

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 86. Iss. 4

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

July–August

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Никита Федорович Морозов (к девяностолетию со дня рождения)	447
Задачи Лэмба и родственные проблемы динамики. Обзор <i>В. А. Братов, С. В. Кузнецов, Н. Ф. Морозов</i>	451
О сильной эллиптичности и устойчивости в малом в нелинейной градиентной теории упругости третьего порядка <i>В. А. Еремеев</i>	470
О некоторых критериях предельного состояния в механике твердого тела <i>Х. Альтенбах</i>	477
Сравнительный анализ различных подходов к описанию прочности материалов при динамическом нагружении <i>Г. А. Волков, Ю. В. Петров</i>	488
Эффект памяти формы в композитной слоистой оболочке сложной формы <i>Е. В. Карпов, А. Ю. Ларичкин, Б. Д. Аннин</i>	496
Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость <i>С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев, В. П. Матвеевко</i>	505
Внутренние напряжения и структурные дефекты в нанопроволоках <i>А. Е. Романов, А. Л. Колесникова, М. Ю. Гуткин</i>	527
Анализ поведения гетерогенных сред с существенно различающимися физическими свойствами с учетом эффективной размерности пространства и формализма обобщенной производной <i>А. В. Мишин, В. М. Фомин</i>	551
О конфигурационных силах в механике фазовых и химических превращений <i>А. Б. Фрейдин</i>	571
Влияние анизотропии материала на взаимодействие трещины со свободной границей <i>А. В. Савиковский, А. С. Семенов, М. Л. Качанов</i>	584
К расчетам технологической операции сборки горячей посадкой цилиндрических деталей <i>А. А. Буренин, А. В. Ткачева</i>	595
Тонкослойные асимптотики в обобщенной задаче Прандтля для неоднородного по толщине пластического материала <i>Д. В. Георгиевский</i>	612
Информация для авторов и читателей журнала ПММ	622

CONTENTS

Lamb Problems and Related Dynamics Problems <i>V. A. Bratov, S. V. Kuznetsov, N. F. Morozov</i>	451
On Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nonlinear Strain Gradient Elasticity of Third Order <i>V. A. Eremeyev</i>	470
On Some Limit State Criteria in Solid Mechanics <i>H. Altenbach</i>	477
On Analysis of Two Theoretical Approaches to Predict Material Strength under Dynamic Loading <i>G. A. Volkov, Y. V. Petrov</i>	488
Shape Memory Effect in Composite Layered Shell of Complex Shape <i>E. V. Karpov, A. Yu. Larichkin, B. D. Annin</i>	496
Natural Vibrations of Truncated Conical Shells Containing Fluid <i>S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev, V. P. Matveenko</i>	505
Internal Stresses and Structural Defects in Nanowires <i>A. E. Romanov, A. L. Kolesnikova, M. Yu. Gutkin</i>	527
Analysis of the Heterogeneous Media Behavior with Significantly Different Physical Properties, Taking Into Account the Effective Space Dimension and the Generalized Derivative Formalism <i>A. V. Mishin, V. M. Fomin</i>	551
On Configurational Forces in Mechanics of Phase and Chemical Transformations <i>A. B. Freidin</i>	571
Effect of Material Anisotropy on the Interaction of a Crack with Free Boundary <i>A. V. Savikovskii, A. S. Semenov, M. L. Kachanov</i>	584
To the Calculations of Technological Operation of the Assembly of Cylindrical Parts by Heat Shrinkage <i>A. A. Burenin, A. V. Tkacheva</i>	595
Thin-Layered Asymptotics in the Generalized Prandtl Problem for Nonhomogeneous by Thickness Plastic Material <i>D. V. Georgievskii</i>	612

НИКИТА ФЕДОРОВИЧ МОРОЗОВ
(к девяностолетию со дня рождения)

DOI: 10.31857/S0032823522040142



Академику Никите Федоровичу Морозову – выдающемуся ученому в области механики деформируемого твердого тела, члену редакционной коллегии журнала ПММ – 28 июля 2022 г. исполнилось девяносто лет.

Н.Ф. Морозов родился и вырос в Ленинграде. В годы Великой Отечественной войны он участвовал в работе пожарных дружин, спасая город от неразорвавшихся снарядов, за что в одиннадцатилетнем возрасте был награжден медалью “За оборону Ленинграда”. После окончания школы учился на механико-математическом факультете Ленинградского государственного университета, а затем там же в аспирантуре. После защиты кандидатской диссертации в 1958 году поступил на работу в ЦНИИ им. А.Н. Крылова, а затем перешел на преподавательскую работу: сначала на кафедру математики Ленинградского технологического института целлюлозно-бумажной про-

мышленности, а затем с 1970 г. – в Ленинградский государственный университет на математико-механический факультет.

Основное направление его научных интересов в это время связано с исследованием нелинейных задач теории тонких пластин. Им было доказано существование, единственность и разрешимость краевых и начально-краевых задач теории пластин и оболочек, решена задача о существовании несимметричных решений у симметрично нагруженной круглой пластины и сформулированы достаточные условия неустойчивости симметричных решений [1–3]. Полученные Н.Ф. Морозовым результаты по качественному исследованию нелинейных задач теории тонких пластин являются классическими и легли в основу защищенной им в 1967 году в Ленинградском государственном университете докторской диссертации “Нелинейные задачи теории тонких пластин и оболочек”.

В 1976 году Н.Ф. Морозов становится заведующим кафедрой теории упругости СПбГУ – одного из старейших подразделений университета, руководство которой с момента ее создания осуществляли выдающиеся механики Г.В. Колосов, Е.Л. Николаи, С.Г. Лехницкий, В.И. Смирнов, А.А. Ильюшин, В.В. Новожилов, Л. М. Качанов. Организаторская работа Н.Ф. Морозова на посту руководителя знаменитой кафедры в сочетании с яркой научной и преподавательской деятельностью привела к развитию и росту научной школы механики Санкт-Петербургского госуниверситета, которая сейчас по праву занимает одно из ведущих положений среди отечественных школ в этой области. Среди выпускников кафедры и учеников Н.Ф. Морозова есть много известных ученых, которые внесли заметный вклад в механику и математическую физику: член.-корр. РАН Ю.В. Петров, проф. С.А. Назаров, проф. М.В. Паукшто, проф. А.Е. Волков, проф. А.И. Разов, проф. А.А. Уткин, а также много специалистов, работающих в сфере высоких технологий.

Н.Ф. Морозов является одним из инициаторов применения строгих математических методов в теории упругости и нелинейной механике. Полученные новые результаты по ряду научных направлений математической теории упругости и нелинейных проблем механики выдвинули Н.Ф. Морозова в число наиболее известных в стране и за рубежом специалистов.

Н.Ф. Морозов с учениками и коллегами обеспечили существенный прогресс в постановке и исследовании проблем прочности и разрушения. Им совместно с учениками развиты эффективные методы анализа сингулярных полей, возникающих в статических задачах теории упругости с концентраторами напряжений типа трещин и острых вырезов. Одним из основных достижений Н.Ф. Морозова и его сотрудников стало развитие нелокальных критериев прочности. Ключевым понятием, которое было введено в этих исследованиях, стало понятие линейного размера разрушения. Опубликованная Н.Ф. Морозовым монография [4] стала заметным вкладом в науку о разрушении, которая в те годы интенсивно развивалась во многих мировых научных центрах.

В конце 80-х и начале 90-х годов Н.Ф. Морозов совместно с Ю.В. Петровым обратился к динамическим задачам механики. Господствовавшие в то время представления о разрушении вошли в противоречие с новейшими экспериментальными исследованиями по экстремальным высокоскоростным воздействиям на материалы, выявившим целый ряд принципиальных эффектов, которые не укладывались в традиционные модели. Совместно с Ю.В. Петровым и А.А. Уткиным был высказан ряд идей [5, 6], на основе которых позднее был сформулирован и общий структурно-временной подход к решению динамических задач и исследованию экстремальных критических состояний сплошных сред при динамических воздействиях. При помощи этого подхода оказалось возможным сформулировать ряд новых критериев или предельных условий для переходных процессов в теории разрушения, пластического деформирования, электрофизике (импульсный пробой), кавитации, теории фазовых превращений. На основе этого подхода и разработанных критериев разрушения были

предложены новые методы тестирования материалов, отвечающие потребностям современной индустрии.

Совместно с П.Е. Товстиком решены задачи о свободных колебаниях и устойчивости сжатого трансверсально изотропного пространства, полупространства и трансверсально изотропной сжатой пластины. Особое внимание уделено анализу форм потери устойчивости как самого упругого основания, так и пластины, лежащей на нем. С использованием уравнений геометрически нелинейной теории упругости исследована поверхностная устойчивость трансверсально анизотропного упругого полупространства под действием сжимающих напряжений. Анализ потери устойчивости в закритической стадии показал, что вмятины вблизи свободной поверхности полупространства располагаются в “шахматном” порядке, что соответствует экспериментальным результатам [7, 8].

Начиная с 1994 года, Н.Ф. Морозов активно работает в области применения методов механики деформируемого твердого тела к проблемам наномеханики и теоретического материаловедения, изучению взаимосвязи между деформированием, устойчивостью и разрушением и диффузионными процессами фазовых превращений. Совместно с Е.А. Ивановой и А.М. Кривцовым теоретически исследована зависимость значений модулей упругости от размеров нанокристалла. Дается оценка масштабных эффектов, возникающих при применении континуальной теории упругости к нанобъектам, а также обсуждается влияние масштабных эффектов при использовании метода молекулярной динамики для моделирования макроскопических объектов [9, 10]. Совместно с И.А. Овидько исследованы процессы деформирования и разрушения графеновых листов с различными видами дефектов структуры [11, 12].

Н.Ф. Морозовым с соавторами осуществлена модификация уравнений равновесия и определяющих соотношений линейной теории пластин и оболочек при учете деформаций поперечного сдвига, основанная на сведении соотношений пространственной теории упругости с поверхностными напряжениями к двумерным уравнениям, заданным на срединной поверхности оболочки, и проведен анализ влияния поверхностных модулей упругости на эффективные жесткости пластин и оболочек [13, 14].

Н.Ф. Морозовым с соавторами (И.А. Овидько, А.Г. Шейнерманом, С.В. Бобылевым) были исследованы механизмы деформации и разрушения нанокристаллических тел. Предложена теоретическая модель, описывающая влияние специальной ротационной деформации на рост трещин в деформированных нанокристаллических керамике и металлах и оценено ее влияние на рост ранее существовавших сравнительно крупных трещин в нанокристаллических металлах и керамике [15]. Предложен и теоретически описан особый физический режим пластической деформации в нанокристаллических, ультрамелкозернистых и поликристаллических телах, порожденный скольжением границ зерен и процессом зарождения наноразмерных зерен (происходящий в результате расщепления и миграции границ зерен под действием напряжения). Показано, что специальный режим деформации повышает пластичность нанокристаллических и ультрамелкозернистых твердых тел, и этот эффект усиления более выражен по сравнению с эффектом кооперативного процесса скольжения и миграции границ зерен [16]. Исследована микромеханика пластической деформации посредством миграции границ зерен в нанокompозитах металл–графен [17].

Н.Ф. Морозов – автор более 450 научных работ, в том числе 8 монографий и 3 учебных пособий. Активная научно-педагогическая деятельность Н.Ф. Морозова была отмечена правительственными наградами: Орденом Почета (1999), орденом “За заслуги перед Отечеством” IV степени (2003), Орденом дружбы (2010); в 1995 году ему присвоено звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”. В 2015 году Н.Ф. Морозов удостоен благодарности Президента Российской Федерации.

Редакционная коллегия журнала “Прикладная математика и механика” поздравляет Никиту Федоровича с юбилеем, желает ему здоровья и дальнейших успехов в научной, педагогической и организационной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов Н.Ф.* Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично нагруженной круглой пластины // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 3. 417–419.
2. *Морозов Н.Ф.* К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой // Изв. вузов. Матем. 1961. № 2. С. 126–129.
3. *Морозов Н.Ф.* Качественное исследование круглой симметрично сжимаемой пластинки при большой краевой нагрузке (доказательство появления гофра) // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 6. С. 1318–1319.
4. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
5. *Petrov Y., Morozov N.* On the Modeling of Fracture of Brittle Solids // ASME J. Appl. Mech. 1994. V. 61. P. 710–712.
6. *Petrov Y.V., Morozov N.F., Smirnov V.I.* Structural macromechanics approach in dynamics of fracture // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 2003. V. 26. P. 363–72.
7. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* О формах потери устойчивости сжатой пластины на упругом основании // Докл. РАН. 2012. Т. 446. С. 37–41.
8. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Устойчивость поверхностного слоя при силовом и температурном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 6. С. 5–15.
9. *Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* О механических характеристиках наноразмерных объектов // ФТТ. 2002. Т. 44. № 12. С. 2158–2163.
10. *Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д.* Описание кристаллической упаковки частиц с учетом моментных взаимодействий // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 110–128.
11. *Кочнев А.С., Морозов Н.Ф., Овидько И.А., Семенов Б.Н.* Процессы деформации и разрушения в графене с бивакансиями типа 555–777 // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 672–675.
12. *Кочнев А.С., Морозов Н.Ф., Овидько И.А., Семенов Б.Н.* Процессы деформации и разрушения в графеновых нанолентах с линейными квадрупольными дисклинациями // Докл. РАН. 2016. Т. 468. № 3. С. 272.
13. *Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф.* Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 30–44.
14. *Morozov N.F., Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G., Aifantis E.C.* Special rotational deformation as a toughening mechanism in nanocrystalline solids // J. Mech.&Phys. of Solids. 2010. V. 58. № 8. P. 1088–1099.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.04.003>
15. *Bobylev S.V., Morozov N.F., Ovid'ko I.A.* Emission of grain boundary dislocations by nanovoids in deformed polysilicon materials // Rev. Adv. Mater. Sci. 2006. V. 13. № 1. P. 77–84.
16. *Bobylev S.V., Morozov N.F., Ovid'ko I.A.* Cooperative grain boundary sliding and nanograin nucleation process in nanocrystalline, ultrafine-grained, and polycrystalline solids // Phys. Rev. B. Cond. Matter&Mater. Phys. 2011. V. 84. № 9. P. 094103.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.094103>
17. *Sheinerman A.G., Morozov N.F., Gutkin M.Yu.* Effect of grain boundary sliding on fracture toughness of ceramic/graphene composites // Mech. Mater. 2019. V. 137. P. 103126.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103126>

УДК 539.3

ЗАДАЧИ ЛЭМБА И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ. ОБЗОР

© 2022 г. В. А. Братов^{1,2,3}, С. В. Кузнецов^{4,*}, Н. Ф. Морозов^{1,2}

¹ Институт проблем машиноведения РАН, С. Петербург, Россия

² СПб Государственный университет, С. Петербург, Россия

³ СПб Политехнический университет Петра Великого, С. Петербург, Россия

⁴ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.03.2022 г.

После доработки 05.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Анализируется решение внутренней и внешней задач Лэмба от сосредоточенного силового воздействия, приложенного к свободной границе упругого полупространства (полуплоскости). Рассматриваются так же некоторые родственные задачи, в частности о приложении дуплетов и диполей в упругом полупространстве, о появлении высокочастотных волн, отвечающих волне Рэлея, при распространении волн Похгаммера–Кри и др. Анализируются решения задач о движущейся нагрузке, приложенной к границе полупространства или полуплоскости.

Ключевые слова: задача Лэмба, объемная волна, волна Рэлея, полупространство, полуплоскость

DOI: 10.31857/S003282352204004X

1. Задачи Лэмба. Интегральные преобразования. Лэмб [1] рассмотрел две внешних задачи о распространении волн в изотропном упругом полупространстве и изотропной упругой полуплоскости от сосредоточенного силового воздействия, приложенного нормально к свободной границе. В этой работе были рассмотрены также две внутренние задачи о волнах в упругом полупространстве и полуплоскости, вызванные центром расширения, находящимся на некоторой глубине под поверхностью. Решение этих задач было сведено [1] к интегральным уравнениям относительно скалярного и векторного потенциалов. Внутренняя и внешняя задачи были обобщены [2] на случай сосредоточенных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью.

Надо отметить, что в случае произвольных по времени нагрузок [1, 2] замкнутое решение удалось построить лишь в пространстве изображений (по Фурье для пространственных переменных и по Лапласу для временной переменной). С помощью асимптотических оценок было показано [1], что в случае внешних плоской и пространственной задач основной вклад в поле смещений на свободной поверхности вносят рэлеевские волны. Помимо этого, было получено аналитическое решение [1] для плоской внешней задачи в случае нормальной нагрузки, изменяющейся во времени в виде ядра Пуассона.

Кроме того, показано, что в случае гармонического источника магнитуды рэлеевских волн на свободной поверхности на достаточном удалении от эпицентра в случае плоской задачи не зависят от $|rx|$, а в случае пространственной задачи убывают пропорционально $|rx|^{-1/2}$, где $|x|$ – расстояние от эпицентра, а r – волновое число. Далее,

в той же работе с помощью асимптотических оценок было найдено, что наряду с волнами Рэлея точечный источник вызывает появление объемных продольных (P) и поперечных (S) волн. Магнитуды этих волн в случае гармонического источника на достаточном удалении от него в случае плоской задачи убывают на поверхности пропорционально $|rx|^{-3/2}$, а в случае пространственной задачи — пропорционально $|rx|^{-2}$. Заметим, что при распространении объемных волн, порожденных точечным гармоническим источником в безграничной среде, убывание их магнитуд происходит медленнее. Например, в случае плоской задачи магнитуда убывает как $|rx|^{-1/2}$, а в случае пространственной задачи, как $|rx|^{-1}$ [3]. Таким образом, в [1] впервые было дано теоретическое обоснование утверждения Рэлея [4] о том, что поверхностные (рэлеевские) волны убывают медленнее объемных волн с увеличением расстояния от источника.

Для построения решений, уравнения движения Навье в [1, 2] записывались в форме Ламе–Клапейрона ([5], Sect. 59)

$$(\lambda + 2\mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.1)$$

где λ и μ — константы Ламе, \mathbf{u} — поле перемещений, \mathbf{b} — поле массовых сил, ρ — плотность среды, использовалось представление Гельмгольца ([5], Sect. 67) для поля массовых сил

$$\mathbf{b} = -\nabla \alpha - \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}, \quad (1.2)$$

где α и $\boldsymbol{\beta}$ — скалярный и векторный потенциалы и представление Ламе–Грина ([5], Sect. 67) для динамического поля перемещений

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad (1.3)$$

где φ — скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ — векторный потенциалы. Представление (1.3) аналогично представлению Папковича–Нейбера для поля перемещений при решении уравнений статики. В качестве начальных условий в [1, 2] рассматривались однородные условия вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = 0 \quad (1.4)$$

На внешней поверхности Π_v полупространства или полуплоскости задавались условия второй краевой задачи (в напряжениях)

$$\mathbf{t}_v \equiv (\lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{v} = p(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}; \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v, \quad (1.5)$$

где \mathbf{v} — вектор единичной внешней нормали к границе; \mathbf{I} — единичная диагональная матрица, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор (малых) деформаций; p — нагрузка на свободной поверхности. В случае внутренней задачи Лэмба $p = 0$.

Подстановка представлений (1.2), (1.3) в уравнения движения и применение преобразования Лапласа по временной переменной (или предположение о гармоническом изменении во времени нагрузки) позволили свести уравнения движения к неоднородным уравнениям Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \varphi' = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \alpha', \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \boldsymbol{\psi}' = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\beta}' \quad (1.6)$$

Штрихи у потенциалов в (1.4) означают освобождение от гармонического множителя $e^{i\omega t}$. При получении уравнений (1.6) использовались три легко проверяемых тождества ([5], Sect. 5)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = -\operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{\psi}, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla \varphi = 0 \quad (1.7)$$

Далее, для построения решения пространственного уравнения Гельмгольца в [1, 2] использовалось фундаментальное решение

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{i r_1 |\mathbf{x}|}, \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1} \quad (1.8)$$

Аналогичный вид имеет фундаментальное решение Ψ' векторного уравнения Гельмгольца с заменой r_1 на r_2 и c_1 на c_2 , где c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной объемных волн соответственно

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.9)$$

В плоском случае фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца представимо в виде

$$\varphi' = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(r_1 |\mathbf{x}|); \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (1.10)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Аналогичный вид имеет фундаментальное решение Ψ' для векторного уравнения. При решении задачи с нагрузкой, произвольно зависящей от времени, круговая частота ω в выражениях (1.8), (1.10) заменяется на параметр преобразования Лапласа. Далее, осуществлялось [1, 2] сужение потенциалов с ядром (1.8) или (1.10) на граничную поверхность. Надо отметить, что полученные интегральные представления оказались весьма сложными: в замкнутом виде решение удалось получить лишь для гармонической нагрузки. В случае произвольной зависимости от времени замкнутое решение было получено в пространстве изображений, точнее, решение на поверхности было представлено в виде несобственного интеграла от алгебраической функции.

В дальнейшем представление Гельмгольца (1.1) и потенциалы Ламе–Грина (1.3) использовались в большинстве подходов, связанных с решением внутренней и внешней задач Лэмба, однако техника вычисления сингулярных интегралов, появляющихся при сужении потенциалов на граничную поверхность, менялась. С помощью метода наискорейшего спуска Дебая были получены [6, 7] асимптотические оценки для компонент перемещений на границе для некоторых внутренних и внешних задач, обобщающих задачу Лэмба, например, рассматривалась нагрузка [6] под произвольным углом к поверхности. Исследовалась [7] плоская внутренняя задача о действии сосредоточенной силы в упругой полуплоскости. В этой работе на основании расчетов, выполненных по асимптотическим формулам, было найдено, что рэлеевские волны не образуются вблизи от эпицентра, на расстояниях d , удовлетворяющих условию

$$d < \frac{c_R h}{\sqrt{c_1^2 - c_R^2}}, \quad (1.11)$$

где c_R – скорость волны Рэлея, а h – глубина источника. При получении оценки (1.11) сделано упрощающее предположение о том, что две объемных волн и рэлеевская волна распространяются независимо друг от друга. На самом же деле рэлеевская волна формируется из двух объемных волн, начиная с момента прихода медленной объемной волны, см. ([3], р. 66). Не совсем понятное отсутствие рэлеевских волн в эпицентральной зоне, удовлетворяющей оценке (1.11), объяснялось [7] интерференцией с объемными волнами, полностью поглощающими рэлеевскую волну. В случае плоской внешней задачи Лэмба получены [8] асимптотические оценки, аналогичные [6, 7].

Для вычисления сингулярных интегралов, связанных с обращением преобразования Лапласа в задачах Лэмба, предложен [9, 10] особый путь интегрирования, связанный с деформацией контура интегрирования. Вместо деформации контура интегри-

рования предложено [11, 12] использовать многократное изменение порядка интегрирования, при этом использовался подход, развитый ранее [13, 14] и основанный на функционально-инвариантных решениях. Заметим, что с помощью функционально-инвариантных решений поле перемещений в среде удалось представить в виде однократного интеграла от алгебраической функции по некоторому контуру в комплексной плоскости. Предложенный метод вычисления интегралов [11, 12] позднее был применен для анализа поля перемещений в цилиндрических координатах в случае осевой симметрии [15]. Для нагрузки в виде временной функции Хэвисайда, действующей на поверхности [16] и внутри [17, 18] полупространства, получено замкнутое выражение для вертикальной компоненты перемещений и выражение, содержащее эллиптические интегралы, для горизонтальной компоненты. Результаты работ [16–18] обобщены [19] на другие виды нагрузок. Для “плоской” задачи Лэмба выбор пути в методе Каньяра был упрощен [20, 21], кроме того, объяснен кажущийся парадокс [21], связанный с особой дисперсией волн Рэлея. Надо отметить, что обнаруженная дисперсия рэлеевских волн [21] – весьма своеобразная: она обнаруживается только при изменении знака круговой частоты и, таким образом, проявляется лишь при обращении двусторонних интегральных преобразований, в которых параметры преобразования меняют знак. В работах [22–24] на основе асимптотических разложений получены численные значения напряжений и перемещений вблизи от источника. Дальние асимптотики поля перемещений для внешней пространственной задачи Лэмба в случае гармонической нагрузки, совпадающие с решением Рэлея, приведены в работах [25, 26].

С помощью фундаментального решения Стокса [27] (см. также ([5], Sect. 68)) в [28–30] внешняя задача Лэмба о гармонической нагрузке сведена к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно неизвестных перемещений на границе.

Приведены ([31], Гл. 1) и ([32], Sect. 6.1) результаты аналитического исследования поляризации гармонических поверхностных волн (с плоским фронтом), распространяющихся по границе упругого полупространства. На основании этих исследований оказалось, что для материала, удовлетворяющего условию Пуассона $\lambda = \mu$ вертикальная компонента на свободной поверхности приблизительно в полтора раза больше горизонтальной компоненты перемещений. Аналогичное соотношение между компонентами перемещений найдено несколько ранее [33]. Фактически, результаты [31–33], подтвердили расчеты, проведенные Рэлеем [4] для случая $\lambda = \mu$, в которых отношение вертикальной амплитуды перемещений к горизонтальной составило 1.4677.

Интересные данные получены во внешней пространственной задаче Лэмба для случая импульсной нагрузки, заданной в виде временной функции Хэвисайда. Численный анализ решения [16] для этой задачи дал неожиданные результаты с точки зрения физической интерпретации. Например, вычисления, проведенные в [16] и повторенные в [34–38] с помощью различных вариантов метода [1, 2], показали, что в произвольной точке на поверхности вертикальная и горизонтальная компоненты перемещений претерпевают разрыв второго рода в момент, соответствующий приходу рэлеевской волны, рис. 1. При этом за фронтом рэлеевской волны решение [16] дает мгновенный выход на статическое решение Буссинеска для вертикальной компоненты, а для горизонтальной компоненты выход на статическое решение происходит асимптотически при $t \rightarrow \infty$. В этой связи интерес представляет сравнение аналитических (или аналитико-асимптотических) решений, рассмотренных в настоящем разделе, с расчетами, выполненными с помощью разностных методов.

2. Разностные и вариационно-разностные методы. Решение внешней и внутренней задач Лэмба как в плоском, так и в пространственном случае, наталкиваются на определенные сложности, связанные с устойчивостью и схемной вязкостью явных разностных схем, а также появлением осцилляций в зонах за ударным фронтом, характерным для явных схем второго [39, 40] или более высокого порядка точности, или

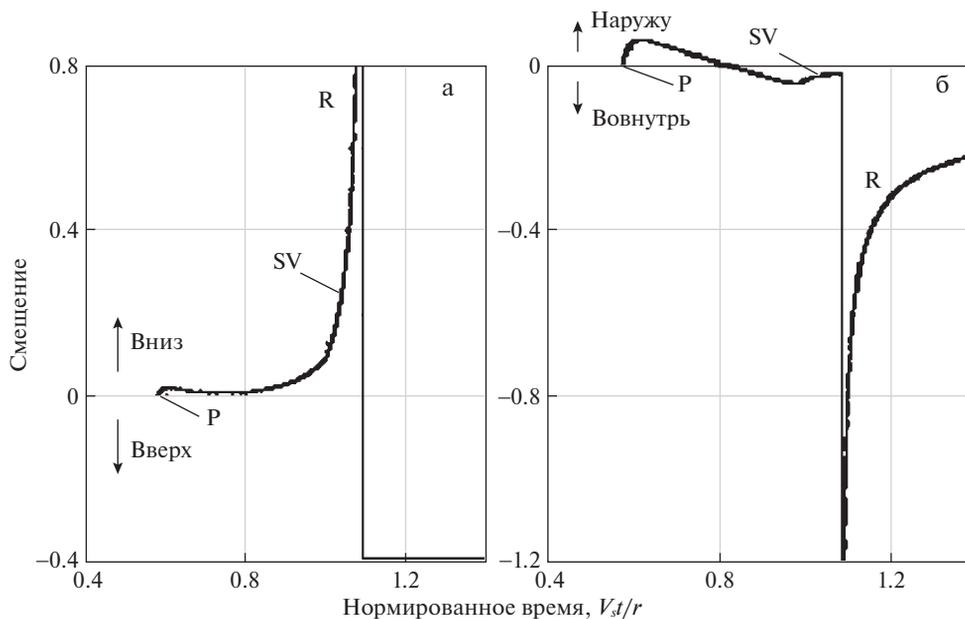


Рис. 1. Изменение во времени (а) вертикальной и (б) горизонтальной компонент вектора перемещений на границе полупространства для внешней пространственной задачи Лэмба при импульсной вертикальной нагрузке (при выполнении условия Пуассона $\lambda = \mu$) [36].

размытием ударных волновых фронтов, характерного для явных схем первого порядка [41] и неявных схем любого порядка точности [42]. Положение осложняет плохое распараллеливание вычислений в динамических задачах теории упругости, что делает малоэффективным применение современных кластерных и метаclusterных вычислительных систем.

Частично недостатки разностных методов удается преодолеть с помощью разностных уравнений, записанных в окрестности характеристик. Явные разностные схемы в окрестности характеристик применены [43–45] для исследования распространения волн в упругих и упруго-пластических средах. Этот подход применен [46, 47] к решению плоской внешней задачи Лэмба для поверхностной нагрузки, заданной в виде временной функции Хэвисайда. Отмечено [47] хорошее совпадение с результатами, полученными методами интегральных преобразований [11, 12].

Для решения динамических задач, включая и внешнюю задачу Лэмба, предложен [48] гибридный подход, объединяющий конечноэлементный и конечноразностный методы. Используемые разностные схемы, разработаны в [49] позволяют получить конечноразностные уравнения второго порядка точности по временной переменной и четвертого порядка по пространственным переменным. Гибридный метод применен [50] к решению пространственной внешней задачи Лэмба. Численные эксперименты [51] показали, что гибридный метод оказался практически свободным от осцилляций за фронтом рэлеевской волны.

Для исследования распространения волн в задаче Лэмба применялся [52–54] спектральный метод (конечных) элементов (SEM). Этот метод фактически представляет собой метод конечных элементов высокого порядка точности, в котором пространственными элементами (базисными функциями) являются полиномы Лежандра.

Канонический метод конечных элементов с явными двухслойными разностными схемами при интегрировании по времени применялись для решения различных задач геомеханики, включая внутреннюю [55, 56] и внешнюю (пространственную) задачи Лэмба [57–59]. Сравнение данных расчета по методу конечных элементов с аналогичными результатами, выполненными с помощью интегральных преобразований, выявило [58] хорошее качественное совпадение магнитуд перемещений на свободной поверхности, вызванных действием гармонической нагрузки.

3. Анизотропные среды. По-видимому, впервые внешняя плоская задача Лэмба для трансверсально-изотропной полуплоскости исследовалась в [60] с помощью интегральных преобразований и вычислением сингулярных интегралов по методу [9, 10]. Эта техника была обобщена [61] для решения плоской внешней задачи Лэмба для упруго анизотропной полуплоскости с моноклинной симметрией. С помощью техники [60] для внутренней задачи Лэмба получены [62] выражения смещений на границе трансверсально-изотропной полуплоскости. Для построения решения внешней плоской задачи Лэмба в случае анизотропной полуплоскости с моноклинной симметрией применялся [63] метод, основанный на шестимерном комплексном формализме Стро [64]. С помощью этого метода получены [63] выражения для поля смещений в полуплоскости при внешнем гармоническом силовом воздействии.

Рассмотрена [65, 66] внешняя пространственная задача Лэмба для полупространства с произвольной упругой анизотропией. При решении этой задачи уравнения движения анизотропной среды записывались в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{C} – четырехвалентный тензор упругости. Предполагалось, что тензор упругости, рассматриваемый как оператор в пространстве симметричных тензоров второго ранга, положительно определен и симметричен. Объемные силы в [65, 66] отсутствовали, а на граничной плоскости полупространства Π_v задавались условия в напряжениях

$$\mathbf{t}_v \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u} = p(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}; \quad \mathbf{x}' \in \Pi_v \quad (3.2)$$

Далее в этих работах использовалось преобразование Радона по пространственным переменным. Это позволило свести внешнюю задачу Лэмба к вычислению однократных интегралов по окружностям, появляющимся при обращении преобразования Радона. Преобразования Радона по пространственным переменным применялись [67–69] в дальнейшем при решении аналогичных задач.

Метод, основанный на преобразовании Фурье по пространственным переменным, применялся [70–75] для решения внешней и внутренней задач Лэмба. При этом перемещения на поверхности [74, 75] представлены в виде несобственных интегралов, появляющихся при сужении преобразованных по Фурье компонент перемещений и их производных на граничную плоскость.

4. Экспериментальные методы. По-видимому, впервые присутствие рэлеевских волн во внутренней задаче Лэмба было экспериментально зафиксировано [1] при анализе сейсмограмм от удаленного эпицентра землетрясения. В дальнейшем, результаты [1] подтверждались в различных исследованиях по решению геофизических задач [76–81], в том числе задач, связанных с анализом распространения волн Похгаммера–Кри и некоторых родственных волн [80]. Здесь надо отметить, что при исследовании волн Похгаммера–Кри удается обнаружить высокочастотные волны, отвечающие волнам Рэлея.

Нужно отметить, что далеко не во всех геофизических исследованиях отмечено появление волн Рэлея. Например, в [82], с. 268 дан анализ сейсмограмм, полученных при поверхностных взрывах, которые фактически, описываются решением внешней пространственной задачи Лэмба. По наблюдениям [82] волны Рэлея при поверхностных взрывах не обнаруживаются. Аналогичные данные приводятся в [83]. Определенный

интерес представляет концепция анализа сейсмограмм землетрясений ([84], с. 25). В соответствии с этой концепцией, волны, возникающие при сейсмической активности, разделяются на два класса: объемные волны — это относительно короткие волны с периодом колебаний менее одной секунды, а поверхностные — это волны очень большой длины (от десятков до сотен километров), у которых период колебаний существенно превосходит одну секунду.

В экспериментальных модельных методах исследования задач Лэмба применялась в основном техника фотоупругости. С помощью этого метода исследовались [85–87] волны, распространяющиеся от точечного источника во внешних задачах Лэмба. Сравнение экспериментальных результатов, приведенных в этих работах, с данными теоретического анализа выявило хорошее качественное совпадение.

Среди других экспериментальных методов, применяемых для исследования волн, возникающих в задачах Лэмба, надо отметить метод глубинной акустической регистрации колебаний [88]. Для анализа смещений на поверхности полупространства во внешней задаче Лэмба (в случае малых масштабов) применяют также методы оптической интерферометрии [89, 90]. В этих случаях для возбуждения акустических волн обычно применяют мгновенный лазерный нагрев поверхности [89].

5. Задачи Лэмба о подвижной нагрузке. В одной из первых работ [6], обобщающих задачу Лэмба [2] о действии подвижной нагрузки, рассмотрены внешняя и внутренняя задачи о действии подвижной нагрузки, наклоненной под произвольным углом к поверхности полупространства (полуплоскости).

Помимо точных методов, основанных на применении интегральных преобразований, разрабатывались инженерные подходы, причем в этих подходах вместо полупространства или полуплоскости обычно рассматривались свободные балочные конструкции (описываемые теорией Бернулли–Эйлера или Тимошенко), а также балки, лежащие на упругом основании (в этом случае в качестве модели основания чаще всего применялась модель Винклера). При этом, инженерные подходы различались в зависимости от области применения. Так, специалисты по эксплуатации железных дорог и мостов в основном исследовали динамическую устойчивость упругих конструкций, несущих подвижные нагрузки [91–96]. В горной механике подвижные нагрузки возникали при исследовании динамики шахтного подъема, где используются канаты переменной длины [97–101]. Специфические методы разрабатывались в теории механизмов и машин для исследования динамической устойчивости гибких ветвей передач [102–104]. Предложен [105–107] объединенный подход для исследования различных задач с подвижными нагрузками на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. В этом подходе введено дополнительное нелинейное краевое условие, описывающее взаимовлияние движущегося объекта и колебаний упругой направляющей. Физический смысл последнего условия состоит в том, что при взаимодействии распределенной системы с движущимся сосредоточенным объектом возникают силы вибрационного давления. Надо отметить, что введение в расчет таких дополнительных сил, учитывающих движение нагрузки, предлагалось ранее [108, 109].

При исследованиях пластин, нагруженных движущейся нагрузкой, обычно применяют теорию Бернулли–Эйлера, основанную на гипотезе плоских сечений. Эта теория позволяет получить динамические уравнения, аналогичные статическим уравнениям изгиба тонких пластин или уравнениям изгиба балок [110–113]. В дальнейшем методы [110–113] применялись при решении различных задач, связанных в основном с исследованием поведения ледяного покрова [114–116] а также колебаниям балок [117–120] при движущихся нагрузках.

Задачи для тел, нагруженных движущимися нагрузками, могут исследоваться с помощью конечноэлементных и конечноразностных методов. Задача о пластине, нагруженной движущейся нагрузкой, анализировалась [121–123] с помощью конечноэлементного метода с использованием двухслойных явных разностных схем второго по-

рядка точности для интегрирования уравнений движения. Аналогичным методом исследовались [124, 125] колебания балок на упругом основании от действия движущихся нагрузок. Представлены [126] расчеты методом конечных элементов сложных систем, подверженных действию движущихся нагрузок. Численные исследования по колебаниям мостовых конструкций от движущихся нагрузок сопоставлены [127] с результатами натурных измерений. Это сопоставление выявило хорошее качественное и количественное совпадение частот и амплитуд колебаний. Решение уравнений движения для задач с подвижными нагрузками осуществлялось [128, 129] с помощью метода конечных разностей.

6. Родственные проблемы динамики. В случае внешних задач о действии нагрузки на границу упругой полуплоскости или полупространства, наряду с нормальным к границе воздействием [25], как отмечено выше, исследуют задачу о наклонной к поверхности нагрузке [6, 22]. Рассматриваются также задачи о штампе, контактирующим с упругим полупространством и совершающим горизонтальные гармонические колебания [130] и несесимметричные вертикальные колебания [131]. Рассматривалась [132, 133] дипольная (моментная) гармоническая и импульсная нагрузка, приложенная на поверхности полупространства. Эта задача исследовалась с помощью преобразования Ханкеля по радиальной координате и преобразованием Лапласа по временной переменной. Численный анализ этой задачи показал [133], что на поверхности полупространства основной вклад от дипольной нагрузки вносят рэлеевские волны.

В случае внутренних задач, по-видимому, наибольший интерес представляют решения для дуплета (двойной силы без момента) [134–136] и диполя (сосредоточенного момента) [137]. В этих работах построение решений для соответствующих внутренних (пространственных) задач осуществлялось с помощью метода Лэмба и выбора контура интегрирования по методу [9, 10]. Построено [138] решение для внутренней пространственной задачи о действии горизонтальной гармонической силы в упругом трансверсально-изотропном полупространстве. Заметим, что плоские внутренние задачи о диполе и дуплете, по-видимому, не исследовались.

Исследовались [139, 140] решения внутренних задач Лэмба, связанные с появлением истекающих волн (волн, амплитуда которых не убывает по глубине). Построение и анализ соответствующих решений в [140] проводились методами [9, 10].

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена за счет гранта № 20-49-08002 Российского научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1904. V. 203. P. 1–42.
2. *Lamb H.* On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids // *Phil. Mag.* 1916. V. 13. P. 386–399; 539–548.
3. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* *Elastic Waves in Layered Media.* New York: McGraw-Hill, 1957.
4. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // *Proc. London Math. Soc.* 1885. V. 17. P. 4 – 11.
5. *Gurtin M.E.* The Linear theory of elasticity // in: *Handbuch der Physik, Vol. VIaII/ Ed. by Truesdell C.* Berlin: Springer, P. 1–296.
6. *Nakano H.* Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // *Geophys. Mag.* 1930. V. 2. P. 189–348.
7. *Nakano H.* On Rayleigh waves // *Japan J. Astron. & Geophys.* 1925. V. 2. P. 233–326.
8. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A.* 1949. V. 242. P. 63–100.

9. *Cagniard L.* Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939. 255 p.
10. *de Hoop A.T.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems // *Appl. Sci. Res. Sect. Ser. B.* 1960. V. 8. № 4. P. 349–356.
11. *Петрашень Г.И.* О задаче Лэмба в случае упругого полупространства // *Докл. АН СССР.* 1949. Т. 64. С. 649–652.
12. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лэмба в случае полупространства // *Уч. зап. ЛГУ. Сер. Мат.* 1950. № 135. Вып. 21. С. 71–118.
13. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР.* 1932. № 20. 37 с.
14. *Смирнов В.И., Соболев С.Л.* О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР.* 1933. № 29. С. 43–51.
15. *Огурцов К.И., Петрашень Г.И.* Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // *Уч. зап. ЛГУ. Сер. Мат.* 1951. № 149. Вып. 24. С. 3–117.
16. *Pekeris C.L.* The seismic surface pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1955. V. 41. P. 469–480.
17. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1955. V. 41. P. 629–639.
18. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a burried pulse // *J. Acoust. Soc. Am.* 1957. V. 29. P. 1233–1238.
19. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // *Bull. Seism. Soc. Amer.* 1979. V. 69. P. 947–956.
20. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
21. *Перегудов Д.В.* Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра // *Выч. сейсмол.* 2000. Вып. 31. С. 120–137.
22. *Шемякин Е.И., Файншмидт В.Л.* Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой // *Уч. зап. ЛГУ.* 1954. № 177. Вып. 28. С. 148–179.
23. *Никифоровский В.С.* Исследование динамического поля напряжений в упругом полупространстве в окрестности точки приложения поверхностной нагрузки // *ПМТФ.* 1962. № 2. С. 85–94.
24. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979.
25. *Нарышкина Е.А.* Колебания полупространства при любых начальных условиях // *Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР.* 1934. № 45. 71 с.
26. *Гоголадзе В.Г.* Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн Рэлея // *Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР.* 1947. № 125. 43 с.
27. *Stokes G.G.* On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 1849. V. 8. P. 287–319.
28. *Шерман Д.И.* Колебания упругого полупространства при заданных смещениях или внешних силах на границе // *Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР.* 1946. № 118. 47 с.
29. *Шаташвили С.Х.* Приведение одной смешанной задачи теории установившихся упругих колебаний к интегральным уравнениям Фредгольма // *Сообщ. Акад. наук Груз. ССР.* 1953. Т. XIV. № 5. С. 257–260.
30. *Шаташвили С.Х.* Об одной смешанной задаче теории установившихся колебаний упругого полупространства // *Тр. Груз. политехн. ин-т.* 1956. № 1. С. 77–80.
31. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
32. *Graff K.P.* Wave Motion in Elastic Solids. Oxford: Clarendon, 1975. 682 p.
33. *Frederick J.R.* Ultrasonic Engineering. New York: Wiley, 1965. 382 p.
34. *Lang H.A.* Surface displacements in an elastic half-space // *Z. Angew Math. Mech.* 1961. V. 41. P. 141–153.
35. *Mitra M.* Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // *Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci.* 1961. V. 60. P. 683–696.
36. *Mooney H.M.* Some numerical solutions for Lamb's problem // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1974. V. 64. № 2. P. 473–491.

37. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1979. V. 69. № 4. P. 947–956.
38. *Kausel E.* *Fundamental Solutions of Elastodynamics.* New York: Cambridge Univ. Press, 2006. 251 p.
39. *Lax P.D., Wendroff B.* Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // *Comm. Pure Appl. Math.* 1964. V. 17. P. 381–398.
40. *Wendroff B.* *Theoretical Numerical Analysis.* New York: Acad. Press, 1967.
41. *Годунов С.К. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
42. *Самарский А.А.* Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости // *ЖВММФ.* 1965. Т.5. № 1. С. 34–43.
43. *Clifton R.J.* A difference method for plane problems in dynamic elasticity // *Quart. Appl. Math.* 1967. V. 25. № 1. P. 97–116.
44. *Сабодаш П.Ф., Чередяченко Р.А.* Применение метода пространственных характеристик к решению задачи о распространении волн в упругой полуполосе // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1972. № 6. С. 180–185.
45. *Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н.* Численное решение неодномерных задач динамики упруго-пластических сред // в кн.: *Избранные проблемы прикладной механики.* М.: ВИНТИ, 1974.
46. *Кукуджанов В.Н.* Численное решение неодномерных задач распространения волн напряжений в твердых телах // *Сообщ. по прикл. матем.* М.: ВЦ АН СССР, 1976. Вып. 6. 67 с.
47. *Веденяпин Е.Н., Кукуджанов В.Н.* Метод численного интегрирования нестационарных задач динамики упругой среды // *ЖВММФ.* 1981. Т. 21. № 5. С. 1233–1248.
48. *Moczó P. et al.* Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1997. V. 87. P. 1305–1323.
49. *Levander A.R.* Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // *Geophys.* 1988. V. 53. P. 1425–1436.
50. *Moczó P., Kristek J., Vavrycuk V., Archuleta R.J., Halada L.* 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities // *Bull. Seism. Soc. Am.* 2002. V. 92. № 8. P. 3042–3066.
51. *Shuo M., Archuleta R.J., Liu P.* Hybrid modeling of elastic P-SV wave motion: A combined finite-element and staggered-grid finite-difference approach // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 2004. V. 94. № 4. P. 1557–1563.
52. *Komatitsch D., Tromp J.* Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation // *Geophys. J. Int.* 1999. V. 139. P. 806–822.
53. *Komatitsch D., Tromp J.* Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. I. Validation // *Geophys. J. Int.* 2002. V. 149. № 2. P. 390–412.
54. *Komatitsch D., Tromp J.* Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. II. 3-D models, oceans, rotation, and self-gravitation // *Geophys. J. Int.* 2002. V. 150. № 1. P. 303–318.
55. *Olsen K.B., Archuleta R.J.* Three-dimensional simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1996. V. 86. P. 575–596.
56. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // *Quart. Appl. Math.* 2006. V. 64. P. 153–165.
57. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *JAMM.* 2006. V. 70(1). P. 116–127.
58. *Ilyashenko A.V. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. V. 69. № 17. P. 1–11.
59. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.* 2011. V. 57. P. 420–426.
60. *Kraut E.A.* Advances in the theory of elastic wave propagation // *Rev. Geophys.* 1963. V. 1. P. 401–448.
61. *Burridge R.* Lamb's problem for an anisotropic halfspace // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1971. V. 24. № 1. P. 81–98.
62. *Payton R.G.* *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media.* The Hague: Martinus Nijhoff, 1983.
63. *Wu K.-C.* Extension of Stroh's formalism to self-similar problems in two-dimensional elastodynamics // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* 2000. V. 456. P. 869–890.
64. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* 1962. V. 41. P. 77–103.

65. Willis J.R. Self-similar problems in elastodynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1973. V. A274. № 1240. P. 435–491.
66. Bedding R.J., Willis J.R. The dynamic indentation of an elastic half-space // J. Elast. 1973. V. 3. P. 289–309.
67. Willis J.R., Bedding R.J. Transient elastodynamic fields in anisotropic plates and layers // in: Modern Problems in Elastic Wave Propagation / Ed. by Miklowitz J., Achenbach J.D. New York: Wiley, 1978. P. 347–355.
68. van der Hijden J.H.M.T. Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media. Amsterdam: North-Holland, 1987.
69. Wang C.-Y., Achenbach J.D. Lamb's problem for solid of general anisotropy // Wave Motion. 1996. V. 24. P. 227–242.
70. Mourad A., Deschamps M. Lamb's problem for an anisotropic half-space studied by the Cagniard de Hoop method // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. P. 3194–3197.
71. Mourad A., Deschamps M., Castagnede B. Acoustic waves generated by a transient line source in an anisotropic half-space // Acustica. 1996. V. 82. P. 839–851.
72. Eringen A.C., Suhubi E.S. Elastodynamics. V. 2. New York: Academic, 1975. P. 600–644.
73. Spies M. Green's tensor function for Lamb's problem: The general anisotropic case // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. P. 2438–2441.
74. Every A.G., Kim K.Y., Maznev A.A. The elastodynamic response of a semi-infinite anisotropic solid to sudden surface loading // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102. P. 1346–1355.
75. Every A.G., Kim K.Y., Maznev A.A. Surface dynamic response functions of anisotropic solids // Ultrasonics. 1998. V. 36. P. 349–353.
76. Oldham R.D. On the propagation of earthquake motion to great distances // Phil. Trans. Roy. Soc. (London). Ser. A. 1900. V. 194. P. 135–174.
77. Northwood T.D., Anderson D.V. Model Seismology // Bull. Seism. Soc. Am. 1953. V. 43. P. 239–246.
78. Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 356–367.
79. Kravtsov A.V. et al. Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
80. Ilyashenko A.V. et al. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. P. 1385–1394.
81. Kanamori H., Given J.W. Lamb pulse observed in nature // Geophys. Res. Lett. 1983. V. 10. P. 373–376.
82. Адушкин В.В., Спивак А.А. Геомеханика крупномасштабных взрывов. М.: Недра, 1993. 319 с.
83. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. М.: Недра, 1986. 301 с.
84. Маеницкий В.А. Общая геофизика. М.: МГУ, 1995. 317 с.
85. Dally J.W., Durrelli A.J., Riley W.F. Photoelastic study of stress wave propagation in large plates // Proc. Soc. Exp. Stress Analysis. 1960. V. 17. P. 33–50.
86. Dally J.W., Thau S.A. Observations of stress wave propagation in a half-plane with boundary loading // Int. J. Solids Struct. 1967. V. 3. P. 293–307.
87. Dally J.W. A dynamic photoelastic study of a doubly loaded half-plane // Develop. Mech. 1968. V. 4. P. 649–664.
88. Glaser S.D., Weiss G.G., Johnson L.R. Body waves recorded inside an elastic half-space by an embedded, wideband velocity sensor // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. Iss. 3. P. 1404–1412.
89. Hsiao C.P., Kline R.A., Grasse K.A. A theoretical and experimental study of the propagation of acoustic emission signals in polymeric media // IEEE 1986 Ultrasonics Symp. 1986. P. 1005–1008.
90. Huynh A. et al. Optical excitation and detection of terahertz acoustic waves with semiconductor superlattices // J. Phys. Conf. Ser. 2010. V. 214. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/214/1/012047>
91. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Изв. АН СССР. ОН. 1961. № 4. С. 109–115.
92. Тимошенко С.П. Прочность и колебание элементов конструкций. Избранные работы / Под ред. Григолюка Э.И. М.: Наука, 1975.
93. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Киев: Наукова думка, 1974.
94. Энгельбрехт Ю.К., Никул У.К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981.

95. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под действием движущихся нагрузок. Ч. I. Балки, стержни и арки под действием подвижных нагрузок // в кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. Вып. 8. С. 3–42.
96. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под действием движущихся нагрузок. Ч. II. Балки, стержни и арки под действием подвижных нагрузок // в кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. Вып. 9. С. 118–156.
97. Горошко О.А., Савин Т.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971.
98. Ишлинский А.Ю. Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 5. С. 370–374.
99. Неронов Н.П. Об упругих деформациях в подъемном канате // ПММ. 1937. Т. 1. № 1. С. 91–96.
100. Неронов Н.П. Определение напряжений в подъемном канате // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57. № 8. С. 765–768.
101. Доценко П.Д. О нелинейных колебаниях движущейся струны // Самолетостроение и техн. возд. флота. 1971. № 25. С. 123–126.
102. Кожегин Я. Поперечные колебания напряженных гибких звеньев передач // в кн.: Теория машин и механизмов. М.: Наука, 1976.
103. Раздольский А.Г., Заболотный Ю.В. К исследованию переходных процессов одномерных механических систем переменной длины // в кн.: Динамика машин. М.: Наука, 1974.
104. Светлицкий В.А. Передача с гибкой связью. М.: Машиностроение, 1967.
105. Весницкий А.И., Лисенкова Е.Е. Частотно-энергетические соотношения для упругих волн в одномерных системах с движущимися объектами // Акустич. ж. 1995. Т. 41. № 2. С. 209–215.
106. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
107. Весницкий А.И., Катан Л.Э., Уткин Г.А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. № 5. С. 863.
108. Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Ч. 2. Динамика. М.: Физматлит, 1962. 280 с.
109. Thurman A.L., Mote C.D. (Jr) Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip // Trans ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 87–98.
110. Бернштейн С.А. Ледяная железнодорожная переправа (работа, теория и расчет ледяного слоя). М.: Транспечать, 1929. 42 с.
111. Корнев Б.Г. О движении нагрузки по пластинке, лежащей на упругом основании // Строит. мех. и расчет сооруж. 1967. № 3. С. 27–30.
112. Бляхман Р.И. Колебания бесконечной пластинки на упругом полупространстве под действием подвижной нагрузки // Строит. мех. и расчет сооруж. 1967. № 3. С. 112–115.
113. Муравский Г.Б. Действие движущейся системы сил на балку, лежащую на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 190–195.
114. Козин В.М. и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Изд. Акад. естеств., 2008.
115. Жесткая В.Д., Джабраилов М.Р. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову с трещиной // ПМТФ. 2008. № 3. Т. 49. С. 151–156.
116. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. New York: Kluwer Acad. Publ., 1996.
117. Wang R.T. Vibration of multi-span Timoshenko beams subjected to a concentrated moving force // J. Sound&Vibr. 1997. V. 207. P. 731–742.
118. Hong S.W., Kim J.W. Modal analyses of multi span Timoshenko beams connected or supported by resilient joints with damping // J. Sound&Vibr. 1999. V. 227(4). P. 787–806.
119. Ichikawa M., Miyakawa Y., Matsuda A. Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass // J. Sound&Vibr. 2000. V. 230(3). P. 493–506.
120. Kim S.-M. Vibration and Stability of axial loaded beams on elastic foundation under moving harmonic loads // Engng. Struct. 2004. № 26. P. 95–105.
121. Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P. The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads // Comput.&Struct. 2000. V. 78. P. 789–799.

122. Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P. Dynamic responses of structures to moving bodies using combined finite element and analytical methods // *Int. J. Mech. Sci.* 2001. V. 43. P. 2555–2579.
123. Wu J.J. Dynamic analysis of a rectangular plate under a moving line load using scale beams and scaling laws // *Comput.&Struct.* 2005. V. 83. P. 1646–1658.
124. Kuznetsov S.V. Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // *Quart. Appl. Math.* 2005. V. 63. P. 455–467.
125. Andersen L., Nielsen S.R.K., Kirkegaard P.H. Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected coordinates // *J. Sound&Vibr.* 2001. V. 241. Iss. 4–5. P. 587–604.
126. Kadivar M.H., Mohebpour S.R. Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear effect and rotary inertia under the action of moving loads // *Finite Elements in Anal.&Design.* 1998. V. 29. P. 259–273.
127. Hugul S. *Vibration Analysis of Systems Subjected to Moving Loads by Using the Finite Element Method* / PhD Thesis. Izmir: Dokuz Eylül Univ., 2005.
128. Liu K., DeRoock G., Reynders E. Experimental validation of the dynamic analysis of high speed composite railway bridge // *EURODYN 2008.* Southampton. UK. P. 1–16.
129. Fryba L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads.* Groningen: Noordhoff Int. Publ., 1972.
130. Jonsson J.O. *On Ground and Structural Vibrations Related to Railway Traffic* / PhD Thesis. Sweden: Chalmers Univ. Technol., 2000.
131. Шехтер О.Я. Вынужденные горизонтальные колебания круглого штампа на упругом полупространстве // в сб.: *Основания, фундаменты и подземные сооружения.* № 61. М.: Госстройиздат, 1971. С. 26–30.
132. Сеймов В.М., Ермоленко Н.П., Зайцева Е.А. Неосесимметричные периодические и нестационарные колебания круглого штампа на упругом полупространстве // *Прикл. мех.* 1997. Т. 33. № 5. С. 41–48.
133. Михайлюк В.С. Определение вертикальных перемещений точки поверхности грунта вне массивного фундамента при действии на него вращательного импульса // *Сб. научн. тр. НИИОСП им. Н.М. Герсеевича.* 2008. Вып. № 99. С. 95–100.
134. Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R. Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space, Part 1 // *Zisin.* 1972. V. 25. P. 207–217.
135. Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R. Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space, Part 2 // *Zisin.* 1972. V. 25. P. 333–342.
136. Djeran-Maigre I. et al. Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // *Comptes Rendus. Mecanique.* 2008. V. 336(1–2). P. 102–107.
137. Johnson L.R. Green's function for Lamb's problem // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 1974. V. 37. P. 99–131.
138. Pan Y.C., Chou T.W. Green's function solutions for semi-infinite transversely isotropic materials // *Int. J. Engng. Sci.* 1979. V. 17. P. 545–551.
139. Gupta U. On leaking modes // *Pure&Appl. Geophys.* 1970. V. 80. № 1. P. 27–37.
140. Chapman C.H. Lamb's problem and comments on the paper 'on leaking modes' by Usha Gupta // *Pure&Appl. Geophys.* 1972. V. 94. № 1. P. 233–247.

Lamb Problems and Related Dynamics Problems

V. A. Bratov^{a,b,c}, S. V. Kuznetsov^{d,#}, and N. F. Morozov^{a,b}

^a Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia

^b St Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

^c Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

^d Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

The solution of the internal and external Lamb problems from a concentrated force applied to the free boundary of an elastic half-space (half-plane) is analyzed. Some related problems are also considered, in particular, the application of doublets and dipoles in an elastic half-space, the appearance of high-frequency waves corresponding to the Rayleigh wave during

the propagation of Pochhammer–Cree waves, etc. Solutions of problems about a moving load applied to the boundary of a half-space or half-plane are analyzed.

Keywords: Lamb problem, bulk wave, Rayleigh wave, half-space, half-plane

REFERENCES

1. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1904, vol. 203, pp. 1–42.
2. *Lamb H.* On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids // *Phil. Mag.*, 1916, vol. 13, pp. 386–399; 539–548.
3. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* *Elastic Waves in Layered Media*. N. Y.: McGraw-Hill, 1957.
4. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // *Proc. London Math. Soc.*, 1885, vol. 17, pp. 4 – 11.
5. *Gurtin M.E.* The Linear theory of elasticity // in: *Handbuch der Physik*, Vol. VIaII/ Ed. by *Truesdell C.* Berlin: Springer, pp. 1–296.
6. *Nakano H.* Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // *Geophys. Mag.*, 1930, vol. 2, pp. 189–348.
7. *Nakano H.* On Rayleigh waves // *Japan J. Astron.&Geophys.*, 1925, vol. 2, pp. 233–326.
8. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A*, 1949, vol. 242, pp. 63–100.
9. *Cagniard L.* Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939. 255 p.
10. *de Hoop A.T.* A modification of Cagniard’s method for solving seismic pulse problems // *Appl. Sci. Res. Sect. Ser. B*, 1960, vol. 8, no. 4, pp. 349–356.
11. *Petrashen G.I.* On the Lamb problem in the case of an elastic half-space // *Dokl. Acad. Sci. of the USSR*, 1949, vol. 64, pp. 649–652.
12. *Petrashen G.I., Marchuk G.I., Ogurtsov K.I.* On the Lamb problem in the case of a half-space // *Uch. Zap. LGU. Ser. Mat.*, 1950, no. 135, iss. 21, pp. 71–118.
13. *Smirnov V.I., Sobolev S.L.* A new method for solving the plane problem of elastic vibrations // *Tr. Seismol. Inst. AS USSR*, 1932, no. 20, 37 p.
14. *Smirnov V.I., Sobolev S.L.* On the application of a new method to the study of elastic oscillations in space in the presence of axial symmetry // *Tr. Seismol. Inst. AS USSR*, 1933, no. 29, pp. 43–51.
15. *Ogurtsov K.I., Petrashen G.I.* Dynamic problems for an elastic half-space in the case of axial symmetry // *Uch. Zap. LGU. Ser. Mat.*, 1951, no. 149, iss. 24, pp. 3–117.
16. *Pekeris C.L.* The seismic surface pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1955, vol. 41, pp. 469–480.
17. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1955, vol. 41, pp. 629–639.
18. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a burried pulse // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1957, vol. 29, pp. 1233–1238.
19. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb’s problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 1979, vol. 69, pp. 947–956.
20. *Poruchikov V.B.* *Methods of Dynamic Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka, 1986. (in Russian)
21. *Peregudov D.V.* The two-dimensional Lamb problem. Cañar method // *Vych. Seismol.*, 2000, iss. 31, pp. 120–137.
22. *Shemyakin E.I., Fainshmidt V.L.* Propagation of waves in an elastic half-space excited by a surface tangential force // *Uch. Zap. LGU*, 1954, no. 177, iss. 28, pp. 148–179.
23. *Nikiforovsky V.S.* Investigation of the dynamic stress field in an elastic half-space in the vicinity of the point of application of the surface load // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1962, no. 2, pp. 85–94.
24. *Nikiforovsky V.S., Shemyakin E.I.* *Dynamic Destruction of Solids*. Novosibirsk: Nauka, 1979.
25. *Naryshkina E.A.* Oscillations of a half-space under any initial conditions // *Tr. Seismol. Inst. AS USSR*, 1934, no. 45, 71 p.
26. *Gogoladze V.G.* Reflection and refraction of elastic waves. General theory of Rayleigh boundary waves // *Tr. Seismol. Inst. AS USSR*, 1947, no. 125, 43 p.

27. *Stokes G.G.* On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 1849, vol. 8, pp. 287–319.
28. *Sherman D.I.* Oscillations of an elastic half-space with given displacements or external forces at the boundary // *Tr. Seismol. Inst. AS USSR*, 1946, no. 118, 47 p.
29. *Shatashvili S.Kh.* Reduction of a mixed problem in the theory of steady-state elastic vibrations to Fredholm integral equations // *Soobshch. Acad. Sci. Gruz. SSR*, 1953, vol. XIV, no. 5, pp. 257–260.
30. *Shatashvili S.Kh.* On a mixed problem in the theory of steady oscillations of an elastic half-space // *Tr. Gruz. Polytechn. Inst.*, 1956, no. 1, pp. 77–80.
31. *Viktorov I.A.* Physical Foundations for the Use of Rayleigh and Lamb Ultrasonic Waves in Technology. Moscow: Nauka, 1966. 168 p. (in Russian)
32. *Graff K.P.* Wave Motion in Elastic Solids. Oxford: Clarendon, 1975. 682 p.
33. *Frederick J.R.* Ultrasonic Engineering. N.Y.: Wiley, 1965. 382 p.
34. *Lang H.A.* Surface displacements in an elastic half-space // *Z. Angew Math. Mech.*, 1961, vol. 41, pp. 141–153.
35. *Mitra M.* Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure // *Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci.*, 1961, vol. 60, pp. 683–696.
36. *Mooney H.M.* Some numerical solutions for Lamb's problem // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1974, vol. 64, no. 2, pp. 473–491.
37. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 1979, vol. 69, no. 4, pp. 947–956.
38. *Kausel E.* Fundamental Solutions of Elastodynamics. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2006. 251 p.
39. *Lax P.D., Wendroff B.* Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, vol. 17, pp. 381–398.
40. *Wendroff B.* Theoretical Numerical Analysis. N.Y.: Acad. Press, 1967.
41. *Godunov S.K.* Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1976. 400 p. (in Russian)
42. *Samarsky A.A.* Economical difference schemes for a hyperbolic system of equations with mixed derivatives and their application to equations of the theory of elasticity // *ZhVMMF*, 1965, vol. 5, no. 1, pp. 34–43.
43. *Clifton R.J.* A difference method for plane problems in dynamic elasticity // *Quart. Appl. Math.*, 1967, vol. 25, no. 1, pp. 97–116.
44. *Sabodash P.F., Cherednechenko R.A.* Application of the method of spatial characteristics to the solution of the problem of wave propagation in an elastic half-band // *Mech. Solids*, 1972, no. 6, pp. 180–185.
45. *Kondaurov V.I., Kukudzhanov V.N.* Numerical solution of non-one-dimensional problems of the dynamics of elastic-plastic media // in: *Selected Problems of Applied Mechanics*. Moscow: VINITI, 1974.
46. *Kukudzhanov V.N.* Numerical solution of non-one-dimensional problems of propagation of stress waves in solids // in: *Soobshch. on Appl. Math.* Moscow: VTs AN SSSR, 1976. Iss. 6. 67 p.
47. *Vedenyapin E.N., Kukudzhanov V.N.* Numerical integration method for non-stationary problems of the dynamics of an elastic medium // *ZhVMMF*, 1981, vol. 21, no. 5, pp. 1233–1248.
48. *Moczó P. et al.* Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1997, vol. 87, pp. 1305–1323.
49. *Levander A.R.* Fourth-order finite-difference P-SV seismograms // *Geophys.*, 1988, vol. 53, pp. 1425–1436.
50. *Moczó P., Kristek J., Vavrycuk V., Archuleta R.J., Halada L.* 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 2002, vol. 92, no. 8, pp. 3042–3066.
51. *Shuo M., Archuleta R.J., Liu P.* Hybrid modeling of elastic P-SV wave motion: A combined finite-element and staggered-grid finite-difference approach // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 2004, vol. 94, no. 4, pp. 1557–1563.
52. *Komatitsch D., Tromp J.* Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation // *Geophys. J. Int.*, 1999, vol. 139, pp. 806–822.

53. *Komatitsch D., Tromp J.* Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. I. Validation // *Geophys. J. Int.*, 2002, vol. 149, no. 2, pp. 390–412.
54. *Komatitsch D., Tromp J.* Spectral-element simulations of global seismic wave propagation. II. 3-D models, oceans, rotation, and self-gravitation // *Geophys. J. Int.*, 2002, vol. 150, no. 1, pp. 303–318.
55. *Olsen K.B., Archuleta R.J.* Three-dimensional simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1996, vol. 86, pp. 575–596.
56. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // *Quart. Appl. Math.*, 2006, vol. 64, pp. 153–165.
57. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *JAMM*, 2006, vol. 70(1), pp. 116–127.
58. *Ilyashenko A.V. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.*, 2018, vol. 69, no. 17, pp. 1–11.
59. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, pp. 420–426.
60. *Kraut E.A.* Advances in the theory of elastic wave propagation // *Rev. Geophys.*, 1963, vol. 1, pp. 401–448.
61. *Burridge R.* Lamb's problem for an anisotropic halfspace // *Q.J. Mech. Appl. Math.*, 1971, vol. 24, no. 1, pp. 81–98.
62. *Payton R.G.* *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media.* The Hague: Martinus Nijhoff, 1983.
63. *Wu K.-C.* Extension of Stroh's formalism to self-similar problems in two-dimensional elastodynamics // *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, 2000, vol. 456, pp. 869–890.
64. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.*, 1962, vol. 41, pp. 77–103.
65. *Willis J.R.* Self-similar problems in elastodynamics // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1973, vol. A274, no. 1240, pp. 435–491.
66. *Bedding R.J., Willis J.R.* The dynamic indentation of an elastic half-space // *J. Elast.*, 1973, vol. 3, pp. 289–309.
67. *Willis J.R., Bedding R.J.* Transient elastodynamic fields in anisotropic plates and layers // in: *Modern Problems in Elastic Wave Propagation* / Ed. by *Miklowitz J., Achenbach J.D.* N.Y.: Wiley, 1978. pp. 347–355.
68. *van der Hijden J.H.M.T.* *Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media.* Amsterdam: North-Holland, 1987.
69. *Wang C.-Y., Achenbach J.D.* Lamb's problem for solid of general anisotropy // *Wave Motion*, 1996, vol. 24, pp. 227–242.
70. *Mourad A., Deschamps M.* Lamb's problem for an anisotropic half-space studied by the Cagniard de Hoop method // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, vol. 97, pp. 3194–3197.
71. *Mourad A., Deschamps M., Castagnede B.* Acoustic waves generated by a transient line source in an anisotropic half-space // *Acustica*, 1996, vol. 82, pp. 839–851.
72. *Eringen A.C., Suhubi E.S.* *Elastodynamics.* Vol. 2. N.Y.: Academic, 1975. pp. 600–644.
73. *Spies M.* Green's tensor function for Lamb's problem: The general anisotropic case // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, vol. 102, pp. 2438–2441.
74. *Every A.G., Kim K.Y., Maznev A.A.* The elastodynamic response of a semi-infinite anisotropic solid to sudden surface loading // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, vol. 102, pp. 1346–1355.
75. *Every A.G., Kim K.Y., Maznev A.A.* Surface dynamic response functions of anisotropic solids // *Ultrasonics*, 1998, vol. 36, pp. 349–353.
76. *Oldham R.D.* On the propagation of earthquake motion to great distances // *Phil. Trans. Roy. Soc. (London). Ser. A*, 1900, vol. 194, pp. 135–174.
77. *Northwood T.D., Anderson D.V.* Model Seismology // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1953, vol. 43, pp. 239–246.
78. *Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 356–367.
79. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, pp. 952–959.
80. *Ilyashenko A.V. et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.*, 2018, vol. 88, pp. 1385–1394.

81. *Kanamori H., Given J.W.* Lamb pulse observed in nature // *Geophys. Res. Lett.*, 1983, vol. 10, pp. 373–376.
82. *Adushkin V.V., Spivak A.A.* Geomechanics of Large-Scale Explosions. Moscow: Nedra, 1993. 319 p. (in Russian)
83. *Rodionov V.N., Sizov I.A., Tsvetkov V.M.* Fundamentals of Geomechanics. Moscow: Nedra, 1986. 301 p. (in Russian)
84. *Magnitsky V.A.* General Geophysics. Moscow: MSU, 1995. 317 p. (in Russian)
85. *Dally J.W., Durrelli A.J., Riley W.F.* Photoelastic study of stress wave propagation in large plates // *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*, 1960, vol. 17, pp. 33–50.
86. *Dally J.W., Thau S.A.* Observations of stress wave propagation in a half-plane with boundary loading // *Int. J. Solids Struct.*, 1967, vol. 3, pp. 293–307.
87. *Dally J.W.* A dynamic photoelastic study of a doubly loaded half-plane // *Develop. Mech.*, 1968, vol. 4, pp. 649–664.
88. *Glaser S.D., Weiss G.G., Johnson L.R.* Body waves recorded inside an elastic half-space by an embedded, wideband velocity sensor // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, vol. 104, iss. 3, pp. 1404–1412.
89. *Hsiao C.P., Kline R.A., Grasse K.A.* A theoretical and experimental study of the propagation of acoustic emission signals in polymeric media // *IEEE 1986 Ultrasonics Symp.*, 1986, pp. 1005–1008.
90. *Huynh A. et al.* Optical excitation and detection of terahertz acoustic waves with semiconductor superlattices // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2010, vol. 214. doi:10.1088/1742-6596/214/1/012047
91. *Bolotin V.V.* The problem of vibrations of bridges under the action of a moving load // *Izv. AS USSR. Techn. Sci.*, 1961, no. 4, pp. 109–115.
92. *Timoshenko S.P.* Strength and Vibration of Structural Elements. Selected Works. Moscow: Nauka, 1975.
93. *Filippov A.P., Kokhmanyuk S.S., Vorobyov Yu.S.* Impact of Dynamic Loads on Structural Elements. Kyiv: Naukova Dumka, 1974. (in Russian)
94. *Engelbrecht Yu.K., Nigul U.K.* Nonlinear Deformation Waves. Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)
95. *Yakushev N.Z.* Dynamics of deformable systems under the action of moving loads. Part I. Beams, rods and arches under the action of moving loads // in: *Research on the Theory of Plates and Shells*. Kazan: Kazan. Univ., 1972. Iss. 8. pp. 3–42.
96. *Yakushev N.Z.* Dynamics of deformable systems under the action of moving loads. Part II. Beams, rods and arches under the action of moving loads // in: *Research on the Theory of Plates and Shells*. Kazan: Kazan. Univ., 1972. Iss. 9, pp. 118–156.
97. *Goroshko O.A., Savin T.N.* Introduction to the Mechanics of Deformable One-Dimensional Bodies of Variable Length. Kyiv: Naukova Dumka, 1971. (in Russian)
98. *Ishlinsky A. Yu.* On the equation of longitudinal motions of a rope (elastic thread) of variable length // *Dokl. AS USSR*, 1954, vol. 95, no. 5, pp. 370–374.
99. *Neronov N.P.* On elastic deformations in the lifting rope // *JAMM*, 1937, vol. 1, no. 1, pp. 91–96.
100. *Neronov N.P.* Determination of stresses in the lifting rope // *Dokl. AS USSR*, 1947, vol. 57, no. 8, pp. 765–768.
101. *Dotsenko P.D.* On nonlinear oscillations of a moving string // *Samoletostroenie i Tekhn. Air Navy*, 1971 no. 25, pp. 123–126.
102. *Kozheginik Ya.* Transverse vibrations of stressed flexible gear links // in: *Theory of Machines and Mechanisms*. Moscow: Nauka, 1976.
103. *Razdolsky A.G., Zabolotny Yu.V.* To the study of transient processes of one-dimensional mechanical systems of variable length // in: *Dynamics of Machines*. Moscow: Nauka, 1974.
104. *Svetlitsky V.A.* Transfers with Flexible Connection. Moscow: Mashinostroenie, 1967. (in Russian)
105. *Vesnitsky A.I., Lisenkova E.E.* Frequency-energy relationships for elastic waves in one-dimensional systems with moving objects // *Acoustic. J.*, 1995, vol. 41, no. 2, pp. 209–215.
106. *Vesnitsky A.I.* Waves in Systems with Moving Boundaries and Loads. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian)
107. *Vesnitsky A.I., Katan L.E., Utkin G.A.* Laws of change of energy and momentum for one-dimensional systems with moving fastenings and loads // *JAMM*, 1983, vol. 47, no. 5, pp. 863.

108. *Nikolai E.L.* Theoretical Mechanics. Part 2. Dynamics. Moscow: Fizmatlit, 1962. 280 p. (in Russian)
109. *Thurman A.L., Mote C.D. (Jr)* Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip // Trans ASME. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, no. 1, pp. 87–98.
110. *Bernstein S.A.* Ice Railway Crossing (Work, Theory and Calculation of the Ice Layer). Moscow: Transpechat, 1929. 42 p. (in Russian)
111. *Korenev B.G.* On the movement of a load on a plate lying on an elastic foundation // Stroit. Fur.&Calc. Construct., 1967, no. 3, pp. 27–30.
112. *Blyakhman R.I.* Oscillations of an infinite plate on an elastic half-space under the action of a moving load // Stroit. Fur.&Calc. Construct., 1967, no. 3, pp. 112–115.
113. *Muravsky G.B.* Action of a moving system of forces on a beam lying on an elastic foundation // Mech. Solids, 1975, no. 3, pp. 190–195.
114. *Kozin V.M.* Applied Problems of Dynamics of Ice Cover. Moscow: Akad. Estestvoznaniya, 2008.
115. *Hard V.D., Dzhabrailov M.R.* Numerical solution of the problem of the movement of a load on an ice cover with a crack // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2008, no. 3, vol. 49, pp. 151–156.
116. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. N.Y.: Kluwer Acad. Publ., 1996.
117. *Wang R.T.* Vibration of multi-span Timoshenko beams subjected to a concentrated moving force // J. Sound&Vibr., 1997, vol. 207, pp. 731–742.
118. *Hong S.W., Kim J.W.* Modal analyses of multi span Timoshenko beams connected or supported by resilient joints with damping // J. Sound&Vibr., 1999, vol. 227(4), pp. 787–806.
119. *Ichikawa M., Miyakawa Y., Matsuda A.* Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass // J. Sound&Vibr., 2000, vol. 230(3), pp. 493–506.
120. *Kim S.-M.* Vibration and Stability of axial loaded beams on elastic foundation under moving harmonic loads // Engng. Struct., 2004, no. 26, pp. 95–105.
121. *Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P.* The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads // Comput.&Struct., 2000, vol. 78, pp. 789–799.
122. *Wu J.J., Whittaker A.R., Cartmell M.P.* Dynamic responses of structures to moving bodies using combined finite element and analytical methods // Int. J. Mech. Sci., 2001, vol. 43, pp. 2555–2579.
123. *Wu J.J.* Dynamic analysis of a rectangular plate under a moving line load using scale beams and scaling laws // Comput.&Struct., 2005, vol. 83, pp. 1646–1658.
124. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math., 2005, vol. 63, pp. 455–467.
125. *Andersen L., Nielsen S.R.K., Kirkegaard P.H.* Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected coordinates // J. Sound&Vibr., 2001, vol. 241, iss. 4–5, pp. 587–604.
126. *Kadivar M.H., Mohebpour S.R.* Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear effect and rotary inertia under the action of moving loads // Finite Elements in Anal.&Design, 1998, vol. 29, pp. 259–273.
127. *Hugul S.* Vibration Analysis of Systems Subjected to Moving Loads by Using the Finite Element Method / PhD Thesis. Izmir: Dokuz Eylül Univ., 2005.
128. *Liu K., DeRoeck G., Reynders E.* Experimental validation of the dynamic analysis of high speed composite railway bridge // EURO DYN, 2008, Southampton. UK, pp. 1–16.
129. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Groningen: Noordhoff Int. Publ., 1972.
130. *Jonsson J.O.* On Ground and Structural Vibrations Related to Railway Traffic / PhD Thesis. Sweden: Chalmers Univ. Technol., 2000.
131. *Shekhter O.Ya.* Forced horizontal oscillations of a round stamp on an elastic half-space // in: Bases, Foundations and Underground Facilities. No. 61. Moscow: Gosstroyizdat, 1971, pp. 26–30.
132. *Seimov V.M., Ermolenko N.P., Zaitseva E.A.* Non-axisymmetric periodic and non-stationary oscillations of a round punch on an elastic half-space // Prikl. Mekh., 1997, vol. 33, no. 5, pp. 41–48.
133. *Mikhailyuk V.S.* Determination of vertical displacements of a point of the soil surface outside a massive foundation under the action of a rotational impulse on it // Sci. Tr. NIIOSP, 2008, no. 99, pp. 95–100.

-
134. *Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R.* Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space, Part 1 // *Zisin.*, 1972, vol. 25, pp. 207–217.
 135. *Kawasaki I., Suzuki Y., Sato R.* Seismic waves due to double couple source in a semi-infinite space, Part 2 // *Zisin.*, 1972, vol. 25, pp. 333–342.
 136. *Djeran-Maigre I. et al.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // *Comptes Rendus. Mecanique*, 2008, vol. 336(1–2), pp. 102–107.
 137. *Johnson L.R.* Green's function for Lamb's problem // *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 1974, vol. 37, pp. 99–131.
 138. *Pan Y.C., Chou T.W.* Green's function solutions for semi-infinite transversely isotropic materials // *Int. J. Engng. Sci.*, 1979, vol. 17, pp. 545–551.
 139. *Gupta U.* On leaking modes // *Pure&Appl. Geophys.*, 1970, vol. 80, no. 1, pp. 27–37.
 140. *Chapman C.H.* Lamb's problem and comments on the paper 'on leaking modes' by Usha Gupta // *Pure&Appl. Geoph.*, 1972, vol. 94, no. 1, pp. 233–247.

УДК 539.3

О СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ В МАЛОМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2022 г. В. А. Еремеев^{1,2,*}

¹ Университет Кальяри, Кальяри, Италия

² Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: eremeyev.victor@gmail.com

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.

После доработки 06.05.2022 г.

Принята к публикации 18.05.2022 г.

В рамках нелинейной градиентной теории упругости третьего порядка сформулированы достаточные условия устойчивости в малом аффинной деформации для крайних условий типа Дирихле. Условия состоят в выполнении трех неравенств, связанных с сильной эллиптичностью уравнений равновесия.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, сильная эллиптичность, устойчивость в малом

DOI: 10.31857/S0032823522040063

1. Введение. Модель градиентной теории упругости основана на предположении о зависимости плотности энергии деформации не только от градиента деформации, фактически первого градиента вектора перемещений, как в случае так называемых простых материалов или материалов в смысле Коши, но и от следующих градиентов деформаций [1–3]. В настоящее время этот подход получил распространение для моделирования некоторых композиционных материалов с существенными различиями в механических свойствах их компонент [4], а также для описания масштабных эффектов на наноуровне [5, 6]. Нужно отметить, что используются не только модели Тупина–Миндлина [7–10] или Айфантиса [6, 11], в которых предполагается зависимость энергии деформации от первого и второго градиентов перемещений, но и более сложные модели, учитывающие градиенты более высоких порядков [1, 12–15]. В частности, градиентная теория упругости третьего порядка допускает в уравнениях состояния градиенты перемещений до третьего порядка включительно. Миндлин [12] использовал эту модель для описания поверхностных напряжений в твердых телах, см. также [14, 15], где рассматриваются вопросы термоупругости и введено понятие группы симметрии.

Рассматривая уравнения равновесия градиентно-упругого материала, можно привлечь для анализа свойств их решений условие сильной эллиптичности, которое является наиболее употребительным определяющим неравенством в нелинейной теории упругости [16, 17]. В частности, для простых материалов установлена связь условия сильной эллиптичности и устойчивости в малом. В случае градиентных моделей материала эта связь, вообще говоря, является более сложной, см. [18].

Целью данной работы является анализ связи условий сильной эллиптичности и устойчивости в малом в рамках модели градиентно-упругого континуума третьего по-

рядка при конечных деформациях. Отметим, что в дальнейшем будут использоваться обозначения прямого (безиндексного) тензорного исчисления [16, 19].

2. Основные соотношения. Пусть B – ограниченное упругое тело, которое занимает в отсчетной конфигурации объем V с достаточно гладкой поверхностью $S = \partial B$. В качестве модели материала воспользуемся уравнениями градиентного упругого тела третьего порядка [12, 14, 15]. В рамках этой модели плотность потенциальной энергии деформации представляется как функция градиентов деформации

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}, \quad \mathbf{G} = \nabla \mathbf{F}, \quad \mathbf{H} = \nabla \mathbf{G}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{F} – градиент деформации, ∇ – трехмерный набла-оператор в отсчетной конфигурации, \mathbf{G} и \mathbf{H} – соответственно второй и третий градиенты деформации, \mathbf{x} – радиус-вектор места в актуальной конфигурации. С использованием принципа материальной индифферентности [16, 19] функция W приводится к виду [15]

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (2.2)$$

где \mathbf{C} – мера деформации Коши–Грина, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ – лагранжевы меры деформации, которые представляют собой соответственно тензоры третьего и четвертого рангов.

В отсутствие массовых сил уравнения равновесия в метрике отсчетной конфигурации принимают вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad (2.3)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений типа Пиолы, который дается формулами

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} - \nabla \cdot \mathbf{P}_1 + \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}_2) \quad (2.4)$$

В (2.4) \mathbf{P}, \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 – тензоры напряжений и гипернатяжений типа Пиолы, причем два последних являются тензорами третьего и четвертого ранга. Эти тензоры выражаются через плотность энергии деформации формулами

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{G}}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{H}} \quad (2.5)$$

В дальнейшем для простоты выкладок вместо (2.2) будем рассматривать энергию деформации в форме (2.1). Также ограничимся рассмотрением первой краевой задачи – на границе S предполагаются заданными перемещения и нормальные производные

Уравнение (2.3) представляет собой систему трех скалярных уравнений в частных производных шестого порядка относительно вектора места \mathbf{x} . Условие равномерной сильной эллиптичности (SE) для этой системы может быть записано следующим образом

$$(\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{a}) :: \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{H}^2} :: (\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{a}) \geq C |\mathbf{k}|^6 |\mathbf{a}|^2, \quad (2.6)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{a} – произвольные векторы, C – положительная постоянная, не зависящая от \mathbf{k} и \mathbf{a} , “::” – двойное скалярное произведение [19].

Отметим, что (2.6) не налагает требований на зависимость W от \mathbf{F} и \mathbf{G} . Представим зависимость (2.1) следующим образом

$$W \equiv W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) = W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G}) + W_2(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$$

где

$$W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})|_{\mathbf{H}=0}, \quad W_2(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) = W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) - W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G})$$

Здесь и далее $\mathbf{0}$ – нулевой вектор или тензор произвольного ранга. Таким образом, имеем $W_2(\mathbf{F}, \mathbf{G}, 0) = 0$. В дополнение примем естественное предположение, что

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{H}} \right|_{\mathbf{H}=\mathbf{0}} = 0,$$

которое в силу (2.5) означает, что соответствующий тензор гипернатяжений обращается в нуль, если $\mathbf{H} = \mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$.

С функцией $W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ поступим аналогично, представим в виде суммы

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G}) &= U(\mathbf{F}) + V(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \\ U(\mathbf{F}) &= W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G})|_{\mathbf{G}=\mathbf{0}}, \quad V(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = W_1(\mathbf{F}, \mathbf{G}) - U(\mathbf{F}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

При этом также примем предположение об отсутствии гипернатяжений \mathbf{P}_1 , если второй градиент деформации обращается в нуль:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{G}} \right|_{\mathbf{G}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

Таким образом, приходим к представлению энергии деформации градиентно-упругого материала третьего порядка в виде суммы

$$W = U(\mathbf{F}) + V(\mathbf{F}, \mathbf{G}) + W_2(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad (2.8)$$

Уравнение состояния (2.7) можно рассматривать как градиентную регуляризацию простого нелинейно-упругого материала с энергией деформации U . Тогда, в свою очередь, определяющие соотношения (2.8) представляют собой следующую градиентную регуляризацию градиентно-упругого материала первого порядка с энергией деформации W_1 .

Другими словами, наряду с градиентно-упругим материалом третьего порядка можно рассматривать два других материала – простой нелинейно упругий материал с энергией деформации U и градиентно-упругий материал с уравнением состояния W_1 . Для каждого из этих материалов можно сформулировать условия сильной эллиптичности

$$(\mathbf{kka}) : \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{G}^2} : (\mathbf{kka}) \geq C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2 \quad (2.9)$$

$$(\mathbf{ka}) : \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{H}^2} : (\mathbf{ka}) \geq C_2 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2, \quad (2.10)$$

где “:” – тройное произведение [19], C_1 и C_2 – положительные постоянные.

Для краткости назовем неравенства (2.9) и (2.10) соответственно условиями сильной эллиптичности первого (SE1) и нулевого (SE0) порядков.

3. Устойчивость в малом. Пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ – некоторое решение нелинейной краевой задачи. Его устойчивость в малом можно исследовать методом линеаризации [16, 17]. Рассмотрим малое добавочное перемещение \mathbf{w} , так что возмущенное решение можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \tau \mathbf{w},$$

где τ – малый параметр. Следуя [16, 17], будем говорить, что решение $\tilde{\mathbf{x}}$ устойчиво в малом, если вторая вариация функционала полной энергии положительна для любых $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$

$$\delta^2 E > 0$$

$$E = \iiint_V W dV, \quad \delta^2 E = \iiint_V w dV \tag{3.1}$$

$$w = \frac{d^2}{d\tau^2} W (\tilde{\mathbf{F}} + \tau \nabla \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{G}} + \tau \nabla \nabla \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{H}} + \tau \nabla \nabla \nabla \mathbf{w}) \Big|_{\tau=0},$$

где $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{G}} = \nabla \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{H}} = \nabla \tilde{\mathbf{G}}$.

Равенство $\delta^2 E = 0$ для каких-то векторов \mathbf{w} , не равных нулю, означает существование нетривиальных решений линеаризованной краевой задачи и соответствует бифуркации равновесия.

4. Устойчивость в малом аффинной деформации. Назовем деформацию аффинной, если $\mathbf{C} = \text{const}$, а \mathbf{G} и \mathbf{H} обращаются в нуль. С учетом принятых предположений относительно формы W это означает, что для аффинной деформации гипернапряжения отсутствуют: $\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$.

Пусть решение $\tilde{\mathbf{x}}$ соответствует аффинной деформации. Тогда можно показать, что функцию w можно представить в виде

$$2w = \nabla \mathbf{w} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} + \nabla \nabla \mathbf{w} : \mathbf{D} : \nabla \nabla \mathbf{w} + \nabla \nabla \nabla \mathbf{w} : \mathbf{E} : \nabla \nabla \nabla \mathbf{w},$$

где $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ — тензоры касательных модулей, которые даются формулами

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{F}^2} \Big|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{G}^2} \Big|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{G}=\tilde{\mathbf{G}}}, \quad \mathbf{E} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{H}^2} \Big|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{G}=\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{H}=\tilde{\mathbf{H}}}$$

Неравенства сильной эллиптичности (2.6), (2.9) и (2.10) сводятся к соотношениям для $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$

$$(\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) : \mathbf{E} : (\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) \geq C |\mathbf{k}|^6 |\mathbf{a}|^2 \tag{4.1}$$

$$(\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) : \mathbf{D} : (\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) \geq C_1 |\mathbf{k}|^4 |\mathbf{a}|^2 \tag{4.2}$$

$$(\mathbf{k} \mathbf{a}) : \mathbf{C} : (\mathbf{k} \mathbf{a}) \geq C_2 |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|^2 \tag{4.3}$$

Используя подход [16, 18], можно показать, что выполнение всех условий эллиптичности (4.1)–(4.3) влечет положительность второй вариации потенциальной энергии деформации (3.1), т.е. устойчивость в малом. Действительно, с использованием преобразования Фурье и теоремы Планшереля для произвольного вектора \mathbf{w} , обращаемого в нуль на границе вместе со своими первой и второй нормальной производными,

$$\mathbf{w}|_S = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} \Big|_S = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial n^2} \Big|_S = \mathbf{0},$$

получаем серию формул

$$\begin{aligned} \delta^2 E &= \iiint_V w dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \mathbf{w} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} + \nabla \nabla \mathbf{w} : \mathbf{D} : \nabla \nabla \mathbf{w} + \nabla \nabla \nabla \mathbf{w} : \mathbf{E} : \nabla \nabla \nabla \mathbf{w}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\mathbf{k} \mathbf{a}) : \mathbf{C} : (\mathbf{k} \mathbf{a}) + (\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) : \mathbf{D} : (\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) + (\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a}) : \mathbf{E} : (\mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{k} \mathbf{a})] dV_k \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_2 |\mathbf{k}|^2 + C_1 |\mathbf{k}|^4 + C |\mathbf{k}|^6] |\mathbf{a}|^2 dV_k = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V [C_2 |\nabla \mathbf{w}|^2 + C_1 |\nabla \nabla \mathbf{w}|^2 + C |\nabla \nabla \nabla \mathbf{w}|^2] dV, \end{aligned}$$

из которых следует положительная определенность второй вариации функционала энергии.

Таким образом, в отличие от нелинейной теории упругости простых материалов [16, 17], одного условия сильной эллиптичности (2.6) недостаточно для устойчивости в малом аффинной деформации. В совокупности неравенства (2.6), (2.9) и (2.10) представляют собой достаточные условия устойчивости в малом в случае первой краевой задачи.

Заключение. В рамках градиентной теории упругости третьего порядка при конечных деформациях показано, что сильная эллиптичность (2.6) вместе с неравенствами сильной эллиптичности нулевого и первого порядков являются достаточными условиями устойчивости аффинной деформации в случае первой краевой задачи. Можно также показать, что устойчивость в малом влечет выполнение слабой формы неравенства (2.6), т.е. при $C = 0$. Нарушение условий (2.9) и (2.10), вообще говоря, может привести к неустойчивости в малом и будет более подробно рассмотрено в последующих работах.

Автор благодарен академику Н.Ф. Морозову за привлечение внимания автора к задачам наномеханики, которые являются широким полем приложения обобщенных моделей сплошной среды, и, в частности, градиентной теории упругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 20-08-00450.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations: Including Gradient Materials. 4th edition. Berlin: Springer Nature, 2021. 410 p.
2. Mechanics of Strain Gradient Materials. Ser. CISM International Centre for Mechanical Sciences. V. 600 / Ed. by *Bertram A., Forest S.* Cham: Springer, 2020. VIII+171 p.
3. *dell'Isola F., Corte A.D., Giorgio I.* Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives // *Math.&Mech. Solids*. 2017. V. 22. № 4. P. 852–872.
4. Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials / Ed by *dell'Isola F., Steigmann D.J.* Cambridge: Univ. Press, 2020. 398 p.
5. *Cordero N.M., Forest S., Busso E.P.* Second strain gradient elasticity of nano-objects // *J. Mech.&Phys. Solids*. 2016. V. 97. P. 92–124.
6. *Aifantis E.C.* Internal length gradient (ILG) material mechanics across scales and disciplines // *Adv. in Appl. Mech.* 2016. V. 49. P. 1–110.
7. *Toupin R.* Elastic materials with couple-stresses // *Arch. for Rational Mech.&Anal.* 1962. V. 11. № 1. P. 385–414.
8. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // *Arch. for Rational Mech.&Anal.* 1964. V. 17. № 2. P. 85–112.
9. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. for Rational Mech.&Anal.* 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
10. *Mindlin R.D., Eshel N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // *Int. J. Solids&Struct.* 1968. V. 4. № 1. P. 109–124.
11. *Aifantis E.C.* Update on a class of gradient theories // *Mech. Mater.* 2003. V. 35. № 3–6. P. 259–280.
12. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *Int. J. Solids&Struct.* 1965. V. 1. № 4. P. 417–438.
13. *dell'Isola F., Seppecher P., Madeo A.* How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in Nth gradient continua: approach “à la D'Alembert” // *Z. Angew. Math. Phys.* 2012. V. 63. P. 1119–1141.
14. *Reiher J.C., Bertram A.* Finite third-order gradient elasticity and thermoelasticity // *J. Elasticity*. 2018. V. 133 № 2. P. 223–252.

15. *Eremeyev V.A.* Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids // *Math.&Mech. Solids*. 2021. V. 26. № 8. P. 1173–1190.
16. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, 512 с.
17. *Ogden R.W.* Non-Linear Elastic Deformations. Mineola: Dover, 1997. 532 p.
18. *Eremeyev V.A.* Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity // *Mech. Res. Comm.*, 2021. V. 117, art no. 103782.
19. *Eremeyev V.A., Cloud M.J., Lebedev L.P.* Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics. New Jersey: World Scientific, 2018. 498 p.

On Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nonlinear Strain Gradient Elasticity of Third Order

V. A. Eremeyev^{a,b,#}

^a *University of Cagliari, Cagliari, Italy*

^b *Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia*

[#] *e-mail eremeyev.victor@gmail.com*

Within the framework of the nonlinear second strain gradient elasticity, we formulate sufficient conditions for infinitesimal stability of affine deformations under Dirichlet-type boundary conditions. The conditions consist of three inequalities related to strong ellipticity of equations of equilibrium.

Keywords: gradient theory of elasticity, strong ellipticity, infinitesimal stability

REFERENCES

1. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations: Including Gradient Materials. Berlin: Springer Nature, 2021. 410 p.
2. Mechanics of Strain Gradient Materials. Ser. CISM International Centre for Mechanical Sciences. V. 600 / Ed. by *Bertram A., Forest S.* Cham: Springer, 2020. VIII+171 p.
3. *dell'Isola F., Corte A.D., Giorgio I.* Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives// *Math.&Mech. Solids*, 2017, vol. 22. no. 4. pp. 852–872.
4. Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials / Ed. by *dell'Isola F., Steigmann D.J.* Cambridge: Univ. Press, 2020. 398 p.
5. *Cordero N.M., Forest S., Busso E.P.* Second strain gradient elasticity of nano-objects // *J. Mech.&Phys. Solids*, 2016, vol. 97, pp. 92–124.
6. *Aifantis E.C.* Internal length gradient (ILG) material mechanics across scales and disciplines // *Adv. in Appl. Mech.*, 2016, vol. 49, pp. 1–110.
7. *Toupin R.* Elastic materials with couple-stresses // *Arch. for Rational Mech.&Anal.*, 1962, vol. 11, no. 1, pp. 385–414.
8. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // *Arch. for Rational Mech.&Anal.*, 1964, vol. 17, no. 2, pp. 85–112.
9. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. for Rational Mech.&Anal.*, 1964, vol. 16, no. 1, pp. 51–78.
10. *Mindlin R.D., Eshel N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // *Int. J. Solids&Struct.*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 109–124.
11. *Aifantis E.C.* Update on a class of gradient theories// *Mech. Mater.*, 2003, vol. 35, no. 3–6, pp. 259–280.
12. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *Int. J. Solids&Struct.*, 1965, vol. 1, no. 4, pp. 417–438.
13. *dell'Isola F., Seppecher P., Madeo A.* How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in Nth gradient continua: approach “à la D’Alembert” // *Z. Angew. Math. Phys.*, 2012, vol. 63, pp. 1119–1141.

14. *Reiher J.C., Bertram A.* Finite third-order gradient elasticity and thermoelasticity // *J. Elasticity*, 2018, vol. 133, no. 2, pp. 223–252.
15. *Eremeyev V.A.* Local material symmetry group for first-and second-order strain gradient fluids // *Math.&Mech. Solids*, 2021, vol. 26, no. 8, pp. 1173–1190.
16. *Lurie A.I.* *Non-Linear Theory of Elasticity*. Amsterdam: North-Holland, 1990. 617 p.
17. *Ogden R.W.* *Non-Linear Elastic Deformations*. Mineola: Dover, 1997. 532 p.
18. *Eremeyev V.A.* Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity // *Mech. Res. Comm.*, 2021, vol. 117, art no. 103782.
19. *Eremeyev V.A., Cloud M.J., Lebedev L.P.* *Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics*. New Jersey: World Scientific, 2018. 498 p.

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2022 г. Х. Альтенбах^{a,*}

^a *Институт механики, Отто фон Герике университет Магдебурга, Магдебург, Германия*

**e-mail: holm.altenbach@ovhgu.de*

Поступила в редакцию 01.05.2022 г.

После доработки 15.05.2022 г.

Принята к публикации 25.05.2022 г.

Предельные состояния поведения материала могут быть различными. В литературе предельные состояния определяются, в частности, как переход от упругого к неупругому диапазону (например, предел текучести), а также как потеря прочности. Для описания предельных состояний используются понятия напряжения, деформации, а также энергии и мощности. Доминирующими до сих пор являются модели, основанные на напряжениях. Одним из наиболее важных вопросов здесь является формулировка гипотез эквивалентности, которые позволяют сравнивать материальные параметры, которые сами являются скалярными величинами, с соответствующими эквивалентными величинами на основе тензора напряжений. В статье представлены некоторые гипотезы эквивалентности, возможная классификация и открытые вопросы.

Ключевые слова: критерии предельного состояния, эквивалентные напряжения, основные испытания материалов

DOI: 10.31857/S0032823522040026

1. Motivation. Since the time of Galilei, Hooke and others, the question of limit behavior has been in the context of modeling material behavior. External loadings cause reactions in the material which, within the framework of phenomenological approaches, can be expressed by stresses, strains, but also by energy or power. From a certain stress level, depending on the material and external conditions, one can observe phenomena of material failure such as yielding or brittle fracture [1, 2]. The description of failure modes is complicated, especially since there is no rational approach to it. The reasons for this include the different failure modes (plastic flow, creep, fatigue, fracture, etc.) as well as the multitude of influencing factors (stress level, temporal change of the stresses, temperature, environmental influences, etc.). Numerous experimental studies have shown that the stress level and the type of loading have a particular influence with respect to brittle or ductile failure [3–10], among others. Failure states in the narrower sense are all critical states immediately before fracture (brittle materials) or the transition to plastic flow (ductile materials) [39]. The models of the limit behavior are connected with the formulation of limit criteria (e.g. in the stress space). In the first case (brittle failure) one speaks of strength criteria, in the second case (plastic flow) of yield or plasticity criteria. A discussion of failure criteria in the broader sense (consideration of material damage, failure due to cyclic loading) was made in the following references [11–16], among others.

The formulation of phenomenological theories of failure is controversial. In addition to the view that failure cannot, in principle, be described within the framework of phenomenological models, one also finds special articles and monographs which demonstrate the possibilities of

phenomenological concepts and in which failure criteria are formulated primarily for isotropic materials [17–28]. Depending on the number of basic experiments (or the parameters to be determined), criteria can be classified [28]. Thus, 1-parameter criteria, 2-parameter criteria, etc. are obtained.

In the present paper we discuss phenomenological limit criteria. The following limiting assumptions are made:

- The considered materials are macroscopically isotropic and homogeneous.
- The state of stress is characterized exclusively by the resulting state of stress in the material, non-mechanical influencing factors are not taken into account.
- The material is monotonically loaded.
- Only plastic flow or loss of strength (fracture) are accepted as possible failure states.

The following discussions cover some classic criteria, although the goal is not to give a score on the criteria. The main idea is to introduce the criteria and make a possible classification. Before formulation the criteria, some elementary mathematical basics must be introduced.

2. Mathematical Basics. Restricting ourself to stress-based limit criteria for isotropic materials and static monotonous loading, the stress tensor invariants and principal stresses, among others, are of particular importance. Besides the stress tensor invariants, the stress deviator invariants, but also other quantities sometimes should be included in the formulation of criteria. The mathematical fundamentals are briefly given below.

2.1. Principal Stresses and Directions. Let us introduce the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ ¹. The eigenvalue problem for this tensor is defined by the following equation

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \quad \text{with} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \quad (2.1.1)$$

\mathbf{a} and λ are the eigenvector and the eigenvalue of the problem, \cdot denotes the scalar product. The solution can be estimated from

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (2.1.2)$$

\mathbf{n} is a orthonormal eigenvector and \mathbf{I} is the second rank unit tensor. The characteristic equation yields the eigenvalues

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.1.3)$$

As shown, for example [29], in the case of symmetric stress tensor one distinguishes three real solutions following from

$$\lambda^3 - \lambda^2 J_1(\boldsymbol{\sigma}) + \lambda J_2(\boldsymbol{\sigma}) - J_3(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.1.4)$$

with the principal invariants

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{I} = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \\ J_2(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} [J_1^2(\boldsymbol{\sigma}) - J_1(\boldsymbol{\sigma}^2)] \\ J_3(\boldsymbol{\sigma}) &= \det \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} [J_1(\boldsymbol{\sigma}^3) + 3J_1(\boldsymbol{\sigma})J_2(\boldsymbol{\sigma}) - J_1^3(\boldsymbol{\sigma})] = \\ &= \frac{1}{3} \left[J_1(\boldsymbol{\sigma}^3) - \frac{1}{2} J_1(\boldsymbol{\sigma}^2)J_1(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{6} J_1^3(\boldsymbol{\sigma}) \right] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Equation (2.1.) has three solutions (principal stresses) $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$:

- three distinguished solutions
- one distinguished solution and one double solution and
- one triple solution.

In the first case one can identify three principal directions, in the second case one principal direction and in the third case no principal direction.

¹ Here we use the classical stress tensor. The components of this stress tensor are the engineering stresses and stress tensor is a symmetric second rank tensor.

2.2. *Other Invariants.* Instead of Eqs. (2.1.5) other sets of invariants are possible [12, 28]. Each set of three linear-independent invariants is a unique set of invariants, so one can use the invariant sets equally. An important alternative set of invariants are the so-called irreducible invariants [12, 30, 31]:

$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{\sigma}) &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{I} && \text{linear invariant} \\ I_2(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} && \text{quadratic invariant} \\ I_3(\boldsymbol{\sigma}) &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} && \text{cubic invariant} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

The conversion of the principal invariants to the irreducible invariants and vice versa are given in [12, 30], among others. Further invariant were introduced by Novozhilov [32, 33] or Lode [34, 35], among others.

Finally, let us present the principal invariants for the stress deviator

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \quad (2.2.2)$$

Now we have

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{s}) &= \mathbf{s} \cdot \cdot \mathbf{I} = 0 \\ J_2(\mathbf{s}) &= -\frac{1}{2} J_1(\mathbf{s}^2) \\ J_3(\mathbf{s}) &= \det \mathbf{s} = \frac{1}{3} J_1(\mathbf{s}^3) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

3. Classical Criteria

3.1. *The Very First Criteria.* Possibly the most widespread equivalence hypothesis is the hypothesis of Huber [36, 37], von Mises [38] and Hencky [39]

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{vM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \cdot \mathbf{s}} \quad (3.1.1)$$

This condition was earlier formulated by J.C. Maxwell in a private letter to prospect Lord Kelvin [40]. One possible interpretation of the criterion (3.1.1) is that maximum distortion energy yields a limit state (yielding of a ductile material) which begins when the second invariant of the deviatoric stress $J_2(\mathbf{s})$ reaches a critical value [38]. This critical value can be identified experimentally, for example, in the tension test (σ_Y) or torsion test (τ_Y). The critical shear stress τ_Y is related to the critical tension stress σ_Y by

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (3.1.2)$$

It is obvious that this criterion does not consider the whole stress state expressed by the stress tensor. One can show that the first principal invariant is ignored which means compressibility of the material is excluded.

Possibly the oldest criterion is the maximum principal stress criterion. If σ_I is the maximum principal stress a critical state occurs if [41]

$$\sigma_I \leq \sigma_T \quad (3.1.3)$$

Here σ_T is the positive tensile limit stress when failure occurs. The hypothesis is applied to materials which fail with separation fracture, without yielding:

- brittle materials (e.g. gray cast iron or welds) under predominantly static tensile loading and
- brittle and ductile materials under impact loading.

Note that the criterion is valid only in the case of maximum principal tension stresses. Otherwise the criteria contradicts Kachanov's statement concerning failure under compression [42]. It is obvious that also this criterium does not consider the whole stress state.

Henry Tresca [43] introduced a criterium assuming that the maximum shear stress is responsible for failure

$$\sigma_{\text{eq}} = 2\tau_{\text{max}} \quad (3.1.4)$$

With the maximum principal stresses the equivalent stress can be expressed as

$$\sigma_{\text{eq}} = \max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|) \quad (3.1.5)$$

The hypothesis is used for ductile materials with sliding fracture.

3.2. Criteria with One and More Parameters. A simple form of systematization of limit state criteria is according to the number of parameters to be determined experimentally for the limit state. However, it should be noted that there may be restrictions on the experiments that can be performed. If one takes the basic tests of materials testing [44], there is only a limited number of tests that produce homogeneous stress or distortion states in the material sample. In the following, we will again restrict ourselves to isotropic material behavior.

3.2.1. One-Parameter Criteria. The so-called one-parameter criteria are particularly simple, since only one test needs to be used.

- Maximum distortion criterion (Maxwell, Huber, von Mises, Hencky)

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{vM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \leq \sigma_u \quad (3.2.1)$$

Here is σ_u is the ultimate tensile stress when the limit case occurs. Equation (3.2.1) was presented earlier in this paper as (3.1.1).

- Maximum shear stress criterion (Coulomb, Tresca, St. Venant)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) \leq \frac{1}{2}\sigma_u \quad (3.2.2)$$

or

$$\sigma_{\text{eq}} = (\sigma_I - \sigma_{III}) \leq \sigma_u \quad (3.2.3)$$

This criterion was introduced earlier in this paper by Eq. (3.1.4).

- Maximum principal strain criterion (Lamé, Clebsch, Rankine [41])

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_I - \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) \leq \sigma_u \quad (3.2.4)$$

- Maximum principal stress criterion (Galilei, Leibniz)

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_I \leq \sigma_u \quad (3.2.5)$$

Note that the criterion is applicable only if $\sigma_I > 0$. In the previous section this criterion was given by Eq. (3.1.3).

- Maximum linear deformation criterion (St. Venant, Bach)

Let us assume the maximal linear strain ε_I as

$$\varepsilon_I = \sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \quad (3.2.6)$$

The criterion is expressed by using the Hooke's law. Finally, we have

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \leq \sigma_u \quad (3.2.7)$$

Note that the last expression contains two parameters (ν and σ_u), but only one is related to the limit state (σ_u).

- Sdobyrev criterion [45, 46]

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{vM}} + \sigma_{\text{I}}) \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.8)$$

The Sdobyrev criterion is an averaging of the maximum distortion criterion and the maximum principal stress criterion. The limitations concerning the maximum principal stress are not presented in the original paper of Sdobyrev.

3.2.2. Two-Parameter Criteria. Now we are looking on two-parameter criteria based on two independent limit state tests.

- Mohr-Coulomb criterion [47–50]

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{I}} - \xi\sigma_{\text{III}} \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.9)$$

This criterion is a modification of maximum shear stress criterion (3.2.2). The additional parameter ξ is related to the ratio $\sigma_{\text{u}}/\sigma_{\text{c}}$. That means the compression test should be performed and the σ_{c} as the limit state stress at compression should be estimated. The Mohr–Coulomb criterion describes the response of brittle materials such as concrete, or rubble piles, to shear stress as well as normal stress. The theory applies to materials for which the compressive limit stress far exceeds the tensile limit stress.

- Botkin–Mirolyubov or Drucker–Prager criterion [51–54]

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{I}} - \chi\sigma_{\text{III}} \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.10)$$

- Pisarenko–Lebedev criterion [26, 55]

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{2}[(1 + \chi)\sigma_{\text{vM}} + (1 - \chi)\sigma_{\text{I}}] \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.11)$$

This criterion can describe the von Mises equivalent stress and the influence of the hydrostatic stress state. Similar expression were given by Schleicher [56], Klebowski [57] and Nadai [58].

- Sandel criterion [59–61]

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{I}} - \frac{1}{2}(1 - \chi)\sigma_{\text{II}} - \chi\sigma_{\text{III}} \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.12)$$

The Sandel criterion takes into account all principal stresses instead of the maximum principal stress (3.2.5) or the first and the third principal stress.

- Koval'chuk criterion [62]

$$\sigma_{\text{eq}} = \zeta\sigma_{\text{vM}} - (1 - \zeta)(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}) \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.13)$$

The additional parameter ζ is defined as $\zeta = 2 - \frac{\varphi}{2} - \sqrt{3}$ with $\varphi = \frac{\sigma_{\text{u}}}{\tau_{\text{t}}}$ τ_{t} is the limit stress under torsion. This criterion is a combination of the von Mises criterion and the maximum shear stress criterion.

3.2.3. Three-Parameter and Four-Parameter Criteria. There are few three and four parameters criteria. The reason for this is the significantly increasing experimental effort. Let us introduce the following two criteria:

- Paul criterion [25, 63]

$$\sigma_{\text{eq}} = a_1\sigma_{\text{I}} + a_2\sigma_{\text{II}} + a_3\sigma_{\text{III}} \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.14)$$

Here the three principal stresses are included independently.

- Birger criterion [64]

$$\sigma_{\text{eq}} = a_1\sigma_{\text{I}} + a_2\sigma_{\text{II}} + a_3\sigma_{\text{III}} + a_4\sigma_{\text{vM}} \leq \sigma_{\text{u}} \quad (3.2.15)$$

Here the three principal stresses and the von Mises stress are included independently.

3.3. Final Comments. There are suggested much more simple criteria in the literature [7, 65–74], among others. However, it is difficult overall to determine the parameters experimentally. This has led to the use of the simplest possible criterion, where experiments can be easily planned and carried out. The possibilities of extending the classical criteria have been extensively discussed in recent years, with comprehensive studies on the development of new criteria cited in [13–15, 75–80], among others. However, with the increasing number of parameters and necessary tests the uniqueness of parameter identification is under question.

4. One Possible Classification

4.1. Generalized Formulation. Possible classifications of generalized limit criteria are widely discussed in the literature [12, 81] among others. Let us introduce here one simple classification including limit state criteria up to 6 parameters presented in [82]. The starting point is

$$\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_u, \quad (4.1.1)$$

with σ_{eq} as a function of the stress tensor σ . Assuming isotropic material behavior, the function $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{eq}}(\sigma)$ can be simplified since in this particular case σ_{eq} is a function of three linear independent invariants. Any set of invariants can be used – all are equal. Here we introduce the following invariants

$$I_1 = \sigma \cdot \mathbf{I}, \quad \sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \cdot \mathbf{s}}, \quad \sin \xi = -\frac{9(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) \cdot \cdot \mathbf{s}}{2 \sigma_{\text{VM}}^3} \quad \text{with} \quad \xi \leq \frac{\pi}{6} \quad (4.1.2)$$

The last invariant is similar to the Lode angle [34, 35] and discussed in [32, 33]. The equivalent stress now is defined as

$$\sigma_{\text{eq}} = \lambda_1 \sigma_{\text{VM}} \sin \xi + \lambda_2 \sigma_{\text{VM}} \cos \xi + \lambda_3 \sigma_{\text{VM}} + \lambda_4 I_1 + \lambda_5 I_1 \sin \xi + \lambda_6 I_1 \cos \xi \quad (4.1.3)$$

where λ_i ($i = 1, \dots, 6$) are scalar parameters which should be determined by experiments. Possible experiments are uniaxial tension with the limit stress σ_u , uniaxial compression with the limit stress σ_c , pure torsion with the limit stress τ_u , thin-walled tubular specimen under inner pressure, biaxial tension and uniaxial tension under superposed hydrostatic pressure. Only the first three test belongs to the basic tests in mechanical testing of materials [44] realizing homogeneous states. The remaining three tests can be exchanged at will.

4.2. Example. It can be shown that all previous discussed criteria can be expressed by (4.1.3). In the case of the Birger criterion this is shown in [83]. To determine the conditions of macroscopic fracture in a complex stress state, the critical (limit) stress $\sigma_{\text{limit}}(T)$ must be compared with the equivalent stress σ_{eq} . T is the temperature. Let us consider that the temperature is constant. The further presentation of the problem of fracture criteria for a complex stress state will be carried out based on the ideas developed [64], where the value of σ_{eq} is defined as a function of principal stresses σ_i , $i = \text{I, II, III}$, material parameters λ_j , $j = 0, 1, 2, 3$ and internal state variables β_k , $k = 1, 2, \dots$, reflecting the loading history and other effects [13, 84]. Rejecting the consideration of internal state variables (no influence of β_k) and accepting the linear dependence $\sigma_{\text{eq}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ we have a four-parameter fracture criterion (in a similar way a six-parameter criterion was introduced in [85])

$$\sigma_{\text{eq}} = \lambda_0 \sigma_{\text{VM}} + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 \leq \sigma_{\text{limit}} \equiv \sigma_u \quad (4.2.1)$$

Table 1

Criterion	Expression	$\frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_{\text{compression}}}$	$\frac{\sigma_{\text{tension}}}{\tau_{\text{torsion}}}$	$\frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_{\text{inner pressure}}}$
1	$\sigma_{\text{tension}} = \sigma_{\text{vM}}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\sigma_{\text{tension}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\text{torsion}}$	1	2	1
3	$\sigma_{\text{tension}} = \sigma_1$	0	1	1
4	$\sigma_{\text{tension}} = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
5	$\sigma_{\text{tension}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{vM}} + \sigma_1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2)$
6	$\sigma_{\text{tension}} = \sigma_1 - \chi\sigma_3$	χ	$1 + \chi$	1
7	$\sigma_{\text{tension}} = \frac{1}{2}(1 + \chi)\sigma_{\text{vM}} + \frac{1}{2}(1 - \chi)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$	χ	$\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \chi)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{3}(1 + \chi) + 3(1 - \chi))$
8	$\sigma_{\text{tension}} = \chi\sigma_{\text{vM}} + (1 - \chi)\sigma_1$	χ	$1 + (\sqrt{3} - 1) - \chi$	$1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\chi$

- 1 – Huber, von Mises, Hencky; 2 – Coulomb, Tresca, St. Venant;
 3 – maximum principal stress (the stress must be positive), Galilei, Leibniz;
 4 – maximum principal strain (special case if $\nu = 0.5$), Rankine, Lamé, Clebsch;
 5 – Sdobyrev; 6 – Mohr;
 7 – Nadai, Botkin–Mirolyubov, Schleicher, Prager–Drucker;
 8 – Pisarenko–Lebedev

To define $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ four basic experiments² are required. Using experiments on tension, compression, torsion and testing of thin-walled tube under inner pressure as such experiments, we obtain

$$\lambda_0 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \left(1 + \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_{\text{compression}}} - \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\tau_{\text{torsion}}} \right)$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_0, \quad \lambda_2 = 2 \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_{\text{inner pressure}}} - 1 + \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_{\text{compression}}} - \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\tau_{\text{torsion}}} \quad (4.2.2)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \left[1 + (\sqrt{3} + 1) \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_{\text{compression}}} - \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\tau_{\text{torsion}}} \right],$$

where $\sigma_{\text{tension}}, \sigma_{\text{compression}}, \tau_{\text{torsion}}$ and $\sigma_{\text{inner pressure}}$ are ultimate strengths (maximum of the stress-strain diagrams) for the listed types of loading. If we accept the values of the relations $\sigma_{\text{tension}}/\sigma_{\text{compression}}, \sigma_{\text{tension}}/\tau_{\text{torsion}}$ and $\sigma_{\text{tension}}/\sigma_{\text{inner pressure}}$ constant, then instead of (4.2.2) we have one-parameter criteria³.

² The term “basic experiment” is under discussion. In solid mechanics basic experiments are tests, where homogeneous stress states are realized. Considering this and statements in material testing, such tests are [44]: tension, compression, torsion and hydrostatic compression.

³ Other possible sets of relations are widely discussed in [12, 13, 15]. The question of the number of parameters for the fracture criteria is debatable and is determined by the uniqueness of the used material characteristics, which have sometimes a great scattering.

Using as basic two experiments (for example, tension and compression or tension and torsion), from which we determine the ratios $\hat{\lambda} = \sigma_{\text{tension}}/\sigma_{\text{compression}}$ or $\hat{\lambda} = \sigma_{\text{tension}}/\tau_{\text{torsion}}$, we obtain two-parameter criteria. The most popular criteria are one- and two-parameter criteria. They are obtained from the ratio (4.2.1) at various values of the ratio of strength characteristics, Table 1. Another example is given for the assumed 6-parameter criterion in [81].

Conclusions. The formulation of criteria will not lose its importance in the future, since mechanical engineering designs, but also in other applications, require simple engineering concepts for the evaluation of limit states. In contrast to the balance equations of continuum mechanics, which can be rationally justified, the formulation of limit criteria depends on many factors. Material or material, load, but also other factors play a role. Knowledge of the microstructure and its evolution explains some limit cases better, but for a macroscopic analysis one would quickly reach calculation times that are not realistic for industrial practice. Thus, there is also a great need for future research work on the limiting criteria. It would be important to expand the data basis so that more complex models can also find their way into practice.

Further research is also needed to overcome the limits of the isotropic model. The focus should be on two directions:

- Extension in the direction of anisotropic boundary criteria

Here, in particular, the question of mastering the rapidly increasing number of parameters needs to be addressed.

- Cyclic processes

Structures are often subject to cyclic stresses. Consequently, it has to be clarified here whether the equivalent stress expressions can be transferred to this case.

REFERENCES

1. *Altenbach H., Krause J., Zolochovsky A.* Über ein verallgemeinertes Versagenskriterium der Theorie des Grenzzustandes isotroper Werkstoffe // *Techn. Mech.*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 113–117.
2. *Burth K., Brocks W.* Plastizität, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.
3. *Bridgman P.W.* Studies in Large Plastic Flow and Fracture. N.Y.: McGraw-Hill, 1949.
4. *Brostow W.* Science of Materials. Krieger Pub. Co., 1985.
5. *Cristescu N.* Rock Rheology. Dordrecht: Kluwer, 1989.
6. *French I.E., Weinrich P.F., Weaver C.W.* Tensile fracture of free machining brass as a function of hydrostatic pressure // *Acta Metall.*, 1973, vol. 21, no. 8, pp. 1045–1049.
7. *Hayhurst D.R.* Creep rupture under multi-axial states of stress // *J. Mech.&Phys. Solids*, 1972, vol. 20, no. 6, pp. 381–390.
8. *Hunsche U., Albrecht H.* Results of true triaxial strength tests on rock salt // *Engng. Fracture Mech.*, 1990, vol. 35, no. 4, pp. 867–877.
9. *Launay P., Gachon H.* Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress // *Amer. Concrete Inst.*, 1970, vol. 34, no. 13, pp. 269–282.
10. *Mills L.L., Zimmerman R.M.* Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions // *Amer. Concrete Inst.*, 1970, vol. 67, no. 10, pp. 802–807.
11. *Altenbach H.* Strength hypotheses – a never ending story // *Czasopismo Techn.*, 2010, vol. 107, no. 20, pp. 5–15.
12. *Altenbach H., Altenbach J., Zolochovsky A.* Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995.
13. *Altenbach H., Bolchoun A., Kolupaev V.A.* Phenomenological yield and failure criteria, Plasticity of Pressure-Sensitive Materials. Berlin: Springer, 2014. pp. 49–152.
14. *Altenbach H., Kolupaev V.A.* Classical and non-classical failure criteria, Failure and Damage Analysis of Advanced Materials // *CISM Int. Centre for Mech. Sci.*, vol. 560, Wien: Springer, 2015, pp. 1–66.
15. *Kolupaev V.A.* Equivalent Stress Concept for Limit State Analysis, Advanced Structured Materials. Vol. 86. Cham: Springer, 2018.

16. *Kolupaev V.A., Bolchoun A., Altenbach H.* Aktuelle Trends beim Einsatz von Festigkeit-shypothesen // *Konstr.*, 2009, vol. 5, pp. 59–66.
17. *Chen W.F.* Plasticity for Reinforced Concrete. N.Y.: McGraw-Hill, 1982.
18. *de Boer R.* Failure conditions for brittle and granular materials // *Quart. Appl. Math.*, 1986, vol. 44, no. 1, pp. 71–79.
19. *de Boer R., Dresenkamp H.T.* Constitutive equations for concrete in failure state // *J. Engng. Mech.*, 1989, vol. 115, no. 8, pp. 1591–1608.
20. *Gol'denblat I.I., Kopnov V.A.* Kriterii prochnosti i plastichnosti konstrukcionnykh materialov // in: Criteria for Strength and Plasticity of Structural Materials. Moscow: Mashinostroenie, 1968.
21. *Goldscheider M.* Grenzbedingung und Fließregel von Sand // *Mech. Res. Commun.*, 1976, vol. 3, no. 6, pp. 463–468.
22. *Gross D., Seelig T.* Bruchmechanik. Berlin: Springer / Vieweg, 2016.
23. *Kreissig R.* Einführung in die Plastizitätstheorie. Leipzig: Fachbuchverlag, 1992.
24. *Ottosen N.S.* A failure criterion for concrete // *J. Engng. Mech. Division*, 1977, vol. 103, no. 4, pp. 527–535.
25. *Paul B.* Macroscopic plastic flow and brittle fracture, *Fracture: An Advanced Treatise. Vol. II* / Ed. by *Liebowitz H.* N.Y.: Acad. Press, 1968. pp. 313–496.
26. *Pisarenko G.S., Lebedev A.A.* Deformation and Strength of Materials under Complex Stress State, Kiev: Naukova Dumka, 1976.
27. *Sauter J., Wingerter N.* Neue und alte statische Festigkeitshypothesen, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 1: Konstrukt. / Masch., Vol. 191. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1990.
28. *Zyczkowski M.* Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Warsaw: PWN, 1981.
29. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity, Foundations of Engineering Mechanics, Berlin: Springer, 2005.
30. *Betten J.* Tensorrechnung für Ingenieure. Stuttgart: B.G. Teubner, 1987.
31. *Itskov M.* Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. Cham: Springer, 2018.
32. *Novozhilov V.V.* On the principles of processing the results of static tests of isotropic materials // *PMM*, 1951, vol. 15, no. 6, pp. 709–722.
33. *Novozhilov V.V.* On the relationship between stresses and strains in a nonlinear-elastic medium // *PMM*, 1951, vol. 15, no. 2, pp. 183–194.
34. *Lode W.* Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze // *ZAMM J. Appl. Math.&Mech.*, 1925, vol. 5, no. 2, pp. 142–144.
35. *Lode W.* Versuche u"ber den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel // *Zeitschrift für Physik*, 1926, vol. 36, no. 11–12, pp. 913–939.
36. *Huber M.T.* Specific strain work as a measure of material effort // *Czasopismo Techniczne, Lwow, Organ Towar. Politechn. we Lwowie*, 1904, vol. 22, pp. 34–40, 49–50, 61–62, 80–81.
37. *Huber M.T.* Specific work of strain as a measure of material effort // *Arch. Mech.*, 2004, vol. 56, no. 3, pp. 173–190.
38. *Hencky H.* Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // *ZAMM J. Appl. Math.&Mech.*, 1924, vol. 4, no. 4, pp. 323–334.
39. *von Mises R.* Mechanik des festen Körpers im plastischen deformablen // *Zust. Nachrichten der König. Gesellschaft der Wissenschaften Gottingen, Math.-phys. Klasse*, 1913, pp. 582–592.
40. *Rychlewski J.* Elastic energy decomposition and limit criteria // *Engng. Trans.*, 2014, no. 1, pp. 31–63.
41. *Rankine W.J.M.* Manual of Applied Mechanics. L.: Griffin, 1876.
42. *Kachanov L.M.* Fundamentals of Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1974.
43. *Tresca H.* Memoire sur l'écoulement des corps solides // *Memoires Pres. par Div. Savants*, 1868, vol. 18, pp. 733–799.
44. *Blumenauer H.* Werkstoffprüfung. Leipzig: Deutscher Verlag für Grundst., 1996.
45. *Sdobyrev V.P.* Long-term strength of EI-437b alloy in a complex stress state // *Izv. AN SSSR. Otd. Tekhn. Nauk, Mekh. i Mashin.*, 1958, no. 4, pp. 92–97.
46. *Sdobyrev V.P.* Criterion for the long term strength of some heat-resistant alloys at a multiaxial loading // *Izv. AN SSSR. Otd. Tekhn. Nauk, Mekh. i Mashin.*, 1959, no. 6, pp. 93–99.
47. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs, a la architecture // *Mem. Acad. Roy. Div. Sav.*, 1776, vol. 7, pp. 343–387.

48. *Mohr O.* Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials // Zeitschrift des VDI, 1900, vol. 45, pp. 1524–1530.
49. *Mohr O.* Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials // Zeitschrift des VDI, 1900, vol. 46, pp. 1572–1577.
50. *Mohr O.* Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. Berlin: Wilhelm&Sohn, 1914.
51. *Botkin A.I.* Equilibrium of granular and brittle materials // Trans. Sci. Res. Inst. Hydrotechn., 1940, vol. 28, pp. 189–211.
52. *Botkin A.I.* Theories of elastic failure of granular and of brittle materials // Trans. Sci. Res. Inst. Hydrotechn., 1940, vol. 26, pp. 205–236.
53. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math., 1952, vol. 10, pp. 157–165.
54. *Mirolyubov I.N.* On the generalization of the strengt theory based on the octaedral stresses in the case of brittle materials // Tr. Leningr. Technol. Inst., 1953, pp. 42–52.
55. *Pisarenko G.S., Lebedev A.A.* Deformation and Fracture of Materials under Combined Stress. Kiev: Naukova Dumka, 1969.
56. *Schleicher F.* Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitatsbedingung) // ZAMM J. Appl. Math.&Mech., 1926, vol. 6, no. 3, pp. 199–216.
57. *Klebowski Z.* Obecny stan wytrzymaosciowego obliczenia materjalow o wlasnosciami uogólnionych // Przegląd Techn., 1934, no. 11, pp. 373–376.
58. *Nadai A.* Theory of Flow and Fracture in Solids. N.Y.: McGraw-Hill, 1950.
59. *Sandel G.D.* Ueber die Festigkeitsbedingungen: Ein Beitrag zur Lösung der Frage der zulässigen Anstrengung der Konstruktionsmaterialen // Diss. Techn. Hochsch. zu Stuttgart, 1919.
60. *Sandel G.D.* Über die Festigkeitsbedingungen: Ein Beitrag zur Lösung der Frage der zulässigen Anstrengung der Konstruktionsmaterialen. Leipzig: Janecke, 1925.
61. *Sandel G.D.* Die Anstrengungsfrage // Schweizerische Bauzeitung, 1930, vol. 95, no. 26, pp. 335–338.
62. *Koval'chuk B.I.* Criterion for the limiting state of some hull steels under combined strain at room and elevated temperatures // Strength Mater., 1981, vol. 13, no. 5, 548–554.
63. *Paul B.* Generalized pyramidal fracture and yield criteria // Int. J. Solids&Struct., 1968, vol. 4, no. 2, pp. 175–196.
64. *Birger I.A.* On a criterion for fracture and plasticity // Izv. AN SSSR. MTT, 1977, vol. 9, no. 4, pp. 143–150.
65. *Burzynski W.* Study on Material Efort Hypotheses. Lwow: Akad. Nauk Techn, 1928.
66. *Burzynski W.* Über die Anstrengungshypothesen // Schweizerische Bauzeitung, 1929, vol. 94, no. 21, pp. 259–262.
67. *Burzynski W.* Theoretical foundations of the hypotheses of material effort // Engng. Trans., 2008, vol. 56, Spec. Iss., pp. 9–45.
68. *Ishlinsky A.Yu.* Hypothesis of strength of shape change // Uch. Zap. Mosk. Univ. Mekh., 1940, vol. 46, pp. 104–114.
69. *Schmidt R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // Ingenieur-Archiv, 1932, vol. 3, no. 3, pp. 215–235.
70. *Tarassenko I.I.* On criterion of brittle strength of metals // Sb. Nauchn. Tr. Leningr. Inzh.-Stroit. Inst., 1957, vol. 26, pp. 161–166.
71. *Tsvelodub I.Yu.* Stability Postulate and Its Application to the Theory of Creep of Metals. Novosibirsk: Inst. Hydrodyn. SB RAS, 1991.
72. *Yagn Yu.I.* New methods of strength prediction // Vestn. Inzh. i Tekhn., 1931, vol. 6, pp. 237–244.
73. *Yu M.-H.* General behaviour of isotropic yield function // Sci.&Technol. Res. Paper of Xi'an Jiaotong Univ., 1961, pp. 1–11.
74. *Haythornthwaite R.M.* Range of yield condition in ideal plasticity // Proc. ASCE. J. Eng. Mech. Division EM6 87, 1961, pp. 117–133.
75. *Altenbach H., Kolupaev, V.A.* General forms of limit surface: Application for isotropic materials, Material Modeling and Structural Mechanics / Ed. by *Altenbach H., Beitel Schmidt M. et al.* Cham: Springer Int. Publ., 2022. pp. 19–94.

76. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century // Appl. Mech. Rev., 2002, vol. 55, no. 5, pp. 169–218.
77. Yu M.-H. Unified Strength Theory and Its Applications. Berlin: Springer, 2004.
78. Yu M.-H. Unified strength theory (UST), Rock Mechanics and Engineering. Vol. 1: Principles (Leiden) / Ed. by Feng X.-T. Balkema: CRC Press, 2017. pp. 425–452.
79. Unified Strength Theory and Its Applications. Singapore: Springer, 2018.
80. Yu M.-H., Yu S.-Q. Introduction to Unified Strength Theory. Balkema;L.: CRC Press, 2019.
81. Kolupaev V.A. 3D-Creep Behaviour of Parts Made of Non-Reinforced Thermoplastics // Diss., Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Halle-Saale, 2006.
82. Altenbach H., Zolochovsky A. A generalized failure criterion for three-dimensional behaviour of isotropic materials // Engng. Fracture Mech., 1996, vpl. 54, no. 1, pp. 75–90.
83. Getsov L.B. Materials and Strength of Gas Turbine Parts. Vol. 1. Materials, Properties, Damage, Deformation and Fracture Models / Ed. by Altenbach H., Naumenko K. // in: Adv. Struct. Mater., 2021, vol. 150.
84. Volkov S.D. Basics of the statistical theory of strength // in: Nekotorye problemy prochnosti tverdogo tela / Ed. by Iofe A.F., Kurdjymov G.B., 1959. pp. 325–333.
85. Altenbach H., Lauschke U., Zolochovsky A.A. Ein verallgemeinertes Versagenskriterium und seine Gegenüberstellung mit Versuchsergebnissen // ZAMM Zeitschrift für angewandte Math.&Mech., 1993, vol. 73, no. 4, T372–T375.

On Some Limit State Criteria in Solid Mechanics

H. Altenbach^{a,#}

^a*Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Germany*

[#]*e-mail: holm.altenbach@ovhgu.de*

Abstract—Limit states of the material behavior can be different. In the literature limit states are in particular defined as the transition from the elastic to the inelastic range (e.g. yield point), but also the loss of strength. Stress-, strain-, but also energy- and power-based concepts are used to describe the limit states. Dominant until today are the stress-based concepts. One of the most important issues here is the formulation of equivalence hypotheses that allow the material parameters, which are themselves scalar quantities, to be compared with corresponding equivalent quantities based on the stress tensor. In the paper are presented some equivalence hypotheses, a possible classification and open questions.

Keywords: limit state criteria, equivalent stress, basic tests in material testing

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ОПИСАНИЮ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2022 г. Г. А. Волков^{1,2,*}, Ю. В. Петров^{1,2,**}

¹ *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*

² *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

**e-mail: g.volkov@spbu.ru*

***e-mail: y.v.petrov@spbu.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2022 г.

После доработки 12.05.2022 г.

Принята к публикации 18.05.2022 г.

Проводится сравнительный анализ двух подходов к описанию скоростной зависимости прочности материалов в условиях динамического нагружения с постоянной скоростью деформации. Первый подход основан на структурной модели хрупкой сплошной среды с дефектами, позволяющей вывести полуэмпирическое нормировочное соотношение для описания скоростной зависимости прочности широкого класса материалов в едином нормированном пространстве. Второй подход базируется на понятии инкубационного времени разрушения, которое является параметром прочности, характеризующим чувствительность материала к интенсивности и форме нагружающего воздействия. Исследуется взаимосвязь и отличительные особенности двух этих подходов, а также проводится сравнительное моделирование скоростных зависимостей прочности для некоторых материалов.

Ключевые слова: динамическая прочность, скоростная зависимость прочности, критерий инкубационного времени, нормировочное соотношение

DOI: 10.31857/S0032823522040130

1. Введение. Решение задач, связанных с расчетом предельных допустимых напряжений в материалах в условиях динамического нагружения, является актуальной научной проблемой. До сих пор не выработано общепринятого подхода по определению прочностных свойств и прогнозированию поведения материалов при высокоинтенсивных воздействиях. В течение последних десятилетий многочисленные динамические испытания четко фиксируют наличие скоростной зависимости прочности, то есть роста предельного уровня напряжений в момент разрушения при увеличении скорости деформации образца [1–3]. Первоначально делались попытки объяснить рост напряжений в момент разрушения наличием некоторой степенной зависимости прочности от скорости нагружения, которая бы являлась свойством материалов [4]. Главным недостатком такого подхода является то, что для разных материалов, а также для различных экспериментальных схем значения показателя степени варьировались от 0.05–0.33. Достаточно большой разброс значений указывает на то, что такое объяснение скоростной зависимости прочности является скорее численной аппроксимацией, чем некоторой феноменологической моделью, предсказывающей условия разрушения материала в динамике. Также был предложен интегральный критерий разрушения Тулера–Бутчера (Tuler&Butcher), в котором учитывается, что разрушение не происходит мгновенно, и что это процесс, развивающийся во времени [5]. К недостат-

кам этого критерия можно отнести отсутствие даже гипотетического мысленного эксперимента, позволяющего измерить значения констант материала.

В настоящей работе рассмотрены два подхода к описанию динамической прочности материала. В их основе, в отличие от упомянутых выше методов, лежит определённая идея и физический смысл. Один из подходов основан на полуэмпирической модели Пэливола–Рэмиша (Paliwal V. and Ramesh K.T, P–R модель), рассматривающей сплошную среду с дефектной структурой [6, 7]. Анализ роста микротрещин при одноосном сжатии в зависимости от скорости нагружения позволил вычислить характеристические параметры материала, определяющие его скоростную зависимость прочности. Другой, структурно-временной подход основан на критерии инкубационного времени [8, 9], основная идея которого, также как и в подходе Тулера–Бутчера (Tuler&Butcher), заключается в том, что процесс разрушения не мгновенный. Главным отличием структурно-временного подхода является предположение о том, что существует временной интервал, называемый инкубационным временем разрушения, который может трактоваться как характерное время релаксации подготовительных процессов микроразрушения, предвещающих разрыв материала на макроскопическом уровне. При этом для определения условий возникновения разрушения также принципиальное значение имеют не только амплитудные характеристики, но и история поля напряжений в течение инкубационного периода.

2. Описание моделей и анализ взаимосвязей. В рамках P–R модели Пэливола–Рэмиша было получено следующее нормировочное соотношение, описывающее скоростную зависимость прочности материалов:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_0} = 1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{2/3}, \quad (2.1)$$

где σ_f – предельный уровень напряжений в момент разрушения, $\dot{\epsilon}$ – скорость деформации, параметры материала σ_0 и $\dot{\epsilon}_0$ – характеристические напряжение и скорость деформации соответственно. Значения σ_0 и $\dot{\epsilon}_0$ могут быть вычислены согласно микроструктурной модели, рассматривающей рост и развитие микродефектов в хрупких средах. Для расчета σ_0 и $\dot{\epsilon}_0$ используются такие параметры структуры среды, как средний размер и средняя плотность дефектов, а также такие макропараметры, как упругие константы Ламе, плотность и трещиностойкость. Стоит отметить, что сама зависимость (2.1) была получена полуэмпирическим путем, как аппроксимация результатов численных экспериментов. При испытании различных материалов был определен диапазон возможных значений параметров модели Пэливола–Рэмиша. Затем в рамках этой модели был вычислен предельный уровень напряжений в зависимости от скорости деформации для виртуальных материалов со случайно выбранными комбинациями значений модельных параметров из выявленного ранее диапазона. В результате получилось, что вычисленная таким образом скоростная зависимость прочности может быть хорошо описана нормировочным соотношением (2.1).

Как было упомянуто выше, в основе другого подхода лежит критерий инкубационного времени:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{\sigma(s)}{\sigma_c} ds \leq 1, \quad (2.2)$$

где $\sigma(s)$ – временной профиль нагружающего воздействия, τ – инкубационное время, а σ_c – критическое напряжение разрушения. Стоит отметить, что в основе критерия инкубационного времени лежит феноменологическая концепция, согласно которой, для развития любого переходного процесса требуется некоторое время, продолжительность которого определяется значением параметра инкубационного времени, а

также интенсивностью нагрузки. Скоростная зависимость в случае постоянной скорости деформации $\dot{\epsilon}$ будет описываться следующим соотношением:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_c} = \begin{cases} 1 + \frac{\tau}{k} \dot{\epsilon}, & \dot{\epsilon} \leq \frac{k}{\tau} \\ 2\sqrt{\frac{\tau}{k}} \dot{\epsilon}, & \dot{\epsilon} > \frac{k}{\tau} \end{cases} \quad (2.3)$$

$k = \frac{2\sigma_c}{E}$ безразмерный параметр, где E – модуль Юнга. Таким образом, структурно-временная модель также содержит два параметра прочности материала, как и нормировочное соотношение, предложенное Кимберли, Рэмешом и Дапхалапуркармом (Kimberley J., Ramesh K.T., Daphalapurkar N.P.). При этом можно утверждать, что параметры σ_0 и σ_c имеют примерно один и тот же физический смысл и можно полагать, что они совпадают, в то время как $\dot{\epsilon}_0$ и τ принципиально отличаются несмотря на схожесть их размерностей $[1/c]$ и $[c]$ соответственно. Более того из соотношения (2.3) видно, что в структурно-временном подходе также появляется характерная скорость деформации $\dot{\epsilon}_c = \frac{k}{\tau} = \frac{2\sigma_c}{E\tau}$, которая однозначно определяется параметрами модели. На

диаграмме скоростной зависимости прочности $\dot{\epsilon}_c$ условно разделяет статическую и динамическую ветви прочности, то есть участок, на котором уровень критических напряжений слабо меняется от скорости деформации от области с явно выраженным ростом напряжений в момент разрушения.

При предположении тождественности параметров σ_0 и σ_c , можно приравнять правые части выражений (2.1) и (2.3) и установить связь между $\dot{\epsilon}_0$ и τ :

$$\dot{\epsilon}_0 = \begin{cases} \frac{k}{\tau} \sqrt{\frac{k}{\tau \dot{\epsilon}}}, & \dot{\epsilon} \leq \frac{k}{\tau} \\ \dot{\epsilon} \left(2\sqrt{\frac{\tau}{k}} \dot{\epsilon} - 1 \right)^{-\frac{3}{2}}, & \dot{\epsilon} > \frac{k}{\tau} \end{cases} \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) показывает, что параметр нормировочного соотношения $\dot{\epsilon}_0$ может быть выражен через инкубационное время τ только в зависимости от скорости деформации материала $\dot{\epsilon}$. Интересной особенностью выражения (2.4) является то, что для скорости деформации $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_c = \frac{k}{\tau}$, значение параметра $\dot{\epsilon}_0$ совпадает с $\dot{\epsilon}_c$:

$$\dot{\epsilon}_0|_{\dot{\epsilon}=\dot{\epsilon}_c} = \dot{\epsilon}_c, \quad \dot{\epsilon}_c = \frac{k}{\tau} \quad (2.5)$$

Таким образом, получается, что в структурно-временном подходе также возможна нормировка кривой скоростной зависимости прочности, но только неравномерная, в отличие от подхода, основанного на P–R модели Пэливола–Рэмеша.

3. Оценка значений модельных параметров. Важной проблемой при расчете скоростной зависимости прочности для конкретного материала является задача оценки значений параметров модели. В случае нормировочного соотношения эти значения могут быть вычислены согласно формулам (3.1), полученным в рамках структурной P–R модели:

$$\sigma_0 = \alpha \frac{K_{IC}}{s\eta^{1/4}}, \quad \dot{\epsilon}_0 = \alpha \frac{c_d K_{IC}}{s} \eta^{1/4}, \quad (3.1)$$

где K_{IC} – критическое значение трещиностойкости, \bar{s} и η – средний размер и средняя плотность дефектов, $c_d = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – максимальная скорость распространения волн в среде, λ и μ – упругие постоянные Ламе, ρ – массовая плотность.

Для определения значений параметров критерия инкубационного времени использовался метод знаковозмущенных сумм (Sign-Perturbed Sums) [10]. Ранее было показано, что зависимость вида (2.3) полностью удовлетворяет условиям применимости этого метода [11, 12]. При этом экспериментальные результаты измерения скоростной зависимости прочности ($\sigma_{*i}, \dot{\epsilon}_{*i}$) представляются в виде следующей модели наблюдений со случайным шумом v_i :

$$\sigma_{*i} = \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_{*i}) + v_i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

где функция $\varphi(\tau, \dot{\epsilon})$ определяется согласно структурно-временному подходу соотношением (2.3). Предполагается, что случайный шум имеет симметричное распределение с нулевым математическим ожиданием. Результатом обработки метода SPS является доверительный интервал T , содержащий истинное значение τ^* инкубационного времени с заранее выбранным уровнем вероятности:

$$\text{Prob}\{\tau^* \in T\} = 1 - \frac{q}{M} \quad (3.3)$$

Параметры алгоритма M и q выбираются согласно требуемому уровню достоверности.

Рандомизированная часть алгоритма состоит в формировании $M - 1$ комплектов из N случайных знаков $\beta = \pm 1$ согласно схеме испытаний Бернулли. Сгенерированный набор знаков позволяет для пробного значения τ вычислить последовательность знаковозмущенных сумм $H_j(\tau)$:

$$H_j(\tau) = \sum_{i=1}^N \beta_{ij} (\sigma_{*i} - \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_{*i})) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_{*i})}{d\tau}; \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M-1} \quad (3.4)$$

Сумма $H_0(\tau)$ вычисляется для полностью положительного набора знаков $\beta = +1$:

$$H_0(\tau) = \sum_{i=1}^N (\sigma_{*i} - \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_{*i})) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_{*i})}{d\tau} \quad (3.5)$$

Равенство нулю правой части выражения (3.5) эквивалентно необходимому условию минимума среднеквадратичного отклонения расчётной кривой для пробного значения τ от последовательности экспериментальных значений. Суть метода SPS заключается в том, что если пробное значение τ достаточно близко к истинному значению τ^* , то величина $|H_0(\tau)|$ будет соизмерима со знакопеременными суммами $|H_j(\tau)|$. В противном случае $|H_0(\tau)|$ будет мажорировать суммы $|H_j(\tau)|$, что будет означать, что проверяемое значение τ не принадлежит доверительному интервалу T . Формально шаги этой процедуры показаны в таблице 1.

Результаты расчета скоростных зависимостей прочности, приведенные в следующем разделе, рассчитаны для значений инкубационного времени τ , которые соответствуют границам 80%-го доверительного интервала T .

4. Результаты расчета скоростных зависимостей. В рамках рассмотренных моделей были вычислены скоростные зависимости прочности для некоторых материалов.

На рис. 1 показаны результаты, полученные при обработке данных эксперимента (круглые точки – I) по ударному сжатию керамического материала SiC-N [13]. Кривая 2 соответствует результатам расчета согласно нормировочному соотношению (2.1) при следующих значениях параметров $\dot{\epsilon}_0 = 5000.1/\text{с}$ и $\sigma_0 = 5.4$ ГПа. Видно, что данный подход позволяет лишь качественно показать начало роста предельного уровня напря-

Таблица 1. Формальные шаги процедуры *SPS Indicator* (τ)

<i>SPS Indicator</i> (τ)	
1. Для пробного значения τ вычислить невязки	$\delta_i(\tau) = (\sigma_i - \varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)), i = 1, 2, \dots, N$
2. Посчитать суммы	$H_0(\tau) = \sum_{i=1}^N \delta_i(\tau) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)}{d\tau},$ $H_j(\tau) = \sum_{i=1}^N \beta_{ij} \delta_i(\tau) \frac{d\varphi(\tau, \dot{\epsilon}_i)}{d\tau}, j = 1, 2, \dots, M - 1$
3. Упорядочить вычисленные суммы по возрастанию модуля $ H_j(\tau) $	
4. Определить ранг $\mathcal{R}(\tau)$, как номер позиции суммы $ H_0(\tau) $ в общем списке, например, $\mathcal{R}(\tau) = 1$ если $ H_0(\tau) $ наименьшая величина, $\mathcal{R}(\tau) = 2$ если $ H_0(\tau) $ больше только одной суммы из $ H_j(\tau) $, и т.д.	
5. Return 1 если $\mathcal{R}(\tau) \leq M - q$, в противном случае Return 0	

жений при динамическом нагружении. Для количественного описания этих данных Холландом (Holland С.С.) была сделана поправка нормировочного соотношения [14]:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_0} = 1 + 0.1 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{2/3} \quad (4.1)$$

Кривая 3 показывает расчетную зависимость согласно выражению (4.1) при значениях $\dot{\epsilon}_0 = 131.1/\text{с}$ и $\sigma_0 = 5.2$ ГПа. Последняя кривая уже достаточно хорошо описывает экс-

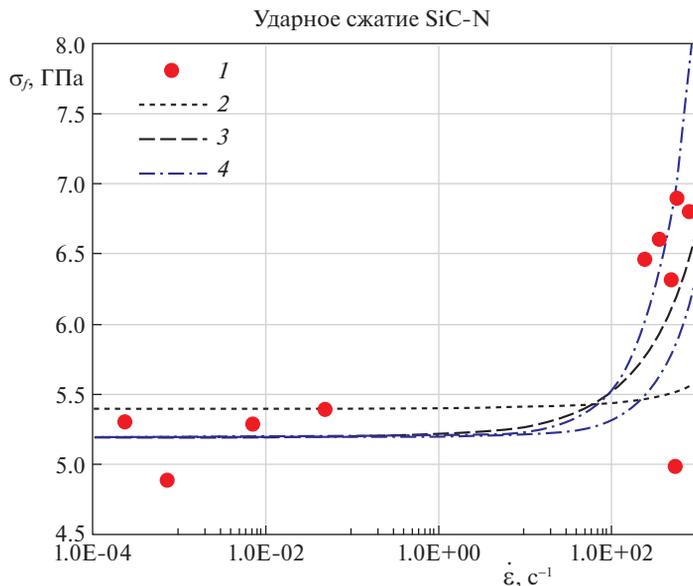


Рис. 1. 1 – экспериментальные данные керамики SiC-N [13], скоростные зависимости прочности, построенные согласно: 2 – нормировочному соотношению Kimberley&Ramesh, 3 – подправленному нормировочному соотношению (Holland), 4 – критерию инкубационного времени.

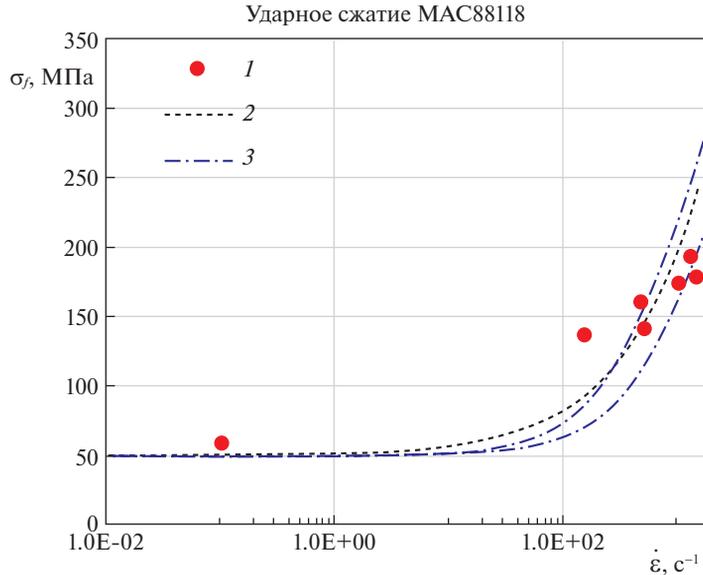


Рис. 2. 1 – экспериментальные данные испытаний метеоритного камня МАС88118 (Kimberley&Ramesh [15]), скоростные зависимости прочности, построенные согласно: 2 – нормировочному соотношению Kimberley&Ramesh, 3 – критерию инкубационного времени.

периментальную зависимость, однако остается непонятным, каким образом получается существенный перерасчет параметра $\dot{\epsilon}_0$ и почему возникает множитель 0.1. Кривые 4 получены в рамках структурно-временного подхода для следующих значений модельных параметров $\tau \in [5.4; 14.5]$ мкс и $\sigma_c = 5.2$ ГПа. Рис. 1 демонстрирует, что для этих кривых также наблюдается хорошее соответствие с экспериментальными данными, и при этом не требуется никаких дополнительных поправок.

Дополнительно было проведено сравнение рассматриваемых подходов на примере испытаний по ударному сжатию метеоритного камня МАС88118 [15]. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Кривая 2 соответствует нормировочному соотношению, вычисленному для параметров $\dot{\epsilon}_0 = 200.1/\text{с}$ и $\sigma_0 = 50$ МПа, а кривые 3 построены согласно критерию инкубационного времени при $\tau \in [82.5; 124.4]$ мкс и $\sigma_c = 50$ МПа. Можно отметить, что для камня МАС88118 оба подхода позволяют получить хорошее совпадение расчетных кривых с экспериментальными данными.

Заключение. Проведенное сравнение двух теоретических подходов к описанию прочности материалов при динамическом нагружении показало, что скоростная зависимость может быть качественно описана с помощью и того и другого метода. Однако феноменологическая основа структурно-временного подхода дает ему несомненные преимущества. Введение характерного времени τ , как параметра прочности материала, и самого принципа развития процесса разрушения в условиях высокоскоростного нагружения позволяет рассчитать скоростную зависимость прочности для любого материала. В то время как, нормировочное соотношение не всегда предоставляет хорошее количественное совпадение с экспериментальными результатами и требует ничем необоснованных исправлений, что наблюдалось для керамики SiC-N. Соотношение (2.4) связывающее временные параметры двух подходов, показывает, что в структурно-временном подходе нормировка скорости деформации формально происходит неравномерно, что и позволяет достигать хорошего количественного соответствия с экспери-

ментом безо всяких поправок. При этом совпадение нормирующего значения скорости деформации при нагружении с этой же скоростью, соотношение (2.5), позволяет сделать вывод о неплохом качественном совпадении рассматриваемых методов в некоторых случаях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00291). Разделы 2, 3 были выполнены Г.А. Волковым при поддержке Российского научного фонда (РНФ № 20-79-10078).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bragov A.M., Lomunov A.K.* Elastoplastic properties of aluminum alloy AMg6M with high strain rates // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.* 1989. V. 29. P. 755–758.
2. *Bragov A.M., Lomunov A.K.* Methodological aspects of studying dynamic material properties using the Kolsky method // *Int. J. Impact Eng.* 1995. V. 16. P. 321–330.
3. *Liu P., Zhou X., Qian Q., Berto F., Zhou L.* Dynamic splitting tensile properties of concrete and cement mortar // *Fatigue Fract Eng. Mater. Struct.* 2020. V. 43. P. 757–770.
4. *Grady D.E., Lipkin J.* Criteria for impulsive rock fracture // *Geophys. Res. Lett.* 1980. V. 7. № 4. P. 255–258.
5. *Tuler F.R., Butcher B.M.* A criterion for the time dependence of dynamic fracture // *Int. J. Fract. Mech.* 1968. V. 4. P. 431–437.
6. *Paliwal B., Ramesh K.T.* An interacting micro-crack damage model for failure of brittle materials under compression // *J. Mech. Phys. Solids.* 2008. V. 56. P. 896–923.
7. *Kimberley J., Ramesh K.T., Daphalapurkar N.P.* A scaling law for the dynamic strength of brittle solids // *Acta Mater.* 2013. V. 61. P. 3509–3521.
8. *Petrov Y.V., Utkin A.A.* Dependence of the dynamic strength on loading rate // *Sov. Mater. Sci.* 1989. V. 25. P. 153–156.
9. *Petrov Y.V., Morozov N.F.* On the modeling of fracture of brittle solids // *J. Appl. Mech.* 1994. V. 61. P. 710–712.
10. *Csaji B.C., Campi M.C., Weyer E.* Sign-perturbed sums: a new system identification approach for constructing exact non-asymptotic confidence regions in linear regression models // *IEEE Trans. Signal Proc.* 2015. V. 63. P. 169–181.
11. *Volkova M.V., Granichin O.N., Volkov G.A., Petrov Y.V.* On the possibility of using the method of sign-perturbed sums for the processing of dynamic test data // *Vestn. St. Petersburg. Univ. Math.* 2018. V. 51. P. 23–30.
12. *Volkova M., Volkov G., Granichin O., Petrov Y.* Sign-perturbed sums approach for data treatment of dynamic fracture tests // 2017 IEEE 56th Annu. Conf. Decis. Control. V. 2018. IEEE. 2017. P. 1652–1656.
13. *Wang H., Ramesh K.T.* Dynamic strength and fragmentation of hot-pressed silicon carbide under uniaxial compression // *Acta Mater.* 2004. V. 52. P. 355–367.
14. *Holland C.C., McMeeking R.M.* The influence of mechanical and microstructural properties on the rate-dependent fracture strength of ceramics in uniaxial compression // *Int. J. Impact Eng.* 2015. V. 81. P. 34–49.
15. *Kimberley J., Ramesh K.T.* The dynamic strength of an ordinary chondrite // *Meteorit Planet Sci.* 2011. V. 46. P. 1653–1669.

On Analysis of Two Theoretical Approaches to Predict Material Strength under Dynamic Loading

G. A. Volkov^{a,b,#} and Y. V. Petrov^{a,b,##}

^a Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

^b Saint-Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

#e-mail: g.volkov@spbu.ru

##e-mail: y.v.petrov@spbu.ru

Two theoretical approaches to analyse fracture condition under dynamic loading are considered in order to compare their ability to predict strain-rate sensitivity of materials. The first one is based on structural model and it is formulated as a scaling law. This relation charac-

terizes some general dependency for every brittle material in dimensionless axis. The second approach is based on the incubation time criterion and it has phenomenological nature. The main concept is that any transition process does not occur instantly and it demands some time to develop. The mutual relation of these approaches is studied on example of an experimental data of dynamic test for some brittle materials. It is demonstrated that the incubation time approach provides more general regularity of strain-rate dependency of strength and has some advantages on the scaling law relation.

Keywords: dynamic strength, strain rate sensitivity, incubation time criterion, scaling law

REFERENCES

1. *Bragov A.M., Lomunov A.K.* Elastoplastic properties of aluminum alloy AMg6M with high strain rates // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1989, vol. 29, pp. 755–758.
2. *Bragov A.M., Lomunov A.K.* Methodological aspects of studying dynamic material properties using the Kolsky method // *Int. J. Impact Eng.*, 1995, vol. 16, pp. 321–330.
3. *Liu P., Zhou X., Qian Q., Berto F., Zhou L.* Dynamic splitting tensile properties of concrete and cement mortar // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2020, vol. 43, pp. 757–770.
4. *Grady D.E., Lipkin J.* Criteria for impulsive rock fracture // *Geophys. Res. Lett.*, 1980, vol. 7, no. 4, pp. 255–258.
5. *Tuler F.R., Butcher B.M.* A criterion for the time dependence of dynamic fracture // *Int. J. Fract. Mech.*, 1968, vol. 4, pp. 431–437.
6. *Paliwal B., Ramesh K.T.* An interacting micro-crack damage model for failure of brittle materials under compression // *J. Mech. Phys. Solids*, 2008, vol. 56, pp. 896–923.
7. *Kimberley J., Ramesh K.T., Daphalapurkar N.P.* A scaling law for the dynamic strength of brittle solids // *Acta Mater.*, 2013, vol. 61, pp. 3509–3521.
8. *Petrov Y.V., Utkin A.A.* Dependence of the dynamic strength on loading rate // *Sov. Mater. Sci.*, 1989, vol. 25, pp. 153–156.
9. *Petrov Y.V., Morozov N.F.* On the modeling of fracture of brittle solids // *J. Appl. Mech.*, 1994, vol. 61, pp. 710–712.
10. *Csaji B.C., Campi M.C., Weyer E.* Sign-perturbed sums: a new system identification approach for constructing exact non-asymptotic confidence regions in linear regression models // *IEEE Trans. Signal Proc.*, 2015, vol. 63, pp. 169–181.
11. *Volkova M.V., Granichin O.N., Volkov G.A., Petrov Y.V.* On the possibility of using the method of sign-perturbed sums for the processing of dynamic test data // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.*, 2018, vol. 51, pp. 23–30.
12. *Volkova M., Volkov G., Granichin O., Petrov Y.* Sign-perturbed sums approach for data treatment of dynamic fracture tests // *IEEE 56th Annu. Conf. Decis. Control.*, vol. 2018, IEEE. 2017, pp. 1652–1656.
13. *Wang H., Ramesh K.T.* Dynamic strength and fragmentation of hot-pressed silicon carbide under uniaxial compression // *Acta Mater.*, 2004, vol. 52, pp. 355–367.
14. *Holland C.C., McMeeking R.M.* The influence of mechanical and microstructural properties on the rate-dependent fracture strength of ceramics in uniaxial compression // *Int. J. Impact Eng.*, 2015, vol. 81, pp. 34–49.
15. *Kimberley J., Ramesh K.T.* The dynamic strength of an ordinary chondrite // *Meteorit Planet Sci.*, 2011, vol. 46, pp. 1653–1669.

УДК 539.5

ЭФФЕКТ ПАМЯТИ ФОРМЫ В КОМПОЗИТНОЙ СЛОИСТОЙ ОБОЛОЧКЕ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

© 2022 г. Е. В. Карпов^{1,*}, А. Ю. Ларичкин^{1,**}, Б. Д. Аннин^{1,***}

¹ Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

*e-mail: evkarpov@mail.ru

**e-mail: larichking@gmail.com

***e-mail: annin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 04.03.2022 г.

После доработки 06.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Проведены экспериментальные исследования по разворачиванию элемента шпангоута антенны космического спутника из композита с термоактивируемой памятью формы из деформированного транспортного состояния в исходное рабочее. Элемент представляет собой углепластиковую оболочку открытого профиля двойной кривизны, которая для получения транспортного состояния изгибается вокруг цилиндрической направляющей поверхности, перпендикулярной одному из радиусов исходной кривизны. Обнаружено, что у оболочки двойной кривизны существует промежуточное равновесное состояние между транспортным и рабочим. Для выхода из этого состояния необходим дополнительный нагрев. Таким образом существует температурный диапазон, в котором эффект памяти формы материала реализуется, но разворачивания конструкции не происходит. Выход из этого состояния происходит скачкообразно, что может создавать нежелательные колебания рефлектора антенны.

Ключевые слова: эффект памяти формы, композит с памятью формы, углепластик

DOI: 10.31857/S0032823522040099

1. Введение. Полимерные смолы, обладающие эффектом памяти формы (ЭПФ), известны с 80-х годов прошлого века [1–3]. ЭПФ в полимерах связан с запаздывающими механически обратимыми деформациями. Для тела из полимера с памятью формы исходной формой является та, в которой произошла полимеризация материала. Будучи деформированным при температуре выше температуры стеклования и охлажденным, оно ведет себя, как тело, подвергнутое упругопластической формовке – сохраняет новую форму за вычетом частично восстановленных упругих деформаций. Но замороженные высокоэластические деформации, в отличие от пластических, являются обратимыми, т.е. после формовки в теле сохраняются внутренние напряжения, действие которых возвращает тело к исходной форме при появлении воздействия, активирующего ЭПФ, например, при нагреве, электромагнитном или химическом воздействии, в зависимости от типа полимера. На основе полимерных смол с ЭПФ могут быть изготовлены волокнистые или тканые композиты (например, стекло- или углепластики). Такие композиты обладают высокой удельной прочностью при малой плотности, что делает их перспективными материалами для космической техники, где они могут использоваться, например, для создания саморазворачивающихся конструкций [7, 8], которые в процессе вывода на орбиту находятся в свернутом компактном состоянии. В частности, элементы, изготовленные из композита с

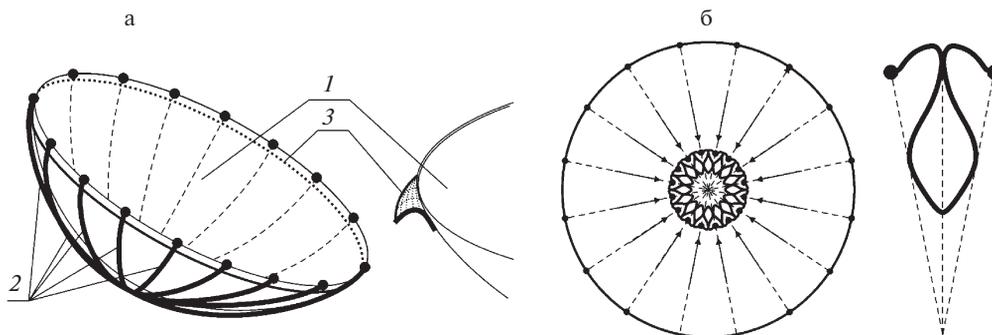


Рис. 1. Схема антенны и шпангоута: а) 1 – рефлектор, 2 – спицы, 3 – шпангоут; б) переход кольцевого шпангоута из рабочего состояния в транспортное, форма одного сектора шпангоута в свернутом состоянии.

памятью формы, используются в конструкции прецизионного рефлектора космической антенны, разрабатываемого АО “Информационные спутниковые системы” совместно с СибГУ им. М.Ф. Решетнева [9, 10]. Рефлектор представляет собой тонкую композитную оболочку радиуса 4 м, закрепленную на шестнадцати спицах (рис. 1, а). По периметру рефлектора установлен шпангоут, который представляет собой тонкую кольцевую оболочку с приближенно гиперболическим поперечным сечением, изготовленную из углепластика с памятью формы. В транспортном (свернутом) состоянии поперечное сечение шпангоута распрямлено, его сегменты изогнуты, как показано на рис. 1, б. При нагреве до заданной температуры сегменты шпангоута должны принять исходную форму, обеспечив жесткость периферии рефлектора, что необходимо для повышения точности формы отражающей поверхности и увеличения качества сигнала.

Полимерные композиты с ЭПФ наследуют эффект памяти формы от связующего [4–6], но его реализация зависит от взаимодействия связующего с высокопрочными волокнами или тканями из них, используемыми в качестве армирующего компонента. С одной стороны, упругая энергия, запасенная в деформированных волокнах, как на стадии изготовления композита, так и на стадии приведения его в промежуточную форму, может влиять на деформирование связующего после активации ЭПФ. С другой стороны, волокна и тем более слои ткани способны выдерживать значительно меньшие деформации, чем связующее при температуре выше температуры стеклования, что может приводить к образованию заломов, локальных потерь устойчивости и расслоению композитов. Например, показано [7], что в эластичном однонаправленном композите с памятью формы происходит локальная потеря устойчивости из-за перегиба сжимаемых волокон. Кроме того, поведение плоской слоистой оболочки из углепластика с памятью формы [12] существенно зависит от ориентации волокон ткани относительно направления изгиба при приведении оболочки в промежуточную форму, что связано с формированием систем локальных структурных дефектов.

Целью данной работы было экспериментальное исследование поведения слоистой углепластиковой оболочки со сложной исходной формой (сегмента шпангоута саморазворачиваемой параболической антенны) при реализации эффекта памяти формы полимерного связующего.

2. Материал, объект и постановка экспериментов. Материал, из которого были изготовлены сегменты шпангоута, состоит из трех слоев углеткани, пропитанных реактопластом Diaplex MP5510 производства Японии, который обладает эффектом памяти формы. Массовое соотношение связующего и углеткани 40:60. Ткань состоит из углеродных волокон СТ 12073 с диаметром 7 мкм, пределом прочности 3530 МПа, моду-

лем упругости 230 ГПа, имеет полотняное плетение с размером ячейки 2 мм, толщину 0.2 мм и поверхностную плотность 200 г/м². Температура стеклования Diaplex MP5510 составляет 55°C, температура отверждения – 70°C. Образцы были изготовлены в ресурсном центре “Космические аппараты и системы”.

Установлено [12], что образцы такого материала с одинаковой ориентацией всех слоев по-разному реагируют на деформирование при изгибе под разными углами к направлению волокон. При ориентации $[0, 0, 0]$ при продольном изгибе пластины деформация в основном сосредоточена в небольшой части образца, где поперечные волокна остаются прямыми, а продольные теряют устойчивость, в результате чего образуются системы структурных дефектов в виде локальных выпучиваний, заломов и расслоений, тогда как большая часть образца остается плоской. При ориентации $[0, -45, 45]$ деформирование распределяется по образцу относительно равномерно, причем происходит изгиб как продольного, так и поперечного сечения образца (поверхность приобретает вид, подобный однополостному гиперболоиду), все волокна остаются практически прямыми, необратимых изменений не наблюдается. Но при этом ориентация $[0, 0, 0]$ обеспечивает заметно лучшее восстановление начальной формы при активации ЭПФ, чем $[0, -45, 45]$. Для осреднения этих эффектов сегменты шпангоута были изготовлены из слоев с различной ориентацией относительно продольного направления. Внешний слой имел ориентацию $[0, 0, 0]$, а внутренний – $[0, -45, 45]$.

Образцы представляли собой сегменты кольцевого шпангоута (рис. 2) длиной 0.28 м. Линия АВ – продольное сечение сегмента, проходящее через точки максимальной кривизны поперечных сечений. CD – поперечное сечение, на котором при сворачивании шпангоута находится точка максимальной кривизны АВ. Поскольку радиус кривизны шпангоута равен 4 м, образующие, параллельные линии АВ, близки к прямым линиям. Направляющие, параллельные линии CD, имеют длину 0.1 м и приближенно гиперболическую форму. Такая конструкция шпангоута придает ему большую изгибную жесткость в направлении АВ, поскольку для изгиба АВ при сохранении криволинейности CD необходимо растяжение в направлении АВ, превышающее возможности растяжения углеткани без разрушения (рис. 2, в). Для выпрямления CD в свою очередь необходимо растяжение внутреннего тканевого слоя и сжатие внешнего, в котором при сжатии происходят локальные потери устойчивости (рис. 2, г), образующие выпучивания и отслоения от среднего слоя. При обычной температуре, когда связующее находится в стекловидном (твердом и хрупком) состоянии, распрямление CD невозможно без образования трещин вдоль АВ. При температуре выше температуры стеклования, когда связующее становится упругоэластичным, повреждение материала при распрямлении CD ограничивается образованием системы дефектов из-за потери устойчивости внешнего слоя. Эти дефекты представляют собой выпучивания, расположенные в шахматном порядке в ячейках ткани в области, которая примыкает к АВ и имеет ширину около трети длины CD. На внутренней стороне дефектов не образуется.

После нагрева выше температуры стеклования и выпрямления CD образец может быть изогнут в направлении АВ одним из двух способов (рис. 2, д, е). Способ рис. 2, д далее назван внутренним изгибом (внутренний слой оболочки остается внутренним, то есть сжимается при изгибе), а способ 2, е – внешним (внутренний слой оболочки становится внешним, т.е. растягивается при изгибе). Внутренний изгиб в различной степени реализуется в основной части сегмента шпангоута, а внешний – вблизи креплений сегмента к спицам антенны (рис. 1, б).

Таким образом, образец подвергается деформированию, имеющему место на различных участках шпангоута при сворачивании из исходного ненапряженного состояния в транспортное. Изгиб образцов в транспортную форму проводился при помощи машины для испытаний на одноосное растяжение по схемам, изображенным на рис. 3,

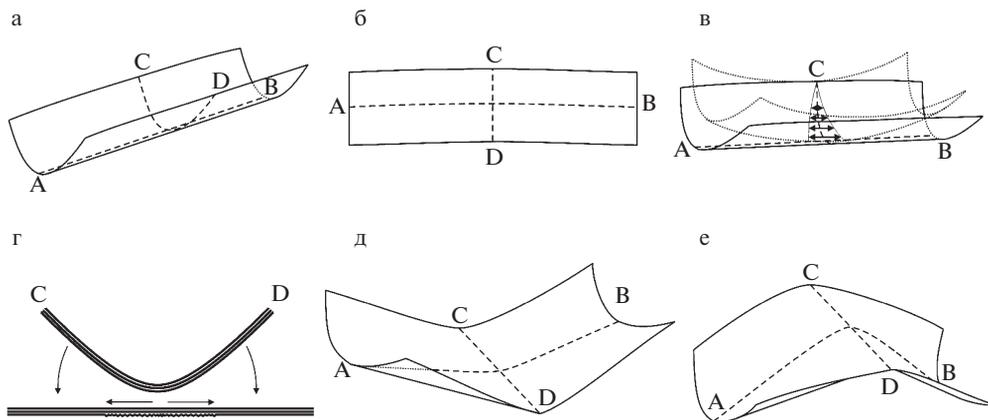


Рис. 2. Геометрия образцов и схемы их деформирования.

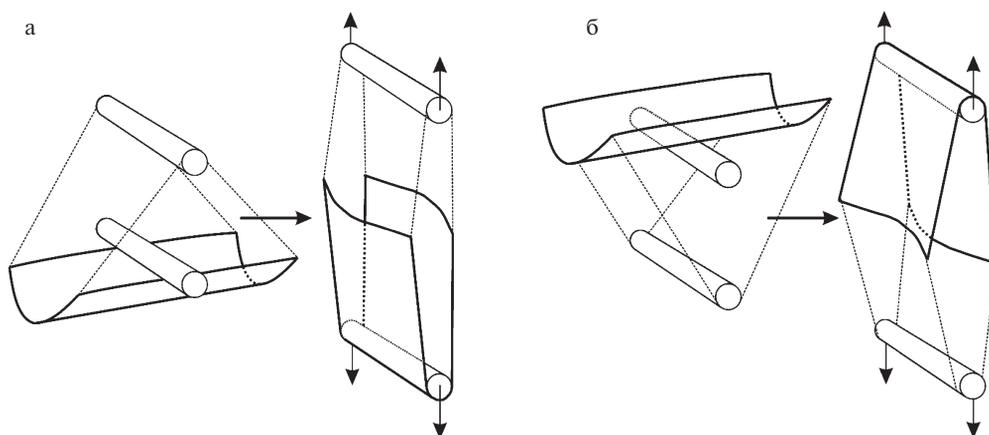


Рис. 3. Схема реализации внутреннего и внешнего изгиба сектора шпангоута при переходе от исходной не-напряженной формы к свернутой транспортной ($T = 70^{\circ}\text{C}$).

при температуре 70°C , после чего образцы охлаждались в нагруженном состоянии для фиксации транспортной формы и затем разгружались.

Образцы с зафиксированной транспортной формой помещались в термокамеру, нагреваемую за счет конвекции от электронагревателя, отделенного экраном от рабочего пространства. Один конец образца фиксировался и с помощью инфракрасной камеры IRBIS 8355 InfraTec производилась съемка процесса раскрытия образцов в исходную форму при нагреве. На основе данных съемки были получены зависимости температуры образцов T и угла раскрытия α от времени (см. рис. 4, б). Замер угла α проводился по внешней кромке образцов из-за ограниченных возможностей наблюдения за образцами в термокамере, поэтому при внутреннем изгибе криволинейных образцов α меньше угла раскрытия вдоль АВ, а при внешнем – больше, но в обоих случаях α позволяет отслеживать процесс перехода образца от транспортной формы к исходной и фиксировать момент окончательного выпрямления АВ. Испытания про-

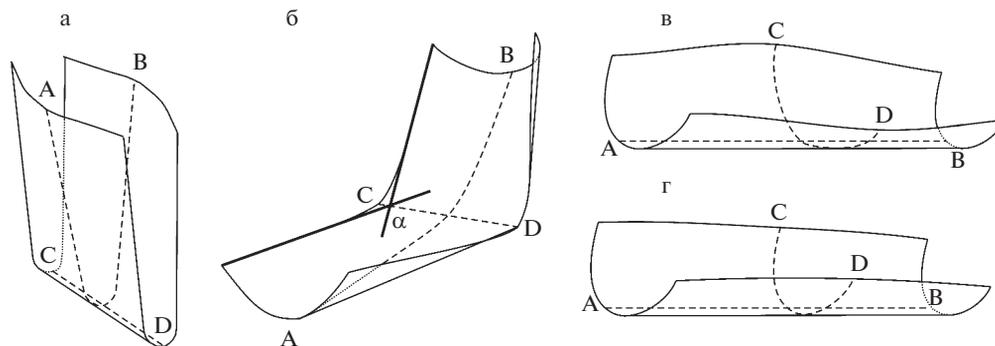


Рис. 4. Стадии перехода образца из транспортной формы в исходную при реализации ЭПФ: а – транспортная форма; б – форма, устойчивая в направлении CD; в – форма, устойчивая в направлении АВ; г – рабочая форма.

водились на образцах, подвергнутых предварительному внутреннему и внешнему изгибу при непрерывном и ступенчатом нагреве до $67\text{--}70^\circ\text{C}$, а также на контрольном плоском образце из того же материала с теми же размерами.

На рис. 5 приведены зависимости температуры образца и угла раскрытия от времени для всех образцов: 1 – контрольный плоский образец при непрерывном нагреве до 70°C ; 2, 3 – образцы с внутренним изгибом при непрерывном нагреве до 70°C ; 4 – образец с внешним изгибом при непрерывном нагреве до 70°C ; 5, 6 – образцы с внешним изгибом при ступенчатом нагреве ($60\text{--}65^\circ\text{C}$) и ($60\text{--}62\text{--}63\text{--}65\text{--}67^\circ\text{C}$); 7, 8, 9 – образцы с внутренним изгибом при ступенчатом нагреве ($60\text{--}70^\circ\text{C}$), ($60\text{--}65\text{--}67^\circ\text{C}$) и ($60\text{--}65\text{--}67^\circ\text{C}$). Маркеры на кривых $\alpha(t)$ соответствуют моментам перехода на следующую ступень нагрева.

На рис. 6 приведены зависимости угла раскрытия от температуры образца, полученные из зависимостей $\alpha(t)$ и $T(t)$ исключением времени: 1 – контрольный плоский образец; 2 – образец с внутренним изгибом при непрерывном нагреве; 3 – образец с внутренним изгибом при ступенчатом нагреве; 4 – образец с внешним изгибом при непрерывном нагреве; 5 – образец с внешним изгибом при ступенчатом нагреве.

3. Обсуждение результатов. Полученные зависимости $\alpha(t)$ указывают на то, что в оболочке, выполненной из тканого композита, связующим которого является полимер с ЭПФ, при нагреве действуют два независимых механизма восстановления исходной формы. Первый из них активируется при температуре, не достигающей температуры стеклования, при которой активируется ЭПФ полимера в деформированных областях образца. Температура его активации зависит от исходной формы оболочки: для плоской оболочки в нашем случае ее значение было близко к 45°C , для криволинейных – около 50°C , тогда как температура стеклования связующего – 55°C . Вероятно, активация восстановления формы до достижения температуры стеклования связующего происходит за счет упругой энергии, запасенной в деформированной конструкции, которую образуют три склеенных слоя углеткани, и высвобождаемой из-за снижения жесткости связующего при нагреве. Причиной относительно низкой температуры активации этого механизма у плоской оболочки может служить то, что локальные дефекты, приобретаемые плоской оболочкой при приведении в транспортную форму и снижающие запасенную упругую энергию, минимальны по сравнению с криволинейными оболочками. После достижения температуры стеклования оба механизма восстановления формы – высвобождение упругой энергии упрочняющего ком-

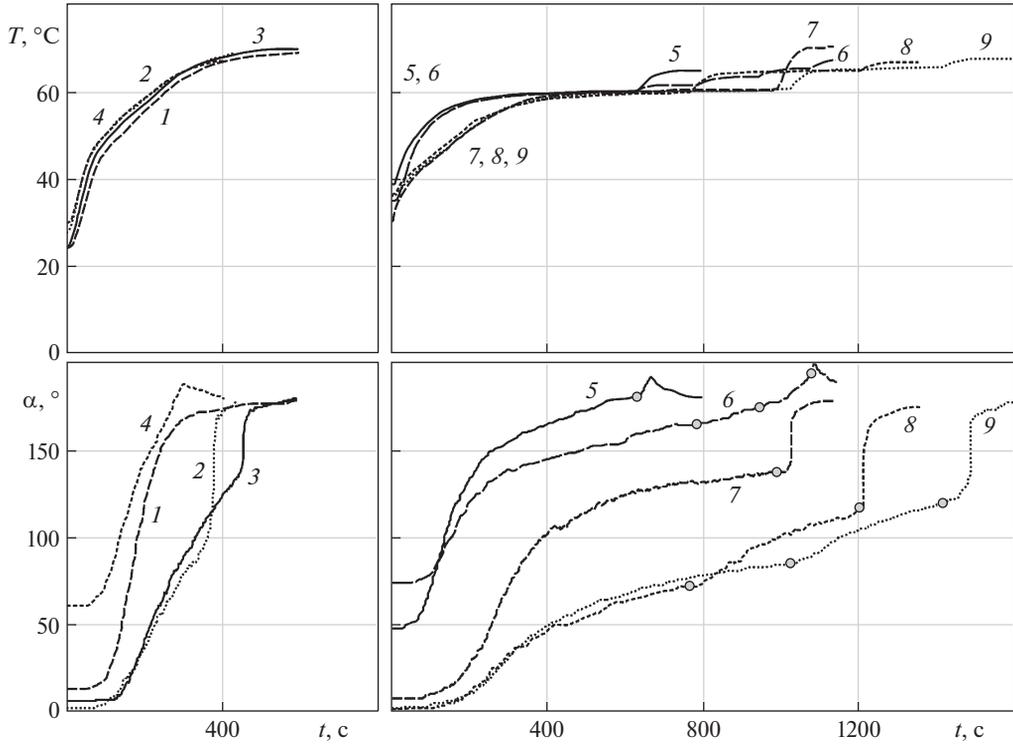


Рис. 5.

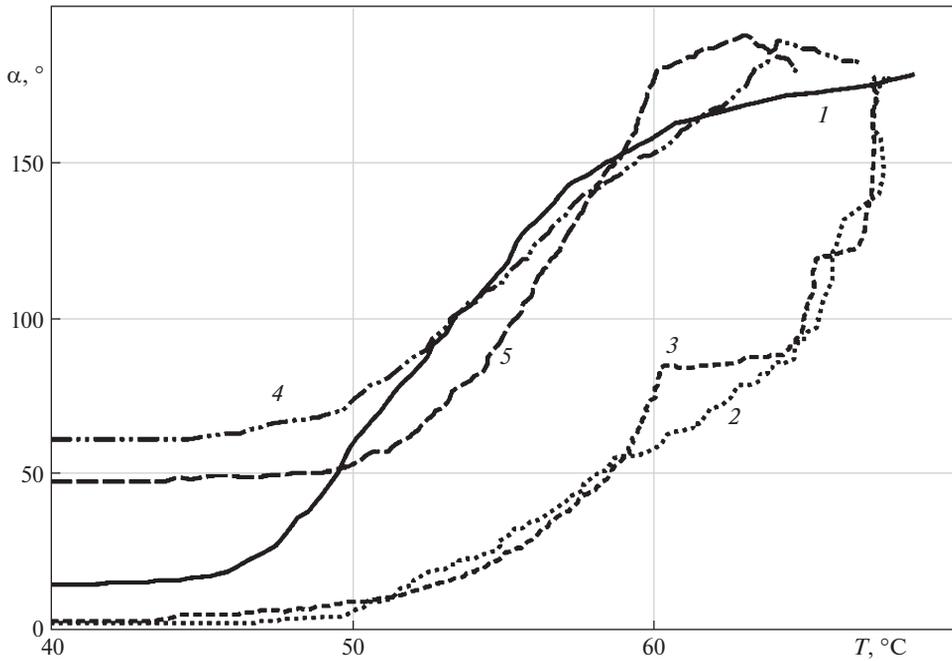


Рис. 6.

понтента и ЭПФ связующего работают совместно. При активации второго механизма не происходит заметного изменения скорости восстановления. Скорость раскрытия при постоянном нагреве для всех образцов тем больше, чем больше кривизна в области перегиба. При ступенчатом нагреве (наличии выдержек при постоянной температуре для ряда значений температуры) скорость раскрытия уменьшается при снижении скорости роста температуры и при постоянном значении температуры.

Было показано [12], что плоские оболочки после приведения в промежуточную изогнутую форму и реализации ЭПФ не восстанавливают исходную форму полностью и накапливают расхождение с ней при повторении циклов промежуточная форма – восстановленная форма. На рис. 5 можно видеть, что после достижения угла раскрытия около 160° (в исходной форме он равен 180°) скорость восстановления резко снижается, причиной чему может быть исчерпание одного из двух механизмов восстановления. Например, влияние ЭПФ полимерного связующего на изменение формы может уменьшаться из-за уменьшения деформированной области, т.е. объема полимера, являющегося источником восстанавливающих сил. Поскольку восстановленная форма в итоге сохраняет изгиб в несколько градусов, она неустойчива при сжатии вдоль АВ в отличие от исходной формы.

Все промежуточные состояния исходно плоской оболочки при переходе от транспортной формы к исходной, отличаются друг от друга только величиной угла раскрытия и размерами деформированной области. У оболочки с двойной кривизной между транспортной и исходной формами существует два существенно различных состояния (см. рис. 4).

В первом состоянии (рис. 4, б) сечение АВ криволинейно, а поперечное сечение CD прямолинейно. Поскольку возвращение CD в криволинейную форму возможно только при выпрямлении АВ, восстановление исходной формы АВ происходит как за счет восстанавливающих сил, вызванных отклонением текущей криволинейной формы АВ от начальной прямой, так и за счет восстанавливающих сил, действующих в поперечном направлении, вызванных отклонением текущей прямолинейной формы CD от начальной криволинейной. В этом состоянии форма устойчива в направлении CD и неустойчива в направлении АВ.

Во втором состоянии (рис. 4, в) сечение АВ прямолинейно, а поперечное сечение CD криволинейно и со временем приближается к исходной форме. В этом состоянии форма устойчива в направлении АВ и неустойчива в направлении CD. Переход между двумя состояниями представляет собой потерю устойчивости в направлении CD и при внутреннем и внешнем изгибе происходит существенно разным образом.

При внутреннем изгибе потеря устойчивости в направлении CD с восстановлением устойчивости в направлении АВ при постоянной скорости нагрева происходит скачкообразно с увеличением скорости раскрытия на два порядка. При раскрытии антенны скачкообразное изменение формы шпангоута может стать причиной колебаний ткани рефлектора, гашение которых в космосе из-за отсутствия сопротивления воздуха проблематично. При внешнем изгибе скорость раскрытия при постоянной скорости нагрева остается постоянной, при ступенчатом нагреве наблюдалось увеличение скорости раскрытия в переходном состоянии в 4–7, но скачкообразного перехода не происходило.

На графиках $\alpha(t)$ момент восстановления исходной устойчивой формы АВ соответствует скачку на кривых 2, 3, 7–9 (внутренний изгиб) и точке максимума на кривых 4–6 (внешний изгиб).

Проведение испытаний со ступенчатым нагревом показало, что при внутреннем изгибе остановка нагрева при температуре ниже 68°C происходит замедление и остановка процесса раскрытия свернутого шпангоута. При продолжении нагрева процесс раскрытия возобновляется. У всех образцов при ступенчатом нагреве скачкообразная потеря устойчивости в направлении CD происходила после перехода на последнюю

ступень нагрева. При промежуточных переходах между ступенями нагрева происходило увеличение скорости раскрытия. Для внешнего изгиба (рис. 5, кривая $b \alpha(t)$) влияния промежуточных переходов на скорость раскрытия не наблюдалось.

Сечение СВ, как и исходно плоская оболочка, восстанавливает исходную форму не полностью, однако главное функциональное свойство развернутого шпангоута — устойчивость в направлении АВ — полностью восстанавливается как после внутреннего изгиба, так и после внешнего. Однако, как показывают проведенные исследования, при восстановлении из промежуточной формы, полученной внутренним изгибом, существует промежуточное состояние, в котором восстанавливающие силы, действующие в различных направлениях, уравниваются и восстановление формы прекращается, если не происходит дополнительного увеличения энергии системы за счет нагрева.

Таким образом, для композитной оболочки двойной кривизны существует диапазон температур, в котором активация эффекта памяти формы связующего полимера, носителя ЭПФ, не приводит к восстановлению рабочей формы, а выход за пределы этого диапазона приводит к скачкообразному раскрытию свернутой оболочки, что может служить источником нежелательных колебаний конструкции. С другой стороны, такая оболочка может быть использована в различных устройствах в качестве механического актуатора, температура срабатывания которого при одном и том же материале полимерного связующего с ЭПФ может быть задана выбором исходной формы.

Работа поддержана грантом Министерства науки и высшего образования РФ (проект 075-15-2020-781).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белошенко В.А., Варюхин В.Н., Возняк Ю.В. Эффект памяти формы в полимерах // Успехи химии. 2005. Т. 74. № 3. С. 285–306.
2. Nelson A. Stimuli-responsive polymers: engineering interactions // Nat. Mater. 2008. № 7. P. 523–525.
3. Mather P., Luo X., Rousseau I. Shape memory polymer research // Annu. Rev. Mater. Res. 2009. № 39. P. 445–471.
4. Kobayashi K., Hayashi S. Woven fabric made of shape memory polymer // US Pat. 5128197.
5. Leng J., Lan X., Yanju Liu Y. et al. Shape-memory polymers and their composites: Stimulus methods and applications // Progr. in Mater. Sci. 2011. V. 56. № 7. P. 1077–1135.
6. Meng H., Li G. A review of stimuli-responsive shape memory polymer composites // Polymer. 2013. V. 54. № 9. P. 2199–2221.
7. Liu Y., Du H., Liu L. et al. Shape memory polymers and their composites in aerospace applications: a review // Smart Mater. Struct. 2014. V. 23. № 2. P. 23001–23022.
8. Москвичев Е.В., Ларичкин А.Ю. Исследования функциональных и механических свойств полимерного композитного материала с памятью формы для рефлектора космической антенны // Заводская лабор. Диагн. матер. 2020. Т. 86. № 1. С. 51–56.
9. Охоткин К.Г., Власов А.Ю., Захаров Ю.В. и др. Аналитическое моделирование гибкого обода рефлекторов космических антенн // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5. С. 190–200.
10. Moskvichev E.V., Khakhlenkova A.A. Surface accuracy analysis of rigid reflector in mechanical and thermal loading // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1915.
11. Zhiyuan X., Rui W., Song R. et al. Nonlinear bending behavior of EMC laminates at elevated temperatures // 2016 Int. Conf. on Innovative Material Science and Technology. P. 425–435.
12. Аннин Б.Д., Карпов Е.В., Ларичкин А.Ю. Влияние анизотропии на деформирование полимерного композита с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 6–13.

Shape Memory Effect in Composite Layered Shell of Complex Shape

E. V. Karpov^{a,#}, A. Yu. Larichkin^{a,##}, and B. D. Annin^{a,###}

^a *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russia*

[#] *e-mail: evkarpov@mail.ru*

^{##} *e-mail: larichking@gmail.com*

^{###} *e-mail: annin@hydro.nsc.ru*

Experimental studies have been carried out on the deployment of a space satellite antenna frame element made of a composite with thermally activated shape memory from a deformed transport state to the initial working state. The element is a carbon-fiber shell of an open profile of double curvature, which, in order to obtain a transport state, is bent around a cylindrical guide surface perpendicular to one of the radii of the initial curvature. It was found that the shell of double curvature has an intermediate equilibrium state between the transport and working ones. To exit this state, additional heating is required. Thus, there is a temperature range in which the shape memory effect of the material is realized, but the unfolding of the structure does not occur. The exit from this state occurs abruptly, which can create unwanted oscillations of the antenna reflector.

Keywords: shape memory effect, shape memory composite, carbon fiber

REFERENCES

1. *Beloshenko V.A., Varyukhin V.N., Voznyak Yu.V.* The shape memory effect in polymers // Russ. Chem. Rev., 2005, vol. 74, no. 3, pp. 285–306. (in Russian)
2. *Nelson A.* Stimuli-responsive polymers: engineering interactions // Nat. Mater., 2008, no. 7, pp. 523–525.
3. *Mather P., Luo X., Rousseau I.* Shape Memory Polymer Research // Annu. Rev. Mater. Res., 2009, no. 39, pp. 445–471.
4. *Kobayashi K., Hayashi S.* Woven fabric made of shape memory polymer // US Pat. 5128197.
5. *Leng J., Lan X., Yanju Liu Y. et al.* Shape-memory polymers and their composites: Stimulus methods and applications // Progr. in Mater. Sci., 2011, vol. 56, no. 7, pp. 1077–1135.
6. *Meng H., Li G.* A review of stimuli-responsive shape memory polymer composites // Polymer, 2013, vol. 54, no. 9, pp. 2199–2221.
7. *Liu Y., Du H., Liu L. et al.* Shape memory polymers and their composites in aerospace applications: a review // Smart Mater. Struct., 2014, vol. 23, no. 2, pp. 23001–23022.
8. *Moskvichev E.V., Larichkin A.Yu.* Experimental study of the functional and mechanical properties of shape memory polymer composites for a reflector of the space antenna // Zavodskaja Lab. Diagn. Mater., 2020, vol. 86, no. 1, pp. 51–56. (in Russian)
9. *Okhotkin K.G., Vlasov A.Yu., Zakharov Yu.V., Annin B.D.* Analytical modeling of the flexible rim of space antenna reflectors // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2017, vol. 58, no. 5, pp. 924–932.
10. *Moskvichev E.V., Khakhlenkova A.A.* Surface accuracy analysis of rigid reflector in mechanical and thermal loading // AIP Conf. Proc., 2017, vol. 1915.
11. *Zhiyuan X., Rui W., Song R. et al.* Nonlinear bending behavior of EMC laminates at elevated temperatures // 2016 Int. Conf. on Innovative Material Science and Technology, pp. 425–435.
12. *Annin B.D., Karpov E.V., Larichkin A.Y.* Influence of anisotropy on the deformation of a polymer composite with shape memory // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 761–766.

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСЕЧЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

© 2022 г. С. А. Бочкарёв^{1,*}, С. В. Лекомцев^{1,**}, В. П. Матвеевко^{1,***}

¹ *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

**e-mail: bochkarev@icmm.ru*

***e-mail: lekemtsev@icmm.ru*

****e-mail: mvp@icmm.ru*

Поступила в редакцию 03.03.2022 г.

После доработки 03.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Представлены результаты исследований собственных частот колебаний круговых усеченных конических оболочек, полностью заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Поведение упругой конструкции рассматривается в рамках классической теории оболочек, уравнения которой записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Малые колебания жидкости описываются линеаризованными уравнениями Эйлера, которые в акустическом приближении сводятся к волновому уравнению относительно гидродинамического давления и записываются в сферической системе координат. Его преобразование к системе обыкновенных дифференциальных уравнений выполняется тремя способами: методом прямых, с помощью интерполяции сплайнами и методом дифференциальных квадратур. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова. Вычисление собственных частот колебаний выполняется с помощью пошаговой процедуры с последующим уточнением методом деления пополам. Достоверность получаемых результатов подтверждена сравнением с известными численно-аналитическими решениями. Для оболочек с разными комбинациями граничных условий и углами конусности оценена эффективность вычисления частот колебаний для различных методов преобразования волнового уравнения. Продемонстрировано, что использование обобщенного метода дифференциальных квадратур обеспечивает наиболее экономичное решение задачи с приемлемой точностью вычислений.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, коническая оболочка, метод ортогональной прогонки Годунова, собственные колебания, идеальная сжимаемая жидкость, метод прямых, кубический сплайн, метод дифференциальных квадратур

DOI: 10.31857/S0032823522040038

1. Введение. Тонкостенные оболочки, содержащие жидкость или погруженные в нее, находят широкое применение в различных областях техники. При их моделировании построение аналитических решений возможно только для некоторых конфигураций цилиндрических оболочек. В этих частных случаях волновое уравнение, наиболее часто используемое для описания идеальной жидкости, допускает формирование явного выражения для гидродинамического давления, записываемого в функциях Бесселя. Численно-аналитические или численные методы решения каких-либо ограничений при этом не имеют. Универсальные численные алгоритмы, такие как метод конечных элементов или его комбинация с методом граничных элементов, примени-

мы при произвольном расположении меридиана и могут быть использованы при анализе как конических, так и сферических оболочек. Однако отсутствие полноценных экспериментальных исследований не позволяет в полной мере оценить достоверность получаемых при этом результатов в широком диапазоне волновых чисел при низко- или высокочастотных колебаниях. В связи с этим, необходимость разработки альтернативных методов решения задач гидроупругости в случае произвольного меридиана является очевидной. Многообразие имеющихся решений может послужить косвенной оценкой достоверности результатов, получаемых в рамках того или иного подхода. В настоящей работе внимание будет сконцентрировано на конических оболочках, содержащих неподвижную жидкость, но описываемый ниже численный алгоритм применим и в случае сферических оболочек.

В первых публикациях [1, 2], где предметом исследований становится полная или усеченная коническая оболочка (полость), полностью или частично заполненная жидкостью, целью авторов ставится получение явных выражений для низших частот гидроупругих колебаний. В [1] принимается гипотеза плоского движения жидкости совместно с методом последовательных приближений. В [2] потенциал смещений жидкости вычисляется в виде суммы двух функций. Одна из них удовлетворяет граничным условиям на смоченной поверхности, а другая соответствует свободным колебаниям жидкости в жесткой полости. Решение строится с использованием метода Галёркина. В работах [3, 4] предлагается приближенный аналитический метод определения динамических характеристик упругой конической оболочки с жидкостью. Потенциал скорости ищется в виде разложения по координатным функциям, представляющим полиномы Лежандра в случае осесимметричных колебаний или присоединенные функции Лежандра для неосесимметричных. Вводится система функций в явной форме, точно удовлетворяющая естественным краевым условиям формулируемой вариационной задачи. На основе проведенных виброиспытаний конического бака, частично заполненного жидкостью, в статье [5] получены частоты двух первых осесимметричных мод. Отмечается, что результаты натурных испытаний удовлетворительно согласуются с расчетными данными. Возможно, что первые наиболее обстоятельные численные результаты расчета динамических характеристик конических оболочек вращения с жидкостью представлены в работе [6]. Здесь применяется метод, основанный на разложении потенциала смещений жидкости в ряд по собственным функциям гидродинамической задачи, которые в случае возможности разделения переменных записываются в явном виде в функциях Бесселя первого рода действительного и чисто мнимого аргумента. Коэффициенты разложения определяются из условий ортогональности этих функций на смоченной поверхности. Решение уравнений осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова. В этой же работе приведены результаты экспериментальных исследований, в которых частоты определялись резонансным методом при электродинамическом возбуждении колебаний. Продемонстрировано, что расхождение теоретических и экспериментальных данных не превышает 11%. В конечно-элементной работе [7] используется элемент, в котором точные функции перемещений определяются непосредственно из уравнений теорий оболочек Сандерса. Из волнового уравнения, записанного в сферической системе координат, в результате разделения переменных и метода Фробениуса получено аналитическое выражение для потенциала скорости как функции угла при вершине и окружной гармоники. В численных примерах продемонстрировано влияние угла конусности, геометрических размеров и уровня заполнения жидкостью на динамические характеристики прямой и перевернутой свободно опертой конической оболочки. Аналогичный подход был использован в [8] при моделировании жидкости в конической части комбинированной оболочки. Уравнения Доннелла–Муштари, включающие аналитическое выражение для гидродинамического давления, записанное в функциях Бесселя, используются в [9] для оценки влияния жидкости и угла при вер-

шине на связанные частоты и соответствующие им формы колебаний жестко закрепленной конической оболочки. Корректность выбранного метода решения авторами не обсуждается. В работе [10] представлена аналитическая модель для описания низкочастотных колебаний усеченной конической оболочки, погруженной в сжимаемую жидкость. Вся конструкция разбивается по длине на ряд цилиндрических сегментов с постоянным радиусом, описываемых уравнениями Флюгге, в пределах которых внешнее гидродинамическое давление вычисляется по аналитической формуле с использованием функций Ганкеля. С помощью метода степенных рядов проанализированы частоты оболочек с различными граничными условиями. Аналогичный подход применяется также в работах [11–14]. В первых трех статьях исследуются подкрепленные оболочки, толщина которых изменяется линейно, параболически, ступенчато или остается неизменной. В [11, 13] теория оболочек и метод решения полностью аналогичны [10]. В [12] применяется метод передаточной матрицы. В работе [14] метод динамической жесткости используется для анализа свободных колебаний композитных оболочек, описываемых в рамках теории Рейснера–Нагди, погруженных в жидкость или содержащих ее. В последнем случае гидродинамическое давление формируется в функциях Бесселя. Исходя из того, что аргументом цилиндрических функций выступает меридиональное волновое число, определяемое исходя из граничных условий на входе и выходе в оболочку, корректность данного метода вряд ли можно считать физически обоснованной. В работах [15, 16] описывается новый вариант метода конечных элементов для расчета колебаний упругих оболочек вращения с произвольным меридианом, частично заполненных жидкостью. В качестве конечных элементов рассматриваются узкие кольцевые полоски оболочки с содержащимися в них слоями жидкости. В случае осесимметричных колебаний осевое перемещение жидкости в поперечном сечении представляется в виде суммы плоского вытеснения и депланации по форме параболы, а при неосесимметричных радиальные и окружные перемещения определяются из точного решения уравнения неразрывности с учетом граничного условия на смоченной поверхности. Оценка влияния гидростатического давления на связанные частоты колебаний резервуаров с жидкостью, в том числе конических, выполнена в [17]. Одно из немногочисленных экспериментальных исследований конических оболочек с жидкостью представлено в [18]. Здесь на основе спектрального анализа данных, зарегистрированных посредством тензометрии, получены низшие частоты колебаний в случае частичного заполнения. При этом отличия от конечно-элементного решения задачи, осуществленного в коммерческом пакете ANSYS, не превышают 7%. В [19] для анализа оболочек с различными вариантами граничных условий предлагается комбинированный подход. Определяющие уравнения упругой конструкции получены в наиболее общем виде с помощью вариационного принципа. Они базируются на теории оболочек типа Тимошенко (first-order shear deformation theory, FSDT), учитывающей деформации поперечного сдвига [20]. Решение этих уравнений осуществляется с помощью метода Галёркина, где перемещения раскладываются в ряды Фурье со вспомогательными функциями. Волновое уравнение для несжимаемой жидкости, сведенное к слабой форме посредством метода Галёркина, решается методом конечных элементов. Связанная система уравнений формируется в результате удовлетворения условий на упругой поверхности оболочки. Композитные конструкции в виде комбинации трех оболочек (коническая-цилиндрическая-коническая), описываемых в рамках теории оболочек типа Тимошенко, исследуются в [21] с помощью метода передаточной матрицы. Для учета полного или частичного заполнения гидродинамическое давление формулируется в функциях Бесселя. Внимание на конической части при этом не акцентируется. Заполненные жидкостью резервуары конической формы, подвергающиеся вертикальным и горизонтальным возмущениям, эмулирующим землетрясение, изучаются с помощью метода конечных элементов в работах [22, 23]. Гидродинамическое давление интерполируется рядами различных

функций формы, удовлетворяющих волновому уравнению. Оценено влияние начальных неправильностей формы конструкции на несущую способность конических резервуаров под действием гидродинамического давления, инициированного сейсмической нагрузкой. В [24] из волнового уравнения с использованием разделения переменных получено аналитическое выражение для потенциала скорости как функции угла при вершине и окружной гармоники. Для решения уравнений, основанных на классической теории оболочек, используется аппроксимация функций перемещений сплайнами третьего и пятого порядка и метод коллокаций. Выполнен параметрический анализ, в ходе которого оценено влияние относительной толщины слоя и геометрических размеров на частотный спектр двухслойных оболочек при различных комбинациях граничных условий. Аналогичный подход для описания жидкости был использован в [25], где метод дифференциальных квадратур применяется для решения системы уравнений, полученной из принципа Гамильтона и теории оболочек Донелла. Комбинированный метод, сочетающий применение метода конечных элементов для упругого тела и метода граничных элементов для моделирования жидкой среды используется в [26, 27]. Совместные перемещения оболочки и жидкости представляются в виде линейной комбинации собственных форм колебаний оболочки в вакууме. Потенциал скорости жидкости рассматривается в виде суммы двух компонент, одна из которых описывает движение в жестком сосуде и позволяет учитывать эффекты на свободной поверхности. Для оболочек отличных от цилиндрических, усилия авторов сосредоточены в основном на изучении плескательных мод колебаний жидкости в жестких контейнерах, в том числе подкрепленных жесткими или упругими перегородками. Теория оболочек типа Тимошенко (FSDT), балочные функции и метод Галёркина используются в [28] для анализа оболочек с различными граничными условиями, расположенных на упругом основании.

Анализ устойчивости конических оболочек с текущей внутри жидкостью или газом исследуется в работах [29–36]. Исходя из условия малой конусности, в [29, 30] волновое уравнение, описывающее сверхзвуковое течение газа, решается с помощью преобразования Лапласа. При восстановлении оригинала аэродинамического давления модифицированная функция Бесселя заменяется асимптотическим разложением. В конечно-элементных реализациях [31–33] волновое уравнение сводится к слабой форме с помощью метода Бубнова–Галёркина. В первой из них применяется теория оболочек типа Тимошенко (FSDT), а в других – классическая теория оболочек. Здесь же показано, что с увеличением угла конусности возможно изменение вида потери устойчивости с дивергенции на флаттер. В работах [34, 35] методы, предложенные этими же авторами для анализа неподвижной жидкости [7, 19], обобщаются на случай текущей. В [35] продемонстрировано, что угол конусности может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние. Нанокompозитные усеченные конические оболочки, описываемые уравнениями теории оболочек Новожилова, изучаются в [36]. Метод обобщенных дифференциальных квадратур применяется как для численного решения волнового уравнения, так и всей задачи в целом. Оценено влияние объемных фракций углеродных нанотрубок на критические скорости флаттера и дивергенции.

В настоящей работе для решения сформулированной краевой задачи используется метод ортогональной прогонки Годунова (МОПГ) [37]. Помимо процитированных выше публикаций примеры применения этого метода для задач гидроупругости приведены в монографиях [38, 39]. Причем распространен подход, когда аналитическое решение волнового уравнения относительно потенциала скорости или давления записывается в членах функций Бесселя. Комбинированный способ, где волновое уравнение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается совместно с системой уравнений для упругого тела, применяется редко [40–42]. В частности, в [40, 41] для анализа вынужденных колебаний коаксиальных оболочек, содержащих жидкость в кольцевом канале, предложено использовать процедуры све-

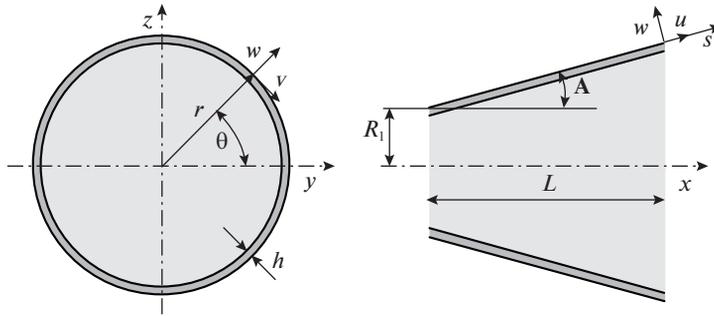


Рис. 1. Расчетная схема.

дения к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на кубической сплайн-аппроксимации (КС) и методе прямых (МП). При этом декларируется, что первый метод более эффективен, но какие-либо аргументы в пользу этого утверждения не приводятся. Исходя из этого, в данной работе для конической оболочки осуществляется сравнение различных способов сведения уравнений жидкости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с целью выбора наиболее производительного. Наряду с упомянутыми подходами будет также апробирован обобщенный метод дифференциальных квадратур (МДК) [43], который, как это отмечено в [44], не нашел широкого распространения у отечественных исследователей, несмотря на все свои преимущества.

2. Постановка задачи. Рассматривается полностью заполненная неподвижной идеальной сжимаемой жидкостью усеченная коническая оболочка (рис. 1) с минимальным радиусом R_1 , углом при вершине A , толщиной h и длиной L . В работе ставится задача исследования различных методов сведения акустического волнового уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и оценки их влияния на эффективность и точность вычислений связанных частот колебаний оболочки с жидкостью, имеющей различные комбинации граничных условий на краях.

3. Основные соотношения

3.1. Коническая оболочка. Компоненты вектора деформации E_{ij} в криволинейной системе координат (s, θ, z) для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, записываются в виде [45]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u' + r_1 w, & \varepsilon_{22} &= v' + \psi u + r_2 w, & \varepsilon_{12} &= v' + u' - \psi v, & \kappa_{11} &= \theta_1' \\ \kappa_{22} &= \theta_2' + \psi \theta_1, & \kappa_{12} &= \theta_1' - \psi \theta_2 + r_2 v', & \theta_1 &= -w' + r_1 u, & \theta_2 &= -w' + r_2 v \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(\dots)' = \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\dots)}{\partial s}, \quad (\dots)' = \frac{1}{A_2} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta}, \quad \psi = \frac{1}{A_2} A_2'$$

Здесь: A_1, A_2 – коэффициенты Ламе; r_1, r_2 – кривизны; u, v, w – меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки; θ_1, θ_2 – углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^T$ и вектором обобщенных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$, в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

Здесь величины, составляющие матрицу жесткостей \mathbf{D} , вычисляются по формулам

$$\bar{a}_{ij} = \int_h \bar{Q}_{ij} dz, \quad \bar{b}_{ij} = \int_h z \bar{Q}_{ij} dz, \quad \bar{c}_{ij} = \int_h z^2 \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.3)$$

где коэффициенты \bar{Q}_{ij} определяются известным образом относительно модулей упругости (E_{11}, E_{22}), коэффициента Пуассона (ν_{12}) и модуля сдвига (G_{12}) материала оболочки.

Уравнения движения оболочки

$$\begin{aligned} T'_{11} + \psi(T_{11} - T_{22}) + S' + r_1(Q_{11} - H') - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ S' + 2\psi(S + r_1 H) + T'_{22} + r_2(Q_{22} + H') - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ Q'_{11} + \psi Q_{11} + Q'_{22} - r_1 T_{11} - r_2 T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$M'_{11} + \psi(M_{11} - M_{22}) + H' - Q_{11} = 0, \quad H' + 2\psi H + M'_{22} - Q_{22} = 0,$$

где Q_{ii} — поперечные силы, $\rho_0 = \int_h \rho dz$, ρ — плотность материала, p — гидродинамическое давление, действующее со стороны жидкости объема V_f на поверхность оболочки.

Раскладывая все компоненты (3.1), (3.2) в ряды Фурье по окружной координате θ

$$\begin{aligned} X(s, \theta) &= \sum_{j=0} X_j(s) \cos(j\theta), \quad Y(s, \theta) = \sum_{j=0} Y_j(s) \sin(j\theta) \\ X &= \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\} \\ Y &= \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}\}, \end{aligned}$$

сводим геометрические (3.1) и физические (3.2) соотношения, а также уравнения движения (3.4) к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных [45]

$$\begin{aligned} y_1 &= T_{11}, \quad y_2 = S + 2r_2 H, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + \bar{j} H \\ y_5 &= u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1 \end{aligned}$$

Здесь j — номер гармоники при разложении в ряд Фурье, $\bar{j} = j/A_2$. С учетом этого и принимая во внимание $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$, искомая система может быть записана следующим образом

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{j}(2r_2 H - y_2) - \psi(y_1 - T_{22}) - r_1 y_4 - \omega^2 \rho_0 y_5 \\ f_2 &= \bar{j} T_{22} - 2\psi y_2 - r_2 Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_6 \\ f_3 &= y_4 - \psi(y_3 - M_{22}) - 2\bar{j} H \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$f_4 = r_1 y_1 - \Psi y_4 + r_2 T_{22} - \bar{j} (Q_{22} + 2\Psi H) - p - \omega^2 \rho_0 y_7$$

$$f_5 = \varepsilon_{11} - r_1 y_7, \quad f_6 = \varepsilon_{12} + \Psi y_6 + \bar{j} y_5, \quad f_7 = -y_8 + r_1 y_5, \quad f_8 = \kappa_{11}$$

Здесь ω – характеристический показатель, $i^2 = -1$. Входящие в выражения (3.6) величины вычисляются по следующим формулам

$$\varepsilon_{22} = \bar{j} y_6 + r_2 y_7 + \Psi y_5, \quad \kappa_{22} = \bar{j} \theta_2 + \Psi y_8, \quad \theta_2 = r_2 y_6 + \bar{j} y_7$$

$$H = \bar{b}_{33} \varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33} \kappa_{12}, \quad Q_{22} = -\bar{j} M_{22}$$

$$\kappa_{11} = [\bar{a}_{11} (y_3 - \bar{b}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{c}_{12} \kappa_{22}) - \bar{b}_{11} (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{12} \kappa_{22})] / (\bar{a}_{11} \bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2)$$

$$\varepsilon_{11} = (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{11} \kappa_{11} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}) / \bar{a}_{11}, \quad \kappa_{12} = r_2 (\varepsilon_{12} + \bar{j} y_5) - \bar{j} (y_8 + \Psi y_7)$$

$$T_{22} = \bar{a}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{a}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{b}_{12} \kappa_{11} + \bar{b}_{22} \kappa_{22}, \quad M_{22} = \bar{b}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{b}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{c}_{12} \kappa_{11} + \bar{c}_{22} \kappa_{22}$$

$$\varepsilon_{12} = [y_2 - 2(\bar{b}_{33} + 2r_2 \bar{c}_{33}) \bar{j} (r_2 y_5 - y_8 - \Psi y_7)] / [\bar{a}_{33} + 4r_2 (\bar{b}_{33} + r_2 \bar{c}_{33})]$$

3.2. Неподвижная сжимаемая жидкость. В случае конической оболочки акустическое волновое уравнение и соответствующие граничные условия записываются в сферической системе координат (x, α, θ)

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Здесь c – скорость звука в жидкости. На смоченной поверхности ($\alpha = A$), оси вращения оболочки ($\alpha = 0$) и ее краях ($x = 0, L$) гидродинамическое давление p удовлетворяет следующим условиям:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\alpha=A} = \frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=A} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{\alpha=0} = \frac{\partial p}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.9)$$

$$x = 0: \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = L: \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

где \mathbf{n} – единичные внешние нормали к области жидкости V_f , ρ_f – плотность жидкости.

Сведение уравнения (3.7) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется различными способами, описание которых представлено ниже.

3.2.1. Метод прямых. В методе прямых (дифференциально-разностный метод) [46] область жидкости делится на n равных углов и через точки деления проводится семейство лучей $\alpha = \alpha_i$ ($i = 1, n-1$). На каждом таком луче (прямой) дифференциальное уравнение (3.7) заменяется приближенным обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $p(x, \alpha_i)$. Для этого в выражении (3.7) производные по координате α заменяются на формулы численного дифференцирования

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_i} = \frac{1}{2t} [p(x, \alpha_{i+1}) - p(x, \alpha_{i-1})]$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_i} = \frac{1}{t^2} [p(x, \alpha_{i+1}) - 2p(x, \alpha_i) + p(x, \alpha_{i-1})], \quad (3.11)$$

где $t = A/n$.

Для “крайних” прямых [47]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \frac{1}{2t} [4p(x, \alpha_1) - p(x, \alpha_2) - 3p(x, \alpha_0)] \\ \left. \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=A} &= \frac{1}{2t} [3p(x, \alpha_n) - 4p(x, \alpha_{n-1}) + p(x, \alpha_{n-2})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Вводя сокращенные обозначения

$$p(x, \alpha_i) = p_i(x), \quad \frac{\partial p(x, \alpha_i)}{\partial x} = p_i'(x), \quad \frac{\partial^2 p(x, \alpha_i)}{\partial x^2} = p_i''(x)$$

и подставляя формулы (3.11) в исходное уравнение (3.7), приходим к системе $(n-1)$ уравнений в обыкновенных производных

$$p_i''(x) = \beta_1^i p_i'(x) - \beta_2^i p_{i+1}(x) + \beta_3^i p_{i-1}(x) + \beta_4 p_i'(x), \quad (3.13)$$

где $\beta_1^i = \frac{2}{x^2 t^2} + \frac{j^2}{x^2 \sin^2 \alpha_i} - \frac{\omega^2}{c^2}$, $\beta_2^i = \frac{1}{2tx^2 \operatorname{tg} \alpha_i} + \frac{1}{x^2 t^2}$, $\beta_3^i = \frac{1}{2tx^2 \operatorname{tg} \alpha_i} - \frac{1}{x^2 t^2}$, $\beta_4 = \frac{2}{x}$. Эта система сводится к нормальному виду Коши следующим образом:

$$\begin{aligned} y_9 &= p_1(x), & y_9' &= y_{10}, & y_{10}' &= \beta_1^1 y_9 - \beta_2^1 y_{11} + \beta_3^1 p_0 - \beta_4 y_{10} \\ y_{11} &= p_2(x), & y_{11}' &= y_{12}, & y_{12}' &= \beta_1^2 y_{11} - \beta_2^2 y_{13} + \beta_3^2 y_9 - \beta_4 y_{12} \\ & \dots & & & & \dots \\ y_{7+2(n-1)} &= p_{n-1}(x), & y_{7+2(n-1)}' &= y_{8+2(n-1)} \\ y_{8+2(n-1)}' &= \beta_1^{n-1} y_{7+2(n-1)} - \beta_2^{n-1} p_n + \beta_3^{n-1} y_{5+2(n-1)} - \beta_4 y_{8+2(n-1)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Значения p_0 и p_n в (3.14) определяются, исходя из условий (3.8)–(3.9) и уравнений для “крайних” прямых (3.12):

$$p_0 = \frac{1}{3}(4y_9 - y_{11}), \quad p_n = \frac{1}{3}(2xt\rho_f \omega^2 y_7 + 4y_{7+2(n-1)} - y_{5+2(n-1)})$$

Обратим внимание на то, что в соотношениях (3.4) $p = p_n$. Таким образом, совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (3.5) и (3.14), составляет $m = 8 + 2(n-1)$.

3.2.2. Интерполяция кубическим сплайном. В этом методе задается сетка узлов $0 = \alpha_0 < \alpha_1 \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = A$, на каждом сегменте которой $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = \overline{1, n}$, для функции $p(x, \alpha)$ строится интерполяционный кубический сплайн [48, 49]

$$s_i(\alpha) = c_{1i} + c_{2i}(\alpha - \alpha_i) + \frac{c_{3i}}{2}(\alpha - \alpha_i)^2 + \frac{c_{4i}}{6}(\alpha - \alpha_i)^3 \quad (3.15)$$

По определению в каждом узле сетки выполняется условие $s(\alpha_i) = p(x, \alpha_i)$, $i = \overline{0, n}$. Из выражения для сплайна (3.15), а также первой и второй производных

$$s_i'(\alpha) = c_{2i} + c_{3i}(\alpha - \alpha_i) + \frac{c_{4i}}{2}(\alpha - \alpha_i)^2, \quad s_i''(\alpha) = c_{3i} + c_{4i}(\alpha - \alpha_i), \quad (3.16)$$

следует

$$s_i(\alpha_i) = c_{1i}, \quad s_i'(\alpha_i) = c_{2i}, \quad s_i''(\alpha_i) = c_{3i} \quad (3.17)$$

Требование непрерывности сплайна $s_i(\alpha)$ на всем рассматриваемом диапазоне, как и его производных

$$s_i(\alpha_{i-1}) = c_{1i-1}, \quad s'_i(\alpha_{i-1}) = c_{2i-1}, \quad s''_i(\alpha_{i-1}) = c_{3i-1}, \quad (3.18)$$

приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{2i}t_i - \frac{c_{3i}}{2}t_i^2 + \frac{c_{4i}}{6}t_i^3 &= p(x, \alpha_i) - p(x, \alpha_{i-1}); \quad i = \overline{1, n} \\ c_{3i}t_i - \frac{c_{4i}}{2}t_i^2 &= c_{2i} - c_{2i-1}, \quad c_{4i}t_i = c_{3i} - c_{3i-1}; \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $t_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$. С учетом граничных условий

$$c_{2n} = -\chi \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad c_{20} = 0, \quad (3.20)$$

следующих из (3.8), (3.9) и (3.17), с помощью операции редукции соотношения (3.19) можно выразить относительно коэффициентов c_{3i} , получив систему линейных уравнений, матрица которых является трехдиагональной. После решения этой системы методом прогонки, остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам. Альтернативным вариантом является использование известных процедур вычисления коэффициентов кубического сплайна, например, таких как подпрограмма CUBSPL, описанная в монографии [50], или ее варианта CSDEC, реализованной в пакете математических функций IMSL.

С учетом того, что первая и вторая производные по координате α полностью определяются через коэффициенты сплайна, система обыкновенных дифференциальных уравнений формируется следующим образом

$$\begin{aligned} y_9 &= p_1(x), \quad y'_9 = y_{10} \\ y'_{10} &= -\frac{s''_1(\alpha_1)}{x^2} + y_9 \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_1} - \frac{s'_1(\alpha_1)}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{x^2 \omega^2}{c^2} \right) / x^2 - \frac{2y_{10}}{x} \\ y_{11} &= p_2(x), \quad y'_{11} = y_{12} \\ y'_{12} &= -\frac{s''_2(\alpha_2)}{x^2} + y_{11} \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_2} - \frac{s'_2(\alpha_2)}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{x^2 \omega^2}{c^2} \right) / x^2 - \frac{2y_{12}}{x} \\ &\dots \dots \dots \\ y_{7+2n} &= p_n(x), \quad y'_{7+2n} = y_{8+2n} \\ y'_{8+2n} &= -\frac{s''_n(\alpha_n)}{x^2} + y_{7+2n} \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_n} - \frac{s'_n(\alpha_n)}{\operatorname{tg} \alpha_n} - \frac{x^2 \omega^2}{c^2} \right) / x^2 - \frac{2y_{8+2n}}{x} \end{aligned} \quad (3.21)$$

В случае интерполяции сплайном совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (3.5) и (3.21), составляет $m = 8 + 2n$. Поскольку коэффициенты сплайна зависят от граничных условий (3.20), их перевычисление необходимо проводить на каждом шаге интегрирования по меридиональной координате.

3.2.3. Метод дифференциальных квадратур. Согласно этому методу область решения также дискретизируется n точками, а производные l -го порядка функции $p(x, \alpha)$ в любой точке α_i определяются как [43]

$$\frac{\partial^l p(x, \alpha_i)}{\partial \alpha^l} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} p(x, \alpha_k); \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad (3.22)$$

где весовые коэффициенты $c_{ik}^{(l)}$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам

$$\left. \begin{aligned} c_{ik}^{(l)} &= \frac{M^{(l)}(\alpha_i)}{M^{(l)}(\alpha_k)(\alpha_i - \alpha_k)}, \quad c_{ii}^{(l)} = -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)}, \quad M^{(l)}(\alpha_i) = \prod_{k=1}^n (\alpha_i - \alpha_k) \\ c_{ik}^{(l)} &= l \left(c_{ik}^{(l-1)} c_{ii}^{(l-1)} - \frac{c_{ik}^{(l-1)}}{\alpha_i - \alpha_k} \right), \quad c_{ii}^{(l)} = -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} \end{aligned} \right\} \quad i \neq k; \quad i, k = \overline{1, n}$$

С учетом (3.22) граничные условия (3.8), (3.9) представим в виде

$$\left. \frac{\partial p(x, \alpha_n)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=A} = \sum_{k=1}^n c_{nk}^{(1)} p_k(x) + x p_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p(x, \alpha_1)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^n c_{1k}^{(1)} p_k(x) = 0,$$

и, переписав их следующим образом

$$\begin{aligned} c_{n1}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) + c_{nn}^{(1)} p_n(x) + x p_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ c_{11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x) &= 0, \end{aligned}$$

получим явные выражения для “крайних” значений

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{c_{n1}^{(1)} \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) / c_{11}^{(1)} - \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) - x p_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}{c_{nn}^{(1)} - c_{n1}^{(1)} c_{n1}^{(1)} / c_{11}^{(1)}} \\ p_1(x) &= -\frac{\sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x)}{c_{11}^{(1)}} \end{aligned}$$

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} p_2^{(1)}(x) &= c_{21}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{2k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{2n}^{(1)} p_n(x) \\ p_2^{(2)}(x) &= c_{21}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{2k}^{(2)} y_{7+2(k-1)} + c_{2n}^{(2)} p_n(x) \\ y_9 &= p_2(x), \quad y_9' = y_{10} \\ y_{10}' &= -\frac{p_2^{(2)}(x)}{x^2} + y_9 \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_2} - \frac{p_2^{(1)}(x)}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{x^2 \omega^2}{c^2} \right) / x^2 - \frac{2y_{10}}{x} \\ p_3^{(1)}(x) &= c_{31}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{3k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{3n}^{(1)} p_n(x) \\ p_3^{(2)}(x) &= c_{31}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{3k}^{(2)} y_{7+2(k-1)} + c_{3n}^{(2)} p_n(x) \\ y_{11} &= p_3(x), \quad y_{11}' = y_{12} \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$y_{12}' = -\frac{p_3^{(2)}(x)}{x^2} + y_{11} \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_3} - \frac{p_3^{(1)}(x)}{\operatorname{tg} \alpha_3} - \frac{x^2 \omega^2}{c^2} \right) / x^2 - \frac{2y_{12}}{x}$$

.....

$$\begin{aligned}
p_{n-1}^{(1)}(x) &= c_{n-11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(1)} p_n(x) \\
p_{n-1}^{(2)}(x) &= c_{n-11}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(2)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(2)} p_n(x) \\
y_{7+2(n-1)} &= p_{n-1}(x), \quad y_{7+2(n-1)}' = y_{8+2(n-1)} \\
y_{8+2(n-1)}' &= -\frac{p_{n-1}^{(2)}(x)}{x^2} + y_{7+2(n-1)} \left(\frac{j^2}{\sin^2 \alpha_{n-1}} - \frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{\operatorname{tg} \alpha_{n-1}} - \frac{x^2 \omega^2}{c^2} \right) / x^2 - \frac{2y_{8+2(n-1)}}{x}
\end{aligned}$$

Таким образом, для данного метода совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (3.5) и (3.23), также составляет $m = 8 + 2(n - 1)$. Отмечается [51], что МДК довольно часто обеспечивает более точное решение дифференциальных уравнений в случае неравномерных сеток, узлы которых определяются согласно распределению Чебышева–Гаусса–Лобатто. Однако для корректного сравнения с другими методами все расчеты осуществлялись на равномерной сетке, тем более, что для описанной реализации МДК преимущества неравномерной сетки выявлены не были.

4. Метод решения. Система уравнений (3.5) (в случае вычисления гидродинамического давления p по аналитической формуле) как и объединенные системы уравнений (3.5), (3.14), (3.5), (3.21) и (3.5), (3.23) решаются методом ортогональной прогонки Годунова [37] с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности и соответствующими однородными граничными условиями, задаваемыми на краях оболочки

$$y_i|_{s=0} \delta_i + y_{i+4}|_{s=0} (1 - \delta_i) = 0; \quad i = 1 \dots 4 \quad (4.1)$$

$$y_i|_{s=L} \delta_{i+4} + y_{i+4}|_{s=L} (1 - \delta_{i+4}) = 0; \quad i = 1 \dots 4 \quad (4.2)$$

$$y_i|_{x=0} = 0; \quad i = 10, 12 \dots m/2 \quad (4.3)$$

$$y_i|_{x=L} = 0; \quad i = 10, 12 \dots m/2, \quad (4.4)$$

где $\delta_i = 0$, если заданы кинематические, и $\delta_i = 1$, если заданы статические граничные условия.

Общее решение систем представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{m/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где C_k – некоторые константы и \mathbf{y}_j – совокупность линейно независимых решений объединенных систем, удовлетворяющих граничным условиям (4.1), (4.3). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (4.2), (4.4) получаем следующую алгебраическую систему для определения постоянных C_k

$$\sum_{k=1}^{m/2} C_k f_{ik} = 0; \quad i = 1, m/2 \quad (4.5)$$

Искомая задача сводится к вычислению таких значений ω , при которых существует нетривиальное решение системы (4.5), необходимым условием которого является равенство нулю определителя матрицы $|f_{ij}(\omega)| = 0$. Для этой цели используется комбинация шаговой процедуры, посредством которой вычисляются значения ω , при которых происходит смена знака определителя $|f_{ij}(\omega)|$, с последующим уточнением ω в полученном диапазоне методом деления отрезка пополам.

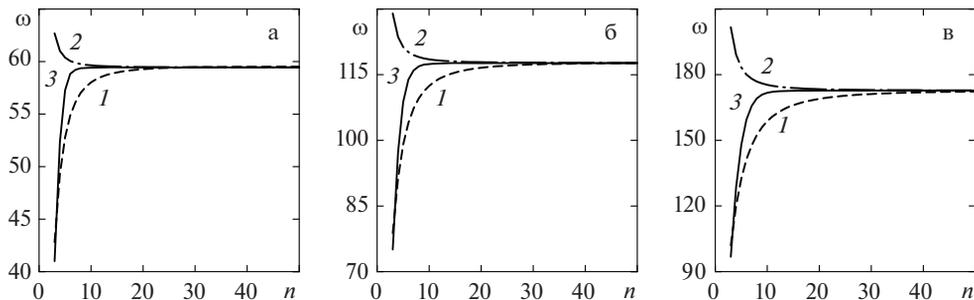


Рис. 2. Сходимость трех низших собственных частот ω (Гц) жестко закрепленной (СС) конической оболочки с жидкостью от количества узлов n для различных методов преобразования волнового уравнения: $A = 30^\circ$; $j = 5$; 1 – МП, 2 – КС, 3 – МДК.

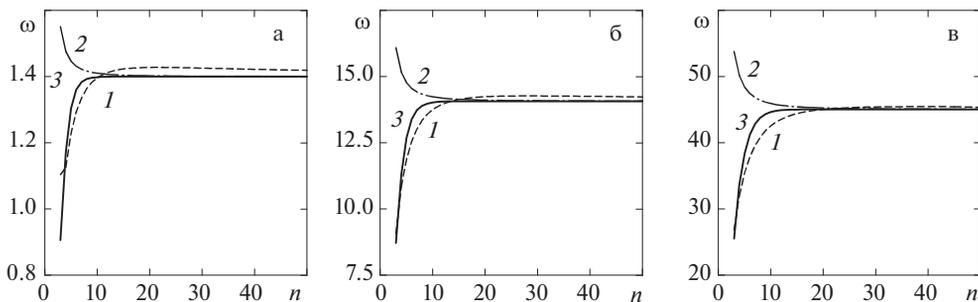


Рис. 3. Сходимость трех низших собственных частот ω (Гц) консольно закрепленной (CF) конической оболочки с жидкостью от количества узлов n для различных методов преобразования волнового уравнения: $A = 60^\circ$; $j = 5$; 1 – МП, 2 – КС, 3 – МДК.

5. Численные результаты. В численных примерах рассматриваются свободно опертые ($v = w = T_{11} = M_{11} = 0$, SS), жестко защемленные ($u = v = w = \theta_1 = 0$, CC) на обоих краях или консольно закрепленные ($T_{11} = 0$, $S + 2r_2H = 0$, $M_{11} = 0$, $Q_{11} + \bar{J}H = 0$, CF) конические оболочки.

Первоначально была исследована сходимость решения от степени дискретизации области жидкости n . На рисунках 2 и 3 представлены зависимости трех низших частот колебаний ω (Гц) жестко закрепленной оболочки от количества узлов (прямых) n , на которые разбивается область жидкости тремя описанными выше методами. Проверка сходимости решения осуществлена для оболочек с разными граничными условиями и углами конусности $A = 30^\circ$ (рис. 2) и $A = 60^\circ$ (рис. 3). Из приведенных данных следует, что наихудшей сходимостью обладает метод прямых, как это было отмечено в монографии [41]. Однако с вычислительной точки зрения данный метод обеспечивает наиболее эффективное решение при равном количестве точек разбиения. Интерполяция сплайнами является наименее экономичным методом из-за дополнительных вычислений, выполняемых на каждом шаге интегрирования. С ростом точек интегрирования относительно быстрая сходимость этого метода нивелируется более высокой скоростью решения метода прямых, поэтому при определенных условиях оба метода яв-

Таблица 1. Сравнение собственных частот колебаний ω (Гц) жестко закрепленной (СС) конической оболочки, заполненной жидкостью

№	Номер гармоники j							
	3	4	5	6	7	8	9	10
1	101.0	78.7	63.60	54.4	50.80	52.80	—	67.3
2	100.0	76.0	—	—	51.00	54.00	—	69.8
3	101.63	79.16	63.82	54.41	50.70	52.44	—	66.86
4	101.76	79.29	63.99	54.64	51.02	52.87	—	67.51
5	100.86	78.7	63.55	54.23	50.52	52.24	58.20	—
6	96.34	75.5	61.07	53.22	50.12	52.14	58.21	—
7	100.95	78.54	63.29	53.95	50.28	51.98	57.83	66.12
8	100.91	78.56	63.36	54.07	50.46	52.26	58.26	66.75
9	100.91	78.55	63.34	54.05	50.42	52.19	58.17	66.61

ляются сопоставимыми. В процессе вычислений было также выявлено, что с ростом угла конусности для получения устойчивого решения при некоторых граничных условиях и окружных гармониках требуется повышение количества точек интегрирования, особенно в случае интерполяции сплайнами и метода прямых. С учетом высказанных замечаний преимущества метода дифференциальных квадратур благодаря исключительной сходимости являются неоспоримыми. При дальнейших расчетах количество прямых (узлов) n принимается равным 10, 20 и 50 для методов дифференциальных квадратур, интерполяции сплайнами и прямых соответственно.

Верификация результатов, получаемых в рамках описанного алгоритма, для пустых конических оболочек осуществлена в статье [52]. В случае оболочек с жидкостью сравнение с известными решениями производится для нескольких конфигураций. В первом примере рассматривается полностью заполненная несжимаемой жидкостью ($\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$) жестко закрепленная усеченная коническая оболочка ($L = 0.56 \text{ м}$, $R_1 = 0.15 \text{ м}$, $h = 0.00053 \text{ м}$, $A = 15^\circ$), выполненная из материала АМГ-6 ($E = 67.7 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.29$, $\rho = 2648 \text{ кг/м}^3$), экспериментальные и теоретические результаты для которой были опубликованы в работе [6]. За прошедшие десятилетия эти данные стали выступать в качестве эталона, сопоставление с которым является неотъемлемой частью большинства исследований, посвященных анализу конических оболочек, взаимодействующих с жидкостью. В таблице 1 приведены низшие частоты колебаний ω (Гц), полученные для ряда окружных гармоник j . Здесь введены обозначения для следующих источников данных: 1 – [6] (МОПГ), 2 – [6] (эксперимент), 3 – [16] (МКЭ), 4 – [37] (МОПГ), 5 – [53] (МКЭ), 6 – [54] (МКЭ), 7 – МОПГ и МП, 8 – МОПГ и КС, 9 – МОПГ и МДК. Из приведенной в таблице информации следует, что при небольшом угле конусности результаты, полученные в рамках как численно-аналитических, так и численных методов, хорошо согласуются не только между собой, но и с данными натуральных наблюдений.

В следующем примере рассматривается конфигурация ($L = 0.9144 \text{ м}$, $h = 0.0015 \text{ м}$, $E = 207 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7840 \text{ кг/м}^3$), используемая для верификации результатов конечно-элементных решений во многих работах. Радиус оболочки, содержащей сжимаемую жидкость ($\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1500 \text{ м/с}$), при $0.5L$ остается неизменным и равным 0.876 м . В таблицах 2–4 приведены низшие частоты колебаний ω (Гц) для первых 12 окружных гармоник, полученные для трех углов конусности при различных комбинациях граничных условий. Здесь источники данных обозначены следующим обра-

Таблица 2. Сравнение собственных частот колебаний ω (Гц) жестко закрепленной (СС) конической оболочки, заполненной жидкостью, при различных углах конусности A

№	Номер гармоники j											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Угол конусности $A = 10^\circ$												
1	99.55	107.35	98.92	88.03	77.99	69.35	62.10	56.18	51.57	48.32	46.53	46.29
2	98.37	105.96	99.52	88.01	78.46	70.28	62.71	57.41	52.56	49.69	48.03	48.34
3	95.43	103.73	95.56	85.06	75.69	67.42	60.75	54.91	50.94	47.64	45.78	45.78
4	99.95	107.46	98.66	87.59	77.47	68.80	61.55	55.62	51.01	47.74	45.92	45.63
5	99.88	107.46	98.69	87.66	77.59	68.97	61.77	55.90	51.34	48.13	46.38	46.18
6	97.19	107.43	98.66	87.62	77.53	68.89	61.67	55.77	51.18	47.93	46.11	45.82
Угол конусности $A = 30^\circ$												
1	73.62	79.64	74.58	66.68	58.94	52.16	46.55	42.18	39.15	37.58	37.54	38.97
2	73.96	80.14	75.12	67.01	59.41	52.33	46.67	42.80	39.97	38.30	38.43	39.97
3	70.05	81.92	74.82	66.75	58.55	51.54	45.94	41.71	39.14	37.17	37.31	37.31
7	69.54	83.10	68.27	66.98	58.21	49.31	46.76	44.06	41.04	34.91	—	—
4	80.79	85.50	77.63	68.09	59.51	52.31	46.47	41.98	38.88	37.26	37.16	38.52
5	80.55	85.29	77.47	68.00	59.49	52.34	46.56	42.13	39.08	37.52	37.50	38.96
6	78.61	85.25	77.44	67.95	59.42	52.27	46.47	42.01	38.93	37.32	37.22	38.56
Угол конусности $A = 60^\circ$												
1	20.52	22.62	21.77	19.58	17.64	16.57	16.15	16.20	16.62	17.36	18.34	19.56
2	21.27	23.48	22.44	20.17	17.90	17.01	16.25	16.59	16.80	17.49	18.52	19.90
4	29.99	31.64	27.11	22.12	19.03	17.51	16.88	16.83	17.19	17.88	18.85	20.05
5	29.51	31.14	26.71	21.82	18.81	17.34	16.75	16.75	17.16	17.91	18.94	20.23
6	28.91	31.10	26.68	21.79	18.68	17.52	17.08	16.87	16.98	17.67	18.56	19.66

зом: 1 – [19] (МКЭ), 2 – [30] (МКЭ), 3 – [33] (МКЭ), 4 – МОПГ и МП, 5 – МОПГ и КС, 6 – МОПГ и МДК, 7 – [23] (сплайны).

Из представленных в таблицах 2–4 данных видно, что полученные в работе результаты достаточно хорошо согласуются с конечно-элементными решениями с некоторыми исключениями. В частности, фактически для всех рассмотренных вариантов наиболее существенное расхождение имеет место в области низших гармоник. С повышением номера j низшая частота стремится к своему минимальному значению, а различие между разными методами решения нивелируется. Отметим, что о некоторых отличиях с результатами, полученными с использованием метода конечных элементов, в том числе в коммерческом пакете ANSYS, сообщается также в работах [9, 24, 25]. Причина этих расхождений не выявлена. Также подчеркнем, что во всех приведенных сравнениях результаты, вычисленные для различных способов сведения уравнений жидкости, практически идентичны.

С помощью описанного алгоритма выполнен анализ влияния угла конусности A на минимальную частоту колебаний ω . Параметры конструкции аналогичны предыдущему примеру за тем исключением, что минимальный радиус и длина образующей остаются неизменными и равными 0.876 м, 0.9144 м соответственно. Результаты исследования, выполненные с использованием метода дифференциальных квадратур,

Таблица 3. Сравнение собственных частот колебаний ω (Гц) консольно закрепленной (CF) конической оболочки, заполненной жидкостью, при различных углах конусности A

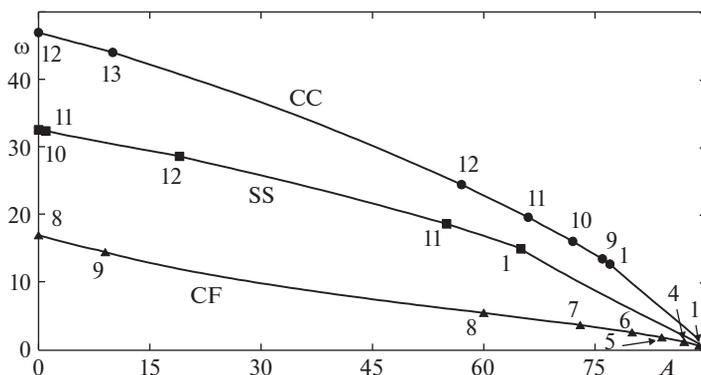
№	Номер гармоники j											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Угол конусности $A = 10^\circ$												
1	63.72	48.16	35.43	26.76	20.92	17.09	14.87	14.16	14.89	16.87	19.88	23.72
2	63.25	48.43	35.17	27.12	21.38	17.72	15.63	14.58	14.89	16.97	20.21	24.17
3	61.80	46.94	34.85	26.58	20.96	16.92	15.14	14.42	15.10	16.74	19.86	23.83
4	64.50	48.93	35.98	27.13	21.16	17.25	14.98	14.24	14.94	16.90	19.88	23.68
5	64.46	48.92	35.98	27.14	21.19	17.29	15.03	14.31	15.03	17.03	20.07	23.96
6	62.80	48.92	35.98	27.14	21.18	17.27	15.01	14.28	14.99	16.97	19.97	23.79
Угол конусности $A = 30^\circ$												
1	34.36	23.58	16.74	12.45	9.74	8.19	7.66	8.12	9.42	11.36	13.77	16.56
2	34.12	23.86	16.63	12.92	10.09	8.72	7.95	8.24	9.42	11.48	13.63	16.86
3	35.71	25.37	18.34	13.48	10.69	8.98	8.15	8.74	9.98	11.72	14.24	16.87
4	38.10	26.15	18.44	13.60	10.57	8.82	8.20	8.64	9.98	12.00	14.52	17.42
5	37.98	26.08	18.40	13.58	10.56	8.82	8.22	8.67	10.04	12.09	14.65	17.62
6	37.11	26.08	18.39	13.58	10.55	8.81	8.20	8.65	10.00	12.02	14.54	17.44
Угол конусности $A = 60^\circ$												
1	1.08	0.58	0.47	0.67	1.02	1.44	1.93	2.49	3.14	3.88	4.71	5.64
2	1.21	0.72	0.53	0.69	1.00	1.44	1.92	2.49	3.14	3.90	4.76	5.69
4	1.57	0.83	0.67	0.95	1.42	1.98	2.63	3.39	4.25	5.22	6.32	7.55
5	1.54	0.82	0.66	0.93	1.40	1.96	2.61	3.37	4.24	5.23	6.35	7.62
6	1.51	0.81	0.66	0.93	1.40	1.95	2.60	3.34	4.19	5.15	6.21	7.39

приведены на рисунке 4. Символами на графиках обозначены места смены формы колебаний с минимальной частотой, а цифрами указано число полуволн в окружном направлении j . Согласно представленным зависимостям рост угла конусности приводит к монотонному снижению низшей частоты колебаний. Отметим, что для свободно опертых и жестко закрепленных оболочек существует некоторое пороговое значение A , после которого частота снижается более существенно за счет реализации балочной моды.

Заключение. Представлены результаты численных исследований частотного спектра усеченных круговых конических оболочек, заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Решение краевой задачи выполняется методом ортогональной прогонки Годунова, в котором осуществляется интегрирование связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для оболочки и жидкости. Для упругого тела такая система получена преобразованием уравнений классической теории оболочек относительно новых неизвестных, а для уравнений жидкости – в результате применения трех различных способов: метода прямых, интерполяции кубическим сплайном и обобщенного метода дифференциальных квадратур. Их точность и вычислительная эффективность оценена на ряде примеров. Продемонстрировано, что для анализа динамических характеристик конических оболочек с жидкостью целесообразно использование метода дифференциальных квадратур. Этот способ обеспечивает приемлемую точность вычислений и высокую скорость сходимости решения. Проанализировано

Таблица 4. Сравнение собственных частот колебаний ω (Гц) свободно опертой (SS) конической оболочки, заполненной жидкостью, при различных углах конусности A

№	Номер гармоники j											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Угол конусности $A = 10^\circ$												
1	93.98	105.96	93.58	76.76	62.26	51.09	42.83	37.03	33.39	31.81	32.16	34.28
2	92.03	103.70	93.05	76.90	61.79	51.13	43.06	37.21	33.77	32.56	32.56	34.78
3	92.79	103.25	90.38	74.35	60.36	50.00	41.61	36.57	32.84	31.44	31.99	34.10
4	94.49	106.18	93.32	76.36	61.85	50.69	42.46	36.67	33.05	31.44	31.76	33.82
5	94.42	106.17	93.34	76.42	61.95	50.82	42.61	36.85	33.26	31.70	32.07	34.22
6	91.88	106.15	93.32	76.39	61.90	50.76	42.54	36.77	33.16	31.57	31.90	33.96
Угол конусности $A = 30^\circ$												
1	61.09	77.56	69.52	55.79	44.32	35.95	30.22	26.74	25.32	25.79	27.81	30.95
2	—	76.81	69.16	55.81	44.54	36.11	30.67	27.55	25.87	26.12	28.32	31.68
3	62.02	81.36	70.12	56.21	44.10	35.70	30.38	26.62	24.85	25.01	27.40	30.51
4	67.11	83.63	72.00	56.67	44.63	36.03	30.19	26.65	25.19	25.61	27.58	30.66
5	66.90	83.42	71.85	56.60	44.61	36.05	30.25	26.74	25.32	25.79	27.83	31.01
6	65.28	83.39	71.82	56.56	44.57	36.00	30.18	26.66	25.22	25.65	27.62	30.68
Угол конусности $A = 60^\circ$												
1	14.92	21.83	15.47	11.33	10.38	10.30	10.62	11.23	12.05	13.07	14.26	15.63
2	—	21.70	15.49	11.82	10.53	10.22	10.63	11.14	12.02	13.10	14.39	15.53
4	21.95	30.37	17.19	12.23	11.09	10.93	11.22	11.81	12.64	13.69	14.91	16.32
5	21.59	29.87	16.94	12.07	10.96	10.83	11.14	11.76	12.62	13.71	14.99	16.47
6	21.16	29.86	16.92	12.05	10.93	10.79	11.08	11.67	12.49	13.50	14.67	16.00

**Рис. 4.** Зависимости низших частот колебаний ω (Гц) от угла конусности A , полученные для конических оболочек с различными граничными условиями.

влияние угла конусности на минимальную частоту собственных колебаний конструкции при различных граничных условиях.

Работа выполнена в рамках государственного задания; номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шклярчук Ф.Н. О приближенном методе расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидким заполнением // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 6. С. 123–129.
2. Докучаев Л.В. Об уравнениях упругих колебаний полости, частично заполненной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 3. С. 149–153.
3. Пожалостин А.А. Построение системы гармонических функций для неосесимметричных колебаний конического бака, заполненного жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Тр. II-го Всесоюз. симп. Новосибирск: Изд. НЭТИ, 1974. С. 229–231.
4. Пожалостин А.А. Неосесимметричные колебания конической оболочки, частично заполненной жидкостью // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Тр. I Всесоюз. сем. Томск: Изд. ТГУ, 1975. С. 85–93.
5. Пожалостин А.А., Каменский О.А., Куликов В.З. Экспериментальное определение форм и частот осесимметричных колебаний конического бака, частично заполненного жидкостью // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Кутаиси, 1975. С. 178–180.
6. Горбунов Ю.А., Новохатская Л.М., Шамаков В.П. Теоретическое и экспериментальное исследование спектра собственных неосесимметричных колебаний конической оболочки с жидкостью при наличии внутреннего давления // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск: Томский ун-т, 1975. С. 47–52.
7. Lakis A.A., van Dyke P., Ouriche H. Dynamic analysis of anisotropic fluid-filled conical shells // J. Fluids Struct. 1992. V. 6. № 2. P. 135–162.
8. Kerboua Y., Lakis A.A. Dynamic behaviour of a rocket filled with liquid // Univ. J. Aeronaut. Aerosp. Sci. 2014. V. 2. P. 55–79.
9. Jung M.J., Jo J.C., Jeong K.H. Modal analysis of conical shell filled with fluid // J. Mech. Sci. Technol. 2006. V. 20. № 11. P. 1848–1862.
10. Caresta M., Kessissoglou N.J. Vibration of fluid loaded conical shells // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 124. № 4. P. 2068–2077.
11. Liu M., Liu J., Cheng Y. Free vibration of a fluid loaded ring-stiffened conical shell with variable thickness // J. Vib. Acoust. 2014. V. 136. № 5. 051006.
12. Liu J., Ye X., Liu M., Cheng Y., Wu L. A semi-analytical method of free vibration of fluid loaded ring-stiffened stepped conical shell // J. Mar. Eng. Technol. 2014. V. 13. № 2. P. 35–49.
13. Xie K., Chen M., Deng N., Jia W. Free and forced vibration of submerged ring-stiffened conical shells with arbitrary boundary conditions // Thin-Walled Struct. 2015. V. 96. P. 240–255.
14. Zhu H., Wu J. Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method // Acta Mech. 2020. V. 231. P. 3961–3978.
15. Шклярчук Ф.Н., Рей Ч. Расчет осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов // Вестн. МАИ. 2012. Т. 19. № 5. С. 197–204.
16. Шклярчук Ф.Н., Рей Ч. Расчет неосесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью методом конечных элементов // Вестн. МАИ. 2013. Т. 20. № 2. С. 49–58.
17. Курпиченко В.Н., Швейко Ю.Ю. О влиянии гидростатики на частоты колебаний оболочек топливных баков жидкостных ракет-носителей // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 3 (76). С. 46–51.
18. Шуников А.Н., Мисюра С.Ю., Ярещенко В.Г. Численное и экспериментальное исследование гидроупругих колебаний оболочек // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2014. № 6(7). С. 8–12.
19. Rahmanian M., Firouz-Abadi R.D., Cigeroglu E. Free vibrations of moderately thick truncated conical shells filled with quiescent fluid // J. Fluids Struct. 2016. V. 63. P. 280–301.
20. Бауэр С.М., Ермаков А.М., Капитанова С.В., Морозов Н.Ф. Применение неклассических моделей теории оболочек к исследованию механических параметров многослойных нанотрубок // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2011. № 1. С. 22–30.

21. *Hien V.Q., Thinh T.I., Cuong N.M.* Free vibration analysis of joined composite conical-cylindrical-conical shells containing fluid // Vietnam J. Mech. 2016. V. 38. P. 249–265.
22. *Musa A., El Damatty A.A.* Capacity of liquid steel conical tanks under hydrodynamic pressure due to horizontal ground excitations // Thin-Walled Struct. 2016. V. 103. P. 157–170.
23. *Musa A., El Damatty A.A.* Capacity of liquid-filled steel conical tanks under vertical excitation // Thin-Walled Struct. 2016. V. 103. P. 199–210.
24. *Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K., Aziz Z.A. et al.* Free vibration of layered truncated conical shells filled with quiescent fluid using spline method // Compos. Struct. 2017. V. 163. P. 385–398.
25. *Mohammadi N., Aghdam M.M., Asadi H.* Instability analysis of conical shells filled with quiescent fluid using generalized differential quadrature method // The 26th Annual Int. Conf. of Iranian Soc. Mech. Eng.-ISME2018, 24–26 April, 2018, School of Mech. Engng., Semnan Univ., Semnan, Iran, ISME2018-1216.
26. *Огородник У.Е., Гутько В.И.* Методы граничных и конечных элементов для динамического анализа оболочек с жидкостью // Механика машин, механ. и матер. 2013. № 4(25). С. 65–69.
27. *Naumenko Y.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A.* Liquid induced vibrations of truncated elastic conical shells with elastic and rigid bottoms // Int. J. Eng. Technol. 2018. V. 7(2.23). P. 335–339.
28. *Paknejad R., Ghasemi F.A., Malekzadeh F.K.* Natural frequency analysis of multilayer truncated conical shells containing quiescent fluid on elastic foundation with different boundary conditions // Int. J. App. Mech. 2021. V. 13. № 7. 2150075.
29. *Куйко И.А.* Постановка задачи об аэроупругих колебаниях конической оболочки малого раствора, внутри которой со сверхзвуковой скоростью протекает газ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2004. № 3. С. 58–61.
30. *Куйко И.А., Наджафов М.А.* Флаттер конической оболочки // Пробл. машиностр. и автом. 2009. № 4. С. 96–98.
31. *Senthil Kumar D., Ganesan N.* Dynamic analysis of conical shells conveying fluid // J. Sound Vib. 2008. V. 310. № 1–2. P. 38–57.
32. *Бочкарёв С.А., Матвеев В.П.* Исследование устойчивости конических оболочек вращения с внутренним течением жидкости // Вестн. СамГУ. Естеств. сер. 2008. № 6(65). С. 225–237.
33. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* Natural vibrations and stability of shells of revolution interacting with an internal fluid flow // J. Sound Vib. 2011. V. 330. P. 3084–3101.
34. *Kerboua Y., Lakis A.A., Hmila M.* Vibration analysis of truncated conical shells subjected to flowing fluid // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. № 3. P. 791–809.
35. *Rahmanian M., Firouz-Abadi R.D., Cigeroglu E.* Dynamics and stability of conical/cylindrical shells conveying subsonic compressible fluid flows with general boundary conditions // Int. J. Mech. Sci. 2017. V. 120. P. 42–61.
36. *Mohammadi N., Asadi H., Aghdam M.M.* An efficient solver for fully coupled solution of interaction between incompressible fluid flow and nanocomposite truncated conical shells // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2019. V. 351. P. 478–500.
37. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Усп. матем. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.
38. *Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н.* Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
39. *Шмаков В.П.* Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 287 с.
40. *Юдин А.С., Амбалова Н.М.* Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью // Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 12. С. 63–68.
41. *Юдин А.С., Сафроненко В.Г.* Виброакустика структурно-неоднородных оболочек. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. 424 с.
42. *Bochkarev S.A.* Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2022. V. 22. 2250071.
43. *Shu C.* Differential Quadrature and Its Application in Engineering. London: Springer, 2000. 340 p.

44. Барулина М.А. Применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 2. С. 206–216.
45. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
46. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 2. М.: Физматлит, 1962. 620 с.
47. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Е.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.
48. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
49. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Логос, 2004. 184 с.
50. De Boor C. A Practical Guide to Splines. New York: Springer, 2001. 348 p.
51. Bert C.W., Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review // ASME. Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49. № 1. P. 1–28.
52. Бочкарёв С.А. Собственные колебания усеченных конических оболочек переменной толщины // Вычисл. механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 4. С. 402–413.
53. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 2. С. 185–195.
54. Григорьев В.Г. Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем / Дисс. на соискание ученой степени доктора техн. наук, М.: 2000, 326 с.

Natural Vibrations of Truncated Conical Shells Containing Fluid

S. A. Bochkarev^{a,#}, S. V. Lekomtsev^{a,##}, and V. P. Matveenko^{a,###}

^a Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

[#] email: bochkarev@icmm.ru

^{##} email: lekomtsev@icmm.ru

^{###} email: mvp@icmm.ru

This paper presents the results of studies on natural frequencies of circular truncated conical shells completely filled with an ideal compressible liquid. The behavior of the elastic structure is described in the framework of classical shell theory, the equations of which are written in the form of a system of ordinary differential equations with respect to new unknowns. Low liquid vibrations are described by the linearized Euler equations, which in the acoustic approximation are reduced to the wave equation with respect to hydrodynamic pressure and written in spherical coordinates. Its transformation to the system of ordinary differential equations is performed in three ways: by the straight line method, by spline interpolation and by the method of differential quadrature. The formulated boundary value problem is solved using the Godunov orthogonal sweep method. The calculation of natural frequencies of vibrations is based on the application of a stepwise procedure and subsequent refinement by the half-division method. The validity of the results obtained is confirmed by their comparison with known numerical- analytical solutions. The efficiency of frequency calculations in the case of using different methods of wave equation transformation is evaluated for shells with different combinations of boundary conditions and cone angles. It is demonstrated that the use of the generalized differential quadrature method provides the most cost-effective solution to the problem with acceptable calculation accuracy.

Keywords: classical shell theory, conical shell, Godunov's orthogonal sweep method, natural vibrations, ideal compressible fluid, method of lines, cubic spline, differential quadrature method

REFERENCES

1. Shklyarchuk F.N. About an approximate method of calculating axially symmetrical oscillations of shells of rotation with liquid filling // Mekhanika, 1965, no. 6, pp. 123–129. (in Russian)

2. *Dokuchaev L.V.* On the equation of elastic vibrations of a cavity partially filled with fluid // *Mekhanika*, 1965, no. 3, pp. 149–153. (in Russian)
3. *Pozhalostin A.A.* Construction of a system of harmonic functions for non-axisymmetric vibrations of a cone vessel filled with liquid // *Vibrations of elastic structures with fluid: Proc. All-Union Workshop, Novosibirsk*, 1974, pp. 229–231. (in Russian)
4. *Pozhalostin A.A.* Non-axisymmetric vibrations of a conical shell partially filled with liquid // *Dynamics of elastic and solid bodies interacting with liquid: Proc. All-Union Workshop, Tomsk: TSU Publishing House*, 1975, pp. 85–93. (in Russian)
5. *Pozhalostin A.A., Kamensky O.A., Kulikov V.Z.* Experimental determination of mode shapes and frequencies for axisymmetric vibrations of a conical tank partially filled with liquid // *Proc. X All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates, Kutaisi*, 1975, pp. 178–180. (in Russian)
6. *Gorbunov Yu.A., Novokhatskaya L.M., Shmakov V.P.* Theoretical and experimental study of the spectrum of natural axisymmetric vibrations of a conical shell containing a fluid in the presence of internal pressure // *Dynamics of Elastic and Solid Bodies Interacting with a Fluid. Tomsk: Izd. Tomsk Gos. Univ.*, 1975, pp. 47–52. (in Russian)
7. *Lakis A.A., van Dyke P., Ouriche H.* Dynamic analysis of anisotropic fluid-filled conical shells // *J. Fluids Struct.*, 1992, vol. 6, no. 2, pp. 135–162.
8. *Kerboua Y., Lakis A.A.* Dynamic behaviour of a rocket filled with liquid // *Univ. J. Aeronaut. Aerospace Sci.*, 2014, vol. 2, pp. 55–79.
9. *Jhung M.J., Jo J.C., Jeong K.H.* Modal analysis of conical shell filled with fluid // *J. Mech. Sci. Technol.*, 2006, vol. 20, no. 11, pp. 1848–1862.
10. *Caresta M., Kessissoglou N.J.* Vibration of fluid loaded conical shells // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008, vol. 124, no. 4, pp. 2068–2077.
11. *Liu M., Liu J., Cheng Y.* Free vibration of a fluid loaded ring-stiffened conical shell with variable thickness // *J. Vib. Acoust.*, 2014, vol. 136, no. 5, 051006.
12. *Liu J., Ye X., Liu M., Cheng Y., Wu L.* A semi-analytical method of free vibration of fluid loaded ring-stiffened stepped conical shell // *J. Mar. Eng. Technol.*, 2014, vol. 13, no. 2, pp. 35–49.
13. *Xie K., Chen M., Deng N., Jia W.* Free and forced vibration of submerged ring-stiffened conical shells with arbitrary boundary conditions // *Thin-Walled Struct.*, 2015, vol. 96, pp. 240–255.
14. *Zhu H., Wu J.* Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method // *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, pp. 3961–3978.
15. *Shklyarchuk F.N., Rei J.F.* Calculation of axisymmetric vibrations of shells of revolution with liquid by finite element method // *Aerospace MAI J.*, 2013, vol. 19, no. 5, pp. 197–204. (in Russian)
16. *Shklyarchuk F.N., Rei J.F.* Calculation of non-axisymmetric vibrations of shells of revolution with liquid by finite element method // *Aerospace MAI J.*, 2013, vol. 20, no. 2, pp. 49–58. (in Russian)
17. *Kirpichenko V.N., Shveiko Yu.Yu.* About the effect on the oscillation frequency hydrostatic shell fuel tanks of liquid launchers // *Astronautics and Rocket Science*, 2014, no. 3(76), pp. 46–51. (in Russian)
18. *Shupikov A.N., Misyura C.Yu., Yareshchenko V.G.* A numerical and experimental study of hydroelastic shell vibrations // *Eastern-European J. Enterprise Technol.*, 2014, no. 6(7), pp. 8–12. (in Russian)
19. *Rahmanian M., Firouz-Abadi R.D., Cigeroglu E.* Free vibrations of moderately thick truncated conical shells filled with quiescent fluid // *J. Fluids Struct.*, 2016, vol. 63, pp. 280–301.
20. *Bauer S.M., Ermakov A.M., Kashtanova S.V., Morozov N.F.* Application of nonclassical models of shell theory to study mechanical parameters of multilayer nanotubes // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.*, 2011, vol. 44, no. 1, pp. 13–20.
21. *Hien V.Q., Thinh T.I., Cuong N.M.* Free vibration analysis of joined composite conical-cylindrical-conical shells containing fluid // *Vietnam J. Mech.*, 2016, vol. 38, pp. 249–265.
22. *Musa A., El Damatty A.A.* Capacity of liquid steel conical tanks under hydrodynamic pressure due to horizontal ground excitations // *Thin-Walled Struct.*, 2016, vol. 103, pp. 157–170.
23. *Musa A., El Damatty A.A.* Capacity of liquid-filled steel conical tanks under vertical excitation // *Thin-Walled Struct.*, 2016, vol. 103, pp. 199–210.

24. *Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K., Aziz Z.A. et al.* Free vibration of layered truncated conical shells filled with quiescent fluid using spline method // *Compos. Struct.*, 2017, vol. 163, pp. 385–398.
25. *Mohammadi N., Aghdam M.M., Asadi H.* Instability analysis of conical shells filled with quiescent fluid using generalized differential quadrature method // *The 26th Annual Int. Conference of Iranian Society of Mechanical Engineers-ISME2018*, 24–26 April, 2018, School of Mechanical Engineering, Semnan Univ., Semnan, Iran, ISME2018-1216.
26. *Ogorodnyk U.E., Gnitko V.I.* Coupled BEM and FEM in dynamic analysis of tanks filled with a liquid // *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 2013, no. 4(25), pp. 65–69. (in Russian)
27. *Naumenko Y.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A.* Liquid induced vibrations of truncated elastic conical shells with elastic and rigid bottoms // *Int. J. Eng. Technol.*, 2018, vol. 7, no. 2.23, pp. 335–339.
28. *Paknejad R., Ghasemi F.A., Malekzadeh F.K.* Natural frequency analysis of multilayer truncated conical shells containing quiescent fluid on elastic foundation with different boundary conditions // *Int. J. App. Mech.*, 2021, vol. 13, no. 7, 2150075.
29. *Kitko I.A.* Formulation of the problem on aeroelastic vibrations of a conic shell of small opening with supersonic gas flow inside // *Vestn. Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2004, no. 3, pp. 58–61. (in Russian)
30. *Kiyko I.A., Nadzhafov M.A.* Flutter of a conical shell // *Engin. & Autom. Problems*, 2009, no. 4, pp. 96–98. (in Russian)
31. *Senthil Kumar D., Ganesan N.* Dynamic analysis of conical shells conveying fluid // *J. Sound Vib.*, 2008, vol. 310, no. 1–2, pp. 38–57.
32. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* An investigation of internal stability of conical shells with internal fluid flow // *Vestn. Samara Univ. Natural Sci. Ser.*, 2008, no. 6(65), pp. 225–237. (in Russian)
33. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* Natural vibrations and stability of shells of revolution interacting with an internal fluid flow // *J. Sound Vib.*, 2011, vol. 330, pp. 3084–3101.
34. *Kerboua Y., Lakis A.A., Hmila M.* Vibration analysis of truncated conical shells subjected to flowing fluid // *Appl. Math. Model.*, 2010, vol. 34, no. 3, pp. 791–809.
35. *Rahmanian M., Firouz-Abadi R.D., Cigeroglu E.* Dynamics and stability of conical/cylindrical shells conveying subsonic compressible fluid flows with general boundary conditions // *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, vol. 120, pp. 42–61.
36. *Mohammadi N., Asadi H., Aghdam M.M.* An efficient solver for fully coupled solution of interaction between incompressible fluid flow and nanocomposite truncated conical shells // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2019, vol. 351, pp. 478–500.
37. *Godunov S.K.* Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations // *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961, vol. 16, no. 3. pp.171–174. (in Russian).
38. *Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev V.I., Shklyarchuk F.N.* *Aerohydroelasticity of Structures*. Moscow: Fizmatlit, 2000. 591 p. (in Russian)
39. *Shmakov V.P.* *Selected works on hydroelasticity and the dynamics of elastic structures*. Moscow: MGTU, 2011. 287 p. (in Russian)
40. *Yudin A.S., Ambalova N.M.* Forced vibrations of coaxial reinforced cylindrical shells during interaction with a fluid // *Int. Appl. Mech.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 1222–1227.
41. *Yudin A.S., Safronenko V.G.* *Vibroacoustics of structurally inhomogeneous shells*. Rostov-on-Don: Southern Federal Univ., 2013. 424 p. (in Russian)
42. *Bochkarev S.A.* Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2022, vol. 22, 2250071.
43. *Shu C.* *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. L.: Springer, 2000. 340 p.
44. *Barulina M.A.* Application of generalized differential quadrature method to two-dimensional problems of mechanics // *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 206–216. (in Russian)
45. *Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N.* *The Statics and Dynamics of Thin-walled Shell Structures*. Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. 376 p. (In Russian)
46. *Berezin I.S., Zhidkov N.P.* *Computing Methods*. vol. 2. N. Y.: Pergamon, 1965. 679 p.

47. *Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z.* Numerical Methods of Analysis. Approximation of Functions, Differential and Integral Equations. Moscow: Nauka, 1967. 368 p. (in Russian)
48. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Moscow: Nauka, 1986. 512 p. (in Russian)
49. *Kostomarov D.P., Favorskiy A.P.* Introductory Lectures on Numerical Methods. Moscow: Logos, 2004. 184 p. (in Russian)
50. *De Boor C.* A Practical Guide to Splines. N. Y.: Springer, 2001. 348 p.
51. *Bert C.W., Malik M.* Differential quadrature method in computational mechanics: A review // ASME. Appl. Mech. Rev., 1996, vol. 49, no. 1, pp. 1–28.
52. *Bochkarev S.A.* Natural vibrations of truncated conical shells of variable thickness // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2021, vol. 62, no. 7, pp. 1222–1233.
53. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2008, vol. 49, no. 2, pp. 313–322.
54. *Grigor'ev V.G.* Methodology of Investigation of the Dynamic Properties of Complex Elastic and Hydroelastic Systems, Doct. Dissertation in Tech. Sci., Moscow, 2000, 326 p. (in Russian)

УДК 539.3

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И СТРУКТУРНЫЕ ДЕФЕКТЫ В НАНОПРОВОЛОКАХ

© 2022 г. А. Е. Романов^{1,*}, А. Л. Колесникова^{1,2}, М. Ю. Гуткин^{1,2,3}

¹ Университет ИТМО, С.-Петербург, Россия

² Институт проблем машиноведения РАН, С.-Петербург, Россия

³ СПб Политехнический университет Петра Великого, С.-Петербург, Россия

*e-mail: alexey.romanov@niuitmo.ru

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.

После доработки 07.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Рассматриваются источники внутренних напряжений в нанопроволоках, моделью которых служит бесконечный упругоизотропный цилиндр кругового сечения. Источниками внутренних напряжений являются дефекты, обладающие собственной дисторсией (деформацией) и локализованные или в точке, или на линии, или на поверхности, или в области внутри нанопроволоки. Приводятся соотношения для упругих полей и энергий некоторых дефектов в нанопроволоках, включая прямолинейные дислокации и дисклинации, дислокационные петли и дилатационные включения. Анализируется взаимодействие между источниками внутренних напряжений в упругом цилиндре. Обсуждается роль найденных решений задач механики деформируемого твердого тела при интерпретации релаксационных процессов в пентагональных нанопроволоках и гибридных полупроводниковых наноструктурах с радиальными и аксиальными гетерограницами.

Ключевые слова: нанопроволока, дислокация, дисклинация, решеточное несоответствие, дилатационное включение, механические напряжения, упругая энергия

DOI: 10.31857/S0032823522040117

1. Введение. Следуя установившейся терминологии, будем называть нанопроволоками твердые тела, которые в двух измерениях имеют размеры от 1 до 100 нм, а в третьем – много больше 100 нм. В зависимости от химического состава, различают органические и неорганические нанопроволоки, а также однородные и неоднородные нанопроволоки. В последнем случае в отдельный класс выделяют композитные (или гибридные) нанопроволоки, которые состоят из разных материалов (фаз), отделенных друг от друга межфазными границами. К гибридным мы также относим нанопроволоки, содержащие структурные дефекты: дислокации, дисклинации и их ансамбли.

Взрывной интерес, появившийся в последние три декады к нанопроволокам и другим нанобъектам, в первую очередь объясняется принципиально новыми функциональными (физическими и химическими) свойствами, которые возникают у кристаллов при уменьшении их размеров до длины волны де Бройля для электрона в данном материале, формируя так называемые квантово-размерные эффекты [1]. Важный пример реализации квантово-размерных объектов представляют собой полупроводниковые гибридные нанопроволоки [2, 3].

Наноматериалы, имеющие ограничения по одному из нескольких измерений, обладают рядом особенностей и с точки зрения механических свойств [4, 5]. Эти особенно-

сти могут проявляться как в упругом поведении материалов и их пластическом отклике, так и на переходе к стадии разрушения. В работах Никиты Федоровича Морозова с соавторами значительное внимание уделено различным аспектам механического поведения наноматериалов и нанообъектов: например, влияние характерного размера нанокристаллической полосы (ее ширины) на значение модулей упругости рассмотрено в [6], параметры жесткости нанообъектов исследованы в [7], а в работе [8] рассмотрены динамические свойства материала с ансамблем наноразмерных включений, наконец, упругие поля и энергии дисклинаций в полых наночастицах изучены в [9].

В настоящей работе мы анализируем механическое поведение гибридных нанопроволочных структур, содержащие дефекты: дислокации, дисклинации, упругие включения. В качестве адекватной механической модели нанопроволоки рассматривается бесконечный упругоизотропный круговой цилиндр, в котором имеются источники внутренних напряжений, что эквивалентно наличию в объеме цилиндра собственных (неупругих) деформаций — *eigenstrains*.

Решение упругих задач для твердых тел с геометрией кругового цилиндра важно для многих приложений в механике и физике. Начиная с классической работы Филона [10] и до недавних исследований напряженно-деформированного состояния цилиндров конечной длины [11] или полых цилиндров со сложными реологическими свойствами материала [12], опубликованы тысячи статей, посвященных анализу напряженно-деформированного состояния твердых тел с геометрией цилиндра. Существуют две возможности постановки задач теории упругости для цилиндра: (i) приложение сил и моментов на его поверхности или (ii) допущение собственной деформации в заданной области цилиндра. Решение задач первого типа для бесконечного цилиндра, нагруженного на части поверхности постоянным давлением, было в деталях рассмотрено Лурье [13]. Второй тип проблем связан с состоянием цилиндра с внутренними напряжениями без каких-либо внешних нагрузок. Известными примерами такого состояния являются дислокации Вольтерра [14], когда собственная деформация локализована на выделенной поверхности внутри полого цилиндра. Собственную деформацию можно задать в конечном объеме внутри упругого цилиндра. В результате мы приходим к задаче упругого включения аналогично случаю, рассмотренному впервые Эшелби для включений в бесконечном упругом континууме [15].

План изложения материала в статье следующий. В разделе 2 мы обсуждаем собственные дисторсии и деформации в упругом цилиндре, включая их общую классификацию по геометрическому признаку, и даем примеры собственных деформаций, относящиеся к аксиальным и радиальным включениям, а также изолированным дислокациям и дисклинациям. Раздел 3 посвящен примерам решения задач теории изотропной упругости для прямолинейных и петлевых дислокаций и дисклинаций в цилиндре (нанопроволоке) и для распределенной собственной деформации. В разделе 4 дан анализ взаимодействующих собственных деформаций, которые могут одновременно возникать в нанопроволоках. Наконец, в заключительном разделе 5 кратко обсуждаются физические эффекты в нанопроволоках, обусловленные наличием собственных деформаций и структурных дефектов.

2. Собственные деформации в цилиндре. Общий подход к внутренним источникам упругих искажений в материале — дефектам — с точки зрения механики твердого тела был развит [16, 17] как продолжение идей Вольтерры [14], Эшелби [15], Кренера [18], Де Вита [19] и Муры [20]. В этом подходе дефекты вводятся в трехмерный континуум с помощью собственных дисторсий (или собственных деформаций — *eigenstrains*), локализованных либо в точке, либо на линии, либо на поверхности, либо в трехмерной области.

2.1. Классификация собственных дисторсий и деформаций по геометрическому признаку. В соответствии с размерностью области задания дефекта мы имеем точечные (0D), линейные (1D), поверхностные (2D) и объемные (3D), также известные как включе-

ния) дефекты с соответствующими собственными (неупругими) дисторсиями ${}^n\beta_{ij}^*$ (n – размерность дефекта) [21]:

$$\begin{aligned} {}^0\beta_{ij}^* &= \beta_{ij}^T v \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \\ {}^1\beta_{ij}^* &= \beta_{ij}^T s \delta(\mathbf{L}) \\ {}^2\beta_{ij}^* &= \beta_{ij}^T l \delta(\mathbf{S}) \\ {}^3\beta_{ij}^* &= \beta_{ij}^T \delta(V) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этих соотношениях безразмерный тензор β_{ij}^T задает характер превращений в ходе неупругого формоизменения материала; многомерные дельта-функции Дирака $\delta(\dots)$ указывают на область задания превращения: точку, линию, площадку и объем (первое – четвертое соотношения в формуле (2.1), соответственно). Формальные, в общем случае, коэффициенты v , s и l вводятся для того, чтобы собственные дисторсии ${}^n\beta_{ij}^*$ оставались безразмерными. В частности, трехмерная дельта функция $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$, имеющая в декартовых координатах вид $\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, обладает размерностью $[\delta(\mathbf{R})] = x^{-3}$, значит, для того, чтобы дисторсия ${}^0\beta_{ij}^*$ оставалась безразмерной, необходим коэффициент v размерностью $[v] = x^3$.

Заметим, что вместо собственных дисторсий (2.1) могут быть заданы упомянутые выше собственные деформации (eigenstrains) ${}^n\epsilon_{ij}^*$ – симметричные части тензоров, задаваемых формулами (2.1). Например, дислокации удобно характеризовать собственной дисторсией, а дилатационные дефекты различной размерности – собственной деформацией.

Неупругое формоизменение материала (твердого тела) может иметь различную природу. Оно возникает в ходе фазовых превращений, например, мартенситного превращения, когда меняется симметрия и размеры элементарной ячейки кристалла [22], или в результате теплового расширения твердых тел [23]. Решеточное несоответствие на границе раздела кристаллических материалов различающегося химического состава [24] является случаем, представляющим наибольший интерес для устройств электроники и оптоэлектроники. Наконец, неоднородная пластическая деформация материала, осуществляемая за счет движения дислокаций [25], служит наиболее распространенным примером собственных деформаций.

Отметим, что дефекты большей размерности могут быть получены из дефектов меньшей размерности путем суперпозиции. Например, из 0-мерных дефектов, распределенных с некоторой плотностью вдоль линии ρ_L , или по поверхности ρ_S или по объему ρ_V получаются, соответственно, линейный и 2-мерный дефекты или включение:

$$\begin{aligned} {}^1\beta_{ij}^* &= \int_L {}^0\beta_{ij}^* \rho_L(L_0) dL_0 \\ {}^2\beta_{ij}^* &= \int_S {}^0\beta_{ij}^* \rho_S(S_0) dS_0 \\ {}^3\beta_{ij}^* &= \int_V {}^0\beta_{ij}^* \rho_V(V_0) dV_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2. Примеры собственных деформаций. Прежде чем переходить к ключевым, с точки зрения физико-технических применений, упругим задачам для микро- и нанопрово-

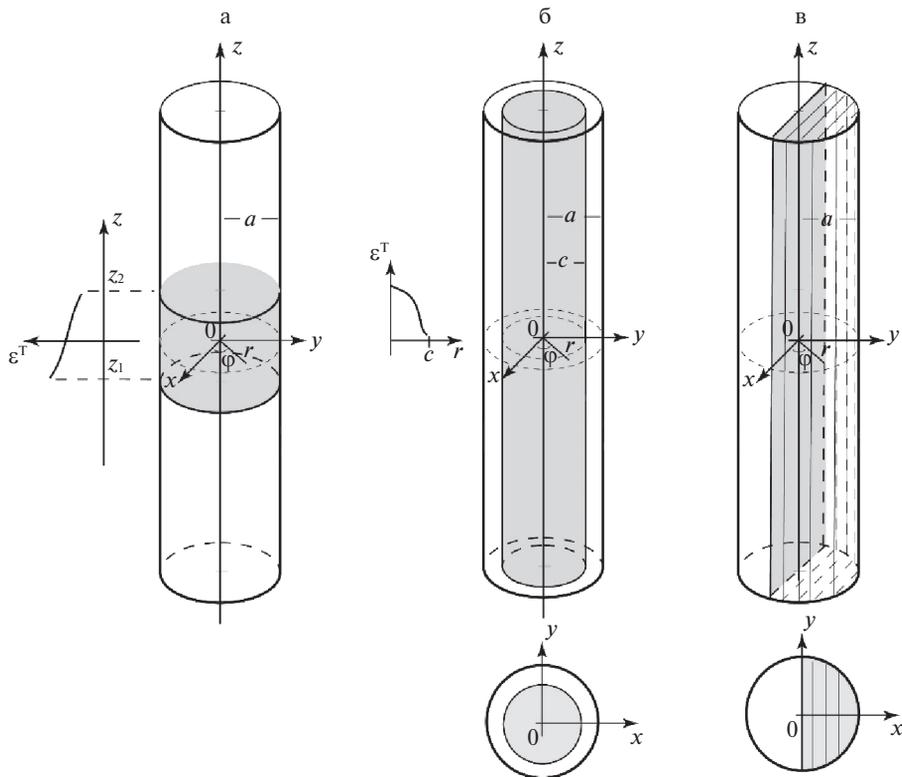


Рис. 1. Бесконечно длинный цилиндр с аксиальной (а) и радиальной (б) собственными деформациями и янус-цилиндр (в). На графиках схематично показаны изменения собственных деформаций.

лок, определим основные собственные деформации, которыми задается состояние проволоки, моделируемой бесконечно длинным упругим цилиндром.

2.2.1. Аксиальные и радиальные собственные деформации, заданные в объеме цилиндра.

На рис. 1а показан цилиндр с дилатационной собственной деформацией ${}^3\varepsilon_{ii}^*$ ($i = x, y, z$ и $i = r, \varphi, z$ в декартовой и цилиндрической системах координат соответственно, суммирования по повторяющемуся индексу нет), меняющейся вдоль оси цилиндра z и называемой аксиальной:

$${}^3\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^T(z)H(a-r)H[(z-z_1)(z_2-z)] \quad (2.3)$$

Здесь $\varepsilon^T(z)$ – скалярная функция, задающая изменение собственной деформации, $H(\dots)$ – функция Хевисайда, a – радиус цилиндра, $[z_1, z_2]$ – интервал задания собственной деформации по оси z , $z_1 < z < z_2$.

На рис. 1б изображен цилиндр с радиальной собственной деформацией:

$${}^3\varepsilon_{ii}^* = \varepsilon^T(r)H(c-r); \quad i = x, y, z \quad \text{или} \quad i = r, \varphi, z, \quad (2.4)$$

где c – радиус области задания собственной дилатационной деформации ε^T , $c < a$.

2.2.2. Янус-цилиндр. Цилиндр, на сегменте которого задана собственная деформация, относится к янус-цилиндрам. В частном случае, когда цилиндр состоит из двух

одинаковых частей (рис. 1в), его дилатационная собственная деформация запишется в виде:

$${}^3\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon^T H(\pi - \varphi)H(a - r); \quad i = x, y, z \quad \text{или} \quad i = r, \varphi, z \quad (2.5)$$

2.2.3. *Локализованные дефекты: дислокации и дисклинации.* Собственные дисторсии линейных дефектов, дислокаций и дисклинаций, задаются площадкой разреза, на которой дефект вводится, и способом преобразования берегов разреза [14]. Это означает, что формула (2.1) собственной дисторсии ${}^2\beta_{ij}^*$ для этих дефектов может быть конкретизирована [26, 27]:

$${}^2\beta_{ij}^* = \delta_i(S) \left\{ -b_j - e_{j\rho q} \omega_\rho (x_q - x_q^0) \right\} \quad (2.6)$$

Здесь $\delta_i(S)$ – векторная дельта-функция Дирака на поверхности разреза S с нормалью n_i , определяемая как $\int_S \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS'_i$; в фигурных скобках формализован скачок смещений берегов разреза площадки; b_j – компоненты вектора Бюргерса дислокации; ω_ρ – компоненты аксиального вектора Франка дисклинации; x_q^0 – точка, через которую проходит ось ротации для дисклинации; $e_{j\rho q}$ – компоненты тензора Леви-Чивита.

Оказывается, что упругие поля дислокаций и дисклинаций непрерывны везде кроме линии, ограничивающей площадку задания дефекта. Более того, упругие поля не зависят от выбора площадки. Если ограничивающая линия находится в теле и не выходит на свободную поверхность, то это – линия дефекта.

На рис. 2а–в показаны прямолинейная краевая и винтовая дислокации, круговая призматическая дислокационная петля и прямолинейная клиновья дисклинация с обозначением их линий.

В цилиндре компоненты собственной дисторсии прямолинейной краевой и винтовой дислокаций (рис. 2а) с векторами Бюргерса $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x$ и $\mathbf{b} = b_z \mathbf{e}_z$ соответственно ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ и \mathbf{e}_z – орты координатных осей), показывающими относительный сдвиг берегов разреза, удобно записать в виде:

$${}^2\beta_{yz}^* = -b_x H(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad {}^2\beta_{xz}^* = -b_z H(y - y_0) \delta(x), \quad (2.7)$$

где (x_0, y_0) – координата линии краевой дислокации и $(0, y_0)$ – координата линии винтовой дислокации.

Для призматической дислокационной петли (петли внедрения), изображенной на рис. 2б, собственная дисторсия определяется формулой:

$${}^2\beta_{zz}^* = bH(c - r) \delta(z - z_0), \quad (2.8)$$

где c – радиус петли, $c < a$; z_0 – координата плоскости залегания петли.

Собственная дисторсия соосной цилиндру клиновья дисклинации с вектором Франка $\omega = \omega \mathbf{e}_z$ (\mathbf{e}_z – орт оси z), характеризующим относительный поворот берегов разреза (рис. 2в), записывается в виде:

$${}^2\beta_{yy}^* = \omega(x - x_0)H(x - x_0) \delta(y) \quad (2.9)$$

Заметим, что при определении дисторсий прямолинейных дислокаций (2.7) и дисклинации (2.9) в качестве области задания дефекта берется полуплоскость.

В следующем разделе рассматриваются упругие энергии, обусловленные перечисленными собственными деформациями в цилиндре.

3. Примеры решений задач теории упругости для цилиндров с собственными деформациями. В случае бесконечной упругоизотропной среды при заданной собственной де-

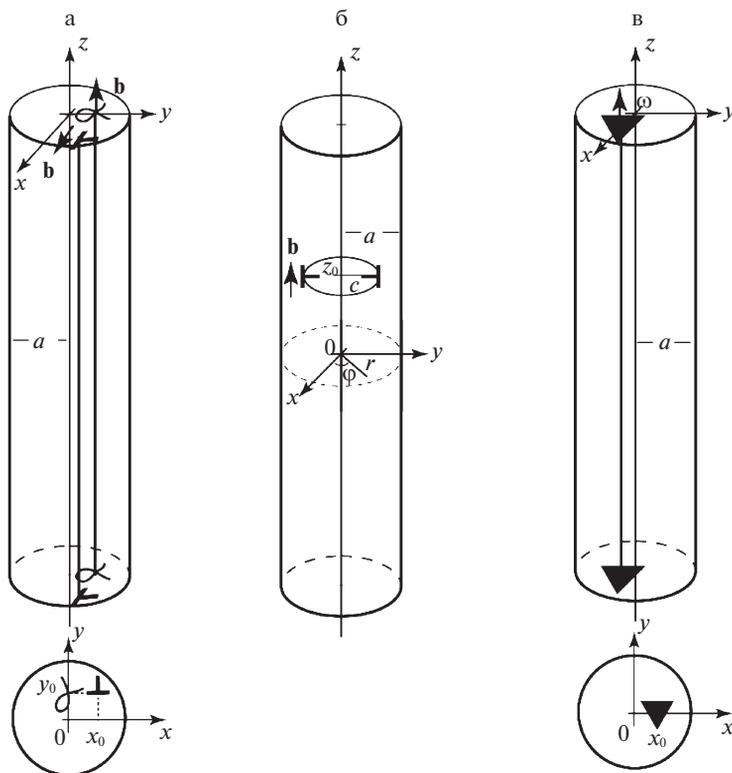


Рис. 2. Краевая и винтовая дислокации (а), призматическая дислокационная петля внедрения (б) и положительная клиновидная дисклинация (в) в цилиндре.

формации или дисторсии дефекта его упругие поля рассчитываются по известным формулам, в которые входит тензор Грина, имеющий аналитическое представление [20]. Для упругого цилиндра (особенно при наличии неоднородностей в распределении упругих модулей) такой подход не применим, а граничные задачи при условии отсутствия усилий на свободной поверхности цилиндра (для компонент тензора напряжений $\sigma_{ri} = 0, i = r, \varphi, z$) требуют индивидуального подхода для выбранного вида собственной деформации (дисторсии).

В зависимости от цели и симметрии граничной задачи, возможно определять упругие поля дефекта, пользуясь уже известными полями дефектов меньшей размерности, как это было реализовано для бесконечного континуума. В работах [16, 17, 28] показано, как из 0-мерных дефектов – бесконечно-малых призматических петель [29] получаются сначала (а) 0-мерный центр дилатации, и определяются его упругие поля, затем (б) дилатационная круговая нить, поля которой рассчитываются путем интегрирования полей центров дилатации, распределенных по окружности, далее (в) дилатационный диск, и его поля находятся интегрированием круговых дилатационных нитей, распределенных по радиусу круга, и, наконец, (г) включения в виде конечного кругового цилиндра и усеченного шара, поля которых также записываются в аналитическом виде [28]. В работах [30, 31] был продемонстрирован переход от решения граничной задачи о дилатационном диске в цилиндре к решению для дилатационного включения с собственной деформацией, зависящей от осевой координаты цилиндра.

3.1. *Изолированные прямолинейные дислокации и дисклинации.* Впервые упругие поля прямолинейных дислокаций и дисклинаций в цилиндре были даны Вольтеррой в 1907 г. в основополагающей статье [14] о дисторсиях в полых толстостенных трубах. Эти решения, полученные для случая, когда линии дислокаций или дисклинаций лежат на оси полого или, в пределе, сплошного бесконечно длинного цилиндра, хорошо известны и многократно цитировались, в том числе в классических учебниках по теории упругости и механике деформируемого твердого тела [32, 33].

Упругая задача для винтовой дислокации с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = (0, 0, b)$, смещенной с оси сплошного цилиндра радиуса a на некоторое расстояние $y_0 = d$ (см. рис. 2а), была рассмотрена Эшелби [34]. Решение в этом случае может быть найдено простой суперпозицией упругих полей данной дислокации и виртуальной дислокации изображения противоположного знака, расположенной на линии, проходящей через ось цилиндра и линию исходной дислокации, за пределами цилиндра на расстоянии a^2/d от оси цилиндра. Энергия на единицу длины такой смещенной относительно оси дислокации оказывается следующей [25]:

$$E^s = \frac{Gb^2}{2\pi} \ln \frac{a^2 - d^2}{r_c a}, \quad (3.1)$$

где G – модуль сдвига, b – модуль вектора Бюргерса винтовой дислокации, r_c – радиус ядра дислокации. Из соотношения (3.1) следует, что дислокация в бесконечном цилиндре имеет единственное неустойчивое положение равновесия на оси этого цилиндра. В этой же работе [34] было показано, что наличие свободных торцов у цилиндра конечной длины, содержащего винтовую дислокацию, приводит к закручиванию цилиндра вокруг своей оси на погонный угол:

$$\alpha = \frac{b}{\pi a^2} \left(1 - \frac{d^2}{a^2} \right) \quad (3.2)$$

При этом дислокация приобретает два положения равновесия в цилиндре – устойчивое на его оси и неустойчивое на расстоянии $\approx 0.54a$ от нее.

Упругие поля и поведение винтовой дислокации в стенке бесконечно длинного полого цилиндра исследовались в работах [35–37]. Решения были получены с помощью двух бесконечных рядов виртуальных дислокаций изображения, расположенных внутри полости и вне цилиндра, для случаев соосной полости [35, 37] и полости [36], ось которой была смещена с оси цилиндра. В работе [37] показано, в частности, что наличие внутренней полости приводит к качественным отличиям в распределении поля напряжения дислокации: смене знака напряжений возле внутренней поверхности стенки, высокой концентрации напряжения и его градиента на этой поверхности.

Для клиновой дисклинации с вектором Франка $\omega = (0, 0, \omega)$, смещенной относительно оси цилиндра вдоль оси x на расстояние $x_0 = d$, см. рис. 2в, решение для напряжений (случай плоской деформации) задается следующей функцией напряжений Эйри [38]:

$$\chi^\Delta = \frac{G\omega}{8\pi(1-\nu)} \left[\left((x-d)^2 + y^2 \right) \ln \frac{a^2 \left((x-d)^2 + y^2 \right)}{(xd - a^2)^2 + y^2 d^2} - \frac{(x^2 + y^2)(d^2 - a^2)}{a^2} \right], \quad (3.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона, а остальные обозначения были введены выше по тексту.

Погонная энергия такой дисклинации с сингулярным ядром, т.е. в случае $r_c \rightarrow 0$, задается простым соотношением [38, 39]:

$$E^\Delta = \frac{G\omega^2}{16\pi(1-\nu)} \frac{(a^2 - d^2)^2}{a^2} \quad (3.4)$$

Аналогичные задачи были рассмотрены для прямолинейных краевых дислокаций. Первое упоминание о решении для краевой дислокации, смещенной относительно оси цилиндра, полученном в 1949 году в дипломной работе Дитце под руководством Лейбфрида, опубликовано Зеегером [40]. Такое же решение позже было найдено предельным переходом в задаче о краевой дислокации в цилиндрической неоднородности в матрице при устремлении к нулю жесткости матрицы [41]. С другой стороны, это же решение можно найти предельным переходом от двухосного диполя клиновых дисклинаций мощности (модулем вектора Франка) ω с плечом l , смещенных с оси бесконечного сплошного цилиндра [42], к краевой дислокации при $l \rightarrow 0$ и $\omega l = b \neq 0$.

Для краевой дислокации с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = (b, 0, 0)$ и линией, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно оси z цилиндра радиуса a (рис. 2а), функция напряжений Эйри имеет вид [42]:

$$\chi^\perp = \frac{Gb}{4\pi(1-\nu)} \left((y - y_0) \ln \frac{r^2 C^2}{a^2 P^2} + \frac{y_0(r^2 - a^2)(r_0^2 - a^2)}{a^2 C^2} + \frac{y a^2 P^2}{r^2 C^2} \right), \quad (3.5)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, $P^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2$, $C^2 = (x_0 - x a^2 / r^2)^2 + (y_0 - y a^2 / r^2)^2$.

Энергия краевой дислокации, смещенной относительно оси бесконечного упруго-изотропного цилиндра на расстояние c , демонстрирует зависимость от параметров задачи, аналогичную случаю винтовой дислокации [41]:

$$E^\perp = \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)} \left(\ln \frac{a^2 - c^2 - cr_c}{ar_c} + \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) \quad (3.6)$$

Здесь координаты дислокации определены как $x_0 = 0$, $y_0 = c$.

В заключение этого раздела отметим, что в последние десятилетия возрос интерес к анализу упругого поведения прямолинейных краевых [43–46] и винтовых [47–50] дислокаций в трехфазных упруго-неоднородных цилиндрических системах, состоящих из цилиндрического ядра, оболочки и окружающей бесконечной матрицы.

3.2. Призматическая дислокационная петля. Для призматической дислокационной петли, соосной длинному круговому цилиндру (рис. 2б), упругая задача эффективно решается с применением общих формул для упругих полей в цилиндре, подвергнутом произвольной осесимметричной нагрузке [13]. Подробно решение этой задачи изложено в работе [51].

Для вычисления упругих энергий цилиндров (и любых других тел) с заданными собственными деформациями ${}^n \epsilon_{ij}^*$ (дисторсиями ${}^n \beta_{ij}^*$) результативным оказывается подход, в которой энергия рассчитывается как половина работы напряжений σ_{ij} , вызванных собственными деформациями, при “создании” этих деформаций [26], что является следствием теоремы взаимности работ в линейной теории упругости [13, 20, 25]. В результате запасенная энергия записывается как

$$E = -\frac{1}{2} \int_V {}^n \beta_{ij}^* \sigma_{ij} dV \quad \text{или} \quad E = -\frac{1}{2} \int_V {}^n \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} dV \quad (3.7)$$

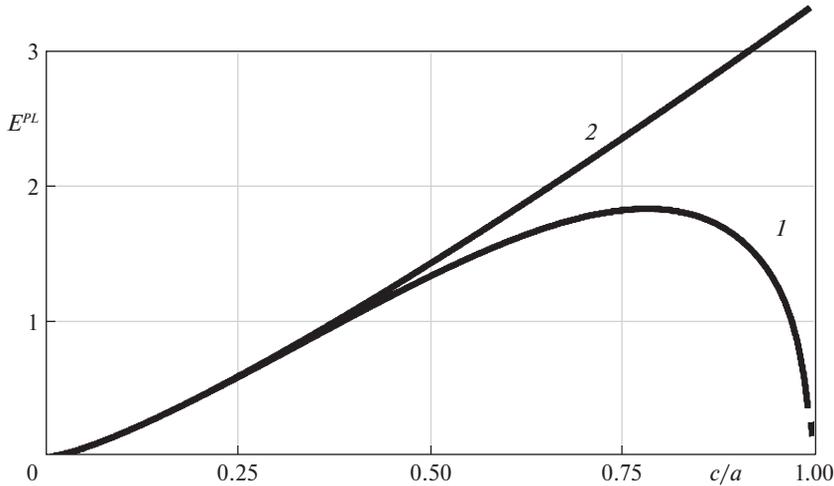


Рис. 3. Энергия дислокационной призматической петли в цилиндре (1) и в бесконечной упругой среде (2) как функция ее радиуса. Энергия выражена в единицах Gb^2a , где G – модуль сдвига, b – величина вектора Бюргерса дислокационной петли, a – радиус цилиндра. Расчеты сделаны для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ и радиуса ядра дислокации $r_c = 0.01a$.

Здесь V – объем тела. Выделенная область интегрирования по этому объему включена в формулы ${}^n\varepsilon_{ij}^*$ и ${}^n\beta_{ij}^*$.

Приведем формулу энергии призматической дислокационной петли E^{PL} в цилиндре, найденную в работе [51] с помощью соотношения (3.7):

$$E^{PL} = \frac{Gb^2at}{2(1-\nu)} \left(\ln \frac{1.08at}{r_c} - 2t \int_0^\infty \frac{t^2 \beta^2 I_0^{*2} + w I_1^{*2} - 2t \beta I_0^* I_1^* (w I_1 K_1 + \beta^2 I_0 K_0)}{\beta^2 I_0^2 - w I_1^2} d\beta \right), \quad (3.8)$$

где $w = \beta^2 - 2\nu + 2$, $I_{0,1} = I_{0,1}(\beta)$, $I_{0,1}^* = I_{0,1}(t\beta)$, $I_{0,1}(\beta)$ и $I_{0,1}(t\beta)$ – модифицированные функции Бесселя 1-го рода, $K_{0,1} = K_{0,1}(\beta)$ – функция Макдональда, $t = c/a$, c – радиус петли, a – радиус цилиндра, r_c – радиус ядра дислокации.

На рис. 3 показана зависимость энергии призматической петли от ее радиуса в цилиндре. Там же для сравнения показана аналогичная зависимость для петли в бесконечной среде.

3.3. Цилиндр с радиальным несоответствием. Напряженно-деформированное состояние, вызванное радиальным распределением собственных деформаций в цилиндре, т.е. нанопроволоки со структурой “ядро/оболочка” (см. рис. 16), исследовалось сначала для упруго-однородного [52], а затем и для упруго-неоднородного [53] цилиндров. Например, для одинаковых значений коэффициентов Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и разных значений модулей сдвига G_1 и G_2 соответственно материалов ядра и оболочки с радиусами c и a ненулевые компоненты тензора напряжений несоответствия в цилиндрической системе координат (r, φ, z) можно записать в следующем компактном виде [53]:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -A\varepsilon^T(1 - t^2), \quad \sigma_{rr}^{(2)} = -A\varepsilon^T \left(\frac{c^2}{r^2} - t^2 \right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -A\varepsilon^T(1-t^2), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = A\varepsilon^T \left(\frac{c^2}{r^2} + t^2 \right) \quad (3.9)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = -A\varepsilon^T \frac{(1-t^2)[1+t^2+g(1-t^2)]}{t^2+g(1-t^2)}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = A\varepsilon^T \frac{t^2[1+t^2+g(1-t^2)]}{t^2+g(1-t^2)},$$

где использованы обозначения: $A = \frac{2G_2(1+\nu)}{1+t^2(1-2\nu)+g(1-t^2)(1-2\nu)}$, $t = c/a$, $g = G_2/G_1$.

Верхний индекс в скобках в обозначениях напряжений указывает на принадлежность к ядру (1) или к оболочке (2), а параметр ε^T – это параметр несоответствия кристаллических решеток их материалов. В случае кубических решеток с параметрами b_1 и b_2 его можно определить как $\varepsilon^T = 2(b_1 - b_2)/(b_1 + b_2)$.

Погонная упругая энергия такого цилиндра E^m (энергия несоответствия) определяется по формуле (3.7):

$$E^m = \frac{A(\varepsilon^T)^2 \pi c^2}{2} (1-t^2) \left(3 + \frac{1}{t^2+g(1-t^2)} \right) \quad (3.10)$$

Недавно были также выполнены исследования, в которых изучались структуры типа “ядро/оболочка” с ядрами, имеющими в сечении форму правильных многоугольников, см. например, работы [54–57]. Решения для прямоугольных и квадратных сечений получали с помощью комплексных потенциалов. Для случаев треугольного и шестиугольного сечения предварительно решалась граничная задача теории упругости для бесконечно тонкой дилатационной нити [16], параллельной оси цилиндра, а затем поля напряжений включений находили прямым интегрированием полей напряжений нити.

3.4. Цилиндр с аксиальной собственной деформацией. Задача об упругих полях цилиндра с дилатационной собственной деформацией, меняющейся вдоль оси цилиндра z (рис. 1а), была решена путем интегрирования полей распределенных по z дилатационных дисков [30, 31]. В свою очередь упругие поля дилатационного бесконечно тонкого диска были найдены методом Лурье [13], упоминавшимся выше при рассмотрении призматической дислокационной петли.

Приведем формулы для энергий цилиндра с дилатационными включениями с резкими границами и с границами, где дилатация линейно спадает до 0 – E^{D11} и E^{D12} :

$$E^{D11} = \frac{2G(1+\nu)(\varepsilon^T)^2 \pi a^3}{1-\nu} \left(\tilde{h}_0 - \frac{8(1+\nu)}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_1^2}{\beta^2(\beta^2 I_0^2 - w I_1^2)} \sin^2 \frac{\tilde{h}_0 \beta}{2} d\beta \right)$$

$$E^{D12} = \frac{2G(1+\nu)(\varepsilon^T)^2 \pi a^3}{1-\nu} \times$$

$$\times \left(\tilde{h}_0 + \frac{2}{3} \tilde{h}_1 - \frac{32(1+\nu)}{\pi \tilde{h}_1^2} \int_0^\infty \frac{I_1^2}{\beta^4(\beta^2 I_0^2 - w I_1^2)} \sin^2 \frac{\tilde{h}_1 \beta}{2} \sin^2 \frac{(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_0) \beta}{2} d\beta \right), \quad (3.11)$$

где ε^T – величина собственной деформации включения (3), $\tilde{h}_{0,1} = h_{0,1}/a$, h_0 – высота включения с ε^T , h_1 – размер области размытости границ включения, т.е. области, где дилатация спадает от ε^T до 0. Остальные обозначения те же, что и в формуле (3.8). В работе [31] представлена энергия включения с размытыми границами, в которых дилатация спадает по экспоненциальному закону.

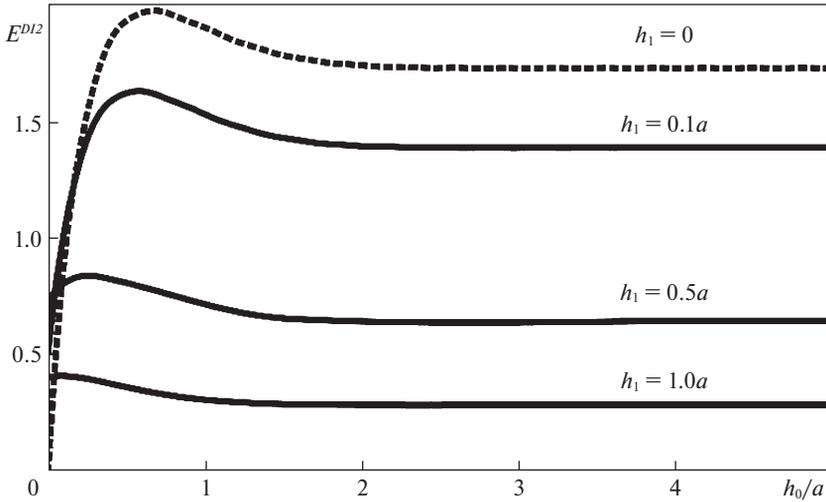


Рис. 4. Энергия цилиндра в зависимости от относительного размера дилатационного включения h_0/a при различных размерах областей размытия его границ h_1 . Энергия выражена в единицах $G(\epsilon^T)^2 a^3$, где G – модуль сдвига, ϵ^T – величина собственной деформации включения, a – радиус цилиндра. Расчеты сделаны для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$.

На рис. 4 показана зависимость $E^{D12}(\tilde{h}_0)$ для набора h_1 . Пунктирной кривой обозначена зависимость $E^{D11}(\tilde{h}_0)$.

4. Взаимодействующие собственные деформации в цилиндре. В общем случае взаимодействие источников внутренних напряжений (дефектов) описывается перекрестным членом вида [20]:

$$W = -\int_V \epsilon_{ij}^{*I} \sigma_{ij}^{II} dV, \tag{4.1}$$

где собственная деформация ϵ_{ij}^{*I} относится к одному из взаимодействующих дефектов, а напряжения σ_{ij}^{II} вызваны вторым дефектом; при этом интегрирование проводится по всему объему V рассматриваемого упругого тела; в нашем случае это бесконечный цилиндр.

Ниже приводятся примеры использования соотношения (4.1) для анализа важного с точки зрения практических приложений взаимодействия источников внутренних напряжений в нанопроволоках.

4.1. Дисклинация в нанопроволоке с радиальной собственной деформацией. Проволоки и стержни с пентагональным поперечным сечением с характерным диаметром от 10 нм до 5 мкм часто наблюдаются для материалов с ГЦК кристаллической структурой [58]. Простой моделью таких нано- и микрообъектов служит круговой цилиндр с клиновой дисклинацией мощностью $\omega = 2\pi - 10 \sin^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 0.128 \approx 7^\circ 20'$, расположенной вдоль оси цилиндра [58–60]. Знание упругих полей и энергий дисклинированного цилиндра позволяет исследовать и предсказывать многие структурные особенности, свойственные пентагональным микро- и нанообъектам. Основное наблюдение, которое можно хорошо объяснить на основе дисклинационного подхода – это проявление

различных релаксационных процессов в структуре пентагональных нанопроволок и микростержней, возникающих с увеличением их диаметра [61–63]. В данном разделе мы рассмотрим образование слоев с решеточным несоответствием в пентагональных нанопроволоках (рис. 5а), что с точки зрения механики материалов сводится к задаче о взаимодействии дисклинации с радиальной собственной деформацией.

Погонная энергия взаимодействия дисклинации мощностью ω , расположенной в цилиндре радиуса a , в котором имеется ядро радиуса c , испытывающее собственную деформацию ε^T (эквивалентную несоответствию) оказывается следующей [64, 65]:

$$W = -2\pi \int_0^c \varepsilon^T \text{Tr} \sigma_{ij}^{\omega} r dr = -\frac{G(1+\nu)\omega \varepsilon^T a^2}{1-\nu} t^2 \ln t, \quad (4.2)$$

где след тензора напряжений дисклинации в цилиндре $\text{Tr} \sigma_{ij}^{\omega} = \frac{G\omega(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left(\ln \frac{r^2}{a^2} + 1 \right)$,

$t = c/a$.

Энергия взаимодействия в зависимости от знака собственной деформации может оказаться отрицательной, что компенсирует или даже перекрывает увеличение энергии структуры “ядро/оболочка”, задаваемое соотношением (3.10). Суммарное изменение энергии ΔE на единицу длины дисклинированной нанопроволоки с появлением слоя с несоответствием (рис. 5а) имеет вид:

$$\Delta E = \frac{G(1+\nu)\varepsilon^T a^2 t^2}{1-\nu} \left(2\pi \varepsilon^T (1-t^2) - \omega \ln t \right), \quad (4.3)$$

где первый член суммы – это энергия несоответствия (3.10) при условии равенства упругих модулей, второй член – это энергия взаимодействия дисклинации с ядром цилиндра (4.2).

На рис. 5б, в показаны графики зависимости $\Delta E(t)$ для различных ε^T и карта изолиний энергии $\Delta E(t, \varepsilon^T)$. Видно, что при $\varepsilon^T < 0$ в большом диапазоне относительного размера ядра t существует выигрыш в энергии дисклинированной проволоки при появлении в ней ядра с несоответствием: $\Delta E < 0$.

4.2. Дислокации в нанопроволоке с радиальной собственной деформацией.

4.2.1. *Прямолинейная краевая дислокация в нанопроволоке со структурой “ядро/оболочка”.* Изучение взаимодействия прямолинейных краевых дислокаций с радиальными собственными деформациями в цилиндре важно для выявления критических условий протекания релаксационных процессов за счет возникновения дислокация несоответствия (ДН) в нанопроволоках со структурой “ядро/оболочка”, см. [52, 66, 67].

Например, в случае цилиндрического ядра погонная энергия взаимодействия краевой ДН, расположенной на границе раздела между упруго-однородными изотропными ядром и оболочкой и ориентированной таким образом, что ее вектор Бюргерса \mathbf{b} направлен вдоль касательной \mathbf{e}_{ϕ} к этой границе – $\mathbf{b} = b\mathbf{e}_{\phi}$ (см. рис. 6), описывается простой формулой [52]:

$$W = -b \int_c^a \sigma_{\phi\phi}^{(2)}(r) dr = \frac{G(1+\nu)b\varepsilon^T a}{1-\nu} t(t^2 - 1), \quad (4.4)$$

где окружное напряжение в оболочке $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$ определяется второй формулой (3.9), $t = c/a$.

Просуммировав выражения (3.6) и (4.4), авторы работы [52] определили изменение полной погонной энергии нанопроволоки при образовании в ней ДН – ΔE и с его помощью нашли критическое условие начала релаксации: $\varepsilon^T > \varepsilon_c^T(c, a)$, где ε_c^T – крити-

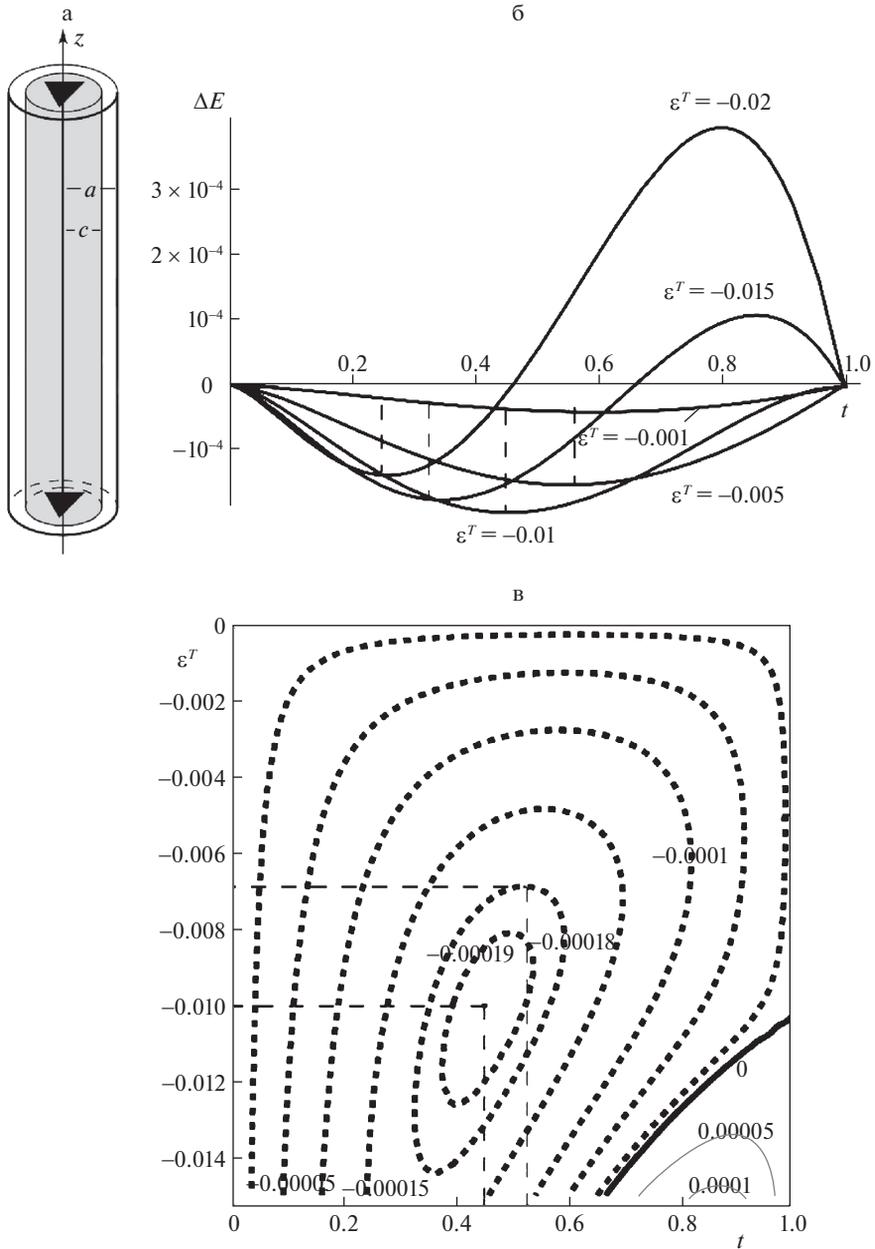


Рис. 5. Выигрыш в энергии ΔE при образовании ядра с несоответствием в цилиндре с клиновой дисклинацией мощностью $\omega \approx 0.128$ как функция относительного радиуса ядра $t = c/a$ и собственной деформации ядра (параметра несоответствия) ϵ^T . (а) дисклинированный цилиндр с ядром с несоответствием, (б) зависимость от параметра t для набора ϵ^T , тонкие штриховые линии обозначают положение минимумов на кривых; (в) контуры равных энергий в координатах $t - \epsilon^T$. Погонные энергии даны в единицах Ga^2 , где G – модуль сдвига, a – радиус цилиндра, а для коэффициента Пуассона использовано значение $\nu = 0.3$.

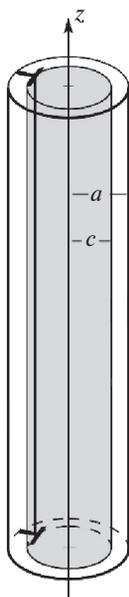


Рис. 6. Дислокация несоответствия в цилиндрической системе типа “ядро–оболочка”. Показана ситуация, когда собственная деформация ядра $\epsilon^T > 0$.

ческое значение параметра несоответствия. Это критическое несоответствие можно представить в виде:

$$\epsilon_c^T(c, a) = \frac{b}{4\pi(1+\nu)a(1-t^2)} \left(1 + \ln \frac{(1-t)(1+t+\tilde{r}_c) - \tilde{r}_c}{\tilde{r}_c} + \frac{(1-t^2)(1-t-\tilde{r}_c)(1+t+\tilde{r}_c)[2(t-1)(1+t+\tilde{r}_c) - 1 + 2\tilde{r}_c]}{2[(1-t)^2 - (2+\tilde{r}_c)(1-t) + \tilde{r}_c^2]} \right), \quad (4.5)$$

где $\tilde{r}_c = r_c/a$ – нормированный радиус дислокационного ядра.

Численный анализ выражения (4.5) показал, что управляющими параметрами зарождения ДН в такой гетероструктуре могут служить как величина несоответствия, так и радиус ядра нанопроволоки, и толщина ее оболочки. Если несоответствие и радиус ядра достаточно малы, то ДН не может зародиться ни при какой, сколь угодно большой толщине оболочки.

В случае призматического ядра исследовались различные механизмы релаксации напряжений несоответствия: зарождение полных и частичных краевых дислокаций на свободной поверхности оболочки, переползание полной краевой дислокации с этой поверхности к границе раздела между ядром и оболочкой и испускание ребром ядра скользящих диполей полных и частичных краевых дислокаций [56].

4.2.2. Призматическая дислокационная петля в нанопроволоке со структурой “ядро/оболочка”. Расчет энергии упругого взаимодействия дислокаций с напряжениями несоответствия в нанопроволоках типа “ядро/оболочка” проводился также для разных петлевых конфигураций дислокаций. Большинство из этих конфигураций представляли собой призматические дислокационные петли с вектором Бюргерса, перпендикулярным к плоскости петли (рис. 7а). Образование круговых петель ДН, расположенных на

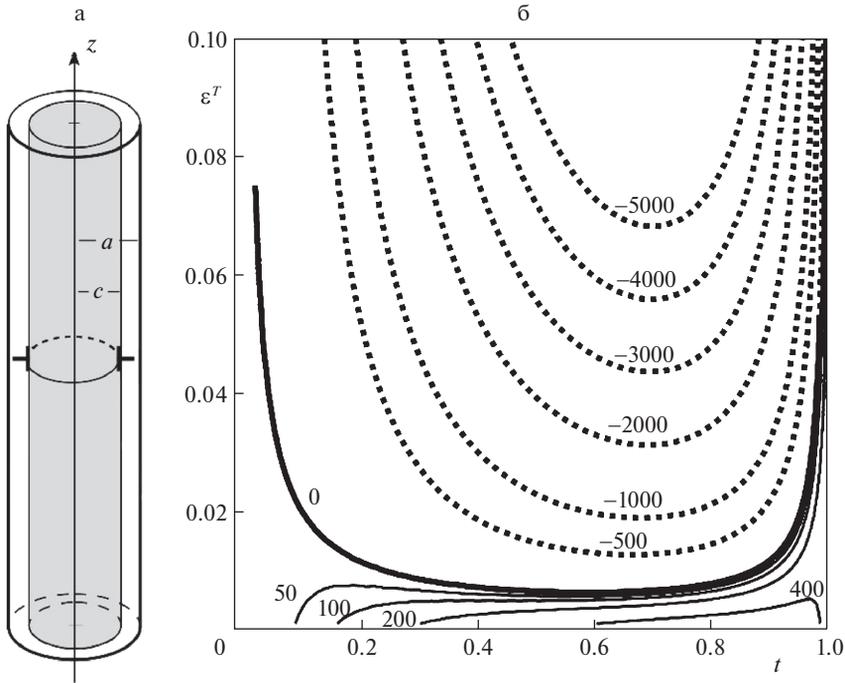


Рис. 7. Призматическая петля дислокации несоответствия в цилиндрической нанопроволоке со структурой “ядро/оболочка” (а) и выигрыш в энергии проволоки ΔE (б) при формировании петли в зависимости от относительного радиуса ядра $t = c/a$ и его собственной деформации ϵ^T . Энергия выражена в единицах $G\epsilon^T b^3$, где G – модуль сдвига, b – величина вектора Бюргерса дислокационной петли. Показана ситуация, когда собственная деформация ядра $\epsilon^T > 0$. Расчеты представлены для проволоки радиуса $a = 50$ нм при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$ и радиусе ядра дислокации $r_c = b = 0.3$ нм.

границе между ядром и оболочкой в поперечном сечении нанопроволоки, анализировалось в работах [51, 53, 68, 69].

Энергия взаимодействия петли ДН с полем напряжений несоответствия в случае упруго однородной нанопроволоки определяется простой формулой [51, 53, 68]:

$$W = -2\pi b \int_0^c \sigma_{zz}^{(1)} r dr = \pm \frac{2\pi G(1 + \nu)b\epsilon^T a^2}{1 - \nu} t^2(1 - t^2), \tag{4.6}$$

где $\sigma_{zz}^{(1)}$ – осевое напряжение несоответствия в ядре (см. выражение (3.9с) при $g = 1$). Здесь полагаем, что $\epsilon^T > 0$, тогда верхний знак в формуле (4.6) относится к петле внедрения, а нижний знак – к петле вакансионного типа (рис. 7а). Все обозначения в формуле (4.6) соответствуют обозначениям, введенным ранее.

С использованием выражения (4.6) и формулы для энергии петли в цилиндре (3.8) авторы [51, 53, 68] построили зависимость изменения энергии ΔE проволоки со структурой “ядро/оболочка” при формировании в ней петли ДН и определили критические условия образования петли ДН. На рис. 7б контур $\Delta E = 0$ задает зависимость

критического несоответствия $\varepsilon_c^T(t)$. Было показано, что ε_c^T монотонно уменьшается с увеличением относительного радиуса $t = c/a$ и толщины оболочки $\Delta t = (a - c)/a$. Это означает, что при заданном несоответствии ε^T зарождение петли ДН становится энергетически выгодно, если t и Δt достигают некоторых критических значений. Для общего анализа ситуации особенно удобны диаграммы $\varepsilon_c^T(t)$, построенные численно для разных значений радиуса нанопроволоки a [51]. Кроме того, была рассчитана равновесная плотность бесконечного периодического ряда петель ДН, распределенных вдоль границы ядра и оболочки [51]. Полученные теоретические результаты хорошо соответствуют данным экспериментальных наблюдений.

С целью изучения энергетических барьеров, возникающих в процессе образования ДН, были рассмотрены [57, 70–72] модели зарождения малых (по сравнению с радиусами ядра и оболочки) прямоугольных призматических петель в разных местах поперечных и продольных сечений композитных нанопроволок: на границе раздела между ядром и оболочкой с расширением либо в ядро, либо в оболочку, и на свободной поверхности оболочки с расширением как вдоль поверхности, так и в глубину оболочки к ее границе с ядром.

Аналогичные модели зарождения малых прямоугольных призматических петель были развиты для сплошных композитных нанопроволок с призматическими ядрами, имеющими квадратное [57, 71], треугольное [57] и шестиугольное [57, 72] сечения.

4.3. Дислокации и дилатационные включения в нанопроволоке с аксиальной собственной деформацией. В настоящее время цилиндры с аксиальной собственной деформацией являются рабочей моделью для теоретического изучения релаксационных и других механо-физических процессов в гибридных полупроводниковых структурах, которые представляют собой проволоки, составленные из кристаллических слоев разных материалов.

4.3.1. Призматическая дислокационная петля вблизи границы дилатационного включения. Анализ упругих полей цилиндра с дилатационным включением, выходящим на свободную боковую поверхность (см. рис. 1а) [31], стимулировал изучение релаксационных процессов за счет образования призматических дислокационных петель вблизи границы включения (рис. 8а). В этом случае расчет аналогичен изложенным выше: сначала находится формула для энергии взаимодействия дислокационной петли с полем включения, затем определяется полное изменение энергии гибридной проволоки с появлением в ней дислокационной петли – ΔE .

Приведем формулу ΔE , когда размер включения настолько велик по сравнению с радиусом цилиндра, что дислокационная петля взаимодействует только с одной границей включения, находясь на расстоянии L от нее:

$$\Delta E = \frac{Gb^2at}{2(1-\nu)} \left(\ln \frac{1.08at}{r_c} - 2t \int_0^\infty \frac{t^2 \beta^2 I_0^{*2} + w I_1^{*2} - 2t\beta I_0^* I_1^* (w I_1 K_1 + \beta^2 I_0 K_0)}{\beta^2 I_0^2 - w I_1^2} d\beta + \right. \\ \left. + \frac{8(1+\nu)\varepsilon^* a}{b} \int_0^\infty \frac{t I_0^* I_1 - I_0 I_1^*}{\beta^2 I_0^2 - w I_1^2} \sin \frac{L\beta}{a} d\beta \right) \quad (4.7)$$

Здесь первые два слагаемых – это энергия дислокационной петли в цилиндре (3.8), последнее слагаемое – энергия взаимодействия петли с полем включения. Как и в формуле (3.8), здесь введены следующие обозначения $w = \beta^2 - 2\nu + 2$, $I_{0,1} = I_{0,1}(\beta)$, $I_{0,1}^* = I_{0,1}(t\beta)$, $I_{0,1}(\beta)$ и $I_{0,1}(t\beta)$ – модифицированные функции Бесселя 1-го рода, $K_{0,1} = K_{0,1}(\beta)$ – функция Макдональда, $t = c/a$, c – радиус петли, a – радиус цилиндра, r_c – радиус ядра дислокации.

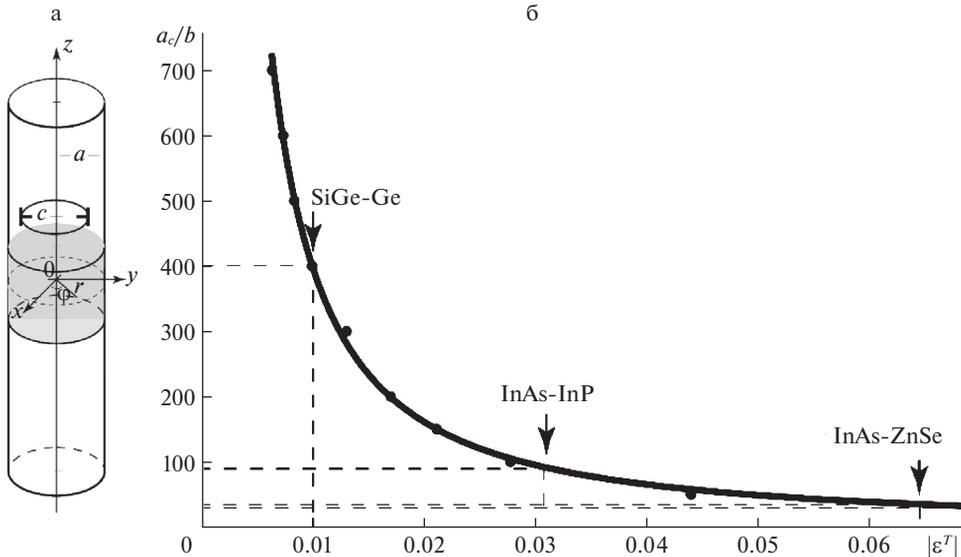


Рис. 8. Призматическая дислокационная петля вблизи дилатационного включения. (а) Геометрическая модель системы. Изображен случай, когда петля находится вне включения. (б) Зависимость критического радиуса цилиндра a_c , при котором образуется дислокационная петля, от параметра несоответствия ϵ^T между частями двухфазного цилиндра с одной границей несоответствия. Здесь b – величина вектора Бюргера дислокации. Стрелками отмечены значения несоответствия для конкретных комбинаций пар полупроводниковых материалов.

На основании кривых $\Delta E = 0$ в координатах (t, ϵ^T) (см. подобный график на рис. 76) для различных расстояний петли от границы включения L при фиксированном радиусе цилиндра a определяется минимальное значение ϵ_c^T , при котором петле энергетически выгодно появиться в цилиндре. Далее строится зависимость $\epsilon_c^T(a)$ и на ее основании обратная зависимость $a_c(\epsilon^T)$ (рис. 8б).

4.3.2. Взаимодействующие аксиальные дилатационные области. Упругая энергия цилиндра с двумя и более аксиальными областями исследовалась в работах [73, 74]. Было рассчитано взаимодействие дилатационных включений в цилиндре (в бесконечной упругой среде дилатационные включения не взаимодействуют) и энергии цилиндрической системы в целом при всех возможных позициях включений, в том числе и при наложении их друг на друга [74]. В статье [74] от перекрывающихся включений был сделан переход к гетерофазной границе, в которой параметр несоответствия ϵ^T ступенчато меняется вдоль оси цилиндра.

На рис. 9а показана цилиндрическая проволока с двумя равновеликими дилатационными включениями $h_1 = h_2 = h$, находящимися на расстоянии L друг от друга. Серия кривых взаимодействия таких включений, рассчитанная для различных размеров h и представленная на рис. 9б, демонстрирует притяжение включений при уменьшении дистанции между ними.

Заключение. Мы рассмотрели механические модели нанопроволок, содержащих дефекты – источники внутренних напряжений. Основной составной частью этих моделей является упругоизотропный бесконечный цилиндр из материала с линейным за-

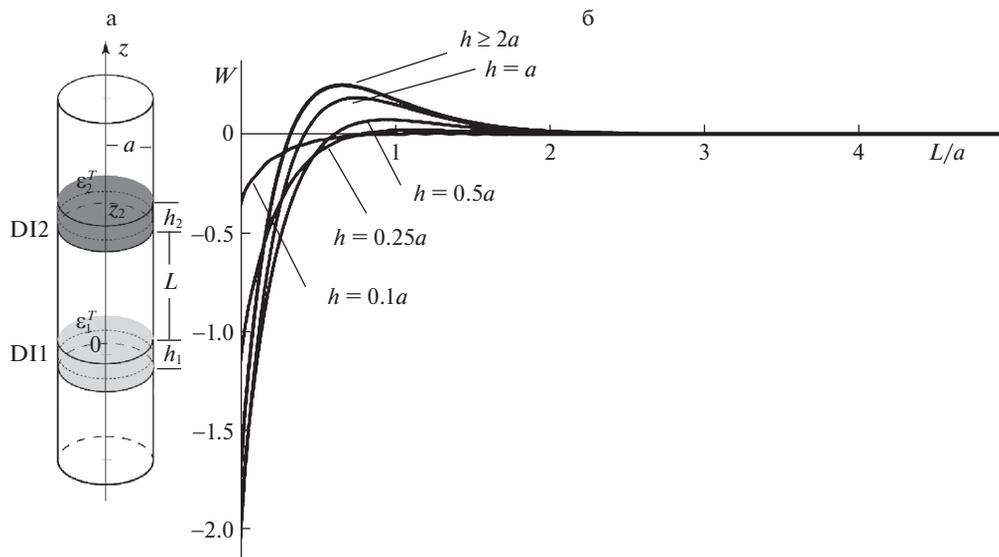


Рис. 9. Взаимодействующие включения в нанопроволоке. (а) геометрическая модель; (б) энергия взаимодействия равновеликих включений W как функция расстояния между ними L . Энергия дана в единицах $G(\epsilon^T)^2 a^3$, где G – модуль сдвига, ϵ^T – собственная деформация включений (решеточное несоответствие включения относительно материала цилиндра), a – радиус цилиндра. Расчеты сделаны для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$.

коном состояния Гука. Источники внутренних напряжений в цилиндре задаются с помощью тензора собственной дисторсии (или собственной деформации), локализованной на некоторой поверхности (в случае дислокаций и дисклинаций) или в некоторой области (в случае нанопроволок с радиальными или аксиальными дилатационными включениями).

Для прямолинейных дислокаций и дисклинаций, соосных оси цилиндра, приведены классические аналитические решения для функции напряжений и энергий. Для призматической дислокационной петли решение для энергии дано в виде интегралов от цилиндрических функций. Представлены результаты общего аналитического подхода для определения упругого поля и связанной с ним энергии деформации в упруго-изотропном круговом цилиндре с аксиально-неоднородной собственной деформацией, характеризующей дилатационные включения. Приведены формулы для энергий дилатационных включений конечного размера в цилиндре со скачкообразно и плавно меняющейся вдоль оси собственной деформацией. Показано, что для всех рассмотренных типов осевого распределения собственных деформаций энергия деформации в системе имеет максимум на зависимости от осевого размера (высоты) включения.

Исследовано взаимодействие источников собственной деформации в упругом цилиндре для физически мотивированных задач механики: дисклинаций, взаимодействующих с радиальными собственными деформациями в пентагональных нанопроволоках, прямолинейных дислокаций и призматических петель – с ядрами с несоответствием в нанопроволоках со структурой “ядро/оболочка”. Во всех этих случаях определены критические параметры: диаметр нанопроволоки и толщина оболочки, а также несоответствие, отвечающие выигрышу в упругой энергии в результате взаимодействия.

Решена задача об упругом взаимодействии дилатационных включений в гибридных нанопроволочных структурах, в которых материал включений обладает решеточным несоответствием по отношению к материалу нанопроволоки. В результате предсказан неизвестный ранее эффект притяжения квантовых дисков с дилатацией одного знака и показано, что величина этого эффекта определяется приведенной (по отношению к радиусу нанопроволоки) толщиной взаимодействующих включений.

В заключение отметим, что постановка обсуждаемых задач механики деформируемого твердого тела имеет смысл для любого диаметра цилиндра, но, однако, приобретает особое значение для нанопроволок с диаметром a в диапазоне от 10 до 100 нм. Такое значение диаметра возникает из простого соотношения $a = b/\varepsilon^T$, где b есть величина вектора Бюргера дислокаций в кристаллической решетке (для оценок обычно принимается $b \approx 0.3$ нм), а $\varepsilon^T = 10^{-3}-10^{-1}$ — типичная величина собственных деформаций, вызываемых решеточным несоответствием в полупроводниковых гетероструктурах [24] или возникающих в результате фазовых превращений [22].

А.Л. Колесникова и М.Ю. Гуткин благодарят за поддержку Министерство науки и высшего образования РФ (проект тематики научных исследований № 2019-1442) в рамках выполнения работ по изучению взаимодействия аксиальных неоднородностей в гибридных нанопроволочных структурах. А.Е. Романов благодарит программу “Приоритет 2030”, реализуемую Университетом ИТМО, за финансирование работ по теоретическому исследованию структурных дефектов в нанопроволоках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родунер Э. Размерные эффекты в наноматериалах. М.: Техносфера, 2010. 352 с.
2. Jia Ch., Lin Zh., Huang Y., Duan X. Nanowire electronics: from nanoscale to macroscale // Chem. Rev. 2019. V. 119. № 15. P. 9074–9135.
3. Quan L.N., Kang J., Ning C.-Zh., Yang P. Nanowires for photonics // Chem. Rev. 2019. V. 119. № 15. P. 9153–9169.
4. Gryaznov V.G., Trusov L.I. Size effects in micromechanics of nanocrystals // Progress Mater. Sci. 1993. V. 37. № 4. P. 289–401.
5. Goldstein R.V., Morozov N.F. Fundamental problems of solid mechanics in high technologies // Phys. Mesomech. 2012. V. 15. № 3–4. P. 224–231.
6. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов // ФТТ. 2002. Т. 44. № 12. С. 2158–2163.
7. Иванова Е.А., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф. К вопросу об определении параметров жесткости нанообъектов // ЖТФ. 2006. Т. 51. № 10. С. 74–80.
8. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф. Некоторые задачи наномеханики // Физ. Мезомех. 2013. V. 16. № 4. P. 67–73.
9. Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Proskura A.V., Morozov N.F., Romanov A.E. Elastic fields of straight wedge disclinations axially piercing bodies with spherical free surfaces // Int. J. Sol. Struct. 2016. V. 99. № 1. P. 82–96.
10. Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinder under certain practical systems of load // Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 1902. V. 198. № 300–311. P. 147–233.
11. Rahnata H., Shokrieh M.M. Axisymmetric equilibrium of an isotropic elastic solid circular finite cylinder // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24. № 4. P. 996–1029.
12. Liu X., Zhang H., Xia M. et al. A closed-form solution for stress analysis of hollow cylinder structure under non-uniform external load and its engineering application // J. Eng. Res. 2020. V. 8. № 1. P. 72–88.
13. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГТТЛ, 1955. 491 с.
14. Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiples // Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure. 1907. V. 24. № 4. P. 401–517.
15. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. A. 1957. V. 241. № 1226. P. 376–396.

16. Колесникова А.Л., Сорока Р.М., Романов А.Е. Дефекты в континуальной упругой среде: классификация, поля и физические аналоги // *Mater. Phys. Mech.* 2013. V. 17. № 1. P. 71–91.
17. Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E. Elastic models of defects in 3D and 2D crystals // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2017. V. 51. № 2. P. 130–148.
18. Кренер Е. Общая континуальная теория дислокаций и внутренних напряжений. М.: Мир, 1965. 104 с.
19. Де Вум Р. Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
20. Mura T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Dordrecht; Boston; Lancaster: Martinus Nijhoff Publ., 1987. 587 p.
21. Romanov A.E., Kolesnikova A.L. *Micromechanics of defects in functional materials* // *Acta Mech.* 2021. V. 232. № 5. P. 1901–1915.
22. Лободюк В.А., Эстрин Э.И. Мартенситные превращения. М.: Физматлит, 2009. 352 с.
23. Nowacki W. *Thermoelasticity*. Elsevier Ltd., 1986. 578 p.
24. Freund L.B., Suresh S. *Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution*. Cambridge: Univ. Press, 2004. 750 p.
25. Хурт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с.
26. Mura T. The continuum theory of dislocations // in: *Adv. in Mater. Res.* / Ed. by Herman H. New York: Intersci. Publ., 1968. V. 3. P. 1–108.
27. Mura T. Semi-microscopic plastic distortion and disclinations // *Arch. Mech.* 1972. V. 24. № 3. P. 449–456.
28. Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E. Analytical elastic models of finite cylindrical and truncated spherical inclusions // *Int. J. Sol. Struct.* 2018. V. 143. P. 59–72.
29. Кroupa F. Dislocation loops // in: *Theory of Crystal Defects. Proc. Summer School Held in Hrazany in Sept. 1964*. Prague: Czechosl. Acad. Sci., 1966. P. 275–316.
30. Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Dubrovskii V.G. Elasticity of axial nanowire heterostructures with sharp and diffuse interfaces // *Scripta Mater.* 2020. V. 176. P. 42–46.
31. Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu. Elasticity of a cylinder with axially varying dilatational eigenstrain // *Int. J. Sol. Struct.* 2021. V. 213. P. 121–134.
32. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
33. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
34. Eshelby J.D. Screw dislocations in thin rods // *J. Appl. Phys.* 1953. V. 24. № 2. P. 176–179.
35. Lubarda V.A. On the non-uniqueness of solution for screw dislocations in multiply connected regions // *J. Elasticity*. 1998. V. 52. № 3. P. 289–292.
36. Lubarda V.A., Markenscoff X. The stress field for a screw dislocation near cavities and straight boundaries // *Mater. Sci. Eng. A*. 2003. V. 349. № 1. P. 327–334.
37. Гуткин М.Ю., Шейнман А.Г. Упругое поведение винтовой дислокации в стенке полой нанотрубки // *ФГТ*. 2007. Т. 49. № 9. С. 1595–1602.
38. Романов А.Е. Граничные задачи теории упругости для дисклинаций. // в кн.: Экспериментальное исследование и теоретическое описание дисклинаций. Л.: ФТИ, 1984. С. 110–135.
39. Владимиров В.И., Романов А.Е. Дисклинации в кристаллах. Л.: Наука, 1986. 224 с.
40. Seeger A. Theorie der Gitterfehlstellen. In: *Handbuch der Physik*, V. VII, Part 2. Berlin: Springer, 1955. P. 383–665.
41. Dundurs J., Sendekyj G.P. Edge dislocation inside a circular inclusion // *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. V. 13. № 1. P. 141–147.
42. Eshelby J.D. A simple derivation of the elastic field of an edge dislocation // *Brit. J. Appl. Phys.* 1966. V. 17. № 9. P. 1131–1135.
43. Luo H.A., Chen Y. An edge dislocation in a three-phase composite cylinder model // *J. Appl. Mech.* 1991. V. 58. № 1. P. 75–86.
44. Qaissaune M.T., Santare M.H. Edge dislocation interacting with an elliptical inclusion surrounded by an interfacial zone // *J. Mech. Appl. Math.* 1995. V. 48. P. 465–482.
45. Moeini-Ardakani S.S., Gutkin M.Yu., Shodja H.M. Elastic behavior of an edge dislocation inside the wall of a nanotube // *Scripta Mater.* 2011. V. 64. № 8. P. 709–712.
46. Chen F.M., Chao C.K., Chen C.K. Interaction of an edge dislocation with a coated elliptic inclusion // *Int. J. Solids Struct.* 2011. V. 48. P. 1451–1465.

47. Jiang C.-P., Liu Y.-W., Xu Y.-L. Interaction of a screw dislocation in the interphase layer with the inclusion and matrix // *Appl. Math. Mech.* 2003. V. 24. P. 979–988.
48. Liu Y.W., Jiang C.P., Cheung Y.K. A screw dislocation interacting with an interphase layer between a circular inhomogeneity and the matrix // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. P. 1883–1898.
49. Honein E., Rai H., Najjar M.I. The material force acting on a screw dislocation in the presence of a multi-layered circular inclusion // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43. P. 2422–2440.
50. Wang X., Pan E., Roy A.K. New phenomena concerning a screw dislocation interacting with two imperfect interfaces // *J. Mech. Phys. Solids.* 2007. V. 55. P. 2717–2734.
51. Chernakov A.P., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E. Periodic array of misfit dislocation loops and stress relaxation in core-shell nanowires // *Int. J. Eng. Sci.* 2020. V. 156. № 10. Art. 103367.
52. Gutkin M.Yu., Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G. Misfit dislocations in wire composite solids // *J. Phys. Condens. Matter.* 2000. V. 12. № 25. P. 5391–5401.
53. Aifantis K.E., Kolesnikova A.L., Romanov A.E. Nucleation of misfit dislocations and plastic deformation in core/shell nanowires // *Phil. Mag.* 2007. V. 87. № 30. P. 4731–4757.
54. Zou W.N., He Q.C., Zheng Q.S. Inclusions in a finite elastic body // *Int. J. Sol. Struct.* 2012. V. 49. № 13. P. 1627–1636.
55. Krasnitskii S.A., Smirnov A.M., Gutkin M.Yu. Misfit stresses in a core-shell nanowire with core in the form of long parallelepiped // *J. Phys. Conf. Ser.* 2016. V. 690. Art. 012022.
56. Smirnov A.M., Krasnitskii S.A., Gutkin M.Yu. Generation of misfit dislocations in a core-shell nanowire near the edge of prismatic core // *Acta Mater.* 2020. V. 186. P. 494–510.
57. Krasnitskii S.A., Smirnov A.M., Gutkin M.Yu. Axial misfit stress relaxation in core-shell nanowires with polyhedral cores through the nucleation of misfit prismatic dislocation loops // *J. Mater. Sci.* 2020. V. 55. № 22. P. 9198–9210.
58. Gryaznov V.G., Heydenreich J., Kaprelov A.M. et al. Pentagonal symmetry and disclinations in small particles // *Cryst. Res. Techn.* 1999. V. 34. № 9. P. 1091–1119.
59. De Wit R. Partial disclinations // *J. Phys. C.* 1972. V. 5. № 5. P. 529–534.
60. Galligan J.M. Fivefold symmetry and disclinations // *Scripta Met.* 1972. V. 6. № 1. P. 161–144.
61. Trusov L.I., Tanakov M.Yu., Gryaznov V.G. et al. Relaxation of elastic stresses in overlaid microcrystals // *J. Cryst. Growth.* 1991. V. 114. № 1–2. P. 133–140.
62. Gryaznov V.G., Kaprelov A.M., Romanov A.E., Polonsky I.A. Channels of relaxation of elastic stresses in pentagonal nanoparticles // *Phys. Stat. Sol. (b).* 1991. V. 167. № 2. P. 441–450.
63. Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Yasnikov I.S. et al. Relaxation phenomena in disclinated microcrystals // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2017. V. 48. № 2. P. 170–178.
64. Kolesnikova A.L., Romanov A.E. Formation of mismatched layers in pentagonal nanorods // *Phys. Stat. Sol. RRL.* 2007. V. 1. № 6. P. 271–273.
65. Dorogin L.M., Vlassov S., Kolesnikova A.L. et al. Pentagonal nanorods and nanoparticles with mismatched shell layers // *J. Nanosci. Nanotechn.* 2010. V. 10. № 9. P. 6136–6143.
66. Raychaudhuri S., Yu E.T. Critical dimensions in coherently strained coaxial nanowire heterostructures // *J. Appl. Phys.* 2006. V. 99. № 11. P. 114308 (1–7).
67. Kavanagh K.L. Misfit dislocations in nanowire heterostructures // *Semic. Sci. Techn.* 2006. V. 25. № 2. P. 024006 (1–7).
68. Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G. Misfit dislocation loops in composite nanowires // *Phil. Mag.* 2004. V. 84. № 20. P. 2103–2118.
69. Colin J. Prismatic dislocation loops in strained core-shell nanowire heterostructures // *Phys. Rev. B.* 2010. V. 82. № 5. Art. 054118.
70. Gutkin M.Yu., Smirnov A.M. Initial stages of misfit stress relaxation in composite nanostructures through generation of rectangular prismatic dislocation loops // *Acta Mater.* 2015. V. 88. P. 91–101.
71. Krasnitskii S.A., Kolomoets D.R., Smirnov A.M., Gutkin M.Yu. Misfit stress relaxation in composite core-shell nanowires with parallelepipedal cores by rectangular prismatic dislocation loops // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 993. Art. 012021.
72. Krasnitskii S.A., Smirnov A.M., Mynbaev K.D. et al. Axial misfit stress relaxation in core-shell nanowires with hexagonal core via nucleation of rectangular prismatic dislocation loops // *Mater. Phys. Mech.* 2019. V. 42. № 6. P. 776–783.
73. Романов А.Е., Колесникова А.Л., Гуткин М.Ю., Бугров В.Е. Упругое взаимодействие квантовых дисков в гибридных QD/NW-структурах // *ПЖТФ.* 2022. Т. 48. Вып. 1. С. 39–42.
74. Kolesnikova A.L., Romanov A.E., Gutkin M.Yu., Bougrov V.E. Multi-step dilatational inclusion in an elastically isotropic cylinder // *Mater. Phys. Mech.* 2021. V. 47. № 5. P. 697–705.

Internal Stresses and Structural Defects in Nanowires

A .E. Romanov^{a,#}, A.L. Kolesnikova^{a,b}, and M. Yu. Gutkin^{a,b,c}

^a ITMO University, St. Petersburg, Russia

^b Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

^c Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

#e-mail: alexey.romanov@niuitmo.ru

The sources of internal stresses in nanowires, the model of which is an infinite elastically isotropic cylinder of circular cross section, are considered. Sources of internal stresses are defects that have their self-distortion (*eigenstrain*) and are localized either at a point, or on a line, or on a surface, or in a region inside the nanowire. Relations are given for the elastic fields and energies of some defects in nanowires, including straight dislocations and disclinations, dislocation loops, and dilatation inclusions. The interaction between sources of internal stresses in an elastic cylinder is analyzed. The role of the found solutions to the problems of solid mechanics in the interpretation of relaxation processes in pentagonal nanowires and hybrid semiconductor nanostructures with radial and axial heterointerfaces is discussed.

Keywords: nanowire, dislocation, disclination, lattice misfit, dilatation inclusion, mechanical stresses, elastic energy

REFERENCES

1. Roduner E. Dimensional Effects in Nanomaterials. Moscow: Technosfera, 2010. 352 p.
2. Jia Ch., Lin Zh., Huang Y., Duan X. Nanowire electronics: from nanoscale to macroscale // Chem. Rev., 2019, vol. 119, no. 15, pp. 9074–9135.
3. Quan L.N., Kang J., Ning C.-Zh., Yang P. Nanowires for photonics // Chem. Rev., 2019, vol. 119, no. 15, pp. 9153–9169.
4. Gryaznov V.G., Trusov L.I. Size effects in micromechanics of nanocrystals // Progress Mater. Sci., 1993, vol. 37, no. 4, pp. 289–401.
5. Goldstein R.V., Morozov N.F. Fundamental problems of solid mechanics in high technologies // Phys. Mesomech., 2012, vol. 15, no. 3–4, pp. 224–231.
6. Krivtsov A.M., Morozov N.F. On mechanical characteristics of nanocrystals // Phys. Solid State, 2002, vol. 44, no. 12, pp. 2260–2265.
7. Ivanova E.A., Indeitsev D.A., Morozov N.F. On the determination of rigidity parameters for nanoojects // Techn. Phys., 2006, vol. 51, no. 10, pp. 1327–1333.
8. Ereemeev V.A., Ivanova E.A., Morozov N.F. Some problems of nanomechanics // Phys. Mesomech., 2014, vol. 17, no. 1, pp. 23–29.
9. Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Proskura A.V., Morozov N.F., Romanov A.E. Elastic fields of straight wedge disclinations axially piercing bodies with spherical free surfaces // Int. J. Sol. Struct., 2016, vol. 99, no. 1, pp. 82–96.
10. Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinder under certain practical systems of load // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 1902, vol. 198, no. 300–311, pp. 147–233.
11. Rahnema H., Shokrieh M.M. Axisymmetric equilibrium of an isotropic elastic solid circular finite cylinder // Math. Mech. Solids, 2019, vol. 24, no. 4, pp. 996–1029.
12. Liu X., Zhang H., Xia M. et al. A closed-form solution for stress analysis of hollow cylinder structure under non-uniform external load and its engineering application // J. Eng. Res., 2020, vol. 8, no. 1, pp. 72–88.
13. Lurie A.I. Spatial Problems of the Theory of Elasticity. Moscow: GTTL, 1955. 491 p. (in Russian)
14. Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiples // Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure. Paris, 1907, vol. 24, no. 4, pp. 401–517.
15. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. A, 1957, vol. 241, no. 1226, pp. 376–396.
16. Kolesnikova A.L., Soroka R.M., Romanov A.E. Defects in a continuum elastic medium: classification, fields and physical analogues // Mater. Phys. Mech., 2013, vol. 17, no. 1, pp. 71–91.

17. *Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E.* Elastic models of defects in 3D and 2D crystals // *Rev. Adv. Mater. Sci.*, 2017, vol. 51, no. 2, pp. 130–148.
18. *Kroener E.* General Continuum Theory of Dislocations and Internal Stresses. Moscow: Mir, 1965. 104 p.
19. *De Wit R.* Continuum Theory of Disclinations. Moscow: Mir, 1977. 208 p.
20. *Mura T.* Micromechanics of Defects in Solids. Dordrecht; Boston; Lancaster: Martinus Nijhoff Publ., 1987. 587 p.
21. *Romanov A.E., Kolesnikova A.L.* Micromechanics of defects in functional materials // *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, no. 5, pp. 1901–1915.
22. *Lobodyuk V.A., Estrin E.I.* Martensitic Transformations. Moscow: Fizmatlit, 2009. 352 p. (in Russian)
23. *Nowacki W.* Thermoelasticity. Elsevier Ltd., 1986. 578 p.
24. *Freund L.B., Suresh S.* Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge: Univ. Press, 2004. 750 p.
25. *Hirt J., Lote I.* Theory of Dislocations. Moscow: Atomizdat, 1972. 600 p. (in Russian)
26. *Mura T.* The continuum theory of dislocations // in: *Adv. in Mater. Res. / Ed. by Herman H.* N.Y.: Intersci. Publ., 1968. vol. 3, pp. 1–108.
27. *Mura T.* Semi-microscopic plastic distortion and disclinations // *Arch. Mech.*, 1972, vol. 24, no. 3, pp. 449–456.
28. *Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E.* Analytical elastic models of finite cylindrical and truncated spherical inclusions // *Int. J. Sol. Struct.*, 2018, vol. 143, pp. 59–72.
29. *Kroupa F.* Dislocation loops // in: *Theory of Crystal Defects. Proc. Summer School Held in Hrazany in Sept. 1964.* Prague: Czechosl. Acad. Sci., 1966, pp. 275–316.
30. *Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Dubrovskii V.G.* Elasticity of axial nanowire heterostructures with sharp and diffuse interfaces // *Scripta Mater.*, 2020, vol. 176, pp. 42–46.
31. *Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu.* Elasticity of a cylinder with axially varying dilatational eigenstrain // *Int. J. Sol. Struct.*, 2021, vol. 213, pp. 121–134.
32. *Timoshenko S.P., Goodier J.* Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1975. 576 p. (in Russian)
33. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of a Deformable Solid Body. Moscow: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
34. *Eshelby J.D.* Screw dislocations in thin rods // *J. Appl. Phys.*, 1953, vol. 24, no. 2, pp. 176–179.
35. *Lubarda V.A.* On the non-uniqueness of solution for screw dislocations in multiply connected regions // *J. Elasticity*, 1998, vol. 52, no. 3, pp. 289–292.
36. *Lubarda V.A., Markenscoff X.* The stress field for a screw dislocation near cavities and straight boundaries // *Mater. Sci. Eng. A*, 2003, vol. 349, no. 1, pp. 327–334.
37. *Gutkin M.Yu., Sheinerman A.G.* Elastic behavior of a screw dislocation in the wall of a hollow nanotube // *Phys. Solid State*, 2007, vol. 49, no. 9, pp. 1672–1679.
38. *Romanov A.E.* Boundary problems of the theory of elasticity for disclinations // in: *Experimental Study and Theoretical Description of Disclinations.* Leningrad: FTI, 1984, p. 110–135. (in Russian)
39. *Vladimirov V.I., Romanov A.E.* Disclinations in Crystals. Leningrad: Nauka, 1986. 224 p. (in Russian)
40. *Seeger A.* Theorie der Gitterfehlstellen // in: *Handbuch der Physik, Vol. VII, Part 2,* Berlin: Springer, 1955. pp. 383–665.
41. *Dundurs J., Sendekyj G.P.* Edge dislocation inside a circular inclusion // *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 1, pp. 141–147.
42. *Eshelby J.D.* A simple derivation of the elastic field of an edge dislocation // *Brit. J. Appl. Phys.*, 1966, vol. 17, no. 9, pp. 1131–1135.
43. *Luo H.A., Chen Y.* An edge dislocation in a three-phase composite cylinder model // *J. Appl. Mech.*, 1991, vol. 58, no. 1, pp. 75–86.
44. *Qaissaanee M.T., Santare M.H.* Edge dislocation interacting with an elliptical inclusion surrounded by an interfacial zone // *J. Mech. Appl. Math.*, 1995, vol. 48, pp. 465–482.
45. *Moeini-Ardakani S.S., Gutkin M.Yu., Shodja H.M.* Elastic behavior of an edge dislocation inside the wall of a nanotube // *Scripta Mater.*, 2011, vol. 64, no. 8, pp. 709–712.
46. *Chen F.M., Chao C.K., Chen C.K.* Interaction of an edge dislocation with a coated elliptic inclusion // *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, pp. 1451–1465.
47. *Jiang C.-P., Liu Y.-W., Xu Y.-L.* Interaction of a screw dislocation in the interphase layer with the inclusion and matrix // *Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 24, pp. 979–988.

48. Liu Y.W., Jiang C.P., Cheung Y.K. A screw dislocation interacting with an interphase layer between a circular inhomogeneity and the matrix // *Int. J. Eng. Sci.*, 2003, vol. 41, pp. 1883–1898.
49. Honein E., Rai H., Najjar M.I. The material force acting on a screw dislocation in the presence of a multi-layered circular inclusion // *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 2422–2440.
50. Wang X., Pan E., Roy A.K. New phenomena concerning a screw dislocation interacting with two imperfect interfaces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2007, vol. 55, pp. 2717–2734.
51. Chernakov A.P., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E. Periodic array of misfit dislocation loops and stress relaxation in core-shell nanowires // *Int. J. Eng. Sci.*, 2020, vol. 156, no. 10, Art. 103367.
52. Gutkin M.Yu., Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G. Misfit dislocations in wire composite solids // *J. Phys. Condens. Matter.*, 2000, vol. 12, no. 25, pp. 5391–5401.
53. Aifantis K.E., Kolesnikova A.L., Romanov A.E. Nucleation of misfit dislocations and plastic deformation in core/shell nanowires // *Phil. Mag.*, 2007, vol. 87, no. 30, pp. 4731–4757.
54. Zou, W.N., He Q.C., Zheng Q.S. Inclusions in a finite elastic body // *Int. J. Sol. Struct.*, 2012, vol. 49, no. 13, pp. 1627–1636.
55. Krasnitskii S.A., Smirnov A.M., Gutkin M.Yu. Misfit stresses in a core-shell nanowire with core in the form of long parallelepiped // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 690, Art. 012022.
56. Smirnov A.M., Krasnitskii S.A., Gutkin M.Yu. Generation of misfit dislocations in a core-shell nanowire near the edge of prismatic core // *Acta Mater.*, 2020, vol. 186, pp. 494–510.
57. Krasnitskii S.A., Smirnov A.M., Gutkin M.Yu. Axial misfit stress relaxation in core-shell nanowires with polyhedral cores through the nucleation of misfit prismatic dislocation loops // *J. Mater. Sci.*, 2020, vol. 55, no. 22, pp. 9198–9210.
58. Gryaznov V.G., Heydenreich J., Kaprelov A.M. et al. Pentagonal symmetry and disclinations in small particles // *Cryst. Res. Techn.*, 1999, vol. 34, no. 9, pp. 1091–1119.
59. De Wit R. Partial disclinations // *J. Phys. C*, 1972, vol. 5, no. 5, pp. 529–534.
60. Galligan J.M. Fivefold symmetry and disclinations // *Scripta Met.*, 1972, vol. 6, no. 1, pp. 161–144.
61. Trusov L.I., Tanakov M.Yu., Gryaznov V.G. et al. Relaxation of elastic stresses in overlaid microcrystals // *J. Cryst. Growth*, 1991, vol. 114(1–2), pp. 133–140.
62. Gryaznov V.G., Kaprelov A.M., Romanov A.E., Polonsky I.A. Channels of relaxation of elastic stresses in pentagonal nanoparticles // *Phys. Stat. Sol. (b)*, 1991, vol. 167, no. 2, pp. 441–450.
63. Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Yasnikov I.S. et al. Relaxation phenomena in disclinated microcrystals // *Rev. Adv. Mater. Sci.*, 2017, vol. 48, no. 2, pp. 170–178.
64. Kolesnikova A.L., Romanov A.E. Formation of mismatched layers in pentagonal nanorods // *Phys. Stat. Sol. RRL*, 2007, vol. 1, no. 6, pp. 271–273.
65. Dorogin L.M., Vlassov S., Kolesnikova A.L. et al. Pentagonal nanorods and nanoparticles with mismatched shell layers // *J. Nanosci. Nanotechn.*, 2010, vol. 10, no. 9, pp. 6136–6143.
66. Raychaudhuri S., Yu E.T. Critical dimensions in coherently strained coaxial nanowire heterostructures // *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, no. 11, pp. 114308 (1–7).
67. Kavanagh K.L. Misfit dislocations in nanowire heterostructures // *Semic. Sci. Techn.*, 2006, vol. 25, no. 2, pp. 024006 (1–7).
68. Ovid'ko I.A., Sheinerman A.G. Misfit dislocation loops in composite nanowires // *Phil. Mag.*, 2004, vol. 84, no. 20, pp. 2103–2118.
69. Colin J. Prismatic dislocation loops in strained core-shell nanowire heterostructures // *Phys. Rev. B*, 2010, vol. 82, no. 5, Art. 054118.
70. Gutkin M.Yu., Smirnov A.M. Initial stages of misfit stress relaxation in composite nanostructures through generation of rectangular prismatic dislocation loops // *Acta Mater.*, 2015, vol. 88, pp. 91–101.
71. Krasnitskii S.A., Kolomoets D.R., Smirnov A.M., Gutkin M.Yu. Misfit stress relaxation in composite core-shell nanowires with parallelepipedal cores by rectangular prismatic dislocation loops // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, vol. 993, Art. 012021.
72. Krasnitskii S.A., Smirnov A.M., Mynbaev K.D. et al. Axial misfit stress relaxation in core-shell nanowires with hexagonal core via nucleation of rectangular prismatic dislocation loops // *Mater. Phys. Mech.*, 2019, vol. 42, no. 6, pp. 776–783.
73. Romanov A.E., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Bugrov V.E. Elastic interaction of quantum disks in hybrid QD/NW structures // *Techn. Phys. Lett.*, 2022, vol. 48, no. 1, pp. 34–36.
74. Kolesnikova A.L., Romanov A.E., Gutkin M.Yu., Bougrov V.E. Multi-step dilatational inclusion in an elastically isotropic cylinder // *Mater. Phys. Mech.*, 2021, vol. 47, no. 5, pp. 697–705.

УДК 539.3

**АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД С СУЩЕСТВЕННО
РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ С УЧЕТОМ
ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА
И ФОРМАЛИЗМА ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

© 2022 г. А. В. Мишин^{1,2,*}, В. М. Фомин^{1,2,**}

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

**e-mail: aleksey-mishin94@mail.ru*

***e-mail: fomin@itam.nsc.ru*

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 18.05.2022 г.

С целью аналитического описания гетерогенной среды в работе производится получение и анализ эффективных коэффициентов линейной теории упругости при произвольной размерности рассматриваемого пространства с учетом формализма обобщенной производной. Эффективные коэффициенты и их производные исследуются на наличие несущей фазы и структурного фазового перехода (перколяционных свойств) на всем интервале объемной концентрации. На основе проведенного анализа приводится сопоставление с результатами в рамках существующих подходов и с имеющимися данными по коллоидам, гранулированным средам и суспензиям.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, размерность пространства, стохастическая модель, структурный фазовый переход

DOI: 10.31857/S0032823522040105

1. Введение. Учет в полной мере геометрических и физических особенностей фаз при аналитическом моделировании распространения поля по гетерогенной среде остается нерешенной проблемой. Одной из подзадач в рамках данной проблемы является определение условий на несущую фазу и на существенное изменение свойств анализируемой неоднородной системы (структурный фазовый переход) при существенно различных физических свойствах фаз на всем интервале объемных концентраций. Это имеет отношение, например, к переходу в коллоидах, суспензиях и гранулированных средах к макроскопически связанному распространению поля упругости (вязкоупругости) по дисперсной фазе, при котором происходит существенное изменение поведения системы [1].

Начиная с работ Релея [2], Максвелла [3], Эйнштейна [4], к настоящему моменту создан ряд континуальных подходов по моделированию гетерогенных сред: метод условных моментов [5, 6], вариационный метод [7–10], метод самосогласованного поля [10–14] и подход Эшелби [10, 15] в рамках него, ряд статистических методов, базирующихся на функции Грина [6, 16, 17], сингулярное и обобщенное сингулярное приближение [10], гипотеза сильной изотропии [10, 18], теория смесей [19], анализ периодических сред [20], модель Понте Кастанеды, Уиллиса [21], модель Мори, Танаки [22],

гомогенизированная модель [23]. Широкий математический аппарат, содержащийся в представленных подходах, по большей части направлен на получение из исходных уравнений осредненных с входящими в них эффективными коэффициентами переноса, отображающими континуальное “размазывание” истинной среды. При этом границы разделов фаз либо не учитываются (соответственно и размеры), либо их учет производится с введением упрощений (например, рассмотрение периодической структуры или введение феноменологических коэффициентов). Подход теории смесей [19] позволяет получить осредненные уравнения для каждой из фаз, учитывая конфигурацию внутренних границ, но при этом в рамках данного подхода отсутствует алгоритм поиска эффективных коэффициентов переноса.

В работе [24] для анализа упругих свойств гетерогенной среды использован математический формализм обобщенной производной, который наличием сингулярной составляющей отображает поведение полей на внутренних границах неоднородной среды, разделяющих фазы с разными физическими свойствами. На основе формализма обобщенной производной и пространственного осреднения в [24] получена пространственная теорема осреднения [19], являющаяся фундаментом теории смесей. Для получения эффективных коэффициентов в данной работе использован метод условных моментов, базирующийся на формализме функций Грина, условном осреднении и преобразовании Фурье. Модифицированный обобщенными производными оператор в исходной модели линейной теории упругости приводит к функции Грина, учитывающей микроструктурные особенности гетерогенной среды. В результате чего итоговые эффективные коэффициенты упругости интегрально отображают микроструктуру системы.

В настоящей работе проводится обобщение эффективных коэффициентов линейной теории упругости работы [24] на случай распространения поля упругости в пространстве заданной размерности. Данный механизм подразумевает эффективное число внутренних степеней свободы, определяющих распространение поля упругости по гетерогенной среде (определенной геометрической структуры, сформированной из фаз с разными физическими свойствами). В работе проводится анализ полученных эффективных коэффициентов переноса в частных случаях на всем интервале объемной концентрации при существенно различающихся упругих свойствах фаз.

2. Постановка задачи. Исследуем стационарное распределение упругого поля в микрооднородной двухфазной среде. Структуру среды считаем обладающей статистически однородными и изотропными свойствами и заполняющей все пространство. В качестве исходной модели используем стационарную изотропную модель линейной теории упругости в форме

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij} &= 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta) \\ \nabla_j (\lambda_{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) &= 0 \\ \lambda_{ij\alpha\beta} &= \left(K - \frac{(n-1)}{n} \mu \right) \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (n-1) \mu (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где параметр n характеризует размерность исследуемого пространства. Исследуемые поля напряжений σ_{ij} , деформаций $\epsilon_{\alpha\beta}$ и смещений u_α , а также тензор упругости $\lambda_{ij\alpha\beta}$, содержащий объемный K и сдвиговой μ упругие модули системы, рассматриваются в пространстве размерности n . Тензор $\lambda_{ij\alpha\beta}$ имеет такой вид, чтобы девиаторная составляющая, характеризуемая сдвиговым модулем μ , имела нулевой след, и объемный модуль K определялся шаровой составляющей. При этом учитываем соотношения для символов Кронекера δ_{ij} , $\delta_{ij} \delta_{ij} = n$.

Координатами в модели (2.1) выступают микроточки, в каждой из которых находится одна из фаз со своими физическими свойствами. Значения модулей K и μ при этом зависят от фазы, находящейся в точке. Аналогично и значения исследуемых полей u_α , $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и σ_{ij} зависят от фазы, находящейся в микроточке.

Для учета микроструктурных особенностей фаз (физических и геометрических) по аналогии с работой [24] используем формализм обобщенной производной

$$\nabla_j u_i(\mathbf{r}) = \partial_j u_i(\mathbf{r}) + \sum_k \int_{S_k} [u_i]_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) ds_j, \quad (2.2)$$

где помимо обычной составляющей производной содержится сингулярная составляющая, которая выражается в подынтегральных выражениях конфигурацией дельта-функций на поверхностях разрыва S_k , т.е. согласно формуле (2.1) каждой точке \mathbf{x} поверхности разрыва соответствует своя дельта-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x})$. Запись $[u_i]_{\mathbf{x}} = u_i(\mathbf{x} + \mathbf{0}) - u_i(\mathbf{x} - \mathbf{0})$ характеризует скачок смещений фаз на границах разрыва S_k . В системе уравнений (2.1) обычные производные заменяются на обобщенные (2.2). При этой модификации в исходных дифференциальных уравнениях появляется составляющая, отображающая поведение поля на внутренних границах, и физическая суть анализируемых уравнений (закон сохранения и закон Гука) не нарушается [24].

Систему (2.1) следует дополнить граничными условиями на бесконечно удаленной границе и на конфигурации внутренних границ [24].

3. Получение эффективных коэффициентов в пространстве заданной размерности методом условных моментов. На основе метода условных моментов [5] получим из исходной модели (2.1) осредненный закон Гука $\sigma_{ij} = \langle \lambda_{ij\alpha\beta}^* \rangle \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$, содержащий в эффективном

тензоре упругости $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ искомые эффективные коэффициенты K^* , μ^* . Тензор $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ структурно аналогичен тензору $\lambda_{ij\alpha\beta}$ с точностью до замен $K \rightarrow K^*$, $\mu \rightarrow \mu^*$. Помощью символов Кронекера δ_{ij} , ($\delta_{ij}\delta_{ij} = n$), и тензоров $\lambda_{ij\alpha\beta}$ и $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ информация о размерности пространства n отображена в исходной модели (2.1) и возникает в ходе ее преобразований.

Итоговое выражение по вычислению эффективных коэффициентов упругости в методе условных моментов [5] имеет вид

$$\lambda_{jk\alpha\beta}^* = \langle \lambda_{jk\alpha\beta} \rangle + c_1 c_2 \lambda'_{jkmn} (I_{\gamma\delta mn} + R_{\gamma\delta\rho q} (\lambda_{\rho qmn}^* - \lambda''_{\rho qmn}))^{-1} R_{\gamma\delta r\nu} \lambda'_{r\nu\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{jk\alpha\beta} \rangle &= c_1 \lambda^1_{jk\alpha\beta} + c_2 \lambda^2_{jk\alpha\beta}, & \lambda'_{ij\alpha\beta} &= \lambda^1_{ij\alpha\beta} - \lambda^2_{ij\alpha\beta} \\ \lambda''_{ij\alpha\beta} &= c_2 \lambda^1_{ij\alpha\beta} + c_1 \lambda^2_{ij\alpha\beta}, & c_1 + c_2 &= 1, & I_{ij\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \end{aligned}$$

$$R_{ijpq}(\mathbf{0}) = -\int \partial_q \partial_{(j} \langle G_{i)p} \rangle(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

В полученных формулах $\varphi(\mathbf{r})$ – корреляционная функция геометрии структуры, c_1 , c_2 – объемные концентрации фаз, $\langle G_{ip} \rangle$ – осредненная тензорная функция Грина, $2\partial_{(j} \langle G_{i)p} \rangle = \partial_j \langle G_{ip} \rangle + \partial_i \langle G_{jp} \rangle$. Для нахождения $\lambda_{jk\alpha\beta}^*$ следует вычислить интегралы R_{ijpq} , содержащие вторые производные от тензорной функции Грина. Исходя из этого, саму тензорную функцию Грина находить не нужно, имеют смысл лишь сингулярные составляющие от действия на нее вторых производных. Выражение на осредненный тензор Грина [24] имеет вид

$$\lambda_{ijmi}^* \partial_j \partial_l \langle G_{mp} \rangle(\mathbf{r}) = T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip} \sum_k \rho_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_k), \quad (3.2)$$

где член $T_{ip}(\mathbf{r})$ характеризует источник, осредненно учитывающий микроструктурные особенности системы. Точки \mathbf{x}_k и функции ρ_k отражают геометрические свойства структуры и физические свойства фаз K_1, μ_1, K_2, μ_2 .

Представленное уравнение для источника направлено выразить переходный слой. Если производные рассматриваются не в обобщенном смысле, то источник имеет вид как в работе [5]: $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r})$ и учет сингулярной составляющей от действия вторых производных на функцию Грина $\partial_q \partial_{l_j} \langle G_{ip} \rangle(\mathbf{r}) \propto \delta(\mathbf{r})$ приведет при этом к потере информации о микроструктуре системы $\Phi(\mathbf{0}) = 1$ при вычислении интегралов $R_{ijpq}(\mathbf{0})$.

Преобразуем функцию Грина (3.2) к Фурье-пространству, используя источник в виде $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r})$, а затем обобщим его на случай источника в общем виде (3.2). Имеем выражение для образа функцию Грина

$$G_{ip}(\mathbf{k}) = -\frac{2}{n-1} \frac{\delta_{ip}}{\mu^*} \frac{1}{k^2} + \frac{\frac{2}{n-1} K^* + \frac{n-2}{n} \mu^*}{\mu^* \left(K^* + \frac{(n-1)^2}{n} \mu^* \right)} \frac{a_i a_p}{k^2}, \quad (3.3)$$

где $a_i = k_i/k$, k_i — координаты в Фурье-образе. Выполнение обратного преобразования Фурье от (3.3) приводит к выражению

$$\langle G_{ip} \rangle(\mathbf{r}) = \frac{2}{n-1} \frac{\delta_{ip}}{\mu^*} J(\mathbf{r}) + \frac{\frac{2}{n-1} K^* + \frac{n-2}{n} \mu^*}{\mu^* \left(K^* + \frac{(n-1)^2}{n} \mu^* \right)} \partial_i \partial_p H(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

где $J(\mathbf{r})$ и $H(\mathbf{r})$ фундаментальные функции для изотропного случая, содержащие информацию о размерности пространства (для случая размерности $n = 3$ с точностью до констант это функции $1/r$ и r соответственно). Продифференцируем дважды полученное выражение (3.4):

$$\partial_k \partial_q \langle G_{ip} \rangle(\mathbf{r}) = \frac{2}{n-1} \frac{\delta_{ip}}{\mu^*} \partial_k \partial_q J(\mathbf{r}) + \frac{\frac{2}{n-1} K^* + \frac{n-2}{n} \mu^*}{\mu^* \left(K^* + \frac{(n-1)^2}{n} \mu^* \right)} \partial_i \partial_p \partial_k \partial_q H(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

Для нахождения эффективных коэффициентов нужно знать действие вторых производных на функцию $\langle G_{ip} \rangle(\mathbf{r})$, что эквивалентно знанию функций $\partial_k \partial_q J(\mathbf{r})$ и $\partial_i \partial_p \partial_k \partial_q H(\mathbf{r})$. В силу изотропии сингулярные составляющие слагаемых $\partial_k \partial_q J$, $\partial_i \partial_p \partial_k \partial_q H$ принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_q J &= A \delta(\mathbf{r}) \delta_{kq} \\ \partial_i \partial_p \partial_k \partial_q H &= B \delta(\mathbf{r}) (\delta_{ip} \delta_{kq} + \delta_{ik} \delta_{pq} + \delta_{iq} \delta_{pk}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где A и B неизвестные параметры, не зависящие от упругих параметров в силу сопоставления выражений (3.4) и (3.5). Оба параметра находятся подстановкой (3.5)–(3.6) в (3.2) при $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r})$ и с использованием соотношения $\delta_{ip} \delta_{ip} = n$, что приводит к равенству

$$An + \frac{n-1}{n} \frac{K^* + \frac{n-2}{n} \mu^*}{\mu^*} (A + B(n+2)) = 1$$

С учетом независимости A и B от упругих параметров, выделяются два уравнения, решение которых принимает вид $A = \frac{1}{n}$, $B = -\frac{1}{n^2 + 2n}$.

При источнике из уравнения (3.2) выражение (3.3) для $\langle G_{ip} \rangle(\mathbf{k})$ будет пропорционально члену $M = \int \sum_l \rho_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_l) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ (вместо $\int \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = 1$). При обратном преобразовании Фурье функции $\langle G_{ip} \rangle(\mathbf{k})$ вместо функций $J(\mathbf{r})$ и $H(\mathbf{r})$ будут присутствовать суммы функций $\sum_k \rho_k J(\mathbf{r} - \mathbf{x}_k)$ и $\sum_k \rho_k H(\mathbf{r} - \mathbf{x}_k)$. Действие вторых производных на функцию $\langle G_{ip} \rangle(\mathbf{r})$ при этом приведет к пропорциональности $\sum_l \rho_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_l)$, не меняющей коэффициенты в (3.5), что с учетом вида уравнения (3.2) не изменит результат для параметров A и B .

Зная значение тензорной функции $\partial_k \partial_q \langle G_{ip} \rangle(\mathbf{r})$, вычислим интегралы $R_{jkpq}(0)$. Имеем равенство

$$R_{jkpq} = -\gamma \frac{1}{n} \frac{2}{n-1} \frac{1}{\mu^*} I_{jkpq} + \gamma \frac{1}{n^2 + 2n} \frac{\frac{2}{n-1} K^* + \frac{n-2}{n} \mu^*}{\mu^* \left(K^* + \frac{(n-1)^2}{n} \mu^* \right)} (\delta_{jk} \delta_{pq} + 2I_{jkpq}),$$

где, как и в работе [24], использовано обозначение

$$\gamma = \int \sum_l \rho_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_l) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{3.7}$$

Случай $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r})$ приводит к $\gamma = 1$ и не отображает внутренние границы фаз. Отметим, что если внутренние границы фаз приводят суммарно к нулевому вкладу, то тогда также следует результат $\gamma = 1$.

Подставляя найденное выражение для R_{jkpq} в формулу по вычислению эффективных коэффициентов (3.1), приведем итоговый результат в виде

$$K^* = c_1 K_1 + c_2 K_2 - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + K^* \frac{1-\gamma}{\gamma} + \mu^* (n-1) \frac{n-1}{\gamma n}} \tag{3.8}$$

$$\mu^* = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \frac{\mu^* \left(\left(\frac{n}{2\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) K^* + \frac{(n-1)}{2\gamma} \left(n+1 - 2\gamma - \frac{2}{n} \right) \mu^* \right)}{K^* + (n-1) \mu^*}}$$

4. Сопоставление с существующими подходами. При $\gamma = 1$ и $n = 3$ полученные эффективные коэффициенты эквивалентны результату в рамках метода самосогласованного поля [10–14] и подходу Эшелби [10, 15]. В рамках данной модели не учитывается переходный слой между включением и матрицей, обладающей искомыми эффективными свойствами (эффективными свойствами учитывается коллективное взаимодействие), что имеет отношение к пренебрежению границами раздела фаз. В случае $\gamma = 1$ внутренние границы раздела фаз не учитываются, т.е. отсутствует введение формализма обобщенной производной [24]. Если в (3.8) положить $\gamma = 1$ и $n = 3$, то следует ре-

зультат, полученный на основе гипотезы сильной изотропии [10, 18]. В данном методе поле упругости в пределах каждого компонента сразу полагается однородным, что также не учитывает внутренние границы раздела фаз. Метод условных моментов [5, 6], вариационный метод [7–10], ряд статистических методов, базирующихся на функции Грина [6, 16, 17], обобщенное сингулярное приближение [10] содержат разный математический аппарат, но объединены гипотезой о теле сравнения. Если параметры тела сравнения K_c, μ_c положить равными искомым эффективным параметрам $K_c = K^*$, $\mu_c = \mu^*$, то полученный результат также будет эквивалентен формулам (3.8) при $\gamma = 1$ и $n = 3$. В вариационном методе при равенстве $K_c = K^*$, $\mu_c = \mu^*$ получаются эффективные коэффициенты, а не вилка Хашина–Штрикмана.

5. Анализ эффективных коэффициентов. Проведем анализ эффективных коэффициентов в частном случае при $\gamma = 1$, $n = 3$. Исследуемые параметры μ^* , K^* в формулах (3.8) являются неявными и взаимозависимыми, но сводятся к уравнению четвертой степени на функцию μ^*

$$\begin{aligned}
 & (\mu^*)^2 \left[a_1 (\mu^*)^2 + a_2 \mu^* + a_3 \right] + a_4 \mu^* + a_5 = 0 \\
 & a_1 = \frac{32}{3}, \quad a_5 = -6\mu_1 \mu_2 K_1 K_2 \\
 & a_2 = (12c_1 + 8c_2) K_1 + (8c_1 + 12c_2) K_2 + \left(16c_2 - \frac{32}{3} c_1 \right) \mu_1 + \left(16c_1 - \frac{32}{3} c_2 \right) \mu_2 \\
 & a_3 = 9K_1 K_2 - 16\mu_1 \mu_2 + 12(K_2 \mu_2 - K_1 \mu_1)(c_1 - c_2) + 8(K_1 \mu_2 - K_2 \mu_1)(c_1 - c_2) \\
 & a_4 = -K_1 K_2 ((9c_1 - 6c_2) \mu_1 + (9c_2 - 6c_1) \mu_2) - \\
 & \quad - \mu_1 \mu_2 ((8c_1 + 12c_2) K_1 + (12c_1 + 8c_2) K_2)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Проанализируем случай с фазой, обладающей нулевыми упругими параметрами фазы $\mu_1, K_1 = 0$, т.е. “пустое” пространство. При этом имеем $a_4 = 0$ и $a_5 = 0$. Последующее деление уравнения (5.1) на $(\mu^*)^2 \neq 0$ приводит к решению квадратного уравнения

$$\begin{aligned}
 \mu^* = \frac{3}{64} \sqrt{ \left((12c_2 + 8c_1) K_2 + \left(16c_1 - \frac{32}{3} c_2 \right) \mu_2 \right)^2 - 4 \frac{32}{3} 12\mu_2 K_2 (c_1 - c_2) - } \\
 - \frac{3}{64} \left((12c_2 + 8c_1) K_2 + \left(16c_1 - \frac{32}{3} c_2 \right) \mu_2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Выражение (5.2) описывает поведение системы при концентрации твердой фазы $c_2 > 0.5$. Решением уравнения (5.1) при концентрации $c_2 < 0.5$ является $\mu^* = 0$. Эффективный объемный модуль K^* также обращается в нуль при $c_2 < 0.5$. Точка $c_2 = 0.5$ является предельной (переходной) объемной концентрацией. В силу уравнения (5.1) при концентрации $c_2 > 0.5$ твердая фаза является связанной $\mu^* \sim \mu_2$, $K^* \sim K_2$, а при концентрации $c_1 > 0.5$ связанной является фаза “пустого” пространства $\mu^* = K^* = 0$, т.е. при концентрации $c_2 < 0.5$ связанная проводимость поля упругости отсутствует. Используемое понятие связности определяет несущую фазу, т.е. характеризует возможность макроскопической передачи поля упругости по структуре определенной фазой. На интервале $c_2 > 0.5$ твердая фаза является несущей и определяет передачу поля упругости по структуре, а на интервале $c_2 < 0.5$ несущей фазой является “пустое” пространство. Описанную ситуацию иллюстрирует рис. 1.

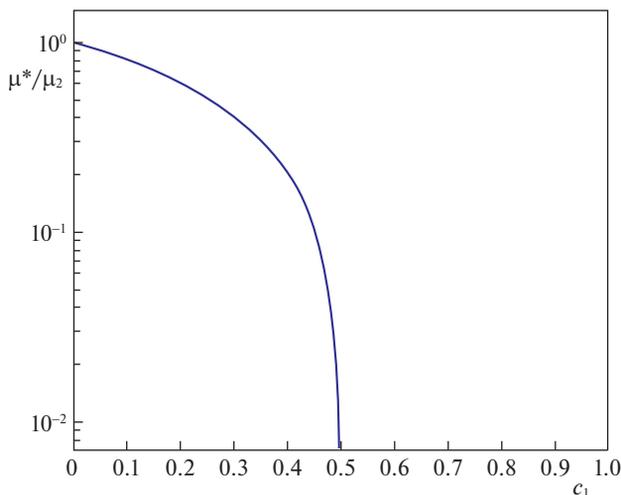


Рис. 1. График зависимости эффективного модуля сдвига, нормированного на модуль сдвига твердой фазы 2 от объемной концентрации фазы “пустого” пространства 1.

Физической интерпретацией системы с $K_1, \mu_1 = 0$ может выступать пористый каркас. При концентрации $c_2 < 0.5$ формирующая каркас твердая фаза “неустойчива” к макроскопически связанному распространению упругого поля $K^* = \mu^* = 0$, исходя из чего каркас не существует (рис. 1). Тогда при концентрации $c_2 = 0.5$ согласно проведенному анализу при $\gamma = 1$ и $n = 3$ происходит перколяция поля упругости по твердой фазе в структуре.

Характерное поведение эффективного модуля сдвига при ненулевых, но достаточно малых упругих коэффициентах фазы “пустого” пространства $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ представлено на рис. 2. Фазой 1 в данном случае может являться газ, жидкость, твердая фаза с существенно меньшими параметрами.

При наличии у фазы 1 ненулевых, но относительно малых коэффициентов упругости $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ на интервале $c_2 > 0.5$ с точностью до отношения упругих характеристик фаз $\mu_1/\mu_2, K_1/K_2, \mu_1/K_2, K_1/\mu_2 \ll 1$ эффективный модуль сдвига определяется выражением (5.2). При концентрации $c_1 > 0.5$ эффективный модуль сдвига определяется выражением

$$\mu^* \approx \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(9c_2 - 6c_1)K_1 + (8c_2 + 12c_1)\mu_1}{12(c_1 - c_2)} \right)^2} + \frac{2\mu_1 K_1}{c_1 - c_2} + \frac{(9c_2 - 6c_1)K_1 + (8c_2 + 12c_1)\mu_1}{24(c_1 - c_2)}, \quad (5.3)$$

которое является следствием квадратного уравнения, полученного из уравнения (5.1) делением последнего на $\mu_2 K_2$ и отбрасыванием малых слагаемых $\mu_1/\mu_2, K_1/K_2, \mu_1/K_2, K_1/\mu_2$ с учетом свойственной интервалу $c_1 > 0.5$ пропорциональности $\mu^* \sim \mu_1, K_1$. При увеличении относительной разности упругих коэффициентов фаз $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ эффективные коэффициенты μ^*, K^* по обе стороны от критической концентрации $c_2 = c_{2crit} = 0.5$ стремятся к асимптотическим формулам (5.2), (5.3). Устремляя ненулевые K_1, μ_1 к нулю при $c_2 < 0.5$ исходя из выражения (5.3) следует значение $\mu^* = 0$. Аналогично для K^* . Согласно выражениям (5.2) и (5.3) на интервале $c_2 > 0.5$ несущей фазой является твердая $\mu^*, K^* \sim \mu_2, K_2$, а на интервале $c_1 > 0.5$ несущей фазой являет-

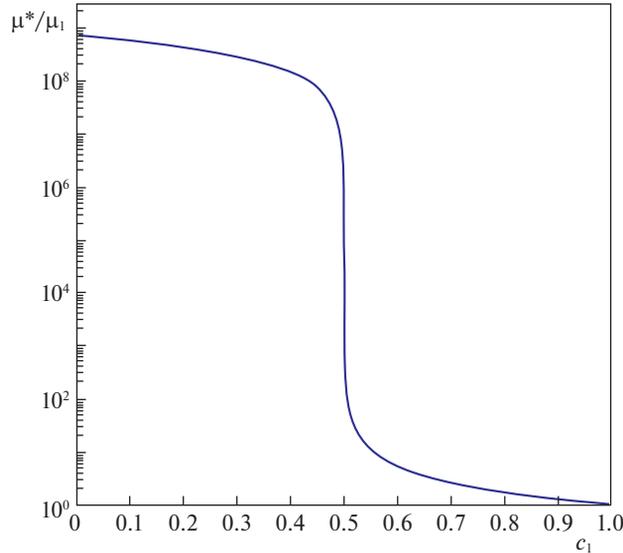


Рис. 2. График зависимости эффективного модуля сдвига, нормированного на модуль сдвига фазы 1 от объемной концентрации фазы 1.

ся фаза “пустого” пространства μ^* , $K^* \sim \mu_1$, K_1 . В окрестности точки $c_{2crit} = 0.5$ происходит резкое увеличение эффективных упругих свойств от μ^* , $K^* \sim \mu_1$, K_1 до μ^* , $K^* \sim \mu_2$, K_2 (проанализируем это детальнее ниже). То есть при концентрации $c_2 = c_{2crit} = 0.5$ начинается макроскопически связанное распространение исследуемого поля упругости по твердой фазе в структуре (эффект перколяции). Переход между несущими фазами в точке $c_2 = c_{2crit} = 0.5$ интерпретируем как структурный фазовый переход. Соответствующее переходное поведение иллюстрирует рис. 2.

Исследовав поведение эффективного сдвигового модуля μ^* по обе стороны от критической точки, проанализируем его поведение непосредственно в области перехода $c_2 \sim c_{2crit}$. Значение μ^* в области перехода оценим как $\mu_1 \ll \mu^* \ll \mu_2$. При этом считаем, что $K_1 \sim \mu_1 \ll K_2 \sim \mu_2$. Базируясь на исходном выражении (5.1), проведем оценки слагаемых:

$$a_5 \sim (\mu_1 \mu_2)^2, \quad a_4 \mu^* \sim (\mu_2)^2 \mu_1 \mu^*, \quad a_3 (\mu^*)^2 \sim \mu_1 \mu_2 (\mu^*)^2 + (c_1 - c_2) (\mu_2 \mu^*)^2, \\ a_2 (\mu^*)^3 \sim \mu_2 (\mu^*)^3, \quad a_1 (\mu^*)^4 \sim (\mu^*)^4$$

Основываясь на представленных оценках, выделим выражения одного порядка: $(\mu_2)^2 \mu_1 \mu^* \sim (c_1 - c_2) (\mu_2 \mu^*)^2 \sim \mu_2 (\mu^*)^3$. Малость остальных отброшенных слагаемых подтвердится далее. С учетом проведенных оценок выражение (5.1) сводится к виду

$$b_1 \mu_2 (\mu^*)^3 + b_2 (c_1 - c_2) (\mu_2)^2 (\mu^*)^2 - b_3 (\mu_2)^2 \mu_1 \mu^* \approx 0, \quad (5.4)$$

где с учетом рассмотрения переходной области $c_2 \sim c_{2crit}$ коэффициенты $b_i \sim 1$ (точный вид этих коэффициентов можно выписать, но это не представляет концептуальной необходимости). Выпишем решение данного уравнения

$$\mu^* \approx -\frac{b_2 \mu_2 (c_1 - c_2)}{2b_1} + \sqrt{\left(\frac{b_2 \mu_2 (c_1 - c_2)}{2b_1}\right)^2 + \frac{b_3 \mu_1 \mu_2}{b_1}} \quad (5.5)$$

Второе решение не является физическим. Проведем исследование выражения (5.5) путем разложения подкоренного выражения при различных соотношениях параметров:

$$\mu^* \sim \begin{cases} \mu_1 (c_1 - c_2)^{-1}, & (c_1 - c_2) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ \sqrt{\mu_1 \mu_2} - \mu_2 (c_1 - c_2) + \mu_2 (c_1 - c_2)^2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, & (c_1 - c_2) \ll \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ \mu_2 (c_2 - c_1), & (c_2 - c_1) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \end{cases} \quad (5.6)$$

При соотношении $(c_1 - c_2) \ll \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ учтены первые три основные слагаемые (при необ-

ходимости ряд можно продолжить). Для соотношений $|c_1 - c_2| \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ учтены только

соответствующие основные слагаемые. Величина $\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ выражает характерный масштаб

переходной области. В связи с этим введем параметр $\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$, выражающий ε -окрест-

ность критической точки и возникающий как следствие конечного отношения упру-

гих параметров фаз μ_1/μ_2 (а также отношений K_1/K_2 , μ_1/K_2 , K_1/μ_2). Исходя из прове-

денной оценки (5.6) видно, что в критической точке $\mu^* \sim \sqrt{\mu_1 \mu_2}$. И при переходе через

критическую точку эффективный модуль μ^* совершает существенный рост от значе-

ния $\mu^* \ll \sqrt{\mu_1 \mu_2}$, до значения $\mu^* \gg \sqrt{\mu_1 \mu_2}$. В приведенных соотношениях (5.4)–(5.6) с

учетом равенства $c_1 + c_2 = 1$ разность $(c_1 - c_2)$ можно заменить на $(c_{2crit} - c_2)$ с точно-

стью до коэффициента $(c_{2crit})^{-1} = 2$. Следует отметить, что согласно (5.6) по разные

стороны от критической точки имеют место разные асимптотики, меняющиеся от

$\mu^* \sim \mu_1 (c_{2crit} - c_2)^{-1}$ до $\mu^* \sim \mu_2 (c_2 - c_{2crit})^1$. Эти же асимптотики предсказываются

асимптотическими выражениями (5.3) и (5.2) соответственно. Это достигается с уче-

том сопоставления членов в выражении (5.3) и разложением по малому параметру

$(c_2 - c_{2crit})$ в выражении (5.2). Исходя из сравнения асимптотических выражений (5.2)

и (5.3) в предельных точках $c_2 = c_{2crit} + \varepsilon$ и $c_2 = c_{2crit} - \varepsilon$ также следует полученный ре-

зультат для $\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ и $\mu^* \sim \sqrt{\mu_1 \mu_2}$. Что касается правильности оценки слагаемых в

исходном выражении (5.1) при анализе переходной области, то выделенные слагаемые в

уравнении (5.4) при $(c_1 - c_2) \sim \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ и $\mu^* \sim \sqrt{\mu_1 \mu_2}$ имеют порядок $\sim \mu_2 (\mu_1 \mu_2)^{3/2}$, что су-

щественно больше отброшенных слагаемых. При соотношениях $1 \gg (c_1 - c_2) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ и

$\mu_1 \ll \mu^* \ll \sqrt{\mu_1 \mu_2}$ используемое выражение (5.4) также имеет место, но в силу малости

в нем можно сразу отбросить слагаемое $\sim \mu_2 (\mu^*)^3$, что приведет к полученному для

данных соотношений результату в (5.6). При соотношениях $1 \gg (c_2 - c_1) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ и

$\mu_2 \gg \mu^* \gg \sqrt{\mu_1 \mu_2}$ в выражении (5.4) в силу малости следует отбросить слагаемое $\sim (\mu_2)^2 \mu_1 \mu^*$, что также приводит к соответствующему результату в (5.6).

Анализируемые эффективные коэффициенты (3.8) являются непрерывными функциями объемной концентрации c_2 . Полученная ε -окрестность критической точки $c_{2\text{crit}}$ характеризует резкое изменение эффективных коэффициентов, но данное поведение не является скачком по определению. ε -окрестность критической точки, которую определяет асимптотическое решение (5.5), можно рассматривать как сшивку различных асимптотических решений (5.2) и (5.3) по обе стороны от нее. При этом асимптотические решения (5.2), (5.3) и (5.5) являются следствиями одного уравнения (5.1).

Проведем исследование структурного фазового перехода с учетом полученных результатов. Начнем со случая, в котором фаза “пустого” пространства имеет ненулевые параметры упругости $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$. Анализируемые эффективные коэффициенты упругости определяют обусловленную полем упругости внутреннюю энергию $\frac{1}{2} \int \lambda_{ij\alpha\beta}^* \varepsilon_{ij} \varepsilon_{\alpha\beta} d\mathbf{r}$ в системе. Из приведенного исследования эффективных коэффициентов K^*, μ^* следует наличие критической точки $c_{2\text{crit}}$ и соответствующей ей переходной

области, характеризующейся масштабом $\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \ll 1$. При переходе через ε -окрестность критической точки происходит резкое (скачкообразное) изменение эффективных модулей, что эквивалентно существенному изменению внутренней энергии. Выше, с позиции асимптотических выражений (5.2) и (5.3) говорилось про изменение эффективных модулей от $K^*, \mu^* \sim K_1, \mu_1$ к $K^*, \mu^* \sim K_2, \mu_2 \gg K_1, \mu_1$. Но с учетом проведенного анализа переходной области корректнее сказать, что с одной стороны от ε -окрестности критической точки при $c_2 < c_{2\text{crit}}$ имеет место $K_1, \mu_1 \ll K^*, \mu^* \ll \sqrt{\mu_1 \mu_2}$, а с другой стороны при $c_2 > c_{2\text{crit}}$ имеет место $\sqrt{\mu_1 \mu_2} \ll K^*, \mu^* \ll K_2, \mu_2$. При этом следует отметить, что в пределе $\frac{\mu_2}{\mu_1} \rightarrow \infty$ масштаб ε -окрестности устремляется к нулю

$\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \rightarrow 0$ и в точке $c_{2\text{crit}}$ следует говорить о разрыве эффективных коэффициентов

K^*, μ^* . Здесь сразу следует отметить, что случай $\frac{\mu_2}{\mu_1} \rightarrow \infty$ отличается от случая

$\mu_1 = 0$ тем, что в последнем разрыва эффективных коэффициентов не происходит (см. рис. 1). С этой точки зрения изменение отклика в структуре на распространяющееся поле упругости следует интерпретировать как фазовый переход первого рода, имеющий отношение к смене агрегатного состояния. Параметром, определяющим скачкообразное поведение, является объемная концентрация c_2 , в линейном упругом рассмотрении представляющая собой вероятность нахождения определенной фазы в макроточке.

Исследуем структурный фазовый переход системы при наличии у фазы (“пустого” пространства) нулевых коэффициентов упругости $K_1, \mu_1 = 0$. В точке $c_2 = c_{2\text{crit}} = 0.5$ эффективные упругие параметры K^*, μ^* либо равны нулю, либо находятся в окрестности нуля, стремясь к нулю при $c_2 \rightarrow c_{2\text{crit}}$. Рассмотрим поведение производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$

при подходе к критической точке с двух сторон. В точке $c_2 = c_{2\text{crit}} - \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow +0$ поведение эффективных коэффициентов определяется значением $K^* = \mu^* = 0$, т.е. про-

изводная $\frac{d\mu^*}{dc_2} = 0$. При этом в точке $c_2 = c_{2crit} + \varepsilon$ производная $\frac{d\mu^*}{dc_2} \neq 0$ и подходит к критической точке оси абсцисс под некоторым углом $\pi/2 < \beta < \pi$, что следует из выражения (5.2). Анализ системы с параметрами $K_1 = \mu_1 = 0$ отображает предельный случай, при котором параметр ε можно устремить к нулю (что согласуется с полученной при рассмотрении случая $K_1, \mu_1 \neq 0$ оценкой $\varepsilon \sim \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 0$). Таким образом, в точке

$c_2 = c_{2crit}$ производная $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ терпит разрыв, связанный со сменой функциональной зависимости эффективных коэффициентов по обе стороны перехода. Поведение эффективных коэффициентов в критической точке при $K_1, \mu_1 = 0$ соответствует фазовому переходу второго рода. Рис. 1 иллюстрирует это поведение. Говоря о фазовых переходах второго рода, следует иметь ввиду параметр порядка. В рассматриваемом случае параметром порядка является объемная концентрация сфер c_2 ($c_1 + c_2 = 1$), она же является вероятностью нахождения твердой фазы в структуре. При параметре порядка $c_2 = 1$ система полностью упорядочена. Фазовые переходы второго рода также связывают с изменением симметрии в среде (см. теорию Ландау). Вероятной интерпретацией структурного изменения в точке $c_2 = c_{2crit}$ является переход твердой фазы к упорядоченному состоянию, при котором твердая фаза начинает занимать узлы симметричной “кристаллической” решетки.

Рассмотрим поведение производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ при ненулевых параметрах $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$.

Исследуем вначале поведение производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ по обе стороны вдали от критической концентрации. Соответствующее поведение следует из дифференцирования полученных асимптотических выражений (5.2) и (5.3), имеющих разную функциональную зависимость. Рассмотрим вспомогательный член $\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2}$. При концентрации $c_2 > c_{2crit}$

поведение этого члена исходя из выражения (5.2) оценивается как $\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} \sim \frac{\mu_2}{\mu_1}$ (также полагаем $K_1 \sim \mu_1 \ll K_2 \sim \mu_2$). А при концентрации $c_2 < c_{2crit}$ исходя из выражения (5.3)

поведение этого члена оценивается как $\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} \sim 1$. Проанализируем теперь поведение

производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ при подходе к критической точке. Используя выражение (5.6), найдем соответствующие асимптотики

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} \sim \begin{cases} (c_1 - c_2)^{-2}, & (c_1 - c_2) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1}, & (c_1 - c_2) \ll \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1}, & (c_2 - c_1) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \end{cases} \quad (5.7)$$

Таким образом, в области критической точки значение производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$, нормированной на μ_1 , существенно меняется от $\sim (c_1 - c_2)^{-2} \ll \frac{\mu_2}{\mu_1}$ до $\sim \frac{\mu_2}{\mu_1}$. В рамках асимптотической формулы (5.2) поведение вспомогательного члена при подходе к критической точке $c_2 = c_{2\text{crit}} + \varepsilon$ не поменялось $\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} \sim \frac{\mu_2}{\mu_1}$. В то время как поведение асимптотической формулы (5.3) при подходе к критической точке $c_2 = c_{2\text{crit}} - \varepsilon$ существенно изменилось: $\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} \sim \frac{\mu_2}{\mu_1} \gg 1$. При увеличении концентрации c_2 относительно значения $c_2 = c_{2\text{crit}}$ значение производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ не испытывает существенного изменения, в то время как на интервале $c_{2\text{crit}} - \varepsilon < c_2 < c_{2\text{crit}}$ происходит ее скачкообразное изменение (вдали от критической точки $c_2 < c_{2\text{crit}}$ поведение члена $\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} \sim 1$ согласно выражению (5.3)). Данное поведение также можно описать оценочной записью

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu^*}{dc_2} (c_{2\text{crit}} - \varepsilon < c_2 < c_{2\text{crit}}) \sim \frac{1}{\mu_1} \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2} - \alpha \mu_1}{\varepsilon} \sim \frac{\mu_2}{\mu_1} \sim \varepsilon^{-2},$$

в которой значение эффективного модуля μ^* изменилось от $\mu^* \sim \alpha \mu_1$, где $1 < \alpha \ll (\mu_2/\mu_1)^{1/2}$ до значения $\mu^* \sim \sqrt{\mu_1 \mu_2}$ на интервале масштаба $\varepsilon \sim (\mu_1/\mu_2)^{1/2}$. На рис. 3 отражено поведение модуля производной эффективного сдвигового коэффициента $\left| \frac{d\mu^*}{dc_1} \right|$, нормированного на модуль μ_1 в зависимости от концентрации фазы c_1 при $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$.

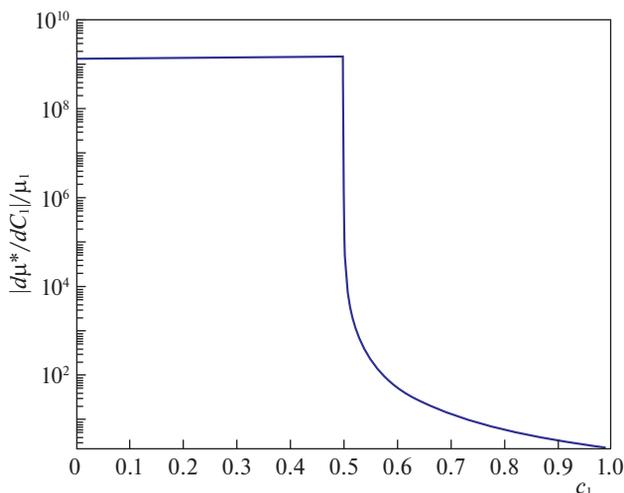


Рис. 3. Поведение модуля производной эффективного сдвигового коэффициента $\left| \frac{d\mu^*}{dc_1} \right|$, нормированного на модуль μ_1 в зависимости от объемной концентрации фазы 1.

Исходя из проведенного анализа выражения (5.5) (следствие функциональной зависимости (5.1)) производная $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ в случае $\mu_1, K_1 \ll K_2, \mu_2$ испытывает скачкообразное изменение в переходной области критической точки c_{2crit} . Отличие от разрыва производной, имеющего место в предельном случае $K_1 = \mu_1 = 0$, заключается в наличии у переходной области малой, но конечной окрестности критической точки $\varepsilon \sim \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{1/2}$, обусловленной ненулевыми параметрами K_1, μ_1 в выражении (5.1). При устремлении отношений $\mu_1/\mu_2, K_1/K_2, \mu_1/K_2, K_1/\mu_2$ к нулю масштаб ε -окрестности критической точки устремляется к нулю и в пределе имеет место разрыв производной как и в предельном случае $K_1 = \mu_1 = 0$. Анализ поведения эффективных модулей μ^*, K^* при $K_1 = \mu_1 = 0$ указывает на фазовый переход второго рода. Поведение эффективных модулей в случае $\mu_1, K_1 \ll K_2, \mu_2$ с точностью до ε -окрестности критической точки также указывает на фазовый переход второго рода.

Покажем, что поведение производных $\frac{d^l \mu^*}{dc_2^l}$ при $l > 1$ в окрестности критической точки отличается от случаев $l = 0$ и $l = 1$. Начнем со случая $l = 2$. Взяв вторую производную в выражении (5.5), получим выражения

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{d^2 \mu^*}{dc_2^2} \sim \begin{cases} (c_1 - c_2)^{-3}, & (c_1 - c_2) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{3/2}, & (c_1 - c_2) \ll \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \\ (c_2 - c_1)^{-3}, & (c_2 - c_1) \gg \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \end{cases} \quad (5.8)$$

которые предсказывают δ -образный всплеск в ε -окрестности критической точки. Действительно, по обе стороны от критической точки $|c_2 - c_1| \gg \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{1/2}$ имеет место оценка $\sim |c_2 - c_1|^{-3} \ll \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{3/2}$, которая существенно меньше оценки $\sim \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{3/2}$ при $(c_1 - c_2) \ll \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$. Рис. 4 отражает предсказанное поведение производной $\frac{d^2 \mu^*}{dc_2^2}$.

Отметим также, что асимптотическим выражением (5.3) в окрестности точки $c_2 < c_{2crit} - \varepsilon$ для вспомогательного члена предсказывается оценка $\frac{1}{\mu_1} \frac{d^2 \mu^*}{dc_2^2} \sim \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{3/2}$. В свою очередь из асимптотического выражения (5.2) на интервале $c_2 > c_{2crit} + \varepsilon$ следует оценка $\sim \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^1$. На рис. 4 видно падение значения члена $\frac{1}{\mu_1} \frac{d^2 \mu^*}{dc_2^2}$ вблизи критической точки $c_2 \approx c_{2crit}$, $c_2 > c_{2crit}$. Соответствующее падение является следствием того, что при увеличении c_2 асимптотика $\sim (c_2 - c_1)^{-3}$ меняется на асимптотику $\sim \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^1$, при-

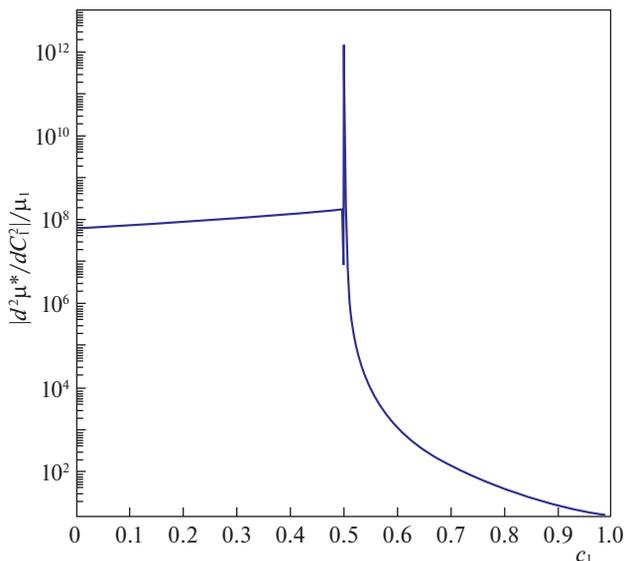


Рис. 4. Поведение модуля производной второго порядка от эффективного сдвигового коэффициента $\left| \frac{d^2 \mu^*}{dc_1^2} \right|$, нормированного на модуль μ_1 в зависимости от объемной концентрации фазы 1.

чем на рассматриваемом интервале “падения” оказывается справедливым неравенство $(c_2 - c_1)^{-3} < \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^1$.

Наличие δ -образного поведения в ε -окрестности критической точки имеет место и для производных более высших порядков. Данные всплески имеют отношение к δ -функции и ее производным. В предельном случае $K_1 = \mu_1 = 0$ производная $\frac{d^l \mu^*}{dc_2^l}$ содержит δ -функции и производные от них вплоть до порядка $l - 2$, $l \geq 2$, которые сосредоточены в критической точке (масштаб ε -окрестности при $K_1 = \mu_1 = 0$ равен нулю). Для доказательства этого утверждения заметим, что эффективный сдвиговый модуль при $K_1 = \mu_1 = 0$ представим в виде $\mu^* = \tilde{\mu}^* \theta(c_2 - c_{2\text{crit}})$, где $\tilde{\mu}^*$ определяется выражением (5.2), а функция $\theta(c_2 - c_{2\text{crit}})$ является функцией Хевисайда ($\theta(c_2 - c_{2\text{crit}}) = 1$ при $c_2 > c_{2\text{crit}}$ и $\theta(c_2 - c_{2\text{crit}}) = 0$ при $c_2 < c_{2\text{crit}}$). Дифференцирование такого эффективного сдвигового модуля по c_2 приводит к выражению $\frac{d\mu^*}{dc_2} = \frac{d\tilde{\mu}^*}{dc_2} \theta(c_2 - c_{2\text{crit}})$. Член с δ -функцией, появляющийся при дифференцировании $\theta(c_2 - c_{2\text{crit}})$, исчезает вследствие $\tilde{\mu}^*(c_2 = c_{2\text{crit}}) = 0$. Такое поведение производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ свойственно фазовым переходам второго рода. Для производной $\frac{d^2 \mu^*}{dc_2^2}$ имеет место выражение

$$\frac{d^2\mu^*}{dc_2^2} = \frac{d^2\tilde{\mu}^*}{dc_2^2} \theta(c_2 - c_{2crit}) + \frac{d\tilde{\mu}^*}{dc_2} \delta(c_2 - c_{2crit}),$$

которое предсказывает δ -образное поведение в критической точке $\left(\frac{d\tilde{\mu}^*}{dc_2}(c_2 = c_{2crit}) \neq 0\right)$.

Из представленного выражения видно, что производные более высших порядков содержат δ -функцию и ее производные (коэффициенты перед ними не обращаются в нуль). В случае малых, но конечных K_1, μ_1 , появляющийся в окрестности критической

точки δ -образный всплеск при рассмотрении производных $\frac{d^l\mu^*}{dc_2^l}$, $l \geq 2$ имеет прибли-

женное отношение к δ -функции и ее производным порядка $l - 2$, $l \geq 2$. Соответствующее приближенное отношение является следствием того, что точное представление

через θ -функцию эффективного модуля μ^* при $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ отсутствует. Первая производная $l = 1$ эффективного модуля μ^* в рассмотренном предельном случае

$K_1 = \mu_1 = 0$ не содержит δ -функции, что имеет отношение к отсутствию δ -образного скачка первой производной эффективного модуля μ^* в случае $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$. То есть

выражение (5.1) для эффективного модуля μ^* устроено таким образом, что в случае $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ его скачкообразное поведение в переходной области не приводит к δ -образному всплеску его первой производной в этой ϵ -окрестности критической точки, такому, которое проявляется для производных более высшего порядка. В отличие

от производных порядка $l > 1$ эффективный модуль $\mu^*(c_2)$ и его первая производная

$\frac{d\mu^*}{dc_2}(c_2)$ демонстрируют непрерывный рост при увеличении c_2 , что согласуется с полу-

ченными асимптотическими выражениями (5.2), (5.3) и (5.5). Отличие поведения

производной эффективного модуля $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ от самого модуля μ^* в переходной области за-

ключается в изменении скачкообразного поведения: наклон производной $\frac{d\mu^*}{dc_2}$ стано-

вится более сингулярным относительно модуля μ^* , исходя из выражений (5.7) и (5.8)

отношение соответствующих наклонов

$$\left(\frac{d\mu^*}{dc_2}\right)^{-1} \frac{d^2\mu^*}{dc_2^2} \sim \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{1/2} \gg 1$$

Исходя из представленного анализа при конечном отношении параметров упругости фаз $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ полученные эффективные коэффициенты K^*, μ^* характеризуются не только существенным изменением своих значений в малой ϵ -окрестности

критической точки c_{2crit} , но и резким изменением в поведении первых производных от соответствующих эффективных коэффициентов в этой ϵ -окрестности. Найденная информация о фазовом переходе как первого рода, так и второго отражает нетривиальное поведение эффективных коэффициентов в случае $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$. Наличие малой, но ненулевой ϵ -окрестности при анализе эффективных коэффициентов возникает как следствие конечного отношения упругих параметров фаз и отображает переходное состояние в поведении структуры.

Для описания структурного фазового перехода следует также дать качественное пояснение механизма контакта между разными элементарными структурными элементами (частицами) одной фазы. Используем при этом позицию обобщенной производ-

ной (2.2). Применение формулы (2.2) к уравнениям (2.1), приводит к дифференциальным уравнениям на смещение

$$\lambda_{ij\alpha\beta}(\mathbf{r}) \partial_j \partial_\beta u_\alpha(\mathbf{r}) + \sum_k \int_{S_k} [\lambda_{ij\alpha\beta} u_\alpha]_{\mathbf{x}} \partial_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) ds_\beta = 0,$$

отображающим распространение поля в гетерогенной среде в целом с учетом внутренних границ. Одно из появившихся сингулярных слагаемых, содержащее в поверхностном интеграле член $[\lambda_{ij\alpha\beta} u_\alpha]_{\mathbf{x}}$, занулилось вследствие равенства напряжений на границах раздела фаз. При рассмотрении контактов одной фазы слагаемое $[\lambda_{ij\alpha\beta} u_\alpha]_{\mathbf{x}}$ отлично от нуля если тангенциальные смещения разных элементов одной фазы различаются на границе раздела. Равенство соответствующих тангенциальных смещений может интерпретироваться как образование жесткой связи (кластеризация, слипание). В рассматриваемом случае $\gamma = 1$ данные члены равны нулю и описанный механизм выполняется.

Проведем анализ эффективных коэффициентов (3.8) при заданном n и $\gamma = 1$. В данном случае также получается уравнение четвертой степени на μ^* , но с другими коэффициентами $a_i(c_2, n)$. Отличие при этом заключается в значении критической объемной концентрации $c_{2\text{crit}}$. Исходя из представленных выкладок следует, что значение $c_{2\text{crit}}$ одинаково как для фазы “пустого” пространства с $K_{1,\mu_1} = 0$, так и для случая $K_{1,\mu_1} \neq 0$, $K_{1,\mu_1} \ll K_{2,\mu_2}$. Однако удобнее находить $c_{2\text{crit}}$ для случая $K_{1,\mu_1} = 0$ приравниванием к нулю коэффициента $a_3(c_2, n, n_0) = 0$ в полученном уравнении четвертой степени на μ^* . Для произвольной эффективной размерности n условие на критическую концентрацию имеет вид

$$(n + 1) c_{2\text{crit}} = 2 \quad (5.9)$$

При $n = 3$ имеем полученное значение $c_{2\text{crit}} = 0.5$. При $n = 2$ следует $c_{2\text{crit}} = 2/3$, $n = 1$ дает $c_{2\text{crit}} = 1$.

При произвольном n и $\gamma = 1$ изложенные аспекты, связанные с несущей фазой и структурным фазовым переходом, сохраняются с точностью до значения $c_{2\text{crit}}$.

Эффективные коэффициенты (3.8) отображают необходимость увеличения концентрации проводящей фазы для связного распространения поля по ней в гетерогенной среде при уменьшении размерности рассматриваемого пространства, в котором распространяется поле. То есть при меньшем числе внутренних связей нужна большая концентрация проводящей фазы.

Обобщение эффективных коэффициентов на случай некоторой размерности пространства делается также с целью отображения эффективного числа внутренних степеней свободы при распространении поля по гетерогенной среде с существенно различающимися физическими свойствами фаз на всем интервале концентраций.

На основе продленного анализа приведем качественное сопоставление с экспериментальными данными.

Согласно проведенному в работе [25] молекулярно-динамическому моделированию значение концентрации $c_2 = 0.5$ входит в диапазон концентраций, описывающих фазовый переход первого рода между жидкостью и твердой фазой. В основе моделирования использована модель жестких твердых сфер. Автор статьи [1] интерпретирует значение 0.494 как “наибольшую случайную плотность” среди монодисперсных сфер, как точку затвердевания “freezing point”. Соответствующая структурная особенность проявляется в экспериментах с коллоидами [26]. Обратим здесь внимание на то, что автор статьи [1] связывает точку затвердевания с наибольшей плотностью случайно распределенных сфер. Продолжая эту мысль, укажем, что приближение концентрации фазы сфер к критической, вероятно, дает вклад одновременно как в изменение

сопротивления нагрузке (вызванное процессом “затвердевания”), так и в упорядоченности структуры. Под вкладом в упорядоченность понимается структурное изменение в среде, которая изначально представляла собой стохастически распределенную структуру. Выше было показано, что случаю $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$ соответствует структурный фазовый переход, имеющий признаки фазовых переходов первого и второго рода. Фактически, данный структурный фазовый переход отображает изменение сопротивления нагрузке и вклад в упорядоченность структуры (структурное изменение).

В работе [1] исследуется случайная плотная упаковка сфер, которая представляется как состояние гранулированной среды, соответствующее структурному фазовому переходу, проявляющему признаки фазовых переходов первого и второго рода. При этом значение объемной концентрации монодисперсных сфер $c_{2crit} = 0.6366 \pm 0.0005$, что реализуется по протоколу “вертикального встряхивания”. В работе [1] также приводятся другие предельные значения объемной концентрации сфер, например, $c_{2crit} \approx 0.6$. Такое же значение присутствует в работе [27] при исследовании суспензий. Данные значения следуют из выражения (5.9) при $n < 3$, что интерпретируем уменьшением эффективного числа внутренних степеней свободы при распространении поля по гетерогенной среде.

Полученные эффективные коэффициенты способны согласовываться с экспериментом не только вблизи критических значений. Например, в работе [28] исследуется модуль Юнга композитного материала, состоящего из резины и эпоксидной смолы. Из эксперимента и используемой авторами клеточной модели при малых концентрациях эпоксидной смолы следует выражение для модуля Юнга системы $E^* = E_1 + \frac{5}{2} E_1 c_2$. Это же выражение следует из полученных коэффициентов (3.8) при условиях $\gamma = 1$ и $n = 3$, $K_1, \mu_1 \ll K_2, \mu_2$, $K_1 \gg \mu_1$, соответствующих исследуемой системе и с учетом $c_2 \ll 1$. В работе [28] предельная концентрация также ограничена значением $c_2 = 0.5$. Формулы (3.8) при $\gamma = 1$ и $n = 3$ хорошо описывают пористые системы при малой концентрации пористости [6].

Заключение. Произведено обобщение эффективных коэффициентов линейной теории упругости для пространства заданной размерности при учете формализма обобщенной производной. Представлено сравнение полученных эффективных коэффициентов с результатами существующих подходов. Обобщение эффективных коэффициентов направлено отобразить специфику распространения поля по гетерогенной среде с существенно различающимися физическими свойствами фаз на всем диапазоне объемных концентраций. Из анализа эффективных коэффициентов, примененного для гетерогенных сред с существенно различающимися свойствами фаз, предсказано наличие несущей фазы и структурного фазового перехода (перколяции). Структурный фазовый переход отображает переход фазы от несвязного распространения поля по системе к макроскопически связному и имеет признаки фазовых переходов первого и второго рода. Полученные результаты имеют согласование с имеющимися данными по коллоидам, гранулированным средам и суспензиям.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90090.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Radin C. Random close packing of granular matter // J. Stat. Phys. 2008. V. 131. № 4. P. 567–573.
2. Rayleigh L. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // Phil. Mag. 1892. V. 34. P. 481.

3. *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford: Univ. Press, 1904. 435 p.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. т. VI М.: Наука, 1986. 736 с.
5. *Khoroshun L.P.* A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // *Mekh. Kompos. Mater.* 1995. V. 31. № 3. P. 310–318.
6. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // *Appl. Mech.* 2000. V. 30. № 10. P. 30–62.
7. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 1962. V. 10. № 4. P. 335–342.
8. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1963. V. 11. № 2. P. 127–140.
9. *Hashin Z., Shtrikman S.* Conductivity of polycrystals // *Phys. Rev.* 1963. V. 130. № 129. P. 129–133.
10. *Shermergor T.D.* Elasticity Theory for Microinhomogeneous Materials. М.: Nauka, 1977. 225 p.
11. *Bruggeman D.A.G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielkristallen der nichtregularen Systeme // *Ann. Phys.* 1936. Bd. 417. № 25. S. 645–672.
12. *Kroner E.* Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // *Z. Phys.* 1958. Bd. 151. № 4. S. 504–518.
13. *Hill R.A.* Self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1965. V. 13. № 4. P. 213–222.
14. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York: Acad. Press, 1982.
15. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Иностран. лит., 1963.
16. *Khoroshun L.P.* Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // *Appl. Mech.* 1978. V. 14. P. 3–17.
17. *Khoroshun L.P.* Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // *Appl. Mech.* 1987. V. 23. № 10. P. 100–108.
18. *Bolotin V.V., Moskalenko V.N.* Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium // *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.* 1968. V. 34. № 1. P. 66–72.
19. *Нугматуллин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
20. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
21. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.* 1973. V. 21. P. 571–574.
22. *Ponte Castaneda P., Willis J.R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // *J. Mech. Phys. Solids.* 1995. V. 43. P. 1919–1951.
23. *Fedotov A.* The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // *J. Mater. Sci.* 2018. V. 53. P. 5092–5102.
24. *Мишин А.В.* Обобщенная производная и ее использование для анализа микроструктуры гетерогенной среды // *SIBJIM.* 2021. Т. 24. № 4. С. 79–96.
<https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.406>
25. *Alder B.J., Wainwright T.E.* Studies in molecular dynamics II. Behavior of a small number of elastic spheres // *J. Chem. Phys.* 1960. V. 33. P. 1439–1451.
26. *Rutgers M.A., Dunsmuir J.H., Xue J.-Z., Russel W.B., Chaikin P.M.* Measurement of the hard-sphere equation of state using screened charged polystyrene colloids // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 53. P. 5043–5046.
27. *Chong J.S., Christiansen E.B., Baer A.D.* Rheology of concentrated suspensions // *J. Appl. Polymer Sci.* 1971. № 15. P. 2007–2021.
28. *Moshev V.V., Kozhevnikova L.L.* Predictive potentialities of a cylindrical structural cell for particulate elastomeric composites // *Int. J. Solids&Struct.* 2000. № 37. P. 1079–1097.

Analysis of the Heterogeneous Media Behavior with Significantly Different Physical Properties, Taking Into Account the Effective Space Dimension and the Generalized Derivative Formalism

A. V. Mishin^{a,b,#} and V. M. Fomin^{a,b,##}

^a *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

^b *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

[#]*e-mail: aleksey-mishin94@mail.ru*

^{##}*e-mail: fomin@itam.nsc.ru*

The effective coefficients of the linear theory of elasticity are obtained and analyzed for the purpose of an analytical description of a heterogeneous medium. This is done for an arbitrary dimension of the space under consideration and taking into account the generalized derivative formalism. The generalization of the effective coefficients to the case of a certain space dimension is done to introduce the effective dimension hypothesis, which is aimed at displaying the effective number of degrees of freedom when the field propagates through a heterogeneous medium with significantly different physical properties of the phases. The approach used is the method of conditional moments. The effective coefficients and their derivatives are explored for the presence of a carrier phase and a structural phase transition (percolation properties) over the entire range of volumetric concentration. Based on the analysis carried out, a comparison is made with the results of existing approaches and with the available data on colloids, suspensions, and granular media.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, space dimension, stochastic model, structural phase transition

REFERENCES

1. Radin C. Random close packing of granular matter // *J. Stat. Phys.*, 2008, vol. 131, no. 4, pp. 567–573.
2. Rayleigh L. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // *Phil. Mag.*, 1892, vol. 34, pp. 481.
3. Maxwell J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford: Univ. Press, 1904. 435 p.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Hydrodynamics*. Moscow: Nauka, 1986. 736 p.
5. Khoroshun L. P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // *Mekh. Kompos. Mater.*, 1995, vol. 31, no. 3, pp. 310–318.
6. Khoroshun L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // *Appl. Mech.*, 2000, vol. 30, no. 10, pp. 30–62.
7. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, vol. 10, no. 4, pp. 335–342.
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 127–140.
9. Hashin Z., Shtrikman S. Conductivity of polycrystals // *Phys. Rev.*, 1963, vol. 130, no. 129, pp. 129–133.
10. Shermegor T. D. *Elasticity Theory for Microinhomogeneous Materials*. Moscow: Nauka, 1977. 225 p.
11. Bruggeman D. A. G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielkristallen der nichtregularen Systeme // *Ann. Phys.*, 1936, Bd. 417, no. 25, S. 645–672.
12. Kroner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // *Z. Phys.*, 1958, Bd. 151, no. 4, S. 504–518.
13. Hill R. A. Self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
14. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. N.Y.: Acad. Press, 1982.
15. Eshelby J. *Continuum Theory of Dislocations*. Moscow: Inostr. lit., 1963.
16. Khoroshun L. P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // *Appl. Mech.*, 1978, vol. 14, pp. 3–17.
17. Khoroshun L. P. Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // *Appl. Mech.*, 1987, vol. 23, no. 10, pp. 100–108.

18. *Bolotin V.V., Moskalenko V.N.* Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium // *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1968, vol. 34, no. 1, pp. 66–72.
19. *Nigmatullin R.I.* Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media. Moscow: Nauka, 1978.
20. *Bakhvalov N.S., Panasenko G.P.* Averaging of Processes in Periodic Media. Moscow: Nauka, 1984. 352 p.
21. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metall.*, 1973, vol. 21, pp. 571–574.
22. *Ponte Castaneda P., Willis J.R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, vol. 43, pp. 1919–1951.
23. *Fedotov A.* The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // *J. Mater. Sci.*, 2018, vol. 53, pp. 5092–5102.
24. *Mishin A.V.* The generalized derivative and its use for the analysis of the microstructure of a heterogeneous medium // *SIBJIM*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 79–96. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
25. *Alder B.J., Wainwright T.E.* Studies in molecular dynamics II. Behavior of a small number of elastic spheres // *J. Chem. Phys.*, 1960, vol. 33, pp. 1439–1451.
26. *Rutgers M.A., Dunsmuir J.H., Xue J.-Z., Russel W.B., Chaikin P.M.* Measurement of the hard-sphere equation of state using screened charged polystyrene colloids // *Phys. Rev. B*, 1996, vol. 53, pp. 5043–5046.
27. *Chong J.S., Christiansen E.B., Baer A.D.* Rheology of concentrated suspensions // *J. Appl. Polymer Sci.*, 1971, no. 15, pp. 2007–2021.
28. *Moshev V.V., Kozhevnikova L.L.* Predictive potentialities of a cylindrical structural cell for particulate elastomeric composites // *Int. J. Solids&Struct.*, 2000, no. 37, pp. 1079–1097.

УДК 539.3

О КОНФИГУРАЦИОННЫХ СИЛАХ В МЕХАНИКЕ ФАЗОВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

© 2022 г. А. Б. Фрейдin^{1,*}

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: alexander.freidin@gmail.com

Поступила в редакцию 23.05.2022 г.
После доработки 30.05.2022 г.
Принята к публикации 02.06.2022 г.

Дается краткий обзор механики конфигурационных сил применительно к описанию распространения межфазных границ и фронтов химических реакций. Обсуждаются конфигурации, связанные с превращениями, кинематические условия и балансовые соотношения на межфазной границе. Затем записывается выражение для диссипации энергии вследствие распространения межфазной границы или фронта химической реакции. Это дает возможность формулировки дополнительных определяющих соотношений – кинетических уравнений, определяющих скорость межфазной границы или фронта реакции в зависимости от конфигурационной силы.

Ключевые слова: межфазные границы, конфигурационная сила, тензор энергии-импульса Эшелби, тензор химического сродства, механохимия

DOI: 10.31857/S0032823522040075

1. Введение. Механика конфигурационных сил активно развивается с конца 80-х – начала 90-х гг. XX века как одно из направлений механики деформируемого твердого тела, позволяющее естественным образом включить в рассмотрение эволюцию неоднородностей различной природы – от движения локализованных дефектов и роста трещины до развития областей новой фазы, распространения фронтов химических реакций и роста биологических тканей в условиях воздействия механических напряжений (см., напр., [1–10]). Общим для этих процессов является то, что они не могут быть сведены к перемещению материальных точек под действием механических сил, как в механике Ньютона, но приводят к изменению конфигурации тела вследствие движения дефектов и границ относительно материальных точек, то есть в “пространстве материала” [3].

Ниже дается краткий обзор механики конфигурационных сил применительно к математическому описанию распространения межфазных границ и фронтов химических реакций с акцентом на описание конфигураций, порождаемых превращениями. Обсуждаются кинематические условия и балансовые соотношения на межфазной границе. Затем записывается выражение для диссипации энергии вследствие распространения межфазной границы или фронта химической реакции. Это дает возможность формулировки дополнительных определяющих соотношений – кинетических уравнений, определяющих скорость межфазной границы или фронта реакции. Детали постановки и решения задач описания фазовых переходов и химических реакций под напряжением не рассматриваются (см. библиографию и примеры решения краевых задач с межфазными границами и фронтами химических реакций [11–17]); обсуждает-

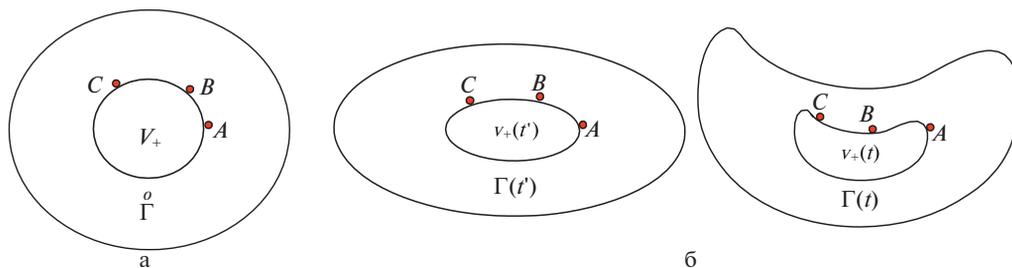


Рис. 1. Материальные границы в: а – отсчетной и б – актуальных конфигурациях.

ся только общий вывод кинетического уравнения, связанного с фундаментальными законами и вторым законом термодинамики безотносительно реологических моделей деформируемого тела.

Пусть тело в актуальной (деформированной) конфигурации $v = v_- \cup v_+$ в момент времени t разделено на части, занимающие области пространства v_- и v_+ с границей раздела Γ и состоящие из материалов “–” и “+” соответственно. Такое разделение может иметь:

- конструкционное происхождение как, например, в случае дисперсно-упрочненных композитных материалов, состоящих из матрицы и включений другого материала;
- технологическое происхождение, когда включения возникают на стадии получения материала;
- в силу физических причин: при определенных термомеханических и/или других физических воздействиях в теле возникают и развиваются области новой фазы как, например, при мартенситных превращениях в сплавах с эффектом памяти формы;
- в силу химических причин как, например, при формировании диоксида кремния в полупроводниках или литизации кремния в литий-ионных батареях.

Перечисление причин появления областей нового материала отражает существование двух типов границ – связанных на всех этапах деформирования с одними и теми же материальными точками тела и движущихся только вместе с этими точками, и границ, перемещающихся по точкам тела.

Первый тип границ имеет место, например, в теле с включением (рис. 1). Во все моменты времени, то есть во всех актуальных конфигурациях, области v_+ заполнены одними и теми же материальными точками материала “+”, а области v_- – одними и теми же материальными точками материала “–”. Граница раздела областей деформируется вместе с телом и в разные моменты времени проходит через разные точки пространства, но остается связанной с одними и теми же материальными точками (A, B, C на рис. 1). Границы $\Gamma(t')$ и $\Gamma(t)$ имеют один и тот же прообраз $\overset{\circ}{\Gamma}$ в отсчетной конфигурации. Такие границы называют материальными.

Второй тип границ наблюдается в материалах, претерпевающих фазовые или химические превращения. В этом случае при развитии области v_+ превращенного материала граница $\Gamma(t)$ перемещается вследствие относительного перемещения точек тела, то есть деформаций, а также вследствие превращения одного материала в другой (рис. 2).

В разные моменты времени t и t' граница проходит через разные материальные точки A, B и C, D . Положениям границы $\Gamma(t)$ и $\Gamma(t')$ в актуальной конфигурации соответствуют разные прообразы $\overset{\circ}{\Gamma}(t)$ и $\overset{\circ}{\Gamma}(t')$ в отсчетной конфигурации, то есть разные исходные составные тела $V = V_- \cup V_+$. Граница распространяется относительно отсчетной

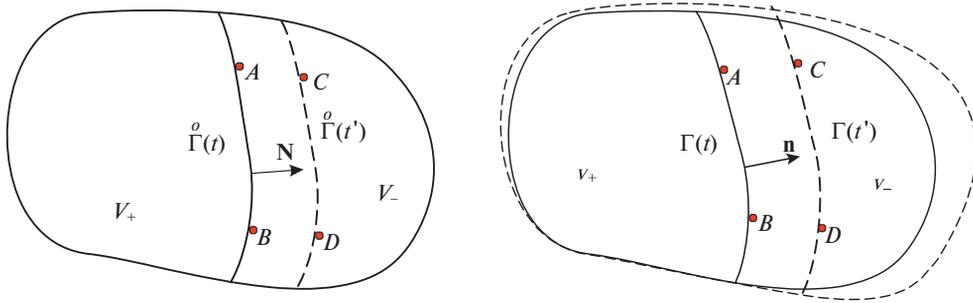


Рис. 2. Межфазные границы в разные моменты времени в актуальной и отсчетной конфигурациях.

конфигурации. Причину распространения такой границы, то есть причину изменения отсчетной конфигурации называют конфигурационной силой.

В ньютоновой механике сила вводится как причина изменения состояния движения материальной точки – изменения ее скорости. Движение межфазных границ происходит по термодинамическим причинам. Формально конфигурационная сила, движущая дефект или границу, может быть получена как величина, сопряженная скорости границы в выражении для диссипации энергии. Мотивация такого определения следует из того, что в термодинамике необратимых процессов показано, что формула производства энтропии имеет вид билинейной формы [18]

$$P[S] = \sum_{\alpha} J_{\alpha} X_{\alpha},$$

образованной термодинамическими силами X_{α} и потоками J_{α} , порождаемыми этими силами. Это, в свою очередь, позволяет формулировать кинетические уравнения в виде зависимостей термодинамических потоков от сил:

$$J_{\alpha} = J_{\alpha}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Тогда конфигурационная сила может быть определена как термодинамическая сила, сопряженная скорости изменения параметра, характеризующего конфигурацию тела.

Отметим также механические аналогии. Потенциальная сила может рассматриваться как множитель при скорости перемещения в выражении скорости изменения потенциальной энергии, а сила трения как множитель при скорости в выражении диссипации вследствие трения.

Термодинамический подход, согласно которому термодинамические силы являются функциями термодинамических потоков, будем использовать при формулировке кинетических уравнений в виде зависимостей скорости распространения фронта фазового или химического превращения от конфигурационной силы. При этом внешние воздействия, в том числе механические, влияют на скорость границы через конфигурационную силу.

2. Конфигурации двухфазных тел. Рассмотрим фазовое или локализованное на фронте реакции химическое превращение, сопровождающееся собственной деформацией превращения и, возможно, изменением реологических свойств материала.

Пусть $v = v_+ \cup v_-$ – актуальная конфигурация тела в момент времени t , где область v_- занята материалом в фазовом состоянии “–”, а область v_+ материалом в фазовом состоянии “+”, $\Gamma(t)$ – межфазная граница, разделяющая области v_+ и v_- (рис. 3).

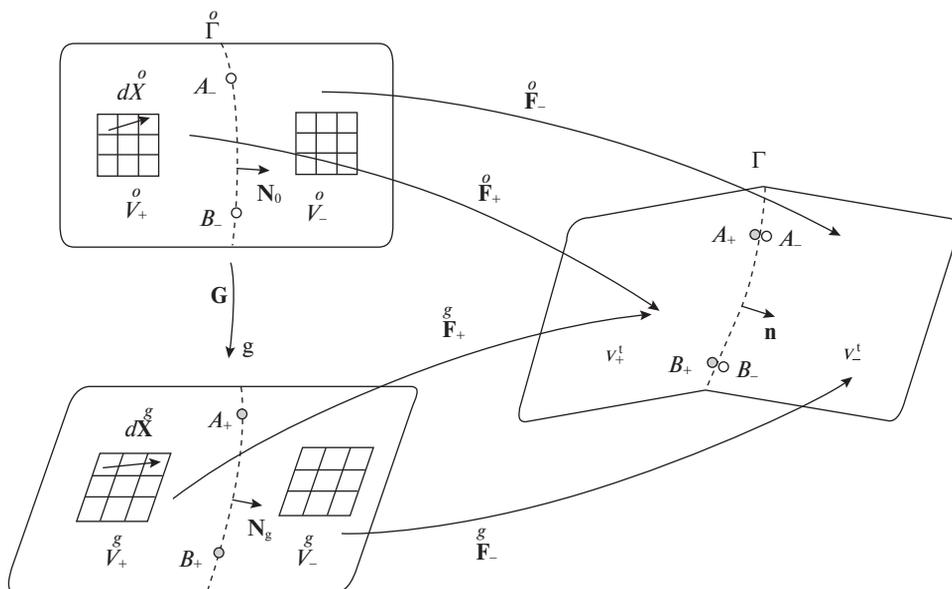


Рис. 3. Отсчетные и актуальная двухфазные конфигурации.

Полагаем, что определены свободные от напряжений конфигурации тела $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ в фазовых состояниях “–” и “+”, соответственно (натуральные состояния). Линейные элементы $d\overset{o}{X}$ и $d\overset{g}{X}$ конфигураций $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ связаны тензором \mathbf{G} , задающим деформацию превращения:

$$d\overset{g}{X} = \mathbf{G} \cdot d\overset{o}{X} \quad (2.1)$$

Тензор \mathbf{G} характеризует изменение геометрии решетки в результате фазового превращения кристаллического тела [19], или объемное расширение в результате химической реакции. Направление главных осей \mathbf{G} , вообще говоря, зависит от напряженного состояния двухфазной конфигурации и тогда подлежит определению. Возможен также набор тензоров \mathbf{G} , определяемый группой симметрии материала и соответствующий вариантам новой фазы (вариантам мартенсита и двойникованию в случае мартенситных фазовых переходов). Отметим, что в случае фазовых переходов под напряжением одно из натуральных состояний может быть метастабильным (соответствующим локальному, но не глобальному минимуму энергии) или гипотетическим, когда, например, новая фаза может существовать только в напряженном состоянии, то есть при наложении на \mathbf{G} дополнительных деформаций. Далее рассматриваются границы для заданного тензора превращения \mathbf{G} .

Если тензор \mathbf{G} задан, то актуальной конфигурации $v = v_- \cup v_+$ могут быть поставлены в соответствие две отсчетные конфигурации: конфигурация $\overset{o}{V} = \overset{o}{V}_- \cup \overset{o}{V}_+$, образованная материалом в натуральном фазовом состоянии “–” с границей $\overset{o}{\Gamma}(t)$, проходящей через те же материальные точки фазы “–”, что и граница $\Gamma(t)$ в актуальной конфигурации A_- (точки A_- , B_- на рис. 3), и отсчетная конфигурация $\overset{g}{V} = \overset{g}{V}_+ \cup \overset{g}{V}_-$, образованная натуральным фазовым состоянием “+” с границей $\Gamma(t)$, проходящей через те же материальные точки фазы “+”, что и $\Gamma(t)$ (точки A_+ , B_+).

Положение материальных точек фазы “–” в актуальной v и отсчетной $\overset{o}{V}$ конфигурациях определяется векторами $\mathbf{x}_- \in v_-$ и $\overset{o}{\mathbf{X}}_- \in \overset{o}{V}_-$, соответственно. Положение точек фазы “+” в актуальной конфигурации и отсчетной $\overset{g}{V}$ конфигурации определяется векторами $\mathbf{x}_+ \in v_+$ и $\overset{g}{\mathbf{X}}_+ \in \overset{g}{V}_+$. Отображения

$$\mathbf{x}_- = \overset{o}{\mathbf{x}}_-(\overset{o}{\mathbf{X}}_-, t), \quad \mathbf{x}_+ = \overset{g}{\mathbf{x}}_+(\overset{g}{\mathbf{X}}_+, t) \quad (2.2)$$

задают деформацию материала в фазовых состояниях “–” и “+” из соответствующих натуральных состояний. Градиенты деформаций $\overset{o}{\mathbf{F}}_- = \overset{o}{\nabla} \mathbf{x}_-^T$ и $\overset{g}{\mathbf{F}}_+ = \overset{g}{\nabla} \mathbf{x}_+^T$, где $\overset{o}{\nabla}$ и $\overset{g}{\nabla}$ – набла-операторы, заданные в базисах отсчетных $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ конфигураций (в декартовых координатах $\overset{o}{F}_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$, $\overset{g}{F}_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$, где x_i , X_j и $\overset{g}{X}_j$ – декартовы координаты материальной точки в актуальной v^t и отсчетных $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ конфигурациях), связывают линейные элементы $d\mathbf{x}_\pm \in v_\pm^t$ актуальной конфигурации с линейными элементами $d\overset{o}{\mathbf{X}}_- \in \overset{o}{V}_-$ и $d\overset{g}{\mathbf{X}}_+ \in \overset{g}{V}_+$ отсчетных конфигураций:

$$d\mathbf{x}_- = \overset{o}{\mathbf{F}}_- \cdot d\overset{o}{\mathbf{X}}_-, \quad d\mathbf{x}_+ = \overset{g}{\mathbf{F}}_+ \cdot d\overset{g}{\mathbf{X}}_+$$

Отметим, что естественным представлением определяющих соотношений материалов фаз является задание зависимостей напряжений именно от градиентов деформации $\overset{o}{\mathbf{F}}_-$ и $\overset{g}{\mathbf{F}}_+$. Но так как деформации в актуальной конфигурации могут определяться относительно любой конфигурации, для обеих фаз может быть выбрана единая отсчетная конфигурация, соответствующая натуральному состоянию одной из фаз, например, фазы “–”. Тогда $\mathbf{x}_+ = \overset{o}{\mathbf{x}}_+(\overset{o}{\mathbf{X}}_+, t)$, где $\overset{o}{\mathbf{X}}_+ \in \overset{o}{V}_+$ – положение прообраза превращенной точки в натуральном фазовом состоянии “–”, а градиент деформации $\overset{o}{\mathbf{F}}_+ = \overset{o}{\mathbf{F}}_+ \cdot \mathbf{G}$ связывает линейный элемент $d\mathbf{x}_+ \in v_+$ в фазовом состоянии “+” с его прообразом $d\overset{o}{\mathbf{X}}_+ \in \overset{o}{V}_+$ в фазовом состоянии “–” (до деформирования и фазового превращения): $d\mathbf{x}_+ = \overset{o}{\mathbf{F}}_+ \cdot d\overset{o}{\mathbf{X}}_+$

Скорости точек в фазовых состояниях “–” и “+” определяются соотношениями

$$\mathbf{v}_- = \frac{\partial \overset{o}{\mathbf{x}}_-(\overset{o}{\mathbf{X}}_-, t)}{\partial t} = \frac{\partial \overset{g}{\mathbf{x}}_-(\overset{g}{\mathbf{X}}_-, t)}{\partial t}, \quad \overset{o}{\mathbf{X}}_- \in \overset{o}{V}_-, \quad \overset{g}{\mathbf{X}}_- \in \overset{g}{V}_- \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_+ = \frac{\partial \overset{o}{\mathbf{x}}_+(\overset{o}{\mathbf{X}}_+, t)}{\partial t} = \frac{\partial \overset{g}{\mathbf{x}}_+(\overset{g}{\mathbf{X}}_+, t)}{\partial t}, \quad \overset{o}{\mathbf{X}}_+ \in \overset{o}{V}_+, \quad \overset{g}{\mathbf{X}}_+ \in \overset{g}{V}_+ \quad (2.4)$$

Полагаем, что на межфазной границе сохраняется непрерывность поля перемещений, то есть рассматривается когерентная граница. Из непрерывности перемещений следуют кинематические условия совместности первого и второго рола (см., напр., [20]):

$$[\mathbf{F}] = [\overset{o}{\nabla} \mathbf{u}^T] = \overset{o}{a} \mathbf{N}_0, \quad [\mathbf{v}] = -[\mathbf{F}] \cdot \overset{o}{\mathbf{V}}_\Gamma = -W_0 \overset{o}{a} = -W_0 [\mathbf{F}] \cdot \mathbf{N}_0 \quad (2.5)$$

$$[\mathbf{F}] = [\nabla \mathbf{u}^T] = {}^g \mathbf{a} \mathbf{N}_g, \quad [\mathbf{v}] = -[\mathbf{F}] \cdot \mathbf{V}_\Gamma = -W_0 {}^g \mathbf{a} = -W_0 [\mathbf{F}] \cdot \mathbf{N}_g, \quad (2.6)$$

где \mathbf{N}_0 и \mathbf{N}_g – нормали к прообразам межфазной границы $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ в отсчетных конфигурациях “–” и “+”, внешние к областям $\overset{o}{V}_+$ и $\overset{g}{V}_+$, соответственно, $\overset{o}{\mathbf{a}}$ и $\overset{g}{\mathbf{a}}$ – векторы амплитуды скачка, $\overset{o}{\mathbf{V}}_\Gamma$ и $\overset{g}{\mathbf{V}}_\Gamma$ – скорости прообразов межфазной границы $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$, $W_0 = \overset{o}{\mathbf{V}}_\Gamma \cdot \mathbf{N}_0$, $W_g = \overset{g}{\mathbf{V}}_\Gamma \cdot \mathbf{N}_g$ – нормальные составляющие скорости межфазной границы, двойные скобки обозначают скачок величин на межфазной границе: $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$.

Первое условие означает, что скачок градиента деформаций имеет вид диады, образованной вектором нормали к прообразу межфазной границы в отсчетной конфигурации и некоторым вектором, называемым вектором амплитуды скачка. В силу второго условия скачок скорости материальных точек на межфазной границе подстраивается под скорость границы так, чтобы сохранялась сплошность материала. Отметим, что условия непрерывности на границе наиболее простым образом выглядят при записи в терминах отсчетных конфигураций.

Скорость границы в актуальной конфигурации \mathbf{v}_Γ связана со скоростями прообразов границы $\overset{o}{\mathbf{V}}_\Gamma$ и $\overset{g}{\mathbf{V}}_\Gamma$ относительно отсчетных конфигураций формулами

$$\overset{o}{\mathbf{V}}_\Gamma = \mathbf{F}_\pm^{-1} \cdot (\mathbf{v}_\Gamma - \mathbf{v}_\pm), \quad \overset{g}{\mathbf{V}}_\Gamma = \mathbf{F}_\pm^{-1} \cdot (\mathbf{v}_\Gamma - \mathbf{v}_\pm) \quad (2.7)$$

3. Кинетика межфазных границ, тензор напряжений Эшелби. Из балансов массы, импульса и энергии и второго закон термодинамики, записанного в виде неравенства Клаузиуса–Дюгема с учетом теоремы переноса Рейнольдса для тела с распространяющейся внутренней границей следуют соотношения для скачков на движущейся межфазной границе (см., напр., [21, 22]), которые запишем относительно обеих отсчетных конфигураций:

$$[\overset{o}{\rho}]W_0 = 0, \quad [\overset{g}{\rho}]W_g = 0 \quad (3.1)$$

$$[\overset{o}{\rho} \mathbf{v}]W_0 + [\overset{o}{\mathbf{S}}] \cdot \mathbf{N}_0 = 0, \quad [\overset{g}{\rho} \mathbf{v}]W_g + [\overset{g}{\mathbf{S}}] \cdot \mathbf{N}_g = 0 \quad (3.2)$$

$$\left[\overset{o}{\rho} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + [\overset{o}{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{v} - \overset{o}{h}] \cdot \mathbf{N}_0 = 0 \quad (3.3)$$

$$\left[\overset{g}{\rho} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + [\overset{g}{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{v} - \overset{g}{h}] \cdot \mathbf{N}_g = 0 \quad (3.4)$$

$$[\overset{o}{\rho} s] - \left[\frac{\overset{o}{h}}{T} \right] \geq 0, \quad [\overset{g}{\rho} s] - \left[\frac{\overset{g}{h}}{T} \right] \geq 0, \quad (3.5)$$

где $\overset{o}{\mathbf{S}}$ и $\overset{g}{\mathbf{S}}$ – тензоры напряжений Пиолы–Кирхгофа, определенные относительно $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ конфигураций: если $\overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}_\pm$ – тензоры напряжений Коши, то

$$\overset{o}{\mathbf{S}}_\pm = (\det \mathbf{F}_\pm) \overset{o}{\boldsymbol{\sigma}}_\pm \cdot \mathbf{F}_\pm^{-T}, \quad \overset{g}{\mathbf{S}}_\pm = (\det \mathbf{F}_\pm) \overset{g}{\boldsymbol{\sigma}}_\pm \cdot \mathbf{F}_\pm^{-T}, \quad (3.6)$$

$\overset{o}{\mathbf{h}}$ и $\overset{g}{\mathbf{h}}$ – векторы теплового потока, определенные относительно $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$ конфигураций, u и s – массовые плотности внутренней энергии и энтропии, T – температура,

$[\rho] = \overset{o}{\rho}_+ - \overset{o}{\rho}_-$, $[\rho] = \overset{g}{\rho}_+ - \overset{g}{\rho}_-$, $\overset{o}{\rho}_-$ и $\overset{g}{\rho}_+$ – плотности материала в ненапряженных фазовых состояниях “–” и “+”; $\overset{g}{\rho}_-$ и $\overset{o}{\rho}_+$ – плотности материала в фазовых состояниях “–” и “+”, пересчитанные как масса фазы “+” на единицу объема фазового состояния “–” и масса фазы “–” на единицу объема фазового состояния “+”. Если порция фазы “–” dm_- превращается в порцию фазы “+” dm_+ , то

$$dm_- = \overset{o}{\rho}_- d\overset{o}{V} = \overset{g}{\rho}_- d\overset{g}{V}, \quad dm_+ = \overset{g}{\rho}_+ d\overset{g}{V} = \overset{o}{\rho}_+ d\overset{o}{V}, \quad (3.7)$$

где согласно (2.1)

$$\frac{d\overset{g}{V}}{d\overset{o}{V}} = \det \mathbf{G} \quad (3.8)$$

Из (3.7), (3.8) следует, что

$$\overset{g}{\rho}_- = g^{-3} \overset{o}{\rho}_-, \quad \overset{o}{\rho}_+ = g^3 \overset{g}{\rho}_+, \quad (3.9)$$

где введено обозначение $g^3 = \det \mathbf{G}$. В случае фазового перехода $dm_+ = dm_-$. Тогда из (3.7) следует, что $\overset{o}{\rho}_+ = \overset{o}{\rho}_-$, $\overset{g}{\rho}_- = \overset{g}{\rho}_+$, что согласуется с балансом массы в виде (3.8).

На распространяющейся межфазной границе $[\rho] = 0$, $[\rho] = 0$.

Полагаем, что температура непрерывна. Тогда, исключив $[\mathbf{h}_0/T]$ из (3.5) с помощью (3.3), (3.4) и (3.2), получим выражение для диссипации энергии вследствие распространения межфазной границы (см., напр., [21–23]):

$$\text{Dis} = \int_{\Gamma_0} D_0 d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_g} D_g d\Gamma_g$$

$$D_0 = -\mathbf{N}_0 \cdot \left[\overset{o}{\mathbf{b}} + \frac{\overset{o}{\rho}}{2} W_0^2 \overset{o}{\mathbf{C}} \right] \cdot \mathbf{N}_0 W_0 \quad (3.10)$$

$$D_g = -\mathbf{N}_g \cdot \left[\overset{g}{\mathbf{b}} + \frac{\overset{g}{\rho}}{2} W_g^2 \overset{g}{\mathbf{C}} \right] \cdot \mathbf{N}_g W_g, \quad (3.11)$$

где

$$\overset{o}{\mathbf{b}}_{\pm} = \overset{o}{\rho}_{\pm} f_{\pm} \mathbf{I} - \overset{o}{\mathbf{F}}_{\pm}^T \cdot \overset{o}{\mathbf{S}}_{\pm}, \quad \overset{g}{\mathbf{b}}_{\pm} = \overset{g}{\rho}_{\pm} f_{\pm} \mathbf{I} - \overset{g}{\mathbf{F}}_{\pm}^T \cdot \overset{g}{\mathbf{S}}_{\pm}, \quad (3.12)$$

– тензоры энергии-импульса Эшелби [24, 25], которые называют также тензорами напряжений Эшелби, определенные относительно конфигураций $\overset{o}{V}$ и $\overset{g}{V}$, $f = u - Ts$ – массовая плотность свободной энергии Гельмгольца, \mathbf{I} – единичный тензор, $\overset{o}{\mathbf{C}} = \overset{o}{\mathbf{F}}^T \cdot \overset{o}{\mathbf{F}}$, $\overset{g}{\mathbf{C}} = \overset{g}{\mathbf{F}}^T \cdot \overset{g}{\mathbf{F}}$.

В квазистатике диссипация определяется нормальной компонентой тензора Эшелби:

$$D_0 = -\overset{o}{W} \mathbf{N}_0 \cdot [\overset{o}{\mathbf{b}}] \cdot \mathbf{N}_0, \quad D_g = -\overset{g}{W} \mathbf{N}_g \cdot [\overset{g}{\mathbf{b}}] \cdot \mathbf{N}_g \quad (3.13)$$

Для нелинейно упругих фаз первая формула (3.13) была получена в [26]. Независимо было показано, что необходимым условием минимума энергии Гиббса двухфазно-

го упругого тела является непрерывность нормальной компоненты тензора Эшелби на равновесной межфазной границе [27, 28] (см. также [29]), аналогично непрерывности скалярного химического потенциала. Это привело к заключению о тензорности химического потенциала в случае деформируемого твердого тела и рассмотрении тензора Эшелби как тензора химического потенциала, скачок нормальной компоненты которого является конфигурационной силой, определяющей скорость границы согласно кинетическому уравнению вида

$$\overset{o}{W} = W(\overset{o}{[b_{NN}]}) \quad (3.14)$$

так что $\overset{o}{[b_{NN}]} \overset{o}{W} \leq 0$. В приближении линейной термодинамики $\overset{o}{W} = -k \overset{o}{[b_{NN}]}$, где кинетический коэффициент $k > 0$. Это кинетическое уравнение использовалось при решении задач описания межфазных границ, в том числе при численном моделировании распространения границ (см., напр., [6, 7, 30–33]), при моделировании межфазных границ в пластинах-оболочках [34, 35], для анализа кинетической устойчивости межфазных границ [36] и при исследовании гистерезисных явлений при прямом и обратном фазовых превращениях [37].

4. Кинетика и блокирование фронтов химических реакций. Рассматривалась химическая реакция между деформируемым твердым и диффундирующим компонентами, локализованная на фронте реакции, разделяющим исходное вещество и деформируемый продукт реакции. Реакция имеет вид



где B_- , B_* и B_+ – химические формулы исходного твердого и диффундирующего компонентов и продукта реакции, n_- , n_* и n_+ – стехиометрические коэффициенты.

Реакция поддерживается диффузией компонента B_* к фронту реакции и сопровождается объемной деформацией превращения и изменением реологических свойств материала. Примерами таких реакций являются окисление и литизация кремния, сопровождающиеся большим объемным расширением и превращением упругого материала в вязкоупругий (см., напр., [38–40], а также библиографию [41]).

Далее следуем работам [13, 41–43], не останавливаясь на деталях. Полагаем, что тензор деформации превращения – шаровой. Тогда из химической формулы реакции следует, что

$$\mathbf{G} = g \mathbf{I}, \quad g = \left(\frac{n_+ M_+ \overset{o}{\rho}_-}{n_- M_- \overset{g}{\rho}_+} \right)^{1/3} \quad (4.1)$$

где M_{\pm} – молярные массы твердых компонент реакции, $\overset{o}{\rho}_-$ и $\overset{g}{\rho}_+$ – плотности твердых компонентов реакции в их натуральных состояниях (ср. с (3.8), (3.9)). В этом случае $dm_+ \neq dm_-$. Фазовому превращению соответствует $M_+ = M_- = M$, $n_+ = n_-$.

Для открытой системы с диффузией и химической реакцией, как и в случае фазового превращения, были записаны балансовые соотношения и неравенство Клаузиуса–Дюгема. В результате были получены выражения поверхностной плотности диссипации энергии на фронтах реакции в отсчетных конфигурациях твердых компонентов реакции:

$$D_0 = A_{NN} \overset{o}{\omega}(\mathbf{N}), \quad D_g = A_{NN} \overset{g}{\omega}(\mathbf{N}), \quad (4.2)$$

где $\overset{o}{\omega}(\mathbf{N})$ и $\overset{g}{\omega}(\mathbf{N})$ – скорости реакции на ориентированных площадках с нормалью \mathbf{N} , A_{NN} – нормальная компонента тензора химического сродства. В квазистатистическом приближении

$$\mathbf{A} = n_* M_* \mu_* \mathbf{I} + n_- M_- \mathbf{M}_- - n_+ M_+ \mathbf{M}_+, \quad (4.3)$$

где тензоры химического потенциала твердых компонентов равны тензорам Эшелби, деленным на плотности материала:

$$\mathbf{M}_- = f_- \mathbf{I} - \frac{1}{\rho_-} \overset{o}{\mathbf{F}}_-^T \cdot \overset{o}{\mathbf{S}}_-, \quad \mathbf{M}_+ = f_+ \mathbf{I} - \frac{1}{\rho_+} \overset{g}{\mathbf{F}}_+^T \cdot \overset{g}{\mathbf{S}}_+, \quad (4.4)$$

μ_* – химический потенциал диффундирующего компонента, зависит от концентрации диффундирующего компонента. Сравнив (4.3) с классическим выражением $A = -\sum n_k M_k \mu_k$, появляющимся в формуле для диссипации энергии $D = A\omega$ в случае реакций в газах и жидкостях в виде множителя при скорости реакции [44], видим обоснованность термина тензор химического сродства.

Тензорность сродства, как и тензорность химического потенциала, может быть объяснена тем, что в деформируемом теле равновесие фаз и химические реакции связаны с ориентированными площадками. На тензорность сродства также указывалось в [45, 46].

Скорости фронта связаны со скоростями реакции соотношениями

$$W_0 = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \overset{o}{\omega}(\mathbf{N}), \quad W_g = \frac{n_+ M_+}{\rho_+} \overset{g}{\omega}(\mathbf{N}) \quad (4.5)$$

Подставив нормальную компоненту тензора сродства в известное кинетическое уравнение, определяющее скорость реакции от скалярного сродства [18], получим

$$\overset{o}{\omega}(\mathbf{N}) = k_* \overset{o}{c} \left(1 - \exp\left(-\frac{A_{NN}}{RT}\right) \right), \quad (4.6)$$

где $\overset{o}{c}$ – концентрация диффундирующего компонента относительно отсчетной конфигурации исходного вещества, k_* – константа скорости реакции. Аналогичная формула может быть записана для конфигурации продукта реакции.

Из (4.5), (4.6) видно, что нормальная компонента тензора химического сродства является конфигурационной силой, определяющей кинетику фронта реакции. Напряженно-деформированное состояние влияет на скорость фронта через сродство. Согласно (4.6) напряжения могут ускорять, замедлять и блокировать реакцию, см., напр., [13, 15, 16]. Фронт реакции может распространяться только если $A_{NN} \geq 0$. Если $A_{NN} < 0 \forall \mathbf{N}$, то фронт не может распространяться ни в каких направлениях. Это приводит к понятию запретных зон в пространстве деформаций или напряжений, образованных деформациями (напряжениями), при которых распространение фронта прямой реакции невозможно, и которые в случае упругих компонентов реакции строятся аналогично введенным ранее зонам фазовых переходов [12]. Примеры построения запретных зон [47, 48] отражают конкурирующее влияние химических энергий (энергий компонентов в натуральном состоянии) и энергии деформаций на возможность протекания реакции.

Заключение. Концепция конфигурационных сил была кратко представлена для случая фазовых и химических превращений, локализованных на фронте превращения. Вместе с тем возможны нелокализованные превращения, когда в каждом характерном объеме присутствуют в определенной пропорции обе фазы или исходный материал и

продукт химической реакции. При этом возникают вопросы о моделировании объемных превращений, о реализации различных типов превращений и об условиях перехода от объемных к локализованным превращениям и обратно. Поскольку объемные превращения также изменяют отсчетную конфигурацию, механика конфигурационных сил и здесь может найти эффективное применение.

Автор благодарен Н.Ф. Морозову за многолетнюю плодотворную поддержку исследований в области механики материалов, претерпевающих фазовые или химические превращения. Часть результатов, полученных нами совместно, нашла отражение и в этой статье.

Работа выполнена за счет гранта № 19-19-00552-П Российского научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maugin G.* Material Inhomogeneities in Elasticity. London: Chapman and Hall, 1993. 287 p.
2. *Gurtin M.E.* Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics Berlin: Springer, 2000. 249 p.
3. *Kienzler R., Herrmann G.* Mechanics in Material Space with Application to Defect and Fracture Mechanics. Berlin: Springer, 2000. 307 p.
4. Configurational mechanics of materials / Ed. by *Kienzler R., Maugin G.A.* CISM Courses and Lectures. No. 427. Wien: Springer, 2001. 307 p.
5. Mechanics of Material Forces / Ed. by *Steinmann P. et al.* Advances in Mechanics and Mathematics. Vol. 11. Springer, 2005. 337 p.
6. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids // Arch. Rat. Mech. Anal. 1991. V. 114. P. 119–154.
7. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Evolution of Phase Transformation. A Continuum Theory. Cambridge: Univ. Press, 2006. 242 p.
8. IUTAM Symposium on Progress in the Theory and Numerics of Configurational Mechanics // Proc. IUTAM Symp. Held in Erlangen, Germany, 20–24 October 2008. P. 2009. Dordrecht: Springer, 282 p.
9. *Maugin G.* Configurational Forces. Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics. London, New York: Chapman&Hall/CRC Boca Raton, 2011. 527 p.
10. Defect and Material Mechanics / Ed. by *Kienzler R.* Springer, 2017. 172 p.
11. *Морозов Н.Ф., Назыров И.Р., Фрейдin А.Б.* Одномерная задача о фазовом превращении упругого шара // Докл. РАН. 1996. Т. 34. № 2. С. 188–191.
12. *Морозов Н.Ф., Фрейдin А.Б.* Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С. 220–232.
13. *Freidin A., Vilchevskaya E., Korolev I.* Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids // Int. J. Eng. Sci. 2014. V. 83. P. 57–75.
14. *Вильчевская Е.Н., Фрейдin А.Б., Морозов Н.Ф.* Кинетика фронта химической реакции в центрально-симметричных задачах механохимии // Докл. РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 525–529.
15. *Freidin A., Morozov N.F., Petrenko S., Vilchevskaya E.* Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry // Acta Mech. 2016. V. 227 (1). P. 43–56.
16. *Poluektov M., Freidin A.B., Figiel L.* Modelling stress-affected chemical reactions in non-linear viscoelastic solids with application to lithiation reaction in spherical Si particles // Int. J. Engng. Sci. 2018. V. 128. P. 44–62.
17. *Freidin A.B., Korolev I.K., Aleshchenko S.P.* FEM-simulations of a chemical reaction front propagation in an elastic solid with a cylindrical hole // Mech.&Control of Solids&Struct. / Ed. by *Polyanskiy V.A. et al.*, 2012. P. 195–208.
18. *Гленцдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
19. *Бойко В.С., Гарбер Р.И., Косевич А.М.* Обратимая пластичность кристаллов. М.: Наука, 1991. 280 с.
20. *Труделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

21. *Wilmanski K.* Thermomechanics of Continua. Berlin: Springer, 1998. 273 p.
22. *Šilhavý M.* The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin: Springer, 1997. 517 p.
23. *I-Shih Liu.* On interface equilibrium and inclusion problems // Cont. Mech. Thermodyn. 1992. V. 4. P. 177–186.
24. *Eshelby J.D.* Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics // in: Inelastic Behavior of Solids / Ed. by *Kanninen M. et al.* New York: McGraw-Hill, 1970. P. 77–115.
25. *Eshelby J.D.* The elastic energy-momentum tensor // J. Elasticity. 1975. V. 5. № 4. P. 321–335.
26. *Knowles J.K.* On the dissipation associated with equilibrium shocks in finite elasticity // J. Elasticity. 1979. V. 9. № 2. P. 131–158.
27. *Гринфельд М.А.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824–828.
28. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
29. *Трускиновский Л.* Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 306–310.
30. *Mueller R., Gross D.* 3D inhomogeneous, misfitting second phase particles equilibrium shapes and morphological development // Comput. Mater. Sci. 1999. Vol. 16. P. 53–60.
31. *Gross D., Kolling S., Mueller R. et al.* Configurational forces and their application in solid mechanics // Europ. J. Mech. A/Solids. 2003. V. 22. P. 669–692.
32. *Gross D.* Morphological equilibrium and kinetics of two-phase materials // in: Configurational Mechanics of Materials / Ed. by *Kienzler R., Maugin G.A.* Wien: Springer, 2001. P. 221–272.
33. *Berezovskii A., Engelbrecht J., Maugin G.A.* Numerical Simulation of Waves and Fronts in Inhomogeneous Solids. New Jersey: World Scientific, 2008. 229 p.
34. *Eremeyev V.A., Altenbach H.* Configurational forces in the theory of two-phase plates // in: Proc. IUTAM Symp. Held in Erlangen, Germany, 20–24 October 2008 / Ed. by *Steinmann P.* Dordrecht: Springer, 2009. P. 121–130.
35. *Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W.* Thermomechanics of shells undergoing phase transition // J. Mech. & Phys. Solids. 2011. V. 59. P. 1395–1412.
36. *Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарунова Л.Л.* Об устойчивости равновесия двухфазных упругих тел // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 61–84.
37. *Freidin A.B., Eremeyev V.A.* On kinetic nature of hysteresis phenomena in stress-induced phase transformations // in: Dyn. Proc. in Generalized Continua and Struct. / Ed. by *Altenbach H. et al.*, Adv. Struct. Mater. 2019. V. 103. P. 223–229.
38. *Buttner C., Zacharias M.* Retarded oxidation of Si nanowires // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89. P. 263106.
39. *Heidemeyer H., Single C., Zhou F. et al.* Self-limiting and pattern dependent oxidation of silicon dots fabricated on silicon-on-insulator material // J. Appl. Phys. 2000. V. 8. P. 4580–4585.
40. *Jia Z., Li T.* Stress-modulated driving force for lithiation reaction in hollow nano-anodes // J. Power Sources. 2015. V. 275. P. 866–876.
41. *Freidin A.B., Vichevskaya E.N.* Chemical affinity tensor in coupled problems of mechanochemistry // in: Encycl. Cont. Mech. / Ed. by *Altenbach H. et al.* Berlin: Springer, 2020.
42. *Freidin A.B.* Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids // ASME 2013 Int. Mech. Engng. Congr. & Exposition. V. 9. Mechanics of Solids, Structures and Fluids. San Diego, CA, 2013. Paper No. IMECE2013-64957. P. V009T10A102.
43. *Фрейдин А.Б.* О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 3. С. 35–68.
44. *Пригожин И., Дефей Р.* Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 509 с.
45. *Русанов А.И.* Термодинамические основы механохимии. СПб.: Наука, 2006. 221 с.
46. *Rusanov A.I.* Surface thermodynamics revisited // Surf. Sci. Rep. 2005. V. 58. P. 111–239.
47. *Фрейдин А.Б., Шарунова Л.Л., Морозов Н.Ф.* О блокирующих деформациях в механохимии фронтов химических реакций // Чебышевский сб. 2017. Т. 18. № 3 (63). С. 475–487.
48. *Freidin A.B., Sharipova L.L.* Forbidden strains and stresses in mechanochemistry of chemical reaction fronts // in: Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials / Ed. by *Altenbach H. et al.*, Adv. Struct. Mat. Vol. 89. Cham: Springer, 2018. P. 335–348.

On Configurational Forces in Mechanics of Phase and Chemical Transformations

A. B. Freidin^{a,*}

^a Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

*e-mail: alexander.freidin@gmail.com

A brief overview of the mechanics of configurational forces is given in relation to the description of the propagation of interphase boundaries and chemical reaction fronts. Configurations associated with transformations, kinematic conditions and balance equations across the interfaces are discussed. Then expressions are written for the energy dissipation due to the propagation of the interphase boundary or the chemical reaction front. This makes it possible to formulate additional constitutive equations – kinetic equations that determine the velocity of the interphase boundary or reaction front depending on the configuration force.

Keywords: interphase boundaries, configurational force, Eshelby energy-momentum tensor, chemical affinity tensor, mechanochemistry

REFERENCES

1. *Maugin G.* Material Inhomogeneities in Elasticity. L.: Chapman&Hall, 1993. 287 p.
2. *Gurtin M.E.* Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics Berlin: Springer, 2000. 249 p.
3. *Kienzler R., Herrmann G.* Mechanics in Material Space with Application to Defect and Fracture Mechanics. Berlin: Springer, 2000. 307 p.
4. Configurational mechanics of materials // CISM Courses and Lectures, no. 427, The International Centre for Mechanical Sciences / Ed. by *Kienzler R., Maugin G.A.* Wien: Springer, 2001. 307 p.
5. Mechanics of Material Forces / Ed. by *Steinmann P. et al.* Springer, 2005. 337 p.
6. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids // Arch. Rat. Mech. Anal., 1991, vol. 114, pp. 119–154.
7. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Evolution of Phase Transformation. A Continuum Theory. Cambridge: Univ. Press, 2006. 242 p.
8. Proc. IUTAM Symp. Held in Erlangen, Germany, 20–24 October 2008 / Ed. by *Steinmann P.* Dordrecht: Springer, 2009. 282 p.
9. *Maugin G.* Configurational Forces. Thermomechanics, Physics, Mathematics, and Numerics. L.: Chapman&Hall/CRC Boca Raton, 2011. 527 p.
10. Defect and Material Mechanics / Ed. by *Kienzler R.*, Springer, 2017. 172 p.
11. *Morozov N.F., Nazyrov I.R., Freidin A.B.* One-dimensional problem of phase transformation of an elastic ball // Dokl. Akad. Nauk, 1996, vol. 346(2), pp. 188–191.
12. *Morozov N.F., Freidin A.B.* Phase transition zones and phase transformations of elastic solids under different stress states // Proc. Steklov Math. Inst., 1998, vol. 223, pp. 219–232.
13. *Freidin A., Vilchevskaya E., Korolev I.* Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids // Int. J. Eng. Sci., 2014, vol. 83, pp. 57–75.
14. *Vilchevskaya E., Freidin A., Morozov N.* Chemical reaction front kinetics in spherically-symmetric problems of mechanochemistry // Dokl. Phys., 2015, vol. 60, no. 4, pp. 175–179.
15. *Freidin A., Morozov N.F., Petrenko S., Vilchevskaya E.* Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry // Acta Mech., 2016, vol. 227(1), pp. 43–56.
16. *Poluektov M., Freidin A.B., Figiel L.* Modelling stress-affected chemical reactions in non-linear viscoelastic solids with application to lithiation reaction in spherical Si particles // Int. J. Engng. Sci., 2018, vol. 128, pp. 44–62.
17. *Freidin A.B., Korolev I.K., Aleshchenko S.P.* FEM-simulations of a chemical reaction front propagation in an elastic solid with a cylindrical hole // in: Mechanics and Control of Solids and Structures / Ed. by *Polyanskiy V.A. et al.*, 2022, pp. 195–208.
18. *Glansdorff P., Prigogine I.* Thermodynamic theory of stability and fluctuation. N.Y.: Wiley-Intersci., 1971.
19. *Boiko V.S., Garber R.I., Kosevich A.M.* The Reversible Plasticity of Crystals. Moscow: Nauka; 1991. (in Russian)

20. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. Baltimore: The Johns Hopkins Univ., 1972.
21. *Wilmanski K.* Thermomechanics of Continua. Berlin: Springer, 1998. 273 p.
22. *Šilhavý M.* The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin: Springer, 1997. 517 p.
23. *I-Shih Liu.* On interface equilibrium and inclusion problems // Cont. Mech. Thermodyn., 1992, vol. 4, pp. 177–186.
24. *Eshelby J.D.* Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics // in: Inelastic Behavior of Solids / Ed. by *Kanninen M. et al.* N.Y.: McGraw-Hill, 1970. pp. 77–115.
25. *Eshelby J.D.* The elastic energy-momentum tensor // J. Elasticity, 1975, vol. 5, no. 4, pp. 321–335.
26. *Knowles J.K.* On the dissipation associated with equilibrium shocks in finite elasticity // J. Elasticity, 1979, vol. 9, no. 2, pp. 131–158.
27. *Grinfeld M.* On conditions of thermodynamic equilibrium of phases of a nonlinearly elastic material // Sov. Math. Dokl., 1980, vol. 251, pp. 824–827.
28. *Grinfeld M.A.* Continuum Mechanics Methods in the Theory of Phase Transformations. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian)
29. *Truskinovsky L.* Equilibrium interphase boundaries // Sov. Phys. Dokl., 1982, vol. 27, pp. 306–331.
30. *Mueller R., Gross D.* 3D inhomogeneous, misfitting second phase particles equilibrium shapes and morphological development // Comput. Mater. Sci., 1999, vol. 16, pp. 53–60.
31. *Gross D., Kolling S., Mueller R. et al.* Configurational forces and their application in solid mechanics // Europ. J. Mech. A/Solids, 2003, vol. 22, pp. 669–692.
32. *Gross D.* Morphological equilibrium and kinetics of two-phase materials. In: Configurational mechanics of materials // in: CISM Courses and Lectures. no. 427. The International Centre for Mechanical Sciences / Ed. by *Kienzler R., Maugin G.A.* Wien: Springer, 2001. pp. 221–272.
33. *Berezovski A., Engelbrecht J., Maugin G.A.* Numerical Simulation of Waves and Fronts in Inhomogeneous Solids. New Jersey: World Sci., 2008. 229 p.
34. *Eremeyev V.A., Altenbach H.* Configurational forces in the theory of two-phase plates // in: Proc. IUTAM Symp. Held in Erlangen, Germany, 20–24 October 2008. / Ed. by *Steinmann P.* Dordrecht: Springer, 2009. pp. 121–130.
35. *Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W.* Thermomechanics of shells undergoing phase transition // J. Mech.&Phys. Solids, 2011, vol. 59, pp. 1395–1412.
36. *Yeremeyev V.A., Freidin A.B., Sharipova L.L.* The stability of the equilibrium of two-phase elastic solids // JAMM, 2007, vol. 71, pp. 61–84.
37. *Freidin A.B., Eremeyev V.A.* On kinetic nature of hysteresis phenomena in stress-induced phase transformations // In: Dyn. Proc. in Generalized Continua and Struct / Ed. by *Altenbach H. et al.*, pp. 223–229.
38. *Buttner C., Zacharias M.* Retarded oxidation of Si nanowires // Appl. Phys. Lett., 2006, vol. 89, pp. 263106.
39. *Heidemeyer H., Single C., Zhou F. et al.* Self-limiting and pattern dependent oxidation of silicon dots fabricated on silicon-on-insulator material // J. Appl. Phys., 2000, vol. 8, pp. 4580–4585.
40. *Jia Z., Li T.* Stress-modulated driving force for lithiation reaction in hollow nano-anodes // J. Power Sources, 2015, vol. 275, pp. 866–876.
41. *Freidin A.B., Vilchevskaya E.N.* Chemical affinity tensor in coupled problems of mechanochemistry // in: Encycl. Cont. Mech. / Ed. by *Altenbach H. et al.* Berlin: Springer, 2020.
42. *Freidin A.B.* Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids // ASME 2013 Int. Mech. Engng. Congr.&Expos., Vol. 9. Mech. Solids, Struct.&Fluids. San Diego, CA, 2013. Paper no. IMECE2013-64957. pp. V009T10A102.
43. *Freidin A.B.* On a chemical affinity tensor for chemical reactions in deformable solids // Mech. Solids, 2015, vol. 50, pp. 260–285.
44. *Prigogine I., Defay R.* Chemical thermodynamics. L.: Longmans, Green, 1954.
45. *Rusanov A.I.* Thermodynamic Foundations of Mechanochemistry. St-Petersburg: Nauka, 2006. (in Russian)
46. *Rusanov A.I.* Surface thermodynamics revisited // Surface Sci. Rep., 2005, vol. 58, pp. 111–239.
47. *Freidin A.B., Sharipova L.L., Morozov N.F.* On locking strains in mechanochemistry of chemical reactions fronts // Chebyshevskii Sb., 2017, vol. 18(3), pp. 469–481. (in Russian)
48. *Freidin A.B., Sharipova L.L.* Forbidden strains and stresses in mechanochemistry of chemical reaction fronts // in: Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials / Ed. by *Altenbach H. et al.* Cham: Springer, 2018. pp. 335–348.

УДК 539.3, 539.42

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНЫ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2022 г. А. В. Савиковский^{1,*}, А. С. Семенов^{1,**}, М. Л. Качанов^{1,2,3,***}

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

² Университет Тафтса, Медфорд, Массачусетс, США

³ Нижегородский государственный университет им. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: savikovskii.artem@yandex.ru

**e-mail: semenov.artem@googlemail.com

***e-mail: Mark.Kachanov@tufts.edu

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Рассматривается взаимодействие одиночной прямолинейной трещины со свободной границей анизотропной упругой пластины конечных размеров. Показано, что при приближении вершины трещины к границе пластины возрастает влияние упругой анизотропии материала на значения коэффициентов интенсивности напряжений. Исследовано влияние степени анизотропии упругих свойств материала и ориентации трещины (моды разрушения) на этот эффект.

Ключевые слова: анизотропный материал, коэффициент интенсивности напряжений, трещина, линейно-упругая механика разрушения, формализм Лехницкого, конечно-элементное моделирование

DOI: 10.31857/S0032823522040129

1. Введение. Определение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) играет ключевую роль при исследовании условий распространения трещин в хрупких материалах. В то время как задача определения КИН детально изучена для *изотропных* упругих сред с трещиной [1, 2], она является значительно более трудоемкой и менее исследованной для *анизотропных* тел. В случае бесконечной упругой пластины, обладающей произвольной анизотропией упругих свойств и содержащей прямолинейную трещину, произвольно ориентированную по отношению к осям анизотропии материала, метод анализа был разработан Лехницким [3] для более общего случая эллиптической полости. В работе Си, Пэриса и Ирвина [4] для бесконечной анизотропной пластины с трещиной при произвольно ориентированном по отношению к трещине одноосном растяжении установлено отсутствие зависимости значений КИН от упругих констант и, как следствие этого, совпадение значений КИН для анизотропного и изотропного материала, определяемых выражениями [4]:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sin^2 \varphi, \quad K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (1.1)$$

где σ – растягивающее напряжение, a – полудлина трещины, φ – угол между направлением действия одноосного растягивающего напряжения и направлением трещины.

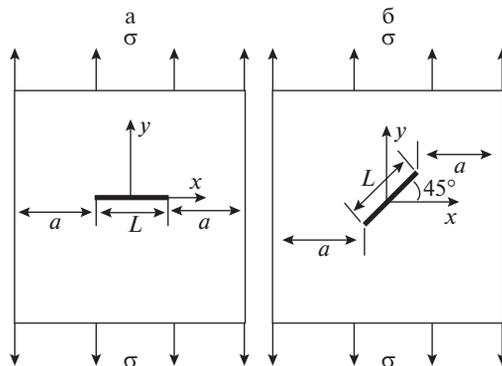


Рис. 1. Варианты ориентации прямолинейной трещины в квадратной анизотропной пластине: а) горизонтальная трещина ($\varphi = 0^\circ$), б) наклонная трещина ($\varphi = 45^\circ$).

Однако для пластин конечных размеров, представляющих непосредственный интерес для приложений, значения КИН зависят от упругих констант и, в частности, от степени анизотропии материала. В литературе имеются лишь несколько численных результатов для КИН трещин в анизотропных пластинах конечных размеров (см., например, [5]– [9]). В статье [6] рассчитывались КИН для ортотропной пластины конечных размеров, но влияние расстояния от трещины до края на значение КИН не исследовалось. В статье [7] приводится исследование влияния ориентации трещины на значение КИН для анизотропной пластины конечных размеров. В статье [8] вычисляются КИН для боковой трещины в анизотропной пластине конечных размеров и исследуется влияние ориентации осей материала на значение КИН. Также в этой статье приводятся значения КИН для центральной трещины в анизотропной пластине конечных размеров и исследуется влияние ориентации осей анизотропного материала и расстояния от вершины трещины до края, но для компактного образца, и не исследуется степень влияния анизотропии. В статье [9] исследуется влияние расстояния от вершины трещины до края образца на значение КИН для изотропного и анизотропного материалов, но анализ выполняется только для цилиндрического образца и не исследуется влияние степени анизотропии. Также исследовалось влияние ориентации трещины на значение КИН для анизотропного материала. Неисследованным остается важный вопрос о влиянии степени анизотропии на взаимодействие трещины с границами тела.

Упомянутые факторы детально исследуются в настоящей работе на примере трещины в упругой анизотропной пластине конечных размеров. Целью является исследование влияния ориентации трещины и степени анизотропии материала на взаимодействие трещины с границей, оцениваемое по величине отношения КИН для анизотропного и изотропного материалов.

2. Постановка задачи. Рассматривается квадратная анизотропная упругая пластина, содержащая внутреннюю одиночную прямолинейную трещину (рис. 1). Исследуются два варианта ориентации трещины по отношению к пластине. Рассматривается одноосное растяжение пластины в вертикальном направлении. Задача решается в 2-мерной постановке в предположении плоского напряженного состояния (решение данной задачи с учетом потери плоской формы получено в [10]). Оси анизотропии упругих свойств параллельны краям пластины. Исследование эффектов влияния степени анизотропии материала и ориентации трещины осуществляется на основе многовариантных вычислительных экспериментов при различных значениях размера “перемычка-

ки” a – расстояния между вершиной трещины и границей пластины. Расчет КИН проводился методом конечных элементов, с использованием конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR [11], который обладает способностью автоматизированных вычислений КИН для изотропных и анизотропных материалов на основе различных методов. В процессе выполнения расчетов варьировались степень анизотропии, ориентация трещины по отношению к осям анизотропии материала и расстояние от вершины трещины до края пластины.

3. Методы определения КИН. Асимптотические выражения для перемещений в окрестности вершины трещины в общем трехмерном случае при наличии трех мод разрушения (ненулевые K_I , K_{II} , K_{III}) для *изотропного* материала определяются соотношениями [12]:

$$\begin{aligned} u_x(r, \alpha) &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ u_y(r, \varphi) &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ u_z(r, \alpha) &= \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $u_x(r, \alpha)$, $u_y(r, \alpha)$, $u_z(r, \alpha)$ – осевые перемещения в системе координат трещины, K_I , K_{II} , K_{III} – КИН для I, II и III мод разрушения, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ в случае ПНС, G – модуль сдвига, r – расстояние до рассматриваемой точки от вершины трещины, α – угол между направлением на точку и осью трещины, ν – коэффициент Пуассона.

Асимптотические выражения для перемещений около вершины трещины в общем трехмерном случае для *анизотропного* материала, полученные с использованием формализма Лехницкого, имеют следующий вид [4, 6, 13]:

$$\begin{aligned} u_x(r, \alpha) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\mu'_1 p_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - \mu'_2 p_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) + \\ &+ \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(p_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - p_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) \\ u_y(r, \alpha) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\mu'_1 q_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - \mu'_2 q_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) + \\ &+ \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(q_2 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_2 \sin \alpha} - q_1 \sqrt{\cos \alpha + \mu'_1 \sin \alpha} \right) \right) \\ u_z(r, \alpha) &= \frac{K_{III} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{\sqrt{\cos \alpha + \mu'_3 \sin \alpha}}{c_{45} + \mu_3 c_{44}} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где μ'_1 и μ'_2 – комплекснозначные корни уравнения четвертой степени (комплексные параметры анизотропного материала [3]).

$$S'_{11} \mu^4 - 2S'_{16} \mu^3 + (2S'_{12} + S'_{66}) \mu^2 - 2S'_{26} \mu + S'_{22} = 0 \quad (3.3)$$

с положительной мнимой частью, S'_{ij} – элементы матрицы упругой податливости материала при использовании обозначений Фойгта в системе координат трещины,

$p_i = S'_{11}\mu_i'^2 + S'_{12} - S'_{16}\mu_i'$, $q_i = S'_{12}\mu_i' + \frac{S'_{22}}{\mu_i'} - S'_{26}$, μ_3' – корень уравнения $C'_{44}\mu^2 - 2C'_{45}\mu + C'_{55} = 0$ с положительной мнимой частью, C'_{ij} – константы матрицы упругих модулей материала в системе координат трещины ($[\mathbf{C}] = [\mathbf{S}]^{-1}$).

В случае изотропного материала перемещения связаны с КИНами формулами (3.1). Чтобы найти перемещения на свободных берегах трещины, подставим $\alpha = \pi$ в уравнение (3.1) и выразим КИН через перемещения для *изотропного* материала:

$$K_I = u_y(r, \pi)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{2G}{1 + \kappa}, \quad K_{II} = u_x(r, \pi)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{2G}{1 + \kappa}, \quad K_{III} = u_z(r, \pi)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} G \quad (3.4)$$

В случае *анизотропного* материала результатом подстановки $\alpha = \pi$ в (3.2), получаем выражения:

$$\{\mathbf{u}\} = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{K}\}, \quad (3.5)$$

где

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u_x(r, \pi) \\ u_y(r, \pi) \\ u_z(r, \pi) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' p_2 - \mu_2' p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{p_2 - p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' q_2 - \mu_2' q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C'_{44}C'_{55} - C'_{45}{}^2}} \end{pmatrix}$$

– матрица 3×3 взаимного влияния трех компонент вектора относительного смещения берегов трещины на три коэффициента интенсивности напряжений.

Результат обращения (3.5) позволяет вычислить КИН через перемещения берегов трещины в случае *анизотропного* материала [9, 14]:

$$\{\mathbf{K}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} [\mathbf{B}]^{-1} \{\mathbf{u}\}, \quad (3.6)$$

где

$$[\mathbf{B}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' p_2 - \mu_2' p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{-p_2 - p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{-\mu_1' q_2 - \mu_2' q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \frac{1}{\det[\mathbf{D}]} \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C'_{44}C'_{55} - C'_{45}{}^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\det[\mathbf{D}] = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' p_2 - \mu_2' p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{p_2 - p_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) \\ \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1' q_2 - \mu_2' q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu_1' - \mu_2'} i \right) \end{vmatrix}$$

Стоит отметить, что если система координат трещины не совпадает с осями анизотропии материала, то константы матрицы податливости и жесткости должны быть преобразованы в систему координат трещины и корни μ'_2 , μ''_2 должны находиться из уравнения 4 степени с константами податливости в системе координат трещины. В случае поворота системы координат матрица перехода от одной системы координат

к другой при повороте в плоскости на угол φ имеет вид: $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и форму-

ла преобразования элементов тензора податливости и жесткости 4 ранга из старой в новую систему координат имеет следующий вид:

$$S'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{ko}Q_{lp}S_{mnop} \quad (3.8)$$

$$C'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{ko}Q_{lp}C_{mnop}$$

где S_{mnop} — элементы тензора податливости в исходной системе координат, S'_{ijkl} — элементы тензора податливости в повернутой системе координат (трещины); C_{mnop} — элементы тензора упругих модулей в исходной системе координат, C'_{ijkl} — элементы тензора упругих модулей в повернутой системе координат (трещины). При использовании формул (3.4) и (3.6) перемещения также нужно преобразовать из глобальной системы координат в систему координат, связанную с трещиной. Данные формулы были запрограммированы в конечно-элементном комплексе PANTOCRATOR [11].

При проведении расчетов относительное расстояние a/L от вершины трещины до границы варьировалось в пределах [1; 10.5], где L — длина трещины (a — абсолютное расстояние от вершины трещины до границы пластины), и принимало дискретные значения: $a/L = 1, 2, 4, 6, 8, 10.5$. Анизотропия предполагалась кубического типа, для описания которой необходимо задать 3 независимых упругих модуля. Отклонение от изотропии характеризовалось параметром ρ :

$$\rho = \frac{E}{2G} - \nu, \quad (3.9)$$

который для изотропного материала принимает значение $\rho = 1$. В расчетах для материала с кубической симметрией использовались значения $\rho = -0.25$, $\rho = 5$ и $\rho = 10$. При проведении расчетов варьировалось значение G при фиксированных значениях упругих модулей E и ν .

При выборе геометрических размеров пластины для задач с горизонтальной и наклонной трещиной обеспечивалось условие влияния на трещину близости только боковых границ, в то время как влиянием верхней и нижней границ можно было бы пренебречь в силу их значительного удаления от вершины трещины. На рис. 2 представлена конечно-элементная модель для задачи с горизонтальной трещиной для случая $a = 4L$. Число степеней свободы составляет 185000. В расчетах использовались восьмиузловые изопараметрические конечные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений в пределах одного конечного элемента. В целях валидации полученных результатов проводилось сравнение полученного конечно-элементного решения для случая $a = 10.5L$ с аналитическим решением для бесконечной пластины и производилось исследование практической сходимости численного решения на различных вложенных сетках для данной задачи на примере изотропного материала. При уменьшении числа степеней свободы в 2 раза результат меняется менее, чем на 1%.

Для других размеров перемычки a конечно-элементная сетка вокруг вершины трещины не менялась, а менялись только размеры пластины. Разбиение увеличенных областей производилось пропорционально длине. Области оставались квадратными.

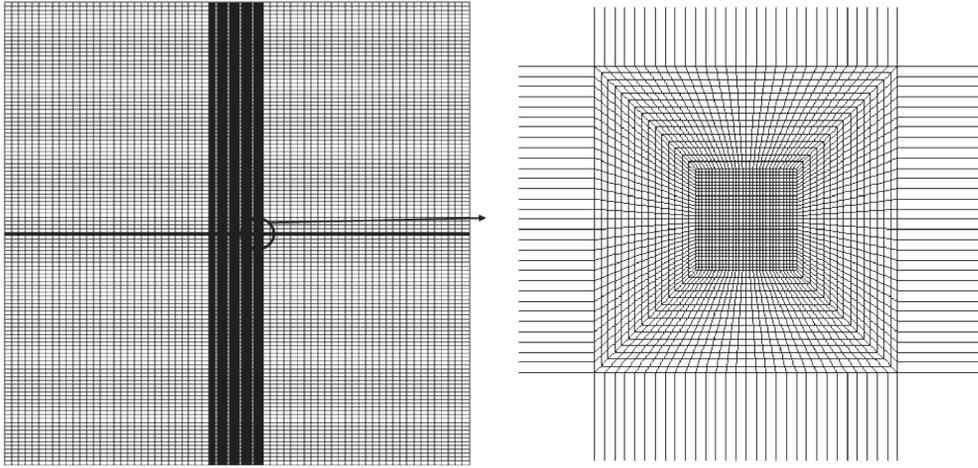


Рис. 2. Конечно-элементная модель пластины с горизонтальной трещиной ($a = 4L$, $\varphi = 0^\circ$).

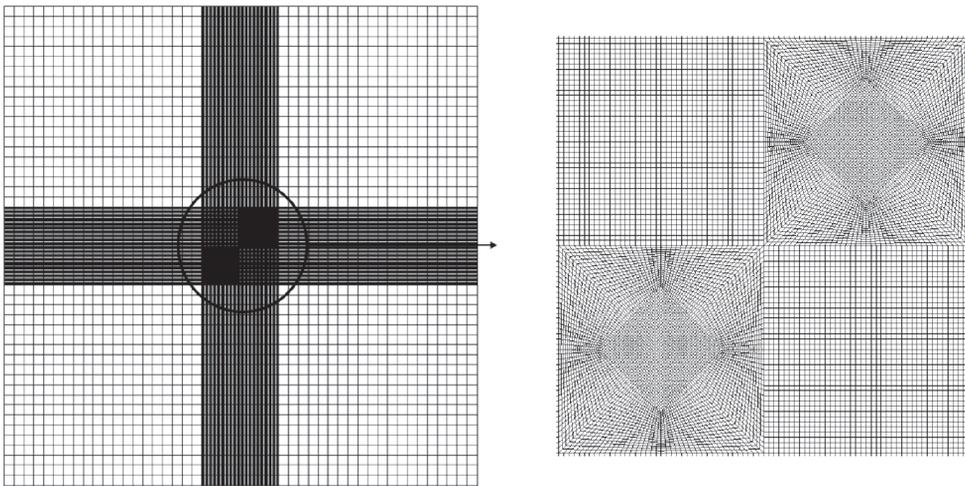


Рис. 3. Конечно-элементная модель пластины с наклонной трещиной ($a = 4L$, $\varphi = 45^\circ$).

На рис. 3 показана конечно-элементная модель для задачи с наклонной трещиной для случая $a = 4L$, $\varphi = 45^\circ$. Число степеней свободы составляет 126000.

Также проводилось исследование практической сходимости решения для данной конечно-элементной модели на примере изотропного материала. При уменьшении числа степеней свободы в 2 раза результат тоже меняется менее, чем на 1%.

В случае наклонной трещины расстояние от вершины трещины до верхнего края также оставалось равным расстоянию до верхней границы. При дальнейшем увеличении a область оставалась квадратной. Конечно-элементные модели фиксировались слева по оси x для исключения твердотельных перемещений.

В задаче с горизонтальной трещиной анализировалось влияние параметров ρ и a/L на K_I . В задаче с наклонной трещиной исследовалось влияние параметров ρ , a/L и φ на K_I и K_{II} .

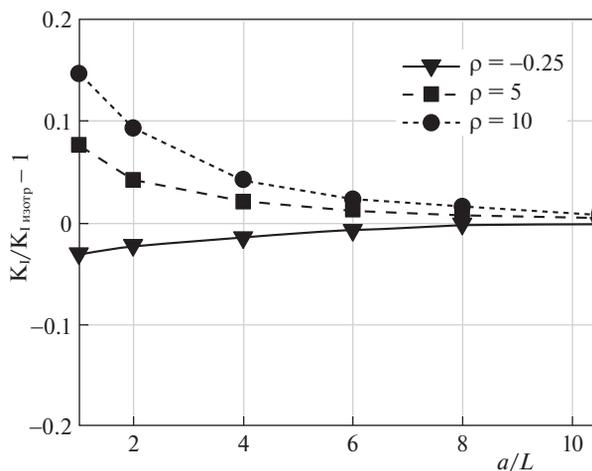


Рис. 4. Зависимость нормированного значения K_I от расстояния до края анизотропной пластины a для горизонтальной трещины $\varphi = 0^\circ$ (нормировано по отношению к значению K_I для изотропного материала).

4. Результаты расчетов. На рис. 4 показана зависимость K_I от размера перемычки a для задачи с горизонтальной трещиной (рис. 1а) для различных степеней отклонения кубической симметрии от изотропии ρ (3.10).

При значительном удалении трещины от края пластины ($a/L > 8$) наблюдается совпадение (с точностью до 1%) значений K_I для анизотропных материалов с прогнозом для изотропного материала. При приближении вершины трещины к границе (уменьшении отношения a/L) наблюдается прогрессирующий рост отличия прогнозов изотропного и анизотропного материалов. Приближение трещины к границе пластины пробуждает влияние анизотропии упругих свойств на КИН. При $\rho > 1$ ($G > G_{\text{изотроп}}$) наблюдается увеличение K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным, а при $\rho < 1$ ($G < G_{\text{изотроп}}$) наблюдается уменьшение K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным случаем.

На рис. 5 показана зависимость K_I от a для задачи с наклонной трещиной (рис. 1б) для различных степеней отклонения кубической симметрии от изотропии ρ , определяемых уравнением (3.9).

Аналогично случаю горизонтальной трещины при значительном удалении наклонной трещины от края пластины ($a/L > 8$) наблюдается совпадение (с точностью до 1%) значений K_I для анизотропных материалов с прогнозом для изотропного материала. Аналогично при приближении вершины наклонной трещины к границе пластины (уменьшении отношения a/L) наблюдается прогрессирующий рост отличия прогнозов изотропного и анизотропного материалов. В рассматриваемом случае наклонной трещины также наблюдается эффект усиления влияния анизотропии упругих свойств на КИН при приближении трещины к границе пластины. В отличие от случая горизонтальной трещины и при $\rho > 1$ ($G > G_{\text{изотроп}}$), и при $\rho < 1$ ($G < G_{\text{изотроп}}$) для наклонной трещины наблюдается увеличение K_I для анизотропного материала в сравнении с изотропным случаем.

На рис. 6 показана зависимость K_{II} от размера перемычки a для задачи с наклонной трещиной для степеней отклонения кубической симметрии от изотропии ρ .

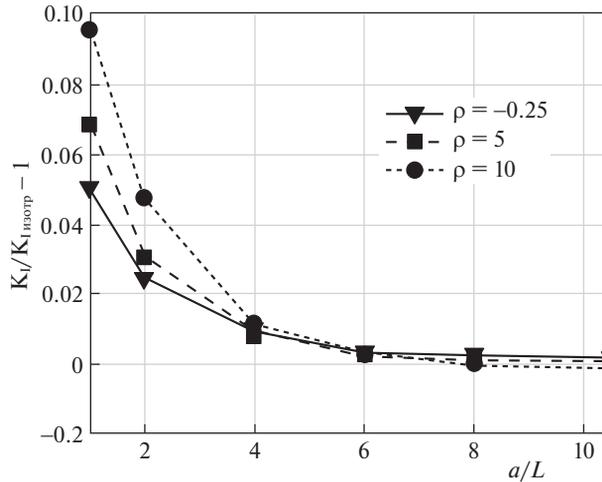


Рис. 5. Зависимость нормированного значения K_I от расстояния до края анизотропной пластины a для наклонной трещины $\varphi = 45^\circ$ (нормировано по отношению к значению K_I для изотропного материала).

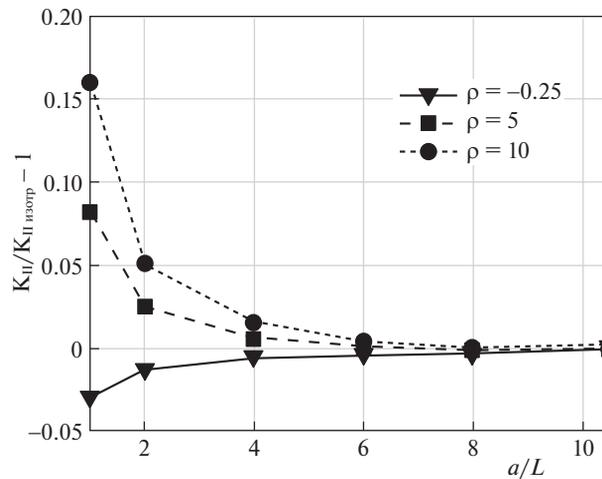


Рис. 6. Зависимость нормированного значения K_{II} от расстояния до края анизотропной пластины для наклонной трещины $\varphi = 45^\circ$ (нормировано по отношению к значению K_{II} для изотропного материала).

Для K_{II} при значительном удалении наклонной трещины от края пластины ($a/L > 8$) также наблюдается совпадение (с точностью до 1%) значений КИН для анизотропных и изотропных материалов. При приближении вершины наклонной трещины к границе пластины (уменьшении отношения a/L) наблюдается прогрессирующий рост отличия K_{II} для изотропного и анизотропного материалов. При $\rho > 1$ ($G > G_{\text{изотроп}}$) наблюдается увеличение K_{II} для анизотропного материала в сравнении с изотропным, а при $\rho < 1$ ($G < G_{\text{изотроп}}$) наблюдается уменьшение K_{II} для анизотропного материала в сравнении с изотропным случаем.

Таблица 1. Отличие расчетных КИН при $a/L = 10.5$ от аналитического решения (1.1) для бесконечной пластины

	$\rho = -0.25$	$\rho = 5$	$\rho = 10$
Погрешность для K_I в задаче с горизонтальной трещиной	0.8%	0.5%	0.08%
Погрешность для K_I в задаче с наклонной трещиной	0.2%	0.4%	0.5%
Погрешность для K_{II} в задаче с наклонной трещиной	0.5%	0.5%	0.4%

При удалении трещины от границы эффект влияния анизотропии исчезает. КИН для изотропного и анизотропного материалов для бесконечной пластины совпадают [4]. В таблице 1 представлены результаты сравнения отличий численных решений для КИН при максимальном моделируемом удалении $a = 10.5L$ от аналитического решения (1.1) для бесконечной пластины [4] для всех рассмотренных вариантов ориентации трещины и значений параметра степени анизотропии $\rho = -0.25$, $\rho = 5$ и $\rho = 10$.

Во всех случаях погрешность вычисления КИН по сравнению с аналитическим решением составляет меньше 1%.

Заключение. На основе проведенных вычислительных экспериментов установлен эффект возрастания влияния анизотропии упругих свойств на значения КИН при приближении вершины трещины к границе пластины. При значительном удалении вершины трещины от края пластины ($a/L > 8$) КИН для анизотропного материала (с точностью до 2%) совпадает с КИН для изотропного материала. При меньших расстояниях ($a/L < 8$) анизотропию материала рекомендуется учитывать.

Результаты конечно-элементного моделирования показали, что для трещин различных ориентаций (различных мод разрушения) с уменьшением расстояния между вершиной трещины и границей пластины наблюдается прогрессирующее усиление влияния анизотропии материала на значения КИН. Отличия в прогнозах КИН для изотропного материала и материала с кубической симметрией превышают 15% для рассматриваемых в расчетах констант материала и случаев нагружения.

Эффект возрастания влияния анизотропии упругих свойств на значения КИН при приближении трещины к границе пластины усиливается с ростом степени анизотропии.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 0784-2020-0027).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мураками Ю., Аоки С., Хасебе Н. и др. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х тт. Т. 1. М.: Мир, 1990. 488 с.
2. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. ГРФМЛ, 1984. 174 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fracture Mech. 1965. № 1. P. 189–203.
5. Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of Elasticity Solutions. Boston: Springer, 2003. 330 p.
6. Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P.A. et al. Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I – $z = 0$ is a symmetric plane // Engng. Fracture Mech. 2005. V. 72. P. 2328–2358.
7. Yu H., Kuna M. Interaction integral method for computation of crack parameters K-T – a review // Eng. Fract. Mech. 2021. № 249. P. 107722.
8. Ozkan U., Nied H.F., Kaya A.C. Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements // Engng. Fracture Mech. 2010. V. 77. P. 1191–1202.

9. *Ranjan S., Arakere N.K.* A Fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys // *J. Eng. Gas Turbines Power*. 2008. V. 130.
10. *Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Товстик П.Е.* Об оценке уровня работоспособности растягиваемой пластины, ослабленной поперечной трещиной // *Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2019. Т. 6(64). С. 338–346.
11. *Семенов А.С.* PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // *Тр. V-й Межд. конф. “Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций”*. СПб.: СПбГПУ, 2003. С. 466–480.
12. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. С. 223–226.
13. *Judt P.O., Ricoeur A., Linek G.* Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Engng. Fracture Mech.* 2015. V. 138. P. 33–48.
14. *Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б.* Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // *Пробл. прочн.* 2015. № 2. С. 61–87.

Effect of Material Anisotropy on the Interaction of a Crack with Free Boundary

A. V. Savikovskii^{a,#}, A. S. Semenov^{a,##}, and M. L. Kachanov^{a,b,c,###}

^a *Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic university, Saint-Petersburg, Russia*

^b *Tufts University, Medford, USA*

^c *Lobachevsky Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russia*

[#] *e-mail: Savikovskii.Artem@yandex.ru*

^{##} *e-mail: semenov.artem@googlemail.com*

^{###} *e-mail: Mark.Kachanov@tufts.edu*

The interaction of a crack in a two-dimensional anisotropic elastic plate of finite dimensions with the plate boundary is considered. It is shown that, with a decrease in the “bridge” between the crack tip and the plate boundary, the anisotropy of the material has an increasing effect on the stress intensity coefficients. The dependence of the mentioned influence for different crack orientations and for different fracture modes is investigated.

Keywords: anisotropic material, stress intensity factor, crack, linear elastic fracture mechanics, Lekhnitskii formalism, finite-element modeling

REFERENCES

1. *Murakami Yu., Aoki S., Hasebe N. et al.* Handbook of Stress Intensity Factors. In 2 Vols. Vol. 1: Moscow: Mir, 1990. 488 p. (in Russian)
2. *Morozov N.F.* Mathematical Problems in the Theory of Cracks. Moscow: Nauka, 1984. 174 p. (in Russian)
3. *Lekhnitsky S.G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Moscow: Nauka, 1977. 416 p. (in Russian)
4. *Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // *Int. J. Fracture Mech.*, 1965, no. 1, pp. 189–203.
5. *Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I.* Handbook of Elasticity Solutions. Boston: Springer, 2003. 330 p.
6. *Banks-Sills L., Hershkovitz I., Wawrzynek P.A. et al.* Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I— $z = 0$ is a symmetric plane // *Engng. Fracture Mech.*, 2005, vol. 7, pp. 2328–2358.
7. *Yu H., Kuna M.* Interaction integral method for computation of crack parameters K-T – a review // *Eng. Fract. Mech.*, 2021, no. 249, pp. 107722.
8. *Ozkan U., Nied H.F., Kaya A.C.* Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements // *Engng. Fracture Mech.*, 2010, vol. 77, pp. 1191–1202.

9. *Ranjan S., Arakere N.K.* A Fracture-mechanics-based methodology for fatigue life prediction of single crystal nickel-based superalloys // *J. Eng. Gas Turbines Power*, 2008, vol. 130.
10. *Morozov N.F., Semenov B.N., Tovstik P.E.* On assessing the performance level of a stretched plate weakened by a transverse crack // *Vestn. St. Petersburg State Univ. Maths. Mech. Astron.*, 2019, vol. 6 (64), pp. 338–346.
11. *Semenov A.S.* PANTOCRATOR – finite element software package focused on solving nonlinear problems in mechanics // *Tr. V-th Int. Conf. “Scientific and technical problems of predicting the reliability and durability of structures”*. St. Petersburg: SPbGPU, 2003. pp. 466–480.
12. *Kachanov L.M.* Fundamentals of Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1974. pp. 223–226. (in Russian)
13. *Judt P.O., Ricoeur A., Linek G.* Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // *Engng. Fracture Mech.*, 2015, vol. 138, pp. 33–48.
14. *Semenov A.S., Semenov S.G., Getsov L.B.* Methods for calculating the growth rate of fatigue cracks, creep and thermal fatigue in poly- and single-crystal gas turbine blades // *J. Strength Mater.*, 2015, no. 2, pp. 61–87.

УДК 539.374

К РАСЧЕТАМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ СБОРКИ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

© 2022 г. А. А. Буренин^{1,*}, А. В. Ткачева¹

¹ *Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия*

**e-mail: burenin@iacp.dvo.ru*

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.

После доработки 02.05.2022 г.

Принята к публикации 15.05.2022 г.

Рассчитываются изменения температурных напряжений, включая итоговые остаточные напряженные состояния и формируемый натяг в сборке, в процессе горячей посадки трубы на вал, изготовленные из материалов с упруговязкопластическими свойствами. Расчеты проводятся разрешением соответствующей осесимметричной задачи Гадолина, в которой детали сборки имеют одинаковую длину. Обращается внимание на возможную сингулярность в задании краевых условий задачи и предлагается способ исключения влияния данной особенности на результаты расчетов.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, температурные напряжения, задача Гадолина, горячая посадка, сборка с натягом

DOI: 10.31857/S0032823522040051

1. Введение. Основная сложность в разрешении краевых задач упругопластического деформирования с использованием теории течения в интенсивно деформируемых пластических областях [1] связана с тем, что в таких областях задача ставится в скоростях, а в области упругого деформирования – в перемещениях. С целью выполнения условий непрерывности перемещений на упругопластических границах следует определить распределение перемещений в пластической области, что может оказаться совсем не простой задачей [2]. Если же ограничиться выполнением на границах областей пластического течения только условий непрерывности напряжений и скоростей, то не исключается запись ошибочного решения [3].

Положение существенно упрощается, когда уравнение равновесия, записанное в скоростях в области пластического течения, удастся проинтегрировать. Однако обеспечить это возможно только принятием существенных ограничений в задаваемой геометрии деформируемых тел и задаваемых внешних нагрузок. Иногда данной интегрируемости способствует принятие в качестве пластических потенциалов классических кусочно-линейных поверхностей нагружения [4, 5] в пространстве главных напряжений. Преимущественно таким способом получили свое решение одномерные задачи упругопластического и упруговязкопластического деформирования [6–15]. Среди подобных задач следует выделить такие, где изучается не только состояние упругопластического тела, но и эволюция таких состояний в зависимости от меняющегося во времени термомеханического воздействия, то есть упругопластические процессы [6, 11, 13–17]. Итогом завершения таких процессов после полной разгрузки и остывания оказывается новое состояние продеформированного тела, отличное от первоначального не только своей новой геометрией, но и присутствием в нем сформировавшегося

распределения остаточных деформаций и напряжений. Именно итоговая геометрия и итоговое распределение остаточных напряжений часто являются главной целью при решении подобных задач. Это в полной мере относится к задачам, призванным обеспечить математическое моделирование технологической операции сборки цилиндрических деталей способом горячей посадки [18–24, 27]. В отечественной литературе [25–27] данную задачу теории температурных напряжений называют задачей Гадолина. Итоговое напряженное состояние после полного остывания обеспечивает требуемый натяг в сборке, необходимый для функционирования соединения.

Упругопластическое состояние элементов сборки возможно рассчитать аналитически [18, 21, 27]; операцию горячей посадки представляют последовательностью подобных состояний при изменениях температуры [21–24, 27]. Производством тепла за счет необратимого деформирования в таких задачах, как правило, пренебрегают, рассматривая их в рамках несвязанной теории температурных напряжений. Очевидно, что последовательность состояния элементов сборки в течение технологической операции удобнее рассматривать с помощью программно-технических средств, используя точное решение задачи о состоянии элементов сборки на каждом временном шаге расчетов. Данное решение возможно построить даже в случае зависимости предела текучести от температуры [21–24]. Когда вместе с пределом текучести зависимыми от температуры полагаются иные термомеханические постоянные (упругие модули, удельная теплоемкость и др.), то решение сводится [24] к интегрированию на каждом временном шаге расчетов совокупности систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой из возможных областей обратимого и необратимого деформирования. В этом состоит основное преимущество, предоставляемое использованием кусочно-линейных условий пластического течения для решения одномерных краевых задач теории температурных напряжений в условиях плоских деформированных [19, 21, 27] или напряженных [20, 24] состояний.

В настоящей статье, сохраняя осевую симметрию, откажемся от одномерности задачи. Будем считать торцы элементов сборки свободными, а на контактной поверхности полагаем возможным осевое относительное смещение в материалах сопрягаемых деталей сборки.

2. Основные зависимости математической модели. Считаем, что допускаемые деформируемым материалом деформации являются малыми и для них

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

В (2.1) \mathbf{d} , \mathbf{e} , \mathbf{p} – полные деформации, упругие и пластические их составляющие, \mathbf{u} – вектор перемещений. Следствием законов сохранения импульса и энергии являются дифференциальные зависимости

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Следствие закона сохранения импульса (2.2) записано здесь в форме уравнений равновесия, то есть силами инерции и массовыми силами в (2.2) пренебрегаются. В (2.2) $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений. В скалярном уравнении баланса внутренней энергией (2.3), которое является следствием закона сохранения энергии ξ – массовая плотность распределения внутренней энергии, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор скорости деформации Эйлера, t – время, ρ – плотность, \mathbf{q} – вектор потока тепла. В рассматриваемом случае следствием (2.3) и второго закона термодинамики оказываются соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} \quad (2.4)$$

$$\psi = \xi - sT, \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -s, \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = T; \quad \xi = \xi(\mathbf{e}, s), \quad \psi = \psi(\mathbf{e}, T)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

Зависимость (2.4) называют формулой Мурнагана [4, 6], соотношение (2.5) – уравнением баланса энтропии [6, 28]. В нем s – плотность распределения энтропии, T – температура, \mathbf{J} – вектор потока энтропии. Консервативные и диссипативные составляющие процесса деформирования возможно разделить, если принять, что термодинамический потенциал (свободная энергия) является функцией только обратимых (упругих) деформаций, то есть принять гипотезу, что $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$. Именно в условиях принятия такой гипотезы записаны соотношения (2.4) и (2.5), и именно функция $\psi(\mathbf{e}, T)$ задает консервативную составляющую процесса деформирования. Задание диссипативной составляющей процесса деформирования связано с заданием пластического потенциала, роль которого выполняет поверхность нагружения $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ (k – предел текучести) в шестимерном пространстве напряжений.

В простейшем случае задания функции $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$ в форме квадратичной функции инвариантов тензора \mathbf{e} (материал изотропен) из (2.4) следуют известные зависимости закона Дюамеля–Неймана [28]

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr} \mathbf{e} - 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (2.6)$$

Здесь λ, μ – упругие постоянные Ламе, α – коэффициент линейного расширения, T_0 – температура свободного состояния тела (комнатная температура), $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – коэффициент всестороннего сжатия, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга.

Если в уравнении баланса энтропии (2.5) принять условия изотропии термомеханических свойств деформируемого тела и связать поток тепла с температурной законом Фурье, то в простейшем случае, возможно записать [6] уравнение теплопроводности в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p) + w(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

В (2.7) c – удельная теплоемкость деформируемого материала, a – коэффициент температуропроводности, δ – коэффициент связанности, $w(\mathbf{x}, t)$ задаваемые источники тепла в теле (\mathbf{x} – радиус вектор места рассматриваемой точки тела). Если в (2.7) пренебречь теплом, производимым за счет деформирования по сравнению с теплом, поступающих от внешних источников, то будем иметь

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta + w(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

Когда распределение температуры рассчитывается согласно (2.8) независимо от процесса деформирования, то такая несвязанная теория называется теорией температурных напряжений. Дальнейший расчет будем проводить в рамках такой теории.

Необратимые (пластические) деформации в теле производятся только при напряжениях, соответствующих поверхности нагружения (текучести) $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$, где

$k = k(\theta)$ – предел текучести материала, соответствующий местной температуре $\theta(\mathbf{x}, t)$. При принятии условий принципа максимума Мизеса [4, 5] функция $f(\boldsymbol{\sigma}, k)$ оказывается пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения

$$d\mathbf{e}^p = d\zeta \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad d\zeta > 0 \quad (2.9)$$

В качестве условия пластического течения (уравнения поверхности нагружения) далее будем использовать условие максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса [4])

$$(\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = 2k^2 \quad (2.10)$$

В пространстве главных напряжений σ_j уравнение (2.10) задает цилиндрическую поверхность наклонного цилиндра Мизеса [5], осью которого является гидростатическая ось $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; η – коэффициент вязкости в условиях вязкопластического течения.

Зависимость предела текучести от температуры принимаем в форме

$$k = k(\theta) = k_0 y; \quad y = \left(\frac{\theta_r - \theta}{\theta_r} \right)^2; \quad \theta_r = \frac{T_r - T}{T_0} \quad (2.11)$$

В (2.11) T_r – температура плавления материала. В ряде случаев для зависимости предела текучести от температуры принимается более простая линейная функция [18–21].

3. Сборка горячей посадки. Деталью предстоящей сборки считаем сплошной цилиндр (вал) длиной $2h$ и радиуса r_0 и полый цилиндр той же длины, ограниченный в цилиндрической системе координат r, φ, z поверхностями $r = R_1, r = R_2$ ($r_0 \leq R_1 < R_2$). Вал называем охватываемой деталью сборки, а полый цилиндр – охватывающей деталью. Охватывающую деталь сборки нагреваем до некоторой назначаемой температуры $\theta = \theta_*$ и помещаем в нее охватываемую. Геометрические размеры r_0 и R_1 подбирают так, чтобы детали сборки непосредственно за моментом посадки получили бы общую граничную поверхность $r = R$ (рис. 1).

Материалы элементов сборки могут быть одинаковыми, но могут и различаться. Уравнение теплопроводности (2.8) запишем в цилиндрической системе координат, учитывая осевую симметрию задачи

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial t} = a_m \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2} \right) \quad (3.1)$$

Здесь и далее $m = 1, 2$; $m = 1$ для охватываемой и $m = 2$ для охватывающей детали сборки. Внутренние задаваемые источники тепла считаем отсутствующими. Начальными условиями температурной задачи становятся

$$\begin{aligned} \theta_1(r, z, 0) &= 0 & \text{при} & \quad 0 \leq r \leq R, \quad -h \leq z \leq h \\ \theta_2(r, z, 0) &= \theta_* & \text{при} & \quad R \leq r \leq R_1, \quad -h \leq z \leq h \end{aligned} \quad (3.2)$$

Граничные условия обеспечивают теплообмен между деталями сборки и окружающей средой. Следовательно, при $t > 0$ имеем на поверхности контакта $r = R$

$$\theta_1(R, z, t) = \theta_2(R, z, t), \quad \chi_1 \frac{\partial \theta_1(R, z, t)}{\partial r} = \chi_2 \frac{\partial \theta_2(R, z, t)}{\partial r} \quad \text{при} \quad -h \leq z \leq h \quad (3.3)$$

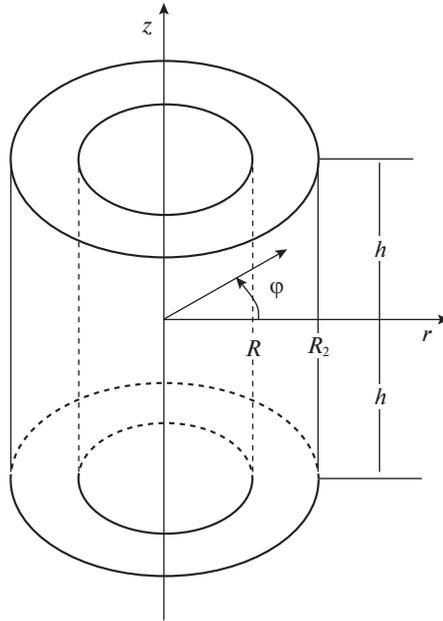


Рис. 1

Здесь χ_1 и χ_2 – коэффициент теплопроводности материалов сопрягаемых деталей сборки. На свободных поверхностях сборки задается теплообмен с окружающей средой. На боковой поверхности $r = R_2$ охватываемой детали имеем

$$\chi_2 \frac{\partial \theta_2 (R_2, z, t)}{\partial z} = \beta_2 \theta_2 (R_2, z, t) \quad \text{при} \quad -h \leq z \leq h \quad (3.4)$$

В (3.4) β_2 – коэффициент теплоотдачи от поверхности охватываемой детали сборки в окружающую среду, находящуюся при комнатной температуре $\theta = 0$. Далее принимаем $\beta_2 = \text{const}$. Подобную теплоотдачу задаем и на торцевых плоскостях сборки $z = \pm h$. Считаем при этом, что коэффициент теплоотдачи от материала охватываемой детали также постоянен и равен β_1

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial \theta_1 (r, \pm h, t)}{\partial z} &= \beta_1 \theta_1 \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq R \\ \chi_2 \frac{\partial \theta_2 (r, \pm h, t)}{\partial z} &= \beta_2 \theta_2 \quad \text{при} \quad R \leq r \leq R_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Замыкаем задачу, вследствие ее симметрии, требованием

$$\frac{\partial \theta_1 (r, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial \theta_2 (r, 0, t)}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

Областью расчетов, следовательно, является (рис. 1) верхняя половина сборки. Дополнительные трудности такие расчеты не содержат, разработаны и апробированы соответствующие алгоритмы, имеются пользовательские программы расчетов. Не останавливаясь здесь на этом считаем, что распределение температуры в материалах сборки известно (рассчитано) в каждый момент времени после посадки, вплоть до

полного остывания, когда температура выровняется и сравняется с комнатной температурой.

4. Температурные напряжения. В рассматриваемом случае осевой симметрии независимыми переменными задачи остаются пространственные координаты r, z и время t . Искомыми зависимыми переменными являются компоненты вектора перемещений $u_r = u_r(r, z, t)$, $u_z = u_z(r, z, t)$ и тензора напряжений $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, z, t)$, $\sigma_{rz} = \sigma_{rz}(r, z, t)$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r, z, t)$. Для полных деформаций (2.1) имеем

$$d_{rr} = u_{r,r}, \quad d_{zz} = u_{z,z}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \quad (4.1)$$

Уравнения равновесия, следующие из (2.1), в рассматриваемом случае цилиндрических координат запишутся в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r}^{(m)} + \sigma_{rz,z}^{(m)} + r^{-1}(\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}) &= 0 \\ \sigma_{rz,r}^{(m)} + \sigma_{zz,z}^{(m)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь, также как и ранее, $m = 1$ для охватываемой детали сборки, $m = 2$ для охватывающей детали. Напряжения вычисляются через распределения деформации и температуры зависимостями закона Дюамеля–Неймана (2.6). В цилиндрической системе координат они принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(m)} &= (\lambda_m + 2\mu_m)(u_{r,r}^{(m)} - p_{rr}^{(m)}) + \lambda_m(r^{-1}u_r^{(m)} + u_{z,z}^{(m)} - p_{\varphi\varphi}^{(m)} - p_{zz}^{(m)}) - 3\alpha_m K_m T_0 \theta_m \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} &= (\lambda_m + 2\mu_m)(r^{-1}u_r^{(m)} - p_{\varphi\varphi}^{(m)}) + \lambda_m(u_{r,r}^{(m)} + u_{z,z}^{(m)} - p_{rr}^{(m)} - p_{zz}^{(m)}) - 3\alpha_m K_m T_0 \theta_m \\ \sigma_{rz}^{(m)} &= (\lambda_m + 2\mu_m)(u_{z,z}^{(m)} - p_{zz}^{(m)}) + \lambda_m(r^{-1}u_r^{(m)} + u_{r,r}^{(m)} - p_{\varphi\varphi}^{(m)} - p_{rr}^{(m)}) - 3\alpha_m K_m T_0 \theta_m \\ \sigma_{rz}^{(m)} &= 2\mu_m \left(\frac{1}{2}(u_{z,r}^{(m)} + u_{r,z}^{(m)}) - p_{rz}^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Первоначально с развитием процесса деформирования пластические деформации в материалах сборки отсутствуют и в (3.3) компоненты тензора пластических деформаций следует положить равными нулю. Они развиваются только при достижении напряжениями поверхности нагружения (2.10), то есть при выполнении условия

$$\left(\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}\right)^2 + 6\left(\sigma_{rz}^{(m)}\right)^2 = \frac{8}{3}k^2 \quad (4.4)$$

Соотношение (4.4) служит начальным условием для дальнейшего роста пластических деформаций в развивающейся области пластического течения. В данной области вязкопластического течения из (2.10) следуют зависимости, задающие скорости пластических деформаций $\mathbf{\varepsilon}_m^p$.

$$\begin{aligned} \mathbf{\varepsilon}_m^p &= \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma_m - k_m}{\Sigma_m} \boldsymbol{\tau}^{(m)}, \quad \zeta = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\Sigma_m - 1}{k_m} \right) \\ \Sigma_m^2 = \boldsymbol{\tau}^{(m)} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(m)} &= \frac{3}{2} \left(\left(\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}\right)^2 + 6\left(\sigma_{rz}^{(m)}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если считать, что в некоторый текущий момент времени пластические деформации достигли уровня $\tilde{p}_{rr}^{(m)}$, $\tilde{p}_{\varphi\varphi}^{(m)}$, $\tilde{p}_{zz}^{(m)}$ и $\tilde{p}_{rz}^{(m)}$, то для их расчета на последующем временном шаге можно использовать зависимости, следующие из ассоциированного закона пластического течения

$$p_{rr}^{(m)} = \left(2\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)}\right) d\zeta \Delta t + \tilde{p}_{rr}^{(m)}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\varphi\varphi}^{(m)} &= \left(2\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{zz}^{(m)}\right) d\zeta\Delta t + \tilde{p}_{\varphi\varphi}^{(m)} \\
 p_{zz}^{(m)} &= \left(2\sigma_{zz}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}\right) d\zeta\Delta t + \tilde{p}_{zz}^{(m)} \\
 p_{rz}^{(m)} &= 12\sigma_{rz}^{(m)} d\zeta\Delta t + \tilde{p}_{rz}^{(m)}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

В (4.6) Δt – шаг по времени, $d\zeta > 0$.

Следует иметь в виду, что при повторном (обратным) пластическом течении [6, 21, 23, 27], которое с неизбежностью возникает в случае значительного первоначального нагрева охватываемой детали сборки, пластические деформации правой части (4.6) обязаны включать в себя необратимые деформации, накопленные при активном пластическом течении. Для этой цели алгоритмически следует предусмотреть формирование массива накапливаемых необратимых деформаций [21], его хранение и использование в продолжающихся дальнейших расчетах. При расчетах повторных вязкопластических течений в условиях остывания сборки согласно (4.6) это совершенно необходимо.

Когда в расчетах изменяющихся напряженных состояний используются кусочно-линейные условия пластического течения, то повторное пластическое течение при остывании сборки соответствует, как правило, грани поверхности текучести, противоположной той грани, в условиях которой протекало пластическое течение при активном процессе термомоформирования. Отметим в этой связи публикацию [15], где при использовании условия пластичности максимальных касательных напряжений Треска–Сен-Венана показано, что в условиях ускоренного и после замедленного вращения упругопластического цилиндра возникают области течения, соответствующие всем граням и ребрам наклонной призмы Треска: трем граням и трем ребрам при ускоренном вращении и тем оставшимся граням и трем оставшимся ребрам при замедлении вращения. Использование кусочно-линейных пластических потенциалов приводит к разделению области пластического течения на части, в которых течение подчинено разным граням и ребрам поверхности текучести [17, 21–24, 27]. В рассматриваемом случае гладкой поверхности нагружения (боковая поверхность наклонного цилиндра Мизесса [4]) положение значительно упрощается, но все же формированию массива данных о накапливаемых пластических деформациях в условиях активного пластического течения должно внимание следует уделить. Сведения о повторных пластических течениях, которые могут возникнуть в остывающей сборке, можно получить из [23], где подобная по постановке задача решается с использованием кусочно-линейного условия пластического течения максимальных приведенных напряжений (условия Ишлинского–Ивлева) [5]. В областях обратимого (упругого) деформирования при разгрузке компоненты пластических деформаций в (4.3) в рассматриваемом случае остаются постоянными.

Обратимся к постановке граничных условий механической части задачи. На внешних поверхностях формирующейся сборки имеем однородные краевые условия

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^{(1)}(r, h, t) = \sigma_{zz}^{(1)}(r, -h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)}(r, h, t) = \sigma_{rz}^{(1)}(r, -h, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq R \\
 \sigma_{zz}^{(2)}(r, h, t) = \sigma_{zz}^{(2)}(r, -h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(2)}(r, h, t) = \sigma_{rz}^{(2)}(r, -h, t) = 0 \quad \text{при} \quad R \leq r \leq R_2 \\
 \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, z, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R_2, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad -h \leq z \leq h
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

На контактной поверхности $r = R$ полагаем непрерывными радиальные компоненты вектора перемещений и тензора напряжений

$$u_r^{(1)}(R, z, t) = u_r^{(2)}(R, z, t), \quad \sigma_{rr}^{(1)}(R, z, t) = \sigma_{rr}^{(2)}(R, z, t)
 \tag{4.8}$$

Возможность проскальзывания материалов элементов сборки на их общей поверхности $r = R$ и возникающее при этом трение зададим зависимостями

$$\sigma_{rz}^{(1)}(R, z, t) = \sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t), \quad u_z^{(1)}(R, z, t) = u_z^{(2)}(R, z, t), \quad (4.9)$$

при $|\sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t)| \leq g(z, t)$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{(1)}(R, z, t) = -\sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t) = f(z, t) & \left| \sigma_{rr}^{(2)}(R, z, t) \right| + \\ & + \phi(z, t) \left| v_z^{(1)}(R, z, t) - v_z^{(2)}(R, z, t) \right|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

при $|\sigma_{rz}^{(2)}(R, z, t)| > g(z, t)$

В (4.9) и (4.10) $g(z, t)$, $f(z, t)$ и $\phi(z, t)$ – задаваемые параметры трения. Первый из них $g(z, t)$ – параметр Прандтля, второй $f(z, t)$ – параметр (коэффициент) сухого трения скольжения и $\phi(z, t)$ – коэффициент вязкого трения. Зависимость их от пространственной координаты z и времени t определяется зависимостью их от местной температуры $\theta(z, t)$.

$$\begin{aligned} g(z, t) = g_0 y, \quad f(z, t) = f_0 y, \quad \phi = \phi_0 y \\ y = \left(\frac{\theta_r - \theta}{\theta_r} \right)^2, \quad \theta_r = \frac{T_r - T_0}{T_0} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь g_0 , f_0 , ξ_0 – значения параметров при комнатной температуре, θ_r – безразмерная температура плавления, наименьшее для материалов сопрягаемых деталей.

На линиях $z = \pm h$ и $r = R$ присутствует сингулярность в граничных условиях. Это с необходимостью приведет к соответствующим следствиям в расчетах. С целью избежать данных особенностей воспользуемся искусственным отходом от этих линий, предполагая, что в окрестностях их $h - \delta \leq z \leq h$ и $-h \leq z \leq -h + \delta$ зависимости (4.11) дополняются соответственно сомножителями

$$\begin{aligned} \psi^+(z) = 1 - \left(\frac{z - h + \delta}{\delta} \right)^2 \quad \text{при} \quad h - \delta \leq z \leq h \\ \psi^-(z) = -\frac{(z + h)(z + h - 2\delta)}{\delta^2} \quad \text{при} \quad -h \leq z \leq -h + \delta \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$g(z, t) = g_0 y \psi^\pm(z, \delta); \quad f(z, t) = f_0 y \psi^\pm(z, \delta); \quad \phi = \phi_0 y \psi^\pm(z, \delta) \quad (4.13)$$

Зависимости (4.13) сохраняют симметрию сборки относительно плоскости $z = 0$. Таким способом в качестве расчетной области имеем возможность принять половину $z \geq 0$ сборки. На плоскости симметрии $z = 0$ потребуем

$$u_z^{(1)}(r, 0, t) = u_z^{(2)}(r, 0, t) = 0, \quad \sigma_{rz}^{(1)}(r, 0, t) = \sigma_{rz}^{(2)}(r, 0, t) = 0 \quad (4.14)$$

Также следует иметь ввиду, что на оси симметрии $r = 0$ выполняются условия

$$u_r^{(1)}(0, z, t) = 0; \quad \sigma_{rz}^{(1)}(0, z, t) = 0 \quad (4.15)$$

5. Результаты расчетов. Приближенные численные расчеты проводились следуя конечно-разностному аналогу записанных выше дифференциальных уравнений. Область расчетов ($0 \leq r \leq R_1$; $0 \leq z \leq h$) разбивалась сеткой, составленной из четырехугольных элементов. Искомые величины аппроксимировались в узлах сетки конечными разностями. В тех узлах, которые примыкают к границам элементов сборки, или к поверхности их соединения, или к продвигающимся поверхностям упруго-вязкопластических границ, для разностных представлений искомых значений зависимых

Таблица 1

	k_0 , МПа	λ , МПа	μ , МПа	$\alpha \times 10^6$	$a \times 10^{-6}$, м ² /с	χ , Вт/(мК)	T_p , °С	β , Вт/(мК)
сталь	360	97.06	82.68	11.1	17.35	67.78	1400	7.5
латунь	290	58.26	38.84	19.1	35.68	113	937	7.5
дюраль	255	41.53	27.70	22.9	50	188	660	10.0

неизвестных последовательно использовались приведенные ранее граничные условия и условия непрерывности радиальных компонент перемещений и напряжений на упругопластических границах. После разрешения полученной таким способом системы алгебраических уравнений, производился последующий шаг по времени. На каждом таком временном шаге отслеживалось возможное возникновение области вязкопластического течения, последующее продвижение границы данной области, включая смену направления движения такой упруговязкопластической границы и исчезновение области пластического течения. В условиях остывания сборки при обратимом деформировании ее деталей отслеживался момент возможного возникновения повторного (обратного) пластического течения [23, 27]. Накопленные в активном процессе пластические деформации учитывались при расчетах повторных течений за счет внесения их в последние слагаемые правых частей равенств (4.8). В этом случае они не меняются со временем, но разные в каждой точке деформируемых деталей сборки.

При проведении расчетов будем считать, что упругие модули (коэффициенты Ламе) материалов частей сборки λ_m и μ_m , коэффициенты их теплопроводности χ_m в законе теплопроводности Фурье, коэффициенты β_m теплоотдачи в окружающую среду являются постоянными, не зависящими от температуры. Заметим, что такое предположение делается только для упрощения расчетов. Его можно обосновать тем, что до настоящего времени не существует надежных экспериментальных данных о таких зависимостях. В таблице 1 приведены принимаемые значения постоянных для некоторых материалов, процессы соединения элементов сборки из которых иллюстрируются далее графически.

Анализ результатов численных расчетов начинаем с представления графических зависимостей о распределении остаточных напряжений в сборке после ее остывания до комнатной температуры. Так на рис. 2 указано такое распределение для сборки из двух стальных деталей, термомеханические параметры которых одинаковы (таблица 1) и охватывающая деталь ($RR_1^{-1} = 0.6$) сборки до момента посадки нагревалась до температуры 600°С.

Совершенно необходимо заметить, что значение параметра q_0 ($q_0 = 0.06k_0$), задающего момент проскальзывания материалов на поверхности контакта $r = R$, мало сказывается на уровень и распределение как итоговых остаточных напряжений, так и текущих напряжений в процессе посадки. Проскальзывание наступает непосредственно за моментом посадки из-за значительной разности температур сопрягаемых деталей сборки и, как следствие, быстрого роста контактных напряжений. Вследствие малых скоростей проскальзывание совершенно незначительным оказывается влияние вязкого трения, то есть значений коэффициента ϕ_0 . В то же время уровень температурных напряжений удивительно чувствителен к изменениям в значениях коэффициента сухого трения скольжения Кулона f_0 . Для сравнения приведем распределения остаточных напряжений, изменив f_0 со значения $f_0 = 0.22$ (рис. 2) до значения $f_0 = 0.35$ (рис. 3). Итоговый натяг в сборке увеличивается при этом почти вдвое (сравни рис. 3 и рис. 2).

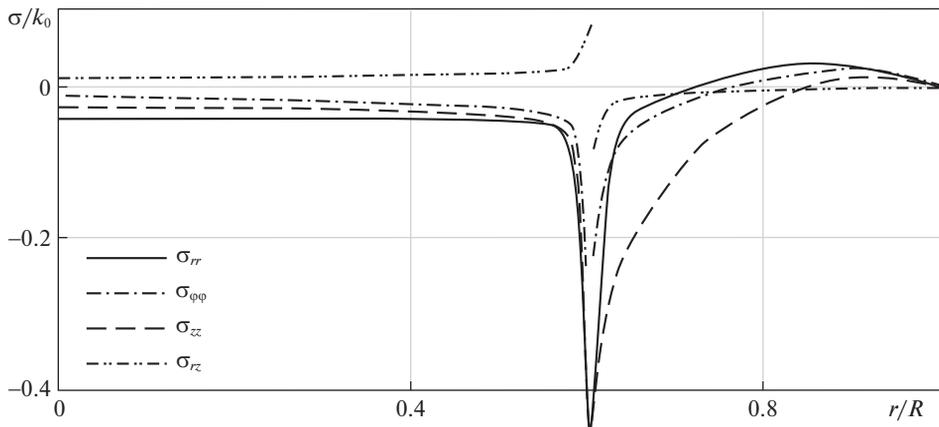


Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в сборке ($T_0 = 600^\circ\text{C}$, $g_0 = 0.06k_0$, $f_0 = 0.22$, $\phi_0 = 0.8\sqrt{\rho k_0}$, $RR_2^{-1} = 0.6$) после ее остывания.

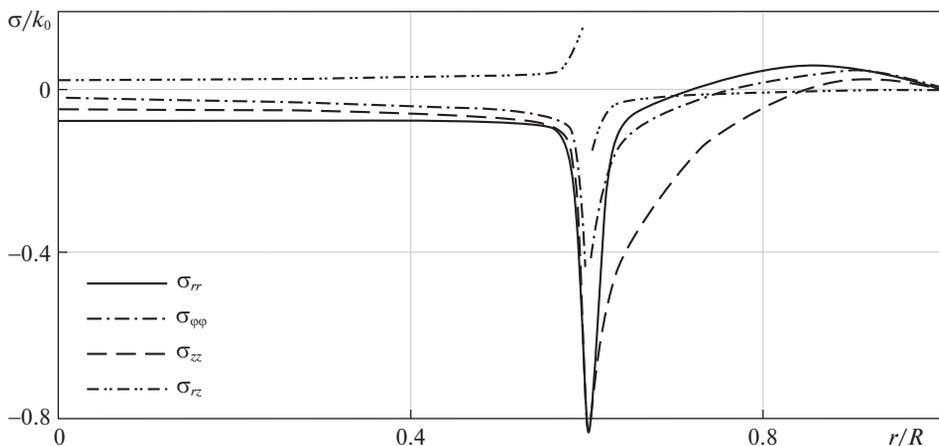


Рис. 3. Остаточные напряжения при $f_0 = 0.35$.

Изменения в геометрии сопрягаемых деталей и их материалах иллюстрируют графические зависимости на рис. 4 и 5. На первом из них (рис. 4) охватывающая деталь сборки считается существенно более тонкой в сравнении с охватываемой, на втором (рис. 5) – наоборот. Начальное значение коэффициента трения скольжения в таких расчетах принималось одинаковым ($f_0 = 0.26$). В первом случае на массивный стальной вал насаживалась труба, изготовленная из латуни (таблица 1, $T_0 = 600^\circ\text{C}$); во втором охватываемый вал из дюралюминия сжимался массивной стальной трубой (таблица 1, $T_0 = 600^\circ\text{C}$).

На плоскости $z = h$ напряжение $\sigma_{rz}(r, h) = 0$, а на поверхности $r = R$ $\sigma_{rz}(r, h) \neq 0$. Следовательно, на линии $r = R$ и $z = h$ имеется разрыв в граничных условиях. С целью избавления от подобной сингулярности в крайних условиях (4.9) и (4.10), задаю-

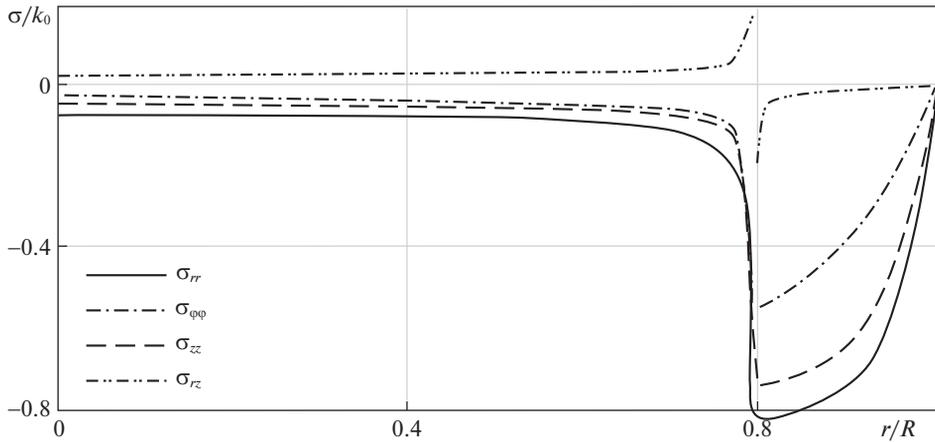


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в сборке: сталь-латунь $f_0 = 0.26$, $RR_2^{-1} = 0.8$.

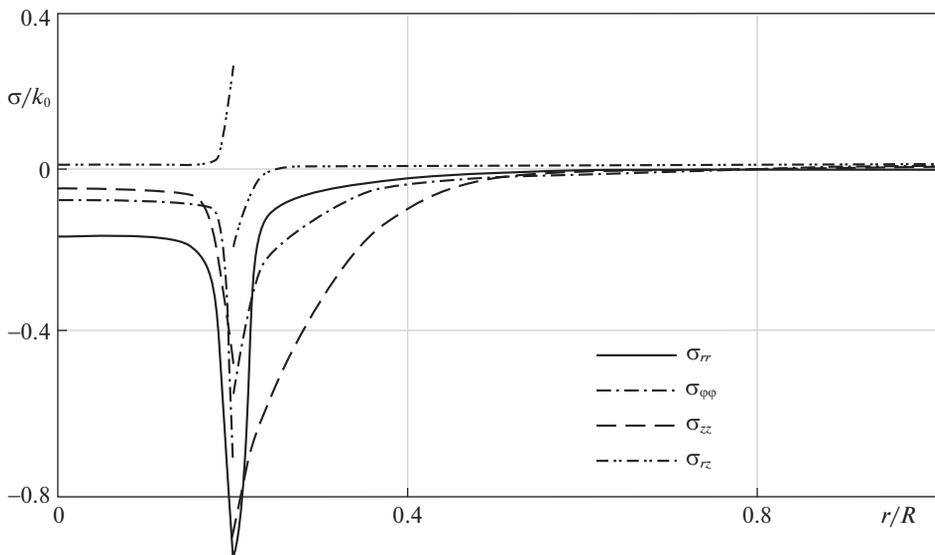


Рис. 5. Распределение остаточных напряжений в сборке: дюралюминий – сталь $f_0 = 0.26$, $RR_2^{-1} = 0.2$.

щих трение на поверхности контакта $r = R$, в δ – окрестностях торцов $z = \pm h$ параметры трения уточнялись с помощью зависимостей (4.12) и (4.13). Таким способом значения δ оказывалось еще одним задаваемым параметром в расчетах. При построении графических зависимостей рис. 2–5 этот параметр полагался одинаковым и равным $0.01h$ ($\delta = 0.01h$). Если термомеханические и геометрические параметры оставить теми же, что и при получении зависимостей рис. 2, то натяг в сборке и иные остаточные контактные напряжения по оси z распределены согласно графическим зависимостям рис. 6.

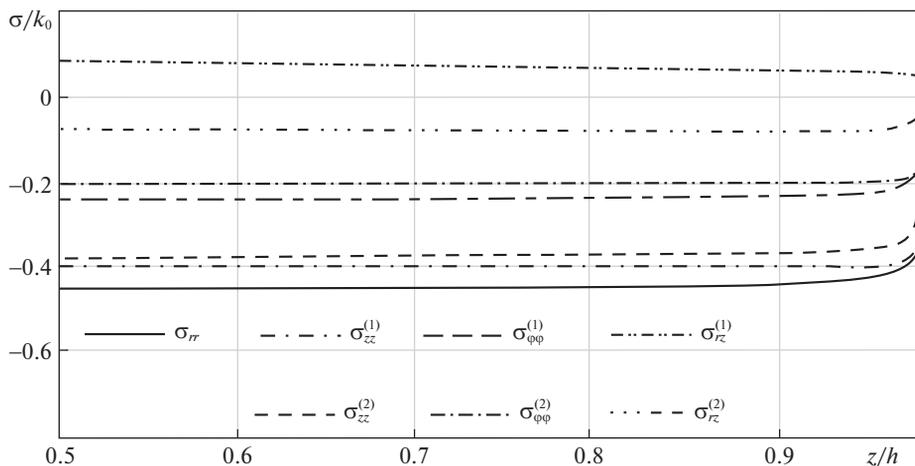


Рис. 6. Остаточные напряжения на поверхности $r = R$ в зависимости от координаты z (торцевой эффект) ($T_0 = 600^\circ\text{C}$, $g_0 = 0.06k_0$, $f_0 = 0.22$, $\phi_0 = 0.8\sqrt{\rho k_0}$, $RR_2^{-1} = 0.6$) и $\delta = 0.01h$.

Следуя рис. 6, контактные напряжения в сборке практически не меняются с изменением координаты z . Только имеет место ярко выраженный торцевой эффект падения натяга и абсолютных значений иных контактных напряжений. Такое падение в значениях напряжений σ_{rr} и σ_{rz} до нуля при $z = \pm h$ диктуется граничными условиями, при этом натяг $\sigma_{rr}(R, h) < 0$ и $\sigma_{\phi\phi}(R, h) < 0$ сохраняется не нулевым, но при уменьшенных по абсолютной величине значениях (рис. 6). В настоящее время достаточно устойчиво сформировалось противоположное заключение о торцевом эффекте, состоящее в том, что в условиях горячей посадки или иной посадки с натягом наоборот на торцах формируется максимальный натяг в сравнении с натягом во внутренних точках поверхности сопряжения $r = R$. Тревожит, что последний вывод иногда без сомнений воспринимается технологической практикой [30–34]. Подкрепляется такой вывод многочисленными расчетами преимущественно с помощью метода конечных элементов [30, 31, 33] или посредством пакетов пользовательских программ [32, 34]. Ошибочность результатов подобных расчетов связана именно с игнорированием сингулярности в задании граничных условий на линии $r = R$ и $z = h$. Действительно, если в расчетах уровня и распределения остаточных напряжений, представленных графическими зависимостями рис. 2 и рис. 6, положить $\delta = 0$, то вместо зависимостей рис. 6 будем иметь рис. 7.

Торцевой эффект в таком случае ($\delta = 0$ на рис. 7) противоположен показанному на рис. 2. При приближении к торцу $z = h$ напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\phi\phi}$ увеличиваются по абсолютной величине, что отмечалось в [30–34]. Графические зависимости рис. 7 качественно совпадают с аналогичными зависимостями, представленными в [32, 33]. В [30, 31, 34] отмечен подобный эффект возрастания температурных напряжений в местах сингулярностей в задании граничных условий, объяснить который иначе чем некорректным использованием таких особенностей в задании краевых условий невозможно.

При проведении расчетов предпринимались попытки еще более уменьшить δ , считая, например, $\delta = 0.001h$. В этом случае наблюдали при приближении z к значению $z = h$ рост напряжений по абсолютной величине и их последующее уменьшение. Из-

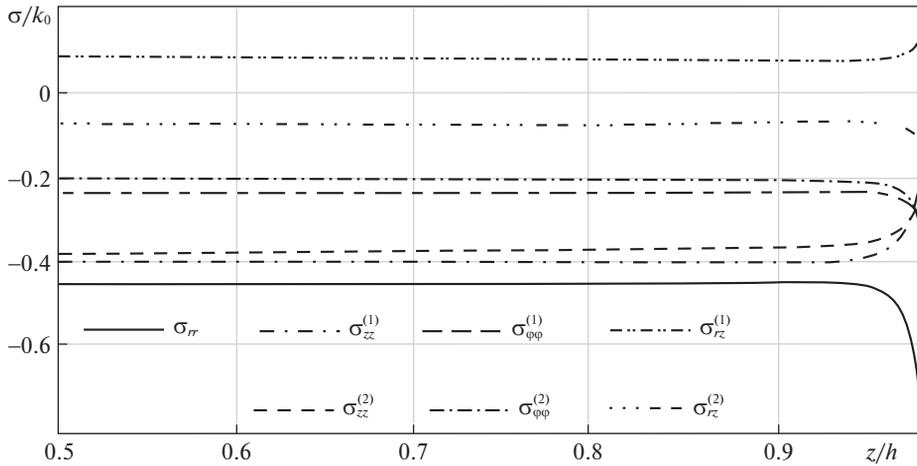


Рис. 7. Остаточные напряжения на поверхности $r = R$ в зависимости от координаты z (торцевой эффект) ($T_0 = 600^\circ\text{C}$, $g_0 = 0.06k_0$, $f_0 = 0.22$, $\phi_0 = 0.8\sqrt{\rho k_0}$, $RR_2^{-1} = 0.6$) и $\delta = 0$.

мельчением сетки не удается избавиться от такого немонотонного изменения в натяге в приторцевой области. Настолько определяющим оказывается влияние сингулярности в граничных условиях на линии $r = R$ и $z = h$.

Ранее [21–23, 27] для расчетов итогового натяга и распределения остаточных напряжений в сборке нами предлагалось использовать численно-аналитические решения соответствующей задачи Гадолина о горячей посадке. В рассматриваемом случае упругопластических свойств материалов сопрягаемых деталей сборки при использовании кусочно-линейных пластических потенциалов (условий пластического течения Треска–Сен-Венана или Ишлинского–Ивлева), когда только и возможны отмеченные численно-аналитические решения, получили в качестве результатов расчетов следствия: натяг в сборке в местах удаленных от торцевой меньше рассчитываемых значений, полученных здесь, при использовании условия пластичности максимальных касательных напряжений и больше при использовании условия максимальных приведенных напряжений. Это вполне согласуется с выводами, полученными в [8], где температурные напряжения в трубе, полученные при условии пластического течения максимальных октаэдрических напряжений (Мизеса), оказались полусуммой напряжений, рассчитанных при использовании кусочно-линейных условий пластического течения. Данное обстоятельство находит свое подтверждение и в рассматриваемом случае. Следовательно, построенные [22, 27], по-существу, аналитические решения задач посадки цилиндрических деталей вполне могут использоваться в расчетах технологических задач о посадке с натягом, включая операцию горячей посадки.

Заключение. Здесь не учитывалось упрочнение в материалах сопрягаемых деталей сборки; для его учета не имеется труднопреодолимых препятствий алгоритмического и вычислительного свойства. Предполагалось дать ответ в использовании для моделирования технологической операции горячей посадки существенно упрощенных расчетов решением одномерных задач, предполагающих плоские и обобщенно плоские деформированные состояния. Решения, получены в таких условиях, являются наиболее простыми, численно-аналитическими, но позволяют прогнозировать натяг в сборке в случае неизменно возникающих областей необратимого деформирования материалов элементов сборки. Численно-аналитические расчеты в таком случае сво-

бодны от сингулярностей в задаваемых граничных условиях. Оказалось, что неверный учет подобных особенностей в задании граничных условий может приводить не только к количественным, но и к качественным ошибкам в расчетах. Используемый здесь прием выделения областей, примыкающих к местам разрывов в поставленных граничных условиях, является безусловно искусственным. Таким способом здесь продемонстрирована необходимость внимательного отношения к существованию отмечаемых сингулярностей в постановках краевых задач при их численных решениях, включая популярные метод конечных элементов и предлагаемые многочисленные пакеты программ.

Для исключения сингулярностей в постановках граничных условий возможно воспользоваться приспособленным для этой цели методом граничных состояний В.Б. Пенькова [35]. Совершенно необходимо отметить метод расчетов на основе быстрых разложений, предложенный А.Д. Чернышовым [36, 37], свободный от влияния сингулярностей подобного свойства на процесс расчетов и их результаты.

Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского Федерального научного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук № 075-00742-22-00, с использованием ресурсов ЦКПН “Центр обработки и хранения научных данных ДВО РАН”, финансируемых Российской Федерацией в лице Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по проекту № 075-15-2021-663.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галин Л.А. Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984. 232 с.
2. Ивлев Д.Д. Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности // в сб.: Успехи механики деформируемых сред. М.: 1975. С. 236–240.
3. Ивлев Д.Д. Из истории дискуссий в механике. Три дискуссии // в сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: БИТУ, 2012. Вып. 27. С. 5–10.
4. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
5. Ишлинский А.Д., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
6. Буренин А.А., Ковтанык Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
7. Alexandrov S.E. Elastic/Plastic Disc under Plane Stress Conditions. New York; London: Springer, 2015. 113 p.
8. Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 32–43.
9. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзег Й.-Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска, подверженного термическому нагружению // Докл. РАН. 2012. Т. 443. № 3. С. 310–312.
10. Фирсов С.В., Прокудин А.Н., Буренин А.А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // СибЖИМ. 2019. Т. 22. № 4. С. 121–133.
11. Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O. On the mechanism of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V. 90. P. 829–845.
12. Севастьянов Г.М., Буренин А.А. О больших деформациях при кручении несжимаемого упругопластического цилиндра // Докл. РАН. 2018. Т. 482. № 482. № 3. С. 285–287.
13. Eraslan A.N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // Acta Mech. 2006. V. 181. P. 43–63.
14. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shink-fik assembly // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. P. 2352–2363.
15. Prokudin A.N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // ZAMM – J. Appl. Math.&Mech. 2020. V. 100. № 3. e201900213.
16. Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // Acta Mech. 2021. V. 232. № 5. P. 1917–1931.

17. *Прокудин А.Н., Буренин А.А.* Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // ПММ. 2021. Т. 85. № 2. С. 172–192.
18. *Mack W.* Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. V. 63 P. 42–50.
19. *Bengeri M., Mack W.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mech. 1994. V. 103. P. 243–257.
20. *Kovacs A.* Residual Stresses in thermally loaded shrink fits // Periodica Polytechn. Ser. Mech. Eng. 1996. V. 40. № 2. P. 103–112.
21. *Буренин А.А., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А.* К расчету неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычисл. мех. сплошн. сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 245–259.
22. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 86–99.
23. *Буренин А.А., Матвеев В.П., Ткачева А.В.* Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // Уч. зап. КнАГТУ. 2018. № 3 (35). С. 31–41.
24. *Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В.* К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // ДВМЖ. 2018. Т. 18. № 2. С. 131–146.
25. *Гадолин А.В.* Теория орудий, скрепленных обручами // Артилл. ж. 1861. № 12. С. 1033–1071.
26. *Попов А.Л., Челобеев Д.А., Бухалов В.И.* Задача Гадолина в упругопластической постановке // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 804–812.
27. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // Вестн. ПНИПУ. Сер. Мех. 2020. № 3. С. 20–31.
28. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. М.: Мир, 1967. 438 с.
29. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 512 с.
30. *Gaul L., Schmidt A.* Finite element simulation and experiments on rotor damping assembled disc shrink fits // Mech. Syst.&Signal Proc. 2019. V. 127. P. 412–422.
31. *Erena D., Vazquez J., Navarro C., Talemí R.* Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // Tribol. Int. 2020. V. 151. P. 1–9.
32. *Buczowski R., Kleiber M.* A study of the surface roughness in elasto-plastic shrink fitted joint // Tribol. Int. 2016. V. 98. P. 125–132.
33. *Özel A., Temiz S., Aydın M.D., Sen S.* Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit formas via finite element // Mater.&Design. 2005. V. 26. P. 281–289.
34. *Потянихин Д.А., Дубенко Е.М.* Расчет напряженно-деформированного состояния заклепочного соединения, полученного с помощью азотного охлаждения заклепки // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост. 2018. № 3 (37). С. 134–144.
35. *Пеньков В.Б., Поликарпов М.В.* Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост. 2020. № 1(43). С. 34–44.
36. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // ЖВММФ. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
37. *Горайнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д.* Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 113–130.

To the Calculations of Technological Operation of the Assembly of Cylindrical Parts by Heat Shrinkage

A. A. Burenin^a and A. V. Tkacheva^{a, #}

^a Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy, Khabarovsk FBC FEB of the RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

[#]e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Changes in thermal stresses are calculated, including the final residual stress states and the formed preload in the assembly, during hot fitting of a pipe on a shaft made of materials with

elastoviscoplastic properties. The calculations are carried out by solving the corresponding axisymmetric Gdolin problem, in which the assembly parts have the same length. Attention is drawn to a possible singularity in setting the boundary conditions of the problem and a method is proposed to eliminate the influence of this feature on the calculation results.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, thermal stresses, Gdolin problem, shrink fit, interference assembly

REFERENCES

1. Galin L.A. Elastoplastic Problems. Moscow: Nauka, 1984. (in Russian)
2. Ivlev D.D. On the determination of displacements in elastoplasticity problems of the theory of ideal plasticity // in: Usp. Mekh. Deform. Sred, 100-Let. Dnya Rozhden. Akademika B.G. Galerkina, Moscow: 1975, pp. 236–240. (in Russian)
3. Ivlev D.D. From the history of discussions in mechanics. Three discussions // in: Theoret.&Appl. Mech., No. 27. Minsk: BNTU, 2012. pp. 5–10. (in Russian)
4. Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. (in Russian)
5. Ivlev D.D., Ishlinsky A.Yu. Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)
6. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V. Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p. (in Russian)
7. Alexandrov S.E. Elastic/Plastic Disc under Plane Stress Conditions. N.Y.; L.: Springer, 2015. 113 p.
8. Dats E.P., Murashkin E.V., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A. Thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of yield conditions // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 23–32.
9. Aleksandrov S.E., Lomakin E.V., Dzeng I.R. Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading // Dokl. Phys., 2012, vol. 57, pp. 136–139.
10. Firsov S.V., Prokudin A.N., Burenin A.A. Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion // J. Appl. Ind. Math., 2019, vol. 13, pp. 642–652.
11. Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O. On the mechanism of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech., 2020, vol. 90, pp. 829–845.
12. Sevastyanov G.M., Burenin A.A. Finite strain upon elastic–plastic torsion of an incompressible circular cylinder // Dokl. Phys., 2018, vol. 63, pp. 393–395.
13. Eraslan A.N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // Acta Mech., 2006, vol. 181, pp. 43–63.
14. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shrink-fit assembly // Appl. Math. Model., 2013, vol. 37, pp. 2352–2363.
15. Prokudin A.N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // ZAMM. J. Appl. Math.&Mech., 2020, vol. 100, no. 3, pp. e201900213.
16. Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Prokudin A.N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // Acta Mech., 2021, vol. 232, no. 5, pp. 1917–1931.
17. Prokudin A.N., Burenin A.A. Elastoplastic analysis of a rotating solid shaft made of linear hardening material // Mech. Solids, 2021, vol. 56, pp. 1243–1258.
18. Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech., 1993, vol. 63, pp. 42–50.
19. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mech., 1994, vol. 103, pp. 243–257.
20. Kovacs A. Residual Stresses in thermally loaded shrink fits // Periodica Polytechn.: Ser. Mech. Eng., 1996, vol. 40, no. 2, pp. 103–112.
21. Burenin A.A., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A. Calculation of the unsteady thermal stresses in elastoplastic solids // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2018, vol. 59, no. 7, pp. 1197–1210.
22. Burenin A.A., Tkacheva A.V. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 559–569.

23. *Burenin A.A., Matveenko V.P., Tkacheva A.V.* Temperature voltages when assembling the two-layer shaft with the hot charging method // *Uch. Zap. KnAGTU*, 2018, no. 3(35), pp. 31–41. (in Russian)
24. *Burenin A.A., Kaing V., Tkacheva A.V.* To the calculation of plane stressed states of the theory of unsteady temperature stresses in elastoplastic bodies // *Far Eastern Math. J.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 131–146.
25. *Gadolin A.V.* The theory of guns fastened with hoops // *Artill. J.*, 1861, no. 12, pp. 1033–1071. (in Russian)
26. *Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A.* Gadolin's theory in elastoplastic formulation // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 356–363.
27. *Burenin A.A., Tkacheva A.V.* Evolution of temperature stresses in the Gadolin problem of assembling a two-layer elastic-plastic pipe // *Vestn. PNRPU. Ser. Mech.*, 2020, no. 3, pp. 20–31. (in Russian)
28. *Haase R.* *Thermodynamics of Irreversible Processes* N.Y.: Dover Publ., 1990. ix+513 p.
29. *Boley Br., Weiner J.* *Theory of Temperature Stresses*. N.Y.; L.: Wiley, 1960.
30. *Gaul L., Schmidt A.* Finite element simulation and experiments on rotor damping assembled disc shrink fits // *Mech. Syst.&Signal Proc.*, 2019, vol. 127, pp. 412–422.
31. *Erena D., Vazquez J., Navarro C., Talemi R.* Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // *Tribol. Int.*, 2020, vol. 151, pp. 10.
32. *Buczowski R., Kleiber M.* A study of the surface roughness in elasto-plastic shrink fitted joint // *Tribol. Int.*, 2016, vol. 98, pp. 125–132.
33. *Özel A., Temiz S., Aydin M.D., Sen S.* Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit formas via finite element // *Mater.&Design*, 2005, vol. 26, pp. 281–289.
34. *Potyanykhin D.A., Dubenko E.M.* Calculation of the stress-strain state of a rivet joint obtained using nitrogen cooling of a rivet // *Vestn. ChGPU. Ser. Mech. of the Limiting State*, 2018, no. 3(37), pp. 134–144. (in Russian)
35. *Penkov V.B., Polikarpov M.V.* Concentrated force impacts in the method of boundary states // *Vestn. ChGPU. Ser. Mech. of the Limiting State*, 2020, no. 1(43), pp. 34–44. (in Russian)
36. *Chernyshov A.D.* Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2014, vol. 54, pp. 11–21.
37. *Goryainov V.V., Popov M.I., Chernyshov A.D.* Solving the stress problem in a sharp wedge-whapped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 1083–1097.

УДК 539.376

ТОНКОСЛОЙНЫЕ АСИМПТОТИКИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

© 2022 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,*}

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 20.04.2022 г.

После доработки 11.05.2022 г.

Принята к публикации 20.05.2022 г.

Рассматривается обобщенная краевая задача Прандтля, моделирующая квазистатический технологический процесс сдавливания в одном направлении и быстрого растекания в другом тонкого несжимаемого идеально жесткопластического слоя (плоское деформированное состояние), соответствующего критерию пластичности Мизеса–Генки с переменным по толщине пределом текучести. Стратификация может быть непрерывной либо кусочно-постоянной, в последнем случае задача моделирует прессование слоистых пластических композитов (ламинатов, “сэндвичей”) и прецизионное доведение их до нужной толщины. На основе тонкослойных сингулярных асимптотик по малому геометрическому параметру с помощью развиваемого в работе метода асимптотического интегрирования находится приближенное решение для кинематических и силовых величин. Обсуждается применимость квазистатического подхода на различных временных диапазонах процесса сдавливания.

Ключевые слова: идеально жесткопластический материал, задача Прандтля, тонкослойные асимптотики, квазистатика, неоднородность, стратификация, слоистый композит, “сэндвич”, число Эйлера

DOI: 10.31857/S0032823522040087

В плоской теории идеальной пластичности важное теоретическое значение имеют задача Прандтля и различные ее обобщения [1], моделирующие технологические процессы прессования и растекания тонких слоев при их обработке давлением [2, 3], в том числе и высокоскоростной. Классическое решение Прандтля может служить основой для получения более общих решений применительно к неоднородным по толщине тонким пластическим слоям как с непрерывной стратификацией, так и к слоистым композитам [4, 5].

1. Описание технологического процесса и постановка задачи. Положим, что в начальный момент времени $t = 0$ плоский тонкий слой

$$\Omega_0 = \{-l_0 < x_1 < l_0, -h_0 < x_2 < h_0\}, \quad \alpha = \frac{h_0}{l_0} \ll 1 \quad (1.1)$$

был занят несжимаемым идеально жесткопластическим материалом, подчиняющимся критерию пластичности Мизеса–Генки. Материал неоднороден по толщине слоя, так что его предел текучести σ_s – заданная непрерывная либо кусочно-непрерывная

функция координаты x_2 в начальный момент. Без сильного ограничения общности примем, что эта функция четная.

При $t > 0$ начинается квазистатический процесс сжатия слоя Ω_0 абсолютно жесткими плитами, движущимися вдоль оси x_2 навстречу друг другу, каждая с постоянной скоростью V . К моменту $t < h_0/V = t^*$ растекающийся с большой скоростью вдоль оси x_1 пластический слой занимает плоскую область

$$\Omega = \{-l < x_1 < l, -h < x_2 < h\}; \quad h = h_0 - Vt, \quad l = \frac{h_0 l_0}{h_0 - Vt} \quad (1.2)$$

Замкнутая система уравнений теории идеальной пластичности при плоской деформации в квазистатическом приближении имеет вид

$$-p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} = 0, \quad -p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} = 0 \quad (1.3)$$

$$s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1} \quad (1.4)$$

$$s_{11}^2 + s_{12}^2 = \frac{1}{2}\sigma_s^2(\xi_2(x_1, x_2)) \quad (1.5)$$

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0, \quad (1.6)$$

где p — давление, s_{11} и s_{12} — компоненты девиатора тензора напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$, а v_1 и v_2 — компоненты вектора скорости. Система, состоящая из уравнений равновесия (1.3), условия (1.4) пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций, критерия Мизеса—Генки (1.5) и условия несжимаемости (1.6) относительно пяти функций p , s_{11} , s_{12} , v_1 и v_2 эйлеровых координат x_1 и x_2 , осложнена тем, что единственная материальная характеристика среды — предел текучести σ_s — известная функция лагранжевой координаты ξ_2 , но заранее неизвестная функция x_1 и x_2 . В аргумент этой функции в (1.5) входит обратный закон движения $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$. Таким образом, систему (1.3)–(1.6) необходимо дополнить кинематическими уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2), \quad x_i|_{t=0} = \xi_i \quad (1.7)$$

для нахождения сначала закона движения $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, t)$, а затем необходимого для (1.5) обратного закона $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, t)$.

Кинематические граничные условия соответствуют равномерному сближению жестких плит:

$$v_2|_{x_2=\pm h} = \mp V \quad (1.8)$$

Кроме того, на границах слоя $x_2 = \pm h$ модуль касательного напряжения равен

$$|s_{12}|_{x_2=\pm h} = \frac{m}{\sqrt{2}}\sigma_s(\xi_2(x_1, \pm h)); \quad 0 < m \leq 1, \quad (1.9)$$

где m — известный из технологических соображений коэффициент сцепления пластического материала с плитами. Значение $m = 1$ реализуется в случае полного сцепления (абсолютной шероховатости), когда всю интенсивность напряжений на границах занимает касательная составляющая. Постоянная m может рассматриваться в данной задаче как управляющий напряженным состоянием параметр.

Квазистатический режим деформирования имеет место не на всем временном интервале $0 < t < t_*$. При подходе к правому концу этого интервала даже при сколь угодно медленном движении плит начинают проявляться и играть существенную роль динамические эффекты, приводящие к перестройке силовых режимов, необходимых для осуществления процесса [6, 7].

Введем безразмерные координаты на плоскости (x_1, x_2) и время:

$$\eta_1 = \frac{x_1}{l_0}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{h_0}, \quad \eta_{10} = \frac{\xi_1}{l_0}, \quad \eta_2 = \frac{\xi_2}{h_0}, \quad \tau = \frac{Vt}{h_0}, \quad (1.10)$$

изменяющиеся в области Ω в пределах

$$-\frac{1}{1-\tau} < \eta_1 < \frac{1}{1-\tau}, \quad -(1-\tau) < \eta_2 < 1-\tau, \quad 0 < \tau < 1 \\ -1 < \eta_{10} < 1, \quad -1 < \eta_{20} < 1 \quad (1.11)$$

Представляя переменный предел текучести σ_s в виде

$$\sigma_s = \sigma_s^0 f(\eta_{20}(\eta_1, \eta_2)); \quad \sigma_s^0 = \sigma_s(\pm h), \quad f(\pm 1) = 1 \quad (1.12)$$

введем в рассмотрение безразмерную функцию $f(\eta_{20}(\eta_1, \eta_2))$, отвечающую за распределение пластического материала по толщине в начальной конфигурации Ω_0 (1.1). Как функция одной безразмерной лагранжевой координаты η_{20} она задана и является четной по η_{20} , но изначально она неизвестна как функция безразмерных эйлеровых координат η_1 и η_2 .

2. Асимптотические разложения. Представим пять функций, входящих в систему (1.3)–(1.6), в виде степенных рядов по постоянному малому геометрическому параметру α , определенному в (1.1):

$$v_1 = V \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_1^{(n)}(\eta_1, \eta_2), \quad v_2 = V \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_2^{(n)}(\eta_1, \eta_2) \\ s_{11} = \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{11}^{(n)}(\eta_1, \eta_2), \quad s_{12} = \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{12}^{(n)}(\eta_1, \eta_2) \quad (2.1) \\ p = \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha^n \bar{p}^{(n)}(\eta_1, \eta_2)$$

Сингулярность рядов для v_1 и p обусловлена физическим смыслом технологического процесса сжатия-растекания и стремлением в бесконечность двух этих функций при $\alpha \rightarrow 0$. Три оставшиеся функции ведут себя при этом регулярно. Строгое обоснование нижних границ суммирования рядов, аналогичных (2.1), применительно к классической задаче Прандтля приведено в [8].

Разложим также в ряды по α функции η_1 и η_2 , входящие в безразмерный закон движения $\eta_1 = \eta_1(\eta_{10}, \eta_{20}, \tau)$, $\eta_2 = \eta_2(\eta_{10}, \eta_{20}, \tau)$:

$$\eta_1 = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha^n \bar{\eta}_1^{(n)}(\tau), \quad \eta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{\eta}_2^{(n)}(\tau) \quad (2.2)$$

Подставляя ряды (2.1) в пять уравнений системы (1.3)–(1.6) и ряды (2.2) в кинематические уравнения (1.7), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-\bar{p}_1^{(n-1)} + \bar{s}_{11|1}^{(n-1)} + \bar{s}_{12|2}^{(n)}) = 0 \quad (2.3)$$

$$-\frac{1}{\alpha} \bar{p}_2^{\{-1\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-\bar{p}_2^{\{n\}} - \bar{s}_{1|2}^{\{n\}} + \bar{s}_{12|1}^{\{n-1\}}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{11}^{\{n\}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \bar{v}_1^{\{-1\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (\bar{v}_{1|2}^{\{n\}} + \bar{v}_{2|1}^{\{n-1\}}) \right) = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{12}^{\{n\}} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{v}_{1|1}^{\{n-1\}} \right) \tag{2.5}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{11}^{\{n\}} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \bar{s}_{12}^{\{n\}} \right)^2 = f^2(\eta_{20}(\eta_1, \eta_2, \tau)) \tag{2.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (\bar{v}_{1|1}^{\{n-1\}} + \bar{v}_{2|2}^{\{n\}}) = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1^{\{n-1\}}}{d\tau} &= \bar{v}_1^{\{n-1\}}, & \frac{d\eta_2^{\{n\}}}{d\tau} &= \bar{v}_2^{\{n\}}; & n &= 0, 1, 2, \dots \\ \eta_1^{\{n-1\}} \Big|_{\tau=0} &= \eta_{10} \delta_{n0}, & \eta_2^{\{n\}} \Big|_{\tau=0} &= \eta_{20} \delta_{n0}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где δ_{n0} – символ Кронекера; вертикальная черта в нижних индексах означает частное дифференцирование по безразмерным координатам η_1 и η_2 . Функции $\bar{s}_{12}^{\{-1\}}$ и $\bar{v}_2^{\{-1\}}$, встречающиеся в (2.4) и (2.5), следует положить тождественно нулевыми.

Граничные условия (1.8) и (1.9) запишутся следующим образом:

$$\bar{v}_2^{\{n\}} \Big|_{\eta_2 = \pm(1-\tau)} = \mp \delta_{n0} \tag{2.9}$$

$$\bar{s}_{12}^{\{n\}} \Big|_{\eta_2 = \pm(1-\tau)} = m \delta_{n0} \tag{2.10}$$

3. Метод асимптотического интегрирования. Для нахождения неизвестных коэффициентов в рядах (2.1) и закона движения частиц воспользуемся методом асимптотического интегрирования [9]. Он заключается в получении и анализе цепочки замкнутых систем уравнений относительно данных коэффициентов путем приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях α в (2.3)–(2.7). Начало цепочки связано с обнулением двух сингулярных слагаемых в (2.4) и (2.5) с отрицательными степенями α :

$$\bar{p}_2^{\{-1\}} = 0, \quad \bar{v}_{1|2}^{\{-1\}} = 0 \tag{3.1}$$

Заметим, что в уравнениях (2.3), (2.4) и (2.7), порожденных линейными уравнениями (1.3) и (1.6), метод асимптотического интегрирования позволяет перейти от рядов к итерационным цепочкам постоянной длины по $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$-\bar{p}_1^{\{n-1\}} + \bar{s}_{1|1}^{\{n-1\}} + \bar{s}_{12|2}^{\{n\}} = 0, \quad -\bar{p}_2^{\{n\}} - \bar{s}_{1|2}^{\{n\}} + \bar{s}_{12|1}^{\{n-1\}} = 0, \quad \bar{v}_{1|1}^{\{n-1\}} + \bar{v}_{2|2}^{\{n\}} = 0 \tag{3.2}$$

Первое уравнение третьей цепочки в (3.2) $\bar{v}_{1|1}^{\{-1\}} + \bar{v}_{2|2}^{\{0\}} = 0$ вместе со вторым уравнением (3.1) и двумя граничными условиями (2.9) приводит к линейному по координатам полю скоростей в главных в (2.1) приближениях по α :

$$\bar{v}_1^{\{-1\}} = \frac{\eta_1}{1-\tau}, \quad \bar{v}_2^{\{0\}} = -\frac{\eta_2}{1-\tau} \tag{3.3}$$

Это поле соответствует плоскому сжатию-растеканию несжимаемой сплошной среды.

Подставим функции (3.3) в систему (2.8) при $n = 0$ и, интегрируя ее по τ , придем к закону движения в главном приближении

$$\eta_1^{(-1)} = \frac{\eta_{10}}{1 - \tau}, \quad \eta_2^{(0)} = \eta_{20}(1 - \tau) \quad (3.4)$$

Аргумент $\eta_{20}(\eta_1, \eta_2, \tau)$ у функции f^2 в (2.6) на основании (3.4) будет следующий

$$\eta_{20}(\eta_1, \eta_2, \tau) = \frac{\eta_2}{1 - \tau} \quad (3.5)$$

Правая часть (2.6) в главном приближении по α становится известной функцией одной безразмерной эйлеровой координаты η_2 .

Первое уравнение первой цепочки (3.2) $-\bar{p}_1^{(-1)} + \bar{s}_{12/2}^{(0)} = 0$ вместе с первым уравнением (3.1) и двумя граничными условиями (2.10) при важном предположении о непрерывной дифференцируемости функции $\bar{s}_{12}^{(0)}$ по η_2 на всем интервале изменения η_2 (1.11) приводит к следующим коэффициентам в главных по α слагаемых в (2.1) для s_{12} и p :

$$\bar{s}_{12}^{(0)} = -sm \frac{\eta_2}{1 - \tau}, \quad \bar{p}^{(-1)} = \frac{m}{1 - \tau} \left(\frac{1}{1 - \tau} - |\eta_1| \right), \quad (3.6)$$

где $s = \text{sign } \eta_1 = \text{sign } x_1$. Давление кусочно-линейно по простиранию слоя с изломом в срединном сечении $x_1 = 0$, а касательное напряжение при любом η_2 кусочно-постоянно по простиранию и терпит разрыв при $x_1 = 0$. Явная зависимость функции $\bar{s}_{12}^{(0)}$ (3.6) от s говорит о достоверности получаемого решения лишь вдали от сечения $x_1 = 0$. Этот факт известен в классической задаче Прандтля и математически объясняется тем, что в окрестности сечения $x_1 = 0$ ряды (2.1) теряют асимптотичность в смысле Пуанкаре [10]. Расстановка знаков у $\bar{s}_{12}^{(0)}$ именно как в (3.6) и у некоторых других функций подробно обсуждена в [8] применительно к задаче Прандтля.

Приравняем далее коэффициенты при α^0 в левой и правой частях (2.6) и с учетом (3.6) определим функцию $\bar{s}_{11}^{(0)}$:

$$\bar{s}_{11}^{(0)} = \sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1 - \tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1 - \tau)^2}} \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует ограничение на заданную функцию f для осуществимости идеально жесткопластического процесса деформирования. Как четная функция своего аргумента $\eta_{20} \in [-1; 1]$ она должна удовлетворять неравенству

$$f(\eta_{20}) \geq m\eta_{20} \quad (3.8)$$

Напомним, что согласно (1.12) $f(1) = 1$, поэтому в точке $\eta_{20} = 1$, т.е. на границе области Ω (1.2) неравенство (3.8) заведомо выполняется и становится равенством при максимальном значении $m = 1$ коэффициента сцепления. На рисунке для $m = 1$ изображены возможные согласованные с (3.8) распределения по толщине предела текучести (a – непрерывно стратифицированный слой; b – слоистый композит).

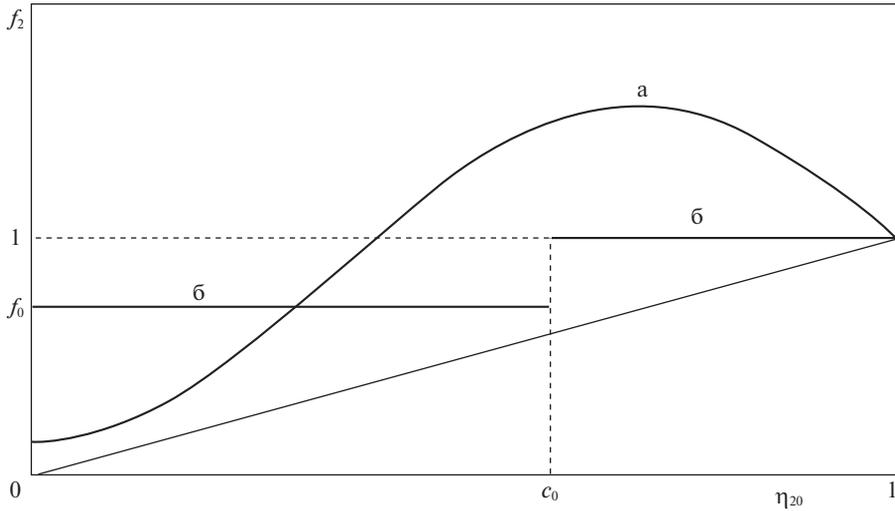


Рис. 1.

Приравнивание нулю коэффициентов при α^0 в (2.4) и (2.5) приводит к уравнениям

$$(\bar{p}^{(0)} + \bar{s}_{11}^{(0)})_2 = 0, \quad \bar{s}_{11}^{(0)} \bar{v}_{12}^{(0)} = 2\bar{s}_{12}^{(0)} \bar{v}_{11}^{(-1)}, \quad (3.9)$$

из которых после интегрирования по η_2 определяются функции $\bar{p}^{(0)}$ и $\bar{v}_1^{(0)}$ – коэффициенты при первых регулярных по α слагаемых в разложениях p и v_1 в (2.1):

$$\bar{p}^{(0)} = -\sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}} + a(\eta_1) \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_1^{(0)} = -\frac{2sm}{(1-\tau)^2} \int \eta_2 \left[f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2} \right]^{-1/2} d\eta_2 + b(\eta_1), \quad (3.11)$$

где a и b – пока произвольные функции от η_1 .

Для нахождения этих функций приравняем нулю коэффициенты при α в (2.3) и (2.7):

$$(-\bar{p}^{(0)} + \bar{s}_{11}^{(0)})_1 + \bar{s}_{12|2}^{(1)} = 0, \quad v_{11}^{(0)} + \bar{v}_{2|2}^{(1)} = 0 \quad (3.12)$$

Продифференцируем равенства (3.12) по η_2 и, пользуясь выражениями (3.7), (3.10) и (3.11) для $\bar{s}_{11}^{(0)}$, $\bar{p}^{(0)}$ и $\bar{v}_1^{(0)}$, придем к дифференциальным уравнениям

$$\bar{s}_{12|22}^{(1)} = 0, \quad \bar{v}_{2|22}^{(1)} = 0 \quad (3.13)$$

с однородными граничными условиями (2.9), (2.10) на поверхностях слоя, касающихся движущихся плит. Следовательно, всюду в слое

$$\bar{s}_{12}^{(1)} \equiv 0, \quad \bar{v}_2^{(1)} \equiv 0 \quad (3.14)$$

Подставляя теперь нулевые функции (3.14) в (3.12), получим что $da/d\eta_1 = 0$ и $db/d\eta_1 = 0$, т.е. с точностью до движения всего слоя как недеформируемого целого вдоль оси x_1 можно положить $a \equiv 0$ и $b \equiv 0$.

Таким образом, определены несколько первых членов в каждом из разложений (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{V} &= \frac{\eta_1}{\alpha(1-\tau)} - \frac{2sm}{(1-\tau)^2} \int \eta_2 \left[f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2} \right]^{-1/2} d\eta_2 + O(\alpha) \\ \frac{v_2}{V} &= -\frac{\eta_2}{1-\tau} + O(\alpha^2), \quad \frac{\sqrt{2}s_{11}}{\sigma_s^0} = \sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}} + O(\alpha) \\ &\quad \frac{\sqrt{2}s_{12}}{\sigma_s^0} = -sm \frac{\eta_2}{1-\tau} + O(\alpha^2) \\ \frac{\sqrt{2}p}{\sigma_s^0} &= \frac{m}{\alpha(1-\tau)} \left(\frac{1}{1-\tau} - |\eta_1| \right) - \sqrt{f^2 \left(\frac{\eta_2}{1-\tau} \right) - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}} + O(\alpha) \end{aligned} \quad (3.15)$$

4. Случай трехслойного “сэндвича”. Если идеально жесткопластический слой непрерывно стратифицирован по пределу текучести, т.е. функция f в (1.12) непрерывна по своему единственному аргументу η_{20} , то все члены разложений (3.15) непрерывны по поперечной координате. Рассмотрим подробнее важный в приложениях случай кусочно-постоянной зависимости f от η_{20} , означающий, что плоский слой Ω_0 (1.1) – слоистый композит. Для определенности положим, что этот композит трехслойный и представляет собой так называемый “сэндвич” [11, 12] (график *б* на рисунке):

$$f = \begin{cases} f_0, & -c_0 < \eta_{20} < c_0; \quad c_0 < 1 \\ 1, & c_0 < |\eta_{20}| \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь учтено требование масштабирования $f(\pm 1) = 1$. Условие (3.8) приводит к ограничению на константы c_0 и f_0 в (4.1):

$$f_0 \geq mc_0, \quad (4.2)$$

т.е. средний слой сэндвича” не должен иметь слишком низкий предел текучести.

Заметим, что из (2.8) при $n = 1$ и (3.14) следует, что $\eta_2^{(1)} \equiv 0$ и с точностью уже до α^2 обратный закон движения (3.5) по-прежнему имеет место. Независимость правой части (3.5) от η_1 говорит о том, что изначально прямолинейные границы раздела прослоек “сэндвича” $\eta_{20} = \pm c_0$ в процессе сжатия ($\tau > 0$) остаются прямолинейными: $\eta_2 = \pm c$, где $c = c_0(1-\tau)$.

Подстановка (4.1) в разложения (3.15) приводит к тому, что функции s_{11} , p и v_1 оказываются разрывными по толщине слоя. При этом у p и v_1 разрыв претерпевают не главные слагаемые разложений, а главные, сингулярные, от поперечной координаты не зависят. Функции s_{12} и v_2 остаются непрерывными. Вычисляя интеграл в выражении для v_1 в (3.15), получим

$$\frac{v_1}{V} = \frac{\eta_1}{\alpha(1-\tau)} - \begin{cases} \frac{2s}{m} \sqrt{f_0^2 - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}}, & -c < \eta_2 < c; \quad c < 1-\tau \\ \frac{2s}{m} \sqrt{1 - \frac{m^2 \eta_2^2}{(1-\tau)^2}}, & c < |\eta_2| \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

В размерном виде разложения (3.15) в случае “сэндвича” имеют вид

$$\begin{aligned}
 v_1 &= V \left(\frac{x_1}{h} - \frac{2s}{m} \sqrt{f^2 - \frac{m^2 x_2^2}{h^2}} + O(\alpha) \right), & v_2 &= V \left(-\frac{x_2}{h} + O(\alpha^2) \right) \\
 s_{11} &= \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{f^2 - \frac{m^2 x_2^2}{h^2}} \right) + O(\alpha), & s_{12} &= \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \left(-sm \frac{x_2}{h} + O(\alpha^2) \right) \\
 p &= \frac{\sigma_s^0}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{h} (l - |x_1|) - \sqrt{f^2 - \frac{m^2 x_2^2}{h^2}} + O(\alpha) \right),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где безразмерная четная кусочно-постоянная функция f согласно (4.1) следующая:

$$f = \begin{cases} f_0, & -c_0 h < x_2 < c_0 h \\ 1, & c_0 h < |x_2| \leq 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

5. Применимость квазистатического приближения. В работах [6, 7, 13] подробно аналитически обсуждаются условия достоверности квазистатического приближения в классической задаче Прандтля и некоторых ее обобщениях. На основе анализа сингулярных асимптотик по малому геометрическому параметру выводятся необходимые и достаточные неравенства применимости квазистатического подхода, заключающегося в рассмотрении уравнений равновесия (1.3), а не уравнений движения:

$$\frac{1}{Eu} \ll \frac{h^2}{l^2} \ll 1, \tag{5.1}$$

где $Eu = \sigma_s / (\rho V^2)$ – характерное в задаче число Эйлера, ρ – постоянная плотность пластического материала.

Правое неравенство в (5.1) соответствует тонкослойному приближению. Если оно выполняется в начальный момент времени, то в силу специфики кинематики тем более верно и в последующие моменты. С левым же неравенством в (5.1) ситуация не такая тривиальная. Число $1/Eu$ постоянно в данной краевой задаче, в то время как дробь $h^2(t)/l^2(t)$ монотонно убывает до нуля на интервале $t \in [0; t_*]$. Следовательно, в некотором временном диапазоне перед моментом схлопывания плит t_* левое неравенство заведомо нарушится.

Подставляя из соотношений (1.2) в неравенства (5.1) функции времени h и l , получим, что применительно к задаче о сжатии неоднородного по толщине слоя эти неравенства таковы:

$$\frac{1}{Eu} \ll \frac{(h_0 - Vt)^4}{h_0^2 l_0^2} \ll 1, \quad Eu = \frac{\sigma_s^{\min}}{\rho V^2}, \tag{5.2}$$

где число Эйлера построено по минимальному по толщине значению σ_s^{\min} предела текучести. В силу малости параметра α (1.1) правое неравенство (5.2) выполнено. Левое же будет удовлетворяться на следующем диапазоне времени:

$$t_* - t \ll \frac{\sqrt{h_0 l_0}}{V \sqrt[4]{Eu}} \tag{5.3}$$

При значительном приближении t к t_* , когда условие (5.3) нарушается, происходит качественная перестройка силовых режимов сдавливания слоя, что влияет на технологию процесса.

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
2. *Ильюшин А.А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 693–713.
3. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Изд-во УрГТУ–УПИ, 2001. 836 с.
4. *Победра Б.Е., Гузей И.Л.* Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Матем. моделир. систем и процессов. 1998. № 6. С. 82–91.
5. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: Ленанд, 2018. 560 с.
6. *Георгиевский Д.В.* Асимптотическое интегрирование задачи Прандтля в динамической постановке // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 97–105.
7. *Georgievskii D.V., Mueller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
8. *Георгиевский Д.В.* Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 83–93.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
10. *Кравченко В.Ф., Несененко Г.А., Пустовойт В.И.* Асимптотики Пуанкаре решения задач не-регулярного тепло- и массопереноса. М.: Физматлит, 2006. 420 с.
11. *Asmus M., Naumenko K., Oechsner A., Eremeyev V.A., Altenbach H.* A generalized framework towards structural mechanics of three-layered composite structures // Technische Mechanik. 2019. V. 39. № 2. P. 202–219.
12. *Asmus M., Altenbach H.* On dynamic optimality of anti-sandwiches // in: Dyn.&Control of Adv. Struct.&Machines. Ser. Adv. Struct. Mater. V. 156. Springer, 2021. P. 1–11.
13. *Куйко И.А., Кадымов В.А.* Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.

Thin-Layered Asymptotics in the Generalized Prandtl Problem for Nonhomogeneous by Thickness Plastic Material

D. V. Georgievskii^{a,b,c,#}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^c *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The generalized Prandtl boundary value problem is considered, simulating a quasistatic technological process of compression in one direction and quick spreading in the other of a thin incompressible perfect rigid plastic layer (a plane strain state) consistent with the Mises–Hencky plasticity condition with a variable yield stress by thickness. Stratification can be either continuous or piecewise constant, in the latter case, the problem simulates the pressing of layered plastic composites (laminates, “sandwiches”) and precision bringing them to the desired thickness. On the basis of thin-layer singular asymptotics for a small geometric parameter, an approximate solution for kinematic and force quantities is found using the asymptotic integration method developed in the work. The applicability of the quasistatic approach to various time ranges of the compression process is discussed.

Keywords: perfect rigid plastic material, the Prandtl problem, thin-layered asymptotics, quasistatics, nonhomogeneity, stratification, layered composite, “sandwich”, the Euler number

REFERENCES

1. *Ishlinskii A. Yu., Ivlev D.D.* Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian)
2. *Il'yushin A.A.* Complete plasticity in the processes of flow between rigid surfaces, the analogy with sand embankment, and some applications // JAMM, 1955, vol. 19, no. 6, pp. 693–713. (in Russian)
3. *Kolmogorov V.L.* Mechanics of Metal Processing by Pressure. Ekaterinburg: UrGTU–UPI Publ., 2001. 836 p. (in Russian)
4. *Pobedrya B.E., Guzey I.L.* Mathematical modeling of composites deformation with regard for thermal diffusion // Math. Model. Syst.&Proc., 1998, no. 6, pp. 82–91. (in Russian)
5. *Georgievskii D.V.* Selected Problems of Continuum Mechanics. Moscow: Lenand, 2018. 560 p. (in Russian)
6. *Georgievskii D.V.* Asymptotic Integration of the Prandtl Problem in Dynamic Statement // Mech. Solids, 2013, no. 1, pp. 79–85.
7. *Georgievskii D.V., Mueller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM, 2019, vol. 99, no. 12, pp. 1–11.
8. *Georgievskii D.V.* Asymptotic expansions and possibilities to drop the hypotheses in the Prandtl problem // Mech. Solids, 2009, no. 1, pp. 70–78.
9. *Goldenevizer A.L.* Construction of the approximate theory of shells by means of asymptotic integration of elasticity theory equations // JAMM, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 593–608. (in Russian)
10. *Kravchenko V.F., Nesenenko G.A., Pustovoit V.I.* Poincare Asymptotics for Problems of Irregular Heat and Mass Transfer. Moscow: Fizmatlit, 2006. 420 p. (in Russian)
11. *Asmus M., Naumenko K., Oechsner A., Eremeyev V.A., Altenbach H.* A generalized framework towards structural mechanics of three-layered composite structures // Technische Mechanik, 2019, vol. 39, no. 2, pp. 202–219.
12. *Asmus M., Altenbach H.* On dynamic optimality of anti-sandwiches // in: Dyn.&Control Adv. Struct.&Machines. Ser. Adv. Struct. Mater, vol. 156, Springer, 2021, pp. 1–11.
13. *Kiyko I.A., Kadymov V.A.* Generalization of the Prandtl Problem on the Compression of a Band // MSU Bull., 2003, vol. 58, no. 4, pp. 50–53.

Информация для авторов и читателей журнала ПММ

DOI: 10.31857/S0032823522040154

Издательство “Pleiades Publishers”, осуществляющее издание переводов статей журнала ПММ, выделяет 1000 долл. США для премирования лучших работ, опубликованных в ПММ.

Решением редколлегии от 07 июня 2022 года эта премия присуждена авторам следующих работ, опубликованных в 2021 году:

1. А. В. Карапетян

“Обобщенные диаграммы Смейла для диссипативных систем с симметрией”

Т. 85, Вып. 4, С. 461–468

200 долл. США

2. М. А. Брутян, У. Г. Ибрагимов

“Автомодельные течения вязкого газа в плоском канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры”

Т. 85, Вып. 6, С. 748–757

200 долл. США

3. О. Р. Каюмов

“Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами”

Т. 85, Вып. 6, С. 699–718

200 долл. США

4. Н. В. Баничук, С. Ю. Иванова

“Оптимальное демпфирование колебаний при поступательном движении панели в потоке жидкости”

Т. 85, Вып. 3, С. 358–369

200 долл. США

5. Д. В. Георгиевский

“Последовательное трехосное динамическое обжатие параллелепипеда”

Т. 85, Вып. 6, С. 772–778

200 долл. США