабатывает обычный заказ к медленному Источнику-1. Однако если до момента выполнения обычного заказа уровень запасов опускается ниже определенного порогового (опасного) значения  $r$ ,  $r = 0, s - 1$ , срабатывает экстренный заказ определенного размера к быстрому Источнику-2, который выполняется за дополнительную плату. Во избежание переполнения склада системы в момент отправки заказа к Источнику-2 аннулируется заказ к Источнику-1, так как из-за стохастичности времен выполнения поставок возможны ситуации, когда за короткое время поступают поставки с обоих источников. Отметим, что аннулирование заказа к Источнику-1, как правило, приводит к определенным штрафам, которые должны выплачиваться конкретной системой обслуживания-запасания. Размеры обычного и экстренного заказов определяются исходя из принятой политики пополнения запасов.

В известных работах, посвященных моделям QIS с портящимися запасами, как правило, предполагается, что запасы портятся с течением времени (детерминированного или случайного времени). Вместе с тем почти не изучены модели QIS, где учитываются возможности мгновенного уничтожения запасов из-за внезапных событий, например, в результате небрежного отношения сотрудников склада к своей работе, технических аварий и т.д. В данной работе такие ситуации учитываются с помощью введения потока разрушающих заявок (destructive customers,  $d$ -заявки), которые не требуют обслуживания, а их наступление приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов. Разрушающие заявки могут быть рассмотрены как аналог негативных заявок в классических системах массового обслуживания, в которых негативные заявки не требуют обслуживания, а при поступлении они вытесняют из очереди (или из сервера) одну обычную заявку [18, 19].

подавляющее большинство работ по изучению QIS посвящены системам, в которых поставка запасов осуществляется из одного источника. Авторам известна лишь работа [20], где изучается марковская модель QIS с портящимися запасами и двумя источниками. Рассмотрена модель с пуассоновским потоком, где каждая заявка, согласно схеме Бернулли, либо принимается в систему (т.е. является  $s$ -заявкой), либо вытесняет из очереди одну заявку (т.е. выступает негативной заявкой). Времена обслуживания  $s$ -заявок, порчи запасов и время выполнения заказов из различных источников имеют показательные распределения с конечными (положительными) средними. В системе предложена следующая ППЗ: когда уровень запасов опускается до фиксированной величины  $m$ ,  $m > (S/2)$  срабатывает обычный заказ объема  $Q_1 = S - m$  к медленному источнику; если уровень запасов опускается до заранее определенной величины  $s$ ,  $s < Q_1$ , срабатывает экстренный заказ объема  $Q_2 = S - s > s + 1$  к быстрому источнику. Считается, что

$s + m < S$ , так как в противном случае возможны ситуации, когда суммарная поставка запасов может превышать максимальный объем склада системы. В указанной работе с помощью матрично-геометрического метода [21] найдено стационарное распределение соответствующей цепи Маркова и решена задача минимизации суммарных штрафов системы.

Настоящая публикация мотивирована работой [20]. В работе предложены новые политики пополнения запасов в QIS с  $c$ - и  $d$ -заявками и двумя источниками.

**1. Описание моделей.** Ниже рассматриваются две модели QIS типа  $M/M/1/\infty$  с расходующими и разрушающими заявками и двумя источниками при использовании  $(s, S)$  и  $(s, Q)$  политик пополнения запасов. В обеих моделях интенсивность поступающего пуассоновского потока  $c$ -заявок равна  $\lambda$ , и для простоты изложения полагаем, что  $c$ -заявки требуют запаса единичного размера. Кроме того, в обеих моделях поток  $d$ -заявок также считается пуассоновским с параметром  $\kappa$ , при этом в момент поступления таких заявок уровень запасов мгновенно уменьшается на единицу;  $d$ -заявка может даже уничтожить запас, который находится на этапе отпуска к  $c$ -заявке. Если уровень запасов равен нулю, то поступившая  $d$ -заявка не влияет на работу системы.

Поступившая  $c$ -заявка немедленно принимается для обслуживания, если в этот момент сервер свободен и уровень запасов положительный; если уровень запасов положительный и сервер занят, то эта заявка ставится в очередь бесконечной длины. Отметим, что  $c$ -заявки присоединяются к очереди даже тогда, когда уровень запасов равен нулю, т.е. если в момент поступления очередной  $c$ -заявки в системе отсутствуют запасы, то она либо с вероятностью  $\phi_1$  становится в очередь, либо с вероятностью  $\phi_2$  покидает систему, при этом  $\phi_1 + \phi_2 = 1$ . Заявка в начале очереди становится нетерпеливой, если уровень запасов падает до нуля, т.е. в таких случаях  $c$ -заявка во главе очереди ожидает некоторое случайное время, которое имеет показательную функцию распределения (ф.р.) со средним  $\tau^{-1}$ , и по истечении этого времени она покидает систему с неудовлетворенным спросом.

После завершения обслуживания  $c$ -заявка либо с вероятностью  $\sigma_1$  отказывается получить товар, либо с вероятностью  $\sigma_2$  получает товар, при этом  $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ . В обоих случаях время обслуживания  $c$ -заявок имеют показательные ф.р., но их средние значения различны, т.е. если  $c$ -заявка отказывается получить товар, то среднее время ее обслуживания равно  $\mu_1^{-1}$ ; иначе это время равно  $\mu_2^{-1}$ .

Пополнения запасов можно осуществлять из двух источников: медленного Источника-1 и быстрого Источника-2. Время выполнения заказов каждого источника имеет показательную ф.р., но их средние значения различны, т.е. если делается заказ к Источнику- $i$ , то среднее время ожидания поставки запаса равно  $v_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , при этом  $v_2 > v_1$ . Иными словами, снабжение от Источника-2 требует меньше времени доставки, чем Источник-1, но снабжение от Источника-2 требует дополнительных затрат. Кроме того, аннулирование заказа от Источника-1 связано с определенными штрафами.

Изучаются две политики пополнения запасов:  $(s, S)$  и  $(s, Q)$ . Считается, что в изучаемой системе разрешено аннулирование заказа до его выполнения. При этом время, необходимое для оформления акта аннулирования ничтожно малая величина, т.е. здесь принимается, что это время равно нулю. В обеих ППЗ принимается, что точка заказа определяется так:  $0 < s < (S/2)$ . Если уровень запасов опускается до величины  $s$ , то делается заказ к Источнику-1, а когда уровень запасов опускается до пороговой величины  $r$ ,  $0 \leq r < s$ , то мгновенно аннулируется заказ от Источника-1 и отправляется заказ к Источнику-2.

Задача состоит в нахождении совместного распределения числа  $c$ -заявок в системе и уровня запасов системы, определении основных характеристик системы и решении задачи выбора оптимальных значений точки заказа  $s$  и пороговой величины  $r$  с целью минимизации суммарных затрат системы при использовании различных политик пополнения запасов. Суммарные затраты включают переменные и постоянные затраты для каждого типа заказа и аннулирования заказа, а также затраты на хранение запасов, штрафы из-за потери  $c$ -заявок в результате их нетерпеливости и штрафы за их пребывание в системе.

**2. Расчет вероятностей состояний системы при использовании  $(s, S)$ -политики.** Функционирование системы описывается двумерной цепью Маркова (two dimensional Markov chain (2-D MC)) с состояниями вида  $(n, m)$ , где  $n$  указывает число  $c$ -заявок в системе,  $n \geq 0$ ,  $m$  обозначает уровень

запасов на складе системы,  $m = \overline{0, S}$ . Пространство состояний (ПС) этой 2-D МС определяется так:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n),$$

где множество  $L(n) = \{(n, 0), (n, 1), \dots, (n, S)\}$  –  $n$ -й уровень.

Интенсивность перехода из состояния  $(n_1, m_1) \in E$  в другое состояние  $(n_2, m_2) \in E$  обозначим через  $q((n_1, m_1), (n_2, m_2))$ . Из описания системы видно, что переходы между состояниями ПС  $E$  связаны со следующими событиями: (i) поступление  $c$ -заявок, (ii) завершение обслуживания  $c$ -заявок, (iii) уход  $c$ -заявок из очереди из-за их нетерпеливости, (iv) поступление  $d$ -заявок и (v) поступление пополнения запасов.

Пусть исходным состоянием системы является  $(n_1, m_1) \in E$ . Тогда возможные переходы между состояниями и их интенсивности определяются следующим образом.

Если поступает  $c$ -заявка и уровень запасов равен нулю ( $m_1 = 0$ ), то эта заявка с вероятностью  $\phi_1$  становится в очередь, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(n_1 + 1, 0) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\lambda\phi_1$ .

Если поступает  $c$ -заявка и уровень запасов больше нуля ( $m_1 > 0$ ), то число  $c$ -заявок в системе увеличивается на единицу, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(n_1 + 1, m_1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\lambda$ .

Если после завершения обслуживания  $c$ -заявка отказывается получить товар, то число  $c$ -заявок в системе уменьшается на единицу, при этом уровень запасов системы не меняется, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(n_1 - 1, m_1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\mu_1\sigma_1$ .

Если после завершения обслуживания  $c$ -заявка получает товар, то одновременно число  $c$ -заявок в системе и уровень запасов системы уменьшаются на единицу, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(n_1 - 1, m_1 - 1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\mu_2\sigma_2$ .

Если уровень запасов падает до нуля (либо после завершения обслуживания  $c$ -заявки, либо в результате поступления  $d$ -заявки), т.е. если в исходном состоянии  $(n_1, m_1) \in E$  имеем  $m_1 = 0$ , то  $c$ -заявка во главе очереди покидает систему с неудовлетворенным спросом после некоторого случайного промежутка времени. Иными словами, осуществляется переход из исходного состояния в состояние  $(n_1 - 1, 0) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\tau$ .

Если в момент поступления  $d$ -заявки уровень запасов больше нуля ( $m_1 > 0$ ), то запас единичного размера уничтожается, а число  $c$ -заявок в системе не меняется, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(n_1, m_1 - 1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\kappa$ .

Если в момент поступления пополнения уровень запасов  $m_1 = \overline{r + 1, s}$ , то происходит переход в состояние  $(n_1, S) \in E$  с интенсивностью  $\nu_1$ .

Если в момент поступления пополнения уровень запасов  $m_1 = \overline{0, r}$ , то происходит переход в состояние  $(n_1, S) \in E$  с интенсивностью  $\nu_2$ .

Таким образом, положительные элементы генератора изучаемой 2-D МС определяются так:

$$q((n_1, m_1), (n_2, m_2)) = \begin{cases} \lambda\phi_1, & \text{если } n_2 = n_1 + 1, \quad m_2 = m_1 = 0, \\ \lambda, & \text{если } n_2 = n_1 + 1, \quad m_2 = m_1 > 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{если } n_2 = n_1 - 1, \quad m_2 = m_1 > 0, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{если } n_2 = n_1 - 1, \quad m_2 = m_1 - 1, \\ \kappa, & \text{если } n_2 = n_1, \quad m_1 > 0, \quad m_2 = m_1 - 1, \\ \tau, & \text{если } n_1 > 0, \quad n_2 = n_1 - 1, \quad m_2 = m_1 = 0, \\ \nu_1, & \text{если } n_2 = n_1, \quad r < m_1 \leq s, \quad m_2 = S, \\ \nu_2, & \text{если } n_2 = n_1, \quad 0 \leq m_1 \leq r, \quad m_2 = S. \end{cases} \quad (2.1)$$

Исходя из соотношений (2.1) заключаем, что полученная 2-D МС представляет собой не зависящий от уровня квази процесс размножения и гибели (level independent quasi-birth-death process (LIQBD)). Перенумеровав состояния данной 2-D МС лексикографическим способом

(т.е. они нумеруются, согласно порядку  $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, S), (1, 0), (1, 1), \dots, (1, S), \dots$ ), заключаем, что генератор полученной LIQBD представляется следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} B & A_0 & O & O & O & \dots \\ A_2 & A_1 & A_0 & O & O & \dots \\ O & A_2 & A_1 & A_0 & O & \dots \\ O & O & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $O$  означает нулевую квадратную матрицу размерности  $S + 1$ , а блочные матрицы  $B = \|b_{ij}\|, A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|, k = 0, 2, i, j = \overline{0, S}, B = \|b_{ij}\|$ , являются квадратными с той же размерностью, где их ненулевые элементы определяются как:

$$b_{ij} = \begin{cases} v_2, & \text{если } 0 \leq i \leq r, \quad j = S, \\ v_1, & \text{если } r < i \leq s, \quad j = S, \\ \kappa, & \text{если } 0 < i \leq S, \quad j = i - 1, \\ -(v_2 + \lambda\varphi_1), & \text{если } i = j = 0, \\ -(v_2 + \kappa + \lambda), & \text{если } 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(v_1 + \kappa + \lambda), & \text{если } r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda), & \text{если } s < i \leq S, \quad i = j; \end{cases} \quad (2.3)$$

$$a_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \lambda\varphi_1, & \text{если } i = j = 0, \\ \lambda, & \text{если } i > 0, \quad i = j; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} v_2, & \text{если } 0 \leq i \leq r, \quad j = S, \\ v_1, & \text{если } r < i \leq s, \quad j = S, \\ \kappa, & \text{если } 0 < i \leq S, \quad j = i - 1, \\ -(\tau + v_2 + \lambda\varphi_1), & \text{если } i = j = 0, \\ -(v_2 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если } 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(v_1 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если } r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{если } s < i \leq S, \quad i = j; \end{cases} \quad (2.5)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \tau, & \text{если } i = j = 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{если } i > 0, \quad i = j, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{если } i > 0, \quad j = i - 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Т е о р е м а 1.** При использовании  $(s, S)$ -политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$\lambda(1 - (1 - \varphi_1)\pi(0)) < \tau\pi(0) + (\mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)(1 - \pi(0)), \quad (2.7)$$

где

$$\pi(0) = (1 + a_2)^{-r} (1 + a_2((1 + a_1)^{s-r} - 1 + (S - s)(1 + a_1)^{s-r-1}))^{-1};$$

$$a_k = \frac{v_k}{\mu_2\sigma_2 + \kappa}, \quad k = 1, 2.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Стационарное распределение, которое соответствует генератору  $A = A_0 + A_1 + A_2$ , обозначим через  $\pi = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(S))$ . Величины  $\pi(m)$  представляют собой вероятности того, что уровень запасов равен  $m, m = \overline{0, S}$ . Эти величины находятся из следующей системы уравнений равновесия (СУР):

$$\pi A = 0, \quad \pi e = 1, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{0}$  – нулевая вектор-строка размерности  $S + 1$  и  $\mathbf{e}$  – вектор-столбец размерности  $S + 1$ , все компоненты которых равны единице.

Из соотношений (2.4)–(2.6) заключаем, что ненулевые элементы генератора  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $i, j = \overline{0, S}$  определяются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} -v_2, & \text{если } i = j = 0, \\ v_2, & \text{если } 0 \leq i \leq r, \quad j = S, \\ v_1, & \text{если } r < i \leq s, \quad j = S, \\ \mu_2 \sigma_2 + \kappa, & \text{если } i > 0, \quad j = i - 1, \\ -(\mu_2 \sigma_2 + \kappa + v_2), & \text{если } 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(\mu_2 \sigma_2 + \kappa + v_1), & \text{если } r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\mu_2 \sigma_2 + \kappa), & \text{если } i > s, \quad i = j. \end{cases} \quad (2.9)$$

На основе соотношений (2.9) заключаем, что СУР (2.8) имеет следующий явный вид:

$$(v_2 + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)(1 - \delta_{m,0}))\pi(m) = (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m + 1), \quad m = \overline{0, r}; \quad (2.10)$$

$$(v_1 + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m)) = (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m + 1), \quad m = \overline{r + 1, s}; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m) &= (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m + 1)(1 - \delta_{m,S}) + \\ &+ \left( v_1 \sum_{k=0}^r \pi(k) + v_2 \sum_{k=r+1}^s \pi(k) \right) \delta_{m,S}, \quad m = \overline{s + 1, S}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и далее  $\delta_{x,y}$  обозначают символы Кронекера. Из СУР (2.10)–(2.12) с применением метода, предложенного в [22], находим, что величины  $\pi(m)$ ,  $m = \overline{1, S}$  выражаются через  $\pi(0)$  следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} \alpha_m \pi(0), & \text{если } 1 \leq m \leq r, \\ \beta_m \pi(0), & \text{если } r + 1 \leq m \leq s, \\ \beta_s \pi(0), & \text{если } s + 1 \leq m \leq S, \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $\alpha_m = a_2(1 + a_2)^{m-1}$ ,  $\beta_m = a_2(1 + a_2)^r(1 + a_1)^{m-(r+1)}$ .

Величина  $\pi(0)$  определяется из условия нормировки, т.е.  $\pi(0) + \pi(1) + \dots + \pi(S) = 1$ . Тогда с учетом соотношений (2.13) после выполнения простых преобразований получаем, что  $\pi(0)$  находится с помощью формулы, указанной в (2.7).

Из [21, с. 81–83] заключаем, что изучаемый LIQBD является эргодичным тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$\pi A_0 e < \pi A_2 e. \quad (2.14)$$

Таким образом, с учетом соотношений (2.4), (2.6) и (2.14) после выполнения определенных преобразований из (2.14) получим, что соотношение (2.7) верно.

**З а м е ч а н и е 1.** Условие эргодичности (2.7) имеет следующий вероятностный смысл: взвешенная общая интенсивность поступления заявок в систему должна быть меньше, чем взвешенная общая интенсивность ухода заявок из системы. Условие (2.7) может быть заменено грубым, но в то же время легко проверяемым условием  $\lambda < \min(\tau, \mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В частном случае, когда  $\phi_1 = 0$  ( $c$ -заявки не присоединяются в очередь, если уровень запасов равен нулю) и  $\tau = 0$  ( $c$ -заявки в очереди являются терпеливыми даже тогда, когда уровень запасов равен нулю) из (2.7) при  $\sigma_2 = 0$  ( $c$ -заявки не получают запасы, т.е. они требуют лишь обслуживания в сервере) находим классическое условие эргодичности одноканальной марковской системы обслуживания, т.е.  $\lambda < \mu_1$ . Этот факт является вполне ожидаемым, так как при указанных допущениях относительно значений исходных данных изучаемая система превращается классическую СМО типа М/М/1/∞. Интересным оказывается следующий результат: если положить  $\sigma_2 = 1$  (все  $c$ -заявки получают запасы), то находим, что при  $\phi_1 = 0$  и  $\tau = 0$  имеем  $\lambda < \mu_2$ , т.е. при таких допущениях условие эргодичности системы не зависит от размера склада системы ( $S$ ), а также от интенсивности разрушающих заявок ( $\kappa$ ) и от интенсивностей пополне-

ний из различных источников  $(v_1, v_2)$ . Аналогичные результаты, для похожих моделей с одним источником поставок получены в [23, 24].

Стационарное распределение, соответствующее генератору  $G$ , обозначим через  $p = (p_0, p_1, p_2, \dots)$ , где  $p_n = (p(n, 0), p(n, 1), \dots, p(n, S))$ . Согласно известному алгоритму для LIQBD (см. [21, с. 81–83]), заключаем, что при выполнении условия эргодичности (2.7) искомое стационарное распределение определяется как

$$p_n = p_0 R^n, \quad n \geq 1, \tag{2.15}$$

где  $R$  является неотрицательным и минимальным решением следующего квадратичного матричного уравнения:

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0. \tag{2.16}$$

Вероятности  $p_0$  граничных состояний вычисляются из СУР:

$$p_0(B + R A_2) = 0, \tag{2.17}$$

$$p_0(I - R)^{-1} e = 1, \tag{2.18}$$

где  $I$  обозначает единичную матрицу размерности  $S + 1$ .

**3. Расчет вероятностей состояний системы при использовании  $(s, Q)$ -политики.** Пространство состояний данной модели также задается с помощью множества  $E$ , но здесь элементы генератора  $\tilde{G}$  соответствующего LIQBD вычисляются так:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & A_0 & O & O & O & \dots \\ A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & O & O & \dots \\ O & A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & O & \dots \\ O & O & A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Ненулевые элементы матриц  $\tilde{B}$  и  $\tilde{A}_1$  рассчитываются следующим образом:

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} v_2, & \text{если } 0 \leq i \leq r, \quad j = i + S - s, \\ v_1, & \text{если } r < i \leq s, \quad j = i + S - s, \\ \kappa, & \text{если } 0 < i \leq S, \quad j = i - 1, \\ -(v_2 + \lambda \varphi_1), & \text{если } i = j = 0, \\ -(v_2 + \kappa + \lambda), & \text{если } 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(v_1 + \kappa + \lambda), & \text{если } r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda), & \text{если } s < i \leq S, \quad i = j; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} v_2, & \text{если } 0 \leq i \leq r, \quad j = i + S - s, \\ v_1, & \text{если } r < i \leq s, \quad j = i + S - s, \\ \kappa, & \text{если } 0 < i \leq S, \quad j = i - 1, \\ -(\tau + v_2 + \lambda \varphi_1), & \text{если } i = j = 0, \\ -(v_2 + \kappa + \lambda + \mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2), & \text{если } 0 < i \leq r, \quad i = j, \\ -(v_1 + \kappa + \lambda + \mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2), & \text{если } r < i \leq s, \quad i = j, \\ -(\kappa + \lambda + \mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2), & \text{если } s < i \leq S, \quad i = j. \end{cases} \tag{3.3}$$

**Т е о р е м а 2.** При использовании  $(s, Q)$ -политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (2.7), где величина  $\pi(0)$  определяется как

$$\pi(0) = \left( 1 + \sum_{m=1}^r \alpha_m + \sum_{m=r+1}^s \beta_m + (S - 2s)\beta_s + \sum_{m=S-s+1}^S \eta_m \right)^{-1}, \tag{3.4}$$

где

$$\eta_m = \frac{1}{\mu_2 \sigma_2 + \kappa} \sum_{i=m-S+s}^s \chi_i x_i, \quad m = \overline{S-s+1, S}; \quad \chi_i = \begin{cases} \alpha_i, & 1 \leq i \leq r, \\ \beta_i, & r+1 \leq i \leq s; \end{cases} \quad x_i = \begin{cases} v_2, & 1 \leq i \leq r, \\ v_1, & r+1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

**Доказательство.** Ненулевые элементы генератора  $\tilde{A} = A_0 + \tilde{A}_1 + A_2$  задаются так:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} -v_2, & \text{если } i = j = 0, \\ v_2, & \text{если } 0 \leq i \leq r, \quad j = i + S - s, \\ v_1, & \text{если } r < i \leq s, \quad j = i + S - s, \\ \mu_2 \sigma_2 + \kappa, & \text{если } i > 0, \quad j = i - 1, \\ -(\mu_2 \sigma_2 + \kappa + v_2), & \text{если } 0 < i \leq r, \quad j = i, \\ -(\mu_2 \sigma_2 + \kappa + v_1), & \text{если } r < i \leq s, \quad j = i, \\ -(\mu_2 \sigma_2 + \kappa), & \text{если } i > s, \quad i = j. \end{cases} \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.5) заключаем, что при использовании данной ППЗ балансовые уравнения для состояний  $m, m = \overline{0, r}$  и  $m, m = \overline{r+1, s}$ , совпадают с уравнениями (2.10) и (2.11), соответственно. Однако в данной политике балансовые уравнения для состояний  $m, m = \overline{s+1, S}$ , имеют следующий вид:

$$(\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m+1), \quad m = \overline{s+1, S-s-1}; \quad (3.6)$$

$$(\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m+1) + v_2 \pi(m-S+s), \quad m = \overline{S-s, S-s+r}; \quad (3.7)$$

$$(\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m) = (\mu_2 \sigma_2 + \kappa)\pi(m+1) + v_1 \pi(m-S+s), \quad m = \overline{S-s+r+1, S}. \quad (3.8)$$

Используя описанный выше метод решения СУР (2.10)–(2.12), находим, что неизвестные величины  $\pi(m), m = \overline{1, S}$ , выражаются через величины  $\pi(0)$  следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} \alpha_m \pi(0), & \text{если } 1 \leq m \leq r, \\ \beta_m \pi(0), & \text{если } r+1 \leq m \leq s, \\ \beta_s \pi(0), & \text{если } s+1 \leq m \leq S-s, \\ \eta_m \pi(0), & \text{если } S-s+1 \leq m \leq S. \end{cases} \quad (3.9)$$

Значения  $\pi(0)$  вычисляется с помощью условия нормировки, т.е. эта величина определяется из (3.4). С учетом соотношений (3.9) после выполнения определенных преобразований из (2.14) получаем, что теорема 2 верна.

Далее стационарное распределение исходной модели определяется с помощью СУР (2.17), (2.18), где  $B$  заменяется на  $\tilde{B}$ , а  $A_1$  заменяется на  $\tilde{A}_1$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Из теорем 1 и 2 заключаем, что в изучаемой системе условие эргодичности зависит не только от интенсивностей поступления и обслуживания расходуемых заявок, но и от размера склада системы, интенсивности разрушающих заявок, политик пополнения запасов и времен их пополнения из различных источников.

**4. Расчет операционных характеристик системы.** При использовании обеих ППЗ усредненные операционные характеристики исследуемой системы находятся через вероятности состояний системы следующим образом:

средний уровень запасов на складе ( $S_{av}$ ) с помощью обеих ППЗ

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^{\infty} p(n, m); \quad (4.1)$$

средний объем поставок от Источника- $i, i = 1, 2$ , при использовании ( $s, S$ )-политики ( $V_{av}(i)$ )

$$V_{av}(1) = \sum_{m=r+1}^s (S-m) \sum_{n=0}^{\infty} p(n, m); \quad V_{av}(2) = \sum_{m=0}^r (S-m) \sum_{n=0}^{\infty} p(n, m); \quad (4.2)$$

средний объем поставок от Источника- $i$ ,  $i = 1, 2$ , при использовании  $(s, Q)$ -политики

$$V_{av}(1) = (S - s) \sum_{m=r+1}^s \sum_{n=0}^{\infty} p(n, m); \quad V_{av}(2) = (S - s) \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^{\infty} p(n, m); \quad (4.3)$$

среднее число  $c$ -заявок в системе ( $L_{av}$ )

$$L_{av} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^S p(n, m); \quad (4.4)$$

средняя интенсивность уничтожения запасов системы ( $DRS$ ):

$$DRS = \kappa \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p(n, 0) \right); \quad (4.5)$$

средняя интенсивность обычных заказов ( $RR_1$ ):

$$RR_1 = \kappa p(0, s + 1) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} p(n, s + 1); \quad (4.6)$$

средняя интенсивность экстренных заказов ( $RR_2$ ):

$$RR_2 = \kappa p(0, r + 1) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} p(n, r + 1). \quad (4.7)$$

**З а м е ч а н и е 4.** Средняя интенсивность экстренных заказов равна средней интенсивности аннулирования (rate of cancellation (RC)) обычных заказов.

Вероятность потери заявок  $c$ -заявок ( $PL$ ):

$$PL = \phi_2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n, 0) + \frac{\tau}{\tau + \lambda \phi_1 + \nu_2} \sum_{n=1}^{\infty} p(n, 0). \quad (4.8)$$

В последней формуле первое слагаемое суммы оценивает вероятность потери  $c$ -заявок при их поступлении в систему при условии, что в этот момент уровень запасов равен нулю, а второе – вероятность потери этих заявок из-за их нетерпеливости в очереди при условии, что до момента начала их обслуживания уровень запасов опускается до нулевого значения.

**5. Численные результаты.** Одна из целей выполнения вычислительных экспериментов заключается в изучении поведения операционных характеристик (4.1)–(4.8) относительно изменения значений ее исходных параметров при использовании различных ППЗ.

Результаты некоторых вычислительных экспериментов для гипотетической модели, которые показывают влияние изменений значений исходных параметров системы на характеристики (4.1)–(4.8), даны в табл. 1–8, где в каждом столбце верхняя строка соответствует  $(s, S)$ -политике, а нижняя –  $(s, Q)$ -политике пополнения запасов. Во всех экспериментах значения вероятностей  $\phi_k$  и  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2$ , фиксируются, т.е. считается, что  $\phi_1 = 0.6$  и  $\sigma_1 = 0.4$ . Кроме того, в табл. 1–7 принимается, что  $S = 22$ ,  $s = 10$ ,  $r = 5$ , а в табл. 8 –  $S = 27$ ,  $r = 4$ . Значения остальных параметров указаны после названия каждой таблицы.

В результате анализа данных указанных таблиц можно сделать выводы о поведении операционных характеристик (4.1)–(4.8). Отметим, что часть выводов являются общими, а некоторые из них верны лишь для выбранных значений исходных данных модели.

Как и следовало ожидать, с ростом интенсивности  $c$ -заявок уменьшается средний уровень запасов системы при использовании обеих ППЗ, при этом скорости изменения их значений являются малыми (табл. 1). Так, например, при увеличении интенсивности  $c$ -заявок на 40% уровень запасов уменьшается всего на 2%. Кроме того, для фиксированных значений интенсивности  $c$ -заявок при использовании  $(s, S)$ -политики средний уровень запасов системы оказывается больше, чем при использовании  $(s, Q)$ -политики. Последний результат соответствует теоретическим ожиданиям, так как с помощью  $(s, S)$ -политики средний объем поставок больше, чем при использовании  $(s, Q)$ -политики. Аналогичная картина наблюдается при росте интенсивности  $d$ -заявок (табл. 2). Как и следовало ожидать, увеличение интенсивности обслуживания  $c$ -заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, почти не влияет на значения этой характеристики (табл. 3). Подобная ситуация имеет место при росте интенсивности

**Таблица 1.** Влияние изменения параметра  $\lambda$  на характеристики системы;  $\kappa = 10, \mu_1 = 35, \mu_2 = 25, \tau = 20, v_1 = 5, v_2 = 10$ 

$\lambda$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
20	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
21	2.4146	0.8040	14.4483	2.6650	9.9344	1.3518	0.4628	0.1116
	2.7241	0.6584	13.0320	2.6178	9.9169	1.7235	0.5885	0.1403
22	2.4327	0.8364	14.4111	3.1345	9.9293	1.3764	0.4812	0.1285
	2.7551	0.6894	12.9636	3.1322	9.9094	1.7648	0.6169	0.1646
23	2.4538	1.8765	14.3659	3.9020	9.9229	1.4062	0.5039	0.1517
	2.7851	0.7207	12.8957	3.8170	9.9016	1.8060	0.6455	0.1922
24	2.4723	0.9135	14.3247	4.9088	9.9167	1.4334	0.5248	0.1756
	2.8168	0.7555	12.8217	4.8906	9.8925	1.8511	0.6774	0.2264
25	2.4896	0.9505	14.2841	6.4168	9.9103	1.4601	0.5456	0.1991
	2.8419	0.7843	12.7615	6.2038	9.8843	1.8879	0.7038	0.2577
26	2.5044	0.9836	14.2483	8.5961	9.9045	1.4837	0.5642	0.2282
	2.8688	0.8164	12.6959	8.5751	9.8759	1.9286	0.7333	0.2964
27	2.5218	1.0247	14.2043	14.0662	9.8970	1.5126	0.5873	0.2638
	2.8975	0.8524	12.6223	14.0850	9.8656	1.9736	0.7663	0.3440
28	2.5369	1.0623	14.1645	30.2622	9.8899	1.5388	0.6084	0.2998
	2.9194	0.8812	12.5649	26.7314	9.8571	2.0091	0.7927	0.3865

**Таблица 2.** Влияние изменения параметра  $\kappa$  на характеристики системы;  $\kappa = 20, \mu_1 = 35, \mu_2 = 25, \tau = 20, v_1 = 5, v_2 = 10$ 

$\kappa$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
10	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.4030	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
11	2.4314	0.8341	14.4138	2.2176	10.9227	1.3747	0.4799	0.1100
	2.7531	0.6874	12.9680	2.2163	10.9009	1.7622	0.6150	0.1409
12	2.4679	0.9047	14.3345	2.2168	11.9018	1.4270	0.5198	0.1280
	2.8103	0.7483	12.8369	2.2152	11.8733	1.8418	0.6708	0.1652
13	2.5012	0.9764	14.2561	2.2160	12.8775	1.4786	0.5602	0.1475
	2.8637	0.8103	12.7077	2.2141	12.8409	1.9209	0.7276	0.1915
14	2.5314	1.0490	14.1790	2.2151	13.8940	1.5295	0.6010	0.1683
	2.9135	0.8732	12.5804	2.2129	13.8032	1.9994	0.7854	0.2199
15	2.5589	1.1224	14.1027	2.2142	14.8174	1.5797	0.6420	0.1905
	2.9600	0.9371	12.4549	2.2117	14.7605	2.0774	0.8440	0.2503
16	2.584	1.1965	14.0227	2.2132	15.7810	1.6293	0.6832	0.2140
	3.0032	1.0017	12.3311	2.2103	15.7108	2.1547	0.9033	0.2828
17	2.6067	1.2728	13.9529	2.2122	16.7407	1.6782	0.7246	0.2387
	3.0435	1.0669	12.2090	2.2089	16.6554	2.2314	0.9632	0.3171
18	2.6272	1.3465	13.8793	2.2111	17.6956	1.7265	0.7662	0.2647
	3.0810	1.1328	12.0886	2.2073	17.5934	2.3074	1.0237	0.3534

обслуживания  $s$ -заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, почти не влияет на значения этой характеристики (табл. 4). Так, например, при увеличении интенсивности  $s$ -заявок на 40% уровень запасов уменьшается всего на 1%. Значения изучаемой

**Таблица 3.** Влияние изменения параметра  $\mu_1$  на характеристики системы;  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\mu_1 = 35$ ,  $\mu_2 = 25$ ,  $\tau = 20$ ,  $v_1 = 5$ ,  $v_2 = 10$

$\mu_1$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
35	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
36	2.3849	0.7540	14.5060	2.1154	9.9418	1.3133	0.4344	0.0899
	2.6829	0.6195	13.1200	2.1235	9.9259	1.6708	0.5529	0.1147
37	2.3796	0.7456	14.5166	2.0381	9.9431	1.3068	0.4296	0.0872
	2.6742	0.6115	13.1384	2.0374	9.9277	1.6598	0.5456	0.1108
38	2.3733	0.7356	14.5280	1.9510	9.9445	1.2989	0.4239	0.0841
	2.6655	0.6037	13.1563	1.9581	9.9294	1.6491	0.5385	0.1070
39	2.3680	0.7276	14.5379	1.8851	9.9456	1.2927	0.4194	0.0817
	2.6571	0.5962	13.1738	1.8846	9.9311	1.6387	0.5316	0.1035
40	2.3626	0.7191	14.5482	1.8168	9.9468	1.2859	0.4145	0.0791
	2.6487	0.5888	13.1909	1.8165	9.9327	1.6285	0.5249	0.1002
41	2.3571	0.7107	14.5580	1.7533	9.9480	1.2792	0.4097	0.0767
	2.6405	0.5817	13.2076	1.7531	9.9342	1.6186	0.5184	0.0971
42	2.3510	0.7018	14.5690	1.6880	9.9492	1.2721	0.4046	0.0742
	2.6325	0.5748	13.2239	1.6939	9.9357	1.6089	0.5121	0.0941
43	2.3463	0.6947	14.5776	1.6388	9.9502	1.2666	0.4006	0.0722
	2.6246	0.5681	13.2399	1.6387	9.9371	1.5995	0.5059	0.0912

**Таблица 4.** Влияние изменения параметра  $\mu_2$  на характеристики системы;  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\mu_1 = 40$ ,  $\tau = 20$ ,  $v_1 = 5$ ,  $v_2 = 10$

$\mu_2$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
20	2.3104	0.6447	14.6397	2.4956	9.9568	1.2256	0.3720	0.0695
	2.5741	0.5268	13.3392	2.4760	9.9455	1.5408	0.4683	0.0875
21	2.3222	0.6607	14.6198	2.3220	9.9547	1.2387	0.3811	0.0716
	2.5894	0.5390	13.3095	2.3211	9.9431	1.5583	0.4794	0.0900
22	2.3332	0.6761	14.6007	2.1710	9.9527	1.2516	0.3899	0.0736
	2.6055	0.5521	13.2779	2.1703	9.9404	1.5770	0.4914	0.0927
23	2.3436	0.6909	14.5824	2.0385	9.9507	1.2633	0.3984	0.0755
	2.6107	0.5648	13.2476	2.0379	9.9378	1.5949	0.5029	0.0953
24	2.3543	0.7066	14.5632	1.9103	9.9486	1.2759	0.4074	0.0775
	2.6365	0.5782	13.2158	1.9090	9.9350	1.6137	0.5152	0.0980
25	2.3626	0.7191	14.5480	1.8168	9.9468	1.2859	0.4145	0.0791
	2.6487	0.5888	13.1909	1.8165	9.9327	1.6285	0.5249	0.1002
26	2.3713	0.7324	14.5321	1.7232	9.9449	1.2965	0.4221	0.0809
	2.6617	0.6003	13.1643	1.7229	9.9302	1.6444	0.5353	0.1026
27	2.3796	0.7453	14.5166	1.6387	9.9431	1.3066	0.4294	0.0825
	2.6740	0.6114	13.1388	1.6386	9.9277	1.6596	0.5455	0.1048
28	2.3874	0.7578	14.5010	1.5622	9.9413	1.3164	0.4366	0.0841
	2.6857	0.6221	13.1142	1.5621	9.9253	1.6743	0.5552	0.1070

характеристики (4.1) почти не зависит от степени нетерпеливости  $c$ -заявок в очереди. Например, при увеличении указанного параметра на 40% значения уровня запасов меняются лишь в третьем знаке после десятичной точки (табл. 5). С уменьшением среднего времени поставки от

**Таблица 5.** Влияние изменения параметра  $\tau$  на характеристики системы;  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\mu_1 = 35$ ,  $\mu_2 = 25$ ,  $v_1 = 5$ ,  $v_2 = 10$ 

$\tau$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
20	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
21	2.3912	0.7645	14.4945	2.2169	9.9403	1.3215	0.4404	0.0920
	2.6918	0.6276	13.1013	2.2154	9.9241	1.6819	0.5603	0.1171
22	2.3911	0.7645	14.4947	2.2155	9.9403	1.3214	0.4403	0.0907
	2.6917	0.6275	13.1015	2.2137	9.9241	1.6818	0.5602	0.1153
23	2.3910	0.7644	14.4950	2.2143	9.9403	1.3213	0.4403	0.0894
	2.6916	0.6274	13.1017	2.2120	9.9241	1.6816	0.5601	0.1135
24	2.3090	0.7643	14.4952	2.2131	9.9403	1.3213	0.4403	0.0881
	2.6915	0.6273	13.1019	2.2104	9.9241	1.6815	0.5600	0.1118
25	2.3908	0.7643	14.4955	2.2119	9.9403	1.3212	0.4402	0.0868
	2.6914	0.6272	13.1020	2.2090	9.9241	1.6814	0.5600	0.1102
26	2.3907	0.7642	14.4957	2.2108	9.9403	1.3211	0.4402	0.0856
	2.6913	0.6271	13.1022	2.2077	9.9242	1.6813	0.5599	0.1087
27	2.3906	0.7642	14.4959	2.2097	9.9403	1.3210	0.4402	0.0843
	2.6912	0.6270	13.1023	2.2064	9.9242	1.6812	0.5598	0.1071
28	2.3905	0.7641	14.4961	2.2087	9.9403	1.3210	0.4401	0.0831
	2.6911	0.6270	13.1024	2.2051	9.9242	1.6810	0.5597	0.1056

**Таблица 6.** Влияние изменения параметра  $v_1$  на характеристики системы;  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\mu_1 = 35$ ,  $\mu_2 = 25$ ,  $\tau = 20$ ,  $v_2 = 20$ 

$v_1$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
5	2.4455	0.3899	14.7645	2.2217	9.9926	1.3516	0.4504	0.0166
	2.7102	0.3278	13.4468	2.2216	9.9907	1.6937	0.5645	0.0208
6	2.2522	0.3281	14.9288	2.2218	9.9938	1.3803	0.3791	0.0139
	2.4575	0.2702	13.7598	2.2217	9.9924	1.6940	0.4652	0.0171
7	2.0816	0.2773	15.0708	2.2218	9.9947	1.4054	0.3204	0.0118
	2.2423	0.2243	14.0230	2.2218	9.9937	1.6942	0.3862	0.0142
8	1.9306	0.2353	15.1940	2.2219	9.9955	1.4274	0.2719	0.0100
	2.0575	0.1874	14.2464	2.2218	9.9947	1.6944	0.3227	0.0118
9	1.7965	0.2005	15.3013	2.2219	9.9962	1.4468	0.2317	0.0085
	1.8975	0.1576	14.4375	2.2219	9.9955	1.6946	0.2714	0.0100
10	1.6771	0.1716	15.3952	2.2220	9.9967	1.4639	0.1983	0.0073
	1.7452	0.1311	14.6175	2.2219	9.9963	1.6947	0.2258	0.0083
11	1.5704	0.1474	15.4776	2.2220	9.9972	1.4792	0.1703	0.0062
	1.6359	0.1133	14.7454	2.2220	9.9968	1.6948	0.1952	0.0072
12	1.4747	0.1272	15.5503	2.2220	9.9976	1.4927	0.1469	0.0054
	1.5280	0.0969	14.8705	2.2220	9.9972	1.6949	0.1668	0.0061
13	1.3886	0.1101	15.6148	2.2220	9.9979	1.5049	0.1272	0.0046
	1.4323	0.0832	14.9806	2.2220	9.9976	1.6949	0.1433	0.0052

Источника-1 (Источника-2) увеличивается средний уровень запасов системы, при этом увеличение среднего времени от Источника-2 очень мало влияет на скорости изменения рассматриваемой характеристики (табл. 6 и 7). С ростом критического уровня запасов (т.е.  $s$ ) увеличивается

**Таблица 7.** Влияние изменения параметра  $v_2$  на характеристики системы;  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\mu_1 = 35$ ,  $\mu_2 = 25$ ,  $\tau = 20$ ,  $v_1 = 5$

$v_2$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	DRS	$RR_1$	$RR_2$	PL
10	2.3914	0.7646	14.4942	2.2183	9.9403	1.3216	0.4404	0.0934
	2.6919	0.6278	13.1012	2.2172	9.9240	1.6821	0.5604	0.1188
11	2.4011	0.6966	14.5442	2.2191	9.9536	1.3269	0.4422	0.0757
	2.6966	0.5744	13.1642	2.2183	9.9412	1.6851	0.5615	0.0961
12	2.4092	0.6400	14.5857	2.2198	9.9635	1.3314	0.4437	0.0620
	2.7001	0.5296	13.2167	2.2192	9.9538	1.6873	0.5622	0.0786
13	2.4161	0.5921	14.6206	2.2203	9.9710	1.3353	0.4450	0.0513
	2.7027	0.4914	13.2611	2.2198	9.9633	1.6889	0.5628	0.0649
14	2.4221	0.5510	14.6503	2.2207	9.9767	1.3386	0.4461	0.0428
	2.7049	0.4555	13.3026	2.2203	9.9712	1.6903	0.5633	0.0531
15	2.4272	0.5154	14.6760	2.2209	9.9811	1.3414	0.4470	0.0360
	2.7062	0.4298	13.3320	2.2206	9.9760	1.6912	0.5636	0.0454
16	2.4318	0.4841	14.6983	2.2212	9.9846	1.3440	0.4479	0.0305
	2.7074	0.4046	13.3608	2.2209	9.9806	1.6920	0.5638	0.0384
17	2.4358	0.4562	14.7179	2.2213	9.9873	1.3462	0.4486	0.0259
	2.7084	0.3822	13.3861	2.2211	9.9840	1.6926	0.5640	0.0326
18	2.4394	0.4319	14.7352	2.2215	9.9895	1.3482	0.4493	0.0222
	2.7091	0.3621	13.4086	2.2213	9.9868	1.6930	0.5642	0.0279

**Таблица 8.** Влияние изменения параметра  $s$  на характеристики системы;  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\mu_1 = 35$ ,  $\mu_2 = 25$ ,  $\tau = 20$ ,  $v_1 = 5$

$s$	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	$S_{av}$	$L_{av}$	RDC	$RR_1$	$RR_2$	PL
8	2.1654	0.8375	16.2053	2.2171	9.9232	0.9152	0.3799	0.1202
	2.3578	0.7537	14.8139	2.2163	9.9110	1.0609	0.4404	0.1393
9	2.4813	0.6985	16.5862	2.2180	9.9359	0.9509	0.3169	0.1002
	2.6918	0.6058	15.1313	2.2172	9.9244	1.1214	0.3737	0.1182
10	2.7407	0.5843	16.9805	2.2187	9.9464	0.9910	0.2651	0.0839
	2.9607	0.4869	15.4854	2.2180	9.9357	1.1888	0.3180	0.1006
11	2.9542	0.4904	17.3856	2.2192	9.9550	1.0361	0.2225	0.0704
	3.1771	0.3912	15.8689	2.2186	9.9451	1.2643	0.2714	0.0858
12	3.1304	0.4129	17.7989	2.2197	9.9621	1.0867	0.1873	0.0592
	3.3513	0.3142	16.2760	2.2191	9.9529	1.3497	0.2326	0.0736
13	3.2761	0.3488	18.2182	2.2201	9.9680	1.1436	0.1582	0.0500
	3.4914	0.2524	16.7020	2.2195	9.9595	1.4471	0.2002	0.0633

средний уровень запасов при использовании обеих ППЗ (табл. 8). Этот факт соответствует теоретическим ожиданиям, так как с увеличением указанного параметра увеличиваются поставки запасов от различных источников.

С ростом интенсивности  $s$ -заявок увеличиваются средние объемы поставок от обоих Источников с помощью каждой ППЗ (табл. 1). Этот результат соответствует теоретическим ожиданиям, так как при этом уровень запасов системы часто опускается до критических значений  $s$  и  $r$ . Для фиксированных значений интенсивности  $s$ -заявок средний объем поставок от медленного Источника оказывается меньше при использовании  $(s, S)$ -политики; обратная картина наблюдается при снабжении от быстрого Источника, т.е. для фиксированных значений интенсивности  $s$ -заявок, средний объем поставок от быстрого Источника оказывается меньше с помощью

( $s, Q$ )-политики. Аналогичная картина наблюдается при росте интенсивности  $d$ -заявок (табл. 2). Однако с ростом интенсивности обслуживания  $c$ -заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, уменьшаются средние объемы поставок от обоих Источников при использовании каждой ППЗ (табл. 3). Следует отметить, что этот параметр почти не влияет на значения поставок из различных источников. Обратная картина наблюдается при росте интенсивности обслуживания  $c$ -заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, т.е. при увеличении этого параметра увеличиваются средние объемы поставок от обоих Источников при помощи каждой ППЗ (табл. 4). Этого следовало ожидать, так как после завершения обслуживания таких заявок уровень запасов системы уменьшается. Здесь также скорость изменения значений отмеченных характеристик оказывается очень малая. Увеличения степени нетерпеливости  $c$ -заявок в очереди приводят к уменьшению изучаемых характеристик (4.2) и (4.3), так как уход  $c$ -заявок из очереди как минимум не приводит к уменьшению уровня запасов системы; при этом скорость изменения значений характеристик (4.2) и (4.3) ничтожно малая (табл. 5). С уменьшением времени поставки от Источника-1 уменьшаются средние объемы поставок от обоих Источников при использовании каждой ППЗ, при этом скорости изменения значений этих характеристик оказываются достаточно высокими, т.е. увеличивается интенсивность поставок, но с меньшими (средними) объемами из каждого источника (табл. 6). Интересным оказывается поведение этих характеристик при уменьшении времени поставки от Источника-2, т.е. с уменьшением указанного параметра происходит увеличение среднего объема поставок от Источника-1 при обеих ППЗ; хотя скорость роста незначительная (например, при увеличении интенсивности поступления от Источника-1 на 80% средний объем поставок от Источника-1 увеличивается всего на 2%). Одновременно растет средний объем поставки от Источника-2 при обеих ППЗ, при этом скорость роста является значительной (табл. 7). Как и следовало ожидать, с ростом критического уровня запасов увеличивается средний объем поставок от обоих источников при использовании обеих ППЗ (табл. 8).

С ростом интенсивности  $c$ -заявок существенным образом увеличивается среднее число заявок в системе с помощью обеих ППЗ (см. табл. 1). Отметим, что при увеличении интенсивности  $c$ -заявок на 40% среднее число заявок в системе увеличивается почти в 15 раз. Кроме того, для фиксированных значений интенсивности  $c$ -заявок при использовании ( $s, S$ )-политики среднее число заявок в системе оказывается больше, чем с применением ( $s, Q$ )-политики. Последний результат соответствует теоретическим ожиданиям, так как при помощи ( $s, S$ )-политики средний уровень запасов в системе больше, чем при использовании ( $s, Q$ )-политики, т.е. с применением ( $s, S$ )-политики увеличивается вероятность принятия поступающих  $c$ -заявок в систему, а также уменьшается вероятность их потери из очереди из-за отсутствия запасов системы. Однако увеличение интенсивности  $d$ -заявок почти не влияет на значения этой характеристики, при этом для фиксированных значений интенсивности  $d$ -заявок при использовании ( $s, S$ )-политики среднее число заявок в системе оказывается чуть больше, чем при помощи ( $s, Q$ )-политики (табл. 2). Как и следовало ожидать, увеличение интенсивностей обслуживания  $c$ -заявок обоих типов приводят к уменьшению среднего числа заявок в системе (табл. 3 и 4). Значения характеристики (4.4) почти не зависят от степени нетерпеливости  $c$ -заявок в очереди (табл. 5), от средних времен поставки от разных источников (табл. 6 и 7), а также от критического уровня запасов (табл. 8).

Средняя интенсивность уничтожения запасов системы (4.5) является почти постоянной относительно изменений других операционных параметров (табл. 1, 3–8), за исключением изменения средней интенсивности поступления  $d$ -заявок (табл. 2). При этом для фиксированных значений остальных параметров средняя интенсивность уничтожения запасов системы оказывается чуть больше при использовании ( $s, S$ )-политики. Этот факт объясняется тем, что средний уровень запасов системы при помощи указанной политики больше, чем с применением ( $s, Q$ )-политики.

Средняя интенсивность обычных заказов является возрастающей величиной относительно изменения интенсивности  $c$ -заявок, при этом их значения при использовании ( $s, Q$ )-политики оказываются больше, чем с помощью ( $s, S$ )-политики (табл. 1). Последний факт объясняется тем, что средний уровень запасов системы при использовании ( $s, Q$ )-политики оказываются меньше, чем с применением ( $s, S$ )-политики (табл. 1). Подобная картина наблюдается для средней интенсивности экстренных заказов (табл. 1), т.е. увеличение интенсивности  $d$ -заявок также приводит к увеличению интенсивностей обычных и экстренных заказов (табл. 2). Отметим, что увеличение интенсивностей обслуживания  $c$ -заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, приводит к уменьшению интенсивностей поставок от обоих источников при помощи каждой ППЗ (табл. 3). Вместе с тем обратная картина наблюдается при

увеличении интенсивностей обслуживания  $c$ -заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, т.е. это приводит к увеличению интенсивностей поставок от обоих Источников при использовании каждой ППЗ (табл. 4). Следует отметить, что скорости изменения интенсивностей поставок от разных источников являются достаточно малыми величинами (табл. 3 и 4). Средние интенсивности обычных и экстренных заказов почти не зависят от степени нетерпеливости  $c$ -заявок (табл. 5). С уменьшением времени поставки от Источника-1 увеличивается интенсивность обычных заказов с применением обеих ППЗ. При этом скорости изменения значений этой характеристики оказываются достаточно малыми, т.е. увеличивается интенсивность поставок от медленного источника; как и следовало ожидать, при этом уменьшается интенсивность экстренных заказов (табл. 6). Интересно, что с уменьшением времени поставок от Источника-2 увеличиваются интенсивности обычных и экстренных заказов при помощи обеих ППЗ, при этом скорости изменения их значений оказываются достаточно малыми величинами (табл. 7). Отметим, что с ростом критического уровня запасов увеличиваются средние интенсивность обычных и экстренных заказов с применением обеих ППЗ, при этом значения обеих характеристик оказываются большими при использовании  $(s, Q)$ -политики (табл. 8).

Вероятность потери  $c$ -заявок является возрастающей функцией относительно увеличения их интенсивности, а также роста интенсивности  $d$ -заявок, так как с увеличением интенсивностей этих заявок увеличивается вероятность попадания системы в состояния, в которых уровень запасов равен нулю (см. формулы (4.8)). При этом ее значения при использовании  $(s, S)$ -политики оказываются меньше, чем с помощью  $(s, Q)$ -политики (табл. 1 и 2). Заметим, что последний факт имеет место при относительных изменениях всех исходных параметров системы. Увеличение интенсивности обслуживания  $c$ -заявок, которые не получают запасы системы после завершения их обслуживания, приводит к уменьшению вероятности потери  $c$ -заявок при использовании обеих ППЗ (табл. 3). Вместе с тем при увеличении интенсивности обслуживания  $c$ -заявок, которые получают запасы системы после завершения их обслуживания, приводит к росту изучаемой характеристики (табл. 4). Эти факты также являются ожидаемыми, так как получение запасов приводит к увеличению шансов опустошения склада системы, а отказ от получения запасов не меняет уровень запасов системы, при этом уменьшается длина очереди, что в конечном итоге приводит к уменьшению интенсивности  $c$ -заявок, которые уходят из очереди необслуженными. Вероятность потери  $c$ -заявок почти не зависит от степени их нетерпеливости, т.е. увеличении степени нетерпеливости почти на 50% приводит к уменьшению вероятности потери лишь на величину 0.01 (табл. 5). Рост интенсивности поступления запасов с обоих источников приводят к уменьшению вероятности потери  $c$ -заявок, при этом скорости уменьшения этой характеристики с помощью обеих ППЗ являются достаточно высокими (табл. 6 и 7). С ростом критического уровня запасов вероятности потери заявок уменьшаются с достаточно высокими скоростями при использовании обеих ППЗ (табл. 8).

Важными достоинствами предложенных здесь ППЗ является то, что в отличие от классических политик  $(s, S)$  и  $(s, Q)$  в них имеются два управляемых параметра —  $s$  (точка обычного заказа) и  $r$  (точка экстренного заказа). Это обстоятельство увеличивает возможности влияния на экономический показатель системы при использовании различных ППЗ. Исходя из этого другая цель выполнения вычислительных экспериментов заключается в изучении поведения экономических показателей системы относительно изменения значений указанных управляемых параметров при фиксированных значениях исходных параметров с применением различных ППЗ.

Для конкретности изложения, здесь экономический показатель системы определяется с помощью суммарных штрафов (total cost (TC)), которые вычисляются как:

$$TC(s, r) = \sum_{i=1}^2 (K_i + c_r(i)V_{av}(i))RR_i + c_cRR_2 + c_hS_{av} + c_dDRS + c_l\lambda PL + c_wL_{av}, \quad (5.1)$$

где  $K_i$  — фиксированная цена одного заказа от Источника- $i$ ;  $c_r(i)$  — цена единицы объема заказа от Источника- $i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $c_c$  — штрафы за аннулирование одного заказа от Источника-1;  $c_h$  — цена хранения единицы объема запасов за единицу времени;  $c_d$  — штрафы за уничтожение единицы запаса;  $c_l$  — штрафы за потери одной заявки;  $c_w$  — цена за единицу времени ожидания в очереди одной  $c$ -заявки.

**З а м е ч а н и е 5.** Для краткости записи только в левой части равенства (5.1) явно указываются аргументы функционала  $TC(s, r)$ , хотя считается, что все компоненты суммы в правой части (5.1) также являются функциями этих аргументов.

Возможны различные постановки задачи минимизации функционала (5.1). Так, одна из постановок задачи заключается в следующем: пусть фиксированы все параметры модели,

**Таблица 9.** Нахождение оптимальных значений  $r$  (а) и  $s$  (б)

(а)		(б)	
$r$	$TC$	$s$	$TC$
3	2104	6	5218
4	2070	7	5149
5	2046	8	5116
<b>6</b>	<b>2034</b>	<b>9</b>	<b>5110</b>
7	2035	10	5127
8	2049	11	5161
9	2081	12	5210
10	2137		

**Таблица 10.** Результаты решения задачи (5.2) при использовании  $(s, S)$ -политики

$r$	$s$										
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	2200	2245	2307	2390	2498	2637	2814	3038	3319	3674	4120
2	2139	2172	2222	2290	2396	2498	2650	2845	3094	3404	
3	2090	2115	2154	2211	2288	2391	2526	2701	2929		
4	2051	2070	2103	2152	2220	2314	2439	2665			
5	2023	2039	2067	2122	2176	2267	2392				
6	2005	2019	2061	2092	2159	2255					
7	<b>1998</b>	2014	2045	2095	2172						
8	2003	2024	2063	2127							
9	2023	2055	2123								
10	2063	2113									
11	2131										

кроме параметра  $r$ , т.е. задача заключается в нахождении такого значения  $r$ , чтобы минимизировать (5.1).

Некоторые результаты решения этой задачи для модели, в которой  $S = 27$ ,  $s = 12$  при использовании  $(s, S)$ -политики показаны в табл. 9 (а), где жирным шрифтом указано оптимальное значение параметра  $r$ . Здесь и далее значения исходных параметров модели и коэффициенты в функционале (5.1) выбираются следующим образом:

$$\lambda = 20, \quad \kappa = 10, \quad \mu_1 = 35, \quad \mu_2 = 25, \quad \tau = 20, \quad v_1 = 5, \quad v_2 = 10, \quad \sigma_1 = 0.4, \quad \phi_1 = 0.6;$$

$$K_1 = 100, \quad K_2 = 200, \quad c_r(1) = 50, \quad c_r(2) = 100, \quad c_c = 50, \quad c_h = 35, \quad c_d = 75, \quad c_l = 200, \quad c_w = 50.$$

В другой постановке задачи минимизации (5.1) фиксируются все параметры модели, кроме параметра  $s$ , и требуется найти такое значение  $s$ , чтобы минимизировать (5.1). Результаты решения этой задачи для модели, в которой  $S = 27$ ,  $r = 4$ , с помощью  $(s, S)$ -политики представлены в табл. 9 (б), где жирным шрифтом указано оптимальное значение параметра  $s$ .

Интересно отметить, что в обеих задачах функционал (5.1) является выпуклым, хотя строгое доказательство этого факта для любых значений параметров модели оказывается трудным из-за сложности его вида.

Аналогичным образом можно найти решения этих задач при использовании  $(s, Q)$ -политики. Эти результаты здесь не приводятся.

Теперь рассмотрим следующую постановку задачи минимизации (5.1): требуется найти такие пары оптимальных значений  $(s^*, r^*)$ , чтобы минимизировать функционал (5.1). Она формально записывается так:

$$(s^*, r^*) = \arg \min_{(s,r) \in X} TC(s, r). \quad (5.2)$$

**Таблица 11.** Результаты решения задачи (5.2) при использовании  $(s, Q)$ -политики

$r$	$s$										
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	2335	2393	2440	2545	2639	2783	2965	3179	3457	3799	4217
2	2258	2302	2352	2423	2499	2620	2756	2956	3199	3502	
3	2197	2229	2268	2325	2388	2492	2615	2786	3006		
4	2148	2172	2190	2250	2304	2387	2514	2669			
5	2111	2129	2154	2196	2247	2337	2459				
6	2085	2101	2124	2166	2220	2314					
7	<b>2072</b>	2080	2114	2161	2225						
8	2073	2086	2127	2179							
9	2096	2120	2171								
10	2134	2170									
11	2202										

Задача (5.2) всегда имеет решение, так как область допустимых решений  $X = \{(s, r): 0 < s < (S/2), 0 \leq r < s\}$  является дискретным конечным множеством.

Результаты решения задачи (5.2) для указанных выше значений исходных параметров системы при использовании различных ППЗ показаны в табл. 10 и 11, где считается, что  $S = 27$ . В этих таблицах жирным шрифтом указаны минимальные значения функционала (5.1). Так, из табл. 10 и 11 заключаем, что для выбранных исходных данных в обеих ППЗ оптимальные пары  $(s^*, r^*)$  совпадают, т.е. в обеих ППЗ имеем  $(s^*, r^*) = (12, 7)$ .

Отметим, что в обеих ППЗ при фиксированных значениях параметра  $s$  функционал (5.1) является выпуклым относительно параметра  $r$ ; при фиксированных значениях параметра  $r$  функционал (5.1) монотонно убывает относительно параметра  $s$ . Кроме того, для каждой пары  $(s, r)$  значения функционала (5.1) при использовании  $(s, Q)$ -политики оказываются больше, чем при помощи  $(s, S)$ -политики.

Заметим, что возможны и другие постановки задач нахождения оптимальных значений  $(s^*, r^*)$  с определенными ограничениями на операционные характеристики (4.1)–(4.8). Однако из-за ограничения объема статьи они здесь не рассматриваются.

**Заключение.** Предложена новая политика пополнения запасов в системах обслуживания-запасания с двумя источниками поставок, где быстрый источник является более дорогим, чем медленный источник. Рассмотрены модели с двумя известными политиками пополнения запасов – с фиксированным объемом поставок и с переменным объемом поставок. Кроме точки заказа вводится новый пороговый параметр для уровня запасов системы, который определяет момент аннулирования заказа от медленного источника и одновременно генерирования нового заказа в быстрый источник. Другая отличительная особенность изучаемых моделей состоит в том, что в системе кроме расходуемых заявок имеются и разрушающие заявки, появление которых приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов системы.

Изучается модель с бесконечным размером буфера для ожидания расходуемых заявок, которые присоединяются в очередь даже тогда, когда уровень запасов равен нулю. Вместе с тем эти заявки в очереди могут быть нетерпеливыми, когда уровень запасов опускается до нулевого уровня. Считается, что после завершения обслуживания часть заявок, согласно схеме Бернулли, либо покидает систему без получения товаров, либо получает товары. Показано, что математическими моделями этих систем при использовании предложенной политики являются двумерные цепи Маркова, которые имеют трехдиагональные генераторы. Найдены условия эргодичности

цепей и показано, что в частном случае из них получаются ранее известные результаты для подобных моделей.

В качестве дальнейших исследований в первую очередь следует направить усилия на изучение подобных моделей при более общих предположениях относительно типа поступающих заявок обоих типов, а также вида функции распределения времени обслуживания расходуемых заявок и времен выполнения заказов от различных источников.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwarz M., Daduna H.* Queuing Systems with Inventory Management with Random Lead Times and with Backordering // *Mathematical Methods of Operations Research*. 2006. V. 64. Iss. 3. P. 383–414.
2. *Schwarz M., Sauer C., Daduna H., Kulik R., Szekli R.* M/M/1 Queuing Systems with Inventory // *Queuing Systems. Theory and Applications*. 2006. V. 54. Iss. 1. P. 55–78.
3. *Рубальский Г.Б.* Стохастическая теория управления запасами // *А и Т*. 2009. № 12. С. 175–186.
4. *Sigman K., Simchi-Levi D.* Light Traffic Heuristic for an M/G/1 Queue with Limited Inventory // *Annals of Operations Research*. 1992. V. 40. P. 371–380.
5. *Melikov A.Z., Molchanov A.A.* Stock Optimization in Transport/Storage Systems // *Cybernetics*. 1992. V. 28. Iss. 3. P. 484–487.
6. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Narayanan W.* Inventory with Positive Service Time: A Survey // *Advanced Trends in Queueing Theory. Series of Books “Mathematics and Statistics” Sciences*. V. 2 / Eds V. Anisimov, N. Limnios. London: ISTE & Wiley, 2021. P. 201–238.
7. *Ramesh R.N., Ord J.K., Hayya J.C., Pan A.* Sole Versus Dual Sourcing in Stochastic Lead-Time ( $s, Q$ ) Inventory Models // *Management Science*. 1991. V. 37. № 4. P. 428–443.
8. *Janssen F., de Kok T.* A Two-supplier Inventory Model // *Intern. J. of Production Economics*. 1999. V. 59. Iss. 1–3. P. 395–403.
9. *Kouiki C., Babai M.Z., Minner S.* On the Benefit of Dual-sourcing in Managing Perishable Inventory // *Intern. J. of Production Economics*. 2018. V. 204. Iss. 10. P. 1–17.
10. *Haughton M., Isotupa K.* A Continuous Review Inventory System with Lost Sales and Emergency Orders // *American J. of Operations Research*. 2018. V. 8. P. 343–359.  
<https://doi.org/10.4236/ajor.2018.85020>
11. *Cao P., Yao D.* Dual Sourcing Policy for a Continuous-review Stochastic Inventory System // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2019. V. 64. Iss. 7. P. 2921–2928.
12. *Boulaksil Y., Hamdouch Y., Ghouidi K., Fransoo J.C.* Comparing Policies for the Stochastic Multi-period Dual Sourcing Problem from a Supply Chain Perspective // *Intern. J. of Production Economics*. 2021. V. 232.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2020.107923>
13. *Barron J.* The Continuous ( $S, s, Se$ ) Inventory Model with Dual Sourcing and Emergency Orders // *Europ. J. of Operations Research*. 2021. 42 p.  
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.09.021>
14. *Minner S.* Multiple-supplier Inventory Models in Supply Chain Management: A Review // *Intern. J. Production Economics*. 2003. V. 81–82. P. 265–279.
15. *Yao M., Minner S.* Review of Multi-supplier Inventory Models in Supply Chain Management: An Update // *Technical Report in SSRN Electronic J.* 70 p. 2017.  
<https://doi.org/10.2139/ssrn.2995134>.
16. *Xin L., Mieghem J.A.V.* Dual-sourcing, Dual-mode Dynamic Stochastic Inventory Models: A Review // Available at SSRN: <http://dxdoi.org/10.2139/ssrn.3885147>. Sept. 29, 2021. 31 p.
17. *Melikov A., Krishnamoorthy A., Shahmaliyev M.O.* Numerical Analysis and Long Run Total Cost Optimization of Perishable Queueing Inventory Systems with Delayed Feedback // *Queueing Models and Service Managements*. 2019. V. 2. Iss. 1. P. 83–111.
18. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, Negative Customers and Applications // *Mathematical & Computer Modeling*. 2011. V. 53. P. 205–212.
19. *Gelenbe E.* Random Neural Networks with Positive and Negative Signals and Product Form Solution // *Neural Computation*. 1989. V. 1. Iss. 4. P. 502–510.
20. *Soujanya M.L., Laxmi P.V.* Analysis on Dual Supply Inventory Model Having Negative Arrivals and Finite Lifetime Inventory // *Reliability: Theory and Applications*. 2021. V. 16. № 3. P. 295–301.

21. *Neuts M.F.* Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.
22. *Меликов А.З., Шахмалыев М.О., Наур С.С.* Матрично-геометрический метод исследования системы обслуживания с портящимися запасами // А и Т. 2021. № 12. С. 154–168.
23. *Krishnamoorthy A., Manikandan R., Lakshmy B.* Revisit to Queueing-inventory System with Positive Service Time // Annals of Operations Research. 2015. V. 233. P. 221–236.
24. *Zhang Y., Yue D., Yue W.* A Queueing-inventory System with Random Order Size Policy and Server Vacations // Annals of Operations Research. 2020. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-020-03859-3>.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ИССЛЕДОВАНИЯХ  
НА ПОЛИГРАФЕ<sup>1</sup>© 2022 г. Л. А. Деревягин<sup>а</sup>, В. В. Макаров<sup>а,\*</sup>, А. Ю. Молчанов<sup>а</sup>,  
В. И. Цурков<sup>б</sup>, А. Н. Яковлев<sup>а</sup><sup>а</sup> МФТИ (НИУ), Москва, Россия<sup>б</sup> ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

\*e-mail: viktor.makarov@phystech.edu

Поступила в редакцию 16.02.2022 г.

После доработки 24.02.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Предлагается использование машинного обучения для автоматизации работы полиграфолога с архитектурами нейронных сетей из библиотеки scikit-learn с применением VotingClassifier и трансформера. При этом повышается эффективность анализа полиграмм, осуществляется согласование по признакам, уменьшается количество ошибочных выводов по ответам испытуемого. Применяются следующие показатели (каналы): электрокожное сопротивление (кожногальваническая реакция), кровонаполняемость сосудов (плетизмограмма), дыхательные ритмы.

DOI: 10.31857/S0002338822040059

**Введение.** Несмотря на постоянное развитие систем безопасности, человеческий фактор все еще остается одним из самых незащищенных элементов. Использование полиграфа позволяет уменьшить такие риски. Психофизиологические исследования решают следующие прикладные задачи: выявление негативных факторов в прошлом опыте кандидатов на должность, проверка на лояльность и соблюдение внутренних регламентов организации, осуществление оперативно-розыскной деятельности, проведение корпоративных и антикоррупционных расследований и т.д.

Первым начал использовать методики выявления стресса выдающийся итальянский криминалист Ч. Ломброзо, который в 1895 г. изложил в своей широко известной книге “Преступный человек” практический опыт применения гидроплетизмографа (устройство для измерения пульса и кровенаполнения сосудов) в ходе проверки фигуранта по уголовному делу об ограблении. При проведении психофизиологического исследования автор зафиксировал видимые изменения динамики артериального давления в ответ на предъявление стимулов, связанных с ограблением.

В 1888 г. Ч. Фере, обследуя больную с жалобами на электрические покалывания в кистях рук и ступнях, обнаружил, что при пропускании слабого тока через предплечье происходили отклонения стрелки включенного в цепь гальванометра в моменты сенсорных или эмоциональных воздействий. Независимо от Ч. Фере в 1890 г. И. Тарханов показал, что электрические сдвиги наблюдаются и без приложения внешнего тока. Таким образом, он открыл кожный потенциал, величина которого тоже изменяется в ответ на сенсорные и эмоциональные раздражители. Подобные эффекты были названы кожно-гальванической реакцией (КГР).

Среди пионеров техники полиграфных проверок необходимо назвать сотрудника полиции штата Калифорния Д. Ларсона, который в 1921 г. сконструировал первый прообраз современного профессионального полиграфа (данный аппарат одновременно регистрировал изменения динамики относительного артериального давления, пульса и дыхания).

Одним из первых исследователей канала КГР был знаменитый К. Юнг, который рассматривал данный сигнал как объективное физиологическое “окно” в сферу бессознательного, подле-

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-53019).

жащего изучению через психоанализ. К. Юнг первым выявил прямую зависимость между величиной КГР и силой эмоционального переживания.

Итак, полиграф является медико-биологическим прибором для одновременного измерения динамики физиологических показателей:

- динамики дыхательных циклов;
- электрокожного сопротивления (КГР);
- артериального давления;
- периферического кровонаправления (ФПГ);
- двигательной активности (тремор).

Как известно, полиграф работает так: имеется круг вопросов из некоторой предметной области. К испытуемому индивиду подключаются датчики для вышеуказанных измерений. Принимается ответ: либо “да”, либо “нет”. Все вопросы повторяются не менее 3 раз. Полиграфолог анализирует полученные функции с помощью системы трехбалльной оценки и окончательно констатирует о справедливости ответа [1].

Суть такой системы заключается в том, что реакциям на каждый вопрос теста выставляются баллы в следующем порядке:

- (сильная) максимальная по выраженности и близкие к ней реакции — 2 балла,
- (средняя) вторая по выраженности реакция и близкие к ней — 1 балл,
- (слабая) все остальные реакции — 0 баллов.

Критерии визуальной оценки значимости вопросов по каждому показателю отличаются. Они подробно описаны в профильной литературе. Реакция на каждый вопрос обсчитывается отдельно по респираторному каналу, кардиоканалу и электро-дермальному каналу. В итоге получается три числа — по одному на показатель. Для принятия решения суммируются баллы по трем каналам по всем повторениям.

Например, если в результате трех повторений вопроса получилось 11 баллов, то можно говорить о значимости реакции и возможном сокрытии информации, если 2 балла, то имеет место слабая реакция (это указывает на то, что индивид не испытывает стресс и ему нечего скрывать).

**1. Краткий обзор существующих подходов и постановка задачи.** К данному моменту применяют только прямые методы обсчета полиграмм [2–4]. В результате вычисляются и сравниваются следующие характеристики:

- длина линии сигнала верхнего (грудного) и нижнего (диафрагмального) дыхания,
- количество дыхательных циклов,
- максимальная амплитуда КГР,
- площадь под графиком сигнала КГР,
- смещение средней линии плетизмограммы,
- другие характеристики.

К сожалению, индивидуальные физиологические особенности каждого человека привносят неравномерные искажения по одному или нескольким сигналам. Прямые методы обсчетов не позволяют сделать автоматическую подстройку к таким изменениям, поэтому точность таких подходов является недостаточной для самостоятельного принятия решения по результатам проведенного психофизиологического исследования. Далее ставится задача исправить этот недостаток при помощи нейронных сетей и машинного обучения.

**2. Подготовка данных.** Каждая реакция представляет 12 с записанной полиграммы с частотой сигнала 20 Гц, т.е. 240 точек по каждому каналу:

- КГР (электрическая активность кожи),
- ФПГ,
- грудное и диафрагмальное дыхание.

По каждой реакции группа профессиональных полиграфологов проставляет оценку от 0 до 2 баллов в соответствии с описанными выше правилами. Таким образом, было обработано 90 психофизиологических исследований с разными испытуемыми и получено 8000 классифицированных отрезков по каждому каналу. Временные значения распределены равномерно: в каждой записи находится 240 численных значений.

**3. Сравнительное тестирование архитектур.** Рассматриваются встроенные архитектуры библиотеки scikit-learn [5]. Сначала выбираем подготовленные “сырые” необработанные данные

поочередно как в равном количестве, так и в несбалансированном отношении 7:3. Применяем следующие алгоритмы классификации данных, реализованные в указанной выше библиотеке. Они создают для каждого из трех показателей соответствующую модель для расчета результатов полиграфного тестирования.

SVM (support vector machine) – набор схожих алгоритмов обучения с учителем, использующихся для задач классификации и регрессивного анализа.

GPC (gaussian process) – случайный процесс (набор случайных величин, индексированных по времени или пространству), такой, что каждый конечный набор этих случайных величин имеет многомерное нормальное распределение, т.е. каждая их конечная линейная комбинация обычно распределена.

GNB (gaussian naive bayes) – простой вероятностный классификатор, основанный на применении теоремы Байеса со строгими предположениями о независимости и нормальном распределении признаков в наборе данных.

AdaBoost (с параметрами: количество оценщиков – 2500, коэффициент обучения – 0.001) – адаптивный классификатор в том смысле, что последующие слабые ученики настраиваются в пользу тех экземпляров, которые были неправильно классифицированы предыдущими классификаторами.

MLP (multi-layer perceptron) – класс упреждения искусственной нейронной сети.

Gradient Boosting [6] – метод машинного обучения для регрессии, классификации и других задач, который создает модель прогнозирования в виде ансамбля слабых моделей прогнозирования, обычно деревьев решений.

DecisionTree – средство поддержки принятия решений, использующееся в машинном обучении, анализе данных и статистике.

RandomForest – алгоритм машинного обучения, заключающийся в применении комитета решающих деревьев.

ExtraTrees [7] – ансамблевый алгоритм машинного обучения, который объединяет прогнозы из многих деревьев решений.

В итоге найдено 27 моделей, по одной на каждый показатель и на каждый алгоритм классификаций. Модели получают на вход прямые данные с полиграфа, а на выходе выдают класс, соответствующий силе реакции: 0, 1 или 2 балла.

Выбираем три наиболее точных классификатора по каждому каналу. Предположим, что при оценке определенной реакции на вопрос с вероятностью 100% первые два алгоритма получили класс “0 баллов”, а третий – класс “2 балла”. Для адекватного принятия решения, особенно в случаях несогласованности между классификаторами, применяем надстройку в виде VotingClassifier [8], которая присваивает весовые коэффициенты каждому из них. Итоговый результат будет рассчитан по формуле

$$\max(w_1 p_{11} + w_2 p_{21} + w_3 p_{31}, w_1 p_{12} + w_2 p_{22} + w_3 p_{32}, w_1 p_{13} + w_2 p_{23} + w_3 p_{33}),$$

где  $w_i$  – весовой коэффициент  $i$ -го классификатора,  $p_{ij}$  – вероятность принадлежности реакции к классу  $j$ , полученная при помощи классификатора  $i$ .

Пусть в указанном выше примере коэффициенты равны 0.2, 0.35 и 0.45 соответственно. Тогда по этим результатам мы принимаем следующее решение: класс “0 баллов” – вероятность 55%, класс “2 балла” – вероятность 45%. Поэтому в таком случае выбирается класс “0 баллов”. Аналогично рассматриваются другие ситуации для выбора оптимального классификатора.

Точность классификации силы реакции по трем классам на архитектуре VotingClassifier, включающей в себя три наилучших алгоритма, составила 52%, а из пяти – 59%.

Для повышения точности остановимся подробнее на реализации классификатора для двух классов при помощи модели трансформера, измененной в соответствии с задачей. По аналогии с рекуррентными нейронными сетями (РНС) трансформеры предназначены для обработки последовательностей, таких, как текст на естественном языке, и решения таких задач, как машинный перевод и автоматическое реферирование. В отличие от РНС, трансформеры не требуют обработки последовательностей по порядку. Например, если входные данные – это текст, то трансформеру не требуется обрабатывать конец текста после обработки его начала.

В классическом варианте трансформер представляет собой две части – кодировщик и декодировщик. В нашем случае была использована структура, состоящая в части кодировщика из чередующихся слоев внимания (внимание на основе скалярного произведения) и многослойного



Рис. 1. Проекция ручной разметки для канала ФПГ на обучающей выборке (слева направо: классы “2 балла”, “1 балл”, “0 баллов”)

перцептрона, а также декодировщика (простого классификатора). Обе части трансформера реализованы стандартными средствами библиотеки Keras.

Данные на вход подаются в размерности (26; 240), т.е. одновременно подается 26 образцов данных размером 240 значений. Затем данные кодируются при помощи одномерного (1D) PatchEncoder с шириной (8; 2), т.е. линейно трансформируются проецированием на вектор указанной выше размерности.

Кодированные данные поступают на группу чередующихся слоев внимания и перцептронов, а затем поступают на слой SeqPool для субдискретизации. Этап подвыборки последовательности нормируется (LayerNormalization) средствами библиотеки Keras и данные с него затем поступают на полносвязный слой в 600 нейронов с активацией SeLu. Результат работы кодировщика на этом этапе обрабатывается слоем FeaturePooling с количеством карт черт, равным двум.

Главные характеристики:

- размер набора данных (batch size): 60,
- количество блоков (чередование внимания и перцептрона): 6,
- размерность слоя внимания: 312,
- выброс слоя внимания: 0.1 (10%),
- функция трансформации ядра: softmax,
- количество наборов матриц весов (запросов, ключей, значений): 6.

Точность обучения на два класса (сильная и слабая реакции на заданный вопрос) составляет для показателей:

- плетизмограммы – 86.8% +–3%,
- кожно-гальванического сопротивления – 95.3% +–3%,
- дыхания – 72.7% +–3%.

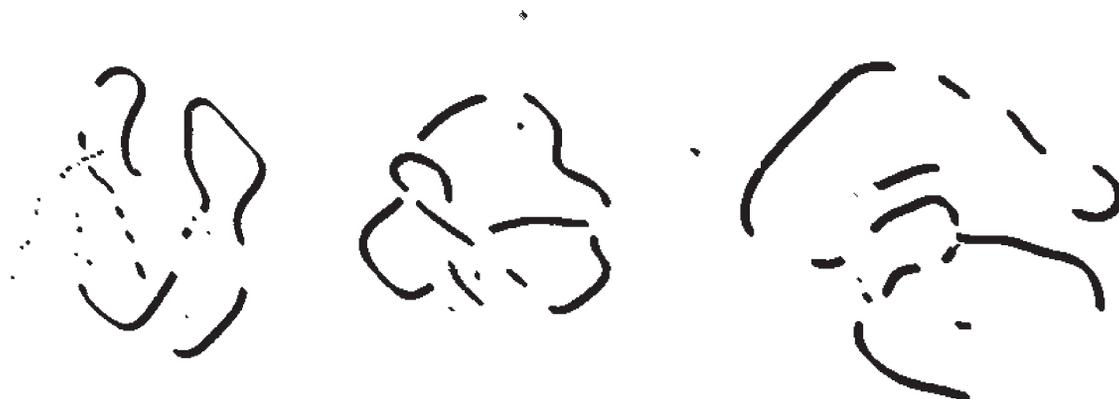
**4. Пути повышения точности.** Также были предприняты попытки обучить классификатор трансформера сразу на три класса, однако они показали заметно худшую точность и большой процент ошибок в сравнении классов “1 балл”–“0 баллов” и “1 балл”–“2 балла”. Используемый метод заметно уменьшает долю неясных средних реакций в пользу выраженных слабых и сильных.

Для визуализации и оценки результатов работы FeaturePooling данные были обработаны нейронной сетью без последнего слоя. Получившийся набор векторов был нормирован и кластеризован в t-SNE [9]. Градиент функции потерь будет в таком случае равен

$$\frac{\partial Cost}{\partial y_i} = 4 \sum_j (p_{ij} - q_{ij})(y_i - y_j)(1 - \|y_i - y_j\|^2)^{-1},$$

где  $p_{ij}$  – сходство точек,  $q_{ij}$  – сходство точек отображения.

Для проверки результатов работы сетей кластеризуем обучающую и валидационную выборку для каждой из характеристик в t-SNE и сравним с результатами работы трансформера. На рис. 1, 2 представлены соответствующие результаты по каналу ФПГ. Можно заметить, что классифицированные машиной точки “1 балл” не разбросаны хаотично, а образуют сплошные непрерывные линии после обработки трансформером. Кроме того, точки категории “1 балл” намного реже



**Рис. 2.** Пример результата работы архитектуры сети трансформер для канала ФПГ на обучающей выборке (слева направо: классы “2 балла”, “1 балл”, “0 баллов”)

попадают в кластеры “0 баллов” и “2 балла” по сравнению с ручной разметкой. Это означает наличие возможности повышения точности обучения на три класса.

**Заключение.** В дальнейших исследованиях архитектура будет улучшена для повышения точности классификации на три класса значимости реакции (“0 баллов”, “1 балл”, “2 балла”), а также проработан вопрос выявления артефактных (некорректно записанных) сигналов. В настоящий момент проводится интеграция данных нейронных сетей в разработанное авторами программное обеспечение полиграфа “Финист”. Получены результаты по эффективности для оценки факторов риска кандидатов при трудоустройстве. Интересным направлением развития является интеграция полиграфа с дополнительными биометрическими модальностями, показывающими хорошую чувствительность в близких задачах, а именно с трехмерной картой лица [10] и зрачковой реакцией [11].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оглоблин С.И., Молчанов А.Ю.* Инструментальная “детекция лжи”: академический курс. Ярославль: Ньюанс, 2004. 464 с.
2. *Gordon N.* Essentials of Polygraph and Polygraph Testing. Boca Raton: CRC Press, 2016. 320 p.
3. *Леонтьев К.А., Панин С.Д., Холодный Ю.И.* Оценка результатов тестирования на полиграфе методами регрессионного анализа // Наука и образование: электронный журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 10. С. 230–243.
4. *Минакова Н.Н., Божич Е.В.* Применение методов многомерного анализа данных при обработке полиграмм для изучения биофизических характеристик // Изв. АлтГУ. 2018. № 1 (99). С. 34–38.
5. *Porcu V.* Python for Data Mining Quick Syntax Reference. N.Y.: Apress Media LLC, 2018. 260 p.
6. *Greenwell B., Boehmke B.* Hands-On Machine Learning with R. Boca Raton: CRC Press, 2019. 488 p.
7. *Abdelkader B., Jaziri R., Bernard G.* Deep Cascade of Extra Trees // Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (PAKDD). Macau, China, 2019. P. 117–129.
8. *Hung C., Lee S.* Adaptive Distance-Based Voting Classification // Intern. Conf. on Machine Learning and Cybernetics (ICMLC). Tianjin, China, 2013. P. 1671–1677.
9. *Попова И.А., Попова А.А., Соболева Е.Д.* Визуализация многомерных наборов данных при помощи алгоритмов снижения пространства признаков PCA и T-SNE // Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей “StudNet”. 2020. № 11.
10. *Knyaz V.A., Matveev I.A., Murynin A.B.* Applying Computer Stereovision Algorithms to Study of Correlation Between Face Asymmetry and Human Vision Pathology // Pattern Recognition and Image Analysis. 2009. V. 19. № 4. P. 679–686.
11. *Varchenko N.N., Gankin K.A., Matveev I.A.* Using Binocular Pupillometry Method for Evaluating Functional State of Person // Sports Technology. 2015. V. 8. P. 67–75.

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ АРХИТЕКТУР ГЛУБОКИХ  
НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ  
НА МНОГОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

© 2022 г. А. С. Есенков<sup>a,\*</sup>, Е. М. Захарова<sup>b,\*\*</sup>, М. Д. Ковалева<sup>b,\*\*\*</sup>,  
Д. Е. Константинов<sup>b,\*\*\*\*</sup>, И. С. Макаров<sup>a,\*\*\*\*\*</sup>, Е. А. Панковец<sup>b,\*\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> МФТИ (национальный исследовательский ун-т), Долгопрудный, Моск. обл., Россия

\*e-mail: esenkov@mail.ru

\*\*e-mail: zakharova.em@mipt.ru

\*\*\*e-mail: kovaleva.md@phystech.edu

\*\*\*\*e-mail: konstantinov.de@phystech.edu

\*\*\*\*\*e-mail: i.s.m.mipt@yandex.r

\*\*\*\*\*e-mail: pankovets.ea@phystech.edu

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.

После доработки 25.03.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Приведены результаты исследования существующих архитектур глубоких нейронных сетей, предназначенных для решения задач классификации. В результате формируются атрибуты для эффективной автоматизации принятия решений. В качестве данных используются многомерные временные ряды финансовых рынков. Рассмотрены задачи бинарной и множественной классификации. Проанализированы полносвязные, рекуррентные (long short-term memory) и гибридные комбинированные архитектуры нейронных сетей. Изучаемый многомерный временной ряд получен путем объединения одномерных временных рядов стоимости актива, объема торговли, технических индикаторов и других параметров.

DOI: 10.31857/S0002338822040072

**Введение.** Основной тенденцией проведения исследований финансовых рынков, оценки и прогнозирования изменений на нем является использование технологии искусственного интеллекта. Одна из задач такого анализа — задача классификации данных. В статье описаны методы и алгоритмы, предназначенные для реализации системы поддержки принятия решений в области торговли акциями. Приведены основные этапы подготовки данных, выраженных в виде многомерных временных рядов финансовых рынков, для обучения и результаты исследования существующих архитектур глубоких нейронных сетей, предназначенных для решения задач классификации.

**1. Постановка задачи.** Изучению и прогнозированию финансовых рынков с использованием методов искусственного интеллекта посвящено много работ. В [1] представлен ансамбль независимых и параллельных нейронных сетей с долгой кратковременной памятью (long short-term memory, LSTM) для прогнозирования движения цены акций. Было показано, что LSTM особенно подходят для данных временных рядов из-за их способности включать прошлую информацию, в то время как было обнаружено, что ансамбли нейронных сетей уменьшают изменчивость результатов и улучшают обобщение. В [1] исследуется именно бинарная классификация.

Работа [2] представляет собой интеграцию современных методов обнаружения объектов и кодирования временных рядов GAF (gramian angular field) в задачах свечных паттернов. Предлагаемая модель, основанная на глубоких нейронных сетях и уникальном архитектурном дизайне, хорошо работает в классификации свечей и распознавании местоположения.

В [3] было проведено исследование применения методов компьютерного зрения к финансовым временным рядам с целью уменьшения воздействия шума и создания правильных меток. Результаты показывают, что созданные таким образом метки с шумоподавлением улучшают

производительность алгоритма обучения нисходящего потока как для небольших, так и для больших наборов данных.

Данная работа направлена на исследование гибридных архитектур нейронных сетей для классификации многомерных рядов. Для решения поставленной задачи были использованы глубокая нейронная сеть, состоящая из рекуррентных слоев LSTM-типа, полносвязная глубокая нейронная сеть и гибридные модели со сложной (разветвленной) топологией. При составлении выборок в дополнение к существующим данным были рассчитаны индикаторы и осцилляторы технического анализа.

Основная задача статьи — доказать, что подобранные в процессе исследования архитектуры позволяют получить высокую точность прогнозирования изменений на финансовых рынках и их можно применить для автоматизации принятия решения.

**2. Подготовка и выбор данных обучающих выборок.** Для обучения берутся данные, построенные на базе свечных графиков в дневном таймфрейме [4]. Свечой называется технический индикатор, применяемый главным образом для отображения изменений биржевых котировок акций, цен на сырье и т.д. Длительность временных рядов составляет от 1 до 20 лет, шаг равен одним суткам, т.е. всего было использовано  $20 \times 365$  свечей. Графики в меньших таймфреймах не рассматриваются по причине сильной зашумленности данных. Прогноз строится на период от 1 до 5 дней от текущего момента. Были исследованы и обучены пять моделей, из которых была выбрана наилучшая.

Исходные данные временного ряда найдены из баз акционерного общества “Инвестиционный холдинг Финам” [5] и содержат в себе следующую информацию: дата и время, максимальная и минимальная цены, цены закрытия и открытия и объем торгов соответствующей свечи. Для получения данных с сервера было создано собственное программное обеспечение.

В малой обучающей выборке применялись свечные графики 37 компаний, входящих в индекс Московской биржи [6]. Всего туда входит 45 акций. Три компании, ЛКОН (публичное акционерное общество “Лукойл”), GAZP (публичное акционерное общество “Газпром”) и RSTI (публичное акционерное общество “Россети”), были исключены из обучающей выборки по причине их использования для тестирования. Причины их выбора для тестирования следующие.

На рис. 1 представлены акции ЛКОН, содержащие глобальный растущий тренд, где по горизонтали — время, по вертикали — стоимость. График приведен с масштабом по месяцам для наглядности. Столбчатая диаграмма — объемы торговли для каждой свечи. GAZP содержит флэт, т.е. цена на их акции колеблется в определенном диапазоне без четко определенного направления. RSTI содержит нисходящую длительное время тенденцию. Активы данных компаний позволяют проводить тестирование на различных по характеру данных. Тестовая выборка представлена за полгода (с 1 января 2021 г. по 29 июля 2021 г.) и не пересекается по времени с обучающей, чтобы не было наложения временных рядов.

Была подготовлена большая обучающая выборка, включающая в себя акции компаний, которые входят как в индекс Московской биржи, так и в американский индекс S&P-500 [7].

В некоторых акциях присутствуют достаточно сильные смены направлений. Подобные сильные колебания наблюдаются преимущественно в начале временного ряда, поэтому была произведена обрезка начальных фрагментов всех временных рядов, содержащих сильные колебания.

**3. Подготовка данных.** Для проведения исследования полученные исходные данные свечных графиков были подвергнуты ряду преобразований. Был исключен год из данных свечи, так как этот элемент данных не несет полезной информации для прогнозирования временного ряда в будущем.

Для номера месяца были рассмотрены два варианта нормировки. Суть первого способа заключается в делении на 12, второго — в использовании one-hot encoding (ОНЕ). Для нормировки номера дня применялось деление на 31, в результате которого значения были равномерно распределены в диапазоне (0,1). По данным полной даты для каждого дня был вычислен номер дня недели, который был закодирован с помощью ОНЕ.

Использование дня месяца и дня недели оправдано тем, что в течение месяца и в течение недели наблюдаются определенные тенденции, например сокращение позиций в пятницу или в конце месяца. В частности, было проведено исследование поведения акций компаний, входящих в индекс Московской биржи в пятницу по всем имеющимся данным.

В табл. 1 представлены результаты анализа, которые показывают, что акции компаний банковского сектора имеют тенденцию к снижению по пятницам, а акции компаний нефтегазового сектора наоборот — тенденцию к росту.



Рис. 1. Глобально растущий тренд акций ПАО «Лукойл»

Данные о часе, минуте и секунде свечи были полностью исключены, так как минимальное разбиение свечей составляет одни сутки. Включение в обучающую выборку одновременно данных о месяце, дне и дне недели имеет негативный эффект для обучения модели, так как по ним достаточно просто идентифицировать конкретный фрагмент временного ряда. Модель обучается распознавать не паттерны других компонент временного ряда, а просто запоминает дату.

Информация о месячных сезонных зависимостях также не была включена в итоговую обучающую выборку, так как в системе поддержки принятия решений основной акцент ставится на удержание позиции в течение короткого периода времени (1–10 дней), при этом была включена информация о дне недели в ONE-формате.

Таблица 1. Акции компаний банковского и нефтегазового секторов

Компания	Количество пятниц, в которые наблюдался рост	Количество пятниц, в которые наблюдалось падение
Лукойл	517	475
Норникель	503	473
Сбербанк	308	363
Газпром	379	392
Роснефть	371	376
Банк ВТБ	301	377

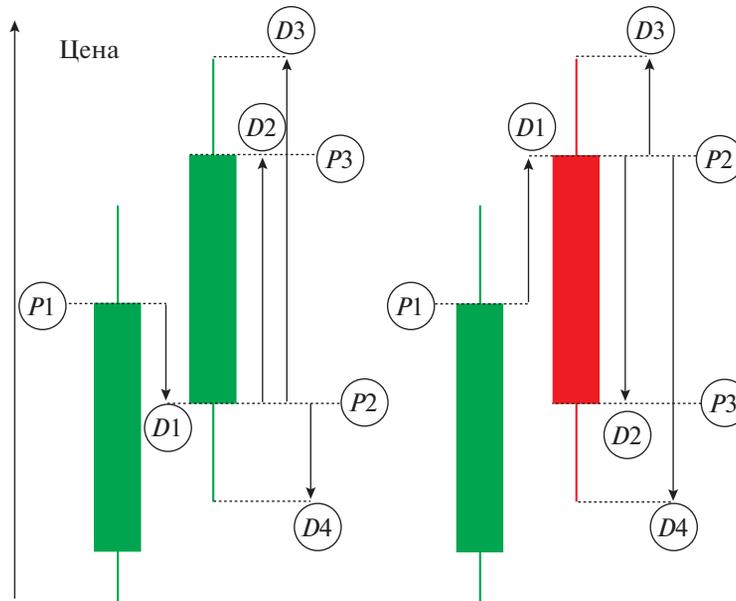


Рис. 2. Процентные изменения актива относительно некоторого значения цен

Использование необработанных значений стоимости актива в обучающей выборке не представляется возможным, так как различные активы имеют разную стоимость, поэтому было выполнено преобразование сырых значений стоимости актива в процентное изменение.

На рис. 2 представлены процентные изменения актива относительно некоторого значения цены. Зеленый цвет обозначает подъем цены, красный — ее падение. Стрелками обозначены величины процентных изменений, которые вычисляются как:

$$D_1 = \frac{P_2 - P_1}{P_1}, \quad D_2 = \frac{P_3 - P_2}{P_2}, \quad D_3 = \frac{P_{\max} - P_2}{P_2}, \quad D_4 = \frac{P_2 - P_{\min}}{P_{\min}}, \quad (3.1)$$

где  $P_1$  — цена закрытия предыдущего дня,  $P_2$  — цена открытия текущего дня,  $P_3$  — цена закрытия текущего дня,  $P_{\min}$  и  $P_{\max}$  — минимальная и максимальная цены текущего дня соответственно,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  — величины процентных изменений. При этом  $D_3$  и  $D_4$  больше нуля,  $D_1$ ,  $D_2$  — любые по знаку.

Из формул (3.1) следует что  $D$  — процентное изменение актива, вычисляется по следующей формуле:

$$D = \frac{P_3 - P_1}{P_1}. \quad (3.2)$$

Было проведено исследование процентных изменений стоимости актива. На рис. 3 представлены результаты анализа, который показал, что значение  $D$  по данным всех активов имеет вид нормального распределения, матожидание которого составляет 0.

Пусть  $\sigma$  представляет собой стандартное отклонение величины, а  $\mu$  — ее матожидание. Тогда по правилу трех сигм [8]  $3\sigma$ -диапазон представляет собой интервал  $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ . В работе значения  $3\sigma$ -диапазона лежат в диапазоне  $[-0.1; 0.1]$ , т.е. процентное изменение стоимости актива в день составляет не более 10%.

Значения  $D$  для последних  $N$  свечей были включены в обучающую выборку. При этом каждое значение было умножено на 10. Таким образом было достигнуто нормальное распределение в диапазоне  $[-1; 1]$ , а значения вне этого диапазона были обрезаны до  $-1$  и  $+1$  соответственно.

Помимо информации о стоимости актива также использовалась информация об объеме торговли  $V_{\text{deviation}}$ . Данные по объемам распределялись нормально, и при составлении векторов обучающей выборки применялись процентные изменения объемов. Характерное процентное изменение объема составляло 50%, поэтому исходное нормальное распределение не подвергалось

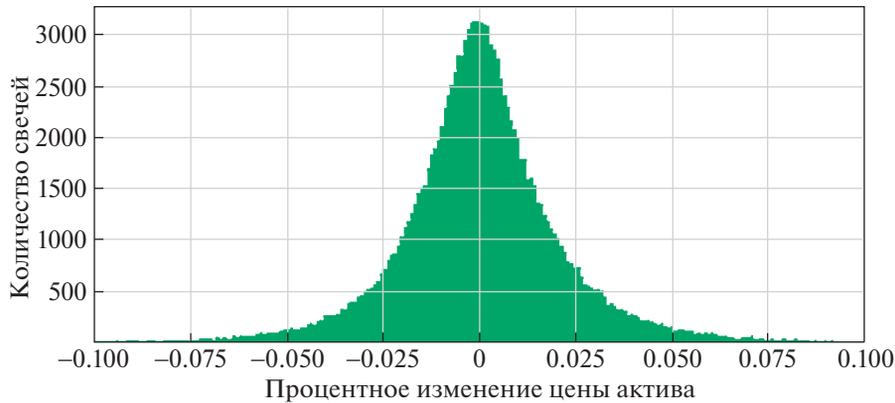


Рис. 3. Распределение процентного изменения актива

масштабированию. Аналогично с преобразованиями процентных изменений актива  $D$  выполняется обрезка процентных изменений объема  $V_{\text{deviation}}$ : значения, выходящие из диапазона от  $-1$  до  $+1$ , приводились к значениям  $-1$  и  $+1$  соответственно.

В процессе анализа и прогнозирования временных рядов финансовых рынков часто используются уровни поддержки и сопротивления. В работе рассматриваются только горизонтальные уровни, определяемые по локальным экстремумам.

На рис. 1 видно, что уровень сопротивления может превратиться в уровень поддержки после преодоления его ценой, т.е. один и тот же уровень может проходить как через локальные минимумы, так и через локальные максимумы. Определение уровней осуществляется с помощью алгоритма детектирования локальных экстремумов посредством сдвига окна-фильтра фиксированной ширины (ширина измеряется в свечах). Каждый уровень характеризуется двумя параметрами. Первый – его время жизни, которое измеряется в свечах и отсчитывается от первого локального экстремума, проходило через данный уровень. Второй – сила уровня, соответствующая числу экстремумов, через которые данный уровень проходит в пределах погрешности. Максимальное время жизни уровня ограничено сверху, уровни, превышающие данное ограничение, считаются устаревшими и не учитываются при анализе текущей ситуации. Нормировка силы уровня  $S$  и времени жизни уровня  $L$  выполняется посредством деления данных величин на максимальную силу уровня и максимальное время жизни уровня, которые заданы как константы алгоритма нормализации данных:

$$S_{\text{level}}^{(norm)} = \min\left(1.0; \frac{S_{\text{level}}}{S_{\text{max}}}\right), \quad L_{\text{level}}^{(norm)} = \min\left(1.0; \frac{L_{\text{level}}}{L_{\text{max}}}\right), \quad (3.3)$$

где  $S_{\text{level}}^{(norm)}$  – нормированное значение силы уровня,  $L_{\text{level}}^{(norm)}$  – нормированное значение времени жизни уровня,  $S_{\text{level}}$  и  $L_{\text{level}}$  – ненормированные значения силы и времени жизни уровня,  $S_{\text{max}}$  и  $L_{\text{max}}$  – их заданные максимальные значения.

Для каждой свечи каждого графика вычисляется ближайший уровень поддержки (снизу) и сопротивления (сверху). Для определенных свечей уровни могут отсутствовать. В таком случае все параметры приравниваются к нулю. Такая ситуация чаще всего возникает для свечей в начале графика, а также для свечей ATH (all time high) и ATL (all time low). Для каждой свечи вычисляются расстояния до ближайшего уровня сопротивления и до ближайшего уровня поддержки, которое измеряется в единицах стоимости актива:

$$D_{\text{level}} = \frac{P_{\text{level}} - P_{\text{close}}}{P_{\text{close}}}, \quad (3.4)$$

где  $D_{\text{level}}$  – расстояние,  $P_{\text{close}}$  – цена закрытия свечи,  $P_{\text{level}}$  – цена уровня.

Полученные процентные отклонения также имеют нормальное распределение, значения  $3\sigma$ -диапазона которого лежат на отрезке  $[-0.1; 0.1]$ . Все процентные отклонения берутся по модулю.



Рис. 4. Экспоненциальное распределение времени жизни уровней для всех свечей всех свечных графиков

В конечном итоге полная информация об уровнях для каждой свечи характеризуется шестью числами: цена, время жизни и сила для двух уровней этой свечи. Однако в ходе экспериментов было установлено, что наилучшая результативность обучения достигается при указании информации об уровнях только последней текущей свечи. Информация о силе уровня является нерепрезентативной, так как существуют сильные уровни, проходящие через один локальный экстремум, и слабые уровни, проходящие через множество локальных экстремумов.

К тому же, как было сказано, определение уровней имеет некоторую погрешность. В статье ее значение составляет 0.25%. Поэтому в итоговом рабочем варианте данных об уровнях была оставлена только информация о наличии или отсутствии любого уровня в окрестности цены закрытия текущей свечи с указанной погрешностью. Это обусловлено тем, что в реальности часто происходят ложные пробои уровней. В таких ситуациях уровень поддержки может трактоваться как уровень сопротивления, что не является верным. Будет правильнее предоставить модели в процессе обучения самостоятельно идентифицировать тип уровня при его наличии.

На рис. 4 представлено экспоненциальное распределение времени жизни уровней для всех свечей всех свечных графиков. Таким образом, описание уровней для текущей свечи состоит только из одного параметра, который равен 0, если уровень отсутствует, или имеет ненулевое значение в противном случае. При этом ненулевое значение параметра экспоненциально распределено в диапазоне  $[0, 1]$  и соответствует времени жизни уровня.

Распределение имеет экспоненциальный вид, выброс справа обозначает уровни, время жизни которых превышает установленный лимит (в данной работе — 5 лет). При подготовке обучающей выборки подобные уровни игнорируются. При составлении выборок наравне с перечисленными выше первичными данными были использованы вторичные данные, полученные посредством расчета индикаторов и осцилляторов технического анализа [9]. Применение индикаторов приводит к увеличению точности на 1–2% [10].

Однако в выборку данных для обучения моделей следует включать сырые значения индикаторов и осцилляторов. В процессе обучения модель самостоятельно определит значения, которые могут выступать в качестве полезных сигналов. В дополнение к этому на графике стоимости акций некоторых компаний могут возникать разрывы. Наибольшие разрывы можно встретить на графиках стоимости акций тех компаний, которые выплачивают высокие дивиденды. Все индикаторы и осцилляторы используют предысторию заданной продолжительности цен закрытия или типичных цен. После возникновения (дивидендного) разрыва значения индикаторов и осцилляторов могут претерпевать резкие изменения, поэтому следует исключить из обучающей и тестовых выборок содержащие их сегменты временных рядов. Обученную модель также не рекомендуется применять в течение  $t$  дней после возникновения дивидендного разрыва, где  $t$  — максимальная длительность приведенной предыстории по всем индикаторам и осцилляторам.

**4. Построение векторов обучающей выборки.** В работе представлено два варианта структуры входного вектора обучающей и тестовых выборок.

В табл. 2 описан вектор первого типа размерности  $10 + N + M$ . Вектор второго типа имеет размерность  $k \times N$ , где  $k = 30$  и состоит из 12 индикаторов + 16 осцилляторов + цены закрытия и объемы торговли;  $N$  и  $M$  приведены в табл. 2.

Таблица 2. Описание вектора 1 размерности  $10 + N + M$ 

Количество параметров	Формат параметров	Описание
5	ОНЕ	День недели
1	Экспоненциально распределенное число в диапазоне [0.0; 1.0]	Время жизни уровня последней свечи (0.0 означает, что уровня нет, либо он был проигнорирован из-за превышения лимита времени жизни)
$M$	Нормально распределенных чисел в диапазоне [-1.0; 1.0]	Процентное изменение объема для $M$ последних свечей ( $V_{Deviation}$ )
$N$	Нормально распределенных чисел в диапазоне [-1.0; 1.0]	Процентное изменение объема для $N$ последних свечей ( $PD$ )
1	Нормально распределенное число [0.0; 1.0]	Отклонение $D_3$ последней свечи
1	Нормально распределенное число [0.0; 1.0]	Отклонение $D_4$ последней свечи
1	Нормально распределенное число [-1.0; 1.0]	Отклонение $D_1$ последней свечи
1	Нормально распределенное число [-1.0; 1.0]	Отклонение $D_2$ последней свечи

В ходе экспериментов было установлено, что наиболее оптимальное значение  $N = 60$ , что соответствует анализируемой предыстории за 3 месяца (принято, что в неделе 5 рабочих дней, месяц состоит из 4 недель). Оптимальное значение  $M = 10$ , что соответствует 2 неделям.

**5. Разметка.** Было подготовлено несколько типов разметки для решения задач классификации разного рода. Первый вариант простейшей разметки соответствует задаче прогнозирования движения цены в последующие  $N_{cur}$  дней от текущего момента,  $N_{cur}$  лежит в диапазоне [1, 5]. Второй вариант разметки был получен с помощью алгоритма детектирования тренда с плавающей правой границей окна-фильтра. В ходе экспериментов было установлено, что значение точности лучше на разметке, найденной вторым способом.

Далее в работе приводятся результаты обучения и тестирования моделей по второй разметке, потому что точность на разметке первого типа составляет 54–58%, на разметке второго типа – 65–70%.

Исходный вариант разметки вторым способом подразумевает три класса:  $L$ ,  $C$ ,  $S$ . Пометка ставится для каждой свечи. Пометка  $C$  означает, что на момент закрытия текущей свечи рекомендуется иметь нулевую позицию,  $L$  – рекомендуется иметь длинную позицию,  $S$  – рекомендуется иметь короткую позицию. Метка  $C$  соответствует моментам, когда на рынке отсутствует определенное движение. В такие моменты можно либо продолжать удерживать имеющуюся позицию до появления более четкого сигнала, либо установить нулевую позицию.

В табл. 3 представлены используемые в данной работе метки и их распределение.

Как видно из табл. 3 метки типа  $C$  составляют около 10% от общего количества меток всех типов. При этом в ходе экспериментов было установлено, что модели практически не способны корректно распознавать данную метку после обучения. Это является следствием несбалансированности состава выборки. Поэтому данная трехклассовая разметка была упрощена до двухклассовой, а все векторы, помеченные меткой  $C$ , были удалены из обучающей и тестовых выборок.

**6. Модели нейронных сетей.** В процессе исследования были изучены модели трех типов архитектур. Обучение моделей первого и второго типа архитектур проводилось на малой обучающей выборке, содержащей данные по 37 акциям компаний, входящих в индекс Московской биржи [6]. В качестве результатов тестирования модели приводится значение точности предсказания меток на размеченных тестовых данных акций Лукойла. Для других тестовых данных отклонения значений ассигасу лежит в диапазоне  $\pm 2\%$ .

Первый тип – полносвязные глубокие нейронные сети. В табл. 4 представлена наилучшая по результатам анализа архитектура. Модель состоит из четырех полносвязных слоев с выпадением с коэффициентом  $\text{dropout} = 0.25$  и функцией активации типа  $\text{relu}$ . Последний пятый слой содержит один нейрон с функцией активации типа сигмоид. В качестве входного вектора используется вектор первого типа (табл. 3).

**Таблица 3.** Таблица меток

Распределение меток	Количество меток	Содержание меток, %
Распределение меток тестовой выборки, предложенных одной из обученных моделей	C: 67	C: 0.53
	L: 7147	L: 56.31
	S: 5478	S: 43.16
Распределение меток в тестовой выборке, предоставленных алгоритмом разметки	C: 1350	C: 10.64
	L: 5960	L: 46.96
	S: 5382	S: 42.40
Распределение меток в малой обучающей выборке, предоставленных алгоритмом разметки	C: 12561	C: 10
	L: 56811	L: 46
	S: 51569	S: 42
Для отдельных активов		
Название компании на бирже, таймфрейм, количество свечей	Количество меток	Содержание меток, %
Объединённая компания “РУСАЛ”, дневной, 1390	C: 131	C: 9
	L: 628	L: 45
	S: 631	S: 45
Группа компаний “Петропавловск”, дневной, 74	C: 17	C: 22
	L: 15	L: 20
	S: 42	S: 56
X5 Retail Group, дневной, 677	C: 99	C: 14
	L: 301	L: 44
	S: 277	S: 40
Магнитогорский металлургический комбинат, дневной, 3686	C: 342	C: 9
	L: 1719	L: 46
	S: 1625	S: 44

**Таблица 4.** Архитектура полносвязной глубокой нейронной сети

Слой	Тип	Структура выходного тензора	Количество параметров
Dense_1	Dense	(None, 80)	6480
Dropout_1	Dropout	(None, 80)	0
Dense_2	Dense	(None, 320)	25920
Dropout_2	Dropout	(None, 320)	0
Dense_3	Dense	(None, 320)	102720
Dropout_3	Dropout	(None, 320)	0
Dense_4	Dense	(None, 80)	25680
Dense_5	Dense	(None, 2)	162

Наилучшие результаты были получены с помощью полносвязных моделей, количество нейронов в слоях которых в 2 или 4 раза превышает количество параметров входного вектора. Общее количество параметров модели равно 160962.

На рис. 5 рассмотрены графики изменения точности от эпохи обучения для обучающей и тестовых выборок. Заметим, что с определенной эпохи начинается переобучение. Точность для ЛКОН за все время составила 0.6818, а за последние полгода – 0.6759.

Второй тип моделей – гибридные модели со сложной (разветвленной) топологией. Модели данного типа также используют в качестве входного вектора первого типа (табл. 3), но разбитого на три части. Первая часть включает в себя процентные изменения цен закрытия (60 чисел,

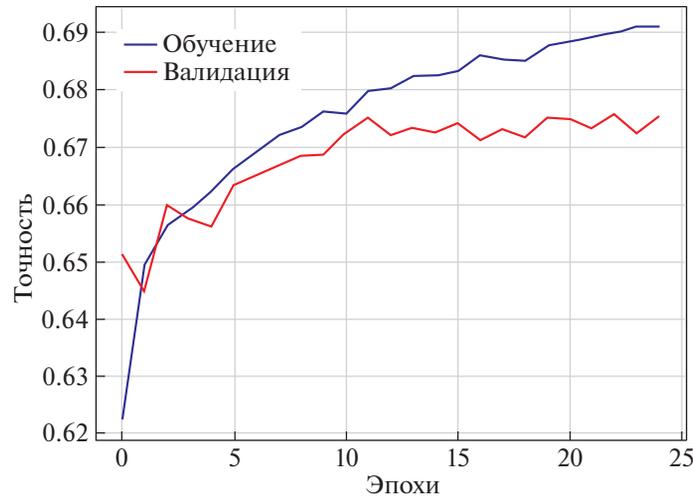


Рис. 5. График зависимости точности от эпохи для лучшей dense-модели

образующих временной ряд), вторая – процентные изменения объемов торговли (10 чисел, образующих временной ряд), третья часть – оставшиеся параметры входного вектора (10 чисел). Первая и вторая части подаются на вход в соответствующие рекуррентные слои типа LSTM, третья часть – на вход полносвязного слоя. Внутри архитектуры выполняется конкатенация трех разделенных слоев. Последний слой содержит один нейрон с функцией активации типа сигмоид. Для всех нейронов, кроме последнего, установлена функция активации типа relu, а для компонент LSTM-слоев выбран вариант по умолчанию из реализации keras.

По результатам анализа наилучшая архитектура из них представлена в табл. 5.

Общее количество параметров модели равно 113841. На рис. 6 рассмотрены графики изменения точности от эпохи обучения для обучающей и тестовых выборок. Заметим, что с эпохи  $x$  начинается переобучение. Assurance для ЛКОН за все время составило 0.6651, а за последние полгода – 0.6759.

Таблица 5. Архитектура гибридной модели со сложной (разветвленной) топологией

Слой	Структура выходного тензора	Количество параметров	Входной слой для текущего
Input_V (InputLayer)	(None, 10, 1)	0	
Lstm_25 (LSTM)	(None, 10, 50)	10400	Input_V[0][0]
Input_P (InputLayer)	(None, 60, 1)	0	
Lstm_26 (LSTM)	(None, 10, 50)	20200	Lstm_25[0][0]
Lstm_29 (LSTM)	(None, 60, 40)	6720	Input_P[0][0]
Lstm_27 (LSTM)	(None, 10, 50)	20200	Lstm_26[0][0]
Lstm_30 (LSTM)	(None, 60, 40)	12960	Lstm_29[0][0]
Input_D (InputLayer)	(None, 10)	0	
Lstm_28 (LSTM)	(None, 50)	20200	Lstm_27[0][0]
Lstm_31 (LSTM)	(None, 40)	12960	Lstm_30[0][0]
Concatenate_4 (Concatenate)	(None, 100)	0s	Input_D[0][0] Lstm_28[0][0] Lstm_31[0][0]
Dense_4 (Dense)	(None, 100)	10100	Concatenate_4[0][0]
Output (Dense)	(None, 1)	101	Dense_4[0][0]

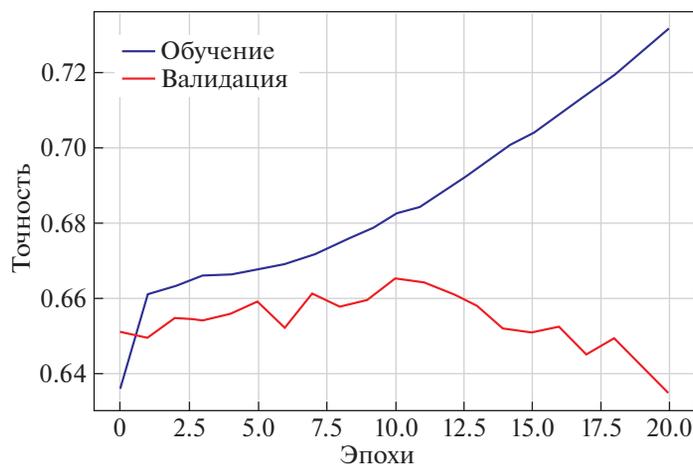


Рис. 6. Графики изменения точности от эпохи обучения для лучшей гибридной модели

Третий тип моделей – глубокая нейронная сеть, состоящая из рекуррентных слоев LSTM-типа. Модели данного типа используют в качестве входного вектора второго типа (табл. 2). Модели анализируемой архитектуры показывают наилучшие результаты среди всех исследуемых в работе моделей, поэтому точная конфигурация архитектуры не приводится. Отметим, что архитектура включает в себя последовательность LSTM-слоев и полносвязных слоев с выпадением. После получения предварительных результатов на малой обучающей выборке модель была переобучена на данных большой обучающей выборки. Точность для ЛКОН за все время составила 0.6914, а за последние полгода – 0.7269. На отдельных активах тест за последние полгода показывал еще более высокие результаты, например, на акции GAZP ассигасу составила 0.7830. Графики зависимости ассигасы от эпохи для train и test не приводятся, так как наилучшие значения были достигнуты уже после первой эпохи по причине большого размера обучающей выборки.

**Заключение.** Описаны результаты подготовки и разметки данных, а также исследования различных архитектур глубоких нейронных сетей, предназначенных для задач классификации на размеченных данных многомерного временного ряда, включающего в себя исходные данные свечных графиков и производные данные, вычисленные на основе исходных. Наилучшие результаты были достигнуты с помощью многослойной нейронной сети, состоящей из последовательности рекуррентных слоев LSTM-типа и полносвязных слоев с выпадением. Полученная модель может быть применена в системах автоматической торговли, функционирующих по среднесрочной стратегии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fjellström C.* Long Short-Term Memory Neural Network for Financial Time Series // arXiv preprint arXiv:2201.08218. 2022.
2. *Chen J.H., Tsai Y.C.* Dynamic Deep Convolutional Candlestick Learner // arXiv preprint arXiv:2201.08669. 2022.
3. *Ma Y., Ventre C., Polukarov M.* Denoised Labels for Financial Time-Series Data via Self-Supervised Learning // arXiv preprint arXiv:2112.10139. 2021.
4. *Нисон С.* Японские свечи. Графический анализ финансовых рынков. М.: Альпина Паблишер, 2017.
5. <https://www.finam.ru/>
6. <https://www.moex.com/>
7. <https://www.spglobal.com/ratings/en/>
8. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: для вузов. М.: Наука, 1985.
9. *Мэрфи Д.Д.* Технический анализ фьючерсных рынков: теория и практика. М.: Альпина Паблишер, 1996.
10. *Авдеев А.В.* Сравнение видов индикаторов технического анализа и выбор оптимальной категории индикаторов для дальнейшего использования в алгоритмах системы торговли на бирже. Изв. Тульск. гос. ун-та. Экономические и юридические науки. 2019. №. 2. С. 12–18.

---

---

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

---

---

УДК 629.7.072.1

**ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВОГО  
ДВИЖЕНИЯ НАНОСПУТНИКА НА ЛАБОРАТОРНОМ СТЕНДЕ<sup>1</sup>****© 2022 г. А. А. Болотских<sup>а</sup>, Р. Н. Жарких<sup>а</sup>, Д. С. Иванов<sup>б,\*</sup>,  
С. В. Лебедев<sup>а</sup>, С. С. Ткачев<sup>б</sup>**<sup>а</sup> *ООО Спутникс, Москва, Россия*<sup>б</sup> *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия**\*e-mail: danilivanovs@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.01.2022 г.

После доработки 01.02.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Рассматриваются алгоритмы определения углового движения наноспутника на основе расширенного фильтра Калмана с использованием измерений бортовых солнечных датчиков, магнитометра и датчика угловой скорости. Эксперименты выполняются на стенде с аэродинамическим подвесом. Проводится лабораторное исследование влияния наиболее значимых параметров алгоритма на качество его работы – точность получаемых оценок и времени сходимости. Для алгоритма определения с помощью измерений магнитометра и солнечных датчиков ключевым фактором является зависимость точности оценок от угла между векторами направления на Солнце и локальным геомагнитным полем. Предложены и протестированы модификации алгоритмов определения углового движения, уменьшающих это влияние.

DOI: 10.31857/S0002338822040023

**Введение.** Перед запуском космических аппаратов проводится серия наземных тестов и лабораторных испытаний всех бортовых систем. Для тестирования и отладки алгоритмов определения и управления углового движения часто применяются лабораторные стенды, позволяющие в некоторой степени имитировать условия космического полета с точки зрения динамики и внешней среды. Это обеспечивает корректную работу исполнительных органов и бортовых датчиков. Одним из наиболее распространенных стендов является стенд с использованием аэродинамического подвеса. Благодаря подаваемому сжато воздуху между двумя вложенными полусферами образуется небольшая зазор – воздушная подушка, обеспечивающая угловое движение плавающей полусферы практически без трения. К полусфере крепится платформа, на которую устанавливается либо макет системы ориентации космического аппарата, либо весь аппарат в сборе. Платформа имеет три угловые степени свободы, однако неограниченное движение возможно только относительно вертикальной оси; по двум другим осям аппарат может совершать только ограниченные повороты [1, 2]. Аэродинамический подвес обычно помещается в имитатор геомагнитного поля на основе колец Геймгольца, что позволяет создавать изменяющееся в соответствии с движением аппарата по орбите магнитное поле. Для тестирования алгоритмов определения углового движения с использованием измерений солнечных датчиков к стенду добавляют имитатор Солнца. Подобные стенды с аэродинамическим подвесом достаточно широко распространены в зарубежных и отечественных университетах и исследовательских центрах [3–10].

Угловое движение спутника в космическом пространстве и макета на аэродинамическом подвесе описывается одними и теми же уравнениями движения, но различаются внешние возмущения, действующие на тело. Основное возмущение, обуславливающее движение макета, вызвано действием момента гравитационной силы вследствие отличия “точки подвеса” (неподвижной точки) и центра масс системы. Влияние этого доминирующего момента на динамику углового движения можно уменьшить с помощью процедуры балансировки [11–14], однако полностью исключить не удастся. На практике это приводит к некоторому отличию результатов моделирования работы алгоритмов определения углового движения, предназначенных для работы в усло-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 17-71-20117).

виях орбитального полета, и результатов лабораторных экспериментов. Несмотря на отличия моделей углового движения макета наноспутника на аэродинамическом подвесе и спутника на орбите, на стенде удастся проверить работоспособность бортовых алгоритмов управления ориентацией и оценки углового движения. Благодаря имитации внешней среды орбитального полета с помощью имитатора геомагнитного поля и имитатора Солнца, а также системе независимых измерений углового движения представляется возможным исследовать характеристики работы алгоритмов определения на основе измерения магнитометра, солнечного датчика, датчика угловой скорости (ДУС) и звездного датчика. Особый интерес для наноспутников представляют достижимые точности, которые можно получить без звездного датчика на освещенной и теневой стороне низкой околоземной орбиты. В работе приводятся результаты лабораторных исследований бортовых алгоритмов оценки углового движения наноспутника типа 3U CubeSat. Алгоритмы основаны на расширенном фильтре Калмана, в вектор состояния включены кватернион ориентации, вектор угловой скорости, а также смещение нуля измерений магнитометра, вызванное переменными бортовыми магнитными полями аппарата, и смещение нуля измерений ДУС. На освещенной части орбиты точность оценки углового положения зависит от угла между вектором геомагнитной индукции и направлением на Солнце, при коллинеарности этих направлений наблюдается резкое увеличение ошибок. В статье предложен подход, который позволяет уменьшить эти ошибки оценки вектора состояния.

**1. Стенд для имитации углового движения микроспутников.** В работе используется стенд для испытаний алгоритмов управления угловым движением макетов наноспутников, разработанный компанией СПУТНИКС [15]. В состав стенда входят имитатор магнитного поля, имитатор Солнца, макет системы ориентации микроспутника и аэродинамический подвес. Фото стенда представлено на рис. 1, а, платформа с установленным на ней наноспутником формата 3U CubeSat изображена на рис. 1, б. Платформа благодаря воздушной подушке способна совершать трехосное угловое движение относительно точки подвеса.

В общем случае вследствие произвольного распределения массы в аппарате положение точки подвеса не совпадает с центром масс системы и возникает момент силы тяжести, который влияет на угловое движение системы. Чтобы уменьшить влияние этого момента, на макете установлена система балансировки, состоящая из набора грузов, которые перемещаются вдоль осей системы координат, связанной с платформой. Однако установить положение центра масс относительно точки подвеса возможно с точностью около 10 мкм [14], что делает момент силы тяжести самым значительным возмущением, действующим на платформу с аппаратом.

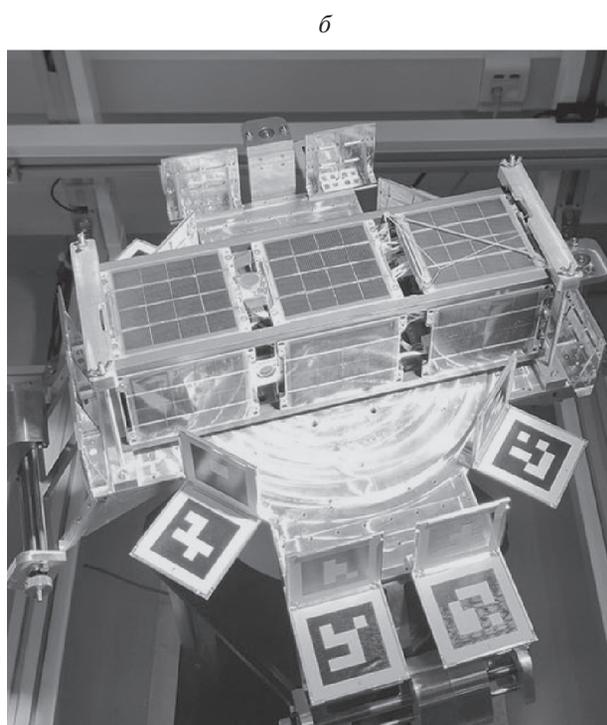
Для определения углового движения платформы с наноспутником используется система независимых измерений на основе оптических измерений. Она с помощью обработки изображений, получаемых с камеры, неподвижно установленной на имитаторе геомагнитного поля, определяет по специальным меткам на платформе угловое положение макета относительно неподвижной лабораторной системы координат. Среднеквадратическая ошибка определения углового положения макета с помощью системы оптических измерений составляет  $\sigma_{\text{изм}} = 0.2^\circ$ , частота поступающих измерений – около 5 Гц.

Для имитации геомагнитного поля в составе стенда используется система из трех пар установленных взаимно перпендикулярно квадратных катушек, называемых кольцами Гельмгольца (рис. 1). Стороны квадратов пар катушек имеют размеры 2; 1.9; 1.8 м. Данная система способна создавать практически однородное магнитное поле до 200 мТл в заданной области, которая представляет собой шар с диаметром 650 мм.

Имитатор Солнца создает постоянный параллельный световой поток на расстоянии до 1.5 м мощностью не менее 80000 лк. В качестве имитатора Солнца используется прожектор PAR-64 с лампой Philips 1000W230V.

Для проведения экспериментов использовалась модель наноспутника 3U CubeSat, имеющего размеры 10 × 10 × 30 см. Масса аппарата составляет 3.5 кг. Тензор инерции наноспутника вместе с платформой, записанный в строительных осях, которые направлены вдоль граней параллелепипеда с началом в геометрическом центре аппарата, согласно расчетам в SolidWorks, имеет следующий вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0.135 & 0 & 0 \\ 0 & 0.145 & 0 \\ 0 & 0 & 0.225 \end{bmatrix} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$



**Рис. 1.** Стенд с аэродинамическим подвесом (*a*), платформа с установленным наноспутником формата 3U CubeSat на аэродинамическом подвесе (*б*)

На модели наноспутника установлен набор магнитных катушек и блок маховиков для управления угловым движением. Для определения углового движения используются измерения солнечных датчиков, магнитометра и ДУС. Цель статьи заключается в лабораторном исследовании характеристик работы алгоритмов определения углового движения с применением этого набора датчиков.

**2. Модель движения и модель измерений.** Движение платформы с наноспутником описывается с помощью динамических уравнений Эйлера. Используемые переменные можно разделить на две группы. Первую группу составляют компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  абсолютной угловой скорости спутника  $\boldsymbol{\omega}$ , записанные в осях связанной с телом системы координат. Для описания ориентации применяется кватернион  $(\mathbf{q}, q_0)$ , где  $\mathbf{q}$  – векторная,  $q_0$  – скалярная часть кватерниона [16]. Динамические уравнения Эйлера движения твердого тела относительно неподвижной точки имеют вид

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) = \mathbf{M},$$

где механический момент  $\mathbf{M}$  содержит как управление  $\mathbf{M}_{\text{упр}}$ , так и возмущающие моменты, т.е.  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{упр}} + \mathbf{M}_{\text{возм}}$ ,  $\mathbf{h}$  – кинетический момент маховиков.

В случае движения наноспутника на стенде в качестве возмущающего момента рассматривается момент силы тяжести, который записывается в связанной с макетом системе координат в точке подвеса следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\text{тяж}} = mgr \times \mathbf{A} [0 \ 0 \ -1]^T,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор из точки подвеса в точку центра масс системы,  $\mathbf{A}$  – матрица направляющих косинусов, задающая переход от лабораторной системы координат в связанную с макетом систему координат,  $m$  – масса всего макета,  $g$  – ускорение свободного падения. На спутник на орбите действует гравитационный момент, который отличается от момента, возникающего вследствие несовпадения центра масс и точки подвеса, и имеет вид

$$\mathbf{M}_{\text{гр}} = \frac{3\mu}{R^3} \mathbf{e} \times \mathbf{J}\mathbf{e},$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр,  $\mathbf{e} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$ ,  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор положения спутника в инерциальной системе координат, связанной с Землей.

Динамические уравнения дополняются кинематическими уравнениями. При использовании кватерниона  $(\mathbf{q}, q_0)$  – это векторное уравнение следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ \frac{dq_0}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим модели измерений бортовых датчиков – солнечных датчиков, магнитометра и ДУС. В модель измерений магнитометра и ДУС включены смещения нулей измерений, которые на практике являются непостоянными, что усложняет возможность их нахождения с помощью наземной калибровки. Измерения магнитометра  $\mathbf{b}_{\text{изм}}$ , солнечных датчиков  $\mathbf{s}_{\text{изм}}$  и ДУС  $\boldsymbol{\omega}_{\text{изм}}$  описываются следующими моделями:

$$\mathbf{b}_{\text{изм}} = \mathbf{A}\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

$$\mathbf{s}_{\text{изм}} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \delta\mathbf{s},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{изм}} = \boldsymbol{\omega} + \Delta\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega},$$

где  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{s}$  – вектор напряженности геомагнитного поля и единичный вектор направления на Солнце в инерциальной системе координат,  $\Delta\mathbf{b}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\omega}$  – смещение нулей измерений магнитометра и ДУС,  $\delta\mathbf{b}$ ,  $\delta\mathbf{s}$ ,  $\delta\boldsymbol{\omega}$  – нормально распределенные случайные шумы измерений с нулевым математическим ожиданием.

**3. Алгоритмы оценки углового движения.** Для определения углового движения наноспутника рассматриваются два типа алгоритмов: локальный алгоритм TRIAD и алгоритм на основе расширенного фильтра Калмана.

Локальный алгоритм TRIAD не использует модель ошибок измерений и является более грубым способом оценки ориентации, но не требующим больших вычислительных затрат [17]. С помощью измерений солнечных датчиков и магнитометра можно вычислить единичные векторы

направления на центр диска Солнца  $\mathbf{s}_{\text{ИЗМ}}$  и направление локального магнитного поля  $\mathbf{b}_{\text{ИЗМ}}$  в связанной с наноспутником системе координат. Для известного положения центра масс аппарата, согласно моделям направления на Солнце и геомагнитного поля Земли, эти же векторы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  вычисляются в системе координат, связанной с Землей. Переход из инерциальной системы координат в связанную задается матрицей ориентации  $\mathbf{A}$  и определяется соотношением

$$\mathbf{s}_{\text{ИЗМ}} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad \mathbf{b}_{\text{ИЗМ}} = \mathbf{A}\mathbf{b}.$$

По двум непараллельным векторам можно построить ортонормированные базисы в связанной с телом и инерциальной системах координат:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{s}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{s} \times \mathbf{b}|}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{s}_{\text{ИЗМ}}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{s}_{\text{ИЗМ}} \times \mathbf{b}_{\text{ИЗМ}}}{|\mathbf{s}_{\text{ИЗМ}} \times \mathbf{b}_{\text{ИЗМ}}|}, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2.$$

Ортогональная матрица  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющая уравнениям

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

выражается следующей формулой:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Эта матрица перехода и является оценкой ориентации аппарата, согласно алгоритму TRIAD.

Определение углового движения наноспутников можно выполнить на основе постполетной реконструкции движения, как в работах [18, 19], или на борту аппарата в режиме реального времени [20]. Фильтр Калмана, несмотря на ограничения по бортовым вычислительным мощностям, широко используется на малогабаритных космических аппаратах. Фильтр Калмана разработан для линейных динамических систем и дает наилучшую оценку вектора состояния по среднеквадратическому критерию [21–23]. Однако расширенный фильтр Калмана применяется для нелинейных моделей как динамической системы, так и измерений:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t),$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k,$$

где  $\mathbf{w}(t)$  – нормально распределенная ошибка модели системы с ковариационной матрицей  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{z}_k$  – вектор дискретно поступающих измерений в моменты времени  $t_k$ ,  $\mathbf{G}$  – матрица, задающая влияние этой ошибки на модель динамической системы,  $\mathbf{v}_k$  – нормально распределенная ошибка измерений с ковариационной матрицей  $\mathbf{R}_k$ .

Для построения фильтра функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  представляются в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности оценки текущего вектора состояния. После этого удерживаются только линейные члены разложения. Матрица динамики системы и матрица модели измерений вычисляются как

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}.$$

Для расширенного фильтра Калмана при дискретно поступающих измерениях вектор состояния на этапе прогноза вычисляется путем интегрирования нелинейных уравнений движения и на этапе коррекции используется нелинейная модель измерений. Пусть в некоторый момент  $t_{k-1}$  известна оценка вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  с ковариационной матрицей  $\mathbf{P}_{k-1}^+$ . Работа расширенного дискретного фильтра Калмана описывается с помощью следующих двух этапов.

Этап прогноза:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, t) dt,$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k,$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \mathbf{\Phi}_k^T (t_k - t_{k-1}).$$

Таблица 1. Параметры фильтра Калмана

Название	Величина
Среднеквадратичное отклонение (солнечные датчики, магнитометр, датчик угловой скорости)	$\sigma_s = 0.01^\circ$ , $\sigma_b = 100$ нТл, $\sigma_\omega = 0.05$ град/с
Начальные значения диагональных элементов матрицы $\mathbf{P}$	$\sigma_q^2 = 10^{-2}$ , $\sigma_\omega^2 = 10^{-2} \text{с}^{-2}$ , $\sigma_{\Delta\omega}^2 = 10^{-6} \text{с}^{-2}$ , $\sigma_{\Delta b}^2 = 1$
Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}$ для освещенного участка орбиты	$\sigma_d^2 = 10^{-10} \text{Н}^2 \cdot \text{м}^2$ , $\sigma_{\Delta\omega}^2 = 10^{-8} \text{с}^{-2}$ , $\sigma_{\Delta b}^2 = 10^{-9}$
Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}$ для теневого участка орбиты	$\sigma_d^2 = 10^{-9} \text{Н}^2 \cdot \text{м}^2$ , $\sigma_{\Delta\omega}^2 = 10^{-14} \text{с}^{-2}$ , $\sigma_{\Delta b}^2 = 10^{-10}$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t_k)], \\ \mathbf{P}_k^+ &= [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^-, \end{aligned}$$

где  $\Phi_k = e^{\mathbf{F}_k(t_k - t_{k-1})}$  – матрица перехода из состояния  $k-1$  в состояние  $k$ , которая рассчитывается как матричная экспонента,  $\mathbf{E}$  – единичная матрица,  $\mathbf{K}$  – весовая матрица.

Вектор состояния фильтра Калмана состоит из векторной части кватерниона ориентации, вектора угловой скорости, а также смещения нулей измерений магнитометра и ДУС:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \ \boldsymbol{\omega}^T \ \Delta\boldsymbol{\omega}^T \ \Delta\mathbf{b}^T]^T.$$

После линеаризации уравнений движения матрица динамики имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}]_{\times 3 \times 3} & \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \left( \frac{6\mu}{R^5} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}_{\text{гп}} \right)_{3 \times 3} & (-\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}_x)_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{12 \times 12},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{гп}} &= [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{J} [\mathbf{e}]_{\times} - [\mathbf{J} \mathbf{e}]_{\times} [\mathbf{e}]_{\times}, \\ \mathbf{F}_x &= [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{J} - [\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}]_{\times}. \end{aligned}$$

Здесь  $[\mathbf{a}]_{\times}$  обозначает кососимметрическую матрицу, заполненную заданными компонентами вектора  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ :

$$[\mathbf{a}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица измерений зависит от набора применяемых датчиков. Для случая использования измерений всех трех датчиков она имеет следующий вид:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2[\mathbf{b}^s]_{\times 3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 2[\mathbf{s}^s]_{\times 3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 12}.$$

Точность оценок фильтра Калмана зависит от весовой матрицы  $\mathbf{K}$ . Элементы этой матрицы сложным образом зависят от начального значения матрицы ошибок  $\mathbf{P}(0) = M[\Delta\mathbf{x}(t_0) \Delta\mathbf{x}^T(t_0)]$ ,

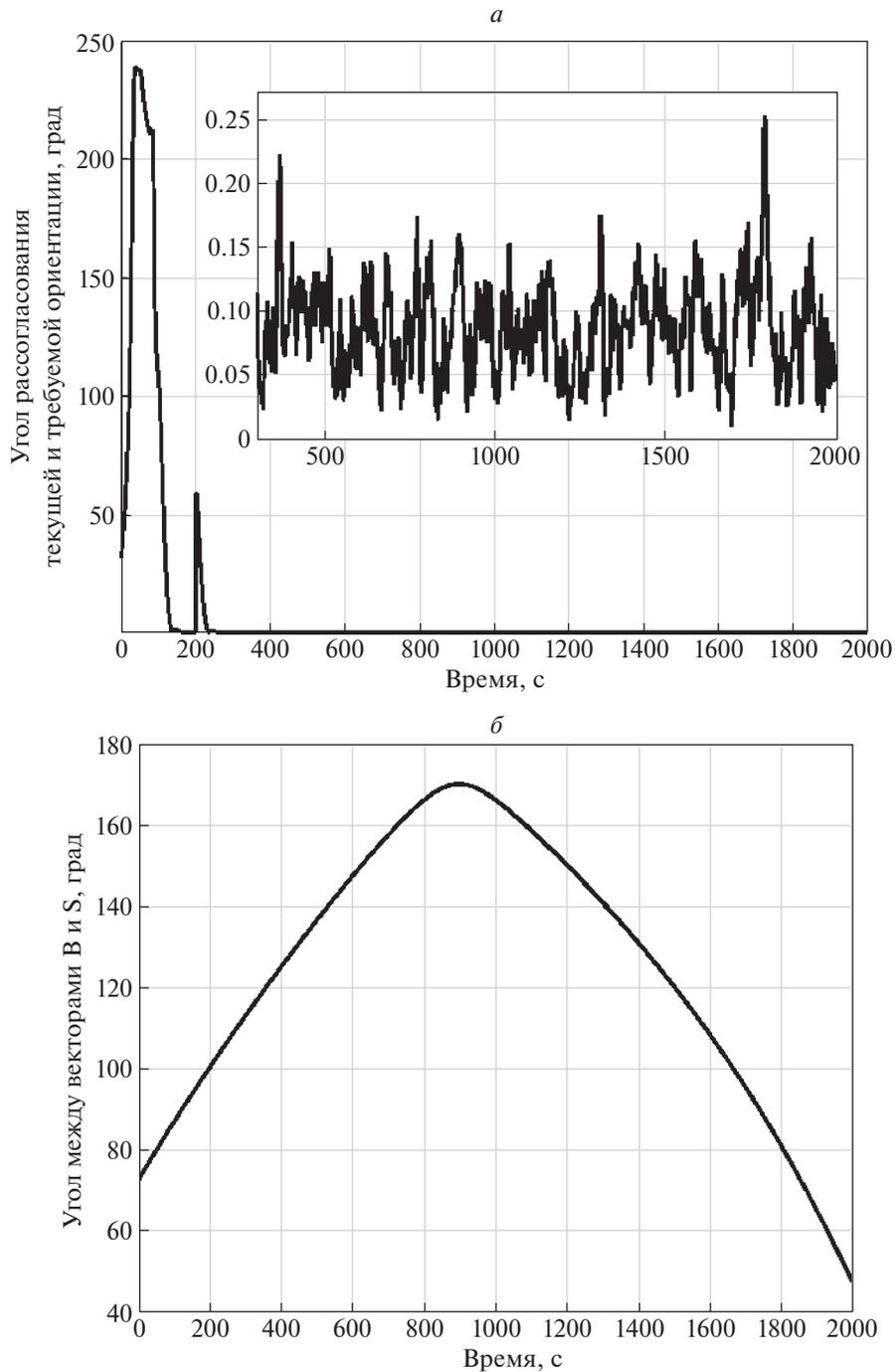


Рис. 2. Суммарная ошибка ориентации (а) и угол между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  от времени (б)

где  $\Delta \mathbf{x}(t_0)$  – вектор ошибок априорного вектора состояния в начальный момент времени  $t_0$ , от задания матрицы ошибки модели движения  $\mathbf{Q}$  и матрицы шума измерений  $\mathbf{R}$ . Матрицы  $\mathbf{P}(0)$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  выбираются в соответствии с параметрами системы. Однако зачастую реальные параметры системы известны неточно и отличаются от предполагаемых значений, используемых в фильтре Калмана. Поэтому возникает задача нахождения таких параметров фильтра Калмана, при которых оценка будет наилучшей при заданных неучтенных шумах модели и измерений, которые имеют ненулевое математическое ожидание. Эта процедура называется настройкой фильтра Калмана.

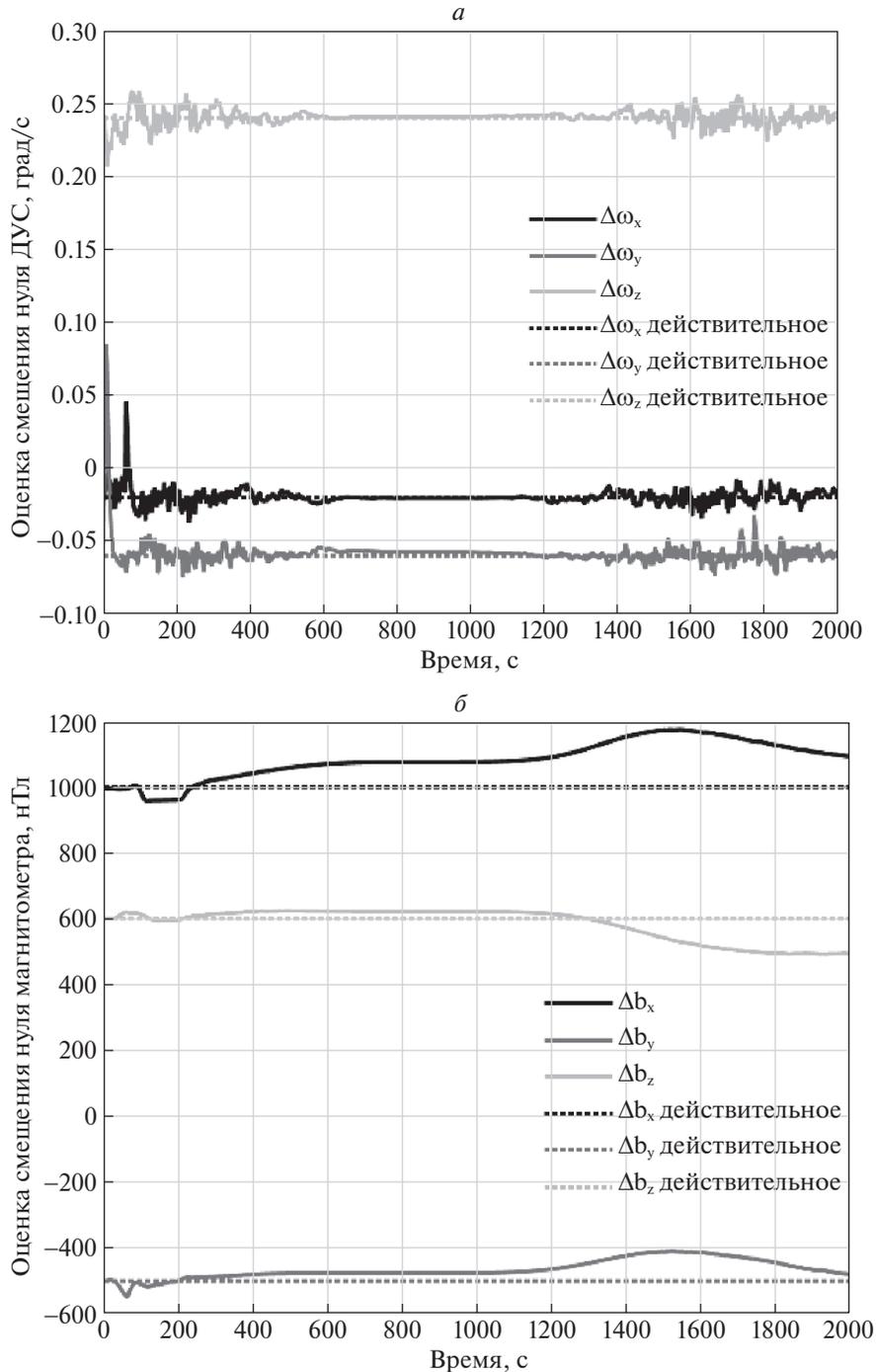


Рис. 3. Оценка смещения нулей датчика угловой скорости (а) и магнитометра (б)

Точность оценок фильтров Калмана, основанных на измерениях магнитометра и солнечного датчика, зависит от угла между вектором направления на Солнце и вектором геомагнитного поля. При движении по орбите могут возникать такие ситуации, когда эти векторы становятся близкими к коллинеарным. В этом случае оценки вектора состояния ухудшаются до уровня, если бы использовались измерения только одного позиционного датчика. В настоящей работе на этапе коррекции вектора состояния весовую матрицу  $\mathbf{K}$  предлагается умножить на некоторый коэффициент меньше 1, зависящий от угла между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$ . При таком подходе после сходимости оценки фильтра Калмана будут больше опираться на результат интегрирования уравнений движения,

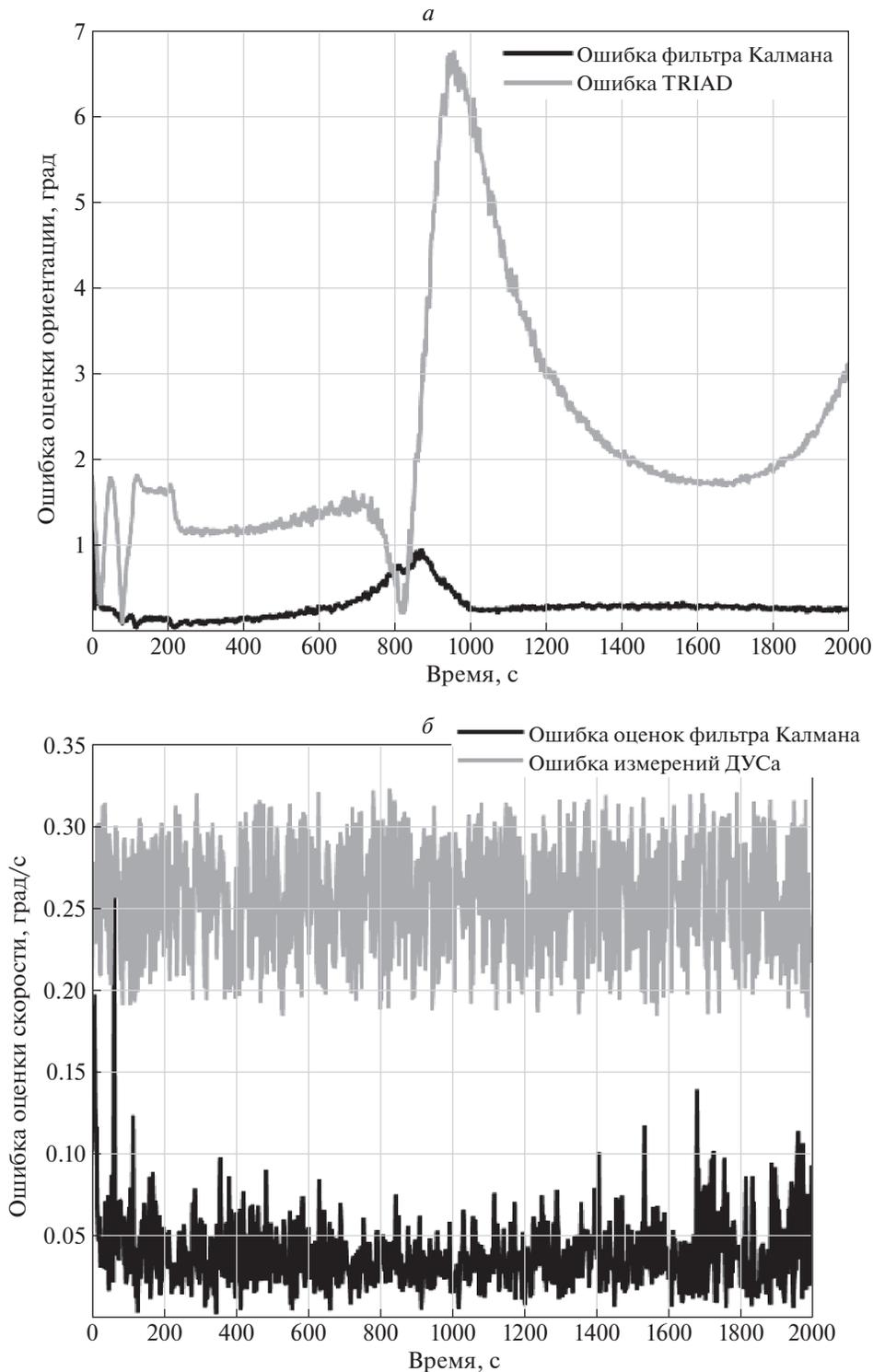


Рис. 4. Ошибка определения ориентации (а) и угловой скорости (б) фильтра Калмана и алгоритма TRIAD

чем на корректировку оценок при получении измерений, и при уменьшении угла между **s** и **b** не произойдет значительного ухудшения точности. Однако некоторое ухудшение точности все же неизбежно, так как неучтенные в фильтре Калмана возмущения приведут к ошибкам в интегрировании уравнений движения. Как показали результаты численных исследований, ухудшение точности происходило в основном за счет неправильной оценки смещений нулей датчиков в

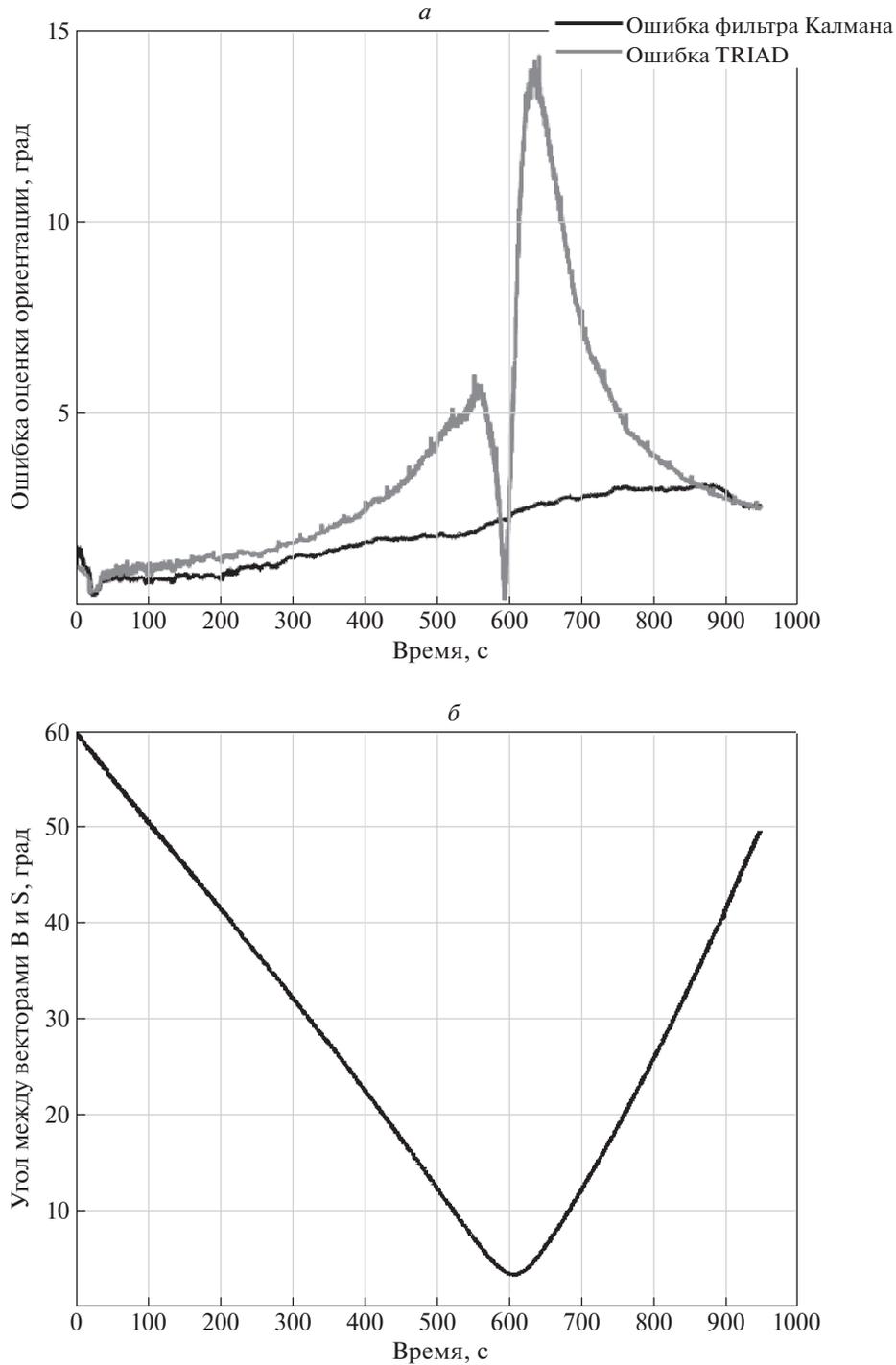


Рис. 5. Точность алгоритмов определения ориентации от времени (а), изменение угла между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  от времени (б)

ситуации, когда  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  почти коллинеарны. Поэтому вышеприведенная формула для коррекции смещений нуля датчиков была преобразована к виду

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\Delta\omega, \Delta\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\Delta\omega, \Delta\mathbf{b}} + [\sin(\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{b}})]^N \Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\Delta\omega, \Delta\mathbf{b}},$$

где  $k$  – номер итерации,  $\hat{\mathbf{x}}^{\Delta\omega, \Delta\mathbf{b}}$  – часть вектора состояния, содержащая оценки смещений нуля магнитометра и ДУС,  $\hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{b}}$  – угол между векторами на Солнце и магнитного поля,  $\Delta\hat{\mathbf{x}}_k^{\Delta\omega, \Delta\mathbf{b}}$  – величина коррекции смещения нуля датчиков,  $N$  – настроечный параметр.

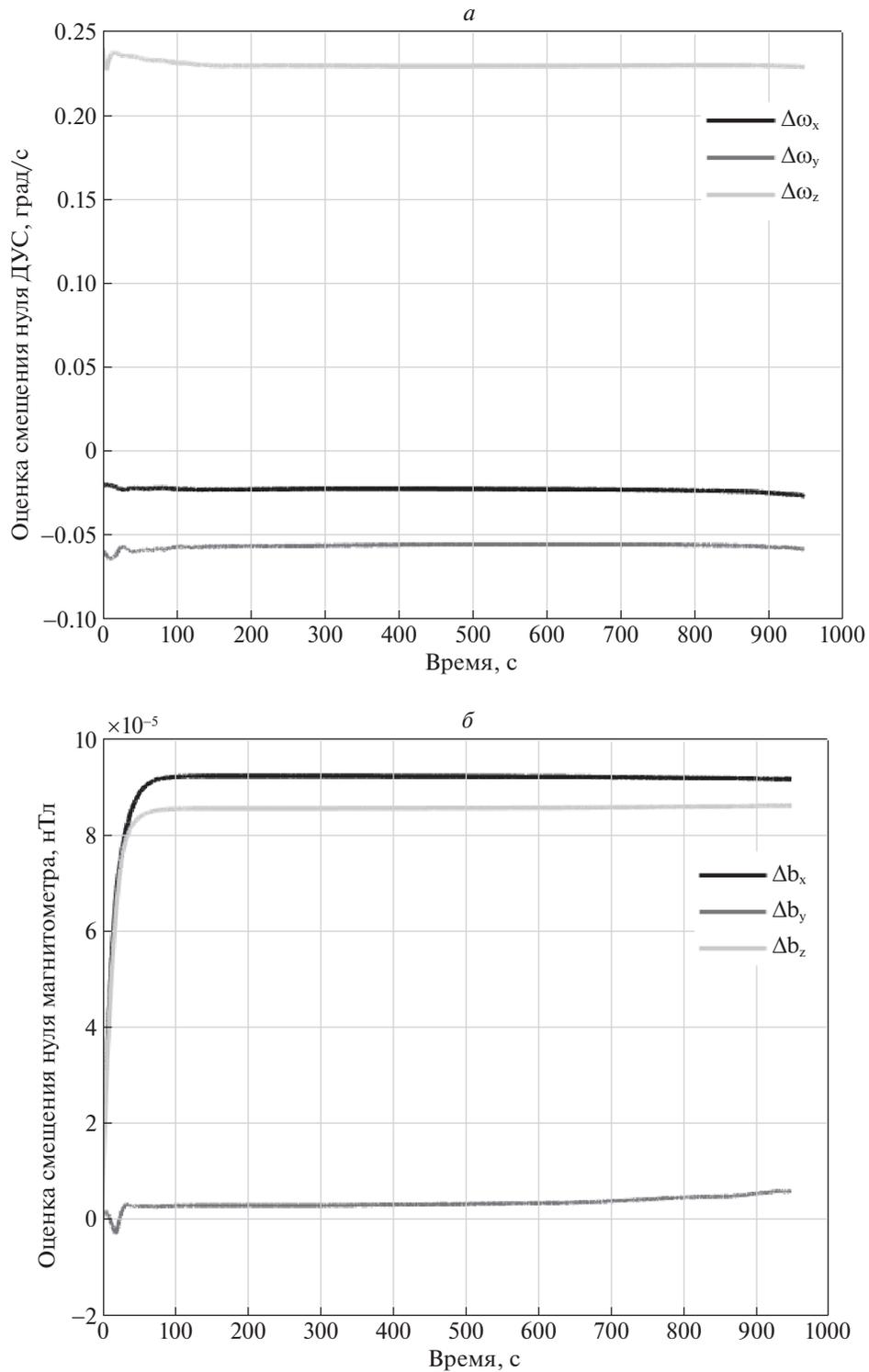


Рис. 6. Оценка смещения нуля датчика угловой скорости (а) и магнитометра (б)

**4. Лабораторные исследования алгоритмов определения углового движения.** Процесс настройки и исследования работы фильтров Калмана происходит в два этапа: численное моделирование орбитального углового движения и проведение экспериментов на лабораторном стенде. Моделирование позволяет найти параметры фильтров и оценить точность определения углового движения с учетом выбранных наиболее существенных возмущающих моментов, действующих на

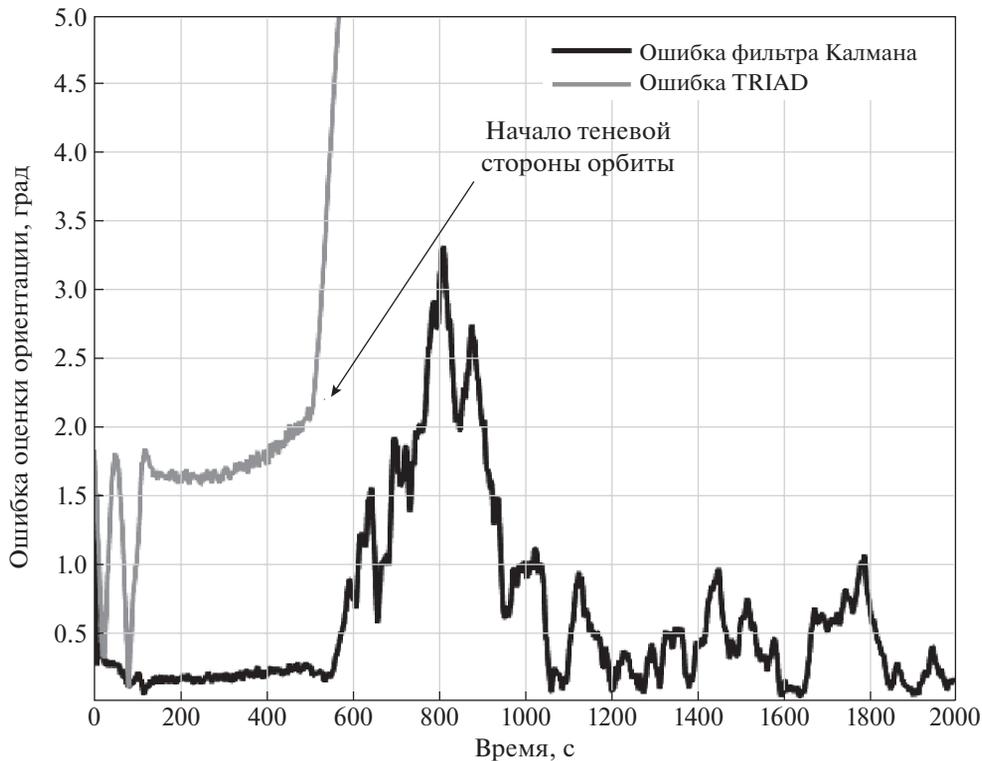


Рис. 7. Точность оценки фильтра Калмана и алгоритма TRIAD от времени

аппарат. При проведении лабораторных экспериментов на аппарат действует неучтенный в модели движения момент силы гравитации. На оценки точности работы алгоритмов в лабораторных условиях влияют неточности имитатора Солнца, имеющего угол расхождения, неравномерность создания магнитного поля катушками Геймгольца, а также неточность определения ориентации системой независимых измерений. Совокупность перечисленных факторов приводит к ситуации, в которой наилучшие настройки алгоритмов при математическом моделировании и при проведении эксперимента отличаются. Альтернативой является использование грубых коэффициентов, не приводящих к существенному ухудшению точности ни в одном из видов моделирования работы системы определения углового движения.

В таблице 1 приведены параметры фильтра Калмана для моделирования и проведения экспериментов на стенде. При математическом моделировании рассматривалась солнечно-синхронная орбита наклонением  $97.2^\circ$  и высотой 470 км.

4.1. Результаты моделирования работы алгоритмов на освещенном участке орбиты. Для тестирования работы расширенного фильтра Калмана на освещенной части орбиты задается режим движения с переориентацией. На рис. 2 представлены суммарный угол рассогласования текущей и требуемой ориентации и угол между направлением вектора локального геомагнитного поля и направлением на Солнце. Большие углы рассогласования на интервале от начала до 100 с объясняются переходными процессами при стабилизации в орбитальной системе координат. Скачок в рассогласовании в момент 200 с обусловлен маневром переориентации. На графике угла между векторами **s** и **b** можно наблюдать интервалы, когда векторы становятся близкими к коллинеарным, а именно на интервале 800–1000 с. На рис. 3 приведены результаты оценки смещений нулей магнитометра и ДУС. Благодаря предложенной модификации алгоритма при приближении угла к критическому значению коррекция смещений нулей не происходит, что положительно сказывается на общей точности оценок фильтра. Эмпирическим путем было выбрано значение настроечного параметра  $N = 4$ .

Сравнивая результаты работы алгоритма TRIAD и фильтра Калмана, на рис. 4, а можно увидеть, что на интервале 800–1000 с ошибка оценки локального алгоритма превышает  $6^\circ$ , в то время как ошибка фильтра находится в пределах  $1.5^\circ$ . Вне критического интервала угла между **s** и **b** точность TRIAD составляет около  $1.5^\circ$ , фильтра Калмана —  $0.5^\circ$ . На рис. 4, б представлена

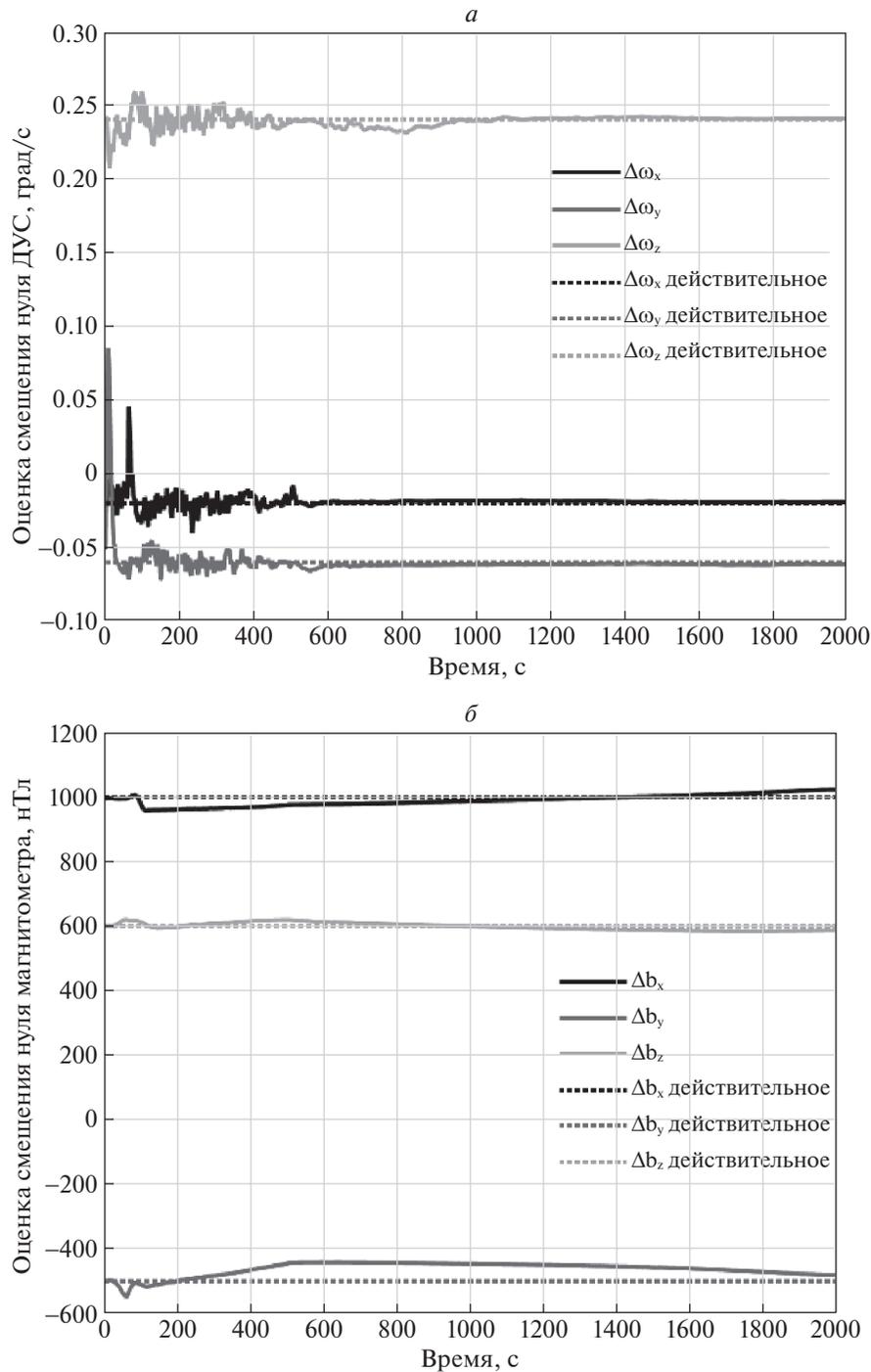


Рис. 8. Оценка смещений нулей датчика угловой скорости и магнитометра с помощью фильтра Калмана

ошибка оценки угловой скорости, полученной с помощью фильтра Калмана, и ошибка измерений ДУС, которая имеет значительно большее значение за счет смещения нуля измерений.

4.2. Результаты лабораторных экспериментов при работе алгоритмов на освещенном участке орбиты. Магнитное поле на стенде моделируется в соответствии с орбитальным движением спутника, идентичным рассмотренному выше случаю. Однако положение имитатора Солнца на стенде отличается от направления на Солнце при математическом моделировании. Поэтому угол между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  отличается от результатов моделирования

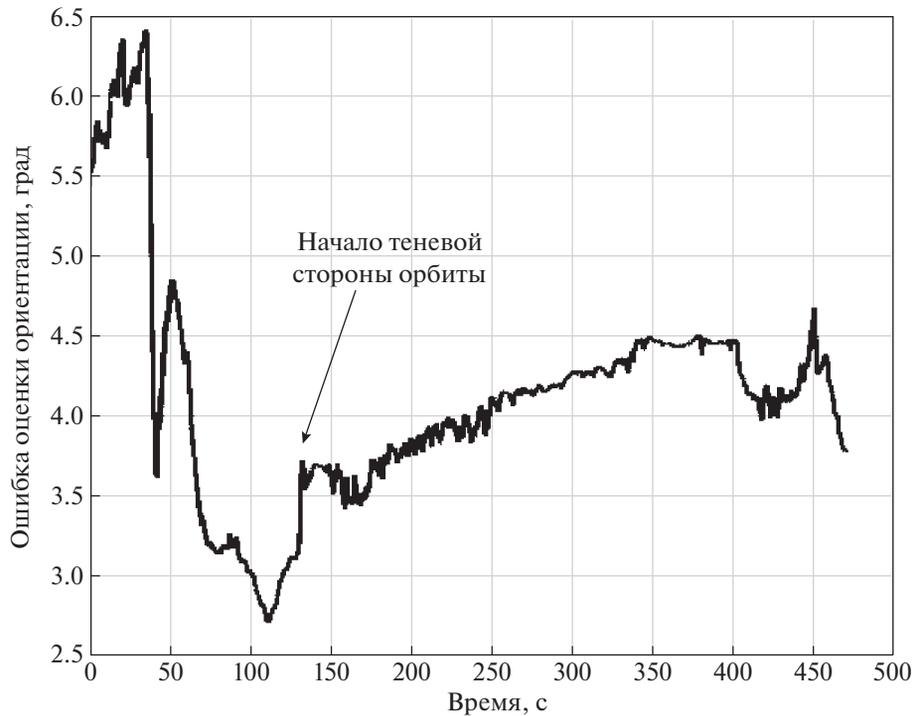


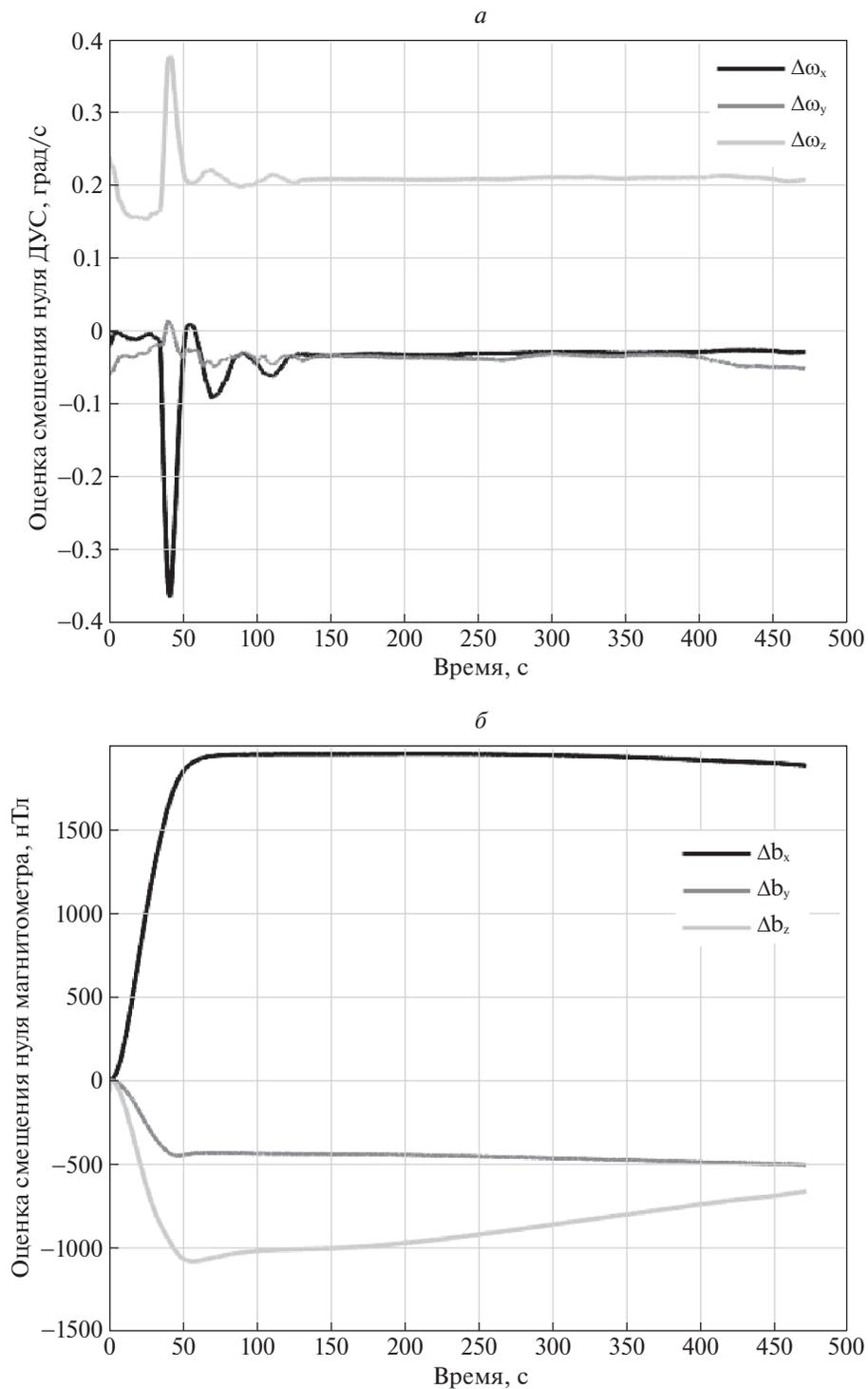
Рис. 9. Точность алгоритмов определения ориентации от времени

(рис. 5). Критический интервал с неблагоприятными углами между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  наблюдается на участке между 500–700 с. Во время эксперимента система стабилизации удерживает требуемое угловое положение в лабораторной системе координат.

Точность алгоритмов оценивалась с использованием системы независимых измерений. С течением времени изменялся угол между вектором магнитного поля и направлением на Солнце, что приводило к резкому снижению точности алгоритма TRIAD. На рис. 5, а приведена разность оценок углового положения, полученных с помощью алгоритмов определения ориентации и системой независимых измерений. На графике для алгоритма TRIAD виден резкий скачок ошибки до  $15^\circ$  около момента времени 630 с. При этом ошибка фильтра Калмана также ухудшается, однако подобного скачка не имеет. Сопоставив эти графики с углом между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 5, б), заметим, что ухудшение точности происходит синхронно с приближением угла между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  к нулевому значению. Отметим, что наблюдаемые в лабораторном эксперименте ошибки алгоритмов отличаются от результатов моделирования. Это обусловлено отличием максимального приближения к коллинеарности векторов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$  и влиянием неучтенного в уравнениях движения момента силы тяжести, воздействующего на движение платформы с наноспутником.

На рис. 6 представлено изменение оценки смещений нулей датчиков от времени. Соотнеся их с графиком изменения угла между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$ , можно заметить, что коррекция этих параметров происходит более активно при отдалении от критического значения угла между  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{b}$ , а при его приближении к коллинеарности векторов — фиксируется.

4.3. Результаты моделирования работы алгоритма на теневом участке орбиты. На рис. 7 и 8 можно увидеть результаты моделирования для ситуации потери измерений датчиков Солнца, которое может происходить на теневом участке орбиты. Заметим, что в момент потери телеметрии солнечных датчиков в точке 500 с выключается алгоритм TRIAD, а фильтр Калмана на основе измерений солнечного датчика, магнитометра и ДУС переключается на режим работы с использованием только магнитометра и ДУС. График оценки точности алгоритма TRIAD после выключения солнечных датчиков показывает разность последнего значения алгоритма и текущей ориентации, что на теневой стороне орбиты является неадекватным значением. В момент выключения солнечных датчиков наблюдается ухудшение точности фильтра Калмана. На приведенных далее графиках оценок смещений нулей датчиков видно, что



**Рис. 10.** Оценка смещения нуля датчика угловой скорости (а) и магнитометра с помощью фильтра Калмана (б)

коррекция значений практически не выполняется за счет задания другого набора параметров фильтра Калмана, представленных в таблице.

4.4. Результаты экспериментов при работе алгоритма на теновом участке орбиты. На рис. 9 и 10 можно увидеть результаты эксперимента на стенде. На первом графике приведено отклонение оценок ориентации фильтра Калмана от оценок системы независимых измерений. Рисунок 10 демонстрирует изменение оценки смещений нулей датчиков.

До момента выключения имитатора Солнца в момент около 130 с наблюдается процесс сходимости оценок фильтра Калмана, в момент выключения ошибка определения ориентации составила около  $3^\circ$ . После выключения имитатора Солнца точность ухудшилась, но не превышала ошибки в  $4.5^\circ$  на протяжении более 300 с. На рис. 10 также наблюдается процесс сходимости оценок смещения нулей. После выключения имитатора Солнца значения оценок смещений нулей датчиков остаются на прежнем уровне. С течением времени наблюдается плавное изменение этих значений, вызванное влиянием неучтенного момента силы тяжести.

**Заключение.** Приведены результаты исследования алгоритмов определения углового движения с использованием математического моделирования их работы и с помощью полунатурного стенда, позволяющего имитировать угловое движение наноспутника и создавать внешние условия, необходимые для измерений бортовых датчиков. Вследствие влияния неучтенного в модели движения момента силы тяжести, возникающего из-за смещения центра масс системы относительно точки подвеса, ошибки оценок алгоритмов на основе расширенного фильтра Калмана несколько отличаются от результатов математического моделирования. Однако алгоритмы имеют похожее качественное поведение ошибок в зависимости от угла между направлением локального геомагнитного поля и направления на Солнце. Предложенная модификация расширенного фильтра Калмана, позволяющая уменьшить коррекцию оценок смещения нулей магнитометра и ДУС при приближении векторов к коллинеарности, приводит к уменьшению ошибки оценки ориентации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ovchinnikov M., Ivanov D., Ivlev N. et al.* Development, Integrated Investigation, Laboratory and In-Flight Testing of Chibis-M Microsatellite ADCS // *Acta Astronautica*. 2014. V. 93. P. 23–33.
2. *Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. и др.* Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибис-М” на лабораторном стенде // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2012. № 1. С. 118–137.
3. *Haussermann W., Kennel H.* A Satellite Motion Simulator // *Automatica*. 1960. V. 5. № 12. P. 22–25; 90–91.
4. *Peck M., Miller L., Cavender A. et al.* An Airbearing-Based Testbed for Momentum Control Systems and Spacecraft Line of Sight // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2003. V. 114. P. AAS 03-127.
5. *Cordova S.S.F., DeBra D.B.* Mass Center Estimation of a Drag-Free Satellite // *Proc. of the 6th Triennial World Congr. of the IFAC*. Boston, 1975.
6. *Prado J., Bisiacchi G., Reyes L. et al.* Three-axis Air-bearing Based Platform for Small Satellite Attitude Determination and Control Simulation // *J. Applied Research and Technology*. 2005. V. 3. № 3. P. 222–237.
7. *Post M.A., Li J., Lee R.* Design and Construction of a Magnetic Field Simulator for CubeSat Attitude Control Testing // *J. Instrumentation, Automation and Systems*. 2014. V. 1. № 1. P. 1–9.
8. *Prinkey M., Miller D., Bauer P. et al.* CubeSat Attitude Control Testbed Design: Merritt 4-Coil per Axis Helmholtz Cage and Spherical Air Bearing // *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conf.* Reston, Virginia, 2013.
9. *Silva R., Ishioka I., Cappelletti C. et al.* Helmholtz Cage Design and Validation for Nanosatellites HWIL Testing // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2019. V. 55. № 6. P. 3050–3061.
10. *Pastena M., Sorrentino L., Grassi M.* Design and Validation of the University of Naples Space Magnetic Field Simulator (SMAFIS) // *J. IEST. Institute of Environmental Sciences & Technology*. 2001. V. 44. № 1. P. 33–42.
11. *Kim J.J., Agrawal B.N.* Automatic Mass Balancing of Air-Bearing-Based Three-Axis Rotational Spacecraft Simulator // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2009. V. 32. № 3. P. 1005–1017.
12. *Wang S., Ma J., Gao S.* Balancing Methods on the Three-Axis Air-Bearing Platform // *Asia Simulation Conf.* Shanghai: Springer, 2012. P. 117–125.
13. *Chesi S., Gong Q., Pellegrini V. et al.* Automatic Mass Balancing of a Spacecraft Three-Axis Simulator: Analysis and Experimentation // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2014. V. 37. № 1. P. 197–206.
14. *Иванов Д.С., Иванова Т.А., Ивлев Н.А. и др.* Оценка тензора инерции и автоматическая балансировка макета микроспутника на аэродинамическом подвесе // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2021. № 2. С. 138–155.
15. СПУТНИКС – Испытательные стенды [электронный ресурс]. URL: <https://sputnix.ru/ru/oborudovanie/ispitatelnye-stendy/> (дата доступа: 12.02.2021).
16. *Бранец В.Н.* Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. М.: МФТИ, 2009. 304 р.
17. *Иванов Д.С., Ивлев Н.А., Карпенко С.О. и др.* Результаты летных испытаний системы ориентации микроспутника Чибис-М // *Космич. исслед.* 2014. Т. 52. № 3. С. 218–228.

18. *Kramlikh A.V., Lomaka I.A.* Nanosatellite's Rotational Motion Parameters Determination Using Light Sensor and Angular Velocity Sensor Measurements // 25th Saint Petersburg. Int. Conf. Integr. Navig. Syst. (ICINS 2018). Saint Petersburg. Proc. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2018. P. 1–3.
19. *Белоконов И.В., Крамлих А.В., Ломака И.А. и др.* Восстановление углового движения космического аппарата по данным о токосъеме с панелей солнечных батарей // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2. С. 133–144.
20. *Ivanov D., Roldugin D., Tkachev S. et al.* Attitude Motion and Sensor Bias Estimation Onboard the SiriusSat-1 Nanosatellite Using Magnetometer Only // Acta Astronautica 2021. V. 188. P. 295–307.
21. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng. 1960. V. 82. P. 35–45.
22. *Степанов О.А.* Фильтр Калмана: история и современность (к 80-летию Рудольфа Калмана) // Гироскопия и навигация. 2010. № 2. С. 107–121.
23. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2010. 126 с.

---

---

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

---

---

УДК 629.78

**МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ  
ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ<sup>1</sup>**© 2022 г. Ю. М. Заболотнов<sup>а,\*</sup>, А. А. Назарова<sup>а,\*\*</sup><sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский ун-т, Самара, Россия

\*e-mail: yumz@yandex.ru

\*\*e-mail: anazarova63@gmail.ru

Поступила в редакцию 27.01.2022 г.

После доработки 02.03.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Рассматривается задача развертывания тросовой группировки из четырех космических аппаратов. В центре группировки расположен космический аппарат, с которого происходит выпуск трех тросов с концевыми малыми космическими аппаратами (спутниками). После формирования группировка представляет собой симметричную лучевую “звездную” симметричную структуру космических аппаратов (ступица – спицы или “Hub-Spoke”), стабилизированную вращением с некоторой заданной угловой скоростью. Предлагается и анализируется комбинированный метод управления при формировании тросовой группировки, который заключается в совместном использовании электромагнитных сил, действующих на проводящие ток тросы в магнитном поле Земли, для создания вращающего момента относительно центра масс системы и механизмов управления выпуском тросов, расположенных на центральном космическом аппарате. Приводятся результаты численных расчетов, иллюстрирующие применение рассматриваемых законов управления.

DOI: 10.31857/S000233882204014X

**Введение.** В настоящее время имеется много проектов полезного применения группировок космических аппаратов (КА) для различных целей (навигация, связь, наблюдение, измерения и т.д.). Важное место при этом занимают проекты использования тросовых группировок космических аппаратов (ТГКА), имеющих дополнительные механические связи между КА, что помогает при определенных условиях сохранять их геометрическую конфигурацию с минимальными затратами энергии. Среди наиболее известных конфигураций ТГКА можно отметить линейные структуры [1–5], когда КА располагаются на одной прямой чаще всего вдоль местной вертикали в режиме гравитационной стабилизации. Более сложные структуры ТГКА в отличие от линейных обычно стабилизированы вращением с некоторой заданной угловой скоростью относительно своего центра масс системы. Здесь можно отметить структуры в виде “кольца” [1, 6–11] и лучевые “звездные” конфигурации (“Hub-Spoke”) [12–17]. Если “кольца” не имеют центрального КА и управление их движением распределяется по всем КА, то в лучевых “звездных” структурах все управляющие функции, как правило, принадлежат центральному КА, в частности, с помощью специальных механизмов осуществляется управление выпуском тросов. Наряду с плоскими ТГКА представляют интерес пространственные системы, которые, например, можно использовать для многоточечных 3D-измерений в околоземном пространстве. Это пирамидальные структуры [1, 18, 19], которые вращаются вокруг вертикали, проходящей через их центр масс.

Из-за сложной динамики рассматриваемых многоэлементных тросовых систем методы их управления движением требуют дальнейшего развития. Наиболее сложным с этой точки зрения является этап формирования ТГКА, который (особенно для систем со сложной нелинейной структурой) еще недостаточно изучен. Второе направление исследований – это совершенствование математических моделей движения ТГКА. Здесь следует отметить, что рассмотрение ТГКА как системы с распределенными параметрами позволяет осуществлять контроль над

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-53002).

формой тросов в процессе их развертывания и при дальнейшем функционировании ТГКА на орбите. Важным также представляется учет углового движения КА, входящих в состав ТГКА, относительно своих центров масс. Здесь следует отметить, что в подавляющем числе работ, посвященных динамике ТГКА, КА рассматриваются как материальные точки, что во многих случаях является недопустимым упрощением, в частности, если имеются ограничения на угловые положения КА относительно направления тросов [20] в процессе управления системой.

В работе предлагается и исследуется способ управления при формировании ТГКА треугольной лучевой конфигурации, вращающейся в плоскости орбиты ее центра масс. После развертывания ТГКА имеет симметричную структуру, в центре которой находится КА достаточно большой массы. При этом концевые малые КА (далее просто спутники) прикреплены к нему тросами, которые составляют между собой угол  $120^\circ$ . Особенностью предлагаемого комбинированного подхода при управлении процессом формирования вращающейся ТГКА является совместное применение электромагнитных сил, действующих на проводящие ток тросы в магнитном поле Земли, и механизмов выпуска тросов, расположенных на центральном КА. Электромагнитные силы, которые на каждом элементарном участке троса ему ортогональны, представляют собой распределенную по длине тросов нагрузку, равнодействующая которой создает вращающий момент, в конечном итоге обеспечивающий заданную угловую скорость вращения системы после ее формирования. Технология использования проводящих ток тросов в космосе активно разрабатывается. Достаточно сказать, что до настоящего времени различными странами проведено более 10 реальных тросовых экспериментов на орбите [21, 22].

Механизмы, обеспечивающие выпуск тросов, предназначены для регулирования силы натяжения тросов в соответствии с заданной номинальной программой их развертывания. Регулирование осуществляется по измерениям скорости и длины тросов в момент их выпуска из механизмов управления. Аналогичное регулирование при выпуске троса использовалось при проведении тросового эксперимента на орбите YES2 [23]. Основная цель регулирования — это обеспечить выполнение заданных ограничений на силу натяжения тросов (тросы должны быть натянуты) и на скорость выпуска тросов (механизмы работают только на их торможение), которая при достижении заданной длины тросов должна быть равна нулю.

Применяется классическая схема управления с обратной связью по отклонениям переменных состояния системы от номинальных значений. Для выбора номинальной программы формирования ТГКА осуществляется построение упрощенной модели движения системы с помощью уравнений Лагранжа. Упрощенная модель движения ТГКА служит для обоснованного выбора параметров номинальной программы ее развертывания, которая строится таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость конечного состояния системы после окончания выпуска тросов. Понятно, что в этом случае свойство асимптотической устойчивости имеет место в силу упрощенной модели движения системы. В процессе развертывания ТГКА величина тока в тросах постоянна и его выключение происходит уже после окончания выпуска тросов при достижении требуемой угловой скорости вращения системы относительно центра масс.

Проверка возможности реализации предлагаемой номинальной программы формирования ТГКА производится с использованием более полной модели движения системы, учитывающей растяжимость и односторонность механических связей между КА (тросов), работу системы регулирования с учетом инерционности механизмов управления, изгибные колебания тросов под действием распределенной нагрузки от электромагнитных сил, возможный пространственный характер движения ТГКА при наличии возмущений, связанных с начальными условиями движения (включая ошибки при разделении КА и влияние наклона орбиты). В более полной модели движения ТГКА центральный КА рассматривается как твердое тело для возможности контроля его углового движения. Контроль углового движения центрального КА необходим для согласования его вращения с вращением тросов, которые в идеальном случае должны иметь ту же угловую скорость, что и центральный КА, в процессе развертывания системы. Для оценки изменения формы тросов в процессе развертывания системы они в более полной модели движения ТГКА описываются множеством материальных точек, связанных между собой растяжимыми односторонними связями.

Здесь можно отметить, что принципиально существует альтернативный способ создания вращательного момента, обеспечивающего заданную угловую скорость вращения системы вокруг центра масс в процессе формирования ТГКА, который связан с использованием двигателей малой тяги, расположенных на концевых спутниках. Например, такой способ был рассмотрен в работе [24] для тросовой системы, состоящей из двух КА. Однако такой подход имеет недостаток, связанный с необходимостью обеспечения заданной ориентации векторов тяги относительно

направлений тросов, что ведет к необходимости стабилизации движения спутников вокруг своих центров масс, т.е. разработке дополнительной системы управления. Если концевые тела представляют собой малоразмерные спутники малой массы, то использование двигателей малой тяги становится проблематичным.

Для оценки возможности применения предлагаемой схемы управления процессом формирования ТГКА приводятся характерные примеры численного моделирования движения системы в плоском и пространственном случаях с учетом действующих возмущений с помощью более полной модели движения. Показано, что после окончания формирования ТГКА тросы практически прямолинейны и совершают малые колебания с почти постоянной амплитудой относительно своих номинальных значений. С учетом этого предлагается дополнительный алгоритм стабилизации движений тросов, основанный на регулировании величины тока в тросах.

**1. Постановка задачи.** Необходимо разработать программу управления для формирования вращающейся ТГКА треугольной лучевой конфигурации разомкнутого типа, которая характеризуется тем, что концевые спутники не соединены между собой тросами. В начальном положении КА и спутники жестко связаны между собой, т.е. представляют собой симметричное твердое тело (рис. 1, а), которое по своей структуре повторяет геометрическую конфигурацию системы в конечном состоянии после ее формирования. В номинальном случае (без учета возмущений) до разделения КА и спутников твердое тело вращается в плоскости орбиты с некоторой угловой скоростью  $\omega_0$ . Отделение спутников от КА происходит с некоторыми относительными скоростями, причем их векторы в идеальном случае составляют между собой угол  $120^\circ$  и имеют равные модули. Все управляющие функции возлагаются на центральный КА, на котором имеются специальные механизмы для регулирования процесса выпуска тросов и бортовые источники энергии для обеспечения заданной величины тока в тросах. Применяется традиционная схема электродинамической тросовой системы в режиме генерации тяги для изолированного троса [1, 25], когда формируется контур электрической цепи, который замыкается через ионосферу. Используя описанные органы управления процессом формирования ТГКА, необходимо перевести систему в заданное конечное состояние. В конечном состоянии ТГКА имеет симметричную структуру, приведенную выше, и вращается с угловой скоростью  $\omega_{end}$ , которая зависит от момента выключения тока. По окончании развертывания тросов необходимо обеспечить плавное их торможение, а именно, чтобы при  $l = l_{end}$  выполнялось  $dl/dt = d^2l/dt^2 = 0$ .

**2. Простая модель движения и номинальная программа формирования ТГКА.** Для построения номинальной программы развертывания тросов и закона изменения тока применяются достаточно простые уравнения плоского движения системы относительно центра масс, соответствующие идеальному случаю, когда в процессе формирования ТГКА сохраняется ее полная симметрия. Основные допущения: центральный КА и спутники рассматриваются как материальные точки, тросы нерастяжимы, невесомы и прямолинейны, влиянием гравитационных сил на движение системы относительно центра масс и вращением орбитальной подвижной системы координат  $Sx_oy_oz_0$  (рис. 1, б) пренебрегается, вектор магнитной индукции определяется в центре масс системы (С) и постоянен, нагрузка от сил Ампера равномерно распределена по длине каждого троса, центр масс системы совпадает с центром масс центрального КА и движется по невозмущенной круговой орбите. Для орбитальной прямоугольной правой системы координат  $Sx_oy_oz_0$  направление оси  $Sx_0$  совпадает с направлением геоцентрического радиус-вектора центра масс системы, ось  $Sy_0$  лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону движения.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q} = Q, \quad (2.1)$$

где  $q = (l, \theta_i)^T$  и  $\dot{q}$  – вектор обобщенных координат (рис. 1, б) и соответствующий вектор обобщенных скоростей,  $\theta_i$  – угол отклонения первого троса от вертикали (рис. 1, б) в плоскости орбиты центра масс системы,  $T_c$  – кинетическая энергия системы,  $Q = (Q_l, Q_{\theta_i})^T$  – вектор обобщенных сил.

Координаты спутников определяются в плоском случае в орбитальной системе координат  $Sx_oy_oz_0$  (рис. 1, б):

$$x_{ok} = l \cos(\theta_i + \theta_{ok}), \quad y_{ok} = l \sin(\theta_i + \theta_{ok}), \quad z_{ok} = 0, \quad (2.2)$$

где  $\theta_{ok} = 2(k-1)\pi/3$ ,  $k = \overline{1,3}$ .

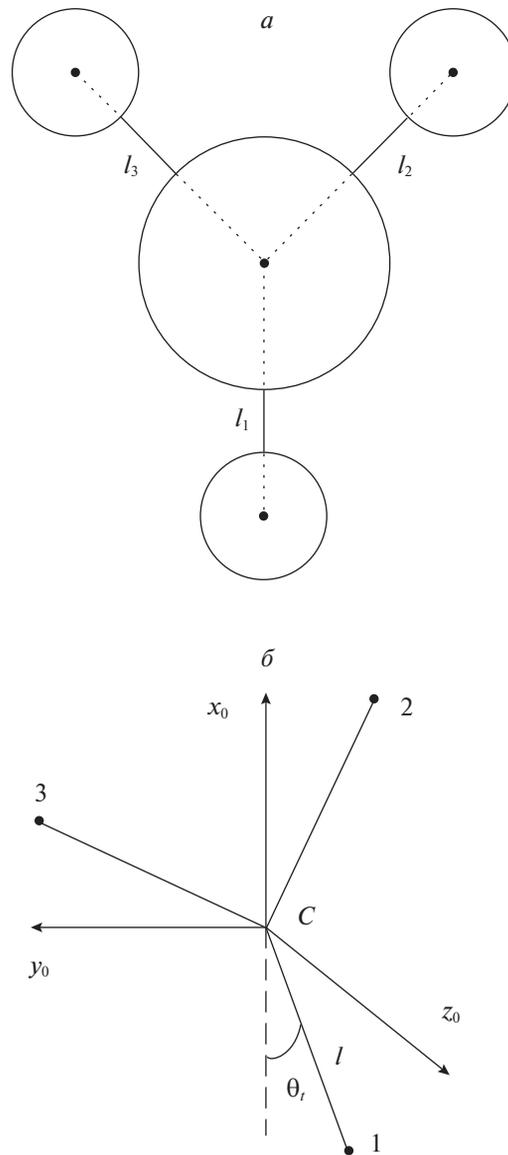


Рис. 1. Система в исходном состоянии и ее обобщенные координаты для простой модели

Кинетическая энергия системы

$$T_c = T_{c0} + \frac{3}{2}m \sum_{k=1}^3 (\dot{x}_{ok}^2 + \dot{y}_{ok}^2), \quad (2.3)$$

где  $m$  – масса спутников,  $T_{c0} = \text{const}$  – кинетическая энергия центрального КА.

Учитывая выражения (2.2)–(2.3) и проводя дифференцирование, уравнения (2.1) представим как

$$\ddot{\theta}_t = Q_{\theta_t}/3l^2m - 2\dot{l}\dot{\theta}_t/l, \quad \ddot{l} = Q_l/3m + l\dot{\theta}_t^2. \quad (2.4)$$

Обобщенные силы определяются через возможные перемещения и имеют вид

$$Q_{\theta_t} = 3Fl/2, \quad Q_l = -3T, \quad (2.5)$$

где  $F = B_o/I$  – сила Ампера,  $I$  – величина тока,  $B_o = \mu_m/R_c^3$  – модуль вектора магнитной индукции на экваторе,  $\mu_m$  – магнитный момент земного диполя,  $R_c$  – модуль радиус-вектора центра

масс системы на круговой орбите,  $T$  – силы натяжения тросов, которые в данной постановке (тросы невесомы) равны силам их торможения в механизмах управления. Здесь и далее в качестве модели магнитного поля Земли рассматривается прямой диполь [1].

Для обеспечения условий асимптотической устойчивости решения системы (2.4), соответствующего конечному положению тросов  $l = l_{end}$ , силу натяжения необходимо задать в виде

$$T = m\dot{\theta}_i^2 + k_v \dot{l} + k_l (l - l_{end}), \quad (2.6)$$

где  $k_v, k_l$  – коэффициенты (аналогичные коэффициентам обратной связи), выбором которых можно обеспечить заданные свойства конечного состояния тросов.

Подстановка выражения (2.6) во второе уравнение системы (2.4) дает

$$\ddot{l} = -k_v \dot{l} - k_l (l - l_{end}). \quad (2.7)$$

В этом случае решение уравнения для  $l$  (2.7) не зависит от решения первого уравнения системы (2.4). С другой стороны, решения первого уравнения системы (2.4) зависят от решения уравнения для  $l$ . Корни характеристического уравнения, соответствующие (2.7) и записанного через отклонения  $\Delta l = l - l_{end}$ , имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -k_v/2 \pm \sqrt{k_v^2/4 - k_l}. \quad (2.8)$$

Таким образом, если  $k_v, k_l > 0$  и  $k_v^2/4 - k_l > 0$ , то конечное состояние тросов будет асимптотически устойчиво в силу системы (2.4), причем переходный процесс будет аperiодическим ( $\dot{l} > 0$ ). Последнее обстоятельство является важным, так как предполагается, что механизмы выпуска тросов, расположенные на центральном КА, работают только на торможение.

На рис. 2 приводятся основные характеристики номинальной программы формирования ТГКА в зависимости от безразмерного времени  $\tau = \omega t$ , где  $\omega$  – угловая скорость центра масс системы по круговой орбите. Исходные данные и параметры выбранной номинальной программы формирования ТГКА: масса центрального КА – 500 кг, массы спутников – 20 кг, высота круговой экваториальной орбиты – 500 км, конечная длина тросов – 1 км, величина тока  $I = -10$  А, начальная угловая скорость вращения системы в плоскости орбиты до разделения  $\omega_0 = 0.1$  с<sup>-1</sup>, относительная скорость разделения центрального КА и спутников  $V_r = 1.6$  м/с, коэффициенты  $k_v = 0.6$  кг/с,  $k_l = 0.5 \times 10^{-3}$  кг/с<sup>2</sup>. Здесь за положительное направление тока принимается направление от спутников к центральному КА, а угловая скорость  $\omega_0$  направлена противоположно направлению отчета угла  $\theta_i$  (рис. 1, б), т.е. ее проекция на ось  $Cz_0$  орбитальной системы координат отрицательна:  $\omega_{z_0} = -0.1$  с<sup>-1</sup>. Приведенные численные результаты подтверждают асимптотическую устойчивость конечного состояния ТГКА по переменным  $l, \dot{l}$  (рис. 2, а, б), при этом  $d^2l/dt^2 \approx 0$ . После окончания выпуска тросов их длина фиксируется, однако ток выключается только тогда, когда угловая скорость  $\dot{\theta}_i$  достигает заданного значения. В данном случае  $\dot{\theta}_i = -0.04$  с<sup>-1</sup> (рис. 2, в). После выключения тока угловая скорость вращения системы и силы натяжения тросов постоянны (рис. 2, г). Особенностью изменения угловой скорости  $\dot{\theta}_i$  является быстрое ее уменьшение (точнее, ее модуля) почти до нуля (рис. 2, д) сразу после разделения центрального КА и спутников. Это объясняется быстрым увеличением момента инерции системы при увеличении длин тросов на этом начальном участке формирования ТГКА. Однако затем в результате действия вращающего момента от сил Ампера угловая скорость вращения системы монотонно увеличивается (по модулю) и в некоторый момент достигает заданного значения (рис. 2, е).

Далее приведенная номинальная программа используется в более полной модели движения ТГКА для оценки возможности ее реализации при действии достаточно широкой совокупности действующих возмущений.

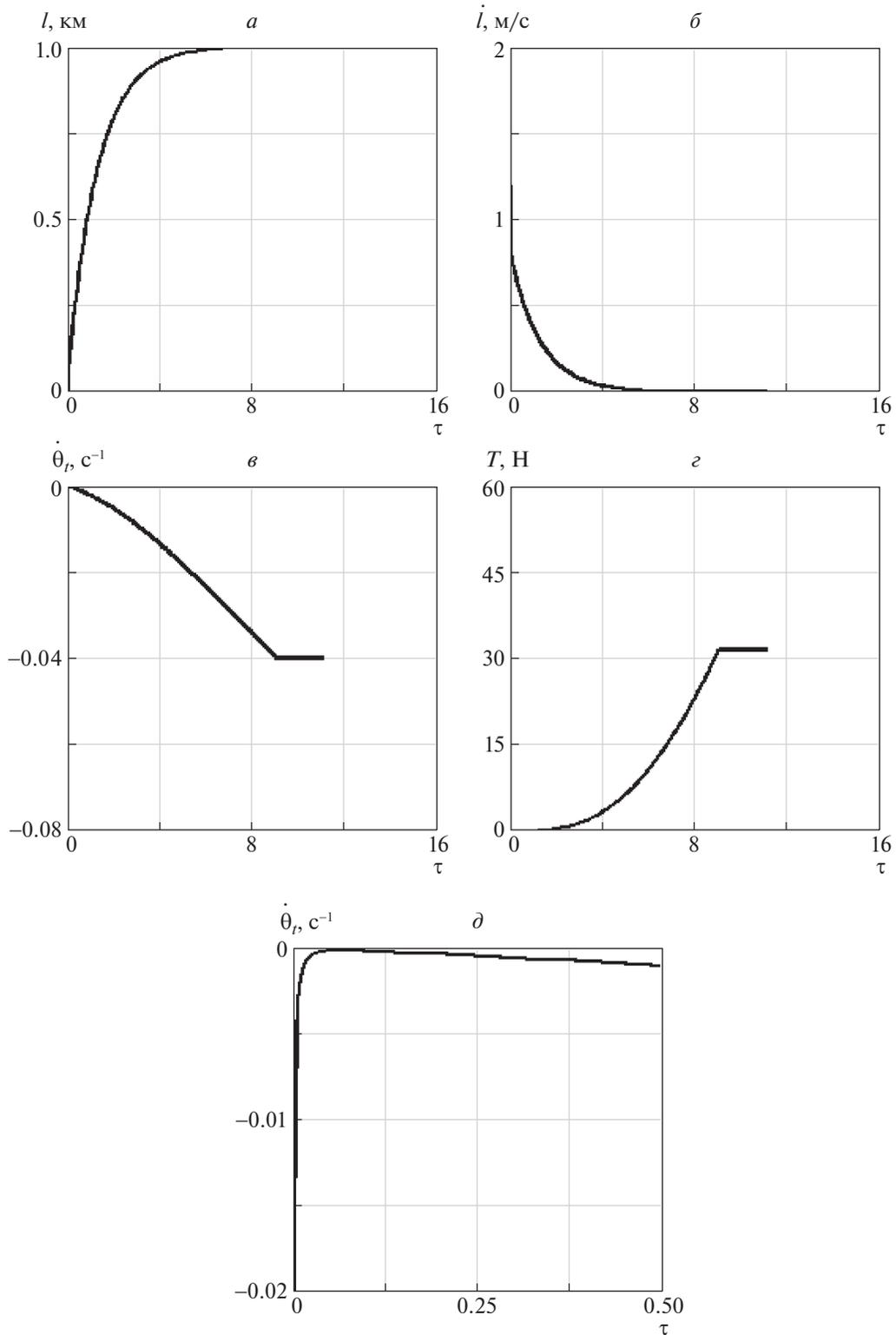


Рис. 2. Характеристики номинальной программы формирования ТГКА

**3. Математическая модель движения в геоцентрической неподвижной системе координат.** Более полные уравнения движения ТГКА записываются в неподвижной геоцентрической системе координат  $OXYZ$ , в которой основная плоскость совпадает с плоскостью экватора, ось  $OZ$

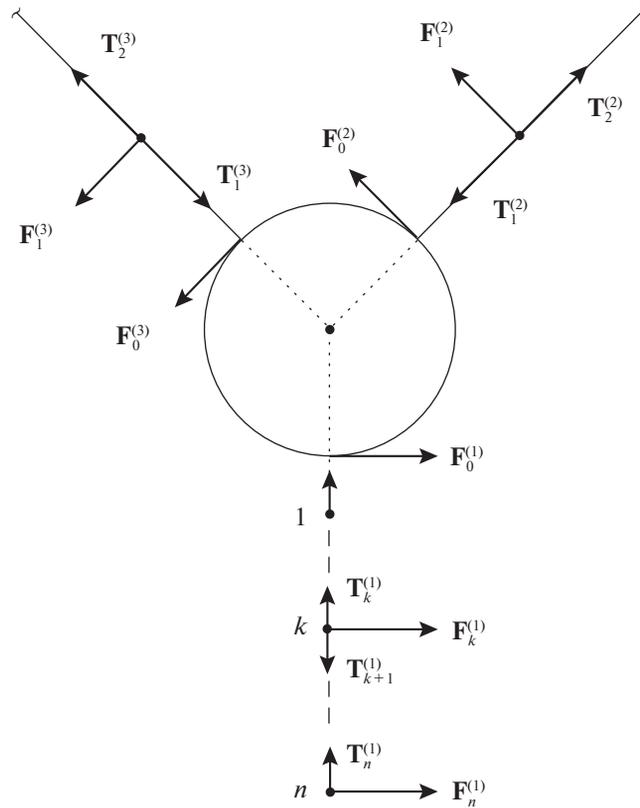


Рис. 3. ТГКА как распределенная система: схема действующих сил

направлена по оси вращения Земли на север, ось  $OX$  – в точку весеннего равноденствия. Уравнения, описывающие движение центров масс КА, спутников и множества материальных точек, моделирующих движения тросов, имеют вид

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{\mathbf{R}}_s &= \mathbf{G}_s - \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_1^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_0^{(i)}, \\
 m_k \ddot{\mathbf{R}}_k^{(i)} &= \mathbf{G}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(i)} - \mathbf{T}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(i)},
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где  $\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n^{(i)}, k = \overline{1, n}$ , – радиус-векторы центров масс КА и  $i$ -го спутника,  $\mathbf{R}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{R}_{n-1}^{(i)}, i = \overline{1, 3}$ , – радиус-векторы материальных точек, на которые разбивается трос,  $\mathbf{G}_s = -\mu m_s \mathbf{R}_s / R_s^3, \mathbf{G}_k^{(i)} = -\mu m \mathbf{R}_k^{(i)} / (R_k^{(i)})^3$  – гравитационные силы,  $\mu$  – гравитационная постоянная,  $\mathbf{T}_k^{(i)}$  – сила натяжения троса, приложенная к  $k$ -й точке  $i$ -го троса и направленная в сторону  $k - 1$ -й точки,  $\mathbf{T}_{n+1}^{(i)} = 0, \mathbf{F}_k^{(i)}$  – сила Ампера, приложенная к  $k$ -й точке  $i$ -го троса,  $\mathbf{F}_0^{(i)}$  – составляющая силы Ампера, приложенной к первому участку  $i$ -го троса и действующая на центральный КА. В системе (3.1) индекс  $n$  соответствуют концевым спутникам, которые в данной модели рассматриваются как материальные точки. Схема сил, действующих на ТГКА, приводится на рис. 3.

Силы натяжения тросов вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_k^{(i)} &= T_k^{(i)} \Delta r_k^{(i)} / \Delta r_k^{(i)}, \\
 T_k^{(i)} &= \begin{cases} c \frac{\Delta r_k^{(i)} - L_k^{(i)}}{L_k^{(i)}}, & \text{if } \Delta r_k^{(i)} - L_k^{(i)} \geq 0, \\ 0, & \text{if } \Delta r_k^{(i)} - L_k^{(i)} < 0, \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

где  $\Delta \mathbf{r}_k^{(i)} = \mathbf{R}_{k-1}^{(i)} - \Delta \mathbf{R}_k^{(i)}$  – радиус-векторы, соединяющие точки крепления тросов,  $L_k^{(i)}$  – нерастянутые длины участков тросов,  $\mathbf{R}_0^{(i)}$  – радиус-векторы точек крепления тросов к центральному КА (центральный КА – твердое тело),  $c = ES$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $S$  – площадь поперечного сечения троса. Выражения (3.2) соответствуют односторонней механической связи между точками троса и точками его крепления к центральному КА, причем для описания растяжения тросов используется закон Гука.

Силы Ампера  $\mathbf{F}_k^{(i)}$ , действующие на  $k$ -й участок  $i$ -го троса, вычисляются как [25]

$$\Delta \mathbf{F}_k^{(i)} = I(\Delta \mathbf{r}_k^{(i)} \times \mathbf{B}_k^{(i)}), \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{B}_k^{(i)}$  – вектор магнитной индукции.

Используется модель магнитного поля Земли – прямой диполь [1]:

$$\mathbf{B}_k^{(i)} = B_0[\mathbf{e} - 3(\mathbf{e}\mathbf{e}_k^{(i)})\mathbf{e}_k^{(i)}], \quad (3.4)$$

где  $B_0 = \mu_m/r_c^3$ ,  $\mu_m = 8 \times 10^6$  Тл · км<sup>3</sup> – магнитный момент земного диполя,  $\mathbf{e}_k^{(i)} = \mathbf{r}_k^{(i)}/r_k^{(i)}$ ,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор оси вращения Земли,  $(\mathbf{e}\mathbf{e}_k^{(i)})$  – скалярное произведение. Здесь вектор  $\mathbf{B}_k^{(i)}$  определяется в середине отрезка троса, т.е.  $\mathbf{r}_k^{(i)} = (\mathbf{R}_{k-1}^{(i)} + \Delta \mathbf{R}_k^{(i)})/2$ .

Силы  $\Delta F_k$  распределяются по точкам следующим образом:

$$\mathbf{F}_0^{(i)} = \Delta \mathbf{F}_1^{(i)}/2, \quad \mathbf{F}_n^{(i)} = \Delta \mathbf{F}_n^{(i)}/2, \quad \mathbf{F}_k^{(i)} = (\Delta \mathbf{F}_k^{(i)} + \Delta \mathbf{F}_{k+1}^{(i)})/2, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (3.5)$$

Процесс выпуска тросов моделируется с помощью динамических уравнений [20]

$$m_{in}\ddot{L}_1^{(i)} = T_1^{(i)} - U^{(i)}, \quad (3.6)$$

где коэффициент  $m_{in}$  учитывает инерционность механизмов управления,  $U^{(i)}$  – управляющие силы,  $L_1^{(i)}$  – недеформированная длина первого участка троса, считая от центрального КА.

Силы торможения в механизмах управления определяются с использованием принципа обратной связи:

$$U^{(i)} = K_l(L_1^{(i)} - l_1^{(i)}) + K_v(\dot{L}_1^{(i)} - \dot{l}), \quad (3.7)$$

где  $K_l$ ,  $K_v$  – коэффициенты обратной связи, а номинальные значения  $l_1, \dot{l}$  находятся интегрированием системы уравнений (2.4), причем номинальная длина на первом участке тросов определяется с учетом суммы длин недеформированных участков тросов, выпущенных до этого:  $l_1^{(i)} = l - l_{n-1}^{(i)}$ . Аналогичный принцип управления выпуском троса применялся ранее при проведении реального тросового эксперимента на орбите YES2 [23]. В этом эксперименте управляющие механизмы осуществляли только торможение троса, поэтому если  $\dot{L}_1^{(i)} \leq 0$  или  $T_1^{(i)} \leq 0$ , то выпуск  $i$ -го троса прекращается:  $\ddot{L}_1^{(i)} = \dot{L}_1^{(i)} = 0$ .

Использование уравнений движения (3.1), (3.6) предполагает применение некоторого алгоритма введения новых точек тросов, когда недеформированная длина первого участка троса, считая от центрального КА, становится больше  $l_{end}/N$ , где  $N$  – количество отрезков, на которые разбивается полная длина троса (является параметром модели). Здесь применяется алгоритм добавления новой точки, описанный в [26]. Основные принципы этого алгоритма: 1) положение новой точки определяется из условия равенства сил натяжения с обеих сторон, причем величина этих сил натяжения должна быть равна силе натяжения на этом же участке до введения новой точки; 2) по положению новой точки находятся составляющие ее скорости относительно центрального КА по известной относительной скорости второй точки через соответствующие пропорции; 3) проводится коррекция составляющих скоростей центрального КА на основании закона сохранения количества движения системы. Для сохранения вида уравнения движения (3.1), (3.6) номера точек тросов изменяются.

**4. Уравнения движения центрального КА относительно центра масс.** Для контроля за угловыми движениями центрального КА с целью согласования его вращения с вращением тросов уравне-

ния (3.1), (3.6) дополняются уравнениями движения КА относительно центра масс. Динамические уравнения вращательного движения КА записываются в традиционной форме

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = \mathbf{J}_s^{-1} (\mathbf{M}_s - \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega}_s), \quad (4.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_s$  и  $\mathbf{J}_s$  – вектор угловой скорости и тензор инерции центрального КА,  $\mathbf{M}_s$  – векторная сумма моментов, действующих на КА. Уравнения (4.1) проецируются на оси связанной с КА прямоугольной системы координат  $sxyz$ , где  $s$  – центр масс КА, ось  $sx$  проходит через точку крепления первого троса ( $i = 1$ ), плоскость  $sxy$  в невозмущенном случае в момент отделения спутников совпадает с орбитальной плоскостью.

Вектор  $\mathbf{M}_s$  определяется как

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{M}^{(u)} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_s^{(i)} \times (\mathbf{T}_1^{(i)} + \mathbf{F}_0^{(i)}), \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{r}_s^{(i)}$  – радиус-векторы точек крепления тросов относительно центра масс КА,  $\mathbf{M}^{(u)}$  – управляющий момент системы стабилизации движения КА.

Предполагается, что эллипсоид инерции КА близок к сфере и движение системы рассматривается на достаточно высоких орбитах. Поэтому гравитационные и аэродинамические моменты не учитываются.

Управляющий момент  $\mathbf{M}^{(u)}$  системы стабилизации движения КА определяется в соответствии с отклонениями от номинальной программы изменения переменных  $\theta_t$ ,  $\dot{\theta}_t$ , рассчитанной по простым уравнениям движения ТГКА (2.4). Компоненты момента  $\mathbf{M}^{(u)}$  в связанной с КА системе координат  $sxyz$  имеют вид

$$M_{x,y}^{(u)} = k_\omega \omega_{x,y}, \quad M_z^{(u)} = k_z (\omega_z - \dot{\theta}_t) + k_\theta (\theta - \theta_t), \quad (4.3)$$

где  $\omega_{x,y,z}$  – проекции угловой скорости КА на оси связанной системы координат,  $k_\omega$ ,  $k_z$ ,  $k_\theta$  – коэффициенты обратной связи. При этом угол  $\theta$  определяется интегрированием

$$\theta = \int_0^t \omega_z dt.$$

Таким образом, предполагается, что система стабилизации КА для своей работы использует стандартные датчики угловых скоростей (ДУС) и интегратор.

Кинематические уравнения записываются в виде уравнений Эйлера–Пуассона

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{e}_x, \quad \dot{\mathbf{e}}_y = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{e}_y, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{e}_z, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{e}_{x,y,z}$  – орты связанной системы координат  $sxyz$ .

Проекции единичных векторов  $\mathbf{e}_{x,y,z}$  на оси неподвижной системы координат  $OXYZ$  являются компонентами матрицы перехода от системы координат  $OXYZ$  к связанной системе координат  $sxyz$ . Следовательно, зная координаты точек крепления тросов в системе координат  $sxyz$  (проекций векторов  $\mathbf{r}_s^{(i)}$ ), нетрудно вычислить координаты точек крепления тросов в системе координат  $OXYZ$  (векторов  $\mathbf{R}_0^{(i)}$ ) и определить силы натяжения тросов с учетом углового движения центрального КА. При численном интегрировании уравнений (4.4) осуществляется контроль за выполнением условий ортогональности векторов  $\mathbf{e}_{x,y,z}$  и  $|\mathbf{e}_{x,y,z}| = 1$ . При необходимости можно использовать оптимальный алгоритм коррекции компонент векторов  $\mathbf{e}_{x,y,z}$  [27].

Система (3.1), (3.6), (4.1), (4.4) при задании всех коэффициентов обратной связи, входящих в выражения (3.7), (4.3), представляет собой замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть проинтегрирована численным методом при заданных начальных условиях.

В системе уравнений (3.1), (3.6), (4.1), (4.4) не имеют места многие допущения, которые были приняты при построении простой модели движения ТГКА, а именно: центральный КА рассматривается как твердое тело конечных размеров; учитывается растяжимость и масса тросов, которые под действием распределенной нагрузки от сил Ампера деформируются (не прямолиней-

ны); центр масс системы перемещается по возмущенной орбите, изменение параметров которой нетрудно вычислить; вектор магнитной индукции определяется в каждой точке троса в соответствии с принятой моделью магнитного поля Земли (3.4); учитывается взаимное влияние движений центрального КА и тросов; рассматривается пространственное движение системы; оценивается влияние ошибок в начальных условиях движения (включая ошибки, возникающие при разделении КА и спутников) на процесс формирования ТГКА; оценивается качество работы системы стабилизации центрального КА и управляющих механизмов выпуска тросов; моделируется процесс формирования ТГКА на орбитах с ненулевым наклоном. В построенной более полной модели движения ТГКА концевые спутники рассматриваются как материальные точки, так как предлагаемая схема управления не накладывает жестких ограничений на угловые движения спутников.

**5. Моделирование процесса разделения КА и спутников.** Для определения начальных условий движения ТГКА необходимо рассмотреть процесс разделения КА и спутников. Если  $\mathbf{V}_r^{(i)}$ ,  $i = \overline{1,3}$ , – относительные скорости отделения спутников от КА, то, используя закон сохранения импульса, найдем

$$\mathbf{V}_{s0} = \mathbf{V}_c - \frac{m}{m_s + 3m} \sum_{i=1}^3 \mathbf{V}_r^{(i)}, \quad \mathbf{V}_0^{(i)} = \mathbf{V}_{s0} + \mathbf{V}_r^{(i)}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{V}_c$  – вектор скорости центра масс системы до разделения,  $\mathbf{V}_{s0}$ ,  $\mathbf{V}_0^{(i)}$  – векторы начальных скоростей движения КА и спутников после их разделения.

На основании теоремы об изменении кинетического момента твердого тела при ударном взаимодействии найдем

$$\Delta \mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_s^{(i)} \times \mathbf{S}^{(i)}, \quad (5.2)$$

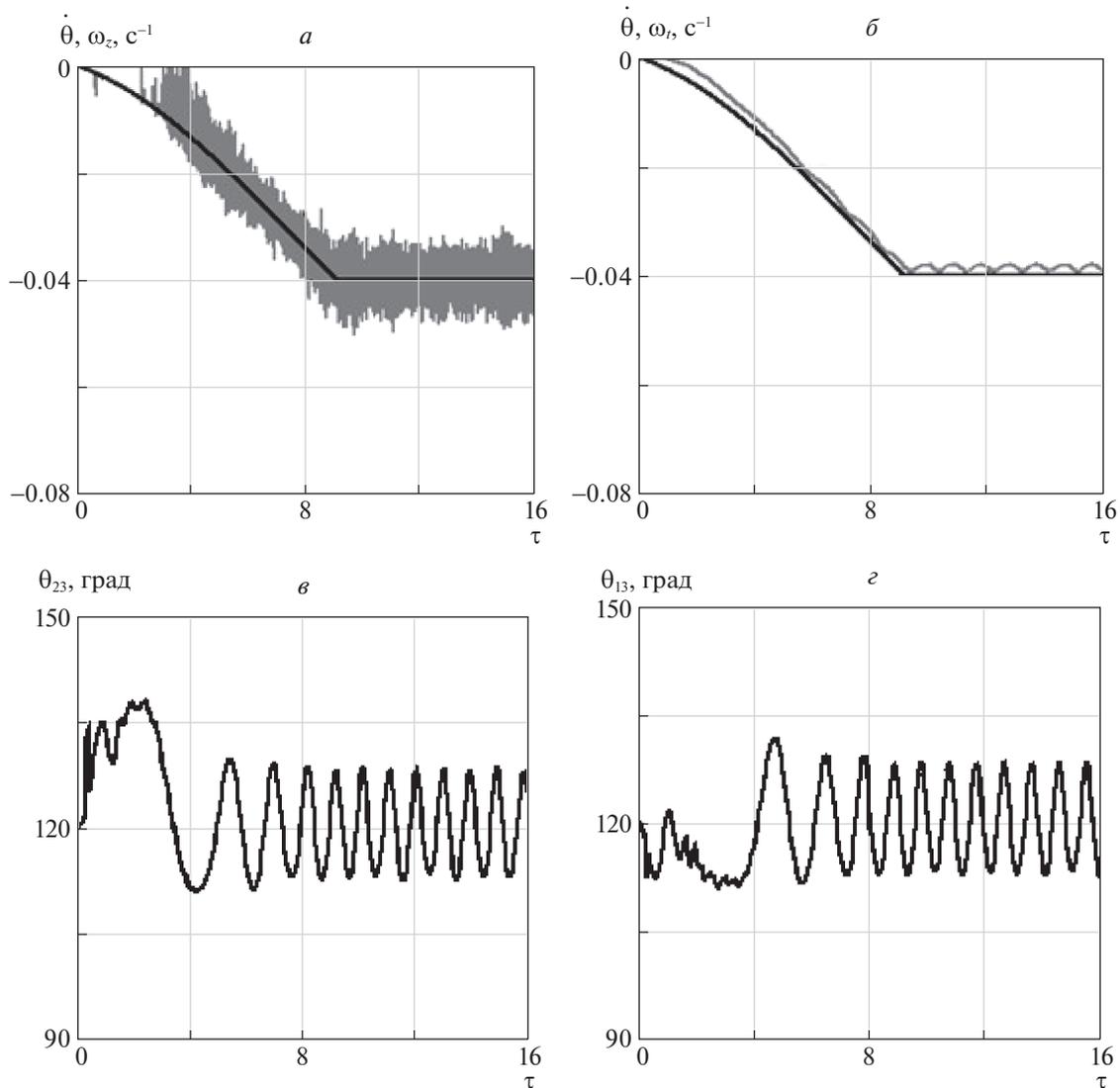
где  $\Delta \mathbf{K}_s$  – приращение моментов импульса центрального КА,  $\mathbf{S}^{(i)} = -m(\mathbf{V}_0^{(i)} - \mathbf{V}_s)$  – импульс, действующий на центральный КА при отделении  $i$ -го спутника.

По приращению импульса (5.2) определяется изменение вектора угловой скорости КА:

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{J}_s^{-1} \Delta \mathbf{K}_s. \quad (5.3)$$

В идеале векторы  $\mathbf{S}^{(i)}$  проходят через центр масс КА и его угловые скорости не изменяются. В противоположном случае, когда  $\Delta \mathbf{K}_s \neq 0$ , имеют место возмущения при разделении, и угловые скорости вращения КА изменяются.

**6. Моделирование возмущенного движения ТГКА при ее развертывании.** При моделировании возмущенного движения ТГКА использовалась система уравнений, записанная в геоцентрической неподвижной системе координат (3.1), (3.6), (4.1), (4.4). Были приняты следующие исходные данные (они дополняют данные, принятые для построения номинального движения системы): жесткость и линейная плотность троса  $c = 2 \times 10^4$  Н и  $\rho = 0.8$  кг/км; количество отрезков, на которые разбиваются тросы в своем конечном состоянии,  $N = 10$ ; коэффициенты обратной связи  $K_l = 0.2$  кг/с<sup>2</sup>,  $K_v = 7.8$  кг/с,  $k_0 = -10^2$  Нм,  $k_\omega = -10^3$  кг м<sup>2</sup>/с,  $k_z = -5 \times 10^3$  кг м<sup>2</sup>/с; диаметр центрального КА (сфера) и его моменты инерции (имеется инерционная асимметрия)  $D_s = 2$  м,  $J_x = 200$  кг м<sup>2</sup>,  $J_y = 210$  кг м<sup>2</sup>;  $J_z = 190$  кг м<sup>2</sup>; смещения центра масс КА относительно центра сферы (статическая асимметрия) в связанной системе координат  $sxyz$   $\Delta y_s = 0.05$  м,  $\Delta z_s = -0.05$  м. Предполагается, что начальные угловые скорости твердого тела до разделения КА и спутников отличны от номинального случая ( $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0$ ,  $\omega_{z0} = -0.1$  с<sup>-1</sup>) и равны  $\omega_{x0} = 0.05$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_{y0} = -0.05$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_{z0} = -0.1$  с<sup>-1</sup>. Здесь необходимо отметить, что увеличение числа отрезков, на которые разбиваются тросы, по сравнению с  $N = 10$  практически не приводило к изменению результатов моделирования, что и обусловило такую дискретизацию тросов. Величины коэффициентов обратной связи  $K_l$ ,  $K_v$  были выбраны исходя из результатов работы [26], где рассматривалась аналогичная задача управления выпуском троса с малым по массе грузом. Правда, тросовая система состояла из двух КА и ее развертывание осуществлялось в вертикальное положение. Остальные коэффициенты обратной связи были выбраны в процессе решения рассматриваемой задачи.



**Рис. 4.** Результаты моделирования возмущенного движения ТГКА на экваториальной орбите

Результаты моделирования движения ТГКА для экваториальной орбиты представлены на рис. 4 и 5. Из них следует, что предлагаемый метод управления при развертывании ТГКА треугольной конфигурации обеспечивает согласованное изменение угловых скоростей вращения в плоскости орбиты центрального КА ( $\omega_z$ ) и тросов ( $\omega_i$ ), которые близки к номинальной угловой скорости ( $\dot{\theta}_i$ ) (на рис. 4, *a*, *б* – это жирная линия, на рис. 4, *б* для примера показана угловая скорость первого троса). При формировании ТГКА в конечном итоге после окончания развертывания системы углы между тросами должны составлять в идеальном случае  $120^\circ$ . На рис. 4, *в*, *г* продемонстрировано в качестве примера, как изменяются углы между тросами 2, 3 ( $\theta_{23}$ ) и 1, 3 ( $\theta_{13}$ ) в процессе развертывания системы. После того, как происходит выключение тока ( $\tau = 9$ ) при достижении конечной угловой скорости вращения системы ( $-0.04 \text{ c}^{-1}$ ), углы между тросами колеблются относительно значения  $120^\circ$  с почти постоянной амплитудой (приблизительно  $13^\circ$ ). На рис. 5 показано, как изменяется форма тросов в процессе развертывания ТГКА. Если на начальном этапе формирования системы под действием распределенной нагрузки тросы имеют заметный изгиб, то по мере увеличения угловой скорости вращения системы в результате действия центробежных сил инерции они постепенно выпрямляются и в конечном итоге их форма близка к прямой линии (при  $\tau > 9$ ). Здесь можно отметить, что существует некоторая асимметрия при формировании ТГКА с точки зрения направления ее вращения, если движение системы

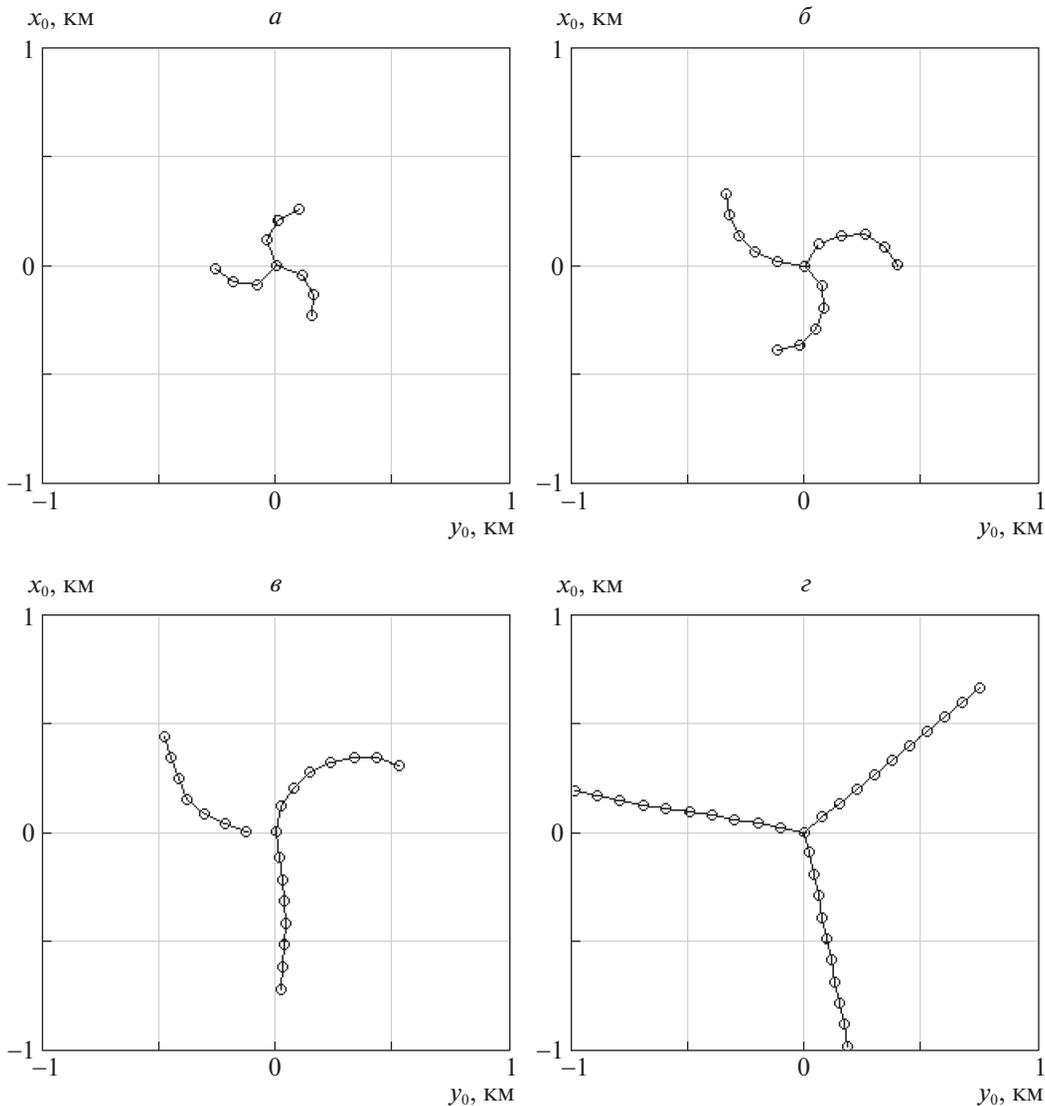


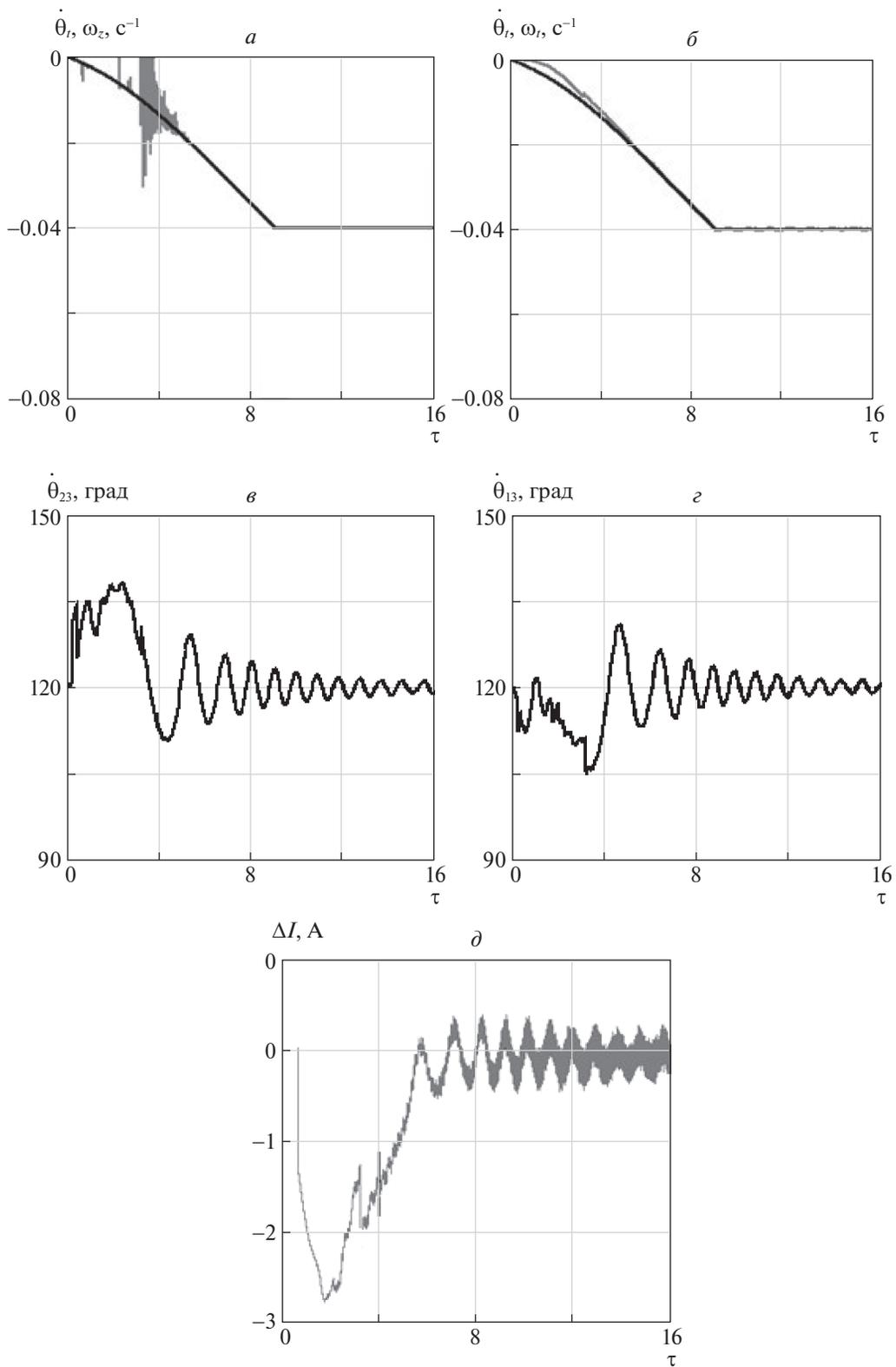
Рис. 5. Изменение формы тросов в процессе формирования ТККА

рассматривать в подвижной орбитальной системе координат  $Cx_0y_0z_0$ . Это связано с влиянием силы Кориолиса. Если сила Кориолиса, действующая на спутники и на любой участок троса, при разворачивании системы создает момент, противоположный по знаку с направлением заданного вращения системы, то сразу после разделения КА и спутников (когда относительная скорость выпуска тросов еще велика) тросы могут вращаться в направлении, противоположном заданному (относительно вертикали). Данного эффекта можно избежать, если направление тока будет отрицательным (от КА к спутникам). Тогда знаки моментов от сил Ампера и сил Кориолиса будут совпадать и описанный эффект исчезнет. Поэтому в данном случае знак заданной угловой скорости вращения системы относительно оси  $Cz_0$  выбран отрицательным  $\omega_z < 0$ .

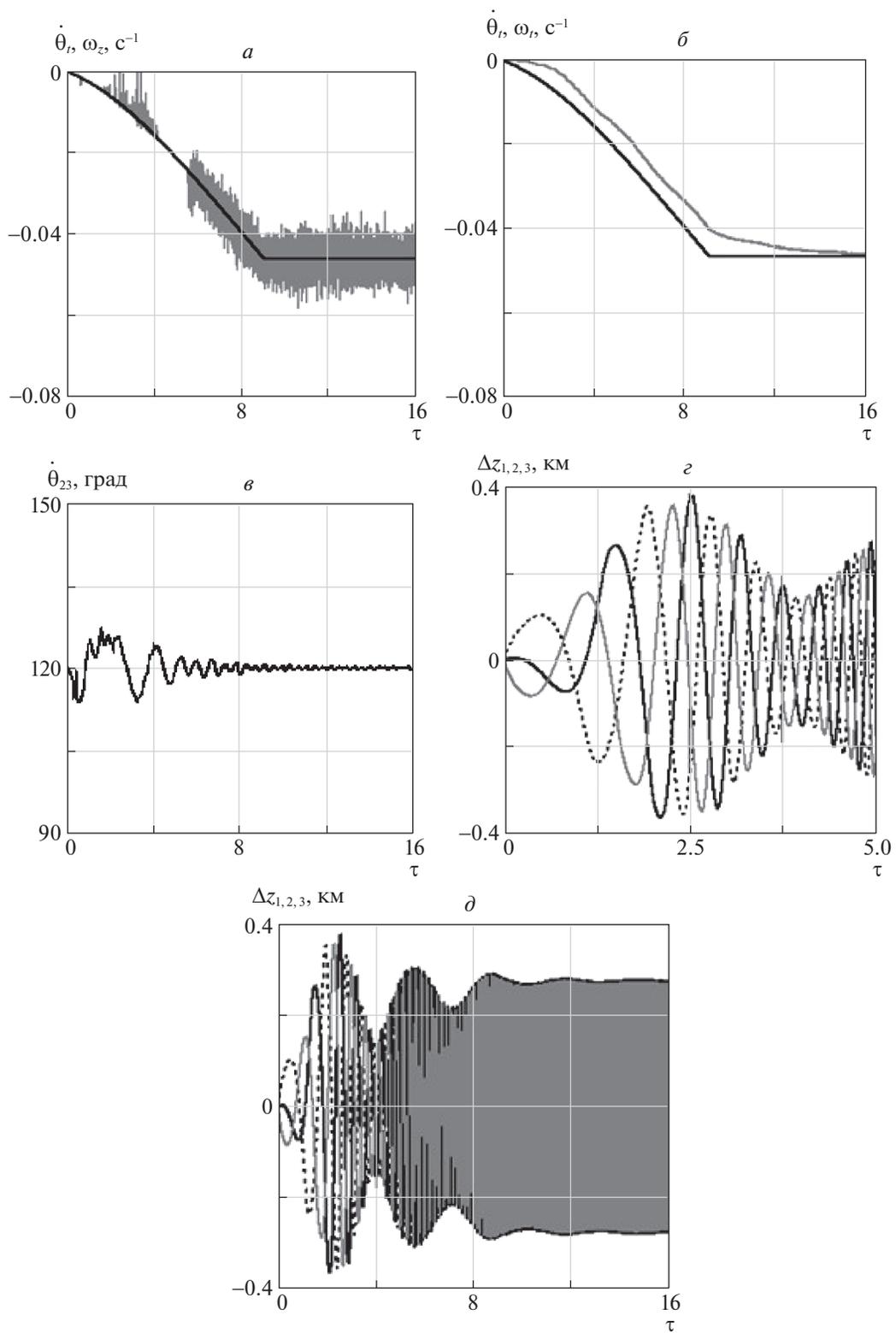
Для уменьшения амплитуды колебаний углов  $\theta_{13}, \theta_{12}, \theta_{23}$  между тросами предлагается ввести дополнительное управление величиной тока на заключительном этапе разворачивания системы, когда  $l_{1,2,3}/l_{end} > 0.8$ . Управление предлагается осуществлять в соответствии с текущей угловой скоростью тросов, которая определяется по относительному движению крайних точек тросов, фактически по относительному движению центров масс центрального КА и спутников. Оценка угловой скорости тросов происходит следующим образом:

$$\omega_i^{(i)} = (\Delta \mathbf{r}^{(i)} \times \Delta \mathbf{V}^{(i)}) / l_{end}^2, \quad i = \overline{1,3}, \tag{6.1}$$

где  $\Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{R}_n^{(i)} - \mathbf{R}_s^{(i)}, \Delta \mathbf{V}^{(i)} = \dot{\mathbf{R}}_n^{(i)} - \dot{\mathbf{R}}_s^{(i)}$ .



**Рис. 6.** Результаты моделирования возмущенного движения ТГКА на экваториальной орбите: стабилизация движения системы с помощью управления величиной тока



**Рис. 7.** Результаты моделирования возмущенного движения ТГКА на орбите с наклонением  $30^\circ$ : стабилизация движения системы с помощью управления величиной тока

Управляющая добавка к величине тока определяется как

$$\Delta I^{(i)} = K_I [(\omega_i^{(i)})_{z_0} - \dot{\theta}_i], \quad (6.2)$$

где  $(\omega_i^{(i)})_{z_0}$  – проекции угловых скоростей (6.1) на ось  $Cz_0$  орбитальной системы координат,  $K_I$  – коэффициент обратной связи,  $\dot{\theta}_i$  – номинальное значение угловой скорости вращения тросов.

Результаты моделирования процесса развертывания ТГКА с управлением (6.2) представлены на рис. 6 ( $K_I = -10^3$  А с). Введение управления величиной тока приводит к уменьшению амплитуды колебаний углов  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  (рис. 6, в, г), которые приближаются к величине  $120^\circ$ . С другой стороны, существенно уменьшаются в этом случае ошибки регулирования по угловым скоростям  $\omega_z$ ,  $\omega_i$ , что иллюстрируется на рис. 6, а, б. На рис. 6, д для примера показано, как изменяется управление (6.2) для первого троса.

Развертывание ТГКА на экваториальной орбите (или на орбитах с малым наклоном при использовании модели магнитного поля Земли – наклонного диполя) фактически характеризует движение системы, близкое к плоскому. На орбитах с малым наклоном применение электромагнитных сил для управления движением космических систем является наиболее эффективным, так как это приводит к наибольшей величине электромагнитных сил, действующих на проводящий ток трос в магнитном поле Земли [1]. Это связано с тем, что вектор магнитной индукции ортогонален (или почти ортогонален) любому участку троса. Из этого следует, что модуль векторного произведения (3.3), а значит, величина результирующей силы Ампера близка к максимальной.

Так как на орбите с ненулевым наклоном сила Ампера (3.3) имеет составляющую, перпендикулярную плоскости орбиты, то при развертывании ТГКА всегда реализуется пространственный случай движения системы, даже когда начальное состояние системы невозмущенное. Известно [1], что для орбит с ненулевым наклоном для сохранения той же эффективности использования сил Ампера необходимо увеличить величину тока приблизительно в  $1/\cos i_0$  раз, где  $i_0$  – наклонение орбиты. На рис. 7 приводятся зависимости, характеризующие процесс развертывания системы на орбите с наклоном  $30^\circ$ . Номинальная величина тока по модулю увеличилась и составила приблизительно 11.5 А (ранее было 10 А). Такое увеличение величины тока для рассматриваемой задачи оказалось чрезмерным, так как конечная величина угловой скорости вращения системы стала больше (по модулю), около  $-0.045 \text{ с}^{-1}$  (ранее было  $-0.04 \text{ с}^{-1}$ ). Алгоритм стабилизации угловой скорости вращения тросов с использованием управления (6.2) сохранил свою эффективность (рис. 7, в). Однако ошибки регулирования по угловым скоростям  $\omega_z$ ,  $\omega_i$  в этом случае увеличились (рис. 7, а, б). Это связано со сложным пространственным характером движения ТГКА, когда тросы совершают также колебания вне плоскости орбиты центра масс системы. На рис. 7, г, д приводятся зависимости от времени отклонений спутников относительно орбитальной плоскости в процессе развертывания системы  $\Delta z_{1,2,3}$ . Амплитуды этих колебаний одинаковы для всех спутников, а по окончании выпуска тросов почти постоянны (рис. 7, д). Максимальные отклонения спутников от плоскости орбиты составляют приблизительно 0.38 км. Фазы колебаний  $\Delta z_{1,2,3}$  различаются, что нетрудно заметить на рис. 7, г.

**Заключение.** Оценивается возможность использования электромагнитных сил (сил Ампера), возникающих при взаимодействии проводящих ток тросов с магнитным полем Земли, для формирования вращающейся ТГКА треугольной лучевой симметричной конфигурации. Предлагается и обосновывается метод управления, включающий в себя регулирование выпуском тросов с центрального КА и создание момента с помощью сил Ампера, обеспечивающего вращение системы с заданной угловой скоростью после выключения тока. Для обоснования рассматриваемого подхода к формированию ТГКА разработаны и используются две математические модели. Первая сравнительно простая модель, полученная с помощью уравнений Лагранжа, служит для построения номинальных законов или программ управления. Вторая модель применяется для оценки реализуемости построенного программного движения системы. В этой модели тросы представляются как множество материальных точек, связанных между собой упругими односторонними механическими связями. Это позволяет оценить величину изгиба тросов при действии распределенных сил Ампера, а центральный КА рассматривается как твердое тело конечных

размеров. Реализация номинального движения системы с использованием более сложной модели ее движения и при действии достаточно полной совокупности возмущений осуществляется с помощью достаточно простых линейных регуляторов. Представленные результаты численного моделирования развертывания ТГКА доказывают принципиальную возможность применения предлагаемой схемы управления. Более детальные вопросы технической реализации данного подхода к формированию конфигурации ТГКА (выбор совокупности средств и погрешности измерений, влияние дискретности управления, ошибки при реализации управляющих воздействий и т.д.) здесь не рассматриваются и требуют дальнейшего изучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. *Bainum P.M., Harkness R.E., Stuiver W.* Attitude Stability and Damping of a Tethered Orbiting Interferometer Satellite System // *J. Astronautical Sciences*. 1972. V. 19. № 5.
3. *Breakwell J.V., Andeen G.B.* Dynamics of a Flexible Space Array // *J. Spacecraft and Rockets*. 1977. V. 14. № 9. P. 556–561.
4. *Shi G., Zhu Z., Zhu Z.H.* Dynamics and Control of Tethered Multi-satellites in Elliptic Orbits // *Aerospace Science and Technology*. 2019. V. 91. P. 41–48.
5. *Ван Ч., Заболотнов Ю.М.* Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс // *ПММ*. 2021. Т. 85. Вып. 1. С. 21–43.
6. *Slane J.H., Tragesser S.G.* Stability and Control of Tethered Satellite Formations // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conf.* Minneapolis, 2012. P. 1–8.
7. *Huang H., Zhu Y., Yang L., Zhang Y.* Stability and Shape Analysis of Relative Equilibrium for Three-spacecraft Electromagnetic Formation // *Acta Astronautica*. 2014. V. 94. P. 116–131.
8. *Cai Z., Li X., Wu Z.* Deployment and Retrieval of a Rotating Triangular Tethered Satellite Formation Near Libration Points // *Acta Astronautica*. 2014. V. 98. № 1. P. 37–49.
9. *Cai Z., Zhou H., Li X.* Nonlinear Dynamics of a Rotating Triangular Tethered Satellite Formation Near Libration Points // *Aerospace Science and Technology*. 2015. V. 42. P. 384–391.
10. *Williams P.* Optimal Deployment/retrieval of a Tethered Formation Spinning in the Orbital Plane // *J. Spacecraft and Rockets*. 2006. V. 43. № 3. P. 638–650.
11. *Huang J., Li C., Ma G.* Nonlinear Attitude Tracking Control of Underactuated Three-inline Tethered Satellite // *Acta Aeronaut. Astronaut. Sinica*. 2015. V. 36. № 6. P. 1995–2004.
12. *Misra A.K., Pizarro-Chong A.* Dynamics of Tethered Satellites in a Hub-spoke // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2004. V. 117. P. 219–229.
13. *Zhao J., Cai Z.* Nonlinear Dynamics and Simulation of Multi-tethered Satellite Formations in Halo Orbits // *Acta Astronautica*. 2008. V. 63. P. 673–681.
14. *Pizarro-Chong A., Misra A.K.* Dynamics of Multi-tethered Satellite Formations Containing a Parent Body // *Acta Astronautica*. 2008. V. 63. P. 1188–1202.
15. *Avanzini G., Fedi M.* Effects of Eccentricity of the Reference Orbit on Multi-tethered Satellite Formations // *Acta Astronautica*. 2014. V. 94. P. 338–350.
16. *Su F., Zhai G., Zhang J. et al.* Dynamics and Control During Spinning Deployment for Hub-and-spoke Configured Multi-tethered Satellite Formation // *Acta Aeronaut. Astronaut. Sinica*. 2016. V. 37. № 9. P. 2809–2819.
17. *Huang P., Zhao Y., Zhang F. et al.* Deployment/retraction of the Rotating Hub-Spoke Tethered Formation System // *Aerospace Science and Technology*. 2017. V. 69. P. 495–503.
18. *Alary D., Andreev K., Boyko P. et al.* Dynamics of Multi-tethered Pyramidal Satellite Formation // *Acta Astronautica*. 2015. V. 117. P. 222–230.
19. *Yarotsky D., Sidorenko V., Pritykin D.* Three-dimensional Multi-tethered Satellite Formation with the Elements Moving Along Lissajous Curves // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2016. V. 125. № 3. P. 309–322.
20. *Заболотнов Ю.М., Наумов О.Н.* Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при развертывании орбитальной тросовой системы // *Космич. исслед.* 2012. Т. 50. Вып. 2. С. 177–187.
21. *Zhong R., Zhu Z.H.* Dynamics of Nanosatellite Deorbit by Bare Electrodynamic Tether in Low Earth Orbit // *J. Spacecraft and Rockets*. 2013. V. 50. № 3. P. 691–700.

22. *Ohkawa Y., Kawamoto S., Okumura T. et al.* Review of KITE – Electrodynamic Tether Experiment on the H-II Transfer Vehicle // *Acta Astronautica*. 2020. V. 177. P. 750–758.
23. *Kruijff M.* Tethers in Space. Netherlands: Delta-Utec Space Research. 2011. 423 p.
24. *Zabolotnov Y.M.* Dynamics of the Formation of a Rotating Orbital Tether System with the Help of Electrothruster // *Procedia Engineering*. 2017. V. 185. P. 261–266.
25. *Воеводин П.С., Заболотнов Ю.М.* К задаче о стабилизации движения низкоорбитальной электродинамической тросовой системы // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. № 2. С. 125–140.
26. *Заболотнов Ю.М.* Управление развертыванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом // *ПММ*. 2015. Т. 79. № 1. С. 37–47.
27. *Шилов А.А.* Оптимальная коррекция матрицы направляющих косинусов при расчетах вращения твердого тела // *Уч. зап. ЦАГИ*. 1977. Т. 8. № 5. С. 137–139.