Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

2
ФЕВРАЛЬ
Москва 2020

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:
Васильев С.Н.

Заместители главного редактора:
Кулешов А.П., Поляк Б.Т., Рубинович Е.Я.

Ответственный секретарь:
Хлебников М.В.

Редакционный совет:
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Микрин Е.А., Пархоменко П.П., Пешехонов В.Г., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:
Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Васильев В.И., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

© Российская академия наук, 2020
© Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2020

Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Линейные системы

© 2020 г. **В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)**
(Сочинский институт Российского университета дружбы народов)

К ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ДЕТЕКТИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается нелинейная нестационарная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием общего вида, допускающая «частичное» (по части переменных) нулевое положение равновесия. Находятся условия, при которых устойчивость (асимптотическая устойчивость) по части переменных «частичного» положения равновесия означает его устойчивость (асимптотическую устойчивость) по всем переменным. Дается анализ указанных условий с позиций проблемы частичной детектируемости рассматриваемой системы и вводится понятие ее частичной нуль-динамики. Обсуждается приложение к задаче частичной стабилизации управляемых систем.

Ключевые слова: нелинейная нестационарная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием), частичная устойчивость, частичная детектируемость, частичная нуль-динамика.

DOI: 10.31857/S0005231020020014

1. Введение

Классическое определение Ляпунова – Румянцева устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия (невозмущенного движения) [1, 2] дано для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и предполагает, что область начальных возмущений является достаточно малой окрестностью этого положения равновесия. Наряду с данной постановкой задачи также анализируются случаи, когда начальные возмущения, являясь малыми по исследуемой на устойчивость части переменных, могут быть в то же время произвольными [3–5] или большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) [4, 5] по оставшимся «неконтролируемым» переменным. Рассмотрена [6] и более общая ситуация, когда начальные возмущения являются большими по одной части и произвольными по другой части «неконтролируемых» переменных.

С другой стороны, в задачах устойчивости «частичных» (по части переменных) нулевых положений равновесия также естественно [6] допущение о том, что начальные возмущения «неконтролируемых» переменных, не определяющих «частичное» положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по оставшейся их части. В данном случае анализ устойчивости «частичного» положения равновесия проводится при более

«мягких» требованиях к функциям Ляпунова, чем в случае произвольных начальных возмущений «неконтролируемых» переменных. Поэтому возможен определенный компромисс между содержательным смыслом понятия устойчивости и требованиями к функциям Ляпунова.

Помимо систем обыкновенных дифференциальных уравнений, указанные задачи частичной устойчивости анализируются [7] также применительно к системам функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием). Для решения используется метод функционалов Ляпунова – Красовского с соответствующими дополнениями.

В данной работе рассматривается нелинейная нестационарная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) общего вида, допускающая «частичное» (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Предполагается, что данное положение равновесия устойчиво (асимптотически устойчиво) также по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только по их заданной части. При этом делается допущение [7] о том, что значения нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют переменным, не определяющим указанное «частичное» положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по отношению к их оставшейся части.

Находятся условия, при выполнении которых установленная устойчивость (асимптотическая устойчивость) по части переменных «частичного» нулевого положения равновесия означает его устойчивость (асимптотическую устойчивость) по всем переменным. Указанные условия включают требование равномерной асимптотической устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия подсистемы, «приведенной» по переменным, устойчивость «частичного» положения равновесия по которым изначально не известна. Также накладывается ограничение на связь «приведенной» подсистемы с другими частями системы.

Дается анализ полученных условий с позиций проблемы частичной детектируемости [8–11] рассматриваемой системы; при этом вводится понятие ее частичной нуль-динамики. Обсуждается приложение полученных результатов к задаче частичной стабилизации [3, 4, 10, 12–18].

2. Постановка задачи

Пусть $\tau > 0$ — заданное число, R^n — линейное пространство n-мерных векторов $\mathbf{x}$ с нормой $|\mathbf{x}| = \max |x_i|$ (i-я компонента вектора $\mathbf{x}$), C — банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [-\tau, 0] \to R^n$ со стандартной нормой $||\boldsymbol{\varphi}|| = \max |\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$ ($\theta \in [-\tau, 0]$), $R_+ = [0, +\infty)$. Если $t_0, \beta \in R_+$, $\beta \geq t_0$, то для непрерывной функции $\mathbf{x}(t) : [t_0 - \tau, \beta] \to R^n$ определим функцию $\mathbf{x}_t \in C$ соотношением $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t + \theta)$ ($\theta \in [-\tau, 0]$); под $\mathbf{x}'(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Сделаем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ (T — знак транспонирования), где $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{z} \in R^{n-m}$ ($1 \leq m \leq n$). В соответствии с этим разбиением положим $C = C^{\mathbf{y}} \times C^{\mathbf{z}}$, где $C^{\mathbf{y}}$ и $C^{\mathbf{z}}$ — банаховы пространства непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} : [-\tau, 0] \to R^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}} : [-\tau, 0] \to R^{n-m}$ с нормами $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| = \max |\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(\theta)|$

и $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}|| = \max|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}(\theta)|$ $(\theta \in [-\tau, 0])$. Для $\boldsymbol{\varphi} \in C$ имеем $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и $||\boldsymbol{\varphi}|| = \max(\ ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}||,\ ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}||)$.

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) [19]

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_t),$$

которую с учетом указанных разбиений представим в виде

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t), \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t). \tag{1}$$

Допустим, что оператор $\mathbf{X} : R_+ \times C \to R^n$, определяющий правую часть системы (1), вполне непрерывен в области

$$G = R_+ \times S = \{t \geq 0,\ ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| < h,\ \ ||\boldsymbol{\varphi}_z|| < \infty\} \tag{2}$$

(h — достаточно малое положительное число) и на каждом компактном подмножестве K из области (2) выполняется условие Коши – Липшица: существует постоянная $l = l(K) > 0$ такая, что для любых $(t, \boldsymbol{\varphi}_1), (t, \boldsymbol{\varphi}_2) \in K$ имеет место неравенство $|\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_1)| \leq l||\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1||$.

Тогда [19] для каждой точки t_0, $\boldsymbol{\varphi}$ из области (2) существует единственное решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1), продолжимое до границы области S и непрерывно зависящее от $t_0, \boldsymbol{\varphi}$. Следуя [20], обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ значение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ в момент времени t и введем предположение о $\mathbf{z}$-продолжимости решений [3, 4, 7]: решения системы (1) определены для тех $t \geq t_0$, при которых $|\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < h$.

Рассмотрим два понятия частичной устойчивости системы (1).

1. *Устойчивость «частичного» положения равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. В пространстве C рассмотрим [7, 21] множество $M = \{\boldsymbol{\varphi} \in C :\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} = \mathbf{0}\}$. Если $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{\varphi} \in M$, то решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1) удовлетворяет условию $||\mathbf{y}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi})|| \equiv \mathbf{0}$. Другими словами, множество $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ есть «частичное» положение равновесия системы (1), являющееся (при сделанном предположении о единственности решений) инвариантным множеством этой системы. В этом случае «полное» нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1) может и не существовать.

Имея в виду рассмотрение наряду с задачей устойчивости также задачи устойчивости по части переменных «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, допустим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Соответственно, компоненту $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ разобьем на две части $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Кроме того, чтобы сделать рассматриваемые задачи частичной устойчивости более содержательными, компоненту $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ также разобьем на две части и представим в виде $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}} = (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Обозначим через S_δ область в пространстве C такую, что $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| < \delta$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}|| \leq L$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}|| < \infty$ (область S_Δ получается заменой δ на Δ), так что рассматриваемые далее понятия устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) будут иметь место при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}$ (for a large values of $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_1}$ and on the whole with respect to $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}_2}$ [4]).

Определение 1 [7]. *«Частичное» положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если для каждого* $t_0 \geq 0$, *а также для произвольного числа* $\varepsilon > 0$, *как бы мало оно не было, и для любого заданного числа* $L > 0$ *найдется число* $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ *такое, что из* $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ *следует неравенство* $|\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если* $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если оно равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво и найдется число* $\Delta(L) > 0$ *такое, что произвольное решение* $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ *системы* (1) *с* $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta$ *равномерно по* $t_0, \boldsymbol{\varphi}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta$ *удовлетворяет предельному соотношению*

$$\lim |\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0, \quad t \to \infty. \tag{3}$$

Соответствующие понятия устойчивости по всем переменным «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ определяются как частный случай, заменой $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$.

2. *Устойчивость по части переменных положения равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Допустим, что имеет место условие $\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и система (1) имеет «полное» нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Определение 2 [4]. *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если для каждого* $t_0 \geq 0$, *а также для произвольного числа* $\varepsilon > 0$, *как бы мало оно не было, найдется число* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $||\boldsymbol{\varphi}|| < \delta$ *следует неравенство* $|\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если* $\delta = \delta(\varepsilon)$;

3) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво, если оно равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво и найдется число* $\Delta > 0$ *такое, что произвольное решение* $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ *системы* (1) *с* $||\boldsymbol{\varphi}|| < \Delta$ *равномерно по* t_0, $\boldsymbol{\varphi}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}|| < \Delta$ *удовлетворяет предельному соотношению* (3).

Соответствующие понятия $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ получаются заменой $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$.

Задача 1. Требуется указать общую структурную форму нелинейной системы (1), для которой: 1) $\mathbf{y}_1$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ означает его устойчивость по всем переменным; 2) $\mathbf{y}_1$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ означает его $\mathbf{y}$-устойчивость.

Замечание 1. Изучаемые свойства системы (1) при соответствующей детализации можно трактовать как локальную *частичную* устойчивость по «*выходу — состоянию*» (output to state stability [8]) в случае 1), устойчивость по «*измеримому — заданному выходу*» (measurement to error stability [9]) в случае 2), а также как соответствующие свойства *частичной детектируемости* этой системы. Детализация связана с функционально-дифференциальной формой системы (1), рассмотрением не только «полного», но и «частичного» положения равновесия, а также с особенностью используемых понятий устойчивости «частичного» положения равновесия.

Замечание 2. Общий подход [8–11] к анализу указанных свойств системы (1) основан на прямом методе Ляпунова, применение которого в конкрет-

ных случаях может быть затруднено. Это обстоятельство определяет актуальность поставленной задачи выявления общей структурной формы системы (1), наделенной изучаемыми свойствами.

3. Условия частичной устойчивости

В соответствии со сделанным разбиением $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим первую группу уравнений системы (1) в виде двух групп уравнений

$$\mathbf{y}_1'(t) = \mathbf{Y}_1(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t), \quad \mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t),$$

а оператор $\mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi})$ представим следующим образом:

$$\mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) + \mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}),$$
$$(R(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{Y}_2(t, \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}), \mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \mathbf{0}) \equiv R(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}) \equiv \mathbf{0}).$$

Система функционально-дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_{2t}) \tag{4}$$

будет «приведенной» (по переменным $\mathbf{y}_2$) подсистемой системы (1).

Допустим, что оператор $\mathbf{Y}_2^0(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$ вполне непрерывен в области $t \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < h$ и на каждом компактном подмножестве из этой области удовлетворяет условию Коши – Липшица.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) *найдется вполне непрерывный оператор* $\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$, $\mathbf{Y}_2^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такой, что в области* (2) *имеет место неравенство*

$$|\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \leq |\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})|\,; \tag{5}$$

2) *положение равновесия* $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ *«приведенной» подсистемы* (4) *равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным*;

3) *«частичное» положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво* (*равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво*).

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *равномерно устойчиво* (*равномерно асимптотически устойчиво*) *по всем переменным.*

Доказательство теоремы 1 вынесено в Приложение.

Условие 1) теоремы 1 можно ослабить, заменяя соответствующие требования $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) более сильными требованиями $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости, где $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ – некоторая непрерывная в области $D = \{t \geq 0, ||\mathbf{y}|| < h, ||\mathbf{z}|| < \infty\}$ вектор-функция. Наличие такой устойчивости позволяет использовать вместо неравенства (5) менее ограничительное неравенство

$$|\mathbf{R}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \leq |\mathbf{Y}_2^{**}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})|\,, \tag{6}$$

выполняющееся в области $G^* = R_+ \times S = \{t \geq 0, ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}|| + ||\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})|| < h, ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}|| < \infty\}$. Здесь $\mathbf{Y}_2^{**}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$ – вполне непрерывный в G^* оператор, $\mathbf{Y}_2^{**}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \equiv \mathbf{Y}_2^{**}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$; $||\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi})|| = \sup |\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi}(\theta))|$ при $\theta \in [-\tau, 0]$, $t \in R_+$. Кроме того, в результате «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ также обладает более сильным соответствующим свойством $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости.

Понятия $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости формально вводятся заменой $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\mu}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ в определении 1. Содержательно их можно трактовать как «*расширенно-оценочную*» $\mathbf{y}_1$-устойчивость (дополненную оценкой для подбираемой $\boldsymbol{\mu}$-функции) «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1). По смыслу задачи такая устойчивость должна быть «промежуточной» между $\mathbf{y}_1$-устойчивостью и устойчивостью по всем переменным «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. В этих рамках «расширение» понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости может происходить за счет зависимости $\boldsymbol{\mu}$-функции не только от $t, \mathbf{y}$, но и от $\mathbf{z}$, что и требуется для перехода к неравенству (6). Учитывая включение $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, ограничимся подбором «пробных» $\boldsymbol{\mu}$-функций вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{0}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 2) *теоремы 1 и найдется непрерывная в области D вектор-функция $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ такая, что*:

1) *«частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы* (1) *равномерно $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчиво* (*равномерно асимптотически $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчиво*);

2) *в области G^* выполняется неравенство* (6).

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) по всем переменным.

Доказательство по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Допустим, что $\mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и система (1) имеет нулевое положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; соответственно $\mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Следствие. Пусть выполнены условия 1), 2) *теоремы 1 и положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы* (1) *равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво* (*равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво*). *Тогда это положение равновесия равномерно $\mathbf{y}$-устойчиво* (*равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво*).

В данном случае неравенство (5) также можно заменить менее ограничительным неравенством (6), используя понятия $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости, получающиеся заменой $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ на $\mathbf{y}_1(t; t_0, \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\mu}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})$ в определении 2. Поскольку вместо включения $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ предполагается условие $||\boldsymbol{\varphi}|| < \delta$, то сделанное ранее ограничение $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, 0, \mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{0}$ не требуется.

Замечание 3. Теоремы 1, 2 являются развитием соответствующих результатов А. Халаная [22], а также результатов [23]. В отличие от [22], где анализируется связь между устойчивостью по части и по всем переменным нулевого положения равновесия, изучаются более общие свойства системы (1). Такие свойства рассмотрены ранее в [23], но без учета эффекта последействия в изучаемой системе. Кроме того, в отличие от [23] ограничение на связь «приведенной» подсистемы с другими частями системы анализируется на основе введенных понятий $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивости.

Замечание 4. Неравенство (5) легко проверяется, если из тех или иных соображений известна заранее равномерная (по $t_0, \boldsymbol{\varphi}$) $\mathbf{z}$-ограниченность решений системы (1), начинающихся при $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$.

Замечание 5. Анализ задач частичной устойчивости и стабилизации, а также обзор результатов можно найти в [3, 4, 10, 12].

Пример 1. Пусть система (1) состоит из уравнений

$$
\begin{gathered}
y_1' = -2y_1(t) + y_1(t-\tau) + y_1^2(t) + y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau), \\
y_2' = [-1 + y_1(t)\sin z_2(t-\tau)]y_2(t) + f(\mathbf{x}(t)), \\
z_1'(t) = [1 - 2y_1(t)\sin z_2(t-\tau)]z_1(t), \\
z_2'(t) = e^t y_1(t-\tau)z_2(t).
\end{gathered} \tag{7}
$$

1. Допустим, что $f(\mathbf{x}(t)) \equiv 0$. Введением новой переменной $\mu_1 = y_2^2 z_1$ из системы (7) можно выделить подсистему

$$
\begin{gathered}
y_1' = -2y_1(t) + y_1(t-\tau) + \mu_1(t-\tau) + y_1^2(t), \\
\mu_1'(t) = -\mu_1(t),
\end{gathered} \tag{8}
$$

нулевое положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ которой равномерно асимптотически устойчиво по y_1, μ_1 на основании теоремы об устойчивости (по всем переменным) по линейному приближению [24].

Поскольку для переменной $\mu_1 = \mu_1(y_2, z_1) = y_2^2 z_1$ имеет место тождество $\mu_1(0, z_1) \equiv 0$ и эта переменная не зависит от z_2, то «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) равномерно асимптотически y_1-устойчиво (при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2}).

«Приведенная» подсистема (4) в данном случае имеет вид

$$
y_2' = -y_2(t), \tag{9}
$$

и ее нулевое положение равновесия $y_2 = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. Кроме того, в данном случае выполнено неравенство (5), в котором $|Y_2^*| = |\varphi_{y_1}(0)| \cdot |\varphi_{y_2}(0)|$.

На основании теоремы 1 заключаем, что «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным (при больших значениях φ_{z_1}в целом по φ_{z_2}).

Система (7) допускает также положение равновесия $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, которое равномерно асимптотически (y_1, y_2)-устойчиво.

2. Допустим, что $f(\mathbf{x}(t)) = y_2^3(t)z_1(t)$. В этом случае из системы (7) можно выделить подсистему, первое уравнение которой совпадает с первым уравнением подсистемы (8), а второе уравнение заменяется уравнением

$$
\mu_1' = -\mu_1(t) + 2\mu_1^2(t).
$$

Нулевое положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ указанной подсистемы также равномерно асимптотически устойчиво. В рассматриваемом случае с точки

зрения проверки выполнимости условий теоремы 2 важно, что «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) не только равномерно асимптотически y_1-устойчиво, но и равномерно асимптотически (y_1, μ_1)-устойчиво (при больших значениях φ_{z_1} в целом по φ_{z_2}).

«Приведенная» подсистема (4) также имеет вид (9). Кроме того, выполнено неравенство (6), в котором $|Y_2^{**}| = |\varphi_{y_1}(0)| \cdot [|\varphi_{y_2}(0)| + |\mu_1(-\tau)|]$.

На основании теоремы 2 заключаем, что в данном случае «частичное» положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (7) равномерно асимптотически устойчиво (при больших значениях φ_{z_1}в целом по φ_{z_2}).

4. Приложение к нелинейным управляемым системам

Пусть система функционально-дифференциальных уравнений (1), в которой $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ описывает возмущенное движение объекта управления с учетом позиционных управлений $\mathbf{u}$, формируемых по принципу обратной связи с задержками (запаздыванием) в каналах управления.

Считаем, что переменные, входящие в векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}$, измеряются и используются для формирования управлений $\mathbf{u}$ вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{y}_{1t}, \mathbf{z}_t)$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, а переменные, входящие в вектор $\mathbf{y}_2$, не измеряются. Пусть формируемые управления таковы, что замкнутая система (1) удовлетворяет общим требованиям, указанным в разделе 2, и «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ этой системы равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво.

Поскольку при $\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ управления нулевые, то динамика «приведенной» подсистемы (4) не зависит от формируемых управлений, а определяется только структурой и параметрами объекта. Считаем их выбранными так, что нулевое положение равновесия «приведенной» подсистемы (4) равномерно асимптотически устойчиво по всем переменным.

В результате при выбранной структуре и параметрах объекта достигнутая за счет выбора управлений равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) означает равномерную асимптотическую устойчивость по всем переменным.

Аналогично рассматривается ситуация, когда достигнутая равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ замкнутой системы (1) означает равномерную асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость.

5. Условия частичной детектируемости

При выполнении условия (5) динамика решений $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1), для которых $\mathbf{y}_{1t} = \mathbf{0}$ (нуль-динамика системы (1) по $\mathbf{y}_1$, следуя терминологии [25, 26]), определяется подсистемой

$$\mathbf{y}_2'(t) = \mathbf{Y}_2^0(t, \mathbf{y}_{2t}), \quad \mathbf{z}'(t) = Z(t, \mathbf{0}, \mathbf{y}_{2t}, \mathbf{z}_t).$$

«Приведенная» подсистема (4) определяет *частичную нуль-динамику* системы (1) по «измеримым» переменным, входящим в вектор $\mathbf{y}_1$: динамику $\mathbf{y}$-компоненты решений $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$, для которых $\mathbf{y}_{1t} = \mathbf{0}$.

Определение 3. Система (1) *локально частично детектируема* (*zero – partial state – detectable*), *если для каждого* $t_0 \geq 0$, *произвольного числа* $\varepsilon > 0$ *и для любого заданного числа* $L > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, L) > 0$ *такое, что*

$$\mathbf{y}_{1t} \equiv \mathbf{0} \quad (t \geq t_0) \quad \Rightarrow \quad \lim |\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0, \quad t \to \infty$$

(*и, кроме того,* $|\mathbf{y}(t; t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$) *при* $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ *и всех* $t \geq t_0$.

Теорема 3. Если выполнены условия 1) *и* 2) *теоремы 1, то система* (1) *локально частично детектируема в смысле определения 3.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1; при этом условие 3) теоремы 1 рассматривается как предположение.

Рассмотрим линейную систему с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1'(t) &= A_{11}\mathbf{y}_1(t) + B_{11}\mathbf{y}_2(t) + C_{11}\mathbf{z}(t) + \\
&\quad + A_{12}\mathbf{y}_1(t-\tau) + B_{12}\mathbf{y}_2(t-\tau) + C_{12}\mathbf{z}(t-\tau), \\
\mathbf{y}_2'(t) &= A_{21}\mathbf{y}_1(t) + B_{21}\mathbf{y}_2(t) + C_{21}\mathbf{z}(t) + \\
&\quad + A_{22}\mathbf{y}_1(t-\tau) + B_{22}\mathbf{y}_2(t-\tau) + C_{22}\mathbf{z}(t-\tau), \\
\mathbf{z}'(t) &= A_{31}\mathbf{y}_1(t) + B_{31}\mathbf{y}_2(t) + C_{31}\mathbf{z}(t) + \\
&\quad + A_{32}\mathbf{y}_1(t-\tau) + B_{32}\mathbf{y}_2(t-\tau) + C_{32}\mathbf{z}(t-\tau),
\end{aligned} \tag{10}$$

где A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Определение 4. Линейная система (10) *частично детектируема* ($\mathbf{y}$-*детектируема по* $\mathbf{y}_1$), *если ее асимптотическая* $\mathbf{y}_1$-*устойчивость означает асимптотическую* $\mathbf{y}$-*устойчивость.*

Введем матрицы

$$D_j = (B_{1j}, \quad C_{1j}), \quad G_j = \begin{pmatrix} B_{2j} & C_{2j} \\ B_{3j} & C_{3j} \end{pmatrix}, \quad L_j = \begin{pmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \end{pmatrix},$$

$$K_{10} = \left(D_1^{\mathrm{T}},\ D_2^{\mathrm{T}}\right), \quad K_{20} = \left(L_1^{\mathrm{T}},\ L_2^{\mathrm{T}}\right),$$

$$K_{1i} = \left(G_1^{\mathrm{T}} K_{1,\,i-1},\, G_2^{\mathrm{T}} K_{1,\,i-1}\right), \quad K_{2i} = \left(C_{31}^{\mathrm{T}} K_{2,\,i-1},\, C_{32}^{\mathrm{T}} K_{2,\,i-1}\right),$$

$$(1 \leq i \leq p-1; j = 1, 2;\ p = \dim(\mathbf{z})),$$

и обозначим через s_j – минимальные числа s такие, что

$$\operatorname{rank} K^*_{j,\,s-1} = \operatorname{rank} K^*_{j,\,s},$$
$$K^*_{j0} = K_{j0}, \quad K^*_{j\,s} = (K_{j0},\, K_{j1}, \ldots,\, K_{j\,s})\,(1 \leq s \leq p-1; j = 1, 2).$$

Теорема 4. Если выполняется условие

$$\operatorname{rank} K^*_{1,\,s_1} = \dim(\mathbf{y}_2) + \operatorname{rank} K^*_{2,\,s_2}, \tag{11}$$

то система (10) $\mathbf{y}$-*детектируема по* $\mathbf{y}_1$.

Доказательство теоремы 4 вынесено в Приложение.

Замечание 6. Условие (11) не предполагает анализ частичной нуль-динамики, но и не охватывает случай «слабых» связей в системе (10). Например, если матрицы B_{11}, C_{11} и B_{12}, C_{12} нулевые, для $\mathbf{y}$-детектируемости по $\mathbf{y}_1$ требуется асимптотическая $\mathbf{y}_2$-устойчивость подсистемы, «приведенной» по $\mathbf{y}_2, \mathbf{z}$.

Пример 2. Пусть система (10) имеет вид

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -a & 2a \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_1(t-\tau), \tag{12}$$

$$\mathbf{x} = (y_1, y_2, z_1, z_2)^{\mathrm{T}}, \quad a = \mathrm{const}.$$

В данном случае

$$K_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad K_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ -(1+a) \\ 2(1+a) \end{pmatrix}, \quad K_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2a \\ -2(1+2a) \end{pmatrix},$$

$$K_{20} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -2 & 2a \end{pmatrix}, \quad K_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 2 & 2a \end{pmatrix},$$

$$s_1 = \begin{cases} 2 & (\operatorname{rank} K_{10}^* < \operatorname{rank} K_{11}^* = \operatorname{rank} K_{12}^*) \text{ при } a \neq 0, \\ 1 & (\operatorname{rank} K_{10}^* = \operatorname{rank} K_{11}^*) \text{ при } a = 0 \end{cases}$$

$$s_2 = 1 \quad (\operatorname{rank} K_{20}^* = \operatorname{rank} K_{21}^*) \text{ при любом } a$$

и имеют место соотношения

$$\operatorname{rank} K_{12}^* = 1 + \operatorname{rank} K_{21}^* = 2 \text{ при } a \neq 0,$$
$$\operatorname{rank} K_{11}^* = 1 < 1 + \operatorname{rank} K_{21}^* = 2 \text{ при } a = 0.$$

Условие (11) (y_1, y_2)-детектируемости по y_1 системы (12) выполнено при $a \neq 0$. Отметим, что при любом a система (12) асимптотически (y_1, y_2)-устойчива, но неустойчива по Ляпунову (по всем переменным).

6. Заключение

Получены легко интерпретируемые условия, определяющие структурную форму нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений, для которой равномерная устойчивость (равномерная асимптотическая устойчивость) по части переменных «частичного» нулевого положения равновесия означает его равномерную устойчивость (равномерную асимптотическую устойчивость) по всем переменным. Эти условия включают требование равномерной асимптотической устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия подсистемы, «приведенной» по переменным, устойчивость «частичного» положения равновесия по которым изначально

не известна, а также ограничение на связь «приведенной» подсистемы с другими частями системы. Прямой метод Ляпунова используется как средство получения таких условий.

Полученные условия проанализированы с позиций проблемы частичной детектируемости системы; с этой целью введено понятие ее частичной нуль-динамики. Дано приложение к задаче частичной стабилизации.

Также найдены достаточные условия частичной детектируемости линейных систем с постоянными коэффициентами и запаздыванием, не требующие анализа устойчивости «приведенной» подсистемы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. При выполнении условия 2) для системы (4) найдется [24] функционал $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})$, определенный и непрерывный в области $t \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| \leq h$ и удовлетворяющий условию ($k = \mathrm{const} > 0$)

$$|V(t, \boldsymbol{\varphi}''_{\mathbf{y}_2}) - V(t, \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}_2})| \leq k||\boldsymbol{\varphi}''_{\mathbf{y}_2} - \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}_2}||, \tag{П.1}$$

для которого

$$a_1(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||) \leq V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq a_2(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||), \tag{П.2}$$

$$V'_{(4)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq -a_3(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||), \tag{П.3}$$

где $a_i(r), a_i(0) = 0$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in R_+$ функции (функции типа Хана).

Под производной V' функционала понимается величина [19, 24]

$$V' = \overline{\lim} \frac{1}{\delta}\{V[t + \delta, \mathbf{y}_{2t+\delta}] - V[t, \mathbf{y}_{2t}]\}, \quad \delta \to 0^+,$$

и при сделанных предположениях относительно V-функционала указанный предел определяется единственным образом.

Кроме того, при сделанных предположениях относительно V-функционала аналогично [24] можно показать, что производные V-функционала в силу систем (1) и (4) связаны соотношением

$$V'_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq V'_{(4)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) + k|\mathbf{R}(t,\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})|. \tag{П.4}$$

Учитывая неравенства (5), (П.1)–(П.3) заключаем, что соотношение (П.4) принимает вид

$$V'_{(1)}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq -a_3(a_2^{-1}(V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}))) + k|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})|. \tag{П.5}$$

Дальнейшее доказательство разобьем на две части, соответствующие случаям, когда в силу условия 3) теоремы «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1): 1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво; 2) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво.

I. Если «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво, то для каждого $t_0 \geq 0$, произвольного числа $\varepsilon > 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ следует $||\mathbf{y}_{1t}|| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Положим $\delta_1(\varepsilon) = b(\varepsilon)/k$, $b(\varepsilon) = a_3(a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)))$. Можно указать $\delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что из $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}|| < \delta_2$ следует $|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})| \leq \delta_1$ для $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < \varepsilon$. С другой стороны, в силу равномерной $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) имеем $||\mathbf{y}_{1t}|| < \delta_2(\varepsilon)$ при всех $t \geq t_0$, если $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ и $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$. Поскольку в области $t \geq 0$, $||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < \varepsilon$ при $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta[\delta_2(\varepsilon)]$, выполнено условие $|\mathbf{Y}_2^*(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2})| \leq \delta_1$, то из неравенства (П.5) следует, что

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) < 0 \quad \text{при} \quad V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\varepsilon). \tag{П.6}$$

Пусть $\delta^*(\varepsilon, L) = \min\{\delta(\varepsilon, L), \delta[\delta_2(\varepsilon)], \delta_3(\varepsilon)\}$, $\delta_3(\varepsilon) = a_2^{-1}(a_1(\varepsilon))$. Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1) с $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$. В силу условий (П.2) в данном случае имеем $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq a_2(\delta_3(\varepsilon))$ и, следовательно, $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \leq a_1(\varepsilon)$. Покажем, что

$$V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0. \tag{П.7}$$

Предположим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\varepsilon)$ при $t \in [t_0, t_1)$, но $V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\varepsilon)$ при $t_0 = t_1$. Тогда имеет место неравенство $V'_{(1)}(t_1, \mathbf{y}_{2t}) \geq 0$, которое противоречит условию (П.6). Значит, неравенство (П.7) справедливо для всех $t \geq t_0$ и на основании условия $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \geq a_1(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||)$ заключаем, что $||\mathbf{y}_{2t}|| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$, если $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$ и $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$.

II. Равномерная $\mathbf{y}_2$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) следует из первой части доказательства теоремы 1: для каждого $t_0 \geq 0$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta^*(\varepsilon, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$, следует $||\mathbf{y}_{2t}|| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Покажем, что «частичное» положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1) является также равномерно $\mathbf{y}_2$-притягивающим. Это значит, что при заданном $\delta^*(\varepsilon, L) > 0$ для любого $\eta \in (0, \delta^*)$ существует число $T(\eta, L) > 0$ такое, что из $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in S_\delta$, где $\delta = \delta^*(\varepsilon, L)$, следует $||\mathbf{y}_{2t}|| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + T(\eta, L)$.

В рассматриваемом случае предельное соотношение

$$|\mathbf{R}(t, \mathbf{y}_{1t}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}})| \to 0, \quad t \to \infty \tag{П.8}$$

будет выполняться равномерно по $t_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta$ $(\Delta < \delta^*)$, если $\Delta > 0$ определяет область равномерного $\mathbf{y}_1$-притяжения «частичного» положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1).

Положим $\eta \in (0, \Delta)$; в этом случае $\eta < \delta^*(\varepsilon, L) < a_2^{-1}(a_1(\varepsilon)) < \varepsilon$. В силу условий (П.4), (П.8) при $a_2^{-1}(a_1(\eta)) \leq ||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}|| < \varepsilon$ и $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta(\Delta < \delta^*)$ найдется такое $T_1(\eta, L) > 0$, что для всех $t \geq T_1(\eta, L)$ выполняется неравенство

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \leq -1/2b(\eta). \tag{П.9}$$

Следовательно, при $t \geq T_1(\eta, L)$ имеем

$$V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) < 0 \quad \text{при} \quad V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\eta). \tag{П.10}$$

Положим

$$t_{0*} = \max\left[t_0, T_1(\eta, L)\right], \quad T_2(\eta) = \frac{2a_2(\eta) - a_1(\eta)}{b(\eta)}.$$

Покажем, что на отрезке $[t_{0*}, t_{0*} + T_2(\eta, L)]$ существует момент времени t_*, для которого

$$V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta) \quad \text{при} \quad t = t_*. \tag{П.11}$$

Допустим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) \geq a_1(\eta)$ для всех $t \in (t_{0*}, t_{0*} + T_2(\eta, L))$. Тогда на этом интервале времени $||\mathbf{y}_{2t}|| \geq a_2^{-1}(a_1(\eta))$ и справедливо соотношение (П.9), что приводит к противоречивым неравенствам

$$0 < a_1(\eta) \leq V\left(t_{0*} + T_2(\eta, L), \mathbf{y}_{2(t_{0*}+T_2(\eta,L))}\right) = V(t_{0*}, \mathbf{y}_{2(t_{0*})}) +$$
$$+ \int\limits_{t_{0*}}^{t_{0*}+T_2(\eta,L)} V'_{(1)}(s, \mathbf{y}_{2s})ds \leq a_2(\eta) - 1/2b(\eta)T_2(\eta, L) = 1/2a_1(\eta).$$

Из условий (П.10), (П.11) заключаем, что неравенство $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta)$ имеет место для всех $t = t_*$. Действительно, допустим противное, что $V(t, \mathbf{y}_{2t}) < a_1(\eta)$ при $t \in [t_*, t^*)$, но $V(t, \mathbf{y}_{2t}) = a_1(\eta)$ при $t = t^*$. Тогда $V'_{(1)}(t, \mathbf{y}_{2t}) \geq 0$ при $t = t^*$, что противоречит условию (П.11). Поэтому неравенство $||\mathbf{y}_{2t}|| < \eta$ выполняется для всех $t \geq t_*$ на основании условия $V(t, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}) \geq a_1(||\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_2}||)$. Следовательно, имеем $||\mathbf{y}_{2t}|| < \eta$ для любого $t \geq t_0 + T(\eta, L)$, где $T = T_1(\eta, L) + T_2(\eta, L)$, если $\boldsymbol{\varphi} \in S_\Delta(\Delta < \delta^*)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Для понимания «механизма» влияния структурной формы линейной системы (10) на возникновение свойства $\mathbf{y}$-детектируемости по $\mathbf{y}_1$ введем [4] вспомогательные линейные системы уравнений (с постоянными коэффициентами)

$$\mathbf{w}'_1(t) = A_1^*\mathbf{w}_1(t) + B_1^*\mathbf{w}_1(t - \tau), \quad \mathbf{w}_1 = (\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1), \tag{П.12}$$

$$\mathbf{w}'_2(t) = A_2^*\mathbf{w}_2(t) + B_2^*\mathbf{w}_2(t - \tau), \quad \mathbf{w}_2 = (\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_2), \tag{П.13}$$

определяющие динамику переменных системы (10), входящих соответственно в векторы $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}$. Отметим, что в процессе построения вспомогательных систем (П.12), (П.13) компоненты вектора $\boldsymbol{\mu}_1$ являются линейными комбинациями компонент векторов $\mathbf{y}_2, \mathbf{z}$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\mu}_2$ являются линейными комбинациями компонент вектора $\mathbf{z}$.

При выполнении условия (11) системы (П.12), (П.13) имеют одинаковую размерность. Множества корней характеристического квазиполинома указанных вспомогательных систем, являющиеся подмножествами множества корней характеристического квазиполинома системы (10), также совпадают. В такой ситуации асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость системы (10) будет означать ее асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб. 1893. Т. 17. Вып. 2. С. 253–333.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
4. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
5. *Воротников В.И.* Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 47–51.
6. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.
7. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* Об устойчивости по части переменных «частичных» положений равновесия систем с последействием // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496–503.
8. *Sontag E.D., Wang Y.* Output-to-State Stability and Detectability of Nonlinear Systems // Syst. & Control Lett. 1997. V. 29. No. 5. P. 279–290.
9. *Ingalls B.P., Sontag E.D., Wang Y.* Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // Proc. 41 IEEE Conf. Decision Control. Las Vegas, Nevada. 2002. P. 3946–3951.
10. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
11. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3–40.

    Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to State Stability and Allied System Properties // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1579–1614.
12. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.

    Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.
13. *Jammazi C.* Backstepping and Partial Asymptotic Stabilization // Int. J. Control, Autom., Syst. 2008. V. 6. No. 6. P. 859–872.
14. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Input-to-Output Stabilization of Nonlinear Systems via Backstepping // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2009. V. 19. No. 6. P. 613–633.
15. *Binazadeh T., Yazdanpanah M.J.* Partial Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems // ISA Trans. 2012. V. 51. No. 2. P. 298–303.
16. *Lamooki G.R.R.* Recursive Partial Stabilization: Backstepping and Generalized Strict Feedback Form // Int. J. Control, Autom., Syst. 2013. V. 11. No. 2. P. 250–257.
17. *Zuyev A.L.* Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements. Cham: Springer Int. Publ., 2015.
18. *L'Afflitto A., Haddad W.M., Bakolas E.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2016. V. 26. No. 5. P. 1026–1050.
19. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations. 2 ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

20. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Academ. Press, 1985.

21. *Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O.* On the Stability of Invariant Sets of Functional Differential Equations // Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl. 2003. V. 55. No. 4–6. P. 641–656.

22. *Halanay A.* Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. N.Y.: Acad. Press, 1966.

23. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // АиТ. 2009. № 1. С. 25–38.

    Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On Partial Detectability of the Nonlinear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 20–32.

24. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.

25. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 11. P. 1228–1240.

26. *Isidori A.* The Zero Dynamics of a Nonlinear System: From the Origin to the Latest Progresses of a Long Successful Story // Eur. J. Control. 2013. V. 19. No. 5. P. 369–378.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 14.03.2019

После доработки 25.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019

© 2020 г. **А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)**
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (zuev@dvo.ru)
(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток;
Университет Иннополис, Иннополис),
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.con)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ПОДХОД НА ОСНОВЕ СКОЛЬЗЯЩИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ[1]

Рассматривается задача функционального диагностирования технических систем, описываемых линейными динамическими моделями, в присутствии возмущений. Для решения задач обнаружения, поиска и идентификации дефектов используется метод на основе скользящих наблюдателей. Предлагаются модификации этого метода, позволяющие ослабить ограничения на его реализацию по сравнению с известными результатами и добиться уменьшения сложности средств диагностирования.

Ключевые слова: линейные системы, диагностирование, идентификация дефектов, скользящие наблюдатели.

DOI: 10.31857/S0005231020020026

1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена решению задачи функционального диагностирования (ФД) технических систем в рамках концепции аналитической избыточности. Согласно этой концепции ФД осуществляется путем проверки соотношений, существующих между входами и выходами системы, измеренными на конечном интервале времени. Процесс ФД включает в себя генерацию невязки как результата рассогласования между поведением системы и ее эталонной модели и принятием решений путем оценки полученной невязки.

Задача ФД интенсивно исследуется уже более 30 лет, см., например, обзоры [1–3] и книги [4–7]. Были изучены различные модели технических систем — линейные, полиномиальные, нелинейные, сингулярные, гибридные; разработано несколько методов диагностирования — диагностические наблюдатели, фильтры Калмана, соотношения паритета, идентификация. Одним из методов идентификации является метод, основанный на наблюдателях, использующих особенности скользящих режимов, детально рассмотренных в [8]; для простоты будем далее называть такие наблюдатели скользящими.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 16-19-00046-П (разработан метод построения скользящих наблюдателей) и грантом Президента РФ МК-1987.2018.8 (выполнен синтез наблюдателей для идентификации дефектов).

Скользящие наблюдатели используются для решения задачи идентификации дефектов, в линейных [9–11], нелинейных [12–14] и сингулярных системах [15], для оценивания неизмеряемых компонент вектора состояния и внешних возмущений в нелинейных системах [16, 17], для обеспечения отказоустойчивого управления [18], в ряде практических приложений [19–22].

В настоящей работе по аналогии с [9, 10] рассматриваются линейные системы, для которых решается задача идентификации дефектов в присутствии возмущений, но при наложении менее жестких, нежели в [9, 10, 13], ограничений на класс рассматриваемых систем. Кроме того, предлагаемый подход позволяет добиться уменьшения сложности средств диагностирования.

Рассматривается класс систем, описываемых линейной динамической моделью

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — векторы состояния, управления и выхода, F, G, H, D и L — постоянные матрицы соответствующих размеров, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ — функция, описывающая дефекты: при их отсутствии $d(t) = 0$, после появления дефекта $d(t)$ становится неизвестной ограниченной функцией времени, $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$ — возмущение, предполагается, что $\rho(t)$ — неизвестная ограниченная функция времени.

Коротко напомним некоторые положения и результаты из [10, 13], используемые в настоящей работе.

В [10] предполагается, что система (1.1) при $\rho(t) = 0$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $q \leqslant l < n$, 2) $\operatorname{rank}(HD) = q$, 3) инвариантные нули тройки (F, D, H) лежат в $\mathbb{C}_-$. Известно, что в этих предположениях существует преобразование координат $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Tx$ для некоторой невырожденной матрицы T такое, что в новых координатах система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= F_{11}z_1(t) + F_{12}z_2(t) + G_1u(t), \\ \dot{z}_2(t) &= F_{21}z_1(t) + F_{22}z_2(t) + G_2u(t) + D_2d(t), \\ y(t) &= z_2(t), \end{aligned}$$

где $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-l}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^l$ и матрица F_{11} устойчива. Характерной особенностью преобразованной системы является то, что $\operatorname{rank}(D_2) = q$, функция $d(t)$ входит только во вторую подсистему, а ее вектор выхода совпадает с вектором состояния этой подсистемы; это существенно используется в дальнейшем решении.

Для оценки функции $d(t)$ строится скользящий наблюдатель

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1(t) &= F_{11}\hat{z}_1(t) + F_{12}\hat{z}_2(t) + G_1u(t) - F_{12}e_y(t), \\ \dot{\hat{z}}_2(t) &= F_{21}\hat{z}_1(t) + F_{22}\hat{z}_2(t) + G_2u(t) - (F_{22} - F_{22}^*)e_y(t) + v(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{z}_2(t), \end{aligned}$$

где $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$, F_{22}^* — некоторая устойчивая матрица, разрывная функция $v(t)$ определяется соотношением

$$v(t) = \begin{cases} -g\|D_2\|\dfrac{P_2 e_y(t)}{\|P_2 e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $P_2 \in \mathbb{R}^{l\times l}$ — матрица Ляпунова для F_{22}^*, скаляр g выбирается из условия $g > \|d(t)\|$. В [10] обосновывается, что разрывная функция $v(t)$ может быть заменена непрерывной аппроксимирующей функцией

$$v_\delta(t) = -g\|D_2\|\frac{P_2 e_y(t)}{\|P_2 e_y(t)\| + \delta}, \tag{1.2}$$

где δ — малое положительное число. Тогда, поскольку $\operatorname{rank}(D_2) = q$, функция $d(t)$ может быть оценена с высокой степенью точности в виде

$$d(t) = -g\|D_2\|(D_2^{\mathrm{T}} D_2)^{-1} D_2^{\mathrm{T}} \frac{P_2 e_y(t)}{\|P_2 e_y(t)\| + \delta}.$$

В отличие от [10] в [13] задача идентификации дефекта решается при наличии возмущений, когда $\rho(t) \neq 0$, в предположениях $q = 1$, $p < l < n$ и $\operatorname{rank}(HL) = \operatorname{rank}(L)$, что позволяет представить систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= F_{11} z_1(t) + F_{12} z_2(t) + G_1 u(t) + D_1 d(t), \\ w_1(t) &= H_{11} z_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= F_{21} z_1(t) + F_{22} z_2(t) + G_2 u(t) + D_2 d(t) + L_2 \rho(t), \\ w_2(t) &= H_{22} z_2(t), \end{aligned}$$

где $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-q}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^q$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Tx$, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = Sy$ для некоторых невырожденных матриц T и S. Далее при некоторых дополнительных предположениях строится два скользящих наблюдателя и на основе первого из них производится оценка скалярной функции $d(t)$.

Отметим, что в простейшем случае условие $\operatorname{rank}(HL) = \operatorname{rank}(L)$ означает, что возмущение входит в уравнения тех переменных системы (1.1), значения которых измеряются.

В настоящей работе по аналогии с [13] задача идентификации дефекта решается при наличии возмущений с условием $q \leqslant l < n$, однако предположение $\operatorname{rank}(HL) = \operatorname{rank}(L)$ не делается. Кроме того, строится только один скользящий наблюдатель, причем пониженной размерности, позволяющий оценить векторную функцию $d(t)$.

Следует также отметить работу [23], в основе которой (как и в настоящей работе) лежит идея использования редуцированной (имеющей меньшую размерность) модели исходной системы, которая, однако, реализуется в настоящей работе и в [23] различными способами. Кроме того, в отличие от настоящей работы, где решается задача идентификации дефекта, в [23] скользящий

наблюдатель применяется для оценки величины возмущения, которое далее используется в строящемся диагностическом наблюдателе для компенсации этого возмущения с целью повышения робастности процесса диагностирования.

Рассмотрим вначале задачу идентификации дефекта для скалярной функции $d(t)$.

2. Построение редуцированной модели

Решение поставленной задачи опирается на редуцированную модель системы (1.1), которая в общем случае описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_* d(t) + L_* \rho(t), \\ y_*(t) &= H_* x_*(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ — вектор состояния модели, F_*, G_*, J_*, H_*, D_* и L_* — матрицы соответствующих размеров, подлежащие определению. Как обычно, предполагается, что при отсутствии возмущений и дефектов и после окончания переходного процесса, вызванного возможным рассогласованием начальных состояний системы (1.1) и модели (2.1), выполняются равенства $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_* y(t)$ для некоторых матриц Φ и R_*. Известно [1, 24, 25], что эти матрицы удовлетворяют условиям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad R_* H = H_* \Phi, \quad \Phi G = G_*, \quad \Phi D = D_*, \quad \Phi L = L_*. \tag{2.2}$$

Рассмотрим метод построения модели (2.1) минимальной размерности, не чувствительной к возмущениям, на основе которой может быть построен скользящий наблюдатель. Для анализа возможности построения такой модели введем матрицу L_0 максимального ранга такую, что $L_0 L = 0$. Известно [24, 25], что условие нечувствительности к возмущениям имеет вид $\Phi L = 0$; тогда из максимальности ранга матрицы L_0 следует $\Phi = T L_0$ для некоторой матрицы T. Заменим матрицу Φ в выражении $R_* H = H_* \Phi$ на $T L_0$: $R_* H = H_* T L_0$ и перепишем его в виде

$$\begin{pmatrix} R_* & -H_* T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение, когда между строками матриц H и L_0 имеется линейная зависимость, откуда следует, что критерием его нетривиального решения является условие

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \operatorname{rank}(H) + \operatorname{rank}(L_0). \tag{2.3}$$

Аналогично уравнение $\Phi F = F_* \Phi + J_* H$ после указанной подстановки приводится к виду

$$\begin{pmatrix} T & -F_* T & -J_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 F \\ L_0 \\ H \end{pmatrix} = 0,$$

а условием его нетривиального решения является неравенство

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_0F \\ L_0 \\ H \end{pmatrix} < \operatorname{rank}(L_0F) + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_0 \\ H \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Условия (2.3) и (2.4) являются необходимыми, т.е. их выполнение не гарантирует возможности построения модели, не чувствительной к возмущениям, поскольку в уравнения, на основе которых они получены, входит неизвестная матрица T. Если хотя бы одно из условий (2.3), (2.4) не выполняется, модели, не чувствительной к возмущениям, не существует. Ниже предполагается, что эти условия выполняются, т.е. явные препятствия для построения модели с указанным свойством отсутствуют.

Отметим также, что простые достаточные условия возможности построения модели, не чувствительной к возмущениям, имеют вид $HL = 0$ и $FL = 0$, что следует из уравнений (2.6), приведенных ниже, но эти условия достаточно редко выполняются на практике.

Для упрощения процедуры построения модели матрицы F_* и H_* ищутся в канонической форме следующего вида:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$H_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Используя (2.5), получим из (2.2) уравнения для строк матриц Φ и J_*:

$$\Phi_1 = R_*H, \quad \Phi_iF = \Phi_{i+1} + J_{*i}H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_kF = J_{*k}H, \tag{2.6}$$

где Φ_i и J_{*i} — i-е строки матриц Φ и J_*, $i = 1, \dots, k$, k — размерность модели (2.1). Уравнения (2.6) могут быть приведены к одному уравнению. Действительно, из (2.6) при $i = 1$ следует $\Phi_1F = \Phi_2 + J_{*1}H$; умножая обе части этого равенства на матрицу F справа и заменяя Φ_2F на $\Phi_3 + J_{*2}H$, получаем $R_*HF^2 = \Phi_3 + J_{*1}HF + J_{*2}H$. Продолжая аналогично, приходим к выражению

$$R_*HF^k = J_{*1}HF^{k-1} + J_{*2}HF^{k-2} + \ldots + J_{*k}H.$$

Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} R_* & -J_{*1} & -J_{*2} & \dots & -J_{*k} \end{pmatrix} V^{(k)} = 0, \tag{2.7}$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}.$$

Можно показать [24, 25], что условие нечувствительности к возмущениям $\Phi L = 0$ может быть представлено в форме

$$(\ R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k}\ )B^{(k)} = 0, \tag{2.8}$$

где

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & HF^2L & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & HFL & \dots & HF^{k-2}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как строка $(\ R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k}\ )$ удовлетворяет условию (2.7), из (2.7) и (2.8) получаем

$$(\ R_* \quad -J_{*1} \quad -J_{*2} \quad \dots \quad -J_{*k}\ )(V^{(k)}\ B^{(k)}) = 0. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) имеет нетривиальное решение, если

$$\operatorname{rank}(V^{(k)}\ B^{(k)}) < l(k+1).$$

Из последнего условия определяется минимальная размерность k, при которой уравнение (2.9) имеет решение, находится решение уравнения (2.9), из (2.6) определяются строки матрицы Φ и принимается $G_* := \Phi G$ и $D_* := \Phi D$.

В результате модель (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_* d(t), \\ y_*(t) &= H_* x_*(t) = R_* y(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Построение скользящего наблюдателя

По аналогии с [13] скользящий наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_*(t) &= F_* \hat{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_* v(t) - K e_y(t), \\ \hat{y}_*(t) &= H_* \hat{x}_*(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где матрица K выбирается так, чтобы $F_0 = F_* - KH_*$ стала устойчивой матрицей,

$$v(t) = \begin{cases} -g\dfrac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3.2}$$

$e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_*(t) = \hat{y}_*(t) - R_* y(t)$ — ошибка по выходу; правила выбора матрицы Q и положительного скаляра g обсуждаются ниже. Отметим, что, поскольку матрицы F_* и H_* ищутся в каноническом виде (2.3), матрица K всегда существует.

Введем ошибку по состоянию $e(t) = \hat{x}_*(t) - x_*(t)$; нетрудно видеть, что $e_y(t) = H_* e(t)$. Используя (2.10) и (3.1), запишем уравнение динамики ошибки $e(t)$:

$$\dot{e}(t) = F_* e(t) + D_*(v(t) - d(t)) - K e_y(t) = F_0 e(t) + D_*(v(t) - d(t)). \tag{3.3}$$

По аналогии с [13] предполагается, что существуют матрица Q и симметрическая положительно определенная матрица P такие, что

$$P D_* = H_*^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}}. \tag{3.4}$$

Скаляр g выбирается из условия $g > \|d(t)\|$. Так как матрица F_0 устойчива, то для произвольной симметрической положительно определенной (СПО) матрицы W существует такая СПО матрица P, что $F_0^{\mathrm{T}} P + P F_0 = -W$.

Теорема 1. При указанном выборе матрицы Q и скаляра g наблюдатель (3.1) *сходится асимптотически, т.е.*

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = e^{\mathrm{T}}(t) P e(t)$$

и с учетом выражений (3.2)–(3.4) найдем ее производную по времени:

$$\dot{V}(t) = (F_0 e(t) + D_*(v(t) - d(t)))^{\mathrm{T}} P e(t) + e^{\mathrm{T}}(t) P (F_0 e(t) + D_*(v(t) - d(t))) =$$

$$= e^{\mathrm{T}}(t)(F_0^{\mathrm{T}} P + P F_0) e(t) + (D_*(v(t) - d(t)))^{\mathrm{T}} P e(t) + e^{\mathrm{T}}(t) P D_*(v(t) - d(t)) =$$

$$= -e^{\mathrm{T}}(t) W e(t) + 2 e^{\mathrm{T}}(t) P D_*(v(t) - d(t)) =$$

$$= -e^{\mathrm{T}}(t) W e(t) + 2 e^{\mathrm{T}}(t) H_*^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} v(t) - 2 e^{\mathrm{T}}(t) H_*^{T} Q^{\mathrm{T}} d(t) =$$

$$= -e^{\mathrm{T}}(t) W e(t) - 2 g e^{\mathrm{T}}(t) H_*^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} \frac{Q e_y(t)}{\|Q e_y(t)\|} - 2 (Q H_* e(t))^{\mathrm{T}} d(t) =$$

$$= -e^{\mathrm{T}}(t) W e(t) - 2 g (Q H_* e(t))^{\mathrm{T}} \frac{Q H_* e(t)}{\|Q H_* e(t)\|} - 2 (Q H_* e(t))^{\mathrm{T}} d(t) \leqslant$$

$$\leqslant -e^{\mathrm{T}}(t) W e(t) - 2 g \|Q H_* e(t)\| + 2 \|Q H_* e(t)\| \|d(t)\| =$$

$$= -e^{\mathrm{T}}(t) W e(t) - 2 (g - \|d(t)\|) \|Q H_* e(t)\| < 0;$$

в последнем неравенстве учтено, что W — СПО матрица и $g > \|d(t)\|$. Полученный результат доказывает теорему.

Поскольку в скользящем режиме $\dot{e}(t) = 0$ и $e(t) = 0$, то из уравнения (3.3) следует $0 = D_*(v(t) - d(t))$ и функция $d(t)$ может быть оценена в виде

$$d(t) = -g \frac{Q e_y(t)}{\|Q e_y(t)\| + \delta},$$

где δ — малая положительная константа; напомним, что согласно [10] разрывная функция $v(t)$ заменяется непрерывной функцией $v_\delta(t)$ (1.2). Следует отметить, что полученное выражение зависит только от ошибки по выходу $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - R_* y(t)$.

В случае, когда в измерениях присутствуют шумы, главный результат остается прежним, только ужесточаются требования к величине скаляра g для обеспечения скользящего режима. Действительно, пусть $y(t) = Hx(t) + \rho_s(t)$, где $\rho_s(t)$ — функция, описывающая шумы измерений. Тогда $e_y(t) = H_* e(t) - R_* \rho_s(t)$, правая часть (3.3) дополняется слагаемым $(KR_* + J_*)\rho_s(t)$, а последние элементы выражения для $\dot{V}(t)$ принимают вид

$$\dot{V}(t) \leqslant -e^{\mathrm{T}}(t)We(t) - 2g\|QH_* e(t)\| + 2\|QH_* e(t)\|\|d(t)\| +$$
$$+2\|P(KR_* + J_*))\|\|e(t)\|\|\rho_s(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant -e^{\mathrm{T}}(t)We(t) - 2(g - \|d(t)\| - \|\rho_s(t)\|\frac{\|P(KR_* + J_*)\|}{\|QH_*\|})\|QH_*\|\|e(t)\|.$$

Ясно, что $\dot{V}(t) < 0$ при

$$g > \|d(t)\| + \|\rho_s(t)\|\frac{\|P(KR_* + J_*)\|}{\|QH_*\|}, \tag{3.5}$$

что гарантирует существование скользящего режима. Ясно, что оценка функции $d(t)$ в этом случае будет произведена с погрешностью, не превосходящей величины $\|\rho_s(t)\|\|P(KR_* + J_*)\|$.

Отметим, что в [12] для решения задачи идентификации дефектов при наличии возмущений требуется выполнение условия $Im(L) \cap Im(D) = \{0\}$, которое в простейших случаях означает, что дефект и возмущение действуют на разные части системы. В предлагаемом подходе оно заменено на $\Phi L = 0$. Обсуждение связи между этими условиями требует специального анализа.

Отметим также, что предложенный подход может быть использован для оценки величины возмущения $\rho(t)$ на основе редуцированной модели (2.1), не чувствительной к дефекту. Для построения такой модели используется подход, описанный в разделе 2, с заменой L в матрице $B^{(k)}$ на D. Оцененное таким образом возмущение $\rho(t)$ предлагается использовать в дополнительном диагностическом наблюдателе, чувствительном как к дефекту, так и возмущениям. Такой наблюдатель может быть построен известными методами [1, 24]. Введение в него оценки функции $\rho(t)$ позволяет существенно повысить степень робастности процесса диагностирования и уменьшить вероятности ошибочных решений.

4. Случай векторной функции $d(t)$

В случае, когда $d(t)$ — векторная функция, редуцированная модель (2.1) также должна иметь векторный выход $y_*(t)$, что в общем случае предполагает ее максимально возможную размерность. Для построения такой модели описанную выше процедуру предлагается модифицировать следующим образом.

Матрица F_* модели также ищется в канонической форме (2.5), но каноническая форма матрицы H_* и первое уравнение в (2.6) не используются. Это связано с тем, что форма матрицы H_* в (2.5) соответствует скалярному выходу $y_*(t)$, а первое уравнение накладывает ограничение на первую строку матрицы Φ и, следовательно, на остальные строки, поскольку они связаны с первой соотношениями (2.6). В результате уравнение (2.7) изменяется:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & -J_{*1} & -J_{*2} & \dots & -J_{*k} \end{pmatrix} V_*^{(k)} = 0,$$

где

$$V_*^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом модифицируются уравнения (2.8) и (2.9):

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & -J_{*1} & -J_{*2} & \dots & -J_{*k} \end{pmatrix} B_*^{(k)} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & -J_{*1} & -J_{*2} & \dots & -J_{*k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_*^{(k)} & B_*^{(k)} \end{pmatrix} = 0, \tag{4.1}$$

где

$$B_*^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & F^2L & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & HFL & \dots & HF^{k-2}L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от скалярного случая ищется не минимальное, а максимальное значение k, при котором уравнение (4.1) имеет решение. Требование максимальности связано с тем, что для построения матрицы R_* со свойством $\operatorname{rank}(R_*) \geqslant \operatorname{rank}(D_*)$ необходима модель максимальной размерности. Из уравнения (4.1) находятся матрицы Φ_1, J_{*1}, $\dots$, J_{*k}, после чего из соотношений (2.6) определяются строки Φ_2, $\dots$, Φ_k матрицы Φ и принимается $G_* := \Phi G$ и $D_* := \Phi D$. Для определения матриц R_* и H_* уравнение $R_*H = H_*\Phi$ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} R_* & -H_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} = 0,$$

откуда и находятся искомые матрицы. Это уравнение имеет нетривиальное решение, когда между строками матриц H и Φ имеется линейная зависимость, откуда следует, что критерием его нетривиального решения является условие

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} < \operatorname{rank}(H) + \operatorname{rank}(\Phi),$$

проверяющее наличие такой зависимости. Предполагается, что пара (F_*, H_*) наблюдаема, в этом случае существует такая матрица K, что $F_0 = F_* - KH_*$ — устойчивая матрица [13]. В остальном процедура построения скользящего наблюдателя и оценки функции $d(t)$ совпадает с рассмотренной в разделе 3.

Если $s = \operatorname{rank}(R_*) \geqslant \operatorname{rank}(D_*)$, задача идентификации векторной функции $d(t)$ может быть решена описанным выше методом, в противном случае удается оценить только s компонент этой функции.

5. Идентификация дефектов в датчиках

Рассмотрим случай, когда дефекты возникают в датчиках, для чего скорректируем модель (1.1): положим $d(t) = 0$ и добавим в уравнение для измерений слагаемое $D_s d_s(t)$:

$$y(t) = Hx(t) + D_s d_s(t),$$

где, как и для дефектов в динамике, $d_s(t)$ либо равно нулю при отсутствии дефектов, либо становится неизвестной ограниченной функцией времени при их появлении. Остановимся на случае, когда $d_s(t)$ — скаляр, вариант векторной функции может быть рассмотрен по аналогии с разделом 4.

Аналогичная задача в отсутствие возмущений изучалась в [10]; как и выше, предлагаемое решение основывается на редуцированной модели (2.1), не чувствительной к возмущениям, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t), \\ y_*(t) &= H_* x_*(t) + D_{*s} d_s(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $D_{*s} = R_* D_s$. Для обеспечения существования скользящего режима необходимо положить $R_* D_s = 0$, так как только в этом случае $e_y(t) = H_* e(t)$, где $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_*(t)$ — ошибка по выходу, $e(t) = \hat{x}_*(t) - x_*(t)$ — ошибка по состоянию.

В отличие от раздела 3 скользящий наблюдатель ищется в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_*(t) &= F_* \hat{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) - J_* D_s v(t) - K e_y(t), \\ \hat{y}_*(t) &= H_* \hat{x}_*(t); \end{aligned} \tag{5.2}$$

предполагается, что $J_* D_s \neq 0$, матрица K выбирается так, чтобы $F_0 = F_* - KH_*$ стала устойчивой матрицей,

$$v(t) = \begin{cases} g_s \dfrac{Q e_y(t)}{\|Q e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

правила выбора матрицы Q и положительного скаляра g_s обсуждаются ниже.

Используя (5.1) и (5.2), запишем уравнение динамики ошибки $e(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= F_*e(t) + J_*y(t) - J_*Hx(t) - J_*D_sv(t) - Ke_y(t) = \\ &= F_*e(t) - KH_*e(t) + J_*D_sd_s(t) - J_*D_sv(t) = \\ &= F_0e(t) - J_*D_s(v(t) - d_s(t)),\end{aligned} \tag{5.3}$$

где $F_0 = F_* - KH_*$ — устойчивая матрица. По аналогии с [13] предполагается, что существуют матрица Q и СПО матрица P такие, что

$$PJ_*D_s = H_*^{\mathtt{T}}Q^{\mathtt{T}}. \tag{5.4}$$

Скаляр g_s выбирается из условия $g_s > \|d_s(t)\|$.

По аналогии с теоремой 1 может быть доказана

Теорема 2. При указанном выборе матрицы Q и скаляра g_s наблюдатель (5.2) *сходится асимптотически.*

Поскольку в скользящем режиме $\dot{e}(t) = 0$ и $e(t) = 0$, то из уравнения (5.3) следует $0 = J_*D_s(v(t) - d_s(t))$, и функция $d_s(t)$ может быть оценена в виде

$$d_s(t) = g_s\frac{Qe_y(t)}{\|Qe_y(t)\| + \delta},$$

где δ — малая положительная константа.

При наличии шума в измерениях проверяемого датчика как-либо отстроиться от него не представляется возможным, можно оценить только сумму $d_s(t) + \rho_s(t)$; если же зашумлены другие измерения, следует применить подход, описанный в разделе 3, что выливается в увеличение величины скаляра g_s по аналогии с (3.5).

6. Практический пример

Рассмотрим модель следящего электропривода, разомкнутая цепь которого без учета вязкого трения описывается следующей моделью [26]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{i_p}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{K_M}{J_H}x_3(t) + \rho(t) + d_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{K_\omega}{L}x_2(t) - \frac{R}{L}x_3(t) + \frac{K_U}{L}u(t) + d_3(t),\end{aligned} \tag{6.1}$$

где x_1 — угол поворота выходного вала редуктора, x_2 — угловая скорость вращения вала электродвигателя, x_3 — ток электродвигателя, i_p — передаточное отношение редуктора, J_H — момент инерции ротора двигателя и вращающихся частей редуктора, приведенный к ротору, K_M — моментный коэффициент электродвигателя, K_ω — коэффициент противо-э.д.с., R — активное сопротивление обмотки якоря электродвигателя, L — индуктивность якорной обмотки электродвигателя, K_U — коэффициент усиления усилителя мощности.

Рассматривается следующее множество дефектов: первый $d_s(t) = \tilde{x}_1(t)$ — ошибка в показаниях датчика положения; второй $d_2(t) = \left(\frac{K_M}{J_H+\tilde{J}(t)} - \frac{K_M}{J_H}\right) x_3(t)$ соответствует изменению номинального момента инерции нагрузки навеличину $\tilde{J}(t)$, третий $d_3(t) = -\frac{\tilde{R}(t)}{L} x_3(t)$ — изменению активного сопротивления цепи якоря электродвигателя на величину $\tilde{R}(t)$. Возмущение $\rho(t) = -\frac{\tilde{M}(t)}{J_H+\tilde{J}(t)}$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента $\tilde{M}(t)$, приведенного к валу двигателя. Из вида модели ясно, что второй дефект неотличим от возмущения, поэтому отдельно ниже он не рассматривается.

Обозначим:

$$k_1 = \frac{1}{i_p}, \quad k_2 = \frac{K_M}{J_H}, \quad k_3 = -\frac{K_\omega}{L}, \quad k_4 = -\frac{R}{L}, \quad k_5 = \frac{K_U}{L}.$$

Полагая, что измеряемыми являются переменные x_1 и x_3, рассматриваемую систему опишем следующими матрицами:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, поскольку $HL = 0$, то условие $\operatorname{rank}(HL) = \operatorname{rank}(L)$, необходимое для применения подхода, предложенного в [13], здесь не выполняется.

Построим модель, инвариантную к возмущению. Примем $k = 1$ и найдем матрицы $V^{(1)}$ и $B^{(1)}$:

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank}(V^{(1)}, B^{(1)}) = 3 < 2(1+1) = 4$, уравнение (2.9) имеет решение с матрицами

$$R_* = (k_3 \;\; -k_1), \quad J_* = (0 \;\; -k_1 k_4),$$

откуда $\Phi = (k_3 \;\; 0 \;\; -k_1)$ и $G_* = -k_1 k_5$. Модель (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= -k_1 k_4 y_2(t) - k_1 k_5 u(t), \\ y_*(t) &= x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_* = k_3 x_1 - k_1 x_3$.

Так как $\Phi D_2 = 0$ и $\Phi D_3 = D_{*3} = -k_1$, построенная модель чувствительна к третьему дефекту, рассмотрим его.

Из канонической формы (2.5) получаем $H_* = 1$; примем $K := b > 0$. Из (3.4) следует, что можно принять $Q := -k_1$ и $P := 1$; в результате скользящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_*(t) &= -k_1 k_4 y_2(t) - k_1 k_5 u(t) - b e_y(t) - k_1 v(t), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_*(t), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - (k_3 y_1(t) - k_1 y_2(t))$,

$$v(t) = \begin{cases} g\dfrac{k_1 e_y(t)}{\|k_1 e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$g > \|d_3(t)\|$. Оценка функции $d_3(t)$ дается выражением

$$\hat{d}_3(t) = g\frac{k_1 e_y(t)}{\|k_1 e_y(t)\| + \delta}. \tag{6.3}$$

Для рассмотрения дефекта в датчике предположим для простоты, что возмущение $\rho(t)$ отсутствует, но измерения в этом датчике подвержены возмущению $\rho_s(t)$, т.е. $y_1(t) = H_1 x(t) + d_s(t) + \rho_s(t)$. Поскольку для модели (6.1) $R_* D_s = k_3 \neq 0$, условие существования скользящего режима не выполняется, для идентификации дефекта $d_s(t)$ необходимо использовать другую модель. Можно показать, что этому требованию удовлетворяет модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= x_{*2}(t) + k_5 u(t) + k_0 H_1 x(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= (k_4^2 + k_2 k_3) y_2(t) + k_4 k_5 u(t), \\ y_{*1}(t) &= x_{*1}(t) = y_2(t), \end{aligned}$$

где $x_{*1} = x_3$, $x_{*2} = -k_0 x_1 + x_2 + x_3$, $k_0 = k_3 k_4 / k_1$. Здесь $R_* = (0\ \ 1)$ и $J_* = \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_4^2 + k_2 k_3 \end{pmatrix}$, что дает $R_* D_s = 0$ и $J_* D_s = (k_0\ \ 0)$.

Из канонической формы (2.3) получаем $H_* = (1\ \ 0)$; примем $K := (0{,}2\ \ 0{,}01)^{\mathrm{T}}$. Так как $J_* D_s = (k_0\ \ 0)$, а для принятых при моделировании значений параметров привода $k_0 = 10^5$, из (5.4) следует, что можно принять $P := \begin{pmatrix} 10^{-9} & 0 \\ 0 & 10^{-7} \end{pmatrix}$ и $Q := 10^{-9} k_0$; в результате скользящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{*1}(t) &= \hat{x}_{*2}(t) + k_5 u(t) + k_0 y_1(t) - k_0 v(t) - 0{,}2 e_y(t), \\ \dot{\hat{x}}_{*2}(t) &= (k_4^2 + k_2 k_3) y_2(t) + k_4 k_5 u(t) - 0{,}01 e_y(t), \\ \hat{y}_{*1}(t) &= \hat{x}_{*1}(t), \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_2(t)$,

$$v(t) = \begin{cases} g_s\dfrac{10^{-9} k_0 e_y(t)}{\|10^{-9} k_0 e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

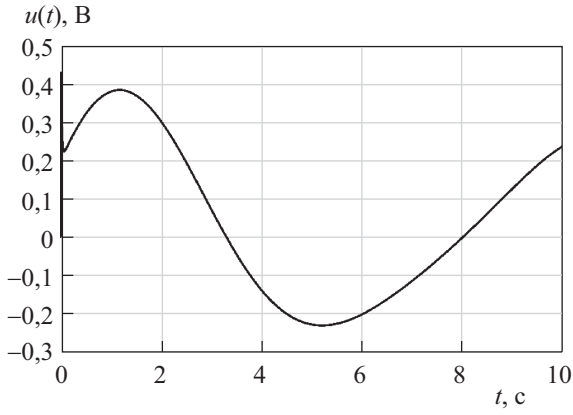


Рис. 1. Поведение функции $u(t)$.

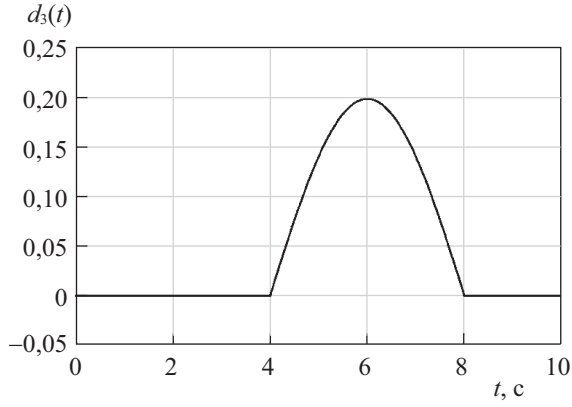


Рис. 2. Оценка функции $d_3(t)$.

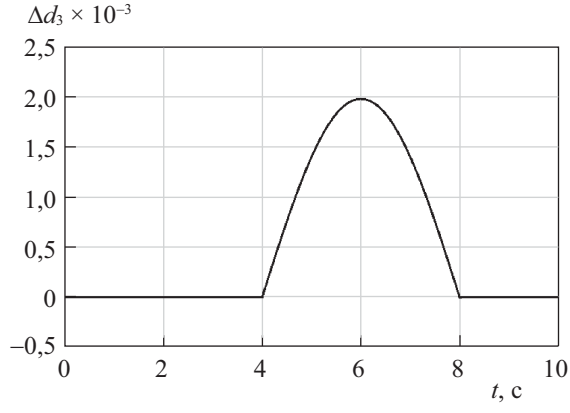


Рис. 3. Ошибка оценки функции $d_3(t)$.

$g_s > \|d_s(t) + \rho_s(t)\|$. Оценка суммы $d_s(t) + \rho_s(t)$ дается выражением

$$\hat{d}_s(t) = d_s(t) + \rho_s(t) = -g_s \frac{10^{-9} k_0 e_y(t)}{\|10^{-9} k_0 e_y(t)\| + \delta}. \tag{6.5}$$

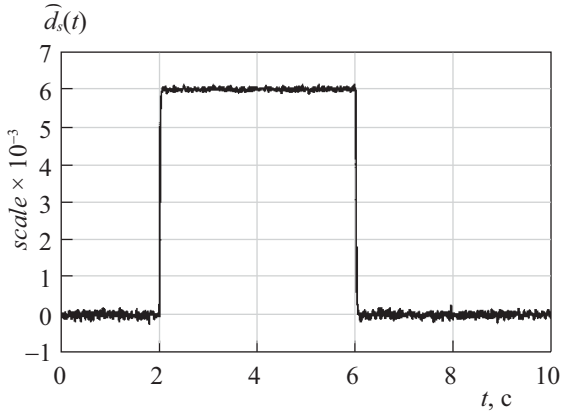


Рис. 4. Оценка функции $\hat{d}_s(t)$.

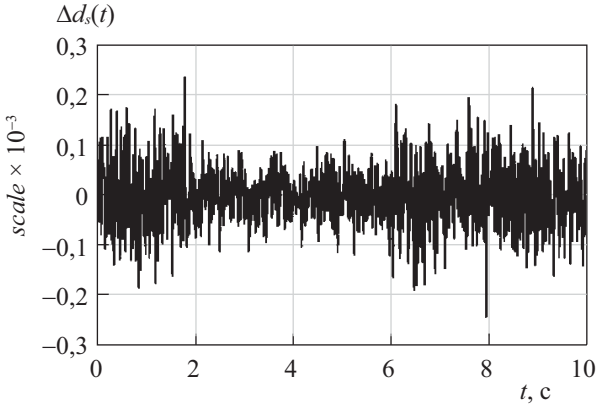


Рис. 5. Ошибка оценки функции $d_s(t) + \rho_s(t)$.

Проведем моделирование системы (6.1) с наблюдателями (6.2) и (6.4). При моделировании задавались следующие параметры рассматриваемого следящего электропривода: $J_H = 0{,}0001\,\mathrm{Kgm}^2$, $K_\omega = 0{,}02\,\mathrm{Vc}$, $K_U = 100$, $R = 0{,}4\,\Omega$, $L = 0{,}004\,\mathrm{H}$, $K_M = 0{,}02\,\mathrm{Nm/A}$, $i_p = 100$. Для обеспечения заданных показателей качества управления в прямой цепи электропривода использовалось типовое последовательное корректирующие устройство с передаточной функцией $W(s) = \frac{(0{,}089s+1)(0{,}0011s+1)}{(0{,}001s+1)(0{,}001s+1)}$. При этом в качестве входного воздействия на электропривод подавалось следующее желаемое значение угла поворота выходного вала редуктора: $x_1^{ref}(t) = \sin(t)$.

При моделировании возмущение $\rho(t)$ имитировалось действием внешнего нагрузочного момента величиной $\tilde{M}(t) = 0{,}1\sin(0{,}8t)\,\mathrm{Nm}$ на интервале $t = 1 \div 10\,\mathrm{c}$; дефекты имитировались следующим образом: $d_s(t)$ — введением постоянной ошибки $\tilde{x}_1(t) = 0{,}006$ рад в датчик положения выходного вала редуктора на интервале $t = 2 \div 6\,\mathrm{c}$, $d_3(t)$ — изменением активного сопротивления якоря на величину $\tilde{R}(t) = 0{,}2\sin(\pi t/4 - \pi)$ на интервале $t = 4 \div 8\,\mathrm{c}$. Предполагается, что в датчике присутствует погрешность $\rho_s(t)$, имитируе-

мая белым шумом. При моделировании для наблюдателя (6.2) принималось $g = 10$, $b = 10$ и $\delta = 10^{-6}$, для наблюдателя (6.4) — $g_s = 0{,}01$ и $\delta = 10^{-6}$.

На рис. 1 приведен график функции $u(t)$ при моделировании. На рис. 2 и 3 представлены результаты моделирования с наблюдателем (6.2): графики оценки $\hat{d}_3(t)$, совпадающей с функцией $v_\delta(t)$, и ошибки этой оценки; на рис. 4 и 5 — с наблюдателем (6.4) ("scale" здесь — это масштаб): графики оценки суммы $\hat{d}_s(t) = d_s + \rho_s(t)$, совпадающей с функцией $v_\delta(t)$, и ошибки этой оценки. Из этих рисунков видно, что максимальное значение ошибки идентификации в установившемся режиме не превышает для функции $d_s(t)$ 3,3%, для функции $d_3(t)$ — 1%.

Из этих рисунков видно, что построенные наблюдатели позволили обеспечить своевременное обнаружение возникающих ошибок в сигналах, поступающих с датчика положения электропривода, а также изменение величины активного сопротивления обмотки якоря электродвигателя. Поскольку на интервалах $0 \div 2$ с и $8 \div 10$ с значения оценок равны нулю, ясно, что построенные наблюдатели не чувствительны к возмущению $\rho(t)$.

Следует отметить, что при моделировании и при практической реализации наблюдателя в нем возникает не идеальный, а реальный скользящий режим; параметры реального скользящего режима в работе не рассматриваются.

7. Заключение

В работе для решения задач обнаружения и идентификации дефектов использован метод на основе скользящих наблюдателей. Предложенная модификация этого метода позволила ослабить ограничения, накладываемые на условия его реализации, для решения указанных задач при наличии возмущений и уменьшить сложность средств диагностирования по сравнению с известными результатами. Теоретические результаты иллюстрированы примером диагностирования реальной технической системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frank P.* Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy. A survey and some new results // Automatica. 1990. V. 26. P. 459–474.
2. *Gertler J.* Residual generation in model-based fault diagnosis // Theory Advanced Technol. 1993. V. 9. P. 259–285.
3. *Samy I., Postlethwaite I., Gu D.* Survey and application of sensor fault detection and isolation schemes // Control Engineer. Practic. 2011. V. 19. P. 658–674.
4. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault-Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
5. *Ding S.* Data-driven design of fault diagnosis and fault-tolerant control systems. London: Springer-Verlag, 2014.
6. *Russell E., Chiang L., Chiang L.* Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems. Berlin: Springer, 2001.
7. *Simani S., Fantuzzi C., Patton R.* Model-based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

8. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.

9. *Edwards C., Spurgeon S.* On the development of discontinuous observers // Int. J. Control. 1994. V. 59. P. 1211–1229.

10. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // Automatica. 2000. V. 36. P. 541–553.

11. *Filaretov V., Zhirabok A., Protcenko A., Zuev A.* Fault identification in nonlinear dynamic systems // Proc. 5 Int. Conf. Syst. Control. Marrakesh, Morocco, 2016. P. 273–277.

12. *Yan X., Edwards C.* Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding modes observer // Automatica. 2007. V. 43. P. 1605–1614.

13. *He J., Zhang C.* Fault Reconstruction based on sliding mode observer for nonlinear systems // Math. Probl. in Engineer. 2012. P. 1–22.

14. *Brahim A., Dhahri S., Hmida F., Sellami A.* Simultaneous actuator and sensor faults reconstruction based on robust sliding mode observer for a class of nonlinear systems // Asian J. Contr. 2017. V. 19. P. 362–371.

15. *Chan J., Tan C., Trinh H.* Robust fault reconstruction for a class of infinitely unobservable descriptor systems // Int. J. Syst. Sci. 2017. P. 1–10.

16. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах // АиТ. 2005. № 10. С. 54–69.
Krasnova S.A., Kuzntsov S.I. Uncontrollable perturbation of nonlinear dynamic systems: estimation on moving modes // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 10. P. 1580–1593.

17. *Krasnova S., Utkin V.* Prelimit implementation of states and disturbances observer on sliding modes // Proc. Int. Workshop Recent Advances Sliding Modes (RASM 2015). Istanbul, Turkey, 2015. P. 1–6.

18. *Alwi H., Edwards C.* Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation // Automatica. 2008. V. 44. P. 1859–1866.

19. *Chandra K., Alwi H., Edwards C.* Fault reconstruction for a quadrotor using an LPV sliding mode observer // Proc. 9 IFAC Symp. Safeprocess. Paris, France, 2015. P. 374–379.

20. *Meziane H., Labarre C., Lefteriu S., Defoort M., Djemai M.* Fault detection and isolation for a multi-cellular converter based on sliding mode observer // Proc. 9 IFAC Symp. Safeprocess. Paris, France, 2015. P. 164–170.

21. *Mohamed M., Yan X-G., Spurgeon S., Jiang B.* Robust sliding mode observer design for interconnected systems with application to multimachine power systems // Proc. IEEE CDC, Conf. Decision Control. Las Vegas, USA, 2016. P. 6246–6251.

22. *Zhang K., Jiang B., Yan X., Mao Z.* Sliding mode observer based incipient sensor fault detection with application to high-speed railway traction device // ISA Transact. 2016. P. 1–28.

23. *Zhirabok A., Shumsky A., Zuev A.* Fault diagnosis in linear systems via sliding mode observers // Int. J. Control. 2019. DOI: 10.1080/00207179.2019.1590738.

24. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // АиТ. 2017. № 7. С. 3–21.
Zhirabok A., Shumsky A., Pavlov S. Diagnosis of linear dynamic systems by the nonparametric method // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.

25. *Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A.* Fault detection in nonlinear systems via linear methods // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2017. V. 27. P. 261–272.

26. *Зуев А.В., Филаретов В.Ф.* Особенности создания комбинированных позиционно-силовых систем управления манипуляторами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 154–162.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 19.10.2018

После доработки 19.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019

Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Нелинейные системы

© 2020 г. **В.Р. БАРСЕГЯН, д-р физ.-мат. наук (barseghyan@sci.am)**
(Ереванский государственный университет;
Институт механики НАН Армении, Ереван)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАННЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебания струны с заданными начальным и конечным условиями, с неразделенными значениями состояния в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Задача решена с использованием методов разделения переменных и теории оптимального управления конечномерными системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. В качестве примера применения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданным нелокальным значением прогиба точек струны в некоторые промежуточные моменты времени.

Ключевые слова: колебания струны, оптимальное управление колебаниями, промежуточные значения состояния, неразделенные многоточечные условия, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231020020038

1. Введение

Физические процессы, связанные с колебательными системами, моделируются волновым уравнением [1–4]. При этом на практике часто возникают задачи управления и оптимального управления (УиОУ), в которых нужно сгенерировать желаемую форму колебания, удовлетворяющую многоточечным промежуточным условиям. Характерной чертой многоточечных краевых задач УиОУ является наличие неразделенных условий в нескольких промежуточных точках интервала исследования. Многоточечные краевые задачи УиОУ, в которых, наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями, заданы неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия, исследованы в [5–16]. Неразделенные многоточечные краевые задачи, с одной стороны, возникают как математические модели реальных процессов, а с другой — потому, что для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. В частности, неразделенность многоточечных условий может быть обусловлена также невозможностью на практике проводить измерения требуемых параметров состояния объекта мгновенно. Подобные задачи имеют прикладное значение и важны с теоретической точки зрения, поэтому требуют своего исследования в различных постановках.

Многочисленные примеры технологических процессов, приводящих к задачам УиОУ в системах с распределенными параметрами, рассмотрены в работах [1–4], в которых предложены различные методы решения задач УиОУ, например метод моментов, метод Фурье, метод гармоник. Задачи УиОУ колебательных процессов с помощью как внешних, так и граничных управляющих воздействий при различных типах граничных условий рассмотрены в [1–4, 8–22], где предложены различные методы решения задач управления. В [12, 13] рассмотрена граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени колебания струны и построено решение задачи.

В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебания струны с заданными начальным и конечным условиями, с неразделенными значениями состояния в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Методом разделения переменных исходная задача сведена к задаче оптимального управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Построено оптимальное управляющее воздействие с помощью методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную, упругую натянутую струну длиной l, концы которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$.

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{2.1}$$

с однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

и удовлетворяет начальным и конечным условиям:

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.3}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{2.4}$$

В уравнении (2.1) $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Функция $Q(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (2.1), дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ на значения функции состояния струны наложены неразделенные (нелокальные) условия в виде

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q(x, t_k) = \alpha(x), \tag{2.5}$$

где f_k — заданные величины $(k = 1, \ldots, m)$, $\alpha(x)$ — некоторая известная функция. В частности, в случае $m = 1$, $f_1 = 1$ условие (2.5) принимает вид $Q(x, t_1) = \alpha(x)$.

Здесь $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ и $\alpha(x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования. Предполагается, что система (2.1) при ограничениях (2.2)–(2.5) на промежутке времени $[0, T]$ является вполне управляемой [6, 7, 23]. Это означает, что на промежутке времени $[0, T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(x, t)$, при котором функция состояния струны $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и заданным условиям (2.2)–(2.5).

Задачу оптимального управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции состояния в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x, t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(x, t)$, переводящее колебания струны (2.1) с граничными условиями (2.2) из заданного начального состояния (2.3) в заданное конечное состояние (2.4), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (2.5) с минимизацией функционала

$$J[u] = \left[\int_0^T \int_0^l (u(x, t))^2 \, dx dt \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

3. Решение задачи

Для построения решения поставленной задачи решение уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2) ищем в виде

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{3.1}$$

Представим функции $u(x, t)$ и $\alpha(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{3.2}$$

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в соотношения (2.1)–(2.5), в силу ортогональности системы собственных функций получим, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных

уравнений

$$\ddot{Q}_n(t) + \lambda_n^2 Q_n(t) = u_n(t), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n(0) = \varphi_n^{(0)}, \quad \dot{Q}_n(0) = \psi_n^{(0)}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q_n(t_k) = \alpha_n, \tag{3.5}$$

$$Q_n(T) = \varphi_n^{(T)} = \varphi_n^{(m+1)}, \quad \dot{Q}_n(T) = \psi_n^{(T)} = \psi_n^{(m+1)}, \tag{3.6}$$

где через $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$, $u_n(t)$ и α_n обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, $u(x,t)$ и $\alpha(x)$.

Общее решение уравнения (3.3) с начальными условиями (3.4) имеет вид

$$Q_n(t) = \varphi_n^{(0)} \cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)} \sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t u_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (3.5) и конечные (3.6) условия, из уравнения (3.7) получим, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять системе равенств:

$$\begin{gathered}
\int_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{1n}(T), \\
\int_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{2n}(T), \\
\sum_{k=1}^{m} f_k \int_0^{t_k} u_n(\tau)\sin\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m),
\end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{gathered}
C_{1n}(T) = \lambda_n\varphi_n^{(m+1)} - \lambda_n\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\sin\lambda_n T, \\
C_{2n}(T) = \psi_n^{(m+1)} + \lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n T, \\
C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) = \lambda_n\left[\alpha_n - \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n t_k + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)}\sin\lambda_n t_k\right)\right].
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Введем функции

$$h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau), \quad h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau), \quad 0 \le \tau \le T,$$

$$h_{1n}^{(m)}(\tau)=\sum_{k=1}^{m} f_k h_{1n}^{(k)}(\tau), \quad h_{1n}^{(k)}(\tau)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t_k-\tau) \text{ при } 0\le\tau\le t_k,\\ 0 \text{ при } t_k<\tau\le t_{m+1}=T.\end{cases} \tag{3.10}$$

Тогда интегральные соотношения (3.6) при помощи функции (3.10) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}(\tau)d\tau = C_{1n}(T),\\ \int_0^T u_n(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = C_{2n}(T),\\ \int_0^T u_n(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1,\dots,t_m), \quad n=1,2,\dots\end{gathered} \tag{3.11}$$

Учитывая разложение (3.2) и ортогональность системы собственных функций, минимизируемый функционал (2.6) запишется в виде

$$\int_0^T\int_0^l [u(x,t)]^2 dxdt = \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T u_n^2(\tau)\,d\tau.$$

Но так как для каждого $n=1,2,\dots$ $\int\limits_0^T u_n^2(\tau)d\tau \ge 0$, то минимизация функционала (2.6) равносильна минимизации функционалов

$$\int_0^T u_n^2(\tau)\,d\tau, \quad n=1,2,\dots \tag{3.12}$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления (2.1)–(2.6) для каждого $n=1,2,\dots$ сводится к нахождению такого оптимального управления $u_n^0(t)$, $t\in[0,T]$, которое удовлетворяет интегральным соотношениям (3.11) и доставляет минимум функционалу (3.12). Задачу оптимального управления при функционале (3.12) с интегральными условиями (3.11) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления. Однако, как видно из обозначения (3.10), подынтегральная функция в третьем соотношении (3.11) является разрывной, поэтому классические методы вариационного исчисления неприменимы для исследования этой задачи [6, 23].

Отметим, что, в силу линейности условий (3.11), порожденных функцией $u_n(t)$ на промежутке времени $[0,T]$, и из-за того что функционал (3.12) является нормой линейного нормированного пространства, решение полученной задачи оптимального управления (3.11)–(3.12) целесообразно искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов [6, 23].

Следуя [6, 23], для решения конечномерной проблемы моментов (3.11)–(3.12) нужно найти некоторые величины p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, $n = 1, 2, \ldots$, связанные условиями

$$p_{1n}C_{1n}(T) + p_{2n}C_{2n}(T) + q_{1n}C_{1n}^{(m)} = 1, \tag{3.13}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(3.13)} \int_0^T h_n^2(t)dt, \tag{3.14}$$

где

$$h_n(t) = p_{1n}h_{1n}(t) + p_{2n}h_{2n}(t) + q_{1n}h_{1n}^{(m)}(t). \tag{3.15}$$

Для определения величин p_{1n}^0, p_{2n}^0, q_{1n}^0, $n = 1, 2, \ldots$, минимизирующих (3.14) с условиями (3.13), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f(p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}) = \int_0^T \left[p_{1n}h_{1n}(t) + p_{2n}h_{2n}(t) + q_{1n}h_{1n}^{(m)}(t)\right]^2 dt +$$
$$+ \gamma_n \left[p_{1n}C_{1n}(T) + p_{2n}C_{2n}(T) + q_{1n}C_{1n}^{(m)} - 1\right],$$

где γ_n — неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, $n = 1, 2, \ldots$, функции $f(p_{1n}, p_{2n}, q_{1n})$ и приравнивая нулю, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} a_n^{(1)}p_{1n} + a_n^{(2)}p_{2n} + b_n^{(2)}q_{1n} = -\frac{\gamma_n}{2}C_{1n}(T), \\ a_n^{(2)}p_{1n} + b_n^{(1)}p_{2n} + d_n^{(2)}q_{1n} = -\frac{\gamma_n}{2}C_{2n}(T), \\ b_n^{(2)}p_{1n} + d_n^{(2)}p_{2n} + d_n^{(1)}q_{1n} = -\frac{\gamma_n}{2}C_{1n}^{(m)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{3.16}$$

где приняты обозначения:

$$a_n^{(1)} = \int_0^T (h_{1n}(\tau))^2 \, d\tau, \quad b_n^{(1)} = \int_0^T (h_{2n}(\tau))^2 \, d\tau,$$

$$a_n^{(2)} = \int_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau,$$

$$d_n^{(1)} = \int_0^T \left(h_{1n}^{(m)}(\tau)\right)^2 d\tau = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)^2 d\tau, \tag{3.17}$$

$$b_n^{(2)} = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau) h_{1n}^{(m)}(\tau) d\tau = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau) \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau) \right) d\tau,$$

$$d_n^{(2)} = \int\limits_0^T h_{2n}(\tau) h_{1n}^{(m)}(\tau) d\tau = \int\limits_0^T h_{2n}(\tau) \left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau) \right) d\tau.$$

Присоединяя к уравнениям (3.16) условие (3.13), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, γ_n $n = 1, 2, \ldots$

Введем обозначения

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & b_n^{(2)} \\ a_n^{(2)} & b_n^{(1)} & d_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} & d_n^{(2)} & d_n^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(p_{1n}) = \begin{vmatrix} C_{1n}(T) & a_n^{(2)} & b_n^{(2)} \\ C_{2n}(T) & b_n^{(1)} & d_n^{(2)} \\ C_{1n}^{(m)} & d_n^{(2)} & d_n^{(1)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n(p_{2n}) = \begin{vmatrix} a_n^{(1)} & C_{1n}(T) & b_n^{(2)} \\ a_n^{(2)} & C_{2n}(T) & d_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} & C_{1n}^{(m)} & d_n^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(q_{1n}) = \begin{vmatrix} a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & C_{1n}(T) \\ a_n^{(2)} & b_n^{(1)} & C_{2n}(T) \\ b_n^{(2)} & d_n^{(2)} & C_{1n}^{(m)} \end{vmatrix}$$

и предположим, что $\Delta_n \neq 0$.

Тогда решение системы (3.16) с условием (3.13) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} p_{1n}^0 = \frac{\Delta_n(p_{1n})}{A_n}, \quad p_{2n}^0 = \frac{\Delta_n(p_{2n})}{A_n}, \\ q_{1k}^0 = \frac{\Delta_n(q_{1n})}{A_n}, \quad \gamma_n = -2\frac{\Delta_n}{A_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{3.18}$$

Здесь приняты обозначения

$$A_n = \Delta_n(p_{1n}) C_{1n}(T) + \Delta_n(p_{2n}) C_{2n}(T) + \Delta_n(q_{1n}) C_{1n}^{(m)}.$$

Подставляя из (3.18) значения для $p_{1n}^0, p_{2n}^0, q_{1n}^0$ в (3.15), получим, что

$$h_n^0(t) = \frac{\tilde{h}_n^0(t)}{A_n},$$

где

$$\tilde{h}_n^0(t) = \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) h_{1n}^{(m)}(t). \tag{3.19}$$

Имея оптимальную функцию $h_n^0(t)$, из (3.14), с учетом (3.19) будем иметь, что

$$(\rho_n^0)^2 = \frac{B_n}{A_n^2}, \quad \text{где } B_n = \int\limits_0^T \left(\tilde{h}_n^0(t) \right)^2 dt.$$

Таким образом, согласно [6, 23] искомое оптимальное управление $u_n^0(t)$ определится выражением

$$u_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(t) = \frac{A_n}{B_n} \tilde{h}_n^0(t). \tag{3.20}$$

Отметим, что согласно обозначениям (3.10) будем иметь

$$h_{1n}^{(m)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), & 0 \le t \le t_1, \\ \sum\limits_{k=2}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), & t_1 < t \le t_2, \\ \qquad \dots \\ \sum\limits_{k=m-1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), & t_{m-2} < t \le t_{m-1}, \\ f_m \sin \lambda_n (t_m - t), & t_{m-1} < t \le t_m, \\ 0, & t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases}$$

Подставляя значения функции $h_{1n}(t)$, $h_{2n}(t)$, $h_{1n}^{(m)}(t)$ в (3.19), получим

$$\tilde{h}_n^0(t) = \begin{cases} \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), \\ \qquad\qquad 0 \le t \le t_1, \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=2}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), \\ \qquad\qquad t_1 < t \le t_2, \\ \qquad\qquad \dots \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=m-1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t), \\ \qquad\qquad t_{m-2} < t \le t_{m-1}, \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) f_m \sin \lambda_n (t_m - t), \\ \qquad\qquad t_{m-1} < t \le t_m, \\ \Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t), \qquad t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases} \tag{3.21}$$

Таким образом, имея явное выражение функции $\tilde{h}_n^0(t)$, из (3.20) получим оптимальную функцию $u_n^0(t)$ для каждого $n = 1, 2, \dots$ Далее, подставляя оптимальную функцию $u_n^0(t)$ в (3.7), получим $Q_n^0(t)$ на промежутке времени $t \in [0, T]$. Следовательно, из (3.1) и (3.2) получим оптимальную функцию $Q^0(x,t)$ состояния струны и оптимальное управление $u^0(x,t)$. Таким образом, для оптимального управления будем иметь

$$u^0(x,t) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_n}{B_n} \left[\Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t) \right] \times \\ \qquad\qquad \times \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \ 0 \le t \le t_1, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_n}{B_n} \left[\Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=2}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t) \right] \times \\ \qquad\qquad \times \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \ t_1 < t \le t_2, \\ \qquad\qquad \dots \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_n}{B_n} \left[\Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) \sum\limits_{k=m-1}^{m} f_k \sin \lambda_n (t_k - t) \right] \times \\ \qquad\qquad \times \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \ t_{m-2} < t \le t_{m-1}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_n}{B_n} \left[\Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{1n}) f_m \sin \lambda_n (t_m - t) \right] \times \\ \qquad\qquad \times \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \ t_{m-1} < t \le t_m, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A_n}{B_n} \left[\Delta_n(p_{1n}) h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n}) h_{2n}(t) \right] \sin \dfrac{\pi n}{l} x, \quad t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases}$$

Из этого выражения видно, что оптимальное управляющее воздействие $u^0(x,t)$, решающее поставленную задачу, является кусочно-непрерывной функцией.

4. Пример

Предположим, что $m = 2$ (т.е. $0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$), тогда из (3.17) с учетом обозначений (3.10) будем иметь:

$$a_n^{(1)} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n T, \quad b_n^{(1)} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n T, \quad a_n^{(2)} = \frac{\sin^2 \lambda_n T}{2\lambda_n},$$

$$b_n^{(2)} = \frac{1}{2} \left[f_1 t_1 \cos \lambda_n (T - t_1) + f_2 t_2 \cos \lambda_n (T - t_2) \right] -$$
$$- \frac{\cos \lambda_n T}{2\lambda_n} \left[f_1 \sin \lambda_n t_1 + f_2 \sin \lambda_n t_2 \right],$$

$$d_n^{(1)} = \frac{1}{4\lambda_n} \left[2\lambda_n \left(f_1^2 t_1 + f_2^2 t_2 \right) + 4 f_1 f_2 t_1 \lambda_n \cos \lambda_n (t_1 - t_2) - \right.$$
$$\left. - f_1^2 \sin 2\lambda_n t_1 - 2 f_2 \cos \lambda_n t_2 \left(2 f_1 \sin \lambda_n t_1 + f_2 \sin \lambda_n t_2 \right) \right],$$

$$d_n^{(2)} = \frac{1}{4\lambda_n} \left\{ 2 f_1 \sin \lambda_n T \sin \lambda_n t_1 - 2\lambda_n \left[f_1 t_1 \sin \lambda_n (T - t_1) + f_2 t_2 \sin \lambda_n (T - t_2) \right] + \right.$$
$$\left. + 2 f_2 \sin \lambda_n T \sin \lambda_n t_2 \right\}.$$

Предполагая, что $t_1 = \frac{l}{a}$, $t_2 = 2\frac{l}{a}$, $T = 4\frac{l}{a}$, получим, что $t_1 \lambda_n = \pi n$, $t_2 \lambda_n = 2\pi n$, $T\lambda_n = 4\pi n$, $\lambda_n (T - t_1) = 3\pi n$, $\lambda_n (T - t_2) = 2\pi n$, $\lambda_n (t_1 - t_2) = -\pi n$. Следовательно, из приведенных выражений и формул (3.9) получим:

$$a_n^{(1)} = b_n^{(1)} = \frac{2l}{a}, \quad a_n^{(2)} = d_n^{(2)} = 0, \quad b_n^{(2)} = \frac{l}{2a} \left[(-1)^n f_1 + 2 f_2 \right],$$

$$d_n^{(1)} = \frac{l}{2a}\left[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2\right],$$

$$C_{1n}(T) = \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right), \quad C_{2n}(T) = \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)},$$

$$C_{1n}^{(m)} = \lambda_n\left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}\left((-1)^n f_1 + f_2\right)\right].$$

Для определителей Δ_n, $\Delta_n(p_{1n})$, $\Delta_n(p_{2n})$, $\Delta_n(q_{1n})$ будем иметь следующие значения:

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{a}\right)^3\left[2f_1^2 + \left((-1)^n f_1 + 2f_2\right)^2\right],$$

$$\Delta_n(p_{1n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \lambda_n\left\{\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right)\left[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}\left((-1)^n f_1 + f_2\right)\right]\left[(-1)^n f_1 + 2f_2\right]\right\},$$

$$\Delta_n(p_{2n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2\left(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}\right)\left\{\left[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2\right] - \frac{l}{4}\left[(-1)^n f_1 + 2f_2\right]\right\},$$

$$\Delta_n(q_{1n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2 \lambda_n\left\{4\left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}\left((-1)^n f_1 + f_2\right)\right] - \left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right)\left[(-1)^n f_1 + 2f_2\right]\right\}.$$

Отметим, что $\Delta_n \neq 0$ при $f_1 \neq 0$ и $f_2 \neq 0$.

Вычисляя значения величин A_n и B_n, согласно (3.20) будем иметь оптимальную функцию $u_n^0(t)$, $t \in [0, T]$.

Явные выражения функции оптимального управления $u^0(x,t)$ получим в виде:

а) при $0 \le t \le \frac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n}\left\{\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t) + \Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t) + \right.$$
$$\left. + \Delta_n(q_{1n})\left[f_1\sin\lambda_n(t_1 - t) + f_2\sin\lambda_n(t_2 - t)\right]\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

б) при $\frac{l}{a} < t \le 2\frac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t) + \Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t) + \right.$$
$$\left. + \Delta_n(q_{1n}) f_2\sin\lambda_n(t_2 - t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

в) при $2\frac{l}{a} < t \le 4\frac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t) + \Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Таким образом, выражения функций оптимального управления получены в явном виде. С помощью приведенных формул можно найти соответствующее выражение функции состояния струны.

5. Заключение

Исследована задача оптимального управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции состояния в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных она сведена к задаче управления в форме счетного числа обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени управления. Эта задача решается с использованием методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. Предложенный для волнового уравнения типа (2.1) подход (использование метода Фурье вместо метода Даламбера) допускает распространение на другие (неодномерные) системы. В качестве примера применения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями прогиба точек струны в некоторые промежуточные моменты времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
3. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Наука, 1986.
4. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004.
5. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.
6. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
7. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // АиТ. 2015. № 4. С. 3–15.

   Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. On an Approach to the Problems of Control of Dynamic Systems with Nonseparated Multipoint Intermediate Conditions // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 4. P. 549–559.
8. *Барсегян В.Р., Саакян М.А.* Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении // Из. НАН РА. Механика. 2008. Т. 61. № 2. С. 52–60.
9. *Барсегян В.Р.* Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1 (188). С. 24–29.
10. *Барсегян В.Р.* Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // “Аналитическая механика, устойчивость и управление”. Тр. XI Междунар. Четаевской конф. Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 119–125.

11. *Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.* Optimal Control of the Vibration of Elastic Systems Described by the Wave Equation // Int. Appl. Mech. 2012. V. 48. No. 2. P. 234–239.

12. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I // Тр. ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 22–35.

13. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.

14. *Макаров А.А., Левкин Д.А.* Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вісн. Харків. національ. універ. ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка. 2014. № 1120. Вып. 69. С. 64–74.

15. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.* О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестн. Карагандинского ун-та. Сер. Математика. 2016. № 1 (81). С. 15–20.

16. *Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.

17. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6 (366). С. 89–114.

18. *Xiuying Li.* Numerical Solution of an Initial-Boundary Value Problemwith Nonlocal Condition for the Wave Equation // J. Math. Sci. 2008. V. 2. No. 3. P. 281–292.

19. *Dreglea A.I., Sidorov N.A.* Integral Equations in Identification of Externalforce and Heat Source Density Dynamics // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2018. No. 3. P. 68–77.

20. *Szijártó A.L., Hegedüs J.* Vibrating Infinite String under General Observation Conditions and Minimally Smooth Force // Electron. J. Qualit. Theory Differ. Equat. 2016. No. 113. P. 1–11.

21. *Moiseev E.I., Kholomeeva A.A.* Optimal Boundary Displacement Controlat One End of a String with a Medium Exerting Resistance at the Other End // Differ. Equat. 2013. V. 49. No. 10. P. 1317–1322.

22. *Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A.* Boundary-Value Problems for Wave Equations with Data on the Whole Boundary // Electron. J. Differ. Equat. 2016. No. 281. P. 1–9.

23. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 30.01.2019

После доработки 16.04.2019

Принята к публикации 18.07.2019

© 2020 г. **А.Н. КВИТКО, д-р физ-мат. наук (alkvit46@mail.ru)**
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения синтезирующей управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние фазового пространства с учетом ограничений на управление. Получен конструктивный критерий, гарантирующий указанный перевод. Эффективность алгоритма иллюстрируется при численном моделировании решения конкретной практической задачи.

Ключевые слова: управляемость, краевые условия, стабилизация.

DOI: 10.31857/S000523102002004X

1. Введение

При создании автономных интеллектуальных систем управления различными техническими объектами (роботами-манипуляторами, летательными аппаратами, автономными подводными аппаратами и др.) и их моделировании на различных этапах проектирования важную роль приобретают вопросы, связанные с формированием управляющих функций, обеспечивающих перевод управляемого объекта из начального состояния в заданное конечное состояние. Математическими моделями интеллектуальных систем управления многих технических объектов являются сложные нелинейные управляемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Процесс формирования управляющего воздействия сводится к задаче нахождения управляющих функций, при которых соответствующие функции фазовых координат удовлетворяют заданным краевым условиям. Такой класс задач называют краевыми задачами, и он является одной из важных и сложных проблем математической теории управления. Впервые полное решение этих задач для линейных нестационарных систем в классе управляющих функций, суммируемых с квадратом, было выполнено в [1]. В последующие десятилетия появились работы, направленные на исследование локальных и глобальных краевых задач для линейных и нелинейных управляемых систем специального вида [2–15]. Исследование краевых задач ведется по трем основным направлениям. Первое связано с нахождением необходимых и достаточных условий, наложенных на правую часть управляемых систем и гарантирующих перевод систем управления в заданную точку фазового пространства, см. [1, 2, 4, 5, 7, 8, 11–15]. Второе включает исследование множества конечных состояний, в которые возможен перевод управляемой системы из некоторого начального состояния см. [4, 6, 9–11, 14, 15]. Третье направление касается разработки точных или приближенных методов построения управляющих

функций и соответствующих им траекторий, соединяющих заданные точки в фазовом пространстве [1, 3, 11–15]. В настоящее время проблема краевых задач достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных управляемых систем специального вида. Однако теория решения граничных задач для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана.

Главное отличие результатов данной статьи от известных ранее состоит в том, что в ней для достаточно широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений разработан удобный для численной реализации и устойчивый к погрешностям вычислений алгоритм решения локальных краевых задач в классе синтезирующих управлений, а также найдено конструктивное легко проверяемое необходимое и достаточное условие, гарантирующие реализацию полученного в работе алгоритма в классе синтезирующих управлений. Это условие совпадает с критерием управляемости Р. Калмана в случае линейных стационарных систем. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной задачи к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующему решению задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x \in R^n$; $u \in R^r$, $u = (u_1, \ldots, u_r)^{\mathrm{T}}$, $t \in [0, 1]$, $r \leq n$;

$$f \in C^{4n}(R^n \times R^r;\ R^n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}, \tag{2.2}$$

$$f(0,\ 0) = 0, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} S = n, \quad S = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B), \\ B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\|u\| < N. \tag{2.5}$$

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \bar{x}, \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}}, \tag{2.6}$$

где $\bar{x}$ — заданный вектор фазового пространства.

Определение 1. Будем говорить, что пара функций $x(t)$, $u(t, x)$ принадлежит множеству Γ, если для нее выполнены условия:

$$x(t) \in C^1([0, 1]; R^n), \quad u(t, x) \in C^1([0, 1) \times R^n; R^r). \tag{2.7}$$

Задача. Найти пару функций $(x(t), u(t,x)) \in \Gamma$, удовлетворяющую системе (2.1) и условиям (2.6), а также условию

$$u(t,x) \equiv 0, \ \forall t \in [0,1] \quad \text{при} \quad \bar{x} = 0. \tag{2.8}$$

Указанную пару $x(t)$, $u(t,x)$ будем называть решением задачи (2.1), (2.6).

Определение 2. Будем говорить, что задача (2.1), (2.6) *локально разрешима, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\bar{x}$ таких, что $\|\bar{x}\| < \varepsilon$ существует решение задачи* (2.1), (2.6).

Теорема. Пусть для правой части системы (2.1) *выполнены условия* (2.2), (2.3). *Тогда для локальной разрешимости задачи* (2.1), (2.6) *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (2.4). *При этом соответствующее решение задачи* (2.1), (2.6) *может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Главная идея доказательства теоремы состоит в том, что посредством преобразований зависимых и независимых переменных решение исходной задачи сводится к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится синтезирующее управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части вспомогательной системы. На заключительном этапе осуществляется переход к исходным переменным.

3. Построение вспомогательной системы

Функцию $x(t)$, входящую в решение задачи (2.1), (2.6), ищем в виде

$$x_i(t) = a_i(t) + \bar{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

При новых переменных система (2.1) и граничные условия (2.6) примут вид

$$\dot{a} = f(\bar{x} + a, u), \tag{3.2}$$

$$a(0) = -\bar{x}, a(1) = 0. \tag{3.3}$$

В соответствии с (2.3), (2.7), (2.8) пару функций $a(t,\bar{x}) \in C^1([0,1]; R^n)$, $\bar{u}(t, a(t,\bar{x})) = u(t, a(t,\bar{x}) + \bar{x}) \in C^1([0,1) \times R^n; R^r)$, $\bar{u}(t, a(t,0)) \equiv 0$, $a(t,0) \equiv 0$ $\forall t \in [0,1]$, удовлетворяющую системе (3.2) и условиям (3.3), будем называть решением задачи (3.2), (3.3). Рассмотрим задачу: найти пару $a(t,\bar{x}) \in C^1[0,1]$, $\bar{u}(t,a) \in C^1([0,1) \times R^n; R^r)$, $\bar{u}(t, a(t,0)) \equiv 0$, $a(t,0) \equiv 0$ $\forall t \in [0,1]$, удовлетворяющую системе (3.2) и условиям

$$a(0) = -\bar{x}, \quad a(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{3.4}$$

Замечание 1. Переходя к пределу в решении задачи (2.2), (2.4) при $t \to 1$, получим решение задачи (3.2), (3.3).

Сделаем в системе (3.2) преобразование независимой переменной t по формуле

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{3.5}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда при новой независимой переменной τ система (3.2) и условия (3.4) примут вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(\bar{x} + c, d), \tag{3.6}$$

$$c(0) = -\bar{x}, \quad c(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \tag{3.7}$$

$$c(\tau, \bar{x}) = a(t(\tau), \bar{x}), \quad d(\tau, c) = \bar{u}(t(\tau), c(\tau, \bar{x})), \quad c(\tau, 0) \equiv 0, \quad d(\tau, c(\tau, 0)) \equiv 0, \tag{3.8}$$

$$\tau \in [0, +\infty); \quad c = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}, \quad d = (d_1, \ldots, d_r)^{\mathrm{T}}.$$

Пару функций $c(\tau, \bar{x}) \in C^1([0, \infty); R^n)$, $d(\tau, c) \in C^1([0, \infty) \times R^n; R^r)$, удовлетворяющую системе (3.6) и условиям (3.7), (3.8) будем называть решением задачи (3.6), (3.7). Имея решение задачи (3.6), (3.7), с помощью формул (3.5), (3.8) можно получить решение задачи (3.2), (3.4). Введем обозначения

$$\tilde{c} = \bar{x} + \theta_i c, \quad \tilde{d} = \theta_i d, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i, \quad k! = k_1! \ldots k_n!, \quad m! = m_1! \ldots m_r!$$

Используя свойство (2.2) и разложение правой части системы (2.1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(\bar{x}, 0)$, систему (3.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{x}, 0) + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x}, 0) d_j + \\
&+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) c_j d_k + \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) d_j d_k \right] + \ldots \\
&\ldots + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-2} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\bar{x}, 0) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \times \ldots \\
&\ldots\ldots \times c^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \times d_r^{m_r} + \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\tilde{c}, \tilde{d}) c_1^{k_1} c_2^{k_2} \times \ldots \\
&\ldots \times c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \times d_r^{m_r}, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ограничим область изменения $c(\tau)$ неравенством

$$\|c(\tau)\| < C_1, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{3.10}$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент c и d, в области (2.5), (3.10) удовлетворяли оценке $\mathrm{O}(e^{-4n\alpha\tau}\,\|\bar{x}\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|\bar{x}\| \to 0$. На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{x}, 0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|} f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

После подстановки (3.11) в левую и правую части системы (3.9) с учетом введенного обозначения получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) f_j(\bar{x}, 0) + \\
+ \frac{1}{2}\alpha \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) e^{-3\alpha\tau} f_j(\bar{x}, 0) f_k(\bar{x}, 0) + \\
+ \alpha \left(e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) c_j^{(1)} - e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) f_k(\bar{x}, 0) c_j^{(1)} \right) + \\
+ \alpha \left(e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\bar{x}, 0) d_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(\bar{x}, 0) e^{-2\alpha\tau} f_j(\bar{x}, 0) d_k \right) + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{x}, 0) c_j^{(1)} c_k^{(1)} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) d_k c_j^{(2)} + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\bar{x}, 0) d_k d_j + \ldots \\
\ldots + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-2} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\bar{x}, 0) (c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_1(\bar{x}, 0))^{k_1} \times \\
\times (c_2^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_2(\bar{x}, 0))^{k_2} \times \ldots \times (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_n(\bar{x}, 0))^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \\
\ldots \times d_r^{m_r} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\tilde{c}, \tilde{d}) (c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_1(\bar{x}, 0))^{k_1} \times \\
\times (c_2^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_2(\bar{x}, 0))^{k_2} \times \ldots \times (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} f_n(\bar{x}, 0))^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \times \ldots \times d_r^{m_r}, \\
i = 1, \ldots n.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Из (3.7), (3.11) следует

$$c_i^{(1)}(0) = -\bar{x}_i + f_i(\bar{x}, 0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (3.12) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов c и d, в области (2.5), (3.10) удовлетворяют условию $\mathrm{O}(e^{-2\alpha\tau}\,\|\bar{x}\|)$, $\tau \to \infty$, $\bar{x} \to 0$. На втором этапе сделаем замену

$$\begin{gathered} c_i^{(1)}(\tau) = c_i^{(2)}(\tau) + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) f_j(\bar{x}, 0) = c_i^{(2)}(\tau) + e^{-2\alpha\tau} \phi_i^{(2)}(\bar{x}), \\ \phi_i^{(2)}(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, 0) f_j(\bar{x}, 0), \quad \phi_i^{(2)}(0) = 0, \ i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.14}$$

В результате в новых переменных начальные условия (3.13) примут вид

$$c_i^{(2)}(0) = -\bar{x}_i + f_i(\bar{x}, 0) - \phi_i^{(2)}(\bar{x}), \quad \phi_i^{(2)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Нетрудно видеть, что в отличие от предыдущей замены в правой части полученной системы слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов c и d, в области (2.5), (3.10) удовлетворяют условию $\mathrm{O}(e^{-3\alpha\tau}\,\|\bar{x}\|)$, $\tau \to \infty$, $\|\bar{x}\| \to 0$, $i = 1, \ldots, n$. Используя (3.11)–(3.15) и индуктивный переход на k-м шаге, получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau) = c_i^{(k)} + e^{-k\alpha\tau} \phi_i^{(k)}(\bar{x}), \quad \phi_i^{(k)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Если применить преобразования (3.16) $4n - 1$ раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора $c^{(4n-1)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, n$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора d и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, 2n$, то согласно (3.12)–(3.16) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = Pc^{(4n-1)} + Qd + R_1(c^{(4n-1)}, d, \bar{x}, \tau) + R_2(c^{(4n-1)}, d, \bar{x}, \tau) + \\ + R_3(c^{(4n-1)}, d, \tau) + R_4(\bar{x}, c^{(4n-1)}, d, \tau), \\ R_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n)^{\mathrm{T}}, \quad R_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n)^{\mathrm{T}}, \\ R_3 = (R_3^1, \ldots, R_3^n)^{\mathrm{T}}, \quad R_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n)^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Функции R_4^i состоят из суммы слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $c^{(4n-1)}$ и d; R_1^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора $c^{(4n-1)}$с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geq n + 1$, а также слагаемые, входящие в последнюю сумму правой части полученной системы, которые не содержат степеней компонент вектора d и с суммой степеней компонент вектора $c^{(4n-1)}$, равной единице; R_2^i содержат все слагаемые, которые

линейно зависят от компонент вектора d с множителями $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geq 2n+1$, а также слагаемые входящие в последнюю сумму правой части полученной системы, которые не содержат степеней компонент вектора $c^{(4n-1)}$ и с суммой степеней компонент вектора d, равной единице. В R_3^i содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов $c^{(4n-1)}$ и d.

$$
\begin{gathered}
P(\bar{x}) = \alpha e^{-\alpha\tau}\left(P_1(\bar{x}) + e^{-\alpha\tau}P_2(\bar{x}) + \ldots + e^{-(n-1)\alpha\tau}P_{n-1}(\bar{x})\right), \\
P_1(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},0), \quad P_1(0) = A; \\
Q(\bar{x}) = \alpha e^{-\alpha\tau}\left(Q_1(\bar{x}) + e^{-\alpha\tau}Q_2(\bar{x}) + \ldots + e^{-(2n-1)\alpha\tau}Q_{2n-1}(\bar{x})\right), \\
Q_1(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},0), \quad Q_1(0) = B;
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{gathered}
c^{(4n-1)}(0) = -\bar{x} + f(\bar{x},0) - \phi^{(2)}(\bar{x}) - \phi^{(3)}(\bar{x}) - \ldots - \phi^{(4n-1)}(\bar{x}), \\
\phi^{(i)} = \left(\phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_n^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \ldots, 4n-1, \quad \phi^{(i)}(0) = 0.
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

4. Алгоритм решения задачи

1. Построение вспомогательной системы (3.17).

2. Используя метод Н.Н. Красовского, решаем задачу стабилизации линейной части системы (3.17) с матрицами (3.18):

$$
\frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = Pc^{(4n-1)} + Qd.
$$

В результате получаем управление $d(\tau)$ в виде обратной связи

$$
d(\tau) = M(\tau)c^{(4n-1)}. \tag{4.1}
$$

3. Решаем задачу Коши для системы (3.17), замкнутой управлением (4.1) с начальными данными (2.19). Подстановка полученного решения в (4.1) дает пару функций $c^{(4n-1)}(\tau)$, $d(\tau)$.

4. После перехода в $c^{(4n-1)}(\tau)$, $d(\tau)$ к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (3.16), (3.14), (3.11), (3.8), (3.5), (3.1) на основании замечания 1 получим искомые функции $x(t)$, $u(t,x)$.

5. Решение задачи управления однозвенным манипулятором

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим решение задачи управления однозвенным манипулятором с учетом нестационарных возмущений. В соответствии с [13] система уравнений, описывающая движение манипулятора, имеет вид

$$
\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1x_2 - a_2\sin x_1 + u + \mu t, \tag{5.1}
$$

где x_1 — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 — скорость отклонения угла, $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$, $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$, $a_2 = gL^{-1}\left(m_0 + \frac{M}{2}\right) m_1^{-1}$, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент трения, m_0 — масса переносимого груза, L — длина манипулятора, M — масса манипулятора, $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$. Рассмотрим краевые условия

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = 0, \quad x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^{\mathrm{T}}. \tag{5.2}$$

Система (3.6) и условия (3.7) для задачи (5.1), (5.2) имеют вид

$$\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \quad \frac{dc_2}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}(-a_2 \sin c_1 - a_1 c_2 + d + \mu(1 - e^{-\alpha\tau})), \tag{5.3}$$

$$c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = 0, \quad c_2(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \quad i = 1, 2. \tag{5.4}$$

Для решения задачи (5.3), (5.4) достаточно выполнить одно преобразование функции $c_2(\tau)$:

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - \mu e^{-\alpha\tau}. \tag{5.5}$$

В результате получаем новую функцию $c_2^{(1)}(\tau)$.

$$\begin{gathered} \frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2^{(1)} - \alpha\mu e^{-2\alpha\tau}, \\ \frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2^{(1)} - \alpha e^{-2\alpha\tau} a_1 \mu + \alpha e^{-\alpha\tau} d - \alpha\mu e^{-2\alpha\tau}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Линейная часть системы (5.6) может быть записана в форме

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} P\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} Qd, \quad \bar{c} = (c_1, c_2^{(1)})^{\mathrm{T}}, \\ P = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ -a_2, & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

После решения задачи стабилизации системы (5.7) и перехода к исходным переменным по формулам (5.5), (3.5), (3.8) получаем закон управления

$$\begin{gathered} u(t, x) = -\frac{6\alpha + 4\alpha^2 + 2 - (1-t)^2 a_2 \alpha^2}{\alpha^2 (1-t)^2} x_1 + \frac{-3 - 3\alpha + \alpha(1-t) a_1}{\alpha(1-t)} x_2 + \\ + \mu \frac{-3 - 3\alpha + \alpha(1-t) a_1}{\alpha}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Далее решаем задачу Коши для системы (5.1), замкнутой управлением (5.8) с начальными данными (5.2). В процессе численного моделирования полагалось $\bar{x}_1 = 1$ рад, $\bar{\alpha} = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}25$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $\mu = 0{,}1$, $t \in [0,\ 0{,}9)$. На рисунке *а* и *б* представлены графики изменения соответствующих функций фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$.

Замечание 2. При $\mu = 0$, $\bar{x} = 0$ из (5.1), (5.8) получаем $u(t, x(t, 0)) \equiv \equiv 0\ \forall t \in [0, 1]$.

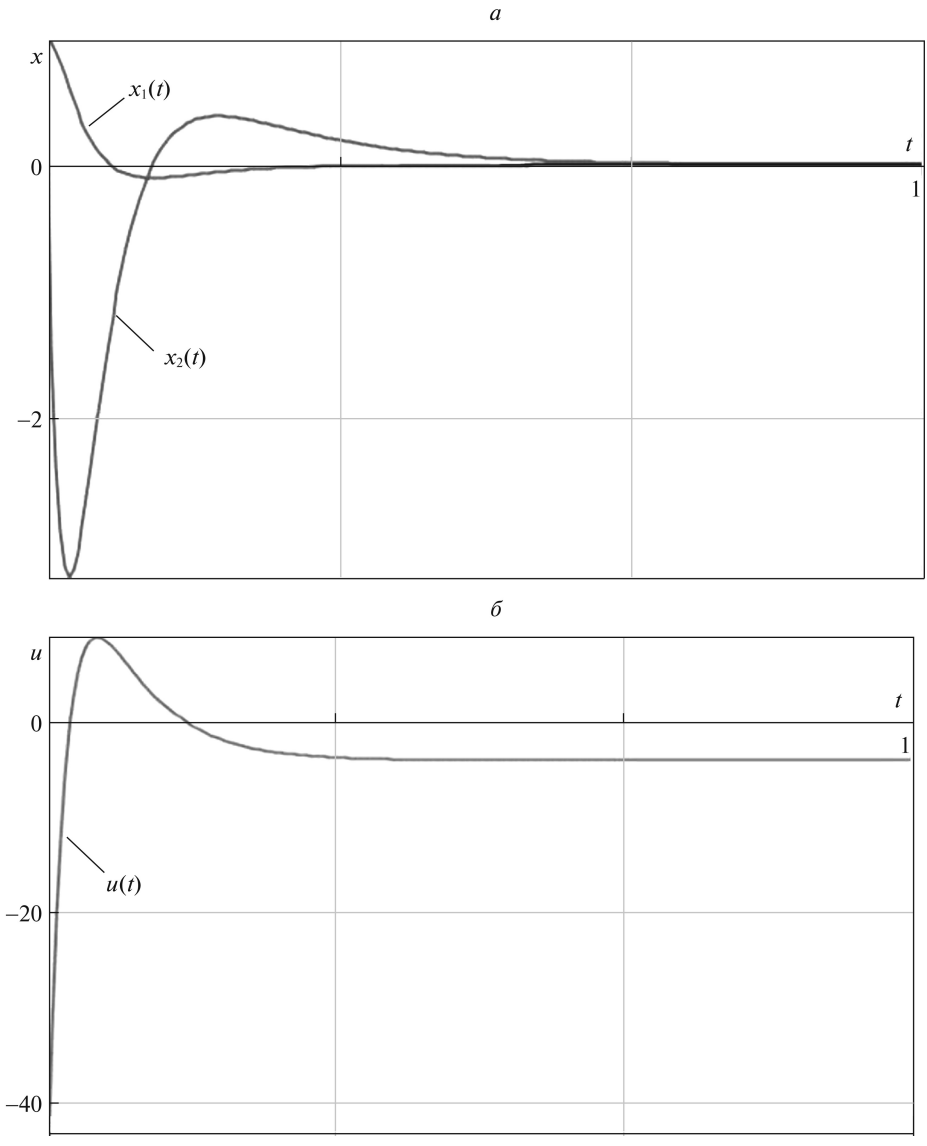


Рисунок.

6. Заключение

Анализ приведенного в разделе 4 алгоритма позволяет утверждать, что наиболее трудоемкая часть процедуры построения решения поставленной задачи, а именно построение вспомогательной системы, нахождение матрицы обратной связи вспомогательного стабилизирующего управления и переход к исходным переменным, может быть выполнена в аналитическом виде с использованием методов компьютерной алгебры. С другой стороны, результаты решения задачи управления роботом-манипулятором показывают, что предложенный в работе метод может быть применен при решении конкретных практических задач с использованием персональных ЭВМ.

Доказательство теоремы. Достаточность. Из процедуры нахождения искомой управляющей функции $u(t,x)$ и соответствующей функции фазовых координат $x(t)$, подробно изложенной в [11], следует, что пара $x(t)$, $u(t,x)$, является решением задачи (2.1), (2.6).

Необходимость. Пусть условие (2.4) не выполнено и предположим противное, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\bar{x} \in R^n : \|\bar{x}\| < \varepsilon$ существует решение задачи (2.1), (2.6). Тогда для $\bar{x}$ существует решение задачи (3.6), (3.7). Согласно (2.2) систему (3.6) можно записать в виде

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{x},0) + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},0)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x},0)d_j +$$

$$+\frac{1}{2}\,\alpha e^{-\alpha\tau}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_j c_k + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_j d_k + \right. \tag{П.1}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})d_j d_k\right], \quad i = 1,\ldots,n.$$

Из условий (2.2), (2.3) следует

$$f_i(\bar{x},0) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\bar{x}_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\bar{x}},0)\bar{x}_j\bar{x}_k, \quad \tilde{\bar{x}} = \bar{\theta}_i\bar{x}, \quad \bar{\theta}_i \in [0,1],$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x},0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\tilde{\bar{x}}},0)\bar{x}_k, \quad \tilde{\tilde{\bar{x}}} = \tilde{\bar{\theta}}_i\bar{x}, \quad \tilde{\bar{\theta}}_i \in [0,1], \tag{П.2}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x},0) = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial x_k}(\tilde{\tilde{\bar{x}}},0)\bar{x}_k, \quad \tilde{\tilde{\bar{x}}} = \tilde{\tilde{\bar{\theta}}}_i\bar{x}, \quad \tilde{\tilde{\bar{\theta}}}_i \in [0,1], \quad i = 1,\ldots,n.$$

С учетом (П.2) систему (П.1) можно записать в форме

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\bar{x}_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j x_k}(\tilde{\bar{x}},0)\bar{x}_j\bar{x}_k +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{\tilde{\bar{x}}},0)\bar{x}_k c_j +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0)d_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial u_j}(\tilde{\tilde{\bar{x}}},0)\bar{x}_k d_j + \tag{П.3}$$

$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_j c_k + 2\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_j d_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})d_j d_k\right], \quad i = 1,\ldots,n.$$

Запишем систему (П.3) в векторном виде

$$\frac{dc}{d\tau}=\alpha e^{-\alpha\tau}(Ac+Bd+A\bar{x})+\alpha e^{-\alpha\tau}(\tilde{R}_1(\bar{x})+\tilde{R}_2(c,\bar{x})+\tilde{R}_3(d,\bar{x})+\tilde{R}_4(c,d,\bar{x})),$$

$$\tilde{R}_1=(\tilde{R}_1^1,\ldots,\tilde{R}_1^n)^{\mathrm{T}},\quad \tilde{R}_2=(\tilde{R}_2^1,\ldots,\tilde{R}_2^n)^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{R}_3=(\tilde{R}_3^1,\ldots,\tilde{R}_3^n)^{\mathrm{T}},\quad \tilde{R}_4=(\tilde{R}_4^1,\ldots,\tilde{R}_4^n)^{\mathrm{T}}, \tag{П.4}$$

$$\tilde{R}_1^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{\bar{x}},0)\bar{x}_j\bar{x}_k,\quad \tilde{R}_2^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\partial x_j}(\tilde{\bar{\bar{x}}},0)c_j\bar{x}_k,$$
$$\tilde{R}_3^i=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial x_k}(\tilde{\bar{\bar{x}}},0)\bar{x}_k d_j, \tag{П.5}$$

$$\tilde{R}_4^i=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_jc_k+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})c_jd_k+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\tilde{c},\tilde{d})d_jd_k\right]. \tag{П.6}$$

Из равенств (П.5), (П.6) следует, что при $\|\bar{x}\|<\varepsilon$ в области (2.5), (3.10) справедливы оценки

$$\left\|\tilde{R}_1\right\|\le\tilde{L}_1\|\bar{x}\|^2,\quad \left\|\tilde{R}_2\right\|\le\tilde{L}_2\|c\|\,\|\bar{x}\|,\quad \left\|\tilde{R}_3\right\|\le\tilde{L}_3\|d\|\,\|\bar{x}\|,$$
$$\left\|\tilde{R}_4\right\|\le\tilde{L}_4(\|c\|^2+\|d\|^2),\quad \tilde{L}_i>0,\quad i=1,\ldots,4. \tag{П.7}$$

Пусть $\operatorname{rank}S=k$, $0<k<n$. Обозначим через b_i i-й столбец матрицы B. Введем в рассмотрение матрицу

$$S_4=\Big\{b_1,Ab_1,\ldots,A^{k_1-1}b_1,b_2,Ab_2,\ldots,A^{k_2-1}b_2,\ldots,b_r,\ldots,A^{k_r-1}b_r,l_{k+1},\ldots,l_n\Big\}.$$

Здесь k_j, $j=1,\ldots,r$, – максимальное количество столбцов вида $b_j,\ldots,A^{k_j-1}b_j$ таких, что векторы $b_1,Ab_1,\ldots,A^{k_1-1}b_1,b_2,Ab_2,\ldots,A^{k_2-1}b_2,\ldots,b_r,Ab_r,\ldots$ $\ldots,A^{k_r-1}b_r$ линейно независимы, векторы l_j, $j=k+1,\ldots,n$ выбраны так, чтобы

$$\operatorname{rank}S_4=n. \tag{П.8}$$

Используя (П.8), выполним в системе (П.4) замену переменной c по формуле

$$c=S_4y. \tag{П.9}$$

Согласно [1] в новых переменных система (П.4) и условия (2.7) примут вид

$$\frac{dy}{d\tau}=\alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O_1 & A_3\end{pmatrix}y+\alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix}B_1\\ O_2\end{pmatrix}d+\alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ O_1 & A_3\end{pmatrix}\bar{y}+$$
$$+\alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_1(S_4\bar{y})+\alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_2(S_4y,S_4\bar{y})+$$
$$+\alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_3(d,S_4\bar{y})+\alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\tilde{R}_4(S_4y,d,S_4\bar{y}),\quad \bar{y}=S_4^{-1}\bar{x}, \tag{П.10}$$

$$y(0) = -\bar{y}, \quad y(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty \ \forall\, \bar{y} : \|S_4\bar{y}\| < \varepsilon. \tag{П.11}$$

В правой части (П.10) A_1, A_2, A_3, B_1 — матрицы с постоянными коэффициентами соответственно размерностей $k \times k$, $k \times n-k$, $n-k \times n-k$, $k \times r$. Блоки O_1, O_2 являются матрицами с нулевыми элементами соответственно размерностей $n-k \times k$, $n-k \times r$. Представим векторы $y(\tau)$, $\bar{y}$ в виде $y(\tau) = (\tilde{y}(\tau), \tilde{\bar{y}}(\tau))^{\mathrm{T}}$, $\tilde{y}(\tau) = (y_1(\tau), \ldots, y_k(\tau))^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\bar{y}}(\tau) = (y_{k+1}(\tau), \ldots, y_n(\tau))^{\mathrm{T}}$, $\bar{y} = (\bar{\tilde{y}}, \bar{\tilde{\bar{y}}})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\tilde{y}} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\tilde{\bar{y}}} = (\bar{y}_{k+1}, \ldots, \bar{y}_n)^{\mathrm{T}}$. Введем в рассмотрение систему, состоящую из последних $n-k$ уравнений системы (П.10), предположив дополнительно, что в ее правую часть подставлены известные функции $\tilde{y}(\tau), d(\tau)$. Не умоляя общности, можно положить

$$\begin{gathered}\bar{y} = (0, \ldots, 0, \bar{y}_{k+1}, \ldots, \bar{y}_{k+1})^{\mathrm{T}}, \\ \frac{d\tilde{\bar{y}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \tilde{\bar{y}} + \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \bar{\tilde{\bar{y}}} + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{S}_4^{-1} \left[\tilde{R}_1(S_4\bar{y}) + \tilde{R}_2(S_4 y, S_4\bar{y}) + \tilde{R}_3(d, S_4\bar{y}) + \tilde{R}_4(S_4 y, d, S_4\bar{y}) \right],\end{gathered} \tag{П.12}$$

где $\bar{S}_4^{-1}$ — матрица, состоящая из последних $n-k$ строк матрицы S_4^{-1}. Тогда из (П.11) вытекают условия

$$\tilde{\bar{y}}(0) = -\bar{\tilde{\bar{y}}}, \quad \tilde{\bar{y}}(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty. \tag{П.13}$$

Покажем, что решения системы (П.12), начинающиеся в достаточно малой окрестности начала координат, не удовлетворяют условию (П.13). Очевидно, что $\Phi(\tau) = e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{A_3}$ — фундаментальная матрица системы $\frac{d\tilde{\bar{y}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \tilde{\bar{y}}$, нормированная в нуле. Решение системы (П.12) с начальными данными (П.13) имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde{\bar{y}}(\tau) = -e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{A_3} \bar{\tilde{\bar{y}}} + e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} \int\limits_0^\tau e^{e^{-\alpha t} A_3} \alpha e^{-\alpha t} A_3 \bar{\tilde{\bar{y}}} dt + \\ + e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} \int\limits_0^\tau e^{e^{-\alpha t} A_3} \alpha e^{-\alpha t} \bar{S}_4^{-1} \Big[\tilde{R}_1(S_4\bar{y}) + \\ + \tilde{R}_2(S_4 y, S_4\bar{y}) + \tilde{R}_3(d, S_4 y) + \tilde{R}_4(S_4 y, S_4\bar{y}) \Big] dt, \quad \tau \in [0, \infty).\end{gathered} \tag{П.14}$$

С учетом ограничения (2.5) и условий (2.2), (3.8), (П.9), (П.11) в области $\left\|S_4^{-1}\bar{y}\right\| \le \varepsilon$ имеем оценки

$$\|y(\tau, \bar{y})\| \le L_1 \|\bar{y}\|, \quad \|d(\tau, y(\tau, \bar{y}))\| \le L_2 \|\bar{y}\|. \tag{П.15}$$

После вычисления первого интеграла в правой части равенства (П.14) получаем

$$\tilde{\bar{y}}(\tau) = -\bar{\tilde{\bar{y}}} + e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} \int\limits_0^\tau e^{e^{-\alpha t} A_3} \alpha e^{-\alpha t} \bar{S}_4^{-1} \Big[\tilde{R}_1(S_4\bar{y}) + \tilde{R}_2(S_4 y, S_4\bar{y}) +$$

$$+ \tilde{R}_3(d, S_4 y) + \tilde{R}_4(S_4 y, S_4 \bar{y})\Big] \, dt, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Отсюда

$$\|\tilde{\bar{y}}(\tau)\| \geq \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| - \left\|e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}\right\| \int\limits_0^\tau \alpha e^{-\alpha t} \left\|e^{e^{-\alpha t}A_3}\right\| \|\bar{S}_4^{-1}\| \left[\left\|\tilde{R}_1(S_4\bar{y})\right\| + \right.$$

$$\left. + \left\|\tilde{R}_2(S_4 y, S_4\bar{y})\right\| + \left\|\tilde{R}_3(d, S_4 y)\right\| + \left\|\tilde{R}_4(S_4 y, S_4\bar{y})\right\|\right] dt, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Используя (П.7), (П.9), (П.15), из последнего неравенства получаем

$$\|\tilde{\bar{y}}(\tau)\| \geq \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| - L_3 \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\|^2, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{П.16}$$

В (П.16) константа $L_3 > 0$ зависит от области $\|S_4\bar{y}\| < \varepsilon$. Зафиксируем $\bar{\tilde{\bar{y}}}$ в области $\|S_4\bar{y}\| < \varepsilon$ так, чтобы

$$\left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| < \frac{1}{L_3}, \quad \|S_4\bar{y}\| < \varepsilon, \quad \bar{y} = \left(0, \ldots, 0, \bar{\tilde{\bar{y}}}_{k+1}, \ldots, \bar{\tilde{\bar{y}}}_n\right)^{\mathrm{T}}, \quad \left\|\bar{\tilde{\bar{y}}}\right\| > 0. \tag{П.17}$$

Из (П.16) следует, что все траектории системы (П.12), начинающиеся в области (П.17), не удовлетворяют условию (П.13). Указанное обстоятельство противоречит утверждению о существовании $\varepsilon > 0$, которое фигурирует в формулировке теоремы. В случае, когда $k = 0$, доказательство аналогично. Необходимость доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем / Под ред. Э.Л. Напельбаума. М.: Мир, 1971.
2. *Walczak S.* A note on the controllability of nonlinear systems // Math. Syst. Theory 1984. V. 17. No. 4. P. 351–356.
3. *Комаров В.А.* Синтез ограниченных управлений для линейных неавтономных систем // АиТ. 1984. № 10. С. 44–50.

   Komarov V.A. Design of Constrained Control Signals for Nonlinear Non-autonomous Systems // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 10. P. 1280–1286.
4. *Крищенко А.П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // АиТ. 1984. № 6. С. 30–36.

   Krishchenko A.P. Controllability and Attainability sets of Nonlinear Control Systems // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 6. P. 707–713.
5. *Dirk A.* Controllability for polynomial systems // Lect. Notes Contr. Inf. Sci. 1984. No. 63. P. 542–545.
6. *Комаров В.А.* Оценка множества достижимости для линейных систем // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1984. № 1. С. 83–87.
7. *Balachandran K.* Global and local controllability of nonlinear systems // JEEE. Proc. 1985. No. 1. P. 14–17.
8. *Benzaid Z.* Global null controllability of perturbed systems // JEE. Trans. Autom. Control. 1987. No. 7. P. 623–625.

9. *Попова С.Н.* К свойству локальной достижимости линейной управляемой системы // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.

10. *Бердышев Ю.И.* О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы управл. 2006. № 4. С. 22–26.

11. *Kvitko A., Yakusheva D.* On one boundary problem for nonlinear stationary controlled System // Int. J. Control. 2019. V. 92. No. 4. P. 828–839. DOI: 10.1080/00207179.2017.1370727

12. *Coron J.M.* Control and Nonlinearity // Amer. Math. Soc. Math. Surveys Monographs. 2007. V. 136.

13. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1998.

14. *Balachandran K., Govindaraj V.* Numerical controllability of fractional dynamical systems // Optimization. 2014. V. 63. No. 8. P. 1267–1279.

15. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 16.07.2018

После доработки 23.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019

© 2020 г. **И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)**
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

ДИВЕРГЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Предложен метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Установлена связь между методом функций Ляпунова и предложенным методом. На базе полученных результатов приведен синтез закона управления с обратной связью по состоянию для стабилизации динамических систем, который сводится к решению дифференциального неравенства относительно искомой функции управления. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие применимость предложенного метода и существующих.

Ключевые слова: динамическая система, устойчивость, поток векторного поля, дивергенция, управление.

DOI: 10.31857/S0005231020020051

1. Введение

Динамическими моделями описывается множество процессов в окружающем макро- и микромире. Одним из важных вопросов эволюции таких систем является исследование сходимости решений данных моделей. Однако найти явное решение дифференциального уравнения не всегда представляется возможным, а численные решения могут значительно отличаться от истинного [1].

Хорошо известно, что метод функций Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений дифференциальных уравнений, не решая их. Впервые это показано А.М. Ляпуновым в конце XIX в. в его докторской диссертации (позже опубликованной в [2]) применительно к задачам астрономии и движения жидкости. Последующее развитие метода функций Ляпунова для исследования устойчивости и неустойчивости различных динамических систем, а также приложения полученных результатов в авиации, технике, механике и т.д. можно найти в следующих классических трудах [3–7]. В зависимости от решаемых задач функция Ляпунова также интерпретируется как потенциальная функция (potential function) [8], функция энергии (energy function) [9] или функция хранения (storage function) [10]. Однако основное ограничение в использовании аппарата функций Ляпунова состоит в поиске данных функций.

[1] Результаты раздела 2 получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01266). Результаты раздела 3 получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104).

Методы исследования устойчивости динамических систем на базе свойств дивергенции вектора фазовой скорости объекта являются альтернативными методу функций Ляпунова. Одними из первых основополагающих работ в направлении получения дивергентных условий устойчивости были труды [11–13]. В [14] получены фундаментальные результаты, посвященные развитию дивергентного метода для многомерных систем. Вопросы исследования устойчивости с использованием свойств индекса Пуанкаре и дивергенции векторных полей многомерных систем рассмотрены в [15, 16].

Результаты, предложенные в настоящей статье, будут тесно связаны с работами В.П. Жукова и А. Рантцера (A. Rantzer). Несмотря на то что в западной литературе нередко первенство в исследовании устойчивости с помощью дивергенции вектора фазовой скорости отдается А. Рантцеру [17, 18], в отечественной литературе подобные идеи были опубликованы ранее А.А. Шестаковым, А.Н. Степановым в [14] и В.П. Жуковым в [19]. В [19] исследуется неустойчивость решения нелинейного дифференциального уравнения с помощью дивергенции векторного поля. Затем в течение примерно 30 лет по исследованию неустойчивости различного вида динамических систем В.Н. Жуковым опубликован цикл работ, с частью которых можно свободно ознакомиться на сайте журнала “Автоматики и телемеханики”. В [20] приведено необходимое условие устойчивости нелинейных систем в виде неположительности дивергенции векторного поля фазовой скорости. В [14, 21] для исследования неустойчивости нелинейных динамических систем вводится вспомогательная скалярная функция. Отметим, что введение данной функции для исследования свойств устойчивости и неустойчиовсти по Ляпунову особой точки системы дифференциальных уравнений рассматривалось еще ранее в [22], но без использования дивергентных подходов. Позже в [17] А. Рантцер использовал также вспомогательную скалярную функцию, которую назвал функцией плотности (density function). В [14, 23] получены условия устойчивости для систем второго порядка. Затем А. Рантцер в [17, 18] обсуждает сходимость почти всех решений нелинейных динамических систем произвольного порядка и рассматривает вопросы синтеза закона управления. Подход в [17, 18] отличается от подходов в [14, 23] тем, что для исследования устойчивости в [17, 18] используется функция плотности, которая подобна обратной вспомогательной функции в [14, 23], за исключением их свойств в точке равновесия динамической системы. В настоящее время подход из [17, 18] распространен на различного рода системы [24–27]. В [28] предложен совершенно другой способ исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность и установлена связь дивергентного метода со вторым методом Ляпунова.

Однако результатам [18, 20, 23, 28] присущи следующие особенности:

1) необходимое условие [20] — достаточно усиленное;

2) метод [23] обоснован только для систем второго порядка;

3) основной результат [18, теорема 1] гарантирует сходимость почти всех решений системы. Для того чтобы определить устойчивость системы с ис-

пользованием [18, теорема 1], дополнительно накладывается условие неположительности дивергенции вектора фазовой скорости [18, см. утверждение 2];

4) условия устойчивости в [28] требуют существования преобразования координат, которое приводит исходную систему к диагональному виду. Для нелинейных систем поиск такого преобразования является трудно решаемой задачей.

В настоящей статье предложен новый метод устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Получены необходимые условия устойчивости. Установлена связь метода функций Ляпунова с предложенным методом исследования устойчивости на базе потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Предложены достаточное условие устойчивости и метод синтеза закона управления. Статья сопровождается примерами, иллюстрирующими применимость предложенного метода и результатов статьи [18].

2. Основной результат

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния, $f = [f_1, \ldots, f_n]^{\mathrm{T}} : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно-дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Множество D содержит начало координат и $f(0) = 0$. Для простоты положим, что область притяжения D_A точки $x = 0$ совпадает с областью D. Однако все полученные результаты будут справедливы, если $D_A \subset D$ или $D_A = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\bar{D}$ границу области D.

В статье будем использовать следующие обозначения: $\mathrm{grad}\{W(x)\} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}$ — градиент скалярной функции $W(x)$, $\mathrm{div}\{h(x)\} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial h_n}{\partial x_n}$ — дивергенция векторного поля $h(x) = [h_1(x), \ldots, h(x)_n]^{\mathrm{T}}$, $|\cdot|$ — евклидова норма соответствующего вектора. Под устойчивостью будем понимать устойчивость нулевого положения равновесия системы по Ляпунову [29].

Сформулируем необходимое условие устойчивости (1).

Теорема 1. Пусть $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы (1). *Тогда существует положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $S(x)$, такая что $S(x) \to \infty$ при $x \to \bar{D}$, $|\mathrm{grad}\{S(x)\}| \neq 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и для которой выполнено одно из следующих условий:*

1) *функция* $\mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)\}$ *интегрируема в области* $V = \{x \in D : S(x) \leq C\} \subset D$ *и* $\int_V \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)\}dV < 0$ *для всех* $C > 0$;

2) *функция* $\mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)\}$ *интегрируема в области* $V_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) \geq C\} \subset D$ *и* $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)\}dV_{inv} > 0$ *для всех* $C > 0$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию двух случаев в зависимости от вида функции $S(x)$ или $S^{-1}(x)$ в теореме 1. Обозначим через F_1 поток векторного поля $|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)$ через поверхность $\Gamma = \{x \in D \colon S(x) = C\}$ с еди-

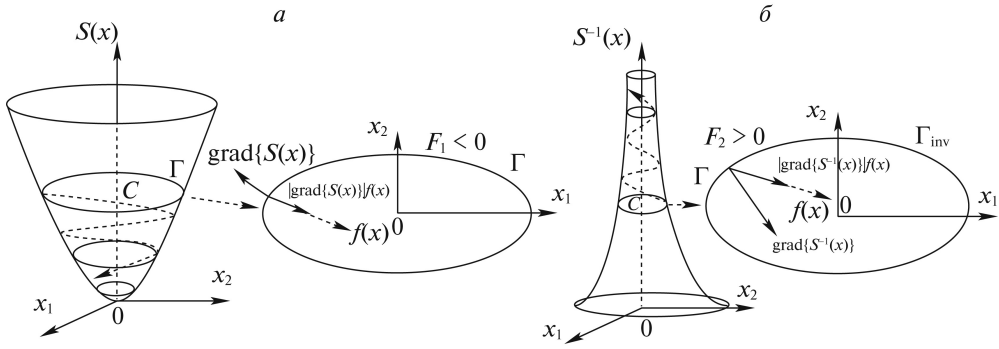


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация теоремы 1.

ничным вектором нормали $\frac{1}{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|}\mathrm{grad}\{S(x)\}$ и через F_2 — поток векторного поля $|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)$ через поверхность $\Gamma_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) = C\}$ с единичным вектором нормали $\frac{1}{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|}\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}$. На рис. 1 проиллюстрирована геометрическая интерпретация обоих случаев при $x \in \mathbb{R}^2$, где схематически изображены функции $S(x)$ и $S^{-1}(x)$ (на рис. 1,*а* и 1,*б* слева) и потоки F_1 и F_2 векторных полей $|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)$ и $|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)$ через соответствующие поверхности уровней Γ и Γ_{inv} (на рис. 1,*а* и 1,*б* справа). Если система (1) устойчива, то поток векторного поля F_1 (F_2) через поверхность Γ (Γ_{inv}) принимает отрицательное (положительное) значение.

Доказательство. Согласно [29, теорема 4.17] если $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы (1), то существует непрерывно-дифференцируемая положительно определенная функция $S(x)$, такая что $S(x) \to \infty$ при $x \to \bar{D}$, $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x)\Big|_{x=0} = 0$. Заметим, что если $D = \mathbb{R}^n$, то функция $S(x)$ является радиально неограниченной. Рассмотрим далее два случая по отдельности, которые соответствуют функциям $S(x)$ и $S^{-1}(x)$.

1. Если $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то и

$$\frac{1}{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|}\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x) < 0.$$

Значит, будет справедливо следующее выражение

$$F_1 = \oint_{\Gamma} \frac{1}{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|}\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)d\Gamma < 0.$$

Воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского (в литературе ее также можно найти в виде divergence theorem (теорема о дивергенции) и Gauss theorem (теорема Гаусса)), получим $F_1 = \int_V \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)\}dV < 0$.

2. Если $\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то

$$\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = -S^{-2}(x)\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) > 0.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) = \frac{1}{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|}\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x).$$

Значит, будет выполнено следующее соотношение

$$F_2 = \oint_{\Gamma_{inv}} \frac{1}{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|}\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}}|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)d\Gamma_{inv} > 0.$$

Воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского, получим, что

$$F_2 = \int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)\}dV_{inv} > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Подынтегральные выражения в теореме 1 явно зависят от функции $S(x)$, которая связана с поверхностью интегрирования. Сформулируем следствие, которое позволит ослабить данное требование.

Следствие. Пусть $x = 0$ — асимптотически устойчивая точка равновесия системы (1). *Тогда существуют положительно определенные непрерывно-дифференцируемые функции $\phi(x)$ и $S(x)$, такие что $\phi(x) \to \infty$ и $S(x) \to \infty$ при $x \to \bar{D}$, $|\mathrm{grad}\{S(x)\}| \neq 0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$ и для которых выполнено одно из следующих условий:*

1) *функция $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}$ интегрируема в области $V = \{x \in D : S(x) \leq C\} \subset D$ и $\int_V \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$ для всех $C > 0$, где $\rho(x) = \phi(x)|\mathrm{grad}\{S(x)\}|$;*

2) *функция $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ интегрируема в области $V_{inv} = \{x \in D : S^{-1}(x) \geq C\} \subset D$ и $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$ для всех $C > 0$, где $\rho^{-1}(x) = \phi^{-1}(x)|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|$.*

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 1, рассмотрим два случая.

1. Если $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то и $\phi(x)\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$. Следовательно, дальнейшее доказательство аналогично доказательству в теореме 1, рассматривая только поток векторного поля $\phi(x)|\mathrm{grad}\{S(x)\}|f(x)$ через поверхность Γ.

2. Если $\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$, то и $\phi^{-1}(x)\mathrm{grad}\{S(x)\}^{\mathrm{T}} f(x) < 0$. Значит, дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1, но с учетом потока векторного поля $\phi^{-1}(x)|\mathrm{grad}\{S^{-1}(x)\}|f(x)$ через поверхность Γ_{inv}. Следствие доказано.

Замечание. Если функция $\rho(x)$ выбрана так, что $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}$ и $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ интегрируемы, а также $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}<0$ и $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}>0$ для любых $x \in D \setminus \{0\}$, то соответствующие условия $\int_V \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$ и $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$, представленные в следствии, будут выполнены. В [18] для сходимости почти всех решений (1) требуется интегрируемость $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ и выполнение условия $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$, что является частным требованием в следствии.

Теперь сформулируем достаточное условие устойчивости.

Теорема 2. Пусть задана положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $\rho(x)$, определенная в области D. Тогда точка $x = 0$ устойчива (асимптотически устойчива), если выполнено одно из следующих условий:

1) $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\} \quad (\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} < \rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\})$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0$;

2) $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \ge 0 \quad (\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0)$
и $\operatorname{div}\{f(x)\} \le 0$ *для любых* $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\lim\limits_{|x|\to 0}\left[\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0$;

3) $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$
$(\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} < \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\})$,
где $\beta(x) > 1$ *и* $\operatorname{div}\{f(x)\} \le 0$ *или только* $\beta(x) = 1$ *для любых* $x \in D \setminus \{0\}$,
а также $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0$ *и* $\lim\limits_{|x|\to 0}\left[\rho(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0$.

Доказательство. Приведем доказательство устойчивости для каждого случая в отдельности. Доказательство асимптотической устойчивости аналогично.

1. Из соотношения $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} = \operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) + \operatorname{div}\{f(x)\}\rho(x)$ следует, что если $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \operatorname{div}\{f(x)\}\rho(x)$, то и $\operatorname{grad}\{\rho(x)\}f(x) \le 0$ в области $D \setminus \{0\}$. По условию $\rho(0) = 0$. Поэтому если $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0$, то и $\operatorname{grad}\{\rho(x)\}f(x)\big|_{x=0} = 0$. Значит, согласно теореме Ляпунова [29] система (1) устойчива.

2. Из выражения $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = \operatorname{grad}\{\rho^{-1}(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) + \operatorname{div}\{f(x)\}\rho^{-1}(x)$ следует, что $\operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) = \rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\} - \rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$. Если $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} \ge 0$ и $\operatorname{div}\{f(x)\} \le 0$, то $\operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) \le 0$ в области $D \setminus \{0\}$. Если $\lim_{|x|\to 0}\left[\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0$, то и $\lim_{|x|\to 0}\left[\operatorname{grad}\{\rho(x)\}f(x)\right] = 0$. Значит, система (1) устойчива.

3. Условие 3 состоит в объединении результатов условий 1 и 2. Суммируя $\beta(x)\operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) = \beta(x)\rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\} - \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ и $\operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) = \operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} - \operatorname{div}\{f(x)\}\rho(x)$, получим

$$(1 + \beta(x))\operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) =$$

$$= \operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} - \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} + (\beta(x) - 1)\rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\}.$$

Если

$$\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} \le \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$$

при $\beta(x) = 1$ или $\beta(x) > 1$ и $\operatorname{div}\{f(x)\} \le 0$, то

$$\operatorname{grad}\{\rho(x)\}^{\mathrm{T}}f(x) \le 0 \text{ в области } D \setminus \{0\}.$$

Если

$$\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\}\big|_{x=0} = 0 \text{ и } \lim_{|x|\to 0}\left[\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}\right] = 0,$$

то и

$$\lim_{|x|\to 0}\left[\operatorname{grad}\{\rho(x)\}f(x)\right] = 0.$$

Значит, система (1) устойчива. Теорема 2 доказана.

Во введении отмечалось, что результат [23] применим только для систем второго порядка. Далее рассмотрим иллюстрацию полученных результатов для систем третьего порядка и сравним полученные результаты с [18].

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 2x_1x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= -2x_3^3, \end{aligned} \tag{2}$$

которая имеет точку равновесия $(0,0,0)$.

Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$, где α — натуральное число. Проверим сначала условия следствия. Так как $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} = -|x|^{2\alpha}(4\alpha+10)x_3^2 < 0$ для любых α и $x_3 \neq 0$, а также $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = (4\alpha-10)x_3^2|x|^{-2\alpha} > 0$ для $\alpha \geq 3$ и $x_3 \neq 0$, то условия следствия будут выполнены. Поскольку функция $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ интегрируема в области $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$, то будут выполнены условия теоремы 1 [18] о сходимости почти всех решений (2).

Проверим теперь условия теоремы 2. Соотношение $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} - \rho(x)\operatorname{div}\{f(x)\} = -4\alpha x_3^2|x|^{2\alpha} < 0$ выполнено для любых α и $x_3 \neq 0$. В свою очередь $\operatorname{div}\{f(x)\} = -10x_3^2 < 0$ и функция $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} > 0$ для любых $\alpha \geq 3$ и $x_3 \neq 0$ (данный вывод можно также получить при использовании утверждения 2 в [18]). Пусть $\beta(x) = \beta \geq 1$. Тогда $\operatorname{div}\{\rho(x)f(x)\} - \beta\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = -(4\alpha + 10 + 4\beta\alpha - 10\beta)x_3^2|x|^{2\alpha} < 0$ при $\alpha > \frac{5(\beta-1)}{2(\beta+1)}$ и $x_3 \neq 0$. Все три случая дали одинаковые результаты. Значит, система (2) асимптотически устойчива с любыми начальными условиями, когда $x_3(0) \neq 0$. Если начальные условия содержат $x_3(0) = 0$, то система (2) устойчива. Фазовые траектории системы (2) изображены на рис. 2, где цикл получен для начального условия с $x_3 = 0$, спирали — при $x_3 \neq 0$.

Таким образом, следствие и теорема 2, как и результаты [18], дали положительные ответы об устойчивости (2). Дополнительно условия теоремы 2 позволили установить, когда система (2) устойчива и когда асимптотически устойчива.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 2x_1x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 2x_1x_3, \end{aligned} \tag{3}$$

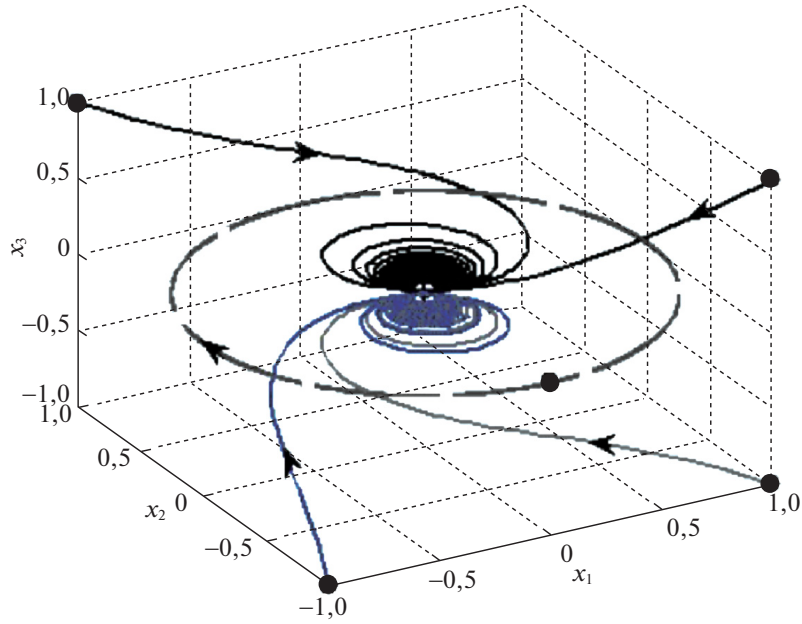


Рис. 2. Фазовые траектории системы (2).

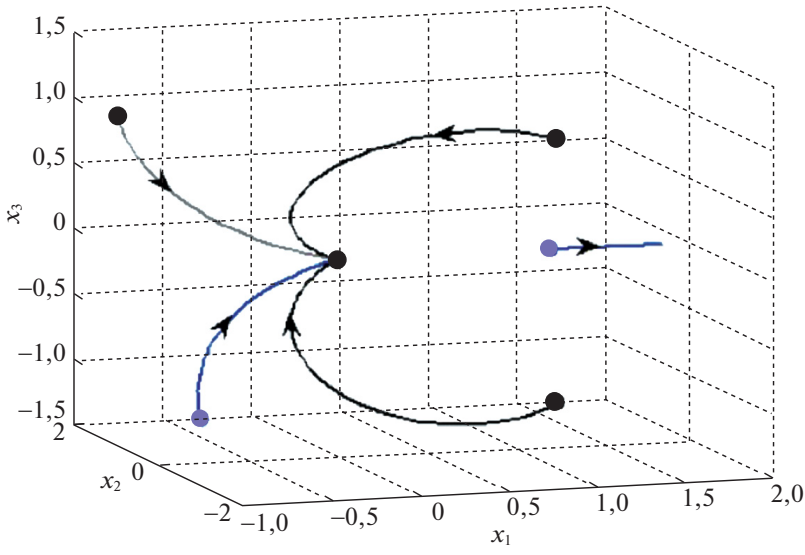


Рис. 3. Фазовые траектории системы (3).

которая имеет две точки равновесия $(0,0,0)$ и $(1,0,0)$. Все траектории системы сходятся к точке $(0,0,0)$, за исключением тех, которые начинаются на полуоси $x_1 \geq 1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ (см. рис. 3). Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$. Тогда $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = |x|^{-2\alpha}[2\alpha - 3 + 2x_1(3-\alpha)] > 0$ при $\alpha = 3$. Функция $\mathrm{div}\{f(x)\} = -3 + 6x_1$ не удовлетворяет условию $\mathrm{div}\{f(x)\} \leq 0$ при $x_1 > 0{,}5$. Соотношения $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq \rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\}$ и $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} \leq$

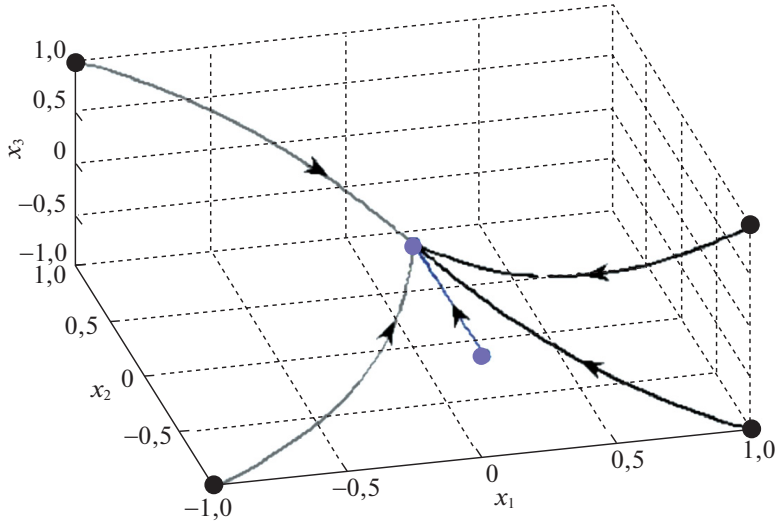


Рис. 4. Фазовый траектории системы (4) с двумя точками равновесия.

$\leq \beta(x)\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}$ тоже не выполнены. В результате в данном примере выполнены условия следствия (и условия теоремы 1 из [18]), но не выполнены условия теоремы 2 (и условия утверждения 2 из [18]).

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1x_2^2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 - x_2^3 - 8x_2x_3^2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 + 8x_2^2x_3 \end{aligned} \tag{4}$$

с точкой равновесия $(0,0,0)$. Фазовые траектории (4) изображены на рис. 4 для различных начальных условий.

Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$ и проверим сначала условия следствия. Вычислив $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} = |x|^{2\alpha-2}[(-2\alpha+1)x_1^4 + (-2\alpha+1)x_2^4 + (-2\alpha-11)x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 - -10x_1^2x_3^2 - 10x_2^2x_3^2]$, получим, что $\int_V \mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\}dV < 0$ для любых C и α. Для $\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} = |x|^{-2\alpha-2}[(2\alpha+1)x_1^4 + (2\alpha+1)x_2^4 + (2\alpha-11)x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 - -10x_1^2x_3^2 - 10x_2^2x_3^2]$ условие $\int_{V_{inv}} \mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\}dV_{inv} > 0$ выполнено для любых C и $\alpha \geq 3$. Следовательно, условия следствия выполнены (условия теоремы 1 из [18] выполнены только при $\alpha \geq 8$).

Проверим теперь условия теоремы 2. Соотношение $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} - -\rho(x)\mathrm{div}\{f(x)\} = -2\alpha|x|^{2\alpha-2}(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) < 0$ выполнено для любых α и $x \neq 0$. Функция $\mathrm{div}\{f(x)\} = x_1^2 + x_2^2 - 11x_3^2$ не является знакоопределенной, значит, независимо от выбора $\rho^{-1}(x)$ утверждением 2 в [18] и вторым случаем теоремы 2 здесь воспользоваться нельзя. Условие $\mathrm{div}\{\rho(x)f(x)\} - -\beta\rho^2(x)\mathrm{div}\{\rho^{-1}(x)f(x)\} < 0$ в теореме 2 выполнено при $\beta = 1$ и $x \neq 0$.

Таким образом, для системы (4) выполнены условия следствия и теоремы 2, откуда следует, что $(0,0,0)$ — асимптотически устойчивая точка равновесия. Согласно [18] можем только заключить, что почти все решения (4)

сходятся к $(0,0,0)$ поскольку не выполнены условия утверждения 2 из [18], а выполнены только условия теоремы 1 из [18].

3. Синтез закона управления

Рассмотрим динамическую систему, аффинную по управлению,

$$\dot{x} = \xi(x) + g(x)u(x), \tag{5}$$

где $u(x)$ — сигнал управления, функции $\xi(x)$, $g(x)$ и $u(x)$ — непрерывно-дифференцируемые в области D, $\xi(0) = 0$ и $g(0) = 0$ и система (5) является управляемой в области D. Сформулируем следующий результат.

Теорема 3. Пусть задана положительно определенная непрерывно-дифференцируемая функция $\rho(x)$ при $x \in D$. Если закон управления $u(x)$ выбран так, что выполнено одно из следующих условий:

1) $\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} \le \rho(x)\operatorname{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\}$
$(\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < \rho(x)\operatorname{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\})$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\big|_{x=0} = 0$;

2) $\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} \ge 0 \quad (\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} > 0)$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$ *и* $\lim\limits_{|x|\to 0} \left[\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\right] = 0$;

3) $\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} \le \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}$, $\beta \ge 1$
$(\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\})$,
где $\beta(x) > 1$ *и* $\operatorname{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\} \le 0$ *или только* $\beta(x) = 1$
для любых $x \in D \setminus \{0\}$, *а также* $\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\big|_{x=0} = 0$ *и*
$\lim\limits_{|x|\to 0} \left[\rho(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\}\right] = 0$,

то замкнутая система будет устойчивой (асимптотически устойчивой).

Поскольку система (5) является управляемой в области D, то доказательство теоремы 3 непосредственно следует из доказательства теоремы 2 с учетом замены $f(x) = \xi(x) + g(x)u(x)$.

Отметим, что при синтезе закона управления с использованием функции Ляпунова $V(x)$ требуется выбрать u так, чтобы было выполнено алгебраическое неравенство $\operatorname{grad}\{V\}(f + gu) < 0$. Согласно теореме 3 u необходимо выбрать так, чтобы было выполнено дифференциальное неравенство, что дает новое условие поиска закона управления.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= dx_2 - x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \tag{6}$$

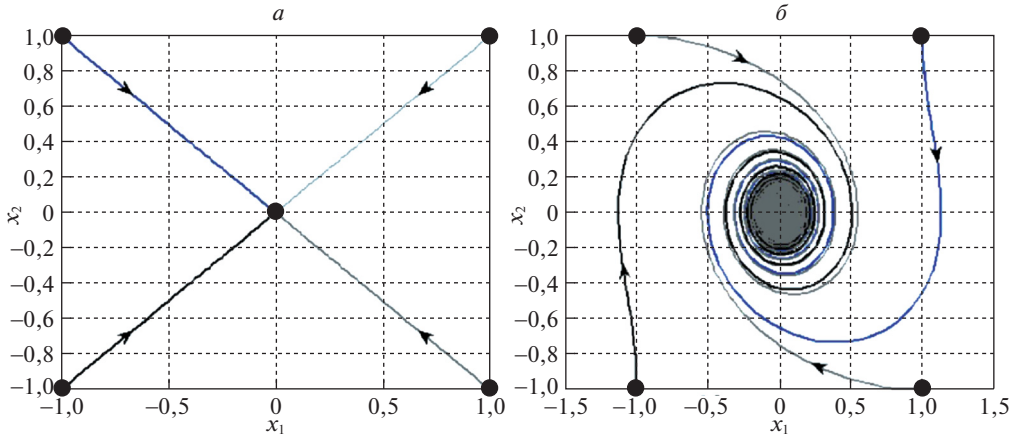


Рис. 5. Фазовые траектории в замкнутой системе при $d = 0$ (*а*) и при $d = 1$, $\beta = 2$ (*б*).

где d принимает значения 0 и 1. Требуется разработать закон управления u, который бы обеспечил асимптотическую устойчивость (6) в окрестности точки $(0, 0)$. Очевидно, что при $u = 0$ система (6) не является асимптотически устойчивой при любом значении d. Выберем $\rho(x) = |x|^{2\alpha}$, α — натуральное число, и воспользуемся третьим случаем теоремы 3.

1. Пусть $d = 0$. Вычислим

$$\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} =$$
$$= -2\alpha(1+\beta)x_1^2x_2^2 + 2\alpha(1+\beta)ux_2 + (1-\beta)\left(-x_2^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2).$$

Выбрав $u = -x_2^3$, получим, что

$$\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < 0$$

при $\beta \geq 1$, $\alpha > \frac{2(\beta-1)}{\beta+1}$ и $x_2 \neq 0$, а также $\operatorname{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\} \leq 0$. Фазовые траектории замкнутой системы изображены на рис. 5,*а*.

2. Пусть $d = 1$. Вычислим

$$\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} =$$
$$= 2\alpha(1+\beta)x_1x_2 - 2\alpha(1+\beta)x_1^2x_2^2 +$$
$$+ 2\alpha(1+\beta)ux_2 + (1-\beta)\left(-x_2^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2).$$

Выбрав $u = -x_1 - (\beta - 1)x_2^3$, получим, что

$$\operatorname{div}\{\rho(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} - \beta(x)\rho^2(x)\operatorname{div}\{\rho^{-1}(x)(\xi(x) + g(x)u(x))\} < 0$$

при $\beta \geq 1$ и $\alpha > \max\left\{\frac{(\beta-1)(3\beta-2)}{2(\beta+1)}, \frac{3\beta-2}{2(\beta+1)}\right\}$, а также $\operatorname{div}\{\xi(x) + g(x)u(x)\} \leq 0$. Фазовые траектории замкнутой системы изображены на рис. 5,*б* при $\beta = 2$.

4. Заключение

Предложен метод исследования устойчивости динамических систем с использованием свойств потока и дивергенции вектора фазовой скорости. Для исследования устойчивости требуется существование определенного вида поверхности интегрирования или вспомогательной скалярной функции. Сформулированы отдельно необходимые и достаточные условия устойчивости. Дальнейшие результаты могут быть связаны с распространением полученного метода на другие виды систем, например неавтономные системы, системы с запаздыванием и т.д.

Полученные результаты применены к синтезу закона управления с обратной связью для динамических систем. Показано, что для выбора закона управления требуется разрешить дифференциальное неравенство относительно сигнала управления, в то время как при использовании аппарата функций Ляпунова требуется разрешить алгебраическое неравенство. Продолжением работ по синтезу новых алгоритмов управления с использованием дивергентных методов может являться модификация некоторых эффективных схем управления, разработанных на базе метода функций Ляпунова. К таким методам управления можно отнести метод инвариантных эллипсоидов [30], метод скоростного градиента [31] и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 2003.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: 1955.
4. *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962.
5. *Малкин И.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
6. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М.: Высш. шк., 1984.
7. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
8. *Yuan R., Ma Y.-A., Yuan B., Ao P.* Lyapunov Function as Potential Function: A Dynamical Equivalence // Chin. Phys. B. 2014. V. 23. No. 1. P. 010505.
9. *Bikdash M.U., Layton R.A.* An Energy-Based Lyapunov Function for Physical Systems // IFAC Proc. 2000. V. 33. No. 2. P. 81–86.
10. *Willems J.C.* Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory. Part II: Linear Systems with Quadratic Supply Rates // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 45. No. 5. P. 321–393.
11. *Zaremba S.K.* Divergence of Vector Fields and Differential Equations // Amer. J. Math. 1954. V. LXXV. P. 220–234.
12. *Fronteau J.* Le théorèm de Liouville et le problèm général de la stabilité. Genève: CERN, 1965.
13. *Brauchli H.I.* Index, divergenz und Stabilität in Autonomen equations. Zürich: Abhandlung Verlag, 1968.

14. *Шестаков А.А., Степанов А.Н.* Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 650–661.

15. *Масина О.Н., Дружинина О.В.* Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.

16. *Дружинина О.В.* Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. М.: Изд. группа URSS, 2013.

17. *Rantzer A., Parrilo P.A.* On Convexity in Stabilization of Nonlinear Systems // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, Australia. 2000. P. 2942–2946.

18. *Rantzer A.* A Dual to Lyapunov's Stability Theorem // Syst. & Control Lett. 2001. V. 42. P. 161–168.

19. *Жуков В.П.* Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1978. № 6. С. 11–15.

    Zhukov V.P. On One Method for Qualitative Study of Nonlinear System Stability // Autom. Remote Control. 1978. V. 39. No. 6. P. 785–788.

20. *Жуков В.П.* К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1979. № 3. С. 12–17.

    Zhukov V.P. On the Method of Sources for Studying the Stability of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 3. P. 330–335.

21. *Жуков В.П.* Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // АиТ. 1990. № 12. С. 59–65.

    Zhukov V.P. Necessary and Sufficient Conditions for Instability of Nonlinear Autonomous Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 12. P. 1652–1657.

22. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.

23. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // АиТ. 1999. № 7. С. 34–43.

    Zhukov V.P. On the Divergence Conditions for the Asymptotic Stability of Second-Order Nonlinear Dynamical Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 934–940.

24. *Monzon P.* On Necessary Conditions for Almost Global Stability // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 4. P. 631–634.

25. *Loizou S.G., Jadbabaie A.* Density Functions for Navigation-Function-Based Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2008. V. 53. No. 2. P. 612–617.

26. *Castañeda Á., Robledo G.* Differentiability of Palmer's Linearization Theorem and Converse Result for Density Functions // J. Diff. Equat. 2015. V. 259. No. 9. P. 4634–4650.

27. *Karabacak Ö., Wisniewski R., Leth J.* On the Almost Global Stability of Invariant Sets // Proc. 2018 Eur. Control Conf. (ECC 2018). Limassol, Cyprus. 2018. P. 1648–1653.

28. *Фуртат И.Б.* Исследование устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. 2013. Т. 83. № 1. С. 23–27.

29. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009.

30. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.

31. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. С. 90–101.

Fradkov A.L. A Scheme of Speed Gradient and its Application in Problems of Adaptive Control // Autom. Remote Control. 1980. V. 40. No. 9. P. 1333–1342.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 21.05.2019

После доработки 02.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019

© 2020 г. **А.Ф. ШОРИКОВ**, д-р физ.-мат. наук (afshorikov@mail.ru)
(Уральский федеральный университет, Екатеринбург),
В.И. КАЛЕВ (butahlecoq@gmail.com)
(АО "НПО автоматики", Екатеринбург)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМАКСНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСХОДОМ ТОПЛИВА РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ[1]

Предлагается математическая формализация и способ решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива двигательной установки ракеты-носителя. Исходная нелинейная модель объекта управления линеаризуется вдоль опорной траектории и аппроксимируется линейной дискретной динамической системой. Для аппроксимирующей системы формулируется задача минимаксного программного терминального управления с учетом заданных геометрических ограничений на векторы управления и возмущения. Предлагается новый метод и численный алгоритм решения задачи, которые для построения обобщенных областей достижимости линейной дискретной управляемой системы используют модификацию общего рекуррентного алгебраического метода. Эффективность предлагаемого решения исследуемой задачи демонстрируется на примере компьютерного моделирования.

Ключевые слова: адаптивное управление, минимаксный результат, гарантированное управление, робастное управление, управление расходом топлива, двигательная установка, ракета-носитель.

DOI: 10.31857/S0005231020020063

1. Введение

Задача терминального управления расходом топлива двигательной установки (ДУ) является одной из основных задач управления, решаемых для жидкостных ракет-носителей (РН). Суть этой задачи заключается в рационализации использования рабочих запасов компонентов топлива, требуемых для отработки программной траектории движения РН. Основная идея подобной рационализации может быть сведена к решению задачи синхронного и полного опорожнения топливных баков окислителя и горючего к заданному моменту времени. Другими словами, критерием качества в терминальной постановке рассматриваемой задачи служит величина отклонения фазовых координат объекта управления от их желаемых значений в финальный момент времени.

Известно (см., например, [1–3]), что при моделировании объектов управления ракетно-космической техники информация об априорно неопределенных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00544).

параметрах системы (начальном фазовом состоянии, возможных реализациях возмущения) обычно представляется в виде ограниченных множеств возможных значений этих параметров.

В данной статье рассматривается исходная нелинейная модель объекта управления и ее линейная дискретная аппроксимация относительно заданного опорного режима функционирования, в которой учитывается возмущение, описывающее возникающую в процессе моделирования (аппроксимации) погрешность. Предполагается, что ограничения на априорно неопределенные значения возмущения в рассматриваемом процессе управления являются выпуклыми, замкнутыми и ограниченными многогранниками (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах (далее, для краткости, будем писать просто “многогранник”, подразумевая все указанные выше свойства), а множества значений управляющих воздействий являются конечными множествами. Для формализации рассматриваемой задачи оптимизации режимов расхода топлива жидкостной ДУ РН используется минимаксный подход [4–6], предполагающий нахождение такого управляющего воздействия, которое минимизирует наихудшие (максимальные) значения выбранного критерия качества, соответствующие возможным наихудшим реализациям допустимых значений возмущения.

Для решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива жидкостной ДУ РН в статье применяется детерминированный подход, основанный на результатах публикаций [6–12]. В этом подходе предполагается, что априорно неопределенные параметры системы принимают свои значения из некоторых известных множеств, имеющих вид многогранников. В качестве исходной модели рассматривается нелинейная модель функционирования ДУ РН. Сформированная модель динамики ДУ РН линеаризуется относительно заданного опорного режима функционирования, а затем дискретизируется и приводится к линейному рекуррентному виду [6, 11].

Для линейных дискретных управляемых динамических систем с геометрическими ограничениями на векторы состояния и управления в виде многогранников в [6–9] Шориковым А.Ф. был разработан и описан эффективный общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости, который базируется на полугрупповом свойстве выпуклых многогранных областей достижимости [6] и свойствах конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств. В методе используются возможности симплекс-метода для решения задач линейного математического программирования, а также способы преобразования описания многогранников с помощью соответствующих систем линейных алгебраических неравенств в их описание с помощью конечного числа вершин и наоборот.

Предлагаемое решение задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН для сформированной линейной дискретной управляемой динамической системы основывается на результатах публикаций [6, 8, 9] и базируется на общем рекуррентном алгебраическом методе построения областей достижимости для таких динамических систем и на алгебраических операциях над выпуклыми многогранными множествами [6, 13].

Для реализации этих методов Шориковым А.Ф. были разработаны соответствующие численные алгоритмы, которые послужили основой для создания Шориковым А.Ф. и Тюлюкиным В.А. компьютерного программного комплекса, описание и применение которого представлено в [6–10].

Отметим, что общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости применим для линейных дискретных управляемых динамических систем любой конечной размерности, а его компьютерная реализация ограничена только ресурсами памяти и быстродействием используемой компьютерной платформы. Поэтому для задач программного управления, которые решаются, как правило, задолго до непосредственного использования управляемого объекта (т.е. время решения задачи не ограничено), использование данного метода оправдано.

В данной статье для разработки алгоритма решения рассматриваемой задачи в части построения обобщенных областей достижимости используется модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости, описанная в [12]. В заключительной части данной статьи представлены результаты компьютерного моделирования применения предлагаемого метода и численного алгоритма для решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН на конкретном модельном примере. Моделирование осуществлялось с использованием созданного авторами специализированного компьютерного программного комплекса.

2. Формирование модели расхода топлива ДУ РН

На промежутке времени $[\tau_0, \tau_f]$ рассматривается математическая модель [11], описывающая режим работы жидкостной ДУ третьей ступени РН (здесь τ_0 — время выхода на режим и τ_f — время выключения ДУ). Управляющее воздействие (далее — управление) в данной модели в силу конструктивных особенностей тракта управления расходом топлива РН реализуется в заданные дискретные моменты времени $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{T-1}\} \subset [\tau_0, \tau_f]$, где $\tau_T = \tau_f$, в соответствие которым может быть поставлен целочисленный набор $\overline{0, T-1} = \{0, 1, \ldots, T-1\}$ $(T \in \mathbb{N})$ (здесь T — количество заданных моментов времени, в которые планируется осуществлять реализацию управляющего воздействия; здесь и далее $\mathbb{N}$ —- множество всех натуральных чисел). С помощью управления $u(t)$ на целочисленном промежутке времени $\overline{0, T-1}$ регулирование угла поворота дросселя $\alpha_{th}(t)$ может быть описано рекуррентным соотношением

$$\alpha_{th}(t+1) = \alpha_{th}(t) + c_0 u(t), \quad t \in \overline{0, T-1}, \quad \alpha_{th}(0) = 0, \tag{1}$$

где c_0 — известный коэффициент при́вода дросселя. Отметим, что значение угла поворота дросселя $\alpha(t)$ при $t \in [\tau_t, \tau_{t+1})$, $t \in \overline{0, T-1}$, имеет фиксированное значение, т.е. не изменяется.

От угла поворота дросселя $\alpha_{th}(\tau)$ зависит значение коэффициента соотношения расходов окислителя и горючего [14], вычисляемое по формуле

$$K_m(\tau) = K + \Delta K + c_1 \alpha_{th}(\tau), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \tag{2}$$

где K — проектное значение коэффициента соотношения расходов компонентов топлива; ΔK — измеряемый в начальный момент времени параметр выставки дросселя в исходное положение; c_1 — известный коэффициент эффективности дросселя.

Выражение для вычисления тяги ДУ третьей ступени РН в пустоте имеет вид

$$P_s(\tau) = P + c_2(K_m(\tau) - K)^2 + c_3(K_m(\tau) - K), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \tag{3}$$

где P — проектное значение пустотной тяги ДУ; c_2, c_3 — известные коэффициенты рабочего режима ДУ.

Удельный импульс тяги ДУ в пустоте вычисляется по формуле

$$I_{sp}(\tau) = I + c_4(K_m(\tau) - K)^2 + c_5(K_m(\tau) - K), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \tag{4}$$

где I — проектное значение удельного импульса тяги ДУ; c_4, c_5 — известные коэффициенты рабочего режима ДУ.

Значения массовых расходов окислителя и горючего из топливных баков определяются соответственно так:

$$\begin{aligned} m_o(\tau) &= \frac{P_s(\tau)K_m(\tau)}{I_{sp}(\tau)(1 + K_m(\tau))}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \\ m_f(\tau) &= \frac{P_s(\tau)}{I_{sp}(\tau)(1 + K_m(\tau))}, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f]. \end{aligned} \tag{5}$$

Текущие значения масс окислителя и горючего в топливных баках зависят от значений их массовых расходов (5) и могут быть вычислены посредством формул

$$\begin{aligned} M_o(\tau) &= M_o^{\text{ном}} + \Delta M_o - \int\limits_{\tau_0}^{\tau} m_o(\tau)d\tau, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \\ M_f(\tau) &= M_f^{\text{ном}} + \Delta M_f - \int\limits_{\tau_0}^{\tau} m_f(\tau)d\tau, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f], \end{aligned} \tag{6}$$

где $M_o^{\text{ном}}, M_f^{\text{ном}}$ — номинальные массы рабочих запасов окислителя и горючего; $\Delta M_o, \Delta M_f$ — измеряемые в начальный момент времени параметры заправки топливных баков.

Уравнения (5), (6) исходной нелинейной модели для массовых расходов окислителя $m_o(\tau)$ и горючего $m_f(\tau)$ и для масс окислителя $M_o(\tau)$ и горючего $M_f(\tau)$, линеаризуются (разложением в ряд Тейлора) относительно опорной траектории:

$$\begin{aligned} m_o^{ref}(\tau) &= \frac{PK}{I + IK}, \qquad M_o^{ref}(\tau) = M_o^{\text{ном}} - \frac{PK}{I + IK}\tau, \\ m_f^{ref}(\tau) &= \frac{P}{I + IK}, \qquad M_f^{ref}(\tau) = M_f^{\text{ном}} - \frac{P}{I + IK}\tau, \end{aligned} \tag{7}$$

после чего линеаризованная модель приводится к дискретному виду, соответствующему дискретным реализациям управления в моменты времени $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{T-1}\}$.

Рассмотрим на целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$ поставленную в соответствие исходной нелинейной непрерывной модели (1)–(6) линейную дискретную динамическую модель.

Значения массовых расходов компонентов топлива из баков вычисляются по рекуррентным дискретным соотношениям

$$\begin{aligned} m_o(t+1) &= m_o(t) + \alpha u(t) + \gamma_1 w_1(t), \quad m_o(0) = m_o^{\text{ном}} + \alpha \Delta K, \\ m_f(t+1) &= m_f(t) + \beta u(t) + \gamma_2 w_2(t), \quad m_f(0) = m_f^{\text{ном}} + \beta \Delta K, \end{aligned} \tag{8}$$

где $t \in \overline{0, T-1}$; α, β — полученные при линеаризации коэффициенты, равные

$$\alpha = \frac{c_0 c_1 P}{I(1+K)} + \frac{c_0 c_1 c_3 K}{I(1+K)} - \frac{c_0 c_1 P K}{I(1+K)^2} - \frac{c_0 c_1 c_5 P K}{I^2(1+K)},$$
$$\beta = \frac{c_0 c_1 P}{I(1+K)^2} + \frac{c_0 c_1 c_5 P}{I^2(1+K)} - \frac{c_0 c_1 c_3}{1+K};$$

$u(t)$ — скалярное управление; $m_o^{\text{ном}}, m_f^{\text{ном}}$ — номинальные значения массовых расходов окислителя и горючего; $w_1(t), w_2(t)$ — неконтролируемое возмущение (погрешность формирования модели); γ_1, γ_2 — коэффициенты, оцениваемые путем численного моделирования исходной и аппроксимирующей систем.

Дискретные рекуррентные уравнения, позволяющие определить значения масс окислителя и горючего в топливных баках, имеют вид

$$\begin{aligned} M_o(t+1) &= M_o(t) - \Delta T(t) m_o(t), \quad M_o(0) = M_o^{\text{ном}} + \Delta M_o, \\ M_f(t+1) &= M_f(t) - \Delta T(t) m_f(t), \quad M_f(0) = M_f^{\text{ном}} + \Delta M_f, \ t \in \overline{0, T-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Delta T(t)$ — расчетное значение времени между двумя соседними управлениями.

Динамические уравнения объекта управления (8), (9) могут быть записаны в рекуррентном векторно-матричном виде

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t), \quad x(0) = x_0, \tag{10}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^4$ — фазовый вектор системы (здесь и далее, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство векторов-столбцов; $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел); $A(t) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ — соответственно матрицы состояния, управления и возмущения системы, имеющие вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta T(t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta T(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(t) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $t \in \overline{0, T-1}$; $x(0) = x_0$ — заданное начальное значение фазового вектора, равное

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} m_o^{\text{ном}} + \alpha \Delta K \\ M_o^{\text{ном}} + \Delta M_o \\ m_f^{\text{ном}} + \beta \Delta K \\ M_f^{\text{ном}} + \Delta M_f \end{pmatrix};$$

$u(t) \in \mathbb{R}^1$ — управление, стесненное заданным ограничением

$$u(t) \in \mathbf{U}_1(t) \subset \mathbb{R}^1, \quad t \in \overline{0, T-1}; \tag{11}$$

$w(t) \in \mathbb{R}^2$ — возмущение (погрешность моделирования), значения которого выбираются в зависимости от сформированного на этапе линеаризации ограничения

$$w(t) \in \mathbf{W}_1(t) \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in \overline{0, T-1}. \tag{12}$$

Для ограничений (11) и (12) выполняются следующие условия.

Предположение 1. Множество $\mathbf{U}_1(t)$ $\forall t \in \overline{0, T-1}$ представляет собой конечный набор векторов в $\mathbb{R}^1$, определяющий все возможные значения управления в момент времени t.

Предположение 2. Множество $\mathbf{W}_1(t) \subset \mathbb{R}^2$ $\forall t \in \overline{0, T-1}$, ограничивающее возмущение на шаге t, является многогранником в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$.

Для промежутка времени $\overline{0, T}$ и ограничения (11) введем в рассмотрение множество всех допустимых реализаций программных управлений $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$, описываемое соотношением, которое является конечным множеством,

$$\mathbf{U}(\overline{0, T}) = \left\{ u(\cdot) \mid u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbb{R}^{1 \times T} \ \forall t \in \overline{0, T-1}, u(t) \in \mathbf{U}_1(t) \right\}. \tag{13}$$

Аналогично для промежутка времени $\overline{0, T}$ и ограничения (12) введем в рассмотрение множество всех допустимых реализаций вектора возмущений $w(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$:

$$\mathbf{W}(\overline{0, T}) = \left\{ w(\cdot) \mid w(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbb{R}^{2 \times T} \ \forall t \in \overline{0, T-1}, w(t) \in \mathbf{W}_1(t) \right\}. \tag{14}$$

Рассматриваемый процесс управления будем оценивать терминальным функционалом $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbf{U}(\overline{0, T}) \times \mathbf{W}(\overline{0, T}) \to \mathbb{R}^1$, определенным на допустимых в дискретной динамической системе (10)–(14) реализациях наборов $(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbf{U}(\overline{0, T}) \times \mathbf{W}(\overline{0, T})$ и значения которого в финальный момент времени T определяются как

$$\Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) = \|x(T) - x_d\|_4 = F(x(T)), \tag{15}$$

где $x(T) = \overline{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \in \mathbb{R}^4$ — финальное фазовое состояние движения системы (10); $x_d \in \mathbb{R}^4$ — вектор, определяющий расчетное (номинальное) финальное фазовое состояние системы (10); $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ — выпуклый функционал; $\| \cdot \|_4$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^4$.

3. Постановка задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН

Сформулируем содержательно задачу минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН.

Для дискретной динамической системы (10) с ограничениями (11)–(14) требуется найти такое допустимое программное управление $u^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$, которое оптимизирует (минимизирует) гарантированный (наибольший) результат рассматриваемого процесса управления, оцениваемый функционалом (15), по сравнению с результатами, возможными при любых допустимых управлениях $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$ и любых реализациях возмущений $w(\cdot) = \{w(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{W}(\overline{0,T})$, т.е. такое управление, при котором будет выполняться условие

$$\Phi(x_0, u^{(e)}(\cdot), w(\cdot)) \leqslant \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)). \tag{16}$$

Условие (16) называется условием *минимакса* [4–6].

Тогда для линейной дискретной динамической системы (10) с ограничениями (11)–(14) можно сформулировать задачу минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН.

Задача. Для заданного целочисленного промежутка времени $\overline{0,T}$ *и начального фазового вектора системы* $x(0) = x_0$ *требуется найти множество* $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0)) \subseteq \mathbf{U}(\overline{0,T})$ *программных управлений* $u^{(e)} = \{u^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$, *удовлетворяющих условию минимакса*

$$\begin{gathered}\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0)) = \Bigg\{u^{(e)}(\cdot) \mid u^{(e)}(\cdot) = \Big\{u^{(e)}(t)\Big\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T}),\\ \Phi^{(e)} = \Phi(x_0, u^{(e)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot)) = \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u^{(e)}(\cdot), w(\cdot)) =\\ = \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}(\overline{0,T})} \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot))\Bigg\},\end{gathered} \tag{17}$$

которое будем называть множеством минимаксных программных управлений для данной задачи, а число $\Phi^{(e)}$ *будем называть ее минимаксным результатом.*

Как было показано в [6, 9], из-за конечности множества допустимых программных управлений $\mathbf{U}(\overline{0,T})$ и свойств, используемых общим рекуррентным алгебраическим методом при построении областей достижимости линейных дискретных управляемых систем, решение сформулированной многошаговой задачи существует и сводится к реализации конечной последовательности решения только одношаговых задач: поиска крайних опорных вершин многогранников (путем нахождения решений сформированных задач линейного математического программирования), выполнения алгебраических операций для преобразования их вершинного описания в описание соответствующими конечными системами линейных алгебраических уравнений и неравенств и выпуклого математического программирования.

4. Алгоритм решения задачи

Для решения сформулированной задачи используются результаты из [6–12] и аппарат построения и анализа областей достижимости динамических систем, который нашел широкое применение в теоретических и прикладных задачах [3–6]. Введем в рассмотрение понятие обобщенной области достижимости [4, 6].

Определение 1. Обобщенной областью достижимости фазовых состояний линейной дискретной управляемой динамической системы (10) *с ограничениями* (11)–(14) *при фиксированном допустимом программном управлении* $u_*(\cdot) = \{u_*(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$ *на момент времени* T*, соответствующей набору* $(x_0, u_*(\cdot))$*, называется множество, определяемое соотношением*

$$\mathbf{G}(0, x_0, u_*(\cdot); T) = \\ = \Big\{ x(T) | x(T) \in \mathbb{R}^4, x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t), \\ t \in \overline{0, T-1}, x(0) = x_0, w(t) \in \mathbf{W}_1(t) \Big\}. \tag{18}$$

В силу принятых предположений о том, что множества в ограничении (12) относятся к классу многогранников, в [6] было показано, что множество, описывающее обобщенную область достижимости такой динамической системы, будет также принадлежать к классу многогранников.

Известно (см., например, [6, 13, 15]), что любой многогранник может быть представлен двумя способами: как выпуклая оболочка конечной системы векторов и как множество решений конечной системы линейных алгебраических равенств и неравенств.

Определение 2. Множество из $k \in \mathbb{N}$ *крайних точек, задаваемых набором векторов* $v_i \in \mathbb{R}^n$*,* $i \in \overline{1,k}$*, выпуклая оболочка которых является многогранником* $P \in \mathbb{R}^n$*, называется вершинным описанием этого многогранника:*

$$P = \mathrm{convhull}(v_1, v_2, \ldots, v_k), \quad v_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,k}. \tag{19}$$

Определение 3. Система из $m \in \mathbb{N}$ *линейных неравенств и* $l \in \mathbb{N}$ *линейных уравнений, определяющая многогранник* $P \in \mathbb{R}^n$*, называется фасетным описанием этого многогранника:*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leqslant b, A_e x = b_e\}, \ A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ b \in \mathbb{R}^m, \ A_e \in \mathbb{R}^{l\times n}, \ b_e \in \mathbb{R}^l. \tag{20}$$

Приведем описание общего рекуррентного алгебраического метода [6–8] построения обобщенных областей достижимости линейных дискретных управляемых систем вида (18).

Алгоритм (построение обобщенных областей достижимости).

0. Инициализация: $X(0) = \{x_0\}, u_*(\cdot) = \{u_*(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0,T})$.

1. Для всех $t \in \overline{0, T-1}$ последовательно выполнить:

$$\overline{X}(t+1) = (A(t)X(t) + B(t)u_*(t)) \oplus D(t)\mathbf{W}_1(t);$$
$$X(t+1) = \mathrm{RemoveRedundancy}(\overline{X}(t+1)).$$

2. Закончить.

В основе общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости [6–9] лежит полугрупповое (эволюционное) свойство областей достижимости $\mathbf{G}(t, X(t), u_*(\cdot); t+1)$ $\forall t \in \overline{1, T-1}$. Операция RemoveRedundancy в алгоритме обозначает решение задачи нахождения крайних точек приведенного внутри скобок множества точек и решается как задача линейного математического программирования способом, предложенным в [7]. Операция суммирования множеств в данном алгоритме понимается как сумма Минковского (геометрическая сумма) этих множеств и обозначена с помощью символа $\oplus$.

Отметим, что согласно [6] в данной статье для линейных преобразований, геометрической суммы множеств и нахождения их крайних точек при построении областей достижимости используется вершинный способ описания многогранников (19), а фасетное описание (20) области достижимости необходимо для формирования задачи поиска экстремума целевого функционала на этом множестве и возможности использования методов математического программирования для ее решения.

Учитывая изложенное и результаты из [6–12], решение задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН может быть сведено к решению подзадач в следующей последовательности:

1. Упорядочение по возрастанию натурального индекса j конечного множества $\mathbf{U}(\overline{0, T})$, состоящего из N допустимых программных управлений $u^{(j)}(\cdot) = \{u^{(j)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$, т.е. формирование множества $\mathbf{U}(\overline{0, T}) = \{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1, N}}$;

2. Построение обобщенных областей достижимости $\mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)$ при фиксированных допустимых управлениях $u^{(j)}(\cdot) = \{u^{(j)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$ для всех $j \in \overline{1, N}$, где $X(0) = x_0$;

3. Формирование двойственного описания многогранников $\mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)$, $j = \overline{1, N}$, т.е. нахождение фасетного описания (20) каждого многогранника по его вершинному описанию (19) (операцию формирования двойного описания множества достижимости предлагается реализовывать, например, с использованием модификации метода двойного описания [6, 13], представленной в статье [16]);

4. Оптимизация функционала (15) на множестве $\mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)$ для всех $j \in \overline{1, N}$ методами выпуклого математического программирования, т.е. нахождение значения функционала:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{(e)} &= \Phi(x_0, u^{(j)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot)) = \max_{w(\cdot) \in \mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u^{(j)}(\cdot), w(\cdot)) = \\ &= \max_{x(T) \in \mathbf{G}(0, X(0), u^{(j)}(\cdot); T)} \|x(T) - x_d\|_4 = \|x^{(e)}(T) - x_d\|_4, \end{aligned} \tag{21}$$

где $x(T) = \overline{x}(T; \overline{0,T}, x_0, u^{(j)}(\cdot), w(\cdot))$; $x^{(e)}(T) = \overline{x}(T; \overline{0,T}, x_0, u^{(j)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot))$ (решается, например, с помощью метода Зойтендейка [17]).

5. Нахождение множества $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$ минимаксных программных управлений и числа $\Phi^{(e)}$ — гарантированного (минимаксного) результата решения рассматриваемой задачи путем решения задачи дискретной оптимизации

$$\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0)) =$$
$$= \Big\{ u^{(e)}(\cdot) | u^{(e)}(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0,T}), \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}(\overline{0,T})} \max_{w(\cdot)\in\mathbf{W}(\overline{0,T})} \Phi(x_0, u(\cdot), w(\cdot)) =$$
$$= \min_{j\in\overline{1,N}} \tilde{\Phi}^{(j)} = \Phi^{(e)} \Big\}.$$

Из результатов [6–9] следует, что сформированное множество допустимых программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$ есть множество всех минимаксных программных управлений, являющихся решением рассматриваемой задачи.

5. Численный пример решения задачи

Продемонстрируем эффективность предлагаемого метода решения задачи на численном примере, в котором моделируется решение задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ третьей ступени РН [11, 12].

Исходная нелинейная система описывается на промежутке времени $[\tau_0, \tau_f]$ уравнениями (1)–(6), значения параметров которых приведены в табл. 1.

В соответствие исходной нелинейной модели поставлена сформированная линейная система, полученная посредством линеаризации вдоль опорной траектории, описываемой уравнениями (7), и последующей дискретизации. Предполагается, что допустимые моменты выбора (переключения) управляющего воздействия в исходной нелинейной системе (1)–(6) совпадают с целочисленными значениями промежутка $\overline{0, T-1}$. Таким образом, система векторно-матричных линейных рекуррентных соотношений, описывающая динамику системы, соответствует уравнениям (8), (9) и имеет вид

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)w(t), \ t \in \overline{0,3},$$

где $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\} \in \mathbb{R}^4$; $x_1(t)$ — массовый расход окислителя; $x_2(t)$ — масса окислителя в баке; $x_3(t)$ — массовый расход горючего; $x_4(t)$ — масса горючего в баке; $x(0) = x_0 = (1182{,}074;\ 119560;\ 459{,}832;\ 45260)^\top$;

Таблица 1. Значения параметров нелинейной системы

I, с	P, кгс	K	$M_o^{\text{ном}}$, кг	$M_f^{\text{ном}}$, кг	ΔM_o, кг	ΔM_f, кг	ΔK
320	528000	8/3	120000	45000	−440	260	−12/125
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	τ_0, с	τ_f, с
8	1/75	−6700	9000	−15	−12	0	100

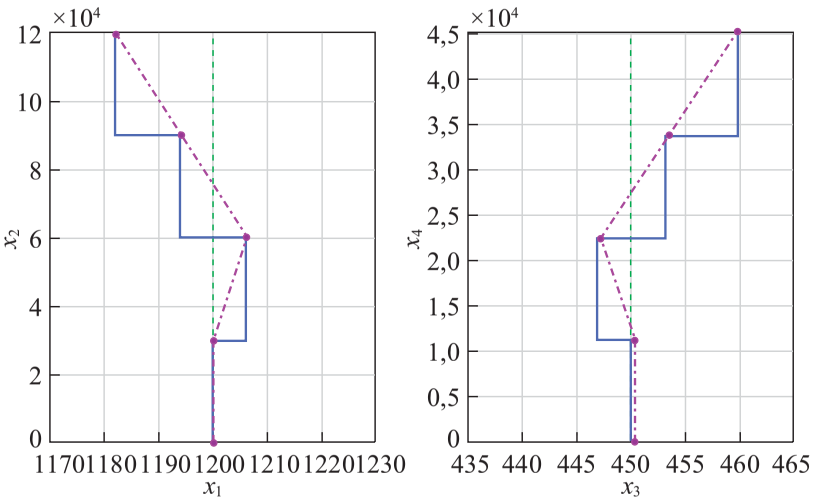
- Проекция опорной траектории
- Проекция траектории аппроксимирующей системы при $u^{(e)}(\cdot)$ и $w(t) = 0$, $\forall t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- Проекция траектории исходной системы при $u^{(e)}(\cdot)$

Минимаксная последовательность управлений:
0.6 0.6 –0.3 0

Гарантированное значение: 56,433

Финальное состояние в нелинейной системе:
$x_1 = 1200{,}136$ кг/с
$x_2 = -2{,}294$ кг
$x_3 = 450{,}406$ кг/с
$x_4 = -16{,}254$ кг/с

Значение функционала: 14,048



Проекции фазовых траекторий для решения задачи: штриховая линия — проекция опорной траектории; штрихпунктирная линия — проекция траектории аппроксимирующей системы; сплошная линия — проекция траектории исходной системы.

$u(t) \in \mathbb{R}^1$ — скалярное управляющее воздействие, принимающее свои значения на конечном множестве $\mathbf{U}_1(t) = \{0{,}6;\ 0{,}3;\ 0;\ -0{,}3;\ -0{,}6\}\ \forall t \in \overline{0,3}$ и соответствующее дискретным положениям вала привода дросселя; $w(t) \in \in \mathbf{W}_1(t) \subset \mathbb{R}^2$ — погрешность формирования модели, причем элементы ограничивающего множества $\mathbf{W}_1(t)$ принимают значения согласно неравенствам

$$-0{,}1 - 0{,}1t \leqslant w_1(t) \leqslant 0{,}1 + 0{,}1t,$$
$$-0{,}1 - 0{,}3t \leqslant w_2(t) \leqslant 0{,}1 + 0{,}3t.$$

Матрицы $A(t), B(t)$ и $D(t)$ в аппроксимирующей системе принимают значения:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 1 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} 20{,}073 \\ 0 \\ -10{,}473 \\ 0 \end{pmatrix},\ D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \overline{0,3}.$$

Качество процесса управления в данной задаче оценивается значением выпуклого терминального функционала в финальный момент времени $T = 4$:

$$F(x(T)) = \sqrt{(x_1(T) - 1200)^2 + (x_2(T))^2 + (x_3(T) - 450)^2 + (x_4(T))^2},$$

обозначающее расстояние (евклидова норма) от финального состояния $x(T)$ до номинального (желаемого) финального состояния $x_d = (1200;\ 0;\ 450;\ 0)^\top$.

В соответствии с описанным выше методом решения задачи для конечных множеств $\mathbf{U}_1(t)$, описывающих множества всех допустимых значений управляющего воздействия в моменты времени t, было сформировано упорядоченное множество $\mathbf{U}(\overline{0,T}) = \{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1,N}}$, состоящее из $N = 5^T = 625$ допустимых программных управлений. Для каждого допустимого программного управления $\{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1,625}}$ были построены соответствующие обобщенные области достижимости (18) посредством модификации общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости [12] (см. рисунок), и каждая из сформированных областей достижимости после вычисления ее фасетного описания использовалась в качестве линейных ограничений при решении задачи оптимизации (максимизации) вида (21). В результате решения этой задачи максимизации был сформирован конечный набор числовых значений $\tilde{\Phi}^{(j)} = \Phi(x_0, u^{(j)}(\cdot), w^{(e)}(\cdot)),\ j \in \overline{1,625}$, — наихудших значений функционала качества, соответствующих множеству всех допустимых программных управлений $\{u^{(j)}(t)\}_{j \in \overline{1,625}}$. В результате проделанных вычислений было найдено итоговое множество программных минимаксных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$, которое состоит из единственного допустимого программного управления $u^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0,3}} = \{0{,}6;\ 0{,}6;\ -0{,}3;\ 0\}$, гарантирующего результат решения задачи не хуже, чем $\Phi^{(e)} = 67{,}12$, т.е. выполнение условия (16).

На рисунке представлены проекции фазовых траекторий исходной системы (1)–(6) и аппроксимирующей линейной дискретной системы (10), порожденные найденным минимаксным программным управлением $u^{(e)}(\cdot)$. При использовании этого управления $u^{(e)}(\cdot)$ в исходной нелинейной системе (1)–(6)

Таблица 2. Результаты решения задачи минимаксного программного управления

	Управление	$x_1(T)$, кг/с	$x_2(T)$, кг	$x_3(T)$, кг/с	$x_4(T)$, кг	$F(x(T))$
Опорная траектория	$u(t) \equiv 0$	1200	0	450	0	**0**
Исходная система	$u^{(e)}(\cdot)$	1200,14	−2,29	450,41	−16,25	**14,05**
Линейная система	$u^{(e)}(\cdot)$	1201,14	−27,29	452,61	−61,25	**67,12**

финальное фазовое состояние приняло значение $x(\tau_1) = (1200{,}139;\ -2{,}294;\ 450{,}406;\ -16{,}254)^\top$, в котором функционал (15), оценивающий качество процесса управления в исходной нелинейной системе, принял значение $F(x(\tau_1)) = 14{,}048$. Отрицательные значения масс окислителя и горючего (вторая и четвертая компоненты вектора $x(\tau_1)$) не противоречат физическому смыслу и могут трактоваться как количества (массы) компонентов топлива, которые потребуется взять из гарантийных запасов, которые всегда резервируются в топливных баках любой РН для компенсации возмущений и помех [1, 14].

В табл. 2 сведены результаты применения найденного управления к нелинейной системе и результаты для наихудшего случая в линейной аппроксимирующей системе.

Численное моделирование решения модельной задачи проводилось в программной среде MATLAB R2014a на персональном компьютере с процессором Intel©Core i7-3770 CPU @ 3,4 GHz, с оперативной памятью 8 Gb и с видеокартой NVIDIA GeForce GT 730. Время решения задачи составило 37 с. Из результатов компьютерного моделирования можно сделать вывод, что сформированное множество минимаксных программных управлений $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0,T}, x(0))$ при его использовании для управления процессом расхода топлива ДУ третьей ступени жидкостных РН на основе уравнения динамики исходной нелинейной системы обеспечивает гарантированный (минимаксный) результат не хуже, чем результат управления в соответствующей аппроксимирующей линейной дискретной системе при возможных наихудших реализациях возмущений (погрешностей аппроксимации).

6. Заключение

В статье приведено описание нелинейной динамической системы, описывающей динамику расхода топлива жидкостных ДУ РН. Задача оптимизации управления расходом топлива ДУ РН сформулирована как задача минимаксного программного терминального управления линейной дискретной динамической системой с выпуклым функционалом качества, соответствующей исходной нелинейной динамической системе. В статье подробно описан предлагаемый метод решения задачи минимаксного программного терминального управления расходом топлива ДУ РН.

Сформулированная многошаговая минимаксная задача решается путем реализации конечной последовательности только одношаговых оптимизационных операций. На основе описанного метода решения рассматриваемой задачи был разработан численный алгоритм и получены численные результаты

компьютерного моделирования решения задачи для математической модели работы ДУ третьих ступеней РН.

Результаты компьютерного моделирования показывают эффективность общего рекуррентного алгебраического метода [6–9] для решения рассматриваемой задачи и позволяют сделать вывод о применимости алгоритмов минимаксного программного терминального управления в задачах управления реальной ДУ РН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров Б.Н.* Избранные труды. Т. 2. Управление авиационными и космическими аппаратами. М.: Наука, 1983.
2. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Мартынов А.И.* Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом. М.: Наука, 1968.
3. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
7. *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы / Негладкие задачи оптимизации и управление. 1988. С. 55–61.
8. *Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // АиТ. 1993. № 4. С. 115–127.

   Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. Algorithm for Solving Terminal Control Problems for a Linear Discrete System // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 4. Part 2. P. 632–643.
9. *Шориков А.Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах / Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы. Сб. научн. тр. Урал. гос. экон. ун-та. 2005. С. 119–138.
10. *Шориков А.Ф., Тюлюкин В.А.* Описание библиотеки компьютерных программ для моделирования решения задачи апостериорного минимаксного оценивания // Изв. Уральск. гос. экон. ун-та. 1999. № 2. С. 36–49.
11. *Шориков А.Ф., Калев В.И.* Формирование линейной дискретной динамической модели для решения задачи оптимального терминального управления расходом топлива ракеты-носителя // Информационные технологии и системы. Тр. 5-й Междунар. науч. конф. 2016. С. 61–66.
12. *Шориков А.Ф., Булаев В.В., Горанов А.Ю., Калев В.И.* Аппроксимация областей достижимости нелинейных дискретных управляемых динамических систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2018. № 1. С. 52–65.
13. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
14. *Челомей В.Н.* Пневмогидравлические системы двигательных установок с жидкостными ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978.

15. *Бастраков С.И., Золотых Н.Ю.* Использование идей алгоритма Quickhull в методе двойного описания // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 232–237.

16. *Fukuda K., Prodon P.* Double Description Method Revisited // Lect. Notes in Comput. Sci. 1996. V. 1120. P. 91–111.

17. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений. М.: Изд-во ин. лит., 1963.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 07.04.2019

После доработки 10.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019

Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Управление в технических системах

© 2020 г. **А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук (a.tikhonov@spbu.ru)**
(Санкт-Петербургский государственный университет;
Санкт-Петербургский горный университет)

МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ[1]

Рассматривается проблема стабилизации электродинамической тросовой системы (ЭДТС) на круговой околоземной орбите в положении, когда трос вытянут вдоль местной вертикали. Для решения этой задачи предложена оригинальная схема построения ЭДТС, включающая отрицательно заряженный коллектор на нижнем конце троса и положительно заряженный коллектор на верхнем конце троса. Величина заряда на отрицательно заряженном коллекторе контролируется электронными эмиттерами. Аналитически и численно показано, что момент сил Лоренца, действующий на ЭДТС благодаря заряженным коллекторам на концах троса, значительно расширяет область устойчивости вертикального положения троса. Кроме того, управление зарядом на отрицательно заряженном коллекторе в соответствии с текущим угловым движением троса позволяет создать такую управляющую составляющую лоренцева момента, которая имеет диссипативный характер. Одновременная работа восстанавливающих и диссипативно-подобных составляющих управляющего лоренцева момента позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость вертикального положения троса без необходимости отключать электрический ток, протекающий вдоль троса. Предложенный метод управления может быть использован для стабилизации ЭДТС с целью повышения эффективности ее работы по удалению космического мусора.

Ключевые слова: электродинамическая тросовая система, стабилизация, геомагнитное поле, лоренцев момент, электродинамическое управление.

DOI: 10.31857/S0005231020020075

1. Введение

Среди разнообразия космических тросовых систем [1, 2] принято выделять в отдельную категорию системы с тросами, проводящими электрический ток. Ток, протекающий по изолированному тросу, следует рассматривать как ток, протекающий по псевдоцепи, включающей околоземную плазму и замыкающейся через ионосферные токи, текущие вдоль силовых линий геомагнитного поля [1]. В результате взаимодействия тока с геомагнитным полем возбуждаются амперовы и лоренцевы силы, оказывающие влияние на динамику проводящего троса [1]. Поэтому космические системы с проводящими тросами

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00672-а).

называют электродинамическими тросовыми системами (ЭДТС). В настоящее время ЭДТС рассматриваются как весьма перспективные для решения ряда задач по освоению космического пространства [3, 4]. В частности, активно исследуются возможности использования ЭДТС для удаления с орбиты отработавших искусственных спутников Земли (ИСЗ) или для уборки космического мусора. В этом случае трос используется как электродинамический тормоз орбитального движения, работающий на основе тормозящего влияния амперовых сил [5–13]. При этом наибольшей эффективностью отличается проводящий трос, функционирующий в режиме проводника с током, ориентированного в околоземном пространстве по местной вертикали [1, 5, 14]. Данная ориентация троса является устойчивой в центральном ньютоновском гравитационном поле [1, 15]. Вместе с тем, установлено, что под действием момента сил Ампера вертикальная ориентация троса разрушается [1, 16]. Проблема неустойчивости ЭДТС известна [10, 14, 17]. Решению этой проблемы посвящен ряд работ [13, 18, 19]. Среди возможных подходов к ее решению наиболее известным является подход, предлагающий использование тех или иных вариантов управления силой тока, протекающего по тросу [14, 18, 20], включая периодическое прерывание тока или изменение его направления. Однако в большинстве случаев ЭДТС должна функционировать в условиях, предполагающих непрерывное протекание тока вдоль троса в одном направлении, например для создания упомянутой выше силы тяги с целью удаления космического мусора или для работы ЭДТС в режиме генератора мощности. Поэтому периодическое выключение тока, протекающего по тросу, или переключение направления тока снижает эффективность ЭДТС и ограничивает возможности их использования.

В данной работе рассматривается принципиально другой способ обеспечения вертикального положения проводящего троса, основанный не на управлении силой тока, протекающего по тросу, а на разделении разноименных зарядов по концам троса и использовании момента лоренцевых сил [21, 22], влияние которого при определенных условиях является ориентирующим [23–30]. В [31] показано, что лоренцев момент может быть использован в качестве восстанавливающей составляющей управляющего момента в системе стабилизации проводящего троса в околоземном пространстве вдоль местной вертикали. При этом усложнение конструкции ЭДТС не является существенным, поскольку не предполагает введения в ее состав принципиально новых устройств по сравнению с теми, которые обычно используются в ЭДТС.

Если же дополнительно ввести в состав ЭДТС блок управления, позволяющий измерять текущее отклонение троса от вертикали и скорость изменения угла отклонения, а также управлять электронным эмиттером, установленным на отрицательно заряженном коллекторе ЭДТС, изменяя заряд этого коллектора в соответствии с данными измерений, то можно, как установлено в данной работе, создать дополнительный момент диссипативного характера [32]. Показано, что несмотря на неполную диссипацию, создаваемую предложенным устройством, одновременное включение восстанавливающего и диссипативного моментов позволяет решить задачу стабилизации ЭДТС в вертикальном положении.

2. Конструкция троса

Конструктивная схема рассматриваемого электродинамического троса показана на рис. 1.

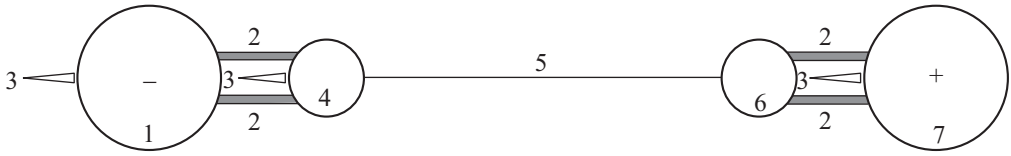


Рис. 1. Конструктивная схема электродинамического троса.

Поверхность 1, находящаяся на нижнем конце троса (ближе к Земле) получает отрицательный заряд, поддерживаемый электронным эмиттером 3 (например, холловским ионным источником) со стороны концевого тела 4. Аналогичные электронные эмиттеры 3, установленные на поверхности 1, позволяют управлять величиной заряда на поверхности 1, сбрасывая часть заряда с поверхности 1 в окружающее пространство. С помощью электроизолирующих креплений 2 поверхность 1 соединена с концевым телом 4 проводящего троса 5. На противоположном конце троса тело 6 аналогичным образом соединено с положительно заряженной поверхностью 7. Положительный заряд на поверхности 7 поддерживается с помощью электронного эмиттера 3, передающего отрицательный заряд на концевое тело 6.

3. Постановка задачи

Рассматривается электроизолированный проводящий трос, вдоль которого течет ток. Трос находится на околоземной круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли и функционирует в режиме, близком к состоянию обычного тяжелого троса, находящегося в натянутом состоянии вдоль местной вертикали благодаря градиенту гравитационного поля Земли (рис. 2).

Далее будем называть этот режим движения троса номинальным. В номинальном режиме работы ЭДТС, предназначенной для торможения космического объекта, направление силы тока совпадает с направлением оси Cz

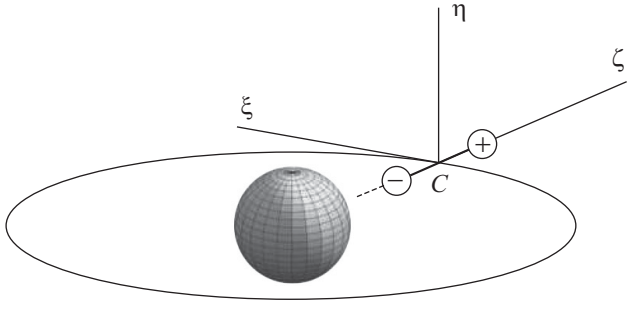


Рис. 2. Орбитальная система координат.

натянутого троса, а ось Cz коллинеарна оси $C\zeta$, направленной вдоль радиуса-вектора $\vec{R} = \overrightarrow{O_E C} = R\vec{\zeta}_0$ центра масс троса относительно центра Земли O_E. В ограниченной спутниковой постановке задачи орбита точки C предполагается круговой и лежащей в плоскости геомагнитного экватора. Оси $C\xi$ и $C\eta$, направленные соответственно по касательной к орбите в сторону движения точки C и по нормали к плоскости орбиты, образуют вместе с осью $C\zeta$ орбитальную систему координат $C\xi\eta\zeta$. В инерциальном пространстве орбитальная система координат поворачивается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{\eta}_0$.

К концам троса присоединены устройства для сбора электрических зарядов. Пренебрегая их размерами по сравнению с длиной троса и считая трос натянутым, будем моделировать систему тонким прямолинейным тросом с массой m_0 и с точечными массами m_1 и m_2 на концах и для краткости называть ее связкой. Координаты масс m_k обозначим через z_k $(k = 1, 2)$. Координаты центров зарядов q_k также будем считать совпадающими с z_k. Поскольку координата центра масс ЭДТС

$$z_C = \frac{1}{m_0 + m_1 + m_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} z\, dm = \frac{m_0(z_1 + z_2) + 2m_1 z_1 + 2m_2 z_2}{2(m_0 + m_1 + m_2)}$$

равна нулю в силу выбора начала координат, то с учетом равенства $z_2 - z_1 = l$, где l – длина троса, получаем

$$z_1 = -\frac{l(m_0 + 2m_2)}{2(m_0 + m_1 + m_2)}, \quad z_2 = \frac{l(m_0 + 2m_1)}{2(m_0 + m_1 + m_2)}. \tag{1}$$

Сформулированная постановка задачи является максимально упрощенной с целью выполнения предварительного аналитического исследования, рассчитанного в первую очередь на апробацию нового метода стабилизации ЭДТС, а не на всесторонний учет разнообразных динамических факторов, усложняющих функционирование системы, но не изменяющих принципа ее работы.

4. Силы натяжения троса

Рассматриваемая конструктивная схема ЭДТС предполагает наличие разноименно заряженных коллекторов на концах связки и соответствующих сил кулонова притяжения коллекторов. Поэтому анализ вопроса о реализуемости принятой модели ЭДТС в виде связки, пребывающей в натянутом состоянии, является необходимым пунктом исследования, обсуждаемым в данном разделе.

Отличие рассматриваемого троса от обычного тяжелого троса, находящегося в натянутом состоянии вдоль местной вертикали благодаря градиенту гравитационного поля Земли, заключается в наличии лоренцевых и кулоновых сил, действующих на заряженные коллекторы, а также в наличии амперовых сил, распределенных по всей длине троса. В номинальном режиме движения связки сила Ампера ортогональна к тросу, а силами, определяющими натяжение троса, являются гравитационные, лоренцевы и кулоновы

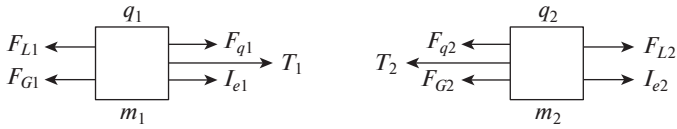


Рис. 3. Силы, действующие на концевые тела тросовой системы.

силы. Рассмотрим вопрос о силе натяжения троса и ее наибольшем значении, предполагая, что трос находится в номинальном движении (ось Cz троса совпадает с осью $C\zeta$ местной вертикали), а геомагнитное поле моделируется прямым магнитным диполем [15] с магнитной индукцией $\vec{B} = -g_1^0(R_E/r)^3\vec{\eta}_0$, где $g_1^0 = -29556{,}8$ нТл — гауссов коэффициент, R_E — средний радиус Земли, r — расстояние от центра Земли до данной точки пространства. В этом случае расстояния от центра Земли до концевых масс m_1 и m_2 соответственно равны

$$R_1 = R + z_1, \quad R_2 = R + z_2. \tag{2}$$

Скорости концевых точек, находящихся на расстояниях R_k от центра Земли и обладающих зарядами q_k, вычисленные в движении относительно геомагнитного поля, равны $\vec{v}_k = R_k(\omega_0 - \omega_E)\,\vec{\xi}_0$. Поскольку эти скорости ортогональны вектору $\vec{B}$, то лоренцевы силы $\vec{F}_{Lk} = q_k\vec{v}_k \times \vec{B}_k$, действующие на коллекторы с зарядами q_k, направлены вдоль троса. Здесь $\vec{B}_k = \vec{B}(\vec{R}_k)$ $(k = 1, 2)$. Также вдоль троса направлены гравитационные силы $F_{Gk} = \frac{\mu m_k}{R_k^2}$, где μ — гравитационная постоянная Земли, кулоновы силы $F_{qk} = \frac{k_0 q_1 q_2}{(R_2 - R_1)^2}$, $k_0 = 9{,}0 \cdot 10^9$ — постоянная закона Кулона, переносные силы инерции I_{ek}, действующие на концевые массы и заряды, и силы натяжения троса T_k $(k = 1, 2)$, приложенные к концевым точкам (рис. 3).

В равновесном положении концевых точек имеют место следующие равенства проекций активных сил и переносных сил инерции на местную вертикаль:

$$T_1 + F_{q1} + m_1\omega_0^2 R_1 - \frac{\mu m_1}{R_1^2} - |q_1|v_1 B_1 = 0,$$
$$-T_2 - F_{q2} - \frac{\mu m_2}{R_2^2} + m_2\omega_0^2 R_2 + q_2 v_2 B_2 = 0.$$

Отсюда находим силы натяжения троса, приложенные к концевым точкам:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1\left(\frac{\mu}{R_1^2} - \omega_0^2 R_1\right) + |q_1|v_1 B_1 - F_{q1}, \\ T_2 &= m_2\left(\omega_0^2 R_2 - \frac{\mu}{R_2^2}\right) + q_2 v_2 B_2 - F_{q2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для отыскания натяжения троса в произвольной его точке рассмотрим бесконечно малый элемент троса длиной dr и массой dm_0. Силы, действующие на этот элемент, показаны на рис. 4.

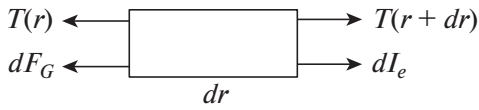


Рис. 4. Силы, действующие на элемент троса.

Здесь $dF_G = \frac{\mu\, dm_0}{r^2}$, $dI_e = \omega_0^2 r\, dm_0$, $dm_0 = \gamma dr$, $\gamma = \frac{m_0}{l}$ — постоянная линейная плотность троса. Из условий равновесия элемента троса получаем уравнение

$$T(r+dr) - T(r) + dI_e - dF_G = 0.$$

Отсюда

$$dT(r) = \left(\frac{\mu}{r^2} - \omega_0^2 r\right)\gamma\, dr.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$T(r) = \gamma\left(-\frac{\mu}{r} - \frac{\omega_0^2 r^2}{2}\right) + \text{const}, \tag{4}$$

причем постоянная интегрирования может быть найдена с помощью любого из равенств (3), задающих натяжение троса на концах. Воспользовавшись первым из равенств (3), получим

$$\begin{aligned} T(r) = \gamma\left(-\frac{\mu}{r} - \frac{\omega_0^2 r^2}{2}\right) + \gamma\left(\frac{\mu}{R_1} + \frac{\omega_0^2 R_1^2}{2}\right) + \\ + m_1\left(\frac{\mu}{R_1^2} - \omega_0^2 R_1\right) + |q_1|\, v_1 B_1 - F_{q1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку $\frac{d^2T(r)}{dr^2} = \gamma\left(-\frac{2\mu}{r^3} - \omega_0^2\right) < 0$, то $T(r)$ достигает максимума при $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}$. Но $\omega_0 = \text{const}$. Поэтому последнее равенство достигается при некотором конкретном значении $r = R_0$. На основании (5) имеем

$$\begin{aligned} T(r)_{\max} = T(R_0) = \frac{\gamma\mu}{R_0}\left(-\frac{3}{2} + \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right) + \\ + \frac{\mu m_1}{R_0^2}\left(\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 - \frac{R_1}{R_0}\right) + \\ + |q_1|\left(\sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} - \omega_E\right)(-g_1^0)\frac{R_E^3}{R_1^2} - \frac{k_0|q_1|q_2}{(R_2 - R_1)^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для отыскания величины R_0, входящей в (6), составим уравнение равновесия сил, растягивающих трос, в точке $r = R_0$. Поскольку кулоновы силы, приложенные к концевым точкам, равны по величине и противоположны по

направлению, то в точке O уравновешиваются гравитационные, лоренцевы силы и силы инерции. Следовательно,

$$\omega_0^2\left(m_1R_1+m_2R_2+\int\limits_{R_1}^{R_2}\gamma r\,dr\right)-\mu\left(\frac{m_1}{R_1^2}+\frac{m_2}{R_2^2}+\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\gamma\,dr}{r^2}\right)+F_{L2}-F_{L1}=0.$$

После интегрирования и подстановки явных выражений для лоренцевых сил получаем следующее квадратное уравнение относительно ω_0:

$$\begin{aligned}(7)\quad &\omega_0^2\left(m_1R_1+m_2R_2+\frac{1}{2}m_0(R_1+R_2)\right)+\\ &+(\omega_0-\omega_E)(q_2R_2B(R_2)-|q_1|R_1B(R_1))-\mu\left(\frac{m_1}{R_1^2}+\frac{m_2}{R_2^2}+\frac{m_0}{R_1R_2}\right)=0.\end{aligned}$$

Решив это уравнение, найдем угловую скорость обращения радиуса-вектора $\vec{R}_0$ точки O, которую можно назвать центром, движущимся по орбите, или орбитальным центром [33]. В рассматриваемой постановке задачи $B(R_1)=-g_1^0\frac{R_E^3}{R_1^3}$, $B(R_2)=-g_1^0\frac{R_E^3}{R_2^3}$ и уравнение (7) принимает вид

$$\begin{aligned}(8)\quad &\omega_0^2\left(m_1R_1+m_2R_2+\frac{1}{2}m_0(R_1+R_2)\right)+\omega_0(-g_1^0)R_E^3\left(\frac{q_2}{R_2^2}-\frac{|q_1|}{R_1^2}\right)-\\ &-\omega_E(-g_1^0)R_E^3\left(\frac{q_2}{R_2^2}-\frac{|q_1|}{R_1^2}\right)-\mu\left(\frac{m_1}{R_1^2}+\frac{m_2}{R_2^2}+\frac{m_0}{R_1R_2}\right)=0.\end{aligned}$$

После отыскания ω_0, вычисляем R_0 и подставляем в (6).

Пример 1. Рассматривается связка с тросом длиной $l=2\cdot10^4$ м и погонной плотностью $\gamma=2\cdot10^{-3}$ кг/м, с концевыми массами $m_1=10^4$ кг, $m_2=$ $=1{,}02\cdot10^4$ кг, концевыми зарядами $q_1=-10^{-3}$ Кл, $q_2=10^{-3}$ Кл. Центр масс системы движется по круговой околоземной орбите с радиусом $R=7\cdot10^6$ м. На основании формул (1), (2) находим $R_1=6{,}990098814\cdot10^6$ м, $R_2=$ $=7{,}010098814\cdot10^6$ м. Из уравнения (8) находим $\omega_0=1{,}078014368\cdot10^{-3}$ с$^{-1}$ и затем по формуле $R_0=(\mu/\omega_0^2)^{1/3}$ получаем $R_0=6{,}999985732\cdot10^6$ м. Подстановка этого значения в формулу (6) позволяет найти $T_{\max}=352{,}425$ Н. Наконец, по формулам (3) находим натяжения тросов на концах: $T_1=352{,}084$ Н, $T_2=352{,}069$ Н.

С учетом сказанного в начале данного раздела полученные результаты следует рассматривать не только как оценочные сверху для сил натяжения троса, но и свидетельствующие о реализуемости модели натянутой связки при выбранных параметрах ЭДТС.

5. Уравнения вращательного движения связки

Как уже упоминалось выше в разделе 3, ЭДТС в развернутом состоянии моделируется тонкой нитью с точечными массами на концах и для краткости

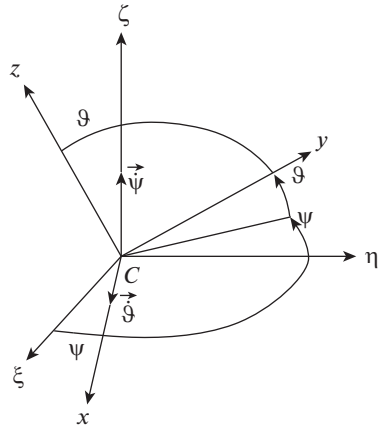


Рис. 5. Сопутствующая система координат.

называется связкой. Нить не оказывает сопротивления деформациям сжатия. В рабочем состоянии нить остается натянутой во все время движения. При этом она сохраняет прямолинейную форму и считается нерастяжимой. В системе главных центральных осей инерции $C\tilde{x}\tilde{y}z$ (орты $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$) тензор инерции связки имеет вид $J = \mathrm{diag}\,(A, A, C_0)$, где

$$A = \frac{m_0}{3}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) + m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2,$$

а C_0 пренебрежимо мало по сравнению с A.

Поскольку рассматривается симметричная относительно продольной оси конструкция троса, то для устранения неопределенности в выборе осей $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ представляется целесообразным ввести в рассмотрение сопутствующие оси (оси Резаля) $Cxyz$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, что ось Cz (с ортом $\vec{i}_3 = \vec{k}$), как и ранее, направлена вдоль натянутого троса, а трехгранник $Cxyz$ не участвует в повороте троса вокруг оси Cz на угол φ. Взаимную ориентацию осей систем координат $C\xi\eta\zeta$ и $Cxyz$ зададим с помощью матрицы направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

так, что

$$\vec{\xi}_0 = \alpha_1 \vec{i}_1 + \alpha_2 \vec{i}_2 + \alpha_3 \vec{i}_3, \quad \vec{\eta}_0 = \beta_1 \vec{i}_1 + \beta_2 \vec{i}_2 + \beta_3 \vec{i}_3, \quad \vec{\zeta}_0 = \gamma_1 \vec{i}_1 + \gamma_2 \vec{i}_2 + \gamma_3 \vec{i}_3.$$

Наряду с направляющими косинусами будем также использовать углы ϑ и ψ, однозначно определяющие положение сопутствующего трехгранника относительно орбитальной системы координат (рис. 5).

Зависимость элементов матрицы **A** от углов ϑ и ψ определяется равенствами

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = \cos\psi, \quad \alpha_2 = -\sin\psi\cos\vartheta, \quad \alpha_3 = \sin\psi\sin\vartheta,\\
&\beta_1 = \sin\psi, \quad \beta_2 = \cos\psi\cos\vartheta, \quad \beta_3 = -\cos\psi\sin\vartheta,\\
&\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sin\vartheta, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Кинематическими характеристиками вращательного движения связки являются: абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}$, угловая скорость сопутствующего трехгранника относительно орбитальной системы координат $\vec{\omega}_1 = p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$, угловая скорость связки относительно сопутствующего трехгранника $\dot{\varphi}\vec{k}$, угловая скорость связки относительно орбитальной системы координат $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_1 + \dot{\varphi}\vec{k}$.

Эти величины связаны соотношением $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0$, которое в проекциях на оси $Cxyz$ имеет вид

$$
\omega_x = p + \omega_0\beta_1, \quad \omega_y = q + \omega_0\beta_2, \quad \omega_z = r + \dot{\varphi} + \omega_0\beta_3. \tag{11}
$$

Кроме того, справедливы равенства

$$
p = \dot{\vartheta}, \quad q = \dot{\psi}\sin\vartheta, \quad r = \dot{\psi}\cos\vartheta. \tag{12}
$$

Оси Резаля остаются главными центральными осями инерции ЭДТС во все время движения. Поэтому динамические уравнения вращательного движения ЭДТС в проекциях на оси Резаля получим проектированием на x, y, z векторного уравнения

$$
\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{xyz} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_0) \times \vec{K} = \vec{M}, \tag{13}
$$

представляющего собой теорему об изменении кинетического момента $\vec{K} = A\omega_x\vec{i}+A\omega_y\vec{j}$ под действием главного момента $\vec{M}$ внешних сил относительно центра масс.

6. Моменты сил, действующих на связку

В центральном ньютоновском гравитационном поле на связку действует гравитационный момент $\vec{M}_G$ [15]. В данной задаче с учетом принятых обозначений проекции гравитационного момента на оси $Cxyz$ имеют вид

$$
M_{Gx} = 3\omega_0^2 A(-\gamma_2\gamma_3), \quad M_{Gy} = 3\omega_0^2 A\gamma_1\gamma_3, \quad M_{Gz} = 0. \tag{14}
$$

Для вычисления главного момента сил Лоренца, действующих на заряды q_1 и q_2 в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, воспользуемся простейшей аппроксимацией этого момента [22], учитывающей точечный характер зарядов:

$$
\vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T}. \tag{15}
$$

$\vec{P} = (q_1 z_1 + q_2 z_2)\,\vec{k}$, $\vec{T} = \mathbf{A}^\top(\vec{v}_C \times \vec{B})$, $\vec{v}_C = R(\omega_0 - \omega_E)\,\vec{\xi}_0$, где $\vec{\omega}_E$ — угловая скорость суточного вращения Земли. В условиях моделирования геомагнитного поля прямым магнитным диполем $\vec{B} = -g_1^0 (R_E/R)^3 \vec{\eta}_0$, где $g_1^0 = -29556{,}8$ нТл — гауссов коэффициент, R_E — средний радиус Земли. Поэтому

$$
\begin{aligned}
&M_{Lx} = R_E^3 R^{-2} g_1^0 (\omega_0 - \omega_E)(q_1 z_1 + q_2 z_2)\gamma_2,\\
&M_{Ly} = -R_E^3 R^{-2} g_1^0 (\omega_0 - \omega_E)(q_1 z_1 + q_2 z_2)\gamma_1, \quad M_{Lz} = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Главный момент сил Ампера вычислим по формуле [1]

$$
\vec{M}_A = \int\limits_{z_1}^{z_2} \vec{\rho} \times (I\vec{k} \times \vec{B})\, dz,
\tag{17}
$$

где $\vec{\rho}$ — радиус-вектор, проведенный из точки C в точку троса с текущей координатой z, I — величина силы тока в проводнике. Принимая $I = \mathrm{const}$, в результате интегрирования (17) получаем

$$
\begin{aligned}
&M_{Ax} = \frac{1}{2} I g_1^0 (R_E/R)^3 (z_2^2 - z_1^2)\beta_1,\\
&M_{Ay} = \frac{1}{2} I g_1^0 (R_E/R)^3 (z_2^2 - z_1^2)\beta_2, \quad M_{Az} = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

7. ЭДТС без системы управления

7.1. Положения равновесия связки

В качестве дифференциальных уравнений вращательного движения связки относительно центра масс будем использовать динамические уравнения Эйлера, вытекающие из (13),

$$
\begin{cases}
A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = M_{Gx} + M_{Lx} + M_{Ax},\\
A\dot{\omega}_y + A\omega_z\omega_x = M_{Gy} + M_{Ly} + M_{Ay},\\
\omega_z = \omega_{z0} = \mathrm{const}
\end{cases}
\tag{19}
$$

и кинематические уравнения Пуассона

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_1 + \omega_y\alpha_3 - \omega_z\alpha_2 = -\omega_0\gamma_1,\\
&\dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \qquad \left(\begin{smallmatrix} x\to y\to z\\ 1\to 2\to 3\end{smallmatrix}\right)\\
&\dot{\gamma}_1 + \omega_y\gamma_3 - \omega_z\gamma_2 = \omega_0\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для отыскания равновесных положений связки в орбитальной системе координат будем рассматривать направляющие косинусы как неизвестные постоянные величины, а проекции относительной угловой скорости p, q, r будем

полагать равными нулю в уравнениях (11), (19), (20). Динамические уравнения примут вид

$$
(21)\qquad \begin{cases} A\omega_0^2\beta_2\beta_3 = 3\omega_0^2 A\gamma_2\gamma_3 - \dfrac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2)\gamma_2 - \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\beta_1, \\ A\omega_0^2\beta_1\beta_3 = 3\omega_0^2 A\gamma_1\gamma_3 - \dfrac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2)\gamma_1 + \\ \qquad\qquad + \dfrac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\beta_2. \end{cases}
$$

Из (20), (21) следует, что номинальный режим движения связки, соответствующий значению $\gamma_3 = 1$, имеет место лишь при условии

$$
(22)\qquad z_1^2 = z_2^2.
$$

В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Ввиду однородности троса условие (22) выполняется при $z_1 = -z_2$, $m_1 = m_2$. В этом случае $A = (m_0/3 + 2m_2)z_2^2$.

Для решения вопроса о существовании других возможных положений равновесия связки в орбитальной системе координат перейдем в уравнениях (21) от направляющих косинусов к углам ϑ и ψ (рис. 5) по формулам (10). Получим систему уравнений

$$
(23)\qquad \begin{aligned} A\omega_0^2\sin\vartheta\sin\psi\cos\psi &= -\frac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\cos\psi\cos\vartheta, \\ A\omega_0^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\psi &= \frac{Ig_1^0R_E^3}{2R^3}(z_2^2-z_1^2)\sin\psi - -3A\omega_0^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \\ &\quad + \frac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2)\sin\vartheta. \end{aligned}
$$

Из (23) следует, что кроме номинального режима движения $\vartheta = 0$, теоретически возможны также и другие ("наклонные") положения равновесия связки в орбитальной системе координат, определяемые из условий:

$$
(24)\quad 1)\,\sin\psi = 0,\ 4A\omega_0^2\cos\vartheta_1 = -L, \quad \text{или} \quad 2)\,\cos\psi = 0,\ 3A\omega_0^2\cos\vartheta_2 = -L,
$$

где

$$
L = -\frac{R_E^3}{R^2}g_1^0(\omega_0-\omega_E)(q_1z_1+q_2z_2).
$$

Поскольку $L > 0$, то возможным "наклонным" положениям равновесия связки могут отвечать лишь значения ϑ_1 и ϑ_2 из промежутка $(\pi/2, \pi)$. Эти положения соответствуют "перевернутому" состоянию троса (если при этом он может пребывать в натянутом состоянии), не обеспечивающему номинального режима функционирования ЭДТС, и поэтому не рассматриваются в рамках данной работы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости номинального режима движения связки. Для этого обратимся к исходным уравнениям Эйлера (19) и, вводя обозначение $a = Ig_1^0(R_E/R)^3(z_2^2 - z_1^2)/2$, перепишем первые два из них в виде

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = -3A\omega_0^2\gamma_2\gamma_3 - L\gamma_2 + a\beta_1, \\ A\dot{\omega}_y + A\omega_x\omega_z = 3A\omega_0^2\gamma_1\gamma_3 + L\gamma_1 + a\beta_2. \end{cases} \tag{25}$$

Несложно проверить, что имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2 - L\gamma_3 - A\omega_0(\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2)\right] = \\ = a(\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 - \omega_0(\beta_1^2 + \beta_2^2)),$$

где производная в левой части равенства вычисляется в силу (25). Переходя от абсолютных угловых скоростей ω_x, ω_y к относительным угловым скоростям p, q по формулам (11), перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(p^2 + q^2) - \frac{A}{2}\omega_0^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) - \frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2 - L\gamma_3\right] = a(p\beta_1 + q\beta_2).$$

Затем, вводя новую переменную $\Delta = 1 - \gamma_3$, представляющую собой отклонение связки от номинального режима движения $\gamma_3 = 1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\frac{d}{dt}\left[A(p^2 + q^2) + (3A\omega_0^2 + L)\alpha_3^2 + (4A\omega_0^2 + L)\beta_3^2 + L\Delta^2\right] = 2a(p\beta_1 + q\beta_2).$$

Отсюда следует, что если учесть условие (22), то $a = 0$ и получаем первый интеграл

$$V(\alpha_3, \beta_3, \Delta, p, q) = A(p^2 + q^2) + (3A\omega_0^2 + L)\alpha_3^2 + \\ + (4A\omega_0^2 + L)\beta_3^2 + L\Delta^2 = h = \text{const}. \tag{26}$$

Поскольку выбором $q_1z_1 + q_2z_2 > 0$ всегда можно обеспечить выполнение неравенства $L > 0$, то функция $V(\alpha_3, \beta_3, \Delta, p, q)$ будет положительно определенной. Принимая ее в качестве функции Ляпунова, приходим к выводу об устойчивости номинального режима движения связки по отклонениям $\alpha_3, \beta_3, \Delta$ и угловым скоростям p, q на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. Для оценки амплитуды возмущенных колебаний ЭДТС в окрестности устойчивого номинального режима движения имеем неравенства

$$\alpha_3^2 \leqslant h/(3A\omega_0^2 + L), \quad \beta_3^2 \leqslant h/(4A\omega_0^2 + L), \quad \Delta^2 \leqslant h/L, \tag{27}$$

вытекающие из (26). Из (27) следует, что при

$$h < L \tag{28}$$

положительно заряженный конец троса остается выше отрицательно заряженного конца троса, как и должно быть в номинальном режиме движения. Заметим что условие “непереворачиваемости” троса (28) накладывает ограничение $p^2 + q^2 < L/A$ на начальную угловую скорость связки. Заметим также, что увеличение параметра $L > 0$, обусловленного наличием лоренцева момента, расширяет область устойчивости номинального режима движения связки. Тем самым подтверждается стабилизирующий эффект лоренцева момента, возбуждаемого за счет зарядов на концах троса. Соответствующие результаты численного счета, иллюстрирующие этот вывод, приведены в [31].

Однако для решения задачи стабилизации номинального режима движения троса требуется обеспечить не только восстанавливающий, но и диссипативный момент. Рассмотрим возможности использования лоренцева момента для создания управляющего воздействия, имеющего диссипативный характер.

8. ЭДТС с системой управления

8.1. Синтез управляющего момента

Из (15) следует, что формирование управляющего лоренцева момента опирается на возможность создания управляемого вектора $\vec{P}$. Для модели линейного относительного угловой скорости диссипативного момента [34] задача может быть сведена к подбору такой неотрицательной диагональной матрицы $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$, для которой выполняется равенство $P_1\vec{k} \times \vec{T} = -\mathbf{D}\vec{\omega}_1$, эквивалентное системе

$$\begin{cases} P_1 T_y = D_1 \omega_{1x}, \\ P_1 T_x = -D_2 \omega_{1y}, \\ \quad 0 = D_3 \omega_{1z}. \end{cases} \tag{29}$$

Поскольку $T_x = 0$ в силу выбора системы координат xyz, то из (29) следует, что $D_2 = 0$ и остается только управление по каналу “x”, которое можно подобрать с помощью подходящего выбора D_1. Например, можно взять $D_1 = d_1|T_y|$, где $d_1 > 0$. Тогда

$$P_1 = d_1 \omega_{1x} \operatorname{sign}(T_y) = d_1 \omega_{1x} \operatorname{sign}(\sin\vartheta).$$

Принимая во внимание, что $\vec{P}_1$ имеет положительную проекцию на ось z (см. (15)), замечаем, что полученное выражение для P_1 имеет смысл лишь при $\omega_{1x} = \dot{\vartheta} > 0$. Поэтому можно предложить такое управление вектором $\vec{P}_1$:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = d_1 \dot{\vartheta} \operatorname{sign}(\sin\vartheta)\vec{k}, & \dot{\vartheta} > 0, \\ \vec{P}_1 = \mathbf{0}, & \dot{\vartheta} \leqslant 0. \end{cases} \tag{30}$$

Для доказательства работоспособности предложенного управления прежде всего следует решить вопрос о возможности реализации вектора $\vec{P}_1$ в соответствии с формулой (30). Будем рассматривать заряды q_1 и q_2 как содержащие постоянные части q_{10} и q_{20} и переменные (управляемые) $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$.

Тогда

$$\vec{P} = (q_{10}z_1 + q_{20}z_2)\vec{k} + (\tilde{q}_1 z_1 + \tilde{q}_2 z_2)\vec{k}.$$

Пусть $\vec{P}_1 = (\tilde{q}_1 z_1 + \tilde{q}_2 z_2)\vec{k}$. Вводя коэффициент k_q так, что $\tilde{q}_1 = -k_q\tilde{q}_2$, на основании (1) получим

$$\vec{P}_1 = \frac{l\tilde{q}_2(k_q(m_0 + 2m_2) + m_0 + 2m_1)\vec{k}}{2(m_0 + m_1 + m_2)}. \tag{31}$$

Приравнивая (30) и (31), получим следующий закон изменения k_q:

$$\begin{cases} k_q = \dfrac{1}{m_0 + 2m_2}\left[\dfrac{2d_1}{l\tilde{q}_2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{\vartheta}\operatorname{sign}(\sin\vartheta) - m_0 - 2m_1\right], & \dot{\vartheta} > 0, \\ k_q = -\dfrac{m_0 + 2m_1}{m_0 + 2m_2}, & \dot{\vartheta} \leqslant 0 \end{cases} \tag{32}$$

или, что то же,

$$k_q = \frac{1}{m_0 + 2m_2}\left[\frac{d_1}{l\tilde{q}_2}(m_0 + m_1 + m_2)(|\dot{\vartheta}| + \dot{\vartheta})\operatorname{sign}(\sin\vartheta) - m_0 - 2m_1\right] \leftrightharpoons \tilde{k}_q. \tag{33}$$

Из (32) следует, что в процессе колебаний ЭДТС коэффициент $k_q = k_q(\vartheta, \dot{\vartheta})$ может принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Поэтому во избежание ситуации, когда заряд нижнего коллектора $q_1 = -k_q\tilde{q}_2 + q_{10}$ должен будет стать положительным, следует потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) > \frac{q_{10}}{\tilde{q}_2} \leftrightharpoons k_{q\,\min}.$$

С другой стороны, заряд нижнего коллектора не должен быть слишком большим по модулю, чтобы не возникло риска “схлопывания” тросовой системы под действием сил кулонова притяжения. Поэтому исходя из априорных оценок величин зарядов ЭДТС, основанных на вычислении сил натяжения троса (формулы (3), (7)), следует выбрать некоторое допустимое значение $q_{1\,\min}$, чтобы затем на основании неравенства $q_{1\,\min} < q_1 = -k_q\tilde{q}_2 + q_{10}$ получить верхнюю границу для коэффициента k_q:

$$k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) < \frac{q_{10} - q_{1\,\min}}{\tilde{q}_2} \leftrightharpoons k_{q\,\max}.$$

Введем в рассмотрение функцию $S(\tilde{k}_q) = (\tilde{k}_q - k_{q\,\min})(\tilde{k}_q - k_{q\,\max})$. Тогда, если $S(\tilde{k}_q) < 0$, работает управление с функцией $\tilde{k}_q$. Если $S(\tilde{k}_q) > 0$, то нужно выбирать из двух вариантов: если $k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) < k_{q\,\min}$, следует взять

$$k_{q\,\min} = \frac{1}{2}k_{q\,\min}(1 - \operatorname{sign}(\tilde{k}_q - k_{q\,\min})),$$

если $k_q(\vartheta, \dot{\vartheta}) > k_{q\,\max}$, то следует взять

$$k_{q\,\max} = \frac{1}{2} k_{q\,\max}(1 - \operatorname{sign}(k_{q\,\max} - \tilde{k}_q)).$$

В результате получаем, что удовлетворяющее вышеуказанным требованиям выражение коэффициента k_q может быть кратко записано в виде

$$(34) \quad k_q = \frac{1}{2}\tilde{k}_q(1 - \operatorname{sign}(S(\tilde{k}_q))) + \frac{1}{4}(\operatorname{sign}(S(\tilde{k}_q)) + 1)\times \\ \times \left[k_{q\,\max}(1 - \operatorname{sign}(k_{q\,\max} - \tilde{k}_q)) + k_{q\,\min}(1 - \operatorname{sign}(\tilde{k}_q - k_{q\,\min}))\right].$$

Найденный закон изменения k_q позволяет получить управляющий момент

$$\vec{M}_{LD} = d_1 \dot{\vartheta} \operatorname{sign}(\sin\vartheta)\, \vec{k} \times \vec{T},$$

проекция которого на ось x равна

$$(35) \qquad M_{LDx} = -d_1 \dot{\vartheta} |\sin\vartheta| R_E^3 R^{-2}(-g_1^0)(\omega_0 - \omega_E),$$

где

$$(36) \qquad \begin{cases} d_1 > 0, & \dot{\vartheta} > 0, \\ d_1 = 0, & \dot{\vartheta} \leqslant 0. \end{cases}$$

Если ввести обозначение $D = d_1 R_E^3 R^{-2}(-g_1^0)(\omega_0 - \omega_E)$, то можно переписать (35) кратко в виде

$$(37) \qquad M_{LDx} = -\frac{1}{2} D(|p| + p)|\gamma_2|.$$

8.2. Исследование режима стабилизации ЭДТС

С учетом предложенного управления (37) дифференциальные уравнения Эйлера (25) примут вид

$$(38) \qquad \begin{cases} A\dot{\omega}_x - A\omega_y\omega_z = -3A\omega_0^2\gamma_2\gamma_3 - L\gamma_2 + a\beta_1 - \dfrac{1}{2}D(|p| + p)|\gamma_2|, \\ A\dot{\omega}_y + A\omega_x\omega_z = 3A\omega_0^2\gamma_1\gamma_3 + L\gamma_1 + a\beta_2. \end{cases}$$

Докажем, что справедлива следующая

Теорема 1. При выполнении условия $a = 0$ управление (37) *обеспечивает асимптотическую устойчивость номинального режима движения связки.*

Доказательство теоремы 1. Заметим вначале, что имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(\omega_x^2+\omega_y^2)-\frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2-L\gamma_3-A\omega_0(\omega_x\beta_1+\omega_y\beta_2)\right]=$$
$$=a(\omega_x\beta_1+\omega_y\beta_2-\omega_0(\beta_1^2+\beta_2^2))-\frac{D}{2}p\,(|p|+p)|\gamma_2|,$$

где производная в левой части равенства вычисляется в силу (38). Переходя от абсолютных угловых скоростей ω_x, ω_y к относительным угловым скоростям p, q по формулам (11), перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(p^2+q^2)-\frac{A}{2}\omega_0^2(\beta_1^2+\beta_2^2)-\frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2-L\gamma_3\right]=$$
$$=a(p\beta_1+q\beta_2)-\frac{D}{2}p\,(|p|+p)|\gamma_2|.$$

Вводя новую переменную $\Delta=1-\gamma_3$, представляющую собой отклонение связки от номинального режима движения $\gamma_3=1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\frac{dV(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)}{dt}=2a(p\beta_1+q\beta_2)-Dp\,(|p|+p)|\gamma_2|,$$

где

$$V(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)=A(p^2+q^2)+(3A\omega_0^2+L)\alpha_3^2+(4A\omega_0^2+L)\beta_3^2+L\Delta^2.$$

Отсюда следует, что если учесть условие (22), то $a=0$ и для функции $V(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dV(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)}{dt}=-D\omega_0p\,(|p|+p)\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}. \tag{39}$$

Поскольку выбором $q_1z_1+q_2z_2>0$ всегда можно обеспечить выполнение неравенства $L>0$, то функция $V(\alpha_3,\beta_3,\Delta,p,q)$ является положительно определенной. Ее производная в силу (38) является знакопостоянной отрицательной. Из (39) следует, что указанная производная может обратиться в ноль в следующих двух случаях:

$$1)\ p=0,\qquad 2)\ \alpha_3=\beta_3=0.$$

Рассмотрим каждый из них и докажем от противного отсутствие соответствующих им ненулевых решений системы (38).

1. Случай $p=0$.

Из (12) следует, что в этом случае $\vartheta=\mathrm{const}=\vartheta_0$, $q=\dot\psi\,\sin\vartheta_0$, $r=\dot\psi\cos\vartheta_0$ и (38) принимает вид

$$\begin{cases}\omega_0\dot\beta_1-(q+\omega_0\beta_2)(r+\omega_0\beta_3)=-3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3-LA^{-1}\gamma_2,\\ \dot q+\omega_0\dot\beta_2+\omega_0\beta_1(r+\omega_0\beta_3)=0.\end{cases}$$

На основании (10) перепишем эту систему в углах ψ и $\vartheta = \vartheta_0$:

$$(40)\quad \begin{cases} \sin\vartheta_0(2\omega_0\dot\psi\cos\psi\sin\vartheta_0 - \dot\psi^2\cos\vartheta_0 + \\ \qquad\qquad + \omega_0^2\cos^2\psi\cos\vartheta_0 + 3\omega_0^2\cos\vartheta_0 + LA^{-1}) = 0, \\ \qquad\qquad \sin\vartheta_0(\ddot\psi - \omega_0^2\sin\psi\cos\psi) = 0. \end{cases}$$

В силу предположения (от противного) о существовании ненулевого решения поделим первое из уравнений (40) на $\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0$, второе уравнение — на $\sin\vartheta_0$, а затем заменим второе уравнение этой системы на соответствующий ему первый интеграл:

$$(41)\quad \begin{cases} \dot\psi^2 - 2\omega_0\dot\psi\cos\psi\tan\vartheta_0 - \omega_0^2\cos^2\psi - 3\omega_0^2 - \dfrac{L}{A\cos\vartheta_0} = 0, \\ \qquad\qquad \dot\psi^2 + \omega_0^2\cos^2\psi = C_2 = \mathrm{const} \geqslant 0. \end{cases}$$

Разрешив полученные уравнения относительно $\dot\psi$, приходим к системе

$$(42)\quad \begin{cases} \dot\psi = \omega_0\cos\psi\tan\vartheta_0 \pm \sqrt{\omega_0^2\dfrac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta_0} + 3\omega_0^2 + \dfrac{L}{A\cos\vartheta_0}}\,, \\ \dot\psi = \pm\sqrt{C_2 - \omega_0^2\cos^2\psi}. \end{cases}$$

Несложно проверить, что она является совместной тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\omega_0^4\frac{\cos^4\psi}{\cos^2\vartheta_0} + g_0\omega_0^2\cos^2\psi + \frac{1}{4}(g_0 - C_2)^2 = 0,$$

все три слагаемых в котором неотрицательны. Следовательно, данное равенство эквивалентно системе уравнений

$$(43)\qquad \cos\psi = 0, \quad g_0 = C_2.$$

Проверим, является ли (43) решением системы (41). Предположив, что (43) является решением, приходим к равенству $C_2 = 0$, откуда следует, что $g_0 = 0$. Последнее равносильно равенству $3A\omega_0^2\cos\vartheta_0 + L = 0$, которое совпадает со вторым вариантом из (24) и соответствует нереализуемому наклонному положению равновесия связки. Полученное противоречие доказывает отсутствие ненулевых решений в первом случае. Перейдем к рассмотрению второго возможного случая.

2. Случай $\alpha_3 = \beta_3 = 0$.

Этот случай, очевидно, равносилен $\gamma_3 = 1$. С физической точки зрения это означает, что $\vartheta = 0$ и, следовательно, $p = 0$. Проверим, реализуются ли равенства

$$(44)\qquad p = 0, \quad \gamma_3 = 1$$

на нетривиальных решениях системы (41). Предположив, что равенства (44) могут реализоваться на нетривиальных решениях, приходим к системе уравнений $\dot{\beta}_1 = \beta_2 r$, $\dot{\beta}_2 = -\beta_1 r$, откуда следует, что $\beta_1\dot{\beta}_1 + \beta_2\dot{\beta}_2 = 0$. Проинтегрировав последнее равенство, получаем $\beta_1^2 + \beta_2^2 = \mathrm{const}$. Поскольку $\beta_3 = 0$, то может реализоваться только случай $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$. Отсутствие других решений завершает рассмотрение случая 2. Таким образом, выполняются условия теоремы Барбашина – Красовского [35] и положение равновесия $\vartheta = 0$ является асимптотически устойчивым. Теорема 1 доказана. Тем самым подтверждается возможность стабилизации номинального режима движения связки с помощью предложенного управления.

Аналогичная гантелеобразная система двух заряженных ИСЗ рассматривалась в [36]. Однако, в [36] отсутствовал ток и вызванный им амперов момент, а идея изменения величин зарядов ИСЗ использовалась не для генерации диссипативного момента, а лишь для изменения восстанавливающего момента в рамках консервативной механической системы, допускающей интеграл энергии. Рассмотрение задачи велось в плоской постановке для изучения колебаний в плоскости орбиты.

9. Результаты компьютерного моделирования

В процессе работы было предпринято компьютерное моделирование и выполнена серия численных экспериментов. В данном разделе приводится пример связки с “плохими” с точки зрения процесса стабилизации значениями параметров, значительно отличающимися от тех, которые использовались в примере 1.

Пример 2. Рассматривается связка с тросом длиной $l = 200$ м и погонной плотностью $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м, с концевыми массами $m_1 = 29{,}4$ кг, $m_2 = 30$ кг, имеющими значения z-координаты $-100{,}5$ м и $99{,}5$ м соответственно. Центр связки движется по орбите с радиусом $R = 7 \cdot 10^6$ м. По тросу протекает ток силой 1А. В работе системы стабилизации троса принимают участие следующие заряды: постоянная часть положительного заряда на верхнем коллекторе $q_{20} = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл, постоянная часть отрицательного заряда на нижнем коллекторе $q_{10} = -5 \cdot 10^{-5}$ Кл. В процессе работы системы стабилизации троса заряд на нижнем коллекторе может возрастать по абсолютной величине. Для предотвращения возможных нежелательных динамических эффектов такого возрастания значение указанного заряда ограничивается в соответствии с вышеописанным алгоритмом управления величиной $q_{1\,\min} = -9 \cdot 10^{-5}$ Кл. При таком значении $q_{1\,\min}$ минимальное значение натяжения троса, как показывает проверка по формулам (3), остается положительным. Оно достигается на нижнем конце троса и равно $T_1 = 0{,}01$ Н. Коэффициент d_1 принимается равным 0,01. В начальный момент времени трос был отклонен от местной вертикали на угол 60° в плоскости (η, ζ) и отпущен без относительной угловой скорости.

Результаты численного интегрирования представлены на рис. 6–9, где по оси абсцисс на всех рисунках отложен безразмерный угол — аргумент широты $u = \omega_0 t$. Основным параметром ориентации троса является направляю-

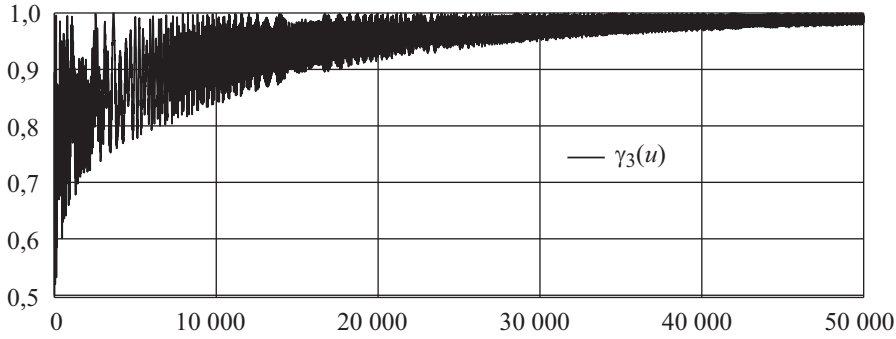


Рис. 6. Процесс стабилизации троса.

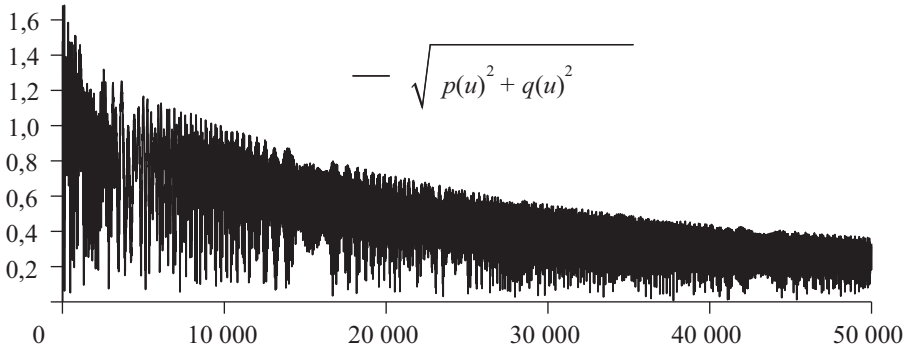


Рис. 7. Затухание угловой скорости (рад/с) троса.

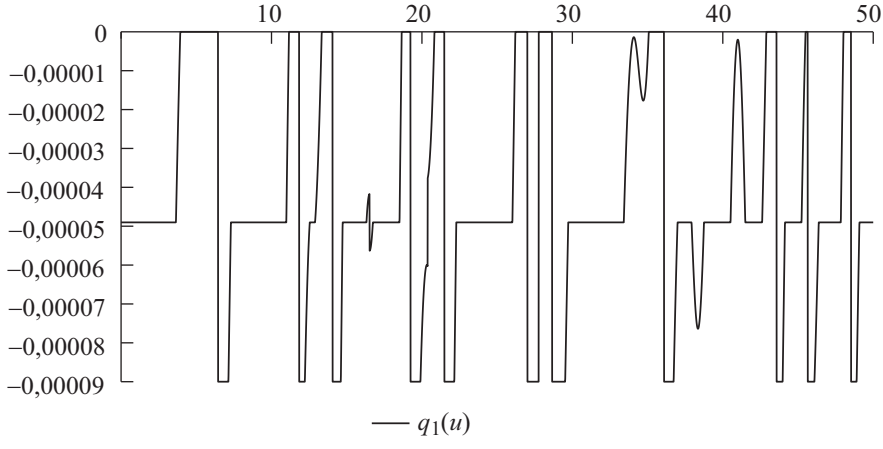


Рис. 8. Изменение заряда (Кл) на нижнем коллекторе.

щий косинус γ_3, стремящийся к целевому значению $\gamma_3 = 1$ (рис. 6). Из рис. 6 видно, что если выберем допустимое отклонение 0,2 для γ_3, то с момента времени $u = 7000$ амплитуда колебаний связки будет находиться в допустимых пределах и будет продолжать уменьшаться.

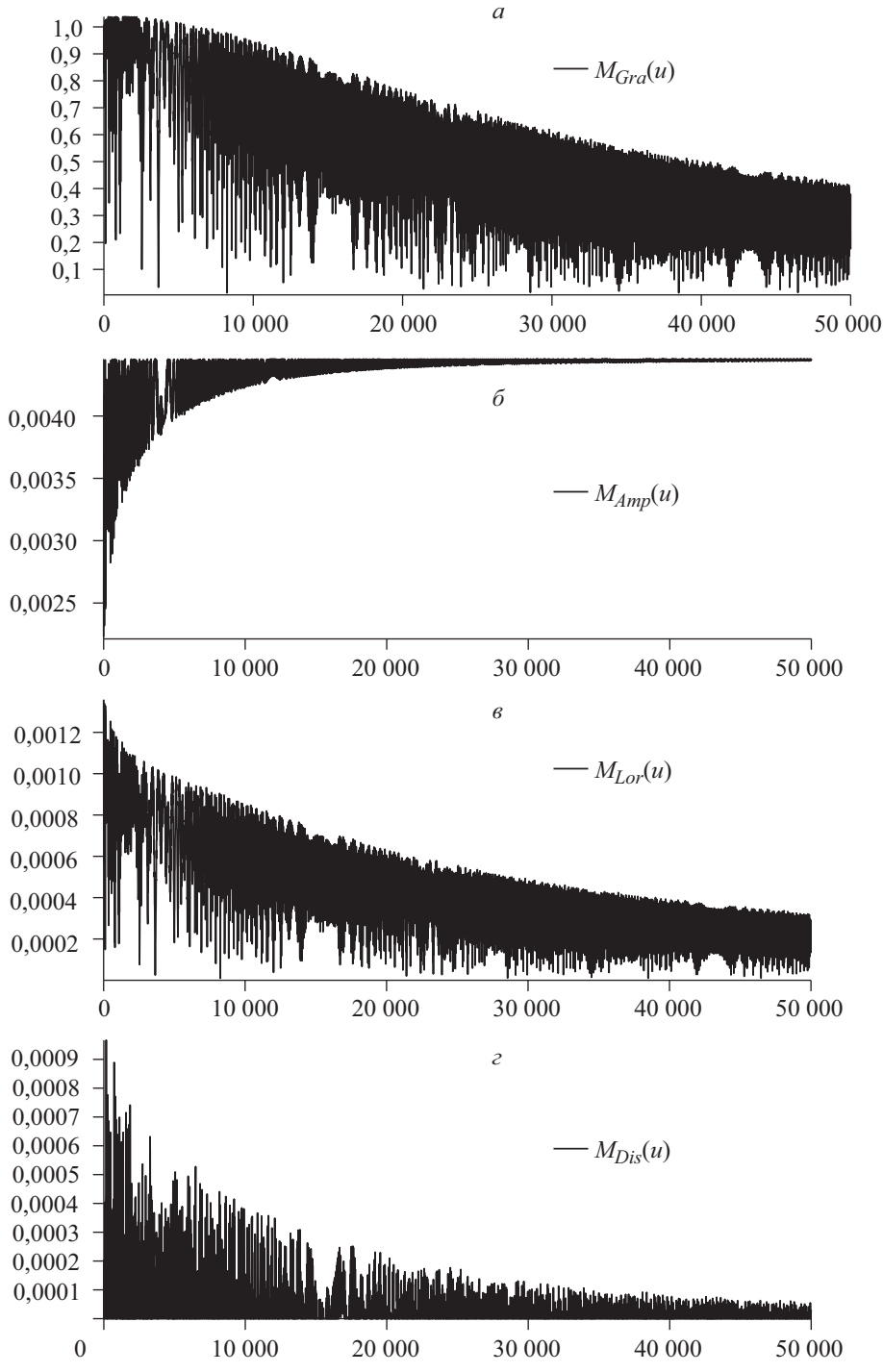


Рис. 9. *а* – Гравитационный момент (Нм), *б* –амперов момент (Нм), *в* – лоренцев момент (Нм), *г* – активный демпфирующий момент (Нм).

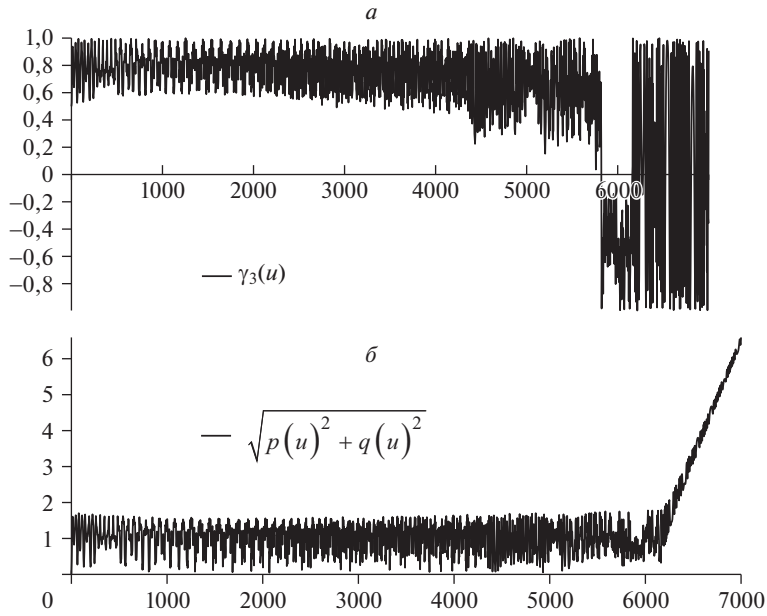


Рис. 10. *а* – Неуправляемая дестабилизация вертикального положения троса, *б* – неуправляемая дестабилизация угловой скорости (рад/с) троса.

Относительная угловая скорость (в рад/с) троса стремится к нулю (рис. 7).

Величины зарядов коллекторов варьируются в соответствии с законом управления и уравнением (34). Изменение заряда $q_1 = -k_q\tilde{q}_2 + q_{10}$ на отрицательно заряженном коллекторе показано на рис. 8. Для ясности рисунка график построен для небольшого диапазона изменения времени.

На рис. 9,*а*–9,*г* показаны графики изменения моментов, действующих на ЭДТС.

Замечание 1. В данном примере с целью приближения к реальным условиям значения масс m_1 и m_2 выбраны разными. Это приводит к тому, что условие (22) не выполняется, строго вертикальное положение равновесия троса отсутствует, а система стабилизации работает в условиях, когда дестабилизирующий амперов момент можно рассматривать как постоянно действующее возмущение.

Выполнено также моделирование динамики обычного тяжелого троса с массами m_1 и m_2 на концах, но не несущего зарядов на коллекторах и, соответственно, не управляемого. Значения прочих параметров и начальные условия движения ЭДТС совпадают с теми, которые были выбраны в примере 2. Дестабилизация такого троса показана на рис. 10.

10. Заключение

Рассмотрена задача угловой стабилизации ЭДТС в вертикальном положении троса. Аналитические исследования и компьютерное моделирование

показали, что лоренцев момент, действующий на ЭДТС благодаря заряженным коллекторам на концах троса, существенно расширяет область устойчивости вертикального положения троса. Кроме того, показана возможность генерировать управляющий момент диссипативного характера путем активного управления величиной заряда на нижнем коллекторе в соответствии с условиями, определяемыми текущей ориентацией троса. Если при этом параметры троса выбраны в соответствии с условиями, учитывающими влияние возмущающих моментов, то достигается асимптотическая устойчивость ориентации троса вдоль местной вертикали без необходимости выключения тока, протекающего по тросу. Таким образом, предложенное устройство и метод управления могут быть использованы для стабилизации космической тросовой системы в околоземном пространстве с целью повышения эффективности ее функционирования в процессе уборки космического мусора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990.
2. *Муницына М.А.* Относительные равновесия системы “гантель–груз” с односторонними связями на круговой кеплеровой орбите // АиТ. 2007. № 9. С. 9–15.

   Munitsina M.A. Relative Equilibrium on the Circular Keplerian Orbit of the “Dumbbells–Load” System with Unilateral Connections // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 9. P. 1476–1482.
3. *Кульков В.М., Егоров Ю.Г., Тузиков С.А.* Исследование конфигурации и формирование проектного облика развернутой электродинамической тросовой системы в составе орбитальных космических аппаратов // Изв. РАН. Энергетика. 2018. № 3. С. 119–130.
4. *Воеводин П.С., Заболотнов Ю.М.* Моделирование и анализ колебаний электродинамической тросовой системы на орбите спутника Земли // Мат. моделирование. 2017. № 6. С. 21–34.
5. *Forward R.L.* Electrodynamic drag terminator tether, Appendix K of high strength-to-weight tapered Hoytether for LEO to GEO payload transport // Final Report on NASA SBIR Phase I Contract NAS8-40690. 10 July 1996.
6. *Forward R.L., Hoyt R.P., Uphoff C.* Application of the Terminator Tether electrodynamic drag technology to the deorbit of constellation spacecraft // 34 Joint Propulsion Conf. Exhibit. Paper AIAA 98-3491. Cleveland, OH. 1998.
7. *Forward R.L., Hoyt R.P.* Terminator Tether: a spacecraft deorbit device // J. Spacecraft Rockets. 2000. V. 37. P. 187–196.
8. *Cosmo M.L., Lorenzini E.C.* Tethers in Space Handbook, 3-rd ed. Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, MA, USA, 1997.
9. *Vannaroni G., Dobrowolny M., De Venuto F.* Deorbiting with electrodynamic tethers: comparison between different tether configurations // Space Debris. 2001. V. 1. P. 159–172.
10. *Iess L., Bruno C., Ulivieri C., et al.* Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part I: general concepts and requirements // Acta Astronautica. 2002. V. 50. No. 7. P. 399–406.
11. *Iess L., Bruno C., Ulivieri C., Vannaroni G.* Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers. Part II: System configuration and performance // Acta Astronautica. 2002. V. 50. No. 7. P. 407–416.

12. *Ishige Y., Kawamoto S., Kibe S.* Study on electrodynamic tether system for space debris removal // Acta Astronautica. 2004. V. 55. No. 11. P. 917–929.

13. *Yamaigiwa Y., Hiragi E., Kishimoto T.* Dynamic behavior of electrodynamic tether deorbit system on elliptical orbit and its control by Lorentz force // Aerospace Sci. Technol. 2005. V. 9. P. 366–373.

14. *Zhong R., Zhu Z.H.* Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit // Celestial Mechan. Dynam. Astronom. 2013. V. 116. No. 3. P. 279–298.

15. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

16. *Levin E.M.* Dynamic Analysis of Space Tether Missions – Advances in the Astronautical Sciences / San Diego, California, American Astronautical Society. V. 126. 2007.

17. *Pelaez J., Lorenzini E.C., Lopez-Rebollal O., Ruiz M.* A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers / AAS 00-190, AAS/AIAA Space Flight Meeting. 2000.

18. *Corsi J., Iess L.* Stability and control of electrodynamic tether for de-orbiting applications // Acta Astronautica. 2001. V. 48. No. 5–12. P. 491–501.

19. *Larsen M.B., Blanke M.* Passivity-based control of a rigid electrodynamic tether // J. Guidance, Control, Dynam. 2011. V. 34. P. 118–127.

20. *Yang Y., Cai H.* Extended time-delay autosynchronization method for libration control of electrodynamic tether using Lorentz force // Acta Astronautica. 2019. V. 159. P. 179–188.

21. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат // Вестн. СПб. ун-та. Сер.1. 1999. Вып. 1. No. 1. С. 92–100.

22. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн. СПб. ун-та. Сер.1. 1999. Вып. 3. No. 15. С. 81–91.

23. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исслед. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.

24. *Тихонов А.А.* О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите // Космические исслед. 2005. Т. 43. № 2. С. 111–125.

25. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // АиТ. 2007. № 8. С. 44–56.

    Antipov K.A., Tikhonov A.A. Parametric Control in the Problem of Spacecraft Stabilization in the Geomagnetic Field // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 8. P. 1333–1345.

26. *Тихонов А.А., Спасич Д.Т., Антипов К.А., Саблина М.В.* Оптимизация электродинамического метода стабилизации ИСЗ // АиТ. 2011. № 9. С. 112–121.

27. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат // АиТ. 2013. № 8. С. 22–31.

    Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Monoaxial electrodynamic stabilization of Earth satellite in the orbital coordinate system // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 1249–1256. DOI: 10.1134/S000511791308002X

28. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исслед. 2014. Т. 52. № 6. С. 512–520.

29. *Antipov K.A., Tikhonov A.A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization // Aerospace Sci. Technology. 2014. V. 33. P. 92–99.

30. *Aleksandrov A.Yu., Antipov K.A., Platonov A.V., Tikhonov A.A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame // Nonlinear Dynam. 2015. V. 82. P. 1493–1505.

31. *Tikhonov A.A., Shcherbakova L.F.* On Equilibrium Positions and Stabilization of Electrodynamic Tether System in the Orbital Frame // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. No. 040023.

32. *Шамолин М.В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 6. С. 1003–1010.

33. *Woo P., Misra A.K.* Mechanics of very long tethered systems // Acta Astronautica. 2013. V. 87. P. 153–162.

34. *Shamolin M.V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. 2002. V. 110. No. 2. P. 2528–2557.

35. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

36. *Yamakawa H., Hachiyama S., Bando M.* Attitude dynamics of a pendulum-shaped charged satellite // Acta Astronautica. 2012. V. 70. P. 77–84.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.

Поступила в редакцию 01.06.2019

После доработки 29.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Управление в социально-экономических системах

© 2020 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул),
Ю.Г. АЛГАЗИНА, канд. эконом. наук (algazina@inbox.ru)
(Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова, Барнаул)

РЕФЛЕКСИВНАЯ ДИНАМИКА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО

Представлена модель динамического поведения на рынке Курно в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Агенты, наблюдая сложившееся состояние рынка и учитывая текущие экономические ограничения, в динамике от игры к игре уточняют объемы выпуска, делая шаги в направлении текущего положения своей цели. Получены достаточные условия на величины шагов, выбираемые агентами независимо друг от друга, для сходимости динамики к статичному равновесию Курно–Нэша.

Ключевые слова: олигополия, неполная информированность, рефлексивное поведение, равновесие Курно–Нэша, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231020020087

1. Введение

Наблюдая текущее состояние рынка, агент может убедиться в том, что его объемы выпуска продукции не являются оптимальными. К такому выводу могут прийти не один, а несколько или сразу все, конкурирующие друг с другом объемами выпуска, агенты. Естественно, что у каждого из них возникает желание уточнить свой объем выпуска так, чтобы он был оптимальным ответом на действия остальных агентов. Если это удастся сделать всем агентам, то при отсутствии кооперации на рынке выбранные объемы выпуска будут равновесными, так как агенты не будут заинтересованы, чтобы в одиночку изменить их (см., например, [1–4]). Агент принимает решение на основе доступной ему информации. Поскольку в олигополии состояние рынка зависит от действий всех агентов, то в условиях неполной информированности он вынужден рефлексировать, т.е. предсказывать их действия.

Исследование моделей олигополии Курно с учетом неполноты информированности агентов приводит к возникновению различных моделей рефлексии, выявлению условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему динамики.

Рефлексивное поведение в моделях олигополии с реакцией фирм по Курно обсуждается при различных предпосылках. Динамика изучается в непрерыв-

ном [5, 6] или дискретном времени [7–14]. Функции полных издержек агентов предполагаются нелинейными [10–17] или линейными [9, 18, 19], функции спроса, предпочтительно, линейными. Особенности моделирования динамики поведения по Курно с применением рефлексивных игр с различным порядком (одновременным, последовательным, последовательно-групповым, хаотичным) ходов игроков можно найти в [7, 18, 20, 21]. Возможности изменения правил поведения или ранга рефлексии агентов обсуждается в [3–5, 13]. Исходная информация для развития динамики может быть представлена известными всем агентам функциями издержек или целевыми функциями конкурентов [12, 13], текущими действиями или состояниями конкурентов [3, 6, 10–15, 19], текущей рыночной ценой и эластичностью спроса [5, 9] и т.д.

Результаты исследований сходимости динамик представлены в различных формах. В [5] они получены в виде функций предложения, приводящих к равновесию с использованием динамических имитационных моделей в непрерывном времени. В [18] обсуждаются условия сходимости для процессов рефлексии с различным порядком ходов. В [8, 22–24] можно найти условия сходимости, области притяжений, условия на величины шагов, обеспечивающих сходимость динамики коллективного поведения при предположениях, что каждому агенту при продвижении к цели надо знать текущие действия или состояния всех агентов. В [7, 10, 11] аналогичные условия рассмотрены для других видов динамик. В [3, 4, 25] ставится задача определения равновесий и управления поведением агентов с применением метода рефлексивных разбиений, а в [13] для частного случая рефлексивного управления показана возможность применения этого метода для управления рыночной ценой и формулируются условия приведения рынка к равновесной цене. В [17] формулируются условия равновесия Нэша для процесса последовательных реакций при текущих ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов. В [9] получены достаточные условия сходимости к равновесию модели коллективного поведения, с помощью которой агенты уточняют свои представления о предельных издержках конкурентов. В [20, 21] дается анализ «хаотичных» процессов поведения фирм с реакцией по Курно при динамическом взаимодействии. В [14–16, 18] условия сходимости динамик получены только для случая дуополии.

Работы в этом направлении остаются актуальными ввиду значимости проблемы сближения теоретических моделей равновесий Нэша с эмпирическими параметрами состояний реальных рынков олигополии.

В настоящей статье основное внимание уделяется анализу традиционных моделей рефлексии; построению адекватного процесса рефлексии, учитывающего недостатки традиционных; условиям и аналитическим оценкам сходимости этого процесса. Во внимание принимаются такие экономические категории, как конкурентоспособность и убыточность агентов, а также начальное состояние рынка.

Теоретической основой динамического процесса являются теория рефлексивных игр и теория коллективного поведения. Их подходы дополняют друг друга тем, что в условиях неполной информированности агентов и неадекватности предсказаний действий конкурентов рефлексивные игры позволяют

использовать процессы коллективного поведения и результаты размышлений игроков, приводящие к равновесию [3, 4].

2. Базовая модель олигополии

Пусть $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ — множество агентов, конкурирующих на рынке объемами выпуска однородной продукции. Каждый агент продает произведенный им выпуск q_i по единой рыночной цене $p(Q)$, которая определяется общим объемом выпуска $Q = \sum_{i \in N} q_i$. Действия агентов направлены на максимизацию собственной прибыли:

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i \in N. \tag{1}$$

Цена $p(Q)$ и полные издержки фирм $\phi_i(q_i)$ заданы линейными функциями

$$p(Q) = a - bQ, \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad i \in N, \tag{2}$$

где a, b — параметры спроса, c_i, d_i — предельные и постоянные издержки фирм.

Предпосылки базовой модели: 1) дискретность процесса; 2) однородность продукции; 3) конкуренция объемами выпусков, весь выпуск реализуется; 4) единая рыночная цена; 5) произвольное число агентов на рынке; 6) линейность функций спроса и полных затрат агентов, имеющих различные предельные издержки; 7) отсутствие ограничений мощности и коалиций; 8) рациональное поведение агентов, направленное на максимизацию собственной прибыли; 9) одновременный порядок ходов.

3. Анализ и постановка проблемы

Агенты вынуждены прибегать к рефлексии, если в базовой модели отсутствует общее знание относительно множества агентов, множеств их допустимых действий, параметров и целевых функций конкурентов. Традиционный процесс пошаговой рефлексии предполагает, что агенты выбирают оптимальный отклик в соответствии со своей функцией реакции.

Оптимальный отклик i-го агента находится из условия $\partial \Pi_i / \partial q_i = 0$ с учетом (2)

$$q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2 + \partial Q_{-i} / \partial q_i} \quad (i \in N), \tag{3}$$

где использованы обозначения:

$$h_i = \frac{a - c_i}{b}, \tag{4}$$

$$Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j. \tag{5}$$

Согласно предположению Курно [26] относительно объемов выпуска каждая фирма действует так, что не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если сама сделает это. Формально его можно записать в виде условий равенства нулю предположительных вариаций [26, 27] $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0$, $i \neq j$; $i, j \in N$. Отсюда

$$\frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = 0, \quad i \in N. \tag{6}$$

Если система условий (3)–(6) имеет решение, то состояние, в которое приходит рынок, когда агенты выбирают в качестве своей стратегии это решение, называется равновесием Курно [26]. Для базовой модели олигополии это состояние является равновесием Нэша [28].

Тогда из (3) и (6) имеем выражение для оптимального отклика (см., например, [18])

$$q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2}. \tag{7}$$

Преобразуем (1) с учетом (2) к виду $\Pi_i = b(h_i - Q_{-i} - q_i)q_i - d_i$. При ожиданиях $h_i - Q_{-i} > 0$ агент выбирает положительный выпуск, который определяется выражением (7). При ожиданиях $h_i - Q_{-i} \leq 0$ положительный выпуск дает отрицательную валовую прибыль (т.е. прибыль без учета постоянных издержек d_i) и, чтобы минимизировать потери, агент выбирает нулевой выпуск.

Рекуррентные соотношения соответствующей многошаговой рефлексивной игры, предложенной в [18], имеют вид:

1. Каждый из агентов независимо от других, используя наблюдаемые выпуски каждого агента q_i^t и полагая, что в текущем $(t+1)$-м моменте времени все остальные агенты выберут те же действия, как и в предыдущем t-м моменте, на основе (7) рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск (оптимальный отклик на действия конкурентов) x_i^t по формуле

$$x_i^t = \frac{1}{2}(h_i - Q_{-i}^t). \tag{8}$$

Здесь $i \in N$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ — моменты времени (периоды, номера партий или сеансы игры и пр.). Начальный вектор выпусков $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$ считается заданным. Остальные правила игры определяются условиями базовой модели олигополии 1)–9) в разделе 2.

2. Каждый агент изменяет свой выпуск за предыдущий t-й момент времени по формуле

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t, & x_i^t > 0; \\ 0, & x_i^t \leq 0 \end{cases} \qquad (i \in N; \quad t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Затем процесс повторяется с п.1.

Условно процесс (8)–(9) определим как вариант 1 рефлексивной игры.

Достоинства такого процесса: целевая направленность, агент в каждый момент выбирает наилучший ответ, экономическая содержательность процесса, выраженная в том, что гарантируются неотрицательный текущий выпуск (конкурентоспособность) и неотрицательная текущая валовая прибыль агентов.

Недостатки процесса: плохо поддается аналитическому исследованию сходимость процесса в зависимости от параметров и начального состояния рынка, поэтому как основной используется метод численного моделирования; численными экспериментами показано [18], что «при числе фирм не больше двух процесс сходится, иначе расходится»; текущая цена товара может быть ниже предельных издержек, что приводит к убыткам агента и ставит под сомнение целесообразность продолжения его участия в процессе. Возможна отрицательная текущая цена. Имеется возможность зацикливания процесса, препятствующего достижению агентами равновесия, что иллюстрируется на следующем простом примере. Здесь и далее верхним индексом "(c)" обозначим показатели в статическом равновесии Курно–Нэша для базовой модели.

Пример 1. Пусть $q^0 = (0, \ldots, 0)$. Тогда по (8) и (9) получим $q_i^1 = \frac{h_i}{2}$ и $h_i - Q_{-i}^1 = h_i - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} h_j$. Пусть также все агенты имеют одинаковые предельные издержки, $c_i = c$, $i \in N$. Тогда $h_i = h$ и $h_i - Q_{-i}^1 = \frac{(3-n)h}{2}$. При $n = 3$ имеем $h_i - Q_{-i}^1 = 0$, при $n > 3$ имеем $h_i - Q_{-i}^1 < 0$ для $i \in N$ и $q^2 = (0, \ldots, 0)$. Процесс вернулся в исходное состояние, очевидно, что $q^0 = (0, \ldots, 0) = q^2 = q^4 = \ldots$ и $q^1 = \left(\frac{h}{2}, \ldots, \frac{h}{2}\right) = q^3 = q^5 = \ldots$. При этом статичное равновесие $q^{(c)} = \frac{a-c}{(1+n)b} = \frac{h}{1+n}$, как решение (3)–(6) не достигается. Зацикливание также может иметь место, если взять начальный вектор с малыми компонентами. Пусть $q^0 = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Тогда $q_i^1 = \frac{h_i - (n-1)\varepsilon}{2}$ и $h_i - Q_{-i}^1 = h_i - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} h_j + \frac{(n-1)^2\varepsilon}{2}$. Для случая одинаковых предельных издержек всех агентов $2x_i^1 = h_i - Q_{-i}^1 = \frac{(3-n)h}{2} + \frac{(n-1)^2\varepsilon}{2}$. Так, при $n > 3$ зацикливание будет, если $x_i^1 \leq 0$, т.е. $\varepsilon \leq \frac{(n-3)h}{(n-1)^2}$. При $n = 2$ и нулевом начальном векторе агентов с различными предельными издержками имеем

$$q_i^1 = \frac{h_i}{2}, \quad q_1^2 = x_1^1 = \frac{1}{2}\left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right) = \frac{3}{4}q_1^{(c)}, \quad q_2^2 = x_2^1 = \frac{1}{2}\left(h_2 - \frac{h_1}{2}\right) = \frac{3}{4}q_2^{(c)},$$

$$q_1^3 = x_1^2 = \frac{1}{2}\left(h_1 - q_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(h_1 - \frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}q_1^{(c)} + \frac{h_1}{4}\right) = \frac{1}{8}h_1 + \frac{3}{4}q_1^{(c)},$$

$$q_2^3 = x_2^2 = \frac{1}{2}\left(h_2 - q_1^2\right) = \frac{1}{8}h_2 + \frac{3}{4}q_2^{(c)} \quad \text{и т.д.}$$

Зацикливания не происходит. Здесь использовано, что $q_1^{(c)} = \frac{1}{3b}(a - 2c_1 + c_2)$ и $q_2^{(c)} = \frac{1}{3b}(a + c_1 - 2c_2)$ есть решение (3)–(6) при $n = 2$.

Для аналитического исследования динамики рефлексии нередко применяются технически более удобные рекуррентные соотношения, когда вместо (9)

используется следующая формула (вариант 2 рефлексивной игры)

$$q_i^{t+1} = x_i^t \quad (i \in N; \quad t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Как отмечается в [18], тогда «имеют место адаптивные ожидания, которые нерациональны в том смысле, что выпуск конкурентов на текущем шаге изменяется и, в общем, не соответствует ожиданиям. В этом случае фирма не попадает на свою функцию реакции». Также для такого процесса не гарантируются текущие неотрицательные выпуски, положительная валовая прибыль агентов, положительная цена товара.

Хотя факт того, что процессы (8), (9) и (8), (10) сходятся или расходятся одновременно, формально не доказан, но численным моделированием для (8), (9) и аналитически для (8), (10) показывается [18], что при $n = 2$ как тот, так и другой варианты процесса сходятся при любых начальных условиях, а при $n > 2$ расходятся.

С учетом достоинств и недостатков рассмотренных традиционных схем пошаговой рефлексии, в настоящей статье предложены их модификации, которые представлены в следующем разделе.

4. Адаптивная динамика в модели олигополии Курно

Отсутствие сходимости является основным недостатком рассмотренных традиционных схем пошаговой рефлексии. Поэтому авторами предложены их модификации, в основу которых положена адаптивная динамика движения агентов к цели.

Рассмотрим динамический процесс (вариант 3), в котором в каждый момент каждый из агентов рассчитывает свое текущее положение цели и изменяет свое состояние в направлении текущего положения цели:

1. Каждый из агентов независимо от других, используя наблюдаемые выпуски каждого агента q_i^t и полагая что в текущем $(t+1)$-м моменте времени все остальные агенты выберут те же действия, как и в предыдущем t-м моменте, рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск x_i^t по прежней формуле (8).

Начальный вектор выпусков q^0 также считается заданным, а остальные правила игры определяются условиями 1)–9) в разделе 2.

2. Каждый агент изменяет свой выпуск за предыдущий t-й момент времени, делая от него шаг по направлению к текущему оптимальному выпуску x_i^t по формуле

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t), & x_i^t > 0; \\ 0, & x_i^t \le 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь: $i \in N$; $t = 0, 1, 2, \ldots$; $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ — параметры, определяющие величины шагов. Условия (11) гарантируют, что выпуск q_i^{t+1} и валовая прибыль агента не могут быть отрицательными.

Затем процесс повторяется с п.1.

Если (11) заменить на формулу

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t) \quad (i \in N; \quad t = 0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

то получим соответствующий варианту 2 аналог рефлексивной игры. Назовем его вариант 4. Он характерен для таких процессов, когда агенты имитируют автоматы, формально выполняя выбор действий, невзирая на возможные текущие отрицательные выпуски, отрицательные цены и убытки. Хотя, в конечном счете, процесс может быть сходящимся [9, 19]. В теории коллективного поведения (12) описывает динамику выбора решений, основанного на аксиоме индикаторного поведения [4, 23, 24].

Примечание: варианты 1 и 2 процессов можно рассматривать как частные случаи вариантов 3 и 4 соответственно при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$; в последних же допускается «неполный» шаг.

5. Результаты и обсуждение

Аналитическое исследование варианта 3 рефлексивной игры (динамического процесса (8), (11)) представляет не меньшую сложность, чем варианта 1, для которого основным является метод численного моделирования. Оно также существенно сложнее, чем для варианта 4 (процесса (8), (12)).

Поэтому основная идея статьи состоит в том, чтобы найти условия сходимости для процесса (8), (12), в котором в отличие от процесса (8), (11) агенты не обнуляют свой выпуск, если $x_i^t \leq 0$. Затем обобщить полученные результаты на динамику (8), (11).

Введем в рассмотрение функции-индикаторы [29, с. 49], характеризующие отклонения текущих выпусков от текущих оптимумов, вида $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$. Присутствие коэффициента «2» объясняется последующими удобствами. Используя (11), а также то, что по (7) $h_i = Q^{(c)} + q_i^{(c)}$, имеем

$$\alpha_i^t = Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^t - q_i^t. \tag{13}$$

Равенство нулю отдельных α_i^t еще не означает, что агенты достигли равновесия. В равновесии все α_i^t равны нулю и из соответствующей однородной системы уравнений (13) находится, что $q_i^t = q_i^{(c)}$. Ниже будет показана важная роль, которую играет также выражение $\max\limits_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$ в исследовании и доказательстве сходимости процессов.

В Приложении приводятся доказательства следующих утверждений.

Утверждение 1. Если для процесса (8), (12) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то*

$$\max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Утверждение 2. Если для процесса (8), (12) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то при*

$\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в последовательности* $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ *есть члены с разными знаками.*

Утверждение 3. Если в последовательности $\left\{\alpha_i^0,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то при* $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ *процесс* (8), (12) *сходится.*

Следующее утверждение также связано с начальными условиями процесса (8), (12), когда в $\left\{\alpha_i^0,\ i \in N\right\}$ все члены: а) положительны, б) меньше или равны нулю.

Утверждение 4. Пусть $\gamma_i^1 \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N)$. *Тогда справедливы неравенства:* а) $0 < Q^{(c)} - Q^1 < Q^{(c)} - Q^0$, *если* $\alpha_i^0 > 0$ $(i \in N)$; б) $0 < Q^1 - Q^{(c)} < Q^0 - Q^{(c)}$, *если* $\alpha_i^0 \le 0$ $(i \in N)$.

Примечания. 1. Если $\alpha_i^0 = 0$ $(\forall i \in N)$, то исходное состояние уже является равновесным. 2. Утверждение 4 имеет место также для любого момента времени t, если в $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ все $\alpha_i^t > 0$ или все $\alpha_i^t \le 0$. 3) Неравенства можно записать одним неравенством $\left|Q^{(c)} - Q^1\right| < \left|Q^{(c)} - Q^0\right|$.

Основной результат работы для процесса (8), (12) сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 5. При $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$ *процесс* (8), (12) *сходится при любых начальных выпусках агентов* $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

Следующий основной результат работы относится к процессу (8), (11), в котором агенты обнуляют свой выпуск при $x_i^t \le 0$.

Утверждение 6. При $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$ *процесс* (8), (11) *сходится при любых начальных выпусках агентов* $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

Доказательство утверждения 6, формулировки и доказательства вспомогательных утверждений П.1–П.5 приведены в Приложении. Результаты, сформулированные в виде вспомогательных утверждений, используются при доказательстве основного утверждения 6 и отчасти повторяют результаты утверждений 1–4, но вместе с тем их доказательства имеют отличия в виду специфики процесса (8), (11). Ниже показан пример этого процесса.

Пример 2. Исходные данные: на рынке с параметрами $a = 100$, $b = 0{,}1$ присутствуют три агента с предельными издержками $c_1 = 10$, $c_2 = 20$, $c_3 = 40$ соответственно. По (4) имеем $h = (900, 800, 600)$. В табл. 1 и табл. 2 представлены начальный и завершающий фрагменты процесса.

Согласно (12) на 1-й итерации $q_2 = q_3 = 0$, поскольку на 0-й $x_2 = 0$, $x_3 < 0$; а на 2-й, 3-й и 7-й итерациях $q_3 = 0$, поскольку на 1-й, 2-й и 6-й итерациях $x_3 < 0$. В этих случаях параметр γ не используется и поэтому его значения в таблице отсутствуют. Чтобы получить сходящийся процесс, значения параметра γ для $n = 3$ выбраны в диапазоне (0; 0,5). Начиная с 1-й итерации $\max\limits_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$ монотонно убывает по t, поскольку $\alpha_1^t, \alpha_2^t, \alpha_3^t$ не одного знака

Таблица 1. Начальные итерации процесса (8), (11) для трех агентов

Итерация	Текущие выпуски агентов			Текущие цели агентов			Значения функций-индикаторов			Параметры шагов			$\max\{\alpha_i - \alpha_j\}$
t	q_1	q_2	q_3	x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3	
0	750,0	100,	50,0	375,0	0,0	−125,0	−750,0	−200,0	−350,0				550,0
1	675,0	0,0	0,0	450,0	62,5	−37,5	−450,0	125,0	−75,0	0,2			575,0
2	585,0	25,0	0,0	437,5	107,5	−5,0	−295,0	165,0	−10,0	0,4	0,4		460,0
3	548,1	49,8	0,0	425,1	125,9	1,1	−246,0	152,4	2,1	0,25	0,3	0,25	398,4
4	517,4	72,6	0,3	413,5	141,2	5,0	−207,7	137,1	9,4	0,25	0,3	0,3	344,8
5	501,8	86,3	1,3	406,2	148,5	5,9	−191,2	124,3	9,4	0,15	0,2	0,2	315,5
6	492,2	114,3	1,3	392,2	153,3	−3,3	−200,0	77,9	−9,0	0,1	0,45		278,0
7	452,2	122,1	0,0	389,0	173,9	12,8	−126,6	103,6	25,7	0,4	0,2	0,35	230,2
8	426,9	142,8	5,1	376,0	184,0	15,1	−101,8	82,3	20,0	0,4	0,4	0,4	184,1
9	406,6	161,3	9,1	364,8	192,1	16,1	−83,6	61,6	13,8	0,4	0,45	0,4	145,2

Таблица 2. Завершающие итерации сходящегося процесса (8), (11) для трех агентов

Итерация	Текущие выпуски агентов			Текущие цели агентов			Значения функций-индикаторов			Параметры шагов			$\max\{\alpha_i - \alpha_j\}$
t	q_1	q_2	q_3	x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3	
23	329,8	221,6	23,7	327,3	223,3	24,3	−4,9	3,3	1,2	0,25	0,35	0,2	8,2
24	329,1	222,1	24,0	327,0	223,4	24,4	−4,4	2,7	0,8	0,25	0,3	0,4	7,1
25	328,3	222,7	24,1	326,6	223,8	24,5	−3,3	2,2	0,9	0,4	0,48	0,2	5,5
26	327,9	223,1	24,2	326,3	224,0	24,5	−3,0	1,8	0,6	0,25	0,3	0,4	4,8
27	327,5	223,4	24,3	326,1	224,1	24,5	−2,7	1,3	0,5	0,25	0,4	0,3	4,1
28	327,1	223,6	24,4	326,0	224,2	24,6	−2,3	1,2	0,5	0,25	0,3	0,2	3,5
29	326,6	223,9	24,5	325,8	224,5	24,7	−1,6	1,2	0,6	0,45	0,4	0,4	2,8
30	326,4	224,0	24,5	325,7	224,5	24,8	−1,4	1,1	0,5	0,25	0,2	0,25	2,4
31	326,1	224,2	24,6	325,6	224,6	24,8	−1,1	0,8	0,4	0,45	0,4	0,4	1,9
32	326,0	224,3	24,7	325,5	224,7	24,9	−0,9	0,8	0,4	0,25	0,2	0,22	1,7

для каждого $t \geq 1$. Процесс сходится к $q^{(c)} = (325,\ 225,\ 25)$, как показано в табл. 2. Критерий останова процесса в примере $\left|q_i^{(c)} - q_i^t\right| \leq 1$.

6. Заключение

Проведено исследование процессов рефлексивного поведения в традиционной теоретико-игровой модели конкурентного рынка Курно в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Получены следующие основные результаты:

— предложен адаптивный процесс рефлексивного коллективного поведения, учитывающий текущую информированность и экономические ограничения агентов, обобщающий традиционные процессы рефлексии в условиях неполного знания;

— представлены аналитические исследования процесса. Получены достаточные условия на выбор агентами независимо друг от друга величин текущих шагов для сходимости в дискретном времени процесса к статичному равновесию Курно–Нэша. Доказаны соответствующие утверждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. По (8) $x_i^t - q_i^t = \frac{1}{2}(h_i - Q^t - q_i^t)$ и по (7) $h_i = Q^{(c)} + q_i^{(c)}$. С учетом (13) $x_i^t - q_i^t = \frac{\alpha_i^t}{2}$. Тогда перепишем (12) в виде

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t. \tag{П.1}$$

Из (13) и (П.1) имеем

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t + Q^t - Q^{t+1}. \tag{П.2}$$

Тогда

$$\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \left(1 - \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\right)\alpha_j^t. \tag{П.3}$$

Обозначим $\alpha_{M^{t+1}}^{t+1} = \max\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ и $\alpha_{m^{t+1}}^{t+1} = \min\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$. Тогда по (П.3)

$$\alpha_{M^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{M^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M^{t+1}}^t - \left(1 - \frac{\gamma_{m^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m^{t+1}}^t.$$

Но $\alpha_{M^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t > 0$ и $0 \ge \alpha_{m^t}^t \le \alpha_{m^{t+1}}^t$. Поэтому

$$\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} = \alpha_{M^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m^{t+1}}^{t+1} < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2. Для процесса (8), (12) из (П.1) имеем

$$Q^{t+1} = Q^t + \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t. \tag{П.4}$$

Соответственно, (П.2) представимо в виде

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t. \tag{П.5}$$

Из (П.5) получаем, что

$$\alpha_{m^t}^{t+1} < \left(1 - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m^t}^t - \alpha_{m^t}^t \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} = \alpha_{m^t}^t \left(1 - \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right).$$

По условию $\alpha_{m^t}^t \le 0$, и если $1 - \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2} \ge 0$, то $\alpha_{m^t}^{t+1} < 0$, т.е. в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть отрицательный член.

С другой стороны, также по (П.5) имеем, что

$$\alpha_{M^t}^{t+1} > \left(1 - \frac{\gamma_{M^t}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M^t}^t - \alpha_{M^t}^t \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} = \alpha_{M^t}^t \left(1 - \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{M^t}^{t+1}}{2}\right).$$

По предположению $\alpha_{M^t}^t > 0$, и если $1 - \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{M^t}^{t+1}}{2} > 0$, то $\alpha_{M^t}^{t+1} > 0$, т.е. в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть положительный член.

Таким образом, если для каждого агента выбор параметра ограничить диапазоном $\left(0;\ \frac{2}{1+n}\right]$, то в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ будут члены с разными знаками.

Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 3. Согласно утверждению 2 для каждого $t > 0$ в последовательности $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ будут члены с разными знаками. Тогда по утверждению 1 имеем

$$\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} <$$
$$< \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t-1} - \alpha_j^{t-1}\right\} < \ldots < \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^0 - \alpha_j^0\right\}.$$

Таким образом, $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку знаки $\alpha_{m_t}^t$ и $\alpha_{M_t}^t$ не совпадают, если $\alpha_{m_t}^t \ne 0$, то $\alpha_i^t \to 0$ при $t \to \infty$ и $Q^t \to Q^{(c)}$, $q_i^t \to q_i^{(c)}$.

Утверждение 3 доказано.

Доказательство утверждения 4. По (П.5) и (13) имеем

$$(n+1)\left(Q^{(c)} - Q^1\right) = \sum_{j\in N} \alpha_j^1 =$$
$$= \sum_{j\in N}\left(1 - \frac{1+n}{2}\gamma_j^1\right)\alpha_j^0 < \max_{i\in N}\left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^1\right\}\sum_{j\in N}\alpha_j^0 =$$
$$= \max_{i\in N}\left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^1\right\}(n+1)\left(Q^{(c)} - Q^0\right).$$

Из условия $0 < \max\limits_{i\in N}\left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^1\right\} < 1$ следует первая часть доказываемого утверждения. Аналогичным образом доказывается его вторая часть.

Доказательство утверждения 5. Возможны 3 сценария начала и развития процесса (8), (12). Первый сценарий: в последовательности $\{\alpha_i^0,\ i \in N\}$ не только положительные члены, есть и другие (отрицательные и/или нулевые члены). Такой процесс сходится согласно утверждению 3. Второй сценарий: процесс начинается с последовательности, в которой все $\alpha_i^0 > 0$ или все $\alpha_i^0 < 0$, и в какой-то момент времени появится последовательность с членами разных знаков. Тогда в силу утверждения 2 все последующие последовательности будут с членами разных знаков и опять в силу утверждения 3 процесс сходится. Третий сценарий: процесс начинается с последовательности, в которой все $\alpha_i^0 > 0$ или все $\alpha_i^0 < 0$, и знаки всех членов последовательностей не меняются в течение всего процесса. Тогда согласно утверждению 4 (см. примечание) для каждого $t > 1$ $\left|Q^{(c)} - Q^0\right| > \left|Q^{(c)} - Q^1\right| > \ldots$ $\ldots > \left|Q^{(c)} - Q^t\right| > \left|Q^{(c)} - Q^{t+1}\right|$ и $Q^t \to Q^{(c)}$. По (П.2) $\alpha_i^t \to 0$, а по (13) $q_i^t \to q_i^{(c)}$ $(i \in N)$. Процесс (8), (12) сходится к истинному равновесию.

Утверждение 5 доказано.

Примечание. Если $\alpha_i^t > 0$ или $\alpha_i^t < 0$ $(\forall i \in N)$, то в $(t+1)$-й момент знаки всех членов не могут измениться на противоположные. Так, если $\alpha_1^t > 0$, то в условиях утверждения 5 на выбор параметров γ, как показано в ходе доказательства утверждения 2, $\alpha_{M^t}^{t+1} > 0$. Аналогично, если $\alpha_i^t < 0$, то $\alpha_{m^t}^{t+1} < 0$.

Доказательство утверждения 6. Доказательство начнем с введения новых обозначений и соотношений, затем докажем вспомогательные утверждения и их следствия, опираясь на которые завершим доказательство утверждения 6.

Обозначим: $N_1^t = \{i \big| x_i^t > 0, i \in N\}$, $N_2^t = \{i \big| x_i^t \le 0, i \in N\}$. Тогда $N_1^t \cap N_2^t = \otimes$ и $N_1^t \cup N_2^t = N$.

С учетом введенных обозначений и (13) запишем (11) как

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \dfrac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t, & i \in N_1^t; \\ 0, & i \in N_2^t. \end{cases} \tag{П.6}$$

Далее имеем:

$$Q^{t+1} = Q^t + \sum_{j \in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t - \sum_{j \in N_2^t} q_j^t; \tag{П.7}$$

$$\begin{gathered} Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^t - q_i^t - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_1^t; \\ \alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \\ = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_1^t; \\ Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^t - q_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_2^t; \end{gathered} \tag{П.8}$$

$$\text{(П.9)}\quad \alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \alpha_i^t + q_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_2^t.$$

Результат, полученный в утверждении П.1, повторяет результат утверждения 1 для процесса (8), (12), однако его доказательство усложняется с введением множеств N_1^t и N_2^t.

Утверждение П.1. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то* $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$.

Доказательство. Возможно 4 случая для агентов i и j, на которых достигается $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}$:

1) $i, j \in N_1^t$;
2) $i \in N_1^t$, $j \in N_2^t$;
3) $i \in N_2^t$, $j \in N_1^t$;
4) $i, j \in N_2^t$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $i, j \in N_1^t$. Обозначим $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} = \max\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\right\}$ и $\alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \min\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\right\}$. По (П.8) $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{M_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M_1^{t+1}}^t - \left(1 - \frac{\gamma_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m_1^{t+1}}^t$. Но $\alpha_{M_1^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t > 0$ и $\alpha_{m_1^{t+1}}^t \ge \alpha_{m^t}^t \le 0$. Поэтому

$$\text{(П.10)}\quad \max_{i,j\in N_1^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \alpha_{M_1^{t+1}}^t - \alpha_{m^t}^t < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Рассмотрим второй случай, когда $i \in N_1^t$, $j \in N_2^t$. По (П.8) и (П.9) имеем, что $\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - (\alpha_j^t + q_j^t)$. Или $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_2^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{M_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M_1^{t+1}}^t - \left(\alpha_{m_2^{t+1}}^t + q_{m_2^{t+1}}^t\right)$. Здесь $\alpha_{m_2^{t+1}}^{t+1} = \min\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N_2^t\right\}$ и $\alpha_{M_1^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t > 0$. Тогда

$$\text{(П.11)}\quad \max_{i\in N_1^t, j\in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m_2^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Рассмотрим следующий случай, когда $i \in N_2^t$, $j \in N_1^t$. По (П.8) и (П.9) $\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = (\alpha_i^t + q_i^t) - \left(1 - \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\right)\alpha_j^t$ и, используя, что $\alpha_i^t + q_i^t < \alpha_{M^t}^t$, имеем

$$\alpha_{M_2^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \left(\alpha_{M_2^{t+1}}^t + q_{M_2^{t+1}}^t\right) - \left(1 - \frac{\gamma_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m_1^{t+1}}^t <$$

$$< \alpha^t_{M^t} - \left(1 - \frac{\gamma^{t+1}_{m^{t+1}_1}}{2}\right) \alpha^t_{m^t} < \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{m^t} = \max_{i,j \in N} \left\{\alpha^t_i - \alpha^t_j\right\}.$$

Пусть теперь $i, j \in N^t_2$. Тогда по (П.9) $\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j = (\alpha^t_i + q^t_i) - (\alpha^t_j + q^t_j)$. Поскольку $\alpha^t_i + q^t_i = 2x^t_i - q^t_i \le 0$, а $\alpha^t_{M^t_1} > 0$, то $\max\limits_{i,j \in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\} <$ $< \max\limits_{i \in N^t_1, j \in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}$. Далее доказываемое следует из (П.11).

Обобщая рассмотренные случаи, имеем, что

$$\max_{i,j \in N} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\} = \max \left\{ \max_{i,j \in N^t_1} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}, \max_{i \in N^t_1, j \in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}, \right.$$

$$\left. \max_{i \in N^t_2, j \in N^t_1} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}, \max_{i,j \in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\} \right\} < \max_{i,j \in N} \left\{\alpha^t_i - \alpha^t_j\right\}.$$

Утверждение П.1. доказано.

Следующие два утверждения П.2 и П.3 для процесса (8), (11) отчасти повторяют утверждение 2 для процесса (8), (12).

Утверждение П.2. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\left\{\alpha^t_i,\ i \in N\right\}$ *есть положительные члены, то при* $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\left\{\alpha^{t+1}_i,\ i \in N\right\}$ *также есть положительные члены.*

Доказательство утверждения П.2. Имеем $\alpha^t_{M^t} > 0$ и $M^t \in N^t_1$. По (П.5) $\alpha^{t+1}_{M^t} > \left(1 - \frac{\gamma^{t+1}_{M^t}}{2}\right) \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{M^t} \sum\limits_{j \in N^t_1} \frac{\gamma^{t+1}_j}{2} = \alpha^t_{M^t} \left(1 - \frac{\gamma^{t+1}_{M^t}}{2} - \sum\limits_{j \in N^t_1} \frac{\gamma^{t+1}_j}{2}\right)$. Если $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$, то $1 - \frac{\gamma^{t+1}_{M^t}}{2} - \sum\limits_{j \in N^t_1} \frac{\gamma^{t+1}_j}{2} > 0$ и $\alpha^{t+1}_{M^t} > 0$. Что доказывает утверждение.

Из доказанного утверждения П.2 вытекает следствие, которое может быть полезным при исследовании хода процесса и его сходимости.

Следствие. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\{\alpha^t_i, i \in N\}$ *есть положительные члены, то при* $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\left\{\alpha^{t+1}_i,\ i \in N\right\}$ *не могут быть только отрицательные и нулевые члены.*

Другими словами, могут быть только а) положительные члены, б) положительные и нулевые, в) члены с разными знаками и нулевые члены.

Утверждение П.3. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\left\{\alpha^t_i,\ i \in N\right\}$ *есть отрицательные или нулевые члены и* $N^t_1 = N$, *то при* $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\left\{\alpha^{t+1}_i,\ i \in N\right\}$ *есть отрицательные члены.*

Доказательство утверждения П.3. Из (П.8) получаем, что $\alpha_{m^t}^{t+1} < \left(1 - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m^t}^t - \alpha_{m^t}^t \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} = \alpha_{m^t}^t \left(1 - \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right)$. По условию $\alpha_{m^t}^t \le 0$, и если $1 - \sum_{j\in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2} \ge 0$, то $\alpha_{m^t}^{t+1} < 0$, т.е. в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть отрицательный член. Утверждение П.3 доказано.

Из утверждения П.3 вытекает следствие.

Следствие. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\{\alpha_i^t, i \in N\}$ *нет положительных членов и* $N_1^t = N$, *то при* $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\}$ *не могут быть только положительные и нулевые члены.*

Другими словами, могут быть только а) отрицательные члены, б) отрицательные и нулевые, в) члены с разными знаками и нулевые члены.

Для процесса (8), (11) докажем утверждение, аналогичное утверждению 4 для процесса (8), (12)

Утверждение П.4. Пусть $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N)$. *Тогда справедливы неравенства:* а) $0 < Q^{(c)} - Q^{t+1} < Q^{(c)} - Q^t$, *если* $\alpha_i^t > 0$ $(\forall i \in N)$; б) $0 < Q^{t+1} - Q^{(c)} < Q^t - Q^{(c)}$, *если* $\alpha_i^t \le 0$, $\alpha_i^{t+1} \le 0$ $(\forall i \in N)$.

Доказательство утверждения П.4. Первая часть утверждения доказывается так же, как для утверждения 4, и поэтому здесь приводить не будем. Докажем его вторую часть. Исключая равновесие, допускаем, что в $\left\{\alpha_i^t\right\}$ и $\left\{\alpha_i^{t+1}\right\}$ есть хотя бы один отрицательный член. Также случай, когда N_2^t пусто, доказан в утверждении 4. Пусть N_2^t не пусто.

Суммируя по индексу i формулы (П.8) и (П.9), с учетом (13) имеем $(1+n)\left(Q^{(c)} - Q^{t+1}\right) = \sum\limits_{j\in N} \alpha_j^{t+1} = \sum\limits_{j\in N_1^t} \left(1 - \frac{1+n}{2}\gamma_j^{t+1}\right)\alpha_j^t + \sum\limits_{j\in N_2^t} \alpha_j^t + (1+n) \sum\limits_{j\in N_2^t} q_j^t$. Тогда $0 < (1+n)\left(Q^{t+1} - Q^{(c)}\right) = \sum\limits_{j\in N} \left(-\alpha_j^{t+1}\right) < \sum\limits_{j\in N_1^t} \left(1 - \frac{1+n}{2}\gamma_j^{t+1}\right)\left(-\alpha_j^t\right) + \sum\limits_{j\in N_2^t} \left(-\alpha_j^t\right) < \max\limits_{i\in N_1^t} \left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^{t+1}\right\} \sum\limits_{j\in N_1^t} \left(-\alpha_j^t\right) + \sum\limits_{j\in N_2^t} \left(-\alpha_j^t\right) \le \sum\limits_{j\in N} \left(-\alpha_j^t\right) = (n+1)\left(Q^t - Q^{(c)}\right)$. Использовано, что по условию $0 < \max\limits_{i\in N} \left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^{t+1}\right\} < 1$.

Утверждение П.4. доказано.

Приведем еще одно вспомогательное утверждение, связанное со сменой знаков при переходе процесса (8), (11) из t-го в $(t+1)$-й момент времени.

Утверждение П.5. Если в процессе (8), (11) а) *некоторый отрицательный член последовательности* $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ *в* $\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\right\}$ *станет положительным, то все положительные члены* $\left\{\alpha_i^t, i \in N\right\}$ *сохранят свои знаки в* $\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N\right\}$; б) *некоторый положительный член последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *в* $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ *станет отрицательным, то все отрицательные члены* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *сохранят свои знаки в* $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$.

Доказательство утверждения П.5. Докажем часть а) утверждения. Пусть k — индекс отрицательного члена, переходящего в положительный. Пусть $k \in N_1^t$. По (П.8) $-\sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t > 0$, и поскольку для положительных α_i^t значение α_i^{t+1} рассчитывается по (П.8), то их знаки не изменятся. Пусть $k \in N_2^t$. По (П.9), учитывая что $2x_k^t = \alpha_k^t + 2q_k^t \le 0$, также имеем $-\sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t > 0$. Поэтому новые значения α_i^{t+1} для положительных α_i^t, рассчитанные по (П.8), будут тех же знаков. Часть а) доказана. Часть б) утверждения доказывается аналогичным образом.

Утверждение П.5 доказано.

После доказательства вспомогательных утверждений вернемся непосредственно к *доказательству утверждения 6.*

Вначале обратим внимание на последовательности только с отрицательными членами и нулевыми членами. Такая последовательность может в следующий момент времени перейти в последовательности 1) имеющие положительные члены, 2) не имеющие положительных членов.

Если реализуется первый случай, то последовательность только с отрицательными и нулевыми членами далее не встретится. Действительно, согласно следствию утверждению П.2 последовательность с хотя бы одним положительным членом не может при $\gamma_i^{t+1} \in \left(0;\ \frac{2}{1+n}\right]$ перейти в последовательность только с отрицательными и нулевыми членами. Поэтому во всех последующих моментах времени будут положительные члены.

Если реализуется второй случай, то согласно утверждению П.4 $0 < Q^{t+1} - Q^{(c)} < Q^t - Q^{(c)}$. Опять возможно, что в $(t+2)$-й момент времени окажутся только отрицательные и нулевые члены. Таким образом, последовательности только с отрицательными и нулевыми членами могут иметь место либо в начальной стадии процесса, либо на протяжении всего процесса. Последнее рассмотрим подробнее. Последовательное применение утверждения П.4 дает цепочку неравенств $Q^0 - Q^{(c)} > Q^1 - Q^{(c)} > \ldots > Q^t - Q^{(c)} > Q^{t+1} - Q^{(c)} > \ldots$ $\ldots > 0$ $(t > 1)$, из которой следует $Q^t \to Q^{(c)}$. Покажем, что $\alpha_i^t \to 0$ и $q_i^t \to q_i^{(c)}$. Пусть $\alpha_i^t \le 0$ $(\forall i \in N)$ и вначале $i \in N_2^t$. По (П.9) и (П.6) $2x_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + q_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t = \alpha_i^t + 2q_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t\setminus i} q_j^t = 2x_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t\setminus i} q_j^t > 2x_i^t$. Для $i \in N_1^t$ по (П.8) и (П.6) $2x_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} + 2q_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t + 2q_i^t + \gamma_i^{t+1}\alpha_i^t = \alpha_i^t + 2q_i^t - \sum_{j\in N_1^t\setminus\{i\}} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t = 2x_i^t - \sum_{j\in N_1^t\setminus\{i\}} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t > 2x_i^t$. Таким образом, если в последующие моменты времени последовательности будут только с отрицательными и нулевыми членами, то будут расти текущие оптимальные выпуски и после некоторого t^* окажется, что $x_i^{t^*} > 0$ $(\forall i \in N)$. Тогда при $t > t^*$ будет $i \in N_1^t = N$, по (П.8) $\alpha_i^t \to 0$, а по (14) $q_i^t \to q_i^{(c)}$. Такой процесс сходится к статичному равновесию.

Пусть теперь $\alpha_i^t > 0$ $(\forall i \in N)$. Поскольку $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$, то $x_i^t > 0$ $\forall (i \in N)$, и агенты рассчитывают свой текущий выпуск по формуле (12). То-

гда при $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ из утверждения П.4, справедливого для любого момента времени, следует неравенство $0 < Q^{(c)} - Q^{t+1} < Q^{(c)} - Q^t$, указывающее на приближение к равновесию в $(t+1)$-й момент времени. Если и в последующие моменты знаки всех членов останутся положительными, то из цепочки неравенств $Q^{(c)} - Q^t > Q^{(c)} - Q^{t+1} > \ldots > Q^{(c)} - Q^{t+k} > Q^{(c)} - Q^{t+k+1} > \ldots > 0$ $(k > 1)$ следует, что $Q^t \to Q^{(c)}$. По (П.8) $\alpha_i^t \to 0$, а по (14) $q_i^t \to q_i^{(c)}$ $(i \in N)$.

Пусть в последовательности $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ не только положительные члены. По утверждению П.1 процесс сделает последовательное приближение к равновесию, так как $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$. По утверждению П.2 в $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть положительные члены. Если в ней есть также отрицательные или нулевые члены, то процесс сделает следующее приближение к равновесию $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+2} - \alpha_j^{t+2}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}$. Если подобная ситуация повторяется на протяжении всего процесса, то по утверждению П.1 имеем $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t-1} - \alpha_j^{t-1}\right\} < \ldots < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^0 - \alpha_j^0\right\}$. Таким образом, $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку знаки $\alpha_{m_t}^t$ и $\alpha_{M_t}^t$ не совпадают, если $\alpha_{m_t}^t \neq 0$,то $\forall i \in N$ $\alpha_i^t \to 0$ при $t \to \infty$ и $Q^t \to Q^{(c)}$, $q_i^t \to q_i^{(c)}$. Процесс сходится. В дополнение отметим, что ряд полезных результатов, связанных со сменой или сохранением знаков при переходе процесса (8), (11) из t-го в $(t+1)$-й момент времен, приведены в утверждениях П.3 и П.5.

Сформулированные положения указывают на сходимость процесса (8), (11) при любых начальных выпусках агентов $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

Утверждение 6 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Myerson R.* Game Theory: Anaysis of Conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
2. *Mas-Collel A., Whinston D., Green J.* Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
3. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
4. *Новиков Д.А.* Модели стратегической рефлексии // АиТ. 2012. № 1. С. 3–18.
   Novikov D.A. Models of Strategic Behavior // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 1–19.
5. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1. С. 11–20.
6. *Васин А.А., Васина П.А., Рулева П.Ю.* Об организации рынков однородных товаров //Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 98–112.
7. *Kukushkin N.S.* Best Response Dynamics in Finite Games with Additive Aggregation // Games Econom. Behavior. 2004. No. 48. P. 94–110.
8. *Weihong H.* Theory of adaptive adjustment // Discret. Dynam. Nature Soc. 2000. V. 5. No. 4. P. 247–263.

9. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке // Управление большими системами. 2016. № 64. С. 112–136.

10. *Kamalinejad H., Majda V.J., Kebriaei H., Kian A.R.* Cournot Games with Linear Regression Expectations in Oligopolistic Markets // Math. Comput. Simulat. 2010. V. 80. No. 9. P. 1874–1885.

11. *Gao X., Zhong W., Mei S.* Convergence of a Cournot Oligopoly Game with Extrapolative Expectations. Southeast University. China, 2012.

    (http://www.ecocyb.ase.ro/32012/Xing%20Gao.pdf)

12. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого–экономическими системами // Управление большими системами. 2015. № 55. С. 362–372.

13. *Корепанов В.О.* Управление рефлексивным поведением агентов в модели олигополии Курно // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 225–249.

14. *Yang H., Zhang Y.* Complex Dynamics Analisis for Cournot Game with Bounded Rationality in Power Market // J. Electromagnet. Anal. & Appl. 2009. No. 1. P. 48–60.

15. *Agiza H.N., Elsadany A.A.* Chaotic Dynamics in Nonlinear Duopoly Game with Heterogeneous Players // Appl. Math. Comput. 2004. V. 149. No. 4. P. 843–860.

16. *Bischi G.I., Kopel M.* Equilibrium Selection in a Nonlinear Duopoly Game with Adaptive Expectations // J. Econom. Behavior & Organ. 2001. No. 46. P. 73–100.

17. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // АиТ. 2017. № 11. С. 105–121.

    Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.

18. *Дюсуше О.М.* Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Эконом. журн. ВШЭ. 2006. № 1. С. 3–32.

19. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.

20. *Puu T.* Attractors, Difurcations, & Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. Berlin: Heidelberg, 2003.

21. *Matsumoto A.* Controlling the Cournot–Nash Chaos // J. Optim. Theory Appl. 2006. V. 128. No. 2. P. 379–392.

22. *Васин А.А.* Модели динамики коллективного поведения. М.: Изд-во МГУ, 1989.

23. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.

24. *Беленький В.З., Волконский В.А. Иванков С.А. др.* Итеративные методы в теории игр и программировании. М.: Наука, 1974.

25. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

Geras'kin M.I. Modeling Reflection in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.

26. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
27. *Frisch R.* Monopoly-Polypoly-the Concert of Force in the Economy // Internat. Econom. Papers. London-N.Y., 1951. No. 1. P. 23–36. (Original 1933.)
28. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
29. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 14.08.2018

После доработки 29.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019

Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2020 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева)

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ДУОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА ПРИ НЕСОВПАДЕНИИ РАНГОВ РЕФЛЕКСИИ

Рассматривается проблема определения равновесий на рынке олигополии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения агентов рынка в случае несовпадения рангов рефлексии при различных предельных и постоянных издержках агентов. Разработана модель рефлексивной игры для рынка дуополии, позволившая получить формулы расчета информационных равновесий при несовпадении рангов рефлексии агентов и при различных предельных и постоянных издержках агентов. Показано, что опережение (запаздывание) рефлексии одного агента по сравнению с контрагентом влияет на интенсивность конкуренции на рынке олигополии и на неравномерность распределения выигрыша между агентами в пользу рефлексивного лидера.

Ключевые слова: олигополия, лидер по Штакельбергу, рефлексивная игра, равновесие по Нэшу.

DOI: 10.31857/S0005231020020099

1. Введение

В условиях олигополии [1] прибыль каждого продавца (агента) является функцией не только его действия в виде выбранного объема выпуска, но и действий остальных агентов, называемых окружением. Поэтому олигополия моделируется в форме игры [2]. Максимизирующие полезность (прибыль) каждого агента действия, т.е. наилучшие ответы, формализуемые в виде функций реакций, приводят к формированию равновесия Нэша [3] как решения соответствующей игры. Несмотря на то, что функции полезности агентов считаются известными всем агентам, при моделировании олигополии имеет место фундаментальная проблема несовершенства информированности агента о действиях окружения. Проблема заложена в самой концепции наилучших ответов и заключается в априорной неосведомленности каждого агента о том, на основе какого предположения окружение выбирает действия: предположения о неизменности действий агента, предположения о наилучшем ответе агента на действия окружения, предположения о наилучшем ответе агента на наилучший ответ окружения и т.д.

Классический подход к разрешению этой проблемы сводился к выдвижению некоторой гипотезы о поведении окружения, причем считалось, что фактические действия агентов совпадают с предположениями об этих действиях. Поэтому вектор действий агентов, являющийся решением игры по Нэшу, расценивался как реальное результирующее равновесие рынка. Исторически первой стала гипотеза А. Курно [4] об игнорировании влияния выпуска окружения на выбор данного агента. В дальнейшем в модели выбора действий агента считались заданными предположительные вариации [5], выражающие предполагаемое агентом ответное изменение выпуска контрагента, оптимизирующее критерий последнего при выбранном действии первого. В частности, модель олигополии, в которой один из агентов (лидер) информирован о том, что окружение игнорирует его действия в соответствии с гипотезой Курно, рассмотрена Г. Штакельбергом [6] в виде так называемого лидерства по Штакельбергу.

В русле классического подхода к проблеме несовершенства информированности агента современные исследователи, как правило, рассматривают линейную модель олигополии, т.е. вводят гипотезу о линейных функциях рыночного спроса и издержек агентов. Сформировался обширный корпус исследований таких равновесий в случае симметричной информированности агентов для линейной модели олигополии [7–13], а также для нелинейной модели олигополии, см. [14–18], в том числе обзоры [19, 20]. Линейные модели олигополии, как правило, незначительно уступая в адекватности нелинейным, существенно превосходят последние в результативности, позволяя получить аналитические решения. Исследования рынка олигополии с лидерством по Штакельбергу [21–24], как правило, базируются на априори заданных позициях лидера и ведомого. Кроме того, постановка проблемы сравнительного анализа позиций лидера и ведомого [25, 26] определила направление исследований состояний рынка олигополии в случае неединственности лидеров [27–29].

Другой подход разрешения проблемы несовершенства информированности базируется на анализе мыслительного процесса (рефлексии) агентов, формализуемого в виде представлений о стратегиях окружения, выдвигаемых каждым из агентов. Соответственно набору возможных представлений решение игры по Нэшу формирует набор векторов действий агентов, расцениваемых как возможные равновесия рынка. С учетом рефлексивной модели асимметрии человеческого восприятия Лефевра [30–32] под рефлексией в дальнейшем понимается процесс выдвижения агентом гипотез о возможных действиях окружения или так называемая рефлексия второго рода. Отметим, что далее рассматривается стратегическая рефлексия, при которой агент предполагает действия окружения, а не его информированность, в отличие от модели игры с неполной информированностью [33, 34]. Рефлексивный анализ оперирует также понятием глубины рефлексии, мерой которой является ранг — порядковый номер представления в следующей бесконечной последовательности: 1) представление агента о стратегиях окружения; 2) представление агента о представлениях окружения о стратегии агента; 3) представление агента о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. Исследования рефлексивных моделей на-

правлены в первую очередь на оценку оптимальной глубины стратегической рефлексии [35–38].

Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого множество представлений агентов (о стратегиях окружения или о представлениях окружения в зависимости от моделируемого ранга рефлексии) как экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Затем в каждой из этих игр находится решение игры агента с представляемыми (фантомными) агентами окружения. Поэтому решением рефлексивной игры является не реальное, а информационное равновесие — вектор действий реальных и фантомных (существующих во мнении реальных) агентов, при котором агент максимизирует полезность исходя из своей информированности об окружении, т.е. если бы окружение выбирало те действия, которые представляет этот агент. Решения всех возможных игр агента с фантомами образуют набор информационных равновесий, используемый для последующего сравнения с параметрами реальных рынков с целью оценки ранга рефлексии реальных агентов.

В модели олигополии рефлексивный анализ был впервые применен [6] (как было отмечено в [39]) в дуополии Штакельберга как «борьба за лидерство», при которой оба агента предполагают, что их контрагенты действуют как ведомые; поскольку эти предположения одновременно не могут быть реальностью, то они являются представлениями агентов, а соответствующая игра, приводящая к неравновесию Штакельберга, является рефлексивной. Рефлексивные игры агентов рынка олигополии исследованы в модели Курно – Штакельберга для первых двух рангов стратегической рефлексии [40–42], анализировались информационные равновесия при информационной рефлексии о значениях экзогенного параметра функции полезности [43], а также о параметрах функций издержек окружения [44]. Проводился [45] сравнительный анализ эффективности равновесий по Курно и Штакельбергу; рассматривались [46] динамические рефлексивные игры в модели Штакельберга и анализировалось временное влияние информационного преимущества на эффективность агентов. Оценивалась эффективность лидерства по Штакельбергу по сравнению с представлением агента о рынке как о совершенной конкуренции [47]. В модели олигополии с нелинейными функциями издержек агентов исследовалось [48–50] взаимодействие ведомых агентов и лидеров по Штакельбергу, имеющих различные ранги рефлексии. В модели дуополии с линейными функциями спроса и издержек при одинаковых предельных и постоянных издержках агентов найдены [51] информационные равновесия при наличии лидеров по Штакельбергу произвольного уровня в случае совпадающих рангов рефлексии. Однако актуальной задачей, требующей дальнейшего исследования, представляется анализ равновесий на рынке дуополии при различных предельных и постоянных издержках агентов в случае несовпадения рангов рефлексии агентов, когда один из агентов имеет опережающее рефлексивное представление («рефлексивный лидер»), а другой, соответственно, запаздывает («рефлексивный последователь»). В такой постановке оценка оптимальной глубины стратегической рефлексии произво-

дится путем сравнительного анализа эффективности опережения рефлексии одних агентов относительно других.

2. Методология

Рассмотрим следующую линейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$\Pi_i\left(Q, Q_i\right) = P\left(Q\right) Q_i - C_i\left(Q_i\right), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

при линейной модели спроса

$$P\left(Q\right) = a - bQ, \quad a, b > 0, \tag{2}$$

где совокупный выпуск равен

$$Q = \sum_{i \in N} Q_i, \tag{3}$$

и линейных функциях издержек

$$C_i(Q_i) = d_i + c_i Q_i, \quad c_i, d_i > 0, \quad c_i < a, \quad i \in N, \tag{4}$$

где Q_i, Π_i — выпуск и прибыль i-го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов; P, Q — равновесная цена и суммарный объем рынка; c_i, d_i — коэффициенты функций издержек агентов, d_i интерпретируется как постоянные издержки, c_i — предельные издержки; a, b — коэффициенты функции рыночного спроса.

Модель выбора оптимального действия агента определяет неотрицательное действие Q_i^*, максимизирующее прибыль i-го агента, зависящую также от суммарного действия всех агентов Q (символом «*» обозначено оптимальное действие). Модели выбора действий агентов при (1)–(4) записываются в следующем виде:

$$Q_i^* = \arg\max_{Q_i \geq 0} \Pi_i\left(Q, Q_i\right) = \arg\max_{Q_i \geq 0} \left\{\left(a - bQ\right) Q_i - d_i - c_i Q_i\right\}, \quad i \in N. \tag{5}$$

Равновесие Нэша [3] в системе (5) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения. Поскольку оптимальные по модели (5) действия должны удовлетворять условию первого порядка [52], то равновесие Нэша определяется из решения следующей системы уравнений (так называемых уравнений реакций):

$$\frac{\partial \Pi_i\left(Q_i, \rho_{ij}\right)}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N, \tag{6}$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i-го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j-го агента в ответ на единичный

прирост выпуска i-го агента. Поскольку согласно модели (5) оптимумы агентов зависят не только от собственного действия i-го агента Q_i, но и от действий окружения через Q, то последняя зависимость представлена в системе (6) как функция полезности $\Pi_i\left(Q_i, \rho_{o\to j}\right)$ от вектора предположительных вариаций, характеризующих влияние действий окружения на изменение Q.

Вектор предположительных вариаций i-го агента $\rho_i = \{\rho_{ij}, j \in N\}$ формализует априори неизвестную ему информацию о принципах действия окружения, поэтому система (6) имеет множество решений, зависящих от вектора $\rho = \{\rho_{ij}, i, j \in N\}$ как от параметра. Для нахождения множества возможных векторов ρ используем рефлексивный анализ, т.е. будем считать предположительные вариации некоторыми функциями предположений агентов о стратегиях окружения.

При анализе рефлексии примем следующие гипотезы: 1) агенты выбирают действия одновременно, однократно и независимо; 2) агент выбирает действия, максимизирующие его функцию полезности исходя из доступной ему информации о действиях окружения; 3) в момент выбора действий агенты располагают информацией о функциях полезности всех агентов (функциях рыночного спроса и издержек агентов), о количестве агентов, а также о том, что окружение имеет равный с ними уровень информированности; 4) агенты на каждом ранге рефлексии могут иметь представления о наилучших стратегиях окружения, а также о представлениях окружения, т.е. для всех агентов рассматривается стратегическая рефлексия второго рода[1].

Рефлексивные представления, т.е. мнения агентов о стратегиях окружения, обусловливают стратификацию агентов по уровням лидерства следующим образом: агент, вычисляя свою оптимальную реакцию, подставляет в соответствующее уравнение системы (6) некоторые предположительные вариации действий окружения, которые выбираются исходя из представлений агента — нулевые вариации соответствуют представлению об окружении как о ведомых, поэтому данный агент становится лидером первого уровня; ненулевые вариации соответствуют представлению об окружении как о лидерах, следовательно, агент становится лидером более высокого уровня. На втором ранге рефлексии агент анализирует возможные представления окружения о своей стратегии, аналогичные вышеуказанным (ведомый или лидер), и рассчитывает предположительные вариации окружения исходя из того, что окружение само является лидером более высокого уровня. Вследствие этого уровень лидерства агента становится еще выше по сравнению с первым рангом рефлексии. Отметим, что используемое далее понятие ранга рефлексии соответствует известному подходу [54][2], адаптированному применительно к задаче олигополии, в которой классически сложилась бинарная система пред-

[1] Напомним, что согласно принятой терминологии [53] рефлексия первого рода — это мнение агента о собственных представлениях о реальности; рефлексия второго рода — это мнение агента о действиях или представлениях окружения; стратегическая рефлексия — это мнение агента о действиях (стратегиях или принципах принятия решений) окружения.

[2] Напомним краткую характеристику этого подхода: «Агент имеет нулевой ранг рефлексии, если он знает только матрицу платежей. Агент обладает первым рангом рефлексии, если он считает, что его противники имеют нулевой ранг рефлексии, т.е. знают только матрицу платежей. Вообще агент с k-м рангом рефлексии предполагает, что его противники имеют $(k-1)$-й ранг рефлексии».

ставлений агентов вида «ведомый–лидер». Используемый далее термин «уровень лидерства» является расширением классического понятия лидерства по Штакельбергу [6], соответствующего первому рангу рефлексии («я думаю, что окружение является ведомыми») на случай углубления рефлексии («я думаю, что окружение думает, что я ведомый» и т.д.).

Возникающую в результате представляемую иерархию агентов запишем в виде множества

$$G = (M_0, M_1, \ldots, M_l), \tag{7}$$

где l — количество уровней лидерства агентов; M_m $(m = 0, \ldots, l)$ — множества агентов; M_0 – множество ведомых агентов; M_m $(m = 1, \ldots, l)$ — множество лидеров m-го уровня. Множество (7) есть разбиение множества агентов, удовлетворяющее ограничениям

$$M_m \cap M_j = \varnothing, \quad m \neq j, \quad M_0 \cup M_1 \cup \cdots \cup M_l = N = \{1, \ldots, n\}.$$

В силу гипотезы 4 агент имеет какие-либо представления о стратегиях окружения и его представлениях, что позволяет ему на каждом ранге рефлексии построить конкретное множество вида (7). В частности, структура множества (7) определяется следующим образом: если на первом ранге рефлексии агент представляет, что окружение выбирает стратегию ведомого, то последнее относится к множеству M_0; если в этом случае агент думает, что окружение является «классическим» лидером по Штакельбергу, то он относит окружение к множеству лидеров первого уровня M_1. Соответственно, если на втором ранге рефлексии агент представляет, что окружение думает о нем как о ведомом, т.е. само является лидером первого уровня, то оно относится к множеству M_1; если в этом случае агент представляет, что окружение думает о нем как о лидере по Штакельбергу, т.е. оно является лидером второго уровня, то окружение относится к множеству M_2. Аналогично окружение стратифицируется на последующих рангах рефлексии. Поэтому между рангом рефлексии агента и уровнем лидерства окружения имеет место следующее соотношение: уровень лидерства окружения либо равен рангу рефлексии агента, если в представлении фигурирует термин «лидер», либо на единицу меньше ранга рефлексии агента, если в представлении фигурирует термин «ведомый».

С учетом терминологии, введенной в [50], F-стратегией (стратегией ведомого агента) считается выбор агентом действия по (5) без учета действий окружения согласно гипотезе Курно [4], в результате данный агент имеет в множестве (7) уровень M_0; L-стратегия (стратегия лидера по Штакельбергу [6]) — это выбор действия по модели (5) в предположении, что окружение придерживается F-стратегии, в результате агент имеет уровень M_1. Формально эти стратегии можно записать следующим образом: если η_0-й агент выбирает F-стратегию, то в η_0-м уравнении системы (6) полагается $\rho_{\eta_0 j} = 0 \forall j \in N \backslash \eta_0$; если η_1-й агент выбирает L-стратегию, то в η_1-м уравнении системы (6) $\rho_{\eta_1 j}$ вычисляется дифференцированием по Q_{η_1} остальных $(N-1)$ уравнений (6), в которых полагается $\rho_{ij} = 0 \forall j \in N \backslash i$. В частности, для модели (5) без учета рефлексивных представлений эти стратегии имеют

классический вид [39] функций реакций ведомого агента Курно и лидера по Штакельбергу:

$$Q_i^{*F} = \frac{a - c_i}{2b} - \frac{Q_j}{2}; \quad Q_i^{*L} = \frac{a - c_i}{1{,}5b} - \frac{Q_j}{1{,}5}, \quad i, j \in N.$$

Последовательность представлений i-го агента, упорядоченная по возрастанию последовательности рангов рефлексии, записывается в виде множества

$$G_i = \left\{G_{ij}^r, j \in N \backslash i, r \in Z\right\}, \quad i \in N, \tag{8}$$

где G_{ij}^r — представляемая i-м агентом стратегия окружения на r-м ранге рефлексии; в нижнем индексе первый символ обозначает рефлексирующего агента, второй символ — номер агента окружения; r — ранг рефлексии; Z — множество целых чисел. Представляемая стратегия окружения может быть двух типов (F или L) и записывается либо в виде $G_{ij}^r = F \vee G_{ij}^r = L$, либо в виде обусловленных этими стратегиями уровней лидерства окружения $G_{ij}^r = (M_0) \vee G_{ij}^r = (M_1)$.

Для применения классического информационного регламента Штакельберга [6], определяющего равновесие при полной информированности, множество возможных рефлексивных представлений агентов (8) на r-м ранге рефлексии необходимо свести к набору множеств уровней лидерства (7) на первом ранге рефлексии. Тем самым рефлексивная игра сводится к множеству игр с полной информированностью вида

$$\Gamma = \left\langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G^1 \right\rangle, \tag{9}$$

где G^1 — система представлений всех агентов о принципах выбора действий окружением на первом ранге рефлексии в виде (7).

Определение 1. Информационное равновесие в игре двух агентов (9) *есть вектор действий агентов* $\left(Q_i^*, Q_j^*, i, j \in N\right)$, *полученный из решения задачи* (6).

В дальнейшем информационное равновесие описывается парой (ψ^*, Q^*), где $Q^* = Q_i^* + Q_j^*$, $i, j \in N$ — сумма равновесных действий агентов, $\psi^* = \frac{Q_j^*}{Q_i^*}$, $i, j \in N$ — показатель структуры равновесных действий.

Определение 2. Показатель структуры выигрыша в игре двух агентов (9) *при информационном равновесии есть величина* $\Psi^* = \frac{\Pi_j(Q_j^*)}{\Pi_i(Q_i^*)}$, $i, j \in N$.

Определение 3. Рефлексивным лидером называется j-й агент, ранг рефлексии которого больше ранга рефлексии i-го агента, называемого рефлексивным последователем, на целое число γ, которое называется параметром опережения, если $\gamma > 0$ (запаздывания, если $\gamma < 0$), т.е. $r_j = r_i + \gamma$, $\gamma \in Z$.

В случае $\gamma < 0$ рефлексивные позиции лидера и последователя меняются местами, однако представляется целесообразным сохранить введенную терминологию для идентичности понятийного аппарата при анализе рефлексии

с различными типами несовпадения рангов, как при опережении, так и при запаздывании.

Поставим задачу нахождения всех информационных равновесий в игре (9) на произвольном ранге рефлексии i-го агента при произвольном значении параметра опережения γ ранга рефлексии j-го агента.

В дальнейшем будем придерживаться следующей логики. Решение игры (9) в виде равновесного по Нэшу вектора действий Q_i^*, $i \in N$ может быть получено из системы уравнений (6), для чего должен быть задан вектор предположительных вариаций $\rho = \{\rho_{ij}, i, j \in N\}$. Этот вектор согласно определению предположительной вариации ($\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$) вычисляется дифференцированием уравнений системы (6), соответствующих окружению i-го агента. Поскольку i-й агент на первом ранге рефлексии может выдвигать предположение о двух стратегиях окружения (F или L), т.е. относить окружение либо к множеству M_0, либо к множеству M_1, то в уравнениях (6) для окружения может быть либо $\rho_{ji} = 0 \forall j \in M_0$, либо $\rho_{ji} = -\frac{1}{2} \forall j \in M_1$. На втором ранге рефлексии i-й агент также может выдвигать предположение о двух стратегиях окружения (F или L), но это означает, что, по мнению агента, окружение относит его либо к множеству M_0, либо к множеству M_1. На последующих рангах рефлексии интерпретация предположений еще более усложняется, поэтому первый этап решения игры (9) состоит в редукции предположений агентов на r-м ранге рефлексии к предположениям на первом ранге, когда вектор ρ можно вычислить непосредственно. На втором этапе решения игры (9) определяется зависимость ρ_{ij} от предположений i-го агента, сведенных к первому рангу рефлексии, как функция ранга рефлексии этого агента, т.е. вычисляется вектор ρ. На третьем этапе путем решения системы (6) вычисляется вектор Q_i^*, $i \in N$ как функция ранга рефлексии i-го агента r и параметра опережения (запаздывания) γ.

3. Результаты

Как было показано [50], представление агента о стратегиях окружения при гипотезах 1–4 может быть либо L-стратегией, либо F-стратегией. Поэтому запишем в виде (7) совокупность представлений двух агентов на r-м ранге рефлексии:

$$
\begin{gathered}
G_{t=1}^r = (M_0 = (i,j)), \quad G_{t=2}^r = (M_1 = (i,j)), \\
G_{t=3}^r = (M_0 = (i) \wedge M_1 = (j)), \quad G_{t=4}^r = (M_0 = (j) \wedge M_1 = (i)),
\end{gathered} \tag{10}
$$

где $t = 1, 2, 3, 4$ — номер игрового случая (рис. 1–4), определяющего игру (9) соответствующего вида. На рис. 1–4 использована следующая символика: $\circ$ — агент; $\square$ — представляемая агентом стратегия окружения; $\rightarrow$ — представления i-го агента; $-- \rightarrow$ — представления j-го агента; ■■■ — непоказанные стрелки; $\{$ — последовательность представлений (8) каждого агента до r-го ранга рефлексии включительно.

В соответствии с (10) возможно четыре игровых случая, схематично изображенных на рис. 1–4: идентичность представлений агентов друг о друге как о ведомых агентах (рис. 1); идентичность представлений агентов друг о друге

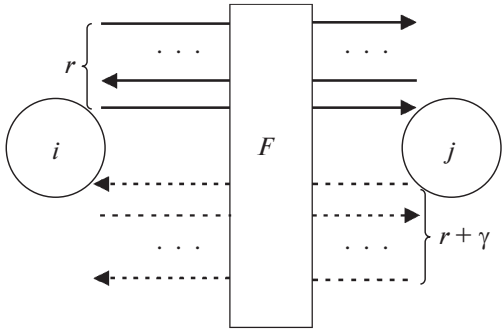


Рис. 1. Схема игры при идентичности представлений агентов друг о друге как о последователях.

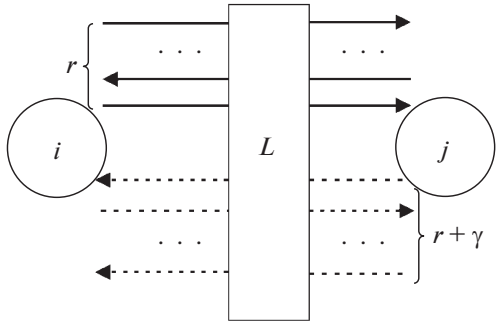


Рис. 2. Схема игры при идентичности представлений агентов друг о друге как о лидерах.

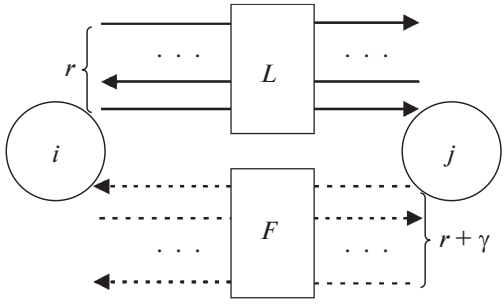


Рис. 3. Схема игры при контрадикторности представлений агентов: i-й агент считает контрагента лидером, j-й агент считает контрагента последователем.

как о лидерах по Штакельбергу (рис. 2); контрадикторность представлений агентов, когда рефлексивный последователь представляет рефлексивного лидера лидером по Штакельбергу, а последний считает контрагента ведомым (рис. 3); контрадикторность представлений агентов, когда рефлексивный последователь представляет рефлексивного лидера ведомым, а последний считает контрагента лидером по Штакельбергу (рис. 4). Отметим, что непосредственное сравнение этих случаев с возможными в реальности ситуациями

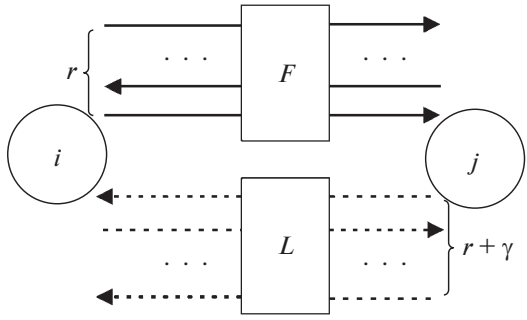


Рис. 4. Схема игры при контрадикторности представлений агентов: i-й агент считает контрагента последователем, j-й агент считает контрагента лидером.

допустимо только при $\gamma = 0$: случаи идентичности представлений не соответствуют реальности (как «борьба за лидерство»), а случаи контрадикторности представлений реалистичны, поскольку агент, которого окружение представляет лидером по Штакельбергу, считает контрагента ведомым, а последний, соответственно, представляет контрагента лидером по Штакельбергу. При $\gamma > 0$ соответствие представлений реальности устанавливается посредством анализа информационных равновесий.

Определим виды рефлексивной игры двух агентов с представлениями (10) в указанных случаях в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Рефлексивная игра двух агентов (9) *в случае несовпадения рангов рефлексии на величину γ при различных представлениях на r-м ранге рефлексии описывается следующей системой разбиений типа* (7) *на первом ранге рефлексии:*

$$G^1_{t=1} = (M_r, M_{r+\gamma}),\ M_r = (i),\ M_{r+\gamma} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_0 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_0 = (i)), \tag{11a}$$

$$G^1_{t=2} = (M_{r+1}, M_{r+\gamma+1}),\ M_{r+1} = (i),\ M_{r+\gamma+1} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_1 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_1 = (i)), \tag{11b}$$

$$G^1_{t=3} = (M_{r+1}, M_{r+\gamma}),\ M_{r+1} = (i),\ M_{r+\gamma} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_1 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_0 = (i)), \tag{11c}$$

$$G^1_{t=4} = (M_r, M_{r+\gamma+1}),\ M_r = (i),\ M_{r+\gamma+1} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_0 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_1 = (i)), \quad i, j \in N, r, \gamma \in Z. \tag{11d}$$

Формализация (11) системы представлений агентов на первом ранге рефлексии при различных видах (10) представлений агентов на r-м ранге рефлексии позволяет найти информационные равновесия в игре (9). Для этого на базе соответствующих множеств G^1 формируются функции наилучших

ответов агентов в виде системы (6), решение которой зависит от вектора предположительных вариаций на r-м ранге рефлексии.

Утверждение 2. Предположительная вариация на произвольном ранге рефлексии в уравнении реакции i-го агента, такого что $M_r = (i)$, в системе уравнений (6) *вычисляется по формуле*

$$\rho_{ij}^{r} = -\frac{r_i}{r_i + 1}. \tag{12}$$

Утверждение 3. Информационное равновесие в рефлексивной игре (9) *на произвольном ранге рефлексии для двух агентов с различными предельными издержками вычисляется по формулам*

$$\begin{aligned} Q_i^*(r_i,\gamma) &= \frac{\alpha_i\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-\alpha_j}{\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-1}, \\ Q_j^*(r_i,\gamma) &= \frac{\alpha_j\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)-\alpha_i}{\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-1}, \quad i,j\in N, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} Q^*(r_i,\gamma) &= \frac{\alpha_i\left(1-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)+\alpha_j\left(1-\frac{r_i}{r_i+1}\right)}{\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-1}, \\ \psi^*(r_i,\gamma) &= \frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)-1}{2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}}, \quad i,j\in N, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\alpha_i = \frac{a-c_i}{b}, \quad i\in N.$$

Формулы (13) представляют собой равновесные по Нэшу действия агентов в игре (9). Формулы (13), (14) выражают информационное равновесие как функцию ранга рефлексии r_i рефлексивного последователя и параметр опережения γ рефлексивного лидера $Q^*(r_i,\gamma)$, $\psi^*(r_i,\gamma)$, что позволяет анализировать влияние этих показателей на структуру равновесия в игре в виде следующего утверждения.

Рассмотрим пример применения формул (13) в случае классической игры Штакельберга, для которой $r_i = 0$, $\gamma = 1 \Rightarrow r_j = 1$. В этом случае из (13) следует, что $Q_i^*(0,1) = \frac{\frac{3}{2}\alpha_i-\alpha_j}{2}$, $Q_j^*(0,1) = \frac{2\alpha_j-\alpha_i}{2}$, а если агенты имеют идентичные параметры функций издержек $c = c_i$, $i\in N$, т.е. $\alpha = \alpha_i$, $i\in N$, то $Q_i^*(0,1) = \frac{\alpha}{4}$, $Q_j^*(0,1) = \frac{\alpha}{2}$, что совпадает с известным результатом для равновесия Штакельберга [55]: $Q^F = \frac{a-c}{4b}$, $Q^L = \frac{a-c}{2b}$.

Утверждение 4. В информационном равновесии рефлексивной игры (9) *двух агентов на произвольном ранге рефлексии структура равновесных действий неравномерна и зависит от параметра опережения и ранга рефлексии*

$$\psi^* \begin{cases} > 1, & \text{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} > \omega\left(r_i\right), \\ < 1, & \text{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \omega\left(r_i\right), \ i, j \in N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} \begin{cases} > 0, & \text{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right), \\ < 0, & \text{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta\left(r_i\right), \ i, j \in N, \end{cases} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} \begin{cases} > 0, & \text{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}\left(r_i\right), \\ < 0, & \text{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta\left(r_i\right), \ i, j \in N, \\ < 0, & \text{при} \quad \zeta\left(r_i\right) < \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \bar{\zeta}\left(r_i\right) \wedge \delta_1 > \left|\delta_2\right|, \end{cases}$$

где

$$\omega = \frac{3 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}}{3 - \frac{r_i}{r_i+1}}, \quad \zeta = \frac{1}{2 - \frac{r_i}{r_i+1}}, \quad \bar{\zeta} = 2 - \frac{r_i + \gamma}{r_i + \gamma + 1},$$

$$\delta_1 = \frac{\alpha_j}{\alpha_i \left(r_i + 1\right)^2} \left(2 - \bar{\zeta} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right), \quad \delta_2 = \frac{1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_i \zeta}}{\left(r_i + \gamma + 1\right)^2}.$$

Структура действий в информационном равновесии рефлексивной игры двух агентов согласно формулам (15) в общем случае зависит от ранга рефлексии и параметра опережения через функции $\omega\left(r_i\right)$, $\zeta\left(r_i\right)$, $\bar{\zeta}\left(r_i\right)$. Однако для практически важного частного случая существенного превышения параметра обратной функции спроса a над предельными издержками агентов c_i, c_j можно выявить однозначный характер зависимости $\psi^*\left(r_i, \gamma\right)$.

Утверждение 5. В информационном равновесии рефлексивной игры (9) *двух агентов на произвольном ранге рефлексии при условии* $a \gg \max\left\{c_i, c_j\right\}$, $c_i, c_j > 0$, $i, j \in N$ *неравномерность действий растет с увеличением параметра опережения рефлексии и убывает с увеличением ранга рефлексии:*

$$\psi^* \begin{cases} > 1, & \text{если} \quad \gamma \geq 1, \\ < 1, & \text{если} \quad \gamma \leq -1, |\gamma| < r_i, \end{cases} \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0. \tag{15a}$$

Результат игры (9) оценивается не только по параметрам информационного равновесия (14), но и по распределению выигрыша (прибыли) между агентами, определенному в виде следующего утверждения.

Утверждение 6. Показатель структуры выигрыша равен

$$\Psi^* = \frac{\left(a - bQ^* - c_j\right) \psi^* Q^* - \left(1 + \psi^*\right) d_j}{\left(a - bQ^* - c_i\right) Q^* - \left(1 + \psi^*\right) d_i}, \quad i, j \in N, \tag{16}$$

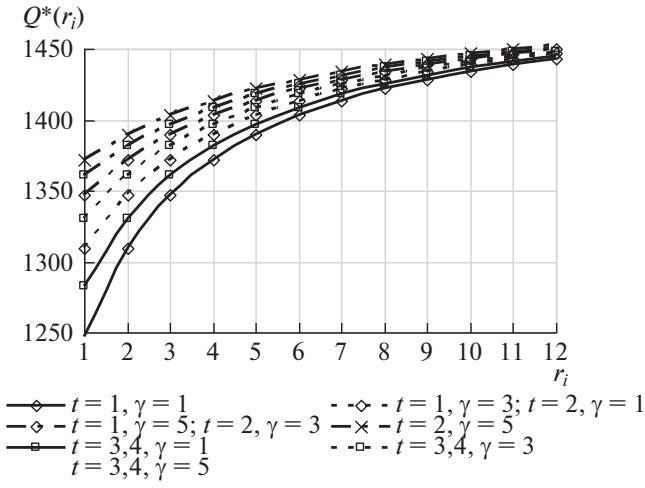


Рис. 5. Суммарное действие агентов (млрд мин) в зависимости от ранга рефлексии.

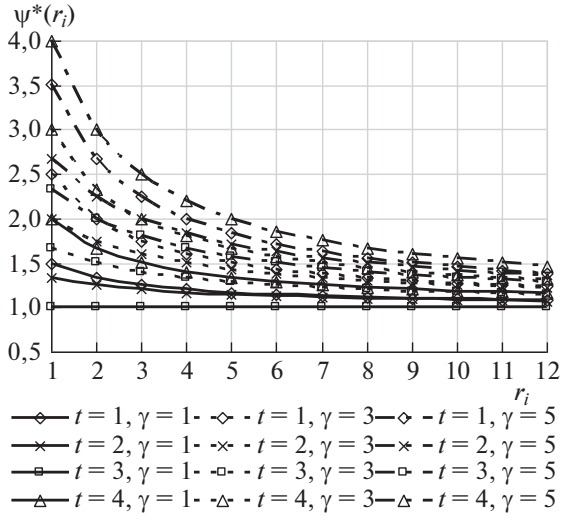


Рис. 6. Показатель структуры равновесных действий агентов в зависимости от ранга рефлексии.

а при условиях $P(Q^*) \gg \max\{c_i, c_j\} \wedge P(Q^*)\, Q^* \gg \max\{d_i, d_j\}$, $i, j \in N$, *равен* $\Psi^* \approx \psi^*$.

Формула (16) определяет полезности агентов в равновесии Нэша в относительной форме; абсолютные равновесные значения полезностей вычисляются на основе равновесных действий (13) через функции полезности агентов (1).

Рассмотрим модельный пример расчета информационных равновесий рынка дуополии на основе данных для двух агентов ($i = 1$, $j = 2$), полученных [53] для телекоммуникационного рынка России. Коэффициенты регрес-

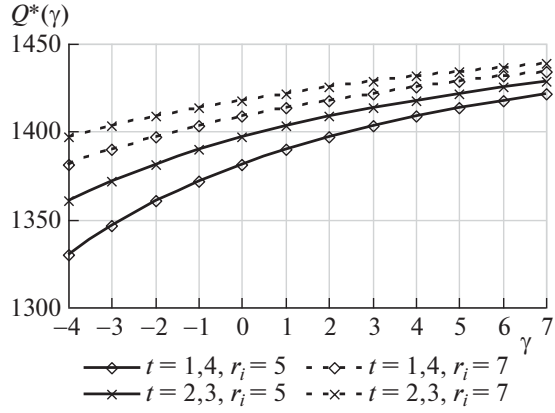


Рис. 7. Суммарное действие агентов (млрд мин) в зависимости от параметра опережения рефлексии.

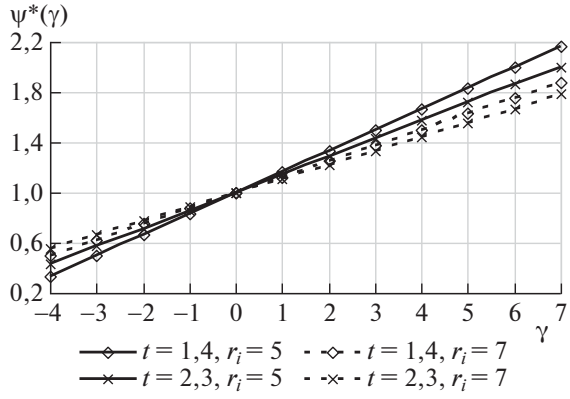


Рис. 8. Показатель структуры равновесных действий агентов в зависимости от параметра опережения рефлексии.

сионных моделей функции спроса (2) и функций издержек агентов (4) приведены в табл. 1.

На рис. 5, 6 показаны параметры информационных равновесий (суммарного действия агентов и показателя структуры равновесных действий) для различных игровых случаев ($t = 1, 2, 3, 4$) в зависимости от ранга рефлексии i-го агента, рассчитанные по формулам (14).

Таблица 1. Коэффициенты функции спроса, функций издержек агентов

Коэффициенты функции спроса		Коэффициенты функций издержек			
		Агент 1		Агент 2	
a, руб	b, руб/млн мин	c, тыс. руб/ мин	d, млрд руб	c, тыс. руб/ мин	d, млрд руб
1,85	0,0000001	0,0004	63,4	0,0003	58,6

На рис. 7, 8 показаны параметры информационных равновесий (суммарного действия агентов и показателя структуры равновесных действий) для различных игровых случаев ($t = 1, 2, 3, 4$) в зависимости от параметра опережения рефлексии γ при значениях ранга рефлексии i-го агента $r_i = 5, 7$, рассчитанные по формулам (14).

4. Обсуждение

Структуры игры (11) показывают, что 1) на r-м ранге рефлексивный последователь имеет статус лидера по Штакельбергу r-го уровня, если в его представлении контрагент ведомый, и $(r + 1)$-го уровня, если в его представлении контрагент — лидер; 2) рефлексивный лидер имеет статус, превышающий на величину γ статус рефлексивного последователя в случаях 1, 2 идентичности представлений агентов; 3) статус рефлексивного лидера выше статуса рефлексивного последователя на величину $(\gamma - \varepsilon)$ в случаях 3, 4 контрадикторности представлений агентов, где ε характеризует степень контрадикторности представлений, $\varepsilon = m_i - m_j$, в частности $\varepsilon = 1 - 0 = 1$ в случае 3, $\varepsilon = 0 - 1 = -1$ в случае 4.

Формулы информационных равновесий (14) позволяют оценить степень близости равновесия к конкурентному состоянию [56], поскольку чем больше величина Q^*, тем ниже равновесная рыночная цена, следовательно, тем сильнее конкуренция агентов. Показатель структуры равновесных действий ψ^* характеризует эффективность опережения рефлексивного представления для рефлексивного лидера: с ростом ψ^* увеличивается дифференциация рынка в пользу рефлексивного лидера.

Формулы (15) определяют зависимость структуры равновесных действий и тенденций изменения этой структуры от соотношения параметров α для рефлексивного лидера (α_j) и рефлексивного последователя (α_i). В практически реализуемом случае (15а) $a \gg c_i, c_j$, $i, j \in N$, т.е. когда параметр обратной функции спроса a, интерпретируемый как максимальная цена спроса, существенно превышает предельные издержки агентов [57], сумма действий всегда перераспределяется в пользу рефлексивного лидера ($\psi^* > 1$), неравномерность распределения действий в пользу рефлексивного лидера возрастает с ростом параметра опережения ($\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$) и убывает с ростом ранга рефлексии ($\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0$).

Анализ результатов численного эксперимента приводит к следующим выводам.

Из анализа рис. 5, во-первых, следует, что суммарное действие (суммарный выпуск) агентов возрастает, следовательно, равновесная рыночная цена снижается, с увеличением ранга рефлексии r_i и параметра опережения рефлексии γ, что свидетельствует об усилении конкуренции, но различие суммарных выпусков с ростом γ сокращается — значит, рефлексия агентов не способна бесконечно развивать конкуренцию.

Во-вторых, рис. 5 показывает, что при одном и том же значении параметра опережения рефлексии ($\gamma = \text{const}$) имеет место следующее соотношение

между суммарными действиями агентов:

$$Q^* (t = 2) > Q^* (t = 3, 4) > Q^* (t = 1) ,$$

которое позволяет классифицировать влияние типа рефлексивных представлений агентов на интенсивность их конкуренции следующим образом. Случай $t = 2$ приводит к наиболее сильной конкуренции, поскольку при этом достигается наибольшая сумма действий агентов, что ведет к наименьшей равновесной рыночной цене по (2). Случай $t = 1$ дает наименьшее суммарное действие, что ведет к наибольшей равновесной цене, т.е. наиболее слабому влиянию рефлексии агентов на интенсивность конкуренции. Следовательно, полученные выводы о влияние типа рефлексивных представлений агентов на динамику суммарного действия согласуются с классическими результатами, полученными при отсутствии рефлексии [39].

Из анализа рис. 6, во-первых, следует, что неравномерность равновесных действий снижается с ростом ранга рефлексии r_i, подтверждая свойство (15а), что согласуется с известным для случая совпадения рангов рефлексии положением о неэффективности рефлексии [54]. Во-вторых, при $\gamma = \text{const}$ имеет место следующее соотношение между показателями структуры равновесных действий:

$$\psi^* (t = 4) > \psi^* (t = 1) > \psi^* (t = 2) > \psi^* (t = 3) ,$$

которое позволяет оценить влияние типа рефлексивных представлений агентов на эффективность опережающего представления для рефлексивного лидера.

Суммарное действие агентов (рис. 7) возрастает с увеличением параметра опережения рефлексии γ, т.е. конкуренция усиливается, поскольку при этом фактически возрастает ранг рефлексивного лидера. Также из рис. 7 следует, что характер зависимости $Q^* (\gamma)$ в различных игровых случаях имеет закономерность

$$Q^* (\gamma, t = 2) = Q^* (\gamma, t = 3) > Q^* (\gamma, t = 1) = Q^* (\gamma, t = 4) ,$$

позволяющую оценить влияние опережения рефлексии на интенсивность конкуренции.

Из анализа рис. 8 следует, что неравномерность равновесных действий возрастает с ростом параметра опережения рефлексии, подтверждая свойство (15а). Характер зависимости $\psi^* (\gamma)$ имеет следующую закономерность в случае $\gamma > 0$:

$$\psi^* (\gamma, t = 2) = \psi^* (\gamma, t = 3) < \psi^* (\gamma, t = 1) = \psi^* (\gamma, t = 4) ,$$

а в случае запаздывания рефлексии ($\gamma < 0$) имеет место обратное соотношение, т.е. вид функции влияния опережения рефлексии на неравномерность равновесных действий зависит только от представления рефлексивного последователя. Неравномерность равновесных действий в случаях $t = 2, 3$ одинакова и не превышает этого показателя в случаях $t = 1, 4$ при любом $\gamma > 0$.

5. Заключение

Исследована проблема поиска равновесий на рынке олигополии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения агентов рынка в случае несовпадения рангов рефлексии. Сформированы модели рефлексивных игр для рынка дуополии в случаях идентичности представлений агентов друг о друге как о ведомых агентах, идентичности представлений агентов друг о друге как о лидерах по Штакельбергу, противоположности представлений агентов, один из которых представляет контрагента ведомым, а другой — лидером. Разработаны механизмы установления равновесия рынка дуополии при данном многообразии рефлексивных представлений агентов на одинаковых рангах рефлексии. Моделирование игры в зависимости от ранга рефлексии показало влияние опережения (запаздывания) рефлексии одного агента по сравнению с контрагентом, во-первых, на интенсивность конкуренции, во-вторых, на неравномерность распределения выигрыша между агентами в пользу рефлексивного лидера.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Представления агентов на произвольном ранге рефлексии i-го агента $r_i = \eta$ при произвольном значении параметра опережения $\gamma = \theta$ записаны в табл. 2. Представления агентов на первом ранге рефлексии рассчитаны в табл. 2 по формуле [51]

$$G_{ij}^1 = (M_{m+r-1})\,\forall\, G_{ij}^r = (M_m)\,, \quad j \in N\backslash i, \quad r \in Z, \quad i \in N.$$

Рефлексивная игра в каждом случае получена по наилучшему ответу [51] $BR_i\left(G_{ij}^1\right) \in M_{m+1}\ \forall G_{ij}^1 = (M_m)$ на представления агентов, приведенные к первому рангу рефлексии. Аналогичные результаты можно получить при $r_i = \eta + 1$, $\gamma = \theta + 1$, поэтому по индукции формулы (11) доказаны.

Доказательство утверждения 2. Уравнение (6) j-го агента для задачи (5) имеет вид $a - bQ - bQ_i\left(1 + \rho_{ji}^r\right) - c_i = 0$, $i, j \in N$, откуда следует уравнение реакции j-го агента $Q_j = \frac{\alpha_i - Q_i}{2+\rho_{ji}^r}$, $i, j \in N$. Предположительные вариации для уравнения реакции i-го агента получены дифференцированием

Таблица 2. Структуры игры двух агентов в различных случаях рефлексивных представлений при $r_i = \eta$, $\gamma = \theta$, $r_j = \eta + \theta$

Случай	1	2	3	4
G_{ij}^r	M_0	M_1	M_1	M_0
G_{ij}^1	$M_{\eta-1}$	M_η	M_η	$M_{\eta-1}$
G_{ji}^r	M_0	M_1	M_0	M_1
G_{ji}^1	$M_{\eta+\theta-1}$	$M_{\eta+\theta}$	$M_{\eta+\theta-1}$	$M_{\eta+\theta}$
G^r	$(M_\eta, M_{\eta+\theta})$	$(M_{\eta+1}, M_{\eta+\theta+1})$	$(M_{\eta+1}, M_{\eta+\theta})$	$(M_\eta, M_{\eta+\theta+1})$

этого уравнения по Q_i для $r = 0, 1, 2, \ldots, \theta$:

$$r_i = 1 \Rightarrow \rho_{ji}^0 = 0 \Rightarrow \rho_{ij}^1 = -\frac{1}{2},$$
$$r_i = 2 \Rightarrow \rho_{ji}^1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \rho_{ij}^2 = -\frac{2}{3},$$
$$r_i = 3 \Rightarrow \rho_{ji}^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \rho_{ij}^3 = -\frac{3}{4},$$
$$r_i = \theta \Rightarrow \rho_{ji}^{\theta-1} = -\frac{\theta-1}{\theta} \Rightarrow \rho_{ij}^{\theta} = -\frac{\theta}{\theta-1},$$

поскольку для $r = \theta + 1$ выражение аналогично, то по индукции формула (12) доказана.

Доказательство утверждения 3. Система уравнений реакций (6) в задачах выбора (5) на произвольном ранге рефлексии для двух агентов с различными предельными издержками

$$(2 + \rho_{ij}^r)Q_i + Q_j = \alpha_i, \quad Q_i + (2 + \rho_{ji}^r)Q_j = \alpha_j,$$

имеет решение

$$Q_i^* = \frac{\alpha_i(2 + \rho_{ji}^r) - \alpha_j}{(2 + \rho_{ij}^r)(2 + \rho_{ji}^r) - 1}, \quad Q_j^* = \frac{\alpha_j(2 + \rho_{ij}^r) - \alpha_i}{(2 + \rho_{ij}^r)(2 + \rho_{ji}^r) - 1}, \quad i, j \in N,$$

подстановка в которое формулы (12) дает (13). Нахождение суммы и отношения (13) дает (14).

Доказательство утверждения 4. Из (14) следует, что $\psi^* > 1$, если $\alpha_j \left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) - \alpha_i > \alpha_i \left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right) - \alpha_j$; далее, $\alpha_j \left(3 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) > \alpha_i \left(3 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)$; поскольку $\alpha_i, \alpha_j > 0$, то это неравенство дает $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \omega\left(r_i\right)$. Дифференцирование $\psi^*\left(r_i, \gamma\right)$ по γ дает

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} = \frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) - 1}{\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2} \frac{1}{\left(r_i + \gamma + 1\right)^2};$$

неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$ выполняется, если $\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) - 1 > 0$, что дает $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right)$. Дифференцирование функции $\psi^*\left(r_i, \gamma\right)$ по r_i дает

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} = -\frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_i(r_i+1)^2}\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right) + \frac{1}{(r_i+\gamma+1)^2}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right)\right)}{\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2} =$$
$$= -\frac{\delta_1 + \delta_2}{\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0$ выполняется в следующих случаях:

i) если

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} < 2 - \frac{r_i + \gamma}{r_i + \gamma + 1} = \bar{\zeta}\left(r_i\right), \tag{П.1}$$

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \frac{1}{2 - \frac{r_i}{r_i+1}} = \zeta\left(r_i\right). \tag{П.2}$$

Обозначим $\beta = \frac{r_i}{r_i+1}$, $\bar{\beta} = \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}$, $\beta, \bar{\beta} < 1$ $\forall r_i \geq 1$, $|\gamma| < r_i$. Поскольку $2 - \bar{\beta} - \frac{1}{2-\beta} = \frac{\left(2-\bar{\beta}\right)(2-\beta)-1}{2-\beta} > 0$, то $\bar{\zeta}\left(r_i\right) > \zeta\left(r_i\right)$, значит неравенство (П.2) является необходимым условием для неравенства (П.1), а неравенство (П.2) соответствует (15).

ii) если $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \bar{\zeta}\left(r_i\right) \wedge \frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right) \wedge \delta_1 > |\delta_2|$, что соответствует (15).

iii) если $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}\left(r_i\right) \wedge \frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta\left(r_i\right) \wedge \delta_2 > |\delta_1|$, что противоречит $\bar{\zeta}\left(r_i\right) > \zeta\left(r_i\right)$.

Неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} > 0$ выполняется, если

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}\left(r_i\right) \tag{П.3}$$

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right). \tag{П.4}$$

В случаях $\gamma \geq 1$ и $\gamma \leq -1$, $|\gamma| < r_i$ неравенство (П.3) является необходимым условием для неравенства (П.4), а неравенство (П.3) соответствует (15).

Доказательство утверждения 5. Покажем, что $\psi^* > 1$: при $\gamma \geq 1$ выполняется $\frac{r_i}{r_i+1} < \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} < 1$ $\forall r_i \geq 1$, значит $3 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} < 3 - \frac{r_i}{r_i+1}$, поэтому $\omega\left(r_i\right) < 1$ $\forall i \in N$. Из (14) следует, что при $\psi^* > 1$ выполняется $\alpha_j > \omega\left(r_i\right)\alpha_i$, откуда $\frac{a-c_j}{b} > \omega\left(r_i\right)\frac{a-c_i}{b}$; поскольку $b > 0$, это равносильно $a - c_j > \omega\left(r_i\right)\left(a - c_i\right)$, или

$$a\left(1 - \omega\left(r_i\right)\right) > c_j - \omega\left(r_i\right)c_i. \tag{П.5}$$

Если $c_j - \omega\left(r_i\right)c_i < 0$, то (П.5) верно для всех $c_i, c_j > 0$; если $c_j - \omega\left(r_i\right)c_i > 0$, то пусть $\exists c > 0$: $c > c_j - \omega\left(r_i\right)c_i$, $c > \max\left\{c_i, c_j\right\}$, тогда (П.5) верно при $a\left(1 - \omega\left(r_i\right)\right) > c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{1}{1-\omega(r_i)} \Rightarrow a \gg c$, поскольку $\omega\left(r_i\right) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right)$; так как $c > \max\left\{c_i, c_j\right\}$, то при условии $a \gg \max\left\{c_i, c_j\right\}$ верно $\psi^* > 1$. Случай $\psi^* < 1$ доказывается аналогично.

Покажем, что выполняется неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$, которое верно при

$$a\left(1 - \zeta\left(r_i\right)\right) > c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i. \tag{П.6}$$

Поскольку $\zeta\left(r_i\right) < 1$ $\forall r_i \geq 1$, то если $c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i < 0$, то (П.6) верно для всех $c_i, c_j > 0$; если $c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i > 0$, то пусть $\exists c > 0$: $c > c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i$, $c > \max\left\{c_i, c_j\right\}$, тогда (П.6) верно при $a\left(1 - \zeta\left(r_i\right)\right) > c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{1}{1-\zeta(r_i)} \Rightarrow a \gg c$, поскольку $\zeta\left(r_i\right) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$; так как $c > c_i, c_j$, то при условии $a \gg \max\left\{c_i, c_j\right\}$ верно $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$. Случай $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} < 0$ доказывается аналогично.

Покажем, что $\frac{\partial\psi^*}{\partial r_i} > 0$. При $\gamma \geq 1$, $\gamma \leq -1$, $|\gamma| < r_i$ верно $\bar{\zeta}(r_i) > 1$, $\bar{\zeta}(r_i) \in \in (1; 1,5]$. Из (15) следует

$$a\left(\bar{\zeta}(r_i) - 1\right) < \bar{\zeta}(r_i)\, c_i - c_j. \tag{П.7}$$

Если $\bar{\zeta}(r_i)c_i - c_j < 0$, то (П.7) не верно для всех $c_i, c_j > 0$; если $\bar{\zeta}(r_i)c_i - c_j > 0$, то пусть $\exists c > 0$: $c < \bar{\zeta}(r_i)\, c_i - c_j$, $c < \max\{c_i, c_j\}$, тогда (П.7) верно при $a(\bar{\zeta}(r_i) - 1) < c \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{1}{\bar{\zeta}(r_i)-1}$, что противоречит условию $a \gg \max\{c_i, c_j\} > c$. Значит случай $\frac{\partial\psi^*}{\partial r_i} > 0$ при $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}(r_i)$ исключен. Поскольку $\zeta(r_i) < 1$, то из (15) при $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta(r_i)$ следует, что

$$a\left(1 - \zeta(r_i)\right) < c_j - \zeta(r_i)\, c_i. \tag{П.8}$$

По аналогии с (П.7) это исключено. Из (П.7), (П.8) следует, что возможен только случай $\zeta(r_i) < \frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \bar{\zeta}(r_i)$, при котором по (15) $\frac{\partial\psi^*}{\partial r_i} < 0$.

Доказательство утверждения 6. Из формулы показателя структуры равновесных действий $\psi^* = \frac{Q_j^*}{Q_i^*}$ следует, что $\psi^* = \frac{Q^* - Q_i^*}{Q_i^*} \Rightarrow Q_i^* = \frac{Q^*}{1+\psi^*}$, $Q_j^* = \frac{\psi^* Q^*}{1+\psi^*}$. Подстановка этих выражений в формулу прибыли (1), а затем в формулу показателя структуры выигрыша дает $\Psi^* = \frac{(a-bQ^*-c_j)\psi^* Q^* - (1+\psi^*)d_j}{(a-bQ^*-c_i)Q^* - (1+\psi^*)d_i}$. Если $P(Q^*) \gg \max\{c_i, c_j\}$, и $P(Q^*)Q^* \gg \max\{d_i, d_j\}$, то $\Psi^* = \frac{(a-bQ^*)\psi^* Q^*}{(a-bQ^*)Q^*} = \psi^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mas-Collel A., Whinston M., Green J.* Microeconom. Theory. N.Y.: Oxford Univer. Press, 1995.
2. *Shapiro C.* Theories of Oligopoly Behavior // Discussion paper 126. Woodrow Wilson School. Princeton Univer. Press, 1987.
3. *Nash J.* Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
4. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
5. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univers. Press, 1924.
6. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934.)
7. *Karmarkar U.S., Rajaram K.* Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // Eur. J. Oper. Res. 2012. No. 223 (3). P. 680–689.
8. *Ledvina A., Sigar R.* Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // Math. Financ. Econom. 2012. No. 6(4). P. 261–293.
9. *Currarini S., Marini M.A.* Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // Appl. Math. Scie. 2013. No. 7 (1-4). P. 197–200.
10. *Vasin A.* Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // Procedia Comput. Sci. 2014. No. 31. P. 124–132.
11. *Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J.* Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // 2016 IEEE Int. Conf. Commun., ICC 2016. No. 7511340.

12. *Lorenczik S., Panke T.* Assessing Market Structures in Resource Markets — An Empirical Analysis of the Market for Metallurgical Coal Using Various Equilibrium Models // Energy Econom. 2016. No. 59. P. 179–187.

13. *Li X., Xu X., Sun Y.* Advance Selling Strategies for Oligopolists by Considering Product Diffusion Effect // Kybernet. 2016. No. 45(5). P. 744–759.

14. *Naimzada A.K., Sbragia L.* Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes //Chaos, Solit. Fractal. 2006. No. 29 (3). P. 707–722.

15. *Askar S., Alnowibet K.* Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // Chaos, Solit. Fractal. 2016. No. 84. P. 15–22.

16. *Naimzada A., Tramontana F.* Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // J. Difference Equat. Appl. 2015. No. 21 (7). P. 553–563.

17. *Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F.* Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Geterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015 No. 23 (1–3). P. 245–262.

18. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the Nash-Optimal Strategies in the Meta-Game / Ceberio M., Kreinovich V. (eds.). Constraint Programming and Decision Making: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 100. Springer, Cham, 2018. P. 95–100.

19. *Colacicco R.* Ten Years of General Oligopolistic Equilibrium: A survey // J. Econom. Surveys. 2015. No. 29 (5). P. 965–992.

20. *Jørgensen S., Zaccour G.* A Survey of Dame-theoretic Models of Cooperative Advertising // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 237. No. 1. P. 1–14.

21. *Ino H., Matsumura T.* Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model // B.E. J. Theoret. Econom. 2016. No. 16 (1). P. 243–265.

22. *Peng Y., Lu Q., Xiao Y.* A Dynamic Stackelberg Duopoly Model with Different Strategies // Chaos, Solitons Fractals. 2016. Vol. 85. P. 128–134.

23. *Hayakawa H.* The Tragedy of the Commons: the Logic of Entry and the Dynamic Process under Ttwo Scenarios // Eurasian Econom. Rev. 2017. No. 7 (3). P. 311–328.

24. *Yoo T.-H., Ko W., Rhee C.-H., Park, J.-K.* The Incentive Announcement Effect of Demand Response on Market Power Mitigation in the Electricity Market // Renewable Sustainable Energy Rev. 2017. No. 76. P. 545–554.

25. *Sherali H.D.* Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis // Oper. Res. 1984. No. 32 (2). P. 390–404.

26. *Boyer M., Moreaux M.* Being a Leader or a Follower. Reflections on the Distribution of Roles in Duopoly // Int. J. Industr. Organ. 1987. No. 5(2). P. 175–192.

27. *DeMiguel V., Xu H.* A Stochastic Multiple-leader Stackelberg Model: Analysis, Computation, and Application // Oper. Res. 2009. No. 57 (5). P. 1220–1235.

28. *Julien L.A.* On Noncooperative Oligopoly Equilibrium in the Multiple Leader — follower Game // Eur. J. Oper. Res. 2017. No. 256 (2). P. 650–662.

29. *Solis C.U., Clempner J.B., Poznyak A.S.* Modeling Multileader — Follower Noncooperative Stackelberg Games // Cybernet. Syst. 2017. No. 47 (8). P. 650–673.

30. *Лефевр В.А.* О самоорганизующихся и саморефлексивных системах и их исследовании. Проблемы исследования систем и структур // Матер. конф. М.: Изд-во АН СССР, 1965. С. 61–68.

31. *Lefebvre V.* Reflexive Analysis of Groups (Book Chapter) / Comput. Methods Counterterr. 2009. P. 173–210.

32. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publish., 2010.

33. *Rgo L., Halpern J.* Generalized Solution Concepts in Games with Possibly Unaware Players // Int. J. Game Theory. 2012. No. 41. P. 131–155.

34. *Heifetz A., Meier M., Schipper B.C.* Unawareness, Beliefs, and Speculative Trade // Games Econom. Behavior. 2013. No. 77 (1). P. 100–121.

35. *Alaoui L., Penta A.* Endogenous Depth of Reasoning // Rev. Econom. Studies. 2016. No. 83(4). P. 1297–1333.

36. *Kneeland T.* Coordination under Lmited Depth of Reasoning // Games Econom. Behavior. 2016. No. 96. P. 49–64.

37. *Brocas I., Carrillo J.D., Wang W., Camerer C.F.* Imperfect Choice or Imperfect Attention? Understanding Strategic Thinking in Private Information Games // Rev. Econom. Studies. 2014. No. 81 (3). P. 944–970.

38. *Crawford V.P., Costa-Gomes M.A., Iriberri N.* Structural Models of Nonequilibrium Strategic Thinking: Theory, Evidence, and Applications // J. Econom. Literat. 2013. No. 51 (1). P. 5–62.

39. *Fellner W.* Competition among the Few. N.Y.: Knopf A. 1949.

40. *Korepanov V.O., Novikov D.A.* The Reflexive Partitions Method in Models of Collective Behavior and Control // Autom. Remote Control. 2012. Vol. 73. No. 8. P. 1424–1441.

41. *Chkhartishvili A.G.* Reflexive games: Transformation of Awareness Structure // Autom. Remote Control. 2010. Vol. 71. No. 6. P. 1208–1216.

42. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advances Syst. Sci. Appl. 2014. No. 3. P. 254–277.

43. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49 (32). P. 19–23.

44. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке// УБС. 2016. № 64. С. 112–136.

45. *Liu Y., Gao L., Guan J.* Marketing Strategy of Price Competition and Product Differentiation in Duopoly Enterprises with Asymmetric Information // Int. Conf. Servic. Syst. Servic. Management, Proc. of ICSSSM'05. 2005. No. 1. (1499557). P. 665–668.

46. *Gilpatric S.M., Li Y.* Information Value under Demand Uncertainty and Endogenous Market Leadership // Econom. Inquiry. 2015. No. 53 (1). P. 589–603.

47. *Филатов А.Ю.* Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2015. Т. 13. С. 72—83.

48. *Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G.* Structural Modeling of Oligopoly Market under the Nonlinear Functions of Demand and Agents' Costs // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 2. P. 332–348.

49. *Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G.* Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 9. P. 1631–1650.

50. *Geraskin M.I.* Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market// Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 5. P. 841–859.

51. *Geraskin M.I.* Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // Kybernet. 2017. No. 46(6). P. 1052–1067.

52. *Bresnahan T.* Duopoly Models with Consistent Conjectures // Amer. Econom. Rev. 1981. 7 No. 1. P. 934–945.

53. *Гераськин М.И., Бирюкова И.А.* Анализ рефлексивной игры агентов на телекоммуникационном рынке для случая двух рефлексирующих агентов // Актуальные проблемы экономики и права. 2018. Т. 12 (3). С. 468–480.

54. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

55. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. 1971.

56. *Balash V., Sidorov S., Faizliev A.* Analysis of news flow dynamics based on the company co-mention network characteristics // Studies in Comput. Intelligence. 2019. No. 813. P. 521–533.

57. *Sidorov S.P., Faizliev A.R., Balash V.A.* A long memory property of economic and financial news flows // Int. J. Data Analysis Techniques Strategies. 2018. No. 10(4). P. 406–420.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 02.02.2018

После доработки 28.03.2019

Принята к публикации 18.07.2019

© 2020 г. **И.В. РОДИОНОВ, канд. физ.-мат. наук (vecsell@gmail.com)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Математический институт им. В.А. Стеклова, РАН, Москва),
А.Н. СОЗОНТОВ, канд. биол. наук (a.n.sozontov@gmail.com)
(Институт экологии растений и животных УрО РАН, Екатеринбург)

О ДОВЕРИТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ НА ОСНОВЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СХОДСТВА[1]

Рассматривается задача оценивания точности количественных коэффициентов сходства. Для этого вводится новое понятие меры сходства соответствующего коэффициента. Показано, что состоятельными оценками своих мер сходства являются только частотные формы количественных коэффициентов сходства. Получены асимптотические доверительные интервалы для мер сходства Ружички и Брея–Кертиса на основе одноименных коэффициентов. Также предложен критерий однородности двух совокупностей на основе упомянутых коэффициентов.

Ключевые слова: коэффициент сходства, доверительное оценивание, критерий однородности, индекс Брея–Кертиса, индекс Жаккара.

DOI: 10.31857/S0005231020020105

1. Введение

Коэффициенты сходства (КС), изначально предложенные биологами, нашли широкое применение в химии, социологии, лингвистике, юриспруденции и т.д., а также в методах работы с многомерными данными, в частности они легли в основу некоторых форм кластерного анализа. В настоящее время насчитывается от нескольких десятков до нескольких сотен КС (см., например, [1]), однако статистическая теория, описывающая КС, практически не развита. Так, при разных соотношениях между объемами выборок большинство используемых количественных КС (определения см. далее), по сути, оценивают различные величины, тогда как данные, используемые для построения качественных КС, часто бывают достаточно бедны, чтобы делать надежные статистические выводы. Существующие методы оценивания точности КС либо основаны на чрезвычайно узких предположениях типа равномерной распределенности видов в совокупности (наиболее часто — для качественных КС), либо вообще не носят строгого математического характера. Предпринято также несколько попыток построить бутстрепные доверительные интервалы для некоторых КС. В настоящей статье получены точные асимптотические доверительные интервалы для наиболее популярных количественных коэффициентов сходства Брея–Кертиса и Ружички и предложен критерий проверки гипотезы однородности двух совокупностей на основе предыдущего результата.

[1] Разделы 1 и 2 статьи выполнены И.В. Радионовым за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00290) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Пусть X и Y — два дескриптивных множества [2, 3], описывающие две сравниваемые выборки, т.е. конечные множества видов (типов объектов) такие, что каждому виду сопоставлено количество его попаданий в соответствующую выборку. Иными словами, занумеруем виды, встретившиеся в двух исследуемых выборках, числами от 1 до S и обозначим через X_i и Y_i количество объектов i-го вида в первой и второй выборках соответственно. Обозначим через a количество общих видов для двух сравниваемых множеств, а через b и c — количество уникальных видов для первого и второго множества соответственно:

$$a = \sum_{i=1}^{S} I(X_i \neq 0, Y_i \neq 0), \quad b = \sum_{i=1}^{S} I(X_i \neq 0, Y_i = 0), \quad c = \sum_{i=1}^{S} I(X_i = 0, Y_i \neq 0).$$

Легко видеть, что $S = a + b + c$.

Коэффициентом, или индексом, сходства двух совокупностей $C(X, Y)$ будем называть безразмерный показатель, отражающий меру близости (сходства) указанных совокупностей X и Y. Как правило, индексы сходства рассматриваются для сравнения двух совокупностей, однако существуют методы поиска сходства между тремя и более множествами одновременно [4, 5]. В настоящей статье такие варианты сравнения и соответствующие им КС не рассматриваются. Назовем КС *качественным*, если он зависит только от a, b и c, т.е. на значения таких КС влияет только наличие/отсутствие вида в сравниваемых совокупностях. Коэффициент сходства называется *количественным*, если для его построения используются величины $\{X_i\}_{i=1}^{S}$ и $\{Y_i\}_{i=1}^{S}$. Количественные КС, зависящие только от частот X_i/n и Y_i/m, $1 \leqslant i \leqslant S$, появлений вида i в совокупностях X и Y соответственно, будем называть *частотными*. Здесь $n = \sum_{i=1}^{S} X_i$ и $m = \sum_{i=1}^{S} Y_i$. Для любого качественного КС можно предложить его количественный аналог, заменив индикаторы $I(X_i \neq 0)$, $I(Y_i \neq 0)$, $i = 1, \ldots, S$, присутствия видов в совокупности на частоты X_i/n и Y_i/m, $1 \leqslant i \leqslant S$. Как будет показано далее, введение других количественных аналогов для качественных КС не оправдано со статистической точки зрения.

Обсудим общие требования, которые, как правило, налагаются на индексы сходства [6, 7]:

A1. Симметричность: $C(X, Y) = C(X, Y)$;

A2. Равенство нулю для непересекающихся совокупностей: $C(X, Y) = 0$, если $a = 0$;

A3. Равенство единице для совпадающих совокупностей: $C(X, Y) = 1$, если $a = b = c$ для качественных КС и $X_i/n = Y_i/m$ $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant S$, для частотных КС;

A4. “Монотонность” по величине сходства.

Для качественных индексов сходства, в частности, последнее свойство означает следующее: если зафиксировать S и множество видов, то значение КС должно быть тем больше, чем больше значение a. Впрочем, далеко не все индексы сходства удовлетворяют условиям **A1**–**A4**, см. [1]. Далее, определим также меру сходства μ качественного КС как величину, равную этому

КС в случае, если бы вместо выборок КС вычислялся по генеральным совокупностям, из которых взяты данные выборки. Ясно, что при росте размера выборок к бесконечности качественный КС будет сходиться к своей мере сходства. Определим также меру сходства количественного КС как величину, получающуюся при замене X_i и Y_i в записи данного КС на вероятности p_i и q_i появления i-го вида из первой и второй генеральной совокупности соответственно. В разделе 2 будет показано, что количественные КС будут состоятельными оценками своих мер сходства тогда и только тогда, когда они являются частотными.

Необходимость сравнения множеств стояла перед биологами еще в XIX в., однако способы давать степени их (не)сходства количественную оценку появились лишь в начале XX в. По-видимому, самый первый КС, I_J, который до сих пор наиболее популярен среди индексов сходства, предложил швейцарский ботаник Поль Жаккар [8]. По своей сути I_J есть отношение мощности пересечения множеств видов в двух совокупностях к мощности их объединения,

$$I_J = \frac{a}{a+b+c},$$

и является качественным коэффициентом сходства. Его количественный аналог носит название коэффициента Ружички [9]

$$C_R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} \min(X_i, Y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)}. \tag{1}$$

Другой популярный КС был предложен практически одновременно Л.Р. Дайсом в [10] и Т. Сёренсеном в [11]

$$I_{DS} = \frac{2a}{2a+b+c},$$

количественная форма которого была предложена задолго до них Чекановским в [12], она также известна под названием индекса Брея–Кертиса [13]

$$C_{BC} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} 2\min(X_i, Y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} X_i + \sum\limits_{i=1}^{S} Y_i}. \tag{2}$$

Легко видеть, что индекс Жаккара выражается через индекс Сёренсена–Дайса как $I_J = I_{DS}/(2 - I_{DS})$. К настоящему времени предложены десятки качественных КС. Наряду с индексами Жаккара и Сёренсена–Дайса наиболее используемы индексы Охиаи I_O, Кульчинского I_K и Мориситы I_M, см. [7]. Все они монотонно возрастают от нуля до единицы в зависимости от количества общих видов и, по сути, отличаются лишь разной чувствительностью к малым и большим значениям a по сравнению с S.

Впервые попытка оценить точность индексов сходства была предпринята Сёренсеном в [11], однако его метод требует наличия не двух, а достаточно большого количества выборок, что не всегда осуществимо. Немалое количество публикаций посвящено доверительному оцениванию качественной меры сходства в предположении, что все виды в генеральной совокупности распределены одинаково, см. [14–17], что, очевидно, никогда не выполняется на практике. Однако стоит отметить, что если имеются лишь данные о наличии/отсутствии вида в выборках и отсутствуют сведения о количестве объектов каждого из видов в совокупности, то выбор любого другого распределения не является обоснованным. Кроме того, величины a, b и c сильно зависят от наличия редко встречающихся видов в выборке. При росте количества наблюдений соотношения между a, b и c могут существенно измениться, что препятствует точности статистического анализа качественных КС при малом и среднем количестве наблюдений. В связи с доверительным оцениванием качественной меры сходства отметим также публикацию [18], где предполагается, что распределение видов в генеральной совокупности является дискретным логнормальным, и публикацию [19], где принято предположение, что один доминантный вид встречается чаще остальных, которые уже имеют равную вероятность попадания в выборку.

Для построения доверительных интервалов для качественных мер сходства может быть полезен основанный на бутстрепе метод оценивания количества видов в генеральной совокупности по выборке из нее, развитый Чао в [20–22]. Так, в [22] в предположении, что индекс Жаккара меньше своей меры сходства, предложен доверительный интервал для меры сходства I_J, впрочем, без какого-либо математического обоснования. Несмотря на перспективность метода, Чао не удалось построить доверительный интервал для какого-либо качественного КС в общих предположениях. Авторам данной статьи неизвестны работы, где была бы рассмотрена задача построения доверительных интервалов для мер сходства на основе количественных КС.

2. Основные результаты

2.1. Статистическая корректность количественных КС

Прежде всего покажем на основе индекса сходства Ружички (1), что количественные КС являются состоятельными оценками своих мер сходства только в случае $n/m \to 1$ при $n, m \to \infty$, где n и m, напомним, — размеры первой и второй совокупности соответственно. Рассмотрим в рамках исследуемой задачи две полиномиальных модели: в j-м испытании независимо от других испытаний появляется по одному объекту из каждой генеральной совокупности согласно распределениям вероятностей $\{p_i\}_{i\geqslant 1}$ и $\{q_i\}_{i\geqslant 1}$ соответственно, т.е. в j-м испытании i-й объект выпадает с вероятностями p_i и q_i для первой и второй группы соответственно. Обозначим случайные величины, соответствующие выпадению объекта определенного вида в первой и второй группе в j-м испытании как ξ_j и η_j. Таким образом, имеем

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} I(\xi_j = i), \quad Y_i = \sum_{j=1}^{m} I(\eta_j = i).$$

Тогда поскольку $\{I(\xi_j = i)\}_{j\geqslant 1}$ и $\{I(\eta_j = i)\}_{j\geqslant 1}$ — последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, то по усиленному закону больших чисел

$$\begin{aligned} &\frac{X_i}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} EI(\xi_j = i) = P(\xi_j = i) = p_i, \\ &\frac{Y_i}{m} \xrightarrow{\text{п.н.}} q_i \qquad (\text{п.н. — почти наверное}) \end{aligned} \tag{3}$$

при $n, m \to \infty$.

Вернемся к обсуждению индекса Ружички. Его мера сходства, очевидно, равна

$$\mu_R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} \min(p_i, q_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(p_i, q_i)}.$$

Тогда при использовании теоремы о наследовании сходимостей, свойств сходимости почти наверное и соотношений (3) в случае $n/m \to 1$ при $n, m \to \infty$ элементарно показывается, что

$$C_R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} \min\left(\frac{X_i}{n}, \frac{Y_i}{m}\frac{m}{n}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max\left(\frac{X_i}{n}, \frac{Y_i}{m}\frac{m}{n}\right)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu_R.$$

С другой стороны, при $n/m = d$, $n, m \to \infty$ индекс Ружички почти наверное сходится к величине

$$\mu_R(d) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} \min(dp_i, q_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(dp_i, q_i)},$$

отличной при $d \neq 1$ от μ_R, тогда как частотный аналог данного индекса

$$C'_R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} \min\left(\frac{X_i}{n}, \frac{Y_i}{m}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max\left(\frac{X_i}{n}, \frac{Y_i}{m}\right)} \tag{4}$$

сходится почти наверное к μ_R в независимости от соотношения между m и n. Аналогичные рассуждения справедливы и для индекса Брея–Кертиса (2), и для других количественных индексов сходства, которые не являются частотными. Тем самым выводы о генеральной совокупности, полученные на основе количественных КС, не являющихся частотными, не могут считаться достоверными и статистически корректными.

Рассмотрим индекс сходства Ружички и построим доверительный интервал для его меры сходства. Преобразуем данный индекс следующим образом:

$$C_R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{S} \min(X_i, Y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)} = \frac{n + m - \sum\limits_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)} = \frac{n+m}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)} - 1, \tag{5}$$

т.е. фактически индекс Ружички зависит только от $\sum_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)$.

Предположим сначала, что $n = m$. Пусть $p_i > q_i$, тогда при $n \to \infty$ выполнено, что $P(X_i > Y_i) \to 1$ и $P(\max(X_i, Y_i) = X_i) \to 1$, т.е. при больших n выпадение i-го объекта для второй совокупности не будет влиять на значение индекса Ружички с вероятностью, близкой к единице. Определим A как множество номеров i, таких что $p_i > q_i$, $A = \{i : p_i \geqslant q_i\}$, и $B = \{i : q_i > p_i\}$. Определим также

$$P = \sum_{i \in A} p_i, \quad Q = \sum_{i \in B} q_i.$$

Тогда мера сходства индекса Ружички переписывается в виде

$$\mu_R = \frac{2 - \sum\limits_{i=1}^{S} \max(p_i, q_i)}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(p_i, q_i)} = \frac{2}{P+Q} - 1.$$

Теорема. Пусть $n = m$. Тогда при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(C_R - \mu_R) \xrightarrow{d} N\left(0, V_R\right),$$

где

$$V_R = \frac{4(P(1-P) + Q(1-Q))}{(P+Q)^4}.$$

Доказательство теоремы. Определим

$$\zeta_j = I(\xi_j = i, i \in A) + I(\eta_j = i, i \in B), j \geqslant 1.$$

Эти случайные величины, очевидно, могут принимать значения $0, 1$ и 2. Заметим, что поскольку по условию количество видов S конечно, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i) = \sum_{i \in A} X_i + \sum_{i \in B} Y_i\right) \to 1 \tag{6}$$

при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$\sum_{i\in A} X_i + \sum_{i\in B} Y_i = \sum_{i\in A}\sum_{j=1}^{n} I(\xi_j = i) + \sum_{i\in B}\sum_{j=1}^{n} I(\eta_j = i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(I(\xi_j = i, i \in A) + I(\eta_j = i, i \in B)) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j =: T_n. \tag{7}$$

Тем самым для доказательства теоремы достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\left(\frac{2n}{T_n} - 1\right) - \mu_R\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{4(P(1-P) + Q(1-Q))}{(P+Q)^4}\right) \tag{8}$$

и

$$\sqrt{n}\left(C_R - \left(\frac{2n}{T_n} - 1\right)\right) \xrightarrow{d} 0, \tag{9}$$

где статистика $2n/T_n - 1$ получена подстановкой суммы T_n в выражение (5) вместо $\sum_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)$, и воспользоваться леммой Слуцкого.

Докажем сначала соотношение (8). Заметим, что $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, и найдем $E\zeta_1$ и $Var\zeta_1$. Имеем, что

$$E\zeta_1 = EI(\xi_1 = i, i \in A) + EI(\eta_1 = i, i \in B) =$$

$$= \sum_{i\in A} P(\xi_1 = i) + \sum_{i\in B} P(\eta_1 = i) = \sum_{i\in A} p_i + \sum_{i\in B} q_i = P + Q,$$

$$Var\zeta_1 = VarI(\xi_1 = i, i \in A) + VarI(\eta_1 = i, i \in B) = P(1-P) + Q(1-Q).$$

Из центральной предельной теоремы получаем, что

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\zeta_j - (P+Q)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, P(1-P) + Q(1-Q)\right), \quad n \to \infty.$$

Применяя дельта-метод для функции $g(x) = 2/x$, находим, что

$$\sqrt{n}\left(\frac{2n}{\sum\limits_{j=1}^{n}\zeta_j} - \frac{2}{P+Q}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{4(P(1-P) + Q(1-Q))}{(P+Q)^4}\right), \quad n \to \infty,$$

откуда и следует соотношение (8).

Докажем теперь соотношение (9). Используя (6) и (7), получаем при $n \to \infty$, что

$$\sqrt{n}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{S}\max(X_i, Y_i)}{n} - \frac{T_n}{n}\right) \xrightarrow{d} 0. \tag{10}$$

Поскольку по закону больших чисел $T_n/n \to P+Q$ по вероятности при $n \to \infty$, то из соотношения (10) следует, что $\sum_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)/n$ также стремится по вероятности к $P+Q$. Разделив левую часть (10) на $T_n \sum_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)/(2n^2)$, имеем по лемме Слуцкого, что

$$\sqrt{n}\left(\frac{2n}{T_n} - \frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{S} \max(X_i, Y_i)}\right) \xrightarrow{d} 0,$$

откуда и следует (9). Тем самым, доказательство теоремы закончено.

Обратимся теперь к изучению частотного аналога индекса Ружички C'_R (4). Следующее утверждение говорит, что асимптотическое поведение C'_R несколько отличается от асимптотического поведения индекса Ружички при $n = m \to \infty$.

Предложение 1. При $n, m \to \infty$ и $n/m \to d > 0$ выполнено, что

$$\sqrt{n}(C'_R - \mu_R) \xrightarrow{d} N\left(0, V_R(d)\right),$$

где

$$V_R(d) = \frac{4(P(1-P) + dQ(1-Q))}{(P+Q)^4}.$$

Доказательство предложения 1. Пользуясь тем, что $\sum_{i \in A} X_i$ и $\sum_{i \in B} Y_i$ представимы как суммы независимых одинаково распределенных случайных величин и независимы, из центральной предельной теоремы получаем, что

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i \in A} X_i - P\right) \xrightarrow{d} N(0, P(1-P))$$

и

$$\sqrt{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{i \in B} Y_i - Q\right) \xrightarrow{d} N(0, Q(1-Q))$$

при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ соответственно, откуда в условиях предложения с помощью леммы Слуцкого имеем, что

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i \in A} X_i + \frac{1}{m}\sum_{i \in B} Y_i - (P+Q)\right) \xrightarrow{d} N(0, (P(1-P) + dQ(1-Q))). \tag{11}$$

Дальнейшее доказательство повторяет с легкими изменениями соответствующие шаги доказательства теоремы.

Рассмотрим теперь частотную форму индекса Брея–Кертиса (2),

$$C'_{BC} = \sum_{i=1}^{S} \min(X_i/n, Y_i/m) = 2 - \sum_{i=1}^{S} \max(X_i/n, Y_i/m),$$

и исследуем ее асимптотическое поведение. Стоит заметить, что частотная форма широко используемого индекса Охиаи $I_O = a/\sqrt{(a+b)(a+c)}$ также равна C'_{BC}. Из соотношения (11) и из модификации формулы (10) для $n \neq m$ вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. В условиях предложения 1 выполнено, что

$$\sqrt{n}(C'_{BC} - \mu_{BC}) \xrightarrow{d} N\left(0, V_{BC}(d)\right),$$

где $\mu_{BC} = (2 - P - Q)$ *— мера сходства Брея–Кертиса и* $V_{BC}(d) = P(1-P) + dQ(1-Q)$.

2.3. Доверительное оценивание количественных мер сходства

Чтобы построить доверительные интервалы для мер сходства Ружички и Брея–Кертиса, необходимо оценить асимптотическую дисперсию одноименных частотных КС. Рассмотрим случайное множество номеров $A' = \{i : X_i/n > Y_i/m\}$. Покажем, что

$$\widehat{P} := \frac{1}{n} \sum_{i \in A'} X_i \xrightarrow{P} P, \quad \widehat{Q} := \frac{1}{m} \sum_{i \in \overline{A'}} Y_i \xrightarrow{P} Q, \quad n, m \to \infty.$$

Действительно,

$$P\left(\sum_{i \in A'} X_i \neq \sum_{i \in A} X_i\right) \leqslant \sum_{i \in A} P(X_i/n < Y_i/m) + \sum_{i \in B} P(X_i/n \geqslant Y_i/m) \to 0$$

по закону больших чисел. Снова пользуясь законом больших чисел и свойствами сходимости по вероятности, имеем, что

$$\widehat{P} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in A'} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i \in A} X_i\right) + \frac{1}{n} \sum_{i \in A} X_i \xrightarrow{P} P, \quad n, m \to \infty,$$

а сходимость $\widehat{Q}$ к Q по вероятности доказывается аналогично.

Используя теорему о наследовании сходимостей и свойства сходимости по вероятности, легко показать, что при $n, m \to \infty$ и $n/m \to d$ выполнено, что

$$\widehat{V_R(d)} := \frac{4(\widehat{P}(1-\widehat{P}) + n\widehat{Q}(1-\widehat{Q})/m)}{(\widehat{P} + \widehat{Q})^4} \xrightarrow{P} V_R(d),$$

$$\widehat{V_{BC}(d)} := \widehat{P}(1-\widehat{P}) + n\widehat{Q}(1-\widehat{Q})/m \xrightarrow{P} V_{BC}(d).$$

Тем самым из леммы Слуцкого в тех же условиях получаем, что

$$\begin{gathered}\sqrt{n}(\widehat{V_R(d)})^{-1/2}(C'_R - \mu_R) \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{и} \\ \sqrt{n}(\widehat{V_{BC}(d)})^{-1/2}(C'_{BC} - \mu_{BC}) \xrightarrow{d} N(0,1),\end{gathered} \tag{12}$$

что позволяет выписать асимптотические доверительные интервалы для мер сходства Ружички и Брея–Кертиса: с вероятностью, стремящейся к $1-\alpha$, мера сходства Ружички принадлежит интервалу

$$\left(C'_R - u_{1-\alpha/2}(\widehat{V_R(d)})^{1/2}n^{-1/2}; C'_R + u_{1-\alpha/2}(\widehat{V_R(d)})^{1/2}n^{-1/2}\right),$$

где $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения; доверительный интервал для меры сходства Брея–Кертиса выписывается аналогично.

2.4. Проверка гипотезы однородности с помощью КС

Наконец, рассмотрим задачу проверки гипотезы об однородности сравниваемых совокупностей. На первый взгляд, применение двухвыборочного критерия хи-квадрат Пирсона решает данную задачу, однако критерий имеет определенные условия применимости, которым получаемые на практике совокупности не всегда удовлетворяют. Так, часто в сравниваемых группах видов бывает несколько доминирующих видов, а все остальные виды встречаются в количестве 1–2 экземпляров, что препятствует прямому применению критерия хи-квадрат. С другой стороны, проверить гипотезу однородности двух совокупностей при помощи коэффициентов сходства можно всегда.

Итак, будем проверять гипотезу $H_0 : \mu_R = 1$. В случае совпадающих генеральных совокупностей мера сходства двух этих совокупностей равняется единице, если для соответствующего КС выполнено свойство **A3**, поэтому вместо μ_R в определение гипотезы можно подставить любую другую меру сходства, количественную или качественную, для которой выполняется данное свойство. Построим критерий проверки H_0 с помощью частотного индекса Ружички C'_R. Поскольку данный индекс всегда меньше либо равен 1, предложим такой критерий:

$$\text{если } C'_R + u_{1-\alpha}(\widehat{V_R(d)})^{1/2}n^{-1/2} < 1, \text{ то отвергаем } H_0,$$

где $u_{1-\alpha}$ — $(1-\alpha)$-квантиль $N(0,1)$. Из (12) следует, что данный критерий будет иметь асимптотический уровень значимости α. С помощью частотного индекса Брея–Кертиса C'_{BC} аналогичным образом можно предложить еще один критерий проверки H_0 :

$$\text{если } C'_{BC} + u_{1-\alpha}(\widehat{V_{BC}(d)})^{1/2}n^{-1/2} < 1, \text{ то отвергаем } H_0, \tag{13}$$

он также имеет асимптотический уровень значимости α.

3. Моделирование

Цель данного раздела — демонстрация асимптотических свойств предложенных доверительных интервалов и критериев однородности, основанных на КС. Рассмотрим сначала задачу доверительного оценивания меры сходства Брея–Кертиса двух генеральных совокупностей с 10 видами в каждой, подчиняющихся распределениям $\{p_i\}_{i=1}^{10}$ и $\{q_i\}_{i=1}^{10}$ соответственно. Для моделирования были выбраны усеченные распределения Пуассона с параметрами 3,5 (темные столбцы) и 5 (светлые столбцы) соответственно, гистограммы соответствующих распределений $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i=1}^{10}$ и $\mathcal{Q} = \{q_i\}_{i=1}^{10}$ представлены на рис. 1.

На рис. 2 выведены графики верхней и нижней границ доверительных интервалов (штриховые линии) уровня доверия $\alpha = 0{,}95$ для меры сходства Брея–Кертиса распределений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ и график значений частотного индекса сходства Брея–Кертиса C'_{BC} (сплошная линия) в зависимости от n. На рисунке слева $n = 2m$, на рисунке справа $n = m/3$. Истинное значение меры Брея–Кертиса для данных распределений равно $\mu_{BC} = 0{,}76$ с точностью до третьего знака после запятой (штрихпунктирная линия).

Легко видеть, что построенные доверительные интервалы по своему поведению мало отличаются от асимптотических доверительных интервалов, построенных на основе стандартного условия асимптотической нормальности оценки. В частности, при возрастании размеров выборок ширина доверительных интервалов уменьшается, а истинное значение меры сходства практически всегда попадает в доверительный интервал.

Приведенные на рис. 3 графики доверительных границ для меры сходства Ружички обладают теми же свойствами, что и доверительные границы для меры сходства Брея–Кертиса. Здесь доверительные границы и сами значения частотного коэффициента Ружички C'_R построены для двух разных пар

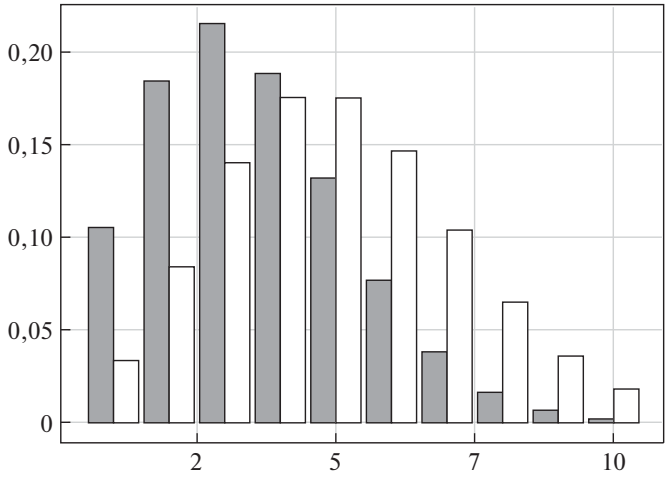


Рис. 1. Гистограмма распределений $\{p_i\}_{i=1}^{10}$ (темные столбцы для $\lambda = 3{,}5$) и $\{q_i\}_{i=1}^{10}$ (светлые столбцы для $\lambda = 5$).

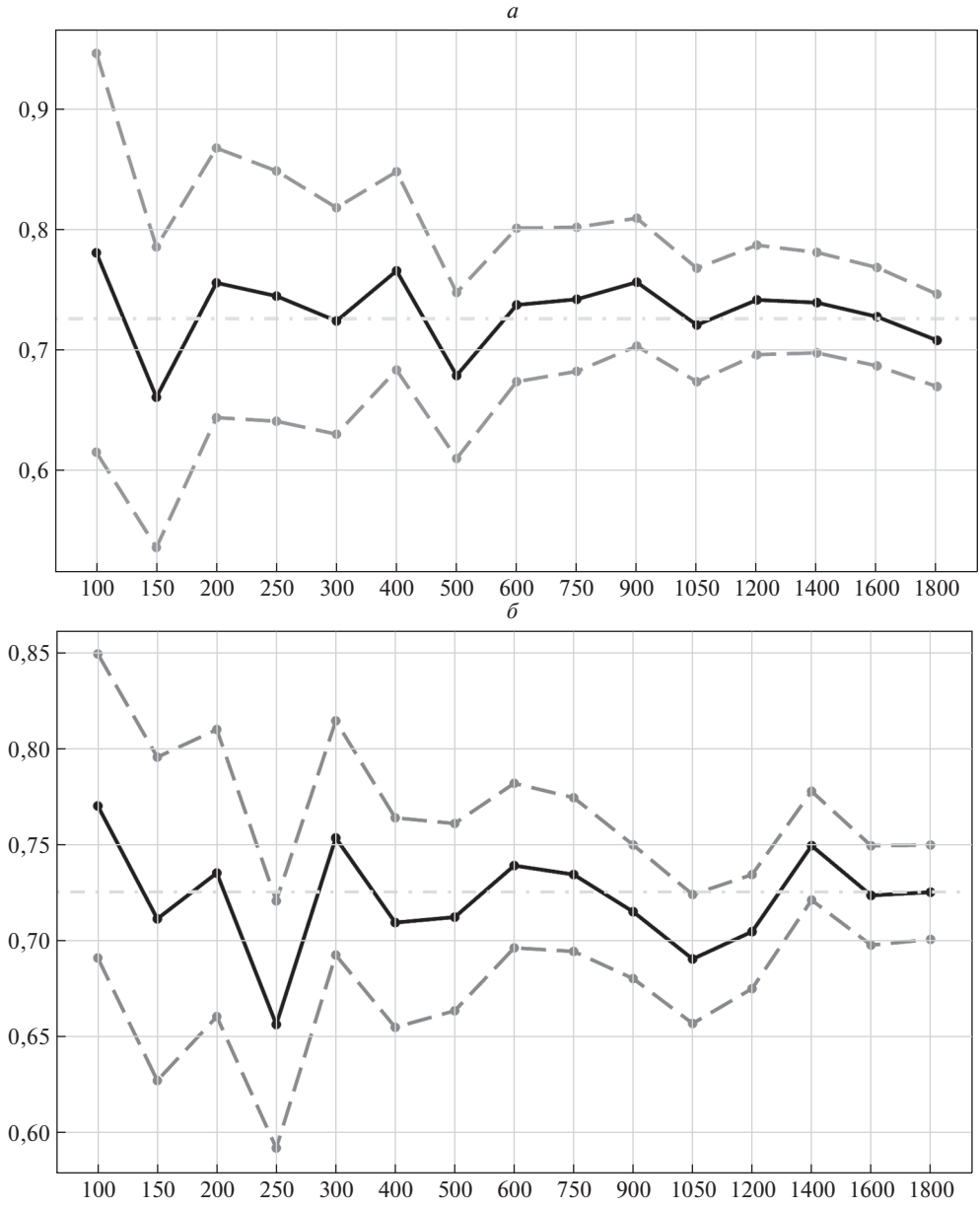


Рис. 2. Доверительные границы для меры сходства Брея–Кертиса и значение частотного индекса Брея–Кертиса в зависимости от n (a — $n = 2m$, $б$ — $n = m/3$).

дискретных распределений, гистограммы которых выведены на соответствующих графиках, в зависимости от n при $n = m$.

Наконец, обратимся к задаче проверки однородности двух совокупностей с помощью коэффициентов сходства. На рис. 4 представлена верхняя граница из критерия (13) при $\alpha = 0{,}025$ (штриховая линия) для меры сходства Брея–

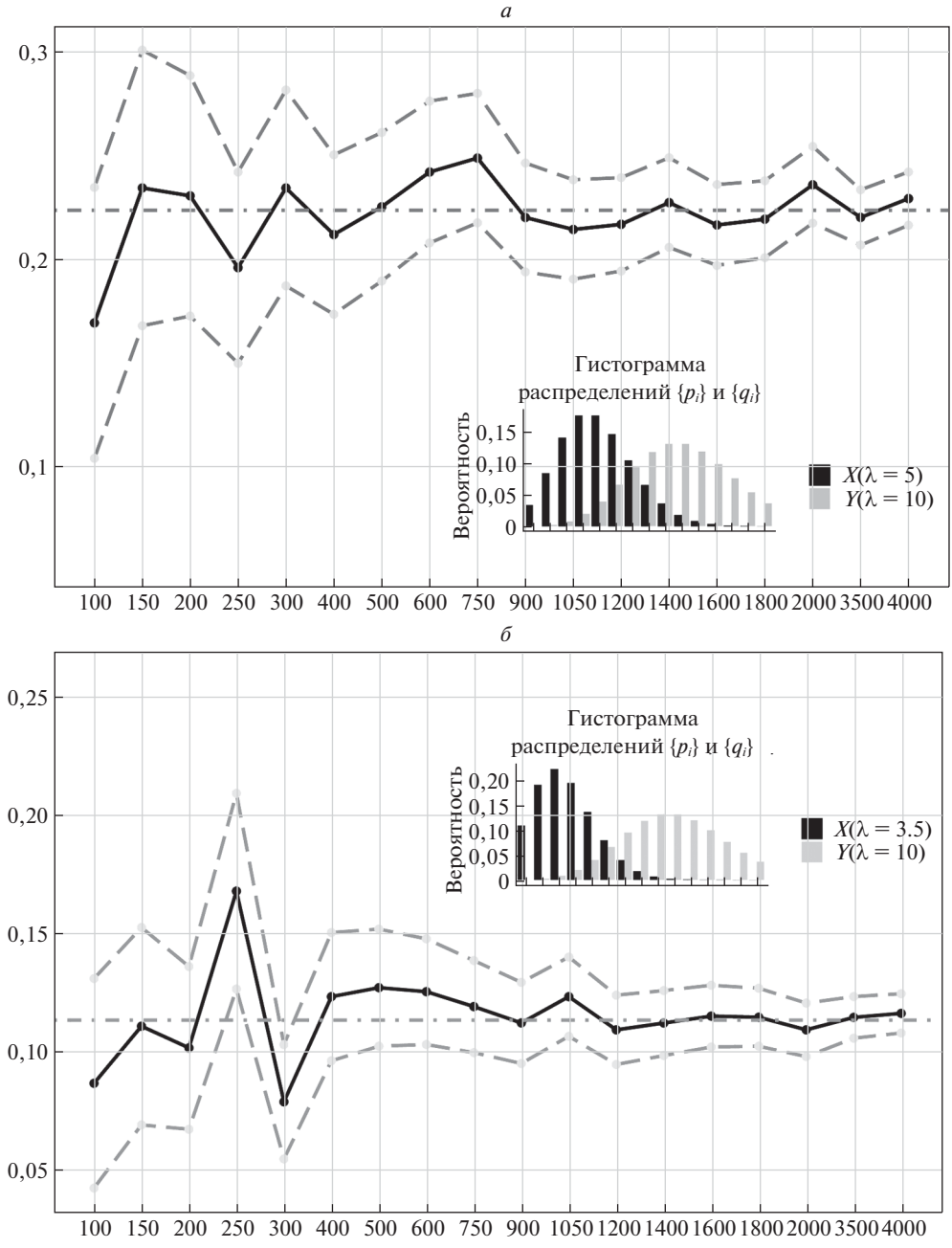


Рис. 3. Доверительные границы для меры сходства Ружички и значения частотного индекса Ружички для выборок X и Y из усеченных распределений Пуассона с параметрами *а* – (5, 10) и *б* – (3,5, 10) в зависимости от n, $m = n$.

Кертиса (равной в данном случае единице) для выборок из одной генеральной совокупности из 10 видов в зависимости от n при $n = m$, гистограмму распределения тоже см. на рисунке. Также на графике выведена нижняя граница

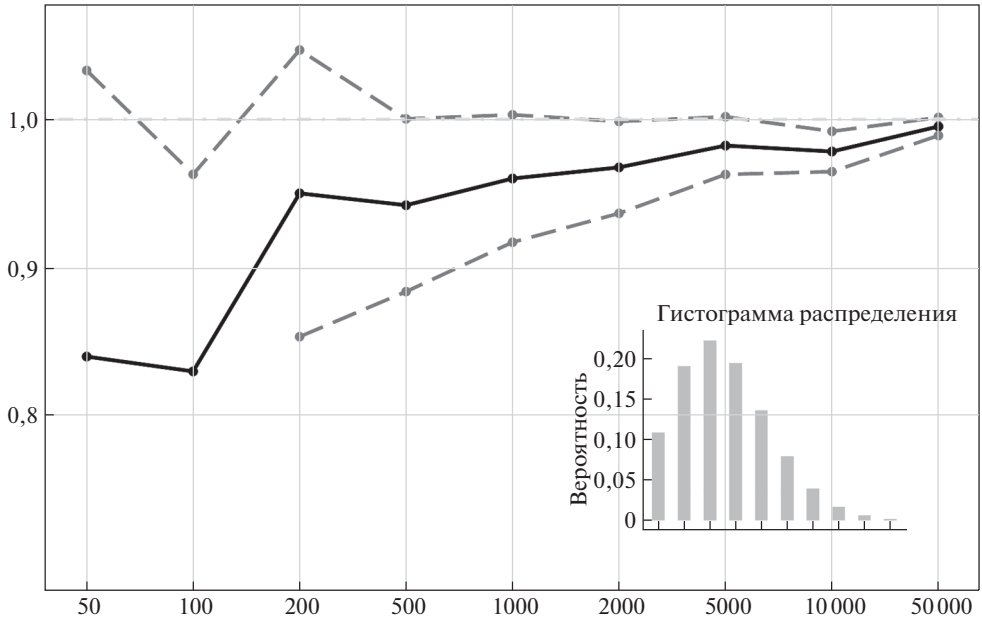


Рис. 4. Доверительные границы для меры сходства Брея–Кертиса в зависимости от n в случае выборок из одной генеральной совокупности.

симметричного доверительного интервала (т.е. уровень доверия данного интервала равен 0,95) и значения частотного индекса Брея–Кертиса (сплошная линия), с помощью которого и построены данные доверительные интервалы. Заметим, что доверительные интервалы для разных значений n не всегда содержат единицу, т.е. при малых n теоретический уровень значимости критерия (13), по-видимому, является заниженным. Это связано с тем, что в данном случае коэффициент сходства Брея–Кертиса всегда ниже своей меры сходства из-за особенностей определения КС.

4. Заключение

В статье рассмотрена проблема оценивания точности количественных коэффициентов сходства. Исчерпывающий обзор публикаций, касающихся этой темы, показал, что до сих пор не было предложено удовлетворительного алгоритма, имеющего строгое обоснование, позволяющего найти границы доверительного интервала для меры сходства какого-либо КС и/или оценить его дисперсию. В настоящей статье авторы предлагают способ построения асимптотических доверительных интервалов для мер сходства двух наиболее часто применяемых КС — Брея–Кертиса и Ружички. Используя приведенный метод, можно получить доверительные интервалы для мер сходства любых других частотных КС. Остаются открытыми вопросы о степени чувствительности различных КС и о взаимоотношении асимптотических и бутстрепных доверительных интервалов, которые будут рассмотрены авторами в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cha S.-H.* Comprehensive Survey on Distance/Similarity Measures between Probability Density Functions // Int. J. Math. Model. Meth. Appl. Sci. 2007. V. 1. No. 4. P. 300–307.
2. *Семкин Б.И.* Дескриптивные множества и их приложения // Исследования систем. 1. Сложные системы. Владивосток: 1973. С. 83–94.
3. *Semkin B.I.* The Axiomatic Approach to Introducing Measures for Ordering and Classification of Descriptive Sets // Patt. Recogn. Image Anal. 2011. V. 21. No. 2. P. 164–166.
4. *Diserud O.H., Ødegaard F.* A Multiple-Site Similarity Measures // Biol. Lett. 2007. V. 3. No. 1. P. 20–22.
5. *Baselga A., Jimenez-Valverde A., Niccolini G.* A Multiple-Site Similarity Measure Independent of Richness // Biol. Lett. 2007. V. 3. No. 6. P. 642–645.
6. *Cheetham A.H., Hazel J.E.* Binary (Presence-Absence) Similarity Coefficients // J. Paleontol. 1969. V. 43. No. 5. P. 1130–1136.
7. *Песенко Ю.А.* Принципы и методы количественного анализа в фаунистических исследованиях. М.: Наука, 1982.
8. *Jaccard P.* Distribution de la flore alpine dans le bassin des Dranses et dans quelques régions voisines // Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles. 1901. V. 37. P. 241–272.
9. *Ružička M.* Anwendung mathematisch-statistischer Methoden in der Geobotanik (Synthetische Bearbeitung von Aufnahmen) // Biológia, Bratisl. 1958. V. 13. P. 647–661.
10. *Dice L.R.* Measures of the Amount of Ecologic Association between Species // Ecology. 1945. V. 26. No. 3. P. 297–302.
11. *Sörensen T.* A method of establishing groups of equal amplitude in plant sociology based on similarity of species content // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Biol. krifter. 1948. Bd V. No. 4. P. 1–34.
12. *Czekanowski J.* Zur differential Diagnose der Neandertalgruppe // Korrespbl. Dtsch. Ges. Anthropol. 1909. Bd 40. S. 44–47.
13. *Bray J.R., Curtis J.T.* An Ordination of Upland Forest Communities of Southern Wisconsin // Ecol. Monogr. 1957. V. 27. P. 325–349.
14. *Glime J.M., Clemons R.M.* Species Diversity of Stream Insects on Fontinalis Spp. Compared to Diversity on Artificial Substrates // Ecology. 1972. V. 53. No. 3. P. 458–464.
15. *Li X., Dubes R.C.* A Probabilistic Measure of Similarity for Binary Data in Pattern Recognition // Patt. Recogn. 1989. V. 22. No. 4. P. 397–409.
16. *Bolton H.C.* On the Mathematical Significance of the Similarity Index of Ochiai as a Measure for Biogeographical Habitats // Aust. J. Zool. 1991. V. 39. P. 143–156.
17. *Baroni-Urbani C., Buser M.W.* Similarity of Binary Data // Syst. Zool. 1976. V. 25. No. 3. P. 251–259.
18. *Engen S., Grøtan V., Sæther B.-E.* Estimating Similarity of Communities: a Parametric Approach to Spatio-Temporal Analysis of Species Diversity // Ecography. 2011. V. 34. No. 2. P. 220–231.
19. *McCormick W.P., Lyons N.I., Hutcheson K.* Distributional Properties of Jaccard's Index of Similarity // Commun. Statist. Theor. Meth. 1992. V. 21. No. 1. P. 51–68.

20. *Chao A.* Estimating the Population Size for Capture-Recapture Data with Unequal Catchability // Biometrics. 1987. V. 43. No. 4. P. 783–791.

21. *Chao A., Hwang W.-H., Chen Y.-C., Kuo C.-Y.* Estimating the Number of Shared Species in Two Communities // Statist. Sinica. 2000. V. 10. P. 227–246.

22. *Chao A., Chazdon R.L., Colwell R.K., Shen T.J.* A New Statistical Approach for Assessing Similarity of Species Composition with Incidence and Abundance Data // Ecol. Lett. 2005. V. 8. P. 148–159.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 16.04.2019

После доработки 07.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

Воротников В.И. К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием 3

Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей 18

Нелинейные системы

Барсегян В.Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени 36

Квитко А.Н. Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы 48

Фуртат И.Б. Дивергентные условия устойчивости динамических систем 62

Шориков А.Ф., Калев В.И. Решение задачи минимаксного программного управления расходом топлива ракеты-носителя 76

Управление в технических системах

Тихонов А.А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы 91

Управление в социально-экономических системах

Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно 115

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Гераськин М.И. Рефлексивные игры в линейных моделях дуополии Штакельберга при при несовпадении рангов рефлексии 134

Родионов И.В., Созонтов А.Н. О доверительном оценивании на основе количественных коэффициентов сходства 157

CONTENTS

Linear Systems

Vorotnikov V.I. On Partial Stability and Detectability of Functional Differential Systems with Aftereffect . . . 3

Zhirabok A.N., Zuev A.V., Shumsky A.E. Diagnosis of Linear Dynamic Systems: An Approach Based on Sliding Mode Observers . . . 18

Nonlinear Systems

Barseghyan V.R. Optimal Control of String Vibrations with Nonseparate State Function Conditions at Given Intermediate Instants . . . 36

Kvitko A.N. A Method for Solving a Local Boundary-Value Problem for a Nonlinear Controlled System . . . 48

Furtat I.B. Divergent Stability Conditions of Dynamic Systems . . . 62

Shorikov A.F., Kalev V.I. Solving the Minimax Program Control Problem for Carrier Rocket Fuel Consumption . . . 76

Control in Technical Systems

Tikhonov A.A. A Control Method for Angular Stabilization of an Electrodynamic Tether System . . . 91

Control in Social Economic Systems

Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty . . . 115

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Geraskin M.I. Reflexive Games in the Linear Stackelberg Duopoly Models under Incoincident Reflexion Ranks . . . 134

Rodionov I.V., Sozontov A.N. On Confidence Estimation Based on Quantitative Similarity Factors . . . 157