

СОДЕРЖАНИЕ

Том 67, номер 11, 2022

К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА – РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

| | |
|--|------|
| Геометрия пространства адмитансов N -слойных диэлектрических структур и задачи синтеза <i>Ю. И. Худак, Д. В. Парфенов, М. И. Джиоева</i> | 1067 |
| Формулы для средних и экстремальных значений профилирующих функций в задачах синтеза <i>Ю. И. Худак, Д. В. Парфенов, А. И. Стариковский</i> | 1076 |
| Программный анализ сигнального радиопрофиля при проведении пассивной радиосенсорной технической диагностики <i>К. А. Бойков, А. Е. Шамин</i> | 1087 |
| Математическое моделирование открытой микрополосковой линии <i>А. Н. Коваленко, А. Д. Ярлыков</i> | 1096 |
| Оценивание координат в трехпозиционной радиосистеме с учетом выравнивания погрешности определения местоположения объекта по траектории его перемещения <i>А. Ф. Котов, Е. А. Чистяков</i> | 1103 |
| Моделирование прохождения радиоотклика через электрооптические повторители сверхкоротких радиоимпульсов <i>А. В. Шильцин, М. С. Костин</i> | 1110 |

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

| | |
|---|------|
| Применение модифицированного метода дискретных источников к решению задачи дифракции волн на теле вращения с шероховатой границей <i>А. Г. Кюркчан, С. А. Маненков</i> | 1116 |
| Оценка длительности замираний радиоволн низкой частоты в волноводе “Земля–ионосфера” под влиянием сильного локального возмущения в атмосфере <i>А. В. Мошков</i> | 1127 |

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

| | |
|--|------|
| Статистические модели трансionoсферных радиолиний с фазовыми замираниями сигналов <i>Л. Е. Назаров, В. В. Батанов</i> | 1133 |
|--|------|

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

| | |
|--|------|
| Роль вспомогательных потенциалов и полей в теореме Шокли–Рамо в случае неоднородных локально анизотропных образцов с поляризацией <i>С. Г. Дмитриев</i> | 1140 |
| Двухсекционная модель токораспределения в полосковых структурах биполярных и гетеробиполярных СВЧ транзисторов <i>В. А. Сергеев, А. М. Ходаков</i> | 1146 |

Моделирование резонаторного фильтра на поверхностных акустических волнах.
Сравнение различных подходов

А. С. Койгеров, О. Л. Бальшева

1152

НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

Прозрачные радиозэранирующие материалы на основе многослойных и сетчатых структур

*М. О. Макеев, А. С. Осипков, А. А. Филяев, К. П. Синягаева, Е. И. Гарсия,
Д. С. Рыженко, Г. Ю. Юрков*

1157

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 535

**ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА АДМИТАНСОВ
N-СЛОЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР И ЗАДАЧИ СИНТЕЗА**

© 2022 г. Ю. И. Худак^{a, *}, Д. В. Парфенов^a, М. И. Джиеова^a

^aМИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: hudak@mirea.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 24.02.2022 г.

Принята к публикации 01.03.2022 г.

Известно, что уровень аналитического моделирования прямых задач электродинамики слоистых диэлектрических структур (СДС) серьезно отстал от потребностей задач оптимизационного синтеза фильтров и решения обратных задач в этой области. Рассмотрена постановка задачи синтеза полосового оптического фильтра на базе заданного в полосе волновых чисел $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ идеала его энергетического коэффициента отражения $-\tilde{R}(\kappa)$ в метрике пространства $\mathbb{C}[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$. Осуществлено упрощение и дополнение этой постановки задачи важными для практики условиями принадлежности адмитансов системы $\bar{p} = (p_1, \dots, p_N)$ кубу $K_{\bar{p}} = \{\hat{p} \leq p_j \leq \bar{p}, (j = 1, \dots, N)\}$ допустимых адмитансов и электрических толщин слоев системы $\bar{v} = (v_1, \dots, v_N)$ параллелепипеду $P_{\bar{v}} = \{\check{v}_j \leq v_j \leq \bar{v}_j, (j = 1, \dots, N)\}$ ограниченный СДС по толщинам. Изучено взаимодействие структур пространств электродинамических параметров $\mathcal{P}_N = \{\bar{p}\}$ адмитансов и $\mathcal{N}_N = \{\bar{v}\}$ электрических толщин слоев СДС, чего до последнего времени сделано не было.

DOI: 10.31857/S0033849422110031

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если плоское электромагнитное поле¹ существует в пространстве \mathbb{R}^3 , разделенном системой диэлектрических слоев на два полупространства \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 , то, в общем случае, в \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 имеются по две плоские волны, одна из которых распространяется к СДС, а другая – от нее. Обозначим² $C_0^{(-)}$ амплитуду волны, распространяющейся к СДС в \mathbb{R}_-^3 , $C_1^{(-)}$ – от СДС в \mathbb{R}_+^3 , $C_1^{(+)}$ – распространяющейся к СДС в \mathbb{R}_+^3 , а $C_0^{(+)}$ – от СДС в \mathbb{R}_-^3 . Показано, что при не слишком больших величинах электромагнитных полей существует линейная связь между векторами амплитуд \mathbf{C}_- и \mathbf{C}_+

$$\mathbf{C}_- \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C_0^{(-)} \\ C_1^{(-)} \end{pmatrix} \text{ в } \mathbb{R}_-^3 : \mathbf{C}_- = \mathcal{T} \mathbf{C}_+,$$

$$\text{где } \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C_0^{(+)} \\ C_1^{(+)} \end{pmatrix} \text{ в } \mathbb{R}_+^3.$$

Матрица \mathcal{T} всегда не вырождена и называется матрицей передачи СДС³. В данной работе при минимальных ограничивающих предположениях получены универсальные аналитические выражения для элементов матрицы \mathcal{T} , описывающей всевозможные в таких СДС связи между плоскими электромагнитными полями в \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 , как функционалов от физических свойств слоев диэлектрической системы и частоты поля, которые позволяют проанализировать природу имеющихся в таких системах спектральных закономерностей и необходимы при разработке математического аппарата для постановки и решения важных для практики оптимизационных и обратных задач.

Описание любых спектральных характеристик произвольных СДС может быть основано на существенно расширенном толковании анонсированных в [3] и обоснованных в [4] формул, положенных в основу работ авторов [1, 2].

¹ Рассматриваются поля, волновой вектор которых нормален слоям системы. Для случая наклонного распространения волн достаточно внести в построения очевидные изменения.

² Эти обозначения введены и обоснованы в работах [1, 2].

³ Матрица передачи записана для случая действия оператора “справа–налево”.

Выяснилось удобство использования электро-динамических параметров⁴, отличных от адмитансов:

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_j / \mu_j}, \quad j = 0, 1, \dots, N, N+1,$$

и электрических толщин слоев системы:

$$v_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} h_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Важнейшими из “новых” параметров оказываются отношения адмитансов соседних слоев системы

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} p_j / p_{j-1},$$

которые мы называем параметрами Френеля слоистой системы, так как они однозначно связаны формулой

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} (1 - q_j) / (1 + q_j),$$

с амплитудными коэффициентами отражения Френеля q_j для границы раздела соседних сред:

$$q_j \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \theta_j) / (1 + \theta_j).$$

При этом

$$\prod_{k=1}^{N+1} \theta_k \stackrel{\text{def}}{=} \theta = p_{N+1} p_0$$

— заданная величина, которая служит основанием введенных в пространстве адмитансов показательных координат, линеаризующих соотношения между параметрами Френеля и “распрямляющих” все возникающие гиперповерхности второго порядка в гиперплоскости. Новые представления элементов матрицы \mathcal{T} позволили провести подробное изучение спектральных свойств произвольных плоских диэлектрических структур.

Полученные формулы для коэффициентов Фурье экспоненциального представления элементов τ_{lk} матрицы передачи \mathcal{T} приводят к рассмотрению вопросов вырождения N -слойных СДС в $(N-1)$ -слойные и еще “менее” слойные системы, доходя в крайнем случае 0-слойной системы до случая Френеля — “составного” пространства \mathbb{R}^3 , т.е. составленного из двух полупространств \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 . Коэффициенты тригонометрического представления элементов τ_{lk} матрицы передачи \mathcal{T} названы в работе вычислительными параметрами СДС (см. ниже). Оказывается, что

⁴ Параметры \bar{p}, \bar{v} мы называем электродинамическими, так как именно они однозначно определяются при решении обратной задачи об определении структуры СДС по заданному амплитудному коэффициенту отражения $r(\omega)$ от СДС (см. [4]).

именно через них аналитически выражаются многие спектральные свойства СДС, а их квадраты участвуют в описании ячеистой структуры пространства импедансов \mathcal{P}_N N -слойных СДС.

Введены понятия порождающих и профилирующих функций N -слойных СДС, оценки которых в разных нормах позволяют получить оценки энергетических коэффициентов отражения и пропускания. Полученные результаты могут быть широко использованы при решении задач анализа и оптимизационных задач синтеза диэлектрических фильтров различного назначения.

При решении задач синтеза фильтров желаемое поведение энергетического коэффициента отражения или пропускания слоистой системы в заданной полосе волновых чисел $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ обычно задается спектральными характеристиками⁵ этого фильтра $\tilde{R}(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$ (см. соответствующие рисунки в [2]). Математическая постановка задачи оптимального в смысле П.Л. Чебышева синтеза слоистого диэлектрического фильтра рассмотрена в [1]:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min, \quad (1)$$

где \bar{p} — адмитансы и \bar{v} — электрические толщины слоев СДС.

В [2] мы рассмотрели математическую постановку задачи синтеза:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (2)$$

при $\bar{v} \subset \mathcal{N}_N$ и $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$,

и эквивалентную указанной выше исходной упрощенную постановку:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |F(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{F}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (3)$$

при $\bar{v} \subset \mathcal{N}_N$ и $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$,

где $F(\kappa, \bar{p}, \bar{v})$ — профилирующая функция для СДС, $\tilde{F}(\kappa)$ — идеал для профилирующей функции, пересчитанный из идеала для коэффициента отражения $\tilde{R}(\kappa)$ или пропускания $\tilde{T}(\kappa)$ (см. [1, 2]), а \bar{v} — элементы из пространства \mathcal{N}_N — возможных электрических толщин, \bar{p} — адмитансы слоев СДС — элементы заданного куба K_N в пространстве адмитансов \mathcal{P}_N материалов СДС. Последние постановки задач синтеза СДС естественно называть задачами оптимизации в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями.

⁵ Функции типа $\tilde{R}(\kappa), \tilde{T}(\kappa)$ в данной работе, так же как и в [2], будем называть *идеалами* для соответствующих физически реализуемых конкретным фильтром спектральных характеристик.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ РЕШЕНИЕ.
МАТРИЦА ПЕРЕДАЧИ СДС

Используя обозначения [1, 2] и [4–6], приведем основной результат. Элементы τ_{lm} , $l, m = 0, 1$, матрицы \mathcal{T} естественно назвать *порождающими функциями* СДС, так как при различных выборах “управляющих” векторов $\bar{\theta}$, \bar{v} они представляют решение задачи анализа для любой СДС.

Экспоненциальное представление порождающих функций при $\vec{r} = k\bar{v}$ имеет вид

$$\tau_{lm}(\bar{\theta}, \vec{r}) = \sum_J Q_J^m(\bar{\theta}(\omega)) \exp(-i\Lambda_J(\vec{r})), \quad (4)$$

где $\mathbf{J} = (j_0 = l, j_1, \dots, j_N, j_{N+1} = m)$, $j_k = 0, 1$,

$$Q_J^m(\bar{\theta}) = \prod_{k=1}^{N+1} 1/2 [1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k] \quad (5)$$

– “коэффициенты Фурье”,

$$\Lambda_J(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N (-)^{j_k} t_k \quad (6)$$

– “показатели Фурье”.

Замечание. Формулы (5) показывают, что при совпадении адмитансов соседних слоев $p_{j-1} = p_j$ при каком-либо $j = 1, \dots, N + 1$, т.е. выполнении условия “вырождения”: $\theta_j = 1$, половина из всех коэффициентов Фурье (имеющих множитель $1 - \theta_j$) обратится в нуль, что превратит N -слойную СДС в $(N - 1)$ -слойную. При выполнении двух условий вырождения для разных j в нуль обратятся 3/4 коэффициентов Фурье и СДС превратится в $(N - 2)$ -слойную. При выполнении N условий “вырождения” N -СДС превратится в 0-слойную – пространство \mathbb{R}^3 , составленное из полупространств \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 (случай Френеля). Это явление влечет целую серию следствий, вскрывающих геометрическую структуру пространства адмитансов $\mathcal{P}_N N$ -слойных СДС.

3. ГЕОМЕТРИЯ
ПРОСТРАНСТВА АДМИТАНСОВ

Поскольку изображение \mathcal{P}_N при $N \geq 3$ практически невозможно, графически проиллюстрируем соответствующие построения при $N = 2$. Они носят общий характер и справедливы при любом N .⁶ На рис. 1 и 2 показаны пространства \mathcal{P}_2 адмитансов двухслойных систем⁷. Различие

⁶ При $N > 2$ изменяются формулы для введения показательных координат $\vec{s} = (s_1, \dots, s_N)$.

⁷ Ввиду обилия информации на рисунках не показан куб допустимых адмитансов K_N , который при допущении, что адмитанс “подложки” p_{N+1} входит в число допустимых, содержит внутри себя “особую точку” Π' (см. рис. 1 и 2) вырождения двухслойной системы в нульслойную.

между рисунками связано с использованием разных систем координат. На первом из них в качестве координат использованы исходные адмитансы $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ и пространство \mathcal{P}_2 представляет собой четверть плоскости. На рис. 2 использованы “показательные координаты”, основанием которых служит базовый параметр рассматриваемых СДС: $\theta = p_3/p_0$, а координаты s_1, s_2 изменяются в пределах $-\infty < s_1 < +\infty$, $-\infty < s_2 < +\infty$:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta^{s_1+1/2}, & \theta_2 &= \theta^{s_2-s_1}, \\ \theta_3 &= \theta^{-s_2+1/2}, & \theta_1\theta_2\theta_3 &= \theta = \frac{p_3}{p_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 1 и 2 по общим обозначениям вершин и линий легко идентифицируются основные графовые структуры пространства \mathcal{P}_2 .⁸ На обоих рисунках изображены три линии вырождения: вертикальная V_1 , диагональная V_2 , горизонтальная V_3 с соответствующими формулами:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1 \quad (p_1 = p_0), \\ \theta_2 &= 1 \quad (p_2 = p_1), \\ \theta_3 &= 1 \quad (p_3 = p_2). \end{aligned}$$

В пересечении линии вырождения образуют треугольник вырождения с вершинами I' , Π' , III' . Также на рисунке есть три линии U_1, \dots, U_3 , две из них, U_1, U_3 , параллельны вертикальной V_1 и горизонтальной V_3 линиям вырождения, двойственны к ним и описываются уравнениями соответственно:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \quad (p_1 = p_3), \\ \theta_3 &= \theta \quad (p_2 = p_0). \end{aligned}$$

Третья линия U_2 является двойственной по отношению к биссектрисе координатного угла $p_2 = p_1$. Линия U_2 является лучом из начала координат через вершину прямого угла между V_1 и V_3 и имеет уравнение

$$\theta_2 = \theta \quad (p_2 = \theta p_1, \theta = p_3/p_0).$$

На рис. 2 эта линия параллельна линии вырождения V_2 . Двойственные линии в пересечении образуют “большой треугольник” с вершинами I , Π , III .

Кроме того, на рис. 1 и 2 есть три линии N_1, \dots, N_3 , две из них, N_1, N_3 , параллельные вертикальной V_1 и горизонтальной V_3 линиям вырождения, будем называть линиями “нулей” с соот-

⁸ Графовые структуры рис. 1 исторически следуют рис. 2, на котором удалось выделить и осмыслить эти структуры и разработать удобные обозначения.

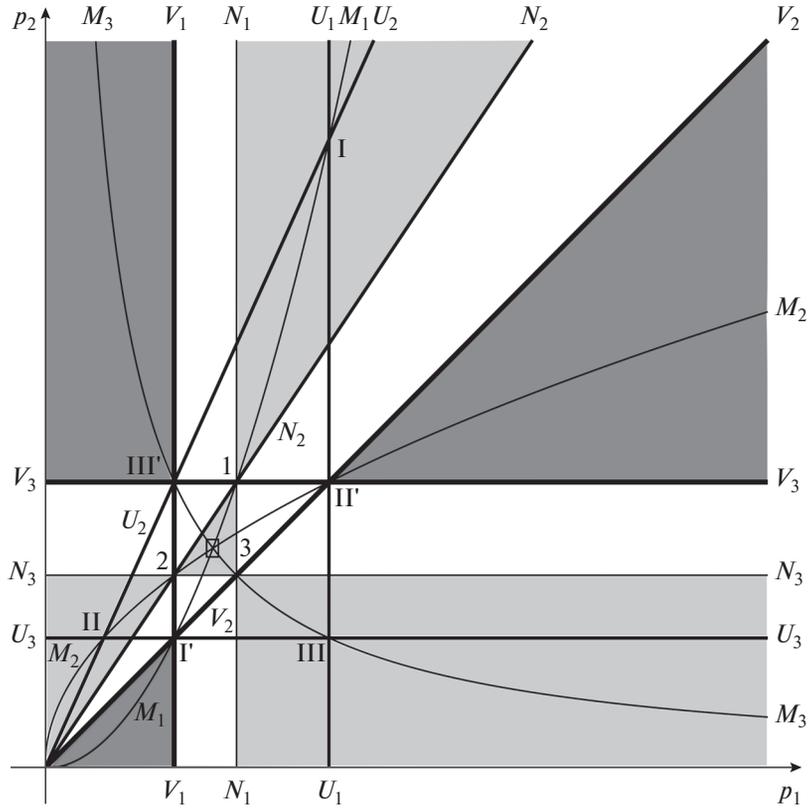


Рис. 1. Пространство адмитансов ($N = 2$) в “исходных” координатах (p_1, p_2).

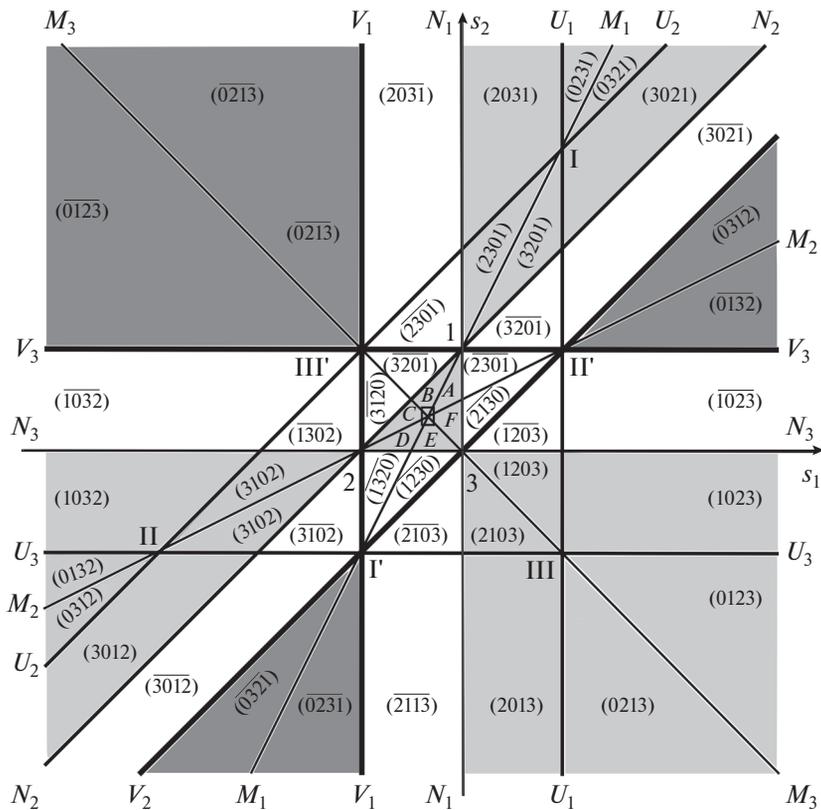


Рис. 2. Пространство адмитансов ($N = 2$) в “показательных” координатах (s_1, s_2).

ветствующими индексами и даются уравнениями соответственно

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta^{1/2} (p_1 = \sqrt{p_0 p_3}), \\ \theta_3 &= \theta^{1/2} (p_2 = \sqrt{p_0 p_3}). \end{aligned}$$

Третья линия N_2 на рис. 1 имеет уравнение

$$\theta_2 = \theta^{1/2} (p_2 = \theta^{1/2} p_1),$$

а на рис. 2 эта линия параллельна линии вырождения V_2 . Три линии “нулей” в пересечении образуют “малый треугольник” с вершинами 1, 2, 3, стороны которого параллельны сторонам большого треугольника I, II, III.

Также на рис. 1 изображены три кривые второго порядка, M_1, \dots, M_3 , две параболы и одна гиперболы, уравнения которых получаются при подстановке координат p_1, p_2 в уравнения линий в переменных Френеля соответственно:

$$\theta_1 = \theta_2; \quad \theta_1 = \theta_3; \quad \theta_2 = \theta_3.$$

Соответствующие линии на рис. 2 являются медианами всех трех треугольников, а потому они пересекаются в одной общей для них точке – центре всех этих треугольников, который мы будем обозначать символом \square – стилизованным “римским” нулем. Названия медианы для этих линий мы будем использовать и для рис. 1.

Четыре области на рис. 1, заштрихованные светло-серым цветом, совпадают с диаграммой Шустера [7], указавшего те области в пространстве \mathcal{P}_2 , внутри которых существуют нули коэффициентов отражения для соответствующих СДС, а на рис. 2 области Шустера – внутренность малого треугольника и внутренности его внешних углов.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Формулы Эйлера переводят (6) в тригонометрическое представление порождающих функций:

$$\begin{aligned} \tau_{lm}(\vec{\theta}, \vec{t}) &= u_m - i v_m, \\ u_m &= \sum_{L:|L|=2n+1} (-1)^n \alpha_L^m \Psi_L(\vec{t}), \\ v_m &= \sum_{L:|L|=2n} (-1)^n \alpha_L^m \Psi_L(\vec{t}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$p_j = \sqrt{\epsilon_j / \mu_j}, \quad \mathbf{L} = (l_1, \dots, l_N), \quad l_k = 0, 1, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}\| &= \sum_{k=1}^N l_k, \quad \Psi_L(\vec{t}) = \prod_{k=1}^N x_k^{\bar{l}_k} y_k^{l_k}, \\ x_k &= \cos(t_k), \quad y_k = \sin(t_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразование $\vec{t} = \vec{v} \omega$ делает эти функции 2π -периодическими функциями по переменным $t_k = v_k \omega$ ($k = 1, \dots, N$). Коэффициенты $\alpha_m = (\alpha_0^m, \dots, \alpha_{2^{N-1}}^m)$, α_L^m , ($m = 0, 1$), $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_N)$, ($l_k = 0, 1$) представления (8) мы называем вычислительными параметрами СДС⁹. Обе серии вычислительных параметров ($m = 0, 1$) преобразованием Адамара связаны с отвечающими им коэффициентами Фурье в (4):

$$\alpha_m = \mathcal{H} \mathbf{Q}_m, \quad \mathbf{Q}_m = (Q_0^m, \dots, Q_{2^{N-1}}^m), \quad (10)$$

где \mathcal{H} – матрица Адамара порядка $2^N \times 2^N$.

Замечание. Указанные на рис. 1 и 2 линии: вырождения, двойственные к ним и медианы при переходе к пространствам \mathcal{P}_N более высокой размерности, чем $N = 2$, заменяются на гиперплоскости, а в нужных местах рис. 1 – гиперповерхностями, не более второго порядка по каждой переменной p_k ($k = 1, \dots, N$).

Переход к показательным координатам $\stackrel{\text{def}}{\vec{s}} = (s_1, \dots, s_N)$ в пространствах \mathcal{P}_N большей, чем $N = 2$ размерности, проводится с использованием параметров Френеля θ_k ($k = 1, \dots, N + 1$) по формулам, в которых координаты s_k изменяются в пределах $-\infty < s_k < +\infty$:

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{def}}{\theta_1} = \theta^{s_1 + \frac{1}{2}}, \dots, \stackrel{\text{def}}{\theta_N} = \theta^{s_N + \frac{1}{2}}, \quad \stackrel{\text{def}}{\theta_{N+1}} = \theta^{-\left(\sum_{k=1}^N s_k\right) - \frac{N}{2} + 1}, \\ \prod_{k=1}^N \theta_k \stackrel{\text{def}}{=} \theta = p_{N+1} p_0. \end{aligned} \quad (11)$$

5. ТОЖДЕСТВА СРАВНЕНИЯ

Запишем принципиальные тождества сравнения для квадратов вычислительных параметров α_L^m для случая $m = 1$, не указывая m явно, так как при $m = 0$ они заменяются на аналогичные. Сначала выпишем эти тождества при $N = 2$ (в этом случае их ровно 6), чтобы их было удобно проинтерпретировать с использованием рис. 1 и 2:

⁹ Через них аналитически выражаются важнейшие свойства порождающих функций и коэффициентов отражения, пропускания СДС, в частности, их средние и экстремальные значения.

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 - \alpha_1^2 &= (1 - \theta_3^2)(1 - \theta_1^2\theta_2^2), & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 &= (\theta_3^2 - \theta_1^2)(1 - \theta_2^2), \\ \alpha_0^2 - \alpha_2^2 &= (1 - \theta_1^2)(1 - \theta_2^2\theta_3^2), & \alpha_1^2 - \alpha_3^2 &= (\theta_3^2 - \theta_2^2)(1 - \theta_1^2), \\ \alpha_0^2 - \alpha_3^2 &= (1 - \theta_2^2)(1 - \theta_1^2\theta_3^2), & \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &= (\theta_1^2 - \theta_2^2)(1 - \theta_3^2). \end{aligned} \tag{12}$$

В правых частях написанных формул стоят произведения двух сомножителей, зависящих от параметров Френеля, так, что при изменении знаков этих скобок будут выполняться определенные отношения “доминирования” между квадратами вычислительных параметров: $\alpha_i^2 >$ или $< \alpha_j^2$. Обращение же скобок в нуль указывает на равенство записанных слева величин. Отметим, что в правой части участвуют скобки, отвечающие уравнениям в переменных Френеля, введенных выше линий: вырождения $V_j, j = 1, 2, 3$, двойственных к ним $U_j, j = 1, 2, 3$, и медиан $M_j, j = 1, 2, 3$.

На рис. 2 видно, что указанные линии разбивают все пространство параметров \mathcal{P}_2 на 24 треугольника, внутри каждого из которых (для всех его точек!) выполняется неравенство упорядочения:

$$\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2 \quad (i, j, k, l = 0, 1, 2, 3), \tag{13}$$

символическая запись которого $(ijkl)$ приведена на рис. 2. Таким образом, при переходе через двойственные линии $U_j (j = 1, 2, 3)$ и медианы $M_j (j = 1, 2, 3)$ в каждом упорядочении меняются местами два соседних параметра, например, α_i^2 и α_j^2 , а при переходе через линию вырождения $V_j (j = 1, 2, 3)$ меняются между собой сразу две пары параметров, что и отмечено на рис. 2 надписями вида $(ijkl)$ для тех треугольников, которые попадают внутрь диаграммы Шустера, и (\overline{ijkl}) , для тех треугольников, которые лежат вне диаграммы Шустера.

Группировка областей $(ijkl)$ по доминированию состоит в фиксации какого-либо числа из $0, 1, 2, 3$ в “старшей” позиции l . При этом вся плоскость (s_1, s_2) будет разбита на четыре зоны, которым присвоены “римские” номера I, II, III, \square . Справедливо разбиение пространства \mathcal{P}_N на $(2^N)!$ непересекающихся класса точек, заключенных в гипертетраэдры, аналогичные $(2^2)! = 24$ треугольникам для \mathcal{P}_2 .

6. СВЯЗЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ С ПАРАМЕТРАМИ ФРЕНЕЛЯ

Чтобы обосновать сказанное, получим новые формулы, выражающие вычислительные параметры $\alpha_j (j = 0, 1, \dots, 2^N - 1)$ через параметры Фре-

неля. Для этого в формуле (5), определяющей коэффициенты Фурье, проведем перемножение биномов, воспользовавшись аддитивной формой обобщенного бинома:

$$\prod_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) = \sum_L \prod_{k=1}^n \alpha_k^{l_k} \beta_k^{\bar{l}_k},$$

где вектор $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_n), l_k = 0, 1, (k = 1, \dots, n)$ дает номер слагаемого в указанной сумме, а \bar{l}_k – двоичное отрицание l_k . Проведя суммирование по частям для вновь введенного для этого двоичного вектора $\mathbf{L} = (l_0, \dots, l_{N+1})$ и используя укороченные векторы $\mathbf{L}_0 = (0, l_1, \dots, l_{N+1})$, придем к следующей формуле:

$$\begin{aligned} \alpha_I^m &= 1/2 (\tau_{\mathbf{L}} + (-1)^m \tau_{\bar{\mathbf{L}}}), & \mathbf{I} &= (i_1, \dots, i_N), \\ i_k &= 0, 1, & (k &= 1, \dots, N), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\tau_{\mathbf{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=2}^{N+1} \theta_s^{l_s},$$

двоичный вектор

$$\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_{2^N-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L}(\mathbf{I}) = \mathbf{D}\mathbf{I},$$

получается применением к \mathbf{I} , номеру α_I , линейного оператора:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а $\bar{\mathbf{L}}$ – вектор, двойственный к \mathbf{L} . Формула (14) при $m = 1$ позволяет получить для пространства \mathcal{P}_N все те результаты, что мы анонсировали для \mathcal{P}_2 .

Для векторов \mathbf{L} , имеющих только одну единицу, соответствующее $\tau_{\mathbf{L}}$ будет иметь вид $\theta_s (s = 2, \dots, N)$, и мы получим $N - 1$ гиперплоскостей вырождения V_s при $\theta_s = 1$ и столько же двойственных им гиперплоскостей U_s при $\theta_s = \theta$. Еще одна гиперплоскость вырождения V_1 полу-

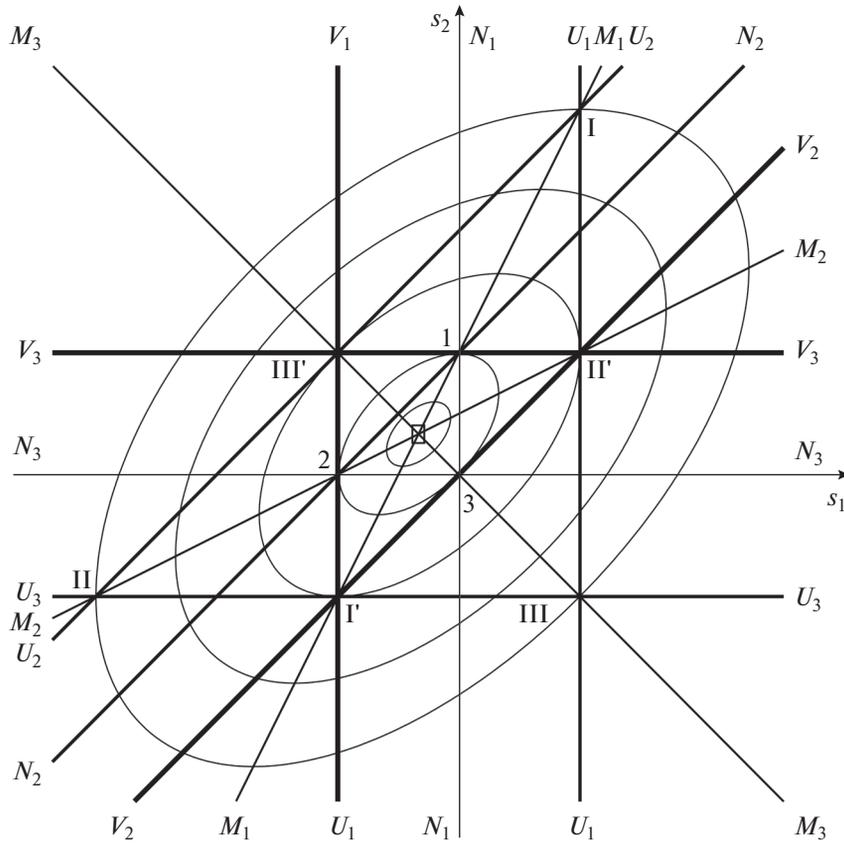


Рис. 3. “Евклидовы квазиокружности”: $\sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 = \rho$, $(\rho_k = d_k \alpha_0^2, k = 1, \dots, 3)$.

чится при $\theta_1 = 1$, а двойственная к ней гиперплоскость U_1 получится при $\theta_1 = \theta$. Последние гиперплоскости вырождения V_{N+1} и двойственная к ней U_{N+1} соответствуют $\theta_{N+1} = 1$ и $\theta_{N+1} = \theta$. Ровно по середине между каждой плоскостью вырождения V_s и двойственной к ней U_s располагается нулевая плоскость N_s . Подобно (11) при $m = 1$ можно выписать $2^{N-1} (2^N - 1)$ тождеств сравнения:

$$\begin{aligned} \alpha_I^2 - \alpha_J^2 &= 1/4 [(\tau_L - \tau_{\bar{L}})^2 - (\tau_M - \tau_{\bar{M}})^2] = \\ &= 1/4 (\tau_{LM} - \tau_{\bar{L}\bar{M}}) \cdot (\tau_{\bar{L}\bar{M}} - \tau_{LM}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mathbf{I} = \mathbf{DL}, \mathbf{J} = \mathbf{DM}$, а \mathbf{LM} – покоординатное умножение двоичных векторов \mathbf{L} и \mathbf{M} .

7. КВАЗИОКРУЖНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathcal{P}_N

Прежде всего отметим, что для элементов τ_{lm} матрицы передачи \mathcal{T} – порождающих функций – справедливо равенство

$$\sum_J (\mathcal{Q}_J^m)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\tau_{lm}(\vec{r})\|_{\mathcal{P}_2}^2 = 1/2^N \sum_I (\alpha_I^m)^2, \quad (16)$$

выражающее квадрат их среднеквадратичной нормы в виде суммы квадратов их коэффициентов Фурье, где для второго равенства использованы свойства матриц Адамара, связывающих векторы коэффициентов Фурье и вычислительных параметров между собой. Запись квадрата нормы порождающих функций в виде суммы квадратов вычислительных параметров позволяет интерпретировать последнюю как квазиевклидову метрику в пространстве \mathcal{P}_N .

На рис. 3 при $N = 2$ изображена серия “квазиевклидовых” “квазиокружностей”, отвечающих нескольким значениям их “квазирadiusов”:

$\rho_k = d_k \alpha_0^2$ ($k = 1, \dots, 5$). На рис. 4 при $N = 2$ представлена серия “квазичебышевских квазиокружностей”: $\rho_k = d_k \alpha_0^2$ ($k = 1, \dots, 5$), одна из которых совпала со сторонами среднего треугольника $\Gamma', \Pi', \text{III}'$. Смысл названия “квазичебышевские квазиокружности” тесно связан со следующей точной (в том смысле, что она достигается в некоторой вершине куба периодов T^N порождающих функций) оценкой:

$$\max_{T^N} |\tau_{lm}(\vec{r})|^2 \leq \max_I (\alpha_I^m)^2, \quad (17)$$

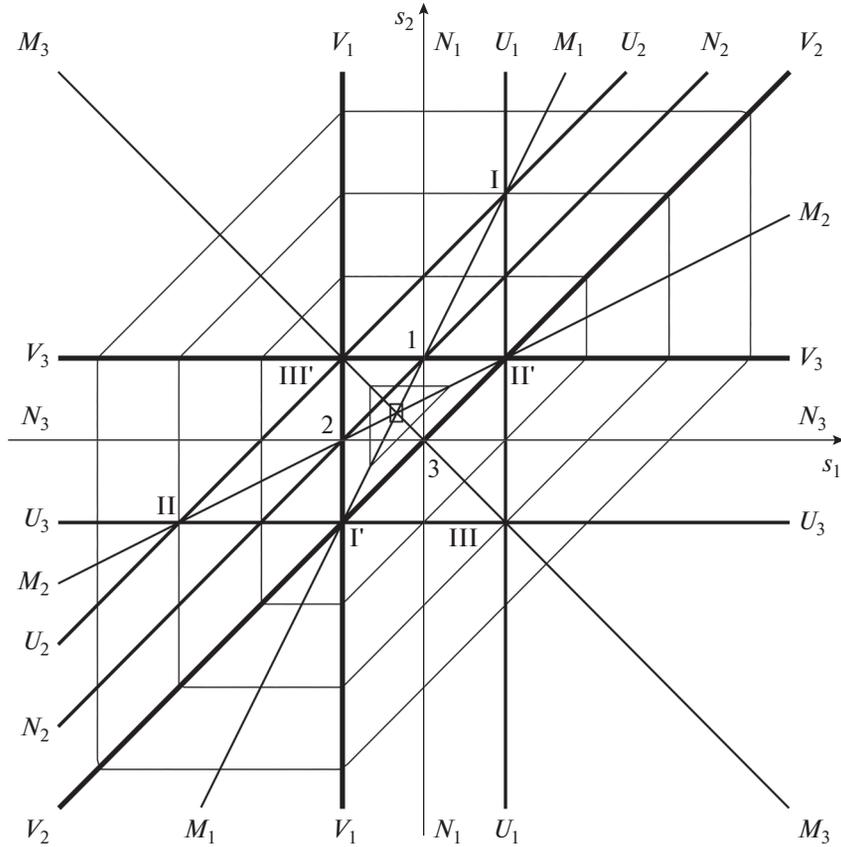


Рис. 4. “Чебышевские квазиокружности”: $\max_{0 \leq l \leq 2^N - 1} \alpha_l^2 = \rho, \rho_k = d_k \alpha_0^2, k = 1, \dots, 5).$

которая легко получается и позволяет рассматривать в пространстве \mathcal{P}_N “квазичебышевскую” метрическую функцию.

С использованием (17) получены эффективные, точные и неулучшаемые на классе СДС оценки энергетических коэффициентов отражения сверху и пропускания снизу:

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma^N} |\mathbf{R}(\vec{r})|^2 &\leq \max_{\Gamma} \frac{(\alpha_I^1)^2}{(\alpha_I^0)^2}, \\ \max_{\Gamma^N} |\mathbf{T}(\vec{r})|^2 &\leq 1 - \max_{\Gamma} \frac{(\alpha_I^1)^2}{(\alpha_I^0)^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

С помощью неравенства Бернштейна эти оценки дают точные оценки производных указанных характеристик СДС.

8. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПОЛОСОВОГО ФИЛЬТРА ПРИ $N = 2$

Рассмотрим пример синтеза полосового фильтра для заданного идеала $\tilde{F}(k) \equiv 0$ профилирующей функции, отвечающего такому же идеалу для коэффициента отражения $\tilde{R}(k) \equiv 0$. Традицион-

но примем $p_0 = 1$, а величину p_3 – равной 1.52. Тогда получим $\theta = 1.52$, а $\sqrt{p_0 p_3} \approx 1.233$. Размеры куба K_N допустимых адмитансов выберем в соответствии с формулами (7) в условных единицах при значениях параметров $s_1 = 0.125, s_2 = 0.875$.

При таком выборе параметров s_1 и s_2 в соответствии с работой [8] нули порождающей функции для части области пространства адмитансов, помеченной символом (2301) и лежащей внутри куба ограничений K_2 , попадают на луч $v_2 = 2v_1$, исходящий на плоскости $t_1 = v_1 k, t_2 = v_2 k$ из начала координат и определяющий оптимальную обмотку на торе, соответствующем порождающей функции. Профиль сечения порождающей функции вдоль указанного луча будет иметь вид фильтра квазичебышевского типа, если поместить середину интересующего нас интервала волновых чисел $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ в точку $t_1 = \pi/2, t_2 = \pi$, выбрав величину $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. При этом в широком диапазоне волновых чисел отношение максимального значения профилирующей функции на луче к ее минимально допустимому уровню просветления $\alpha_2^2 \approx 0.004167$ заведомо будет превосходить вели-

чину $(\alpha_1^2 + \alpha_3^2)/(2\alpha_2^2) \approx 27.6$, которая является важнейшей характеристикой построенного таким образом фильтра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано взаимодействие структур пространств электродинамических параметров адмитансов и электрических толщин слоев СДС. Объединение изложенных выше построений с полученными нами ранее результатами по детальному исследованию расположения нулей коэффициента отражения [8, 9] в зависимости от адмитансов материалов системы выводит математический аппарат решения задачи синтеза оптимальных полосовых фильтров на новый уровень.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худак Ю.И., Парфенов Д.В., Музылев Н.В., Хачлаев Т.С. // Рос. технол. журн. 2020. Т. 8. № 5. С. 26.
2. Худак Ю.И., Парфенов Д.В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 9. С. 845.
3. Кард П.Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин: Валгус, 1971.
4. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 1.
5. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2015. Т. 467. № 2. С. 149.
6. Худак Ю.И. // Рос. технол. журн. 2017. Т. 5. № 3. С. 3.
7. Schuster K. // Annalen der Physik (Folge 6). 1949. В. 4. Н. 5. S. 352.
8. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Нелинейный мир. 2016. № 2. С. 38.
9. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 2. С. 24.

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 535

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ СРЕДНИХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ПРОФИЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА**

© 2022 г. Ю. И. Худак^{a, *}, Д. В. Парфенов^a, А. И. Стариковский^a

^aМИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: hudak@mirea.ru

Поступила в редакцию 11.09.2021 г.

После доработки 21.03.2022 г.

Принята к публикации 21.04.2022 г.

Предложен новый подход, отличный от традиционного, к задачам синтеза слоистых диэлектрических фильтров (СДФ) и систем просветления, в основе которого лежит идея использования идеалов для профилирующих функций слоистооднородных диэлектрических систем (СДС), получаемых из идеалов для энергетических коэффициентов отражения или пропускания требуемого фильтра. Обосновано существенное развитие ранее предложенного авторами математического аппарата, учитывающее фундаментальные ограничения на допустимые значения импедансов материалов слоев, обычные для постановки и решения задач синтеза. Впервые обоснованы формулы для вычисления средних и экстремальных значений числителя и знаменателя энергетического коэффициента отражения, которые характеризуют спектральные показатели проектируемых систем, а также впервые обращено внимание на качественную “неоднородность” параметров параллелепипеда ограничений в пространстве импедансов, имеющую принципиальное значение при решении оптимизационных задач синтеза.

DOI: 10.31857/S0033849422110043

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Желаемое поведение энергетического коэффициента отражения или пропускания слоистой системы в заданной полосе волновых чисел $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ обычно задается спектральными характеристиками¹ $\tilde{R}(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$ (см. соответствующие рисунки в [1]).

Математическая постановка задачи оптимального синтеза слоистооднородных диэлектрических систем (СДС) в смысле П.Л. Чебышева рассмотрена в [2]:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min, \quad (1)$$

где \bar{v} – электрические толщины и \bar{p} – импедансы всех слоев СДС.

В [1] рассмотрена математическая постановка задачи синтеза в виде

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |R(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{R}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (2)$$

при $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$,

¹ Функции типа $\tilde{R}(\kappa)$, $\tilde{T}(\kappa)$, как и в [1], будем называть идеалами для соответствующих физически реализуемых конкретным фильтром спектральных характеристик.

и эквивалентная указанной выше, исходной, упрощенная постановка:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \leq \kappa \leq \mathcal{K}_2} |F(\kappa, \bar{p}, \bar{v}) - \tilde{F}(\kappa)| \xrightarrow{\bar{p}, \bar{v}} \min \quad (3)$$

при $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$,

где $F(\kappa, \bar{p}, \bar{v})$ – профилирующая функция для СДС, $\tilde{F}(\kappa)$ – идеал для профилирующей функции, пересчитанный из идеала для коэффициента отражения $\tilde{R}(\kappa)$ или пропускания $\tilde{T}(\kappa)$ (см. [1, 2]), а \bar{v} – элементы пространства \mathcal{N}_N – электрических толщин и \bar{p} – импедансы слоев СДС – элементы параллелепипеда \mathbf{P}_N из пространства импедансов \mathcal{P}_N материалов.

Последние постановки задач синтеза СДС естественно называть задачами оптимизации в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями.

Получены принципиальные для теории и практики СДС результаты.

1. Точные выражения для коэффициентов α_I , $I = (i_1, \dots, i_N)$, $i_k = 0, 1$ (I – двоичная запись индекса α_I) представлений числителя и знаменателя коэффициентов отражения N -слойных систем

(N – число слоев в системе), которые в [3] названы вычислительными параметрами² СДС, через основные параметры таких систем $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{N+1})$, где $\theta_j, j = 1, \dots, N + 1$ – отношение импедансов слоев системы (номера $j = 0$ и $j = N + 1$ присвоены полупространствам, “окружающим” N -слойную СДС слева и справа).

2. Формулы для выражения средних значений числителя и знаменателя энергетических коэффициентов отражения и пропускания через вычислительные параметры для любых N -слойных СДС, а также их компактные выражения через основные параметры СДС.

3. Показано, что средние и экстремальные значения профилирующих функций связаны с двумя типами метрики в пространстве вычислительных параметров СДС: а) среднеквадратической – для средних значений и б) чебышевской – для максимумов числителя и знаменателя $R(\kappa)$.

4. Приведены примеры совместного эффективного использования указанных новых понятий при решении задач синтеза просветляющих, антипросветляющих и полосовых фильтров для $N = 2$.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В [4] рассмотрена математическая постановка задачи о распространении через СДС (по нормали к ней) плоской электромагнитной волны и ее аналитическое решение. Введены порождающие функции СДС $\tau_s = C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t})$, $s = 0, 1$, которые являются амплитудами падающей ($s = 0$) и отраженной ($s = 1$) волн в левом полупространстве, т.е. знаменателем и числителем коэффициента отражения от такой системы, где $\vec{\theta}$ – вектор отношений импедансов $p_j = \sqrt{\epsilon_j/\mu_j}, j = 0, 1, \dots, N, N + 1$, соседних слоев: $\theta_j = p_j/p_{j-1}, \vec{t} = \vec{v}\kappa, \kappa$ – волновое число, \vec{v} – вектор электрических толщин $v_j = \sqrt{\epsilon_j\mu_j}$ каждого из слоев $j = 1, \dots, N$ системы.

Функции $\tau_s = C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t})$ названы порождающими, так как при различных выборах векторов $\vec{\theta}, \vec{v}$ они дают решение задачи анализа для любой СДС.

² Название вычислительные параметры мотивировано тем, что через них аналитически выражаются важнейшие свойства порождающих функций СДС.

Экспоненциальные представления $C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t})$ получаются при $j_{N+1} = 0$:

$$C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_J Q_J^s(\vec{\theta}) \exp(-i\Lambda_J(\vec{t})),^3 \tag{4}$$

где $J = (j_0, j_1, \dots, j_N, j_{N+1}), j_k = 0, 1$,

$$\Lambda_J(\vec{t}) = \sum_{k=1}^N (-1)^{j_k} t_k,$$

$$Q_J^s(\vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{N+1} 1/2 [1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k], \text{ для } \check{J} j_0 = s, \tag{5}$$

где \oplus – сложение по модулю 2. Алгебраические представления таких функций:

$$C_s^{(0)}(\vec{\theta}, \vec{t}) = u(\vec{\theta}, \vec{t}) - iv(\vec{\theta}, \vec{t}),$$

$$u(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_{L: \|L\|=2n} (-1)^n \alpha_L \Psi_L(\vec{t}), \tag{6}$$

$$v(\vec{\theta}, \vec{t}) = \sum_{L: \|L\|=2n+1} (-1)^n \alpha_L \Psi_L(\vec{t}),$$

$$L = (l_1, \dots, l_N), l_k = 0, 1, k = 1, \dots, N,$$

$$\|L\| = \sum_{k=1}^N l_k, \Psi_L(\vec{t}) = \prod_{k=1}^N x_k^{l_k} y_k^{1-l_k}, \tag{7}$$

где $x_k = \cos(t_k), y_k = \sin(t_k)$, которые в силу обозначения

$$\vec{t} = \vec{v} \cdot \kappa, \tag{8}$$

являются 2π -периодическими по $t_k = v_k \kappa (k = 1, 2)$ функциями.

Введено понятие вычислительных параметров $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{2^N-1})$ СДС, $\vec{\alpha} = \mathcal{H}\vec{Q}, \vec{Q} = (Q_0, \dots, Q_{2^N-1})$, где \mathcal{H} – матрица Адамара $2^N \times 2^N$.

Докажем принципиальные формулы, дающие точные выражения для вычислительных параметров $\alpha_I, I = (i_1, \dots, i_N)$, где $i_s = 0, 1$.⁴ Для этого преобразуем определение вычислительных параметров:

$$\alpha_I = \alpha_I(\vec{\theta}) = \sum_J (-1)^{(I, J)} Q_J^s(\vec{\theta}), \tag{9}$$

где $J = (j_0, j_1, \dots, j_N, j_{N+1}), j_0 = s, j_k = 0, 1, j_{N+1} = 0$, а вектор $\check{J} = (j_1, \dots, j_N)$, – укороченный J , при

³ Экспоненциальное представление числителя и знаменателя коэффициента отражения СДС угаданы в [5], изменены и обоснованы в [3].

⁴ Мы имеем дело с двумя семействами вычислительных параметров: для числителя ($j_0 = 1$) и знаменателя ($j_0 = 0$) в записи вектора \mathbf{J} для коэффициентов Фурье $C_s^{(0)}$, где $j_0 = s$. Семейства отличаются знаком $(-1)^{j_0}$ в их выражениях. На это будем указывать.

помощи формулы суммирования по частям, применив ее к двоичным векторам I, \bar{J} .

В результате преобразований получим

$$\alpha_I(\bar{\theta}) = \sum_J (-1)^{(I, \bar{J})} \prod_{k=1}^{N+1} 1/2 \left[1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k \right] = \frac{1}{2} (\tau_L + (-1)^{j_0} \tau_{\bar{L}}), \tag{10}$$

где $\tau_L = \prod_{s=2}^{N+1} \theta_s^s$, двоичный вектор $L = (l_2, \dots, l_{N+1}) = L(I) = \mathbf{D}I$ является образом вектора I (двоичного номера α_I) при применении к нему линейного оператора в виде двоичной матрицы:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор \bar{L} двоично противоположен к L .

Из формулы (1) вытекает следующее базовое представление:

$$M \left[\left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{r}) \right|^2 \right] = \sum_j \left| Q_j^s(\bar{\theta}) \right|^2, \tag{11}$$

где использован символ $M[f(t)]$ для среднего значения функции $f(t)$.

С помощью (2) получаем выражение указанной суммы через $\bar{\theta}$:

$$M \left[\left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{r}) \right|^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=1}^{N+1} 1/2 \left[1 + \theta_k^2 \right] + (-1)^{j_0} \theta \right) = \frac{\theta}{2} \left(\prod_{k=1}^{N+1} 1/2 \left[\frac{1}{\theta_k} + \theta_k \right] + (-1)^{j_0} \right), \text{ где } j_0 = s. \tag{12}$$

Из (5) и ортогональности матриц Адамара получаем для $\|\bar{Q}\|^2$:

$$\|\bar{Q}\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{Q}, \bar{Q}) = (\mathcal{N}^{-1} \bar{\alpha}, \mathcal{N}^{-1} \bar{\alpha}) = \frac{1}{2^N} (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^N} \|\bar{\alpha}\|^2, \tag{13}$$

что выражает среднее $\left| C_s^{(0)}(\bar{r}) \right|^2$ через среднее квадратов вычислительных параметров, пропорциональное квадрату нормы вектора $\bar{\alpha}$ (см. рис. 4):

$$M \left[\left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{r}) \right|^2 \right] = \frac{1}{2^N} \|\bar{\alpha}\|^2. \tag{14}$$

В [3] получена точная оценка профилирующих функций СДС:

$$F_s(\bar{\theta}, \bar{r}) = \left| C_s^{(0)}(\bar{\theta}, \bar{r}) \right|^2; \quad F(\bar{\theta}, \bar{r}) \leq \max_{0 \leq k \leq 2^N - 1} \left\{ \alpha_k^2 \right\},$$

правая часть которой является чебышевской нормой (см. рис. 5) в пространстве векторов – квадратов α_I^2 , $I = 0, \dots, 2^N - 1$ (индекс I – десятичный номер с двоичным представлением $I = (i_1, \dots, i_N)$, $i_k = 0, 1$).

2. КЛАССЫ СДС И ИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Для эффективного использования дополнительных ограничений, наложенных на электродинамические параметры $\bar{p} \in \mathbf{P}_N \subset \mathcal{P}_N$, для наглядности будем рассматривать случай $N = 2$, для него в [3] описано пространство параметров импедансов \mathcal{P}_2 , которое при естественном ограничении: $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ оказалось плоским графом с 19 конечными вершинами (одна вершина в бесконечности), 66 ребрами и 48 гранями, что свидетельствует о большом разнообразии всех СДС, даже при $N = 2$. (Здесь и далее везде под СДС будем понимать двухслойные СДС, специально оговаривая другие случаи.)

Граф \mathcal{P}_2 – пространство импедансов двухслойных СДС в исходных координатах p_1, p_2 – представляет собой четверть плоскости: $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, на которой часто изображают диаграмму Шустера [6], описывающую области существования нулей двухслойных СДС.

Определение. Показательными координатами в пространстве \mathcal{P}_2 будем называть пару чисел (s_1, s_2) , удовлетворяющих определяющим их (при заданных величинах импедансов p_0, p_3), соотношениям:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta^{s_1+1/2}, & \theta_1 &= p_1/p_0, \\ \theta_2 &= \theta^{s_2-s_1}, & \theta_2 &= p_2/p_1, \text{ где } \theta \equiv \theta_1\theta_2\theta_3, \\ \theta_3 &= \theta^{-s_2+1/2}, & \theta_3 &= p_3/p_2, \end{aligned} \tag{15}$$

Граф \mathcal{P}_2 в координатах s_1, s_2 изображен на рис. 1.

Из (15) вытекает, что множество всех точек четверти плоскости параметров (p_1, p_2) , – \mathcal{P}_2 , получается при изменении (s_1, s_2) во всей плоскости: $-\infty < s_i < +\infty$, $i = 1, 2$, и соответствие (15) взаимно-однозначно.

Для различения двух указанных выше смыслов символа \mathcal{P}_2 будем писать дополнительную букву \mathcal{G} сверху в обозначении пространства: $\mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$.

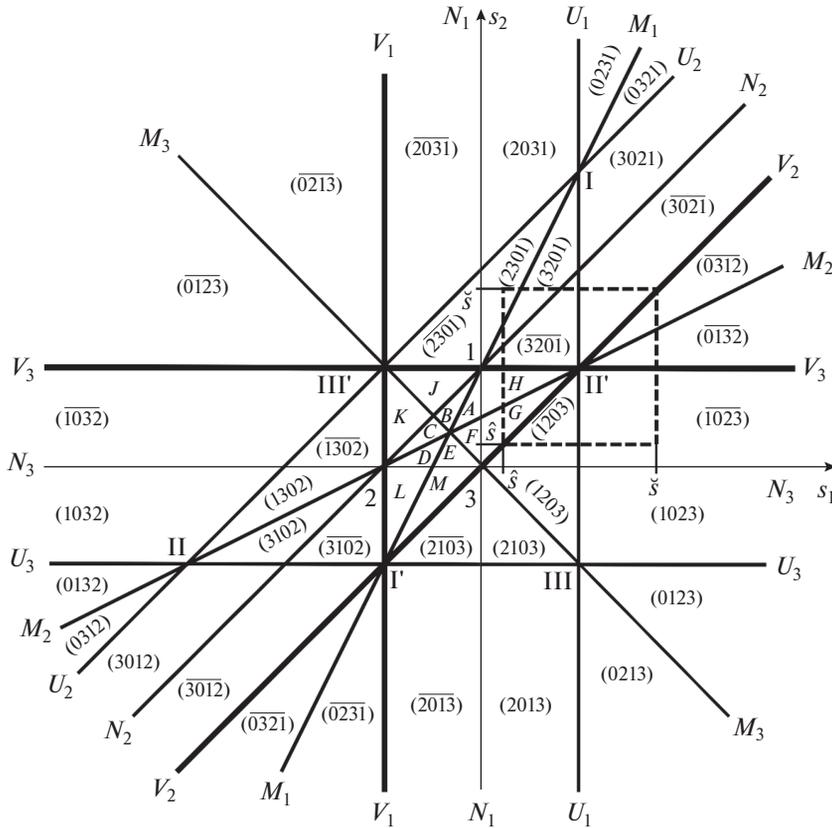


Рис. 2. Квадрат $P_2 : \{\hat{s} \leq s_1, s_2 \leq \bar{s}\}$ (в координатах s_1, s_2) – область допустимых значений импедансов в пространстве \mathcal{P}_2 – при $\hat{s} = 1/8, \bar{s} = 3/4$.

или (s_1, s_2) в перпендикулярном ребру направлении могут существенно менять некоторые свойства СДС.

Системы, относящиеся к ребрам вырождения, являются однослойными.

3. Девятнадцать классов формально “двух-слойных” СДС, отвечающих вершинам графа **G**, являются “фантомными”, поскольку имеют теоретическое значение, состоят ровно из одной СДС в каждом классе и абсолютно неустойчивы, так как сколь угодно малые вариации (p_1, p_2) или (s_1, s_2) , выводят за пределы данного класса систем. Точки Γ, Π, Π', Π'' , отвечают нульслойным системам.

Замечание 1. На рис. 1 три жирные линии вырождения V_j : $\theta_j = 1$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$ и $\alpha_i^2 = \alpha_i^2, i \neq j, 0, 1$) образуют треугольник вырождения Γ, Π, Π' . Три полужирные линии U_j , двойственные к линиям вырождения – $\theta_j = \theta$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$), – образуют большой треугольник I, Π, Π' . Три тонкие линии N_j стационарных нулей:

$\theta_j = \theta^{1/2}$ (на них $\alpha_j = 0$), образуют малый треугольник $1, 2, 3$. Кроме того, нанесены три медианы треугольников M_j : $\theta_i = \theta_j$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_k^2$). Условие существования нулей выполнено внутри и на границах малого треугольника и его внешних углов, что соответствует диаграмме Шустера.

Замечание 2. Свойства графа **G** использованы нами при решении оптимизационных задач синтеза просветляющих покрытий, диэлектрических зеркал (антипросветляющих покрытий) и полосовых фильтров на базе СДС. Принципиальным является факт “неоднородности” квадрата ограничений $P_2^{\mathcal{S}}$:

$$\{\hat{s} \leq s_1, s_2 \leq \bar{s}\},$$

изображенного на рис. 2 в показательных координатах s_1, s_2 , который получается преобразованием координат (15) из исходного квадрата ограничений P_2 :

$$\{\hat{p} \leq p_1, p_2 \leq \bar{p}\}.$$

Свою “неоднородную” структуру $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ наследует от $\mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$: каждая часть грани $\mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$, попадающая в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, определяет подкласс одного из классов $(ijkl)$ или (\overline{ijkl}) (см. рис. 1). Попадание внутрь ограничений \hat{s}, \bar{s} , соответствующих \hat{p}, \bar{p} , существенно зависит от величины этих ограничений (см. объяснения ниже). Классы же двухслойных СДС введены в [2, 3], где $i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$ – различные между собой целые числа.

Количество различных подклассов СДС, образующих \mathbf{P}_2 , существенно зависит от величины ограничений снизу \hat{p} и сверху \bar{p} .

На рис. 2 представлен важный случай, когда ограничение \hat{p} больше “характерной” величины $\sqrt{p_0 p_3}$, а \bar{p} для \mathbf{P}_2 удовлетворяет неравенству $\bar{p} > p_3$, где p_3 – импеданс правого полупространства. При этом рис. 2 полезно представить включенным в серию аналогичных рисунков: первый вариант $\bar{p} < p_3$, второй $p_3 < \bar{p} < \sqrt{p_3^3/p_0}$, третий $\sqrt{p_3^3/p_0} < \bar{p} < p_3^2/p_0$ и, наконец, четвертый $p_3^2/p_0 < \bar{p}$. Важно, что не меньшее число вариантов по составу “реальных” классов СДС, входя-

щих в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, получается при вариации нижней границы \hat{p} квадрата ограничений \mathbf{P}_2 .

3. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СДС ($N = 2$)

Если в основной системе (при $N = 2$) (см. [2, 3]) принять: $C_0^{(3)} = 1$ и $C_0^{(3)} = 0$, то система имеет единственное решение и числитель и знаменатель амплитудного коэффициента отражения $r(\omega)$ являются элементами первого столбца произведения матриц передачи $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$, где $T_j = (B_{j-1})^{-1} B_j S_j(v_j, \omega)$, и, если в матрицах обозначить: $v_1 \omega = t_1, v_2 \omega = t_2$ (см. (8)), то естественно ввести следующее определение.

Определение. Порождающими функциями СДС будем называть:

$$C_s^{(0)}(t_1, t_2) = Q_0^{(s)} \exp(-i(t_1 + t_2)) + Q_1^{(s)} \exp(-i(t_1 - t_2)) + Q_2^{(s)} \exp(i(t_1 - t_2)) + Q_3^{(s)} \exp(i(t_1 + t_2)), \quad s = (0, 1), \quad (17)$$

где коэффициенты $Q_j^{(s)}, j = 0, 1, 2, 3, s = 0, 1$:

$$\begin{aligned} Q_0^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(1 + \theta_3), & Q_0^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 + \theta_2)(1 + \theta_3), \\ Q_1^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 - \theta_2)(1 - \theta_3), & Q_1^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 - \theta_2)(1 - \theta_3), \\ Q_2^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 - \theta_2)(1 + \theta_3), & Q_2^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 - \theta_2)(1 + \theta_3), \\ Q_3^{(0)} &= \frac{1}{8}(1 - \theta_1)(1 + \theta_2)(1 - \theta_3), & Q_3^{(1)} &= \frac{1}{8}(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(1 - \theta_3). \end{aligned} \quad (18)$$

Замечание. В силу (18) при значении каждого относительного параметра $\theta_j = 1, j = 1, 2, 3$, одна из пар коэффициентов $Q_j^{(s)}, Q_k^{(s)}, j \neq k$ в (17) обращается в нуль, что означает вырождение СДС в однослойную.

Замечание. При выборе конкретных значений v_1, v_2 в (8) формула (6) порождает семейства амплитуд $C_s^{(0)}(\omega), s = 0, 1$, для конкретной СДС.

Определение. Профилирующие функции СДС имеют вид

$$F_s(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} |C_s^{(0)}(t_1, t_2)|^2 = (\alpha_0^{(s)} x_1 x_2 - \alpha_3^{(s)} y_1 y_2)^2 + (\alpha_1^{(s)} x_1 y_2 + \alpha_2^{(s)} y_1 x_2)^2, \quad s = 0, 1. \quad (19)$$

Числитель ($s = 1$) и знаменатель ($s = 0$) $|C_s^{(0)}(v_1 \omega, v_2 \omega)|^2$ энергетического коэффициента

отражения $R(\omega)$ СДС получаются из $F_s(t_1, t_2)$ при подстановке в них (8) с конкретными значениями v_1, v_2 . Коэффициенты этих квадратичных по паре переменных x_j, y_j ($x_j = \cos v_j \omega, y_j = \sin v_j \omega$), ($j = 1, 2$) форм выражаются через “вычислительные” параметры СДС $\vec{\alpha}_s = (\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \alpha_3^{(s)})$, а вектор $\vec{\alpha}_s$ линейным преобразованием

$$\vec{\alpha}_s = \mathcal{H} \vec{Q}_s, \quad (20)$$

связан с вектором \vec{Q}_s коэффициентов Фурье этих квадратичных форм:

$$\vec{Q}_s = (Q_0^{(s)}, Q_1^{(s)}, Q_2^{(s)}, Q_3^{(s)}),$$

где \mathcal{H} – матрица Адамара 4×4 .

Определение. (4) будем называть исходной формой профилирующих функций СДС.

Замечание. $F_s(t_1, t_2)$, $s = 0, 1$, представляют собой семейства функций, зависящих от параметров p_1, p_2 через коэффициенты $\alpha_j^{(s)}$, $j = 1, 2, 3$.

Функции $F_0(t_1, t_2)$ и $F_1(t_1, t_2)$ связаны между собой тождеством:

$$F_0(t_1, t_2) - F_1(t_1, t_2) \equiv \theta, \quad \theta = \theta_1 \theta_2 \theta_3 \stackrel{\text{def}}{=} p_3/p_0.$$

Поэтому, по-существу, мы имеем дело с одной профилирующей функцией, $F_1(t_1, t_2)$ и будем, в случае необходимости, называть ее базовой.

Замечание. В нуль может обращаться только $F_1(t_1, t_2)$, а $F_0(t_1, t_2)$ в точках, где $F_1(t_1, t_2) = 0$, принимает свое минимальное значение $\theta > 0$.

Базовую функцию СДС можно записать в виде

$$F_1(t_1, t_2) = u^2 + v^2, \quad (21)$$

где вектор $\vec{u} = (u, v)^T$ (T – знак транспонирования) является значением двух линейных преобразований $A_1 \vec{x}_1 = \vec{u}$, $A_2 \vec{x}_2 = \vec{u}$, матрицы операторов A_1, A_2 которых имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_2 & -\alpha_3 y_2 \\ \alpha_1 y_2 & \alpha_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_1 & -\alpha_3 y_1 \\ \alpha_2 y_1 & \alpha_1 x_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (u, v)^T,$$

а участвующие в (18) параметры α_j , $j = 0, 1, 2, 3$ записаны для $s = 1$.

В работе также используется развернутая форма записи $F_1(t_1, t_2)$:

$$F_1(t_1, t_2) = \alpha_0^2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_1^2 x_1^2 y_2^2 + \alpha_2^2 y_1^2 x_2^2 + \alpha_3^2 y_1^2 y_2^2 + 4B_3 x_1 y_1 x_2 y_2, \quad (23)$$

где $B_3 = 1/2(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)$, и форма записи пониженной степени:

$$F_1(t_1, t_2) = A_0 + A_1 u_2 + A_2 u_1 + A_3 u_1 u_2 + B_3 v_1 v_2, \quad (24)$$

коэффициенты которой: $\vec{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)^T$ – квадратичные формы от $\vec{\alpha}$:

$$A_j = \frac{1}{4} \vec{\alpha}^* I_j \vec{\alpha}, \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (25)$$

с диагональными матрицами I_j , ($j = 0, 1, 2, 3$), диагонали которых – столбцы матрицы Адамара 4×4 .

Учитывая (20) при $s = 1$, получаем коэффициенты A_j ($j = 0, 1, 2, 3$):

$$A_0 = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2,$$

$$A_1 = 2(Q_0 Q_1 + Q_2 Q_3), \quad A_2 = 2(Q_0 Q_2 + Q_1 Q_3), \quad (26)$$

$$A_3 = 2(Q_0 Q_3 + Q_1 Q_2),$$

которые имеют мультипликативную структуру, как в (14), относительно квадратов параметров θ_j ($j = 1, 2, 3$):

$$A_1 = \frac{1}{16} (1 + \theta_1^2) (1 - \theta_2^2) (1 - \theta_3^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{16} (1 - \theta_1^2) (1 - \theta_2^2) (1 + \theta_3^2), \quad (27)$$

$$A_3 = \frac{1}{16} (1 - \theta_1^2) (1 + \theta_2^2) (1 - \theta_3^2),$$

в силу чего, знаки A_k , $k = 1, 2, 3$ тесно связаны со структурой графа G .

Для доказательств утверждений в работе использованы еще три квадратичные формы от Q_j ($j = 0, 1, 2, 3$):

$$B_1 = \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3) = 2(Q_0 Q_1 - Q_2 Q_3),$$

$$B_2 = \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3) = 2(Q_0 Q_2 - Q_1 Q_3), \quad (28)$$

$$B_3 = \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3) = 2(Q_1 Q_2 - Q_0 Q_3),$$

для которых справедливы мультипликативные представления:

$$B_1 = -\frac{1}{8} \theta_1 (1 - \theta_2^2) (1 - \theta_3^2),$$

$$B_2 = \frac{1}{8} (1 - \theta_1^2) (1 - \theta_2^2) \theta_3, \quad (29)$$

$$B_3 = -\frac{1}{8} (1 - \theta_1^2) \theta_2 (1 - \theta_3^2).$$

4. СТРУКТУРА ОБЛАСТЕЙ ПРОСВЕТЛЕНИЯ $F_1(t_1, t_2)$ ПРИ РАЗНЫХ $\vec{p} \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$

Определение. Функция $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ при данном \vec{p} имеет область просветления $G_{\vec{p}}^j$ в ее j -м периоде T_j , если $\forall \vec{t} \in G_{\vec{p}}^j \subset T_j: F_{\vec{p}}(\vec{t}) < \alpha_0^2$.

Областей просветления счетное множество (если они существуют!). При $a = \alpha_1^2 - \alpha_0^2$, $c = \alpha_2^2 - \alpha_0^2$, $d = \alpha_3^2 - \alpha_0^2$ граница $G_{\vec{p}}$ имеет вид:

$$\Phi_{\vec{p}}(t_1, t_2) = ax_1^2 y_2^2 + 2bx_1 y_1 x_2 y_2 + cy_1^2 x_2^2 + dy_1^2 y_2^2 = 0,$$

где $b = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3$. Граница $G_{\vec{p}}$ имеет разный характер в зависимости от того, какому из 133 конечных элементов графа \mathcal{P}_2 принадлежит точка (s_1, s_2) . Однако для всех внутренних точек трапеций I, II, III на рис. 1 области просветления существуют, и их граница во всех случаях является гиперболой на вспомогательной плоскости переменных $\xi = t_1, \eta = t_2$.

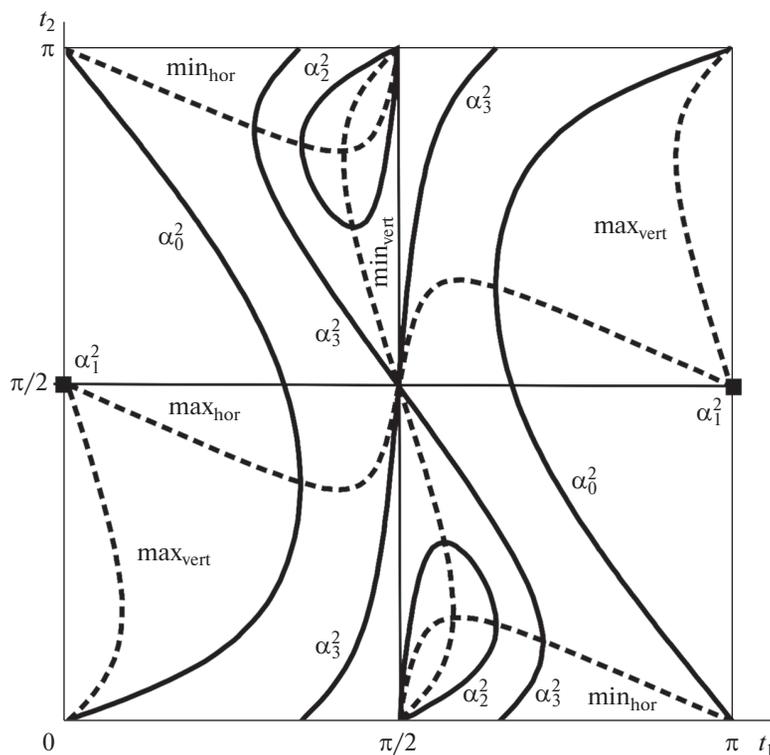


Рис. 3. Область просветления профилирующей функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ при значениях параметров ($s_1 = 0.125, s_2 = 0.875$) из области (2301) на рис. 1.

Лемма о структуре областей просветления в T_0^2 для граней $\mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$.

1. Для областей $(0jkl)$ на рис. 1, где $j, k, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ двухсвязна и имеет “каплевидный” характер.

2. Для областей $(i0kl)$, где $i, k, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ имеет полувершинный характер (охватывает одну полувершину T_0^2).

3. Для областей $(ij0l)$, где $i, j, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ имеет предтотальный характер, охватывая две полувершины T_0^2 .

4. Для областей $(ijk0)$, где $i, j, k = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ имеет тотальный характер, захватывая весь T_0^2 за исключением его вершин.

Доказательство леммы проводить не будем, а проиллюстрируем ее содержание одним типичным изображением области просветления с кодом (2301), принципиальным для данной статьи, так как часть именно этой и аналогичной ей по своим свойствам области (3201) параметров попадает внутрь квадрата $\mathcal{P}_2^{\mathcal{G}}$ на рис. 2.

Замечание. Структура областей просветления для областей параметров с кодом (\overline{ijkl}) (для которых просветление существует) такая же, как областей просветления для параметров с кодом $(ijkl)$, с тем же набором целых чисел i, j, k, l , и описана в лемме, но с важным отличием – внутри таких областей просветления нет нулей профилирующей функции, а ее минимальное значение достигается в полувершине, отвечающей минимальному α_i^2 .

На рис. 3 кроме границ области просветления нанесены также линии, ограничивающие области, внутри которых профилирующая функция не превосходит одного из базовых уровней: $F_{\bar{p}}(t_1, t_2) \leq \alpha_j^2, j = 1, 2, 3$. А также те линии, вдоль которых профилирующая функция $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ достигает своего максимального и минимального значений при изменении только одного параметра: t_1 по горизонтали или t_2 по вертикали. В точке пересечения линий минимумов (горизонтального и вертикального) внутри квадрата периодов располагается нуль профилирующей функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$.

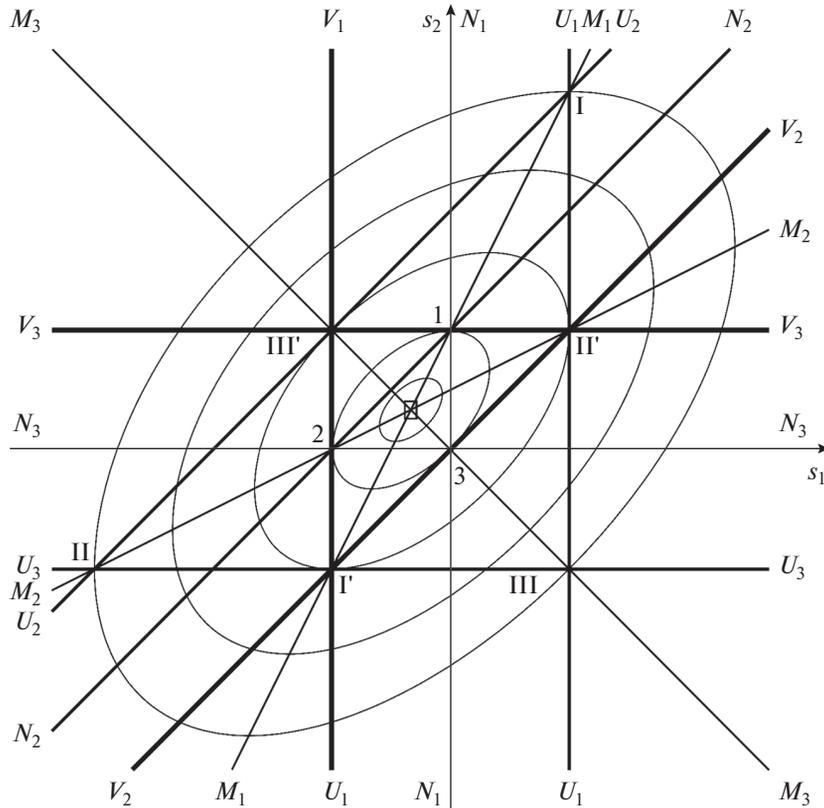


Рис. 4. Серия пяти квазиокружностей разных радиусов, изображенная на фоне \mathcal{P}_2 (см. рис. 1) в среднеквадратичной метрике пространства квадратов вычислительных параметров α_j^2 .

5. ВКЛЮЧЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ РАЗНЫХ $\vec{p} \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$

В теореме О перечислении граней и основных свойств графа $\mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}$, рассмотрены все 133 класса двухслойных СДС. Однако большая часть теоретически возможных СДС до сих пор остается недоступной для практического применения. Для задач синтеза из-за реально присутствующих в постановке таких задач ограничений на величины импедансов используемых материалов единственно доступной частью пространства импедансов СДС является его пересечение с квадратом $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, который задает типичные для задач синтеза ограничения: $\hat{p} \leq p_1 \leq \check{p}, \hat{p} \leq p_2 \leq \check{p}$ в координатах s_1, s_2 при значении ограничивающих параметров $\hat{s} = 1/8, \check{s} = 3/4$, соответствующих $\hat{p} > \sqrt{p_0 p_3}, \check{p} > p_3$ (см. рис. 2). Как видно из рисунка, квадрат ограничений $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}: \{\hat{s} \leq s_1, s_2 \leq \check{s}\}$ пересекается при различных величинах $\{\hat{p}, \check{p}\}$ примерно с четвертью граней \mathcal{P}_2 , примыкающих к точке Π' . В варианте на рис. 2 таких граней десять.

Части классов $(\overline{2310})$ и $(\overline{2130})$ СДС, попадающие в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, в соответствии с работой [3] хорошо приспособлены для решения задач просветления на больших и очень больших интервалах частот, так как все такие СДС обладают просветляющим свойством: $\mathbf{R}(\omega) < \mathbf{R}_F$ (\mathbf{R}_F – коэффициент отражения Френеля) для всех частот, не попадающих в счетное число исключительных, определяемых вершинами квадратов периодов профилирующей функции, для которых произведение соответствующего волнового числа на вектор электрических толщин $\vec{v} = (v_1, v_2)$ попадает в какую-либо вершину какого-либо квадрата периодов.

Части классов $(\overline{0312})$ и $(\overline{0132})$ СДС, попадающие в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, хорошо приспособлены для решения задач антипросветления на больших и очень больших интервалах частот, так как СДС с такими параметрами обладают антипросветляющим свойством: $\mathbf{R}(\omega) > \mathbf{R}_F$ для всех частот, не попадающих в счетное число исключительных, определяемых, как в задаче просветления.

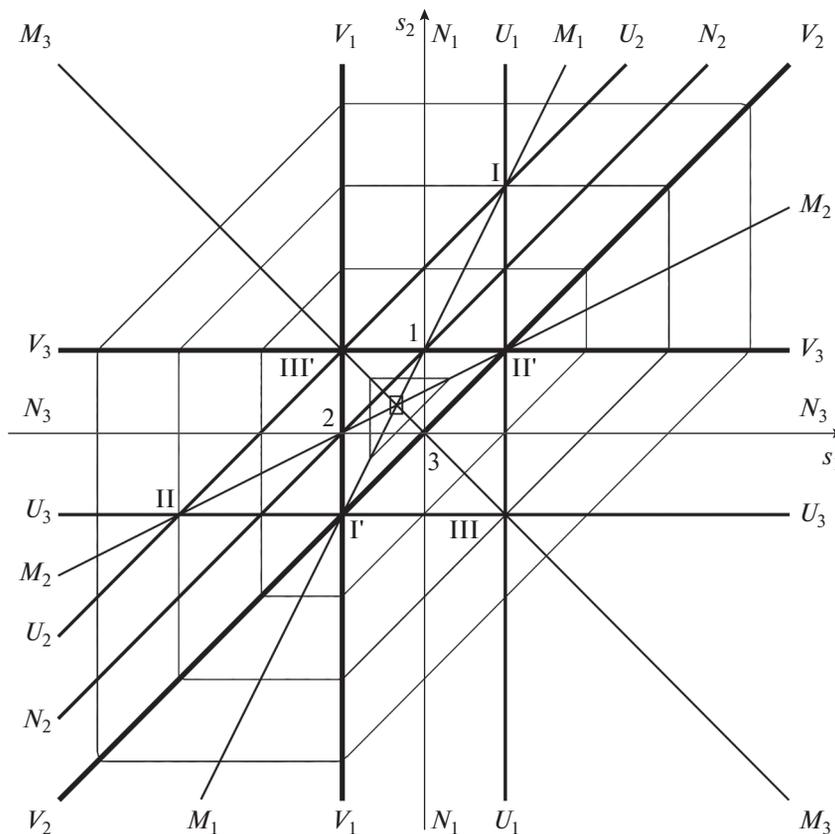


Рис. 5. Серия из пяти квазиокружностей разных радиусов, изображенная на фоне \mathcal{P}_2 (см. рис. 1) в метрике П.Л. Чебышёва пространства квадратов вычислительных параметров α_j^2 .

Части же классов $(\overline{1203})$, $(\overline{1023})$ и $(\overline{3201})$, $(\overline{3021})$ СДС, попадающие в $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, можно использовать для решения задач фильтрации, просветления или антипросветления, не получая, вообще говоря, оптимальных решений.

Профилирующие функции $F_1(t_1, t_2)$ СДС классов (2301) и (3201) из $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ имеют два нуля внутри квадрата периодов. Они оптимально решают задачу просветления на заданной частоте ω_0 , а также задачу просветления в смысле П.Л. Чебышева с ограничениями для небольшого интервала частот.

Оптимальность указанных чебышевских систем объясняется тем, что СДС, получаемые при реализации в других классах $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, ограничены по уровню доставляемого ими просветления γ_{\min} снизу величиной $\alpha_2^2 > 0$ для класса (2301) , величиной $\alpha_3^2 > 0$ для (3201) или другим $\alpha_j^2 > 0$.

Замечание. Рисунки 4 и 5 помогают ставить и решать задачи синтеза и в других постановках. Например, задача наилучшего просветления в смысле среднего значения профилирующей

функции с указанными на рис. 2 ограничениями имеет единственное решение с параметрами (s_1, s_2) , определяющими радиус среднеквадратической квазиокружности с рис. 4, касающейся левой границы $s_1 = \hat{s}_{\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}}$. Чебышевская квазиокружность с наименьшим возможным радиусом, совместимая с ограничениями \mathbf{P}_2 , “касается” левой стороны $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ в точке $s_1^* = \hat{s}$, $s_2^* = 1/2\hat{s} + 1/4$. Задача наилучшего антипросветления в смысле среднего значения профилирующей функции с указанными на рис. 4 ограничениями имеет единственное решение с параметрами $s_1 = \hat{s}, s_2 = \bar{s}$ — координатами нижней правой вершины квадрата $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, определяющей радиус наибольшей среднеквадратической квазиокружности с рис. 4, пересекающей квадрат $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$. Квазиокружности рис. 5 незаменимы при оценках возможных уровней отсечки сверху γ_{\max} полосовых или режекторных фильтров, так как для их реализации необходимо выполнение строгого неравенства: $\gamma_{\max} < \alpha_{\max}^2$.

Из рис. 5 следует, например, вывод о том, что в рамках $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ величина j может принимать значения

1 или 3, но не 2, так как для классов $(\overline{0132})$ и $(\overline{0312})$ соответствующие СДС не будут иметь ни одной области просветления, что для фильтров недопустимо. Допускаемая фиксированным квадратом ограничений максимальная величина радиуса чебышевской квазиокружности достигается в нижней правой вершине $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$, имеющей координаты $s_1 = \hat{s}$, $s_2 = \check{s}$, так как эта точка определяет радиус такой квазиокружности, представленной на рис. 5, еще пересекающей $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$. При этом величина наибольшего радиуса будет α_3^2 для этой точки, что больше, чем радиус подобной квазиокружности, но с максимально возможным значением α_1^2 , которое достигается в любой точке верхней границы $\mathbf{P}_2^{\mathcal{F}}$ при $s_2 = \check{s}$.

Для практического решения задач просветления, антипросветления и синтеза двухслойных полосовых фильтров предлагается использовать

обобщенные и модифицированные методы углового сканирования и подвижного отрезка, ранее описанные и успешно примененные к глобальным задачам просветления и антипросветления в [2, 5, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худак Ю.И., Парфенов Д.В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 9. С. 845.
2. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Нелинейный мир. 2016. № 2. С. 38.
3. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 1.
4. Худак Ю.И. // Докл. РАН. 2015. Т. 467. № 2. С. 149.
5. Худак Ю.И. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1105.
6. Schuster K. // Ann. Phys. (Folge 6). 1949. В. 4. Н. 6. С. 352.
7. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 2. С. 24.

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 621.374.33

**ПРОГРАММНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛЬНОГО РАДИОПРОФИЛЯ
ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПАССИВНОЙ РАДИОСЕНСОРНОЙ
ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ**© 2022 г. К. А. Бойков^а, *, А. Е. Шамин^а^аМИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: nauchnyi@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 16.05.2022 г.

Принята к публикации 23.05.2022 г.

Разработан и исследован программный комплекс для проведения пассивной радиосенсорной технической диагностики. Показана возможность автоматизированной оценки состояния электронных устройств на основе экстрагированных параметров зарегистрированного сигнального радиопрофиля. Представлено сопоставление основных параметров радиопрофиля и параметров радиотехнических узлов электронного устройства. Подготовлен и проведен эксперимент по регистрации и анализу электрической составляющей электромагнитного излучения самого электронного устройства. Установлено, что отклонения по параметрам сигнального радиопрофиля при использовании анализа в разработанном программном комплексе для одного и того же устройства не превышают 5%. Показано, что при необходимом объеме информации об электронном устройстве, программный комплекс без вмешательства оператора может локализовать возникшую неисправность и указать на несоответствие конкретных параметров. Исследовано влияние параметров алгоритма на интерпретируемость и точность полученных результатов.

DOI: 10.31857/S0033849422110018

ВВЕДЕНИЕ

Техническая диагностика (ТД) как наука представляет отрасль научно-технических знаний, состоящих из теории, методов и средств выявления дефектов объектов технической природы [1]. Области научно-технических исследований стремительно расширяются одновременно с развитием методов ТД, а сама техническая диагностика становится основным способом подтверждения надежного функционирования электронных устройств (ЭУ). Развитием теории ТД является метод пассивной радиосенсорной технической диагностики (ПРТД) [2, 3], основанный на регистрации электрической составляющей ближнего поля – сигнального радиопрофиля (СРП), при собственных излучениях ЭУ. Перед другими современными методами ПРТД имеет существенные преимущества (в том числе и перед JTAG-тестированием [4]): не требует гальванического контакта с исследуемым образцом, не занимает процессорное время и не имеет влияния на объект исследования.

Вместе с тем для проведения ПРТД требуется анализировать большой объем информации. Необходимо хранить сведения, позволяющие иден-

тифицировать ЭУ, зарегистрированные СРП, экстрагированные параметры для каждого излучателя. В сложном электронном узле число излучателей, участвующих в формировании СРП, может достигать 10, следовательно, число параметров 50. Ручной анализ большого числа излучателей крайне неэффективен, поэтому актуальна разработка программного комплекса по анализу экстрагированных параметров и принятию решения по полученным результатам.

Цель данной работы – создать и исследовать программный комплекс для проведения пассивной радиосенсорной технической диагностики.

**1. РАЗРАБОТКА
ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА**

Как показано в работе [5], общий СРП узла является линейной суперпозицией СРП входных и выходных цепей его составляющих, которые излучают свободные затухающие колебания в моменты возмущающего воздействия:

Таблица 1. Параметры СРП

| Параметр СРП | Параметр электронного устройства |
|--------------|--|
| U_0 | Падение напряжения на излучателе |
| δ | Температура излучающего узла |
| t_0 | Быстродействие излучающего узла |
| f | Качество диэлектрика, режим работы $p-n$ -перехода |
| N | Число излучателей |

$$U(t) = \sum_{i=1}^N U_{свi}(t) = \sum_{i=1}^N U_{0i} \exp(-\delta_i(t - t_{0i})) \sin[2\pi f_i(t - t_{0i})], \quad (1)$$

где $U_{св}$ – мгновенное значение приведенного уровня i -го колебания, U_0 – приведенная амплитуда первой полувольты i -го колебания, δ – коэффициент затухания i -го колебания, t – текущий момент времени, t_0 – момент времени начала излучения i -го колебания, f – частота i -го колебания.

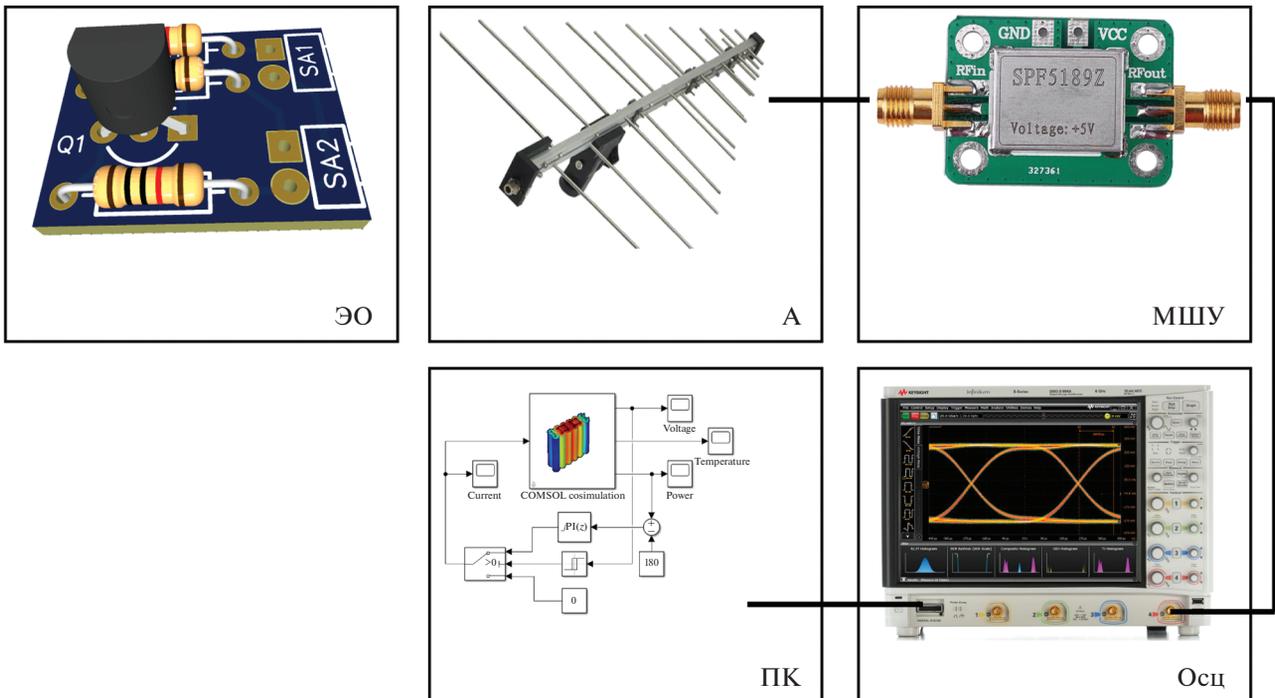
Следует отметить, что выражение (1) является основным уравнением для СРП, излучаемого электронным узлом устройства, и справедливо только при выполнении условия $t - t_{0i} > 0$, при $t - t_{0i} \leq 0$: $U_{свi} = 0$. На практике это означает отсутствие i -го излучения без возмущающего воздействия.

Учитывая сказанное, можно построить таблицу параметров СРП и соответствующих им параметров электронного узла (табл. 1).

Разрабатываемый программный комплекс (ПРК) “СРП” предназначен для проведения ПРТД электронных устройств. Источником СРП выступает измерительный стенд (рис. 1). Обобщенная структура функционирования ПРК “СРП” представлена на рис. 2.

Излученный экспериментальным образцом (ЭО) (т.е. исследуемым устройством) СРП, принимается широкополосной антенной А (П6-122М2и) усиливается маломощным сверхширокополосным усилителем МШУ (LNA 10М-8GHz). Усиленный СРП обнаруживается и регистрируется сверхбыстродействующим осциллографом реального времени Осц (DSOS604A). Полученные в результате измерения данные передаются в персональный компьютер ПК с программной моделью для экстракции параметров СРП и ПРК “СРП”.

ПРК “СРП” написан на языке MatLab с использованием библиотек языка Python (<https://www.mathworks.com/products/matlab/matlab-and-python.html>). Для хранения полученных СРП выбрана система управления базами данных (СУБД) PostgreSQL. В СУБД хранятся сведения об ЭУ, его наименование, серийный номер, количество электронных узлов, временной профиль и параметры, полученные в результате декомпозиции снятой СРП. Использование выделенной СУБД обусловлено тем, что ПО “MatLab & Sim-

**Рис. 1.** Блок-схема измерительного стенда.

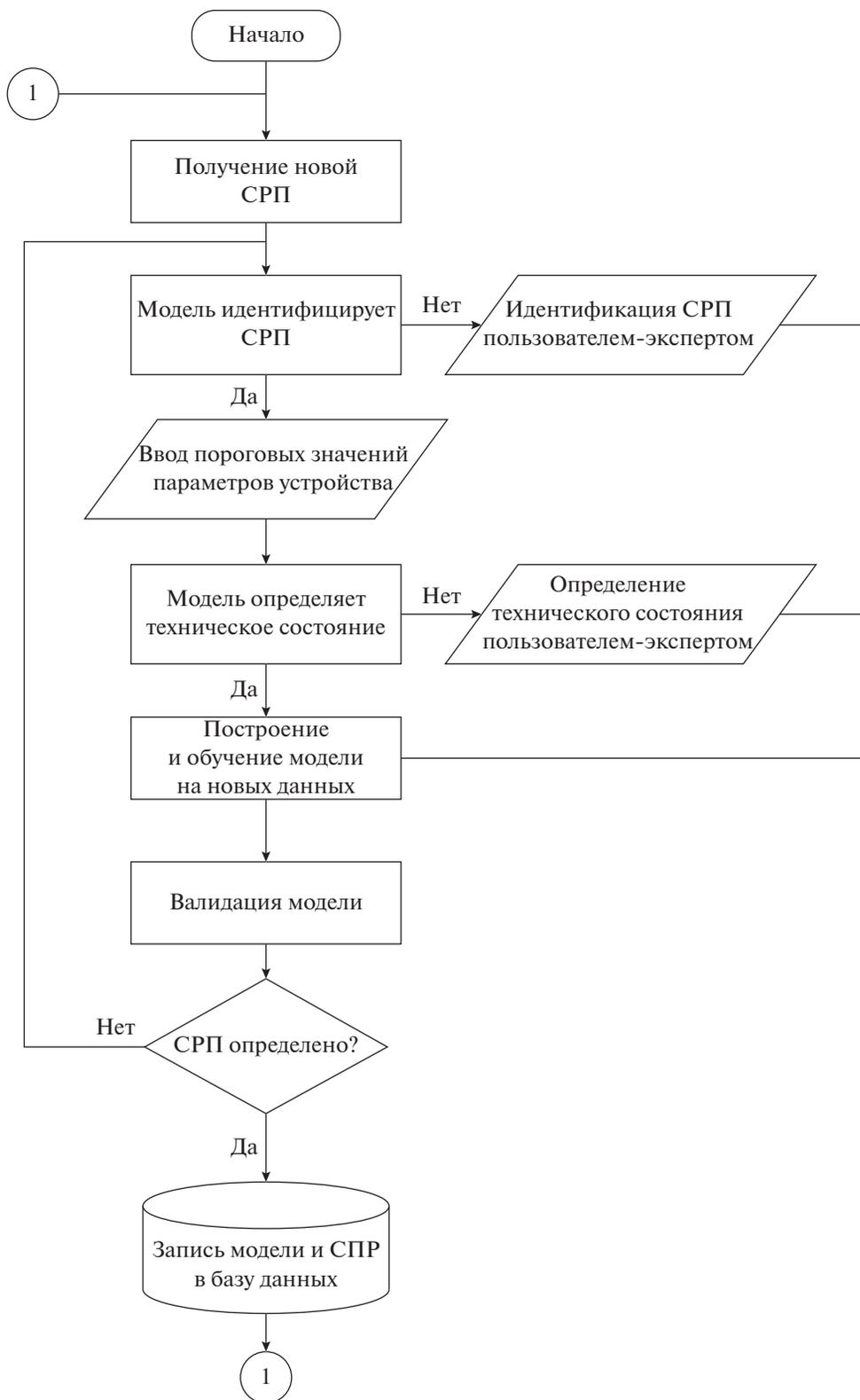


Рис. 2. Обобщенная структура функционирования ПРК.

ulink” не обеспечивает хранения большого количества информации и одновременного доступа к ней для нескольких клиентов. При этом в состав

ПО “MatLab & Simulink” входят необходимые программные интерфейсы для взаимодействия с различными базами данных, в том числе СУБД

“PostgreSQL” (<https://www.mathworks.com/help/database/postgresql-native-interface.html>).

Интерфейс ПРК “СРП” разбит на две основные части: выбор СРП устройства из базы данных и проведение сравнительного анализа. При аутентификации исследуемое устройство сравнивается с репером и принимается решение: оригинал, не оригинал. В случае режима поиска выбирается только СРП исследуемого устройства и программа осуществляет поиск наиболее вероятного схожего устройства самостоятельно.

Для технической диагностики вычисляется взаимная корреляция СРП, проводится сравнение числа излучателей и параметров излучающих элементов. Параметры излучающих элементов сравниваются с учетом допустимых границ, которые могут быть выставлены пользователем индивидуально для каждого из узлов.

Изначально принятие решения о техническом состоянии каждого из узлов устройства остается за пользователем — экспертом в данной предметной области. Список возможных неисправностей хранится в базе данных и сопоставляется с каждым СРП. По мере накопления таких решений ПРК “СРП” обучается классифицировать неисправности без участия человека. Для этого применяется алгоритм CART (Classification and Regression Tree), относящийся к алгоритмам машинного обучения с учителем [6].

К преимуществам применения алгоритма из семейства деревьев решений, в частности CART, можно отнести: отсутствие необходимости нормализации данных и относительная легкость интерпретации результатов [6]. На каждом шаге алгоритм строит бинарное дерево и определяет наилучшее разбиение множества векторов параметров электронных устройств так, чтобы большее число устройств с одинаковым типом неисправностей оказалось в одном поддереве. В алгоритме CART используется неопределенность Джини (Gini Impurity) [7]:

$$H(R) = \sum_{m=1}^M p_m (1 - p_m), \quad (2)$$

где m — тип неисправности устройства, $m \in \{1, \dots, M\}$, M — число различных типов неисправностей устройств, p_m — доля устройств с типом неисправности m , попавших в вершину дерева решений R .

Из (2) видно, что алгоритм построения дерева будет разбивать все множества устройств до тех пор, пока в каждом листе дерева (конечном узле дерева — узле решения) не останутся устройства с одним типом неисправностей. На практике это приведет к переобучению. Для известных устройств

алгоритм будет показывать абсолютно точный результат, но не сможет предсказать верный тип неисправности для нового устройства. Чтобы нивелировать этот эффект в ПРК “СРП” применяется критерий раннего останова, основанный на ограничении максимальной глубины дерева. На основе проведенных экспериментов была выбрана максимальная глубина дерева, равная 3. Это позволило сохранить, с одной стороны, обобщающую способность дерева, с другой — возможность интерпретации полученного результата экспертом.

Для большинства алгоритмов машинного обучения требуется специальная подготовка данных и приведение их к единой шкале [8]. Для переменных, выражающих характеристики реальных физических процессов, приведение к единой шкале может повлечь потерю информации. Алгоритм CART не требует масштабирования переменных и менее чувствителен к случайным выбросам.

Качество ответа алгоритма оценивалось с помощью F_1 — меры, показывающей гармоническое среднее между точностью и полнотой. Мера F_1 находится в интервале $(0...1)$, и чем больше ее значение, тем лучше качество предсказания типа неисправности устройства. Точность, полнота и F_1 для каждого типа неисправностей m , $m \in \{1, \dots, M\}$ определяются как [9]:

$$P_T = \frac{\sum_{m=1}^M T_{Pm}}{\sum_{m=1}^M (T_{Pm} + F_{Pm})}; \quad (3)$$

$$P_{\Pi} = \frac{\sum_{m=1}^M T_{Pm}}{\sum_{m=1}^M (T_{Pm} + F_{Pm})}; \quad (4)$$

$$F_1 = 2 \frac{P_T P_{\Pi}}{P_T + P_{\Pi}}, \quad (5)$$

где P_T — число правильно отнесенных устройств к типу неисправностей m , P_{Π} — число устройств не принадлежащих к типу неисправностей m , но ошибочно отнесенных к нему моделью, F_p — число устройств, принадлежащих к типу неисправностей m , но ошибочно не отнесенных к нему моделью.

2. ПОДГОТОВКА И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве ЭО для определения технического состояния методом ПРТД удобно использовать циф-

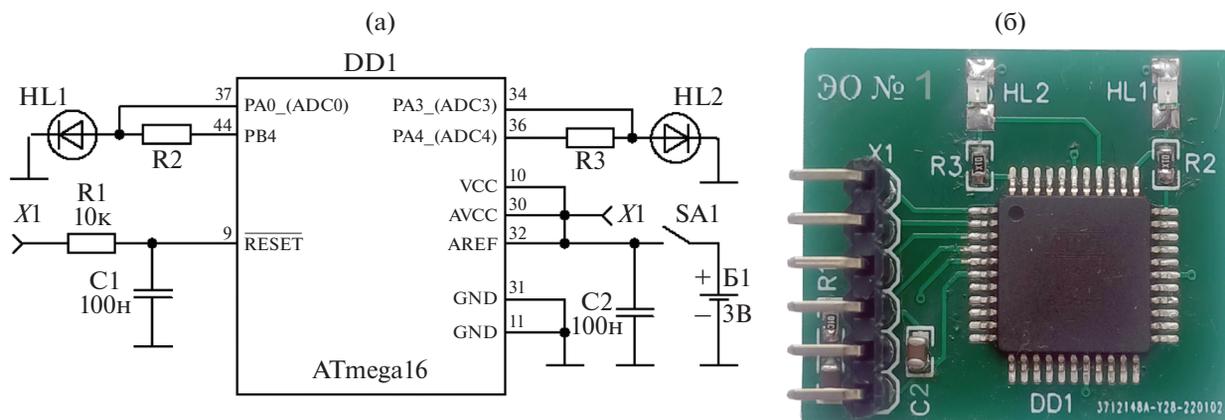


Рис. 3. ЦМУ: а – схема электрическая принципиальная, б – общий вид.

ровое микропроцессорное электронное устройство (ЦМУ). Использование такого устройства позволит провести диагностику не только аппаратных неисправностей, но и определить неверное программное функционирование. Одновременно с этим программный код микропроцессора будет заранее известен, что позволит воспроизводить аппаратно-программные неисправности непосредственно в ЭО.

Для экспериментального исследования излучения ЦМУ разработано и произведено пятнадцать идентичных экспериментальных образцов, состоящих из микроконтроллера ATmega16 (DD1) [11], обвязочных компонентов (R1, R2, C1, C2), периферийной нагрузки в виде светодиода (HL1). Принципиальная электрическая схема прототипа ЦМУ и общий вид представлены на рис. 3 (неиспользуемые выводы DD1 не показаны).

В функциональном состоянии ЦМУ работает по заданному алгоритму. После подачи питания от источника Б1 посредством ключа SA1 контроллер DD1 конфигурируется на функционирование: настраивает порт A.4 на выход (вывод 36 DD1), порт B.4 на выход (вывод 44 DD1) и подключает их поочередно к потенциалу питания (таким образом загораются светодиоды HL1 и HL2). Порт A.3 (вывод 34 DD1) и порт A.0 (вывод 37 DD1) настраиваются как АЦП с разрядностью 10 бит и возможностью чтения напряжений на HL1 и HL2 соответственно. Подачей напряжения низкого уровня на вход X1 осуществляется сброс микроконтроллера на выполнение начального конфигурирования.

Реперный СРП, или репер, необходим для проведения экспериментального исследования в области ПРТД. За репер можно принять любое из подготовленных к исследованию ЦМУ. Будем считать СРП ЦМУ “ЭО № 1” репером.

Пуск микроконтроллера происходит при подаче на него напряжения, все регистры ввода-вывода переводятся в исходное состояние и в счетчик команд записывается начальный адрес. По истечении интервала времени t (как правило, несколько микросекунд), необходимого для стабилизации напряжения питания и запуска тактового генератора, микроконтроллер приступает к выполнению программы, начиная с команды, записанной в его памяти по нулевому адресу.

На рис. 4 (область 1) представлен СРП суперпозиции полей излучения, связанных с наличием накопителя в виде фильтрующей емкости C2 и включением блока компаратора напряжения (BODLEVEL). Также представлены свободные колебания (область 2), связанные только с перераспределением энергии в фильтрующей цепи. Выполнение программы (область 3) начинается через интервал стабилизации t с настройки порта B.4 на выход и подключения его к потенциалу питания. Небольшой всплеск (область 4) на СРП функционирования тестового образца связан с чтением показания АЦП на входе ADC0.

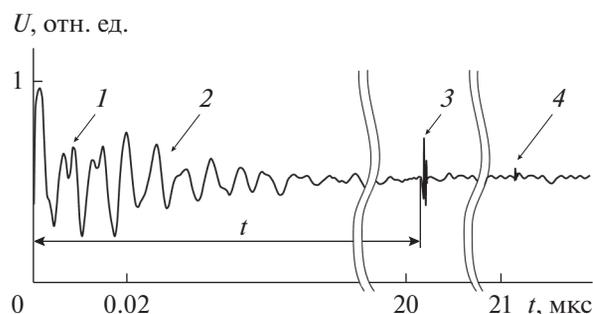
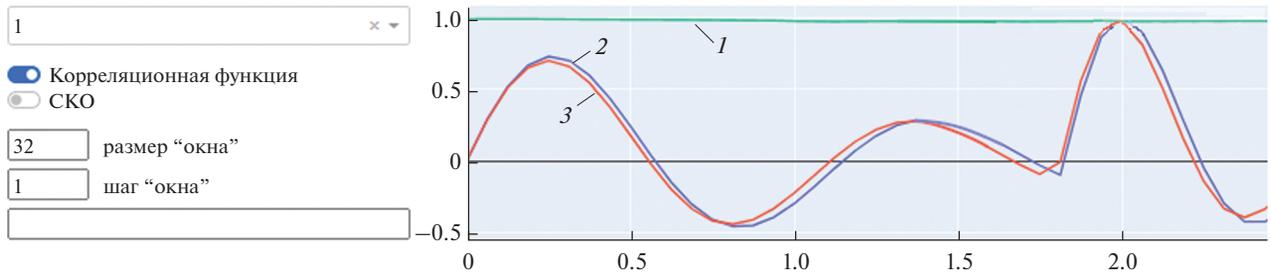


Рис. 4. СРП функционирования ЭО ЦМУ “репер”.



Параметры узлов

| Узел | Репер <i>N</i> | Исследуемый образец <i>N</i> | Корреляция (интервал 3/δ) | | Допуск (%) | | | |
|------|-------------------|---------------------------------|---------------------------|-------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| | | | <i>r</i> | 0.982 | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ |
| 1 | 3 | 3 | 0.982 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 2 | 2 | 2 | 0.988 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 3 | 3 | 3 | 0.985 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 4 | 2 | 2 | 0.917 | 4 | 4 | 4 | 4 | |

Параметры излучателей

| Узел | Излучатель | Репер | | | | Исследуемый образец | | | | Отклонение (%) | | | |
|------|------------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| | | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ |
| 1 | 1 | 0.870 | 0.00 | -0.80 | 0.50 | 0.900 | 0.00 | -0.83 | 0.48 | 3 | 0 | 4 | 4 |
| 1 | 2 | 1.200 | 1.82 | -1.60 | 0.80 | 1.240 | 1.80 | -1.66 | 0.78 | 3 | 1 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 0.480 | 1.82 | -4.80 | 0.30 | 0.500 | 1.85 | -4.70 | 0.29 | 4 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 1.200 | 0.00 | -2.20 | 0.20 | 1.220 | 0.00 | -2.23 | 0.19 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| 2 | 1 | 1.600 | 1.20 | -3.00 | 0.40 | 1.640 | 1.18 | -3.17 | 0.38 | 2 | 2 | 5 | 5 |
| 3 | 1 | 0.770 | 0.00 | -0.86 | 0.44 | 0.790 | 0.00 | -0.85 | 0.42 | 3 | 0 | 1 | 5 |
| 3 | 2 | 1.260 | 1.76 | -1.70 | 0.70 | 1.280 | 1.79 | -1.67 | 0.67 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 0.600 | 1.76 | -5.70 | 0.21 | 0.580 | 1.79 | -5.50 | 0.22 | 3 | 2 | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 1.300 | 0.00 | -2.40 | 0.12 | 1.260 | 0.00 | -2.45 | 0.12 | 3 | 0 | 2 | 0 |
| 4 | 2 | 1.660 | 1.00 | -3.50 | 0.34 | 1.650 | 1.04 | -3.47 | 0.33 | 1 | 4 | 1 | 3 |

Рис. 5. Результаты измерений в ПРК "СРП": кривая 1 – корреляционная функция, кривая 2 – СРП репера, кривая 3 – СРП экспериментального образца.

По среднему из десяти измерений был получен репер: двумерный массив СРП и извлеченные параметры, сохраненные в базе данных ПРК.

Далее определяли допустимый разброс параметров. Для этого занесенные в БД параметры репера сравнивали с мгновенными значениями параметров этого же репера. По разбросу параметров можно судить о допустимых и недопустимых значениях при определении технического состояния и определении оригинальности. Для упрощения и ускорения процедуры достаточно рассмотреть СРП, связанные с выполнением программного кода.

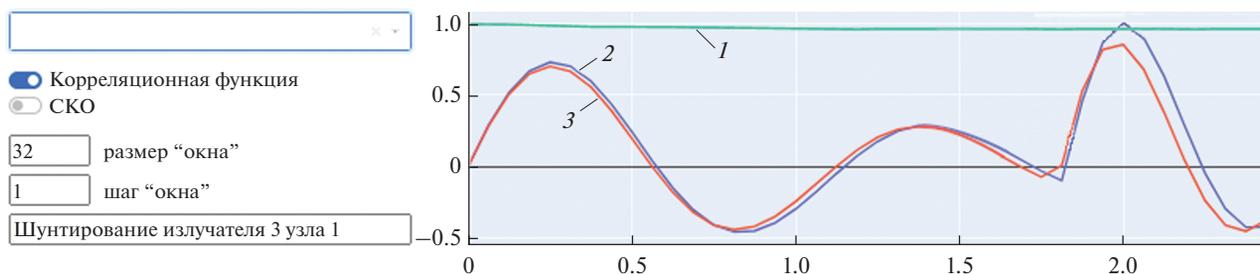
На рис. 5 представлены результаты сравнения усредненного СРП репера и мгновенного СРП репера в ПРК "СРП".

Отклонения по различным параметрам СРП имеют различные значения. Серия из десяти измерений показывает, что отклонения по частоте

колебаний излучателей *f* превышают 4%, по времени включения *t*₀, коэффициенту затухания δ и по начальной амплитуде *U*₀ – не более 5%. При выходе параметров за данные пределы ПРК, в зависимости от выбранного режима, будет принимать решения по техническому состоянию либо оригинальности ЦМУ.

Для определения технического состояния методом ПРТД намеренно введем неисправность в ЭО № 1 – короткое замыкание светодиода HL1.

На рис. 6 представлены результаты проведения измерений в ПРК "СРП" технически неисправного ЭО № 1. Из исследуемого электронного узла пропал один излучатель, остальные параметры находились в допустимых пределах. ПРК определил данную неисправность как "шунтирование излучателя 3 узла 1". Следует отметить, что ПРК "СРП" позволяет создавать синонимы для излучателей, входящих в исследуемые электрон-



Параметры узлов

| Узел | Репер <i>N</i> | Исследуемый образец <i>N</i> | Корреляция (интервал 3/δ) <i>r</i> | Допуск (%) | | | |
|------|-------------------|---------------------------------|---------------------------------------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| | | | | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ |
| 1 | 3 | 2 | 0.775 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 2 | 0.988 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 3 | 0.985 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 4 | 2 | 2 | 0.917 | 4 | 5 | 5 | 5 |

Параметры излучателей

| Узел | Излучатель | Репер | | | | Исследуемый образец | | | | Отклонение (%) | | | |
|------|------------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| | | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ | <i>f</i> , ГГц | <i>t</i> ₀ , нс | δ ₁ , нс ⁻¹ | <i>U</i> ₀ |
| 1 | 1 | 0.870 | 0.00 | -0.80 | 0.50 | 0.890 | 0.00 | -0.82 | 0.48 | 2 | 0 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 1.200 | 1.82 | -1.60 | 0.80 | 1.240 | 1.80 | -1.65 | 0.78 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 3 | 0.480 | 1.82 | -4.80 | 0.30 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1.200 | 0.00 | -2.20 | 0.20 | 1.220 | 0.00 | -2.23 | 0.19 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| 2 | 1 | 1.600 | 1.20 | -3.00 | 0.40 | 1.640 | 1.18 | -3.17 | 0.38 | 2 | 2 | 5 | 5 |
| 3 | 1 | 0.770 | 0.00 | -0.86 | 0.44 | 0.790 | 0.00 | -0.85 | 0.42 | 3 | 0 | 1 | 5 |
| 3 | 2 | 1.260 | 1.76 | -1.70 | 0.70 | 1.280 | 1.79 | -1.66 | 0.67 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 0.600 | 1.76 | -5.70 | 0.21 | 0.580 | 1.79 | -5.50 | 0.22 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 1.300 | 0.00 | -2.40 | 0.12 | 1.260 | 0.00 | -2.43 | 0.12 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 2 | 1.660 | 1.00 | -3.50 | 0.34 | 1.650 | 1.04 | -3.45 | 0.33 | 1 | 4 | 1 | 3 |

Рис. 6. Определение аппаратной неисправности в ПРК “СРП”: кривая 1 – корреляционная функция, кривая 2 – СРП репера, кривая 3 – СРП экспериментального образца.

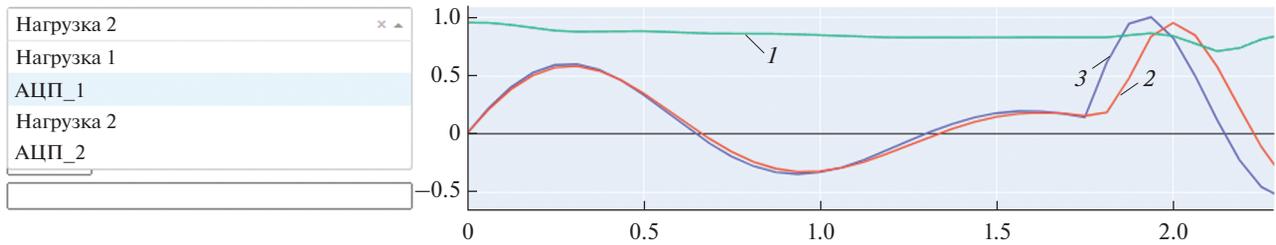
ные узлы. Так, для “излучателя 3 узла 1” возможно сопоставить синоним “НЛ1”. Тогда при соответствующем техническом состоянии на экран будет выведена неисправность “шунтирование НЛ1”. Аналогичным образом, зная наименования элементов и излучателей в исследуемых электронных узлах можно сопоставить им понятные пользователю синонимы. В табл. 2 приведены известные излучатели экспериментальных образцов и их псевдонимы.

Теперь при определении технического состояния на экран будет выводиться авария, интуитивно понятная пользователю.

Восстановив аппаратные изменения к исходному состоянию в ЭО № 1 введена программная неисправность. В программе микроконтроллера отсутствует запрос на чтение АЦП А0. На рис. 7 представлены результаты проведения измерений в ПРК “СРП” программно-неисправного ЭО № 1.

Таблица 2. Синонимы излучателей

| Излучатель | Синоним |
|---------------------|---------------|
| Излучатель 1 узла 1 | Порт В4 вход |
| Излучатель 2 узла 1 | Порт В4 выход |
| Излучатель 3 узла 1 | НЛ1 |
| Излучатель 1 узла 2 | Порт А4 вход |
| Излучатель 2 узла 2 | Порт А4 выход |
| Излучатель 3 узла 2 | НЛ2 |
| Излучатель 1 узла 3 | АЦП А3 вход |
| Излучатель 2 узла 3 | АЦП А3 выход |
| Излучатель 1 узла 4 | АЦП А0 вход |
| Излучатель 2 узла 4 | АЦП А0 выход |



Параметры узлов

| Узел | Репер N | Исследуемый образец N | Корреляция (интервал $3/\delta$) r | Допуск (%) | | | |
|------------|--------------|----------------------------|--|------------|------------|-------------------------------|-------|
| | | | | f , ГГц | t_0 , нс | δ_1 , нс ⁻¹ | U_0 |
| Нагрузка 1 | 3 | 3 | 0.968 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| АЦП_1 | 2 | | | 4 | 5 | 5 | 5 |
| Нагрузка 2 | 3 | 3 | 0.888 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| АЦП_2 | 2 | 2 | 0.999 | 4 | 5 | 5 | 5 |

Параметры излучателей

| Узел | Излучатель | Репер | | | | Исследуемый образец | | | | Отклонение (%) | | | |
|------------|------------|-----------|------------|-------------------------------|-------|---------------------|------------|-------------------------------|-------|----------------|------------|-------------------------------|-------|
| | | f , ГГц | t_0 , нс | δ_1 , нс ⁻¹ | U_0 | f , ГГц | t_0 , нс | δ_1 , нс ⁻¹ | U_0 | f , ГГц | t_0 , нс | δ_1 , нс ⁻¹ | U_0 |
| Нагрузка 1 | HL1 | 0.480 | 1.82 | -4.80 | 0.30 | 0.500 | 1.80 | -4.83 | 0.29 | 4 | 1 | 1 | 3 |
| Нагрузка 1 | В4 вход | 0.870 | 0.00 | -0.80 | 0.50 | 0.850 | 0.00 | -0.78 | 0.52 | 2 | 0 | 3 | 4 |
| Нагрузка 1 | В4 выход | 1.200 | 1.82 | -1.60 | 0.80 | 1.150 | 1.85 | -1.57 | 0.82 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| | А0 вход | 1.200 | 0.00 | -2.20 | 0.20 | | | | | | | | |
| | А0 выход | 1.600 | 1.20 | -3.00 | 0.40 | | | | | | | | |
| Нагрузка 2 | А4 вход | 0.770 | 0.00 | -0.86 | 0.44 | 0.750 | 0.00 | -0.87 | 0.43 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| Нагрузка 2 | А4 выход | 1.260 | 1.76 | -1.70 | 0.70 | 1.240 | 1.84 | -1.67 | 0.68 | 2 | 5 | 2 | 3 |
| Нагрузка 2 | HL2 | 0.600 | 1.76 | -5.70 | 0.21 | 0.625 | 1.75 | -5.72 | 0.21 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| АЦП_2 | А3 вход | 1.300 | 0.00 | -2.40 | 0.12 | 1.330 | 0.00 | -2.50 | 0.12 | 2 | 0 | 4 | 0 |
| АЦП_2 | А3 выход | 1.660 | 1.00 | -3.50 | 0.34 | 1.680 | 1.00 | -3.55 | 0.33 | 1 | 0 | 1 | 3 |

Рис. 7. Определение программной неисправности в ПРК “СРП”: кривая 1 – корреляционная функция, кривая 2 – СРП репера, кривая 3 – СРП экспериментального образца.

Как видно из рисунка, из исследуемого электронного узла полностью пропал элемент 2, остальные параметры находятся в допустимых пределах. ПРК неизвестна данная неисправность, однако оператор знает, что запроса на чтение данных АЦП А0 не поступило. Оператор может ввести наименование данной неисправности вручную. Теперь при возникновении аналогичного состояния ПРК на экран выведет “отсутствие запроса на чтение АЦП_1”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представленные в работе результаты позволяют оценить преимущества бесконтактного и практически безынерционного метода ПРТД по оценке технического состояния ЭУ. Дистанционное обнаружение аппаратных и программных неисправностей, определение целостности сигналов ЭУ особенно актуально в случаях невозможного применения технологии JTAG-тестирования, требующей гальванического доступа к аппаратной обвязке ЭУ [12].

Ручной анализ большого числа излучателей крайне неэффективен, поэтому при реализации

метода ПРТД необходима автоматизация. Разработанный для данных целей ПРК “СРП” позволяет в автоматическом режиме проводить исследования технического состояния, аутентификации и поиска электронных узлов. Собрав необходимый объем информации об ЭУ, ПРК без вмешательства оператора может локализовать возникшую неисправность и указать на несоответствие конкретных параметров. Автоматизированное исследование сложного СРП и анализ его параметров открывает новые возможности в области ТД программных и аппаратных средств молниеносно развивающейся электронной техники.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еременко В.Т. Техническая диагностика электронных средств. Орел: Госуниверситет – УНПК, 2012.
2. Бойков К.А., Костин М.С., Куликов Г.В. // Рос. технол. журн. 2021. Т. 9 № 4. С. 20. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-4-20-27>
3. Бойков К.А., Костин М.С. // Новые технологии высшей школы. Наука, техника, педагогика. Ма-

- тер. Всерос. науч.-практич. конф. “Наука—Общество—Технологии—2021” (Россия, Москва, 26 марта 2021 г.). М.: Московский Политех, 2021. С. 119.
4. *Hu Y., Li W., Wang Y.F. et al.* // J. Instrumentation. 2019. V. 14. № 9. P. T09002.
 5. *Бойков К.А.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2021. Т. 24. № 6. С. 63.
<https://doi.org/10.32603/1993-8985-2021-24-6-63-70>
 6. *Мюллер А., Гвидо С.* Введение в машинное обучение с помощью rython. Руководство для специалистов по работе с данными. М.: Вильямс, 2017.
 7. *Хасты Т., Тибширани Р., Фридман Д.* Основы статистического обучения: интеллектуальный анализ данных, логический вывод и прогнозирование. СПб.: Диалектика, 2020.
 8. *Паклин Н.Б., Орешков В.И.* Бизнес аналитика: от данных к знаниям (+CD): Учеб. пособие. СПб.: Питер, 2013.
 9. *Zhang M., Zhou Z.* // IEEE Trans. 2014. V. KDE-26. № 8. P. 1819.
<https://doi.org/10.1109/TKDE.2013.39>
 10. *Сирота А.А.* Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2016.
 11. *Очкуренко Г.О.* // Теория и практика совр. науки. 2019. № 4. С. 178.
 12. *Костин М.С., Ворунчев Д.С.* Реинжиниринг радиоэлектронных средств. М.: МИРЭА, 2018.

К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 621.372.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТОЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

© 2022 г. А. Н. Коваленко^а, А. Д. Ярлыков^{а, *}

^аМИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: yarlykov@mirea.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 02.02.2022 г.

Принята к публикации 15.02.2022 г.

Открытая микрополосковая линия при достаточно больших размерах экрана моделируется экранированной линией, построенной проекционным методом с использованием полиномов Чебышева. Приведены выражения для матричных коэффициентов бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения плотности тока на поверхности полоскового проводника. Получены предельные выражения для матричных коэффициентов при стремлении размеров экрана к бесконечности. Рассмотрено решение бесконечной системы уравнений в квазистатическом приближении и установлены границы его применимости. Представлены численные результаты, подтверждающие теоретически установленную быструю сходимость разложений для плотности тока и позволяющие оптимальным образом выбрать размеры экрана при моделировании открытой линии.

DOI: 10.31857/S0033849422110079

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен эффективный численно-аналитический метод решения задачи о собственных волнах экранированной микрополосковой линии. Эта задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из которой определяются коэффициенты разложения плотности тока на полосковом проводнике по полиномам Чебышева с весовыми функциями, учитывающими в явном виде краевые особенности поля. В [2] установлена быстрая сходимость этого разложения и возможность решения бесконечной системы методом редукции. При этом порядок редуцированной системы K не превышает 5 в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров линии, а для узких полосковых проводников высокая точность обеспечивается при $K = 1$ [3]. Однако с увеличением размера нижнего экрана ухудшается сходимость рядов для матричных коэффициентов и, как следствие, возрастают вычислительные затраты при компьютерном моделировании линии. Поэтому актуальной задачей является определение таких размеров экрана, при которых основные электродинамические параметры – коэффициент замедления и волновое сопротивление – экранированной и открытой линий практически совпадают. В данной работе эту

задачу решаем путем математического моделирования открытой линии, экранированной при достаточно больших размерах экрана, устремляя в выражениях для матричных коэффициентов СЛАУ размеры экрана к бесконечности.

1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Используя расчетные соотношения, полученные в [1] для экранированной микрополосковой линии (рис. 1), представим плотности продольного $\eta_z(x)$ и поперечного тока $\eta_x(x)$ на полосковом проводнике для собственных волн четного типа в виде разложений:

$$\eta_z(\tilde{x}) = (1 - \tilde{x}^2)^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l} T_{2l}(\tilde{x}),$$

$$\eta_x(\tilde{x}) = -i \frac{k_0 W}{2\Gamma} (1 - \tilde{x}^2)^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} b_{2l-1} U_{2l-1}(\tilde{x}), \quad (1)$$

$$\tilde{x} = (x - a/2)/(W/2), \quad |\tilde{x}| \leq 1,$$

где $T(\tilde{x})$ – полиномы Чебышева первого рода; $U(\tilde{x})$ – полиномы Чебышева второго рода; Γ – нормированная к волновому числу свободного пространства $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ постоянная распространения.

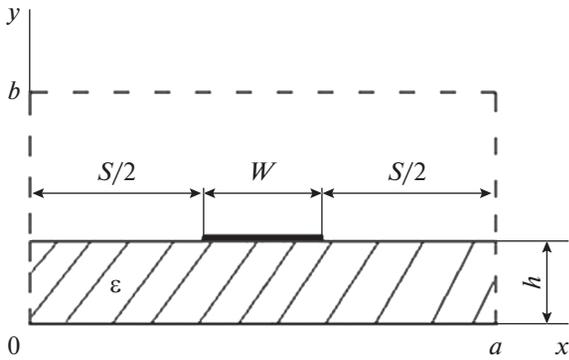


Рис. 1. Поперечное сечение микрополосковой линии.

Коэффициенты разложения a_{2l}, b_{2l-1} определяются из следующей СЛАУ:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} A_{ql} a_{2l} + \sum_{l=1}^{\infty} B_{ql} b_{2l-1} &= 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots), \\ \sum_{l=0}^{\infty} C_{ql} a_{2l} + \sum_{l=1}^{\infty} D_{ql} b_{2l-1} &= 0 \quad (q = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} A_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{1}{k_0 a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{\chi_m^2} \times \\ &\times (\Gamma^2 G_m^\ominus + \alpha_m^2 G_m^M) J_{ql}(m\alpha), \\ B_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{2l}{k_0 a} \times \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{\chi_m^2} (G_m^M - G_m^\ominus) J_{ql}(m\alpha), \\ C_{ql} &= B_{lq}, \end{aligned}$$

$$D_{ql} = (-1)^{q+l} \frac{4ql}{k_0 a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{\chi_m^2} \left(\frac{G_m^\ominus}{\Gamma^2} + \frac{G_m^M}{\alpha_m^2} \right) J_{ql}(m\alpha),$$

где $J_{ql}(m\alpha) = J_{2q}(m\alpha) J_{2l}(m\alpha)$, $J_n(x)$ – функция Бесселя, $\alpha = \pi W/2a$,

$$G_m^\ominus = \left(\frac{\varepsilon}{\beta_{m1}} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} k_0 h) + \frac{1}{\beta_{m2}} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} k_0 (b-h)) \right)^{-1},$$

$$G_m^M = (\beta_{m1} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} k_0 h) + \beta_{m2} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} k_0 (b-h)))^{-1}$$

$$\beta_{m1} = \sqrt{\varepsilon - \chi_m^2}, \quad \beta_{m2} = \sqrt{1 - \chi_m^2},$$

$$\chi_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{k_0 a} m,$$

ε – относительная диэлектрическая проницаемость подложки.

Однородная система (2a) имеет не нулевое решение только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов этой системы D равен нулю. В выражения для матричных коэффициентов (2б) в качестве параметра входит квадрат нормирован-

ной постоянной распространения Γ^2 . Приравнивая к нулю определитель системы (2a), получим дисперсионное уравнение

$$D(\Gamma^2) = 0, \quad (3)$$

из которого численными методами определяются постоянные распространения собственных волн четного типа.

Приведенные выше выражения непосредственно обобщаются на открытую микрополосковую линию ($a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$). Для этого нужно от бесконечных рядов (2б) перейти к интегрированию выражения под знаком Σ в пределах от нуля до бесконечности по переменной $\alpha_m = m\pi/(k_0 a) = x$, заменив в нем аргументы функций Бесселя $m\alpha = m\pi W/(2a)$ на $(k_0 W/2)x$ и функцию $\operatorname{ctg}(\beta_{m2} k_0 (b-h))$ на $-i$. Таким образом, матричные коэффициенты открытой линии представляются в виде плохо сходящихся несобственных интегралов и при их вычислении необходимо улучшать сходимость этих интегралов, используя расчетные соотношения, приведенные в [4].

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим решение системы уравнений (2a) в квазистатическом приближении.

Устремляя в (2б) волновое число k_0 к нулю, получим следующие выражения для матричных коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{1}{\pi} (P_{ql}(1) - n^2 P_{ql}(\varepsilon)), \\ B_{ql} &= (-1)^{q+l} \frac{2l}{\pi} n^2 P_{ql}(\varepsilon), \quad C_{ql} = B_{lq}, \\ D_{ql} &= -(-1)^{q+l} \frac{4ql}{\pi} \frac{1}{n^2} P_{ql}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} P_{ql}(\varepsilon) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{m} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\varepsilon \operatorname{cth}(m\pi h/a) + \operatorname{cth}(m\pi(b-h)/a)} \right] J_{ql}(m\alpha), \end{aligned} \quad (5)$$

$n = \Gamma$ – коэффициент замедления основной волны, определяемый из численного решения дисперсионного уравнения (3) при $0 < \Gamma^2 < \varepsilon$.

Ряд (5) сходится медленно, и непосредственное его вычисление, связанное с большими вычислительными затратами, в особенности для широких экранов ($a \gg h$), может приводить к неустойчивым результатам. Поэтому при вычислении медленно сходящегося ряда (5) следует улучшить сходимость этого ряда путем прибавления и вычитания к члену в квадратных скобках его

асимптотического выражения при $m \rightarrow \infty$, представив функцию $P_{ql}(\varepsilon)$ в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\pi/2)}{m} \times \left[\frac{1}{\varepsilon \operatorname{cth}(m\pi h/a) + \operatorname{cth}(m\pi(b-h)/a)} - \frac{1}{\varepsilon + 1} \right] \times J_{ql}(m\alpha) + \frac{1}{\varepsilon + 1} S_{ql}(\alpha), \quad (6)$$

где

$$S_{ql}(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{2q}(m\alpha) J_{2l}(m\alpha) \sin^2\left(m\frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

Медленно сходящийся ряд (7) можно просуммировать и представить в виде быстро сходящегося степенного ряда, полученного в [1].

При достаточно больших размерах экрана расчет коэффициентов системы (2а) можно проводить по формулам для открытой микрополосковой линии, устремляя в формуле (5) размеры экрана a и b к бесконечности. При $b \rightarrow \infty$ выражение для функции $P_{ql}(\varepsilon)$ представим в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{J_{ql}(m\delta\tilde{\alpha})}{\varepsilon \operatorname{cth}(m\delta/2) + 1} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{J_{ql}(2m\delta\tilde{\alpha})}{\varepsilon \operatorname{cth}(2m\delta/2) + 1}, \quad (8)$$

где $\delta = 2\pi h/a$, $\tilde{\alpha} = W/4h$. При $\delta \rightarrow 0$ ($a \rightarrow \infty$) бесконечные суммы заменим на интегралы, полагая в

первой сумме $m\delta = x$, $\delta = dx$; во второй $2m\delta = x$, $2\delta = dx$. В результате получим

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{J_{ql}(\tilde{\alpha}x)}{\varepsilon \operatorname{cth}(x/2) + 1} dx = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1 - \exp(-x)}{1 + q_\varepsilon \exp(-x)} J_{ql}(\tilde{\alpha}x) dx, \quad (9)$$

$$q_\varepsilon = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

Разлагая функцию $(1 + q_\varepsilon \exp(-x))^{-1}$ в степенной ряд, приведем выражение для функции $P_{ql}(\varepsilon)$ к виду:

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \times \left\{ \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} (1 - \exp(-x)) J_{ql}(\tilde{\alpha}x) dx - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \left[\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\exp\left(-\left(1 + \frac{1}{k}\right)x\right) - \exp(-x) \right) J_{ql}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{k}x\right) dx q_\varepsilon^k \right] \right\}. \quad (10)$$

Непосредственное вычисление медленно сходящихся несобственных интегралов связано с трудностями вычислительного характера и практически приводит к неустойчивости результатов. Эти интегралы можно вычислить, если воспользоваться интегральным представлением для функции $J_{ql}(\tilde{\alpha}x)$.

Используя интегральные представления для произведения функций Бесселя (см. [5, ф-лы (6.681(10)) и (8.411(2))], представим выражение (10) в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x} (1 - \exp(-x)) \cos(ux) dx \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q_\varepsilon^k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\exp\left(-\left(1 + \frac{1}{k}\right)x\right) - \exp(-x) \right) \cos\left(\frac{u}{k}x\right) dx \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \right\}, \quad (11)$$

где $u = 2\tilde{\alpha} \cos\theta \sin\varphi$, $E_{ql}(\theta, \varphi) = \cos(2(q-l)\theta) \cos(2(q+l)\varphi)$.

Используя при вычислении интеграла по x формулу из [5, (3.951(3))], приведем выражение (11) к виду

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2} (\ln(1+u^2) - \ln u^2) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q_\varepsilon^k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2} \left(\ln\left(1 + \left(\frac{u}{k}\right)^2\right) - \ln\left(1 + \left(\frac{u}{k+1}\right)^2\right) - \ln\left(1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2\right) \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \right\}. \quad (12)$$

Вычисляя интеграл

$$I_{ql} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} -\frac{4}{\pi^2} \left(\ln u - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln(1+1/k) q_\varepsilon^k \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \begin{cases} \ln \frac{2}{\tilde{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln(1+1/k) q_\varepsilon^k & \text{при } q = l = 0 \\ \frac{\delta(q-l)}{2(q+l)} & \text{в остальных случаях } \left(\delta(q-l) = \begin{cases} 1 & \text{при } q = l \\ 0 & \text{при } q \neq l \end{cases} \right) \end{cases} \quad (13)$$

перепишем выражение (12) в виде

$$P_{ql}(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon + 1)} \times \left(I_{ql} + f_{ql}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (f_{ql}^{(k)} - f_{ql}^{(k+1)}) q_{\varepsilon}^k \right), \quad (14)$$

где

$$f_{ql}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + (u/k)^2 \right) E_{ql}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Разлагая логарифмическую функцию в степенной ряд и интегрируя, получим следующие выражения для функции $f_{ql}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} f_{ql}^{(k)} \Big|_{q \neq l} &= \frac{1}{2} \sum_{n=q+l}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \times \\ &\times \frac{n(n-1)\dots(n+1-(q+l))}{n(n+1)\dots(n+q+l)} \times \\ &\times \frac{n(n-1)\dots(n+1-|q-l|)}{(n+1)(n+2)\dots(n+|q-l|)} \left(\frac{2\tilde{\alpha}}{k} \right)^{2n}, \\ f_{qq}^{(k)} \Big|_{q=0} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2q}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \times \\ &\times \frac{n(n-1)\dots(n+1-2q)}{n(n+1)\dots(n+2q)} \left(\frac{2\tilde{\alpha}}{k} \right)^{2n}, \\ f_{00}^{(k)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \left(\frac{2\tilde{\alpha}}{k} \right)^{2n}. \end{aligned} \quad (16)$$

3. РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Анализ выражений (13)–(16) позволяет сделать вывод о диагональном характере матриц **A**, **B**, **C**, **D** с элементами A_{ql} , B_{ql} , C_{ql} , D_{ql} . Недиagonальные элементы малы по сравнению с диагональными и быстро убывают с увеличением q и l . Отсюда следует быстрая сходимость разложений (1) и возможность решения системы (2) методом редукции. Порядок редуцированной системы равен $K = 2L + 1$, где L – число учитываемых членов в разложении для поперечного тока; $L + 1$ – число учитываемых членов для продольного тока.

В пределе при $W/h \rightarrow 0$ недиагональные элементы матриц стремятся к нулю и бесконечная система (2) распадается на бесконечное число независимых уравнений:

$$A_{00}a_0 = 0, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{qq}a_{2q} + B_{qq}b_{2q-1} &= 0 \\ C_{qq}a_{2q} + D_{qq}b_{2q-1} &= 0 \end{aligned} \right\} (q = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Из выражений (4), (17), следует, что $P_{00}(1) - n^2 P_{00}(\varepsilon) = 0$. Из этого уравнения определяем коэффициент замедления:

$$n = \sqrt{P_{00}(1)/P_{00}(\varepsilon)}. \quad (19)$$

Используя выражения (4), можно показать, что определители систем (18) не равны нулю. Поэтому однородные системы уравнений (18) имеют нулевые решения: $a_{2q} = 0$, $b_{2q-1} = 0$ ($q = 1, 2, \dots$). Таким образом, при $W/h \rightarrow 0$ в разложениях (1) остается только один первый член для плотности продольного тока:

$$\eta_z(\tilde{x}) = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \tilde{x}^2}}, \quad \eta_x(\tilde{x}) = 0. \quad (20)$$

При таком распределении тока в работе [3] получено приближенное выражение для волнового сопротивления Z микрополосковой линии с узким полосковым проводником:

$$Z = \frac{240}{n} P_{00}(1) \approx \frac{60}{n} \ln \frac{8h}{W}. \quad (21)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

В результате расчетов, выполненных на персональном компьютере, численно исследованы сходимость разложений для плотности тока на полосковом проводнике для открытой микрополосковой линии (МПЛ) и сходимость основных электродинамических параметров к предельным значениям при стремлении размеров экрана к бесконечности для экранированной МПЛ. Расчеты были проведены в следующем диапазоне изменения параметров линии: $0.1 \leq W/h \leq 20$; $10 \leq S/h = a/h - W/h \leq 250$; $1 < \varepsilon \leq 20$; $b/h \rightarrow \infty$, с использованием выражения (14) для открытой линии и выражения (6) – для экранированной.

В результате численного анализа подтверждена теоретически установленная быстрая сходимость разложений плотности тока на полосковом проводнике по взвешенным полиномам Чебышева.

Высокая точность расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z для микрополосковой линии с узким полосковым проводником ($W/h \leq 2$) обеспечивается при учете в разложениях (1) только одной базисной функции ($K = 1$). При этом основные электродинамические параметры n и Z определяются через одну функцию $P_{00}(\varepsilon)$ по формулам (19), (21). При учете в разложениях (1) трех базисных функций ($K = 3$) высокая точность обеспечивается в широком диапазоне изменения ширины полоскового проводника ($W/h \leq 20$). В этом случае n и Z определяются из решения однородной системы

Таблица 1. Коэффициент замедления и волновое сопротивление МПЛ в квазистатическом приближении

| W/h | $K = 1$ | | | $K = 3$ | | | $K = 5$ | | |
|-------|---------|--------|------------------|---------|--------|------------------|---------|--------|------------------|
| | n | Z | $\delta(nZ), \%$ | n | Z | $\delta(nZ), \%$ | n | Z | $\delta(nZ), \%$ |
| 1 | 2.5392 | 49.826 | 0.009 | 2.5394 | 49.817 | 0.001 | 2.5394 | 49.817 | 0.001 |
| 3 | 2.6768 | 26.197 | 0.433 | 2.6865 | 25.990 | 0.001 | 2.6865 | 25.990 | 0.001 |
| 5 | 2.7374 | 18.315 | 1.500 | 2.7671 | 17.851 | 0.001 | 2.7671 | 17.851 | 0.001 |
| 10 | 2.7971 | 10.890 | 4.907 | 2.8685 | 10.123 | 0.004 | 2.8686 | 10.122 | 0.001 |
| 15 | 2.8229 | 7.932 | 8.123 | 2.9182 | 7.099 | 0.035 | 2.9189 | 7.094 | 0.001 |
| 20 | 2.8383 | 6.305 | 10.940 | 2.9483 | 5.476 | 0.077 | 2.9495 | 5.470 | 0.001 |

Примечание: $K = 2L + 1$ – порядок редуцированной СЛАУ, L – число учитываемых членов в разложениях (1) для поперечного тока.

линейных алгебраических уравнений третьего порядка, матричные коэффициенты которой выражаются через функции $P_{00}(\epsilon)$, $P_{11}(\epsilon)$, $P_{01}(\epsilon)$ и $P_{02}(\epsilon)$. Сказанное подтверждается данными, полученными для микрополосковой линии на поликорковой подложке с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 9.6$ (табл. 1). Под величиной $\delta(nZ)$ понимается погрешность расчета произведения коэффициента замедления на волновое сопротивление линии при заданном порядке K по отношению к произведению, рассчитанному при $K = 7$. Из этих данных видно, что при $K = 1$ погрешность не превышает 0.01%, если $W/h \leq 1$. При $K = 3$ погрешность не превышает 0.1%, если $W/h \leq 20$. При $K \geq 5$ результаты расчета совпадают с точностью до пяти значащих цифр и не зависят от диэлектрической проницаемости подложки.

Отметим, что в квазистатическом приближении сходимость разложений для плотности тока (1) практически не зависит от частоты, если нормированная частота $f_n = f[\text{ГГц}]/h[\text{мм}] \leq 15$. Это следует из сопоставления данных, представленных в табл. 1 с данными, полученными на основе электродинамической модели экранированной микрополосковой линии [1] и приведенными при достаточно больших размерах экрана в [2].

В результате анализа численных результатов установлено, что при изменении отношения S/h в пределах $150 \leq S/h \leq 250$ результаты расчета n и Z для экранированной линии, полученные с использованием выражения (6), практически не меняются и совпадают с точностью до четырех-пяти

значащих цифр с результатами расчета для открытой линии, полученными с использованием выражения (14). Отсюда следует вывод о возможности математического моделирования с высокой точностью открытой микрополосковой линии, экранированной при достаточно больших размерах экрана. Это подтверждается данными табл. 2, которые показывают зависимость коэффициента замедления и волнового сопротивления от размеров экрана при различных значениях ширины полоскового проводника. В последнем столбце приведены результаты расчета для открытой линии. Отметим, что в квазистатическом приближении погрешность моделирования $\delta(nZ)$ не зависит от диэлектрической проницаемости подложки ϵ .

Численные результаты, представленные в табл. 3, позволяют определить погрешность квазистатического приближения при расчете основных электродинамических параметров микрополосковой линии. В этой таблице:

$$\delta(nZ), \% = \frac{nZ - n_0Z_0}{nZ} \times 100\%, \text{ где } n_0Z_0 - \text{ произведение}$$

коэффициента замедления на волновое сопротивление линии при $f_n \rightarrow 0$ на нулевой частоте, не зависящее от диэлектрической проницаемости подложки, рассчитанное с использованием формулы (6); nZ – произведение коэффициента замедления на волновое сопротивление линии на частоте f_n , рассчитанное с использованием электродинамической модели МПЛ [1]. В первых строках таблицы представлены результаты расчета при $\epsilon = 2$, во вторых – при $\epsilon = 9.6$, в третьих – при $\epsilon = 20$.

Таблица 2. Сходимость электродинамических параметров МПЛ к предельным значениям при стремлении размеров экрана к бесконечности

| S/h | n | Z | $\delta(nZ),\%$ | n | Z | $\delta(nZ),\%$ | n | Z | $\delta(nZ),\%$ |
|----------|-------------|--------|-----------------|------------|--------|-----------------|------------|--------|-----------------|
| | $W/h = 0.5$ | | | $W/h = 1$ | | | $W/h = 2$ | | |
| 10 | 2.4869 | 66.854 | 1.050 | 2.5244 | 49.478 | 1.269 | 2.6067 | 33.649 | 1.544 |
| 20 | 2.4779 | 67.133 | 0.276 | 2.5353 | 49.725 | 0.349 | 2.6199 | 33.849 | 0.453 |
| 30 | 2.4797 | 67.189 | 0.123 | 2.5375 | 49.776 | 0.157 | 2.6229 | 33.893 | 0.211 |
| 50 | 2.4806 | 67.217 | 0.043 | 2.5387 | 49.803 | 0.055 | 2.6245 | 33.918 | 0.077 |
| 100 | 2.4810 | 67.230 | 0.008 | 2.5393 | 49.815 | 0.011 | 2.6253 | 33.929 | 0.016 |
| ∞ | 2.4811 | 67.232 | — | 2.5394 | 49.817 | — | 2.6255 | 33.931 | — |
| S/h | $W/h = 4$ | | | $W/h = 10$ | | | $W/h = 15$ | | |
| 10 | 2.7088 | 20.931 | 1.829 | 2.8416 | 10.009 | 2.049 | 2.8917 | 7.016 | 2.021 |
| 20 | 2.7244 | 21.073 | 0.594 | 2.8580 | 10.078 | 0.804 | 2.9072 | 7.061 | 0.867 |
| 30 | 2.7282 | 21.108 | 0.289 | 2.8630 | 10.099 | 0.428 | 2.9123 | 7.076 | 0.485 |
| 50 | 2.7305 | 21.128 | 0.108 | 2.8663 | 10.113 | 0.178 | 2.9160 | 7.087 | 0.211 |
| 100 | 2.7316 | 21.138 | 0.022 | 2.8681 | 10.120 | 0.041 | 2.9181 | 7.098 | 0.050 |
| ∞ | 2.7319 | 21.141 | — | 2.8687 | 10.122 | — | 2.9189 | 7.094 | — |
| S/h | $W/h = 20$ | | | | | | | | |
| 10 | 2.9230 | 5.411 | 1.949 | | | | | | |
| 20 | 2.9373 | 5.443 | 0.892 | | | | | | |
| 30 | 2.9424 | 5.454 | 0.518 | | | | | | |
| 50 | 2.9462 | 5.463 | 0.233 | | | | | | |
| 100 | 2.9487 | 5.468 | 0.057 | | | | | | |
| ∞ | 2.9495 | 5.469 | — | | | | | | |

Таблица 3. Погрешность квазистатического приближения $\delta(nZ), \%$ при различных f_n

| W/h | ϵ | f_n | | | | | | | |
|-------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
| 0.1 | 2 | 0.001 | 0.001 | 0.008 | 0.019 | 0.077 | 0.154 | 0.253 | 0.380 |
| | 9.6 | 0.001 | 0.001 | 0.016 | 0.059 | 0.209 | 0.451 | 0.777 | 1.185 |
| | 20 | 0.001 | 0.004 | 0.027 | 0.098 | 0.371 | 0.812 | 1.417 | 2.185 |
| 0.5 | 2 | 0.001 | 0.001 | 0.007 | 0.026 | 0.100 | 0.211 | 0.353 | 0.520 |
| | 9.6 | 0.001 | 0.002 | 0.024 | 0.086 | 0.308 | 0.657 | 1.123 | 1.699 |
| | 20 | 0.001 | 0.006 | 0.041 | 0.147 | 0.549 | 1.189 | 2.052 | 3.122 |
| 1 | 2 | 0.001 | 0.001 | 0.009 | 0.035 | 0.122 | 0.252 | 0.415 | 0.611 |
| | 9.6 | 0.001 | 0.002 | 0.031 | 0.107 | 0.384 | 0.814 | 1.385 | 2.081 |
| | 20 | 0.001 | 0.009 | 0.052 | 0.187 | 0.693 | 1.487 | 2.358 | 3.811 |
| 2 | 2 | 0.001 | 0.002 | 0.009 | 0.039 | 0.155 | 0.306 | 0.506 | 0.741 |
| | 9.6 | 0.001 | 0.005 | 0.041 | 0.143 | 0.510 | 1.072 | 1.799 | 2.665 |
| | 20 | 0.001 | 0.012 | 0.072 | 0.255 | 0.937 | 1.974 | 3.292 | 4.822 |
| 3 | 2 | 0.001 | 0.002 | 0.012 | 0.047 | 0.171 | 0.346 | 0.572 | 0.835 |
| | 9.6 | 0.001 | 0.006 | 0.051 | 0.177 | 0.628 | 1.295 | 2.146 | 3.135 |
| | 20 | 0.002 | 0.015 | 0.090 | 0.319 | 1.155 | 2.380 | 3.875 | 5.537 |
| 4 | 2 | 0.001 | 0.002 | 0.013 | 0.054 | 0.196 | 0.392 | 0.640 | 0.930 |
| | 9.6 | 0.001 | 0.008 | 0.060 | 0.208 | 0.728 | 1.492 | 2.435 | 3.499 |
| | 20 | 0.002 | 0.019 | 0.107 | 0.380 | 1.344 | 2.706 | 4.298 | 5.994 |
| 6 | 2 | 0.002 | 0.003 | 0.013 | 0.066 | 0.236 | 0.466 | 0.751 | 1.090 |
| | 9.6 | 0.002 | 0.011 | 0.078 | 0.265 | 0.904 | 1.830 | 2.840 | 4.117 |
| | 20 | 0.004 | 0.025 | 0.141 | 0.486 | 1.641 | 3.137 | 4.748 | 6.353 |
| 10 | 2 | 0.002 | 0.002 | 0.019 | 0.086 | 0.304 | 0.590 | 0.944 | 1.339 |
| | 9.6 | 0.003 | 0.016 | 0.109 | 0.362 | 1.167 | 2.146 | 3.293 | 4.210 |
| | 20 | 0.007 | 0.037 | 0.197 | 0.651 | 1.974 | 3.439 | 4.843 | 6.152 |

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическая модель открытой микрополосковой линии в виде системы линейных алгебраических уравнений построена на основе эффективной электродинамической модели экранированной микрополосковой линии при стремлении размеров экрана к бесконечности. Получены простые аналитические выражения для матричных коэффициентов, позволяющие рассчитать быстро и с высокой точностью характеристики основной волны при компьютерном моделировании микрополосковой линии в квазистатическом приближении. Установлена сходимость основных электродинамических параметров к предельным значениям при стремлении размеров экрана к бесконечности и возможность математического моделирования с высокой точностью открытой линии экранированной при достаточно больших размерах экрана. Представленные численные результаты позволяют при заданной погрешности

моделирования оптимальным образом выбрать размеры экрана.

Предложенным способом можно построить математические модели компланарной, щелевой и других типов полосковых линий.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 188.
2. Коваленко А.Н. // РЭ. 2019. Т. 64. № 2. С. 108.
3. Коваленко А.Н., Ярлыков А.Д. // Рос. технол. журн. 2021. Т. 9. № 4. С. 68.
<https://www.rtfj-mirea.ru/jour/article/view/345/277>.
4. Коваленко А.Н., Фёдоров А.Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 4. С. 684.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 621.396.969.181.234

**ОЦЕНИВАНИЕ КООРДИНАТ В ТРЕХПОЗИЦИОННОЙ РАДИОСИСТЕМЕ
С УЧЕТОМ ВЫРАВНИВАНИЯ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПО ТРАЕКТОРИИ ЕГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ**© 2022 г. А. Ф. Котов^а, Е. А. Чистяков^а, *^а МИРЭА – Российский технологический университет,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: egorka199861@gmail.com

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 27.03.2022 г.

Принята к публикации 28.03.2022 г.

Рассмотрен вопрос об оптимизации процедуры оценивания местоположения малоразмерного малоподвижного объекта наблюдения (например, квадрокоптера) при его перемещении относительно расположения охранной трехпозиционной радиолокационной системы, что позволяет повысить точность оценивания его координат при изменении расстояния между ним и радиолокационной системой.

DOI: 10.31857/S0033849422110067

ВВЕДЕНИЕ

В [1] представлены алгоритмы оценивания вектора состояния малоразмерного объекта наблюдения в охранных однопозиционных и многопозиционных радиолокационных системах (РЛС). При этом по мере изменения расстояния между объектом наблюдения и РЛС погрешность измерения координат объекта наблюдения меняется, увеличиваясь с ростом дальности до объекта. В данной работе предложена модернизация разработанных в [1] алгоритмов, что позволило уменьшить изменение погрешности измерения координат малоразмерных объектов наблюдения по мере их перемещения относительно РЛС.

В работе рассмотрен пример подобной модернизации алгоритмов, используемых для наблюдения за малоразмерным объектом в трехпозиционной РЛС, однако предлагаемый подход может быть использован и при применении других типов трехкоординатных РЛС.

При модернизации алгоритмов авторы исходили из условий, аналогичных условиям, принятым в [1], т.е. в качестве объектов наблюдения рассмотрены квадрокоптеры – беспилотные летающие аппараты, обладающие повышенной маневренностью и малыми размерами, в качестве РЛС – охранный радиосистема, действующая на малой дальности и использующая большое количество импульсов на фиксированном интервале наблюдения. В качестве алгоритмов оценивания рассмотрены алгоритмы: α – β – γ , алгоритм Кал-

мана и модифицированный нелинейный алгоритм [1] (далее – нелинейная фильтрация). Математическая модель беспилотного объекта наблюдения, основные параметры моделирования и критерии качества оценивания аналогичны принятым в [1].

**1. СТРУКТУРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ
ТРЕХПОЗИЦИОННОЙ
ДАЛЬНОМЕРНОЙ РАДИОСИСТЕМЫ**

Пусть имеется охранный объект и требуется обеспечить его радиолокационную охрану. Одним из вариантов территориального построения РЛС может быть структура, показанная на рис. 1. Позиции РЛС находятся в точках 1, 2, 3, соответствующих вершинам равностороннего треугольника, со стороной (базой), равной b (рис. 2), в центре которого расположен охраняемый объект, а пункт обработки информации (ПОИ) располагается посередине между первой и второй позицией. Точки 1 и 2 расположены на оси x симметрично относительно начала координат, точка 3 – на оси y на расстоянии a от начала координат ($a = b\sqrt{3}/2$). Угловое положение объекта наблюдения определяется азимутом α и углом места β . На позициях расположены идентичные однопозиционные дальномеры, измеряющие временные задержки распространения радиосигналов τ_1, τ_2, τ_3 от позиций до объекта наблюдения и обратно до позиций, а в ПОИ определяются координаты

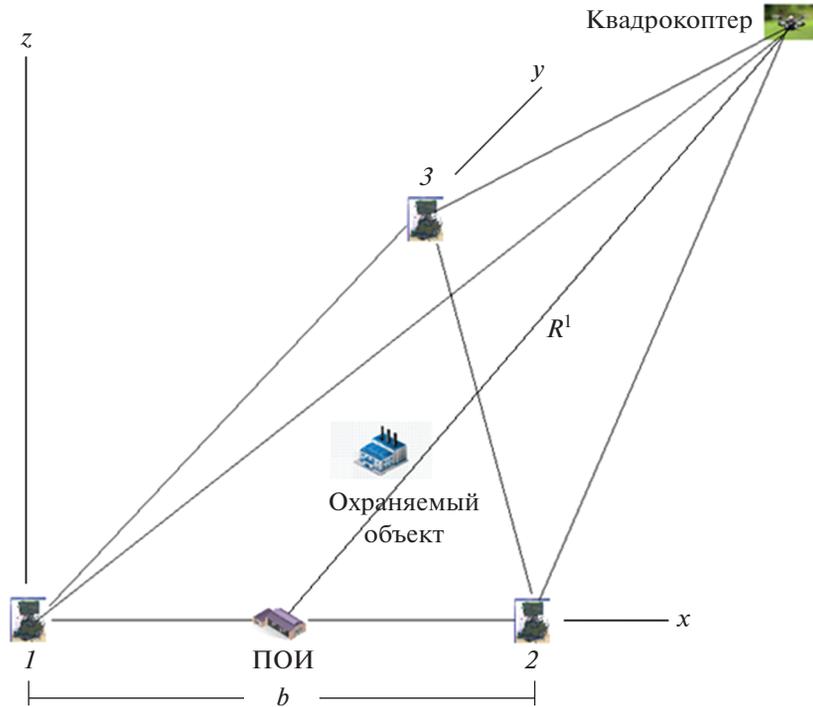


Рис. 1. Структура построения охранной трехпозиционной радиосистемы.

объекта наблюдения в прямоугольной декартовой системе координат [1]. Полагается, что отношение дальности к базе R^1/b порядка единицы, а привязка позиций обеспечена геодезическим способом, что позволяет считать погрешность привязки ничтожной.

2. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ

2.1. Оценка местоположения по одному импульсу

Рассмотрим алгоритмы оценивания, представленные в работе [1]. Были измерены времен-

ные задержки t_1, t_2, t_3 распространения сигналов от дальномеров до объекта наблюдения и обратно, связанные с расстояниями от дальномеров до объекта наблюдения R_1, R_2, R_3 соотношением

$$t_i = 2R_i/c, \tag{1}$$

где i – номер дальномеров, t_i – временная задержка распространения сигнала от i -го дальномеров до объекта наблюдения и обратно, R_i – расстояние от объекта наблюдения до i -го дальномеров, c – скорость распространения радиоволн. Уравнение состояния объекта наблюдения, характеризующее его перемещение, имеет вид

$$\hat{\Lambda}_{\text{од.имп.}}^{(v)} = \bar{\Lambda}^{(v)} + \Sigma \bar{N}_{\Sigma}^{(v)}, \tag{2}$$

где $\hat{\Lambda}_{\text{од.имп.}}^{(v)}$ – оценка вектора состояния, полученная с помощью оценивания координат по одному импульсу; $\bar{\Lambda}^{(v)}$ – истинный вектор состояния; Σ – диагональная матрица, состоящая из среднего квадратического отклонения (СКО) измерений параметров λ в случае независимых измерений (в случае зависимых измерений данная матрица не является диагональной); $\bar{N}_{\Sigma}^{(v)}$ – гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием

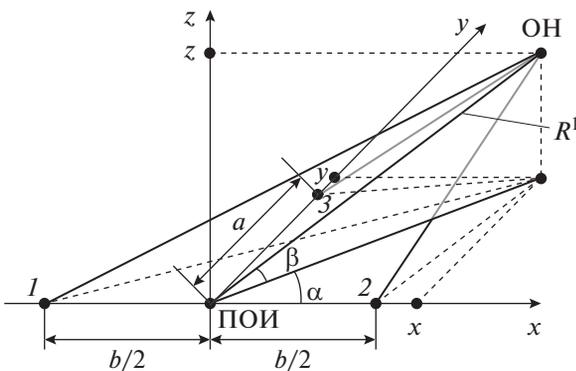


Рис. 2. Геометрическое построение трехпозиционной дальномерной РЛС.

$$M \{ \bar{N}_{\Sigma}^{(v)} \} = 0,$$

и дисперсией

$$M \{ \bar{N}_{\Sigma}^{(v)2} \} = \mathbf{I},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Уравнение наблюдения для дальномера определяется формулой

$$y_i(t) = u_{ci}(t) + u_{шi}(t), \quad (3)$$

где $y_i(t)$ – смесь эхо-сигнала и шума на входе i -го дальномера,

$$u_{ci}(t) = \theta A_i U_{mi}(t - t_i) \times \cos[2\pi(f_{oi} + F_{di})(t - t_i) + \psi(t - t_i) - \phi]$$

– импульсный эхо-сигнал i -го дальномера, $\theta = 0$ или 1 , A_i – случайная величина, распределенная по закону Релея, $U_{mi}(t - t_i)$ – амплитуда сигнала, f_{oi} – несущая частота, F_{di} – доплеровский сдвиг несущей частоты сигнала, $\psi(t - t_i)$ – функция угловой модуляции, t_i – время запаздывания отраженного от объекта наблюдения сигнала относительно зондирующего сигнала), $u_{шi}(t)$ – внутренний гауссовский шум приемника i -го дальномера.

Если считать, что дальномеры идентичны и что значения угла α (см. рис. 2) лежат в пределах $15^\circ - 70^\circ$ и $-15^\circ - 70^\circ$, то можно получить погрешность определения местоположения объекта наблюдения σ_λ (с учетом систематической составляющей, обусловленной особенностями геометрического построения РЛС и расположением объекта наблюдения относительно ее позиций) не более $\sqrt{3}\sigma_q$ [2], т.е.

$$\sigma_\lambda = \sqrt{3}\sigma_q, \quad (4)$$

$$\sigma_q = \sqrt{\sigma_{ш}^2 + \sigma_\phi^2 + \sigma_{распр}^2}, \quad (5)$$

где $\sigma_{ш}$ – СКО погрешности, обусловленной влиянием внутренних шумов измерителя (в рассматриваемом случае $\sigma_{ш} = \sigma_{Rпот}$); $\sigma_{Rпот}$ – потенциальная погрешность измерения величины R ; σ_ϕ – СКО погрешности, вносимой влиянием флуктуаций, вызванных изменением амплитуды и фазы отраженной волны за счет перемещения элементарных отражателей объекта наблюдения относительно центра масс; $\sigma_{распр}$ – СКО, характеризующее погрешность, обусловленную неидеальным распространением сигнала. Предполагается, что применительно к охраняемым системам основной вклад в выражение (5) вносит $\sigma_{ш}$, так как объекты наблюдения имеют малые размеры и, следовательно, влияние движения элементарных отражателей объекта наблюдения относительно центра незначительно; расстояние от дальномера до объекта наблюдения не велико и, следовательно,

ошибки, вызванные распространением сигнала, так же малы. Поэтому можно записать

$$\sigma_q = \sigma_{ш} = \sigma_{Rпот}, \quad (6)$$

где согласно [2]

$$\sigma_{Rпот} = c/2\Delta f_{э.с} \sqrt{2E/N_0}. \quad (7)$$

Здесь $2\Delta f_{э.с}$ – эквивалентная ширина спектра сигнала, $2E/N_0$ – энергетическое отношение сигнал/шум. При отношении дальности к базе более единицы погрешность σ_λ растет примерно пропорционально R^1/b [2].

Предположим, что $b = 300$ м, $\Delta f_{э.с} = 10^9$ Гц и $2E/N_0 = 10$, тогда погрешность $\sigma_{Rпот} = 0.047$ м, а погрешность для случаев $R^1/b = 1$ и $R^1/b > 1$ равна соответственно

$$\sigma_\lambda = \sqrt{3}\sigma_{Rпот} = 0.081 \text{ м}, \quad (8)$$

$$\sigma_\lambda = (R^1/b)\sqrt{3}\sigma_{Rпот} = 0.081R^1/b. \quad (9)$$

2.2. Фильтрация α - β - γ

Одним из алгоритмов фильтрации α - β - γ является алгоритм [1], представленный формулами

$$\hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)} = \hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)} + \alpha(\hat{q}_{од.имп.}^{(v)} - \hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}), \quad (10)$$

$$\hat{V}_{q\alpha-\beta-\gamma}^{(v)} = \hat{V}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)} + \frac{\beta}{T}(\hat{q}_{од.имп.}^{(v)} - \hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}), \quad (11)$$

$$\hat{a}_{q\alpha-\beta-\gamma}^{(v)} = \hat{a}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)} + \frac{\gamma}{2T}(\hat{q}_{од.имп.}^{(v)} - \hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}). \quad (12)$$

Здесь $\hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}$ – оценка параметра (в рассматриваемом случае временной задержки), полученное с использованием фильтрации на v -м шаге; $\hat{q}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}$ – экстраполяционное значение параметра q на v -м шаге; α – коэффициент фильтрации параметра q ; $\hat{q}_{од.имп.}^{(v)}$ – оценка параметра q по одиночному импульсу на v -м шаге; $\hat{V}_{q\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}$ – оценка скорости изменения параметра q на v -м шаге; $\hat{V}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}$ – оценка экстраполяционного значения скорости изменения параметра q на v -м шаге; β – коэффициент фильтрации скорости изменения параметра q ; T – период следования импульсов или размер шага; $\hat{a}_{q\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}$ – ускорение изменения параметра q на v -м шаге; $\hat{a}_{\alpha-\beta-\gamma}^{(v)}$ – оценка экстраполяционного значения ускорения изменения параметра q на v -м шаге; γ – коэффициент фильтрации ускорения изменения параметра q (в данной работе $\gamma = 0$). Погрешность определения местоположения объекта наблюдения может быть вычислена по формуле (4) в виде $\sigma_\lambda = \sqrt{3}\sigma_q$.

2.3. Фильтрация Калмана

Рассмотрим алгоритм Калмана [1], представленный следующими соотношениями:

$$\hat{\Lambda}_K^{(v)} = \hat{\Lambda}_{\lambda,K}^{(v)} + \mathbf{K}_K^{(v)} \left[\hat{\Lambda}_{\text{од.имп.}}^{(v)} - \hat{\Lambda}_{\lambda,K}^{(v)} \right], \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_K^{(v)} = \mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v)} \left[\mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v)} + \mathbf{W}_{\lambda,q} \Big|_{\bar{Q}=\bar{Q}_{\lambda,K}} \mathbf{K}_q \mathbf{W}_{\lambda,q}^T \Big|_{\bar{Q}=\bar{Q}_{\lambda,K}} \right]^{-1}, \quad (14)$$

где $\hat{\Lambda}_K^{(v)}$ – оценка вектора состояния, полученная с помощью фильтрации Калмана на v -м шаге; $\hat{\Lambda}_{\lambda,K}^{(v)}$ – оценка экстраполяционного значения вектора состояния на v -м шаге; $\mathbf{K}_K^{(v)}$ – матрица коэффициентов фильтрации Калмана на v -м шаге; $\hat{\Lambda}_{\text{од.имп.}}^{(v)}$ – оценка вектора состояния, полученная с помощью оценивания по одному импульсу на v -м шаге; $\mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v)}$ – экстраполяционная ковариационная матрица; $\mathbf{W}_{\lambda,q}$ – матрица частных производных компонентов вектора состояния по компонентам вектора первичных параметров; $\bar{Q}_{\lambda,K}$ – вектор экстраполяционных значений первичных параметров (пеленгов, временных задержек, доплеровских частот). \wedge^T – знак транспонирования.

В конце каждой итерации происходит вычисление ковариационной матрицы для данного алгоритма Калмана:

$$\mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v)} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_K^{(v)} \right] \mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v-1)}. \quad (15)$$

Экстраполяционные значения могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\hat{\Lambda}_{\lambda,K}^{(v)} = \Phi \hat{\Lambda}_K^{(v-1)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v)} = \Phi \mathbf{K}_{\lambda,K}^{(v-1)} \Phi^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T. \quad (17)$$

Здесь Φ – матрица перехода, \mathbf{B} – матрица диффузии.

2.4. Алгоритм нелинейной фильтрации

Уравнения фильтрации согласно [3] имеют вид

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_{ps}^{(v)} = \Lambda_{\lambda}^{(v)} + \mathbf{K}_{ps}^{(v)} \bar{G}_{\lambda}^{(v)}, \\ \mathbf{K}_{ps}^{(v)} = \left[\left(\mathbf{K}_{\lambda}^{(v)} \right)^{-1} - \mathbf{H}_{\lambda}^{(v)} \right], \end{cases} \quad (18)$$

$$\bar{G}_{\lambda}^{(v)} = \mathbf{W}_{q,\lambda}^T \mathbf{K}_q^{-1} \left[\hat{Q}_{\text{мп}}^{(v)} - \bar{Q} \left(\Lambda_{\lambda}^{(v)} \right) \right]. \quad (19)$$

Здесь $\bar{G}_{\lambda}^{(v)}$ – вектор первых частных производных первичных параметров по компонентам вектора состояния объекта наблюдения на v -м интервале;

$\mathbf{K}_{ps}^{(v)}$ – апостериорная ковариационная матрица погрешностей оценивания на v -м интервале;

$\mathbf{K}_q^{-1} = (-\mathbf{H}_q)^{-1} (\mathbf{H}_q - \text{матрица Фишера, являющаяся обратной ковариационной матрицей для первичных параметров и матрицей вторых частных производных логарифма отношения функционала правдоподобия (ЛОФП) по первичным параметрам});$ $\hat{Q}_{\text{мп}}^{(v)}$ – вектор оценок максимального правдоподобия первичных параметров на v -м интервале; $\bar{Q} \left(\Lambda_{\lambda}^{(v)} \right)$ – вектор экстраполяционных оценок на v -м интервале;

$$\mathbf{K}_{ps}^{(v)} = \mathbf{K}_{ps}^{(v-1)} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T, \quad (20)$$

где $\mathbf{K}_{ps}^{(v-1)}$ – апостериорная ковариационная матрица, определяемая на $(v-1)$ -м интервале, $\mathbf{H}_{\lambda}^{(v)}$ – матрица Фишера, элементами которой являются вторые производные ЛОФП по компонентам вектора состояния объекта наблюдения.

Элементы матрицы $\mathbf{H}_{\lambda}^{(v)}$ могут быть получены по следующим формулам [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} &= \\ &= \sum_{j=1}^{m_q} \sum_{\mu=1}^{m_q} h_{j\mu}^{(v)} \left\{ \frac{\partial^2 q_j}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \left[q_{\mu} \left(\bar{\Lambda}_{\lambda}^{(v)} - \hat{q}_{\mu}^{(v)} \right) \right] + \frac{\partial q_j}{\partial \lambda_j} \frac{\partial q_{\mu}}{\partial \lambda_k} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где F – логарифм отношения функционала правдоподобия, m_q – количество первичных параметров; q_j, q_{μ} – j -й и μ -й первичный параметр.

2.5. Критерий качества оценки и фильтрации

В качестве простейшего критерия качества может быть взята точечная погрешность по каждой координате в декартовом пространстве [3]:

$$\begin{cases} e_x^{(v)} = x^{(v)} - \hat{x}_{\Phi}^{(v)}, \\ e_y^{(v)} = y^{(v)} - \hat{y}_{\Phi}^{(v)}, \\ e_z^{(v)} = z^{(v)} - \hat{z}_{\Phi}^{(v)}, \end{cases} \quad (22)$$

где $x^{(v)}, y^{(v)}, z^{(v)}$ – истинные координаты объекта наблюдения; $\hat{x}_{\Phi}^{(v)}, \hat{y}_{\Phi}^{(v)}, \hat{z}_{\Phi}^{(v)}$ – оценки координат.

Для обобщенной оценки погрешности фильтрации по трем координатам можно рассматривать расстояние между истинными значениями координат и значениями на выходе измерителя:

$$d^{(v)} = \sqrt{\left(x^{(v)} - \hat{x}_{\Phi}^{(v)} \right)^2 + \left(y^{(v)} - \hat{y}_{\Phi}^{(v)} \right)^2 + \left(z^{(v)} - \hat{z}_{\Phi}^{(v)} \right)^2}. \quad (23)$$

Ввиду того, что величина (23) является случайной, для численной оценки качества фильтрации может быть взято исправленное выборочное СКО

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{v=1}^n (d^{(v)} - \bar{d})^2}, \quad (24)$$

где \bar{d} – выборочное среднее значение параметра d ; n – количество импульсов за время наблюдения.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ С МОДЕРНИЗАЦИЕЙ АЛГОРИТМОВ

Ниже проводится моделирование с модернизацией алгоритмов, рассмотренных в [1].

На рис. 3 представлена зависимость СКО погрешности (обусловленной внутренними шумами дальномеров) различных вариантов оценивания в зависимости от дальности R^1 – расстояния между ПОИ и ОН для устройства обработки информации охранной трехпозиционной дальномерной радиосистемы, полученная в [1]. Параметр R^1 менялся от 500 до 5000 м. Уменьшение СКО погрешности при использовании алгоритма Калмана и нелинейного алгоритма по сравнению с оцениванием по одиночному импульсу практически одно и то же: уменьшение СКО погрешности составляет в среднем в 7.6 раза. Это, безусловно, положительный результат, однако имеет место неравномерность погрешности при движении объекта, т.е. ее неодинаковость при изменении расстояния между объектом и РЛС. Эта неравномерность обусловлена уменьшением энергии зондирующего сигнала с увеличением дальности до объекта при неизменном значении спектральной плотности внутреннего шума приемников позиций.

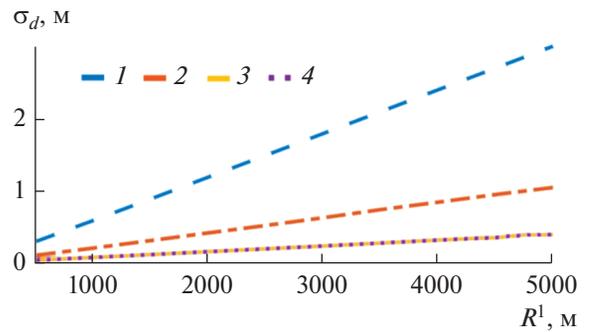


Рис. 3. Зависимость СКО флуктуационной составляющей погрешности оценивания от дальности R^1 для охранной трехпозиционной дальномерной радиосистемы при неизменных форме и энергии радиосигнала, полученная в [1]: 1 – оценивание по одиночному импульсу, 2 – α - β -фильтрация, 3 – фильтрация Калмана, 4 – нелинейная фильтрация.

Анализируя графики изменения СКО погрешности с использованием фильтрации Калмана и нелинейного фильтра в зависимости от дальности (см. рис. 3), видим, что при количестве реализаций и импульсов, равных 1000, погрешность при росте R^1 увеличивается примерно в 10 раз, что может оказаться неприемлемым для практики. Было проведено исследование влияния количества импульсов в сигнале на интервале наблюдения и количества реализаций, используемых в процессе обработки на погрешность оценивания местоположения объекта наблюдения. По результатам исследования была построена табл. 1, по данным которой был построен график на рис. 4.

Таблица 1. Зависимость СКО флуктуационной составляющей погрешности различных типов оценивания от количества импульсов в зондирующем сигнале при различном количестве реализаций

| Количество импульсов | Фильтр Калмана | | Нелинейный фильтр | |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------------|---------------------|--------------------------------|
| | Количество реализаций 10 | | | |
| | $d_{\min}, R^1 = 0$ | $d_{\max}, R^1 = 5 \text{ км}$ | $d_{\min}, R^1 = 0$ | $d_{\max}, R^1 = 5 \text{ км}$ |
| 10 | 0.723 | 1.54 | 0.719 | 1.57 |
| 100 | 0.582 | 1.004 | 0.581 | 1.008 |
| 1000 | 1.637 | 4.42 | 1.637 | 4.44 |
| 10000 | 0.518 | 1.94 | 0.518 | 1.92 |
| Количество реализаций 1000 | | | | |
| 10 | 0.174 | 1.703 | 0.177 | 1.706 |
| 100 | 0.091 | 0.99 | 0.107 | 1.00 |
| 1000 | 0.041 | 0.445 | 0.042 | 0.445 |
| 10000 | 0.0186 | 0.199 | 0.0186 | 0.199 |

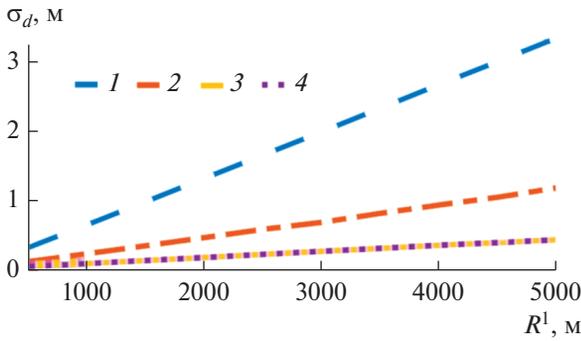


Рис. 4. Зависимость СКО флуктуационной составляющей погрешности оценивания от дальности R^1 для охранной трехпозиционной дальномерной радиосистемы при неизменных форме и энергии радиосигнала с учетом проведенного авторами исследования: 1 – оценивание по одному импульсу, 2 – α - β -фильтрация, 3 – фильтрация Калмана, 4 – нелинейная фильтрация.

Был также построен график зависимости СКО погрешности от количества излучаемых импульсов в зондирующем сигнале (рис. 5). На основе представленных в табл. 1 данных, а также по результатам анализа построенного графика было выяснено, что для снижения СКО погрешности при изменении расстояния от цели до ПОИ необ-

ходимо изменять энергию и форму зондирующего сигнала.

Дальнейшие исследования показали, что такая задача может быть решена. Для этого следовало указанные выше алгоритмы модернизировать. Модернизация алгоритмов заключалась в следующем: все указанные выше соотношения, характеризующие алгоритмы, оставались прежними, менялись лишь формулы (1) и (2), которые приняли соответственно вид.

$$\sigma_{R_{\text{пот}}} = c/2\Delta f_{\text{э.с}}\sqrt{2kE/N_0}, \quad (25)$$

$$y(t) = F\{u_c(t)\} + u_{\text{ш}}(t), \quad (26)$$

где k – коэффициент, характеризующий изменение энергии сигнала по дистанции, учитывающее рост дальности, F – оператор, характеризующий изменение формы сигнала по дистанции, учитывающее рост дальности.

Итак, с использованием модернизированных алгоритмов и согласно полученной программе, результаты снижения СКО погрешности оценивания, обусловленной флуктуациями, представлены в табл. 2 и на рис. 6. Получить погрешность σ_λ с учетом систематической погрешности можно (считая, что дальномеры идентичны и что значения угла α (см. рис. 2) лежат в пределах 15° – 70° и -15° – 70°) с использованием формул $\sigma_\lambda = \sigma_d\sqrt{3}$

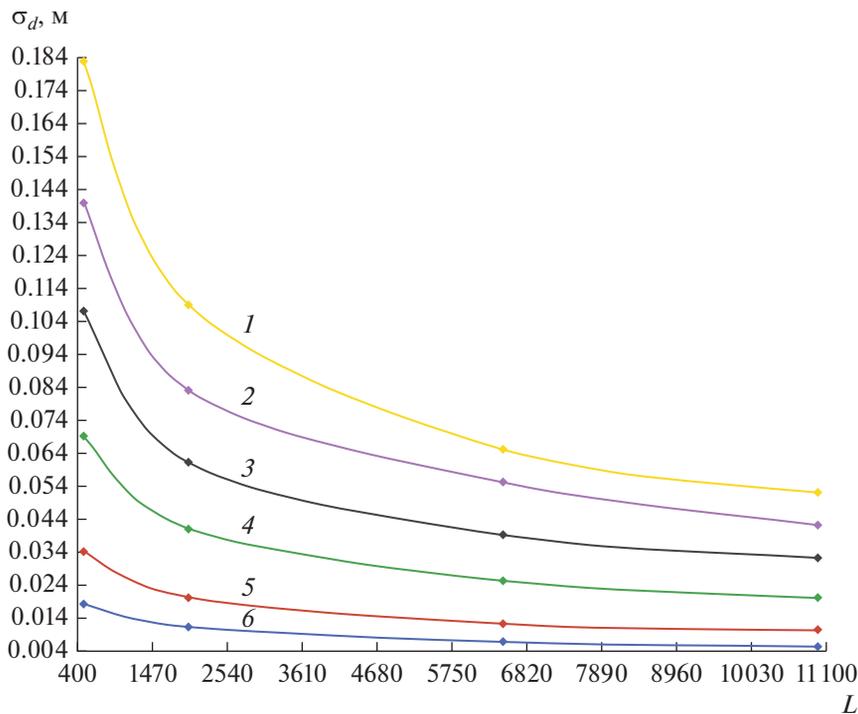


Рис. 5. Зависимость СКО флуктуационной составляющей погрешности оценивания от количества излучаемых импульсов при $R^1 = 1000$ (1), 900 (2), 800 (3), 700 (4), 600 (5) и 500 м (6).

Таблица 2. Зависимость СКО флуктуационной составляющей погрешности от расстояния и количества импульсов в зондирующем сигнале при использовании модернизированных алгоритмов

| L | R^1 , м | σ_d , м |
|------|-----------|----------------|
| 2000 | 500 | 0.0111 |
| 2900 | 600 | 0.0112 |
| 3800 | 700 | 0.0108 |
| 4700 | 800 | 0.1111 |
| 5600 | 900 | 0.0116 |
| 6500 | 1000 | 0.0118 |

для случая $R^1/b = 1$ и $\sigma_\lambda = (R^1/b)\sqrt{3}\sigma_d$ для случая $R^1/b > 1$. При этом полагаюсь, что объект наблюдения согласно принятой модели для вектора состояния объекта наблюдения в виде

$$\bar{\Lambda}^{(v)} = \Phi \bar{\Lambda}^{(v-1)} + B \bar{N}^{(v)}, \quad (27)$$

$\bar{\Lambda}^{(v)}$ – вектор состояния на v -интервале; $\bar{\Lambda}^{(v-1)}$ – вектор состояния на предыдущем шаге; $\bar{N}^{(v)}$ – гауссовский случайный вектор с нулевым математическим ожиданием $\bar{N}^{(v)} = 0$ и дисперсией $\bar{N}^{(v)} \bar{N}^{(u)} = \mathbf{I} \delta_{uv}$, δ_{uv} – символ Кронекера, отклоняется от РЛС по дальности на 500–1000 м. Как видно из табл. 2 и рис. 6, значение погрешности при изменении дальности R^1 от 500 до 1000 м практически не меняется, однако для обеспечения такого результата необходимо менять форму зондирующего сигнала, в частности, с ростом R^1 увеличивать количество зондирующих импульсов. При этом, естественно, следует менять энергию радиосигнала.

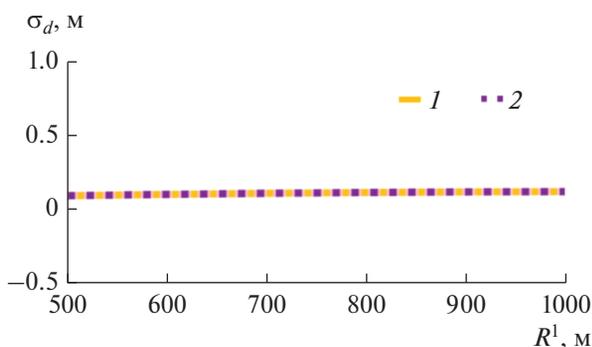


Рис. 6. Зависимость СКО флуктуационной составляющей погрешности оценивания от дальности R^1 для охранной трехпозиционной дальномерной радиосистемы при изменении формы и энергии радиосигнала: 1 – фильтрация Калмана, 2 – нелинейная фильтрация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, полученные в работе [1] алгоритмы Калмана и нелинейной фильтрации доработаны и позволяют при принятых (указанных выше) условиях практически снизить флуктуационную составляющую погрешности σ_d (а при соответствующем выборе параметра k и оператора F и погрешность σ_λ) определения координат мало-размерного объекта наблюдения (например, квадрокоптера) при его медленном перемещении относительно охранной трехпозиционной дальномерной РЛС до значений, соответствующих минимальной дальности. При этом сохранены выигрыши в точности, полученные с применением алгоритмов фильтрации [1] по сравнению с оцениванием по одному импульсу, а также улучшены оценки координат объекта наблюдения с использованием модернизированных алгоритмов Калмана и нелинейной фильтрации при его удалении от РЛС. Например, при увеличении дальности до объекта в два раза может быть достигнуто уменьшение погрешности примерно в четыре раза по сравнению с погрешностью, получаемой при использовании не модернизированных алгоритмов [1]. Указанные дополнительные выигрыши в точности получены за счет программного и аппаратного усложнения радиоаппаратуры и обусловлены необходимостью изменять форму и энергию зондирующего сигнала.

При большем изменении дальности по сравнению с изменением, принятом при моделировании, и соответствующем изменении формы и энергии сигнала можно получить большее по сравнению с приведенным выше снижение погрешности, но при этом надо понимать, что трудности с практической реализацией алгоритмов будут возрастать, а также будет возрастать стоимость РЛС.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заикин Б.А. Разработка и исследования перспективных алгоритмов оценивания параметров воздушного объекта в однопозиционной и многопозиционных радиолокационных системах. Дис. ... канд. техн. наук. М.: РТУ МИРЭА, 2019. 214 с.
2. Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Радио и связь, 1986.
3. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник. 2-е изд. / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Радиотехника, 2007.
4. Гребенников В.Б., Котов А.Ф. // Радиотехника. 1987. № 6. С. 6.

**К 75-ЛЕТИЮ МИРЭА –
РОССИЙСКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

УДК 621.374.33

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ РАДИООТКЛИКА
ЧЕРЕЗ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЕ ПОВТОРИТЕЛИ
СВЕРХКОРОТКИХ РАДИОИМПУЛЬСОВ**© 2022 г. А. В. Шильцин^а, *, М. С. Костин^а^аМИРЭА – Российский технологический университет, Российская Федерация,
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация*E-mail: adaptox@gmail.com

Поступила в редакцию 02.02.2022 г.

После доработки 16.05.2022 г.

Принята к публикации 23.05.2022 г.

Предложен электрооптический метод альтернативного решения радиотехнической задачи стробоскопической регистрации и восстановления сверхкоротких радиоимпульсов наносекундной длительности с субнаносекундным разрешением, составляющих сигнатуру радиоизображения облучаемых объектов для систем радиосенсорной сигнально-томографической аутентификации. Разработаны в среде Simulink программные модели инфраоптических повторителей, позволяющие численно анализировать и исследовать эффективность метода оптической регенерации радиоимпульсов с помощью схемы дробного мультиплексирования с задержанной обратной связью. Проведено моделирование радиотклика от цифрового двойника цели, облученной гауссовским сверхкоротким радиоимпульсом в программной среде электродинамического моделирования Altair Feko. Показано, что электрооптический повторитель с 16-ю линиями задержки за 20 итераций способен восстановить радиотклик от цели с коэффициентом корреляции больше 0.9 между эталонным и восстановленным импульсом при отношении сигнал-шум не менее 9 дБ.

DOI: 10.31857/S0033849422110134

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является построение и анализ параметрических вариаций схем программно-численной модели сигнального повторителя сверхкоротких радиоимпульсов, а также программно-численная эмуляция и алгоритмизация стробоскопического метода регистрации и обработки радиоизображений, сформированных цифровым двойником – электродинамической моделью зондируемого объекта, представленного беспилотников самолетного типа. Освоение субнаносекундного сверхвысокочастотного диапазона открывает уникальные возможности при исследовании радиофизических свойств внешней и внутренней подповерхностной структуры материальных сред и объектов в задачах сигнально-томографического радиовидения ввиду того, что сверхширокополосность сверхкоротких радиоимпульсов позволяет с высокой точностью воспроизводить импульсные характеристики облучаемой сигнатуры зондируемых объектов [1]. При этом научно-практический интерес к электродинамическим эффектам волновой трансформации профиля отраженных от облучаемых поверхностей или прошедших через различные среды ульт-

тракоротких радиоимпульсов так или иначе ведет к поиску более совершенных и эффективных методов регистрации и преобразования сверхкороткоимпульсных (СКИ) сигналов с целью их стробоскопического восстановления для дальнейшей постобработки [2].

Как известно, при создании регенераторов одиночных импульсов с усиленно-задержанной петлей обратной связи на базе радиотехнических решений особые требования предъявляются к обеспечению устойчивости системы, связанной с явлениями паразитных самовозбуждений в цепи регенератора [4]. Отсюда для достижения надежной устойчивости системы регенерации предлагается радиофотонное преобразование радиоотклика в инфраоптический посредством амплитудной электрооптической модуляции лазерного излучения принятым радиочастотным СКИ-сигналом.

Цель данной работы – создание нового метода сигнальной рекуперации, основанного на дробном оптическом повторителе, который преобразует СКИ-сигнала в последовательность аутентичных импульсов для решения задачи стробоскопической обработки радиоизображений. В то

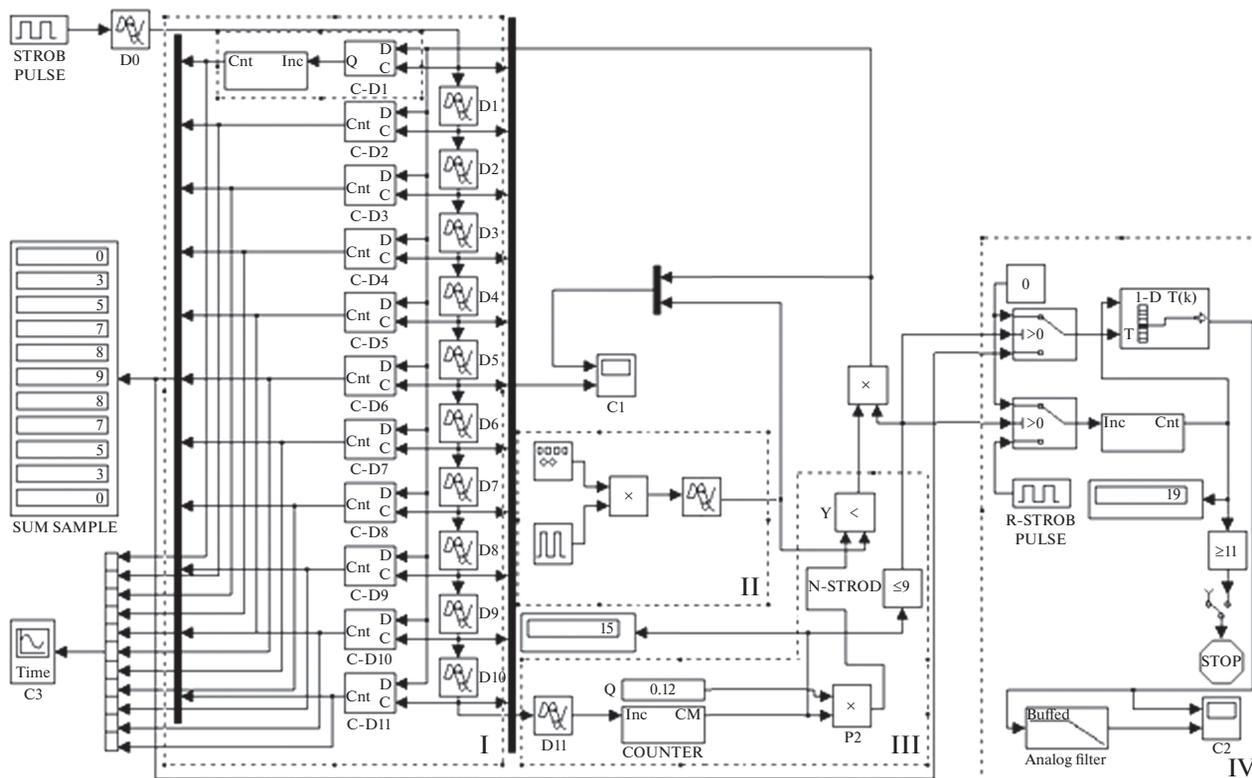


Рис. 1. Программно-численная модель СФД в среде Simulink: I – массив ЛЗ и счетчиков, II – генератор сигналов заданной формы и повторитель СКИ-сигналов, III – компаратор, IV – система вывода результатов.

же время предлагаемая в работе технология строб-фрейм-дискретизации (СФД) исключает недостатки аналогового приема, в том числе высокочастотное тактирование СКИ-сигнала для взятия цифровых отсчетов [3, 4].

1. ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ МОДЕЛИ СТРОБ-ФРЕЙМ-ДИСКРЕТИЗАТОРА

Предлагаемая программно-численная модель СФД была ранее реализована в программной среде Simulink, аналитическое описание и исследование которой подробнее рассмотрена в работе [5]. Модель состоит из генератора импульсов заданной формы, массива элементарных линий временной задержки сигнала, массива счетчиков, компаратора и системы вывода результатов. Так, на рис. 1 представлены четыре ключевых функциональных блока: I – массив линий задержек и счетчиков, II – генератор сигналов заданной формы и повторитель СКИ-сигналов, III – компаратор, IV – система вывода результатов.

Так, особенностью рассмотренной радиотехнической модели является необходимость фиксированного стробоскопического приема для его восстановления после отражения от исследуемо-

го объекта. Иными словами, радиоимпульс излучается столько раз, сколько уровней компаратора необходимо для восстановления СКИ-сигнала при заданной точности [3].

В качестве зондирующего СКИ-сигнала для получения радиоизображения объекта, принимаемого сверхширокополосной антенной, выбран биполярный гауссовский радиоимпульс – гауссиан [6] (рис. 2), профиль которого имеет вид

$$S(t) = t \exp(-a[t - \tau/2]^2), \tag{1}$$

где τ – длительность СКИ-сигнала.

При этом для оценки воспроизводимости СКИ-сигнала, восстановленного СФД в данной работе, коэффициент корреляции между эталонным (реперным) и восстановленным радиоимпульсом будем считать по формуле (2):

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \tag{2}$$

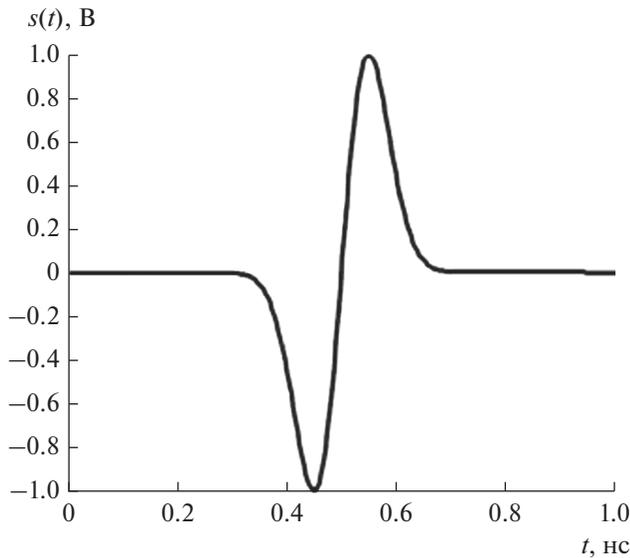


Рис. 2. Графическое представление аналитической модели гауссовского радиоимпульса.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИООТКЛИКА ОТ ЗАДАННОГО ПРОТОТИПА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для достоверного формирования радиоизображения от облученной цели, используемого в качестве эталонного репера для корреляционной оценки воспроизводимости исходного СКИ-сигнала электрооптическим повторителем, в среде Altair Feko проведено электродинамическое моделирование по созданию цифрового двойника зондируемого объекта.

В качестве численного метода моделирования в среде Altair Feko был выбран метод моментов, принципиально отличающийся от других представленных методов решения задач электродинамики тем, что в его основе не “объемный”, а “поверхностный” подход, при котором в качестве неизвестной векторной координаты используется распределение плотности поверхностных токов на проводящих поверхностях исследуемой системы [7]. Искомый поверхностный ток является источником, возбуждающим поле во всей расчетной области. Таким образом, неизвестная функция определена на поверхности, а не во всем объеме, что снижает вычислительные мощности, требуемые для расчета распределения напряженности электрической компоненты поля, рассеянного объектом СКИ-сигнала.

Кроме того, метод моментов имеет еще одно важное преимущество – при его использовании не требуется ограничение расчетной области искусственной поглощающей поверхностью при решении внешних задач электродинамики. Этими достоинствами обусловлено широкое распространение метода для векторного анализа волно-

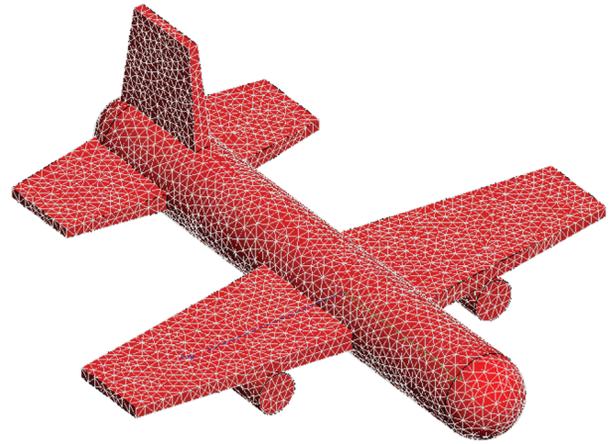


Рис. 3. Программная модель беспилотника самолетного типа модификации “Орион” в среде Altair Feko.

вых процессов рассеяния и дифракции. Так, в качестве векторной аналитики в работе применены три основные формулировки метода моментов [7]:

уравнение для напряженности электрического поля –

$$\begin{aligned} \bar{e}_n \int_{S'} G(\bar{r}, \bar{r}') \left[\bar{J}_s^e(\bar{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' (\nabla' \cdot \bar{J}_s^e(\bar{r}')) \right] dS' = \\ = \frac{1}{ik\eta} \bar{e}_n \bar{E}^i(\bar{r}), \end{aligned} \quad (3a)$$

уравнение для напряженности магнитного поля –

$$\begin{aligned} \bar{e}_n \bar{H}^i(\bar{r}) = \frac{1}{2} \bar{J}_s^e(\bar{r}) + \\ + \left[\bar{e}_n \int_{S'-\delta S} \nabla' G(\bar{r}, \bar{r}') \times \bar{J}_s^e(\bar{r}') dS' \right], \end{aligned} \quad (3b)$$

уравнение для электродинамических потенциалов –

$$\begin{aligned} \bar{e}_n \bar{E}^i(\bar{r}) = \bar{e}_n \left[i\omega\mu \int_{S'} G(\bar{r}, \bar{r}') \bar{J}_s^e(\bar{r}') dS' - \right. \\ \left. - \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \int_{S'} G(\bar{r}, \bar{r}') \nabla' \cdot \bar{J}_s^e(\bar{r}') dS' \right]. \end{aligned} \quad (3b)$$

Для создания заданного прототипа (исходного репера) в работе была выбрана и построена в среде Altair Feko программно-численная модель беспилотника самолетного типа модификации “Орион”, боковая поверхность которого представлена идеальным проводящим слоем, облучаемого СКИ-сигналом (рис. 3). Моделирование производили на частоте зондирования 200 МГц. Прототип облучали гауссовским радиоимпульсом длительностью 5 нс, достаточной для обеспечения пространственного разрешения по детализации элементов заданной цели.

В результате моделирования получена программно-графическая эпюра распределения на-

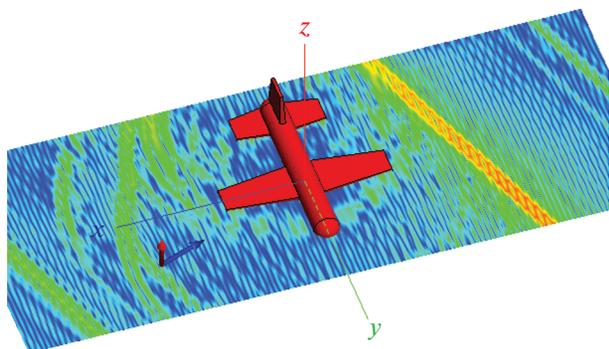


Рис. 4. Распределение напряженности электрической компоненты электромагнитного поля СКИ-сигнала, рассеянного моделью беспилотника самолетного типа.

пряженности электрической компоненты электромагнитного поля, рассеянного моделью беспилотника самолетного типа (рис. 4).

Так, на рис. 4 отчетливо виден радиоимпульс, прошедший через модель беспилотника, и отраженные радиоимпульсы — рассеянные радиотклики, сформированные целью в результате обратного отражения СКИ-сигнала от ее боковой поверхности. Важно отметить, что несмотря на “наносекундный” характер длительности зондирующего радиоимпульса, частотно-временная детализация сформированного профиля напряженности электрической компоненты СКИ-сигнала, принимаемого от цели радиоизображения, будет носить субнаносекундное распределение,

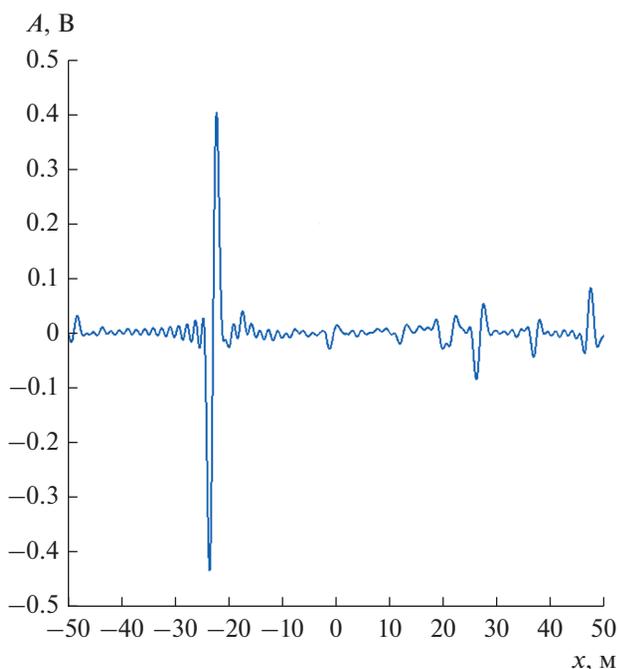


Рис. 5. Распределение напряженности электрической компоненты обратно рассеянного электромагнитного поля СКИ-сигнала вдоль оси x .

частота верхних формант в спектре которого будет строго определена фронтами (крутизной спада и нарастания) гауссиана.

Анализируя распределения напряженности электрической компоненты обратного электромагнитного излучения вдоль оси x (рис. 5), можно заметить собственно гауссовский радиоимпульс и отраженные от модели беспилотника радиоимпульсы, которые представляют собой сформированное в пространстве радиоизображение или исходный СКИ-сигнал, рассеянный реперной целью.

Произведем пространственно-временную селекцию интересующего радиопортрета цели (рис. 6). Именно в таком виде анализируется полученный радиоотклик для оценки его воспроизводимости строб-фрейм-дискретизатором, ранее рассмотренном в работе [9], при его моделировании в среде Simulink.

3. ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ ИССЛЕДУЕМОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО ПОВТОРИТЕЛЯ

В ходе программно-численного моделирования были исследованы конфигурации электрооптических повторителей с 8 и 16 линиями задержки, а также строб-фрейм-дискретизатор с массивом из 100 линий задержки (рис. 7) [10].

Передаточные функции схем электрооптического повторителя СКИ-сигнала с различными каскадами линий задержки (ЛЗ) можно описать выражениями

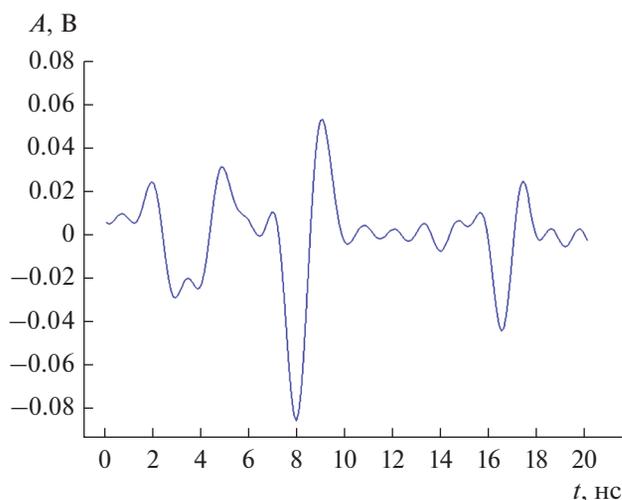


Рис. 6. Графическое представление исходного (реперного) радиопортрета беспилотника после пространственно-временной селекции.

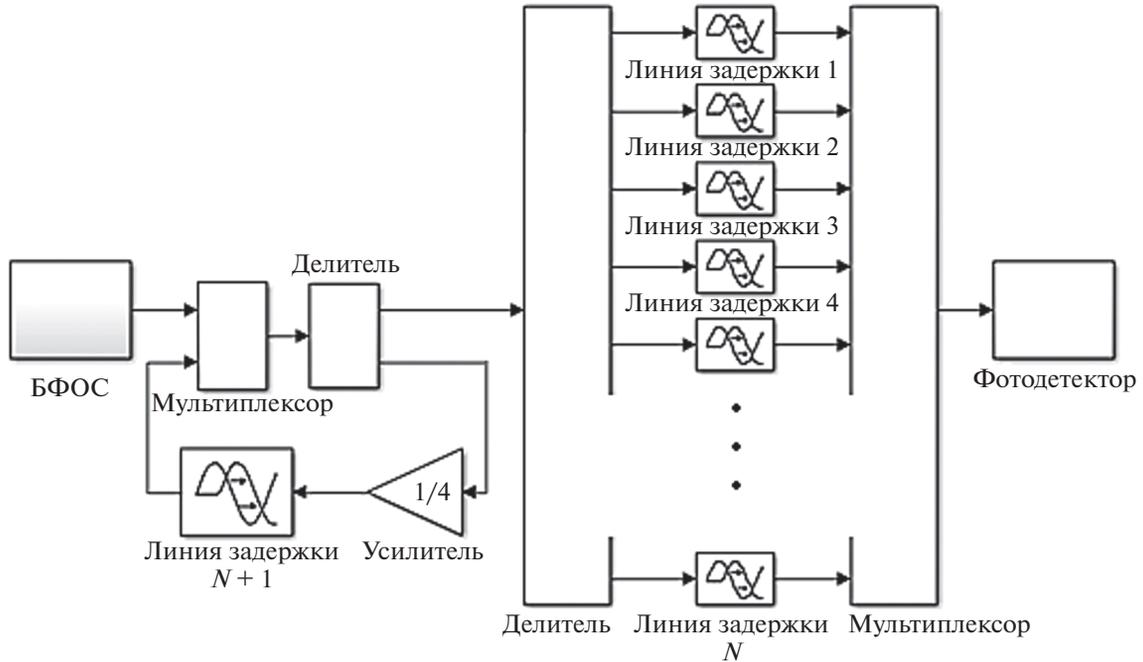


Рис. 7. Модель электрооптического повторителя СКИ-сигнала с обратной задержанной связью и дробным мультиплексированием; БФОС – блок формирования оптического сигнала.

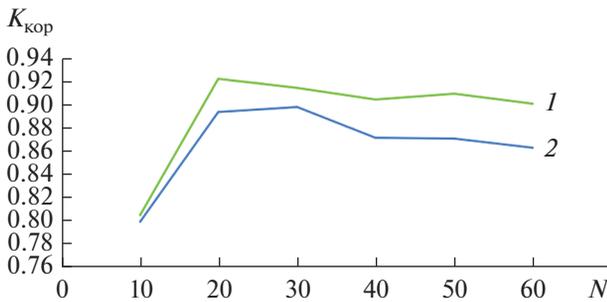


Рис. 8. Зависимость коэффициента корреляции $K_{кор}$ между исходным (реперным) и восстановленным радиоимпульсом от числа стробоскопических итераций N при отношении сигнал/шум 9 дБ: 16 ЛЗ (1) и 8 ЛЗ (2).

$$W_{8ЛЗ}(p) = \frac{1 + \sum_{i=1}^7 \exp(-\tau_i p)}{1 - K_{ус} \exp(-\tau_{ЛЗ} p)}, \quad (4a)$$

$$W_{16ЛЗ}(p) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{15} \exp(-\tau_i p)}{1 - K_{ус} \exp(-\tau_{ЛЗ} p)}. \quad (4б)$$

Здесь $K_{ус}$ – коэффициент усиления, $\tau_{ЛЗ}$ – величина времени глобальной ЛЗ.

Для моделирования воздействия шума на отраженный от цели СКИ-сигнал был использован аддитивный белый гауссовский шум. Кроме того, была оценена ошибка квантования. Так, при ис-

пользовании сглаживающего фильтра нижних частот удалось добиться увеличения коэффициента корреляции с 0.82 до 0.92.

На рис. 8 представлены графики зависимости коэффициента корреляции между восстановленным и эталонным (реперным) радиоимпульсом в зависимости от числа итераций восстановления при отношении сигнал–шум 9 дБ. Из рис. 8 видно, что исходный СКИ-сигнал, сформированный радиооткликом беспилотника, успешно воспроизводит схема электрооптического повторителя с массивом из 16 линий задержки при 20 итерациях восстановления радиоимпульса СФД, обеспечивая корреляционную воспроизводимость свыше 0.9. При этом дальнейшее увеличение числа уровней компаратора отрицательно сказывается на корреляционной воспроизводимости восстановленного СКИ-сигнала из-за накапливающихся шумов усилителя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе схемы электрооптических повторителей СКИ-сигналов позволяют восстанавливать одиночный СКИ-сигнал, приближенный по корреляционной воспроизводимости к исходному реперу за однократный цикл регистрации. Проведенный параметрический анализ схем электрооптических повторителей с каскадом из 8 и 16 линий задержки (ЛЗ), показал следующие результаты: вариант схемы электро-

оптического повторителя с каскадом из 16 ЛЗ вместе со строб-фрейм-дискретизатором с каскадом из 100 ЛЗ позволяет восстанавливать исходный СКИ-сигнал с корреляцией 0.92, однако дальнейшее увеличение количества уровней компаратора СФД не способно обеспечить увеличение коэффициента корреляции из-за накапливания в схеме повторителя собственных шумов усилителя.

Полученные в работе результаты представляют научно-практический интерес для создания и программно-численного анализа проектных решений в области стробоскопической обработки и радиофотонного преобразования радиоизображений посредством амплитудной электрооптической модуляции лазерного излучения принятым радиочастотным СКИ-сигналом.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимановский А.Л., Пирогов Ю.А.* Сверхразрешение в системах пассивного радиовидения. М.: Радиотехника, 2017.
2. *Радзиевский В.Г., Трифонов П.А.* Обработка сверхширокополосных сигналов и помех. М.: Радиотехника, 2009.
3. *Будагян И.Ф., Костин М.С., Шильцин А.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 486.
4. *Костин М.С., Бойков К.А., Стариковский А.И.* // Вестник РАЕН, 2018. Т. 18. № 3. С. 107.
5. *Костин М.С., Бойков К.А.* Радиоволновые технологии субнаносекундного разрешения. М.: РТУ МИРЭА, 2021.
6. *Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф.* // Радиофизика и радиоастрономия. 2008. Т. 13. № 2. С. 166.
7. *Григорьев А.Д.* Методы вычислительной электродинамики. М.: Физматлит, 2012.
8. *Банков С.Е., Курушин А.А.* Расчет излучаемых структур с помощью FEKO. М.: НПП "РОДНИК", 2008.
9. *Костин М.С., Бойков К.А., Котов А.Ф.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 2. С. 191.
10. *Шильцин А.В., Марков Д.В., Латышев К.В., Петленко Д.Б.* // Межотрасл. науч.-техн. журн. "Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России". 2020. № 2. С. 51.
11. *Бойков К.А., Костин М.С., Куликов Г.В.* // Рос. технол. журн. 2021. Т. 9. № 4. С. 20.
<https://www.rtfj-mirea.ru/jour/article/view/340/272>.

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 621.371.333;537.874.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ С ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕЙ© 2022 г. **А. Г. Кюркчан**^{a, b, c}, С. А. Маненков^{a, *}^aМосковский технический университет связи и информатики,
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация^bФрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация^cФГУП Центральный научно-исследовательский институт связи,
1-й проезд Перова поля, 8, Москва, 111141 Российская Федерация

*E-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 14.12.2021 г.

После доработки 17.05.2022 г.

Принята к публикации 25.05.2022 г.

Рассмотрены скалярная и векторная задачи дифракции поля плоской волны на шероховатом теле вращения. Задачи решены с использованием модифицированного метода дискретных источников. Проведено сравнение результатов расчета диаграммы рассеяния для случая детерминированных неровностей границы тела с результатами, полученными методом продолженных граничных условий. Исследовано влияние степени шероховатости границы на диаграмму рассеяния волнового поля и рассмотрена дифракция на различных шероховатых многолистных вращении, а также на неровном суперэллипсоиде. Выяснено, какова степень влияния малых возмущений границы рассеивателя на геометрию множества особенностей аналитического продолжения дифракционного поля.

DOI: 10.31857/S0033849422110080

ВВЕДЕНИЕ

В литературе имеется большое количество публикаций, посвященных дифракции волн на телах и поверхностях с неровной границей (в том числе описываемой случайной функцией координат) [1–7]. В данной работе исследованы скалярная и векторная задачи дифракции волн на теле вращения с шероховатой границей. Как известно, существует множество методов решения такой задачи. Большая группа методов основана на использовании того или иного малого параметра [1–5, 7]. Наличие такого параметра накладывает достаточно жесткие условия на степень “шероховатости” границы рассеивателя. В работе предложен алгоритм решения указанной задачи дифракции, основанный на модифицированном методе дискретных источников (ММДИ), который ранее успешно применялся к решению широкого круга задач дифракции [8–10]. Рассмотрены как случайные, так и детерминированные возмущения границы тела. При анализе дифракции на статистически шероховатом теле неровности границы моделировали с помощью синусоидальной функции, имеющей случайную амплитуду.

Отметим, что, с одной стороны, ММДИ имеет преимущество, например, перед методом токовых интегральных уравнений, так как не требует вычисления интегралов при нахождении матричных элементов соответствующей алгебраической системы. Этот факт очень важен при усреднении диаграммы рассеяния в случае статистически неровной границы тела. С другой стороны, метод позволяет решать задачу дифракции на теле с аналитической границей с высокой точностью.

Ранее [11] была предпринята попытка объяснить эффект распознавания зеркальных объектов – рассеивателей с идеально гладкой границей. То есть мы распознаем зеркальные объекты по изображению в них близлежащих объектов. Очевидно, что идеально зеркальных объектов в природе не существует, все они в той или иной степени “шероховатые”. Представляет интерес вопрос о том, как форма сечения “невозмущенного” тела (при условии, что шероховатость границы мала по сравнению с длиной волны) влияет на то, чтобы шероховатый рассеиватель воспринимался как идеально отражающий, или зеркальный. Как известно, поле, рассеянное любым объектом, созда-

ются источниками, расположенными на поверхности и (или) внутри рассеивателя. Если объект относится к категории “зеркальных”, то источники рассеянного им поля находятся внутри рассеивателя [11].

В данной работе сделана попытка определить, при каком условии на форму сечения и степени шероховатости границы объект может быть отнесен к зеркальному. При этом в качестве критерия была выбрана зависимость геометрии множества особенностей аналитического продолжения дифракционного поля в область, занимаемую телом, и диаграммы рассеяния от формы сечения рассеивателя.

В работах [12–14] ММДИ применялся к задаче дифракции на различных многолистниках вращения, заданных в сферических и сфероидальных координатах. В этих работах был предложен численный алгоритм построения вспомогательных контуров (внешних и внутренних) осевого сечения тела, являющихся носителями дискретных источников. В данной работе предложен более универсальный и простой алгоритм построения вспомогательных контуров. Указанный метод позволяет строить вспомогательные контуры для задачи дифракции на телах вращения с неровной границей, описываемой отрезком ряда Фурье, который содержит гармоники с произвольными амплитудами. Это позволяет применить ММДИ к широкому классу тел с шероховатой границей. Необходимо лишь, чтобы функция, задающая уравнение границы тела, была аналитической функцией координат.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ММДИ

Пусть тело вращения расположено в однородном бесконечном пространстве и ограничено поверхностью S . Выберем систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью вращения тела. Рассмотрим вначале скалярную задачу дифракции на шероховатом теле вращения. Предполагаем, что на поверхности S тела выполнено импедансное граничное условие

$$\left(U - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) \Big|_S = 0. \tag{1}$$

Здесь $U(\vec{r}) = U^0(\vec{r}) + U^1(\vec{r})$ – полное поле, где $U^0(\vec{r})$ – падающее, а $U^1(\vec{r})$ – рассеянное (вторичное) поле, W – импеданс на поверхности тела. Обозначим через D – область пространства, занимаемую телом. Полное поле удовлетворяет в области $\mathbb{R}^3 \setminus D$ однородному уравнению Гельмгольца

с волновым числом k . В качестве падающего поля рассмотрим плоскую волну

$$U^0(\vec{r}) = \exp(-ikr(\sin\theta\sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\theta\cos\theta_0)), \tag{2}$$

где θ_0, φ_0 – углы падения волны. При этом предполагается, что поверхность рассеивателя S описывается уравнением

$$\vec{r}_S = \vec{r}_S^0 + \Delta\vec{r}, \tag{3}$$

где \vec{r}_S^0 – радиус-вектор точки на “невозмущенной” поверхности S_0 , $\Delta\vec{r}$ – добавка (возмущения границы тела). Отметим, что приведенный ниже алгоритм на основе ММДИ не накладывает ограничения на длину волны падающего поля.

Будем решать поставленную задачу с помощью ММДИ. Для этого представим рассеянное волновое поле вне тела в виде

$$U^1(\vec{r}) = \int_{\Sigma} j(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') ds', \tag{4}$$

где $j(\vec{r}')$ – неизвестный ток на вспомогательной поверхности Σ , которая расположена внутри поверхности тела S . В формуле (4)

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \tag{5}$$

фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (функция Грина свободного пространства) в трехмерном случае. Подставив формулу (4) в граничное условие (1), получим интегральное уравнение первого рода относительно функции $j(\vec{r}')$, которое приведено в работе [10].

Как указано в работах [12–14], выбор вспомогательной поверхности Σ осуществляется с помощью аналитической деформации границы рассеивателя. В указанных работах рассмотрен случай, когда поверхность тела S задана в некоторой ортогональной системе координат (α, β, φ) в виде $\alpha = \alpha(\beta)$, где $\beta \in [0, \pi]$. Однако алгоритм построения вспомогательной поверхности Σ можно обобщить на случай, когда контур сечения поверхности тела задан не явными, а параметрическими уравнениями $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, где $t \in [0, \Omega]$. В этом случае имеем следующие формулы для координат точки на вспомогательной поверхности Σ :

$$\alpha_{\Sigma}(t) = \text{Re}\eta(t), \quad \beta_{\Sigma}(t) = \text{Im}\eta(t), \tag{6}$$

$$\eta(t) = \alpha(t + i\delta) + i\beta(t + i\delta),$$

где $(\alpha_{\Sigma}, \beta_{\Sigma}, \varphi)$ – ортогональные координаты “образа” точки с координатами (α, β, φ) на исходной поверхности, δ – положительный параметр, определяющий степень деформации исходной поверхности тела S . Указанный параметр изменяется в диапазоне $0 < \delta < \delta_{\max}$. В качестве примера

рассмотрим поверхность шероховатого кругового тора, неровности границы которого описываются синусоидальной функцией:

$$\begin{aligned} \rho &= a(1 + \tau \cos(qt)) \sin t + b, \\ z &= a(1 + \tau \cos(qt)) \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, в исследуемом случае удобно использовать тороидальные координаты для задания поверхности Σ . Вводим комплексную переменную

$$\begin{aligned} \xi &= z + ip = a(1 + \tau \cos(qt)) \exp(it) + ib = \\ &= if \operatorname{cth} \left(\frac{\alpha + i\beta}{2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $f = \sqrt{b^2 - a^2}$. Далее находим тороидальные координаты α_Σ и β_Σ точек вспомогательной поверхности по формуле (6), причем

$$\eta \equiv \alpha + i\beta = \ln \left(\frac{\xi + if}{\xi - if} \right), \quad (9)$$

$$\xi = \xi(t + i\delta) = a(1 + \tau \cos(q(t + i\delta))) \exp(i(t + i\delta)) + ib.$$

Для решения интегрального уравнения учтем осевую симметрию задачи. С этой целью разложим функцию $G(\vec{r}, \vec{r}')$ и неизвестный ток в ряды Фурье

$$G(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \psi) = \frac{k}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \exp(im\psi), \quad (10)$$

$$\psi = \varphi - \varphi',$$

$$j(t', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(t') \exp(im\varphi'), \quad (11)$$

где величины S_m – это S-функции Васильева [15]. Далее подставим эти разложения в интегральное уравнение. В результате получим бесконечную систему одномерных интегральных уравнений (СОИУ), приведенную в [10]. Для алгебраизации задачи применим метод коллокации [8–10, 12, 13]. В соответствии с методом коллокации мы разбиваем интервал изменения переменной t точками деления $t_n \equiv \frac{\Omega}{N}(n - 1/2)$, где $n = 1, 2, \dots, N$. Далее заменяем интегралы в СОИУ суммами Римана и приравниваем левую и правую части в полученных уравнениях в точках коллокации, которые выбираем при $t = t_n$. В результате получаем бесконечный набор систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующего вида:

$$\mathbf{K}^m \mathbf{I}^m = \mathbf{B}^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

где $\mathbf{K}^m = \|K_m(t_s, t_n)\|$, $\mathbf{B}^m = \|B_m(t_s)\|$, $\mathbf{I}^m = \|I_m(t_n)\|$, $s, n = \overline{1, N}$, причем $I_m(t_n)$ – неизвестные величины (амплитуды полей дискретных источников). Матричные элементы системы (12) выражаются через

S-функции Васильева и их производные [10] (соответствующие формулы здесь не приводим).

Рассмотрим теперь кратко решение векторной задачи дифракции с помощью ММДИ. Предположим, что характеристики среды внутри рассеивателя равны ϵ_i, μ_i , а вне тела ϵ_e, μ_e . Таким образом, на поверхности S выполнены следующие условия сопряжения:

$$\vec{n} \times \vec{E}_e = \vec{n} \times \vec{E}_i, \quad \vec{n} \times \vec{H}_e = \vec{n} \times \vec{H}_i, \quad (13)$$

где $\vec{E}_e = \vec{E}^0 + \vec{E}^1$, $\vec{H}_e = \vec{H}^0 + \vec{H}^1$ – поле вне поверхности рассеивателя, а \vec{E}_i, \vec{H}_i – поле внутри S , \vec{n} – внешняя нормаль. Пусть первичное поле – это плоская волна

$$\begin{aligned} \vec{E}^0 &= \vec{p}_0 \exp(-ik_e r(\sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \\ &+ \cos\theta_0 \cos\theta)), \end{aligned} \quad (14)$$

где \vec{p}_0 – вектор поляризации, $k_e = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_e}$ – волновое число среды вне тела, θ_0, φ_0 – углы падения. Вторичное поле везде за пределами области тела удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла с параметрами k_e и $\zeta_e = \sqrt{\mu_e/\epsilon_e}$ [12]. Поле \vec{E}_i, \vec{H}_i также удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла с параметрами $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i\mu_i}$ и $\zeta_i = \sqrt{\mu_i/\epsilon_i}$. Кроме того, вторичное поле удовлетворяет стандартному условию излучения на бесконечности [12].

Для решения задачи с помощью ММДИ представим волновое поле внутри и вне рассеивателя в виде

$$\vec{E}^1 = -i\zeta_e \nabla \times \nabla \times \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1(\vec{r}') G_1(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (15)$$

$$\vec{H}^1 = k_e \nabla \times \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1(\vec{r}') G_1(\vec{r}, \vec{r}') ds',$$

$$\vec{E}_i = -i\zeta_i \nabla \times \nabla \times \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2(\vec{r}') G_2(\vec{r}, \vec{r}') ds', \quad (16)$$

$$\vec{H}_i = k_i \nabla \times \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2(\vec{r}') G_2(\vec{r}, \vec{r}') ds',$$

где функции $G_1(\vec{r}, \vec{r}')$ и $G_2(\vec{r}, \vec{r}')$ имеют вид формулы (5), в которой следует заменить волновое число k на k_e или k_i соответственно. В формулах (15) и (16) Σ_1 и Σ_2 – вспомогательные поверхности вращения, расположенные внутри и снаружи поверхности S соответственно, \vec{J}_1, \vec{J}_2 – неизвестные токи, распределенные по поверхностям Σ_1, Σ_2 . Подстановка выражений (15) и (16) в граничные

условия (13) позволяет получить систему интегральных уравнений, приведенную в работе [14].

Вновь учтем осевую симметрию задачи. Будем считать, что поверхность тела S задана уравнениями $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t)$, а параметрические уравнения вспомогательных поверхностей Σ_1 и Σ_2 имеют вид $\alpha = \alpha_{\Sigma_p}(t), \beta = \beta_{\Sigma_p}(t)$ ($p = 1, 2$), причем $t \in [0, \Omega]$. Для алгебраизации задачи разложим неизвестные функции (токи) в ряды Фурье:

$$\bar{J}_p(t', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{I}_p^m(t') \exp(im\varphi'), \quad p = 1, 2. \quad (17)$$

При этом в соответствии с [12–14] имеем

$$\bar{I}_p^m = -n_{\beta_p} I_p^{m1} \bar{i}_{\alpha_p} + n_{\alpha_p} I_p^{m1} \bar{i}_{\beta_p} + I_p^{m2} \bar{i}_{\varphi_p}, \quad p = 1, 2, \quad (18)$$

где $\bar{i}_{\alpha_p}, \bar{i}_{\beta_p}, \bar{i}_{\varphi_p}$ – единичные орты выбранной системы координат, $n_{\alpha_p}, n_{\beta_p}$ – координаты нормалей к поверхностям Σ_1 и Σ_2 . Подставив формулу (17) в систему интегральных уравнений, с учетом (18) и разложений функций G_1 и G_2 в ряды Фурье, аналогичных формуле (10), получим бесконечную СОИУ, которая далее с помощью метода коллокации сводится к следующему набору СЛАУ

$$\mathbf{K}_{11}^m \mathbf{I}_1^m + \mathbf{K}_{12}^m \mathbf{I}_2^m = \mathbf{B}_1^m, \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{21}^m \mathbf{I}_1^m + \mathbf{K}_{22}^m \mathbf{I}_2^m = \mathbf{B}_2^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\mathbf{I}_p^m = [\mathbf{I}_p^{m1}, \mathbf{I}_p^{m2}]^T$, $\mathbf{B}_p^m = [\mathbf{B}_p^{m1}, \mathbf{B}_p^{m2}]^T$, $p = 1, 2$, T – знак транспонирования. В системе (19)

$$\mathbf{K}_{pq}^m \mathbf{I}_q^m = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N K_{pq,11}^m(t_s, t_n) I_q^{m1}(t_n) + \sum_{n=1}^N K_{pq,12}^m(t_s, t_n) I_q^{m2}(t_n) \\ \sum_{n=1}^N K_{pq,21}^m(t_s, t_n) I_q^{m1}(t_n) + \sum_{n=1}^N K_{pq,22}^m(t_s, t_n) I_q^{m2}(t_n) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_p^m = \|\mathbf{B}_p^{m1}(t_s)\|, \quad \mathbf{B}_p^{m2} = \|\mathbf{B}_p^{m2}(t_s)\|, \quad s = \overline{1, N}, \quad p, q = 1, 2.$$

Величины $I_1^{m1}(t_n), I_1^{m2}(t_n), I_2^{m1}(t_n), I_2^{m2}(t_n)$ – неизвестные амплитуды полей дискретных источников. Подробные выражения для матричных элементов и правой части системы (19) получаются из формул, приведенных в работах [12–14].

Рассмотрим алгоритм нахождения максимального значения δ_{\max} параметра деформации на примере шероховатых многолистников вращения. Пусть уравнение контура осевого сечения тела в сферических координатах имеет вид (в этом случае $\alpha = \ln r, \beta = \theta$)

$$r(\theta) = a \left(1 + \sum_{j=0}^L \tau_j \cos(j\theta) \right), \quad (20)$$

где числа $|\tau_j| < 1$. Рассмотрим также многолистники, уравнение контура осевого сечения которых задано в сфероидальных координатах [16]:

$$\alpha(\beta) = \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=0}^L \tau_j \cos(j\beta) \right). \quad (21)$$

Отметим, что при $\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_L = 0$ многолистник (21) переходит в эллипс. В формуле (21)

$\alpha_0 = \ln \left(\frac{a+b}{f} \right)$, a, b и f – полуоси и межфокусное расстояние невозмущенного сфероида (при $\tau_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, L$).

Ниже рассмотрим вопрос о выборе максимального значения параметра деформации на примере внутренней вспомогательной поверхности (в векторном случае это поверхность Σ_1). Как следует из работ [12–14], максимальное значение параметра деформации вспомогательного контура соответствует появлению у него точек самопересечения. Для определения максимальной степени деформации, необходимой для построения вспомогательного контура Σ , используется алгоритм, аналогичный методу половинного деления для решения нелинейных уравнений. Сначала зададим некоторое положительное значение δ_0 , при котором вспомогательный контур имеет самопересечения. Для проверки наличия точек самопересечения вспомогательного контура мы решали уравнение

$$F(t_1, t_2) = 0, \quad (22)$$

где

$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\xi(t_2 + i\delta) - \xi(t_1 + i\delta)}{t_2 - t_1}, & t_1 \neq t_2, \\ \xi'(t_1 + i\delta), & t_1 = t_2, \end{cases} \quad (23)$$

которое эквивалентно системе двух нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(t_1, t_2) &= 0, \\ \operatorname{Im} F(t_1, t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

При наличии действительных решений данной системы контур имеет точки самопересечения (очевидно, при этом $t_1 \neq t_2$). Как показывают численные исследования, при увеличении параметра δ точки самопересечения контура Σ будут появляться вблизи максимумов или минимумов исходного контура S сечения тела. Поэтому для нахождения начальных приближений системы (24) можно поступить следующим образом. Вначале находим значения параметра t_0 , при которых функция $\alpha(\beta(t))$ имеет локальные экстремумы. Далее задаем начальные приближения к корням системы (24) в виде $t_0 \pm \Delta t$. Здесь величина Δt

подбирается при помощи численных экспериментов.

После нахождения величины δ_{\max} применяем алгоритм, приведенный в [12–14]. А именно рассмотрим интервал $[0, \delta_0]$ изменения параметра δ . Разделим этот интервал пополам и проверим, имеет ли уравнение (22) действительные корни для значения δ в середине исходного интервала. Если это условие выполнено, то берем левую половину интервала, если нет, то берем правую половину и снова делим ее пополам, и т.д. Алгоритм останавливается, когда длина интервалов, на которые делится исходный интервал $[0, \delta_0]$, становится меньше заданного малого значения. В итоге за δ_{\max} берем левую границу интервала, рассмотренного на последней итерации.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В случае, если неровности границы представляют собой случайную функцию координат, можно рассмотреть усредненную интенсивность рассеянного поля. Ниже приведены численные результаты усредненной интенсивности поля для случая дифракции на теле с сечением в виде “возмущенного” многолистника вращения

$$r(\theta) = a(1 + \tau_0 \cos(q_0\theta) + \tau_1 \cos(q_1\theta)), \quad (25)$$

где предполагается, что $|\tau_1| \ll |\tau_0| < 1$, а также в виде эллиптического многолистника, задаваемого уравнением

$$\alpha(\beta) = \alpha_0(1 + \tau_0 \cos(q_0\beta) + \tau_1 \cos(q_1\beta)), \quad (26)$$

в эллиптических координатах. Здесь τ_1 – случайная величина, а остальные величины неслучайны. Будем считать, что амплитуда возмущений τ_1 является случайной величиной, распределенной по усеченному нормальному закону, который имеет вид [17]

$$w(\tau_1) = \begin{cases} C_0 \exp(-\tau_1^2/2\sigma_0^2), & |\tau_1| \leq \tau_{\max}, \\ 0, & |\tau_1| > \tau_{\max}, \end{cases} \quad (27)$$

где C_0 , σ_0 , τ_{\max} – параметры распределения, причем величина C_0 определяется из условия нормировки. В дальнейшем будем считать, что $\tau_{\max} \gg \sigma_0$. В результате закон распределения (27) будет близок к нормальному закону. В этом случае величина σ_0^2 примерно равна дисперсии случайной величины τ_1 .

В скалярном случае усредненная интенсивность рассеянного поля вычисляется по формуле

$$\langle I(\theta, \varphi) \rangle = \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} w(\tau_1) |g(\theta, \varphi, \tau_1)|^2 d\tau_1, \quad (28)$$

а в векторном случае –

$$\langle I(\theta, \varphi) \rangle = \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} w(\tau_1) |\vec{F}(\theta, \varphi, \tau_1)|^2 d\tau_1, \quad (29)$$

где $g(\theta, \varphi, \tau_1)$ и $\vec{F}(\theta, \varphi, \tau_1)$ – диаграмма рассеяния волнового поля, которая определяется из соотношения

$$U^1 \approx g(\theta, \varphi, \tau_1) \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad (30)$$

либо

$$\vec{E}^1 \approx \vec{F}(\theta, \varphi, \tau_1) \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (31)$$

соответственно для скалярного и векторного случаев. В формулах (28)–(31) мы подчеркнули зависимость диаграммы от величины τ_1 . В случае скалярной задачи диаграмма рассеяния $g(\theta, \varphi, \tau_1)$ имеет вид

$$g(\theta, \varphi, \tau_1) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N i^m I_n^m J_m(k\rho_n \sin\theta) \times \exp(kz_n \cos\theta + im\varphi) \rho_n h_{\Sigma} \sqrt{\alpha_{\Sigma}^2 + \beta_{\Sigma}^2}, \quad (32)$$

где ρ_n , z_n – цилиндрические координаты дискретных источников, h_{Σ} – коэффициент Ламе, точка означает дифференцирование по t . В случае векторной задачи дифракции подробные выражения для диаграммы рассеяния приведены в работе [12]. Заметим, что для нахождения интегралов (28) и (29) можно использовать квадратурную формулу Эрмита (в этом случае мы используем близость закона распределения (27) к нормальному закону).

Для проверки корректности результатов, полученных с помощью разработанного метода, мы рассмотрели задачу дифракции на теле, имеющем неслучайные возмущения границы. Задачу решали двумя методами: ММДИ и методом продолженных граничных условий (МПГУ), который подробно описан в работах [18, 19]. В дальнейшем предполагается, что тело облучается плоской волной

$$\vec{E}^0 = \vec{i}_x \exp(-ikz), \quad \vec{H}^0 = \vec{i}_y \exp(-ikz)/\zeta_e. \quad (33)$$

Всюду ниже будем считать, что окружающая тело среда – вакуум. На рис. 1 приведены угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния волнового поля для задачи дифракции на многолистниках вращения вида (25) и (26), в которых τ_1 – неслучайная

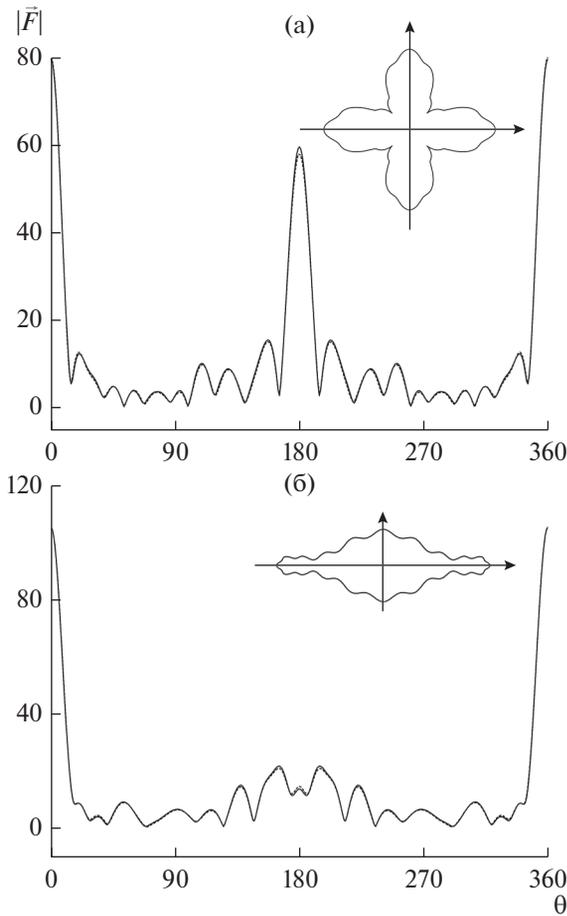


Рис. 1. Сравнение угловой зависимости модуля диаграммы рассеяния, полученной при помощи ММДИ (сплошная кривая) и МПГУ (штриховая кривая); многолистник вращения двух видов: а – (25), б – (26).

амплитуда, которые получены с использованием ММДИ и МПГУ. Параметры задачи имели следующие значения. Размеры “сферической” частицы $ka = 10$, $\tau = 0.5$, $q_0 = 4$, $q_1 = 20$, $\tau_0 = 0.5$, $\tau_1 = 0.05$,

размеры “сфероидальной” частицы $ka = 3.605$, $kb = 14.42$, $q_0 = 4$, $q_1 = 20$, $\tau_0 = 0.5$, $\tau_1 = 0.12$. Диэлектрическая проницаемость частиц равна $\epsilon_i = 12.96$, а магнитная проницаемость равнялась единице. Угол наблюдения $\varphi = 0$. Отметим, что параметры геометрии для указанных рассеивателей выбраны так, что максимальные значения отклонения неровностей границы тел были примерно одинаковы для обоих типов многолистников. Размеры тел также согласованы таким образом, чтобы диаметры “невозмущенных” рассеивателей были одинаковы. Как видно из рис. 1 имеется хорошее совпадение результатов, полученных двумя методами. Для тестирования алгоритмов мы также проверили выполнение оптической теоремы, которая имеет вид [20]

$$\frac{4\pi}{k_e} \text{Im}(\bar{p}_0 \bar{F}(\theta_0, \varphi_0)) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\bar{F}(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (34)$$

Как показывают расчеты, относительная разность правой и левой частей в формуле (34) составила 5.86×10^{-5} и 1.43×10^{-6} в случае решения задачи дифракции на “сферическом” и “сфероидальном” многолистнике вращения с помощью ММДИ и 2.56×10^{-2} и 2.34×10^{-2} при решении указанных задач с помощью МПГУ. Таким образом, точность выполнения оптической теоремы существенно выше в случае применения алгоритма на основе ММДИ. При этом скорость расчетов также выше при использовании этого метода.

На рис. 2 приведено распределение невязки краевого условия для рассматриваемых выше геометрий тел. Задача решалась с помощью ММДИ. Невязка определяется по формулам

$$\Delta_r = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{12}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_{22}^2}, \quad (35)$$

где

$$\Delta_{p\nu}(\tilde{t}_s, \varphi) = \left| \sum_{m=-M}^M \left[\sum_{q=1}^2 \left(\sum_{n=1}^N (K_{pq,\nu 1}^m(\tilde{t}_s, t_n) I_q^{m1}(t_n) + K_{pq,\nu 2}^m(\tilde{t}_s, t_n) I_q^{m2}(t_n)) \right) - B_p^{m\nu}(\tilde{t}_s) \right] \exp(im\varphi) \right|, \quad p, \nu = 1, 2. \quad (36)$$

Здесь значения \tilde{t}_s выбираются в точках, равных серединам интервалов, на которые делится промежуток $[0, \pi]$ точками коллокации $t = t_n$. Кривые на рис. 2 построены для значения $\varphi = 0$. На этих же рисунках приведены распределения невязки краевого условия для «невозмущенных» рассеивателей, т.е. “сферической” и “сфероидальной” частиц при $\tau_1 = 0$. Число точек коллокации составило $N = 400$ и 200 , соответственно для случая решения задачи дифракции на “сферической” и “сфероидальной” неровной частице. Таким образом, при решении задачи дифракции на “сфери-

ческом” многолистнике вращения необходимо брать примерно 40 точек коллокации на период функции, описывающей неровности границы тела, а в случае “сфероидального” многолистника число точек коллокации можно выбрать примерно в два раза меньше. Как видно из рис. 2, максимальное значение невязки не превосходит 2×10^{-2} для “сферической” и 10^{-3} для “сфероидальной” неровной частицы. В то же время для “невозмущенных” рассеивателей обеих геометрий максимальный уровень невязки не превосходит 5×10^{-6} (при этом было выбрано $N = 200$ для “сферической” и

$N = 150$ для “сфероидальной” частицы). Расчеты показывают, что в случае скалярной задачи дифракции максимальное значение невязки не превосходит 10^{-5} для тех же значений числа точек коллокации для неровных тел той же геометрии.

Рассмотрим далее результаты, касающиеся степени “зеркальности” тела вращения с сечением в виде указанных выше многолистников и шероховатого суперэллипсоида вращения [10]. Рассмотрим случай статистически неровной границы тела. На рис. 3 представлены реализации поверхностей указанных тел, а на рис. 4 приведены геометрии контура сечения тела и внутреннего вспомогательного контура, получаемого путем аналитической деформации исходного контура сечения тела, для рассматриваемых геометрий. Рисунки 3а и 4а соответствуют значению $\tau_0 = 0.1$, рис. 3б и 4б – $\tau_0 = 0.5$ (рассматривался многолистник вращения (25)), рис. 3в и 4в относится к случаю рассеяния на теле с сечением вида (26), причем параметр $\tau_0 = 0.5$, а рис. 3г и 4г соответствует рассеянию на шероховатом суперэллипсоиде. Всюду на рисунках $\tau_1 = \sigma_0$. Размер гладкой “сферической” частицы вида (25) $ka = 10$ (для рис. 4а) или $ka = 13.64$ (для рис. 4б), размеры “сфероидальной” частицы вида (26) $ka = 3.605$, $kb = 14.42$ (см. рис. 4в), полуоси “невозмущенного” суперэллипсоида $ka = 3.75$, $kb = 15$ (см. рис. 4г). Параметры $q_0 = 4$, $q_1 = 20$ для многолистников вращения. Величина $\sigma_0 = 0.05$ для многолистника (25) в случае $\tau_0 = 0.1$ и $\sigma_0 = 0.016$ для многолистника (25) в случае $\tau_0 = 0.5$ и $\sigma_0 = 0.0652$ для многолистника вращения вида (26) и $\sigma_0 = 0.016$ для суперэллипсоида вращения. Среднеквадратические отклонения неровностей границы выбраны таким образом, что максимальная разность координат точек контура шероховатого тела и точек контура “невозмущенного” тела были примерно одинаковы для обоих типов многолистников. Заметим, что вспомогательные контуры, показанные на рисунках, соответствуют максимальному значению δ_{\max} параметра деформации контура сечения тела. Как указано в работе [9], особые точки продолжения волнового поля необходимо соединить разрезами, геометрия которых определяет условие самопересечения вспомогательного контура, а именно, этот контур не должен пересекать данные разрезы. Таким образом, условие самопересечения вспомогательного контура тесно связано с геометрией множества особенностей продолжения волнового поля внутрь контура сечения тела [9]. Как видно из рис. 4б в случае тела с сечением вида (25) при $\tau_0 = 0.1$ вспомога-

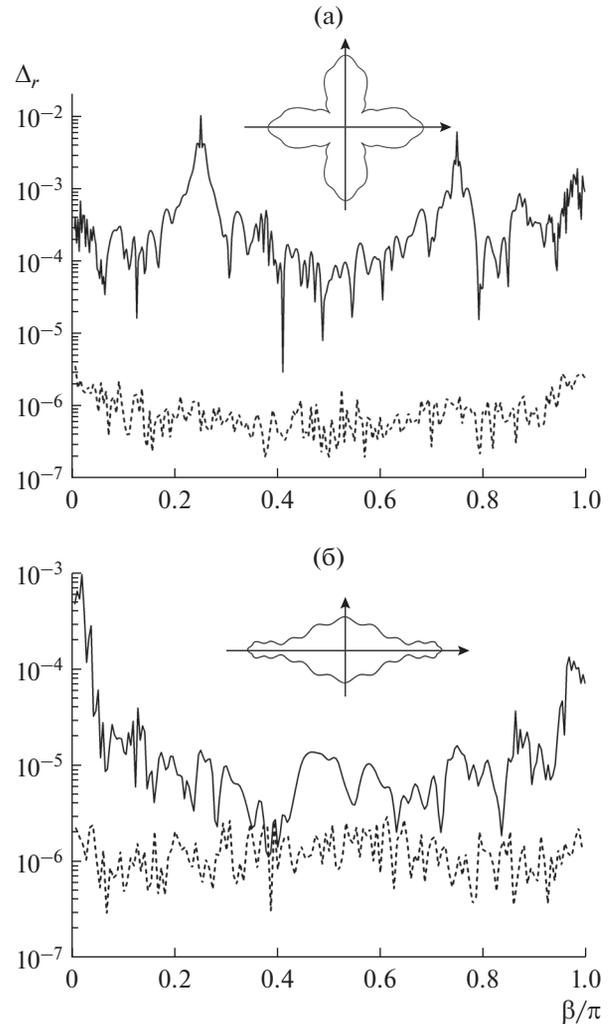


Рис. 2. Распределение невязки краевого условия на контуре осевого сечения тела; многолистник вращения двух видов: а – (25), б – (26) Шероховатое тело – сплошная кривая, невозмущенное тело – штриховая кривая.

ные контуры шероховатого и “невозмущенного” тела существенно различаются. В тоже время аналогичные контуры многолистника вида (25) при $\tau_0 = 0.5$ и “сфероидального” многолистника вида (26), а также суперэллипсоида близки друг к другу. Данное обстоятельство приводит к соответствующему поведению угловых зависимостей диаграмм рассеяния шероховатого и гладкого тел, которые изображены на рис. 5, 6. Во всех случаях плоская волна падала вдоль оси вращения тела. Рисунок 5 относится к скалярной задаче дифракции, а рис. 6 соответствует векторной задаче. Угол наблюдения для всех рисунков равен $\varphi = 0$. Значение импеданса $W = 10000$, т.е. граничное условие (1) близко к условию Неймана. Как следует из при-

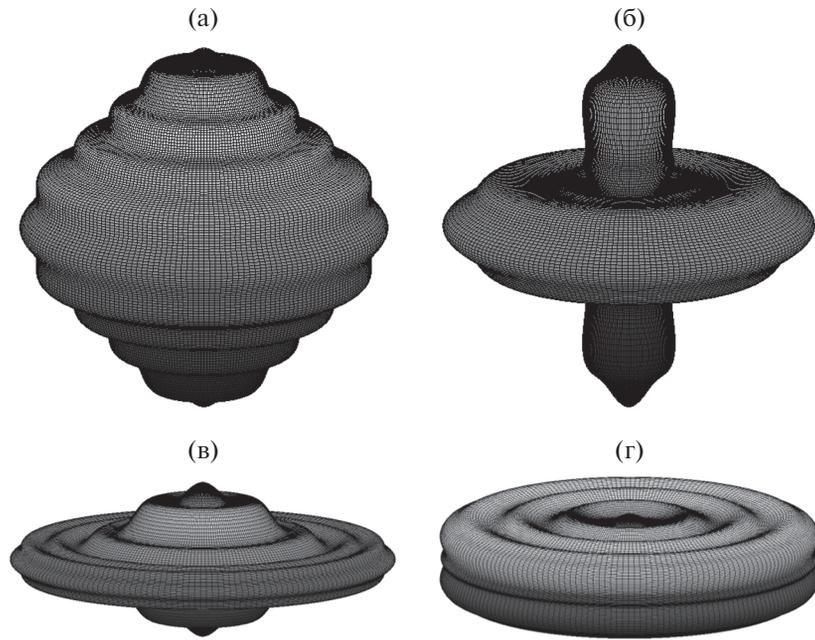


Рис. 3. Геометрии рассматриваемых тел со статистически неровной границей.

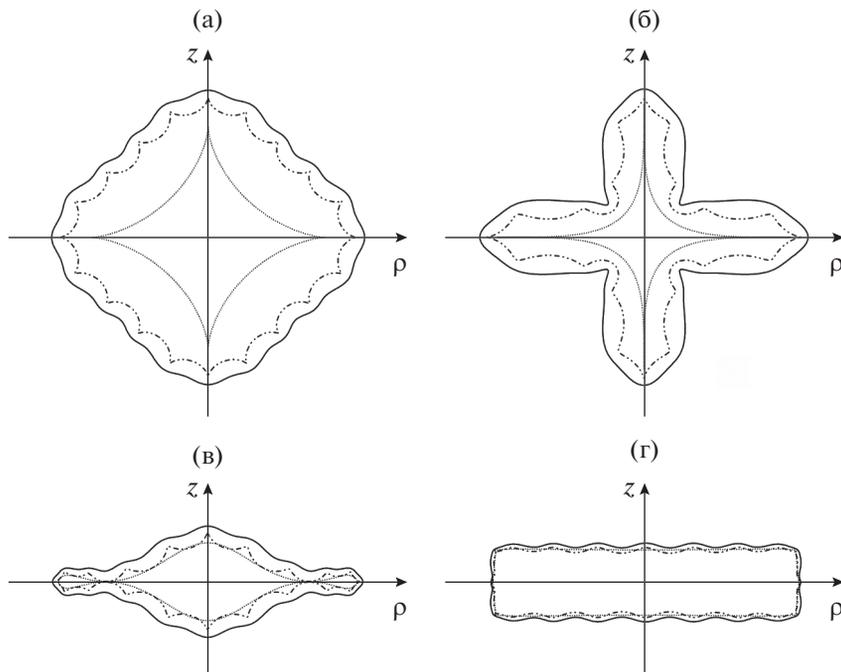


Рис. 4. Геометрии вспомогательных контуров сечений рассматриваемых тел со статистически неровной границей. Геометрия реализации контура сечения тела – сплошная кривая, геометрия вспомогательного контура “невозмущенного” (гладкого) тела – точечная кривая, геометрия реализации вспомогательного контура шероховатого тела – штриховая кривая.

веденных рисунков, диаграммы гладкого и шероховатого тел с сечением вида (25) при $\tau_0 = 0.1$ различаются в окрестности направления обратного рассеяния. В случае скалярной задачи дифракции

на теле с сечением вида (25) при $\tau_0 = 0.5$ и вида (26), а также на суперэллипсоиде соответствующие диаграммы близки друг к другу в большей части диапазона изменения угла наблюдения (в случае те-

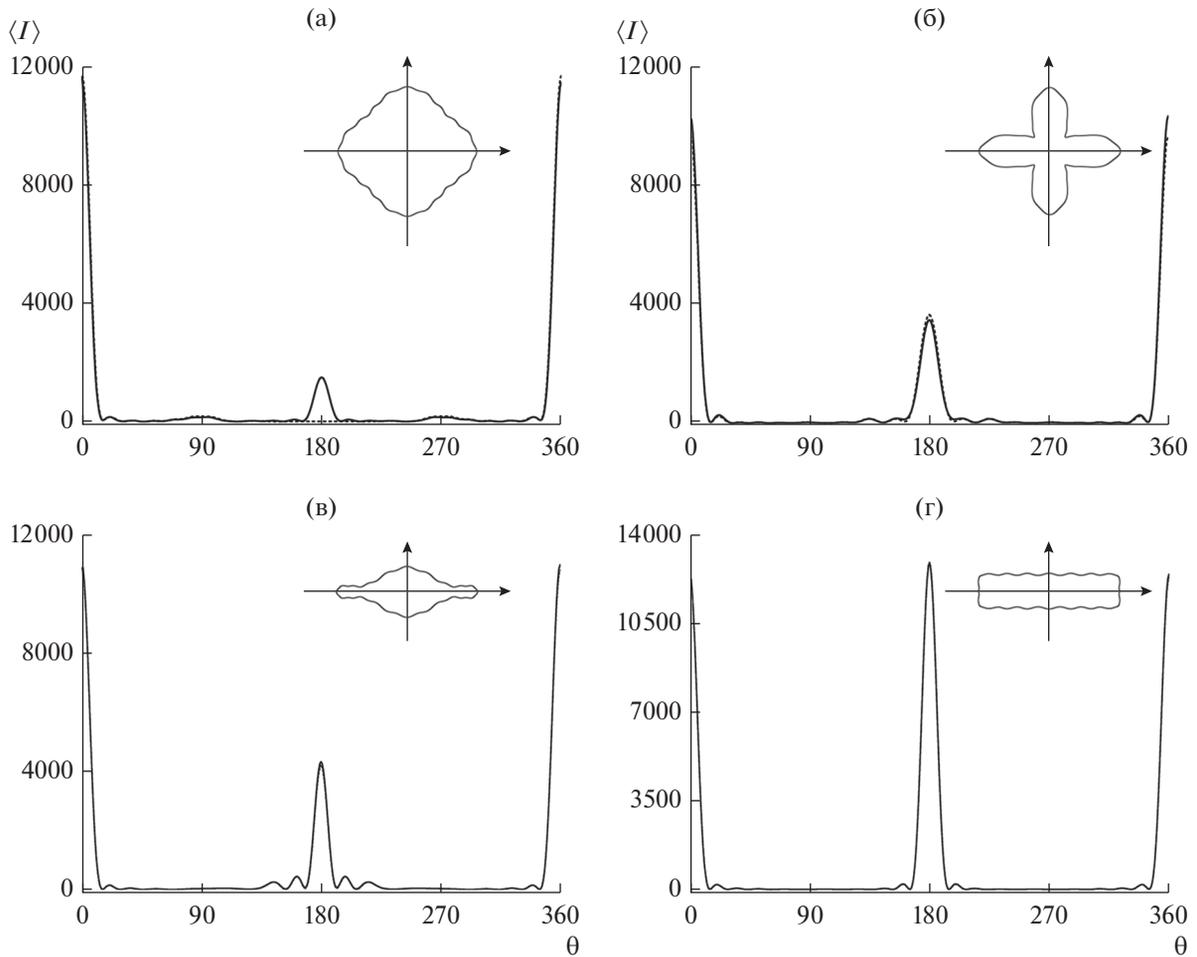


Рис. 5. Угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния гладкого (сплошная кривая) и шероховатого тела (штриховая кривая); многолистник вращения вида (25) при $\tau = 0.1$ (а) и 0.5 (б), многолистник вращения вида (26) (в); суперэллипсоид (г). Скалярная задача.

ла с сечением (26) и суперэллипсоида они совпадают). Так как вспомогательный контур при $\delta = \delta_{\max}$ “повисает” на точках, являющихся особенностями аналитического продолжения поля внутрь контура тела, то можно сделать следующий вывод. В случае если особенности продолжения волнового поля внутрь гладкого тела расположены достаточно близко к контуру сечения рассеивателя, то диаграммы рассеяния гладкого и шероховатого тел близки при условии малости неровностей границы по сравнению с длиной волны (для скалярной задачи дифракции). Если же особенности продолжения поля расположены “далеко” от контура сечения гладкого тела, то диаграммы гладкого и шероховатого тел различаются достаточно сильно даже для малых амплитуд неровностей границы. Для векторной задачи угловые зависимости интенсивности рассеянного поля шероховатого и гладкого тела близки только

для многолистника вращения вида (26). В остальных случаях имеется достаточно сильное отличие в поведении зависимостей интенсивности гладкого и возмущенного тела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ММДИ разработан численный алгоритм решения трехмерной задачи дифракции на шероховатом теле вращения. Метод пригоден для расчета характеристик рассеяния тел с достаточно большими значениями амплитуды неровностей границы. В работе предложен эффективный алгоритм построения вспомогательного контура, являющегося носителем дискретных источников, применимый к широкому классу тел с аналитической границей. Для подтверждения корректности результатов, получаемых с помощью ММДИ, проведено сравнение угловых зависимостей диаграммы рассеяния волнового поля, найденных с

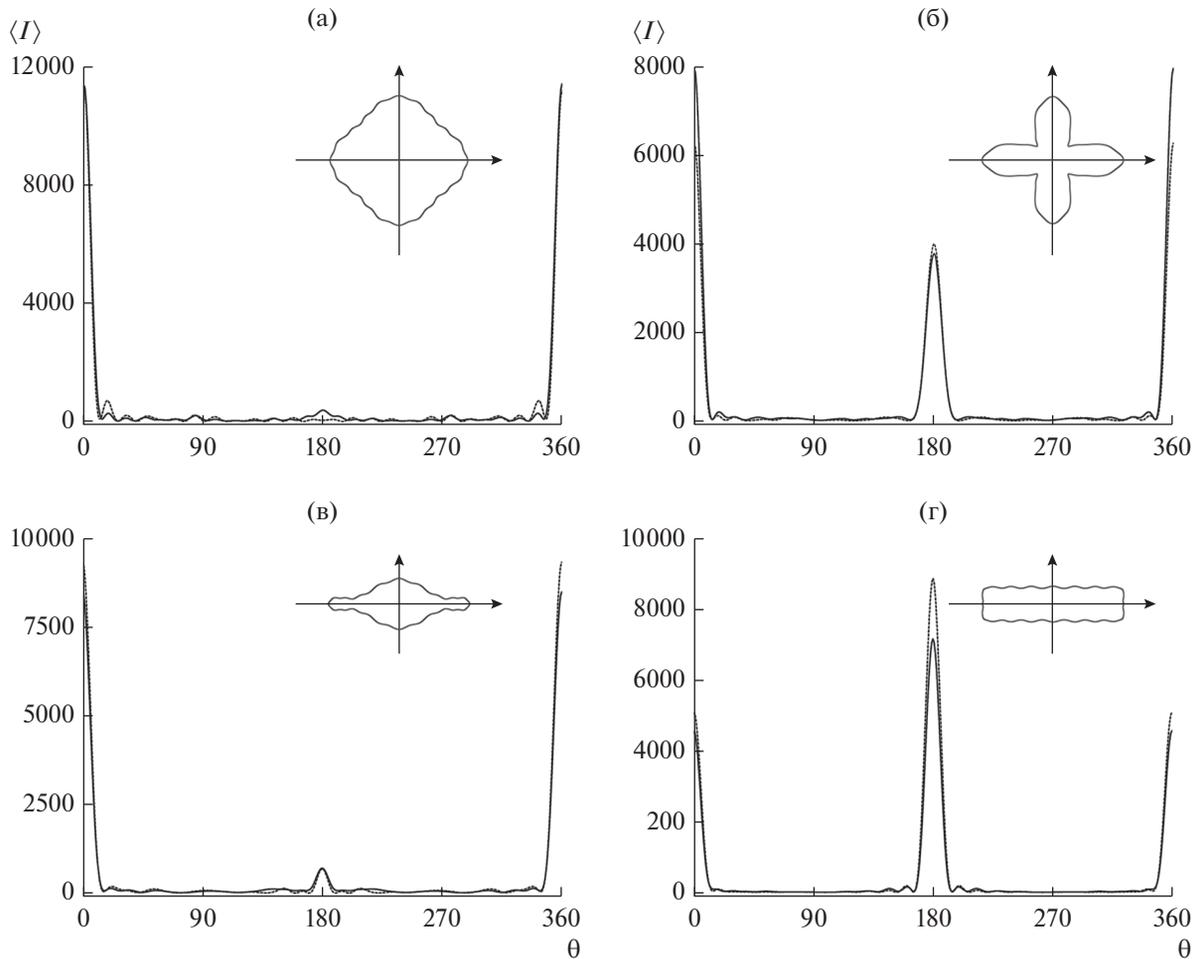


Рис. 6. Угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния гладкого (сплошная кривая) и шероховатого тела (штриховая кривая); многолистник вращения вида (25) при $\tau = 0.1$ (а) и 0.5 (б), многолистник вращения вида (26) (в); суперэллипсоид (г). Векторная задача.

помощью ММДИ и МПГУ, для двух типов шероховатых многолистников вращения. Показано, во-первых, хорошее совпадение результатов, полученных с помощью ММДИ и МПГУ. Во-вторых, продемонстрировано, что ММДИ позволяет получать диаграмму рассеяния с большей точностью, чем алгоритм на основе МПГУ. Корректность результатов, получаемых с помощью ММДИ, подтверждена проверкой выполнения краевого условия на контуре сечения тела. Показано, что невязка выполнения краевого условия в наихудшем случае не превосходит 2×10^{-2} . Представлены угловые зависимости усредненной интенсивности рассеяния волнового поля для статистически неровного многолистника вращения двух типов и шероховатого суперэллипсоида вращения. Неровности границы моделировались синусоидальной случайной функцией, имеющей случайную амплитуду. Численно исследовано влияние малых неровностей границы на геометрию множества особенностей продолжения волнового поля

внутри контура сечения тела. Во-первых, показано, что геометрия множества указанных особенностей существенно зависит от формы тела (т.е. “невозмущенного” контура сечения рассеивателя). Во-вторых, продемонстрировано, что при существенном различии множества особенностей гладкого и шероховатого тел, усредненные интенсивности рассеяния поля также достаточно сильно различаются даже при малых значениях неровностей границы сечения тела.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-02-00654).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
2. *Voronovich A.G.* Light scattering and nanoscale roughness / Ed. by A.A. Maradudin. N.Y.: Springer, 2006. P. 93.
3. *Voronovich A.G.* Wave Scattering from Rough Surfaces. Berlin: Springer, 2013.
4. *Muinsonen K., Nousiainen T., Fast P. et al.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1996. V. 55. № 5. P. 577.
5. *Muinsonen K.*, Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements and Applications/Eds. by M.I.Mishchenko, J.W.Hovenier, L.D.Travis. San Diego: Academic Press, 2000. P. 323.
6. *Auger J.-C., Fernandes G., Aptowicz K., Pan Y.-L., Chang R.* // Appl. Phys. 2010. B. 99. P. 229.
7. *Kahnert M., Rother T.* // Opt. Express. 2011. V. 19. P. 11138.
8. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666.
9. *Kyurkchan A.G., Smirnova N.I.* Mathematical Modeling in Diffraction Theory Based on A Priori Information on the Analytical Properties of the Solution. Amsterdam: Elsevier, 2017.
10. *Маненков С.А.* // Акустич. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 129.
11. *Кюркчан А.Г.* // Успехи физ. наук. 2017. Т. 187. № 10. С. 1097.
12. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. V. 113. № 18. P. 2368.
13. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2014. V. 146. № 1. P. 295.
14. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2018. V. 221. P. 243.
15. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
16. *Фарафонов В.Г., Винокуров А.А., Барканов С.В.* // Оптика и спектроскопия. 2011. Т. 111. № 5. С. 852.
17. *Григорьев Г.И., Заборонкова Т.М., Коган Л.П.* // РЭ. 2017. Т. 50. № 5. С. 552.
18. *Кюркчан А.Г., Анютин А.П.* // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 309.
19. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2019. V. 237. P. 106617.
20. *Rother T., Kahnert M.* Electromagnetic Wave Scattering on Nonspherical Particles – Basic Methodology and Simulations. Springer Series in Optical Sciences, XIV, Berlin: Springer, 2014.

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 537.872.32

**ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЗАМИРАНИЙ РАДИОВОЛН
НИЗКОЙ ЧАСТОТЫ В ВОЛНОВОДЕ “ЗЕМЛЯ–ИОНОСФЕРА”
ПОД ВЛИЯНИЕМ СИЛЬНОГО ЛОКАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ
В АТМОСФЕРЕ**

© 2022 г. А. В. Мошков*

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация***E-mail: kuzaf@inbox.ru*

Поступила в редакцию 11.10.2021 г.

После доработки 22.10.2021 г.

Принята к публикации 24.12.2021 г.

Проведены численные расчеты продолжительности крупномасштабных замираний электромагнитных волн с частотами 1–10 кГц при прохождении плоского неоднородного слоя нижней ионосферы в присутствии сильного локального возмущения атмосферы. Использована модель возмущения в виде точечного источника энергии. Найдено, что параметры модели зависят всего от двух начальных величин: высоты h_0 и энергии. Показано, что при $h_0 < 50$ км продолжительность замираний не превышает 2 мин, при увеличении h_0 выше некоторого критического значения горизонтальный размер возмущения существенно уменьшается, что приводит к уменьшению времени затухания радиоволн до десятков секунд при $h_0 > 80$ км.

DOI: 10.31857/S0033849422110109

ВВЕДЕНИЕ

Радиоволны диапазона очень низких частот широко используются в системах наземной дальней и сверхдальней радиосвязи, навигации, передачи сигналов эталонных частот и единого времени. Все чаще начинает использоваться диапазон крайне низких частот вплоть до частот от единиц до сотен герц. Преимущества низкочастотных (НЧ) систем связи очевидны: стабильность сигнала по частоте и фазе, относительно слабое затухание на длинных трассах, практическое отсутствие помех искусственного происхождения, слабая чувствительность к особенностям рельефа и метеоусловиям на трассе. Основным источником шумов на низких частотах — электромагнитные импульсы молниевых разрядов, которые сосредоточены главным образом в экваториальном поясе. Статистические характеристики таких шумов достаточно хорошо изучены. В приполярных областях особую роль играют геомагнитные возмущения, которые могут нарушить работу НЧ-линии связи вплоть до временного полного прекращения ее функционирования [1].

Источниками заметных локальных возмущений атмосферы являются, кроме упомянутых выше молниевых разрядов, высыпания энергичных частиц радиационных поясов [2], излучение

мощных наземных НЧ-передатчиков; вторжение крупных метеоров или комет [3]. Например, средний молниевый разряд сопровождается выделением энергии $\sim 10^9$ Дж в течение 0.1–0.2 мс. Из этой энергии около 10^6 Дж переходит в энергию электромагнитного импульса, максимум спектра которого приходится на частоты 5–10 кГц. В среднем за одну секунду происходит около 50 молниевых разрядов, которые суммарно выделяют энергию $\sim 5 \times 10^{10}$ Дж. Такой разряд может индуцировать высыпания энергичных частиц радиационных поясов в нижнюю ионосферу, что приводит к заметному увеличению концентрации свободных электронов в областях с горизонтальным размером до нескольких сотен километров [2].

Из крупных метеоритных тел, зафиксированных на территории РФ за последние примерно 100 лет, отметим Тунгусский метеорит с энергией ~ 200 ПДж (1 петаджоуль равен 10^{15} Дж) и Сихотэ-Алинский метеорит с энергией ~ 0.1 ПДж [3].

Считаем подобного рода возмущения атмосферы сильными и локальными, если они приводят к увеличению ионизации (концентрации свободных электронов) окружающей среды на несколько порядков величины в области пространства, характерные размеры которой сравнимы с длиной НЧ-волны, т.е. составляют десятки или сотни кило-

метров. Особенности распространения радиоволн высокой частоты в присутствии таких возмущений были рассмотрены ранее [4].

Цель данной работы – оценить время ослабления НЧ-сигнала при его распространении в волноводе “Земля–ионосфера” в присутствии сильного локального возмущения атмосферы, возникшего ниже ионосферы. В качестве модели такого возмущения используем простейшую регулярную (без учета тепловых эффектов и турбулентности) модель, описывающую в газодинамическом приближении поведение облака сильно ионизированной плазмы, образовавшегося после быстрого (секунда и менее) точечного выделения большого количества энергии в интервале значений $\sim 0.1\text{--}10$ ПДж [4]. Эта модель позволяет выявить особенности распространения НЧ-волн через возмущенную нижнюю ионосферу при помощи изменения всего двух начальных параметров – энергии Q и высоты h_0 . В работе рассмотрены сверхдлинные радиоволны в интервале частот $1\text{--}10$ кГц (длины волн $30\text{--}300$ км). Оценки проводятся на основе численных расчетов затухания НЧ-волны в неоднородном слое нижней ионосферы, параметры которого модифицируются всплывающей областью повышенной ионизации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используем простейшую модель распространения НЧ-волн в волноводе “Земля–ионосфера”, которая рассматривает промежуток между поверхностью земли и нижней ионосферой как волновод, в котором сигнал, распространяющийся от источника, представляется в виде набора лучей (локальных плоских волн), попадающих в приемник после последовательных отражений от земли и ионосферы. После суммирования всех подобных лучей получим полный принимаемый сигнал. Такая процедура получила название “метод многократно отраженных волн” или “метод скачков” [5, 6]. В рамках этого метода для оценок ослабления волны достаточно рассмотреть только локальные области отражений в ионосфере и на поверхности земли. Метод скачков дает удовлетворительные результаты в случае распространения НЧ-волн в волноводе “Земля–ионосфера” вплоть до расстояний несколько тысяч километров. Ограничение дальности связано в первую очередь с увеличением числа суммируемых лучей в ночное время.

Рассмотрим слой нижней ионосферы между высотами 50 и 150 км. Можно считать, что для возможных гео- и гелиофизических условий именно этот слой вносит основной вклад в коэффициенты отражения и поглощения волны [7, 8]. Выше этого слоя ионосферу можно считать плавно меняющейся средой, а эффективная частота соударений электронов, ответственная за погло-

щение, становится пренебрежимо малой. Запишем известное выражение для коэффициента затухания δ в плазме [7]:

$$\delta \approx 4.6 \times 10^{-2} N_e v_e / (\omega^2 + v_e^2), \quad (1)$$

где δ измеряется в дБ/км; N_e – концентрация свободных электронов, см^{-3} ; v_e – эффективная частота соударений электронов, с^{-1} ; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота волны, с^{-1} . В ионосфере выше ~ 80 км выполняется условие $\omega^2 \gg v_e^2$ и справедливо часто используемое приближение

$$\delta \approx 1.3 \times 10^{-4} N_e v_e \lambda^2, \quad (2)$$

где длина волны λ измеряется в метрах.

Плотность атмосферы экспоненциально растет с уменьшением высоты. На высотах менее ~ 60 км становится справедливым неравенство $\omega^2 \ll v_e^2$, и, соответственно, соотношение (1) примет вид

$$\delta \approx 4.6 \times 10^{-2} N_e / v_e. \quad (3)$$

Основное физическое упрощение, лежащее в основе оценок длительности замираний сигнала, состоит в предположении, что максимальное выделение энергии возмущения происходит практически мгновенно. Это порождает ряд сложных переходных процессов в атмосфере, продолжительность которых составляет примерно 1 с, после чего такое возмущение можно считать результатом точечного мгновенного выделения в атмосферу некоторой энергии Q .

В результате формируется область горячей сильно ионизированной плазмы (“облако”). Под действием архимедовой силы облако начинает подниматься вверх практически с постоянной скоростью и достигает верхней границы волновода, модифицируя ее параметры. Примерно через 3 мин от начала возмущения облако покидает волновод и более не оказывает воздействия на характеристики распространения НЧ-волн. Максимальная величина ионизации определяется в основном начальным количеством молекул воздуха в облаке. В атмосфере (включая ионосферу) эта ионизация чрезвычайно велика – любой радиосигнал испытает при прямом прохождении через область возмущения “абсолютное” ослабление [4]. Однако в случае низких частот размеры облака в волноводе существенно меньше длины волны, поэтому до достижения нижней ионосферы область повышенной ионизации не может оказать заметного влияния на характеристики радиосигнала. Отметим, что для высоких частот вывод о малом затухании волн в атмосфере нарушается, как только начинает выполняться условие $\omega > v_e$ [4].

Задача ставится следующим образом. Пусть на высоте h_0 над поверхностью земли в условный момент времени $t = 0$ происходит мгновенное то-

чечное выделение энергии Q . По мере всплытия облако ионизации модифицирует параметры плазмы в слое нижней ионосферы. Следует определить результирующую зависимость от времени ослабления НЧ-волны в этом слое, расположенном на высотах 50–150 км над поверхностью земли. Для моделирования движения облака используем модель [4], которая подверглась незначительной модификации: зависимости параметров невозмущенной атмосферы от высоты приведены в соответствие с моделью стандартной атмосферы [9]. Для невозмущенной ионосферы используем эмпирические модели, соответствующие равноденственному сезону при средней активности Солнца [10]. Время амплитудных замираний волны определяем при помощи численного интегрирования коэффициента затухания (1) по высоте.

Предполагаем, что область отражения волн в методе скачков и область возмущения в нижней ионосфере приблизительно совпадают. По этой причине сделанные ниже оценки длительности замираний сигнала носят характер оценок сверху.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

При увеличении времени t облако возмущения всплывает в атмосфере приблизительно с постоянной скоростью. При увеличении Q эта скорость возрастает: в интервале $Q \sim 0.1$ –10 ПДж она лежит в интервале 0.4–0.9 км/с. На рис. 1 приведены результаты расчетов величины A затухания волны в зависимости от времени для дневной ионосферы.

На рисунке виден характерный ход кривой $A(t)$: до момента времени ~ 65 с затухание в слое соответствует невозмущенной ионосфере (~ -0.75 дБ). С приходом возмущения затухание начинает резко расти до величины ~ -21 дБ ($Q = 4$ ПДж, высота центра облака ~ 87 км). При дальнейшем подъеме в слое концентрация электронов и температура в облаке уменьшаются и затухание медленно спадает. Наконец, с выходом облака из слоя ослабление в последнем быстро возвращается к исходной фоновой величине.

Основные параметры возмущения формируются в той точке, где это возмущение произошло, и эти параметры практически не зависят от времени суток, сезона и солнечной активности. Поэтому для ночной ионосферы картина затухания будет полностью идентичной рис. 1, за исключением величины начального ослабления в ионосфере (~ -0.03 дБ). Для $Q = 4$ ПДж затухание в максимуме $A(t)$ составит приблизительно -20.2 дБ ночью и -21 дБ днем. Временные параметры кривой $A(t)$ не меняются. По этой причине везде далее приводим результаты для дневной модели ионосферы.

Вычислим длительность Δt затухания волны под влиянием возмущения. Для этого выберем условный уровень 3 дБ под невозмущенным зна-

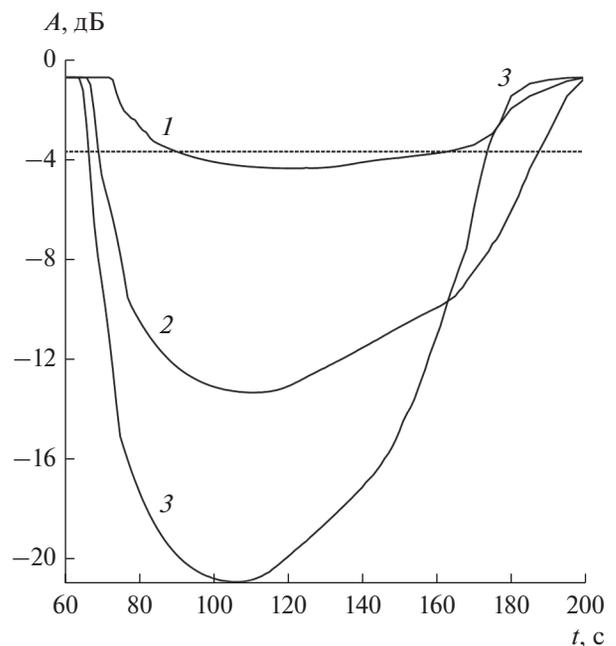


Рис. 1. Зависимость величины A затухания в дневной нижней ионосфере от времени для частоты 10 кГц и $h_0 = 1$ км при $Q = 0.4$ (1), 2 (2) и 4 ПДж (3); горизонтальная штриховая прямая обозначает величину на 3 дБ больше фонового затухания в ионосфере.

чением (см. рис. 1). Для $Q = 2$ и 4 ПДж получим $\Delta t \approx 115$ и 110 с, т.е. приблизительно 2 мин.

Говорить о затухании НЧ-волны имеет смысл в том случае, если размер области возмущения сравним или превышает длину волны. Для $Q = 4$ ПДж горизонтальный размер возмущения D , соответствующий максимуму затухания, имеет порядок величины 100 км. Однако следует учесть, что показатель преломления НЧ-волны в ионосфере заметно растет с высотой вместе с ростом величины N_e . С ростом частоты он, напротив, уменьшается как $f^{-1/2}$ [7]. Для качественных оценок можно считать, что в интервале частот 1...10 кГц “средний” показатель преломления в невозмущенной ионосфере равен 5–10. Соответственно, длины волн в свободном пространстве следует делить на эту величину.

На высоте расположения центра облака, соответствующей максимуму затухания волны (~ 87 км), значения N_e ($\sim 8 \times 10^9$ см $^{-3}$) и v_e ($\sim 9 \times 10^7$ с $^{-1}$) велики относительно невозмущенных ионосферных величин на этой высоте ($\sim 6 \times 10^3$ см $^{-3}$ и $\sim 7 \times 10^5$ с $^{-1}$). По этой причине приближение (3) выполняется с большим запасом на всем интервале используемых частот. В выражении (3) отсутствует зависимость коэффициента затухания от частоты. Косвенно зависимость от частоты присутствует в самой задаче через параметр D/λ . Учет этого обстоятельства требует решения задачи о распро-

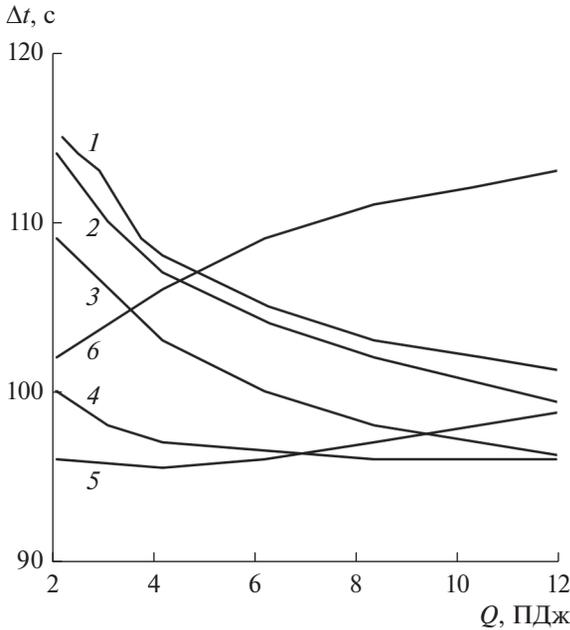


Рис. 2. Зависимость времени замираний сигнала от начальной энергии Q при $h_0 = 1$ (1), 5 (2), 10 (3), 20 (4), 30 (5) и 40 км (6).

странении НЧ-радиоволн в волноводе “Земля–ионосфера” в присутствии сильного локального возмущения. Это не входит в цели данной работы. Поэтому в первом приближении считаем, что частотная зависимость отсутствует, и все дальнейшие результаты приведены для частоты 10 кГц.

Пусть A_m – максимум затухания на кривой $|A(t)|$ и D_m – соответствующий горизонтальный размер возмущения. Эти величины монотонно растут с ростом энергии Q . Если рассматривать данные численного моделирования как “эмпирические”, то для $Q > 0.1$ ПДж и начальных высот $h_0 \leq 10$ км с корреляцией не хуже 0.996 можно получить следующие приближения:

$$A_m(Q) = \alpha + \beta Q^{1/2}, \quad (4)$$

$$\alpha = -4.22 - 0.863h_0; \quad \beta = 7.43 + 4.46h_0,$$

$$D_m(Q) = \zeta + \xi Q^{1/4}, \quad (5)$$

$$\zeta = 4.59 - 0.419h_0; \quad \xi = 64.1 + 4.08h_0,$$

где Q измеряется в ПДж; A_m – в дБ; D_m и h_0 – в км.

“Мягкие” монотонные зависимости параметров возмущения и характеристик НЧ-волн от величины Q определяются тем, что при возникновении облака ионизации максимальные величины N_e , v_e и температуры частиц в нем не могут расти беспредельно с увеличением Q и определяются состоянием атмосферы в точке начала возмущения. Зависимости от параметра h_0 имеют более сложный характер (см. ниже). По этой причине

простые линейные выражения для коэффициентов в соотношениях (4), (5) ограничены высотой 10 км.

На рис. 2 приведены зависимости длительности Δt замираний НЧ-сигнала от величины Q для ряда начальных высот h_0 . Из рисунка видно, что для высот $h_0 < 30$ км величина Δt убывает с ростом начальной энергии Q для заданной величины h_0 . Это связано, главным образом, с увеличением средней скорости всплытия облака с ростом Q . Однако с ростом h_0 величина Δt сначала убывает, но при $h_0 \geq 30$ км величина Δt начинает расти при увеличении как h_0 , так и Q .

С ростом величины h_0 происходят несколько процессов. С одной стороны, падает начальная концентрация электронов в облаке из-за экспоненциального уменьшения концентрации молекул в атмосфере с высотой. С другой стороны, уменьшается расстояние до ионосферы и изменяется скорость всплытия облака. В результате общее поглощение в слое возрастает. Кроме того, в интервале высот $h_0 \sim 40$ –60 км (в зависимости от значения Q) происходит качественное изменение размеров облака.

Для малых высот h_0 и $Q \sim 0.4$ –4 ПДж первые ~ 10 с облако имеет форму сфероида с увеличивающимся радиусом (до ~ 0.5 –1 км). Затем горизонтальный размер D неоднородности относительно быстро растет, а вертикальный размер не превышает 2 км ($Q = 0.4$ ПДж) и 10 км ($Q = 4$ ПДж). Из соображений симметрии следует, что на больших высотах в случае сильно разреженной атмосферы возмущение будет иметь форму сферы. Поскольку с увеличением h_0 плотность атмосферы экспоненциально уменьшается, то на определенной высоте $h_0 = h_{кр}$ условия ускоренного увеличения горизонтального размера возмущения перестают выполняться. В рамках используемой модели этот переход происходит практически скачком. При $h_0 > h_{кр}$ облако возмущения имеет вид сфероида с относительно малым радиусом. Для оценки величины $h_{кр}$ можно использовать следующее выражение ($Q > 0.1$ ПДж):

$$h_{кр} \approx -18.5 + 118/(1 + 0.439Q^{1/4}), \quad (6)$$

где Q измеряется в ПДж, высота – в км.

На рис. 3 приведена зависимость средней скорости всплытия облака от величины h_0 для $Q = 8$ ПДж. Вид этой кривой определяется указанными выше процессами и качественно объясняет поведение семейства зависимостей $\Delta t(Q)$ на рис. 2.

На рис. 4 приведены зависимости величин D_m и Δt от начальной высоты h_0 для $Q = 4$ ПДж. На рисунке явно видны резкие изменения этих зависимостей при переходе h_0 через критическую величину. Отметим, что величина затухания A_m быстро растет с увеличением h_0 ; для $Q = 0.4$ ПДж

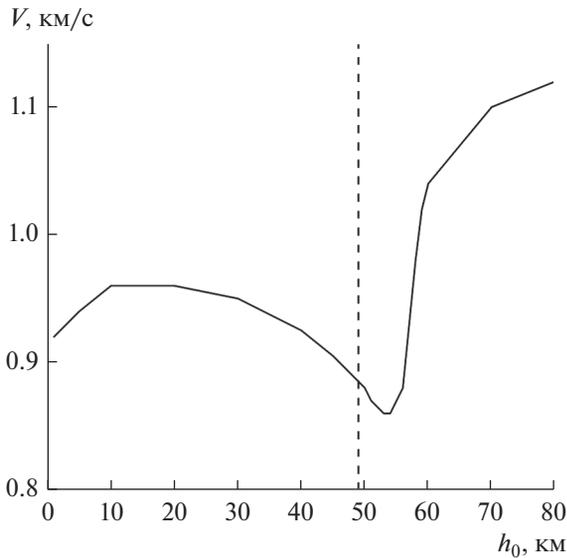


Рис. 3. Зависимость средней скорости V всплывающей возмущенной области от значения начальной высоты возмущения h_0 для $Q = 8$ ПДж; вертикальная штриховая прямая соответствует $h_0 = h_{кр}$.

затухание $|A| > 20$ дБ уже при $h_0 > 10$ км и превышает 100 дБ при $h_0 > 25$ км. Для $Q = 4$ ПДж затухание превышает 100 дБ при $h_0 = 10$ км. Качественно можно считать величину A_m в слое бесконечной при прохождении через него облака, однако время затухания зависит от h_0 более сложным образом. При $h_0 < h_{кр}$ время замираний составляет примерно 2 мин и меняется в относительно узких пределах. При изменении Q в интервале 0.4–4 ПДж высоты $h_{кр}$ лежат в относительно узком интервале значений 69–54 км соответственно. При $h_0 > h_{кр}$ размеры облака резко уменьшаются (см. рис. 3). Это приводит к тому, что время замираний (штриховая кривая) также начинает относительно быстро уменьшаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода многократных отражений получены оценки времени замираний радиосигнала на частотах 1–10 кГц в волноводе “Земля–ионосфера” под влиянием сильного локального возмущения атмосферы. Использована разработанная ранее модель точечного возмущения, параметры которой зависят от двух величин: начальной высоты h_0 и начальной энергии Q . Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Величина длительности замираний практически не зависит от гео- и гелиофизических условий, в частности от сезона, времени суток и географического положения. В указанном интервале частот эта величина не зависит от частоты волны.

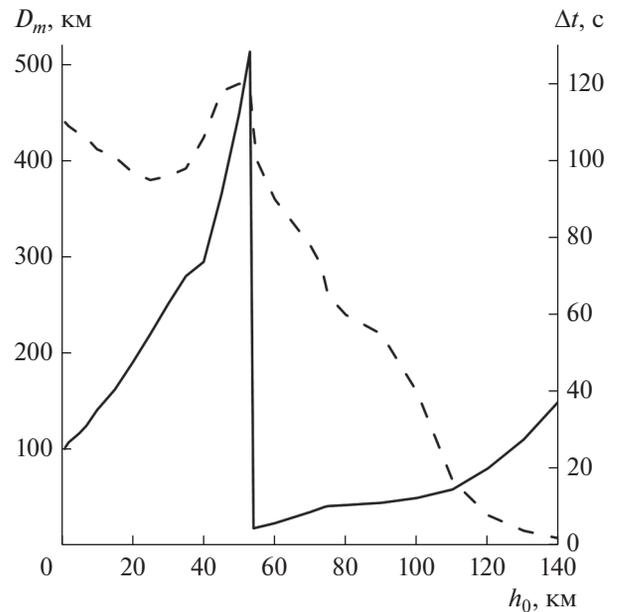


Рис. 4. Зависимость горизонтального размера возмущения D_m (сплошная кривая) и длительности замираний Δt по уровню 3 дБ (штриховая) от значения начальной высоты возмущения h_0 при $Q = 4$ ПДж.

2. Время надежного восстановления связи по всему сечению волновода совпадает с временем восстановления состояния его верхней границы, т.е. в худшем случае составляет ~2 мин после начала замираний сигнала.

3. В нижней ионосфере при максимальных значениях затухания волн горизонтальный размер области возмущения имеет порядок сотен километров, что для частоты 1 кГц составляет по крайней мере несколько длин волн в среде.

4. Для высот $h_0 \approx 50$ –70 км (в зависимости от величины Q) горизонтальный размер возмущения существенно уменьшается, что приводит к уменьшению времени замираний от максимальной величины ~2 мин до десятков секунд при $h_0 > 80$ км.

В заключение отметим, что из литературных источников известны результаты измерения параметров НЧ-сигнала, на трассе распространения которого присутствуют сильные локальные возмущения нижней ионосферы, вызванные высыпаниями энергичных частиц радиационных поясов. Эти высыпания индуцируются электромагнитными импульсами молниевых разрядов. Параметры всплесков затухания НЧ-сигналов в приемнике соответствуют сделанным выше оценкам. Величина начального выброса затухания составляет около 20 дБ, после чего в течение примерно 100–120 с плавно восстанавливается невозмущенное значение [2, 11]. В данном случае физический механизм исчезновения возмущения состоит не в

его механическом перемещении, а в рекомбинации избыточных свободных электронов. Судя по совпадению длительности замираний, оба этих процесса занимают приблизительно одинаковое время.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0030-2019-0006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоглазов М.И., Ременец Г.Ф. Распространение сверхдлинных радиоволн в высоких широтах. Л.: Наука, 1982.
2. Helliwell R.A., Katsufrakis J.P., Trimpi M. // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. № 22. P. 4679.
3. Бронштэн В.А. Физика метеорных явлений. М.: Наука, 1981.
4. Мошков А.В., Пожидаев В.Н. // РЭ. 2013. Т. 58. № 4. С. 317.
5. Макаров Г.И., Новиков В.В. // Успехи физ. наук. 1969. Т. 98. № 4. С. 733.
6. Макаров Г.И., Федорова Л.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 12. С. 1384.
7. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир, 1973.
8. Мошков А.В., Пожидаев В.Н. // РЭ. 2020. Т. 65. № 5. С. 434.
9. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: ИПК Изд-во стандартов, 2004.
10. Фаткуллин М.Н., Зеленова Т.И., Козлов В.К. и др. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы. М.: Наука, 1981.
11. Poulsen L.W. Modeling of Very Low Frequency Wave Propagation and Scattering within the Earth-Ionosphere Waveguide in the Presence of Lower Ionospheric Disturbances // PD Thesis. Space, Telecommunications and Radioscience Lab. Stanford: Stanford Univ. 1991. 158 p. <https://vlfstanford.ku.edu.tr/wp-content/uploads/2010/07/PoulsenThesis.pdf>.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.01

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСИОНОСФЕРНЫХ РАДИОЛИНИЙ
С ФАЗОВЫМИ ЗАМИРАНИЯМИ СИГНАЛОВ© 2022 г. Л. Е. Назаров^{а, б, *}, В. В. Батанов^б^аФрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация^бАО “Информационные спутниковые системы” им. акад. М.Ф. Решетнёва”,
ул. Ленина, 52, Железногорск Красноярского края, 662972 Российская Федерация

*E-mail: levnaz2018@mail.ru

Поступила в редакцию 12.11.2021 г.

После доработки 12.11.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Приведены математические модели транссионосферных радиолоний с фазовыми замираниями сигналов за счет влияния ионосферы Земли. Рассмотрен важный параметр радиолонии – время ее фазовой стационарности, связанное с статистическими характеристиками случайных временных и пространственных флуктуаций электронной плотности ионосферных неоднородностей. Получены оценки временной стационарности радиолоний для максимальной и средней скорости движения ионосферных неоднородностей рассматриваемых моделей радиолоний с параметрами стандартной среднеширотной ионосферы.

DOI: 10.31857/S0033849422110110

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Комплексные огибающие цифровых сигналов при распространении по транссионосферным радиолониям (спутниковым ионосферным радиолониям) искажаются за счет влияния ионосферы Земли как неоднородной и дисперсионной среды, что снижает надежность передачи информации по отношению к распространению в свободном пространстве [1–8]. Одно из важных искажений обусловлено многолучевостью распространения сигналов за счет их отражения и рассеяния на ионосферных неоднородностях, которая порождает временные вариации фаз и амплитуд сигналов (фазовые и амплитудные замирания) [3, 4, 9–12].

Фазовые и амплитудные вариации представляют случайные процессы (в общем случае нестационарные), их характеристики связаны с характеристиками флуктуаций электронной плотности ионосферных неоднородностей [3]. Модели замираний фаз и амплитуд сигналов дают возможность оценить важный для приложений параметр рассматриваемых радиолоний – их временную стационарность, которая является необходимой при разработке спутниковых информационных систем, в частности, при выборе оптимальных или близких к оптимальным по метрическим характеристикам сигнальных конструкций и при разработке соответствующих вычислительных процедур их обработки при приеме [13].

Экспериментальные и теоретические исследования показывают значимость рассматриваемых искажений цифровых сигналов за счет влияния ионосферы Земли при уменьшении центральной частоты сигналов, в частности, для P - и L -частотных диапазонов, интенсивно используемых спутниковыми информационными системами и глобальными навигационными системами [3, 4, 13].

Созданию и развитию моделей рассматриваемых искажений сигналов посвящен ряд работ [2, 3, 9, 10, 13–15]. В работе [12] приведены описания математических моделей транссионосферных радиолоний с амплитудными замираниями сигналов.

Актуальной является проблема обобщения этих моделей с учетом фазовых замираний, определяющих временную стационарность радиолоний и соответствующее предельное время когерентного накопления энергии сигналов при их приеме для обеспечения надежности передачи информации по рассматриваемым радиолониям.

Базовая модель многолучевого распространения сигналов по ионосферным спутниковым радиолониям, а также приближенное решение Рытова для волнового уравнения подробно описаны в работах [9, 12, 16]. Для логичного и более удобного изложения материалов данной статьи напомним основные результаты этих работ.

При распространении по транссионосферной радиолонии на вход приемника поступает сигнал

$s'(t)$, содержащий регулярный сигнал $s(t)$ и случайную составляющую в виде его многолучевых компонент с различными амплитудами, временными задержками и начальными фазами за счет отражения и рассеяния на ионосферных неоднородностях [3, 15]

$$s'(t) = \operatorname{Re}[\dot{A}(t)\exp(j(2\pi ft + \varphi_c(t)))] \quad (1)$$

Здесь $f, \varphi_c(t)$ – центральная частота и фаза сигналов $s(t)$ соответственно; $\dot{A}(t) = A(t)\exp(j\varphi(t))$ – комплексная огибающая $s'(t)$; $A(t), \varphi(t)$ – амплитуда и фаза комплексной огибающей $s'(t)$ без учета $\varphi_c(t)$.

Вариации фазы $\varphi(t)$ за счет влияния земной ионосферы представляют случайный стационарный процесс на анализируемом интервале времени. Основные статистические характеристики радиолоний с фазовыми замираниями, важные при разработке информационных систем (в частности, время стационарности радиолонии $\tau_{\text{ст}}$), задаются отношением мощности регулярной и случайной сигнальных составляющих в составе сигнала $s'(t)$ (1) [12, 13]. Рассматриваемый параметр $\tau_{\text{ст}}$ определяет возможное время когерентного накопления при демодуляции и синхронизации сигналов, а также требования на характеристики систем фазовой автоподстройки частоты в составе информационных систем [1].

Параметр $\tau_{\text{ст}}$ в литературе задается рядом эмпирических выражений [13]. Альтернативу этому направлению составляют оценки рассматриваемого параметра, производимые с использованием вероятностного подхода.

Цель работы – рассмотреть статистические модели фазовых замираний сигналов при их распространении по трансionoсферным радиолониям, а также методики оценивания параметра временной стационарности радиолоний с использованием этих моделей и вероятностного подхода, привести численные оценки этого параметра для радиолонии P - и L -частотных диапазонов.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАМИРАНИЙ

При создании и развитии моделей фазовых замираний сигналов при их распространении по трансionoсферным радиолониям используют два подхода: 1) на основе эмпирических соотношений относительно плотности распределения фазы $p(\varphi)$ и 2) на основе аналитического описания распространения сигналов [3, 9, 12, 17, 18].

Модели замираний сигналов из первого класса связывают параметры эмпирических одномер-

ных плотностей распределения $p(\varphi)$ с индексом сцинтилляции [4]

$$S^2 = \frac{\langle A^4 \rangle - (\langle A^2 \rangle)^2}{(\langle A^2 \rangle)^2},$$

где $A = |\dot{A}(t)|$ – амплитуда сигналов; $\langle \rangle$ – операция усреднения по ансамблю сигналов либо по времени, если полагать случайный процесс A эргодическим.

Относительно значений индекса S замирания классифицируются как слабые для $S < 0.3$, средние для $0.3 < S < 0.6$ и сильные для $S > 0.6$ [4]. Известно соотношение, определяющее зависимость индекса S от частоты f для слабых и средних замираний $S \approx f^{-1.5}$ [4].

Отношение мощности регулярного сигнала $s(t)$ с амплитудой A_0 к средней мощности σ_0^2 многолучевых компонент в составе $s'(t)$ рассматривается как параметр сигнал/помеха $c = A_0^2/\sigma_0^2$. При этом для слабых, средних и отчасти сильных замираний параметры S и c связаны соотношением [11, 12]

$$c = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-S^2}}{1-\sqrt{1-S^2}} \quad (2)$$

Для слабых замираний справедливо приближение $c \approx 1/S^2$.

Для слабых и средних замираний эмпирическая плотность распределения фаз φ ($|\varphi| \leq \pi$) за счет влияния ионосферы задается нормальным законом с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = S^2$ [4]

$$p(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

Модели фазовых замираний из второго класса основаны на использовании теории распространения радиоволн в случайно-неоднородных средах с пространственно-временными флуктуациями $\delta n(\vec{r}, t)$ относительного коэффициента преломления ионосферы $n(\vec{r}, t) = 1 + \delta n(\vec{r}, t)$, $\langle \delta n(\vec{r}, t) \rangle = 0$ [16]. Вследствие движения среды (ионосферных неоднородностей) со скоростью v (от 20–50 м/с до 300–500 м/с [2]) в разные моменты времени на распространение радиоволн влияют флуктуации $\delta n(\vec{r}, t)$, обуславливающие наличие случайных многолучевых компонент в составе $s'(t)$ в виде результирующего гауссовского процесса с амплитудой $A_{\delta n}$ с одномерной плотностью распределения Релея:

$$p(A_{\delta n}) = \frac{A_{\delta n}}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{A_{\delta n}^2}{2\sigma_0^2}\right).$$

Анализ распространения сигналов через рассматриваемые случайно-неоднородные среды

предполагает установление связи статистических характеристик функции $\delta n(\vec{r}, t)$ и сигналов (например, временной корреляционной функции или коэффициента корреляции фазы, время стационарности радиолинии $\tau_{ст}$) при заданной пространственной корреляционной функции $B_{\delta n}(\vec{r})$ для стационарного случая [18].

Метод установления этой связи основан на решении волнового уравнения в скалярном виде относительно напряженности электрического поля $E(\vec{r}, t)$ плоской волны, падающей нормально на ионосферный слой, полагая стационарность радиолинии на интервале времени анализа (условие “вмороженности” ионосферных неоднородностей) [16]

$$\nabla^2 E + \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 n(\vec{r})E = 0, \quad (4)$$

где c – скорость света в свободном пространстве.

При обосновании (4) используется предположение о малом изменении поляризации радиоволн (условие превышения размеров ионосферных неоднородностей длины волны $\lambda = c/f$) и о слабой рефракции радиоволн при распространении [17].

Известны приближенные решения уравнения (4) (борновское приближение, приближение Рытова) для слабых возмущений $\delta n(\vec{r}, t)$ [9, 18]. Выражение относительно флуктуации фазы $\delta(\varphi)$ монохроматических сигналов на входе приемника при использовании приближения Рытова имеет вид [16]

$$\delta(\varphi_i) = \frac{Lk^2}{2\pi} \int_V \frac{1}{z(L-z)} \sin\left(\frac{Lk(x^2 + y^2)}{2(L-z)}\right) \delta n(\vec{r}, t) dV. \quad (5)$$

Здесь Oz – ось распространения сигналов; L – расстояние радиолинии от передатчика до приемника;

интегрирование осуществляется по области V , существенной для $\delta n(\vec{r}, t)$, примыкающей к трассе распространения сигналов и определяемой первой зоной Френеля радиусом R_1 .

Оценку временной корреляционной функции $B_\varphi(\tau)$ для фазы φ определяют при выполнении упрощающего условия – полагается изотропность пространственного трехмерного спектра $F(K)$ для флуктуаций ионосферных неоднородностей $\delta n(\vec{r}, t)$ [3, 9, 17]. В этом случае корреляционная функция $B_\varphi(\tau)$ с учетом (5) имеет вид [17]

$$B_\varphi(\tau) = 2 \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} F(K) K J_0(Kv\tau) \times \left[1 + \cos\left(\frac{z(L-z)K^2}{kL}\right) \right] dz dK, \quad (6)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Пространственный спектр $F(K)$ представляется аналитическим выражением в виде степенной функции [17, 19]

$$F(K) = \frac{0.066\sigma_n^2(\vec{r})}{L_m^{2/3}(K_m^2 + K^2)^{q/2}}. \quad (7)$$

Здесь q – показатель пространственного спектра флуктуаций $\delta n(\vec{r}, t)$ ($q = 3.2-4.4$); $K_m = 2\pi/L_m$; L_m – внешний масштаб неоднородностей ($L_m = 20-100$ км); $\sigma_n^2(\vec{r})$ – средняя мощность флуктуаций ионосферных неоднородностей $\delta n(\vec{r}, t)$.

Выражение для коэффициента корреляции $R_\varphi(\tau)$ с учетом $\langle \delta(\varphi) \rangle = 0$ имеет вид [17]

$$R_\varphi(\tau) = \frac{\int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2(\vec{r}) K (K_m^2 + K^2)^{-q/2} J_0(Kv\tau) \left[1 + \cos\left(\frac{z(L-z)K^2}{kL}\right) \right] dz dK}{\int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2(\vec{r}) K (K_m^2 + K^2)^{-q/2} \left[1 + \cos\left(\frac{z(L-z)K^2}{kL}\right) \right] dz dK}. \quad (8)$$

Известно, что коэффициент корреляции $R_\varphi(\tau)$ фазы φ гауссовского процесса имеет вид [20]

$$R_\varphi(\tau) = 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\tau)}{n^2}. \quad (9)$$

Коэффициенты $A_n(\tau)$ задаются выражением [20]

$$A_n(\tau) = \frac{1}{4\pi^2(1-R_0^2(\tau))} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z_1 z_2 I_n\left(\frac{R_0(\tau)z_1 z_2}{1-R_0^2(\tau)}\right) \times \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2(1-R_0^2(\tau))}\right) dz_1 dz_2, \quad (10)$$

где $R_0(\tau)$ – коэффициент корреляции квадратурных составляющих гауссовского процесса, который определяет двумерную плотность вероятности $p(\varphi_1, \varphi_2, \tau)$; $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка.

При $\tau \rightarrow 0$ ($R_0(\tau) \rightarrow 1$) справедливо условие $A_n(0) = 1/4\pi^2$ [20], с его учетом и с учетом тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

из (9) следует равенство $R_\varphi(0) = 1$.

Используя (9) и (10), можно вычислить значение $R_0(\tau)$, соответствующее значению $R_\varphi(\tau)$ и задаваемое выражением (8) для радиолинии с параметрами $\sigma_n^2(\bar{r})$, K_m , ν , k , L , q .

3. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОЛИНИИ

Приведем описания методов оценивания временной стационарности $\tau_{ст}$ рассматриваемых радиолиний с фазовыми замираниями с использованием статистических моделей с параметром $R_\varphi(\tau)$.

Одномерная функция распределения для фазы $p_1(\varphi)$ комплексной огибающей суммы гармонического колебания с амплитудой A_0 и гауссовского шума с мощностью σ_0^2 задается выражением [20]

$$p_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{A_0^2}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{A_0 \cos(\varphi)}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \times F\left(\frac{A_0 \cos(\varphi)}{\sigma_0}\right) \exp\left(-\frac{A_0^2 \sin^2(\varphi)}{2\sigma_0^2}\right), \quad (11)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-x^2/2) dx.$$

При условии $A_0/\sigma_0 > 3$ и $\sin(\varphi) \approx \varphi$ справедливо выражение

$$p_1(\varphi) \approx \frac{A_0}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{A_0^2 \varphi^2}{2\sigma_0^2}\right).$$

Учитывая соотношение (2) и его приближение для слабых замираний, определяющих связь параметра A_0^2/σ_0^2 и S^2 , выражение для $p_1(\varphi)$ можно привести к виду

$$p_1(\varphi) \approx \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2S^2}\right).$$

Это выражение при сделанных предположениях совпадает с приведенным выражением (3) относительно эмпирической одномерной плотности распределения фазы φ .

Коэффициент корреляции $R_0(\tau)$ входит в выражение двумерной плотности вероятности фазы $p(\varphi_1, \varphi_2, \tau)$ для суммы узкополосного случайного процесса и детерминированного сигнала в виде гармонического колебания с амплитудой A_0 [20]

$$p(\varphi_1, \varphi_2, \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{rnm} \exp(j[(r+n)\varphi_1 + (m-r)\varphi_2]). \quad (12)$$

Здесь $|\varphi_1| \leq \pi$, $|\varphi_2| \leq \pi$; коэффициенты A_{rnm} задаются выражением

$$A_{rnm} = \frac{1}{4\pi^2(1-R_0^2(\tau))} \exp\left(-\frac{A_0^2}{\sigma_0^2(1+R_0(\tau))}\right) \times \int_0^\infty \int_0^\infty z_1 z_2 I_r\left(\frac{R_0(\tau) z_1 z_2}{1-R_0^2(\tau)}\right) \times I_n\left(\frac{A_0 z_1}{\sigma_0(1+R_0(\tau))}\right) I_m\left(\frac{A_0 z_2}{\sigma_0(1+R_0(\tau))}\right) \times \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2(1-R_0^2(\tau))}\right) dz_1 dz_2. \quad (13)$$

Одномерная функция распределения $p_1(\varphi_1 - \varphi_2, \tau)$ разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$ получается путем интегрирования (12) [20]:

$$p_1(\Delta\varphi, \tau) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{r,n,-n} \exp(j(r+n)\Delta\varphi). \quad (14)$$

Используя выражение для двумерной функции распределения $p(\varphi_1, \varphi_2, \tau)$ (12) или выражение для одномерной функции распределения для разности фаз $p_1(\Delta\varphi, \tau)$ (14), можно вычислить важные для приложений статистические характеристики радиолинии. В частности, можно оценить вероятность времени стационарности $Pr(\tau_{ст})$ радиолинии

$$Pr(\tau_{ст}) \approx \int_0^\infty d\varphi_1 \left[\int_{\varphi_1-\Delta}^{\varphi_1+\Delta} p(\varphi_1, \varphi_2, \tau) d\varphi_2 = \int_{-\Delta}^{\Delta} p_1(\varphi, \tau) d\varphi \right], \quad (15)$$

где Δ – параметр.

Коэффициент корреляции $R_0(\tau)$ ($R_\varphi(\tau)$) в составе плотностей распределения $p(\varphi_1, \varphi_2, \tau)$ и $p_1(\Delta\varphi, \tau)$ согласно (8) зависит от скорости движения ионосферных неоднородностей ν . С использованием соотношения (15) можно оценить минимальное время стационарности $\tau_{ст, \min}$, определяемое максимальной скоростью движения ионосферных неоднородностей перпендикулярной радиолинии пространства. Это значение временной стационарности задает требование на максимально возможное время когерентного накопления при приеме цифровых сигналов, при синхронизации систем цифровой связи, при когерентной обработке сигналов радиолокационных систем [1, 13].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

На рис. 1 представлена зависимость коэффициента корреляции $R_\varphi(\tau)$ от $R_0(\tau)$, вычисленная с

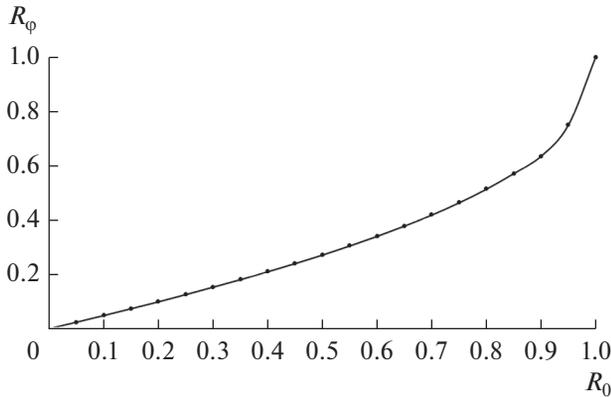


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции $R_\varphi(\tau)$ от $R_0(\tau)$.

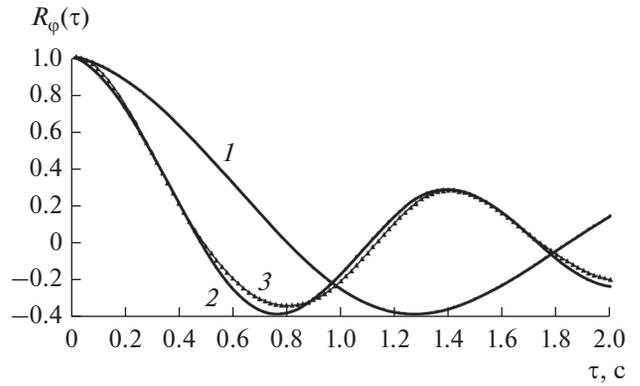


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции $R_A(\tau)$ от времени τ при различных значениях скорости v и длин волн λ : кривая 1 – $v = 300$ м/с, $\lambda = 0.75$ м; кривая 2 – $v = 500$ м/с, $\lambda = 0.75$ м; кривая 3 – $v = 500$ м/с, $\lambda = 0.20$ м.

использованием выражений (9), (10). Виден нелинейный характер приведенной зависимости.

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента корреляции $R_\varphi(\tau)$ от времени τ . Зависимости вычислены с помощью соотношения (8) для радиолинии P -частотного диапазона ($\lambda = 0.75$ м) с параметрами $L = 400$ км, $q = 4$, $L_m = 20$ км. При вычислении (8) использовалось приближение [12, 17]

$$\int_0^L \sigma_n^2(\vec{r}) \sin^2\left(\frac{z(L-z)K^2}{2kL}\right) dz \approx (l_2 - l_1) \sigma_n^2(z_{cp}) \sin^2\left(\frac{z_{cp}(L - z_{cp})K^2}{2kL}\right).$$

Здесь l_2, l_1 – границы ионосферного слоя ($l_2 = 350$ км, $l_1 = 250$ км); $z_{cp} = (l_2 - l_1)/2$ – среднее значение координаты ионосферного слоя; $\sigma_n^2(z_{cp})$ – значение средней мощности флуктуаций ионосферных неоднородностей $\delta n(\vec{r}, t)$ для z_{cp} (при анализе и оценивании характеристик радиолиний используются значения $\sigma_n(z_{cp}) = 10^9 - 1.4 \times 10^{10} \text{ м}^{-3}$ [17, 19, 21, 22]).

Видно уменьшение требуемого времени смещения τ при увеличении скорости движения ионосферных неоднородностей v для значения $R_\varphi(\tau) = 0.5$: от 0.48 с для скорости $v = 300$ м/с до 0.30 с для $v = 500$ м/с.

Кривая 3 на рис. 2 соответствует радиолинии L -частотного диапазона ($\lambda = 0.2$ м) и скорости $v = 300$ м/с. Видно, что эта кривая практически совпадает с кривой 2 для радиолинии P -частотного диапазона.

На рис. 3а и 3б приведены кривые, вычисленные с использованием соотношения (15) и определяющие верхние границы вероятности времени

стационарности $Pr(\tau)$ рассматриваемых радиолиний P -частотного диапазона для различных значений индекса сцинтилляции.

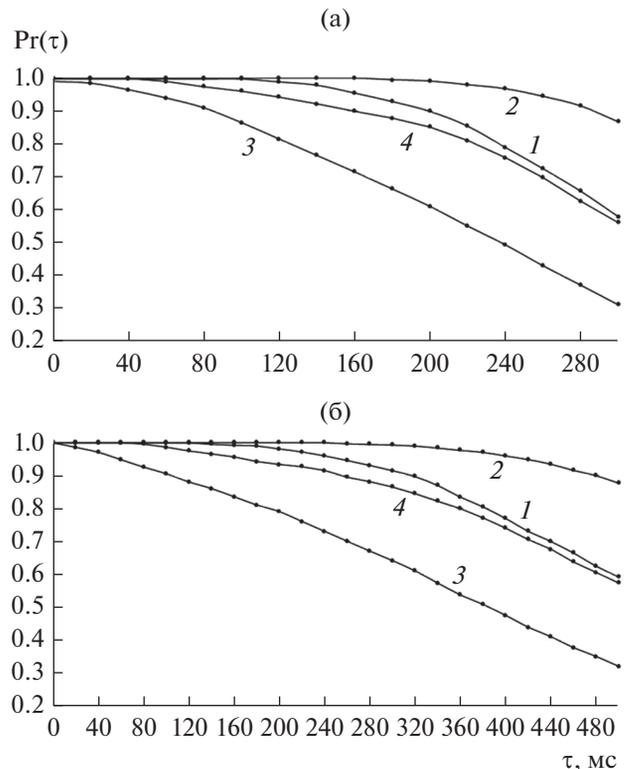


Рис. 3. Вероятности времени стационарности радиолиний P -частотного диапазона при скорости движения ионосферных неоднородностей $v = 500$ (а) и 300 м/с (б) и различных значениях индекса сцинтилляции и параметра Δ : $S = 0.3$ ($c = 10.4$) и $\Delta = 10^\circ$ (1) и 20° (2); $S = 0.6$ ($c = 2.0$) и $\Delta = 10^\circ$ (3) и 20° (4).

Анализ кривых на рис. 3а показывает, что вероятность минимального времени стационарности $\text{Pr}(\tau_{\text{ст, min}}) = 0.95$ для $S = 0.3$ достигается при $\tau_{\text{ст, min}} = 170$ мс для параметра $\Delta = 10^\circ$ и при $\tau_{\text{ст, min}} = 250$ мс для параметра $\Delta = 20^\circ$. При увеличении значения индекса сцинтилляции S (при уменьшении отношения сигнал/помеха c) минимальное время стационарности радиолинии уменьшается – вероятность $\text{Pr}(\tau_{\text{ст, min}}) = 0.95$ для значения $S = 0.6$ достигается при $\tau_{\text{ст, min}} = 50$ мс для $\Delta = 10^\circ$ и при $\tau_{\text{ст, min}} = 110$ мс для $\Delta = 20^\circ$.

При уменьшении скорости движения ионосферных неоднородностей относительно максимальной скорости $v = 500$ м/с время стационарности радиолиний увеличивается. Анализ кривых на рис. 3б показывает, что вероятность времени стационарности радиолиний $\text{Pr}(\tau) = 0.95$ для $S = 0.3$ достигается при $\tau_{\text{ст}} = 250$ мс для $\Delta = 10^\circ$ и при $\tau_{\text{ст}} = 420$ мс для $\Delta = 20^\circ$. Вероятность времени стационарности $\text{Pr}(\tau_{\text{ст}}) = 0.95$ для значений $S = 0.6$ достигается при $\tau_{\text{ст}} = 50$ мс для $\Delta = 10^\circ$ дБ и при $\tau_{\text{ст}} = 170$ мс для $\Delta = 20^\circ$.

Оценочные значения $\tau_{\text{ст}}$ для других критериев времени стационарности рассматриваемых радиолиний и других их параметров по отношению к приведенным выше могут быть вычислены с использованием данных методов.

Представляет интерес сравнения полученных оценок времени стационарности $\tau_{\text{ст}}$ с граничным значением $\tau_{\text{ст}} < 2R_1/v$, $R_1 = \sqrt{\lambda h}$ – радиус первой зоны Френеля от F -области ионосферы до приемного устройства ($h \approx 300$ км [19]). Обоснование выражения для данной верхней границы заключается в выполнении условия полного пересечения ионосферными неоднородностями этой зоны Френеля, определяющей основной вклад при формировании многолучевых компонент сигнала $s'(t)$. Для $v = 300$ м/с, P -частотного диапазона ($\lambda \approx 0.75$ м) имеем $\tau_{\text{ст}} < 3.16$ с, для частотного L -диапазона ($\lambda \approx 0.2$ м) $\tau_{\text{ст}} < 1.63$ с. Таким образом, по отношению к значениям $\tau_{\text{ст}}$, полученным с использованием вероятностного подхода, верхние граничные значения являются достаточно грубыми.

Приведенные оценочные значения времени стационарности вычислены без учета движения космических аппаратов, что справедливо для геостационарных спутниковых радиолиний. Для средне- и низкоорбитальных спутниковых радиолиний необходимо учитывать скорость ионосферных неоднородностей и скорость движения космических аппаратов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены модели транссионосферных радиолиний с фазовыми замираниями сигналов при распространении за счет влияния земной ионосферы. Основу моделей составляют эмпирические соотношения относительно плотности распределения фазы сигналов и аналитическое описание распространения сигналов в случайно-неоднородной среде, порождающей временные вариации фаз и амплитуд сигналов на входе приемных устройств за счет отражения и рассеяния на ионосферных неоднородностях. Аналитическое описание представляет приближенное решение Рытова относительно фазы для волнового уравнения без учета анизотропии за счет влияния магнитного поля Земли. Рассматривается временная стационарность радиолиний, связанная с статистическими характеристиками случайных временных и пространственных флуктуаций электронной плотности ионосферных неоднородностей.

Для моделей радиолиний с параметрами стандартной среднеширотной ионосферы получены оценки временной фазовой стационарности: для скорости движения ионосферных неоднородностей $v = 500$ м/с и коэффициента сцинтилляции $S = 0.6$ минимальное время стационарности не превышает 70 мс для параметра допустимых вариаций фазы $\Delta = \pm 10^\circ$ и не превышает 110 мс для параметра $\Delta = 20^\circ$ с вероятностью 0.95.

Оценочные значения характеристик рассматриваемых радиолиний за счет влияния ионосферы Земли задают требование на максимальное возможное время когерентного накопления при приеме цифровых сигналов, при синхронизации систем цифровой связи, при когерентной обработке сигналов радиолокационных систем.

Обобщение приведенных моделей фазовых замирания сигналов при распространении по транссионосферным анизотропным радиолиниям с учетом влияния магнитного поля Земли, является перспективным направлением исследований.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00525).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Спилкер Дж.* Цифровая спутниковая связь. М.: Связь, 1979.
2. *Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И.* Распространение радиоволн при космической связи. М.: Связь, 1969.

3. *Rino C.L.* The Theory of Scintillation with Applications in Remote Sensing. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
4. Ionospheric propagation data and prediction methods required for the design of satellite services and systems. Recommendation ITU-R P.531-11. Electronic Publication, Geneva. 2012. 24 p.
5. *Назаров Л.Е., Батанов В.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 9. С. 866.
6. *Кутуза Б.Г., Мошков А.В., Пожидаев В.Н.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 9. С. 889.
7. *Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 3.
8. *Иванов Д.В., Иванов В.А., Михеева Н.Н. и др.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 11. С. 1167.
9. *Crane R.K.* // Proc. IEEE. 1977. V. 2. P. 180.
10. *Назаров Л.Е., Антонов Д.В., Батанов В.В. и др.* // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информ. технологии. 2019. Т. 11. № 1. С. 57.
11. *Назаров Л.Е., Смирнов В.М.* // Физические основы приборостроения. 2020. Т. 9. № 4. С. 18.
12. *Батанов В.В., Назаров Л.Е.* // Электромагнитные волны и электрон. системы. 2021. № 5. С. 15.
13. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: ИД "Вильямс", 2003.
14. *Zernov N.N., Gherm V.E.* // Radio Sci. 2015. V. 50. № 2. P. 153.
15. *Назаров Л.Е., Смирнов В.М.* // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov20/7/text.pdf>
16. *Priyadarshi S.* // Surveys in Geophys. 2015. V. 36. № 2. P. 295.
17. *Яковлев О.И., Якубов В.П., Урядов В.П., др.* Распространение радиоволн. М.: Ленанд, 2009.
18. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
19. *Crane R.K.* // J. Geophys. Research. 1976. V. 81. № 13. P. 2041.
20. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1969. Кн. 1.
21. *Aol S., Buchert S., Jurua E.* // Earth, Planets, Space. 2020. V. 72. № 164. P. 2.
22. *Huang C.S., La Beaujardiere O., Roddy P. et al.* // J. Geophys. Research: Space Phys. 2014. V. 119. № 2. P. 1186.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 621.382+621.391.822

РОЛЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ПОЛЕЙ В ТЕОРЕМЕ ШОКЛИ–РАМО В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЛОКАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ ОБРАЗЦОВ С ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

© 2022 г. С. Г. Дмитриев*

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация*

*E-mail: sgd@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.

После доработки 16.03.2022 г.

Принята к публикации 25.03.2022 г.

Рассмотрена роль вспомогательных функций в теореме Шокли–Рамо и в ее обобщениях в случае неоднородных локально анизотропных образцов с поляризацией.

DOI: 10.31857/S003384942211002X

1. ТЕОРЕМА ШОКЛИ–РАМО

Изначально теорема Шокли–Рамо (ТШР) [1, 2] и ее обобщения [3, 4] на случай произвольного числа неподвижных и подвижных зарядов была предназначена для описания токов из внешней цепи на металлические электроды, индуцированных движением зарядов в электровакуумных приборах (в первых работах рассматривалось движение одного точечного заряда в системе без других зарядов). При выводе ТШР использовалась теорема Грина и уравнения Максвелла; соединительные провода (с их неэквипотенциальными поверхностями) не рассматривались. То есть во внимание принималось произвольное число N металлических (эквипотенциальных) электродов и подвижные и неподвижные заряды в вакууме. Формула для общего тока на отдельный α -й электрод имеет вид

$$I_{\alpha} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{j}_{\text{п}}) dV, \quad (1)$$

где

$$\vec{j}_{\text{п}} = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t, \quad (2)$$

– полный ток, $\vec{j}(t, \vec{r})$ – плотность конвективного тока, $\vec{D}(t, \vec{r})$ – электрическая индукция, равная в вакууме

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3)$$

(ϵ_0 – диэлектрическая постоянная вакуума, \vec{E} – электрическое поле),

$$\vec{E}^{(\alpha)} = \vec{E}^{(1\alpha)} / \Phi_0, \quad (4)$$

– вспомогательное нормированное электрическое поле, $\Phi^{(1\alpha)}(t, \vec{r})$, $\vec{E}^{(1\alpha)} = -\text{grad}\Phi^{(1\alpha)}$ – соответственно потенциал и электрическое поле из вспомогательной краевой задачи для той же системы, но без пространственных зарядов и с потенциалами электродов

$$\Phi_{\beta}^{(1\alpha)} = 0 \quad \text{при } \beta \neq \alpha, \quad \Phi_{\alpha}^{(1\alpha)} = \Phi_0 = 1 \text{ В}. \quad (5)$$

Интегрирование проводится по всему пространству без электродов.

В работах [1, 2] рассматривался только вклад в (1) от конвективного тока (соответствующий первому слагаемому в (2)) для случая одиночного точечного заряда q , движущегося со скоростью \vec{v} в точке \vec{r}_0 и создающего конвективный ток с плотностью

$$\vec{j}_0 = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (6)$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция. Эта плотность тока \vec{j}_0 индуцирует на α -м электроде ток

$$I_{\alpha 0} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{j}_0) dV = q(\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{v}). \quad (7)$$

Тогда, в случае двух плоскопараллельных электродов, например, нормированное поле для одного из них (индекс “0”) равно

$$\vec{E}^{(0)} = \vec{n}/d, \quad (8)$$

где d – расстояние между электродами, \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности выбранного

электрода (направленный в сторону второго электрода), а индуцированный ток равен

$$I_0 = q(\vec{v} \cdot \vec{n})/d. \quad (9)$$

При приближении заряда к рассматриваемому электроду получаем $qI_0 < 0$, т.е. ток из внешней цепи приносит в электрод заряд другого знака, экранирующий поле заряда q , а при удалении от электрода знаки заряда и тока совпадают.

Формулы (6)–(9) и выражают содержание собственно ТШР, хотя под ТШР иногда понимают и более общие выражения. Одно из таких полезных соотношений имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \Phi_k^{(1)} I_k = \iiint (\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{j}_n) dV, \quad (10)$$

где $\Phi_k^{(1)}(t)$ – потенциал k -го электрода из вспомогательной задачи ($k = 1, 2, \dots, N$), $\vec{E}^{(1)}$ – вспомогательное поле в этом случае, а I_k – ток, втекающий в k -й электрод из внешней цепи. При этом формула (1) представляет собой частный случай равенства (10) при условиях (5), который целесообразно записать в виде

$$I_\alpha = I_{\alpha 1} + \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \partial \vec{D} / \partial t) dV, \quad (11)$$

где

$$I_{\alpha 1} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{j}) dV \quad (12)$$

– полный индуцированный (движением зарядов в вакууме) ток на α -й электрод (а собственно ТШР из [1, 2] описывает вклад от точечного заряда в эту компоненту тока).

ТШР и ее обобщения использовались для описания работы вакуумных сверхвысокочастотных (СВЧ) приборов (см., например, [3–8]). В работах [5, 6] рассматривались квазистационарные (достаточно медленные) режимы изменения полей.

2. ОБОБЩЕНИЯ ТШР И УСЛОВИЯ ЕЕ ПРИМЕНИМОСТИ

Доказывать ТШР и ее обобщения можно разными способами. Удобно, например, использовать (производящий) функционал

$$F_1 = -\iiint \text{div}(\varphi^{(1)} \vec{j}_n) dV, \quad (13)$$

преобразования которого с помощью теоремы Остроградского–Гаусса и уравнений Максвелла (в их интегральной форме), вполне аналогичные соответствующим преобразованиям в работах [1, 2], приводят к левой части уравнения (10). Вместе с тем дифференцирование в (13) с учетом равенства

$$\text{div} \vec{j}_n = 0, \quad (14)$$

дает правую часть в (10) ($\vec{E}^{(1)} = -\text{grad} \varphi^{(1)}$) и завершает вывод.

Отметим, что такое доказательство не требует никаких дополнительных ограничений, так как в нем кроме математики используются только уравнения Максвелла в самой общей их форме. В частности, связь между электрической индукцией и электрическим полем не конкретизируется, а потенциальность электрического поля не предполагается (в отличие от теоремы Грина, которая использовалась в первых работах), что обеспечивает применимость ТШР к описанию систем с высокочастотными, в том числе СВЧ-полями.

Кроме того, от функции $\varphi^{(1)}$ требуется лишь постоянство вдоль поверхностей металлических электродов (что обеспечивает возможность выделения формул для зарядов электродов и токов на них). Применение вспомогательных функций для вывода ТШР и (других соотношений) было предложено в [9] и развито в [10] на случай произвольных функций (но с требуемыми граничными условиями, конечно) с целью применения ТШР к высокочастотным (т.е. в том числе и непотенциальным) полям. Использование в качестве вспомогательных функций потенциалов (т.е. функций, являющихся решением соответствующих краевых задач для потенциалов) безусловно удобно и ближе к практике. Однако краевые задачи для них можно выбирать, из соображений полезности, с отличными от основной задачи зарядами, параметрами образцов, граничными условиями и т.п.

С формальной точки зрения расширения ТШР на образцы с диэлектриками связаны с осложнениями вакуумной формулы (3) для электрической индукции, которая фигурирует в выражениях для полного тока (2), токов на электроды (1), (10), (11) и функционала (13). Так, в работах [9–15] было развито обобщение ТШР вплоть до случая неоднородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\vec{r}, t)$ и индукцией

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (15)$$

Вид формул при этом сохраняется. ТШР для диэлектриков применялась для описания датчиков ионизирующего излучения в работах [11, 12, 15, 16]. Весьма интересны также применения ТШР в биологии для изучения транспорта зарядов в протеинах [17].

Выделим теперь влияние поляризации. Представим с этой целью электрическую индукцию в виде

$$\vec{D} = \vec{P} + \vec{D}_0, \quad (16)$$

где $\vec{P}(\vec{r}, t)$ – плотность дипольного момента, которая может быть связана со спонтанной поляризацией в пирозлектриках (см., например, [18]), с различными неоднородностями (включая границы раздела и поверхности), с дефектными образованиями атомного масштаба, с отдельными мо-

лекулами и т.п. Тогда вместо (11), (12) можно записать следующие формулы:

$$I_{\alpha} = I_{\alpha l} + \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \partial \vec{D}_0 / \partial t) dV, \quad (17)$$

где

$$I_{\alpha l} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot (\vec{j} + \partial \vec{P} / \partial t)) dV. \quad (18)$$

Здесь вклад в ток с $\partial \vec{P} / \partial t$ отнесен к индуцированным токам (к ТШР), поскольку он имеет ту же природу и размерность (см. [19, 20]). В частности, вектор $\partial \vec{P} / \partial t$ играет роль плотности тока для связанного (с поляризацией) заряда ($-\text{div} \vec{P}$), как это вывстует из закона сохранения этого заряда

$$\frac{\partial(-\text{div} \vec{P})}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = 0. \quad (19)$$

В случае точечного диполя с дипольным моментом \vec{p} плотность поляризации равна

$$\vec{P}_d = \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (20)$$

а вклад от нее в индуцированный ток –

$$I_{\alpha d} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \partial \vec{P}_d / \partial t) dV = \vec{E}^{(\alpha)}(\vec{r}_0) \cdot \partial \vec{p} / \partial t. \quad (21)$$

Если токи малы, то удобнее измерять изменение заряда на электроде. При диагностике пленок (плоскопараллельный случай (7)) из (21) следует

$$\Delta Q = \int I_{\alpha d} dt = (\vec{n} \cdot \vec{p}_0) / d, \quad (22)$$

где d – толщина пленки, а \vec{p}_0 – изменение дипольного момента. Например, индуцированные токи при генерации (или отжиге) дипольных дефектов в диэлектрике в составе структуры МДП (металл–диэлектрик–полупроводник) приводят к вполне ощутимым изменением заряда металлического электрода, что можно использовать для диагностики дефектов с помощью ТШР [21].

Разумеется, ТШР остается справедливой и в локально анизотропном случае с тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ik}(\vec{r}, t)$

$$D_{0i} = \epsilon_{ik} E_k, \quad (23)$$

(по повторяющимся тензорным индексам предполагается суммирование) [22, 23].

В работах [19, 21–23] ТШР использовалась в задачах диагностики дефектов в кремниевых структурах МОП (металл–окисел–полупроводник) и в интегральных схемах.

3. ЕМКОСТНЫЕ И НЕЕМКОСТНЫЕ ТОКИ

В реальных условиях вклад в токи из внешней цепи на металлические электроды может быть связан не только с индуцированными токами (из

ТШР), но и с токами иной природы. В случае потенциальных электрических полей это емкостные токи, которые обсуждались уже в работах [5, 6] и рассматривались в прямой связи с ТШР в [9, 14]. Отметим по этому поводу, что ТШР можно рассматривать как развитие законов Кирхгофа [24, 25] для электрических цепей (в работе [25] сделано важное замечание относительно роли потенциала в законе Ома [26], а сами законы кратко сформулированы в приложении к работе [24]). Емкость в качестве элемента электрической цепи и соответствующие ей токи рассматривал исходя из энергетических соображений, У. Томсон (впоследствии лорд Кельвин) в своей знаменитой работе по электрическим колебаниям, где получена формула для их периода [27]. Эти работы были опубликованы до открытия уравнений Максвелла, хотя их результаты могут быть, конечно, получены и из самих уравнений (см., например, [28]). И все же именно ТШР, и в особенности ее обобщения, открывают широкие возможности для вывода законов электрических цепей непосредственно из уравнений Максвелла. С этим, очевидно, и связан рост интереса к обсуждаемой тематике.

Отметим далее, что емкостные токи хорошо известны в теории не только электровакуумных, но также и полупроводниковых приборов (см., например, [29–31]), включая в этом случае и токи, связанные с изменением самих емкостей. Естественно поэтому ожидать, что токи указанной природы (т.е. индуцированные и емкостные) полностью исчерпывают токи в правой части формулы (17), т.е. второе слагаемое в этой формуле соответствует чисто емкостным токам (в случае достаточно медленных (квазистационарных) режимов, конечно, когда электрическое поле потенциально $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$).

Выделим для проверки емкостное слагаемое в формуле (17) для токов из ТШР в явном виде (см. также [19, 23]). Рассмотрим с этой целью функционал с потенциальными полями

$$F_2 = -\iiint \text{div} \left[\phi^{(1)} \vec{j}_{\pi} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}^{(1)} \phi) \right] dV, \quad (24)$$

где вспомогательный потенциал $\phi^{(1)}$ рассматривается в том же (геометрическом) пространстве с теми же границами на поверхностях металлических электродов, но без заряда и поляризации, т.е.

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad \vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P}, \quad \text{div} \vec{D}^{(1)} = 0, \quad (25)$$

где ρ , \vec{D} , \vec{P} – соответственно плотность заряда, электрическая индукция и плотность поляризации в основной задаче, а $\vec{D}^{(1)}$ – электрическая индукция во вспомогательной. Диэлектрические свойства среды в вспомогательной задаче тоже не оговариваются, а связь между индукциями и полями (\vec{D} , \vec{E} и $\vec{D}^{(1)}$, $\vec{E}^{(1)}$) не конкретизируется. Пре-

образуем далее функционал F_2 аналогично преобразованию функционала F_1 из (13) (т.е. с помощью формул векторного анализа):

$$\sum_{\beta=1}^N \Phi_{\beta}^{(1)} I_{\beta} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (Q_{\beta}^{(1)} \Phi_{\beta}) = \iiint \left\{ \vec{E}^{(1)} \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \vec{E}^{(1)} \cdot \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}^{(1)} \cdot \vec{E}) \right\} dV, \quad (26)$$

где $\Phi_{\beta}(t)$ – потенциалы электродов в основной задаче, а $Q_{\beta}^{(1)}(t)$ – заряд β -го электрода во вспомогательной. Отметим, что последние два слагаемых под интегралом можно представить в более симметричном и удобном для дальнейшего, виде:

$$\begin{aligned} & \vec{E}^{(1)} \cdot \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}^{(1)} \cdot \vec{E}) = \\ & = -\frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial t} \cdot \vec{D}_0 + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D}^{(1)} \cdot \vec{E}). \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь для случая (5) формула (26) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_0 I_{\alpha} = & \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (Q_{\beta}^{(\alpha)} \Phi_{\beta}) + \iiint \left\{ \vec{E}^{(1\alpha)} \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial \vec{E}^{(1\alpha)}}{\partial t} \cdot \vec{D}_0 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^{(1\alpha)} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D}^{(1)} \cdot \vec{E}) \right\} dV, \end{aligned} \quad (28)$$

где $Q_{\beta}^{(\alpha)}$, $\vec{E}^{(1\alpha)}$ и $\vec{D}^{(1\alpha)}$ – соответственно заряд β -го электрода, поле и индукция во вспомогательной задаче в рассматриваемом случае. Наконец, после деления на Φ_0 , получаем искомую формулу для тока на α -й электрод в общем виде:

$$\begin{aligned} I_{\alpha} = & \iiint \left\{ \vec{E}^{(\alpha)} \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (C_{\beta}^{\alpha} \Phi_{\beta}) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial \vec{E}^{(\alpha)}}{\partial t} \cdot \vec{D}_0 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D}^{(\alpha)} \cdot \vec{E}) \right\} dV, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$C_{\beta}^{\alpha} = Q_{\beta}^{(1\alpha)} / \Phi_0 \quad (30)$$

– емкостные коэффициенты в рассматриваемом случае (в электростатике это коэффициенты емкости (C_{α}^{α}) и коэффициенты электростатической индукции (C_{β}^{α} , $\beta \neq \alpha$) [18]),

$$\vec{E}^{(\alpha)} = \vec{E}^{(1\alpha)} / \Phi_0 \quad \text{и} \quad \vec{D}^{(\alpha)} = \vec{D}^{(1\alpha)} / \Phi_0 \quad (31)$$

– нормированные поле и индукция во вспомогательной задаче. Слагаемое

$$I_{\alpha 2} = \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (C_{\beta}^{\alpha} \Phi_{\beta}) \quad (32)$$

здесь описывает, очевидно, токи емкостной природы, включая и токи, обусловленные изменени-

ями самих емкостных коэффициентов (которые могут быть индуцированы, например, изменением диэлектрической проницаемости).

Итак, кроме привычных слагаемых (индуцированных и емкостных токов) в формуле (16) для полного тока на электрод присутствуют и другие слагаемые, которые можно записывать в разном виде. Природа дополнительных токов рассматривалась в [20, 32, 33]. В работе [32] приведен простой иллюстрирующий пример с неоднородно заполненным конденсатором, диэлектрическая проницаемость в котором (неоднородно же) изменяется таким образом, что емкость остается постоянной. Кроме того, в конденсаторе присутствует неподвижный заряд. В таком случае, при постоянных потенциалах на обкладках, индуцированные и емкостные токи отсутствуют, но общий ток все же не равен нулю и связан с перераспределением между электродами зарядов, обеспечивающих экранирование поля, создаваемого зарядами образца.

Исходя из этого наблюдения в работах [20, 33] предложено представление дополнительных токов в виде двух слагаемых, как в уравнении (16), т.е.

$$I_{\alpha} = I_{\alpha 1} + I_{\alpha 2} + I_{\alpha 3} + I_{\alpha 4}, \quad (33)$$

где $I_{\alpha 1}$ и $I_{\alpha 2}$ – индуцированные и емкостные токи (см. (18) и (32)), а

$$I_{\alpha 3} = -\iiint \left(\frac{\partial \vec{E}^{(\alpha)}}{\partial t} \cdot \vec{D}_0 \right) dV \quad (34)$$

и

$$I_{\alpha 4} = \iiint \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D}^{(\alpha)} \cdot \vec{E}) dV \quad (35)$$

– дополнительные токи другой природы, записанные в том же общем виде. Основанием для этого служат следующие обстоятельства. Во-первых, формулу (34) можно, не уменьшая общности, преобразовать к виду [20, 33]

$$I_{\alpha 3} = -\iiint \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial t} \rho_0 dV, \quad (36)$$

где $\varphi^{(\alpha)}$ – нормированный потенциал во вспомогательной задаче

$$\varphi^{(\alpha)} = \varphi^{(1\alpha)} / \Phi_0, \quad (37)$$

а плотность заряда ρ_0 определяется равенствами

$$\rho_0 = \rho - \text{div} \vec{P} = \text{div} \vec{D}_0. \quad (38)$$

То есть ρ_0 – это полная плотность свободного ρ и связанного с поляризацией ($-\text{div} \vec{P}$) зарядов. Изменения со временем нормированного вспомогательного потенциала $\varphi^{(\alpha)}$ могут быть связаны с неоднородными в пространстве изменениями диэлектрической проницаемости. При этом мо-

гут, конечно, изменяться и емкостные коэффициенты, но возможны варианты (см. [32]), когда нормированный потенциал в (36) зависит от времени, а емкость постоянна. То есть формулы (32) и (36) описывают разные, независимые, вообще говоря, эффекты, и токи из (36) аномальны в этом смысле. Если образцы в двух задачах (и диэлектрические проницаемости в них) одинаковы, формула (36) описывает, разумеется, токи из приведенного в [32] примера с конденсатором (см. [33]).

Кроме того, формула (35) для случая (23), когда тензоры диэлектрической проницаемости в обеих задачах одинаковы, имеет вид

$$I_{\alpha 4} = \iiint \frac{\partial}{\partial t} (E_i^{(\alpha)} \epsilon_{ij} E_j - E_i \epsilon_{ij} E_j^{(\alpha)}) dV, \quad (39)$$

а после перестановки местами индексов i и j (по которым производится суммирование) во втором слагаемом под интегралом она принимает вид

$$I_{\alpha 4} = \iiint \frac{\partial}{\partial t} \{E_i^{(\alpha)} E_j (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji})\} dV. \quad (40)$$

Отсюда видно, что природа четвертой компоненты тока связана с асимметрией тензора ϵ_{ij} . В термодинамически равновесном случае тензор симметричен, и в низкочастотных процессах его асимметрия мала [18]. На достаточно высоких частотах ω (когда процессы поляризации неравновесны) симметрия тензора $\epsilon_{ij}(\omega)$ определяется (см. [18]) обобщенным принципом симметрии кинетических коэффициентов (см., например, [18, 34]). Обычно тензор симметричен $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ (и тогда $I_{\alpha 4} = 0$), но в некоторых случаях (при наличии магнитного поля, например) симметрия может нарушаться.

Итак, в обычной ситуации, когда параметры образца не меняются со временем, а $I_{\alpha 4} = 0$, полные токи на электроды определяются только первыми двумя слагаемыми, т.е. емкостными токами (с постоянными емкостными коэффициентами) и индуцированными токами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема Шокли–Рамо [1, 2] и ее обобщения описывают только ту часть токов из внешней цепи на металлические электроды, которая индуцирована конвективными токами в образце (включая и случай, когда единственный точечный заряд двигается в образце или в вакууме). Теорему можно доказывать разными способами. При доказательстве применение таких функций, которые формально не связаны с основной задачей (или связаны лишь частично), в качестве вспомогательных функций расширяет область применимости теоремы и открывает новые возможности для развития законов Кирхгофа при описании современных электрических цепей. В общем слу-

чае, без уточнения вида связи между электрической индукцией и полем, полные токи на металлические электроды (см. формулы (29), (33)) состоят из четырех компонент разной природы (см. (18), (32), (34)–(36)), включая, конечно, индуцированные токи из ТШР (18) и токи емкостной природы (32). При этом поляризация (плотность дипольного момента) участвует в формулах (18), (36).

В обычной ситуации, когда параметры образца постоянны, а $I_{\alpha 4} = 0$, полные токи на электроды определяются, как и следовало ожидать, только первыми двумя слагаемыми, т.е. емкостными токами (с постоянными емкостными коэффициентами) и индуцированными токами.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shockley W. // J. Appl. Phys. 1938. V. 9. № 10. P. 635.
2. Ramo S. // Proc. IRE. 1939. V. 27. № 9. P. 584.
3. Beck A.H.W. Thermionic Valves: Their Theory and Design. Cambridge: Univ. Press, 1953.
4. Jen C.K. // Proc. IRE. 1941. V. 29. № 6. P. 345.
5. Гвоздовер С., Лопухин В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 1. С. 29.
6. Лопухин В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 1. С. 111.
7. Коваленко В.Ф. Введение в электронику сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1955.
8. Лопухин В.М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М.: Гостехиздат, 1953.
9. Pellegrini B. // Phys. Rev. B. 1986. V. 34. № 8. P. 5921.
10. Yoder P.D., Gärtner K., Fichtner W. // J. Appl. Phys. 1996. V. 79. № 4. P. 1951.
11. Cavalleri G., Fabri G., Gatti E., Svelto V. // Nucl. Instr. Meth. 1963. V. 21. P. 177.
12. Cavalleri G., Gatti E., Fabri G., Svelto V. // Nucl. Instr. Meth. 1971. V. 92. № 1. P. 137.
13. Visschere P. De. // Sol. State Electronics. 1990. V. 33. № 4. P. 455.
14. Kim H., Min H.S., Tang T.W., Park Y.J. // Sol. State Electronics. 1991. V. 34. № 11. P. 1251.
15. He Z. // Nucl. Instr. Meth. 2001. V. A463. № 1–2. P. 250.
16. Tavernier S. Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics. L.: Springer, 2010.
17. Eisenberg B., Nonner W. // J. Comput. Electron. 2007. V. 6. № 1–3. P. 363.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005.

19. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 926.
20. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 4. С. 411.
21. *Дмитриев С.Г.* // ФТП. 2009. Т. 43. № 6. С. 854.
22. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1229.
23. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 10. С. 1115.
24. *Kirchhoff G.* // Ann. Phys. 1845. В. 140. Н. 4. S. 497.
25. *Kirchhoff G.* // Ann. Phys. 1849. В. 154. Н. 12. S. 506.
26. *Ohm G.S.* // J. Chem. Phys. 1826. В. 46. Н. 2. S. 137.
27. *Thomson W.* // Phil. Mag. 1853. V. 5. № 34. P. 393.
28. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит, 2002.
29. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашиников С.Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
30. *Зи С.* Физика полупроводниковых приборов. М.: Мир, 1984.
31. *Nicollian E.R., Brews J.R.* MOS (Metal-Oxide-Semiconductor) Physics and Technology. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1982.
32. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 7. С. 725.
33. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 181.
34. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Физматлит, 2002.

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

УДК 621.315.592,519.688

**ДВУХСЕКЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В ПОЛОСКОВЫХ СТРУКТУРАХ БИПОЛЯРНЫХ
И ГЕТЕРОБИПОЛЯРНЫХ СВЧ ТРАНЗИСТОРОВ**© 2022 г. В. А. Сергеев^{a, b, *}, А. М. Ходаков^a^aУльяновский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Гончарова, 48/2, Ульяновск, 432011 Российская Федерация^bУльяновский государственный технический университет,
ул. Северный Венец, 32, Ульяновск, 432027 Российская Федерация

*E-mail: sva@ulstu.ru

Поступила в редакцию 25.03.2022 г.

После доработки 25.03.2022 г.

Принята к публикации 25.04.2022 г.

Получено приближенное аналитическое выражение для плотности эмиттерного тока под дорожкой эмиттерной металлизации в полосковых структурах биполярных и гетробиполярных СВЧ-транзисторов в изотермическом приближении с учетом падения напряжения на распределенных сопротивлениях активной базы и токоведущей эмиттерной металлизации. Показано, что при раздельном учете указанных факторов неоднородного токораспределения положение линии средней плотности тока не зависит от полного тока и делит структуру на две неодинаковые части с плотностью тока больше и меньше среднего значения. Установлено, что при совместном учете факторов неоднородного токораспределения линии среднего тока представляют собой эллипсы, которые проходят через характерные точки, а фокусы эллипсов находятся в середине края эмиттерной дорожки. Предложено для расчета функциональных характеристик транзисторов и оценки их предельных возможностей использовать представление транзистора в виде двух параллельно соединенных транзисторов, токи через которые в общем случае неодинаковы и определяются факторами неоднородного токораспределения.

DOI: 10.31857/S0033849422110122

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наряду с активной разработкой СВЧ-транзисторов на основе структур металл–диэлектрик–проводник (МДП) и High Electron Mobility Transistor (HEMT) в современной аппаратуре радиосвязи и телекоммуникаций широко используются мощные биполярные, в том числе гетеропереходные, СВЧ-транзисторы [1–5]. Приборы этого класса являются наименее надежным в составе современных радиоэлектронных систем различного назначения, поскольку работают в наиболее жестких тепловых и электрических режимах. Для этого класса приборов характерно проявление эффектов неоднородного и неустойчивого распределения плотности тока, мощности и температуры в транзисторных структурах, которые приводят к локальным перегревам и термомеханическим напряжениям структуры и, как следствие, к ускорению механизмов деградации и отказам приборов.

Неоднородное распределение плотности тока в структурах полупроводниковых приборов при-

водит к ограничению их функциональных возможностей и надежности. Наиболее опасно неоднородное токораспределение для приборных структур с внутренней положительной тепловой обратной связью, в частности для структур биполярных (БТ) и гетробиполярных СВЧ-транзисторов (ГБТ).

Одной из наиболее распространенных геометрий структур современных мощных БТ и ГБТ является полосковая или гребенчатая геометрия (рис. 1), в том числе и с разделением эмиттерных дорожек на несколько частей.

Основными регулярными причинами неоднородного токораспределения в БТ с гребенчатой структурой является падение напряжения на сопротивлении активной области базы [6, 7] и токоведущей металлизации [8, 9].

В известных работах, посвященных анализу токораспределения в биполярных и гетробиполярных транзисторных структурах, указанные причины рассматривались раздельно [10], либо вовсе не учитывались [11, 12]. Отдельные частные

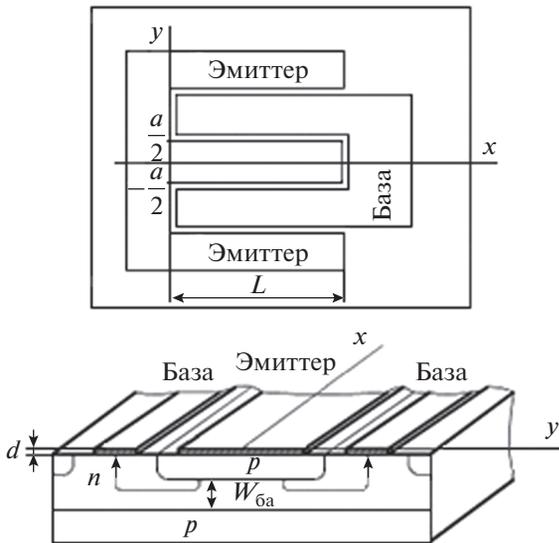


Рис. 1. Геометрия “элементарного” транзистора полупроводниковой структуры биполярного СВЧ-транзистора; $W_{ба}$ – толщина активной базы.

случаи действия указанных эффектов в гребенчатых структурах мощных БТ рассмотрены в наших работах [13–15]. В данной работе получены общие решения для распределения плотности тока под эмиттерной дорожкой металлизации в предположении, что падение напряжения на сопротивлении активной области базы и токоведущей металлизации не превышают температурного потенциала. Это условие обычно закладывается при проектировании транзисторных структур.

Кроме того, в данной работе указанные выше эффекты рассмотрены в изотермическом приближении, т.е. в предположении однородного распределения температуры по площади структуры. Такое приближение применимо с некоторой приемлемой погрешностью для структур с характерными размерами активной области (гребенки), не превышающими толщины кристалла, либо для импульсных режимов работы транзистора. Несмотря на указанные ограничения, это приближение может служить основой для последующего анализа токораспределения с учетом тепловых эффектов.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЭМИТТЕРНОГО ТОКА ПОД ДОРОЖКОЙ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТТЕСНЕНИЯ

Эффект оттеснения эмиттерного тока к краям эмиттера, в результате падения напряжения на активном сопротивлении активной базы в БТ является давно известным и хорошо изученным эффектом. Разработчики мощных БТ и ГБТ учитывают этот эффект при проектировании транзисторных структур, так чтобы падение напряжения на

сопротивлении активной базы не превышало теплового потенциала [1, 2]. Но даже в этом случае (как будет показано ниже) данный эффект приводит к существенной неоднородности плотности тока.

Особенностью ГБТ является сильное легирование активной базы, что позволяет существенно уменьшать ее толщину для улучшения частотных свойств транзисторов [2, 3]. Однако повышение степени легирования с одновременным уменьшением толщины активной базы не дает существенного уменьшения сопротивления активной базы ГБТ, и поэтому эффект оттеснения эмиттерного тока в структурах ГБТ необходимо учитывать.

При рассмотрении эффекта оттеснения в гребенчатых структурах БТ и ГБТ с тонкой и сильно легированной базой обычно пренебрегают влиянием эффектов модуляции проводимости базы и зависимостью коэффициента передачи тока от плотности тока, и тогда при заданном токе эмиттера $I_э$, втекающем в дорожку, изменение плотности эмиттерного тока вдоль оси y (поперек дорожки) с учетом падения напряжения только на сопротивлении активной базы описывается выражением [7, 8]:

$$J_{эб}(\bar{y}) = \bar{J}_э \frac{D}{\text{tg} D \cos^2(D\bar{y})}, \tag{1}$$

где $\bar{J}_э = I_э/La$ – средняя плотность тока, $\bar{y} = 2y/a$, L и a – длина и ширина эмиттерной дорожки соответственно, а постоянная интегрирования D находится из уравнения, которое запишем в терминах работы [13]:

$$D \text{tg} D = \Phi_{ба} \bar{I}_э, \tag{2}$$

где $\Phi_{ба} = R_{ба} I_{пред} (1 - \alpha) / 2\varphi_T$ – фактор неоднородности токораспределения; $R_{ба} = a / 4\sigma_{ба} W_{ба} L$ – расчетное сопротивление половины активной базы; a – ширина эмиттерной дорожки, равная ширине базы; $W_{ба}$ – толщина, а $\sigma_{ба}$ – усредненная проводимость активной базы; $\bar{I}_э = I_э / I_{пред}$, а $I_{пред}$ – предельный ток коллектора для данного типа транзистора; α – коэффициент передачи тока транзистора в схеме с общей базой; $\varphi_T = kT/q$ – температурный потенциал; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; q – заряд электрона.

В выражении для $R_{ба} = a / 4\sigma_{ба} W_{ба} L$ учтено, что в силу симметрии геометрии элементарного транзистора (см. рис. 1) ток базы $I_б = (1 - \alpha) I_э$ симметрично распределяется между правой и левой частями структуры.

Если падение напряжения на сопротивлении активной базы не превышает теплового потенциала [1, 7], то можно рассмотреть приближенное

решение уравнений (1), (2). При выполнении условия $R_{\text{ба}} I_6 < \varphi_T$, раскладывая в (1) и (2) $\text{tg} D$ и $\cos^2(D\bar{y})$ в ряд и сохраняя в разложении только члены до третьей степени по D включительно, получим

$$J_{\text{эб}}(\bar{y}) \approx \bar{J}_3 \left[1 + \Phi_{\text{ба}}(\bar{y}^2 - 1/3) \right]. \quad (3)$$

Координаты точек p - n -перехода, в которых плотность эмиттерного тока равна среднему значению, легко находятся из (3):

$$\hat{y} = \pm (1/2\sqrt{3})a \approx \pm 0.29a$$

и не зависят от полного тока. То есть при изменении полного эмиттерного тока он просто перераспределяется между двумя частями эмиттерной дорожки металлизации, разделенными линиями $\hat{y} = \pm (1/2\sqrt{3})a$ (рис. 2). Максимальная плотность тока

$$J_{\text{эб}}^{\text{max}}(\bar{y}) \approx \bar{J}_3 \left[1 + \frac{2}{3} \Phi_{\text{ба}} \right]$$

будет под краями эмиттерной дорожки при $y = \pm a/2$, а минимальная

$$J_{\text{эб}}^{\text{min}}(\bar{y}) \approx \bar{J}_3 \left[1 - \frac{1}{3} \Phi_{\text{ба}} \right]$$

– при $y = 0$, а их отношение

$$K_6 = J_{\text{эб}}^{\text{max}}(0) / J_{\text{эб}}^{\text{min}}(L) = \frac{3 + 2\Phi_{\text{ба}}}{3 - \Phi_{\text{ба}}} = 1 + \frac{3\Phi_{\text{ба}}}{3 - \Phi_{\text{ба}}}$$

не зависит от полного тока, втекающего в дорожку.

Площадь первой части дорожки S_{16} с плотностью тока, превышающей среднее значение, очевидно равно

$$S_{16} = aL/\sqrt{3} = S_0/\sqrt{3},$$

а площадь второй части, плотность тока которой меньше среднего значения, соответственно равна

$$S_{26} = aL(1 - 1/\sqrt{3}) = S_0(1 - 1/\sqrt{3}).$$

Полные токи, протекающие через каждую из частей, нетрудно получить интегрированием (3) по \bar{y} в пределах соответствующих частей токоведущей дорожки: $I_1^6 \Rightarrow \{\hat{y}; \pm a/2\}$ и $I_2^6 \Rightarrow \{0; \hat{y}\}$:

$$I_1^6 = 2 \int_0^{1/\sqrt{3}} J_3(\bar{y}) d\bar{y} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\Phi_{\text{ба}}}{9} \right); \quad (4a)$$

$$I_2^6 = 2 \int_{1/\sqrt{3}}^1 J_3(\bar{y}) d\bar{y} = \frac{I_3}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\Phi_{\text{ба}}}{9} \right). \quad (4b)$$

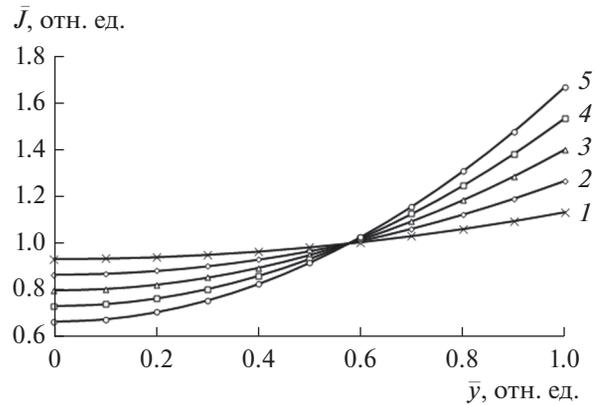


Рис. 2. Распределение плотности тока поперек эмиттерной дорожки в результате эффекта отснесения эмиттерного тока к краям эмиттера: $\Phi_{\text{ба}} = 0.2$ (1), 0.4 (2), 0.6 (3), 0.8 (4) и 1.0 (5).

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭМИТТЕРНОГО ТОКА С УЧЕТОМ ПАДЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ НА СОПРОТИВЛЕНИИ МЕТАЛЛИЗАЦИИ

При преобладающем действии эффекта падения напряжения на сопротивлении металлизации распределение плотности тока вдоль дорожки описывается выражением, аналогичным (1) [8, 9]:

$$J_{\text{эм}}(\bar{x}) = \bar{J}_3 \frac{C}{\text{tg} C \cos^2 [C(1 - \bar{x})]}, \quad (5)$$

где $\bar{x} = x/L$, а постоянную интегрирования C находим из уравнения [13]

$$C \text{tg} C = \Phi_{\text{эм}} \bar{J}_3, \quad (6)$$

где $\Phi_{\text{эм}} = R_{\text{эм}} I_{\text{пред}} / 2\varphi_T$ – фактор неоднородности токораспределения, обусловленный сопротивлением металлизации; $R_{\text{эм}} = \rho_{\text{мет}} L / ad$ – полное сопротивление, $\rho_{\text{мет}}$ – удельное сопротивление материала металлизации, а d – толщина эмиттерной дорожки металлизации.

При выполнении условия $\Phi_{\text{эм}} \leq 1$, раскладывая в (5) и (6) $\text{tg} C$ и $\cos^2 [C(1 - \bar{x})]$ в ряд и сохраняя в разложении только члены до третьей степени по C включительно, с погрешностью не более $(\Phi_{\text{эм}}/3)^2$ для распределения плотности тока под дорожкой получим

$$J_{\text{эм}}(\bar{x}) \approx \bar{J}_3 \left\{ 1 + \Phi_{\text{эм}} \left[(\bar{x} - 1)^2 - \frac{1}{3} \right] \right\}. \quad (7)$$

Плотность эмиттерного тока, очевидно, будет максимальна под основанием эмиттерной дорожки при $x = 0$ и равна

$$J_{\text{эм}}^{\text{max}}(\bar{x}) \approx \bar{J}_3 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \Phi_{\text{эм}} \right\},$$

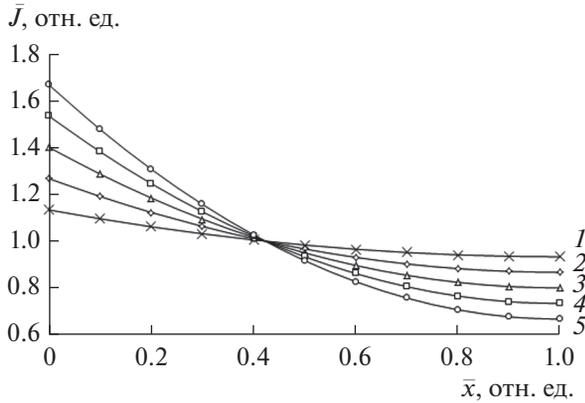


Рис. 3. Распределение плотности эмиттерного тока вдоль эмиттерной дорожки в результате падения напряжения на ее сопротивлении: $\Phi_{ба} = 0.2$ (1), 0.4 (2), 0.6 (3), 0.8 (4) и 1.0 (5).

и минимальна, соответственно, под концом дорожки при $x = L$:

$$J_{эм}^{min}(\bar{x}) \approx \bar{J}_э \left\{ 1 - \frac{1}{3} \Phi_{эм} \right\}.$$

Отношение максимальной плотности эмиттерного тока к минимальной в этом случае определяется выражением

$$K_M = J_{эм}^{max}(0) / J_{эм}^{min}(L) = \frac{3 + 2\Phi_{эм}}{3 - \Phi_{эм}} = 1 + \frac{3\Phi_{эм}}{3 - \Phi_{эм}}$$

и не зависит от полного тока, втекающего в дорожку.

Приравнивая выражение в квадратных скобках в (7) к 0, найдем координаты \hat{x} точек p - n -перехода, в которых плотность тока равна среднему значению: $\hat{x} = [1 - (1/\sqrt{3})]L = 0.42L$. Координаты \hat{x} не зависят от полного тока, втекающего в эмиттерную дорожку, и полный ток распределяется между двумя частями “элементарного” транзистора, разделенными линией $\hat{x} = 0.42L$ (рис. 3).

Площадь S_{1M} части дорожки с плотностью эмиттерного тока, превышающей среднее значение, в этом случае будет равно

$$S_{1M} = aL(1 - 1/\sqrt{3}) = S_0(1 - 1/\sqrt{3}),$$

а площадь остальной части дорожки, где плотность эмиттерного тока меньше среднего значения, равна

$$S_{2M} = S_0/\sqrt{3}.$$

Полные токи, протекающие через каждую из частей, нетрудно получить интегрированием (7)

по соответствующим частям токоведущей дорожки: $I_1^M \Rightarrow \{0; \hat{x}\}$ и $I_2^M \Rightarrow \{\hat{x}; L\}$:

$$I_1^M = \frac{I_э}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\Phi_{эм}}{9} \right); \quad I_2^M = \frac{I_э}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\Phi_{эм}}{9} \right). \quad (8)$$

Формулы (4) и (8) одинаковы по виду, поскольку физический механизм неоднородного токораспределения одинаков.

4. СОВМЕСТНЫЙ УЧЕТ ФАКТОРОВ НЕОДНОРОДНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЭМИТТЕРНОГО ТОКА ПОД ДОРОЖКОЙ

В гребенчатых структурах БТ с длинными и широкими дорожками необходимо учитывать обе регулярные причины неоднородного токораспределения. Для этого по аналогии с работой [16] объединим решения (3) и (7) и, пренебрегая членами второго порядка малости, запишем выражение для плотности эмиттерного тока $J_{эмб}(x, y)$ при совместном учете падения напряжения на сопротивлении металлизации и сопротивлении активной базы в виде

$$J_{эмб}(x, y) \approx \bar{J}_э \left\{ 1 + \Phi_{эм} \left[(\bar{x} - 1)^2 - (1/3) \right] + \Phi_{ба} \left(\bar{y}^2 - (1/3) \right) \right\}. \quad (9)$$

В этом случае плотность эмиттерного тока будет максимальна под краями эмиттерной дорожки у ее основания, т.е. при $x = 0$ и $y = \pm a/2$:

$$J_{эмб}^{max}(0, \pm a/2) \approx \bar{J}_э \left\{ 1 + \frac{2}{3} (\Phi_{эм} + \Phi_{ба}) \right\}.$$

Соответственно, минимальное значение будет наблюдаться под центром эмиттерной дорожки на ее конце:

$$J_{эмб}^{min}(L, 0) \approx \bar{J}_э \left\{ 1 - \frac{1}{3} (\Phi_{эм} + \Phi_{ба}) \right\}.$$

Для нахождения координат точек эмиттерного перехода, в которых плотность тока равна среднему значению, приравняем выражение в фигурных скобках в (9) единице. Подставляя в (9) выражения для $\Phi_{эм}$ и $\Phi_{ба}$, получим уравнение эллипса с центром в точке $\{1, 0\}$:

$$3\beta_{мб}(\bar{x} - 1)^2 + 3\bar{y}^2 = 1 + \beta_{мб}, \quad (10)$$

или в канонической форме

$$(\bar{x} - 1)^2 / a_{мб}^2 + \bar{y}^2 / b_{мб}^2 = 1, \quad (11)$$

где $a_{мб}^2 = (1 + \beta_{мб}) / 3\beta_{мб}$; $b_{мб}^2 = (1 + \beta_{мб}) / 3$; $\beta_{мб} = 2R_{эм} / (1 - \alpha)R_{ба}$.

Кривые, определяемые уравнением (10), делят эмиттерную дорожку металлизации транзистора

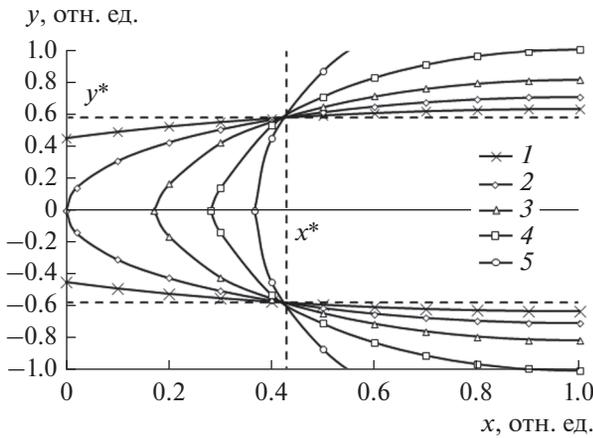


Рис. 4. Линии средней плотности эмиттерного тока, разделяющие эмиттерную дорожку на две части в результате совместного действия факторов неоднородного токораспределения: $\beta_{мб} = 0.2$ (1), 0.5 (2), 1.0 (3), 2.0 (4) и 5.0 (5).

на две части (рис. 4), полные токи через которые можно найти интегрированием (9).

Вид кривой и характер неоднородности токораспределения определяется значением параметра $\beta_{мб} = 2R_{эм}/(1-\alpha)R_{ба}$. При $2R_{эм}/(1-\alpha)R_{ба} \rightarrow 0$ характер токораспределения определяется только эффектом оттеснения с линией среднего тока $\bar{y}^* = 1/\sqrt{3}$. При $2R_{эм}/(1-\alpha)R_{ба} \rightarrow \infty$ характер неоднородности токораспределения определяется падением напряжения на сопротивлении дорожки металлизации с линией среднего тока $\bar{x}^* = 1 - 1/\sqrt{3}$. При промежуточных значениях $2R_{эм}/(1-\alpha)R_{ба}$ все кривые раздела проходят через инвариантную точку с координатами $\bar{y}^* = 1/\sqrt{3}$; $\bar{x}^* = 1 - 1/\sqrt{3}$ (см. рис. 4).

Получить общее выражение для площади частей дорожки с плотностью тока, превышающей среднее значение, при произвольном значении параметра $\beta_{мб}$ не представляется возможным.

В случае, когда превалирует падение напряжения на сопротивлении дорожки металлизации при $\beta_{мб} > 2$, интегрирование уравнения (10) дает следующее выражение для $S_{1м}$:

$$S_{1м} = S_0 \times \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\beta_{мб}}} \left(\sqrt{\frac{\beta_{мб} - 2}{3}} + \frac{1 + \beta_{мб}}{3} \arcsin \sqrt{\frac{3}{1 + \beta_{мб}}} \right) \right] \quad (12)$$

В пределе при $\beta_{мб} \rightarrow \infty$ выражение (12) сводится к ранее полученной формуле $S_{1м} = S_0 (1 - 1/\sqrt{3})$.

В структурах с короткими и широкими эмиттерными дорожками преобладающим является эффект оттеснения эмиттерного тока к краям эмитте-

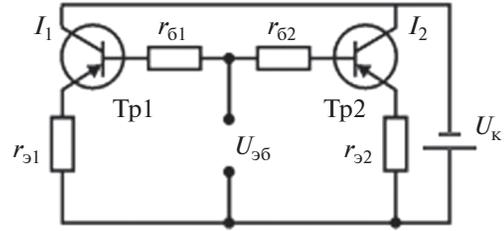


Рис. 5. Двухсекционная модель транзистора; U_k – коллекторное напряжение.

ра, что проявляется при $\beta_{мб} < 0.5$, для $S_{1б}$ получим следующее выражение:

$$S_{1б} = S_0 \times \left[\frac{\sqrt{\beta_{мб}}}{2} \left(\sqrt{\frac{1 - 2\beta_{мб}}{3\beta_{мб}}} + \frac{1 + \beta_{мб}}{3\beta_{мб}} \arcsin \sqrt{\frac{3\beta_{мб}}{1 + \beta_{мб}}} \right) \right], \quad (13)$$

которое в пределе при $\beta_{мб} \rightarrow 0$ стремится к формуле, полученной выше, $-S_{1б} = S_0/\sqrt{3}$.

Принципиально важным является то, что площади, определяемые выражениями (12) и (13), не зависят от полного тока, втекающего в дорожку.

5. АНАЛИЗ ДВУХСЕКЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Факторы $\Phi_{эм}$ и $\Phi_{ба}$ неоднородного токораспределения в структуре “элементарного” транзистора БТ и ГБТ в предложенной модели определяются сопротивлениями активной базы и эмиттерной дорожки металлизации, а также значением предельного тока для данного типа транзисторов и не зависят от рабочего тока транзистора. Этот результат будет справедливым и для структур, содержащих N “элементарных” транзисторов. Таким образом, при анализе работы БТ и ГБТ в реальных схемах, для учета неоднородного распределения плотности тока в приборной структуре транзистор можно представить в виде двух параллельно соединенных транзисторов Tr1 и Tr2 с площадями активной области S_1 и S_2 ($S_1 + S_2 = S_0$), независимыми от полного рабочего тока транзистора (рис. 5). Значения сопротивлений пассивных областей базы r_{bi} и эмиттера r_{ei} транзисторов Tr1 и Tr2 в первом приближении можно считать обратно пропорциональными площадям: $r_{b1}/r_{b2} \approx r_{e1}/r_{e2} \approx S_2/S_1$.

Предельные возможности транзистора по току определяются максимальной плотностью тока в приборной структуре. Это значение плотности тока будет определять также и темп деградации скорости электродиффузии и электромиграции в элементах структуры при испытаниях и эксплуатации.

В результате положительной тепловой обратной связи неоднородность распределения тока в

транзисторной структуре будет возрастать. Анализ этих процессов представляет отдельную нетривиальную задачу, поскольку требует учета не только экспоненциальной зависимости плотности эмиттерного тока от температуры, но и температурных зависимостей параметров модели.

Отметим, что в выражения для факторов $\Phi_{эм}$ и $\Phi_{ба}$ неоднородного токораспределения входит температурный потенциал, что определяет их явную обратно пропорциональную зависимость от температуры. Диапазон рабочих температур электронных компонентов для специальных применений широкий: от -60 до 125°C . При этом значения факторов неоднородного токораспределения при -60°C практически в два раза больше, чем при 125°C , соответственно, будет возрастать и максимальная плотность тока в структуре приборов.

Все указанные выше эффекты и особенности необходимо учитывать при оценке предельных режимов и надежности БТ и ГБТ при их работе в реальных условиях эксплуатации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ токораспределения в гребенчатых структурах БТ и ГБТ в изотермическом приближении с учетом падения напряжения на распределенных сопротивлениях активной базы и дорожках токоведущей эмиттерной металлизации показал, что при раздельном учете указанных факторов положение линии средней плотности тока не зависит от полного тока. При совместном учете факторов неоднородного токораспределения линии среднего тока, разделяющего элементарный эмиттер на две части, представляют собой эллипсы, проходящие через характерные точки, фокусы которых расположены в середине края эмиттерной дорожки. Для расчета функциональных характеристик транзисторов и оценки их предельных возможностей предложено использовать двухсекционную модель токораспределения, согласно которой транзистор может быть представлен в виде двух параллельно соединенных частей плотность тока которых соответственно больше и меньше среднего значения. Полученные выражения позволяют более адекватно оценивать функциональные характеристики и предельные возможности БТ и ГБТ в реальных условиях эксплуатации.

Авторы подтверждают отсутствие конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-01134).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колосницын Б.С.* Мощные СВЧ приборы. Минск: БГУИР, 2008.
2. *Liu W.* Handbook of III-V Hetero-Junction Bipolar Transistor. N. Y.: John Willy & Sons, 1998.
3. *Тимошенко В.П.* // Изв. вузов. Сер. Электроника. 2006. № 5. С. 19.
4. *Lachner R.* // 13th Topical Meeting on Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems. IEEE, 2013. P. 105.
5. *Козловский Э.Ю., Захаров С.И., Семенова Л.М., Тейдер А.А.* // Труды 31-й Междунар. конф. "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии". 2021. Вып. 3. С. 27.
6. *Hauser I.R.* // IEEE Trans. 1964. V. ED-11. № 5. С. 237.
7. Кремниевые планарные транзисторы. М.: Сов. радио, 1973.
8. *Caves K.J.S., Barnes J.A.* // IEEE Trans. 1965. V. ED-12. № 2. P. 84.
9. *Kisaki H.* // IEEE Trans. 1973. V. ED-20. № 4. P. 458.
10. *Chuang Ming-Yeh, Law M.E., O K.K.* // IEEE Trans. 1998. V. ED-45. № 9. P. 1993.
11. *Zhang C., Zhang J., Wang H. et al.* // 2015 IEEE Pulsed Power Conf. (PPC). Austin. 31 May–04 June 2015. 2015. P. 1.
12. *Lin C.-H., Su Y.-K., Juang Y.-Z. et al.* // IEEE Microwave and Wireless Components Lett. 2007. V. 17. № 1. P. 49.
13. *Сергеев В.А.* Контроль качества мощных биполярных транзисторов по теплоэлектрическим характеристикам. Ульяновск: УлГТУ, 2000.
14. *Сергеев В.А.* Синтез методов и средства неразрушающего контроля качества полупроводниковых изделий на основе моделей неизотермического токораспределения в приборных структурах. Дис. ... докт. техн. наук. Ульяновск: УлГТУ, 2005. 328 с.
15. *Сергеев В.А., Ходаков А.М.* Нелинейные тепловые модели полупроводниковых приборов. Ульяновск: УлГТУ, 2012.
16. *Бубенников А.Н.* Моделирование интегральных микротехнологий, приборов и схем. М.: Высш. школа, 1989.

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

УДК 621.37

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАТОРНОГО ФИЛЬТРА
НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ.
СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ**© 2022 г. А. С. Койгеров^а *, О. Л. Балышева^б^аСанкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ” им. В.И. Ульянова (Ленина), ул. проф. Попова, 5, Санкт-Петербург, 197376 Российская Федерация^бСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Б. Морская, 67, Санкт-Петербург, 190000 Российская Федерация

*E-mail: a.koigerov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.

После доработки 21.03.2022 г.

Принята к публикации 25.04.2022 г.

Представлено сравнение моделирования на основе двух подходов – феноменологической модели связанных мод и численного анализа методом конечных элементов на примере расчета характеристик резонаторного фильтра на вытекающих поверхностных акустических волнах на пьезоэлектрической подложке ниобата лития среза $64^\circ Y-X$. Необходимые для модели связанных мод параметры получены на основе численного анализа бесконечных тестовых структур в пакете COMSOL. Рассчитан и проанализирован коэффициент передачи фильтра, сравнение с экспериментальными данными показало хорошее совпадение. Предложены практические рекомендации по моделированию резонаторных фильтров с различной топологической структурой, рассмотрена возможность учета различных эффектов второго порядка при моделировании.

DOI: 10.31857/S0033849422110055

ВВЕДЕНИЕ

Постоянно растущие требования к характеристикам проектируемых фильтров на поверхностных акустических волнах (ПАВ) можно удовлетворить только применением соответствующих точных и эффективных средств моделирования. К настоящему времени для моделирования ПАВ устройств предложены различные подходы и модели [1–3], однако для разработчика конкретного фильтра по-прежнему актуальной является задача выбора наиболее подходящих средств моделирования по таким критериям, как перечень учитываемых в модели вторичных эффектов, необходимые вычислительные и временные ресурсы, ограничения в применении, возможность получения 2D- и 3D-представления, точность получаемых результатов при сравнении с экспериментальными и т.д. Анализ публикаций последних лет [4, 5] демонстрирует возросшую популярность численного моделирования, в частности, расчетов в пакете COMSOL.

Цель данной работы – сравнить два подхода к моделированию ПАВ устройств: численное моделирование методом конечных элементов (МКЭ) и подход на основе модели связанных мод (МСМ) с применением матричного описания, а также

предложить практические рекомендации по моделированию фильтров с различными топологическими структурами.

**1. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
НА ОСНОВЕ МКЭ И МСМ
И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ДВУХ ПОДХОДОВ**

На рис. 1а приведена топология резонаторного фильтра на продольных резонансных модах (ПРМ). В работе рассматривается традиционный подход на основе МСМ и его формализация с применением P -матриц, подробно описанный в работе [1]. МКЭ представлен для упрощенной модели, в которой предполагаем, что полученное решение на малом участке апертуры распространяется на весь преобразователь с точностью до множителя апертуры. На рис. 1б дан пример отображения построенной сетки для модели на основе МКЭ. На рис. 2 представлены рассчитанные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтра на подложке ниобата лития среза $64^\circ Y-X$, на рис. 3 представлено сравнение коэффициента передачи фильтра по результатам моделирования и эксперимента.

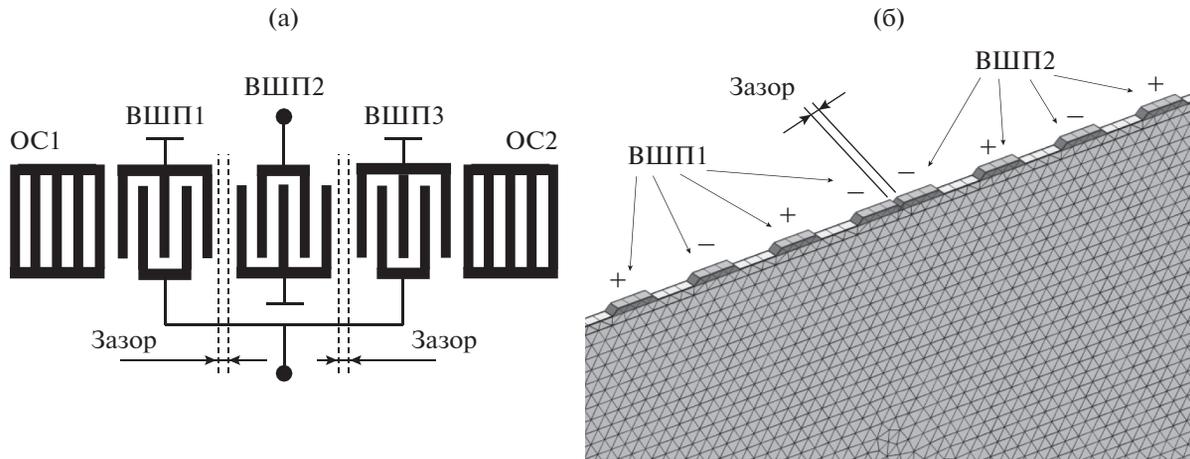


Рис. 1. Топологическая структура фильтра на ПАВ (а) и пример отображения построенной сетки для модели МКЭ для участка геометрии (б); ОС – отражательная структура.

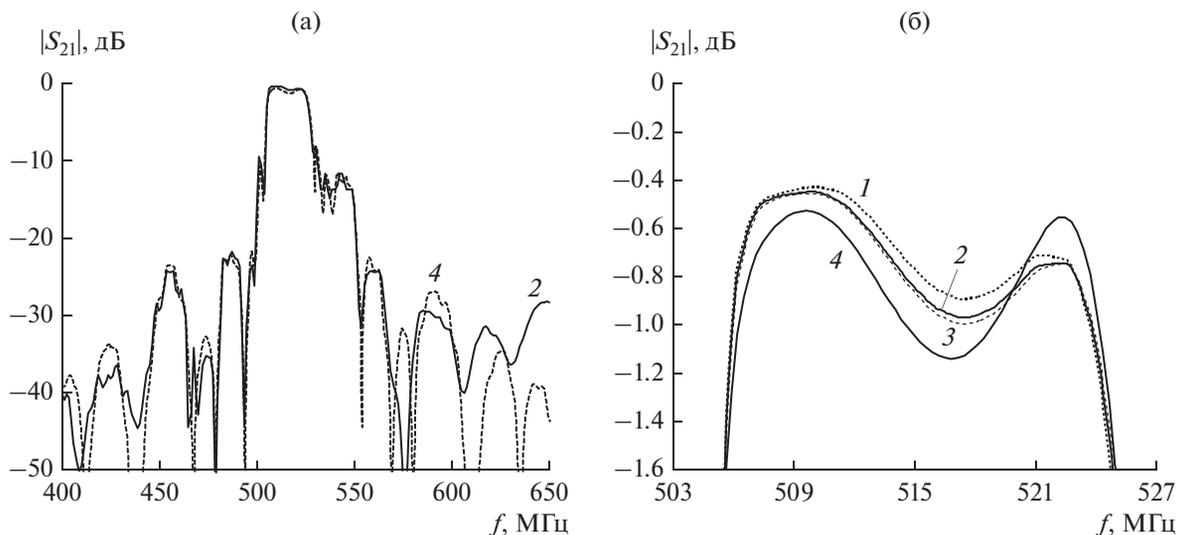


Рис. 2. Расчетный коэффициент передачи фильтра в диапазоне частот (а) и его подробный вид в диапазоне частот полосы пропускания (б), полученный МКЭ-1 (1), МКЭ-2 (2), МКЭ-3 (3) и МСМ (4).

При моделировании с помощью МКЭ не были учтены следующие эффекты: резистивные потери в электродах встречно-штыревого преобразователя (ВШП), дифракция акустической волны, потери за счет вязкостных свойств материала. Это сделано по следующим соображениям. Во-первых, полноценный учет дифракции и резистивных потерь возможен, но тогда необходимо прорисовать полную 3D-модель, что потребует задания большого числа элементов сетки, числа степеней свободы и, как следствие, больших вычислительных затрат и расчетного времени. Во-вторых, учет потерь на распространение связан с необходимостью введения в модель соответствующих коэффициентов, ошибочные значения которых приведут к дополнительным ошибкам в

расчетах. Поэтому выполнено сравнение двух подходов без учета данного вида потерь. В МСМ используются параметры, полученные численным методом (МКЭ) с помощью пакета COMSOL [6]. Сравнивая характеристики коэффициента передачи (см. рис. 2а), необходимо отметить наличие незначительного расхождения в области верхних частот, что, по-видимому, связано с большей величиной утечки акустической энергии. Можно отметить небольшой наклон зависимости АЧХ в полосе пропускания (см. рис. 2б), наблюдаемый при расчетах как МКЭ, так и МСМ. В расчетах с помощью МКЭ не стояла задача оптимизации по времени расчета, интересно было сравнение результатов расчета при одинаковых условиях, но разной плотности сетки, с це-

лю анализа сходимости расчета. Размер ячейки сетки, указанный в табл. 1, соответствует случаю разбиения на конечные элементы по глубине подложки. Расчетная сетка из конечных элементов в случае грубого разбиения ($\lambda/6$) в области под электродами все равно будет более плотной, в отличие от сетки в глубине подложки. Рисунок 1б отображает случай разбиения – 12 элементов на длину волны. Сравнительные данные расчета сведены в табл. 1. Как видно из рис. 2б, при расчетах с разными сетками абсолютное отклонение характеристик в полосе пропускания не превышает 0.1 дБ, причем при изменении размеров конечных элементов частоты основных резонансов не изменяются и дополнительные резонансы не возникают. Из сравнительного анализа видно, что выбранного размера – шесть элементов на длину волны – достаточно для предварительной оценки характеристики, а сходимость результата наблюдается уже при сетке в 12 элементов на длину волны. Требуемое время расчета для МКЭ многократно выше, чем для МСМ. Наибольшее расхождение на АЧХ наблюдается в области высоких частот, где преобладают “паразитные” объемные акустические волны (ОАВ), учет которых хотя и возможен в МСМ, но все же является приближенным.

Сопоставление результатов расчета коэффициента передачи, полученного на основе МСМ, с экспериментальными данными для фильтра на ПРМ представлено на рис. 3. Отличия характеристик в полосе пропускания не превышают 0.2 дБ, в полосе заграждения 5 дБ.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ВЫВОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Оба рассмотренных подхода – и аналитический с применением МСМ, и численный анализ МКЭ в пакете COMSOL, являются современными и широко используются при проектировании. Первый подход позволяет получить результаты

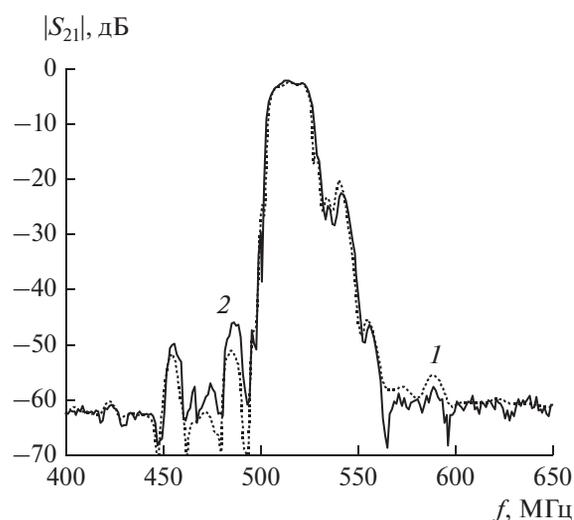


Рис. 3. Коэффициент передачи двухкаскадного фильтра: 1 – расчет МСМ, 2 – эксперимент.

гораздо быстрее и его применение целесообразно для предварительной оценки характеристик на этапе синтеза и корректировки топологии. Особенностью моделирования при данном подходе является необходимость предварительного нахождения МСМ-параметров. Авторами использованы МСМ-параметры, найденные численно по предложенному ранее [6] алгоритму анализа бесконечных тестовых структур. Численный подход, предполагающий прорисовку геометрии всего устройства в целом, обеспечивая большую точность расчетов, требует больших временных и вычислительных ресурсов. Предполагается, что данный комбинированный подход позволит объединить преимущества быстрой аналитической модели с точностью, обеспечиваемой при численном анализе.

Сравнение результатов моделирования МКЭ выполнено для трех размеров сетки, что позволя-

Таблица 1. Сравнение МКЭ и МСМ на примере результатов расчета фильтра на ПРМ

| Параметр | МКЭ-1 | МКЭ-2 | МКЭ-3 | МСМ |
|--|------------|-------------|---------|---------|
| Дискретизация сетки, длин волн | 1/6 | 1/12 | 1/16 | – |
| Число элементов (областей) сетки | 65016 | 114392 | 297845 | – |
| Требуемая оперативная память, Гб | 16 | 23 | 66 | – |
| Число степеней свободы (DOF) | 1286724 | 2832225 | 5838471 | – |
| Число частотных точек | 201 | 201 | 201 | 201 |
| Время расчета | 4 ч 50 мин | 11 ч 20 мин | ~35 ч | 2 с |
| Полоса пропускания по уровню –3 дБ, МГц | 22.5 | 22.5 | 22.5 | 22.5 |
| Вносимые потери, дБ | –0.429 | –0.454 | –0.448 | –0.52 |
| Неравномерность в полосе пропускания, дБ | 0.47 | 0.53 | 0.55 | 0.6 |
| Центральная частота, МГц | 515.625 | 515.625 | 515.625 | 515.625 |

Таблица 2. Применимость двух подходов к моделированию резонаторов и различных типов резонаторных фильтров

| Моделируемая топологическая структура | МКЭ | МСМ |
|---|----------------|----------------|
| Двухмодовый фильтр на ПРМ на основе трех ВШП (классический DMS-фильтр) | + | + |
| Двухмодовый фильтр на ПРМ (с изменением шага электродных структур на краях ВШП) | + | + |
| Фильтр на ПРМ на основе двух ВШП | + | + |
| Двухпортовый резонатор | + | + |
| Однопортовый резонатор | + | + |
| Лестничный фильтр на основе резонаторов на ПАВ | + ¹ | + |
| Комбинированный фильтр (каскадное включение звеньев фильтра на ПРМ и звена на основе лестничного фильтра) | + ¹ | + |
| Фильтр на поперечно связанных модах | – | + ² |

¹ Каскадирование отдельных звеньев фильтра осуществляется во внешней программе, а расчет каждого звена возможен с помощью данного подхода МКЭ.

² Необходима некоторая модификация подхода МСМ для фильтров на поперечно связанных модах, см. [9].

ет судить о сходимости алгоритма. Учитывая резкое увеличение числа степеней свободы и времени расчета, авторы ограничились уменьшением размеров сетки до $\lambda/16$.

В настоящее время для реализации предельных селективных параметров широко использу-

ются сложные конструкции резонаторных фильтров (на ПРМ с изменением шага электродов на краях преобразователя, лестничные, гибридные) [1, 7]. В табл. 2 отражена возможность применения рассматриваемых подходов для расчета резонаторов и различных типов современных резонаторных ПАВ фильтров с малыми потерями. С целью оценки учитываемых в моделях факторов в табл. 3 приведены механизмы потерь и эффектов “второго” порядка, которые важны при расчете устройств на ПАВ, особенно для фильтров с малыми потерями. Важно отметить, что большинство вторичных эффектов учитывается с помощью МКЭ в “автоматическом” режиме, в то время как МСМ требует отдельной настройки или модификации. Предложенный подход на основе МКЭ, реализованный для “упрощенной” модели на участке геометрии с небольшим значением апертуры и периодическими условиями по апертуре, описывает и автоматически учитывает практически все акустические эффекты, не связанные с 3D-геометрией и величиной апертуры преобразователя. Если важны такие эффекты, как дифракция и волноводный эффект, необходимо переходить в 3D, что требует значительно больших временных затрат и повышает требования к аппаратному и программному обеспечению вычислений. Учет всех паразитных LC-элементов требует прорисовки геометрии в 3D, поэтому целесообразнее их вводить через эквивалентные элементы во внешних программах.

Таблица 3. Учет вторичных эффектов в рамках двух подходов

| Эффекты “второго” порядка | Рассматриваемый в работе МКЭ | МСМ |
|--|------------------------------|-----|
| Потери на распространение (за счет вязкостных свойств материала и воздушной нагрузки) | + ¹ | + |
| Направленность преобразователя | + | + |
| Паразитные отражения ПАВ внутри преобразователя, решетки | + | + |
| Масс-электрические отражения от отдельного электрода | + | + |
| Сигнал тройного прохождения (и другие сигналы многократного отражения) | + | + |
| Дифракционные потери | – | + |
| Резистивные потери в электродах | + ¹ | + |
| Возбуждение паразитных ОАВ, распространяющихся вглубь подложки | + | – |
| Генерация гармоник ПАВ | + | + |
| Потери на рассогласование | + | + |
| Наличие паразитных емкостей и индуктивностей контактных площадок и проводников, взаимной индуктивности | – | + |
| Неоднородность распределения заряда по ширине электродов преобразователя | + | + |
| Волноводный эффект | – | + |

¹ МКЭ: требуется ввод дополнительных констант при настройке модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнительный анализ результатов, полученных с помощью аналитического подхода на основе МСМ и численного на основе МКЭ, показал, что эффективность традиционного МСМ чрезвычайно высока. Сравнение двух подходов на качественном и количественном уровне показало сопоставимость результатов расчета, на количественном уровне отклонение не превышает 0.3 дБ в полосе пропускания и 5 дБ в полосе заграждения. Можно говорить об адекватности обоих подходов, в основе которых лежат принципиально разные положения. Используя МСМ при корректной физической интерпретации параметров модели удается приблизиться к точности МКЭ в полосе пропускания фильтра. В полосе заграждения требуется более детальный и строгий анализ ОАВ.

Таким образом, у разработчиков существует возможность отдавать предпочтение тому или иному способу моделирования в зависимости от конструктивных и топологических особенностей конкретных ПАВ-устройств, стадии разработки и доступных ресурсов. В целом рассматриваемые в работе подходы на основе МКЭ и МСМ подходят для расчета большого класса резонаторных фильтров.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы выражают благодарность В.Р. Реуту (АЭК Дизайн) за ценные практические замечания и предоставление экспериментальных данных по фильтрам на ПАВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристархов Г.М., Гуляев Ю.В., Дмитриев В.Ф. и др.* Фильтрация и спектральный анализ радиосигналов. Алгоритмы. Структуры. Устройства / Под ред. Ю.В. Гуляева. М.: Радиотехника, 2020.
2. *Hashimoto K.* Surface Acoustic Wave Devices in Telecommunications, Modelling and Simulation. Berlin: Springer, 2000.
3. *Зеленка И.* Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: материалы, технология, конструкция, применения. М.: Мир, 1990.
4. *Zhang Q., Chen Z., Chen Y. et al.* // Micromachines. 2021. V. 12. P. 141. <https://doi.org/10.3390/mi12020141>
5. *Shen J., Fu S., Su R. et al.* // Electronics. 2021. V. 10. P. 23. <https://doi.org/10.3390/electronics10010023>
6. *Койгеров А.С., Балышева О.Л.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 12. С. 1224.
7. *Макаров В.М., Иванов П.Г., Данилов А.Л., Зая В.Г.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 377.
8. *Дмитриев В.Ф.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. № 2. С. 99.

**НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ
СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ**

УДК 537.874.2,621.793

**ПРОЗРАЧНЫЕ РАДИОЭКРАНИРУЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ
НА ОСНОВЕ МНОГОСЛОЙНЫХ И СЕТЧАТЫХ СТРУКТУР¹****© 2022 г. М. О. Makeev^{a, *}, А. С. Осипков^a, А. А. Филяев^a, К. П. Синягаева^{a, b},
Е. И. Гарсия^a, Д. С. Рыженко^a, Г. Ю. Юрков^{a, c}**^a*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., 5, стр.1, Москва, 105005 Российская Федерация*^b*Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198 Российская Федерация*^c*Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова РАН,
ул. Косыгина, 4, Москва, 119991 Российская Федерация***E-mail: m.makeev@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 21.04.2021 г.

После доработки 10.02.2022 г.

Принята к публикации 25.05.2022 г.

Рассмотрены подходы к созданию материалов, обеспечивающих одновременно высокие показатели прозрачности в видимом диапазоне спектра и радиозащиты в широком диапазоне частот. Проведен анализ и сравнение основных конструкций данных материалов (многослойные покрытия и сетчатые структуры), рассмотрены некоторые технологические аспекты их получения. Продемонстрировано, что оптимизация толщин и химического состава многослойных покрытий, а также геометрических параметров сетчатых структур может существенно улучшить их свойства. Предложены перспективные варианты конструкций, позволяющие получить коэффициент светопропускания от 90% до 98% в сочетании с коэффициентом экранирования радиоизлучения от 50 до 65 дБ.

DOI: 10.31857/S0033849422110092**ВВЕДЕНИЕ**

Развитие информационных технологий приводит к интенсивному использованию различных электронных устройств, что актуализирует проблему электромагнитной совместимости приборов и оборудования. Работа многих электронных систем и микроэлектромеханических приборов требует их изоляции от воздействия посторонних электромагнитных волн и шумов, или же наоборот – возникает необходимость защиты от собственного излучения приборов, которое сегодня становится серьезной проблемой из-за неблагоприятного воздействия на здоровье человека [1–3]. Все больше актуализируется проблема защиты средств информатизации от утечек данных по различным техническим каналам.

В связи с этим возникает высокая потребность в материалах, не только обладающих эффективными экранирующими свойствами по отношению к электромагнитному излучению, но и характеризующихся высокими эксплуатационными харак-

теристиками, такими как гибкость, прозрачность в видимом или ИК-диапазонах, плотность, воздухопроницаемость [4, 5] и т.п. Это делает невозможным использование в электронных устройствах традиционных решений, таких как, например, металлические корпуса [6, 7], и требует разработки новых подходов и материалов для обеспечения необходимых характеристик по электромагнитному экранированию.

Применяемые в промышленности решения на сегодняшний день позволяют обеспечить либо высокую прозрачность (более 90%) при низких значениях экранирования (до 20 дБ) [8–10], либо высокое экранирование при существенном снижении светопропускания [11–15]. В этой связи возникает необходимость поиска таких конструкций и технологий их изготовления, которые позволяют достичь высоких показателей прозрачности и экранирования одновременно.

Цель данной работы – создать электропроводящие материалы, прозрачные в видимом диапазоне спектра, которые помимо задачи экранирования электромагнитного излучения могут найти широкое применение в качестве прозрачных

¹ Статья доложена на четвертой Международной конференции “Информационные технологии и технологии коммуникаций. Современные достижения”. 5–8 октября 2020 г. Астрахань, Россия.

электродов в портативных электронных устройствах [16–18].

Проведен анализ двух основных подходов получения подобных материалов: изготовление сплошных многослойных покрытий и формирование на поверхности проводящих сетчатых структур; приведены результаты теоретического расчета подобных структур и экспериментальных исследований, предложены перспективные варианты конструкций, рассмотрены достоинства и недостатки указанных подходов.

1. МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для сравнения указанных выше подходов по получению прозрачных радиоэкранирующих покрытий были разработаны математические модели расчета коэффициентов экранирования (SE) и светопропускания (T) сплошных многослойных покрытий и сетчатых структур. Проверка моделей выполнена путем сравнения результатов аналитического моделирования с экспериментальными данными.

1.1. Моделирование сплошных многослойных покрытий

В случае рассмотрения одномерной задачи расчета электромагнитного экранирования дальнего поля коэффициент экранирования слоя можно определить по его поверхностному сопротивлению R_{\square} [19]:

$$SE = 20 \lg \left(1 + \frac{Z_0}{2R_{\square}} \right), \quad (1)$$

где Z_0 – волновое сопротивление вакуума.

Спектральный коэффициент пропускания многослойного покрытия рассчитывали по спектральным коэффициентам пропускания и отражения его отдельных слоев. Для нахождения спектрального коэффициента пропускания структуры в оптическом диапазоне длин волн, состоящей из двух слоев, было использовано следующее выражение [20]:

$$\tau(\lambda) = \frac{\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda)}{1 - \rho_1'(\lambda)\rho_2(\lambda)}, \quad (2)$$

где $\tau_1(\lambda)$, $\tau_2(\lambda)$ – спектральный коэффициент пропускания первого (наружного) и второго слоя соответственно; $\rho_1'(\lambda)$ – спектральный коэффициент отражения первого (наружного) слоя со стороны, противоположной падению излучения; $\rho_2(\lambda)$ – спектральный коэффициент отражения второго слоя со стороны падения излучения.

Для структуры, состоящей из трех слоев, данное выражение можно записать в следующем виде [20]:

$$\tau(\lambda) = \frac{\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda)\tau_3(\lambda)}{\left[1 - \rho_1'(\lambda)\rho_2(\lambda) \right] \left[1 - \rho_2'(\lambda)\rho_3(\lambda) \right] - \tau_2^2(\lambda)\rho_1'(\lambda)\rho_3(\lambda)}, \quad (3)$$

где $\tau_3(\lambda)$ – спектральный коэффициент пропускания третьего слоя; $\rho_2'(\lambda)$ – спектральный коэффициент отражения второго слоя со стороны, противоположной падению излучения; $\rho_3(\lambda)$ – спектральный коэффициент отражения третьего слоя со стороны падения излучения.

Светопропускание структур, состоящих более чем из трех слоев, рассчитывали по формулам, аналогичными (2) и (3). При этом $\tau(\lambda)$ вычисляли по спектральным коэффициентам отдельных слоев.

При расчетах также стоит учитывать, что физические свойства тонкопленочного материала могут существенно отличаться от свойств этих же материалов в массивном состоянии.

1.2. Моделирование сетчатых структур

Прозрачность в видимом диапазоне сетчатой структуры определяется в первую очередь площадью, занимаемой проводниками; коэффициент экранирования – электропроводностью и толщиной проводников, частотные диапазоны экранирования и прозрачности – геометрическими размерами ячеек. Таким образом, изменяя параметры сетчатых структур, можно получить различные сочетания показателей прозрачности, экранирования или поверхностного сопротивления.

Светопропускание сетчатой структуры было определено в соответствии с законами геометрической оптики с помощью соотношений Френеля, которые определяют амплитуды и интенсивности отраженной и преломленной волны на плоской границе раздела двух сред с разными показателями преломления. Выразив отношение площади прозрачной части сетки к общей площади сетки через ее геометрические параметры, можно получить следующее выражение для светопропускания в зависимости от шага сетки g и ширины проводника a :

$$T_{\#} = \frac{(g-a)^2}{g^2} T, \quad (4)$$

где T – коэффициент светопропускания прозрачной подложки.

В диапазоне частот 1–30 ГГц рассматриваемые нами сетчатые структуры имеют толщину порядка глубины скин-слоя или больше. В этом случае рационально использовать частотно-зависимую

модель поверхностного сопротивления на основе теории длинных линий. С учетом коэффициента заполнения ($\eta = g/2a$) эквивалентное поверхностное сопротивление сетчатого проводящего покрытия $R_{\#}$ можно определить как:

$$R_{\#} = \frac{g}{2a\sigma\delta(1 - \exp(-t/\delta))}, \quad (5)$$

где $\delta = \sqrt{1/\pi f \mu \sigma}$ – глубина скин-слоя сплошной проводящей пленки [21], f – частота падающей плоской волны, μ – магнитная проницаемость, σ – удельная проводимость, t – толщина сетки.

Коэффициент экранирования сетчатой структуры может быть рассчитан в соответствии с аналогичной (1) зависимостью:

$$SE = 20 \lg \left(1 + \frac{Z_0}{2R_{\#}} \right). \quad (6)$$

1.3. Экспериментальные исследования

На стеклянную подложку было нанесен слой системы оксид индия–оксид олова (ITO) толщиной 300 нм с использованием метода реактивного магнетронного распыления мишеней из In и Sn в среде кислорода.

Измерение спектрального коэффициента пропускания проводили на спектрофотометре Lambda 950 (Perkin Elmer) при нормальном падении света на образец в диапазоне длин волн 380–780 нм со спектральным разрешением 1 нм.

Коэффициент экранирования измеряли в диапазоне частот 2–12 ГГц на специализированном измерительном стенде на базе векторного анализатора цепей Keysight FieldFox N9916A и антенн измерительных рупорных RFspin DRH18-EX (рис. 1). Был использован общепринятый метод измерений, основанный на измерении коэффициента передачи между двумя антеннами, на трассе между которыми располагается диафрагма с образцом. Принципы комплектации и компоновки стенда заимствованы из [22]. Также применялась временная фильтрация полезных сигналов [23]. Погрешность измерений SE данного стенда в диапазоне 0–50 дБ составляет ± 2 дБ.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

2.1. Сплошные многослойные покрытия

Сплошные многослойные покрытия могут быть реализованы на основе легированных широкозонных полупроводниковых материалов из оксидов и нитридов металлов (ZnO [23], TiO_2 , In_2O_3 , SnO_2 , Zn_3N_2 , TiN и др.), тонких металлических слоев и электропроводящих органических соединений [25–27].



Рис. 1. Антенный стенд для измерений коэффициента экранирования в свободном пространстве.

В качестве сплошных прозрачных электропроводящих слоев наиболее часто используют ITO-покрытия, которые обладают наилучшим соотношением электропроводности и светопропускания в видимом диапазоне (не менее 70% при поверхностном сопротивлении от 15 до 20 Ом/кв, что соответствует коэффициенту экранирования радиоизлучения около 22 дБ), хорошими адгезионными и высокими коррозионными свойствами [28, 29]. Нанесение просветляющих слоев позволяет улучшить светопропускание покрытий при сохранении экранирующих свойств [30].

На рис. 1 приведены результаты измерений нанесенного на стекло ITO-покрытия. Коэффициент экранирования и светопропускание данного покрытия также были рассчитаны аналитически, на рис. 1б представлена частотная зависимость пропускания для видимого диапазона длин волн.

Как видно из рис. 1а, измеренный коэффициент экранирования ITO-покрытия в частотном диапазоне 2–12 ГГц изменяется от 20 до 16 дБ (среднее значение 18 дБ). Исходя из экспериментально измеренного поверхностного сопротивления (22 Ом/кв) расчетное значение согласно (1) составило 19 дБ. Небольшое завышение расчетных результатов можно объяснить неучтенными в модели технологическими дефектами.

Недостатками ITO-покрытий являются существенное снижение прозрачности при увеличении толщины слоя, что затрудняет получение высоких экранирующих свойств одновременно с высокой прозрачностью, сложность его нанесения на гибкие полимерные подложки, так как требуется последующий отжиг при температуре

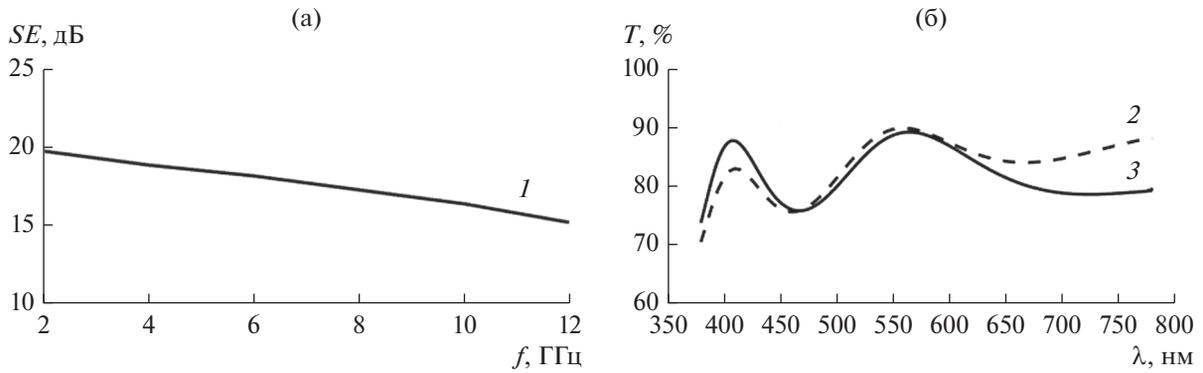


Рис. 2. Частотная зависимости коэффициентов экранирования (а) и светопропускания (б) ITO-покрытия: 1, 2 – экспериментальные данные; 3 – результаты аналитического моделирования.

300–400°C, а также хрупкость и растрескивание при изгибе.

В качестве альтернативы ITO-покрытиям широко применяют структуры на основе чередующихся слоев оксидов, таких как ZnO, SiO₂, TiO₂, ZrO₂, Nb₂O₅, и слоев металлов. Оксиды в данном случае выполняют роль просветляющих слоев, а тонкие слои металлов (Ag, Au, Ni, Cu) обеспечивают необходимую эффективность экранирования.

Также могут применяться комбинации тонких слоев металла и ITO. Были разработаны и изготовлены оптические материалы, состоящие из чередующихся слоев ITO и Ag, эффективность экранирования которых при толщинах слоев соответственно 40 и 20 нм превысила 40 дБ в диапазоне от 0.1–18.0 ГГц, и даже достигла 70 дБ на частоте 0.1 ГГц [11]. Экспериментальные исследования прозрачности покрытий с различным соотношением толщин слоев показали, что наилучшая прозрачность (коэффициент пропускания в видимом диапазоне 90%) была достигнута при толщинах слоев ITO и Ag – 60 и 20 нм соответственно.

Согласно (1)–(3) нами был произведен аналитический расчет характеристик структуры [ITO/Ag]³ITO (ITO (60 нм)/Ag (15 нм)/ITO (60 нм)/Ag (15 нм)/ITO (60 нм)/Ag (15 нм)/ITO (60 нм)), приведенной в [11]. Эффективность экранирования структуры составила 57 дБ, что соответствует экспериментальным измерениям (40–70 дБ). Рассчитанная нами частотная зависимость коэффициента светопропускания данной структуры также достаточно хорошо совпадает с экспериментальными данными (рис. 2).

Эффективность экранирования в СВЧ-диапазоне может быть улучшена путем нанесения слоев с двух сторон подложки. В [31] была предложена структура ZnO (39 нм)/Ag (13 нм)/ZnO (39 нм), нанесенная на гибкую ПЭТФ подложку как с одной

стороны (SLSO), так и с двух сторон (D-SLSO). Коэффициент светопропускания D-SLSO составил 88.9% на длине волны 550 нм, что лишь немного хуже светопропускания SLSO (91.9%). При этом эффективность экранирования D-SLSO на частотах от 10 до 40 ГГц лежит в диапазоне от 45 до 56 дБ, что заметно выше по сравнению с SLSO (34.7 дБ). Данный эффект возникает, по-видимому, в результате интерференции электромагнитных волн СВЧ-диапазона.

По результатам аналитического моделирования коэффициент экранирования структуры SLSO составил 34 дБ. Интегральный коэффициент светопропускания структуры 92%. Частотная зависимость светопропускания структуры представлена на рис. 2.

Таким образом, аналитически рассчитанные *SE* и *T* достаточно хорошо совпадают с результатами экспериментальных измерений.

Следует отметить, что эффективность экранирования и прозрачность многослойного покрытия могут быть улучшены путем подбора толщин и материалов слоев, в том числе за счет включения в структуру покрытия широкозонных полупроводниковых материалов и просветляющих слоев. В частности, для структуры ZrO₂ (40 нм)/Ag (14 нм)/ZrO₂ (70 нм)/Ag (14 нм)/ZrO₂ (35 нм) светопропускание (рис. 3) и эффективность экранирования по результатам расчета оказались равны 87% и 50 дБ соответственно.

Таким образом, путем оптимизации конструкции сплошных многослойных наноразмерных покрытий возможно достигнуть эффективности экранирования в СВЧ-диапазоне частот порядка 50 дБ при светопропускании в видимом диапазоне длин волн порядка 90%.

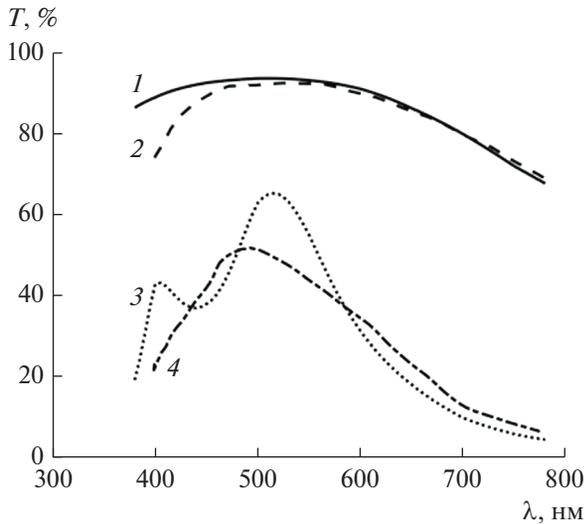


Рис. 3. Частотные зависимости светопропускания структур SLSO (1, 2) и $[\text{ITO}/\text{Ag}]^3\text{ITO}$ (3, 4): аналитическое моделирование (1, 3) и экспериментальные измерения (2, 4).

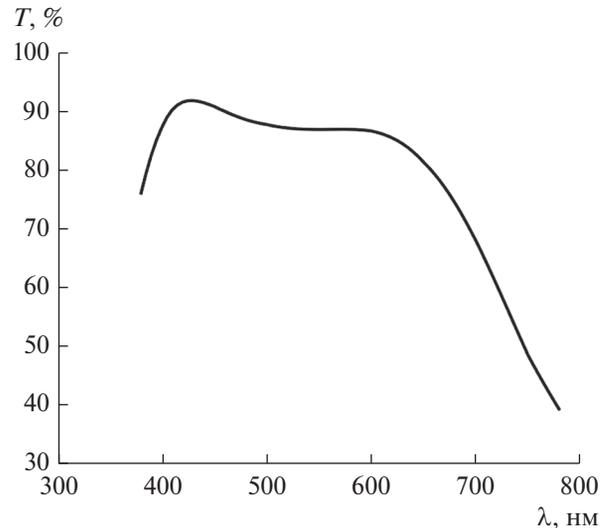


Рис. 4. Частотная зависимость светопропускания структуры $\text{ZrO}_2/\text{Ag}/\text{ZrO}_2/\text{Ag}/\text{ZrO}_2$ на стеклянной подложке.

2.2. Сетчатые структуры

Конструктивной особенностью прозрачных покрытий на основе сетчатых структур является создание на поверхности или внутри прозрачной подложки электропроводной сетчатой структуры [9, 12, 13, 32–38]. Конструкции сетчатых структур варьируются в зависимости от размеров, формы ячеек и проводников, формирующих проводящие дорожки, электропроводности дорожек и степени упорядоченности проводников.

В работе [34] были исследованы электрические и оптические свойства серебряной сетчатой структуры, полученной на стеклянной подложке с помощью магнетронного напыления и последующей фотолитографии. Лучшие результаты (экранирование 42 дБ на частоте 2 ГГц и прозрачность около 78% в видимом спектре) наблюдались при толщине сетки 2 мкм. При этом было показано, что при уменьшении частоты излучения разница между значениями экранирования для структур разной толщины становится все более незначительной и на 18 ГГц экранирование всех исследованных структур стремится к значению 18.5 дБ.

Сравнение результатов аналитического моделирования и экспериментальных данных из [34] для сетчатой структуры со следующими параметрами: $a = 30$ мкм, $g = 347$ мкм, $t = 2$ мкм, представлено на рис. 4.

В работе [35] методом УФ-литографии с последующим гальваническим нанесением Cu с отжигом на воздухе была получена решетка из окисленной меди толщиной 2 мкм, которая демон-

стрирует прозрачность около 80% в диапазоне 400–800 нм и SE от 30 до 20 дБ в диапазоне 12–18 ГГц. Сравнение результатов аналитического моделирования и экспериментальных данных из [35] для сетчатой структуры со следующими параметрами: $a = 10$ мкм, $g = 200$ мкм, $t = 2$ мкм, представлено на рис. 5.

Результаты моделирования SE и T по зависимостям (4)–(6) имеют хорошую сходимость с экспериментальными данными. Из этого можно сделать вывод о применимости разработанных математических моделей для проектирования электропроводящих структур, прозрачных в видимом диапазоне длин волн.

Следует отметить, что создание на поверхности упорядоченной электропроводящей сетки часто приводит к появлению волн муара, резко снижающих контрастность изображения. Для снижения данного эффекта нами было предложено использовать искусственно разупорядоченную сетку [39, 40]. При этом за основу были взяты периодические (с тороидальной топологией) диаграммы Вороного множества точек, случайно распределенных внутри элементарной ячейки с однородной плотностью вероятности. Для повышения оптической однородности сеток диаграммы Вороного дополнительно подвергали релаксации по Ллойду [41]. Конструкция предложенной сетки представлена на рис. 6.

На основе проведенных теоретических исследований авторами данной работы были предложены варианты геометрических параметров сетки из серебра с электрической проводимостью 63 МСм/м, позволяющие получить коэффициент

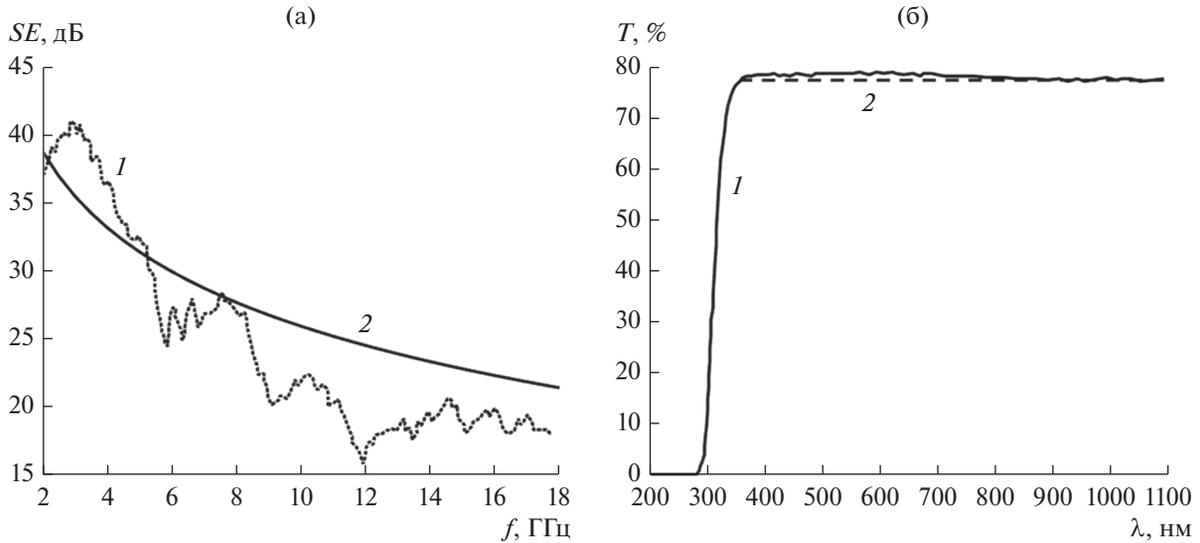


Рис. 5. Экспериментальные и смоделированные зависимости коэффициента экранирования от частоты (а) и коэффициента светопропускания от длины волны (б) сетчатой структуры с серебряным проводником: 1 – экспериментальные данные [34]; 2 – результаты аналитического моделирования.

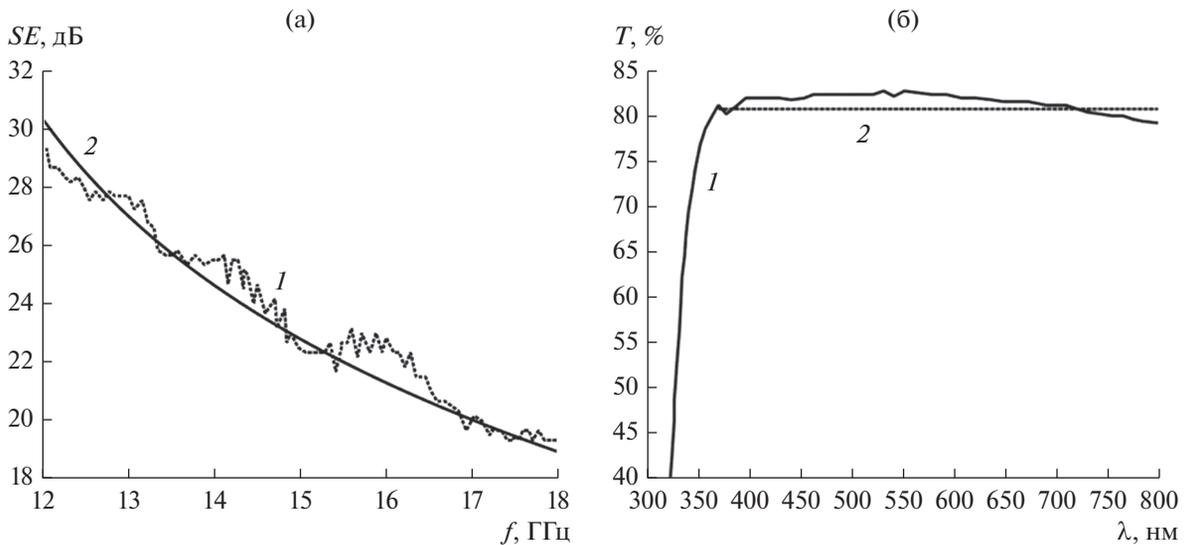


Рис. 6. Экспериментальные и смоделированные зависимости коэффициента экранирования от частоты (а) и коэффициента светопропускания от длины волны (б) сетчатой структуры с медным проводником: 1 – экспериментальные данные [35]; 2 – результаты аналитического моделирования.

светопропускания от 90 до 98% в сочетании с коэффициентом экранирования в радиодиапазоне длин волн от 50 до 65 дБ (рис. 7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из проведенного анализа результатов теоретических и экспериментальных исследований можно сделать вывод, что рассмотренные подходы (многослойные покрытия и сетчатые структуры) позволяют получать на практике ма-

териалы с одновременно высокими значениями показателей экранирования в радиодиапазоне на уровне 40–50 дБ и прозрачности в видимом диапазоне длин волн на уровне 80–90%. При этом теоретические исследования показывают, что данные характеристики могут быть улучшены путем оптимизации толщин и химического состава многослойных покрытий или геометрических параметров сетчатых структур.

Наилучшее соотношение прозрачности и экранирования (T от 90% до 98% при SE от 50 до

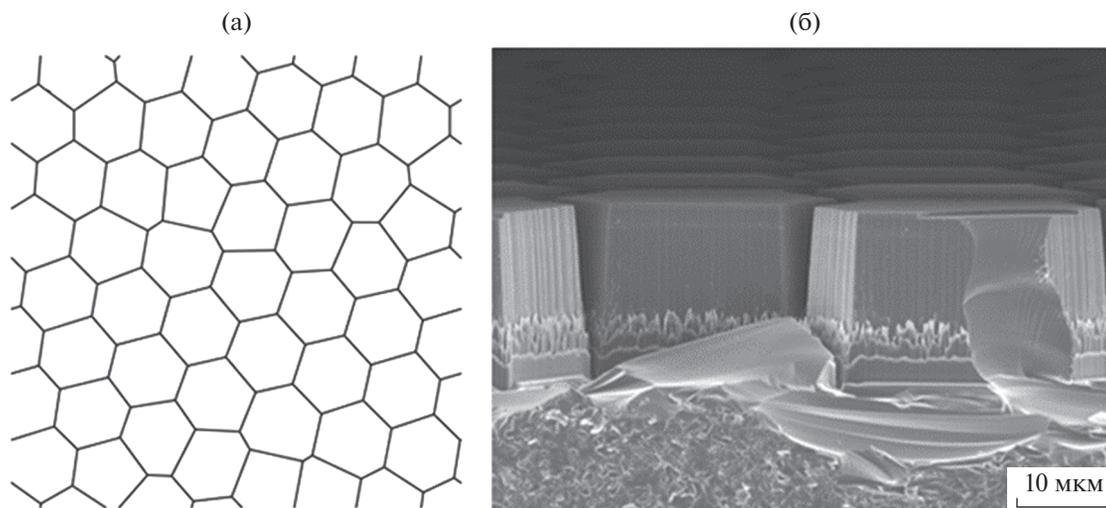


Рис. 7. Конструкция разупорядоченной сетчатой структуры: а – топология предлагаемой структуры; б – изображение полученной структуры, выполненное методом электронной микроскопии.

65 дБ) по результатам математического моделирования было получено на сетчатой структуре. Однако на сегодняшний день подобные характеристики могут быть получены лишь с использованием технологий микроэлектроники, включая литографические процессы, что является существенным ограничивающим фактором данного подхода из-за высокой стоимости и ограничений по размерам получаемых образцов. При этом ожидается, что развитие методов самоорганизации и аддитивных технологий приведет к суще-

ственному упрощению технологического процесса, снижению стоимости и возможности его масштабирования на образцы большой площади.

Вместе с тем задача масштабирования технологии в случае с многослойными структурами может решаться значительно проще, так как уже сейчас в промышленности широко применяются технологии нанесения тонкопленочных покрытий на рулонные материалы. При этом для подобных структур также имеется большой потенциал улучшения их характеристик путем оптимизации конструкторско-технологических решений.

В этой связи при выборе подхода для реализации рассматриваемых материалов с заданными характеристиками на первый план могут выходить именно технологические аспекты получения таких материалов с учетом возможности последующего масштабирования технологии и экономических показателей.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание № 0705-2020-0032).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы также выражают благодарность И.А. Дамарскому (МГТУ им. Н.Э. Баумана) за измерение коэффициентов экранирования.

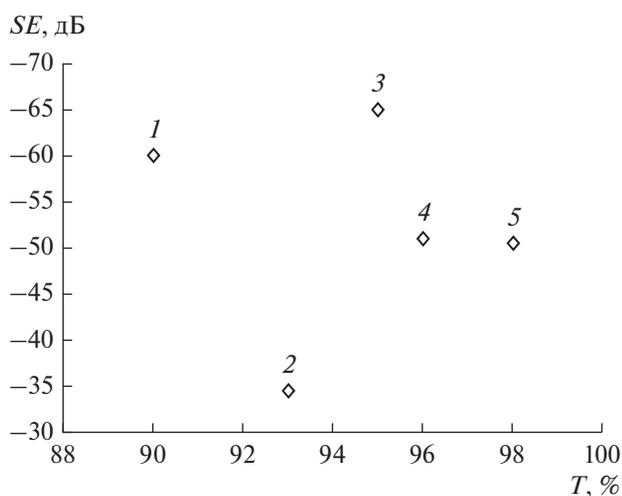


Рис. 8. Теоретически рассчитанные значения коэффициентов экранирования и прозрачности, и поля зрения при различных размерах сетчатых структур: кривая 1 – $l = 17$ мкм, $f = 22$ ГГц, $FOV = 135^\circ$; 2 – $l = 66$ мкм, $f = 27.4$ ГГц, $FOV = 169^\circ$; 3 – $l = 20$ мкм, $f = 2.7$ ГГц, $FOV = 150^\circ$; 4 – $l = 50$ мкм, $f = 15$ ГГц, $FOV = 140^\circ$; 5 – $l = 35$ мкм, $f = 8.7$ ГГц, $FOV = 160^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wessapan T., Rattanadecho Ph.* // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 119. P. 65.
2. *Pasquino N.* // Measurement. 2017. V. 109. P. 373.
3. *Lee S., Jo I., Kang S. et al.* // Acs Nano. 2017. V. 11. P. 5318.
4. *Jang T.* Transparent and Flexible Radio Frequency (RF) Structures. PhD Diss. Michigan: University of Michigan, 2017. 117 p. https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/147562/tjang_1.pdf?sequence=1
5. *Сильченко Е.В., Николаев С.Д.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2016. № 1. С. 79.
6. *Zhou C., Gui L., Liu D. et al.* // IET Science, Measurement & Technology. 2017. V. 11. № 1. P. 25.
7. *Liu Q.F., Yin W.Y., Xue M.F. et al.* // IEEE Trans. 2009. V. EC-51. № 2. P. 284.
8. *Kim D.H., Kim Y., Kim J.W.* // Materials & Design. 2016. V. 89. P. 703.
9. *Jia L.C., Yan D.X., Liu X. et al.* // ACS Appl. Mater. Interfaces. 2018. V. 10. № 14. P. 11941.
10. *Han Y., Liu Y., Han L. et al.* // Carbon. 2017. V. 115. P. 34.
11. *Zhao Y.L., Ma F.H., Li X.F. et al.* // Chinese Phys. B. 2018. V. 27. № 2. P. 027302.
12. *Lin S., Wang H., Wu F. et al.* // npj Flexible Electron. 2019. V. 3. № 1. P. 1.
13. *Zhang Y., Dong H., Li Q. et al.* // RSC Adv. 2019. V. 9. № 39. P. 22282.
14. *Lu Z., Ma L., Tan J. et al.* // 2D Mater. 2017. V. 4. № 2. P. 025021.
15. *Huang C.C., Gupta S., Lo C.Y., Tai N.H.* // Mater. Lett. 2019. V. 253. P. 152.
16. *Xu X., Liu Z., He P., Yang J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2019. V. 52. № 45. P. 455401.
17. *Sannicolo T., Lagrange M., Cabos A. et al.* // Small. 2016. V. 12. № 44. P. 6052.
18. *Xu Y., Liu J.* // Small. 2016. V. 12. № 11. P. 1400.
19. *Oh H.J., Dao V.D., Choi H.S.* // Appl. Surf. Sci. 2018. V. 435. P. 7.
20. ГОСТ Р. 54164–2010 (ИСО 9050: 2003). Стекло и изделия из него. Методы определения оптических характеристик. Определение световых и солнечных характеристик. М.: Стандартинформ, 2010.
21. *Gold G., Helmreich K.* // 7th Eur. Microwave Integrated Circuit Conf. Amsterdam, Netherlands. N.Y.: IEEE. 2012. P. 631.
22. *Marvin A.C., Dawson L., Flintoft I.D., Dawson J.F.* // IEEE Trans. 2009. V. EC-51. № 2. P. 255.
23. *Dvurechenskaya N., Bajurko P.R., Zieliński R.J., Yashchyshyn Y.* // Metrology and Measurement Systems. 2013. V. 20. № 2. P. 217.
24. *Crupi I., Boscarino S., Strano V. et al.* // Thin Solid Films. 2012. V. 520. № 13. P. 4432.
25. *Kim B.R., Lee H.K., Kim E., Lee S.H.* // Synthetic Metals. 2010. V. 160. № 17–18. P. 1838.
26. *Lee S.H., Lee D.H., Lee K., Lee C.W.* // Adv. Functional Mater. 2005. V. 15. № 9. P. 1495.
27. *Lee K., Cho S., Park S. H. et al.* // Nature. 2006. V. 441. № 7089. P. 65.
28. *Залесский В., Волочко А., Марков Г.* // Наука и инновации. 2017. Т. 4. № 170.
29. *Granqvist C.G., Hultåker A.* // Thin Solid Films. 2002. V. 411. № 1. P. 1.
30. *Мельников А.А., Шур П.А.* // Труды ВИАМ. 2019. № 8. P. 56.
31. *Yuan C., Huang J., Dong Y. et al.* // ACS Appl. Materials Interfaces. 2020. V. 12. № 23. P. 26659.
32. *Jung J., Lee H., Ha I. et al.* // ACS Appl. Materials Interfaces. 2017. V. 9. № 51. P. 44609.
33. *Babych B., Borisova A., Machulyansky A. et al.* // IEEE 37th Intern. Conf. on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). N.Y.: IEEE, 2017. P. 52.
34. *Corredores Y., Castel X., Besnier P. et al.* // J. Engineering. 2018. V. 2018. № 4. P. 239.
35. *Han Y., Zhong H., Liu N. et al.* // Adv. Electronic Mater. 2018. V. 4. № 11. P. 1800156.
36. *Wang Q., Li B.J., Toor F., Ding H.* // J. Laser Appl. 2019. V. 31. № 2. P. 022505.
37. *Wang H., Lu Z., Liu Y. et al.* // Optics Lett. 2017. V. 42. № 8. P. 1620.
38. *Zhu X., Xu Q., Li H. et al.* // Adv. Mater. 2019. V. 31. № 32. P. 1902479.
39. *Shiriaev P., Makeev M., Ryzhenko D., Popkov O.* // Mater. Today: Proc. 2019. V. 19. P. 2179.
40. *Shiriaev P.P., Ryzhenko D.S., Makeev M.O., Popkov O.V.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1410. P. 012206.
41. *Lloyd S.* // IEEE Trans. 1982. V. IT-28. № 2. P. 129.