

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 68, номер 3, 2022

---

---

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

Волноводная изоляция звука в трубах, облицованных упругим водоподобным материалом <i>М. А. Миронов</i>	235
Напряжения в осесимметричной волне Похгаммера–Кри средневолнового диапазона <i>В. В. Мокряков</i>	240
Концентрация собственных частот упругих тел с затупленным пикообразным заострением <i>С. А. Назаров</i>	249

---

## ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

О постановке задач бесконтактного поверхностного управления распространением электроакустической волны <i>А. С. Аветисян</i>	261
Акустооптическая дифракция в ультразвуковом поле профилированного по ширине преобразователя <i>С. Н. Антонов, Ю. Г. Резвов</i>	270
Свойства объемных акустических волн для двух модификаций монокристалла теллура <i>В. С. Хоркин, Н. В. Поликарпова</i>	278

---

## АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

Оценка скорости звука в газонасыщенном слое осадков по времени прихода сигнала послевестника <i>В. А. Григорьев</i>	288
О возможности повышения помехоустойчивости обнаружения звуковых сигналов в мелком море с использованием энергетических и фазовых инвариантов <i>Г. Н. Кузнецов, А. Н. Степанов</i>	300
Генерация подводного шума сулоем внутренней волны большой амплитуды в океане <i>А. Н. Серебряный, А. В. Фурдуев, А. А. Аредов, Н. Н. Охрименко</i>	312

---

## АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИИ

Оптимизация силового набора подкрепленной оболочки под действием акустического поля винта <i>Л. А. Лазарев, В. А. Титарев, А. Ю. Голубев</i>	323
---	-----

---

## АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ. БИОМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА

Пассивная акустическая термометрия грудной клетки человека, перенесшего COVID-19 <i>А. А. Аносов, А. В. Ерофеев, М. И. Шербаков, А. Д. Мансфельд</i>	330
---	-----

Некоторые особенности ЧМ-сигналов (свистов) новорожденной черноморской афалины (*Tursiops truncatus*)

*В. А. Рябов*

336

---

### **ИНФОРМАЦИЯ**

Памяти Виктора Васильевича Тюткина (3.12.1928–30.12.2021)

347

---

---

---

---

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН**

---

---

УДК: 534.212; 534.231; 534.284

**ВОЛНОВОДНАЯ ИЗОЛЯЦИЯ ЗВУКА В ТРУБАХ, ОБЛИЦОВАННЫХ  
УПРУГИМ ВОДОПОДОБНЫМ МАТЕРИАЛОМ**

© 2022 г. М. А. Миронов\*

*Акционерное общество “Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева”,  
ул. Шверника 4, Москва, 117449 Россия**\*e-mail: mironov\_ma@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.01.2022 г.

После доработки 20.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Рассмотрено влияние упругого водоподобного слоя, помещенного на стенку водозаполненного волновода, на распространение звука в волноводе. Сдвиговые колебания, возбуждаемые в слое, изменяют эффективную проводимость стенки волновода. В определенном частотном диапазоне около резонансной частоты волновое число звуковой волны оказывается чисто мнимым – волна экспоненциально затухает. Даны результаты расчетов эффективности этого эффекта, проводится аналогия с известным эффектом волноводной изоляции.

*Ключевые слова:* сдвиговые волны, резонанс, волноводная изоляция

**DOI:** 10.31857/S032079192203008X

**ВВЕДЕНИЕ**

Для поглощения звука, распространяющегося по водозаполненным трубам, можно использовать внутреннюю облицовку водоподобными материалами (резиной). Водоподобность означает, что по плотности и сжимаемости материал мало отличается от воды, а модуль сдвига материала существенно меньше модуля всестороннего сжатия. Объемное поглощение в облицовке дает заметный эффект только на высоких частотах. В работах [1, 2] обсуждается другой механизм – поглощение, вызванное переходом энергии звуковой волны в энергию сдвиговой волны на границах раздела сред. Звук в жидкости возбуждает продольные (звуковые) колебания в облицовке. Далее продольные волны в облицовке благодаря приклейке (условию прилипания) эффективно преобразуются в сдвиговые волны. Энергия сдвиговых волн переходит в тепло из-за сильного сдвигового трения в материале облицовки. Этот эффект экспериментально проверен в работах [3, 4].

В настоящей работе рассмотрено другое влияние водоподобной облицовки на распространение звука, не связанное с поглощением сдвиговых волн. Сдвиговые колебания слоя водоподобного материала создают эффект, аналогичный действию резонаторов, размещенных на стенках волновода. Резонаторы существенно изменяют эффективную проводимость стенки. Для монополюсных резонаторов (резонаторов Гельмгольца), присоединенных к стенке волновода, соответ-

ствующая теория – теория волноводной изоляции – дана в работах [5–10] (и значительно позже, в современных работах, посвященных развитию направления акустических метаматериалов [11–14]). В этих работах показано, что одинаковые резонаторы, расположенные последовательно вдоль оси волновода, обладая эффективной проводимостью массового типа выше частоты резонанса, обеспечивают в определенном частотном диапазоне мнимое значение волнового числа. Это эквивалентно превращению волны в экспоненциально затухающую. Волновод оказывается запертым. Оказывается, что похожий эффект создает упругий водоподобный слой в частотном диапазоне ниже четвертьволнового резонанса для сдвиговых волн. В первом разделе настоящей работы представлена простая аналитическая теория эффекта. Во втором разделе даны некоторые количественные оценки затухания в зависимости от параметров конструкции.

**1. ВОДОПОДОБНАЯ ОБЛИЦОВКА  
КАК ВОЛНОВОДНЫЙ ИЗОЛЯТОР**

Последовательное вычисление акустической проводимости упругого слоя, лежащего на жестком основании, проведено в работе [2]. Не повторяя подробно саму процедуру вывода формулы, дадим схему получения соответствующей системы уравнений и окончательный результат. Рассматривается задача о распространении звука в

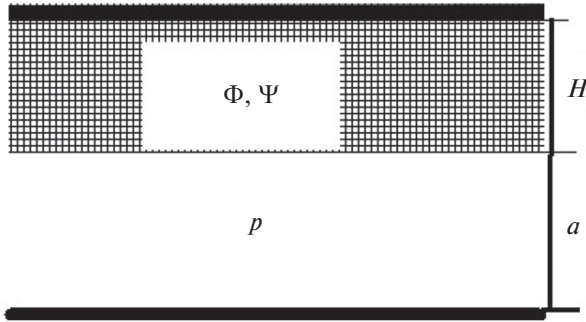


Рис. 1. Постановка задачи.

плоском слоистом волноводе толщиной  $a + H$  (рис. 1). Нижний слой толщиной  $a$  занимает невязкая сжимаемая жидкость с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Верхний слой толщиной  $H$  занимает упругая среда с плотностью  $\rho$  и параметрами Ламэ  $\lambda, \mu$ . Границы волновода жесткие. В упругом слое поле скорости состоит из суммы потенциальной (скалярный потенциал скорости  $\Phi$ ) и вихревой (векторный потенциал скорости  $\Psi$ ) компонент. В жидком слое поле описывается дав-

лением  $p$ . Волновод предполагается узким (одномодовым) по сравнению с длиной распространяющейся волны давления. Задача решается в два этапа. На первом этапе определяется входная проводимость упругого слоя относительно гармонического поля давления с частотой  $\omega$  и волновым числом  $\xi$ , заданного на границе раздела

$$p(x, t) = A \exp(-i\omega t + i\xi x). \tag{1}$$

На верхней границе упругого слоя выполняется условие равенства нулю нормальных и касательных скоростей. Внутри упругого слоя поле является суммой продольных и поперечных плоских волн с волновым числом вдоль оси  $x$ , равным  $\xi$ . На втором этапе вычисляется продольное волновое число волны давления в слое жидкости, ограниченном с одной стороны границей с заданной проводимостью, а с другой — жесткой границей. На границе раздела задаются равенство нормальных скоростей, равенство нормальных напряжений и равенства нулю касательных напряжений. Решение первого этапа дает следующее выражение для входной проводимости — отношения нормальной скорости  $u_z$  к нормальному напряжению  $\sigma_{zz}$  (см. [2]):

$$Y(\omega, \xi) = \frac{u_z}{\sigma_{zz}} = \frac{-i\omega \zeta_l k_l^2 (\xi^2 \cos \gamma \sin \alpha + \zeta_l \zeta_l \sin \gamma \cos \alpha)}{\mu [4\zeta_l \zeta_l \kappa^2 \xi^2 + \zeta_l \zeta_l (\kappa^4 + 4\xi^4) \cos \gamma \cos \alpha - \xi^2 (\kappa^4 + 4\zeta_l \zeta_l)]}. \tag{2}$$

В этой формуле введены следующие стандартные обозначения:  $k_t = \sqrt{\omega^2 \rho / \mu}$ ,  $k_l = \sqrt{\omega^2 \rho / (\lambda + 2\mu)}$  — волновые числа поперечной и продольной волн;  $\xi$  — волновое число вдоль оси  $x$ ;  $\zeta_l^2 = k_l^2 - \xi^2$  — квадрат проекции волнового вектора продольной волны на нормаль к границе;  $\zeta_t^2 = k_t^2 - \xi^2$  — квадрат проекции волнового вектора поперечной волны на нормаль к границе;  $\kappa^2 = k_l^2 - 2\xi^2$ ;  $\alpha = \zeta_l H$ ;  $\gamma = \zeta_t H$  — волновые толщины слоя относительно поперечной и продольной волн.

Как показано в [2], для водоподобного слоя можно пользоваться приближенной формулой, которая получается из точной, если считать, что  $|k_t| \gg |k_l|$ . При этом предположении выполняются следующие условия:

$$\zeta_t \approx k_t, \quad \cos \gamma \approx 1, \quad \sin \gamma \approx \gamma, \quad \kappa^2 \approx k_l^2, \\ \cos \alpha \approx \cos(k_l H), \quad \sin \alpha \approx \sin(k_l H).$$

Точная формула (2) для проводимости слоя может быть заменена на приближенную:

$$Y(\omega, \xi) \approx -i\omega \frac{\xi^2 \operatorname{tg}(k_l H) + \zeta_l^2 k_l H}{\mu k_l^3}. \tag{3}$$

После решения задачи о волне в волноводе с податливой стенкой, а именно, нахождения дисперсионной зависимости  $\xi(\omega)$ , можно проверить, насколько хорошо приближенная формула для проводимости (3) совпадает с точной (2).

Далее решается задача о распространении волны в волноводе шириной  $a$  с податливой границей (рис. 1). Общий случай такой задачи подробно рассмотрен в [15].

Поле в жидкости ищем в виде

$$p(x, z, t) = A \exp(-i\omega t + i\xi x) \cos(\delta z), \tag{4}$$

$\delta^2 + \xi^2 = (\omega/c_0)^2$ . Нормальная к границе скорость равна:

$$u_z(x, a, t) = A \frac{1}{-i\omega \rho_0} \delta \exp(-i\omega t + i\xi x) \sin(\delta a). \tag{5}$$

Записываем равенство проводимостей на границе раздела:

$$\frac{u_z(x, a, t)}{p(x, a, t)} = \frac{1}{-i\omega \rho_0} \delta \operatorname{tg}(\delta a) = Y$$

или, с учетом (3),



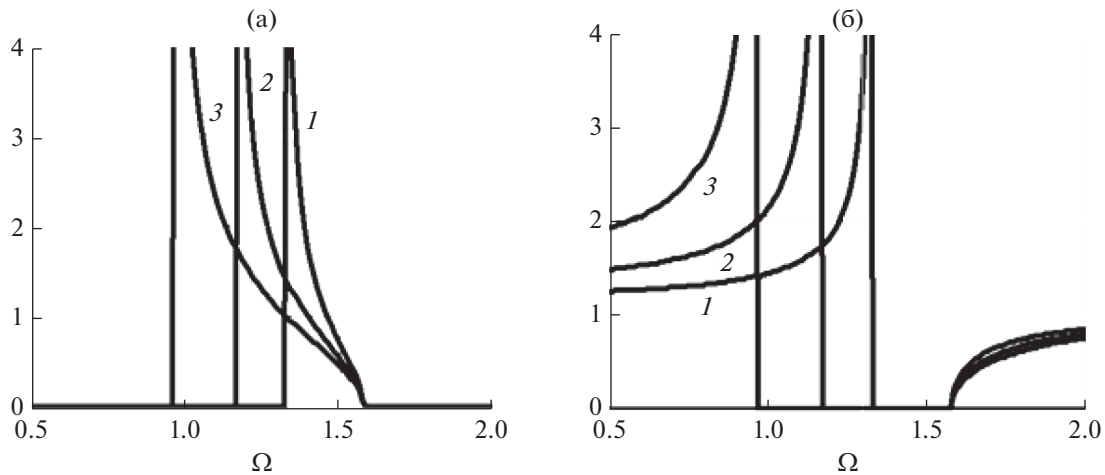


Рис. 2. (а) – Мнимая часть волнового числа, (б) – действительная часть волнового числа при толщинах покрытия: 1 –  $\tilde{H} = 0.5$ , 2 –  $\tilde{H} = 1$ , 3 –  $\tilde{H} = 2$ .

$$\frac{1}{-i\omega\rho_0} \delta \operatorname{tg}(\delta a) = -i\omega \frac{\xi^2 \operatorname{tg}(k_t H) + \zeta_t^2 k_t H}{\mu k_t^3}.$$

Считаем волновод узким по сравнению с длиной волн:  $\delta a \ll 1$ . При этом

$$\delta \operatorname{tg}(\delta a) \approx a\delta^2 = a(k_0^2 - \xi^2).$$

В результате предыдущее уравнение переписывается в виде явного дисперсионного уравнения:

$$\xi^2 = k_0^2 \frac{1 + \frac{\beta}{\beta_0} \frac{H}{a}}{1 - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{H}{a} \frac{\operatorname{tg}(k_t H) - k_t H}{k_t H}}. \quad (6)$$

Здесь введены сжимаемости жидкости  $\beta_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0^2}$  и

$$\text{упругой среды } \beta = \frac{1}{\rho c^2}.$$

Из (6) следует, что волновое число волны в облицованном волноводе зависит от следующих безразмерных параметров:  $\tilde{H} = H/a$  – отношения толщины покрытия к ширине волновода;  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$  – отношения плотности покрытия к плотности среды волновода;  $\tilde{\beta} = \beta/\beta_0$  – отношения сжимаемости покрытия к сжимаемости среды;  $\Omega = k_t H$  – волнового размера покрытия с нормировкой на сдвиговую волну. Можно также ввести нормированное волновое число  $\tilde{\xi} = \xi/\xi_0$  и переписать (6) в безразмерном виде:

$$\tilde{\xi}^2 = \frac{1 + \tilde{\beta}\tilde{H}}{1 - \tilde{\rho} \frac{\operatorname{tg}(\Omega) - \Omega}{\Omega}}. \quad (7)$$

Отрицательность знаменателя правой части формул (6)–(7) соответствует мнимости волнового числа и, соответственно, экспоненциальному затуханию волны и “запиранию” волновода. Получается эффект волноводной изоляции, как он сформулирован в работах [5–8]. Отметим два отличия от результатов этих работ. Во-первых, рассматриваемая конструкция является непрерывной, тогда как расчетные формулы работ [5–8] основаны на “размазывании” проводимостей дискретных включений – горл резонаторов Гельмгольца – по стенке волновода. Во-вторых, как показано ниже, частотная зависимость рассматриваемой здесь конструкции радикально отличается от частотной зависимости волноводного изолятора, использующего цепочку резонаторов Гельмгольца.

## 2. ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВОЛНОВОДНОГО ИЗОЛЯТОРА

Зависимость (7) еще больше упрощается, если среда покрытия максимально приближена к веществу среды волновода, т.е.  $\tilde{\rho} = 1$ ,  $\tilde{\beta} = 1$ :

$$\tilde{\xi}^2 = \frac{1 + \tilde{H}}{1 - \tilde{H} \frac{\operatorname{tg}(\Omega) - \Omega}{\Omega}}. \quad (8)$$

На рис. 2 представлены зависимости вещественной и мнимой частей безразмерного волнового числа от безразмерной частоты для нескольких безразмерных толщин покрытия.

Диапазон частот, при которых мнимая часть волнового числа отлична от нуля, зависит от толщины покрытия – с увеличением толщины происходит расширение в сторону низких частот. Ограничение по частоте сверху не зависит от тол-

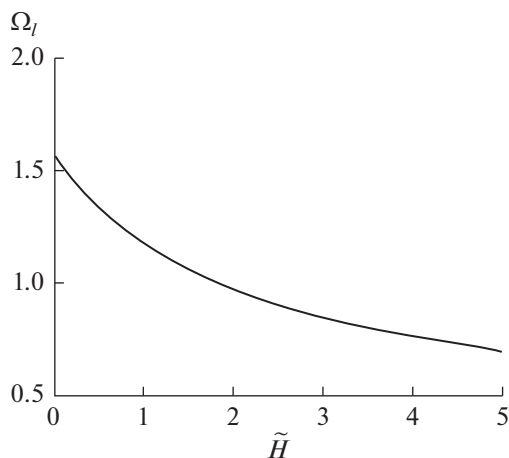


Рис. 3. Зависимость нижней граничной частоты от толщины покрытия.

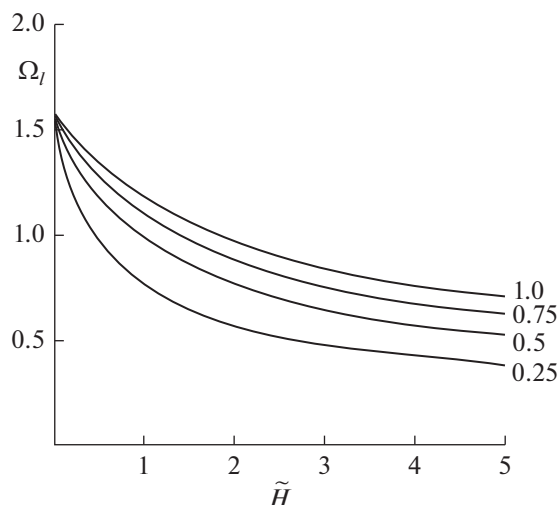


Рис. 4. Зависимость нижней граничной частоты от толщины покрытия при разных его плотностях:  $\bar{\rho} = 1, 0.75, 0.5, 0.25$ .

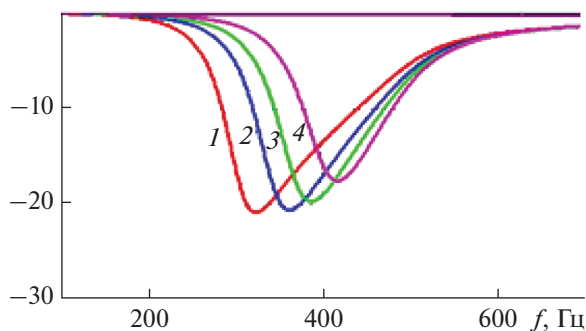


Рис. 5. Затухание в облицованном канале при разных плотностях: 1 –  $0.5\rho_0$ , 2 –  $0.75\rho_0$ , 3 –  $1.0\rho_0$ , 4 –  $1.5\rho_0$ .

щины покрытия и равно  $\Omega_m = \pi/2$  – частоте четвертьволнового резонанса поперечной волны в упругом слое. Эффект “запирания” находится ниже резонансной частоты, в отличие от полосы “запирания” в классическом волноводном резонаторе [5–8], где частотная область “запирания” лежит выше резонансной частоты резонаторов Гельмгольца. Нижняя граница  $\Omega_l$  определяется равенством:

$$\frac{\text{tg}\Omega_l - \Omega_l}{\Omega_l} = \frac{1}{\tilde{H}}. \quad (9)$$

Зависимость (9) представлена графически в виде функции  $\Omega_l(\tilde{H})$  на рис. 3. При нулевой толщине покрытия нижняя граница совпадает с верхней. При увеличении толщины покрытия нижняя граница понижается, соответственно, происходит расширение полосы запирания волновода. При толщине  $\tilde{H} = H/a = 3.66$  нижняя граница равна  $\Omega_l = \frac{1}{2}\Omega_m = \pi/4$ . Полоса запирания при такой толщине равна октаве. Расширение границы запирания волновода в сторону низких частот можно получить за счет уменьшения относительной плотности покрытия (см. (7)).

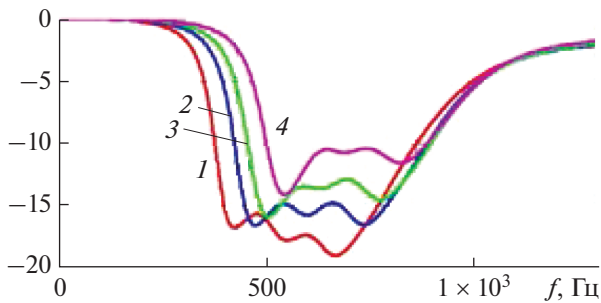
На рис. 4 показаны зависимости нижней граничной частоты запирания от толщины покрытия при разных плотностях покрытия. При уменьшении плотности (кривые сверху вниз на рис. 4) нижняя граничная частота уменьшается. Например, нижняя граничная частота получается вдвое меньше верхней, если плотность равна 0.5, а толщина равна 1.83.

Для определения затухания в размерном виде используем далее формулу (6). Введем в нее дополнительно потери в сдвиговых волнах, умножив комбинацию  $k_t H$  на комплексный множитель  $1 + i\epsilon$ . Далее на рис. 5 приведены результаты расчета затухания на длине, равной 1 м. В качестве среды берется вода:  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 1500 \text{ м/с}$ . Скорость сдвиговой волны равна  $c_t = 100 \text{ м/с}$ ,  $\epsilon = 0.1$ . Ширина волновода равна  $a = 0.05 \text{ м}$ , толщина покрытия равна  $H = 0.05 \text{ м}$ . Затухание в дБ вычисляется по формуле

$$L(\omega) = 20 \lg[\text{Im}(\exp(i\xi(\omega) \times 1))]. \quad (10)$$

В этой формуле не учитываются потери, связанные с отражением волн на границах облицованной области.

Затухание на уровне  $-10 \text{ дБ}$  реализуется в полосе частот шириной порядка  $150 \text{ Гц}$  и смещается в сторону низких частот при уменьшении плотности покрытия. Увеличить полосу “запирания” можно, разбив всю длину покрытия, в данном случае 1 м, на отрезки с разными толщинами,



**Рис. 6.** Затухание в облицованном канале с покрытием суммарной длины 1 м, разбитым на отрезки разной толщины. Плотности облицовки: 1 –  $0.5\rho_0$ , 2 –  $0.75\rho_0$ , 3 –  $1.0\rho_0$ , 4 –  $1.5\rho_0$ .

уменьшающимися при увеличении частоты. Например, при разбиении на отрезки 0.5, 0.2, 0.25, 0.05 м и толщинах облицовки в этих отрезках, равных  $a, 0.8a, 0.68a, 0.61a$  соответственно, получаются зависимости, показанные на рис. 6. Скорость сдвиговой волны принята равной  $c_t = 150$  м/с. Кривые построены для разных плотностей облицовки. При той же длине облицованной части волновода затухание на уровне  $-10$  дБ реализуется в полосе порядка октавы, причем, чем меньше плотность облицовочной среды, чем шире полоса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Слой водоподобной упругой среды, помещенный на стенке волновода, создает условие нераспространения звука в частотном диапазоне, лежащем ниже частоты четвертьволнового резонанса сдвиговой волны в слое. Экспоненциальное затухание звука зависит от толщины слоя и плотности упругой среды – чем меньше плотность, тем больше затухание. Этот эффект нераспространения аналогичен известному эффекту волноводной изоляции в волноводе, к стенке которого присоединена цепочка резонаторов Гельмгольца. Принципиальное отличие заключается в том, что цепочка резонаторов создает запираение в частотной полосе выше резонансной частоты резонаторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дулов В.А. Эффект Брюстера в акустике и эффект Константинова // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 5. С. 808–809.
2. Дулов В.А. Влияние облицовки из водоподобного материала на затухание звука в трубах, заполненных жидкостью // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 54–57.
3. Брайнин Б.П., Миронов М.А. Исследование моделей звукоизолятора и звукопоглотителя // Отчет о научно-исследовательской работе № СП-370. ВНИИ Гидромаш, 1983.
4. Брайнин Б.П., Покровский Б.В. Звукопоглощение шума в гидравлической системе с центробежным насосом // Сб. АО “НПО” Гидромаш. Новое в конструировании насосов и гидросистем. М., 1997.
5. Исакович М.А., Кашина В.И., Тюткин В.В. Применение систем резонаторов для звукоизоляции нормальной волны нулевого порядка в трубах и других длинных линиях // В сб. Морское приборостроение. Серия Акустика. 1972. № 1. С. 117–125.
6. Исакович М.А. Теория волноводной изоляции в длинных линиях // Сборник трудов VI Всес. симп. по дифракции и распространению волн. Кн. 2. Ереван, 1973. С. 105.
7. Исакович М.А. // Тр. семинара “Борьба с шумом и звуковой вибрацией”. 1974. С. 83.
8. Лапин А.Д. Звукоизоляция в волноводах. Обзор // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 3. С. 337–350.
9. Исакович М.А., Цилькер Л.С. Обоснование метода “размазывания” для расчета волноводных изоляторов // В сб. IX Акустическая конференция. М.: Акуст. ин-т, 1977. С. 171–174.
10. Цилькер Л.С. Применение волноводного изолятора для изоляции нормальной волны нулевого порядка в трубах // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 1. С. 127–131.
11. Seo S.-H., Kim Y.-H. Silencer design by using array resonators for low-frequency band noise reduction // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 118(4). P. 2332–2338.
12. Wang Z.G., Lee S.H., Kim C.K., Park C.M., Nahm K., Nikitov S. Acoustic wave propagation in one-dimensional phononic crystals containing Helmholtz resonators // J. Appl. Phys. 2008. V. 103(6). 064907.
13. Sugino C., Xia Y., Leadenham S., Ruzzene M., Erturk A. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures // J. Sound Vib. 2017. V. 406. P. 104–123.
14. Guobiao Hua, Lihua Tang, Xiaobin Cui. On the modeling of membrane-coupled Helmholtz resonator and its application in acoustic metamaterial system // Mechanical Systems and Signal Processing. 2019. V. 132. P. 595–608.
15. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1, 539.3

### НАПРЯЖЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНЕ ПОХГАММЕРА–КРИ СРЕДНЕВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2022 г. В. В. Мокряков\*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук, пр.-т Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия

\*e-mail: mokr@ipmnet.ru

\*\*e-mail: euphil@gmail.com

Поступила в редакцию 08.07.2021 г.

После доработки 20.12.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Аналитически рассмотрены осесимметричные волны Похгаммера–Кри, распространяющиеся вдоль упругого стержня круглого сечения. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние стержня. Вычислены максимумы растягивающих и эквивалентных напряжений на оси и на поверхности стержня, получены их соотношения. Особое внимание уделено диапазону волн средней длины (одного порядка с радиусом стержня), проведено сравнение с коротковолновым и длинноволновым приближениями. Продемонстрировано, что некоторые волны Похгаммера–Кри обладают рядом уникальных свойств: их относительная длина волны не зависит от упругих модулей, отношение максимального осевого растяжения к максимальному поверхностному растяжению имеет наибольшее значение и также не зависит от упругих модулей, материал стержня находится в состоянии чистого сдвига. Показано, что описанные волны соответствуют классу волн Ламе.

*Ключевые слова:* волны Похгаммера–Кри, волны Ламе, упругость, круглый стержень, напряженно-деформированное состояние, коэффициент Пуассона

DOI: 10.31857/S0320791922030091

#### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$r, \theta, z$  – координаты цилиндрической системы координат;

$a$  – радиус стержня;

$\rho$  – плотность;

$E$  – модуль Юнга;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$\lambda, \mu$  – параметры Ламе;

$\omega$  – круговая частота;

$\gamma$  – круговое волновое число;

$l$  – длина волны;

$\Omega = \gamma z - \omega t$  – фаза волны в точке  $z$  в момент  $t$ ;

$c = \omega/\gamma$  – фазовая скорость;

$c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – скорость бесконечно длинных волн в бесконечном стержне;

$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – скорость волн расширения в бесконечной среде;

$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость волн сдвига в бесконечной среде;

$c_R$  – скорость волн Рэлея (поверхностных волн в полупространстве);

$J_n, I_n$  – функции Бесселя действительного и мнимого аргументов;

$u_i$  – компоненты вектора смещений;

$\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;

$\Delta$  – первый инвариант тензора деформаций;

$\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;

$U$  – обобщенная амплитуда волны Похгаммера–Кри.

В формулах используются следующие сокращения:

$$h = \gamma\sqrt{c^2/c_1^2 - 1}, \quad \kappa = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1};$$

$$H = c^2/c_1^2 - 1 = h^2/\gamma^2; \quad K = c^2/c_2^2 - 1 = \kappa^2/\gamma^2,$$

а также следующие соотношения:

$$c_1^2 = c_0^2 \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{c_0^2}{2(1+\nu)};$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \rho(c_1^2 - 2c_2^2);$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \rho c_2^2;$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 = \frac{K-1-2H}{H+1};$$

$$H = \frac{c^2(1+\nu)(1-2\nu)}{c_0^2(1-\nu)} - 1; \quad K = 2\frac{c^2}{c_0^2}(1+\nu) - 1.$$

**ВВЕДЕНИЕ**

Гармонические волны, распространяющиеся в стержнях (сплошных и полых) круглого сечения описываются уравнениями Погхаммера–Кри, которые впервые были получены в работах [1–3]. Решения уравнений были получены в последующих работах [4–16] и др., где были рассмотрены продольные осесимметричные, изгибные и крутильные моды.

Дальнейшее развитие задачи имеет несколько направлений: изменение геометрии (замена цилиндра на цилиндрическую полость, трубу или другую осесимметричную конструкцию), изменение свойств материала (замена упругого материала на упруго-вязкий, термоупругий), изменение распределения свойств конструкции (замена однородности на неоднородность, изотропности на анизотропность). В качестве примеров можно представить следующие недавние работы [17–24].

В исследовании напряженно-деформированных состояний (НДС) мод осесимметричных волн Погхаммера–Кри (ПК-волн) в работах [25, 26] показано, что максимумы растягивающих и эквивалентных [27] напряжений могут локализоваться не только на поверхности стержня, но и на его оси. Таким образом, может оказаться, что на оси стержня НДС уже удовлетворяет критериям разрушения (текучести и др., в зависимости от материала), и в то же время напряжения, определяемые по деформациям на поверхности, будут далеки от критических.

В представленной работе рассматриваются отношения максимальных напряжений (растягивающих и эквивалентных) на оси сплошного стержня и на его поверхности для ряда положительных значений коэффициента Пуассона. Также определяется длина волны, при которой отношения максимумов имеют наибольшее значение.

**НАПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ  
В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ  
ПОГХАММЕРА–КРИ**

В предыдущих работах [25, 26] получены выражения для НДС в осесимметричных волнах Погхаммера–Кри в следующем виде.

Смещения:

$$u_r = 2U\gamma^2 r \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} + 2 \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$u_z = 2U\gamma \left[ (1-K) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 2H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \cos \Omega. \tag{1}$$

Деформации:

$$\varepsilon_{rr} = 2U\gamma^2 H \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left( J_0(hr) - \frac{J_1(hr)}{hr} \right) + 2 \frac{J_1(ha)}{ha} \left( J_0(\kappa r) - \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right) \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 2U\gamma^2 H \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} + 2 \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{zz} = 2U\gamma^2 \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) - 2H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{rz} = 2Ur\gamma^3 H (K-1) \times \left[ \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} - \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \cos \Omega,$$

$$\Delta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 2U\gamma^2 (H+1) \times (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) \sin \Omega.$$

Напряжения:

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta};$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz},$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu U\gamma^2 \left[ (K-1)^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) - 2H(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \frac{J_1(hr)}{hr} - 4H \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu U\gamma^2 \left[ (K-1-2H)(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + \right. \\ &\quad + 2H(K-1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} + \\ &\quad \left. + 4H \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu U\gamma^2 \left[ (K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \\ &\quad \times \left[ J_0(hr) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{rz} &= 4U\mu r\gamma^3 H(K-1) \times \\ &\quad \times \left[ \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} - \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \cos \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Получено также дисперсионное соотношение для осесимметричных ПК-волн в следующем виде:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 J_0(ha) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) - \\ - 2H(K+1) \frac{J_1(ha) J_1(\kappa a)}{ha \kappa a} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ

Известны формы волн для длинноволнового ( $l \gg a$ ) и коротковолнового ( $l \ll a$ ) приближений.

В случае длинноволнового приближения ПК-волна стремится к плоской волне с фазовой скоростью  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  [7]. Здесь напряжения однородны по поперечному сечению стержня. Действительно, если  $l \rightarrow \infty$ , то  $\gamma \rightarrow 0$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} (J_1(x)/x) = 1/2$ , то дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 + 4H - H(K+1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 [c^2 c_1^2 - c^2 c_2^2 - 3c_1^2 c_2^2 + 4c_2^4] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение  $c = 0$  соответствует отсутствию волн. Второе решение ненулевое, и после замены  $c_1$  и  $c_2$  через  $c_0$  и  $v$ , получаем:

$$c^2 = c_2^2 \frac{3c_1^2 - 4c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} = \frac{c_0^2}{1+v} \frac{1+2v+v^2}{1+v} = c_0^2. \quad (7)$$

Итак, доказано, что в длинноволновом приближении фазовая скорость равна  $c_0$ .

Смещения и напряжения находим аналогичным образом.

$$u_r = \frac{U\gamma^2 r c_0^2}{2 c_2^2} \sin \Omega = U\gamma^2 r (1+v) \sin \Omega, \quad (8)$$

$$u_z = U\gamma \left( 2 \frac{c_0^2}{c_1^2} - \frac{c_0^2}{c_2^2} \right) \cos \Omega = -2U\gamma v \frac{1+v}{1-v} \cos \Omega,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \mu U\gamma^2 [(K-1)^2 + 2H - H(K-1)] \sin \Omega = \\ &= 2\mu U\gamma^2 \frac{1+v}{1-v} [2 - 2v^2 - 3 + 3v + 2 - \\ &\quad - 4v - 1 + 2v - v + 2v^2] \sin \Omega = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \mu U\gamma^2 \times \\ &\times [(K-1)^2 - H(K-1) + 2H] \sin \Omega = \sigma_{rr} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \mu U\gamma^2 \frac{c_0^2}{c_2^2} \left[ \frac{c_0^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_0^2}{c_1^2} \right] \sin \Omega = \\ &= 4\mu U\gamma^2 v \frac{(1+v)^2}{1-v} \sin \Omega, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_{rz} = 0. \quad (12)$$

Как видно из полученных формул, в процессе распространения такой волны все поперечные сечения стержня остаются плоскими, однородно расширяясь и сжимаясь. Единственная ненулевая компонента напряжений – продольная ( $\sigma_{zz}$ ), ее распределение по любому поперечному сечению однородно.

В случае коротковолнового приближения главная мода имеет характер волны Рэлея: наибольшие смещения и напряжения локализуются на поверхности стержня, экспоненциально затухая к оси. Действительно, рассмотрим дисперсионное соотношение для фазовой скорости  $c < c_2 < c_1$  (фундаментальная мода). В этом случае  $h$  и  $\kappa$  становятся мнимыми, и бесселевы функции  $J$  заменяются функциями мнимого аргумента  $I$ :

$$J_0(ha) = I_0(|h|a); \quad \frac{J_1(ha)}{ha} = \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \quad (13)$$

(для  $\kappa$  аналогично).

Тогда дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( 2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 I_0(|h|a) \frac{I_1(|\kappa|a)}{|\kappa|a} - \\ - 4 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} I_0(|\kappa|a) + \\ + 2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{c^2}{c_2^2} \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \frac{I_1(|\kappa|a)}{|\kappa|a} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При коротковолновом приближении  $\gamma a \gg 1$ . Как известно [27], для больших аргументов

$$I_n(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}. \quad (15)$$

Тогда (14) преобразуется к виду

$$|h|a \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 - 4|k|a \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) + 2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \frac{c^2}{c_2^2} = 0. \quad (16)$$

После раскрытия модулей и сокращения общих множителей, получаем

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} + \frac{2}{\gamma a c_2^2} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} = 0. \quad (17)$$

Последнее слагаемое стремится к нулю при  $\gamma \rightarrow \infty$ . В итоге приходим к уравнению

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 = 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}. \quad (18)$$

Оно хорошо известно как дисперсионное соотношение для волны Рэлея. Его решение дает значение  $c = c_R$  – фазовую скорость волны Рэлея.

Аналогичным образом получим смещения (предполагается, что  $\gamma r \gg 1$ ):

$$u_r = \frac{U\gamma^2}{\pi(|hk|a)^{3/2}\sqrt{r}} \left[ \left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2\right) e^{k|a+|h|r} + 2e^{h|a+|k|r} \right] \sin \Omega,$$

$$u_z = \frac{-U\gamma}{\pi(|hk|a)^{3/2}\sqrt{r}} \times$$

$$\times \left[ \left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2\right) |h| e^{k|a+|h|r} + 2|k| \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right) e^{h|a+|k|r} \right] \cos \Omega. \quad (19)$$

Введем замену, означающую относительное расстояние до поверхности:

$$\delta = (r - a)/a, \quad r = a(1 + \delta). \quad (20)$$

Соответственно,

$$u_r = \frac{U\gamma^2 e^{(|k|+|h|)a}}{\pi(|hk|)^{3/2} a^2 \sqrt{1 + \delta}} \times$$

$$\times \left[ \left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2\right) e^{h|a\delta} + 2e^{k|a\delta} \right] \sin \Omega,$$

$$u_z = \frac{-U\gamma|h| e^{(|k|+|h|)a}}{\pi(|hk|)^{3/2} a^2 \sqrt{1 + \delta}} \times$$

$$\times \left[ \left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2\right) e^{h|a\delta} + 2\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} e^{k|a\delta} \right] \cos \Omega. \quad (21)$$

Таким образом, при коротковолновом приближении в окрестности поверхности стержня структура ПК-волны аналогична структуре волны Рэлея, отличаясь общим коэффициентом.

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СРЕДНЕВОЛНОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Для контроля напряженно-деформированного состояния конструкции используются тензо-

датчики, закрепленные на поверхности конструкции. Как показано выше, в случае длинноволнового приближения внутренние напряжения в стержне равны поверхностным, в случае коротковолнового – внутренние напряжения ниже поверхностных, как и при волне Рэлея. Иначе говоря, в описанных случаях внутренние напряжения не превышают поверхностные, и применение поверхностных тензодатчиков достаточно, чтобы контролировать НДС стержневой структуры.

Можно было бы предположить, что последнее утверждение также справедливо и для средних волн. Однако в работе [26] продемонстрировано, что при распространении волны Погхаммера–Кри (фундаментальная мода) максимум напряжений (растягивающих или эквивалентных) может возникать и на оси стержня (отметим, что при расчетах распределения НДС в сечении стержня в рассмотренных случаях максимумы локализовались только на поверхности или оси, но это не означает, что в других случаях не могут быть обнаружены другие области локализации). В [26] для стального стержня было продемонстрировано, что на низких частотах максимальное растягивающее напряжение ( $\lesssim 1.3$  МГц) и максимальное эквивалентное напряжение ( $\lesssim 1.7$  МГц) локализуется на оси стержня. Было показано, что максимальное растягивающее напряжение на оси может быть в 3.164 раза больше, чем на поверхности, а максимальное эквивалентное напряжение – в 4.056 раза.

В данной работе рассмотрены отношения максимальных значений на оси и на поверхности стержня для растягивающих напряжений ( $R_T$ ) и для эквивалентных напряжений ( $R_{eq}$ ) при ряде значений коэффициента Пуассона  $\nu = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$  (особые значения 0 и 0.5 исключены из диапазона и будут рассматриваться отдельно в следующем исследовании). Расчеты показали, что для каждого рассмотренного  $\nu$  существует длина волны (отдельно для растягивающего напряжения (рис. 1) и эквивалентного напряжения (рис. 2)), при которой максимумы на оси и на поверхности равны. Для более коротких волн максимум напряжений локализуется на поверхности стержня, для более длинных – на оси. Вычисленные распределения на краях диапазона соответствуют вышеописанному коротковолновому и длинноволновому приближениям.

Полученные распределения показывают, что существует особая волна с длиной волны  $l^* \approx 3.41a$ , для которой  $R_T \approx 3.16$  и  $R_{eq} \approx 2.74$  имеют постоянные значения независимо от значения  $\nu$  (при этом для  $R_T$  это наибольшее значение). Распределения максимальных значений растягивающего напряжения  $\sigma_l$  и эквивалентного напряжения  $\sigma_{eq}$  для  $l = l^*$  представлены на рис. 3 и 4. Штриховка



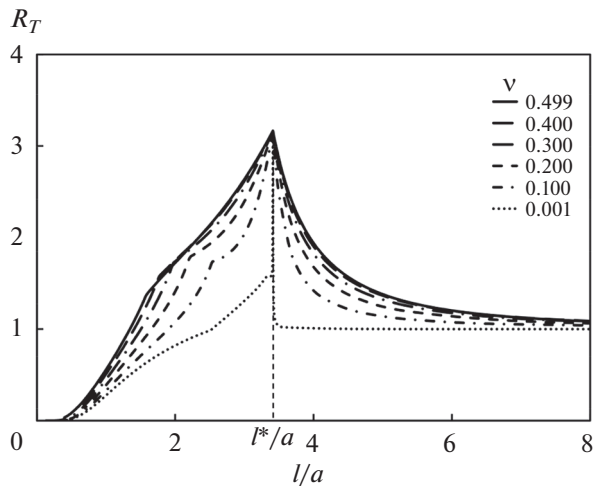


Рис. 1. Отношение максимальных растягивающих напряжений (фундаментальная мода).

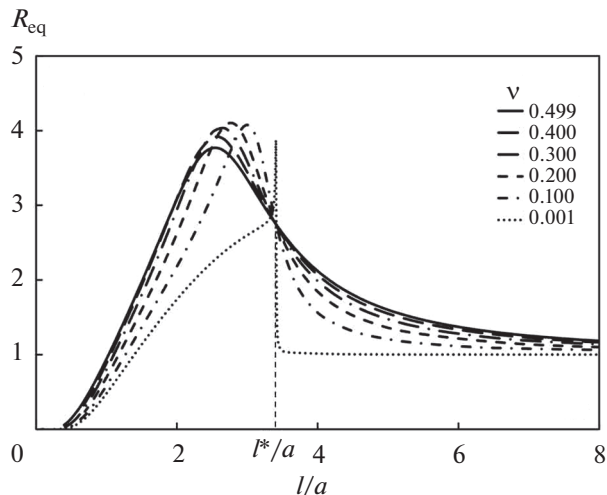


Рис. 2. Отношение максимальных эквивалентных напряжений (фундаментальная мода).

показывает область, где главным напряжением является  $\sigma_\theta$ .

Рассмотрим это явление подробнее. Сначала найдем напряжения на поверхности стержня ( $r = a$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_a = 2\mu U \gamma^2 & \left[ (K-1)^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(ha) + \right. \\ & + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) - \\ & \left. - 2H(K+1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(ha)}{\kappa a ha} \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}|_a = 2\mu U \gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} & \left[ (K-1)(K-1-2H) \times \right. \\ & \left. \times J_0(ha) + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_a = 2\mu U \gamma^2 & \left[ (K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \\ & \left. \times J_0(ha) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_{rz} = 0. \quad (25)$$

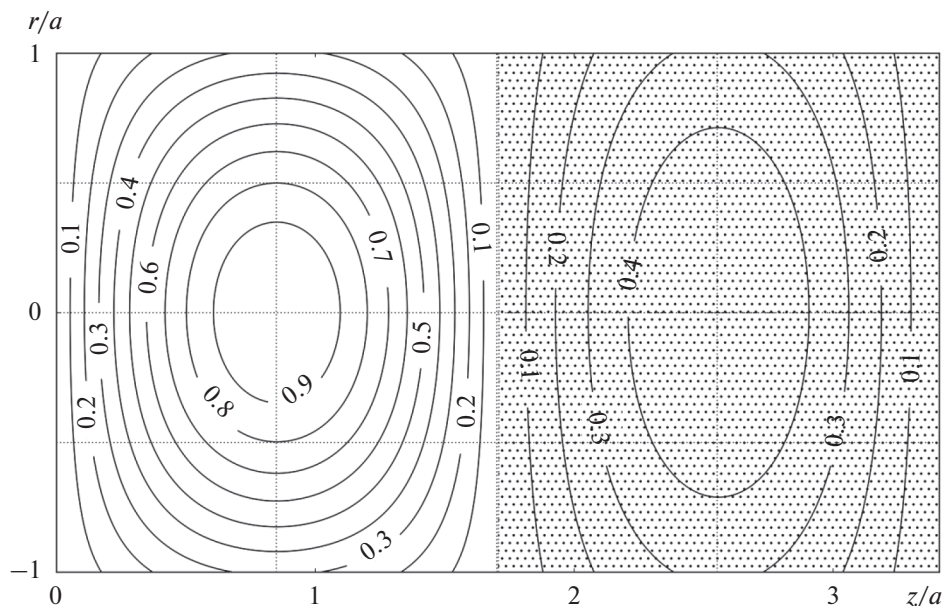


Рис. 3. Нормализованное первое главное напряжение  $\sigma_1$  для  $l = l^*$  (фундаментальная мода).



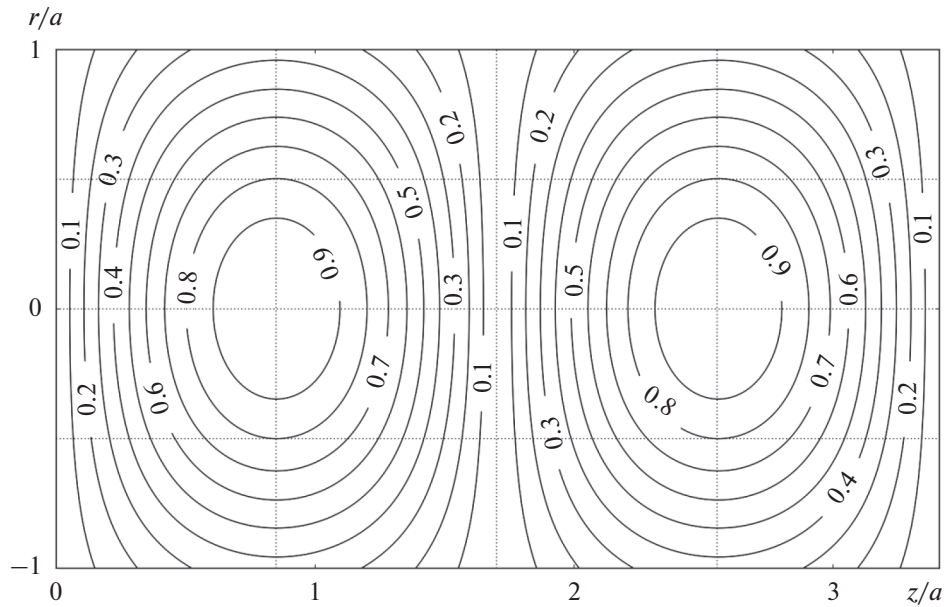


Рис. 4. Нормализованное эквивалентное напряжение  $\sigma_{eq}$  для  $l = l^*$  (фундаментальная мода).

Согласно граничным условиям (поверхность свободна от нагрузок),  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{rz}$  равны нулю (выражение в квадратных скобках в формуле  $\sigma_{rr}$  представляет собой левую часть дисперсионного соотношения, т.е. равно нулю).

Перепишем  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  с учетом дисперсионного соотношения:

$$\sigma_{\theta\theta}|_a = 2\mu U\gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left[ (K-1)(K-1-2H) \times \right. \\ \left. \times J_0(ha) + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \quad (26)$$

$$\sigma_{zz}|_a = 2\mu U\gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left[ 2(K-1)(K-H)J_0(ha) - \right. \\ \left. - 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega. \quad (27)$$

Поскольку задача осесимметрична, то на поверхности  $\sigma_r$  равно либо  $\sigma_{zz}$ , либо  $\sigma_{\theta\theta}$ . Выпишем формулы для максимумов соответствующих компонент:

$$\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu U\gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ \times \left| (K-1)(K-1-2H)J_0(ha) + \right. \\ \left. + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right|, \quad (28)$$

$$\max_{r=a} \sigma_{zz} = 2\mu U\gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ \times \left| 2(K-1)(K-H)J_0(ha) - 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right|. \quad (29)$$

Расчеты показывают, что фазовая скорость  $c^*$  особой волны находится в интервале  $c_2 < c^* < c_0$  для всех рассматриваемых  $\nu$ . При  $\nu > 0$  справедливо выражение  $c_1 > c_0$ , следовательно,  $c^* < c_1$  и  $H = c^{*2}/c_1^2 - 1 < 0$ . Отсюда  $h = \gamma\sqrt{H} = i\gamma\sqrt{|H|}$ . Таким образом, как и в формуле (13), получаем, что  $J_0(ha) = I_0(|h|a)$  и  $J_1(ha)/ha = I_1(|h|a)/|h|a$ .

С другой стороны,

$$c_2 < c^* < c_0 \Rightarrow c_2^2 < c^{*2} < 2(1+\nu)c_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < c^{*2}/c_2^2 - 1 < 1 + 2\nu \Rightarrow 0 < K < 2. \quad (30)$$

Следовательно, на интересующем интервале  $\kappa a \in \mathbb{R}$ .

Таким образом,  $\max \sigma_{zz}$  имеет следующий вид (все члены действительные):

$$\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu U\gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ \times \left| (K-1)(K-1+2|H|)I_0(|h|a) - \right. \\ \left. - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \max_{r=a} \sigma_{zz} &= 2\mu U \gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ &\times \left| 2(K-1)(K+|H|) I_0(|h|a) + \right. \\ &\quad \left. + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

Перелом графиков на рис. 1 в точке наибольшего значения  $R_T$  означает, что здесь  $\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta}$  и  $\max_{r=a} \sigma_{zz}$  равны.

Сделаем предположение, что  $J_1(\kappa a)/\kappa a = 0$ . Но тогда из дисперсионного соотношения получаем, что  $J_0(\kappa a)$  также должно быть равно нулю. Однако доказано (см., напр., [29]), что функции  $J_0$  и  $J_1$  общих корней не имеют. Следовательно,  $|J_1(\kappa a)/\kappa a| > 0$ . Тогда достаточно сравнить последние множители:

$$\begin{aligned} &\left| (K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \right. \\ &\left. - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right| = \left| 2(K-1)(K+|H|) \times \right. \\ &\quad \left. \times I_0(|h|a) + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|. \end{aligned} \quad (33)$$

Если  $|x| = |y|$ , то либо  $x = y$ , либо  $x = -y$ . Рассмотрим оба варианта.

Вариант I:

$$\begin{aligned} &(K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - 2|H|(K+1) \times \\ &\quad \times \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} - 2(K-1)(K+|H|) I_0(|h|a) - \\ &\quad - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (K+1) \left[ (K-1) I_0(|h|a) + 4|H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Если предположить, что  $K+1 = 0$ , то получаем:

$$K+1 = c^2/c_2^2 = 0 \Rightarrow c = 0, \quad (35)$$

т.е. в данном случае волны просто нет.

Если же приравнять другой множитель нулю, то получим уравнение относительно фазовой скорости. Его решение можно получить численно, и оно не соответствует особой волне.

Вариант II:

$$\begin{aligned} &(K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \\ &\quad - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} + 2(K-1)(K+|H|) \times \\ &\quad \times I_0(|h|a) + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (K-1)(3K-1+4|H|) I_0(|h|a) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

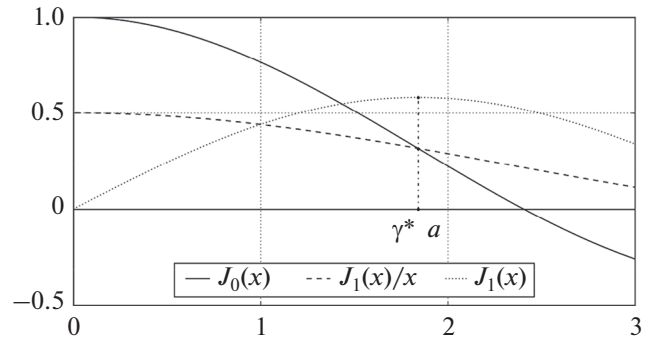


Рис. 5. Расчет значения  $\gamma^* a$  для фундаментальной моды.

Множитель  $I_0(|h|a)$  положителен и не может быть корнем. Рассмотрим второй множитель:

$$3K-1+4|H| = 3 \frac{c^2}{c_2^2} - 4 \frac{c^2}{c_1^2} = 2 \frac{(1+\nu)^2 c^2}{1-\nu c_0^2}. \quad (37)$$

Как видим, при  $\nu > 0$  есть только один корень  $c = 0$ , т.е. волны также нет.

Наконец, рассмотрим первый множитель:

$$K-1 = 0 \Rightarrow c = c_2 \sqrt{2}. \quad (38)$$

В данном случае

$$\kappa = \gamma \sqrt{c^2/c_2^2 - 1} = \gamma. \quad (39)$$

Дисперсионное соотношение приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} &4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\gamma a) - 4H \frac{J_1(ha) J_1(\gamma a)}{ha \gamma a} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4H \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \left( J_0(\gamma a) - \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

и имеет единственный ненулевой множитель

$$J_0(\gamma a) - J_1(\gamma a)/\gamma a = 0. \quad (41)$$

Отметим, что в полученном выражении отсутствуют модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} &J_0(\gamma a) - J_1(\gamma a)/\gamma a = \\ &= (J_0(\gamma a) - J_2(\gamma a))/2 = J_1'(\gamma a) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, корни этого уравнения соответствуют экстремумам  $J_1(\gamma a)$ . Первый экстремум  $\gamma^* a \approx 1.841184$  (см. рис. 5) соответствует вышеуказанной особой волне с длиной  $l^*/a = 2\pi/\gamma^* a \approx 3.413$ .

Выражения для фазовой скорости и частоты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c^* &= c_2 \sqrt{2} = c_0 / \sqrt{1+\nu}, \\ \omega^* &= c^* \gamma^* = c_0 \gamma^* / \sqrt{1+\nu}. \end{aligned} \quad (43)$$

Отметим, что фазовая скорость, равная  $c_2\sqrt{2}$ , имеет название скорости Ламе, и волны Похгаммера–Кри и Лэмба, имеющие такую фазовую скорость, называют волнами Ламе (см. напр. [30]).

В отличие от длины волны, фазовая скорость и частота зависят от упругих модулей. Например, для стального стержня ( $a = 1$  см,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ) получим  $c_0 = \sqrt{E/\rho} = 5.064$  км/с;  $c^* = 4.44$  км/с;  $\omega = 0.818$  МГц.

Вычислим отношения  $R_T$  и  $R_{eq}$  для найденного  $\gamma^*a$  для фундаментальной моды. Напряжения на оси стержня ( $r = 0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 2\mu U \gamma^2 \times \\ &\times \left[ (K-1)(K-1-H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} + 2H \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{zz}|_0 &= 2\mu U \gamma^2 \times \\ &\times \left[ (K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{rz}|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

При  $K = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 4\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \sigma_{zz}|_0 &= -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \Omega^* &= \gamma^* z - \omega t. \end{aligned} \quad (45)$$

Максимум растягивающих напряжений равен:

$$\max \sigma|_0 = \max \sigma_{zz}|_0 = 8\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a}. \quad (46)$$

Используя (31), (32), получаем  $R_T$ :

$$R_T = \frac{\max_{r=0} \sigma_1}{\max_{r=a} \sigma_1} = \frac{\gamma^* a}{J_1(\gamma^* a)} = \frac{1}{J_0(\gamma^* a)} \approx 3.164. \quad (47)$$

Как мы видим,  $R_T$  для найденного  $\gamma^*a$  не зависит от упругих модулей.

Рассмотрим  $R_{eq}$ . Эквивалентное напряжение имеет вид [27]:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2]} + 3\sigma_{rz}. \quad (48)$$

На поверхности стержня ( $r = a$ ):

$$\sigma_{eq}|_a = \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}}. \quad (49)$$

Для найденного  $\gamma^*a$  напряжения имеют следующие выражения:

$$\sigma_{\theta\theta}|_a = 8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\gamma^*a)}{\gamma^*a} \sin \Omega^*, \quad (50)$$

$$\sigma_{zz}|_a = -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\gamma^*a)}{\gamma^*a} \sin \Omega^*. \quad (51)$$

Отсюда получаем

$$\max_{r=a} \sigma_{eq} = 8\sqrt{3}\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \frac{J_1(\gamma^*a)}{\gamma^*a}. \quad (52)$$

На оси стержня ( $r = 0$ ):

$$\sigma_{eq} = |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|. \quad (53)$$

Для найденного  $\gamma^*a$  для напряжений получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 4\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \sigma_{zz}|_0 &= -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*. \end{aligned} \quad (54)$$

Тогда

$$\max_{r=0} \sigma_{eq} = 12\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a}. \quad (55)$$

В итоге  $R_{eq}$ :

$$R_{eq} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{eq}}{\max_{r=a} \sigma_{eq}} = \frac{\gamma^* a \sqrt{3}}{2J_1(\gamma^* a)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{J_0(\gamma^* a)} \approx 2.74. \quad (56)$$

Как и  $R_T$ ,  $R_{eq}$  для найденного  $\gamma^*a$  не зависит от  $\nu$ .

В дополнение к вышесказанному, отметим, что для  $\gamma = \gamma^*$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2U \gamma^{*2} (H+1)(K-1) \times \\ &\times \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) \sin \Omega^* = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Это означает, что в условиях особой волны материал стержня во всех точках находится в состоянии чистого сдвига (что также является характерным свойством волн Ламе).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты отношений  $R_T$  и  $R_{eq}$  для осесимметричных волн Похгаммера–Кри при положительном коэффициенте Пуассона показывают, что в средневолновом диапазоне ( $0.1 < l^*/a < 10$ ) осевые напряжения могут превышать поверхностные в несколько раз. Необходимо учитывать этот эффект при контроле напряжений стержневых конструкций посредством поверхностных тензодатчиков.

Аналитически доказано, что волны, фазовые скорости которых соответствуют скорости Ламе ( $c^* = c_2\sqrt{2}$ ), имеют ряд особенностей:

1. Длина волны относительно радиуса стержня не зависит от упругих модулей (для фундаментальной моды  $l^*/a \approx 3.413$ );

2. Отношение максимального осевого растяжения к максимальному поверхностному растяжению здесь достигает наибольшего значения, независимого от упругих модулей; для фундаментальной моды  $R_T \approx 3.164$ ;

3. Отношение максимального осевого эквивалентного напряжения к максимальному поверхностному эквивалентному напряжению также не зависит от упругих модулей (хотя его значение не наибольшее); для фундаментальной моды  $R_{eq} \approx 2.74$ ;

4. Материал в данном случае находится в состоянии чистого сдвига.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00100.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. V. 81. S. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. V. 21. P. 287–298.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. V. 14. P. 250–309.
4. *Field G.S.* Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. V. 5. P. 619–624.
5. *Shear S.K., Focke A.B.* The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel, and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 532–537.
6. *Hudson G.E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. V. 63. P. 46–51.
7. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
8. *Redwood M., Lamb J.* On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. V. 70. № 1. P. 136–143.
9. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. V. 29. P. 729–734.
10. *Hutchinson J.R., Percival C.M.* Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. V. 44. P. 1204–1210.
11. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 51. P. 265–283.
12. *Nowinski J.L.* On a nonlocal theory of longitudinal waves in an elastic circular bar // *Acta Mech.* 1984. V. 52. P. 189–200.
13. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 692 p.
14. *Abramson H.N.* Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. V. 29. P. 1284–1286.
15. *Pao Y.-H., Mindlin R.D.* Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. P. 513–520.
16. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского Университета, 2010. 340 с.
17. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. С. 467–474.
18. *Cerv J., Adamek V., Vales F., Gabriel D., Plesek J.* Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact // *Wave Motion.* 2016. V. 66. P. 88–105.
19. *Муравьева О.В., Ленков С.В., Мурашов С.А.* Крутильные волны, возбуждаемые электромагнитно-акустическими преобразователями, при акустическом волноводном контроле трубопроводов // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 1. С. 117–124.
20. *Garcia-Sanchez D., Déglise S., Thomas J.-L., Atkinson P., Lagoin C., Perrin B.* Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. V. 94. P. 033813-1–033813-6.
21. *Othman R.* A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. V. 53. № 4. e12228. P. 1–10.
22. *Li Zh., Jing L., Murch R.* Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. V. 142. P. 3564–3579.
23. *Zima B., Rucka M.* Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. V. 168. P. 124–142.
24. *Кузнецов С.В., Ильяшенко А.В.* Поляризация волн Похгаммера–Кри: аксиально симметричные продольные моды // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 6. С. 657–663.
25. *Мокряков В.В.* Maxima of the stresses in the longitudinal Pochhammer – Chree waves // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 7. P. 1063–1075.
26. *Мокряков В.В.* Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer – Chree waves // *Proc. Struct. Integrity.* 2019. V. 23. P. 143–148.
27. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
28. *Грэй Э., Мэтьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд. иностранной литературы, 1949. 388 с.
29. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд. иностранной литературы, 1949. 798 с.
30. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Физическая акустика / под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. С. 140–203.

---

---

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН**

---

---

УДК 517.958, 531.33, 517.956.8

**КОНЦЕНТРАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ УПРУГИХ ТЕЛ  
С ЗАТУПЛЕННЫМ ПИКООБРАЗНЫМ ЗАОСТРЕНИЕМ**

© 2022 г. С. А. Назаров\*

*Институт проблем машиноведения РАН, Большой пр. 61, В.О., Санкт-Петербург, 199034 Россия**\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.

После доработки 15.12.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2021 г.

Для пластин Кирхгофа и пространственных изотропных деформируемых тел с пикообразными заострениями изучается феномен “черных дыр” для упругих волн. Поскольку в реальных инженерных конструкциях пик всегда затуплен, а значит, непрерывный спектр, провоцирующий волновые процессы, отсутствует, основное внимание уделяется исследованию поведения собственных частот в случае заострения с мелким обломанным кончиком, уменьшение размера  $h > 0$  которого интерпретируется как улучшение качества изготовления пика. Описаны наборы собственных частот с различным поведением при  $h \rightarrow +0$ , а именно, малоподвижные, планирующие и блуждающие. Обнаруженная концентрация собственных частот в широком диапазоне спектра указывает на новый механизм поглощения кинетической энергии затупленным заострением — захват упругих волн на “почти всех” частотах.

*Ключевые слова:* “черные дыры” для упругих волн, пластина Кирхгофа, изотропное трехмерное тело, обломанный пик, асимптотика и концентрация собственных частот

DOI: 10.31857/S0320791922030108

**МОТИВИРОВКА**

В статье [1] был открыт эффект “черной дыры” для упругих волн в деформируемых телах с пикообразными заострениями, которая “поглощает” энергию колебаний, не возвращая ее в массивную часть тела. Эта, ставшая уже классической, работа породила многочисленные публикации как физической направленности (см. статьи [2–7] и обзор [8]), исследующие волновые процессы в конечных объемах деформируемых сред специфической формы, так и сугубо математические (см. публикации [9–11] и др.), использующие аппарат теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и изучающие непрерывный спектр системы уравнений теории упругости.

В данной работе обсуждается феномен захвата волн, сопутствующий их распространению в утончающемся пике или замещающий волновые процессы в случае сглаженного пика. Постановка задачи теории упругости о пике с обломанным кончиком обусловлена тем обстоятельством, что в реальности изготовить идеальный пик невозможно, и в конкретных инженерных приборах пикообразное заострение всегда оказывается затупленным, а качество обработки пика соотно-

сится с малым размером  $h$  искажения идеальной формы.

Упругое тело с обломанным кончиком заострения приобретает липшицеву границу и дискретный спектр, т.е. непрерывный спектр, провоцирующий волновые процессы, отсутствует. Приведенные далее асимптотические формулы показывают, в частности, что при малом параметре  $h > 0$  наблюдается высокая концентрация дискретного спектра, т.е. на “почти всех” частотах из некоторого диапазона происходит захват волн. Иными словами, найдена иная причина поглощения кинетической энергии — инициация сугубо локализованных собственных колебаний пикообразного тела.

Сначала в работе получены в значительной степени явные формулы для собственных частот колебаний балки Кирхгофа (той же одномерной модели, что и в оригинальной работе [1]) с истончающимся, но затупленным концом. На основе этих формул выявляются эффекты концентрации и “мигания” спектра при  $h \rightarrow +0$ . Затем приведены известные сведения [9, 11] о непрерывном спектре задачи теории упругости для трехмерного однородного изотропного тела с идеальным пикообразным заострением, в частности, обнаружено, что при наличии богатой геометрической

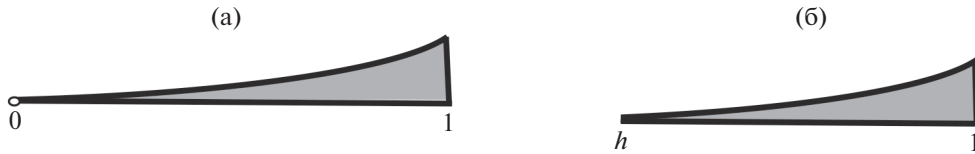


Рис. 1. (а) – Балка с заострением (вершина помечена значком  $\circ$ ) и (б) – балка с затупленным пиком.

симметрии в спектре появляется бесконечная неограниченная последовательность собственных частот, вкрапленных в непрерывный спектр. Наконец, рассмотрена пространственная задача для тела с обломанным кончиком пика и представлена достаточно сложно устроенная асимптотика собственных частот, среди которых обнаружены группы, более разнообразные нежели в случае балки Кирхгофа, а именно, малоподвижные, планирующие и блуждающие, существенно различающиеся своим поведением при уменьшении параметра  $h$ .

В последнем разделе сформулированы выводы и открытые вопросы.

Результаты анонсированы в сообщениях [12, 13] и частично опубликованы в статье [14]. По существу новым является планомерное изучение дискретного спектра зауженной балки Кирхгофа, в частности, классификация его точек, а изложение фактов о трехмерном упругом пике с обломанным кончиком дополнено и согласовано с полным исследованием одномерной задачи.

### СПЕКТРЫ СУЖАЮЩИХСЯ БАЛОК КИРХГОФА

После масштабирования одномерная модель балки Кирхгофа единичной длины и переменной приведенной толщины  $H(z) = H_0 z^2$ , вырождающейся в точке  $z = 0$  (рис. 1а), принимает вид

$$\partial_z^2 (z^6 \partial_z^2 v(z)) = A^2 \kappa^2 z^2 v(z), \quad z \in (0, 1), \quad (1)$$

$$v(1) = 0, \quad \partial_z v(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $v$  – прогиб балки,  $\kappa > 0$  – частота колебаний,  $A^2 = \rho H_0 / D$ , а  $D = D_0 H_0^3 > 0$  и  $\rho > 0$  – приведенная цилиндрическая жесткость и постоянная плотность. Краевое условие в точке  $z = 0$ , помеченной значком  $\circ$  на рис. 1а, ставить не нужно (см., например, книгу [15; § 33]). В самом деле, при  $\kappa = 0$  общее решение дифференциального уравнения (1) принимает вид

$$v(z) = c_0 + c_1 z + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4},$$

но обладает конечным интегралом энергии

$$\mathcal{E}(v, v; 0, 1) = \int_0^1 z^6 \left| \frac{d^2 v}{dz^2}(z) \right|^2 dz \quad (3)$$

лишь в случае  $c_3 = c_4 = 0$ . При этом для определения коэффициентов  $c_0$  и  $c_1$  достаточны два крайних условия, например, (2). Аналогичная картина наблюдается и при  $\kappa > 0$  (см. ниже).

Расчеты из статьи [1] показывают, что при

$$\kappa > \kappa_+ := \frac{15}{4A} \quad (4)$$

у уравнения (1) эйлерового типа есть четыре решения

$$v_{\pm}^{im}(z) = z^{\pm i b_{\pm}(\kappa) - 3/2}, \quad v_{\pm}^{re}(z) = z^{\pm b_{\pm}(\kappa) - 3/2} \quad (5)$$

с показателями

$$b_{\pm}(\kappa) = \sqrt{\sqrt{4 + A^2 \kappa^2} \pm \frac{17}{4}}. \quad (6)$$

Наличие в списке (5) трех решений, для которых расходится интеграл упругой энергии (3), означает, что замкнутый луч  $[\kappa_+, +\infty)$  – непрерывный спектр задачи (1), (2), так как  $\kappa$  тому же при  $\kappa < \kappa_+$  появляются в точности два решения с конечным интегралом (3) и тем самым неоднородная задача становится однозначно разрешимой в энергетическом классе функций, которое впрочем отличается от обычного пространства Соболева  $H^2(0, 1)$ . Поскольку

$$z^6 \left| \frac{d^2 v_{\pm}^{im}}{dz^2}(z) \right|^2 = C_{\pm}(\kappa), \quad C_{\pm}(\kappa) > 0,$$

интеграл энергии  $\mathcal{E}(v_{\pm}^{im}, v_{\pm}^{im}; e^{-\zeta}, e^{-\rho\zeta})$  на интервалах  $(e^{-\zeta}, e^{-\rho\zeta})$  при  $\rho > 1$ , приближающихся к точке  $z = 0$ , равны  $C_{\pm}(\kappa) \ln \rho$  и не зависят от параметра  $\zeta \in (0, 1)$ . Таким образом, волны  $v_{+}^{im}$  и  $v_{-}^{im}$  переносят энергию, причем их “волновые числа”  $\pm b_{\pm}(\kappa)$  показывают, что первая из них распространяется в сторону к зауженному концу балки, а вторая – в сторону от него.

В задаче об одномерной балке Кирхгофа с обломанным кончиком заострения малой длины  $h > 0$  (рис. 1б)

$$\partial_z^2 (z^6 \partial_z^2 v^h(z)) = A^2 \kappa^2 z^2 v^h(z), \quad z \in (h, 1), \quad (7)$$

$$v^h(1) = 0, \quad \partial_z v^h(1) = 0, \quad (8)$$

$$N^3(z, \partial_z) v^h(z) := \partial_z (z^6 \partial_z^2 v^h(z)) = 0, \quad (9)$$

$$N^2(z, \partial_z) v^h(z) := z^6 \partial_z^2 v^h(z) = 0 \text{ при } z = h,$$

все четыре решения (3) обладают конечной энергией  $\mathcal{E}(v, v; h, 1)$ , энергетическое пространство совпадает с  $H^2(0, 1)$ , и, в частности, поэтому спектр задачи (7)–(9) становится дискретным и представляет собой неограниченную положительную последовательность изолированных собственных частот

$$0 < \kappa_h^1 \leq \kappa_h^2 \leq \dots \leq \kappa_h^n \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Отметим, что краевые условия (2) и (8) означают жесткое заземление конца  $z = 1$  балки, а обломанный кончик свободен от внешних воздействий согласно равенствам (9).

### АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ БАЛКИ С ОБЛОМАННЫМ КОНЧИКОМ

Для построения асимптотики собственных частот (10) укажем решение дифракционной задачи (1), (2)

$$Z^\kappa(z) = v_-^{\text{im}}(z) + S(\kappa)v_+^{\text{im}}(z) + T(\kappa)v_+^{\text{re}}(z), \quad (11)$$

порожденное приходящей в точку  $z = 0$  волной  $v_-^{\text{im}}$  из списка (5) и имеющее коэффициенты

$$T(\kappa) = \frac{2ib_-(\kappa)}{b_+(\kappa) - ib_-(\kappa)}, \quad S(\kappa) = -\frac{b_+(\kappa) + ib_-(\kappa)}{b_+(\kappa) - ib_-(\kappa)}, \quad (12)$$

в которых  $b_\pm(\kappa)$  – величины (6). Модуль коэффициента рассеяния  $S(\kappa)$  равен единице ввиду закона сохранения энергии.

Асимптотику собственной моды задачи (7)–(9) с малым параметром  $h$  ищем в виде

$$v^\kappa(z) = Z^\kappa(z) + h^{b_+(\kappa)} K(\kappa)v_-^{\text{re}}(z) + \dots, \quad (13)$$

где многоточие заменяет младшие асимптотические члены, несущественные в предпринятом анализе. Подчеркнем, что в отличие от (11) в формуле (13) фигурирует решение  $v_-^{\text{re}}(z)$  с сильным ростом  $O(z^{-b_+(\kappa)-3/2})$  при  $z \rightarrow +0$ , который частично компенсируется множителем  $h^{b_+(\kappa)}$ . Подставим анзац (13) в краевые условия (9) и получим уравнения

$$\begin{aligned} N^3(z, \partial_z) \left( v_-^{\text{im}}(z) + S(\kappa)v_+^{\text{im}}(z) + h^{b_+(\kappa)} K(\kappa)v_-^{\text{re}}(z) \right) \Big|_{z=h} &= 0, \\ N^2(z, \partial_z) \left( v_-^{\text{im}}(z) + S(\kappa)v_+^{\text{im}}(z) + h^{b_+(\kappa)} K(\kappa)v_-^{\text{re}}(z) \right) \Big|_{z=h} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

причем дифференциальные операторы  $N^3(z, \partial_z)$  и  $N^2(z, \partial_z)$  взяты из левых частей равенств (9). Произведем дифференцирование, исключим из системы (14) коэффициент  $K(\kappa)$  и при учете выражения (12) для  $S(\kappa)$  после рутинных вычислений придем к соотношению

$$h^{2ib_-(\kappa)} = e^{2ib_-(\kappa)\ln h} = B(\kappa), \quad (15)$$

в котором

$$\begin{aligned} B(\kappa) &= \frac{(b_+(\kappa) - ib_-(\kappa))^2}{(b_+(\kappa) + ib_-(\kappa))^2} \times \\ &\times \frac{3 + 2ib_-(\kappa)5 + 2ib_-(\kappa)}{3 - 2ib_-(\kappa)5 - 2ib_-(\kappa)} =: e^{2i\beta(\kappa)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подведем итог. Если при некотором малом  $h = h_n^* > 0$  и целом  $n \in \mathbb{Z}$  какая-то частота  $\kappa = \kappa(h_n^*) > 0$  удовлетворяет вытекающему из формул (15) и (16) соотношению

$$b_-(\kappa) \ln h = \beta(\kappa) - \pi n, \quad (17)$$

то решение (11) системы (7) оставляет в краевых условиях (8) и (9) незначительные невязки, приобретающие малый множитель  $h^{b_+(\kappa(h_n^*))}$  в сравнении с самим решением. Таким образом, в силу классической леммы о “почти собственных” числах операторов (см., например, статью [16]) в  $Ch^{b_+(\kappa(h_n^*))}$ -окрестности точки  $\kappa(h_n^*)$  найдется настоящая собственная частота задачи (7)–(9).

### ПЛАНИРУЮЩИЕ И МИГАЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

Воспользуемся результатами проведенного асимптотического анализа. Процесс истончения конца балки при изготовлении заострения симметрируем посредством уменьшения размера  $h$ . Продифференцируем соотношение (15) для собственной частоты  $\kappa(h)$  по  $h$  и получим равенство

$$\ln h \frac{db_-(\kappa(h))}{d\kappa} \frac{d\kappa}{dh}(h) + \frac{1}{h} b_-(\kappa(h)) = \frac{1}{2} \frac{d\beta}{d\kappa}(\kappa(h)) \frac{d\kappa}{dh}(h).$$

В силу формул (6) и (16) находим, что

$$\frac{d\kappa}{dh}(h) = \frac{2b_-(\kappa(h))}{h|\ln h|} \times \left( b_-(\kappa(h)) \frac{\sqrt{4 + A^2\kappa(h)^2}}{A^2\kappa(h)} + O\left(\frac{1}{|\ln h|\right) \right). \tag{18}$$

В результате обнаруживаем, что собственные частоты (10) с большой скоростью  $O((h|\ln h|)^{-1})$  монотонно спускаются вниз вдоль вещественной оси, но из-за множителя в правой части (18)

$$b_-(\kappa(h))^2 = \frac{15}{17} A(\kappa - \kappa_+) + O((\kappa - \kappa_+)^2), \quad \kappa \rightarrow \kappa_+ + 0,$$

скорость спадает до нуля при приближении к порогу  $\kappa_+$ , т.е. собственные частоты останавливаются, плавно садясь на порог. Такое поведение следует охарактеризовать как планирование.

Изменим постановку вопроса и зафиксируем какую-либо частоту (4). Соотношение (15) выполнено для бесконечно малой последовательности значений длин обломков

$$h_n(\kappa) = e^{-b_-(\kappa)^{-1}(\pi n - \beta(\kappa))}, \quad n \in \mathbb{N} : \{1, 2, 3, \dots\},$$

при которых в малых окрестностях точки  $\kappa > \kappa_+$  появляется собственная частота из последовательности (10). Более того, ввиду непрерывной зависимости величины  $\kappa_n^m$  от  $h$  для почти периодической в логарифмическом масштабе последовательности размеров  $\{h_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  точка  $\kappa$  становится истинной собственной частотой балки длиной

$1 - h_n^*$ . Такой феномен принято называть миганием спектра.

Оба обнаруженных свойства собственных частот (10) указывают на их концентрацию выше точки отсечки  $\kappa_+$ , которая (концентрация) усугубляется при уменьшении размера  $h$ . Приведем асимптотические формулы для собственных частот, приближенных к точке отсечки  $\kappa_+$ . Подставим асимптотический анзац

$$\kappa(h) = \kappa_+ + \frac{1}{|\ln h|^2} \left( \frac{\kappa'}{A} + O\left(\frac{1}{|\ln h|^2}\right) \right)$$

в вытекающее из формулы (15) соотношение (17) с натуральным  $n$ . В силу равенства (6) имеем

$$b_-(\kappa(h)) = \frac{1}{|\ln h|} \sqrt{\frac{15}{17} \kappa' + O\left(\frac{1}{|\ln h|^2}\right)}, \tag{19}$$

$$b_+(\kappa(h)) = \sqrt{\frac{17}{2} + O\left(\frac{1}{|\ln h|^2}\right)},$$

а значит, в частности,  $B(\kappa(h)) = 1 + O(|\ln h|^{-2})$ . Отсюда и из (17) и (19) выводим, что

$$\kappa' = \frac{17}{15} \pi^2 m^2,$$

и получаем для околопороговых собственных частот окончательную асимптотическую формулу

$$\kappa^{(n)}(h) = \frac{15}{4A} + \frac{17}{15A} \frac{\pi^2 n^2}{|\ln h|^2} + O\left(\frac{1}{|\ln h|^4}\right), \tag{20}$$

подтверждающую их концентрацию вверху от точки  $\kappa_+$ . Подчеркнем, что нумерация собственных частот (20) может отличаться от предписанной в последовательности (7), так как проведенный анализ устанавливает только то, что полученное асимптотическое представление выполнено при больших натуральных  $n$ .

### РАЗНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ НА КОНЧИКЕ БАЛКИ

Результаты и способ анализа спектра сохраняются при замене краевых условий (9) условиями заземления обломанного кончика балки

$$v^h(h) = 0, \quad \partial_z v^h(h) = 0. \tag{21}$$

Конкретные формулы для собственных частот задачи (7), (8), (21) претерпевают незначительные вариации. Например, выражение (16) упрощается следующим образом:

$$B(\kappa) = \frac{(b_+(\kappa) - ib_-(\kappa))^2}{(b_+(\kappa) + ib_-(\kappa))^2} =: e^{2i\beta(\kappa)}.$$

При этом финальное соотношение (17) остается прежним.

Аналогичные и несложные модификации нужны и при других профилях и краевых условиях, в частности, для любой из двух групп условий

$$\partial_z v^h(z) = 0, \quad \partial_z(H^h(z)\partial_z^2 v^h(z)) = 0 \text{ или} \tag{22}$$

$$v^h(z) = 0, \quad H^h(z)\partial_z^2 v^h(z) = 0 \text{ при } z = 0$$

в случае половины  $[0, 1] \ni z$  изображенной на рис. 2а балки Кирхгофа с приведенной толщиной  $H^h(z) = \min\{1, h + z^2\}$ . Искусственные краевые условия (22) отвечают соответственно симметричному и антисимметричному изгибу балки.

Разумеется, замена краевых условий (8) какими-либо другими условиями в точке  $z = 1$  не влияет сколь-нибудь существенно на поведение собственных частот при  $h \rightarrow +0$ .

### ТРЕХМЕРНОЕ ПИКООБРАЗНОЕ ТЕЛО

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – пространственное однородное изотропное тело (рис. 3а), совпадающее внутри слоя  $\{x: x_3 \in (0, 1)\}$  с пиком  $\Pi_1$ , где



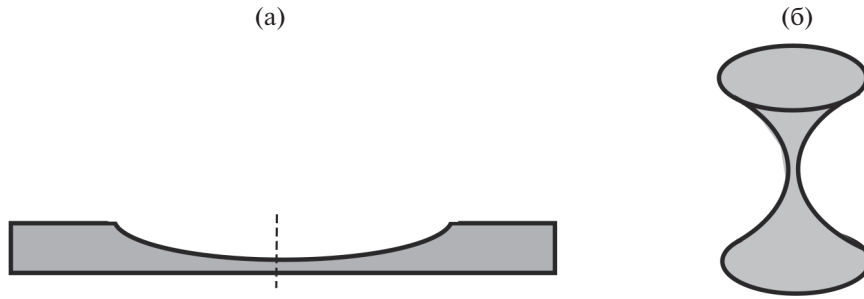


Рис. 2. (а) – Балка с утончением посередине и (б) – “гиперболические” песочные часы.

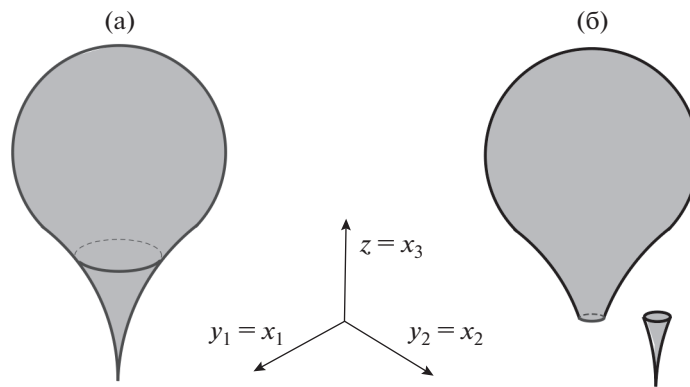


Рис. 3. (а) – Пикообразное тело  $\Omega$  и (б) – тело  $\Omega^h$  с обломанным пиком  $\Pi_h$ .

$$\Pi_h = \{x = (y, z) : z^{-2}y \in \omega, z \in (0, h)\}, \quad h \in (0, 1], \quad (23)$$

$$\sigma_{jk}(u) = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial u_p}{\partial x_p}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

и  $\omega$  – область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная простым кусочно-гладким контуром  $\partial\omega$ . Масштабированием высота пика  $\Pi_1$  сведена к единице, т.е. декартовы координаты  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $z = x_3$  и все геометрические параметры сделаны безразмерными. Собственные колебания тела  $\Omega$  с частотой  $k > 0$  описываются краевой задачей

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{jk}(u; x) = \rho k^2 u_k(x), \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathbb{O}. \quad (25)$$

Здесь  $k = 1, 2, 3$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$  – вектор смещений,  $\top$  – знак транспонирования,  $n = (n_1, n_2, n_3)^\top$  – единичный вектор внешней нормали, определенный почти всюду на границе (разумеется, вне вершины  $\mathbb{O}$  даже при гладкой поверхности  $\partial\Omega \setminus \mathbb{O}$ ), а  $\sigma_{jk}$  – декартовы компоненты тензора напряжений

Кроме того,  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера, а  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu > 0$  и  $\rho > 0$  – постоянные Ламе и плотность материала.

Известно [9, 11], что спектр  $\mathcal{P}$  задачи (24), (25) имеет непрерывную компоненту  $\mathcal{P}_c = [k_+, +\infty)$ , а для вычисления точки отсечки  $k_+ > 0$  достаточно изучить одномерную модель стержня с переменным сечением (см., например, [17; гл. 5]), оперирующую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{D}(-\partial_z) \mathcal{L}(z) \mathcal{A} \mathcal{L}(z) \mathcal{D}(\partial_z) w(z) = \kappa^2 \rho \mathcal{T}(z) w(z), \quad z \in (0, 1), \quad (26)$$

для вектор-функции  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^\top$ , содержащей осредненные по сечениям поперечные  $w_1, w_2$  и продольное  $w_3$  смещения, а также поворот  $w_4$ . Кроме того, в (26) фигурируют диагональные  $(4 \times 4)$ -матрицы,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\partial_z) &= \text{diag}\{\partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z\}, \\ \mathcal{L}(z) &= \text{diag}\{z^4, z^4, z^2, z^4\}, \\ \mathcal{T}(z) &= \text{diag}\{|\omega|z^4, |\omega|z^4, 0, 0\}, \end{aligned} \quad (27)$$

и матрица  $\mathcal{A}$  с  $(2 \times 2)$ -блоками  $\mathcal{A}_{\#\#}$ ,  $\mathcal{A}_{\#\circ} = \mathcal{A}_{\circ\#}^\top$  и  $\mathcal{A}_{\circ\circ}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\#\#} & \mathcal{A}_{\#\circ} \\ \mathcal{A}_{\circ\#} & \mathcal{A}_{\circ\circ} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\#\#} = E \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_{\#\circ} &= -E|\omega| \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_{\circ\circ} &= \begin{pmatrix} E|\omega| & 0 \\ 0 & \mu G/2 \end{pmatrix}, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \\ |\omega| &= \int_{\omega} dy, \quad P_j = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} y_j dy, \quad I_{jk} = \int_{\omega} y_j y_k dy. \end{aligned}$$

При этом  $E$  – модуль Юнга,  $|\omega|$ ,  $P = (P_1, P_2)^\top$  и  $I = (I_{jk})$  – площадь фигуры  $\omega$ , ее центр тяжести и тензор инерции, а  $G$  – его жесткость кручения сечения [18], определенная по функции Прандтля  $\Psi$ ,

$$\begin{aligned} G &= \int_{\omega} \left( \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y) \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}(y) \right|^2 \right) dy, \\ \begin{cases} -\Delta_y \Psi(y) = 2, & y \in \omega, \\ \Psi(y) = 0, & y \in \partial\omega \end{cases} \end{aligned}$$

Два последних элемента на диагонали матрицы  $\mathcal{T}(z)$  из списка (27) получаются нулевыми (подробности см., например, в [17; гл. 7, § 3], [9]) потому, что поперечные колебания тонкого стержня происходят на частотах из рассматриваемого нижнего диапазона спектра, а продольные и крутильные – только на средних.

Исключим из системы (26) вектор  $w_\circ = (w_3, w_4)^\top$  и получим для оставшегося вектора  $w_\# = (w_1, w_2)^\top$  систему двух уравнений

$$\partial_z^4 (z^4 \mathcal{M} z^4 \partial_z^4 w_\#(z)) = \kappa^2 \rho |\omega| z^4 w_\#(z), \quad z \in (0, 1), \quad (28)$$

где  $\mathcal{M} = \mathcal{A}_{\#\#} - \mathcal{A}_{\#\circ} \mathcal{A}_{\circ\circ}^{-1} \mathcal{A}_{\circ\#}$  – симметричная положительно определенная  $(2 \times 2)$ -матрица, (положительные) собственные числа которой обозначим  $m_1$  и  $m_2$ . Считаем, что  $m_2 \geq m_1$ .

Если центр тяжести  $P$  совпадает с началом координат  $y = (y_1, y_2)$  и оси  $y_j$  направлены вдоль главных осей тензора инерции  $I$ , то  $\mathcal{A}$  – диагональная матрица и

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{A}_{\#\#}, \quad m_p = EI_{pp}, \\ p &= 1, 2, \quad I_{12} = I_{21} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Решения системы дифференциальных уравнений эйлеровского типа (28) ищем в виде

$$w_\#^p(z) = z^{\alpha-5/2} W_\#^p, \quad p = 1, 2, \quad (30)$$

где  $W_\#^p$  – числовой столбец, и получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} m_p \left( \alpha^2 - \frac{49}{4} \right) \left( \alpha^2 - \frac{25}{4} \right) &= \kappa^2 \rho |\omega|, \\ (\alpha_\pm^{(p)})^2 &= \frac{37}{4} \pm \sqrt{9 + \kappa^2 \frac{\rho |\omega|}{m_p}}. \end{aligned} \quad (31)$$

По компонентам (30) восстанавливается вектор

$$w_\circ^p(z) = (z^{\alpha-3/2} W_3^p, z^{\alpha-7/2} W_4^p), \quad p = 1, 2. \quad (32)$$

Наконец, точка отсечки  $\kappa_\dagger$  – наименьшая частота, при которой среди корней биквадратного уравнения (31) имеется нуль, а именно,

$$\kappa_\dagger := \kappa_\dagger^{(1)} = \frac{35}{4} \sqrt{\frac{m_1}{\rho |\omega|}} \leq \kappa_\dagger^{(2)} = \frac{35}{4} \sqrt{\frac{m_2}{\rho |\omega|}}. \quad (33)$$

В случае  $\kappa = \kappa_\dagger^{(p)}$  вектор  $w^p(z) = (w_\#^p(z)^\top, w_\circ^p(z)^\top)^\top$  приобретает линейную зависимость от  $\ln z$ .

Итак, при  $\kappa > \kappa_\dagger^{(p)}$  у системы (28) есть решения (30) с показателями

$$\begin{aligned} \alpha_{p\pm}^{\text{im}} &= \pm i b_{p\pm}, \quad \text{и} \quad \alpha_{p\pm}^{\text{re}} = \pm b_{p\pm}, \quad \text{где} \\ b_{p\pm} &= \sqrt{9 + \kappa^2 \frac{\rho |\omega|}{m_p}} \pm \frac{37}{4}, \end{aligned} \quad (34)$$

и, например, в случае (29) соответствующие столбцы коэффициентов в представлениях (30) и (32) имеют вид

$$\begin{aligned} W_{1\pm}^{\text{im}} &= W_{1\pm}^{\text{re}} = (1, 0, 0, 0)^\top \quad \text{и} \\ W_{2\pm}^{\text{im}} &= W_{2\pm}^{\text{re}} = (0, 1, 0, 0)^\top. \end{aligned} \quad (35)$$

По решениям (30) и (32) в работах [11, 19] построены пространственные поля смещений  $u_{(p\pm)}^{\text{im}}$  и  $u_{(p\pm)}^{\text{re}}$ , удовлетворяющие уравнениям (24) в укороченном пике (23) при любом  $h \in (0, 1)$  и краевым условиям (25) на его боковой поверхности  $\partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_h$ . В частности, справедливы представления

$$\begin{aligned} u_{(p\pm)j}^{\text{im}}(x) &= c_{p\pm}^{\text{im}} w_{(p\pm)j}^{\text{im}}(z) + O(z^{-3/2}) = \\ &= c_{p\pm}^{\text{im}} z^{\alpha_{p\pm}^{\text{im}} - 5/2} W_{(p\pm)j}^{\text{im}} + O(z^{-3/2}), \quad j = 1, 2, \\ u_{(p\pm)3}^{\text{im}}(x) &= c_{p\pm}^{\text{im}} \left( w_{(p\pm)3}^{\text{im}}(z) - \sum_{j=1,2} y_j \frac{\partial w_{(p\pm)j}^{\text{im}}(z)}{\partial z} \right) + \\ &+ O(z^{-1/2}) = c_{p\pm}^{\text{im}} z^{\alpha_{p\pm}^{\text{im}} - 3/2} \times \\ &\times \left( W_{(p\pm)3}^{\text{im}} - \left( \alpha_{p\pm}^{\text{im}} - \frac{5}{2} \right) \sum_{j=1,2} \frac{y_j}{z^2} W_{(p\pm)j}^{\text{im}} \right) + O(z^{-1/2}) \end{aligned} \quad (36)$$

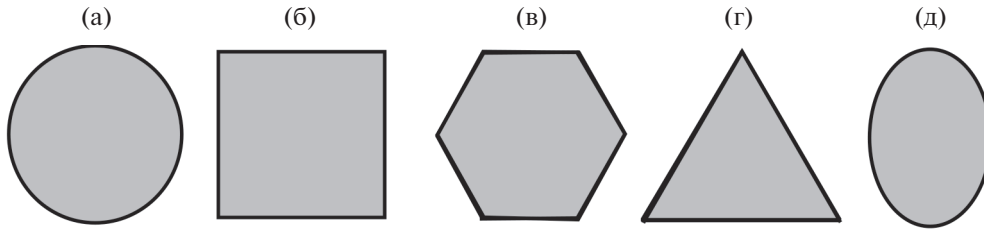


Рис. 4. Сечения пика: (а) круг, (б) квадрат, (в) правильный шестиугольник, (г) равносторонний треугольник и (д) эллипс с разными осями.

при  $z \rightarrow +0$ , а также соотношения

$$|\sigma_{mq}(u_{(p\pm)\#}^{im}; x)| = O(z^{-5/2}), \quad m, q = 1, 2, 3,$$

а значит, упругая и кинетическая энергии

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_{(p\pm)}^{im}; \Pi_h) &= \frac{1}{4\mu} \int_{\Pi_h} \left( \sum_{j,k=1}^3 |\sigma_{jk}(u_{(p\pm)}^{im}; x)|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left| \sum_{q=1}^3 \sigma_{qq}(u_{(p\pm)}^{im}; x) \right|^2 \right) dx, \\ \mathcal{H}(u_{(p\pm)}^{im}; \Pi_h) &= \frac{\rho}{2} \kappa^2 \int_{\Pi_h} |u_{(p\pm)}^{im}(x)|^2 dx \end{aligned}$$

суть расходящиеся с логарифмической скоростью интегралы. Те же интегралы для полей  $u_{(p+)}^{re}$  сходятся, но для полей  $u_{(p-)}^{re}$  опять-таки расходятся из-за сильной степенной сингулярности в вершине пика  $\Pi_1$ . Как проверено в [9, 11], приведенная информация обеспечивает формулу

$$\mathcal{D}_c = [\kappa_+, +\infty) = [\kappa_+^{(1)}, +\infty)$$

для непрерывного спектра задачи (24), (25). При этом помимо основного порога – точки отсечки  $\kappa_+ = \kappa_+^{(1)}$  – в непрерывном спектре может появиться еще одна, внутренняя, точка отсечки  $\kappa_+^{(2)}$ , но в случае  $m_1 = m_2$  порог приобретает кратность два.

Согласно [11, 19] множители  $c_{p\pm}^{im}$  в представлениях (36) можно выбрать так, чтобы были выполнены соотношения

$$\begin{aligned} Q(u_{(p\pm)}^{im}, u_{(p\pm)}^{im}) &= \pm i, \\ Q(u_{(p\pm)}^{im}, u_{(p\mp)}^{im}) &= Q(u_{(p\mp)}^{im}, u_{(p\pm)}^{im}) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

в которых фигурирует симплектическая (анти-эрмитова и полуторалинейная) форма

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \int_{\omega_h} \sum_{j=1}^3 (v_j(y, h) \sigma_{j3}(u; y, h) - \\ &\quad - u_j(y, h) \overline{\sigma_{j3}(v; y, h)}) dy, \end{aligned}$$

являющаяся интегралом по торцу

$$\omega_h = \{x \in \Pi_1; z = h\} \quad (38)$$

пика (23) в формуле Грина для оператора Ламе и потому не зависящая от размера  $h \in (0, 1)$  для построенных полей смещений  $u_{(p\pm)}^{im}$  и  $u_{(p\pm)}^{re}$ . Более того, благодаря условиям ортогональности и нормировки (37) у задачи (24), (25) в случае

$$\kappa \in (\kappa_+^{(1)}, \kappa_+^{(2)}) \quad \text{при} \quad \kappa_+^{(1)} < \kappa_+^{(2)} \quad (39)$$

(см. формулы (33), (34) и сечения на рис. 4г и 4д) есть решение

$$\begin{aligned} Z_{(1)}^\kappa(x) &= u_{(1-)}^{im}(x) + S_{11}(\kappa) u_{(1\pm)}^{im}(x) + \\ &+ O\left(z^{\alpha_{(1+)}^{re}-5/2}\right) \quad \text{при} \quad z \rightarrow +0, \quad x \in \Pi_1, \end{aligned} \quad (40)$$

порожденное приходящей в вершину  $\mathcal{O}$  волной  $u_{(p-)}^{im}$ . Трехмерное поле (40), вполне аналогичное решению (11) одномерной задачи (1), (2), имеет коэффициент рассеяния

$$S_{11}(\kappa) = e^{i\tau(\kappa)}, \quad \tau(\kappa) \in [0, 2\pi).$$

Ситуация

$$\kappa > \kappa_+ \quad \text{при} \quad \kappa_+^{(1)} = \kappa_+^{(2)} \quad (41)$$

(см. сечения на рис. 4а–4в) отличается от пластины Кирхгофа, а именно, появляются два ( $p = 1, 2$ ) дифракционных решения задачи (1), (2)

$$\begin{aligned} Z_{(p)}^\kappa(x) &= u_{(p-)}^{im}(x) + \sum_{q=1,2} S_{pq}(\kappa) u_{(q+)}^{im}(x) + \\ &+ O\left(z^{\alpha_{(p+)}^{re}-5/2}\right) \quad \text{при} \quad z \rightarrow +0, \quad x \in \Pi_1, \end{aligned} \quad (42)$$

и унитарная симметричная матрица рассеяния  $S(\kappa) = (S_{pq}(\kappa))_{p,q=1,2}$  размером  $2 \times 2$ . Матрица с тем же размером возникает и в ситуации (39) при  $\kappa > \kappa_+^{(2)}$ , т.е. выше второй точки отсечки непрерывного спектра  $\mathcal{D}_c$ . Исчерпывающие комментарии к построению решений (40), (42), их физической интерпретации и выводу основных свойств приведены, например, в работе [19].

**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ВНУТРИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА**

Предположим, что тело  $\Omega$  обладает плоскостями симметрии

$$\{x : y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta = 0\} \text{ при } \theta = \pi \frac{m}{N}, \quad m = 0, \dots, N - 1.$$

Здесь  $N \in \mathbb{N}$  – натуральное число, причем важно<sup>1</sup>, что  $N \geq 3$ . Вырежем из  $\Omega$  сектор

$$\Omega_{\triangleleft} = \{x \in \Omega : \varphi \in (0, \pi/N)\},$$

где  $(r, \varphi, z)$  – система цилиндрических координат, сведем на него задачу (24), (25) и поставим на образованных поверхностях  $\Gamma_0 = \{x \in \Omega; \varphi = 0\}$  и  $\Gamma_1 = \{x \in \Omega; \varphi = \pi/N\}$  искусственные краевые условия

$$u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(u) = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (43)$$

$$u_\varphi = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(u) = 0, \quad \sigma_{z\varphi}(u) = 0 \text{ на } \Gamma_1. \quad (44)$$

Эти условия обладают двумя примечательными свойствами. Во-первых, только тривиальное ( $a = b = 0$ ) жесткое смещение<sup>2</sup>  $a + b \times x$  удовлетворяют равенствам (43), (44) при  $N \geq 3$ . Как установлено в [9; лемма 8], при выполнении трех ограничений для смещений из списка (43), (44) имеет место весовое неравенство Корна

$$\|z^{-2}u; L^2(\Omega_{\triangleleft})\|^2 \leq c_{\Omega_{\triangleleft}} E(u, u; \Omega_{\triangleleft}).$$

Следовательно, спектр задачи (24), (25), (43), (44) дискретный и образует неограниченную положительную последовательность

$$0 < \kappa_{\triangleleft}^1 \leq \kappa_{\triangleleft}^2 \leq \dots \leq \kappa_{\triangleleft}^m \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (45)$$

Кроме того, соответствующие собственные моды  $u_{\triangleleft}^m \in H^1(\Omega_{\triangleleft})$  затухают при  $x \rightarrow \mathbb{O}$  с экспоненциальной скоростью.

Второе нужное свойство заключается в том, что продолжения через полуплоскость  $\{x : \varphi = 0\}$ , четное для  $u_\varphi$  и нечетное для  $u_r$  и  $u_z$ , ввиду изотропности упругого материала сохраняют систему уравнений (24) на расширенном секторе  $\{x \in \Omega : |\varphi| < \pi/N\}$  и краевые условия (25) на поверхности  $\{x \in \partial\Omega : |\varphi| < \pi/N\}$ . Точно так же нечетное продолжение компоненты  $u_\varphi$  и четное продолжение компонент  $u_r, u_z$  через полуплоскость  $\{x : \varphi = \pi/N\}$  дают гладкое поле смещений в утро-

енном секторе  $\{x \in \Omega : \varphi \in (-\pi/N, 2\pi/N)\}$ . Чередуя указанные способы продолжения, получаем гладкое решение задачи (24), (25) из класса Соболева  $H^1(\Omega)$  для всего тела  $\Omega$ . В итоге обнаруживаем, что каждый член  $\kappa_{\triangleleft}^n$  последовательности (45) – собственная частота из точечного спектра  $\{\partial_p$  задачи (24), (25).

**ТЕЛО С ЗАТУПЛЕННЫМ ПИКООБРАЗНЫМ ЗАОСТРЕНИЕМ**

Пусть у тела  $\Omega$  обломан кончик  $\Pi_h$  малой длины  $h$ , а образованный торец (38) полученного таким образом тела

$$\Omega^h = \Omega \setminus \overline{\Pi_h} \quad (46)$$

имеет “диаметр”  $O(h^2)$ . Рассмотрим спектральную краевую задачу для тела (46) со свободной поверхностью

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{jk}(u^h; x) = \rho \kappa^2 u_k^h(x), \quad (47) \\ x \in \Omega^h, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^h, \quad k = 1, 2, 3. \quad (48)$$

Как и для балки Кирхгофа, при незначительной модификации представленных выше вычислений краевые условия (46) можно заменить условиями

$$\sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^h \setminus \overline{\omega_h}, \quad (49) \\ k = 1, 2, 3,$$

$$u_k^h(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, 3, \quad (50)$$

означающими, в частности, что торец жестко зашплен. Можно сохранить идеальное пикообразное заострение, зашплев боковую поверхность кончика (23) малой длины  $h$ , т.е. добавить к уравнениям (24) и краевым условиям (49) условия

$$u_k^h(x) = 0, \quad x \in (\partial\Omega \cap \partial\Pi^h) \setminus \mathbb{O}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (51)$$

Далее приведем исследование дискретного спектра (10) задачи (47), (49), (50) для  $\Omega^h$  с обломанным пиком, а также мало отличающейся от нее задачи (24), (49), (51) в пикообразной области  $\Omega$ . Вычисления для задачи (47), (48) для тела (46) со свободной поверхностью вполне аналогичны проведенным для одномерной задачи (7)–(9). Для анизотропного тела они выполнены в [14]. Кроме того, задачу (47), (49) можно замкнуть смешанными краевыми условиями на торце

<sup>1</sup> Годятся сечения на рис. 4а–4в, но не 4г и 4д.

<sup>2</sup> Крестом обозначено векторное произведение. Если  $N = 2$  и угол  $\theta$  прямой, то равенства (43) и (44) выполнены для вектора  $(0, 1, 0)^T$ , соответствующего поступательному смещению вдоль оси ординат.

$$u_k^h(x) = 0, \quad \sigma_{33}(u^h; x) = 0 \quad \text{или} \quad u_3^h(x) = 0, \quad (52)$$

$$\sigma_{k3}(u^h; x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2.$$

Как и для искусственных краевых условий (43) и (44), четные или нечетные продолжения компонент вектора смещений через плоскость  $\{x : z = h\}$  позволяют перейти от задачи (47), (49), (52) на  $\Omega^h$  к задаче для тела

$$\Omega_{\geq -d} = \Omega^h \cup \omega_h \cup \{x : (y, 2h - z) \in \Omega^h\},$$

имеющего свободную поверхность и изображенного на рис. 2б. Аналогичные преобразования уже обсуждались для балки Кирхгофа с глубокой вмятиной (рис. 2а).

### МАЛОПОДВИЖНЫЕ, ПЛАНИРУЮЩИЕ И БЛУЖДАЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

Ясно, что при  $\kappa = 0$  у обеих статических задач (24), (25) и (47), (48) одинаковый набор решений (фиктивных собственных мод) — шестимерное пространство жестких смещений  $a + b \times x$ , три поступательных и три вращательных. Сразу же заметим, что положительные собственные частоты (если таковые имеются) из дискретного спектра  $\wp_d \subset [0, \kappa_+)$  задачи (24), (25) для исходного тела при малом его возмущении  $\Omega^h$  также претерпевают малые возмущения. Это же относится и к собственным частотам (45) тела  $\Omega$ , попадающим на непрерывный спектр  $\wp_c = [\kappa_+, +\infty)$  (при наличии указанной ранее симметрии таковые заведомо имеются), так как соответствующие моды обладают быстрым экспоненциальным затуханием при  $x \rightarrow \mathbb{O}$  и потому оставляют исчезающе малые невязки в краевых условиях (48) на торце  $\omega_h$ . Следовательно, у задачи (47), (48) появляются собственные частоты, не покидающие  $c_{\leq}^n e^{-\delta_{\leq}^n/h}$ -окрестности точки  $\kappa_{\leq}^n \in (\kappa_+, +\infty)$ , — их разумно называть малоподвижными. Такие же собственные частоты имеются и в случае постановки условий (50) или (51) для полей смещений, в которых упомянутые собственные моды в теле  $\Omega$  опять оставляют экспоненциально малые невязки. Отметим, что эти условия Дирихле, а также смешанные краевые условия (52) порождают положительные возмущения нулевых собственных частот исходной задачи (24), (25). Их асимптотику построить нетрудно при помощи техники пограничного слоя (см. конец раздела).

Обратимся сначала к задаче (47), (49), (50) с условиями жесткого защемления торца (38), причем сначала для упрощения формул и рассуждений считаем, что, во-первых, выполнены геомет-

рические условия, обеспечивающие соотношения (29) и распадение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (28), и, во-вторых, справедливо соотношение  $\kappa_+^{(1)} < \kappa_+^{(2)}$ . В качестве асимптотического приближения к моде собственных колебаний тела с частотой  $\kappa \in (\kappa_+^{(1)}, \kappa_+^{(2)})$  (см. формулу (39)) возьмем вектор-функцию

$$u^h(x) = Z_1^\kappa(x) + \chi(z)h^{-\alpha_{1-}^{\text{re}}} K(\kappa)u_{1-}^{\text{re}}(x) + \dots \quad (53)$$

Здесь  $\chi$  — гладкая срезающая функция, равная нулю при  $z > 1$  и единице при  $z < 1/2$ . Эта функция позволяет распространить поле смещений  $u_{1-}^{\text{re}}$  с большой сингулярностью в вершине  $\mathbb{O}$  на все тело  $\Omega^h$ , а ее введение в асимптотический анзац привносит относительно малую невязку в дифференциальные уравнения (47) и краевые условия (49). Анзац (53) вполне аналогичен асимптотической конструкции (13) для пластины Кирхгофа. Как и ранее, подставим сумму (53) в краевые условия (50) и при учете соотношений (36), (39) и (35), позволяющих выделить главные асимптотические члены, получим равенства

$$h^{\alpha_{1-}^{\text{im}}(\kappa)-5/2} + S_{11}(\kappa)h^{\alpha_{1+}^{\text{im}}(\kappa)-5/2} + h^{-\alpha_{1-}^{\text{re}}(\kappa)} K(\kappa)h^{\alpha_{1-}^{\text{re}}(\kappa)-5/2} = 0,$$

$$\left(\alpha_{1-}^{\text{im}}(\kappa) - \frac{5}{2}\right)h^{\alpha_{1-}^{\text{im}}(\kappa)-5/2} + S_{11}(\kappa)\left(\alpha_{1+}^{\text{im}}(\kappa) - \frac{5}{2}\right) \times$$

$$\times h^{\alpha_{1+}^{\text{im}}(\kappa)-5/2} + h^{-\alpha_{1-}^{\text{re}}(\kappa)} K(\kappa)\left(\alpha_{1-}^{\text{re}}(\kappa) - \frac{5}{2}\right)h^{\alpha_{1-}^{\text{re}}(\kappa)-5/2} = 0. \quad (54)$$

Исключив из этой системы ненужный коэффициент  $K(\kappa)$ , приходим к соотношению (15), в котором показатель  $b_{\pm}(\kappa) = b_{\pm}(\kappa)$  взят из списка (34), а величина  $B(\kappa) = B_1(\kappa)$  задана формулой

$$B_p(\kappa) = -S_{pp}^\kappa \frac{b_{p+}(\kappa) - ib_{p-}(\kappa)}{b_{p+}(\kappa) + ib_{p-}(\kappa)} e^{2i\beta_p(\kappa)}.$$

Теперь превращаем соотношения (15) и (54) в следующее равенство при  $p = 1$ :

$$b_{p-}(\kappa) \ln h = -2\pi i n + \beta_p(\kappa), \quad n \in \mathbb{N}, \quad p = 1, 2. \quad (55)$$

Видимая схожесть формул (55) и (17) обеспечивает те же выводы, что и в случае утончающейся пластины Кирхгофа. Именно, обнаруживается “мигание” спектра, т.е. каждая точка  $\kappa \in (\kappa_+^{(1)}, \kappa_+^{(2)})$ , не являющаяся малоподвижной собственной частотой, становится истинной частотой собственных колебаний тела  $\Omega^h$  “почти периодически” в логарифмическом масштабе  $d_\kappa \|\ln h\|$  (далее станет понятно, что для точек  $\kappa$  выше второй точки отсечки  $\kappa_+^{(2)}$  происходит наложение двух почти периодических последовательностей). Кроме того,

используя соотношения (55) и (34), находим скорость движения собственных частот вниз при уменьшении параметра  $h$ :

$$\frac{d\kappa}{dh}(h) = \frac{2b_{p-}(\kappa(h))}{h|\ln h|} \times \left( \frac{b_{p-}(\kappa(h))m_p}{\kappa(h)\rho|\omega|} \sqrt{9 + \kappa(h)^2 \frac{\rho|\omega|}{m_p}} + O\left(\frac{1}{|\ln h|\right)} \right). \quad (56)$$

Поскольку согласно определениям (34) и (33) верны соотношения

$$b_{p-}(\kappa) = \sqrt{\frac{35}{37}(\kappa - \kappa_+^{(p)}) \sqrt{\frac{\rho|\omega|}{m_p}} + O((\kappa - \kappa_+^{(p)})^2)}, \quad (57)$$

$$b_{p+}(\kappa) = \sqrt{\frac{37}{2} + O(\kappa - \kappa_+^{(p)})}, \quad \kappa \rightarrow \kappa_+^{(p)} + 0,$$

то формулы (56) и (57) указывают на планирование собственных частот в промежутке  $(\kappa_+^{(1)}, \kappa_+^{(2)})$ , а именно, при  $h \rightarrow +0$  они быстро ниспадают, но плавно садятся на порог  $\kappa_+^{(1)}$ .

Из первого соотношения (57) вытекает аналогичное (20) представление

$$\kappa^{(n)}(h) = \kappa_+^{(1)} + \frac{37}{35} \sqrt{\frac{m_p}{\rho|\omega|}} \frac{n^2 \pi^2}{|\ln h|^2} + O\left(\frac{1}{|\ln h|^4}\right), \quad (58)$$

которое подтверждает концентрацию собственных частот около первой точки отсечки.

В ситуации (41) (сечения на рис. 4а–4в), когда порог непрерывного спектра  $\wp_c$  приобретает кратность два, полученные формулы (56)–(58) изменяются мало, однако для их вывода придется решать линейные алгебраические системы размером  $2 \times 2$ , и поэтому они теряют явный вид.

Если же вторая точка отсечки  $\kappa_+^{(2)}$  расположена выше первой  $\kappa_+^{(1)}$  (например, сечения на рис. 4г и 4д), то концентрация спектра наблюдается и около него. Вместе с тем поведение собственных частот  $\kappa(h) > \kappa_+^{(2)}$  при  $h \rightarrow +0$  становится более причудливым – обсудим его.

Сначала предположим, что тело  $\Omega$  обладает зеркальной симметрией относительно плоскостей  $\{x : x_j = 0\}$ , а значит, на поверхностях  $\{x \in \Omega : x_j = 0\}$  можно назначить такие искусственные краевые условия, что у двух ( $j = 1, 2$ ) задач в областях  $\Omega_{j+} = \{x \in \Omega : x_j > 0\}$  непрерывные спектры будут иметь единственные пороги – точки отсечки. Таким образом, для полученных задач в областях  $\Omega_{j+}^h$  с обломанными заострениями для частот  $\kappa(h) > \kappa_+^{(j)}$  верны полученные асимптотические формулы. В итоге в последовательности (10) собственных частот задачи (47), (49), (50) для

тела  $\Omega^h$  возникают две подпоследовательности  $\{\kappa_{1n}^h\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\{\kappa_{2n}^h\}_{n \in \mathbb{N}}$ , члены которых с разными скоростями (58) двигаются в сторону порогов  $\kappa_+^{(1)}$  и  $\kappa_+^{(2)}$  соответственно. Выше второй точки отсечки эти последовательности перемешиваются. Поскольку одни собственные частоты “обгоняют” другие, после их сведения в общую последовательность (10) с нумерацией единым индексом, наблюдается довольно странная картина: собственные частоты  $\kappa_N^h > \kappa_+^{(2)}$  лавинообразно спускаются вдоль вещественной оси, однако скорость  $\frac{d\kappa_N^h}{dh}$  каждой из них при  $h \rightarrow +0$  бесконечное число раз претерпевает скачки с сопутствующей флуктуацией собственной моды, причем чередование все убыстряется при приближении к порогу  $\kappa_+^{(2)}$ . Такое поведение характеризуем как блуждание собственных частот при утончении пика. Впрочем, принятые условия все-таки позволяют разделить собственные частоты на группы с регулярным поведением, которое нарушается только при “столкновениях” с малоподвижными собственными частотами.

Блуждание выше точки отсечки  $\kappa_+^{(2)}$  наблюдается и в случае отсутствия какой-либо геометрической симметрии, однако явные асимптотические формулы становятся недоступными. Для условий (50) жесткого защемления торца принцип сравнения показывает, что собственные частоты смещаются вниз при уменьшении размера  $h$ , однако для условий (49) свободного торца монотонность их движения ставится под сомнение, что делает термин “блуждающие собственные частоты” еще более достоверным.

При построении младших асимптотических членов в разложениях собственных частот и соответствующих собственных мод вблизи торца  $\omega_h$  затупленного заострения в теле  $\Omega^h$  требуется построить пограничный слой в полубесконечном цилиндре  $\omega \times (-\infty, 0)$ , полученном из области  $\Omega^h$  в результате растяжения координат  $x \mapsto h^{-2}(y, z - h)$  и формального перехода к  $h = 0$ . Согласно принципу Сен-Венана многие свойства решений задачи теории упругости в таком цилиндре не зависят от формы его торца, и поэтому все выкладки и рассуждения сохраняются, например, при сглаженной или наоборот неровной поверхности  $\partial\Omega^h \setminus \partial\Omega$  (у тела (46) кончик “обрублен”). Кроме того, нужные свойства присущи пограничному слою в бесконечном цилиндре  $\omega \times (-\infty, +\infty)$  с условиями Дирихле на поверхности  $\partial\omega \times (0, +\infty)$ , т.е. представленный в данном разделе асимптотический анализ без труда приспособливается к за-

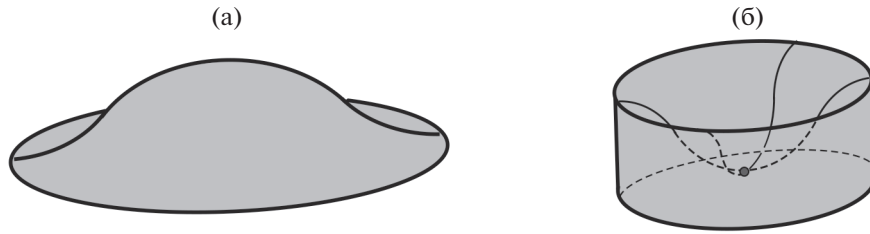


Рис. 5. (а) – Тело с пикообразным ребром и (б) – тело с выемкой, образующей пик вращения.

даче (24), (49), (51) для тела  $\Omega$  с зашпеленным кончиком пика. Детализированную теорию пограничных слоев, возникающих около заострений, можно найти, например, в публикации [20], где, в частности, описан способ вычисления возмущения нулевых собственных частот при постановке условий Дирихле около вершины пика.

### ВЫВОДЫ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Спектр упругих тел с затупленными пикообразными заострениями является дискретным, т.е. состоит из изолированных собственных частот и потому не допускает распространения волн (в отличие от идеального пика, у которого имеется непрерывный спектр с точкой отсечки  $\kappa_+ > 0$ ). Вместе с тем при малой длине обломанного кончика  $h$  наблюдается существенная, с плотностью  $O(|\ln h|^{-2})$  (см. соотношение (20)), концентрация собственных частот выше точки  $\kappa_+$ , способствующая захвату волн в широком диапазоне.

При утончении заострения, т.е. при уменьшении размера  $h$ , концентрация усугубляется, а собственные частоты приобретают ненормальное поведение, характеризующееся быстрым перемещением вдоль вещественной оси – планированием на пороги  $\kappa_+^{(j)}$  предельного непрерывного спектра (см. формулу (33)) или хаотичным блужданием в случае  $\kappa > \kappa_+^{(2)} > \kappa_+^{(1)}$ . Кроме того, при  $h \rightarrow +0$  каждая точка  $\kappa \in (\kappa_+^{(1)}, \kappa_+^{(2)})$  становится собственной частотой “почти периодически” в логарифмическом масштабе  $d_\kappa |\ln h|$ , а для точек  $\kappa > \kappa_+^{(2)}$  такое “мигание” спектра усложняется.

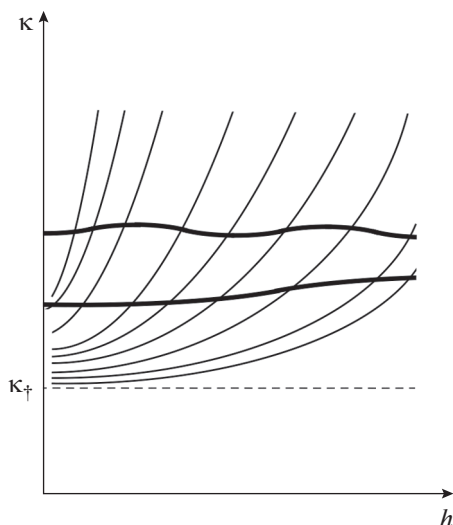
Именно захват волн на “почти всех” частотах выше точки отсечки  $\kappa_+ = \kappa_+^{(1)}$  предопределяет эффект “черной дыры” [1] в случае обломанного кончика пика. Математическая сторона обнаруженного феномена неопирана в описании нового механизма образования непрерывного спектра из дискретных спектров сингулярно возмущенных задач.

Строение спектра трех- и двумерных упругих тел значительно более разнообразно, нежели у одномерных моделей. Это наблюдение объясняется тем, что в многомерном случае непрерывный спектр приобретает два порога (33) и в нем могут появиться собственные частоты (45). Вместе с тем примеры собственных частот внутри непрерывного спектра плоского пикообразного тела неизвестны. По построению собственные моды, отвечающие найденным частотам (45) симметричного тела  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , приобретают экспоненциальное затухание при  $x \rightarrow \mathbb{C}$ . Собственные моды, ведущие себя как  $O(z^{\alpha_+ - 3/2})$ , не обнаружены ни в одной из рассмотренных задач, хотя существовать они могут. До сих пор нет строгих постановок задачи теории упругости в трехмерной области с пикообразным ребром, идеальным (рис. 5а) или затупленным. Это же касается и задачи о пространственном деформируемом теле с глубокой выемкой, образующей пик вращения (рис. 5б).

Приблизительное поведение дискретного спектра при  $h \rightarrow +0$  можно усмотреть на рис. 6. Жирными линиями обозначены малоподвижные собственные частоты, которые отсутствуют в спектре зауженной балки Кирхгофа (рис. 1б), но могут появиться в спектре трехмерного тела с обломанным пиком (рис. 3б). Поскольку обыкновенное дифференциальное уравнение (1) имеет явные решения (5), а непрерывный спектр задачи (1), (2) – единственную точку отсечки (4), нетрудно заключить, что дискретный спектр задачи (7)–(9) состоит только из планирующих собственных частот. Изучение трехмерной задачи требует применения иной, гораздо более сложной техники, которая обслуживает собственные частоты с иным поведением при  $h \rightarrow +0$ , например, малоподвижные и блуждающие. Весьма логично предположить, что на первом интервале  $(\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)})$  (см. формулы (39) и (33)) непрерывного спектра задачи (24), (25) присутствуют только планирующие и, может быть, малоподвижные собственные частоты, однако автор не знает, как подтвердить эту гипотезу строгим анализом.

Уравнение Лапласа со спектральными условиями Стеклова в области с пиком вращения, опи-





**Рис. 6.** Схематичные графики нескольких первых собственных частот в зависимости от параметра  $h > 0$ . Жирными линиями обозначены малоподвижные собственные частоты (отсутствующие в спектре балки Кирхгофа), остальные линии – графики планирующих собственных частот.

сывающими волны на поверхности тяжелой жидкости [21], изучено в работе [22]. В статьях [23–26] и др., содержащих разнообразные результаты о пространственных и плоских задачах Стеклова в пикообразных областях на рис. 3а, рис. 1а и рис. 5б, ответов на сформулированные вопросы также нет.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миронов М.А.* Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. 3. С. 546–547.
2. *Krylov V.V.* New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic “black holes” // *Acta Acustica united with Acustica.* 2004. V. 90. 5. P. 830–837.
3. *Krylov V.V., Tilman F.J.B.S.* Acoustic “black holes” for flexural waves as effective vibration dampers // *J. Sound Vibration.* 2004. V. 274. P. 605–619.
4. *Krylov V.V.* Acoustic black holes: recent developments in the theory and applications // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2014. V. 61. 8. P. 1296–1306.
5. *Миронов М.А.* Точные решения уравнений поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. 1. С. 3–8.
6. *Миронов М.А.* Разрезной стержень как вибрационная черная дыра // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. 6. С. 736–739.
7. *Zhao C., Prasad M.G.* Acoustic black holes in structural design for vibration and noise control. *Acoustics.* 2019. V. 1. № 1. P. 220–251.
8. *Pelat A., Gautier F., Conlon S., Semperlotti F.* The acoustic black hole: A review of theory and applications // *J. Sound and Vibration.* 2020. V. 476. 115316.
9. *Назаров С.А.* О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // *Сибирск. матем. журнал.* 2008. Т. 49. 5. С. 1105–1127.
10. *Бахарев Ф.Л., Назаров С.А.* О структуре спектра задачи теории упругости для тела со сверхострым пиком // *Сибирск. матем. журнал.* 2009. Т. 50. 4. С. 746–756.
11. *Kozlov V., Nazarov S.A.* On the spectrum of an elastic solid with cusps // *Adv. Differential Equations.* 2016. V. 21. 9/10. P. 887–944.
12. *Назаров С.А.* “Блуждающие” собственные частоты двумерного упругого тела с обломанным пиком // *Доклады РАН.* 2017. Т. 477. 2. С. 163–167.
13. *Назаров С.А.* О сущности “черных дыр” для упругих волн в телах с пикообразными заострениями // *Доклады РАН. Физика. Техн. науки.* 2021. Т. 498. С. 57–61.
14. *Назаров С.А.* Странное поведение частот собственных колебаний упругого тела с затупленным пиком // *Прикладная матем. и механика.* 2019. Т. 83. № 2. С. 265–281.
15. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
16. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи матем. наук.* 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
17. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
18. *Полюа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
19. *Kozlov V.A., Nazarov S. A.* Waves and radiation conditions in a cuspidal sharpening of elastic bodies // *Journal of Elasticity.* 2018. V. 132. P. 103–140.
20. *Назаров С.А., Таскинен Я.* Асимптотика спектра смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в тонкой веретенообразной области // *Алгебра и анализ.* 2021. Т. 33. № 2. С. 136–196.
21. *Kuznetsov N.I., Maz'ya V.G., Vainberg B.R.* *Linear Water Waves: A Mathematical Approach.* Cambridge University Press, 2002.
22. *Nazarov S.A., Taskinen J.* Radiation conditions at the top of a rotational cusp in the theory of water-waves // *Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2011. V. 45. P. 947–979.
23. *Назаров С.А., Таскинен Я.* О спектре задачи Стеклова в области с пиком // *Вестник СПбГУ. Сер. 1.* 2008. Вып. 1 (1). С. 56–65.
24. *Kamotski I.V., Maz'ya V.G.* On the linear water wave problem in the presence of a critically submerged body // *SIAM J. Math. Anal.* 2012. V. 44. № 6. P. 4222–4249.
25. *Kamotski I., Maz'ya V.* Estimate for a solution to the water wave problem in the presence of a submerged body // *Russ. J. Math. Phys.* 2013. V. 20. № 4. P. 453–467.
26. *Nazarov S.A., Taskinen J.* “Blinking eigenvalues” of the Steklov problem generate the continuous spectrum in a cuspidal domain // *J. Differential Equations.* 2020. V. 269. № 4, 5. P. 2774–2797.



УДК 534.2

## О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ БЕСКОНТАКТНОГО ПОВЕРХНОСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

© 2022 г. А. С. Аветисян\*

*Институт Механики НАН Армении, пр. Баграмяна 24/2, Ереван-0019, Армения*

*\*e-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com*

Поступила в редакцию 13.10.2021 г.

После доработки 19.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Исследована возможность постановки задач управления распространяющимися в пьезоэлектрическом полупространстве электроакустическими поперечными волнами путем неакустического воздействия на его поверхность. Наличие проводящей поверхности вблизи механически свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства меняет в нем характер приповерхностной локализации распространяющейся электроакустической волны. Исходя из этого, предлагается постановка задачи управления процессом локализации волн. Показано, что нестационарный электрический потенциал на электрическом экране или нестационарность ширины зазора между указанными поверхностями приводят к неакустическому воздействию на пьезоэлектрическое полупространство. В задачах управления приповерхностной локализацией волновой энергии в качестве управляющей функции используются неакустические воздействия на поверхность пьезополупространства.

*Ключевые слова:* бесконтактное воздействие, электроакустическая волна, управление распространением волной, приповерхностная локализация

**DOI:** 10.31857/S0320791922030029

### ВВЕДЕНИЕ

Одна из самых широко применяемых сейчас волн — это легко исследуемая волна Гуляева–Блюстейна. В 1968 г. Ю.Л. Блюстейн [1], а в 1969 г. Ю.В. Гуляев [2] теоретически подтвердили предположение М.И. Каганова, И.Л. Скловской [3] о возможной локализации волновой энергии электроактивной упругой волны сдвига на механически свободной поверхности пьезоэлектрической среды определенной симметрии, при различных граничных условиях для сопутствующего электрического поля. Существование и свойства электроупругих поверхностных волн в пьезоэлектриках тесно связаны с симметрией пьезокристалла и граничными условиями на поверхности тела.

В [4] рассмотрено влияние различных электромагнитных граничных условий на распространение поверхностных волн в пьезоэлектриках. Основой для анализа является введение электрического “поверхностного импеданса”, который связывает электрический потенциал с нормальной составляющей электрического смещения на поверхности. Для различных комбинаций граничных условий на поверхности пьезоэлектрического слоя в [5] исследованы условия локализа-

ции энергии волны в процессе распространения монохроматического сигнала электроупругого сдвига в неоднородном по толщине пьезодиэлектрическом слое.

В статьях [6–13] рассматривается распространение щелевых волн, когда поверхность другого пьезоэлектрического или электропроводящего тела находится на определенном расстоянии от поверхности пьезоэлектрической среды. В частности, в статьях [8–10] исследуется влияние идеально проводящей плоскости, находящейся на некотором расстоянии от поверхности пьезокристалла ниобата калия, на характеристики обобщенных поверхностных электроакустических волн типа Рэлея и Гуляева–Блюстейна. В статье [11] найдены условия существования, структура и дисперсия волн типа Гуляева–Блюстейна в зависимости от параметров двух разных электроупругих сред и ширины зазора между ними. В этих работах показано, как посредством сопутствующих электрических колебаний происходит просачивание энергии электроактивной упругой волны от одного тела в другое. Из этих работ также видно, что изменение расстояния между поверхностями пьезоэлектрического и электропроводящего тел

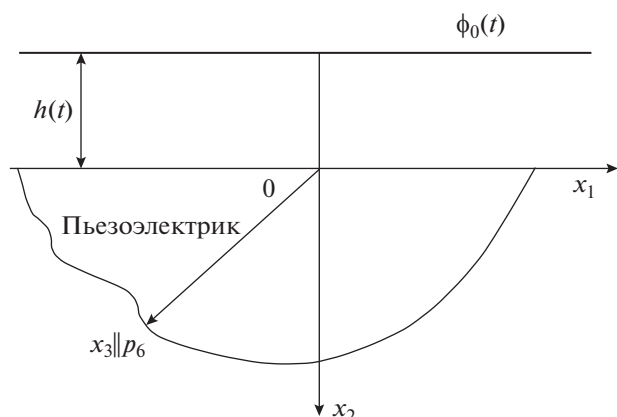


Рис. 1. Схема управления приповерхностной локализацией в пьезоэлектрике.

или изменение электрического потенциала на поверхности одного тела изменяет импеданс на поверхности пьезоэлектрического полупространства.

Современное состояние и новые идеи приводят к некоторым тенденциям развития акустоэлектроники сверхвысоких частот [14–16]. С помощью просачивающейся через щель энергии электроакустической волны, вероятно, можно управлять скоростью объемных акустических волн, а также приповерхностной локализацией волновой энергии в базовом пьезоэлектрическом полупространстве.

Интересны задачи управления распространением электроакустической волны плоской деформации с помощью воздействия электроакустической волной антиплоской деформации, или наоборот. Такое возможно при существовании гибрида данных инородных электроактивных упругих волн (волн упругого сдвига и волн плоской деформации) в пьезоэлектрических слоистых композитах с неакустическим контактом между его слоями [18–21].

В данной работе на наглядном примере волн типа Гуляева–Блюстейна обсуждаются возможные поверхностные бесконтактные воздействия на процесс распространения электроакустической волны в пьезо-полупространстве.

## 1. ПРИПОВЕРХНОСТНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ С ЭКРАНИРОВАННОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрим распространение поверхностных волн по свободной от механических нагрузок поверхности пьезоэлектрического полупространства. Электропроводящая среда (экран) располо-

жена на некотором расстоянии  $h \neq 0$  от поверхности пьезокристалла.

Координатная ось  $0x_3$  совпадает с главной осью  $\bar{p}$  симметрии пьезоэлектрического кристалла (рис. 1). Внутренняя нормаль к поверхности полупространства пьезокристалла направлена вдоль оси  $0x_2$ , а электроакустическая волна распространяется вдоль оси  $0x_1$ .

Квазистатические уравнения электроупругости антиплоской деформации  $\mathbf{U} = [0; 0; U(x_1, x_2, t); \varphi(x_1, x_2, t)]$  для пьезоэлектрических кристаллов классов  $4mm$  тетрагональной и  $6mm$  гексагональной симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44} \nabla^2 U(x_1, x_2, t) &= \rho \ddot{U}(x_1, x_2, t), \\ \nabla^2 \varphi(x_1, x_2, t) &= (e_{15}/\varepsilon_{11}) \nabla^2 U(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

В приведенных выше формулах:  $\tilde{c}_{44} = c_{44}(1 + \chi^2)$  – приведенная жесткость на сдвиг,  $c_{44}$  – естественная жесткость на сдвиг,  $\chi^2 = e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{44})$  – коэффициент электромеханического соединения,  $e_{15}$  – пьезоэлектрический модуль,  $\varepsilon_{11}$  – коэффициент диэлектрической проницаемости и  $\rho$  – плотность материала.

Сопутствующий электрический потенциал  $\varphi_e(x_1, x_2, t)$  в вакуумном промежутке  $\{|x_1| < \infty, -h \leq x_2 \leq 0\}$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_e(x_1, x_2, t) = 0. \quad (1.2)$$

На механически свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства  $x_2 = 0$  выполняются следующие граничные условия

$$c_{44} \partial_2 U(x_1, x_2, t) + e_{15} \partial_2 \varphi(x_1, x_2, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} e_{15} \partial_2 U(x_1, x_2, t) - \varepsilon_{11} \partial_2 \varphi(x_1, x_2, t) &= \\ = -\varepsilon_0 \partial_2 \varphi_e(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \varphi_e(x_1, x_2, t). \quad (1.5)$$

На верхней границе вакуумного промежутка  $x_2 = h$  (на заземленном экране электрического поля) выполняется граничное условие

$$\varphi_e(x_1, x_2, t) = 0. \quad (1.6)$$

Для исследования существования локализованных вблизи поверхности  $x_2 = 0$  электроакустических поперечных волн представлены решения сформулированной математической краевой задачи (1.1)–(1.6) в виде плоских нормальных волн

$$\begin{cases} U(x_1, x_2, t) = U_0(x_2) \exp[ik(x_1 - vt)], \\ \varphi(x_1, x_2, t) = \varphi_0(x_2) \exp[ik(x_1 - vt)], \\ \varphi_e(x_1, x_2, t) = \varphi_0^{(e)}(x_2) \exp[ik(x_1 - vt)]. \end{cases} \quad (1.7)$$

В условиях затухания на бесконечности  $x_2 \rightarrow \infty$  амплитуды характеристик электроупругой волны в пьезоэлектрическом полупространстве равны

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} U_0(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \varphi_0(x_2) = 0. \quad (1.8)$$

В соотношениях (1.7) для решений в виде плоских нормальных волн  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $v(\lambda) = \omega\lambda/2\pi$  – фазовая скорость нормальной волны.

В соответствии с условиями на поверхности (1.5) и в случае заземленного экрана (1.6) общее решение уравнения (1.2) получается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_e(x_1, x_2, t) = & \varphi_0(0) \exp[ik(x_1 - vt)] \times \\ & \times \left[ \cos\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) + \frac{\cos(2\pi/\xi)}{\sin(2\pi/\xi)} \sin\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь введен параметр  $\xi = \lambda/h$ .

С учетом полученного решения (1.9) поверхностные условия (1.3) и (1.4) можно записать в более наглядном виде

$$\begin{aligned} \partial_2 U(x_1, 0, t) = & -\frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}(1 + \chi^2)} \frac{\cos(2\pi/\xi)}{\sin(2\pi/\xi)} \times \\ & \times (2\pi/h\xi)\varphi(0) \exp[ik(x_1 - vt)], \\ \partial_2 \varphi(x_1, 0, t) = & \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}(1 + \chi^2)} \frac{\cos(2\pi/\xi)}{\sin(2\pi/\xi)} \times \\ & \times (2\pi/h\xi)\varphi(0) \exp[ik(x_1 - vt)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решения, удовлетворяющие условиям затухания (1.8) в пьезоэлектрическом полупространстве, записываются в виде

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, t) = & U_0 \exp\left(-\alpha_t \frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) \exp[ik(x_1 - vt)], \\ \varphi(x_1, x_2, t) = & \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U(x_1, x_2, t) + \\ & + \varphi_0 \exp\left(-\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) \exp[ik(x_1 - vt)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В решениях введен коэффициент затухания несущей упругой волны  $\alpha_t = \sqrt{1 - (v(\xi)/\tilde{c}_t)^2}$  (волновой параметр), в котором  $\tilde{c}_t^2 = c_{44}(1 + \chi^2)/\rho$  – скорость поперечной волны в материале,  $v(\xi)$  – фазовая скорость для всех  $\lambda = 2\pi/k$  длин распространения волн. Очевидно также, что приповерхностная локализация волновой энергии возможна только для волн с фазовой скоростью  $v(\xi) < \tilde{c}_t$ .

Соответствующее дисперсионное уравнение получается подстановкой решений (1.11) в условия на поверхности (1.10):

$$\sqrt{1 - [v(\xi)/c_t]^2} = \frac{\chi^2}{1 + \chi^2} f(\xi). \quad (1.12)$$

В отличие от известного уравнения [3], правая часть уравнения содержит множитель  $f(\xi)$ , изменяющийся в зависимости от параметра  $\xi = \lambda/h$ . Функция

$$f(\xi) = \frac{\varepsilon_0 [1 + \exp(4\pi/\xi)]}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}) \exp(4\pi/\xi) + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{11})} \quad (1.13)$$

вводит дисперсию поперечной волны из-за наличия зазора между пьезоэлектрическим полупространством и заземленным проводником. Условие существования поверхностной поперечной волны выполняется независимо от относительной длины волны в вакуумном зазоре  $\xi = \lambda/h$ .

Очевидно, что в предельных случаях ультракоротких и инфракрасных волн в вакуумном зазоре, когда  $kh = 2\pi/\xi \ll 1$  и  $kh = 2\pi/\xi \gg 1$  соответственно, дисперсионное уравнение (1.12) имеет предельные решения, соответствующие значениям  $f_\infty(\xi) = 1$  и  $f_0(\xi) = \varepsilon_0(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^{-1}$ . Очевидно также, что  $f(\xi)$  – монотонно возрастающая функция параметра  $\xi$ , значения которой лежат в интервале  $[\varepsilon_0/(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}); 1]$  (рис. 2). Функция  $f(\xi)$ , по сути, играет роль коэффициента перехода из одного электроупругого состояния в другое.

Из уравнения дисперсии (1.12) получаем выражение для фазовой скорости

$$v(\xi) = c_t \sqrt{1 - \chi_1^4 f^2(\xi)}, \quad (1.14)$$

где  $\chi_1^2 = \chi^2/(1 + \chi^2)$  – приведенный коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрического материала.

В случае ультракоротких волн, когда  $kh \rightarrow \infty$ , или  $\xi = \lambda/h \rightarrow 0$ , получаем дисперсионное уравнение задачи Блюстейна [1]. Отсюда видно, что волна Блюстейна имеет максимальную фазовую скорость

$$v_B = v(0) = \tilde{c}_t \sqrt{1 - \chi_1^4 \varepsilon_0^2 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^2}. \quad (1.15)$$

В случае инфрадлинных волн, когда  $kh \rightarrow 0$  или  $\xi = \lambda/h \rightarrow \infty$ , получается задача о пьезоэлектрическом полупространстве с металлизированной границей без механического воздействия [2]. Из дисперсионного уравнения (1.12) получаем выражение для фазовой скорости

$$v_G = v(\infty) = c_t \sqrt{1 - \chi_1^4}. \quad (1.16)$$

Поверхностные поперечные волны имеют наименьшую фазовую скорость в случае металли-

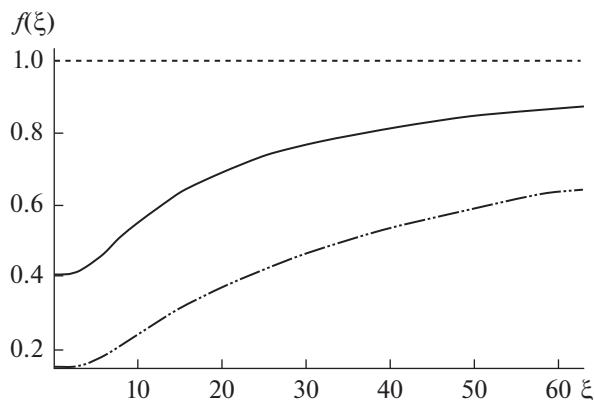


Рис. 2. Характер изменения коэффициента пересчета  $f(\xi)$ .

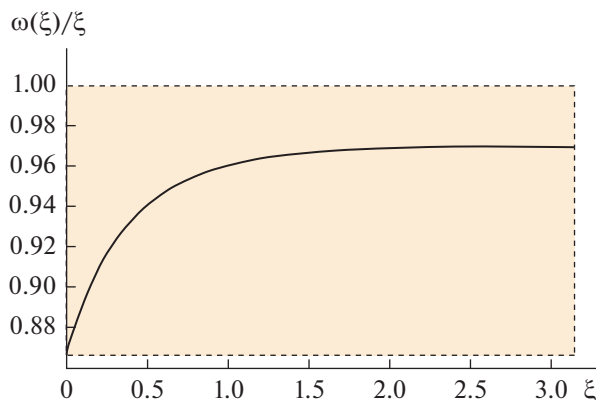


Рис. 3. Фазовая линия при произвольной длине сигнала электроакустической волны.

зированной границы пьезоэлектрического полупространства.

Из дисперсионного уравнения (1.12) и вида передаточной функции (1.13) также следует, что при наличии проводящего слоя вблизи свободной границы пьезоэлектрического полупространства поверхностные поперечные волны становятся высокодисперсными. Тогда каждой конкретной длине волнового сигнала соответствует зона допустимых частот.

$$\sqrt{1 - \chi_1^4 f_0^2(\xi)} \geq \frac{\omega(\xi)}{(\tilde{c}_i/h)\xi} \geq \sqrt{1 - \chi_1^4 f_\infty^2(\xi)}. \quad (1.17)$$

Частота  $\omega(\xi)$  поверхностной волны становится монотонно возрастающей функцией параметра  $\xi$  (рис. 3).

Общее решение задачи для рассматриваемого волнового движения представлено составляющими электроакустической поперечной волны в виде суперпозиции гармонических волн со всеми возможными волновыми числами [8]

$$U(x_1, x_2, t) = \int_0^\infty U_0 \exp(-k\alpha_r x_2) \exp[i\theta(k)t] dk, \quad (1.18)$$

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \left( \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \right) U(x_1, x_2, t) + \int_0^\infty \varphi_0 \exp(-kx_2) \exp[i\theta(k)t] dk. \quad (1.19)$$

Здесь  $\theta(k) = k[s_0 - v(k)]$  – фазовая функция, амплитуды  $U_0$  и  $\varphi_0$  определяются из соответствующих начальных или граничных условий,  $s_0 = x_1/t$  – фиксированный параметр.

Из (1.14), (1.18) и (1.19) следует, что наличие электропроводящего слоя у поверхности пьезоэлектрической среды приводит к уменьшению

фазовой скорости и амплитуды поверхностной волны. При удалении проводящей поверхности от механически свободной поверхности пьезоэлектрика фазовая скорость поверхностной волны увеличивается, достигая своего максимума.

Изменение относительной ширины вакуумного зазора между поверхностями пьезоэлектрического полупространства и электропроводящего экрана приводит к изменению локализации энергии волны вблизи поверхности пьезоэлектрика.

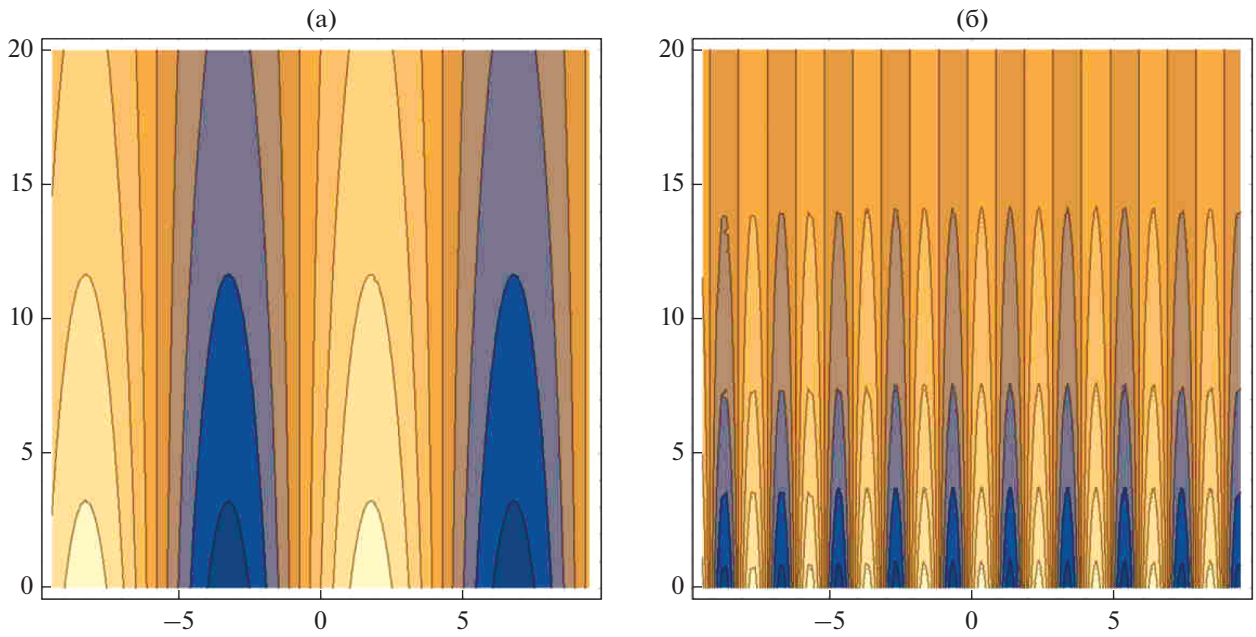
На рис. 4а и 5а показаны соответственно волновые поверхности составляющих электроакустической волны в случае узкого зазора, когда  $\lambda/h = 10.0$ . В этом случае локализация волновой энергии у поверхности мала, и волновые компоненты медленно затухают по глубине.

На рис. 4б и 5б показаны соответственно волновые поверхности составляющих электроакустической волны в случае широкого зазора, когда  $\lambda/h = 1.0$ . В этом случае локализация волновой энергии у поверхности сильнее, и волновые компоненты резко затухают с глубиной. Это означает, что в пьезоэлектрическом полупространстве при разной ширине вакуумного зазора возникают разные установившиеся колебания с разной приповерхностной локализацией.

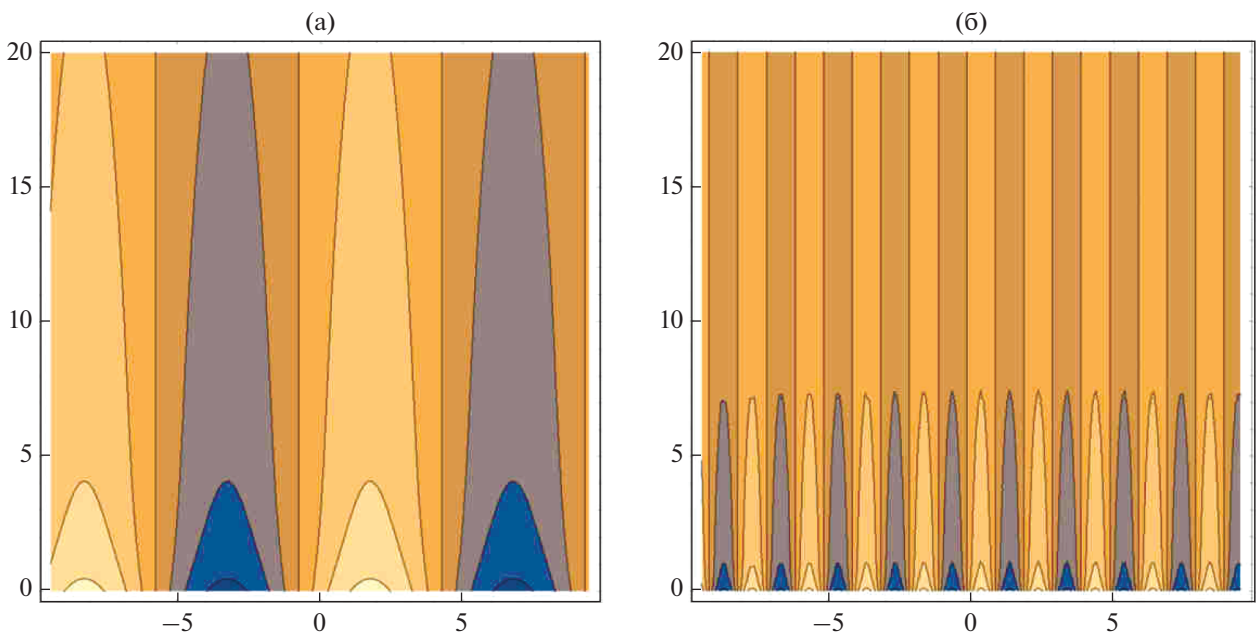
Численные расчеты и сравнительный анализ проведены для физикомеханических характеристик пьезоэлектриков класса *bmm* гексагональной симметрии PZT-4 и ZnO (Таблица 1).

Электрический экран расположен на расстоянии  $h = 2.5 \times 10^{-4}$  м от механически свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства.

Принимая во внимание (1.10), можно утверждать, что поверхностные эффекты на механически свободной поверхности пьезоэлектрика (1.11) могут изменяться в случаях изменяющейся во



**Рис. 4.** Эволюция подповерхностной локализации упругого сдвига в зависимости от относительной длины волны: (а) – отношение длины волны к ширине зазора  $\lambda/h = 10$ , (б) – отношение длины волны к ширине зазора  $\lambda/h = 1.0$ .



**Рис. 5.** Эволюция приповерхностной локализации электрического потенциала в зависимости от относительной длины волны: (а) – отношение длины волны к ширине зазора  $\lambda/h = 10$ , (б) – отношение длины волны к ширине зазора  $\lambda/h = 1.0$ .

**Таблица 1.** Модуль сдвига, плотности и скорости сдвиговых волн в некоторых пьезоэлектрических кристаллах

	PZT-4	ZnO
Модуль сдвига материала $c_{44}$ , Па	$2.56 \times 10^{10}$	$4.25 \times 10^{10}$
Плотность материала $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$7.5 \times 10^3$	$5.68 \times 10^3$
Пьезоэлектрический модуль $e_{15}$ , Кл/м <sup>2</sup>	12.7	0.59
Диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{11}/\epsilon_0$ , Ф/м	6.45	7.38
EM коэффициент связи $\chi^2$	0.9409	0.0121
(SH) скорость волны $\tilde{c}_t$ , м/с	$2.574 \times 10^3$	$2.752 \times 10^3$

времени ширины вакуумного зазора или изменяющейся во времени нагрузки электрического экрана.

В случае нагруженного электрического экрана с однонаправленно изменяющимся потенциалом  $\varphi_e(x_1, -h, t) = \phi(t) \exp(ikx_1)$  и фиксированной шириной вакуумного зазора, когда  $h = \text{const}$ , в вакуумном зазоре можно создать сопутствующие колебания распространяющейся однонаправленной электроупругой волны:

$$\begin{aligned} \varphi_e(x_1, x_2, t) = & -\phi_\varphi(t) \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) \times \\ & \times \sin\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) \exp(ikx_1) + \\ & + \phi_0(0, t) \cos\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) \exp(ikx_1) + \\ & + \phi_0(0, t) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) \exp(ikx_1). \end{aligned} \quad (1.20)$$

В случае заземленного электрического экрана и изменяющейся во времени ширины вакуумного зазора  $h(t)$ , в вакуумном зазоре и на поверхности пьезоэлектрика вместо (1.9) получим однонаправленно изменяющиеся сопровождающие колебания вида

$$\begin{aligned} \varphi_e(x_1, x_2, t) = & \phi_0(0, t) \phi_h(t) \times \\ & \times \left[ \cos\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right) \right] \exp(ikx_1). \end{aligned} \quad (1.21)$$

В соотношениях (1.20) и (1.21) функция  $\phi_0(0, t)$  представляет собой гармонику установившихся электроакустических колебаний на поверхности раздела пьезоэлектрика и вакуумного зазора,  $\phi_\varphi(t)$  и  $\phi_h(t) = \sin(2\pi h(t)/\lambda)$  — потенциалы в качестве управляющих функций.

Принимая во внимание, что вынужденные сопровождающие колебания (1.20) и (1.21) создают поверхностные воздействия на процесс распространения электроакустической поперечной

волны в пьезоэлектрическом полупространстве, можно формулировать задачи бесконтактного управления локализацией волновой энергии в нем.

## 2. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ ПОСРЕДСТВОМ НЕАКУСТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для однонаправленных волн вида  $F(x_1, x_2, t) = F_0^*(x_2, t) \exp(ikx_1)$  квазистатические уравнения электроупругости антиплоской деформации для пьезоэлектрической среды (1.1) можно записать в более наглядном виде

$$\partial_2^2 U_{0^*}(x_2, t) - k^2 U_{0^*}(x_2, t) = \tilde{c}_t^{-2} \ddot{U}_{0^*}(x_2, t), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_2^2 \varphi_{0^*}(x_2, t) - k^2 \varphi_{0^*}(x_2, t) = \\ = (e_{15}/\epsilon_{11}) [\partial_2^2 U_{0^*}(x_2, t) - k^2 U_{0^*}(x_2, t)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть в начальный момент  $t=0$  воздействия на установившуюся электроакустическую волну сдвига, ее волновые компоненты соответствуют значениям

$$U_{0^*}(x_2, 0) = \gamma(x_2), \quad \dot{U}_{0^*}(x_2, 0) = \tilde{\gamma}(x_2), \quad (2.3)$$

$$\varphi_{0^*}(x_2, 0) = \zeta(x_2), \quad \dot{\varphi}_{0^*}(x_2, 0) = \tilde{\zeta}(x_2). \quad (2.4)$$

Пусть необходимо за определенный промежуток времени  $t \in [0; T_0]$  привести установившееся электроакустическое состояние и соответствующую ему приповерхностную локализацию волновой энергии в новое установившееся состояние, со значениями волновых компонент

$$U_{0^*}(x_2, T_0) = \delta(x_2), \quad \dot{U}_{0^*}(x_2, T_0) = \tilde{\delta}(x_2), \quad (2.5)$$

$$\varphi_{0^*}(x_2, T_0) = \xi(x_2), \quad \dot{\varphi}_{0^*}(x_2, T_0) = \tilde{\xi}(x_2). \quad (2.6)$$

В квазистатической постановке задачи управления электроакустическим волновым процессом функции, описывающие начальные и финальные значения колебаний сопровождающих

электрических полей  $\xi(x_2)$ ,  $\tilde{\xi}(x_2)$ ,  $\zeta(x_2)$  и  $\tilde{\zeta}(x_2)$ , будут связаны с функциями, описывающими начальное и конечное состояния упругого смещения  $\gamma(x_2)$ ,  $\tilde{\gamma}(x_2)$ ,  $\delta(x_2)$  и  $\tilde{\delta}(x_2)$ . Соответствующие связи между ними описываются системой уравнений (2.1) и (2.2) с условиями на поверхности.

Поэтому в квазистатической постановке задачи управления волновым процессом начальные условия в момент  $t = 0$  и условия конечного состояния в момент  $t = T_0$  для характеристик поля электроакустической волны записываются только для сдвигового упругого смещения в виде (2.3) и (2.5).

Фактически на механически свободной поверхности пьезоэлектрика неакустическое воздействие возникает как при переменной нагрузке экрана электрического поля, так и в случае, когда ширина зазора между поверхностью пьезоэлектрика и поверхностью электрического поля экрана меняется со временем. В обоих случаях поверхностные условия (1.3) и (1.4) формально могут быть записаны в единой форме

$$\partial_2 U_{0*}(0, t) = -\frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{11}(1 + \chi^2)} \mu(t), \quad (2.7)$$

$$\partial_2 \phi_{0*}(0, t) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{11}(1 + \chi^2)} \mu(t). \quad (2.8)$$

Здесь функция поверхностного управления как функция поверхностного неакустического суммарного воздействия на поверхности пьезоэлектрика  $\mu(t)$  появляется в виде свертки функции  $\phi_0(0, t)$  с одной из функций управления  $\phi_\varphi(t)$  или  $\phi_h(t) = \sin(2\pi h(t)/\lambda)$ .

*2.1. Задача управления I типа. Задача неакустического управления приповерхностной локализацией энергии электроакустической поперечной волны посредством динамической нагрузки электрического экрана*

В случае, когда экран имеет изменяющуюся по времени загрузку

$$\phi_e(x_1, -h, t) = \phi_0(t) \exp(ikx_1), \quad (2.9)$$

общее решение уравнения (1.2) в вакуумном зазоре с учетом условий на поверхности (1.5), (2.7) и (2.8) получено в виде однонаправленных волн

$$\phi_e(x_1, x_2, t) = \phi_{0*}^{(e)}(x_2, t) \exp(ikx_1), \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \phi_{0*}^{(e)}(x_2, t) = & \phi_0(0, t) \cos\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) + \\ & + \phi_0(0, t) \operatorname{ctg}(\xi) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right) - \\ & - \phi_\varphi(t) \operatorname{cosec}(\xi) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{h\xi}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

В свертке с сопровождающими колебаниями в электроакустической волне сдвига эти вынужденные колебания создают нагрузки на поверхность пьезоэлектрика:

$$\begin{aligned} \partial_2 U(x_1, 0, t) = & \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{11}(1 + \chi^2)} \left(\frac{2\pi}{h\xi}\right) \exp(ikx_1) \times \\ & \times \left[ \phi_\varphi(t) \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) - \phi_0(0, t) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \phi(x_1, 0, t) = & -\frac{\epsilon_0}{\epsilon_{11}(1 + \chi^2)} \left(\frac{2\pi}{h\xi}\right) \exp(ikx_1) \times \\ & \times \left[ \phi_\varphi(t) \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) - \phi_0(0, t) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Функция управления  $\phi_\varphi(t)$  в суммарном воздействии появляется как слагаемое

$$\begin{aligned} \mu_\varphi(t) = & \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \phi_0(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right) - \\ & - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \phi_\varphi(t) \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{\xi}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Следовательно, задача управления однонаправленными электроакустическими волнами с неакустическим поверхностным воздействием в пьезоэлектрическом полупространстве формулируется в виде однородных дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2), неоднородных граничных условий (2.11) и (2.12), условий начального и конечного состояний (2.3)–(2.6) в координатной полуполосе  $Q_T = [0 \leq x_2 < \infty) \times [0 \leq t \leq T_0]$ .

Требуется найти такое граничное воздействие  $\phi_\varphi(t)$ , которое в течение времени  $T_0$  переводит систему из начального состояния (2.3) и (2.4) в конечное состояние (2.5) и (2.6).

*2.2. Задача управления II типа. Неакустический контроль приповерхностной локализации энергии электроакустической поперечной волны посредством динамического перемещения заземленного электрического экрана*

В случае заземленного электрического экрана и изменяющейся во времени ширины вакуумного зазора  $h(t)$ , общее решение уравнения (1.2) в вакуумном зазоре с учетом условий (1.5) на поверхности  $x_2 = 0$  и (1.6) на поверхности  $x_2 = h(t)$  соответ-



ственно получается в виде однонаправленной волны

$$\varphi_e(x_1, x_2, t) = \varphi_0(0, t) \exp(ikx_1) \times \left[ \cos\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{L(t)}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda}\right) \right]. \quad (2.14)$$

С учетом вновь полученного решения (2.14), поверхностные условия (1.3) и (1.4) для однонаправленных волн можно записать в более наглядном виде

$$\partial_2 U(x_1, 0, t) = -\frac{\epsilon_{15}}{c_{44} \epsilon_{11} (1 + \chi^2)} \times \frac{\epsilon_0}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi h(t)}{\lambda}\right) \varphi_0(0, t) \exp(ikx_1), \quad (2.15)$$

$$\partial_2 \varphi(x_1, 0, t) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{11} (1 + \chi^2)} \times \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi h(t)}{\lambda}\right) \varphi_0(0, t) \exp(ikx_1). \quad (2.16)$$

Функция управления  $\varphi_h(t) = \sin(2\pi h(t)/\lambda)$  в суммарном воздействии появляется как множитель:

$$\mu_h(t) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \varphi_0(t) \sin\left(\frac{2\pi h(t)}{\lambda}\right). \quad (2.17)$$

Функция воздействия в этом случае будет равна

$$h(t) = (\lambda/2\pi) \arcsin[\varphi_h(t)]. \quad (2.18)$$

Соответственно, задача управления поверхностным неакустическим воздействием однонаправленных электроакустических волн в пьезоэлектрическом полупространстве формулируется в виде однородных дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2), неоднородных граничных условий (2.15) и (2.16), условий начального и конечного состояний (2.3)–(2.6) в координатной полуполосе  $Q_T = [0 \leq x_2 < \infty) \times [0 \leq t \leq T_0]$ .

Требуется найти такое граничное воздействие  $\varphi_h(t)$ , которое в течение времени  $T_0$  переводит систему из начального состояния (2.3) и (2.4) в конечное состояние (2.5) и (2.6).

Решения сформулированных задач поверхностного управления методом управления собственными формами колебаний в электроакустической волне соответствующими гармониками поверхностного воздействия [18] будут представлены в следующих статьях авторов.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изменения электрического поля вблизи механически свободной поверхности пьезоэлектрика приводят к поверхностным воздействиям на эту поверхность. Изменения ширины зазора между

механически свободной поверхностью пьезоэлектрика и заряженной плоскостью экрана также вызывают поверхностные воздействия. Воздействие на поверхность пьезоэлектрического полупространства характеризуется коэффициентом передачи воздействия.

Рассчитаны характеристики волновых составляющих электроакустического поля для коротковолнового и длинноволнового случаев. Для управления интенсивностью приповерхностной локализации волновой энергии в пьезоэлектрическом полупространстве предлагается рассматривать поверхностное воздействие как управляющую функцию.

Дана постановка задачи управления локализацией энергии поперечной электроупругой волны вблизи поверхности пьезоэлектрика.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bleustein J.L.* A new surface wave in piezoelectric materials // *Appl. Phys. Lett.* 1968. V. 13. № 12. P. 412–413. <https://doi.org/10.1063/1.1652495>
2. *Гуляев Ю.В.* Поверхностные электроакустические волны в твердых телах // *Письма в ЖЭТФ.* 1969. Т. 9. С. 37–38.
3. *Каганов М.И., Скловская И.Л.* Поверхностная волна в пьезоэлектрике // *ФТТ.* 1966. Т. 8. С. 2789.
4. *Ingebrigtsen K.A.* Surface waves in piezoelectrics // *J. Appl. Phys.* 1969. V. 40. № 7. P. 2681–2686. <https://doi.org/10.1063/1.1658060>
5. *Аветисян А.С., Камалян А.А.* Влияние поперечной неоднородности пьезодиэлектрического слоя и комбинации электромеханических граничных условий при распространении сдвигового электроупругого сигнала // *Вестник ГИУА. Сер. “Механика, машиноведение, машиностроение”.* 2014. Т. 17. № 1. С. 37–51.
6. *Гуляев Ю.В., Плесский В.П.* Щелевые акустические волны в пьезоэлектрических материалах // *Акуст. журн.* 1977. Т. 23. № 5. С. 716–723.
7. *Балакирев М.К., Горчаков А.В.* Проникновение упругой волны через зазор между пьезоэлектриками // *ФТТ.* 1977. Т. 19. № 2. С. 571–572.
8. *Аветисян А.С.* О поверхностных волнах в пьезоэлектрическом материале при наличии проводящей среды на его границе // *Материалы Второй Всесоюзной научно-технической конференции “Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов”.* ЕГУ. 1984. Т. 1. С. 27–29.
9. *Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E., Joshi S.G.* Influence of electrical boundary conditions on structure of surface acoustic waves in potassium niobite // *Electronics letters.* 1999. V. 35. № 14. P. 1205–1206. <https://doi.org/10.1049/el:19990799>
10. *Зайцев Б.Д., Кузнецова И.Е., Бородина И.А.* Влияние электрических граничных условий на характеристики поверхностных акустических волн, рас-



- пространяющихся в ниобате калия // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 462–468.
11. *Chernozatonskii L.A., Ermoshin S.N., Gramotnev D.K.* Coupled Gulyaev-Bleustein waves in a system of 2 different piezoelectrics separated by a gap // *Physics Letters A*. 1991. V. 154. № 9. P. 465–470. [https://doi.org/10.1016/0375-601\(91\)90975-E](https://doi.org/10.1016/0375-601(91)90975-E)
  12. *Li X.F., Yang J.S.* Piezoelectric gap waves between a piezoceramic half-space and a piezoceramic plate // *Sensors and Actuators*. 2006. V. 132A. № 2. P. 472–479.
  13. *Yang J.S.* Acoustic gap waves in piezoelectromagnetic materials // *Math. and Mech. of Solids*. 2006. V. 11. № 5. P. 451–458.
  14. *Гуляев Ю.В., Хикернелл Ф.С.* Акустоэлектроника: история, современное состояние и новые идеи для новой эры // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 101–110.
  15. *Алексеев С.Г., Гуляев Ю.В., Котелянский И.М., Мансфельд Г.Д.* Некоторые тенденции развития акустоэлектроники сверхвысоких частот // *Успехи физ. наук*. 2005. № 8. С. 895–899. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0175.200508i.0895>
  16. *Аветисян А.С., Белубекян М.В.* Об учете микровращений частиц упругой среды по упрощенной теории Коссера при распространении электроупругих волн в пьезоэлектрике класса бмм // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 8. С. 579–587. <https://doi.org/10.1134/S1063771019050051>
  17. *Бурков С.И., Зайцева М.П., Кокорин Ю.И., Сорокин Б.П., Соболев Б.В., Четвергов Н.А.* Анизотропия управления скоростью объемных акустических волн электрическим полем в пьезоэлектриках со структурой селенита // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 664–666.
  18. *Bergamini A.E., Zündel M., Flores Parra E.A., Delpero T., Ruzzene M., Ermanni P.* Hybrid dispersive media with controllable wave propagation: A new take on smart materials // *J. Appl. Phys.* 2015. V. 118. <https://doi.org/10.1063/1.4934202>
  19. *Avetisyan A.S., Khachatryan V.M.* Propagation of hybrid electroelastic waves in transversally inhomogeneous periodic piezoelectric structures // *Proc. of the NAS of Armenia Mechanics*. 2020. V. 73. № 1. P. 6–22. <https://doi.org/10.33018/73.1.1>
  20. *Avetisyan A.S., Jilavyan H.S.* Hybrid of the Rayleigh and Gulyaev-Bluestein electro-acoustic waves near the inner surface of a layered piezoelectric composite // *Proc. of the NAS of Armenia Mechanics*. 2021. V. 73. № 2. P. 3–21. <https://doi.org/10.33018/73.2.1>
  21. *Avetisyan A.S., Mkrtchyan M.H.* Control of vibrations of infinite membrane tape with a moving edge in a supersonic gas flow // *Proc. of the NAS of Armenia Mechanics*. 2021. V. 74. № 2. P. 45–58. <https://doi.org/10.33018/73.2.1>

УДК 534.2.535.42

## АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ ПРОФИЛИРОВАННОГО ПО ШИРИНЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

© 2022 г. С. Н. Антонов<sup>а</sup>, \*, Ю. Г. Резвов<sup>б</sup>, \*\*<sup>а</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Россия<sup>б</sup>Новомосковский институт Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева,  
ул. Дружбы 8, Новомосковск, Тульской обл., 301665 Россия

\*e-mail: olga-ant@yandex.ru

\*\*e-mail: rezvovyug@mail.ru

Поступила в редакцию 30.12.2020 г.

После доработки 25.12.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Проведено моделирование акустооптической дифракции на ультразвуковом поле медленной акустической моды в парателлурите, генерируемом пьезопреобразователем 6-угольной формы в геометрии неаксиального акустооптического дефлектора. Установлено, что в сравнении с прямоугольным преобразователем использование профилированного по ширине преобразователя уменьшает характерный масштаб акустических неоднородностей. В результате параметры акустооптического взаимодействия приближаются к ситуации однородного акустического поля: увеличивается максимальная эффективность дифракции (особенно в режиме перемодуляции, при параметре Рамана–Ната, равном  $3\pi$ ), уменьшаются искажения поперечного профиля дифрагированного излучения.

*Ключевые слова:* анизотропная акустооптическая дифракция, акустооптический дефлектор, пьезопреобразователь

DOI: 10.31857/S0320791922030017

### ВВЕДЕНИЕ

Акустооптика исследует взаимодействие оптического излучения с ультразвуковыми волнами в прозрачных средах. В настоящее время акустооптические (АО) устройства используются для управления лазерным излучением как модуляторы интенсивности, угловые сканеры, спектральные фильтры, сдвигатели частоты и др. Монографии [1–6] освещают фундаментальные основы и приложения АО взаимодействия.

На параметры АО приборов влияет геометрия акустического пьезопреобразователя. Как правило, используют плоские преобразователи в форме прямоугольника, трапеции, эллипса, шестиугольника, ромба и др. [7, 8]. В плосковолновом приближении влияние формы проявляется, если длина взаимодействия для составляющих светового пучка различна [9]. При одинаковой длине конфигурация преобразователя определяет неоднородность акустического поля вследствие дифракционных эффектов. Аналитически структура поля описывается в изотропной среде для преобразователей квадратной, прямоугольной, круглой и эллиптической формы. Для пьезопреобразователя произвольной конфигурации необходим численный расчет.

Дополнительно усложняет анализ акустическая анизотропия АО среды [10–12]. В частности, доминирующий АО материал парателлурит ( $\alpha$ -TeO<sub>2</sub>) имеет чрезвычайно большую акустическую анизотропию, вследствие чего ярко выражены эффекты сноса и сильного дифракционного искажения звукового пучка [13–16]. Это влияет на характер АО взаимодействия и параметры АО устройств [17–23].

Данная работа исследует влияние неоднородности акустического поля, возбуждаемого плоским пьезопреобразователем переменной ширины, на характеристики брэгговского АО взаимодействия в TeO<sub>2</sub> и, как следствие, на параметры АО устройств.

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Неаксиальная геометрия АО взаимодействия в парателлурите, предложенная в [24], в настоящее время имеет широкий спектр применений (дефлекторы, модуляторы и др.) [25–27]. При этом продолжается совершенствование характеристик

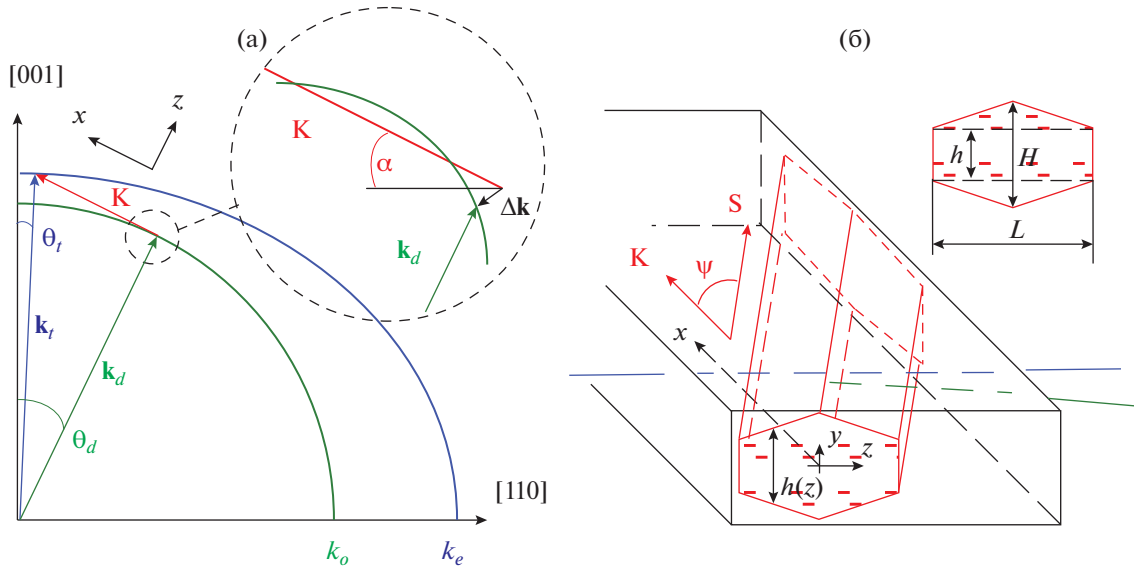


Рис. 1. (а) – Векторная диаграмма и (б) – объемная схема взаимодействия.

АО устройств, основанных на этой геометрии [28–30]. Особенности рассматриваемой геометрии АО взаимодействия в парателлурите иллюстрирует рис. 1.

Плоскость АО взаимодействия содержит оптическую ось и ось [110]. Используется плоский преобразователь длины  $L$  (размер в плоскости АО-дифракции) и переменной ширины  $h(z)$ . Волновой вектор  $\mathbf{K}$  возбуждаемого ультразвукового пучка направлен по нормали к преобразователю и составляет угол  $\alpha = 4^\circ \dots 6^\circ$  с осью [110]. Используется поперечная медленная звуковая мода, фазовая скорость которой сильно зависит от направления и при указанном диапазоне угла  $\alpha$  принимает значения  $v_s = 633 \dots 652$  м/с. Вследствие сильной акустической анизотропии направление распространения энергии (вдоль групповой скорости  $\mathbf{S}$ ) отклонено на угол  $\psi = 35^\circ \dots 45^\circ$  от волнового вектора  $\mathbf{K}$ . Для расчета акустических характеристик использованы значения упругих модулей из [31]. В плосковолновом приближении возмущенная звуком область среды имеет форму цилиндра, ширина которого равна  $L \cos \psi$ . Можно отметить, что также используется АО взаимодействие в плоскости, не содержащей оптической оси [32, 33].

Рассматриваемый вариант реализует дифракцию в  $-1$  порядок, при котором волновые векторы взаимодействующих волн образуют практически прямоугольный треугольник:  $\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_r - \mathbf{K} + \Delta\mathbf{k}$ . Волновой вектор падающего света  $\mathbf{k}_r$  (необыкновенная мода) направлен под таким небольшим углом  $\theta_r$  к оптической оси, чтобы волновой вектор дифрагированного света  $\mathbf{k}_d$  (обыкновенная мода) был ортогонален вектору  $\mathbf{K}$  в центре диапа-

зона пропускания. Очевидно, что в центре диапазона угол  $\theta_d$  между оптической осью и вектором  $\mathbf{k}_d$  равен углу  $\alpha$ . Вектор расстройки  $\Delta\mathbf{k}$  направлен перпендикулярно вектору  $\mathbf{S}$  в плоскости АО взаимодействия. Обычно геометрия является не строго касательной, и при изменении частоты звука вектор  $\mathbf{K}$  пересекает волновую поверхность в двух близких точках. Это позволяет расширить диапазон сканирования за счет незначительной потери эффективности.

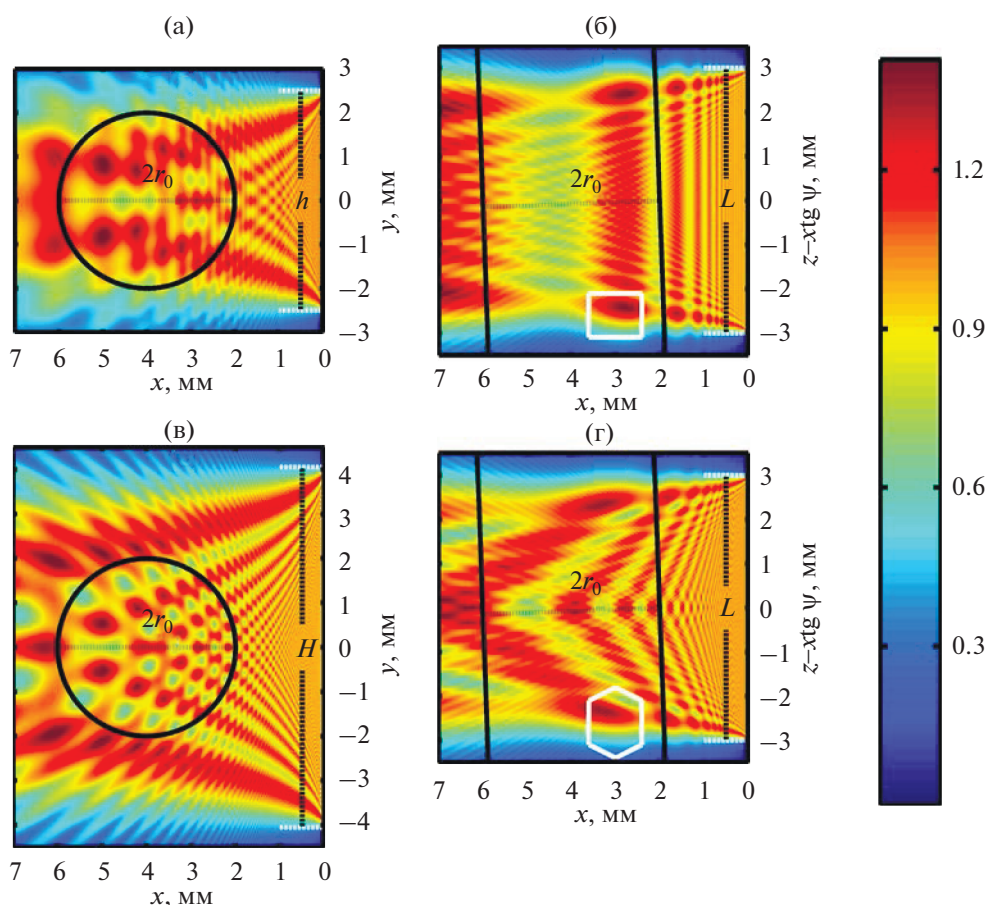
В зависимости от акустической мощности и параметра  $\Delta k L \cos \psi$  падающее излучение делится между проходящим пучком (“ $i$ ”) той же оптической моды и дифрагированным пучком (“ $d$ ”, обыкновенная мода).

Звуковое поле, возбуждаемое плоским преобразователем, рассчитывается в параболическом приближении теории дифракции [11]. В этом приближении проекции волнового вектора плоских акустических волн связаны соотношением

$$K_x = K - \frac{S_y K_y + S_z K_z}{v_s} - \frac{w_y}{2K} K_y^2 - \frac{w_z}{2K} K_z^2 - \frac{w_{yz}}{K} K_y K_z,$$

где  $w_y, w_z, w_{yz}$  – безразмерные коэффициенты.

Особенности рассматриваемой геометрии заключаются в следующем. Снос акустической энергии происходит только в плоскости  $xz$ , при этом  $\text{tg} \psi = S_z / v_s$ . Коэффициент  $w_{yz} = 0$ , поэтому собственные векторы для матрицы  $\mathbf{w}$  направлены вдоль осей  $y$  и  $z$ . Сами значения  $w_y$  и  $w_z$  показывают, во сколько раз (относительно изотропной среды) приближается к преобразователю характерная структура ближнего поля, вызванная огра-



**Рис. 2.** Модуль амплитуды акустического поля в сечениях (а, в)  $z - x \operatorname{tg} \psi = 0$ , (б, г)  $y = 0$  прямоугольного (верхний ряд) и 6-угольного (нижний ряд,  $H = 8$  мм) преобразователя. Акустическая частота соответствует центру диапазона. Белые контуры на (б) и (г) пропорционально передают форму преобразователя.

нением поперечного размера акустического пучка по соответствующим осям.

Размеры преобразователя связаны с конкретной АО задачей. Ширина преобразователя  $h$  определяет допустимую световую апертуру. Выбор длины преобразователя  $L$  является компромиссом между полосой пропускания и мощностью управления.

Рассмотрим практический пример: угол  $\alpha = 6^\circ$ , скорость  $v_s = 652$  м/с, угол сноса  $\psi = 44.8^\circ$ , коэффициенты квадратичной анизотропии  $w_y = 45.8$ ,  $w_z = 9.4$ . При длине волны света  $\lambda = 1.064$  мкм имеем  $\theta_l = 4.46^\circ$  (при этом лучевая скорость света направлена под углом  $3.93^\circ$  к оптической оси, т.е. угол сноса света составляет  $0.53^\circ$ ), центр диапазона пропускания располагается при частоте  $f_s = 36.4$  МГц. Длина преобразователя равна  $L = 6$  мм, ширина не может быть меньше значения  $h = 5$  мм. Луч света с гауссовым распределением амплитуды ( $r = 2$  мм – радиус пучка по уровню интенсивности  $1/e^2$ ) пересекает возмущенную среду на некотором расстоянии от преобразователя.

Исследуем расчетным путем, как меняется акустическое поле и некоторые характеристики АО взаимодействия при замене прямоугольного преобразователя размером  $L \times h$  (длина  $L = 6$  мм, ширина  $h = 5$  мм) на 6-угольный с шириной в центре  $H = 6 \dots 8$  мм (ширина  $h$  на краях остается равной 5 мм).

Рис. 2 иллюстрирует неоднородность акустического поля (модуль амплитуды поля вблизи преобразователя принят за единицу) в пределах области АО взаимодействия. Преобразователь расположен в плоскости  $x = 0$  (на рисунках – правая грань), белые штриховые линии дают границы акустического поля в плосковолновом приближении. Черные сплошные линии демонстрируют падающий световой пучок с апертурой  $2r_0$ .

Из-за сноса звукового пучка его осью является прямая  $z - x \operatorname{tg} \psi = 0$  в плоскости  $y = 0$ . Поэтому замена координаты  $z$  на  $z - x \operatorname{tg} \psi$  выглядит на рис. 2б и 2г как отсутствие сноса. Существенная неоднородность акустического поля в пределах светового пучка на таком небольшом расстоянии от преобразователя определяется значительной величи-

ной коэффициентов  $w_y$  и  $w_z$ . Их отношение равно  $w_y/w_z = 4.9$ , и при сопоставимых значениях  $L$  и  $h$  неоднородность вдоль хода светового луча менее значима, чем неоднородность поля по апертуре света (вызванная конечной шириной преобразователя).

Поэтому для прямоугольного преобразователя (ширина преобразователя постоянна) сильная неоднородность поля по апертуре света (рис. 2а) мало меняется по ходу светового луча (рис. 2б). При переходе к 6-угольному преобразователю неоднородность по апертуре (рис. 2в) остается значительной, а картина поля вдоль светового луча (рис. 2г) существенно меняется. В последнем случае свет пересекает области, характер неоднородности которых почти такой же, как у поля прямоугольного преобразователя, но на разном расстоянии от преобразователя.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Далее расчет характеристик АО взаимодействия производился в рамках модели, предложенной в [19] и близкой к модели работы [34].

Как видно из рис. 2, непостоянство ширины преобразователя уменьшает масштаб акустиче-

ских неоднородностей по ходу светового пучка, и поле представляет собой набор мелкомасштабных неоднородностей. В результате условия АО-дифракции для парциальных лучей, составляющих световой поток, выравниваются. Такое “дробление” неоднородностей приближает акустическое поле к модели однородного поля.

Величину АО-связи, которая зависит от характеристик взаимодействующих волн и фотоупругих свойств среды, задает безразмерный параметр Рамана–Ната. Рис. 3 показывает зависимость эффективности дифракции  $\eta$  (отношение мощности дифрагированного света к мощности падающего излучения) от параметра Рамана–Ната  $v$  в условиях точного синхронизма, т.е. при  $\Delta k = 0$ . В плосковолновом приближении эта зависимость аналитически описывается соотношением  $\eta = \sin^2(v/2)$ , является периодической и допускает предельную эффективность в 100%. Вследствие малой расходимости падающего света расчет в модели однородного поля (линия 1) фактически совпадает с этим выражением. При дифракции светового пучка в поле прямоугольного преобразователя (линия 2) уменьшается максимально достижимая эффективность дифракции. С увеличением параметра Рамана–Ната зависимость  $\eta(v)$  все сильнее расходится с моделью однородного

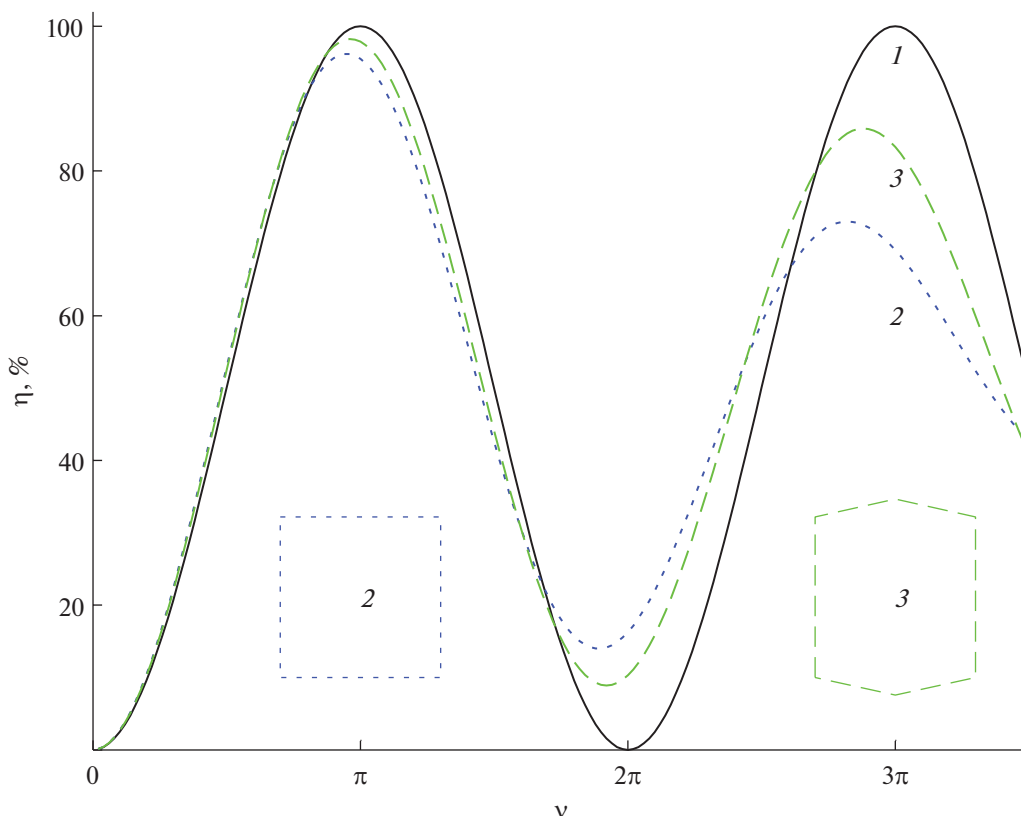
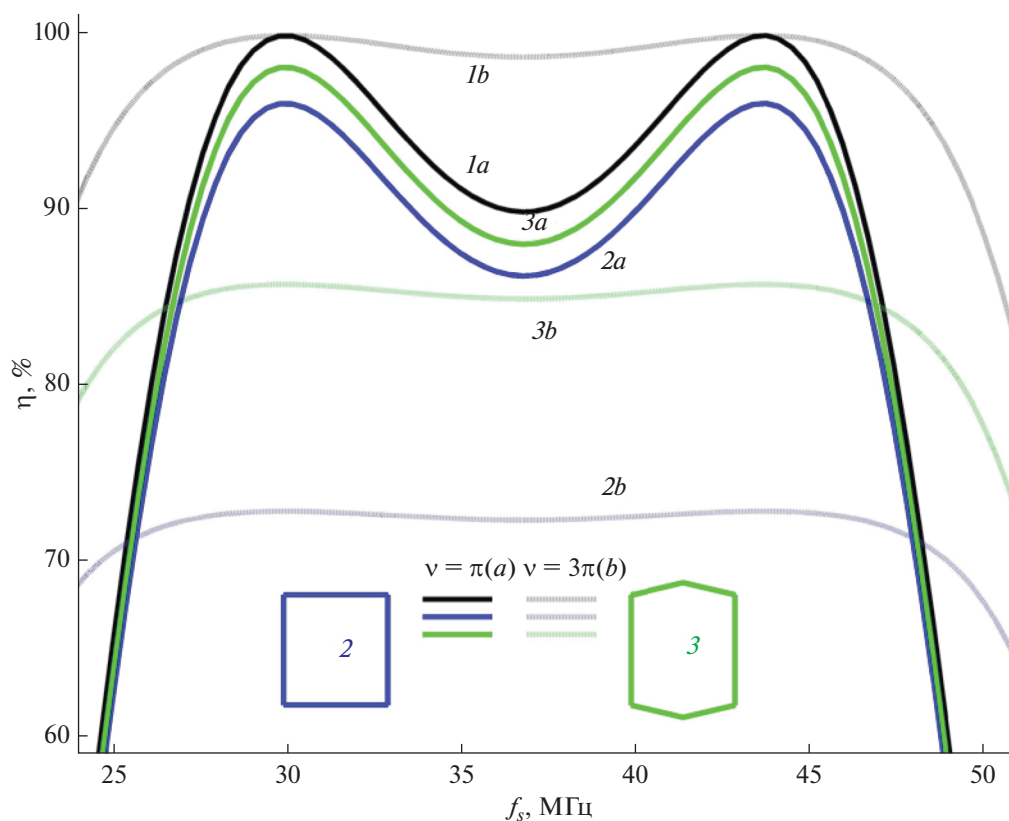


Рис. 3. Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от параметра Рамана-Ната  $v$  при точном синхронизме. 1 – модель однородного поля, 2 – прямоугольный преобразователь, 3 – 6-угольный преобразователь ( $H = 6$  мм)



**Рис. 4.** Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от частоты звука  $f_s$  при значении параметра Рамана–Ната (а) –  $v \cong \pi$ , (б) –  $3\pi$ . 1 – модель однородного поля, 2 – прямоугольный преобразователь, 3 – 6-угольный преобразователь ( $H = 6$  мм).

поля. Хотя обычно используется диапазон этой зависимости до значения  $v \cong \pi$  (первый максимум), ряд идей требуют режима перемодуляции, вплоть до второго максимума ( $v \cong 3\pi$ ). Например, так можно расширить угловой диапазон АО дефлектора [35], несмотря на существенное увеличение потребляемой мощности. Переход к 6-угольному преобразователю (линия 3) приближает (за счет гомогенизации акустического поля) зависимость  $\eta(v)$  к кривой, полученной в модели однородного поля. Расчет показывает, что это сближение улучшается с увеличением ширины  $H$  в центре 6-угольного преобразователя.

Следующий рис. 4 показывает зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от частоты звука  $f_s$ . Характерная форма с провалом в центре обусловлена геометрией взаимодействия, когда точный синхронизм достигается при двух частотах.

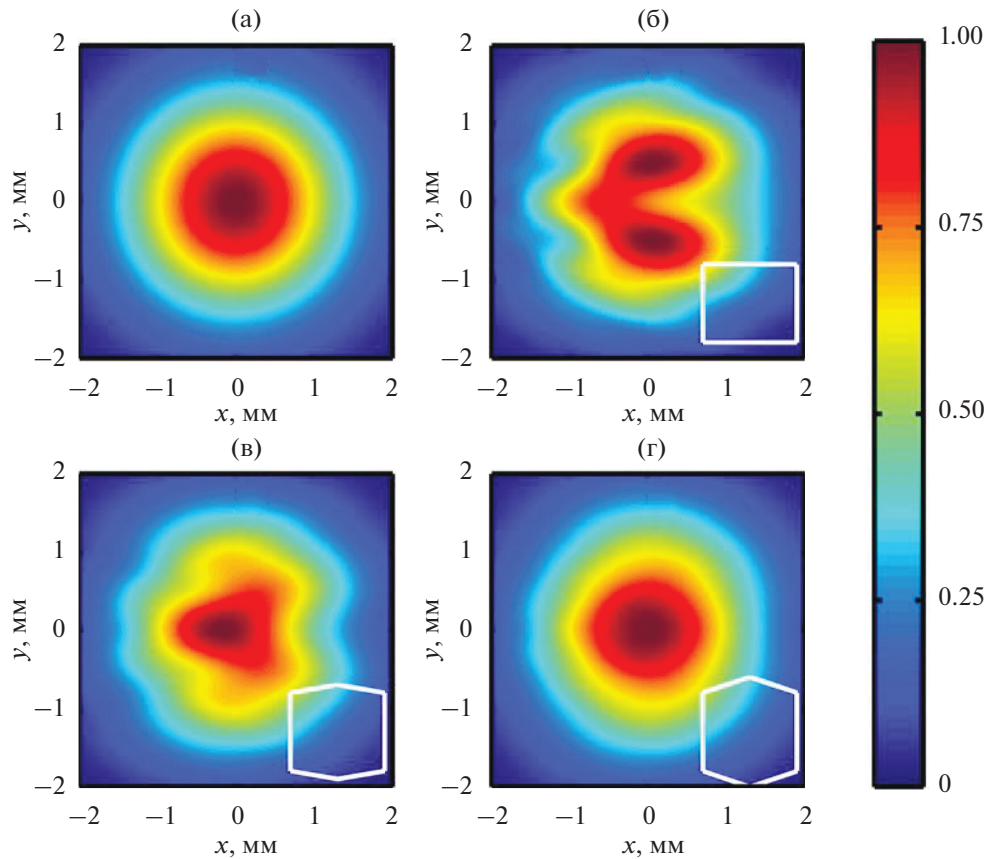
Видно, что переход от прямоугольного к 6-угольному преобразователю увеличивает эффективность дифракции и приближает ее к зависимости в условиях однородного поля. Особенно это заметно в режиме перемодуляции (линии 1b, 2b, 3b на рис. 4), который требует на порядок больше акустической мощности, но характеризуется расширенным диапазоном сканирования и

более равномерной перестроечной кривой. Расчет показывает, что аналогично зависимости  $\eta(v)$  увеличение ширины  $H$  в центре 6-угольного преобразователя улучшает перестроечную характеристику  $\eta(f_s)$ .

Еще один важный момент связан с поперечным распределением интенсивности  $I(x, y)$  по апертуре падающего и дифрагированного световых пучков. Это существенно при использовании АО технологий в системах лазерной гравировки и маркировки [36–38]. Пусть падающий пучок имеет гауссово распределение (см. рис. 5a).

Отдельные парциальные лучи, составляющие пучок, вдоль своего пути проходят акустическое поле с различной структурой. Поэтому распределение оптической мощности по апертуре дифрагированного пучка будет искажено. Этот эффект существенно зависит от положения рабочей точки на графике  $\eta(v)$  (см. рис. 3). Для максимумов зависимости, при  $v \cong \pi$  и  $3\pi$ , результат АО дифракции практически не зависит от вариаций управляющего напряжения и искажения минимальны. Наоборот, в рабочих точках с наибольшей крутизной зависимости  $\eta(v)$  искажения будут самыми заметными.





**Рис. 5.** Поперечный профиль интенсивности  $I(x, y)$  светового пучка. (а) – Падающий свет, (б, в, г) – дифрагированный при эффективности  $\eta = 80\%$ . Форма преобразователя: (б) – прямоугольный, (в) – 6-угольный  $H = 6$  мм, (г) –  $H = 7$  мм.

Так как при перестройке частоты эффективность дифракции  $\eta(f_s)$  меняется (рис. 4), также непрерывно будет меняться поперечная структура  $I(x, y)$  дифрагированного пучка, приближаясь к структуре падающего пучка в двух точках максимальной эффективности. Дополнительным фактором является зависимость акустического поля от частоты звука. Увеличение частоты уменьшает дифракционное расплывание, поэтому наибольшие искажения возникают на низкочастотном крае диапазона пропускания. Интересно, что использование режима перемодуляции, из-за слабой зависимости  $\eta(f_s)$ , должно уменьшать рассмотренные искажения. Рис. 5 иллюстрирует тот факт, что переход от прямоугольного к 6-угольному преобразователю сближает поперечную структуру дифрагированного и падающего света.

Независимо от формы преобразователя (при сохранении апертуры и длины взаимодействия), для достижения заданного уровня эффективности дифракции необходимо сохранить плотность акустической мощности. Из-за разницы площадей преобразователей ( $L(H + h)/2 > Lh$ ) рассмотренной формы, улучшение характеристик АО

взаимодействия требует увеличения потребляемой мощности.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчетным путем получены следующие результаты.

1. Из-за высокой акустической анизотропии парателлурита ( $\alpha\text{-TeO}_2$ ), при использовании неаксиальной геометрии и типичных по размеру преобразователей акустическое поле в пределах области АО взаимодействия существенно неоднородно. Результат АО дифракции зависит от формы преобразователя и отличается от дифракции на однородном акустическом пучке цилиндрической формы.

2. Использование профилированного по ширине преобразователя вместо прямоугольного при той же входной оптической апертуре и длине взаимодействия уменьшает характерный масштаб акустических неоднородностей по ходу светового пучка. В результате характеристики АО взаимодействия приближаются к модели однородного акустического поля: увеличивается максимальная эффективность дифракции (особенно



в режиме перемодуляции), уменьшаются искажения поперечного профиля дифрагированного излучения.

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

Авторы благодарят Благотворительный Фонд Андрея Мельниченко (The Andrey Melnichenko Foundation) за помощь в проведении данного исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Магдич Л.Н., Молчанов В.Я.* Акустооптические устройства и их применение. М.: Сов. радио, 1978.
2. *Балакиев В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е.* Физические основы акустооптики. М.: Радио и связь, 1985.
3. *Корпел А.* Акустооптика. М.: Мир, 1993.
4. *Xu J., Stroud R.* Acousto-optic devices. N.Y.: Wiley, 1992.
5. *Задорин А.С.* Динамика акустооптического взаимодействия. Томск: Томский гос. ун-т, 2004.
6. *Молчанов В.Я., Китаев Ю.И., Колесников А.И., Нарвер В.Н., Розентейн А.З., Солодовников Н.П., Шаповаленко К.Г.* Теория и практика современной акустооптики. М.: МИСиС, 2015.
7. Design and fabrication of acousto-optic devices / Ed. *Goutzoulis A.P., Pape D.R.* N.Y.: Marcel Dekker, 1988.
8. *Bademian L.* Parallel-channel acousto-optic modulation // *Optical Engineering*. 1986. V. 25. № 2. P. 303–308.
9. *Волошинов В.Б., Князев Г.А.* Акустооптические ячейки с неодинаковой длиной взаимодействия в поперечном сечении светового луча // *Журн. техн. физ.* 2003. Т. 73. № 11. С. 118–122.
10. *Kharusi M.S., Farnell G.W.* Plane ultrasonic transducer diffraction fields in highly anisotropic crystals // *J. Acoust. Soc. Am.* 1970. V. 48. № 3B. P. 665–670. <https://doi.org/10.1121/1.1912187>
11. *Хаткевич А.Г.* Дифракция и распространение пучков ультразвукового излучения в монокристаллах // *Акуст. журн.* 1978. Т. 24. № 1. С. 108–115.
12. *Naumenko N.F., Chizhikov S.I., Molchanov V.Ya., Yushkov K.B.* Anisotropic diffraction of bulk acoustic wave beams in lithium niobate // *Ultrasonics*. 2015. V. 63. P. 126–129. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.06.019>
13. *Антонов С.Н., Кузнецова Е.В., Миргородский В.И., Проклов В.В.* Акустооптические исследования распространения медленной акустической волны в  $\text{TeO}_2$  // *Акуст. журн.* 1982. Т. 28. № 4. С. 433–437.
14. *Белый В.Н., Казак Н.С., Павленко В.К., Катранжи Е.Г., Курилкина С.Н.* Особенности распространения пучков квазипоперечных упругих волн в кристалле парателлурита // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 2. С. 156–161.
15. *Belyi V.N., Kazak N.S., Pavlenko V.K., Katranji E.G., Kurilkina S.N.* Propagation of ultrasonic beams in paratellurite crystal // *Ultrasonics*. 1999. V. 37. № 5. P. 377–383. [https://doi.org/10.1016/S0041-624X\(99\)00013-X](https://doi.org/10.1016/S0041-624X(99)00013-X)
16. *Балакиев В.И., Манцевич С.Н.* Распространение акустических пучков в кристалле парателлурита // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 5. С. 600–609.
17. *Declercq N.F., Polikarpova N.V., Voloshinov V.B., Leroy O., Degrieck J.* Enhanced anisotropy in Paratellurite for inhomogeneous waves and its possible importance in the future development of acousto-optic devices // *Ultrasonics*. 2006. V. 44. Supplement. P. e833–e837. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2006.05.113>
18. *Антонов С.Н., Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г.* Новый акустооптический эффект – брэгговская дифракция без перемодуляции // *Журн. техн. физ.* 2009. Т. 79. № 6. С. 119–123.
19. *Антонов С.Н., Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г.* Влияние пространственной структуры звукового поля на брэгговскую акустооптическую дифракцию в условиях сильной акустической анизотропии // *Журн. техн. физ.* 2010. Т. 80. № 3. С. 97–106.
20. *Антонов С.Н., Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г.* Модификация параболического приближения теории дифракции ультразвукового пучка в сильноанизотропном кристалле // *Журн. техн. физ.* 2013. Т. 83. № 12. С. 11–16.
21. *Mantsevich S.N., Molchanov V.Ya., Yushkov K.B., Khorokin V.S., Kupreychik M.I.* Acoustic field structure simulation in quasi-collinear acousto-optic cells with ultrasound beam reflection // *Ultrasonics*. 2017. V. 78. P. 175–184. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.03.018>
22. *Вайнер А.В., Проклов В.В., Резвов Ю.Г., Сивкова О.Д.* Теория акустооптической фильтрации светового пучка в неоднородном акустическом поле // *Радиотехника и электроника*. 2017. Т. 62. № 10. С. 997–1009. <https://doi.org/10.7868/S0033849417100187>
23. *Mantsevich S.N., Balakshy V.I., Molchanov V.Ya., Yushkov K.B.* Influence of paratellurite anisotropy at the characteristics of acousto-optic interaction // *Physics Procedia*. 2015. V. 70. P. 725–728. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.08.111>
24. *Yano T., Kawabuchi M., Fukumoto A., Watanabe A.*  $\text{TeO}_2$  anisotropic Bragg light deflector without mid-band degeneracy // *Applied Physics Letters*. 1975. V. 26. № 12. P. 689–691. <https://doi.org/10.1063/1.88037>
25. *Romer G.R.B.E., Bechtold P.* Electro-optic and Acousto-optic Laser Beam Scanners // *Physics Procedia*. 2014. V. 56. P. 29–39. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2014.08.092>
26. *Kirkby P.A., Nadella K.M.N.S., Silver R.A.* A compact acousto-optic lens for 2D and 3D femtosecond based 2-photon microscopy // *Optics express*. 2010. V. 18. № 13. P. 13720–13744. <https://doi.org/10.1364/OE.18.013720>
27. *Антонов С.Н., Резвов Ю.Г.* Акустооптические устройства на основе многолучевой дифракции // *Приборы и техника эксперимента*. 2020. № 6. С. 46–52. <https://doi.org/10.31857/S0032816220050262>

28. Антонов С.Н. Широкоугольный поляризационно-независимый акустооптический модулятор лазерного излучения на основе парателлурита // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 8–15.  
<https://doi.org/10.31857/S0320791919050046>
29. Антонов С.Н. Акустооптический дефлектор с отводом тепла от пьезопреобразователя при акустической изоляции теплоотвода // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 588–595.  
<https://doi.org/10.1134/S0320791919050034>
30. Антонов С.Н. Акустооптические дефлекторы на кристалле парателлурита. Методы увеличения эффективности и расширения угла сканирования // Приборы и техника эксперимента. 2019. № 3. С. 89–95.  
<https://doi.org/10.1134/S0032816219020174>
31. Молчанов В.Я., Волошинов В.Б., Макаров О.Ю. Квазиколлинеарные перестраиваемые акустооптические фильтры на основе кристалла парателлурита для систем спектрального уплотнения и селекции каналов // Квантовая электроника. 2009. Т. 39. № 4. С. 353–360.  
<http://mi.mathnet.ru/rus/qe/v39/i4/p353>
32. Котов В.М. Акустооптическая брэгговская дифракция в парателлурите на боковых лепестках пространственного спектра излучения акустического преобразователя // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 5. С. 525–530.  
<https://doi.org/10.7868/S0320791916040109>
33. Антонов С.Н., Резвов Ю.Г. Акустооптический поляризационно-нечувствительный двухкоординатный дефлектор // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 2. С. 138–144.  
<https://doi.org/10.31857/s0320791921020015>
34. Манцевич С.Н., Балакший В.И. Акустооптическое взаимодействие в неоднородном акустическом поле // Оптика и спектроскопия. 2015. Т. 118. № 4. С. 646–652.  
<https://doi.org/10.7868/S0030403415040157>
35. Антонов С.Н. Акустооптический дефлектор – новый метод повышения эффективности и широкополосности // Журн. техн. физ. 2016. Т. 86. № 10. С. 155–158.
36. Kannatey-Asibu E. Principles of Laser Materials Processing. Hoboken: Wiley, 2009.
37. Steen W.M., Mazumder J. Laser Material Processing. N.Y.: Springer, 2010.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-84996-062-5>
38. Гладуш Г.Г., Смуров И.Ю. Физические основы лазерной обработки материалов. М.: Физматлит, 2017.

УДК 534.21,534.25

## СВОЙСТВА ОБЪЕМНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ДЛЯ ДВУХ МОДИФИКАЦИЙ МОНОКРИСТАЛЛА ТЕЛЛУРА

© 2022 г. В. С. Хоркин<sup>а</sup> \*, Н. В. Поликарпова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: vs\_khorkin@mail.ru

Поступила в редакцию 09.11.2021 г.

После доработки 11.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Представлены результаты теоретического анализа акустических свойств монокристалла теллура. Проведен подробный расчет акустических свойств теллура для двух его модификаций, отличающихся друг от друга лишь знаком упругого коэффициента  $c_{14}$ , известных как “левая” и “правая” модификации. В работе описано влияние знаков упругой константы  $c_{14}$  на акустические свойства теллура для кристаллографических плоскостей  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$ .

*Ключевые слова:* физическая акустика, акустооптика, кристалл теллура, поверхности обратных скоростей, акустическая медленность

DOI: 10.31857/S0320791922030054

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание в науке и технике уделяется вопросам поиска новых и эффективных материалов, обладающих заданными свойствами, определяемыми конкретной задачей. Так, для управления оптическим излучением видимого и ближнего инфракрасного (ИК) диапазонов достаточно активно используется явление акустооптической (АО) дифракции [1, 2]. В АО приборах для указанного диапазона длин волн широкое применение находит кристалл парателлуриита ( $\text{TeO}_2$ ) [1–5]. Парателлуриит непрозрачен на длинах волн свыше  $\lambda = 5$  мкм, поэтому не может работать в среднем и длинноволновом ИК диапазонах [4–7]. Таким образом, становится актуальной задача поиска нового акустооптического материала, эффективного для длин волн  $\lambda > 5$  мкм. На данный момент в литературе рассматривается достаточно много соединений, которые могут быть использованы в указанных диапазонах длин волн [8]. Среди них такие аморфные вещества как стекла на основе германия, селена, кремния и теллура [9–11], кубический кристалл германия [10, 12, 13], а также кристаллы галогенидов таллия – KRS-5 [14–16] и KRS-6 [14]. В последнее время активно исследуются соединения на основе ртути – каломель ( $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$ ) и бромид ( $\text{Hg}_2\text{Br}_2$ ) ртути [17, 18].

Данная работа посвящена исследованию акустических свойств монокристалла теллура и является продолжением цикла исследований указанного материала [19–21]. Представлены результа-

ты теоретического анализа акустических свойств двух модификаций теллура [19, 20]. Проведен расчет фазовых скоростей ультразвука и связанных с ними поверхностей акустических медленностей, а также направлений векторов поляризации акустических волн для двух модификаций теллура. Расчет проведен для главных кристаллографических плоскостей  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  теллура. Также в работе представлены свойства акустических волн, которые распространяются вдоль осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  кристалла.

### 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОНОКРИСТАЛЛА ТЕЛЛУРА

Известно, что кристалл теллура относится к классу 32 тригональной сингонии и обладает широким диапазоном оптической прозрачности:  $\lambda = 5–20$  мкм [6–8, 19–24]. Кроме того, теллур обладает достаточно большой величиной плотности:  $\rho = 6250$  кг/м<sup>3</sup>. Матрица упругих коэффициентов материалов, принадлежащих к данному классу симметрии, имеет следующий вид [6, 7, 23–26]:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ .

Из общего вида матрицы упругих констант следует, что только 6 упругих коэффициентов являются независимыми. Однако в литературе нет точных значений указанных модулей упругости  $c_{\alpha\beta}$  теллура [19–21]. Более того, часто в работах не указано, учитывается ли влияние пьезоэлектрического эффекта на значения упругих коэффициентов или это влияние требует отдельного рассмотрения [22]. В данной работе в качестве исходных данных для расчетов были использованы следующие усредненные значения упругих коэффициентов  $c_{\alpha\beta}$  [20]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3.76 \times 10^{10} \text{ Па}, & c_{13} &= 2.88 \times 10^{10} \text{ Па}, \\ c_{33} &= 7.85 \times 10^{10} \text{ Па}, & c_{12} &= 0.94 \times 10^{10} \text{ Па}, \\ c_{14} &= +1.43 \times 10^{10} \text{ Па}, & c_{44} &= 3.55 \times 10^{10} \text{ Па}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как уже было отмечено выше, для кристалла теллура существуют две модификации, которые в литературе принято называть “левый” и “правый” теллур [19, 20]. Данный способ классификации будет использоваться и в настоящей работе, а его название наиболее вероятно связано с общими видами поверхностей акустических медленностей в плоскости  $YZ$  кристалла теллура. Необходимо отметить, что акустические свойства двух модификаций теллура описываются одинаковыми абсолютными значениями упругих модулей  $c_{\alpha\beta}$ . Отличие заключается лишь в знаке упругого коэффициента  $c_{14}$ : положительный ( $c_{14} > 0$ ) для “левой” модификации и отрицательный ( $c_{14} < 0$ ) для “правой” модификации теллура [19, 20].

Необходимо отметить, что кристалл теллура обладает большими абсолютными значениями показателей преломления для обыкновенно ( $n_o = 4.8$ ) и необыкновенно ( $n_e = 6.25$ ) поляризованных оптических мод, а также большой величиной относительного двулучепреломления  $\Delta n = n_e - n_o = 1.45$ ,  $\Delta n/n_o = 0.3$  [23, 24]. Такие оптические свойства с учетом достаточно большого диапазона оптической прозрачности делают данный материал перспективным для использования в акустооптике среднего, длинноволнового и дальнего ИК диапазонов [19–21]. На основе кристалла теллура уже созданы первые лабораторные прототипы АО устройств, которые эффективно управляют излучением длинноволнового ИК диапазона [20]. Это доказывает перспективность и актуальность исследования данного материала с целью более подробного описания его фундаментальных свойств.

### 3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА АКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Расчет акустических свойств проведен в приближении плоских монохроматических волн. Ве-

личины фазовых скоростей, а также направления векторов поляризации ультразвуковых волн определяются из уравнения Кристоффеля [25, 26]:

$$(\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il})q_l = 0, \quad \Gamma_{il} = c_{ijkl}n_j n_k, \quad (3)$$

где  $\Gamma_{il}$  – тензор Кристоффеля,  $\rho$  – плотность материала,  $V$  – фазовая скорость звука,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор направления распространения волны,  $\mathbf{q}$  – единичный вектор поляризации акустической волны. В качестве исходных данных использовались величины коэффициентов тензора упругости  $c_{\alpha\beta}$  теллура, численные значения которых были приведены выше (1)–(2) [20].

В предыдущем разделе отмечено, что в кристалле теллура присутствует и собственный пьезоэлектрический эффект [22]. Однако из литературы известно, что пьезоэлектрический эффект оказывает достаточно слабое влияние на акустические свойства кристалла теллура [22]. Поэтому в данной работе для простоты и наглядности полученные результаты представлены для двух модификаций теллура без учета его собственного пьезоэлектрического эффекта.

### 4. АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУХ МОДИФИКАЦИЙ ТЕЛЛУРА

В ходе расчетов акустических свойств получены сечения поверхностей обратных скоростей для кристаллографических плоскостей  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  теллура, а также зависимости компонент векторов поляризации для каждой из трех акустических мод, которые распространяются в указанных плоскостях кристалла.

Как было отмечено выше, существуют две модификации кристалла теллура, которые в литературе называются “левый” и “правый” теллур в соответствии с видом сечений поверхностей обратных скоростей в плоскости  $YZ$  кристалла теллура [19, 20]. Рассматриваемые сечения поверхностей медленностей представлены на рис. 1а для случая “левой” модификации ( $c_{14} > 0$ ) и на рис. 1б для случая “правой” модификации ( $c_{14} < 0$ ) кристалла теллура.

Здесь и далее будет использована общая схема представления результатов, которая относится к рис. 1–4 данной статьи, – слева представлены зависимости для “левой” модификации теллура ( $c_{14} > 0$ ), а справа – для “правой” модификации теллура ( $c_{14} < 0$ ). Цветом на графиках обозначены разные типы акустических волн – продольные и сдвиговые акустические волны. Однако необходимо отметить, что в работе приводятся типы акустических волн в теллуре только для конкретных направлений распространения акустических мод. Общее название типов акустических мод для всей рассматриваемой плоскости неприменимо. Это связано с тем, что одна и та же акустическая мода

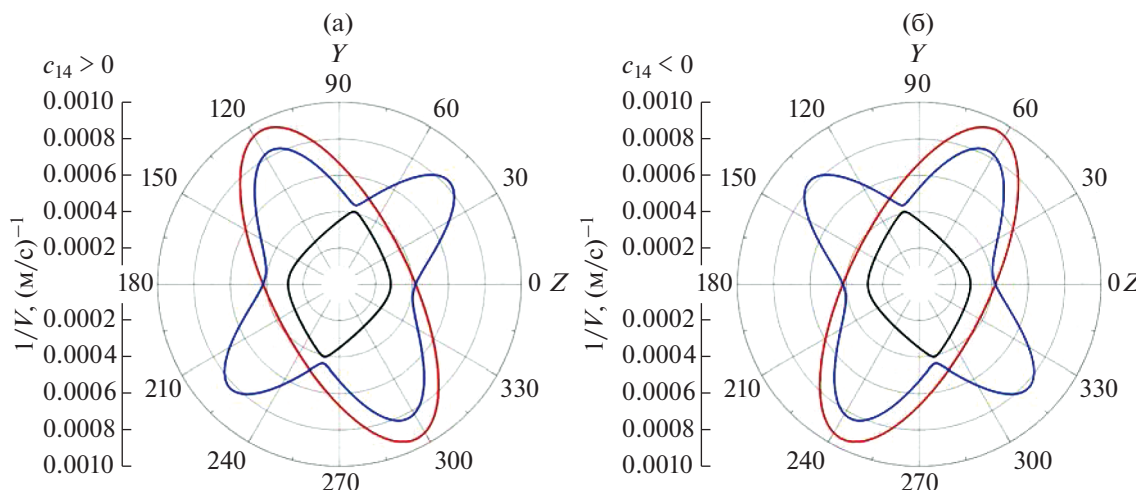


Рис. 1. Сечения поверхностей обратных скоростей в плоскости  $YZ$  в случае: (а) – “левой” модификации теллура, (б) – “правой” модификации теллура.

в одной и той же плоскости, но в разных направлениях может быть как продольной, так и сдвиговой [22].

Результаты расчета наглядно демонстрируют происхождение используемых в литературе названий для модификаций теллура: сечения поверхностей обратных скоростей в плоскости  $YZ$  являются зеркальным отражением друг друга относительно оси  $Y$ . В случае “левой” модификации, сечения поверхностей акустических медленностей повернуты влево, а в случае “правой” модификации – вправо. Этот факт был известен в литературе, как и то, что при рассмотрении других кристаллографических плоскостей теллура ( $XU$  и  $XZ$ ) общий вид поверхностей акустических медленностей не меняется при смене знака упругого коэффициента  $c_{14}$  [19, 20, 25, 26]. Это означает, что знак рассматриваемой упругой константы  $c_{14}$  не оказывает влияния на величины фазовых скоростей акустических волн, распространяющихся в плоскостях  $XU$  и  $XZ$  теллура.

В настоящей работе при более детальном теоретическом рассмотрении акустических свойств установлено, что изменяются направления векторов поляризаций собственных акустических мод. Для иллюстрации этого факта на рис. 2а–2г, 3а–3г и 4а–4г представлены результаты расчетов акустических свойств для двух модификаций кристалла теллура в плоскостях  $XU$ ,  $XZ$  и  $YZ$ , соответственно.

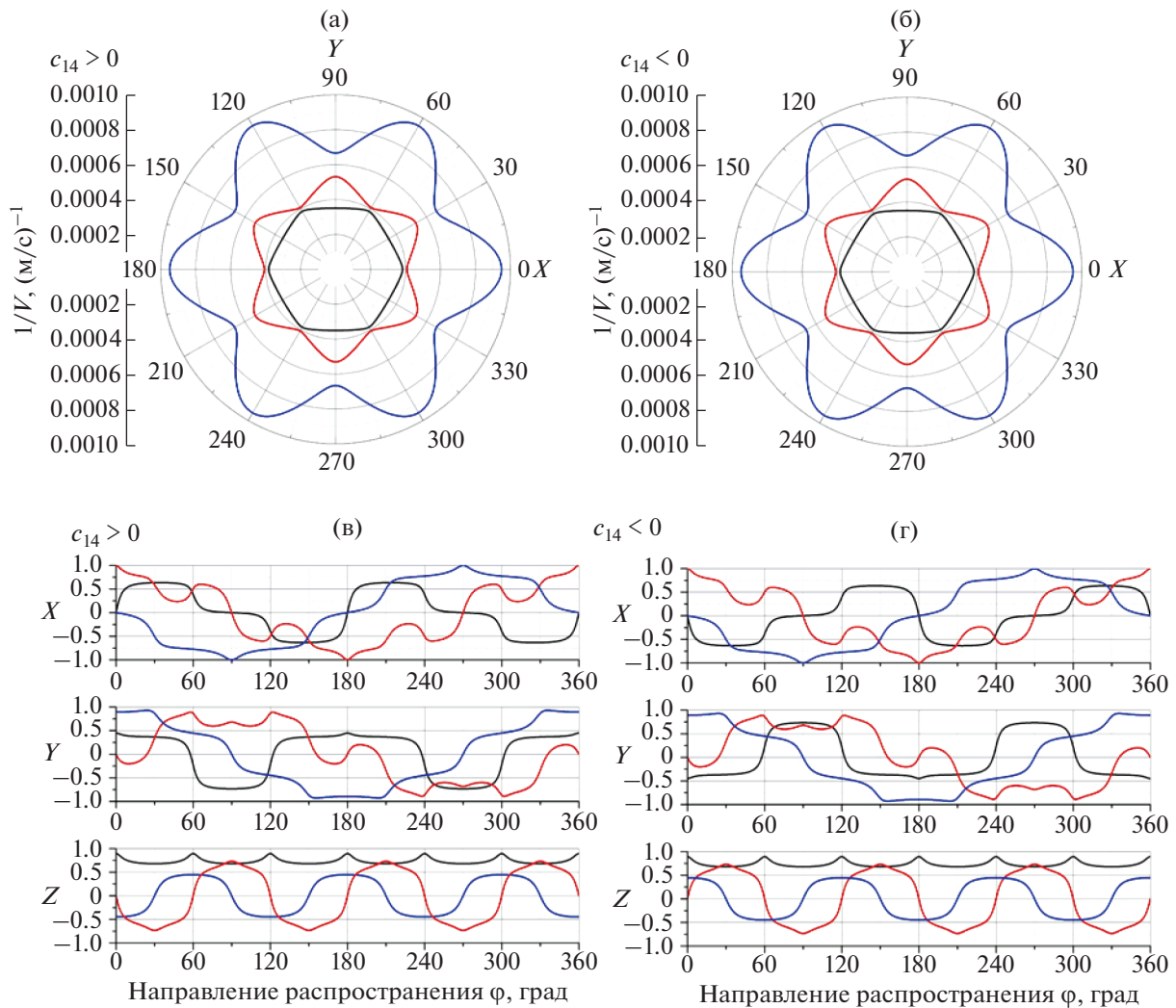
Как следует из представленных зависимостей на рис. 2а–2г, знак упругой константы  $c_{14}$  не влияет на вид поверхностей акустической медленности [19, 20, 25, 26]. Однако на рис. 2в–2г приведены графики проекций векторов поляризаций на оси кристаллографической системы координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в зависимости от направления распростра-

нения ультразвуковых волн в рассматриваемой плоскости. Из рис. 2в–2г следует, что при смене знака константы  $c_{14}$  направление векторов поляризации изменяется для всех трех акустических мод в плоскости  $XU$ . Например, для быстрой акустической моды в плоскости  $XU$  (кривая черного цвета на рис. 2а–2г) видно, что  $z$ -компонента вектора поляризации не зависит от типа модификации теллура, в то время как  $x$ - и  $y$ -компоненты меняют знак на противоположный. При этом для медленной акустической моды в плоскости  $XU$  (синяя кривая на рис. 2а–2г)  $x$ -компонента и  $y$ -компонента вектора поляризации неизменны, а  $z$ -компонента меняет знак.

Аналогично предыдущим графикам для плоскости  $XU$ , на рис. 3а–3г и 4а–4г представлены сечения поверхностей медленностей плоскостями  $XZ$  и  $YZ$ , соответственно, а также зависимости компонент векторов поляризации от направлений распространения ультразвуковых волн для указанных плоскостей.

Как следует из рис. 3а–3б, величины фазовых скоростей акустических волн в плоскости  $XZ$  также остаются неизменными при изменении модификации теллура. Однако, как и в плоскости  $XU$  теллура (рис. 2а–2г), изменяются поляризации акустических волн для всех трех акустических мод, что отражено на рис. 3в–3г.

Кроме того, из зависимостей компонент векторов поляризаций акустических волн от направления распространения в плоскости  $XZ$  теллура видно, что рассматриваемые зависимости не являются периодическими с периодом  $360^\circ$ . Например, на рис. 3а–3г синим и красным цветом обозначены акустические моды, величины  $x$ - и  $y$ -компонентов поляризаций которых для направлений  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 360^\circ$  в плоскости  $XZ$  отли-



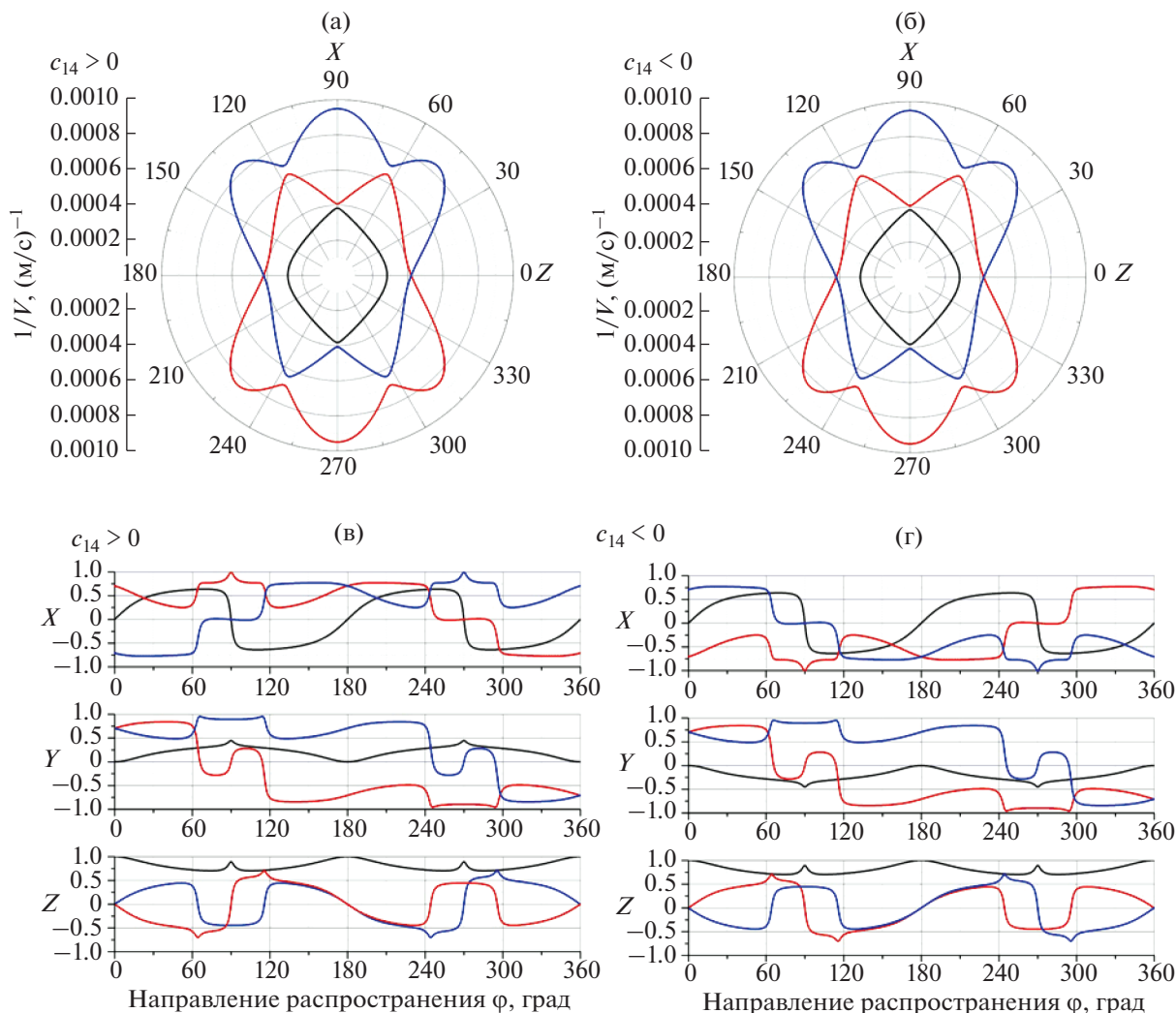
**Рис. 2.** Акустические свойства двух модификаций теллура в плоскости  $XY$ : (а) и (б) – поверхности обратных скоростей, (в) и (г) – зависимость компонент векторов поляризаций от направления распространения волны.

чаются знаком и не равны вдоль указанного направления (рис. 3в–3г). Наиболее вероятно, что полученное различие акустических свойств вдоль одного и того же направления (ось  $Z$  кристалла теллура) связано с выбранной моделью по расчету акустических свойств. При всех расчетах считалось, что решение ищется в приближении плоских линейно поляризованных монохроматических акустических волн [25, 26]. Однако из литературы известно, что вдоль оси  $Z$  кристалла теллура наблюдается не только оптическая [20, 21], но и акустическая активность [27, 28]. Учет акустической активности приводит к расщеплению поверхностей акустических медленностей для сдвиговых волн, распространяющихся вблизи оси  $Z$  (красная и синяя кривые), убирая тем самым их пересечение на рис. 3а–3б, что эквивалентно исчезновению акустической оси в плоскости  $XZ$

кристалла теллура [27]. Указанное явление в работе подробно не рассматривалось. Однако, исходя из рассмотрения в приближении линейно поляризованных акустических волн, из рис. 3в–3г следует, что изменение знака упругого коэффициента  $c_{14}$  также влечет за собой изменение поляризации для всех акустических волн в плоскости  $XZ$  теллура.

Аналогичные графики в плоскости  $YZ$  теллура представлены на рис. 4а–4г. Из представленных зависимостей видно, что не только ориентация векторов поляризаций упругих волн меняется при изменении знака упругого коэффициента  $c_{14}$ , но также изменяются и величины фазовых скоростей [22]. В ходе расчетов было установлено, что красная кривая на рис. 4а–4г всегда поляризована вдоль оси  $X$ , т.е. ортогонально рассматриваемой плоскости  $YZ$ . Эта акустическая мода является чистой сдвиговой для всей плоскости  $YZ$  и на-





**Рис. 3.** Акустические свойства разных модификаций теллура в плоскости  $XZ$ : (а) и (б) – поверхности обратных скоростей, (в) и (г) – зависимость компонент векторов поляризаций от направления распространения волны.

правление ее вектора поляризации не зависит от упругого коэффициента  $c_{14}$ . Две другие акустические моды в плоскости  $YZ$ , изображенные на рис. 4а–4г черным и синим цветом, поляризованы в плоскости  $YZ$  теллура, поэтому для них  $x$ -компонента вектора поляризации равна нулю во всех направлениях рассматриваемой плоскости.

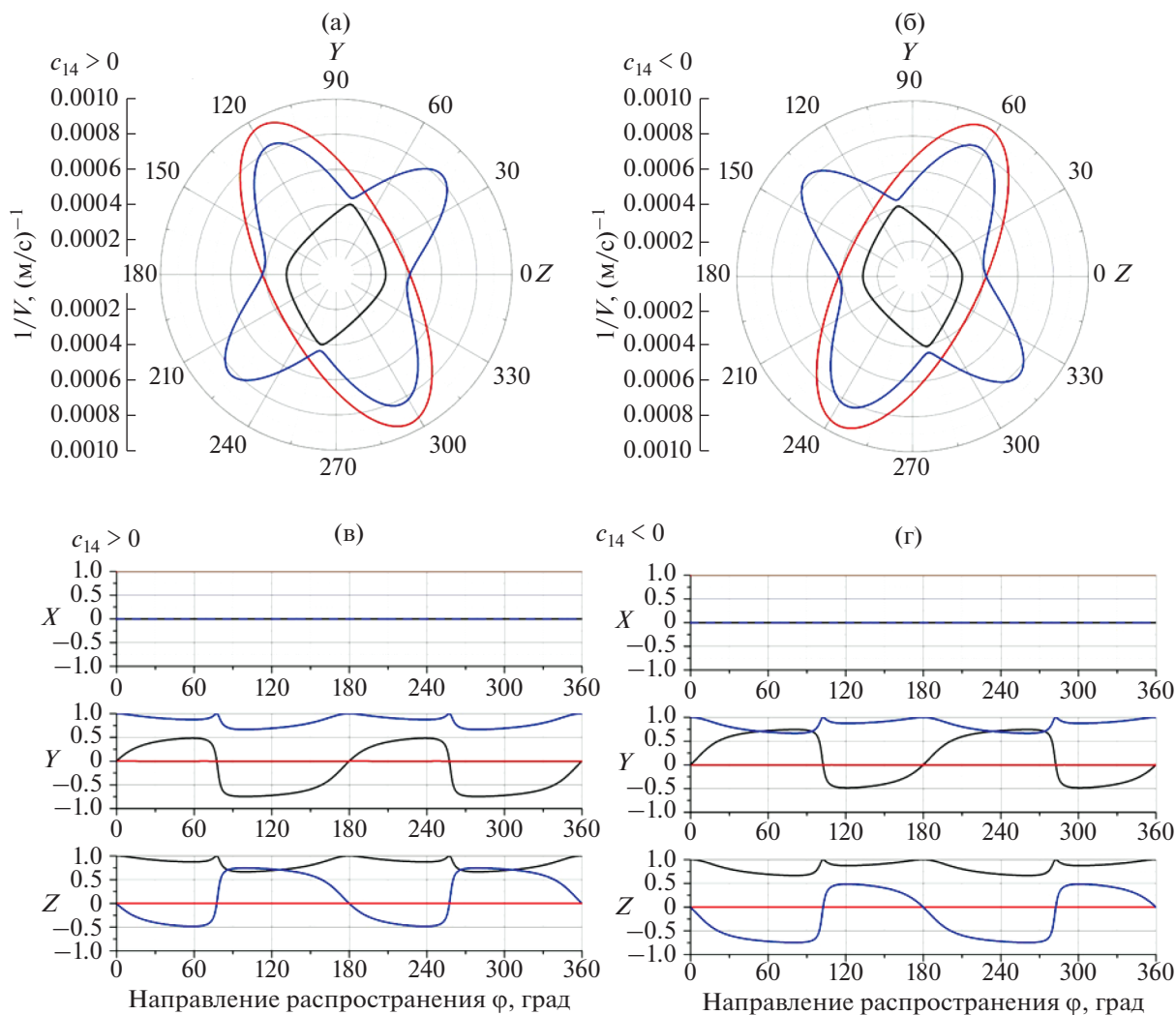
Можно показать, что все полученные результаты определяются структурой тензора Кристоффеля  $\Gamma_{il}$  в рассматриваемых плоскостях [25, 26], которые в свою очередь задаются симметрией материала. В частности, для плоскости  $YZ$  (рис. 4а–4г), исходя из выражения (3), можно получить следующее явное выражение для компонент тензора Кристоффеля [25, 26]:

$$\Gamma_{il} = \begin{pmatrix} c_{66}n_y^2 + c_{44}n_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}n_y^2 + c_{44}n_z^2 - 2c_{14}n_y n_z & -c_{14}n_y^2 + n_y n_z (c_{13} - c_{44}) \\ 0 & -c_{14}n_y^2 + n_y n_z (c_{13} - c_{44}) & c_{44}n_y^2 + c_{33}n_z^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Как следует из выражения (4), только компонента  $\Gamma_{11}$  определяет величину скорости и на-

правление вектора поляризации чистой сдвиговой акустической моды в плоскости  $YZ$  (красная





**Рис. 4.** Акустические свойства разных модификаций теллура в плоскости  $YZ$ : (а) и (б) – поверхности обратных скоростей, (в) и (г) – зависимость компонент векторов поляризации от направления распространения волны.

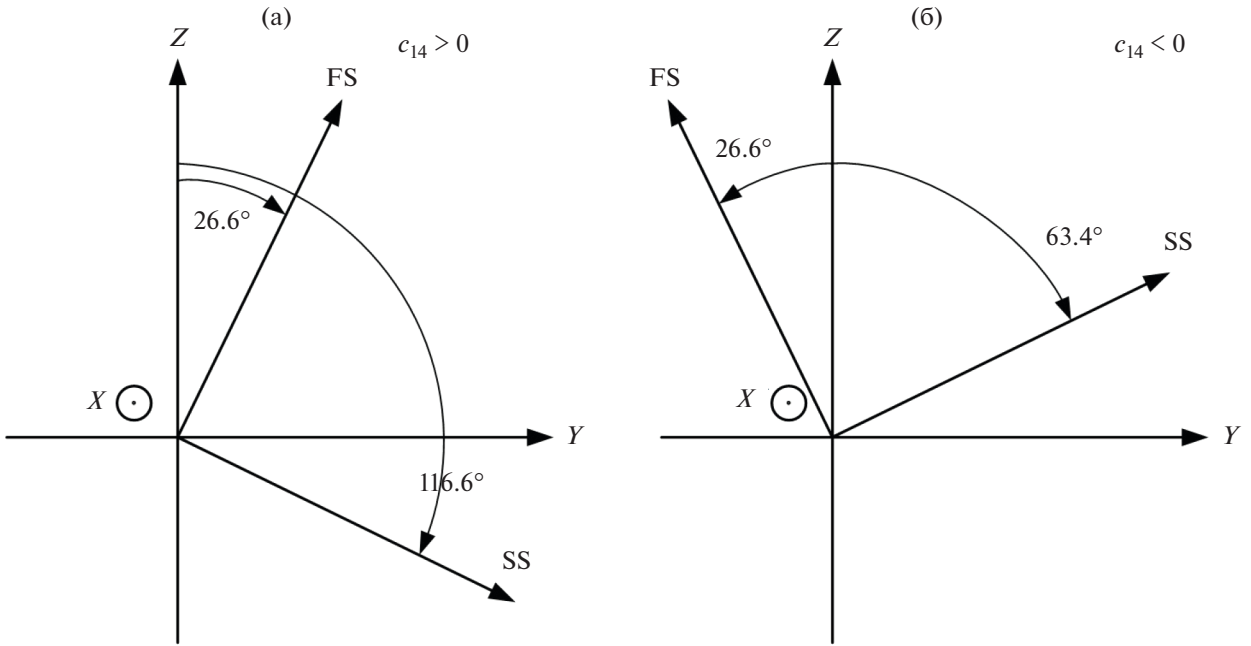
кривая на рис. 4а–4г). Ее численное значение  $\Gamma_{11} = c_{66}n_y^2 + c_{44}n_z^2$  не зависит от упругого коэффициента  $c_{14}$ , поэтому величина фазовой скорости и поляризация данной акустической волны не зависят от выбранной модификации теллура. Параметры остальных акустических волн (черная и синие кривые на рис. 4а–4г) определяются исходя из величин  $\Gamma_{22}$ ,  $\Gamma_{23} = \Gamma_{32}$  и  $\Gamma_{33}$ , которые зависят от значений и знаков упругих коэффициентов  $c_{22}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{13}$  и  $c_{14}$ , как следует из выражения (4).

### 5. АНАЛИЗ И ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для более наглядного анализа представленных выше результатов рассмотрим ориентацию векторов поляризации акустических волн, распространяющихся вдоль осей  $X$  и  $Y$  кристалла теллура.

Как было отмечено выше, вдоль оси  $X$  распространяются три чистые моды. Направления их векторов поляризации схематично представлены на рис. 5а–5б для двух модификаций теллура. Продольная волна исключена из рассмотрения, поскольку она всегда поляризована вдоль оси  $X$  и не меняет направления вектора поляризации при смене модификации теллура (рис. 2в–2г).

Из рис. 5а–5б следует, что при  $c_{14} > 0$  (“левая” модификация теллура) вектор поляризации для быстрой сдвиговой моды (FS), распространяющейся вдоль оси  $X$ , составляет угол  $26.6^\circ$  с осью  $Z$  и откладывается в сторону положительных значений оси  $Y$ . При  $c_{14} < 0$  (“правая” модификация теллура) вектор поляризации составляет угол  $26.6^\circ$  с осью  $Z$  и откладывается против часовой стрелки в сторону отрицательных значений оси  $Y$ .



**Рис. 5.** Направление векторов поляризации чистых сдвиговых акустических волн, распространяющихся вдоль оси *X*: (а) – для “левой” модификации и (б) – для “правой” модификации кристалла теллура.

Медленная сдвиговая мода (SS) поляризована под углом 116.6° относительно оси *Z* для  $c_{14} > 0$  (“левая” модификация теллура) и под углом 63.4° к оси *Z* для  $c_{14} < 0$  (“правая” модификация теллура). Данная особенность пове-

дения вектора поляризации акустических мод напрямую связана со знаком упругой константы  $c_{14}$ , что можно легко показать, используя компоненты тензора Кристоффеля  $\Gamma_{il}$  в плоскости *XY* [25, 26]:

$$\Gamma_{il} = \begin{pmatrix} c_{11}n_x^2 + c_{66}n_y^2 & c_{12}n_xn_y + c_{66}n_xn_y & 2c_{14}n_xn_y \\ c_{12}n_xn_y + c_{66}n_xn_y & c_{66}n_x^2 + c_{11}n_y^2 & c_{14}n_x^2 - c_{14}n_y^2 \\ 2c_{14}n_xn_y & c_{14}n_x^2 - c_{14}n_y^2 & c_{44}n_x^2 + c_{44}n_y^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \equiv \\ n_x=1 \\ n_y=n_z=0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & c_{14} \\ 0 & c_{14} & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Из выражения (5) в случае распространения акустических волн вдоль оси *X* кристалла теллура следует, что упругая константа  $c_{11}$  определяет величину фазовой скорости продольной акустической волны, равную  $v_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ , а также ориентацию вектора поляризации, направленного строго вдоль оси *X*. Скорости быстрой и медленной сдвиговых волн определяются величинами упругих констант  $c_{14}$ ,  $c_{44}$  и  $c_{66}$ , входящих в состав формул:

$$V_{FS} = \sqrt{\frac{c_{44} + c_{66} + \sqrt{(c_{44} - c_{66})^2 + 4c_{14}^2}}{2\rho}} \text{ и}$$

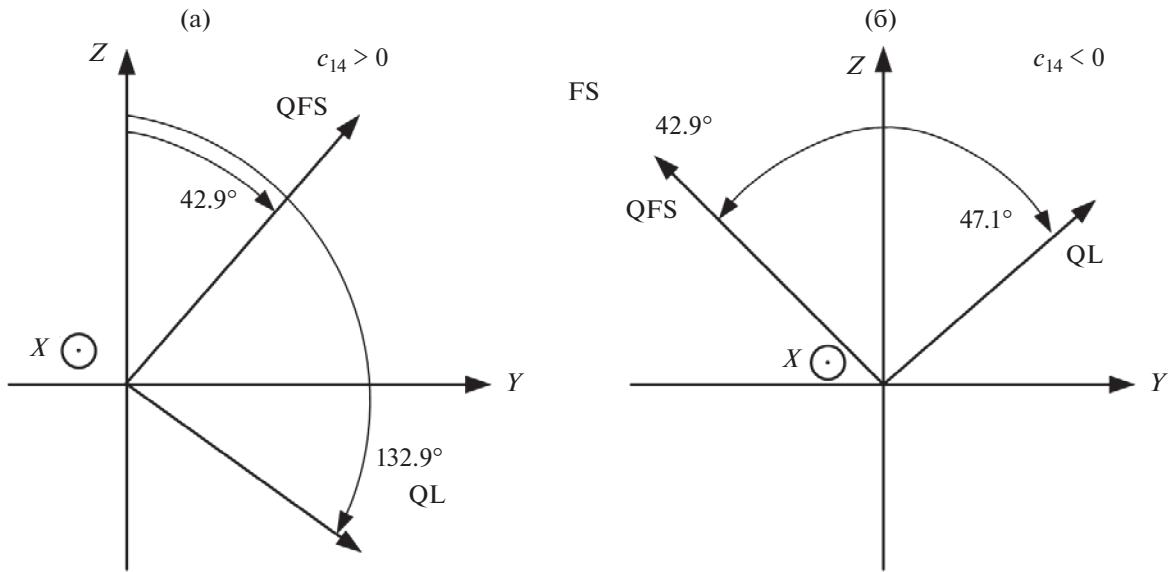
$$V_{SS} = \sqrt{\frac{c_{44} + c_{66} - \sqrt{(c_{44} - c_{66})^2 + 4c_{14}^2}}{2\rho}},$$

соответственно. Важно отметить, что в отличие от величины фазовой скорости на поляризацию

сдвиговых волн вдоль оси *X* влияют не только абсолютные значения, но и знак упругих модулей.

Аналогичные схемы построены и для направлений векторов поляризаций акустических волн, которые распространяются вдоль оси *Y* теллура. Ранее отмечалось, что в плоскости *YZ* распространяется чистая сдвиговая акустическая волна, всегда поляризованная вдоль оси *X*. Ее свойства не меняются при смене модификации теллура, поэтому данная акустическая волна исключена из рассмотрения. Направления векторов поляризации квазипродольной (QL) и быстрой квазисдвиговой (QFS) акустических волн схематично представлены на рис. 6а–6б для двух модификаций теллура.

Из полученных результатов следует, что при  $c_{14} > 0$  (“левая” модификация теллура) быстрая квазисдвиговая волна (QFS) поляризована под углом 42.9° к оси *Z* и откладывается в сторону по-



**Рис. 6.** Направление векторов поляризации чистых сдвиговых акустических волн, распространяющихся вдоль оси  $Y$ : (а) – для “левой” модификации и (б) – для “правой” модификации кристалла теллура.

ложительных значений оси  $Y$ . При  $c_{14} < 0$  (“правая” модификация теллура) – вектор поляризации составляет тот же угол  $42.9^\circ$  с осью  $Z$ , но откладывается уже в сторону отрицательных значений оси  $Y$ . Квазипродольная акустическая волна (QL) в случае  $c_{14} > 0$  (“левая” модифика-

ция теллура) поляризована под углом  $132.9^\circ$  относительно оси  $Z$  и под углом  $47.1^\circ$  к оси  $Z$  в случае  $c_{14} < 0$  (“правая” модификация теллура). Такое поведение направления векторов поляризации также следует из структуры тензора Кристоффеля  $\Gamma_{il}$  [25, 26]:

$$\Gamma_{il} = \begin{pmatrix} c_{66}n_y^2 + c_{44}n_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}n_y^2 + c_{44}n_z^2 - 2c_{14}n_y n_z & -c_{14}n_y^2 + n_y n_z (c_{13} - c_{44}) \\ 0 & -c_{14}n_y^2 + n_y n_z (c_{13} - c_{44}) & c_{44}n_y^2 + c_{33}n_z^2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\equiv \\ n_x=n_z=0}}{\sim} \begin{pmatrix} c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & -c_{14} \\ 0 & -c_{14} & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Как следует из выражения (6), параметры чистой медленной сдвиговой волны, поляризованной вдоль оси  $X$ , определяются только упругим модулем  $c_{66}$ . Параметры быстрой квазисдвиговой и квазипродольных волн определяются исходя из численных значений и знаков констант  $c_{22}$ ,  $c_{14}$  и  $c_{44}$ . Например, величина фазовых скоростей рассматриваемых волн может быть рассчитана по следующим формулам:

$$V_{QFS} = \sqrt{\frac{c_{22} + c_{44} - \sqrt{(c_{22} + c_{44})^2 - 4c_{22}c_{44} + 4c_{14}^2}}{2\rho}}$$

и

$$V_{QL} = \sqrt{\frac{c_{22} + c_{44} + \sqrt{(c_{22} + c_{44})^2 - 4c_{22}c_{44} + 4c_{14}^2}}{2\rho}},$$

соответственно. Это доказывает необходимость и важность проведения расчета акустических

свойств, учитывающих влияние различных модификаций теллура.

Из полученных результатов следует, что поляризационные свойства волн изменяются во всех главных плоскостях кристалла теллура ( $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$ ) для всех акустических мод, распространяющихся в указанных плоскостях. Исключением является чистая сдвиговая акустическая мода, распространяющаяся в плоскости  $YZ$  кристалла теллура. На примере волн, распространяющихся вдоль осей  $X$  и  $Y$  кристалла теллура, проведен детальный анализ причин такого поведения их акустических свойств. Рассмотрение волн, распространяющихся вдоль оси  $Z$  теллура, не проводилось из-за наличия явления акустической активности вдоль указанного направления [27, 28].

## 6. ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе представлены результаты теоретического анализа акустических свойств двух моди-

фикаций теллура, отличающихся друг от друга только знаком упругого модуля  $c_{14}$ . Подробно обсуждается влияние знака упругой постоянной  $c_{14}$  на акустические свойства в плоскостях  $XU$ ,  $XZ$  и  $YZ$  теллура. Рассмотрено влияние знака константы  $c_{14}$  не только на направления фазовых скоростей акустических волн (на сечение поверхностей акустических медленностей), но и на направления вектора поляризации акустических волн. Показано, что при смене знака упругого модуля  $c_{14}$  общий вид сечений поверхностей акустических медленностей изменяется только в плоскости  $YZ$ , тогда как в плоскостях  $XU$  и  $XZ$  вид сечений поверхностей медленности остается неизменным. Показано, что изменяется направление вектора поляризации для всех акустических волн во всех рассмотренных плоскостях при смене модификации теллура. Исключением является медленная сдвиговая акустическая мода (SS), распространяющаяся в плоскости  $YZ$  и поляризованная строго вдоль оси  $X$  вне зависимости от знака константы  $c_{14}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского Научного Фонда (РНФ) № 19-12-00072.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Molchanov V.Ya., Yushkov K.B., Kostryukov P.V., Gornostaev P.B., Vorobiev N.S. Measurement of amplified binary-modulated chirped laser pulses generated by different acousto-optic pulse shaping algorithms // *Opt. Las. Tech.* 2021. V. 142. P. 107220. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107220>
2. Voloshinov V.B., Polikarpova N.V., Ivanova P.A., Khorkin V.S. Acousto-optic control of internal acoustic reflection in tellurium dioxide crystal in case of strong elastic energy walkoff // *Appl. Opt.* 2018. V. 57. C19–C25. <https://doi.org/10.1364/AO.57.000C19>
3. Mantsevich S.N., Kupreychik M.I., Balakshy V.I. Possibilities of wide-angle tellurium dioxide acousto-optic cell application for the optical frequency comb generation // *Opt. Express.* 2020. V. 28. P. 13243–13259. <https://doi.org/10.1364/OE.391732>
4. Антонов С.Н. Широкоугольный поляризационно-независимый акустооптический модулятор лазерного излучения на основе парателлуриата // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 1. С. 8–15. <https://doi.org/10.31857/S0320791919050046>
5. Антонов С.Н., Резвов Ю.Г. Акустооптический поляризационно-нечувствительный двухкоординатный дефлектор // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 2. С. 138–144. <https://doi.org/10.31857/S0320791921020015>
6. Балакиев В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. Физические основы акустооптики. М.: Радио и связь, 1985. 280 с.
7. Goutzoulis A., Pape D. Design and Fabrication of Acousto-Optic Devices. New York: Dekker, 1994. 520 p.
8. Gupta N. Materials for imaging acousto-optic tunable filters // *Proc. SPIE – The International Society for Optical Engineering.* 2014. V. 9100. P. 91000C. <https://doi.org/10.1117/12.2054050>
9. Voloshinov V.B., Gupta N., Kulakova L.A., Khorkin V.S., Melekh T.B., Knyazev G.A. Investigation of acousto-optic properties of tellurium-based glasses for infrared applications // *J. Opt.* 2016. V. 18. P. 025402–025411. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/2/025402>
10. Хоркин В.С., Волошинов В.Б., Ефимова А.И., Кулакова Л.А. // *Опт. и спектр.* 2020. Т. 128. № 2. С. 250–255. <https://doi.org/10.21883/OS.2020.02.48970.151-19>
11. Кулакова Л.А., Мелех Б.Т., Грудинкин С.А., Данилов А.П. Ge–Te–Se- и Ge–Te–Se–S-сплавы – новые материалы для акустооптических устройств ближнего, среднего и дальнего инфракрасных диапазонов // *ФТП.* 2013. Т. 47. № 10. С. 1435–1439.
12. Feldman A., Waxler R.M., Horowitz D. Photoelastic constants of germanium // *Appl. Phys.* 1978. V. 49. № 4. P. 2589–2590. <https://doi.org/10.1063/1.325076>
13. Fox A.J. Acoustooptic figure of merit for single crystal germanium at 10.6- $\mu$ m wavelength // *Appl. Opt.* 1985. V. 24. № 4. P. 2040–2041.
14. Кристаллы галогенидов таллия: получение, свойства, применение. Под. ред. Богданова С.В. Новосибирск: Наука, 1989. 149 с.
15. Mantsevich S.N. Thallium bromide iodide crystal acoustic anisotropy examination // *Ultrasonics.* 2017. V. 75. P. 91–97. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.11.019>
16. Voloshinov V.B., Khorkin V.S., Kuznetsov M.S., Subbotin K.A. Elastically induced birefringence in a cubic acousto-optic crystal KRS-5 // *Proc. Mtgs. Acoust. (POMA).* 2020. V. 38. № 1. P. 045019–045026.
17. Porokhovnichenko D.L., Ryu J., Zinkin D.V., Voloshinov V.B. Analysis of wide-angle acousto-optic interaction geometry in single crystal mercury bromide // *Proc. SPIE 11210, Fourteenth School on Acousto-Optics and Applications.* 2019. V. 112100M. <https://doi.org/10.1117/12.2540333>
18. Dyakonov E.A., Porokhovnichenko D.L., Ryu J., Balakshy V.I. Implementation of the wide-angle acousto-optical interaction geometry in a mercury bromide single crystal // *Appl. Opt.* 2021. V. 60. P. 2348–2353. <https://doi.org/10.1364/AO.417401>
19. Voloshinov V.B., Balakshy V.I., Kulakova L.A., Gupta N. Acousto-optic properties of tellurium that are useful in anisotropic diffraction // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2008. V. 10. P. 095002–095011. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/10/9/095002>
20. Gupta N., Voloshinov V.B., Knyazev G.A., Kulakova L.A. Tunable wide-angle acousto-optic filter in single-crystal tellurium // *J. Opt.* 2012. V. 14. P. 035502–035511. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/14/3/035502>
21. Voloshinov V.B., Khorkin V.S., Kulakova L.A., Gupta N. Optic, acoustic and acousto-optic properties of tellurium in close-to axis regime of diffraction // *J. Phys.*

- Comm. 2017. V. 1. P. 025006–025014.  
<https://doi.org/10.1088/2399-6528/aa86ba>
22. *Поликарпова Н.В., Мальнева П.В.* Изменение поляризации акустических волн в кристалле теллура // Изв. РАН: серия физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1422–1425.
23. Акустические кристаллы. Под ред. Шаскольской М.П. М.: Наука, 1982. 632 с.
24. *Weber M.J.* Handbook of optical materials. New York, 2003. 499 p.
25. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах: применение для обработки сигналов. Пер. с франц. под. ред. Леманова В.В. М.: Наука, 1982. 422 с.
26. *Auld B.A.* Acoustic fields and waves in solids. 2<sup>nd</sup> ed. V. 2. Florida, 1990.
27. *Portigal D.L., Burstein E.* Acoustical activity and other first-order spatial dispersion effect in crystals // Phys. Rev. 1968. V. 170. № 3. P. 673–678.
28. *Zhigong S., Jinkui Z.* Acoustical activity in tellurium // Sol. State. Com. 1989. V. 72. № 10. P. 1027–1031.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ ЗВУКА В ГАЗОНАСЫЩЕННОМ СЛОЕ ОСАДКОВ  
ПО ВРЕМЕНИ ПРИХОДА СИГНАЛА ПОСЛЕВЕСТНИКА

© 2022 г. В. А. Григорьев\*

*Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, 394018 Россия**\*e-mail: grig4@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.12.2021 г.

После доработки 07.12.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

В рамках численного моделирования рассмотрено распространение низкочастотного звукового импульса в мелководном волноводе, состоящем из трех жидких слоев: водного слоя (толщиной 30 м, со скоростью звука 1500 м/с), слоя газонасыщенных осадков (0.4 м, 300 м/с) и нижнего полупространства (1560 м/с). Подобная ситуация имеет место на озере Кинерет. Показано, что при расположении источника и приемника вблизи дна на расстоянии порядка 10 глубин волновода друг от друга, в принимаемом сигнале хорошо наблюдаются два типа импульсов, значительно разделенных по времени прихода. Сначала приходит группа импульсов, соответствующая скорости звука в водном слое. Затем приходит одиночный импульс — послевестник. Он приходит с существенной задержкой и соответствует распространению звука в низкоскоростном газонасыщенном слое осадков. Модовый анализ показывает, что послевестник представляет собой весьма необычную первую моду (так называемую втекающую нормальную моду), захваченную газонасыщенным слоем подобно подводному звуковому каналу в океане. Скорость распространения импульса первой моды оказывается близка к скорости звука в газонасыщенном слое в достаточно широком диапазоне частот, что дает возможность оценки этой скорости по времени прихода послевестника.

*Ключевые слова:* мелкое море, газонасыщенные осадки, послевестник, нормальная мода, втекающая мода, вытекающая мода, квазимода

DOI: 10.31857/S0320791922030030

## ВВЕДЕНИЕ

При распространении акустических импульсов в мелководных волноводах с жестким дном, т.е. когда скорость звука в дне больше скорости звука в воде, при определенных условиях можно наблюдать сигналы предвестники (precursor signal (presignal)). Эти сигналы связаны с распространением звука в приповерхностном слое дна и поэтому приходят быстрее, чем сигналы, распространяющиеся по водному слою. В частности, предвестниками (presignal) являются так называемые боковые волны и грунтовые волны [1, 2].

Возникает вопрос, что будет, если дно мягкое, т.е. когда скорость звука в дне меньше, чем скорость звука в воде? В этом случае, если оказывается возможным распространение звука в приповерхностном слое дна, то должны наблюдаться сигналы послевестники (postsignal), т.е. низкоскоростные грунтовые импульсы, приходящие после высокоскоростных водных импульсов. Время задержки послевестников должно быть тем больше, чем более акустически мягким является морской грунт.

В настоящее время хорошо известно, что даже незначительное присутствие пузырькового газа в донных осадках существенно уменьшает скорость звука в них, превращая первоначально акустически жесткое дно в акустически мягкое. Так, при объемном содержании газа в осадках всего 0.1% скорость звука в дне принимает значения 100–300 м/с, что меньше скорости звука в воздухе [3]. Подобные, крайне низкие значения скорости звука в дне, нередко наблюдаются в приповерхностном донном слое водохранилищ и озер, что обычно объясняется выделением газов в процессе разложения органики. Например, экспериментально отмечены следующие значения скорости звука в газонасыщенных осадках: 100 м/с — Клязьминское водохранилище [4, 5], 200–250 м/с — Ивановское водохранилище [6], 100–500 м/с — озеро Кинерет [7, 8]. Низкие значения скорости звука встречаются также в газонасыщенных осадках внутренних и шельфовых морей. Например, в донных отложениях Балтийского моря зафиксированы значения 70–90 м/с [9], в осадках африканского шельфа Атлантического океана — 500 м/с [10], на Баренцево-Карском шельфе — 800–1200 м/с [11].

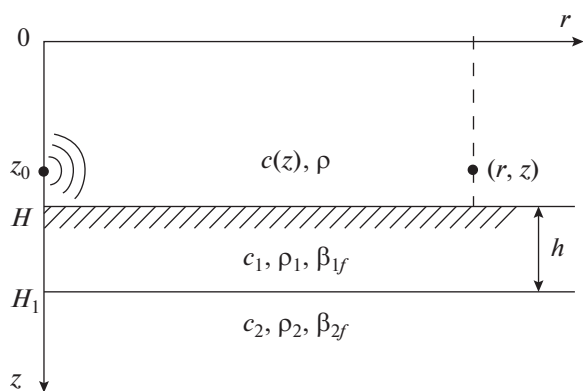


Рис. 1. Модель волновода.

При этом в морских и шельфовых зонах помимо разложения органики в приповерхностном слое дна зачастую присутствует фактор выделения газа из более глубоких слоев.

Пузырьковый газ обычно концентрируется в приповерхностном донном слое. Этому могут способствовать тонкие глинистые отложения самого верхнего осадочного слоя, выполняющие роль крышки и сдерживающие выход газа из грунта в воду. Таким образом, возникает ситуация, при которой выше газонасыщенного слоя осадков располагается вода, а ниже – грунт с малым содержанием газа или без газа. Соответственно, скорость звука в газонасыщенном слое оказывается ниже скоростей звука в окружающих средах, т.е. образуется профиль скорости звука с локальным минимумом подобно подводному звуковому каналу в океане. В этих условиях, как в подводном звуковом канале, возможен захват акустического поля внутри канала и его распространение со скоростью близкой к скорости звука в газонасыщенном слое.

В данной работе на примере модели озера Кинерет рассматривается описанная выше ситуация. Показывается возможность наблюдения сигналов послевестников, распространяющихся в газонасыщенном слое осадков и приходящих позже сигналов, распространяющихся в водном слое. Время прихода послевестников позволяет оценить скорость звука в газонасыщенном слое.

Заметим, что о возможности волноводного распространения звука в придонном газонасыщенном слое, по-видимому, впервые было высказано в [12]. Однако в [12] не рассматривалось импульсное излучение и связанное с этим появление послевестников, на чем делается акцент в данной работе.

## 1. ПОЛЕ В ВОЛНОВОДЕ. ТЕОРИЯ

### 1.1. Основные соотношения

Рассмотрим плоскостойкий волновод с водным слоем толщины  $H$  и дном в виде однородного жидкого слоя толщины  $h$ , лежащего на однородном жидком полупространстве (рис. 1). Параметры соответствующих слоев обозначим:  $c(z)$ ,  $c_1, c_2$  – скорости звука,  $\rho, \rho_1, \rho_2$  – плотности,  $\beta_{1f}, \beta_{2f}$  – коэффициенты потерь.

Пусть точечный изотропный источник расположен в водном слое и имеет координаты  $(0, z_0)$ . Источник излучает импульсный сигнал со спектром  $s_0(\omega)$ , где  $\omega = 2\pi f$  – частота звука. Будем считать, что  $s_0(\omega)$  – спектр комплексного сигнала, который равен нулю при  $\omega < 0$ . Размерность и величина амплитуды излучаемого спектра в дальнейшем не будут важны, т.к. принимаемый сигнал будет рассматриваться в нормированном виде. Но для определенности будем считать  $\max |s_0(\omega)| = 1$  Па с м, где размерность выбрана в соответствии с размерностью функции Грина ( $m^{-1}$ , см. ниже) так, чтобы принимаемый сигнал имел размерность давления.

Принимаемый сигнал (звуковое давление) в произвольной точке  $(r, z)$  волновода запишем в виде

$$p(t) = \text{Re} \int_0^\infty s(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (1)$$

где  $s(\omega)$  – спектр принимаемого комплексного сигнала,  $t$  – время. Излучаемый и принимаемый спектры связаны равенством  $s(\omega) = G(\omega)s_0(\omega)$ , где  $G(\omega)$  – функция Грина волновода (или в другой терминологии передаточная функция волновода). Функция Грина находится из решения уравнения Гельмгольца при соответствующих граничных условиях:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K^2 \right\} G = -\delta(z - z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r},$$

$$G|_{z=0} = 0, \quad G|_{z=H-} = G|_{z=H+},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=H-} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=H+}, \quad (2)$$

$$G|_{z=H_1-} = G|_{z=H_1+}, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=H_1-} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=H_1+},$$



где

$$K = \begin{cases} k, & 0 < z < H, \\ k_1, & H < z < H_1, \\ k_2, & z > H_1, \end{cases}$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k_{1,2} = \frac{\omega}{c_{1,2}} + i\beta_{1,2} f,$$

$\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака.

Дополнительным условием к (2), выделяющим единственное решение, является условие излучения на бесконечности, которое в случае поглощающего дна сводится к ограниченности функции Грина на бесконечности [13]:

$$|G| = O(1) \text{ при } (r, z) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Задача (2) имеет точное решение, записываемое для каждого слоя в отдельности в виде несобственного интеграла  $G = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi$ . Для водного слоя такой интеграл приведен в [14] (формулы (9)–(12) при  $X = 1$ ).

Знание точного решения важно при расчетах поля, а также для тестирования приближенных решений. Однако интегральная форма точного решения неудобна для физического анализа полученного решения. Для проведения анализа, а зачастую и для ускорения расчетов, в акустике мелкого моря широко применяется модовый подход.

При модовом подходе используется теория вычетов для преобразования точного решения, записанного в виде несобственного интеграла, в сумму мод дискретного спектра (вычеты функции  $\varphi(\xi)$  в полюсах  $\xi_m$ ) и непрерывного спектра (интеграл по берегам разреза, идущего от точки ветвления  $k_2$ ):

$$G = 2\pi i \sum_{m=1}^M \operatorname{Res}_{\xi_m} \varphi(\xi) + \int_{k_2} \varphi(\xi) d\xi.$$

Разрез может быть проведен произвольно [15, 16]. В соответствии с этим, меняются значения непрерывного и дискретного спектров при сохранении их суммы неизменной и равной точному решению. Заметим, что изменение дискретного спектра связано с изменением числа полюсов  $\xi_m$  на комплексной плоскости, которых становится больше или меньше в зависимости от способа проведения разреза (подробнее о различных типах разрезов см. ниже).

Если непрерывным спектром можно пренебречь (что регулируется типом разреза и расстоянием  $r$ ), то решение (2) приближенно представ-

ляется дискретным спектром мод, имеющим вид [14, 17]

$$G = \frac{i}{4} \sum_{m=1}^M \psi_m(z_0) \psi_m(z) H_0^{(1)}(\xi_m r), \quad (4)$$

где  $M$  – число мод дискретного спектра,  $H_0^{(1)}(\cdot)$  – функция Ханкеля первого рода,  $\psi_m(z)$  и  $\xi_m$  – нормированные собственные функции и собственные значения (полюса) задачи Штурма–Лиувилля в области  $0 \leq z \leq H_1$ :

$$\begin{aligned} \psi_m'' + \varepsilon^2 \psi_m &= 0, & 0 < z < H, \\ \psi_m'' + \varepsilon_1^2 \psi_m &= 0, & H < z < H_1, \\ \psi_m(0) &= 0, & \psi_m(H-) = \psi_m(H+), \\ m_1 \psi_m'(H-) &= \psi_m'(H+), \\ \psi_m(H_1) + g_1 \psi_m'(H_1-) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

с условием нормировки

$$\int_0^H \psi_m^2(z) dz + \frac{1}{m_1} \int_H^{H_1} \psi_m^2(z) dz + \frac{i\psi_m^2(H_1)}{2m_2\varepsilon_2} = 1, \quad (6)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{k^2 - \xi_m^2}$ ,  $\varepsilon_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi_m^2}$ ,  $m_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{\rho}$ ,  $g_1 = \frac{im_2}{m_1\varepsilon_2}$ ; штрих означает производную по  $z$ ; область поиска полюсов  $\operatorname{Re} \xi_m \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \xi_m \geq 0$ .

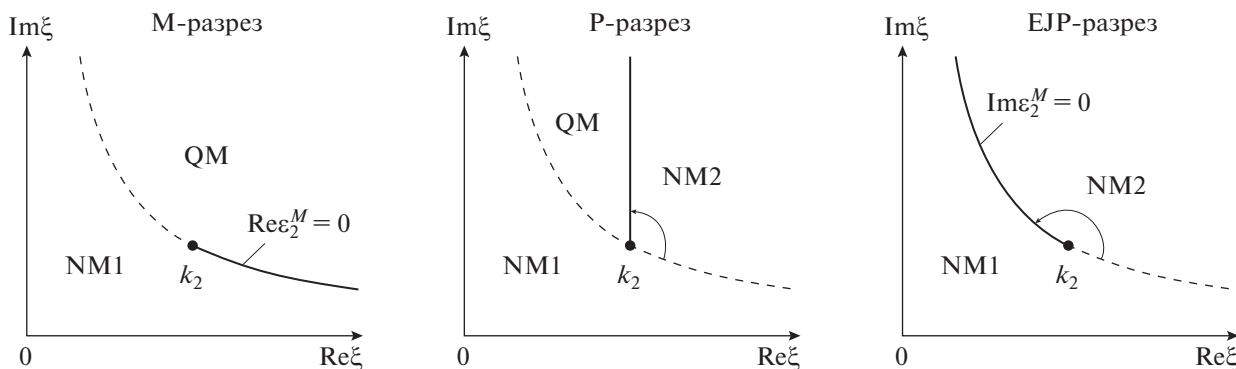
Все радикалы  $\sqrt{*}$  в приведенных выше формулах и далее по тексту понимаются однозначно, как главное значение<sup>1</sup> комплексного квадратного корня, у которого  $\operatorname{Re} \sqrt{*} > 0$ . Если  $\operatorname{Re} \sqrt{*} = 0$ , то выбирается значение, у которого  $\operatorname{Im} \sqrt{*} > 0$ . Данное правило соответствует функции sqrt в пакете прикладных программ MATLAB.

Выражение для переменной  $\varepsilon_2$  записывается по-разному в зависимости от выбранного типа разреза. В литературе используется три типа разреза [16]: М-разрез (разрез MATLAB), Р-разрез (разрез Пекериса), ЕJP-разрез (по имени авторов Ewing, Jardetzky, Press). Обозначим  $\varepsilon_2^M = \sqrt{k_2^2 - \xi_m^2}$ . Тогда (рис. 2):

1) для М-разреза:  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^M$  (линия разреза  $\operatorname{Re} \varepsilon_2^M = 0$ );

2) для Р-разреза:  $\varepsilon_2 = \begin{cases} \varepsilon_2^M, & \xi_m \notin \text{NM2}, \\ -\varepsilon_2^M, & \xi_m \in \text{NM2}, \end{cases}$  где NM2 – область совместного выполнения условий  $\operatorname{Im} \varepsilon_2^M < 0$  и  $\operatorname{Re} \xi > \operatorname{Re} k_2$  (линия разреза идет вертикально вверх от точки  $k_2$ );

<sup>1</sup> Второе не главное значение комплексного квадратного корня отличается от главного значения знаком.



**Рис. 2.** Показаны три типа разреза (жирная линия), идущие от точки ветвления  $k_2$ . Полюса  $\xi_m$  могут находиться в областях NM1, NM2, QM, что соответствует трем типам мод: NM1 – вытекающие нормальные моды, NM2 – втекающие нормальные моды, QM – квазимоды.

3) для EJP-разреза:  $\varepsilon_2 = \begin{cases} \varepsilon_2^M, & \text{Im } \varepsilon_2^M > 0, \\ -\varepsilon_2^M, & \text{Im } \varepsilon_2^M < 0, \end{cases}$  что

эквивалентно  $\varepsilon_2 = i\sqrt{\xi_m^2 - k_2^2}$  (линия разреза  $\text{Im } \varepsilon_2^M = 0$ ).

Для EJP-разреза число мод  $M$  конечно, для M-разреза и P-разреза – бесконечно. Независимо от того, какой тип разреза используется, при расчетах дискретного спектра берется минимальное число мод, при котором добавочные моды не играют заметной роли.

Итак, согласно (5) и (6) находятся полюса  $\xi_m$  и соответствующие им нормированные собственные функции  $\psi_m(z)$  в области  $0 \leq z \leq H_1$ . При  $z \geq H_1$  (в нижнем полупространстве дна) собственные функции равны

$$\psi_m = \psi_m(H_1) \exp[i\varepsilon_2(z - H_1)]. \quad (7)$$

Учитывая, что  $c_1 = \text{const}$  в слое  $H < z < H_1$ , из второго уравнения (5) и граничных условий при  $z = H$  получаем выражение для собственных функций при  $H < z < H_1$  (в верхнем слое дна):

$$\psi_m = \psi_m(H) \cos[\varepsilon_1(z - H)] + \frac{m_1}{\varepsilon_1} \psi_m'(H) \sin[\varepsilon_1(z - H)], \quad (8)$$

где  $\psi_m'(H) \equiv \psi_m'(H -)$ .

Подставляя (8) в граничное условие при  $z = H_1$  из (5), получаем одно граничное условие при  $z = H$  и задачу Штурма–Лиувилля в области  $0 < z < H$  (в водном слое):

$$\begin{aligned} \psi_m'' + \varepsilon^2 \psi_m &= 0, \\ \psi_m(0) = 0, \quad \psi_m(H) + g\psi_m'(H) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $g = \frac{im_1}{\varepsilon_1} \left[ \frac{1 + D \exp(i2\varepsilon_1 h)}{1 - D \exp(i2\varepsilon_1 h)} \right]$ ,  $D = \frac{m_2 \varepsilon_1 - m_1 \varepsilon_2}{m_2 \varepsilon_1 + m_1 \varepsilon_2}$ .

Условие нормировки собственных функций при решении (9) остается прежним, т.е. (6).

В частном случае при  $c = \text{const}$  решение (9) при  $0 < z < H$  имеет вид

$$\psi_m = N \sin(\varepsilon z), \quad (10)$$

где  $N$  – коэффициенты нормировки, вычисляемые для каждой моды отдельно из (6).

Полюса  $\xi_m$  при  $c = \text{const}$  находятся из решения уравнения

$$\sin(\varepsilon H) + g\varepsilon \cos(\varepsilon H) = 0. \quad (11)$$

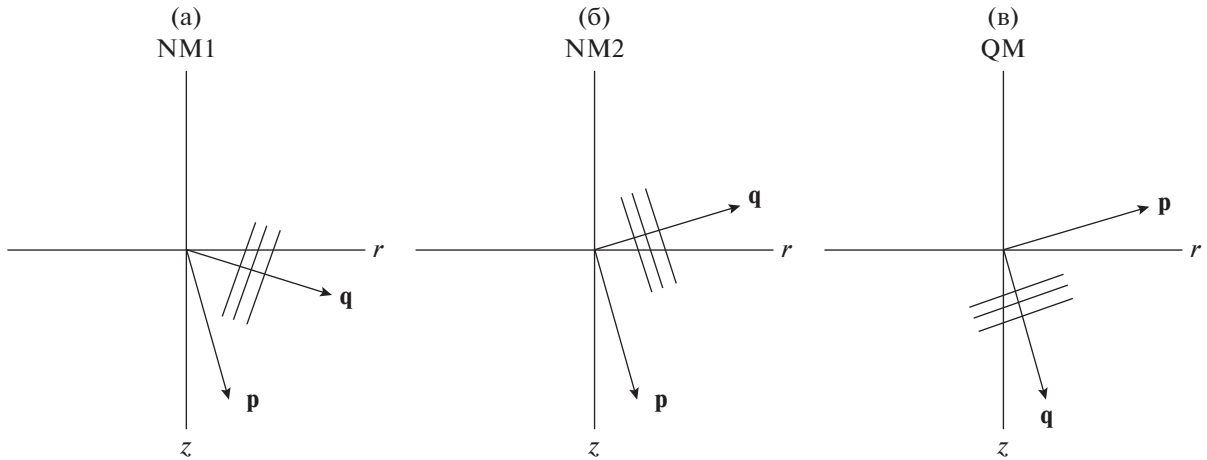
### 1.2. Классификация мод

В данном разделе проведем классификацию мод и уточним терминологию, что необходимо для лучшего понимания приведенных в разделе 2 результатов расчетов.

Каждое слагаемое дискретного спектра (4) называется модой. Моды являются частными решениями однородного уравнения Гельмгольца с соответствующими граничными условиями (задача (2) с нулевой правой частью в уравнении Гельмгольца). Нормальными модами называются моды, дополнительно удовлетворяющие условию излучения на бесконечности (3). Квазимодами называются моды, не удовлетворяющие условию излучения на бесконечности (3).

Признаком, отличающим нормальные моды от квазимод, является поведение волны в полупространстве дна. Используя (7) и асимптотику функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(\xi_m r) \sim \frac{\exp(i\xi_m r)}{\sqrt{\xi_m r}},$$



**Рис. 3.** Структура волны (12) в нижнем полупространстве дна: (а) – вытекающая нормальная мода, (б) – втекающая нормальная мода, (в) – квазимода. Амплитуда волны убывает в направлении вектора  $\mathbf{p}$ . Фазовые фронты перпендикулярны вектору  $\mathbf{q}$ . Распространение фазовых фронтов и перенос энергии происходят в направлении  $\mathbf{q}$ .

получаем из (4) для каждой моды в полупространстве дна ( $z > H_1$ ) волну вида

$$G_m \sim \exp[i(\xi_m r + \varepsilon_2 z - \omega t)] = \exp(-\mathbf{p}\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (12)$$

где дополнительно введен фактор времени  $\exp(-i\omega t)$ , введены обозначения векторов:  $\mathbf{r} = (r, z)$ ,  $\mathbf{p} = (\text{Im } \xi_m, \text{Im } \varepsilon_2)$ ,  $\mathbf{q} = (\text{Re } \xi_m, \text{Re } \varepsilon_2)$ , и для простоты опущен множитель  $r^{-1/2}$ , который в окрестности произвольного расстояния  $r$  можно считать константой.

Волна (12) является неоднородной волной [18]. Ее амплитуда убывает в направлении вектора  $\mathbf{p}$ , фазовые фронты перпендикулярны вектору  $\mathbf{q}$ . Вектора  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  неколлинеарны, поэтому амплитуда волны меняется вдоль фазового фронта. Под направлением распространения волны понимается направление распространения фазового фронта, т.е. направление вектора  $\mathbf{q}$ . Перенос энергии происходит также в направлении  $\mathbf{q}$ . Действительно, для волны (12) имеем [19]:

$$\mathbf{I}_T = (2\omega\rho_2)^{-1} \text{Im}(G_m^* \nabla G_m) \sim \mathbf{q} \exp(-2\mathbf{p}\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{I}_T$  – вектор плотности потока акустической мощности, усредненный за период; звездочка означает комплексное сопряжение,  $\nabla$  – оператор набла. Как видно, направление вектора  $\mathbf{I}_T$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{q}$ .

Полюса  $\xi_m$  располагаются в первой четверти комплексной плоскости:  $\text{Re } \xi_m > 0$ ,  $\text{Im } \xi_m > 0$ . Отсюда следует, что направление распространения и характер затухания волны (12) определяются знаками величин  $\text{Re } \varepsilon_2$  и  $\text{Im } \varepsilon_2$ .

На рис. 2 для трех типов разрезов показаны области NM1, NM2 и QM на комплексной плоскости, соответствующие условиям:

$$\begin{aligned} \text{NM1: } & \text{Re } \varepsilon_2 > 0, \quad \text{Im } \varepsilon_2 > 0, \\ \text{NM2: } & \text{Re } \varepsilon_2 < 0, \quad \text{Im } \varepsilon_2 > 0, \\ \text{QM: } & \text{Re } \varepsilon_2 > 0, \quad \text{Im } \varepsilon_2 < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие, при котором одновременно  $\text{Re } \varepsilon_2 < 0$  и  $\text{Im } \varepsilon_2 < 0$ , не реализуется на рассматриваемом листе римановой поверхности, где ищутся полюса  $\xi_m$ .

Если полюс  $\xi_m$  располагается в областях NM1 или NM2, то согласно определению, приведенному в начале раздела 1.2, это соответствует нормальной моде. При этом выполняется условие излучения на бесконечности (3), т.к. волна (12) затухает в полупространстве дна при удалении от источника:  $|G_m| \sim \exp(-\mathbf{p}\mathbf{r}) \rightarrow 0$  при  $(r, z) \rightarrow \infty$ .

Нормальные моды NM1 и NM2 имеют разный знак величины  $\text{Re } \varepsilon_2$ . Это приводит к принципиально различному направлению распространения волны (12) в нижнем полупространстве дна. Для моды NM1 распространение волны (12) происходит сверху вниз от границы полупространства (рис. 3а), а для моды NM2 – снизу вверх к границе полупространства (рис. 3б). Поскольку с распространением волны (12) связан перенос энергии, то моду NM1 можно назвать вытекающей нормальной модой, а моду NM2 – втекающей нормальной модой. Этой терминологией будем пользоваться в данной работе.

Если полюс  $\xi_m$  располагается в области QM, то согласно определению, приведенному в начале раздела 1.2, это соответствует квазимоду. Для квазимоды не выполняется условие излучения на

бесконечности (3), т.к. амплитуда волны (12) растет с глубиной при каждом фиксированном  $r$ :  $|G_m| \sim \exp(-\mathbf{pr}) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ . Рост амплитуды с глубиной имеет физическое объяснение, но до определенной конечной глубины [16]. “Ненормальностью” квазимоды является неограниченный рост амплитуды с ростом глубины. Для квазимоды распространение волны (12) в нижнем полупространстве дна происходит сверху вниз (рис. 3в). Это значит, что квазимода является вытекающей модой.

Вернемся к втекающим нормальным модам и сделаем некоторые замечания, учитывая, что именно втекающие моды будут играть ключевую роль в данной работе.

Если точечный источник расположен в водном слое, то для каждой моды и для поля в целом вытекание энергии в нижнее полупространство дна вполне естественно. Наоборот, втекание энергии из полупространства дна в волновод выглядит в рассматриваемой ситуации весьма необычно. По этой причине втекающие моды, обнаруженные в [14], были отнесены к “ненормальным” модам и названы квазимодами второго типа. Исключение из множества нормальных мод регулировалось в [14] введением второго условия излучения на бесконечности (в дополнение к (3)), требующего от частных и общих решений уравнения Гельмгольца вытекания энергии из волновода. Однако детальный анализ показывает, что введение второго условия излучения является лишним. Оно не влияет на полученные решения, а только приводит к изменению в классификации мод. По этой причине достаточно одного условия (3), а втекающие моды следует считать нормальными модами, хотя и необычными.

Приведем качественные обоснования принадлежности втекающих мод к нормальным модам. Известно, что любая нормальная мода теоретически может быть возбуждена в волноводе отдельно, без примесей других мод, при использовании бесконечной вертикальной антенны с коэффициентом усиления  $\psi_m(z)$ . Наоборот, никакая квазимода не может быть возбуждена отдельно, поскольку для этого требуется бесконечная энергия излучающей антенны. Возбуждение отдельной втекающей моды ничем не отличается от возбуждения нормальной моды. При этом перенос энергии снизу вверх в полупространстве дна можно объяснить доминирующим влиянием элементов вертикальной антенны, расположенных в дне. При наличии одного точечного источника в водном слое возбуждается целый спектр мод. Если при этом возбуждается также втекающая мода, то для нее перенос энергии снизу вверх в полупространстве дна можно объяснить доминирующим влиянием мнимых источников, расположенных в дне.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

### 2.1. Численные параметры

При выборе численных параметров волновода (рис. 1) будем исходить из упрощенных представлений о дне озера Кинерет [7, 8]. Предполагаем, что дно представлено одним типом грунта с пористостью  $\kappa = 0.5$  (мелкий песок, крупный алеврит). Верхний слой дна толщиной  $h = 0.4$  м является газонасыщенным со скоростью звука  $c_1 = 300$  м/с, что соответствует объемному содержанию газа  $\sim 0.1\%$ . Ниже данного слоя полагаем, что газ отсутствует, т.е. грунт является двухкомпонентной средой (вода и минеральные частицы).

Для двухкомпонентной среды, т.е. для нижнего полупространства дна (рис. 1), используем эмпирические формулы Эйкала [20] и Гамильтона [21] связи параметров ( $c_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\beta_{2f}$ ) с пористостью грунта  $\kappa$ , являющиеся обобщением экспериментальных данных по всему Мировому океану:

$$c_2 = c(1.631 - 1.78\kappa + 1.2\kappa^2),$$

$$\rho_2 = \rho(2.604 - 1.606\kappa),$$

$$\beta_{2f} \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{км Гц}} \right] = \begin{cases} 0.2747 + 0.527\kappa, & 0.36 \leq \kappa < 0.472, \\ 4.903\kappa - 1.7688, & 0.472 \leq \kappa < 0.52, \\ 3.3232 - 4.89\kappa, & 0.52 \leq \kappa < 0.65, \\ 0.7602 - 1.487\kappa + 0.78\kappa^2, & 0.65 \leq \kappa \leq 0.9. \end{cases}$$

Полагая параметры водного слоя равными:  $H = 30$  м,  $c = 1500$  м/с,  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, получаем при  $\kappa = 0.5$  значения:  $c_2 = 1560$  м/с,  $\rho_2 = 1.8$  г/см<sup>3</sup>,  $\beta_{2f} = 0.7$  дБ/км/Гц.

Осталось определить параметры газонасыщенного слоя  $\rho_1$  и  $\beta_{1f}$ . Поскольку объемная доля газа в слое мала ( $\sim 0.1\%$ ), то плотность грунта можно считать неизменной  $\rho_1 = \rho_2$ . Поглощение звука, описываемое величиной  $\beta_{2f}$ , связано с трением между частицами грунта по мере прохождения акустической волны. Незначительное присутствие пузырьков газа в грунте не должно сильно изменить характер трения между частицами. Поэтому можно считать, что  $\beta_{1f} = \beta_{2f}$ . При этом предполагаем, что используется низкая частота звука ( $\sim 100$  Гц), далекая от резонансной частоты пузырьков ( $\sim 1$  кГц).

Заметим, что при расчетах в системе СИ необходима формула связи между единицами измерения:

$$\beta_{1,2f} \left[ \frac{\text{дБ}}{\text{км Гц}} \right] = (2 \times 10^4 \lg e) \beta_{1,2f} \left[ \frac{1}{\text{м Гц}} \right].$$

## 2.2. Модовый анализ

Перейдем к конкретным расчетам. На рис. 4 для рассмотренной модели волновода приведен пример расположения полюсов  $\xi_m$  на комплексной плоскости для частоты  $f = 120$  Гц. Полюса получены путем решения (11) при использовании разреза Пекериса. В табл. 1 приведены значения  $\xi_m$  и  $\epsilon_2$  для первых десяти мод. Пунктирная линия (гипербола) на рис. 4 описывается уравнением  $\text{Im } \xi = \text{Re } k_2 \text{Im } k_2 / \text{Re } \xi$ . Совместно с линией Р-разреза гипербола делит первую четверть комплексной плоскости на области NM1, NM2 и QM, для которых выполняются условия (13). Соответственно, мода 1 является втекающей нормальной модой ( $\xi_1 \in \text{NM2}$ ). Моды 2–8 являются вытекающими нормальными модами ( $\xi_{2-8} \in \text{NM1}$ ). При этом моды 6–8 не приведены на рис. 4, т.к. выходят за рамки рисунка. Все последующие моды с номерами  $m > 8$  являются квазиמודами ( $\xi_{m > 8} \in \text{QM}$ ).

Обратим внимание, что если вместо Р-разреза использовать М-разрез для вычисления полюсов, то из дискретного спектра исчезает втекающая нормальная мода, т.е. мода 1 (она становится частью непрерывного спектра). В нашем случае это обстоятельство принципиально важно, т.к. именно с модой 1 будет связано наблюдение сигнала послевестника. Таким образом, вычисление полюсов необходимо проводить, используя Р-разрез или ЕJP-разрез, — только в этих случаях мода 1 сохраняется в дискретном спектре. При этом если вместо Р-разреза использовать ЕJP-разрез, то из дискретного спектра исчезают растущие с глубиной квазиимоды. В этом случае дискретный спектр содержит только нормальные моды 1–8, а все мо-

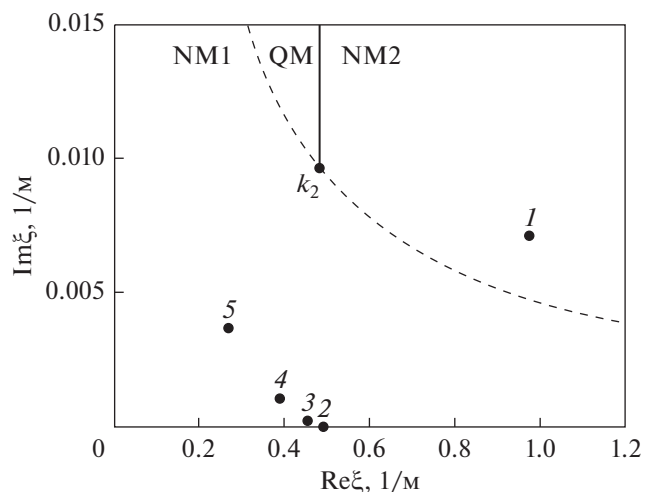


Рис. 4. Расположение полюсов  $\xi_m$  (точки 1–5) на комплексной плоскости при Р-разрезе для частоты 120 Гц. Нумерация полюсов соответствует номерам мод.

ды с номерами больше 8 (все квазиимоды) становятся частью непрерывного спектра.

На рис. 5 изображены реальные части собственных функций первых четырех мод для  $f = 120$  Гц. Видно, что максимум моды 1 располагается в газонасыщенном слое, т.е. на данной частоте мода 1 захватывается слоем и от нее следует ожидать сигнал послевестника.

На рис. 6 приведены частотные зависимости реальной и мнимой частей  $\xi_m$  для первых четырех мод. Видно, что при  $f > 100$  Гц затухание моды 1 становится больше, чем у других мод ( $\text{Im } \xi_1 > \text{Im } \xi_{2-4}$ ), причем с ростом частоты затухание растет. Это значит, что на достаточно боль-

Таблица 1. Значения  $\xi_m$  и  $\epsilon_2$  первых десяти мод для частоты 120 Гц. Мода 1 – втекающая нормальная мода. Моды 2–8 – вытекающие нормальные моды. Моды 9 и 10 – квазиимоды

Номер моды $m$	$\xi_m, 1/\text{м}$	$\epsilon_2, 1/\text{м}$
1	$0.97521 + 0.00709i$	$-0.00264 + 0.84704i$
2	$0.49122 + 0.00002i$	$0.04668 + 0.09986i$
3	$0.45535 + 0.00025i$	$0.16412 + 0.02776i$
4	$0.38838 + 0.00109i$	$0.28790 + 0.01476i$
5	$0.26816 + 0.00370i$	$0.40211 + 0.00915i$
6	$0.01088 + 0.17167i$	$0.51273 + 0.00547i$
7	$0.00787 + 0.39099i$	$0.62155 + 0.00257i$
8	$0.00849 + 0.54631i$	$0.72930 + 0.00005i$
9	$0.00961 + 0.68270i$	$0.83636 - 0.00226i$
10	$0.01093 + 0.80975i$	$0.94292 - 0.00443i$

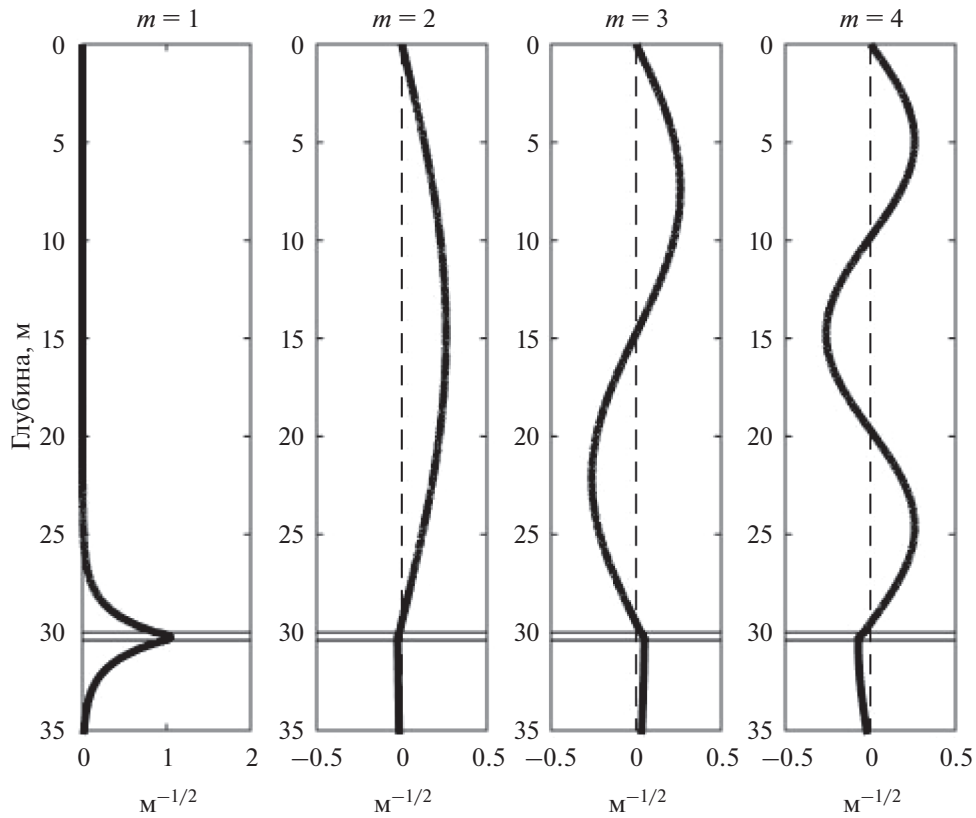


Рис. 5. Реальная часть собственных функций первых четырех мод для частоты 120 Гц.

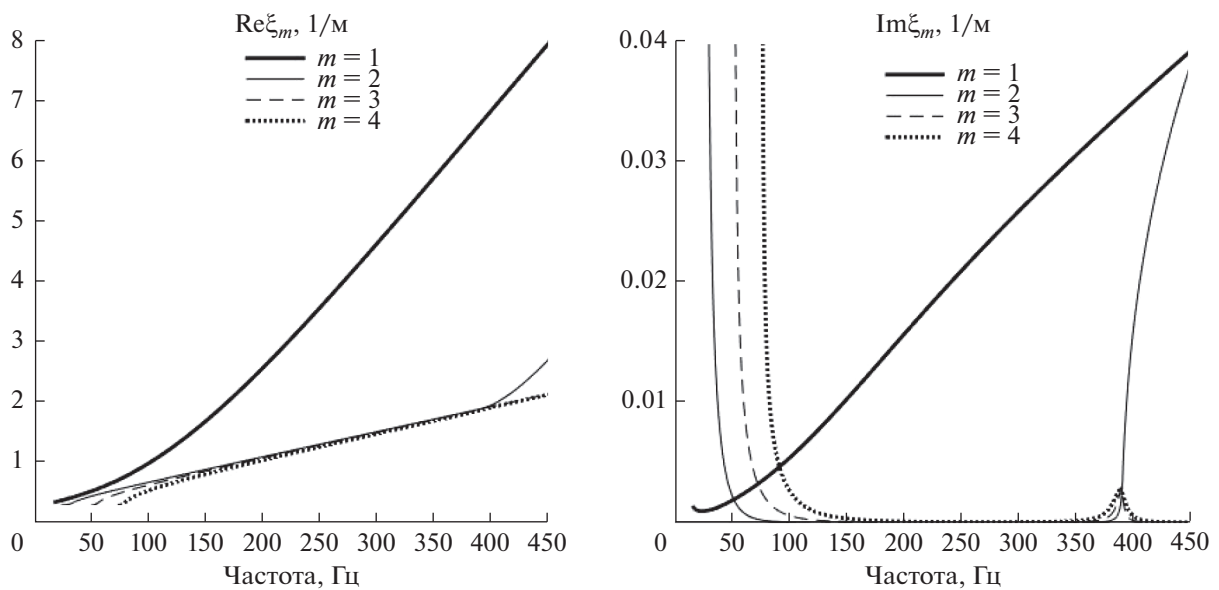
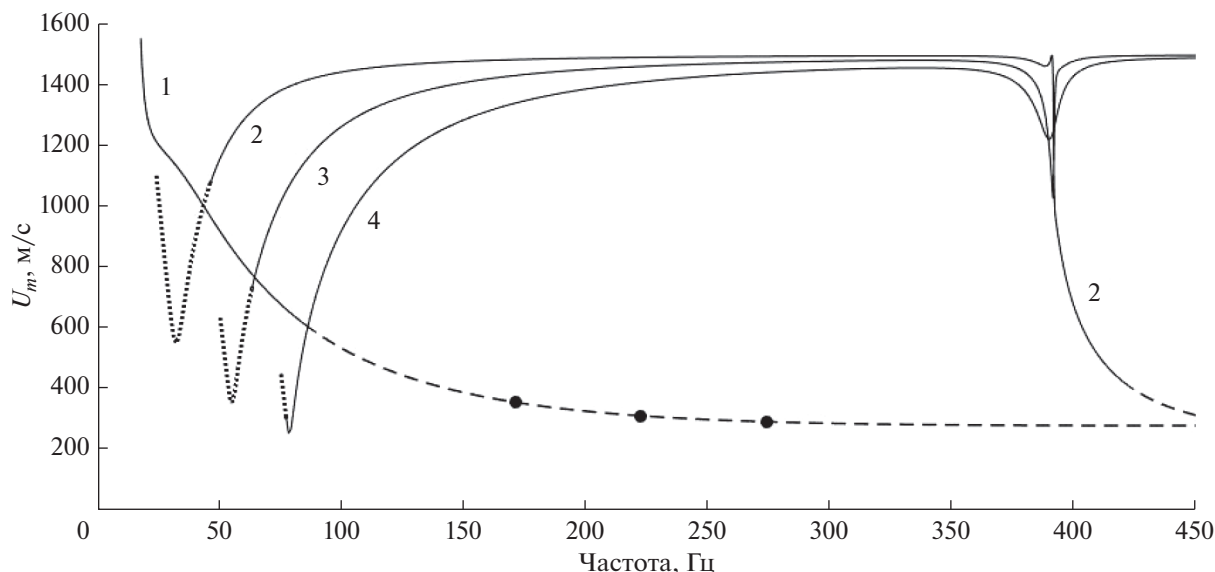


Рис. 6. Частотные зависимости реальной и мнимой частей  $\xi_m$  для первых четырех мод.

ших частотах мода 1 будет очень слабой и непригодной для практического использования. Вместе с этим, примерно при  $f > 400$  Гц выделяется мода 2.

У нее растет затухание, а анализ собственных функций показывает, что мода 2 при этих частотах захватывается газонасыщенным слоем. Инте-



**Рис. 7.** Частотные зависимости групповой скорости  $U_m = |d\omega/d\xi_m|$  для первых четырех мод. Три точки, практически точно лежащие на кривой 1, соответствуют скорости распространения послевестника, измеренной в диапазонах 150–200, 200–250, 250–300 Гц.

ресно, что в состоянии захвата мода 2 становится втекающей нормальной модой (как мода 1), будучи до этого, при более низких частотах, вытекающей нормальной модой.

Проанализируем далее скорость распространения мод. При импульсном излучении в отсутствие потерь в дне скорость распространения модовых импульсов можно описывать групповой скоростью  $v_m^{gr} = d\omega/d\xi_m$ . При наличии потерь в дне, когда  $\xi_m$  является комплексным числом, можно рассмотреть модуль  $U_m = |d\omega/d\xi_m|$ , и его считать аналогом групповой скорости ( $U_m$  будем называть так же групповой скоростью). При этом, однако, нужно иметь в виду, что в каких-то чувствительных к донным потерям диапазонах частот могут получаться не имеющие физического смысла значения  $U_m > c_2$ .

На рис. 7 приведены частотные зависимости групповой скорости  $U_m$  для первых четырех мод. Участки, изображенные непрерывными линиями, соответствуют вытекающим нормальным модам. Для мод 2–4 низкочастотные участки, изображенные точками, соответствуют квазимодам. Для мод 1 и 2 участки, изображенные пунктиром, соответствуют втекающим нормальным модам.

В центральной части рис. 7 кривая первой моды  $U_1$  значительно отделена от кривых других мод  $U_{2-4}$ , причем  $U_1 \approx c_1$ . Конкретно, предельное значение  $U_1$  при росте частоты равно 280 м/с, что на 7% меньше значения  $c_1 = 300$  м/с. Таким образом, в области частот, где  $U_1 \approx c_1$ , при условии доста-

точно большой энергии в моде 1 можно наблюдать сигнал послевестника, а по времени его прихода можно оценить скорость звука  $c_1$  с точностью не хуже 10%.

Максимально возбудить и принять моду 1 можно, погрузив источник и приемник в газонасыщенный слой дна. Если это неприемлемо, то источник и приемник необходимо разместить максимально близко ко дну. Как видно из рис. 5, собственная функция моды 1 выходит на некоторое расстояние в водный слой. Это обстоятельство можно использовать для возбуждения и приема моды 1. Заметим, что с увеличением частоты мода 1 больше концентрируется в газонасыщенном слое и меньше выходит в водный слой.

## 2.2. Импульсное излучение. Послевестник

При моделировании распространения импульса в волноводе использовался излучаемый сигнал, амплитуда гармоник которого описывалась окном Чебышева с уровнем боковых лепестков во временном импульсе 100 дБ (процедура `chebwin` в MATLAB). Начальная фаза всех гармоник равнялась нулю.

На рис. 8 показан пример излучаемого сигнала и его спектр  $s_0(\omega)$  для полосы  $\Delta f = 150$ –200 Гц. Для дальнейших расчетов достаточно дискретизации спектра с шагом  $\delta f = 0.2$  Гц, что дает максимальное время анализа в принимаемом импульсе, равное  $0.5/\delta f = 2.5$  с. При этом оценочное время прихода послевестника, распространяющегося со скоростью близкой к скорости звука в



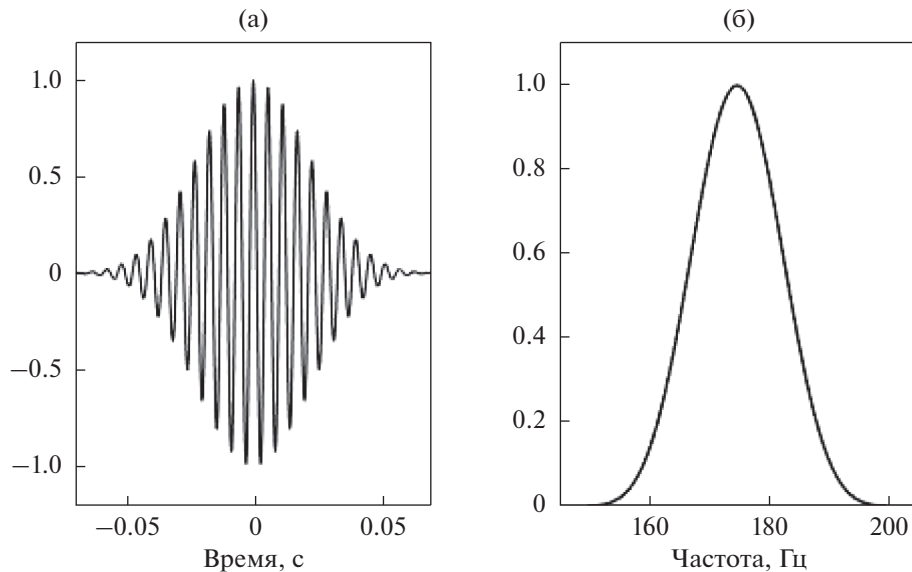


Рис. 8. (а) – Излучаемый сигнал и (б) – его спектр для полосы 150–200 Гц.

газонасыщенном слое ( $\approx 300$  м/с), на расстоянии  $r = 20H = 600$  м составляет  $\approx 2$  с.

На рис. 9 приведены расчеты принимаемого импульса  $p(t)$  согласно формуле (1) при использовании (4), (6), (10), (11) и разреза Пекериса. Расчеты приведены для случаев:

- 1)  $\Delta f = 150\text{--}200$  Гц,  $r = 20H = 600$  м;
- 2)  $\Delta f = 200\text{--}250$  Гц,  $r = 10H = 300$  м;
- 3)  $\Delta f = 250\text{--}300$  Гц,  $r = 6H = 180$  м.

Глубины источника и приемника во всех случаях равнялись  $z_0 = z = 29.8$  м (20 см выше поверхности дна).

Заметим, что вычисленные сигналы на рис. 9 представляют собой дискретный спектр при разрезе Пекериса. Для проверки были также проведены расчеты  $p(t)$  по точной интегральной формуле ([14], формула (12) при  $X = 1$ ), которые показали, что непрерывный спектр пренебрежимо мал.

На рис. 9 в каждом рассмотренном случае наблюдается послевестник (показан стрелкой). Послевестник является импульсом первой моды, распространяющимся в газонасыщенном слое.

Принимается послевестник с заметной задержкой относительно группы импульсов других мод, распространяющихся в водном слое.

В табл. 2 для каждого случая из рис. 9 приведены:  $T$  – время прихода послевестника, измеренное по максимуму амплитуды;  $F$  – частота сигнала в момент времени  $T$ ;  $\tilde{c}_1 = r/T$  – скорость распространения послевестника;  $U_1(F) = |d\omega/d\xi_1|$  – групповая скорость первой моды на частоте  $F$ .

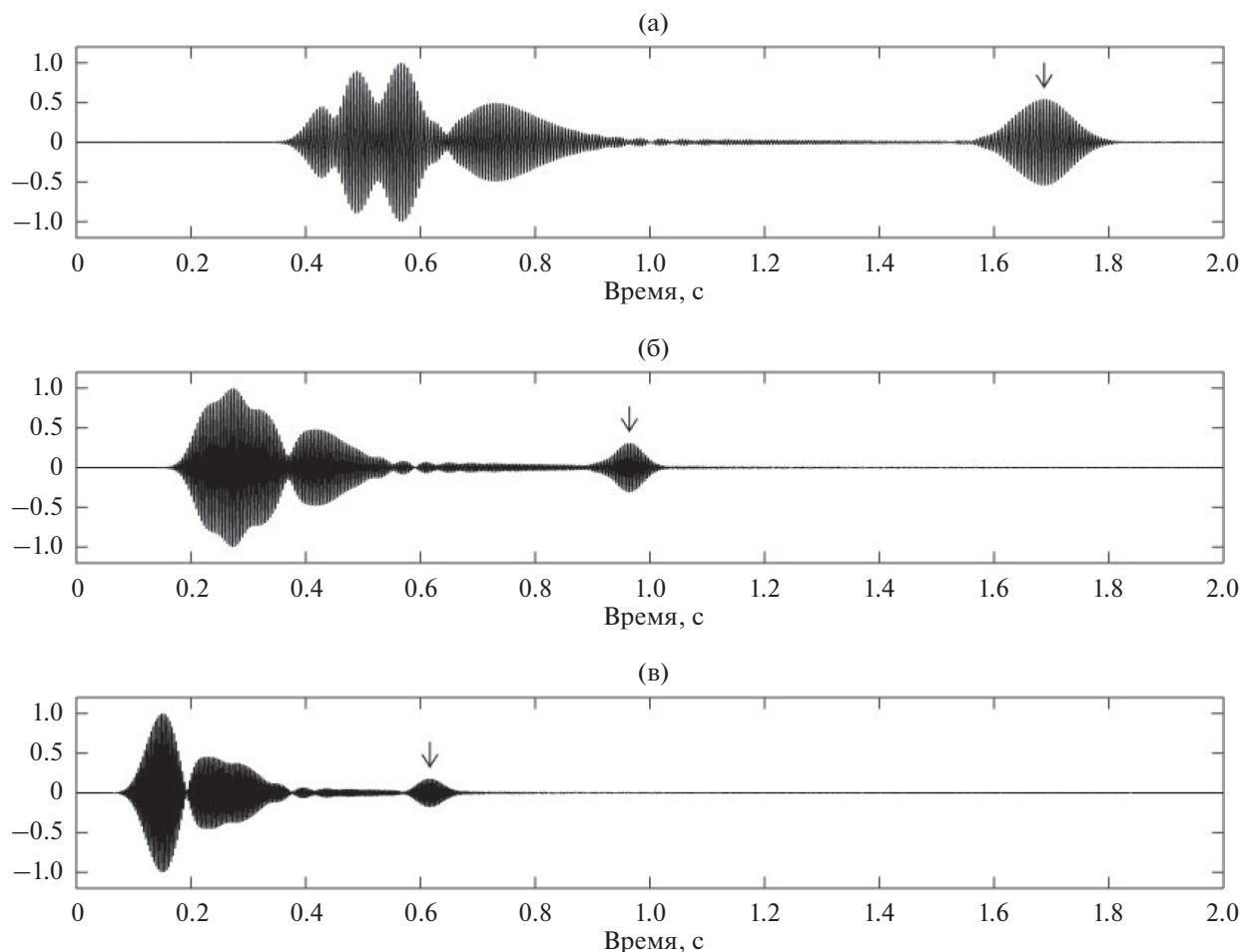
Проанализируем табл. 2.

1. Во всех случаях  $F < f_0$ , где  $f_0$  – центральная частота полосы сигнала. Например, для полосы 150–200 Гц имеем:  $f_0 = 175$  Гц,  $F = 170.9$  Гц. Таким образом, если излучаемый импульс в максимуме амплитуды спектра имеет частоту колебаний  $f_0$  (рис. 8), то принимаемый импульс первой моды (послевестник) в максимуме амплитуды спектра имеет частоту меньше  $f_0$ . Объясняется это возрастанием затухания первой моды с ростом частоты (рис. 6).

2. Во всех случаях  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(F) \approx U_1(F)$  с точностью менее 1 м/с. Этот важный результат показывает, что измерение скорости распространения

Таблица 2

Полоса, Гц	$r$ , м	$T$ , с	$F$ , Гц	$\tilde{c}_1 = r/T$ , м/с	$U_1(F)$ , м/с
150–200	600	1.6873	170.9	355.6	356.1
200–250	300	0.9643	222.2	311.1	311.9
250–300	180	0.6165	274.0	292.0	292.3



**Рис. 9.** Принимаемый сигнал (послевестник отмечен стрелкой) для случаев: (а) – полоса сигнала 150–200 Гц, расстояние от источника 600 м; (б) – 200–250 Гц, 300 м; (в) – 250–300 Гц, 180 м.

послевестника в различных диапазонах частот дает возможность построить зависимость групповой скорости первой моды от частоты.

На рис. 7 проиллюстрировано, что на кривую  $U_1(f)$  практически точно ложатся три черные точки с координатами  $(F, \tilde{c}_1)$ , соответствующие трем рассмотренным в табл. 2 диапазонам частот. Таким образом, теоретическая кривая  $U_1(f)$  на рис. 7 может быть получена экспериментально путем измерения параметров послевестника.

На основе полученной зависимости  $U_1(f)$  могут быть проведены грубые или более точные оценки скорости звука в газонасыщенном слое. Грубая оценка заключается в выборе минимального значения  $\tilde{c}_1$  при условии, что данное значение находится в области плато на кривой  $U_1(f)$ . В нашем случае это значение  $\tilde{c}_1 = 292$  м/с. Более точные оценки можно получить путем моделирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что, варьируя частоту, расстояние и глубины источника и приемника, можно добиться хорошего наблюдения послевестника в натуральных условиях. А именно, учитывая, что затухание послевестника (моды 1) велико, необходимо:

- располагать источник и приемник максимально близко ко дну (если нет возможности заглубить их в грунт);
- брать небольшие расстояния от источника ( $\sim 10H$ );
- полосу сигнала выбирать так, чтобы максимально повысить возбуждение моды 1 и по возможности понизить возбуждение других мод.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 19-02-00127, 20-05-00119, 20-55-S52005.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Пежерис К.* Теория распространения звука взрыва в мелкой воде / Распространение звука в океане. Пер. с англ. под ред. Бреховских Л.М. М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. С. 48–156.
3. *Рожин Ф.В., Тонаканов О.С.* Общая гидроакустика. М.: Изд-во МГУ, 1988. 160 с.
4. *Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г.* Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 90–100.
5. *Луньков А.А., Петников В.Г., Черноусов А.Д.* Оценка эффективной скорости звука в дне мелководных акваторий // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 745–753.
6. *Комиссарова Н.Н., Фурдуев А.В.* Акустический метод измерения газосодержания в донных осадках // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 5. С. 666–670.
7. *Katsnelson B., Katsman R., Lunkov A., Ostrovsky I.* Acoustical methodology for determination of gas content in aquatic sediments, with application to Lake Kinneret, Israel, as a case study // *Limnology and Oceanography: Methods*. 2017. V. 15. № 6. P. 531–541.
8. *Katsnelson B., Lunkov A., Ostrovsky I., Uzhansky E.* Estimation of gassy sediment parameters from measurements of angular and frequency dependencies of reflection coefficient // *Proceedings of Meetings on Acoustics*. 2019. V. 33. 005004.
9. *Кононов В.А., Доманов М.М.* Соединение азота и фтора в придонной и иловой воде Балтики в районах акустических аномалий // *Океанология*. 1999. Т. 39. № 3. С. 370–375.
10. *Большаков А.М.* Газовогеохимические исследования // *Биогеохимия пограничных зон Атлантического океана* / Под ред. Романкевича Е.А. М.: Наука, 1994. С. 353–359.
11. *Рокос С.И.* Газонасыщенные отложения верхней части разреза Баренцево-Карского шельфа / Автореф. дис. ... канд. геогр. наук. 25.00.28. Кольский научный центр РАН, Мурманский морской биологический институт. Мурманск, 2009. 24 с.
12. *Гусев В.А., Руденко О.В.* Нелинейный звук в слое газонасыщенных осадков // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 2. С. 169–181.
13. *Алексеев Г.В.* Метод нормальных волн в подводной акустике. Владивосток: Дальнаука, 2006. 360 с.
14. *Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В.* Звуковое поле в мелководном волноводе арктического типа с дном, содержащим газонасыщенный осадочный слой // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 4. С. 389–405.
15. *Акустика океана.* Пер с англ. под ред. Дж. Де Санто. М.: Мир, 1982.
16. *Григорьев В.А., Петников В.Г.* О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 6. С. 681–698.
17. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* *Fundamentals of Shallow Water Acoustics.* New York: Springer, 2012.
18. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
19. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред. Т.1. М.: Наука, 2007. 443 с.
20. *Akal T.* The relationship between the physical properties of underwater sediments that affect bottom reflection // *Marine Geology*. 1972. V. 13. № 4. P. 251–266.
21. *Hamilton E.L.* Compressional-wave attenuation in marine sediments // *Geophysics*. 1972. V. 37. № 4. P. 620–646.

# О ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗВУКОВЫХ СИГНАЛОВ В МЕЛКОМ МОРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ФАЗОВЫХ ИНВАРИАНТОВ

© 2022 г. Г. Н. Кузнецов<sup>a, \*</sup>, А. Н. Степанов<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

<sup>b</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
Московское ш. 34, Самара, 443086 Россия

\*e-mail: skbmortex@mail.ru

Поступила в редакцию 18.06.2021 г.

После доработки 20.12.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Получены и анализируются дифференциальные уравнения для описания динамики “гребней”, построенных по зонам интерференционных максимумов, и линий звукового давления с равными фазами. Показано, что эти линии не только не совпадают по направлению, но на отдельных участках практически ортогональны. При этом безразмерные параметры, определяющие динамику и гребней, и линий равных фаз, устойчивы, и на интервалах расстояний и при диапазонах частот с постоянным числом мод практически не зависят от частоты, свойств волновода и глубин расположения приемников и излучателей. Это позволяет считать инвариантным не только известный параметр Чупрова, построенный на поле интенсивности, но и параметр, определяющий на фазовой плоскости направление линий равных фаз сигналов. Предсказуемость указанных зависимостей позволяет произвести вдоль этих линий эффективное накопление мощности сигналов и увеличить отношение сигнал/помеха. Показано, что спектральные компоненты, вычисленные вдоль линий равных фаз, складываются когерентно, а при их сложении вдоль гребней суммируются видео когерентно — объединяются спектральные оценки мощности. В статье также анализируются аномальные явления как на поле интенсивности, так и на фазовой плоскости. Поясняется принципиально различающаяся физическая природа аномалий для линий, описывающих динамику гребней или линий равных фаз.

*Ключевые слова:* мелкое море, энергетический и фазовый инварианты, накопление мощности сигнала вдоль интерференционных гребней и вдоль линий с равными фазами, увеличение отношения сигнал/помеха

DOI: 10.31857/S0320791922030066

## ВВЕДЕНИЕ

Методы увеличения отношения сигнал/помеха в волноводе основываются на анализе закономерностей формирования звуковых полей сигналов и помех, позволяющих с большей или меньшей эффективностью накапливать в частотно-пространственной области мощность сигнала и подавлять помехи [1–3]. Среди наиболее помехоустойчивых и одновременно робастных — устойчивых к вариации моделей сигналов и помех методов, по нашему мнению, можно выделить голографические алгоритмы [4–6], в рамках которых поставлена и решена задача накопления мощности сигнала вдоль “гребней” — зон интерференционных максимумов (ИМА) в результате применения двумерного преобразования Фурье и траекторного накопления. В [5, 6] показана также возможность одновременной и

помехоустойчивой оценки дальности и радиальной компоненты скорости в пассивном режиме. Следует выделить работу [7], в которой также оценивается дальность и применяются близкие принципы накопления мощности сигнала, но для решения задачи применяется преобразование Радона. В результате и экспериментально, и расчетным путем установлено [4–7], что отношение сигнал/помеха при суммировании мощности сигнала вдоль гребней эффективно возрастает, так как кумулятивная энергия накапливается с использованием мощности сигналов в зонах ИМА.

Эти результаты в большей или меньшей степени основываются на том, что при относительном движении приемника и источника или распространении сигналов вдоль апертуры протяженных антенн в частотно-пространственной обла-

сти поля интенсивности формируется устойчивая веерная структура, в пределах которой чередующиеся зоны максимумов и минимумов подчиняются инвариантным соотношениям [8–12]. Характерным для веерной структуры является ее устойчивость к изменению условий распространения, что и позволило С.Д. Чупрову ввести понятие “интерференционный инвариант”  $\beta$  [8]. Позднее в работах Е.Ф. Орлова, Г.А. Грачева, Л.М. Бреховских [9–12], а также в зарубежных публикациях [13–15] была изучена связь интерференционной частотно-пространственной структуры поля интенсивности с внешними воздействующими факторами – параметрами грунта, глубиной и неоднородностью волновода, внутренними волнами и т.д. Подтверждено, что при ограниченных интервалах  $\Delta\omega$  и  $\Delta r$  параметр  $\beta$  слабо зависит от частоты и расстояния, и в первом приближении его действительно можно считать постоянным. Но значения инварианта зависят от свойств волновода, в частности, клиновидности [16] и вертикального распределения скорости звука, в зависимости от которого инвариант может иметь значения “1”, “–3”, бесконечность и т.д. [11, 12]. Отметим, что непрерывные (гладкие) зоны ИМА наблюдаются только на небольших расстояниях. При увеличении расстояния и повышении частоты происходит расщепление веерных структур, и формируются сначала зоны “бифуркации”, затем “трифуркации” [17].

В [18, 19] применительно к мелкому морю выполнено дополнительное исследование интерференционной амплитудно-фазовой структуры низкочастотного звукового давления (ЗД). В частности, установлено, что инвариантные характеристики поля наблюдаются не только при частотно-пространственном распределении спектров мощности (интенсивности) сигналов, но и на фазовой плоскости – это позволило ввести понятие фазового инварианта. Но аномальные свойства ни энергетических, ни фазовых инвариантов не исследованы, а методы их описания в рамках дифференциальных уравнений требуют дополнительной проработки. Не выполнено сравнение эффективности накопления мощности сигналов с целью увеличения отношения сигнал/помеха с использованием двух инвариантов. Не вполне ясен вопрос о распределении суммарной мощности сигналов вдоль гребней при переходе от одной частоты к другой. Аналогичную задачу необходимо решать и для линий равных фаз.

Ниже рассматриваются некоторые из поставленных задач. Установлено различие эффективности накопления мощности ЗД в частотно-пространственной области поля интенсивности и на фазовой плоскости. Показано, что накопление мощности при сохранении реализациями постоянной фазы происходит эффективнее, чем при

сложении некогерентных сигналов, зарегистрированных вдоль гребней на разных частотах и расстояниях. Отмечается, что, если фазы сигналов не постоянные, когерентность отдельных Фурье-компонент теряется и выполняется видео когерентное суммирование, т.е. на разных частотах суммируются энергии сигналов. Показано, что в отличие от свободного пространства существующие в волноводе аномалии ограничивают интервалы расстояний и диапазоны частот, в пределах которых возможно эффективное накопление энергии как на поле интенсивности, так и на фазовой плоскости. Сформулированы ограничения на интервалы расстояний или диапазоны частот, в пределах которых возможно эффективное накопление энергии.

### 1. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ РАВНЫХ ФАЗ ДЛЯ ВОЛНОВОДА ПЕКЕРИСА

Известные теоретические построения, описывающие свойства интерференционной структуры в мелком море, основаны на пространственно-частотном анализе поля интенсивности ЗД. Следуя Л.М. Бреховских [11], запишем для волновода Пекериса выражение для звукового давления монополюсного излучателя в этом волноводе:

$$P(\omega, r, z_0, z, t) = \frac{\omega \rho_0}{h} \sqrt{\frac{8\pi}{kr}} \sum_{l=1}^N p_l \exp[i\varphi_l(\omega, r)], \quad (1)$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $r$  – расстояние между источником и приемником,  $z_0$  и  $z$  – глубины источника и приемника,  $t$  – время,  $\rho_0$  – плотность воды,  $h$  – глубина волновода,  $k = \omega/c_0$  – волновое число,  $c_0$  – скорость звука в воде,  $N$  – количество нормальных волн,  $p_l = \sin(l\pi z_0/H) \sin(l\pi z/H)$  – коэффициенты их возбуждения,  $H = h + m/kv$  – эффективная глубина волновода,  $m = \rho_1/\rho_0$ ,  $\rho_1$  – плотность среды в подстилающем полупространстве,  $v^2 = 1 - n^2$ ,  $n = c_0/c_1 < 1$ ,  $c_1$  – скорость звука в этом полупространстве,  $\varphi_l(\omega, r) = k_l r - \omega t - \pi/4$  – фаза и  $k_l = k \cos(l\pi/kH)$  – волновое число  $l$ -й нормальной волны. Полученное Л.М. Бреховских выражение (1) и анализ интерференционной структуры поля интенсивности позволили [8, 9] записать соотношение, описывающее устойчивые интерференционные полосы интенсивности с максимальной амплитудой

$$\frac{\partial r}{\partial \omega} = \beta \frac{r}{\omega}, \quad (2)$$

где  $\beta$  – параметр, названный С.Д. Чупровым “интерференционным инвариантом”. Фактически это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение, решения которого существенным образом зависят от значения параметра  $\beta$ . Если параметр  $\beta$  можно считать постоянным,

то решение находится в явном виде. А именно, для  $\beta > 0$  решение уравнения имеет вид  $r(\omega) = a\omega^\beta$ , в частном случае при  $\beta = 1$  графики этих функций являются прямыми линиями. А для  $\beta < 0$  решениями (2) являются функции  $r(\omega) = a/\omega^{|\beta|}$ , в частном случае при  $\beta = -1$  эти графики являются гиперболами. В выписанных решениях коэффициент  $a$  определяется выбранными начальными условиями задачи Коши. Отметим, что уравнение (2) не устанавливает никаких связей параметра  $\beta$  со свойствами волновода.

Использование (1) позволяет по аналогии с (2) записать в пространстве частота–расстояние дифференциальное уравнение, описывающее линии равных фаз поля давления в виде [19]:

$$\frac{dr}{d\omega} = -\frac{r}{\omega} \left( 1 + \frac{\pi h}{kH^2} C \right) - \frac{t}{k} D = \beta_\phi \frac{r}{\omega} - \frac{t}{k} D, \quad (3)$$

где  $C = S_1/S$ ,  $D = S_2/S$ ,

$$S = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \cos \frac{m\pi}{kH} \cos(k_l - k_m)r,$$

$$S_1 = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N m p_l p_m \sin \frac{m\pi}{kH} \cos(k_l - k_m)r,$$

$$S_2 = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \cos(k_l - k_m)r.$$

В соответствии с изложенными выше рассуждениями, вид решений уравнения (3) существенно зависит от знака параметра  $\beta_\phi = -(1 + \pi h C/kH^2)$ . В [19] показано, что в волноводе Пекериса  $1 + \pi h C/kH^2 > 0$ , т.е. решения уравнения (3) имеют вид  $r(\omega) = a/\omega^{|\beta|}$ , и линии равных фаз подобны гиперболам.

## 2. УРАВНЕНИЕ ЛИНИЙ ГРЕБНЯ

Уравнение линий гребня, т.е. линии максимумов амплитуд давления для волновода Пекериса в пространстве частота–расстояние получим, исходя из того, что амплитуда давления вдоль линии гребня может не оставаться постоянной, но вдоль этого направления она изменяется в наименьшей степени. Будем считать, что в любой точке на линии гребня производная от модуля амплитуды  $|P(\omega, r)|$  по направлению  $\mathbf{n}$ , касательному к линии гребня в этой точке, принимает минимальное значение при переборе по всем возможным направлениям, которые можно задать с помощью полярного угла  $\alpha$  на плоскости  $(\omega, r)$ :

$$\frac{\partial |P(\omega, r)|}{\partial \mathbf{n}} = \min_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} \left( \frac{\partial |P(\omega, r)|}{\partial \omega} \cos \alpha_\omega + \frac{\partial |P(\omega, r)|}{\partial r} \cos \alpha_r \right), \quad (4)$$

где  $\cos \alpha_\omega$  и  $\cos \alpha_r$  – направляющие косинусы прямой линии с полярным углом  $\alpha$ . Из (1) легко получить следующие значения входящих в (4) частных производных:

$$\frac{\partial |P(\omega, r)|}{\partial \omega} = \frac{A_0 (S_2 + krS_3 + \pi rhS_4/H^2)}{\sqrt{krS_2}},$$

$$\frac{\partial |P(\omega, r)|}{\partial r} = -\frac{A_0 \omega (S_2 - 2krS_3)}{2r\sqrt{krS_2}},$$

где  $A_0 = \rho_0 \sqrt{8\pi}/h$ ,

$$S_3 = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_l p_m \cos \frac{m\pi}{kH} \sin(\phi_l - \phi_m),$$

$$S_4 = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N m p_l p_m \sin \frac{m\pi}{kH} \sin(\phi_l - \phi_m).$$

Уравнение (4) можно упростить, считая в первом приближении, что минимальное значение производной от модуля амплитуды давления по направлению равно нулю. Приравнявая к нулю полный дифференциал модуля давления  $d|P(\omega, r)| = 0$ , получим:

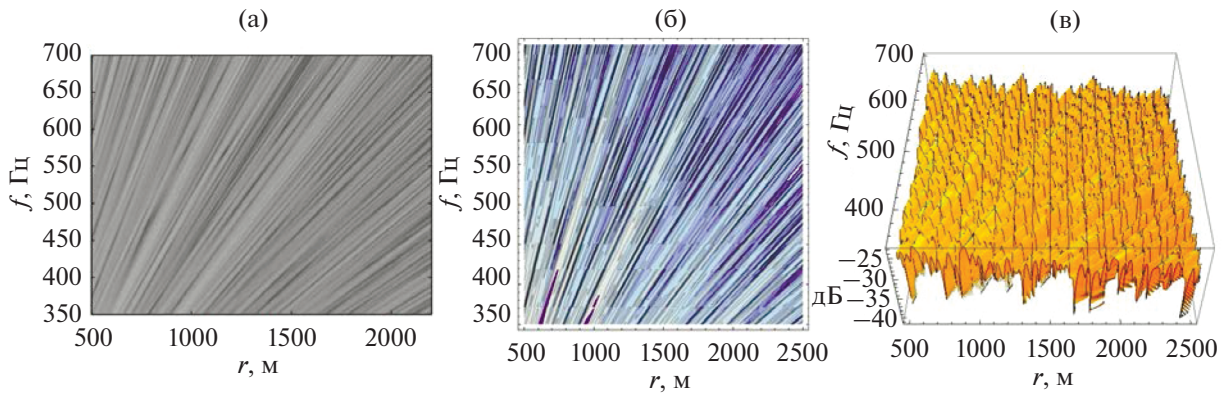
$$\frac{dr}{d\omega} = \beta \frac{r}{\omega},$$

$$\beta = 2 \left( 1 + \frac{3krS_2 + \pi rhS_3/H^2 - \omega t S_4}{S_2 - 2krS_3} \right). \quad (5)$$

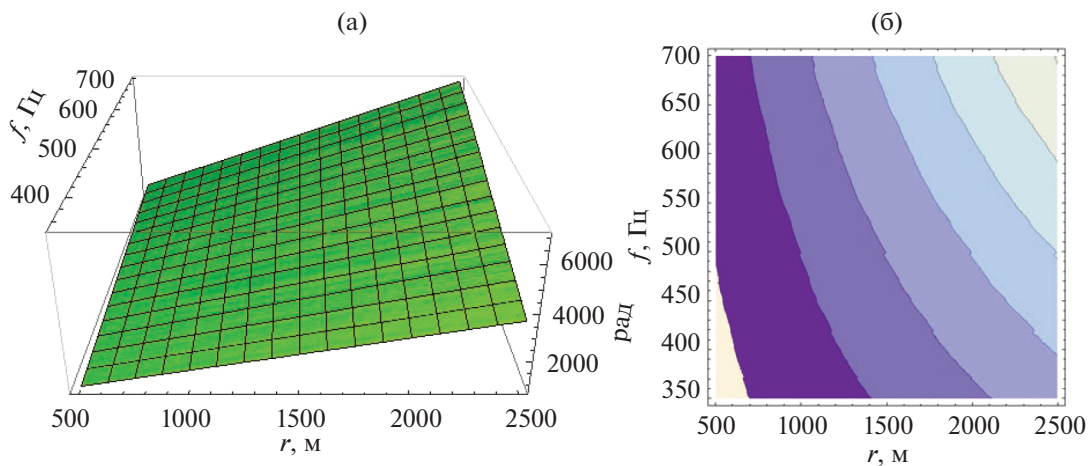
Таким образом, общий вид полученного уравнения линий гребня давления для волновода Пекериса согласуется по структуре с дифференциальным уравнением (2) для линий интерференционных полос интенсивности, полученным в [8–14], но при этом коэффициент уравнения  $\beta$  оказывается не произвольной константой, а определяется через заданные для волновода и нормальных волн исходные параметры.

## 3. СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯ ВДОЛЬ ГРЕБНЕЙ И ВДОЛЬ ЛИНИЙ РАВНЫХ ФАЗ. ВЛИЯНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ЗОН

Моделирование полей проведено для условий, принятых в [7]: источник монополярный монохроматический, глубина волновода 100 м, скорость звука в воде 1500 м/с,  $m = 1.7$ ;  $n = 0.88$ ; глубины приемника 20 м и источника 40 м. Расстояния задаются в интервале 500–2500 м, диапазон частот 350–700 Гц. Результаты расчетов представлены на рис. 1.



**Рис. 1.** (а) – Интерференционная структура поля интенсивности, взятая из [7], (б) – контурный график и (в) – поверхность амплитуды ЗД, рассчитанные нами для условий, принятых в [7].



**Рис. 2.** (а) – Поверхность интегральной фазы звукового давления и (б) – ее контурный график в зависимости от частоты  $f$  и расстояния  $r$ .

Для сравнения результатов расчетов с данными в [7], моделировалась поверхность амплитуд ЗД, контурный и объемный графики которой приведены на рис. 1б и 1в соответственно. Хорошо видно полное соответствие структур линий гребней на контурных графиках поля интенсивности (рис. 1а) и поля амплитуды давления (см. рис. 1б). И это неслучайно, поскольку эти линии, как легко показать, должны иметь одинаковый наклон и расположение. Покажем, например, что эти линии имеют одинаковый наклон: при определении наклона линии гребня интенсивности в [8–12] исходят из соотношения  $\Delta\omega/\Delta r = -(\partial I/\partial r)/(\partial I/\partial\omega)$ , поэтому

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta r} = -\frac{\partial I/\partial r}{\partial I/\partial\omega} = -\frac{\partial |P|^2/\partial r}{\partial |P|^2/\partial\omega} = -\frac{\partial |P|/\partial r}{\partial |P|/\partial\omega}.$$

Следовательно, направления линий гребней в поле интенсивности совпадают с направлениями

линий гребней в поле звукового давления. Это позволяет рассчитать зависимость фазы ЗД вдоль гребня (в координатах  $f$  и  $r$ ).

Для указанных диапазонов частоты и расстояний были также рассчитаны фазовая поверхность, представляющая собой фрагмент седловой поверхности (гиперболического параболоида). Эта поверхность и ее контурный график приведены на рис. 2.

Очевидны существенные отличия амплитудной и фазовой поверхностей. В частности, амплитудные поверхности на рис. 1 имеют набор поперечных разрезов, на которых они при увеличении частоты претерпевают разрывы – скачки амплитуды давления, вызванные появлением новых нормальных волн. В структуре фазовой поверхности на рис. 2 такие скачки отсутствуют. Однако на фазовой поверхности имеются специфические изломы, связанные с аномалиями – дислокациями фаз [20–22], возникающими в зо-



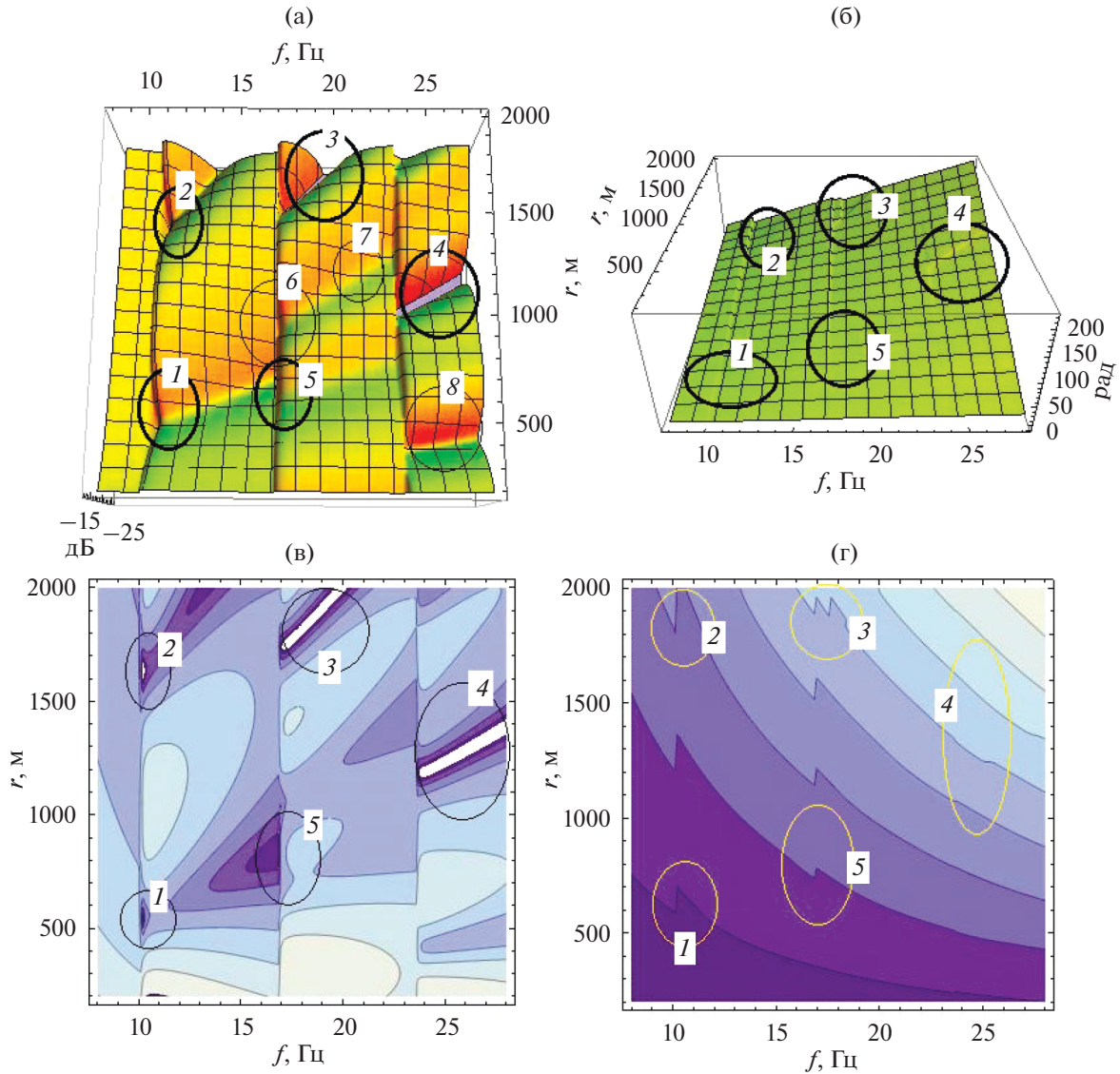


Рис. 3. (а, в) – Амплитудная и (б, г) – фазовая поверхности давления монополя в пространственно-частотной ( $r \times f$ ) области. Амплитуда на рис. 3а измеряется в дБ.

нах минимумов давления. Таким образом, структура гребней – интерференционных полос максимальной амплитуды интенсивности (или давления) – отличается от структуры фазовой поверхности и линий равных фаз.

В связи с обнаружением этих особенностей, для более детального изучения амплитудной и фазовой структур полей 3Д исследовалась область частот 9–30 Гц и расстояний  $200 \leq r \leq 2000$  м. При этом приемник находился на глубине 100 м, а источник – на глубине 20 м. На рис. 3 приведены полученные объемные изображения и контурные графики амплитудной и фазовой поверхностей звукового давления.

На рис. 3а и 3в видно, что в рассматриваемой частотной области можно выделить четыре зоны,

в каждой из которых количество нормальных волн постоянно, а при переходе в соседнюю зону добавляется новая мода. Частоты, на которых появляются новые моды: 10.8, 16.8 и 23.5 Гц. В диапазоне от 9 до 10.8 Гц поле формируется двумя модами, от 10.8 до 16.8 Гц – тремя модами и т.д. В последней из рассматриваемых зон – свыше 23.5 Гц наблюдается четыре нормальные волны. Однако в структуре фазовой поверхности при появлении новых нормальных волн никаких изменений не происходит, что отчетливо видно по рис. 3б и 3г. Но при этом, как отмечено выше, фазовая поверхность имеет свои особенности. На рис. 3а и 3в кружками с номерами 1–5 отмечены зоны минимумов амплитуды давления, которым на рис. 3б и 3г соответствуют аномальные зоны –

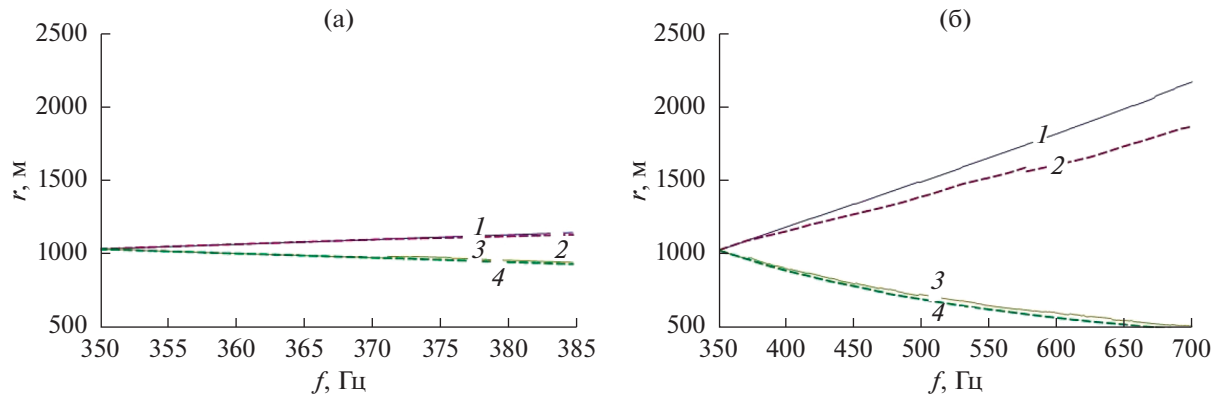


Рис. 4. Линии гребня (кривые 1, 2) и равных фаз (кривые 3, 4) на различных частотах.

зоны дислокации [20–22] фазы, помеченные кружками с теми же номерами. Эти дислокации порождают изломы, идущие далее по фазовой поверхности либо параллельно оси расстояний (зоны с номерами 1 и 5), либо под углом к ней (зоны с номерами 2–4). В точках дислокаций и на идущих от них изломах фазовая поверхность имеет скачки значений фазы величиной до  $\pi$  радиан. Величина скачка тем больше, чем глубже минимум амплитуды давления и меньше расстояние до дислокации фазы. Кроме того, на поверхности амплитуд давления имеются зоны минимумов, не связанные с появлением дислокаций фазы и изломов фазовой поверхности. Такие зоны минимумов показаны на рис. 3а и 3в кружками с номерами 6–8. Заметим, что в том случае, когда точка минимума амплитуды давления попадает на границу между зонами с разным количеством нормальных мод (кружки 1, 2, 5), линии разломов фазовой поверхности совпадают с линиями скачков амплитуды давления.

Из приведенных результатов следует, что обнаруженные аномалии как на поверхности, описывающей структуру поля интенсивности, так и на фазовой плоскости, ограничивают стационарные пространственные зоны (участки траекторий) или диапазоны частот, в пределах которых возможно видео когерентное или когерентное накопление мощности сигналов. В свободном однородном пространстве такие ограничения отсутствуют, так как отсутствует дисперсия скорости звука и нет интерференции.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО И ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТОВ

Далее в условиях, принятых выше для первой группы расчетов, определялись фактические линии равных фаз и гребня, а также их теоретические аналоги, являющиеся решением дифференциальных уравнений (3) и (5) соответственно (рис. 4). Кроме того, вычислялись амплитуды и

фазы давления вдоль этих линий. Фактические линии гребня и равных фаз определялись путем прямого численного анализа амплитудной и фазовой поверхностей. В качестве начального условия задачи Коши для дифференциальных уравнений выбран один из локальных максимумов на начальной частоте 350 Гц, к которому также были “привязаны” и фактические линии гребня, и фактические линии равных фаз

На рис. 4а и 4б сравниваются решения уравнений (3) и (5) с соответствующими фактическими (численными) линиями для частот 350–385 и 350–700 Гц соответственно. Видно, что знаки наклона линий гребня и равных фаз противоположны, а крутизна наклона кривых возрастает при увеличении частоты. Можно также отметить, что решение дифференциального уравнения (3) (кривая 4) хорошо соответствует фактической линии равных фаз (кривая 3) для достаточно большого диапазона частот 350–700 Гц и соответствующих расстояний. В то же время решение уравнения (5) для линии гребня (кривая 2) соответствует фактической линии гребня (кривая 1) на ограниченном диапазоне частот 350–385 Гц (см. рис. 4а) и отклоняется от нее в диапазоне до 700 Гц. Такое возрастание погрешностей является следствием ограничения, принятого при выводе уравнения (5): количество нормальных волн не должно изменяться, либо эти изменения не оказывают существенного влияния на формируемое поле. Это условие, очевидно, не соблюдается для второго диапазона частот, что приводит к расщеплению веерной структуры поля 3Д и переключению линии зон интерференционных максимумов на вновь образованные гребни. Решения дифференциального уравнения этот эффект не учитывают, поэтому на рис. 4б накапливается отклонение теоретической линии гребня (кривая 2) от фактической (кривая 1). Полученные результаты показывают, что уравнения (3) и (5) могут быть использованы для прогноза ориентации линий рав-

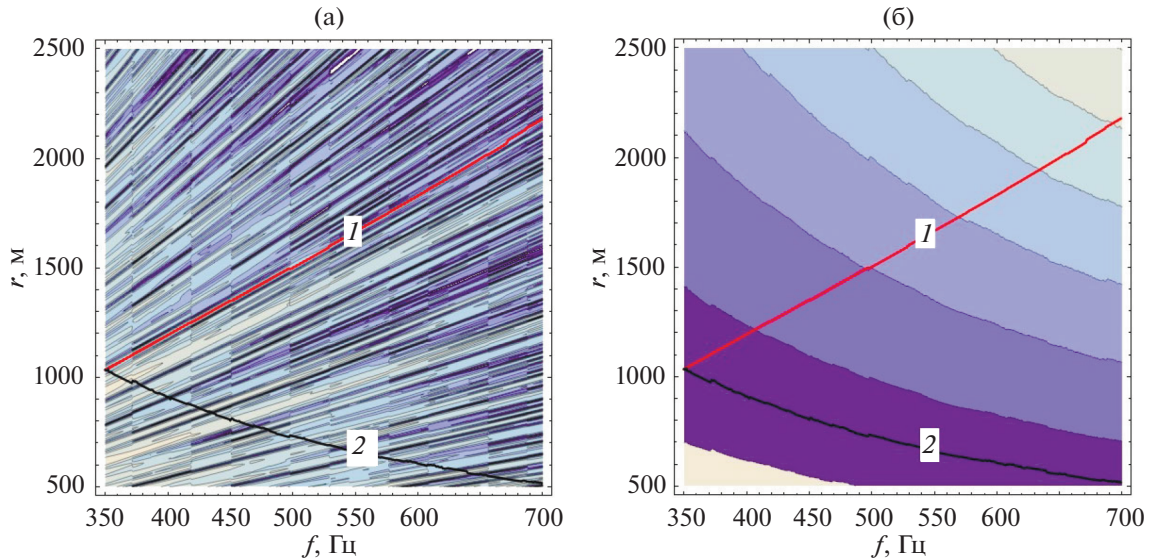


Рис. 5. Контурные графики (а) – амплитуды и (б) – фазы давления, совмещенные с линиями гребня (1) и равных фаз (2).

ных фаз и гребней в реальных ситуациях, но для уравнения (5) – с ограничениями.

На рис. 5 показаны линии гребня (кривые 1) и равных фаз (кривые 2), совмещенные с контурными графиками амплитуды (рис. 5а) и фазы (рис. 5б) давления. На рис. 5а хорошо видно, что фактическая линия ИМА (кривая 1) из-за расщепления веерной структуры, связанной с появлением новых нормальных волн, может “перескакивать” на соседние гребни с большей амплитудой. А линия равных фаз (кривая 2) пересекает несколько соседних гребней. Видно также (см. рис. 5б), что интегральная фаза ЗД вдоль гребня возрастает пропорционально частоте.

На рис. 6 для различных номеров гребней и для соответствующим образом смещенных линий равных фаз изображены графики амплитуды давления, рассчитанные вдоль фактических линий гребня (рис. 6а) и равных фаз (рис. 6б). Видно, что амплитуды вдоль фактических линий гребней (кривые 1) в среднем убывают. Это совершенно естественно, так как вдоль этой линии при увеличении частоты  $\omega$  расстояние  $r$  также увеличивается, и амплитуда убывает по конкретному закону спада, зависящему от вертикального распределения скорости звука, глубин волновода, источника и приемника, но с учетом вариации частоты.

На рис. 6а видно, что амплитуды ЗД вдоль линии равных фаз (кривая 2), на которой расстояние  $r$  убывает при возрастании частоты  $\omega$ , на начальном участке (до примерно 550–600 Гц) в основном меньше, чем амплитуды на линии гребня. Затем, по мере убывания амплитуды на линии гребня амплитуда на линии постоянной фазы за счет перемещения в область меньших расстояний

и, следовательно, больших амплитуд, становится в среднем больше амплитуды ЗД на линии гребня. Это может оказывать заметное влияние на эффективность накопления энергии сигнала при смещении вдоль гребней и линий равных фаз.

Фаза на фактической линии равных фаз, рис. 6б, как ей и положено, постоянна, что видно по ее параллельности оси абсцисс, а вот на линии гребня (кривые 1) она в соответствии с уравнением (3) линейно возрастает. Этот результат хорошо согласуется с результатами работ [23–25], согласно которым градиенты фазы и групповое время запаздывания вдоль зон интерференционных максимумов (вдоль гребней) определяются стабильными эффективными “фазовой и групповой” скоростями звука в волноводе. Поэтому интегральная фаза увеличивается пропорционально расстоянию, что и наблюдается на рис. 6б (кривые 1).

Как известно [8–12], на плоскости частота–расстояние при ограниченных диапазонах изменений частоты  $\Delta\omega$  и расстояния  $\Delta r$ , наклон линий гребня  $\beta$  определяется из соотношения  $\beta \approx (r_0/\omega_0)(\Delta\omega/\Delta r)$ , где  $(\omega_0, r_0)$  – выбранная начальная точка. По данным, полученным при расчете изображенной на рис. 4б фактической линии гребня (кривая 1), имеем  $\omega_0 = 350$  Гц,  $\omega_K = 700$  Гц,  $\Delta\omega = 350$  Гц,  $r_0 = 1034$  м,  $r_K = 2079$  м,  $\Delta r = 1045$  м, где  $(\omega_K, r_K)$  – конечная точка линии. Получаем известный [8–12] для волновода Пекериса результат:  $\beta \approx (1034/350)(350/1045) = 0.99 \approx +1$ . Следовательно, линии гребня на плоскости частота–расстояние действительно описываются уравнением вида  $r(\omega) = a\omega^\beta = r_0\omega/\omega_0$ .



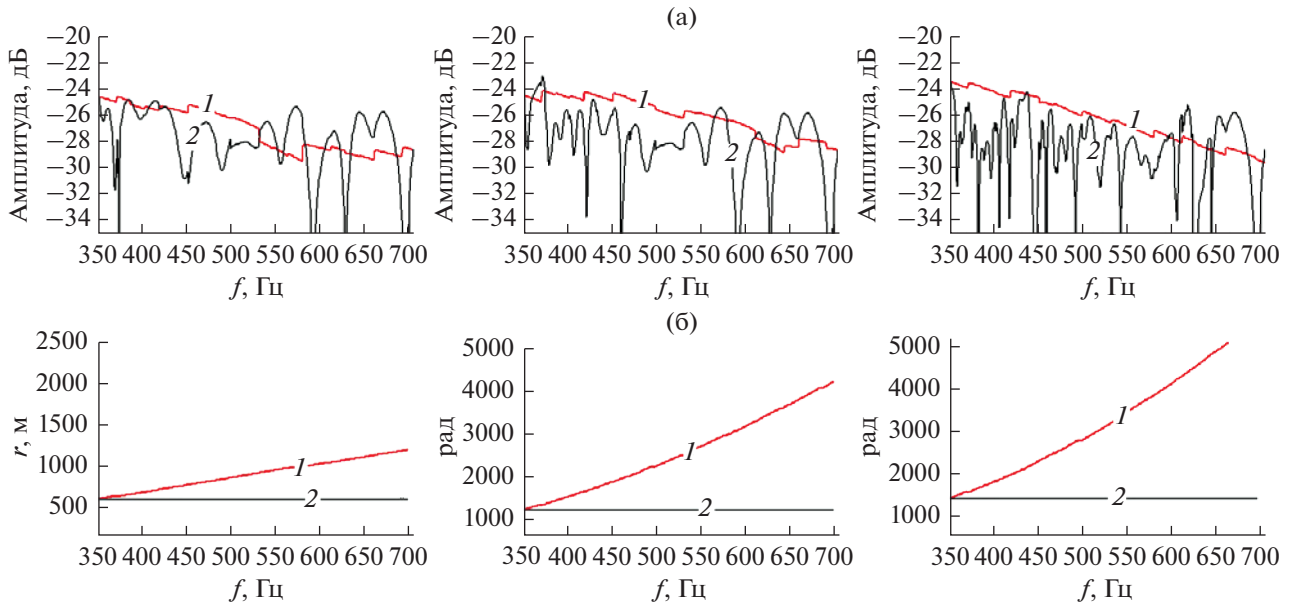


Рис. 6. (а) – Амплитуда и (б) – фаза давления на линиях гребня и равных фаз (кривые 1 и 2) для первого, четвертого и десятого гребней в выбранной пространственно-частотной области.

Аналогичный расчет можно произвести и для линии равных фаз, но нужно учесть, что в соответствии со сделанными выше выводами это кривая является гиперболоподобной линией, поэтому касательная к линии постоянной фазы совпадает с самой линией только на малых расстояниях. В связи с этим для определения наклона касательной к фактической линии равных фаз выберем данные, использованные для построения графика этой линии на рис. 4а:  $\omega_0 = 350$  Гц,  $\omega_K = 385$  Гц,  $\Delta\omega = 35$  Гц,  $r_0 = 1034$ ,  $r_1 = 936$  м,  $\Delta r = -98$  м. Тогда  $\beta_\phi = 1034/350 \times 35/(-98) = -1.06 \approx -1$ . Отсюда следует, что в волноводе Пекериса линия равных фаз является обычной гиперболой:  $r(\omega) = a/\omega$ , где  $a = r_0/\omega_0$ .

Значения параметров  $\beta$  и  $\beta_\phi$  вдоль теоретических линий гребня и равных фаз можно рассчитать одновременно с расчетом самих линий. Эти значения вычислены для двух разных волноводов, графики которых в зависимости от линейной частоты  $f$  представлены на рис. 7. Кривые 1 на этом рисунке соответствуют волноводу со следующими характеристиками: источник монополюсный, глубина волновода 100 м, скорость звука в воде 1500 м/с,  $m = 1.7$ ;  $n = 0.88$ ; глубины приемника 20 м и источника 40 м. Расстояния 500–2500 м, диапазон частот 350–700 Гц. А кривые 2 получены для волновода глубиной  $h = 200$  м, отношение плотностей  $m = 2.7$ , отношение скоростей звука  $n = 0.83$ . По рисунку хорошо видно, что значения параметров относительно слабо зависят от частоты. Но если значения параметра  $\beta$  колеблются вблизи “+1”, то значения параметра  $\beta_\phi$  варьиру-

ются вблизи значения “–1”. Как показывают дополнительные расчеты, в определенных пределах значения параметра  $\beta_\phi$  слабо зависят и от свойств волновода Пекериса. В связи с этим параметр  $\beta_\phi$  также можно считать инвариантом, но фазовым. Заметим, что у фазового инварианта при появлении новых нормальных волн скачки не наблюдаются, но вблизи дислокаций имеются резкие и знакопеременные выбросы, которые хорошо наблюдаются и на рис. 3 и 7.

Из полученных результатов также следует, что для волновода Пекериса (а, возможно, и для других видов волноводов) имеет место соотношение  $\beta\beta_\phi \approx -1$ . Так как параметры  $\beta$  и  $\beta_\phi$  фактически определяют наклоны линий гребня и наклоны касательных к линиям равных фаз, соотношение  $\beta\beta_\phi \approx -1$  означает, что обсуждаемые линии должны быть приблизительно ортогональны. Стабильность значений  $\beta$  и  $\beta_\phi$  далее используется для накопления мощности вдоль линий гребня и линий с постоянной фазой.

## 5. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАКОПЛЕНИЯ МОЩНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим эффективность накопления мощности сигналов при суммировании спектральных отсчетов вдоль гребней и вдоль линий равных фаз. Накопление мощности сигнала выполним двумя разными способами (рис. 8), но с одинаковым перебором частот на выбранной сетке  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$ . При этом для когерентного на-

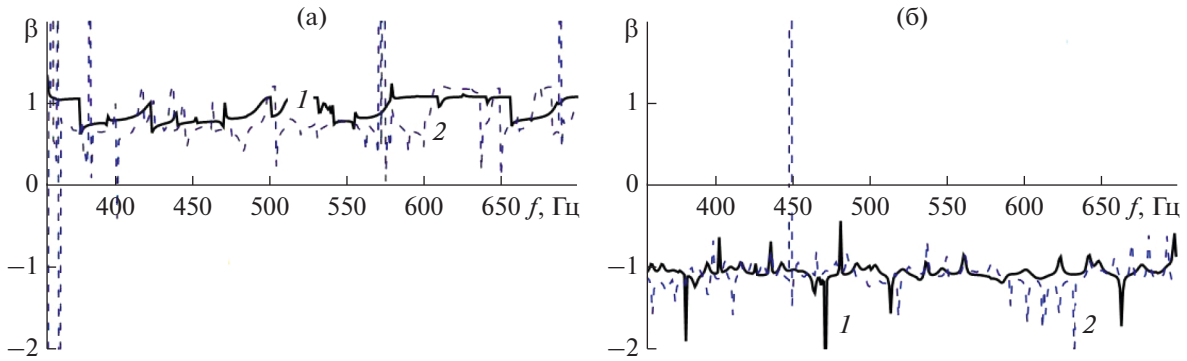


Рис. 7. (а) – Инвариант Чупрова  $\beta$  вдоль теоретической линии гребня (см. рис. 4б, кривая 2) и (б) – фазовый инвариант  $\beta_\phi$  вдоль теоретической линии равных фаз (см. рис. 4б, кривая 4).

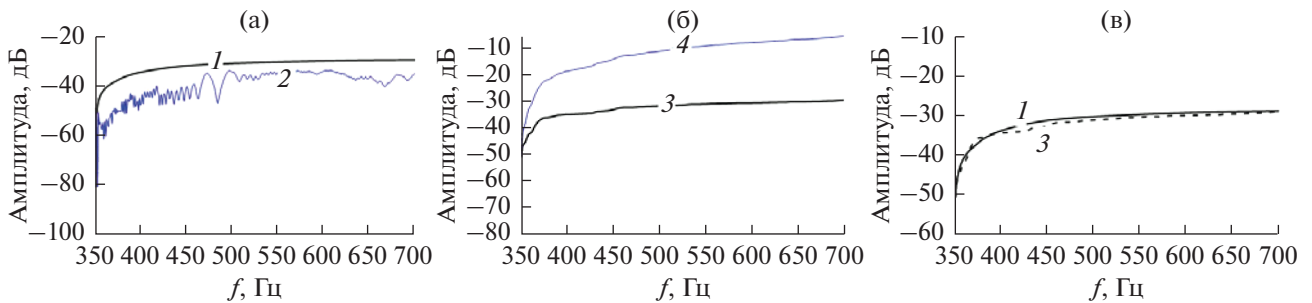


Рис. 8. Результаты накопления мощности сигнала при движении (а) – вдоль линии гребня и (б) – вдоль линии равных фаз, а также (в) – сравнение эффективности некогерентного накопления при движении вдоль этих линий.

копления, т.е. накопления с учетом фазы давления использовалась сумма вида

$$S_1 = \left| \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)| \exp\{i[\varphi(\omega_m, r)]\} \right|^2, \quad (6)$$

а для видео когерентного, т.е. накопления без учета фазы

$$S_2 = \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)|^2. \quad (7)$$

Поскольку речь идет о расчете вдоль некоторой линии  $r = r(\omega)$ , аргумент  $r$  в этих суммах однозначно определяется аргументом  $\omega_m$ . На рис. 8а представлены результаты такого накопления при смещении вдоль фактической линии гребня, соответствующего рис. 4б и рассчитанного для условий, принятых выше для первой группы расчетов. Кривая 1 является графиком накопления мощности сигнала с помощью соотношения (7), а кривая 2 – графиком накопления на основе соотношения (6), т.е. с учетом фазы сигнала. На рисунке видно, что при движении вдоль линии гребня накопление без учета фазы за счет постоянного суммирования максимумов амплитуды оказалось эффективнее, чем накопление с учетом

фазы, которая изменяется при вариации  $\omega_m$ . Причина в том, что при движении вдоль линии гребня фаза Фурье-компонент на разных частотах изменяется. Как следствие, при суммировании сигналов на разных частотах некоторые составляющие увеличивают суммарную мощность, а некоторые – суммируются с противоположным знаком и мощность уменьшается. Это, с одной стороны, делает зависимость от частоты изрезанной (кривая 2), а с другой стороны, суммарная мощность может уменьшаться по сравнению с энергетическим суммированием максимальных уровней сигнала. Таким образом, в общем случае когерентное накопление (6) может оказаться как менее, так и более эффективным, чем энергетическое накопление (7). Это следует из элементарного соображения о том, что сумма квадратов произвольных (с разными знаками) чисел может быть как больше, так и меньше квадрата их суммы.

На рис. 8б представлены результаты накопления мощности при движении вдоль фактической линии равных фаз, которая также показана на рис. 4б. Кривая 3 соответствует накоплению мощности сигнала по соотношению (7), а кривая 4 – накоплению на основе соотношения (6). Видно существенное преимущество когерентного накопления, когда при расчетах учитывается фаза:

сумма  $S_1$  на 20–25 дБ превышает сумму  $S_2$ . Не сложно показать, что этот вывод является общим, поскольку на линии равных фаз для всех выбранных точек сетки  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$  фазы давления одинаковые  $\varphi(\omega_m, r) = \varphi$ . Различие амплитуд  $|P(\omega_m, r)|$  учитывается соотношением

$$\left| \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)| \exp\{i[\varphi(\omega_m, r)]\} \right|^2 = \left| \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)| \exp(i\varphi) \right|^2 = \left| \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)| \right|^2.$$

Поскольку квадрат суммы положительных чисел  $|P(\omega_m, r)| > 0$  всегда больше суммы их квадратов, то для линии равных фаз получаем неравенство

$$\left| \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)| \exp\{i[\varphi(\omega_m, r)]\} \right|^2 > \sum_{m=0}^K |P(\omega_m, r)|^2,$$

т.е.  $S_1 > S_2$  (когерентное накопление мощности эффективней видео когерентного).

И, наконец, примерно совпадающие графики некогерентного накопления на рис. 8в показывают близкую эффективность такого накопления как вдоль линии гребня, так и вдоль линии равных фаз — если сложение выполнять энергетически.

Следует отметить, что в соотношениях (6) и (7) не учитывается помеха, поэтому алгоритм увеличения отношения сигнал/помеха при “движении” вдоль линий равной фазы следует дорабатывать — аналогично алгоритму, разработанному в [6, 7] применительно к суммированию Фурье-компонент вдоль линии гребня. Но если предположить, что помехи являются случайными (гауссовыми), но стационарными, то при суммировании помех по соотношениям (6) и (7), они будут складываться одинаковым способом — некогерентно. Как следствие, увеличение или уменьшение только мощности сигнала будет приводить к увеличению или уменьшению отношения сигнал/помеха. Поэтому соотношения (6) и (7), рассчитанные только по сигналам, дают полное представление о помехоустойчивости двух алгоритмов накопления мощности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В многомодовых волноводах интерференционные явления в частотно-пространственной области проявляются при анализе поля интенсивности и на фазовой плоскости. Характеристики двумерных полей, рассчитанных с использованием полученных в статье двух дифференциальных уравнений, существенно различаются, однако их структура в равной мере определяется устойчивыми инвариантными соотношениями. Общеиз-

вестный интерференционный инвариант Чупрова, полученный при анализе поля интенсивности (по нашему мнению — “энергетический” интерференционный инвариант), в мелком море и на низких частотах стремится к “+1”, а фазовый интерференционный инвариант в этих условиях имеет величину, близкую к “-1”. Поверхности гребней и линии равных фаз практически ортогональны и их закономерности отклоняются от “+1” и “-1” только в аномальных зонах, где при увеличении частоты формируются и суммируются новые моды (энергетический инвариант) или образуются зоны с глубокими интерференционными минимумами — дислокациями (фазовый инвариант). Соответственно, для волновода Пекериса имеем  $\beta\beta_\varphi \approx -1$ . Можно предположить, что аналогичное соотношение имеет место и для других типов волноводов, однако для того, чтобы в этом убедиться, необходимо выполнить дополнительный анализ.

Энергетический и фазовый инварианты отличаются устойчивостью и слабой зависимостью от глубин расположения источника и приемников, частоты звука и условий распространения, но для заданного волновода могут зависеть от вертикального распределения скорости звука. Наблюдается зависимость величины  $\beta$  от сформированных в волноводе групп однотипных мод с разными номерами (водных, вытекающих или захваченных).

Устойчивость инвариантов позволяет построить алгоритмы эффективного обнаружения, основанные на суммировании комплексных спектров сигналов или спектральных плотностей мощности сигналов, соответственно, вдоль линий с постоянной фазой или вдоль гребней. Суммирование Фурье-компонент вдоль линий с постоянной фазой производится когерентно, а потому — в среднем более эффективно. Суммирование спектральных отсчетов интенсивности сигналов вдоль гребней выполняется энергетически — без учета фазы, т.е. видео когерентно. Для увеличения помехоустойчивости можно рекомендовать накапливать мощность сигналов с использованием одновременно двух алгоритмов — при “движении” вдоль гребней и вдоль линий с постоянной фазой.

Интервалы расстояний или диапазоны частот, в пределах которых возможно накопление мощности сигналов, ограничиваются аномальными зонами: а) для гребней — частотами или расстояниями, на которых формируются новые или исчезают ранее сформированные моды; б) для линий с постоянной фазой — зонами с глубокими интерференционными минимумами, т.е. зонами

дислокаций – в этих зонах из-за влияния помех оценки фазы могут стать случайными и корреляционная связь сигналов на разных частотах и расстояниях прерывается. Показан принципиально различающийся характер аномалий для линий, описывающих динамику гребней или линий равных фаз.

Формирование при движении источника или приемника особых зон и направлений, имеющих в частотно-пространственной области предсказуемый и стабильный характер, позволяет их использовать для повышения эффективности обнаружения слабых сигналов и оценки их параметров. Особые свойства сигналов, распределенных вдоль гребней зон ИМА, уже используются для увеличения помехоустойчивости и одновременно – определения расстояния до источника и радиальной скорости его движения [5–7]. Накопление мощности сигнала при сложении реализаций вдоль линий с постоянной фазой может оказаться также эффективным, поскольку сигналы, распределенные вдоль этих линий когерентны. Но при “попадании” в зону интерференционного минимума фаза может “теряться” и эффективное накопление реализуется не в полном объеме.

Алгоритмы накопления мощности вдоль линий с постоянной фазой требуют дополнительного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Акустика мелкого моря, нелинейная акустическая диагностика, нелинейная динамика волн” (номер гос. регистрации АААА-А18-118021390174-1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00941) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания в сфере научной деятельности № 0852-2020-0015.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корякин Ю.А., Смирнов С.А., Яковлев Г.В.* Корабельная гидроакустическая техника. Состояние и актуальные проблемы. СПб.: Наука, 2004. 410 с.
2. *Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Schmidt H.* Matched field processing: Source localization in correlated noise as an optimum parameter estimation problem // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. V. 83. P. 571–587.
3. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. С. 233–253.
4. *Кенигсбергер Г.В., Колинко В.Г., Кузнецов Г.Н.* Авторское свидетельство № 286264, приоритет изобретения от 16.06.1987 г., зарегистрировано 02.01.1989 г.
5. *Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А., Прошовецкий Д.Ю.* Помехоустойчивость интерферометрического метода оценки скорости источника звука в мелком море // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 5. С. 556–572.
6. *Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 4. С. 406–418.
7. *Cockrell K.L., Schmidt H.* Robust passive range estimation using the waveguide invariant // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127. № 5. P. 2780–2789.
8. *Чупров С.Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // *Акустика океана: современное состояние.* М.: Наука, 1982. С. 71–91.
9. *Орлов Е.Ф.* Интерференция широкополосного звука в океане // *Современные проблемы акустики океана.* М.: Наука, 1984. С. 85–89.
10. *Орлов Е.Ф., Шаронов Г.А.* Интерференция звуковых волн в океане. Владивосток: Дальнаука, 1998. 195 с.
11. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
12. *Грачев Г.А.* К теории инвариантов акустического поля в слоистых волноводах // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 1. С. 67–71.
13. *D’Spain G., Kuperman W.* Application of waveguide invariants to analysis of spectrograms from shallow water environments that vary in range and azimuth // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. V. 106. № 5. P. 2454–2468.
14. *Zhao Z., Wu J., Shang E.* How the thermocline affects the value of the waveguide invariant in a shallow-water waveguide // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 138. № 1. P. 223–231.
15. *Badiev M., Kuz’kin V.M., Lyakhov G.A., Pereselkov S.A., Prosovetskiy D.Yu., Tkachenko S.A.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II // *Phys. Wave Phenom.* 2019. V. 27. № 4. P. 313–319. <https://doi.org/10.3103/S1541308X19040125>
16. *Аксенов С.П., Каменев С.И., Касаткин Б.А.* Некоторые характеристики звукового поля в клине, лежащем на жидком полупространстве // *Акуст. журн.* 1986. Т. 32. № 5. С. 585–591.
17. *Баранов В.А., Григорьев В.С.* Водный слой как измерительный инструмент // *Акуст. журн.* 1982. Т. 28. № 5. С. 588–596.
18. *Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Линии равных фаз звукового давления в пространственно-частотной области гидроакустического поля // *Докл. Росс. Акад. наук. Физика, техн. науки* // 2021. Т. 498. С. 17–21.
19. *Kuznetsov G.N., Stepanov A.N.* Interference and phase invariants of sound fields // *Phys. Wave Phenom.* 2021. V. 29. № 3. P. 285–292. <https://doi.org/10.3103/S1541308X21030080>
20. *Журавлев В.А., Кобозев И.К., Крайцов Ю.А.* Поток энергии в окрестности дислокаций фазового поля



- волнового фронта // Журн. эксп. теор. физ. 1993. Т. 104. Вып. 5(11). С. 3769–3783.
21. *Елисеевнин В.А., Тужилкин Ю.И.* Поток акустической мощности в волноводе // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 781–788.
22. *Журавлев В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А., Петников В.Г., Попов В.А., Шмелев А.Ю.* Дислокационная томография океана: новый метод акустической диагностики // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 4. С. 764–765.
23. *Грачев Г.А., Кузнецов Г.Н.* Средняя скорость распространения модулированных колебаний вдоль плоского волновода // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 258–260.
24. *Грачев Г.А., Кузнецов Г.Н.* О средней скорости изменения фазы акустического поля вдоль плоского волновода // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 266–268.
25. *Орлов Е.Ф., Хромов А.В.* Математическое моделирование пространственной корреляции поля интенсивности акустического широкополосного источника в мелком море // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление. 2008. № 3. С. 142–146.

ГЕНЕРАЦИЯ ПОДВОДНОГО ШУМА СУЛОЕМ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ  
БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ОКЕАНЕ© 2022 г. А. Н. Серебряный<sup>a, b, \*</sup>, А. В. Фурдуев<sup>b</sup>, А. А. Аредов<sup>b</sup>, Н. Н. Охрименко<sup>b</sup><sup>a</sup>Институт океанологии имени П.П. Шириова РАН, Нахимовский пр. 36, Москва, 117997 Россия<sup>b</sup>АО “Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева”, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия

\*e-mail: serebryany@hotmail.com

Поступила в редакцию 19.01.2022 г.

После доработки 19.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Обсуждаются результаты измерений подводного шума, генерируемого уединенной внутренней волной большой амплитуды по наблюдениям, проведенным вблизи Маскаренского хребта в Индийском океане. Измерения проведены с судна, находившегося в дрейфе над большими глубинами, оснащенного вертикальной гирляндой гидрофонов и средствами регистрации внутренних волн. Приводятся параметры зарегистрированной 50-метровой внутренней волны и характеристики излучаемого ею подводного шума. Мощные орбитальные течения, сопровождающие внутреннюю волну, приводят к образованию на поверхности океана сулоев – областей хаотичных, схлопывающихся волн, которые повышают концентрацию пузырьков воздуха в приповерхностном слое и излучают подводные шумы. Анализ данных показал, что прохождение вызванного внутренней волной сулоя над гидрофоном приводит к значительному (до 18 дБ) росту уровня подводного шума в частотном диапазоне 5–15 кГц.

**Ключевые слова:** подводный шум, внутренние волны, сулой, гирлянда гидрофонов, спектр шумов, Индийский океан

**DOI:** 10.31857/S0320791922030121

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В декабре 1990 г. в Индийском океане около Маскаренского хребта с НИС “Академик Николай Андреев” проводились исследования внутренних волн. Это место принадлежит к особенным районам Мирового океана, так называемым “горячим точкам”, из-за необычайно больших амплитуд генерируемых здесь внутренних волн [1]. Проведенные измерения обнаружили здесь уединенные внутренние волны высотой до 90 м, а также пакеты солитоноподобных волн высотой в несколько десятков метров [2]. Также экспериментально были выявлены механизмы генерации этих гигантских волн [3]. Кроме того, были обнаружены внутренние волны 2-ой моды, что является интересной необычной чертой внутриволнового поля Мирового океана, где преобладают волны 1-ой моды. Впечатляющей особенностью всех наблюдавшихся здесь внутренних волн было их сопровождение проходящими по поверхности океана сулойными полосами. Поверхностные проявления внутренних волн в виде чередующихся сликовых (с выглаженной поверхностью моря) и сулойных полос (с интенсивными обрушивающимися поверхностными волнами) – широко из-

вестное явление [4]. Но в случае района у Маскаренского хребта сулой от внутренних волн были настолько интенсивны, что у некоторых участников экспедиции сложилось впечатление, что судно вынесло на мелководье, где появились прибойные обрушивающиеся волны, а у других, что полоса поверхностных волн в штилевую погоду вызвана внезапным порывом ветра. На самом деле появление сулоев было обусловлено сильными орбитальными течениями внутренних волн, которые образовывали поочередно зоны конвергенции и дивергенции в приповерхностном слое океана. Говоря о сулоях, мы должны упомянуть книгу [5], в которой говорится, что “сулой в отличие от обычных поверхностных волн производит загадочный акустический эффект”. Исследованию этого акустического эффекта и посвящена данная статья, которая представляет расширенный вариант сообщения, опубликованного авторами в журнале Доклады Академии наук [6].

По общепринятым представлениям влияние внутренних волн на шумовое поле океана в основном проявляется в модуляции подводного шума с амплитудой и периодами, определяемыми параметрами внутренних волн. Так, горизонталь-



**Рис. 1.** Снимок поверхности океана, сделанный при прохождении полосы сулоя, вызванной внутренней волной, в районе Маскаренского хребта [10].

но направленная акустическая антенна, помещенная в слой термоклина, может регистрировать прохождение внутренних волн по флуктуациям принимаемого шума поверхностных источников [7]. Рассеяние шума или обратное рассеяние локационного сигнала от поверхностных волн, модулированных орбитальными течениями, сопровождающими внутренние волны, также отражает характеристики внутренних волн [8, 9]. Однако, возможна и непосредственная генерация подводного шума внутренней волной, доказательства чего приводятся в этой статье. Внутренние волны больших амплитуд сопровождаются интенсивными сулоями на океанской поверхности и хорошо различимыми человеческим ухом шумами. Зона сулоя образуется в области конвергенции выходящих к поверхности орбитальных течений внутренней волны и представляет собой область хаотичного поверхностного волнения, обрушения поверхностных волн с образованием пены и захватом пузырьков воздуха, увлекаемых вниз на глубину, орбитальными движениями внутренней волны. Для наглядного представления о сулое, сопровождающем большие внутренние волны, мы приводим его фото (рис. 1), сделанное вблизи Маскаренского хребта [10]. Нелинейное взаимодействие поверхностных волн, которое происходит в зоне сулоя, как показывалось в теоретических работах [11–13], может приводить к излучению звука в воду, при этом захватываемые пузырьки воздуха увлекаются вглубь и также излучают шум. Возможные механизмы такого шумоизлучения были рассмотрены в ряде работ (см. например, [14, 15]). Несмотря на достаточно большой ряд выполненных наблюдений интенсивных внутренних волн в Мировом

океане [16, 17], до сих пор мало опубликованных данных о проведенных измерениях характеристик шумов, сопровождающих большие внутренние волны.

## 2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ИСПОЛЬЗУЕМОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Измерения проводились с НИС “Николай Андреев” 6 декабря 1990 г. в дрейфе при тихой погоде на удалении около 150 км восточнее Маскаренского хребта. Глубина океана под судном в это время составляла около 2800 м. Схема расположения средств измерений во время эксперимента показана на рис. 2. Регистрация сулойной полосы на поверхности океана и отслеживание ее перемещения осуществлялось по судовому радиолокатору с длиной волны излучения 3.2 см задолго до подхода внутренней волны к судну. Экран радиолокатора при подходе внутренней волны фотографировался с дискретностью 2 мин, что позволило впоследствии оценить скорость перемещения внутренней волны (рис. 3). Для регистрации внутренних волн использовался распределенный датчик температуры длиной 50 м, помещенный в верхний термоклин. Распределенный датчик температуры измеряет колебания средней температуры охватываемого им слоя и хорошо воспроизводит профили проходящих через него внутренних волн. Также во время прохождения уединенной внутренней волны STD-зондом проводилась серия частых непрерывных зондирования верхнего слоя океана до глубины 300 м.

Измерения подводных акустических шумов проводились с использованием приемной системы, состоящей из четырех вертикально разнесен-

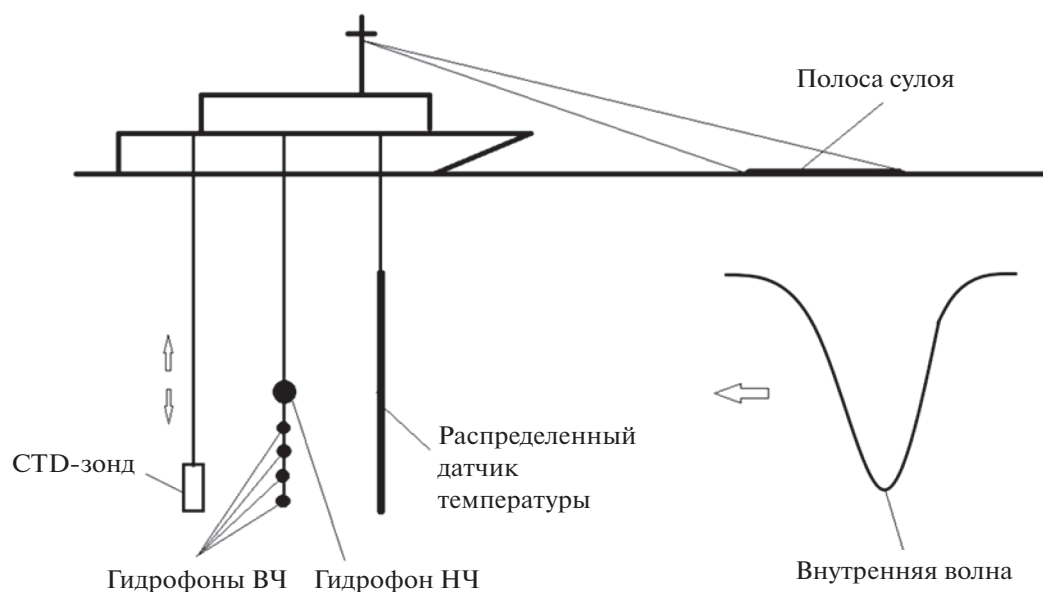


Рис. 2. Схема расположения средств измерений во время проведения эксперимента с дрейфующего судна.

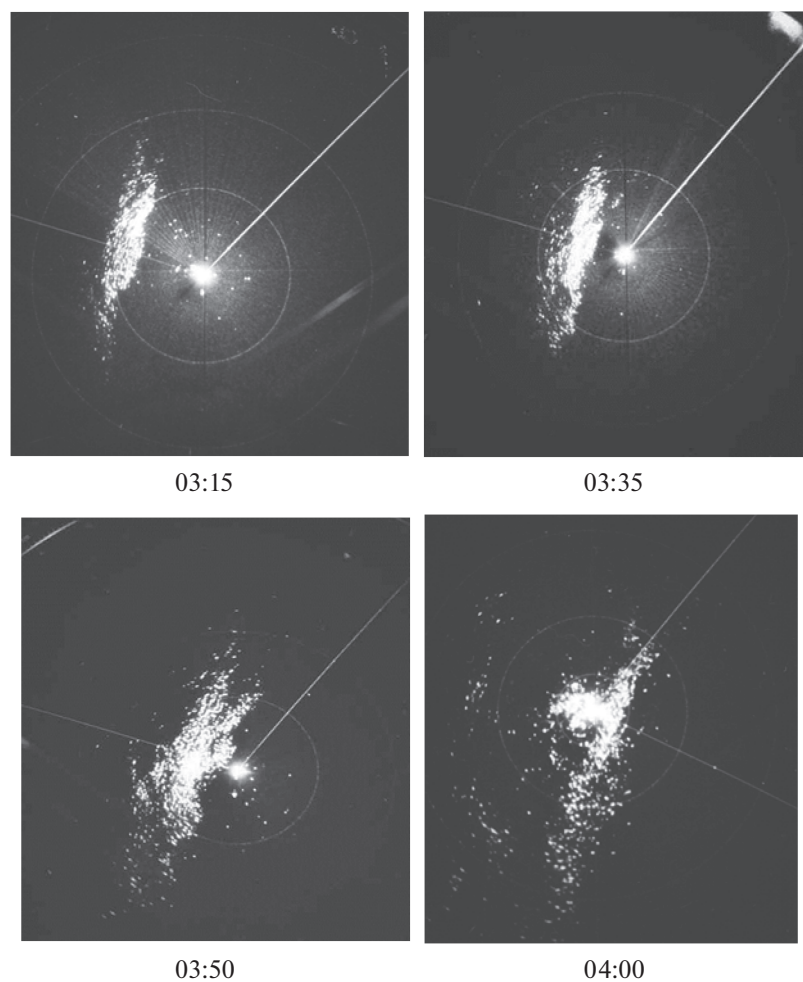


Рис. 3. Последовательные фотоизображения поверхности океана с полосой сулоя на экране судового радиолокатора в моменты подхода внутренней волны к судну и ее прохода под ним 6.12.1990 г. в 03:15, 03:35, 03:50 и 04:00.

ных высокочастотных гидрофонов (5–100 кГц) и одного низкочастотного (0.1–20 кГц). Приемная система опускалась с борта судна на глубину 100 м. Регистрация осуществлялась с высокочастотных гидрофонов на магнитофоне V&K 7005 на частотах до 60 кГц, а с низкочастотного гидрофона на магнитофоне TEAC SR-71 на частотах до 5 кГц. В период измерений на акватории стоял штиль, лишь на расстоянии более 7 миль наблюдались дождевые облака. Штиль, а, следовательно, низкий уровень ветровых шумов, позволил контрастно наблюдать шумоизлучение внутренней волны.

### 3. ФОНОВЫЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ И ОСОБЕННОСТИ НАБЛЮДАЕМОЙ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ

Гидрологические условия в районе характеризовались однородным приповерхностным слоем до глубины 50 м (скорость звука 1540 м/с), зона с наибольшим градиентом скорости звука находилась в районе глубин 60–200 м, а ось подводного звукового канала располагалась на глубине 1500 м ( $c = 1493$  м/с). Скорость звука у дна (глубина 2.8 км) была равна 1504 м/с.

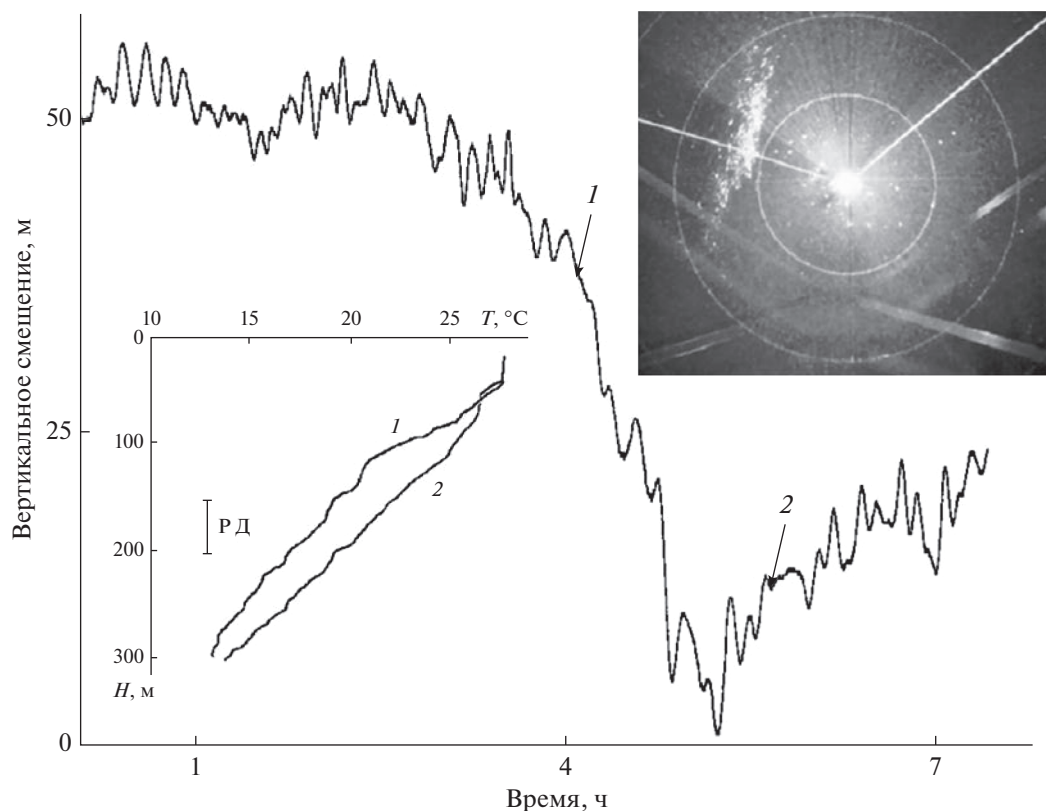
Между 2 и 5 часами местного времени, 6 декабря уединенная внутренняя волна высотой около 50 м прошла под дрейфующим судном со стороны подводного хребта (рис. 4). Профиль этой волны с крутым передним фронтом, зарегистрированный распределенным датчиком температуры, свидетельствует о ее сильной нелинейности. На записи распределенного датчика до подхода 50-метровой волны и после ее прохода также видны 5-метровые короткопериодные внутренние волны с периодом 15–20 мин. Уход термоклина на 50 м вниз, вызванный внутренней волной, подтверждается при сопоставлении двух вертикальных профилей температуры верхнего слоя океана, сделанных в моменты, близкие к прохождению вершины и подошвы волны. Уединенная внутренняя волна сопровождалась четко различимой на экране судового локатора широкой (около 1.5 км) сулойной полосой, движущейся на юго-восток со скоростью 2.5 м/с. Поперечный размер сулойной полосы можно оценить в несколько десятков км. Прохождение зоны сулоя по времени соответствовало резкому уходу термоклина вниз, т.е. области конвергенции орбитальных течений волны.

### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКИ ПОЛУЧЕННЫХ ДАННЫХ

По техническим причинам, во время измерений на судне не был установлен режим тишины. В результате этого спектральные уровни шума, измеренные на частотах ниже 0.3 кГц (низкочастотный гидрофон), были существенно засорены

помехами от судовых механизмов и при обработке были отсечены с помощью высокочастотного фильтра. Записи были начаты при подходе сулоя к судну на расстояние около 1300 м (3 ч 29 мин по местному времени) и завершены в 4 ч 16 мин, т.е. после его удаления на расстояние нескольких кабельтовых. С высокочастотных звукоприемников делались записи в различные фазы прохождения сулоя длительностью от 2 до 9 мин. С низкочастотного гидрофона велась непрерывная регистрация в течение 47 мин.

Была проведена обработка записей, в результате которой получены спектры подводных шумов и функции их когерентности при разнесении звукоприемников по вертикали в различные моменты прохождения сулоя, а также временные изменения уровней шума в третьоктавных полосах. На рис. 5 показано, как отражается перемещение полосы сулоя по поверхности океана на спектральных характеристиках собственных шумов океана. В частности, здесь приведены записи изменения во времени уровня шума, принятого низкочастотным гидрофоном в широкой полосе частот (рис. 5а), а также спектральные уровни (рис. 5б) и функции когерентности (рис. 5в) в диапазоне частот 1–50 кГц, измеренные с помощью высокочастотного гидрофона в моменты времени, отмеченные на рис. 5а жирными точками и цифрами 1–4. Нижние кривые на рис. 5б и 5в (с.ш.) соответствуют уровню шумов регистрирующей системы. Время начала роста шума на приемной системе хорошо коррелирует со временем приближения передней границы сулоя к точке на поверхности, под которой была расположена система. Анализ полученных результатов показал, что перемещение сулоя по поверхности океана приводит к значительному (до 18 дБ на частотах в диапазоне 5–15 кГц) возрастанию уровня подводного шума, при этом функция когерентности (рис. 2в), полученная для соседних гидрофонов, разнесенных по вертикали на расстояние 4 см, стремится к единице. Это указывает на то, что наиболее мощные источники шума расположены у поверхности океана и генерируются зоной сулоя. К такому же выводу приводит анализ изменения частотной зависимости фазы шумов (рис. 6), принимаемых этими же гидрофонами в моменты времени, соответствующие точкам 1 и 3 на рис. 5а. Хорошо видно, что в отсутствие сулоя (точка 1) сдвиг фаз между шумом, принятым гидрофонами, близок к 0 на частотах до 5–7 кГц и становится хаотичным на более высоких частотах, когда шумоизлучение, возможно, обусловлено массой пузырьков воздуха, затянутой в толщу вод. При этом очевидно отсутствие преимущественного направления прихода энергии шума. В случае, когда влияние сулоя становится максимальным (точка 3), фазочастотная характеристика указывает на расположение источника шума



**Рис. 4.** Запись 50-метровой внутренней волны, сделанная распределенным датчиком температуры (измерения 6.12.1990 г. у Маскаренского хребта), и фотоизображение полосы сулоя на экране судового радара в 3.00 6.12.1990 г. Сулой приближается к лежащему в дрейфе судну с северо-запада. Радиусы малого и большого круга 3.7 и 7.4 км соответственно. Прохождение зоны сулоя по времени соответствовало резкому уходу термоклина вниз. Во врезке показаны вертикальные профили температуры для моментов времени 4 ч 11 мин и 5 ч 38 мин и положение распределенного датчика температуры.

над вертикально расположенными друг под другом гидрофонами. Наличие в спектре шумов и в функции когерентности на рис. 5б и 5в провала на частотах вблизи 5 кГц связано, по-видимому, с конструктивной особенностью приемной системы, приводящей к резонансному поглощению звука. Это же является причиной резкого изменения фазы на рис. 6 для точки 3.

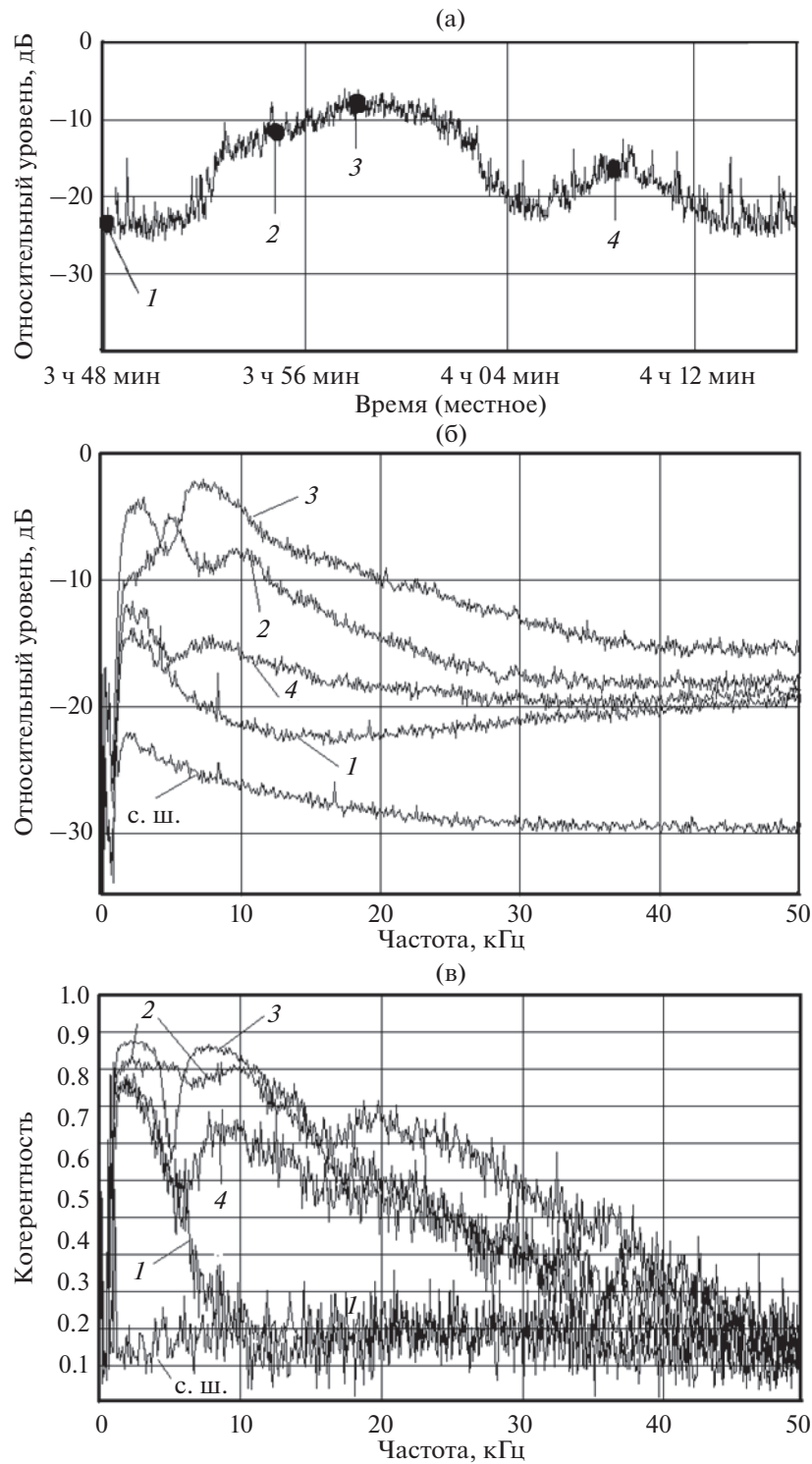
Анализ изменения уровня шума во времени при прохождении сулоя над приемным гидрофоном в 1/3 октавных полосах для центральных частот 0.5, 1, 2, 3, 4, 5 кГц и в широкой полосе (рис. 7) для низкочастотного гидрофона выявил, что на высоких частотах происходит более резкий рост уровня шума при приближении сулоя к гидрофону, в то время как спад шума при его удалении примерно одинаков на всех частотах. Одним из возможных объяснений этого эффекта может быть, по-видимому, переизлучение звука корпусом судна, с которого была опущена приемная система, при его контакте с фронтом полосы сулоя. Перепад уровней принимаемого шума в отсутствие сулоя и при его максимальном влиянии с понижением частоты уменьшается, составляя

для частоты 0.5 кГц только 5–6 дБ. Этот эффект может быть интерпретирован с помощью моделирования условий формирования шумового поля полосой активного взаимодействия внутренней волны с поверхностью океана.

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ШУМООБРАЗОВАНИЯ

Для моделирования процесса шумообразования при прохождении над приёмным гидрофоном полосы сулоя была доработана компьютерная программа по расчету характеристик шумового поля в слоисто-однородном океане [16]. Данная программа позволяет, в лучевом приближении, моделировать эффекты, возникающие при распространении в водной толще внутренней волны, не выходящей к поверхности. Эти эффекты проявляются в изменении угловой ширины зоны рефракционного минимума в вертикальной характеристике анизотропии шумового поля и связаны с изменением скорости звука на горизонте приема, вызванным влиянием внутренней волны. При этом плотность мощности поверх-



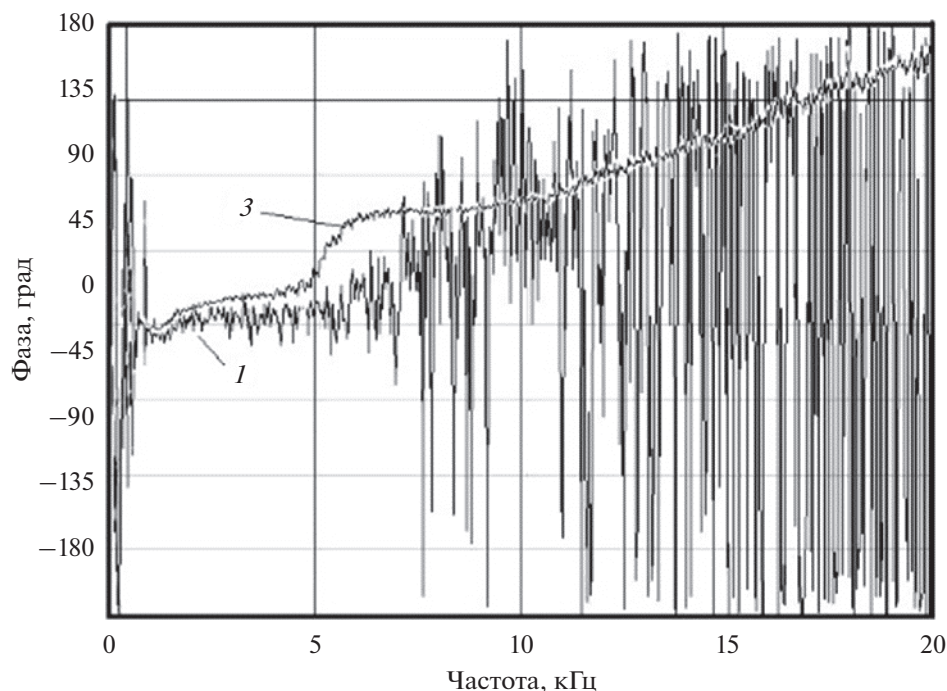


**Рис. 5.** Влияние суоя на спектральные характеристики шумов океана. (а) — Изменение во времени уровня шума, принятого ненаправленным гидрофоном в широкой полосе частот (низкочастотный гидрофон); (б) — спектральные уровни шума в моменты времени, отмеченные на рис. 5а цифрами 1–4 (высокочастотный гидрофон); (в) — функции когерентности шумов в моменты времени, отмеченные на рис. 5а цифрами 1–4 (высокочастотные гидрофоны).

ностных источников считается неизменной на всей шумообразующей акватории [8]. В доработанном варианте программа позволяет моделиро-

вать перемещающуюся по поверхности океана полосу суоя в виде области заданной ширины и бесконечной длины, характеристики источников



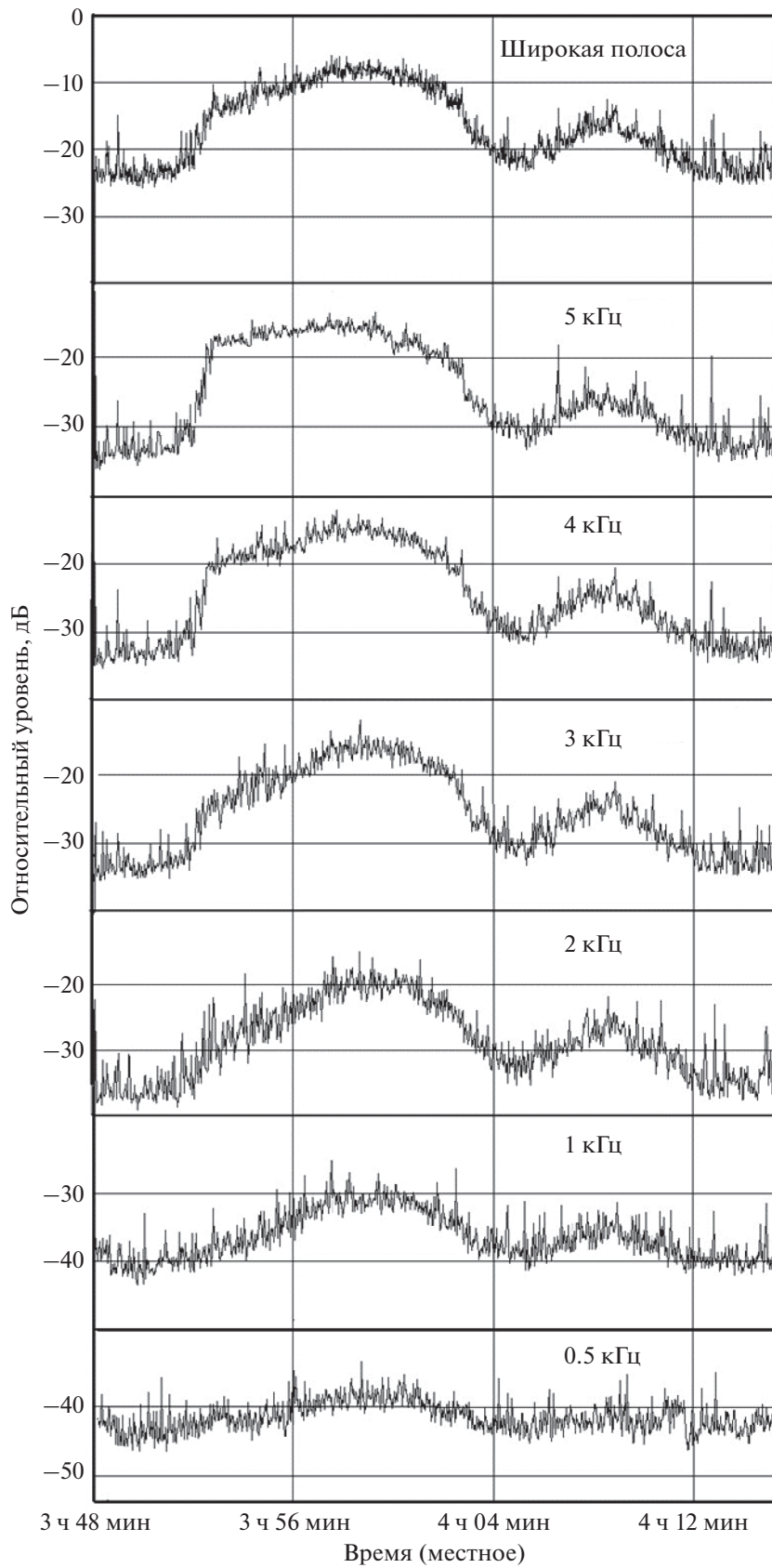


**Рис. 6.** Фазочастотные характеристики шума, принимаемого двумя вертикально расположенными гидрофонами в отсутствие (1) и при наличии (3) (см. рис. 5а) на поверхности океана полосы сулоя.

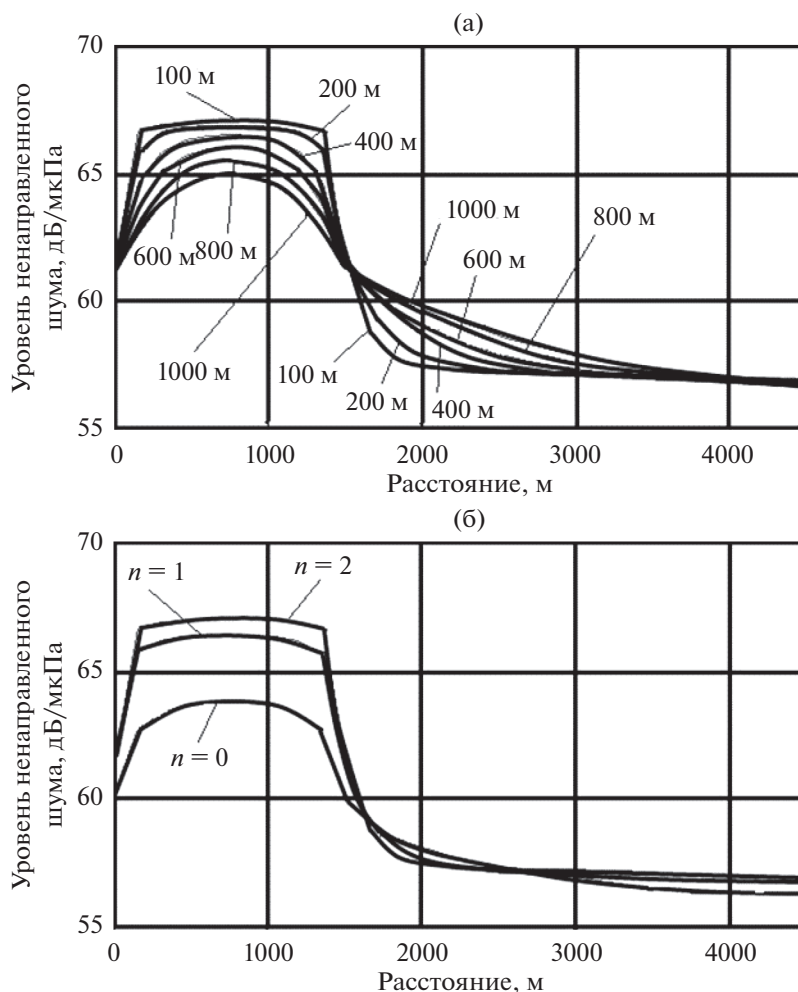
шума в которой (поверхностная плотность мощности и диаграмма направленности) отличаются от соответствующих характеристик на остальной акватории. В качестве примера на рис. 8а приведён расчет изменения уровня шума, принимаемого ненаправленным гидрофоном, при перемещении по акватории полосы сулоя шириной 1500 м для различных глубин приема от 100 до 1000 м. Точка с координатой 0 м по оси абсцисс соответствует положению передней границы сулоя над приемным гидрофоном, точка 4500 м — расстояние до дальней границы сулоя при его удалении. Частота 1 кГц. Вертикальный профиль скорости звука соответствует гидрологическим условиям района Маскаренского хребта в Индийском океане, для которого выше были приведены экспериментальные данные. Уровень шума, излучаемый поверхностными ветровыми источниками вне сулоя, задавался соответствующим скорости ветра над акваторией 5 м/с, диаграмма направленности источников шума  $\sim \cos^n \alpha_n$  ( $\alpha_n$  — угол падения луча на поверхность,  $n = 2$  — показатель степени, характеризующий направленность источников шума). Ввиду отсутствия в настоящее время каких-либо достоверных данных о мощности и направленности источников шума в сулое, при расчетах их плотность мощности задавалась на 12 дБ больше, чем плотность мощности ветровых источников на акватории, а диаграмма направленности считалась такой же, как на остальной акватории. Из рис. 8а видно, что при увеличении глубины

приема влияние сулоя уменьшается, при этом при удалении ближней границы сулоя от точки приема на расстояние порядка его ширины уровень шума спадает до уровня, создаваемого ветровыми источниками на акватории. Следует отметить, что в зависимости от вида вертикального профиля скорости звука и глубины приема влияние сулоя на уровень принимаемого шума может спадать как быстрее, так и медленнее, чем в рассмотренном случае. На рис. 8б приведен пример расчета изменения уровня ненаправленного приема на глубине 100 м при перемещении по акватории полосы сулоя, аналогичного предыдущему, но при различной направленности источников шума в нем. Видно, что обострение диаграммы направленности источников шума приводит к увеличению перепада между уровнями шума, принимаемыми гидрофоном, расположенным под сулоем и на некотором расстоянии от него.

Дальнейшие экспериментальные и модельные исследования эффектов, возникающих при перемещении полосы сулоя по поверхности океана, позволят решить обратную задачу по определению поверхностной плотности мощности и направленности источников шума в сулое в зависимости от частоты приема и характеристик внутренней волны, а также оценить влияние перемещения полосы сулоя по поверхности океана на уровень принимаемого шума для различных глубин, частот и гидролого-метеорологических условий на шумообразующей акватории.



**Рис. 7.** Изменение уровня шума во времени при прохождении сулоя над приемным гидрофоном в 1/3 октавных полосах для центральных частот 0.5, 1, 2, 3, 4, 5 кГц и в широкой полосе.



**Рис. 8.** Расчет изменения уровня шума, принимаемого ненаправленным гидрофоном, при перемещении по поверхности акватории полосы сулоя шириной 1500 м, частота – 1 кГц: (а) – для глубин приема 100–1000 м, показатель степени в диаграмме направленности источников шума в сулое  $n = 2$ ; (б) – глубина приема 100 м, показатель степени в диаграмме направленности источников шума в сулое  $n = 0, 1, 2$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тематика, связанная с рассмотрением внутренних волн как источников подводного шума, получает свое развитие, о чем свидетельствуют публикации последних лет. Измерения в Южно-Китайском море выявили увеличение спектра подводного шума на 5–8 дБ в диапазоне частот 1–2 кГц при прохождении сулоя, сопровождающего единственную внутреннюю волну 50-метровой амплитуды [17]. Интересен факт, что эта волна была 2-ой модой в отличие от волны 1-ой моды на Маскаренском хребте.

Поскольку интенсивные внутренние волны типичны не только для глубокого моря, но и для шельфовой зоны, то можно ожидать проявление обсуждаемого нами акустического эффекта и для внутренних волн мелководья. В данных эксперимента Shallow Water 2006 (SW06), проведенного на атлантическом шельфе США, были отмечены

признаки усиления подводного шума при прохождении переднего фронта 20-метровой внутренней волны типа углубления [18, 19]. Эффект не такой сильный, как в упомянутых выше случаях, но следует заметить, что сулойные полосы, сопровождавшие внутренние волны на шельфе, были существенно менее интенсивны. Были проведены исследования подводных шумов, связанных с внутренними волнами на шельфе Южно-Китайского моря, при этом были использованы данные эксперимента ASIAEX 2001 SCS [20]. В этом случае внутренние волны распространялись по термоклину, прижатому ко дну, вследствие чего они имели форму волн возвышения. У таких волн область конвергенции орбитальных течений смещена на задний склон, в отличие от волн углубления, которые наблюдаются на глубокой воде. Соответственно, сулойная полоса размещается не над передним склоном внутренней волны, а над

задним. В работе [20] по данным заякоренной вертикальной антенны гидрофонов было выявлено усиление подводного шума на 3 дБ на частоте 1 кГц при прохождении заднего склона внутренней волны возвышения. Все вышеупомянутые случаи имеют экспериментальные подтверждения распространения подводного шума от морской поверхности вглубь, но внутренние волны способны генерировать также придонный шум.

В эксперименте SW06 были выявлены механизмы генерации подводного шума, причиной которого служат интенсивные внутренние волны, взаимодействующие с дном. Было обнаружено, что при прохождении цугов интенсивных солитоноподобных внутренних волн на спектрограммах сигналов гидрофонов донной горизонтальной антенны появляются мощные всплески в широкой полосе частот [19]. В дальнейшем было выяснено, что эти всплески появляются в моменты прохождения подошв внутренних волн. Измеренные орбитальные течения головных 20-метровых волн цугов в придонном слое достигают 0.5 м/с и более, причем их величины достигают максимума в фазе прохождения подошв волн. Регистрируемый при этом грохот происходил из-за способности течений в эти моменты смещать горизонтальную антенну по дну. Таким образом, причиной зарегистрированных всплесков было перемещение и трение гидрофонов о дно. Авторы работы [21], также проводившие анализ шумов, связанных с прохождением внутренних волн в SW06, выделили дополнительно еще два типа шума. Все они связаны с сильным течением, сопровождающим наблюдаемые нелинейные внутренние волны. Это шумы обтекания или псевдозвук, а также шумы от взвешенного вещества, переносимого течением в придонной области. Был проведен подробный анализ механизмов, вызывающих эти шумы.

В целом, принимая во внимание повсеместное распространение в океане интенсивных внутренних волн, создающих сулойные полосы, можно с большой долей доказательности говорить о широкой распространенности механизма генерации шума на океанских акваториях внутренними волнами больших амплитуд. В заключение заметим, что внутренние волны, сопровождаемые суоями, хорошо видны на снимках поверхности океана из космоса. Это обстоятельство позволяет говорить о перспективе мониторинга рассмотренного типа подводных шумов на больших акваториях с помощью дистанционного космического зондирования.

Обработка части результатов эксперимента выполнена в рамках темы госзадания Минобрнауки РФ № 0149-2019-0011 и при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-55-S52005.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* “Горячие точки” в поле внутренних волн в океане // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 3. С. 410–436.
2. *Konyaev K.V., Sabinin K.D., Serebryany A.N.* Large-amplitude internal waves at the Mascarene Ridge in the Indian Ocean // *Deep Sea Research I.* 1995. V. 42. № 11/12. P. 2075–2091.
3. *Коняев К.В., Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* Два пути возникновения интенсивных внутренних волн вблизи подводного хребта // *Докл. Акад. наук.* 1994. Т. 338. № 4. С. 537–540.
4. *Серебряный А.Н.* Сливо- и сулообразующие явления в море. Внутренние волны // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса.* 2012. Т. 9. № 2. С. 275–286.
5. *Монин А.С., Красицкий В.П.* Явления на поверхности океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 376 с.
6. *Серебряный А.Н., Фурдуев А.В., Аредов А.А., Охрименко Н.Н.* Шум внутренней волны большой амплитуды в океане // *Докл. Акад. наук.* 2005. Т. 402. № 4. С. 543–547.
7. *Аредов А.А., Дронов Г.М., Фурдуев А.В.* Влияние ветра и внутренних волн на параметры шума океана // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. № 4. С. 581–585.
8. *Аредов А.А., Галыбин Н.Н., Фурдуев А.В.* Акустико-океанологический эксперимент по регистрации внутренних волн // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 4. С. 584–591.
9. *Галыбин Н.Н., Серебряный А.Н.* Обратное поверхностное рассеяние звука как инструмент исследования внутренних волн в океане // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 3. С. 333–337.
10. *Веселов В.М.* Отчет отряда радиометрических измерений // *Отчет о работах в 26-ом рейсе НИС “Дмитрий Менделеев”.* Т. 1. Отчеты. Ч. 2. М.: ИОАН, 1981. С. 138–183.
11. *Бреховских Л.М.* Звуковые волны под водой, обусловленные поверхностными волнами в океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1966. Т. 2. № 9. С. 970–980.
12. *Cato D.H.* Theoretical and measured underwater noise from surface wave orbital motion // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. № 3. P. 1096–1112.
13. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* О генерации звука при взаимодействии поверхностных волн // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 1. С. 100–103.
14. *Акустика океана.* Под ред. Бреховских Л.М. М.: Наука, 1974. С. 681–687.
15. *Natural Physical Sources of Underwater Sound: Sea Surface Sound (2)* / Ed. Kerman B.R. Dordrecht: Kluwer, 1993.
16. *Аредов А.А., Охрименко Н.Н., Фурдуев А.В.* Анизотропия шумового поля в океане (эксперимент и расчет) // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. № 2. С. 215–221.
17. *Серебряный А.Н., Liu С-Т., Аредов А.А.* Генерация подводного шума внутренней волной 2-ой моды в Южно-Китайском море // *Акустика океана. Доклады 17-ой школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских.* М.: ИОРАН, 2020. С. 174–179.

18. *Serebryany A.N., Newhall A., Lynch J.F.* Observations of noise generated by nonlinear internal waves on the continental shelf during the SW06 experiment // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123. № 5. P. 3589–3589.
19. *Серебряный А.Н., Lynch J., Newhall A.* Генерация подводного шума нелинейными внутренними волнами на атлантическом шельфе США во время эксперимента “Shallow Water 2006” // *Ежегодник РАО.* 2008. Вып. 9. Акустика неоднородных сред. С. 217–227.
20. *Hsiang-Chih Chan, Chi-Fang Chen, Andrey Serebryany, Ruey-Chang Wei, Yiing-Jang Yang.* Noises from elevation internal waves on the South China Sea continental shelf // *Proc. of 10 European Conference on Underwater Acoustics.* Istanbul, Turkey, 2010. P. 695–700.
21. *Katsnelson B.G., Zhang Q., Godin O.A.* Observations of acoustic noise bursts accompanying nonlinear internal gravity waves on the continental shelf off New Jersey // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. V. 149. № 3. P. 1609–1622.

ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВОГО НАБОРА ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВИНТА© 2022 г. Л. А. Лазарев<sup>а, \*</sup>, В. А. Титарев<sup>а, b, \*\*</sup>, А. Ю. Голубев<sup>а, \*\*\*</sup><sup>а</sup>Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ, ул. Радио 17, Москва, 107005 Россия<sup>б</sup>ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова 44, корп. 2, Москва, 119333 Россия

\*e-mail: leonidL74@mail.ru

\*\*e-mail: vladimir.titarev@frccsc.ru

\*\*\*e-mail: alexeygolubev@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.11.2021 г.

После доработки 20.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Рассмотрена задача оптимизации (с точки зрения звукоизолирующей способности) силового набора подкрепленной оболочки под действием акустического поля винта. Нестационарные данные и поле давления от винта на поверхности были получены с помощью пакета программ, реализующего неявный численный метод высокого порядка аппроксимации при решении уравнений Эйлера и Навье–Стокса для сжимаемого газа. Расчет колебаний и акустического излучения оболочки, моделирующей фюзеляж самолета, велся на основе аналитического метода расчета ортогонально подкрепленной упругой конструкции. Оптимизация силового набора выполнялась за счет смещения шпангоутов и стрингеров, изменения высоты, толщины, ширины планок профилей.

*Ключевые слова:* шум в салоне, винт, стрингеры, шпангоуты, ортогонально подкрепленная оболочка

**DOI:** 10.31857/S0320791922030078

## ВВЕДЕНИЕ

Высокие уровни шума в салонах винтовых самолетов являются одним из важных факторов, сдерживающих их применение для пассажирских перевозок. Отличительной особенностью внешнего акустического поля винтовых самолетов (по сравнению с турбореактивными) является локализация излучаемой в салон акустической энергии в частотной области на первых 2–3 гармониках частоты вращения винта, а в пространственной области – в зоне, примыкающей к плоскости вращения винта. Это приводит к необходимости поиска альтернативных средств повышения звукоизолирующей способности бортовой конструкции, основанных, с одной стороны, на создании новых низкочастотных резонансных звукоизолирующих конструкций, с другой стороны, на оптимизации профиля отдельных элементов и расположения силового набора по длине фюзеляжа.

Решение данной задачи экспериментальным путем является достаточно затруднительным. Предпочтительным подходом представляется использование различных методов расчета, который может быть представлен в виде двух последовательных задач:

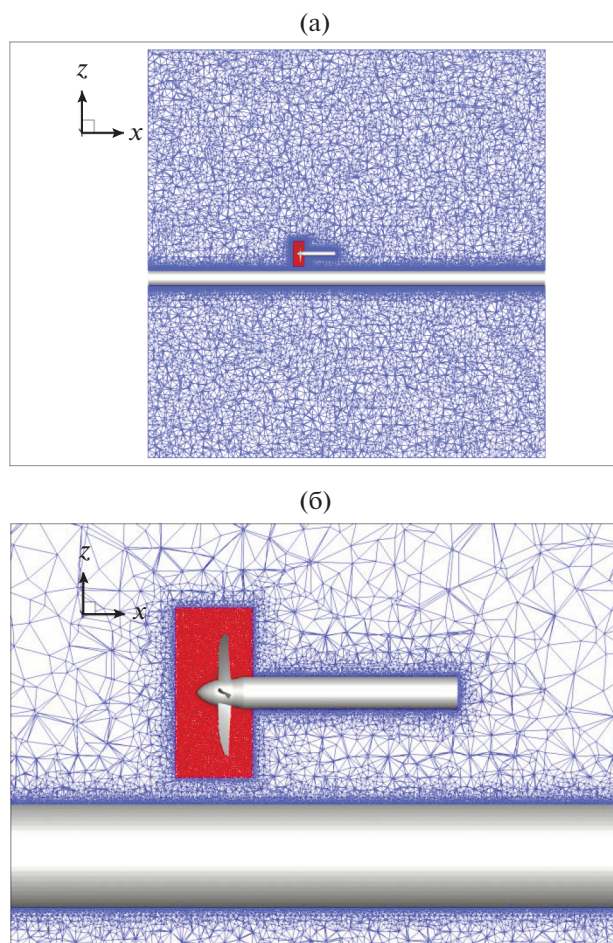
1) определение пространственно-временной структуры поля пульсаций давления на внешней поверхности фюзеляжа;

2) определение излучаемой звуковой энергии в салон и проведение параметрических расчетов по оптимизации (с точки зрения звукоизолирующей способности) бортовой конструкции.

Для решения первой задачи использовались численные методы расчета. Нестационарные данные на поверхности фюзеляжа были получены с помощью численного метода и собственного пакета программ “Гербера” [1–3].

Фюзеляжи типовых дальне- и ближнемагистральных самолетов представляют собой оболочку с ортогональным подкреплением ребрами жесткости (стрингерами и шпангоутами), которые, как правило, имеют один и тот же профиль и располагаются с почти одинаковым шагом. Расчет подкрепленных пластин и оболочек всегда считался достаточно сложной и трудоемкой задачей. Исследования методов решения этой задачи велись как в нашей стране, так и за рубежом. Большое количество статей на эту тему можно найти в статьях [4, 5] и др. На основании работ отечественных авторов [6–10] был разработан метод определения колебаний и акустического излучения подкрепленных оболочек.





**Рис. 1.** (а) – Сечение объемной тетраэдральной сетки плоскостью  $xz$ . (б) – Увеличенный вид рисунка вблизи винта.

Целью данной работы являлись: определение уровней шума в салоне винтового самолета на основе численного расчета пульсаций давления на внешней поверхности фюзеляжа и разработанного метода определения колебаний и акустического излучения подкрепленных оболочек; последующее проведение параметрических расчетных исследований по оптимизации (с точки зрения звукоизолирующей способности) силового набора бортовой конструкции.

### ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Нестационарные данные на поверхности фюзеляжа при воздействии акустического поля винта были получены с помощью численного метода и собственного пакета программ “Гербера” [1], подробное описание которого может быть найдено, например, в [2, 3]. Неявный численный метод высокого порядка аппроксимации и реализующий его пакет параллельных программ предна-

значены для моделирования аэродинамики и аэроакустики сложных винтовых конфигураций (винт на пилоне, биротативный винт, и т.д.) на основе численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа. Для расчета нестационарного обтекания конфигурации “винт на пилоне + фюзеляж” в разработанном коде используется комбинация вращающейся области (“шайбы”) в непосредственной близости винта и внешней неподвижной области, охватывающей фюзеляж. При этом численное решение строится одновременно на двух неконформных расчетных сетках, одна из которых (шайба) вращается как твердое тело. На общих границах производится нестационарная “сшивка” численных решений.

В расчетах использовалась двухзонная пространственная сетка для невязкого обтекания. Шайба радиуса 2.25 м, охватывающая винт, заполнялась 6.8 миллионами тетраэдров. Во внешней неподвижной области радиуса 35 м и протяженности 65 м расчетная сетка содержала 8.9 миллионов ячеек. Таким образом, полный размер неструктурированной расчетной сетки – 15.7 миллиона ячеек. Рис. 1 иллюстрирует поверхностную расчетную сетку в обеих областях. Красным обозначены ячейки внутри вращающейся шайбы, синим – во внешней неподвижной области, зеленым – на скользящей поверхности шайбы. На рис. 1 также представлено сечение пространственной сетки плоскостью  $xz$ . Хорошо видно подробное сгущение ячеек к поверхности вала, винта и фюзеляжа, а также область повышенного разрешения сетки вблизи вращающейся шайбы.

Расчет обтекания проводился в два этапа. Сначала строилось квазистационарное обтекание винта на построенной пространственной сетке в приближении замороженных границ. После получения квазистационарного поля течения проведен расчет нестационарного обтекания до физического времени, равного 10 оборотам вращения винта с помощью наиболее точной схемы второго порядка аппроксимации по времени. Реализованный в программном комплексе пост-процессор интерполировал данные нестационарного расчета на поверхность фюзеляжа в 256 временных точках на каждом обороте. Общий объем поверхностных данных составлял около 8 гигабайт.

Все представленные вычисления с использованием кода “Гербера” проводились на системе РСК-Торнадо, установленной в суперкомпьютерном центре Санкт-Петербургского Политехнического Университета Петра Великого (СПбПУ). Детальная информация о системе доступна по адресу <http://scc.spbstu.ru/>. Длина цилиндрической поверхности, на которой проводился численный расчет давления, составляла 68 м, радиус 1.43 м. Плоскость винта располагалась на расстоянии



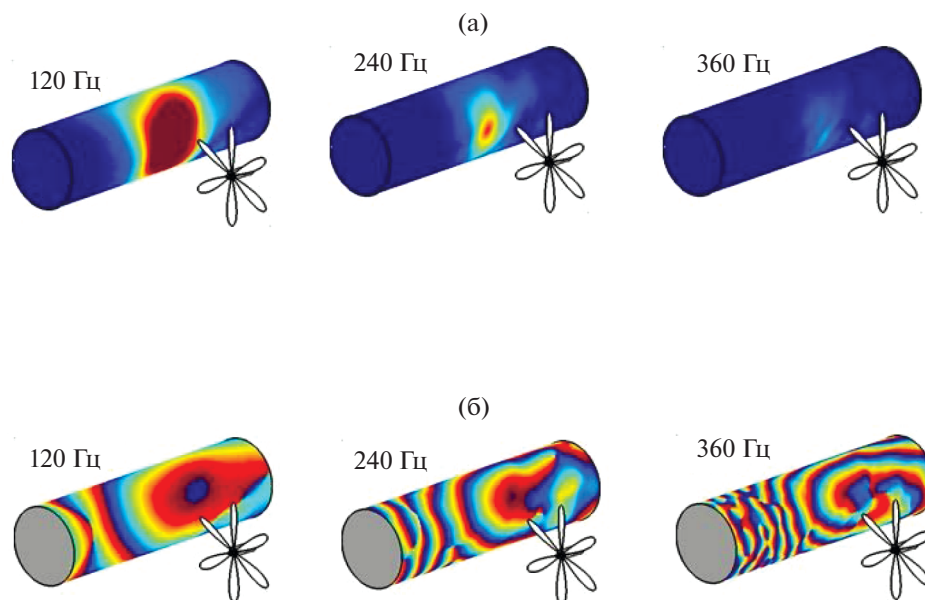


Рис. 2. (а) Амплитуда и (б) фаза акустического поля винта для трех первых гармоник.

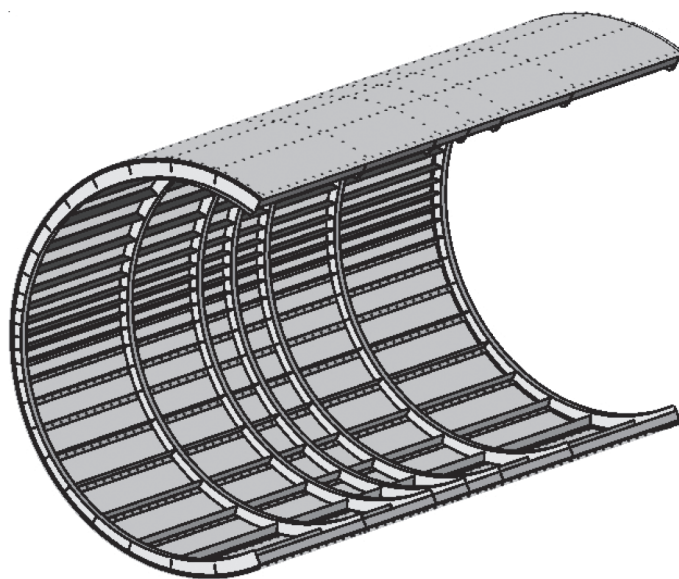


Рис. 3. Модель фюзеляжа с нерегулярно установленными ребрами.

26 м от переднего края. Из этих данных был вырезан участок длиной 10 м с координатой  $21 < x < 31$  м. Интегрированием по времени были получены три гармоники на частотах 120, 240 и 360 Гц.

Для последующего выполнения аналитического метода расчета колебаний и акустического излучения подкрепленной конструкции использовались распределения относительной амплитуды и фазы по пространству для отдельных гармоник, представленные на рис. 2.

#### ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВОГО НАБОРА ДЛЯ ВИНТОВОГО САМОЛЕТА

Разработанный метод расчета колебаний ортогонально подкрепленной оболочки (рис. 3) был изложен ранее и представлен, в частности, в статьях [6–10]. В данной работе метод был несколько изменен для расчета нерегулярно установленных ребер — шпангоутов, расположенных вдоль оболочки, и стрингеров, идущих по кругу. Ребрами здесь называются стрингеры и шпангоуты вместе взятые.

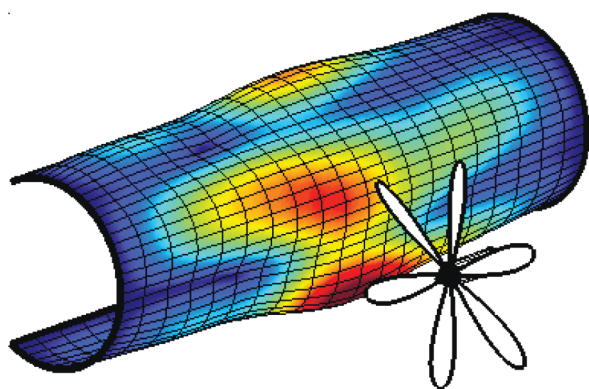


Рис. 4. Колебания исходной системы.

В расчетной модели предполагалось, что оболочка однородная, цилиндрическая, незамкнутая, конечного размера, рассматривается в рамках теории тонких оболочек. На торцах оболочка и ребра свободно оперты. Ребра рассматриваются как линейные элементы. Взаимодействие оболочки с ребрами происходит вдоль бесконечно тонких линий. Вдоль этих линий смещения по трем осям и угол поворота оболочки и ребер совпадают. Смещения ребер полностью задаются смещениями линии их контакта с обшивкой. Поле внешних сил действует только по нормали. Акустическое поле внутри рассматривалось как диффузное.

Для заданного числа стрингеров и шпангоутов отдельно оптимизировалось их положение, высота профилей, ширина планок, толщины профиля, свои для каждого из ребер. Процесс поиска оптимального сочетания этих параметров шел в три этапа. На первом этапе перебиралось большое число разных вариантов параметров, задаваемых случайно или из некоторых предположений. На втором этапе лучший вариант изменялся путем

случайных сильных изменений одного из параметров, например, перестановкой одного ребра в произвольное положение. На третьем этапе для лучшего варианта определялось влияние малых вариаций каждого из параметров. Затем методом градиентного спуска находился локальный экстремум в образующемся многопараметрическом пространстве.

На рис. 4 показаны колебания исходной оболочки. На рис. 5 показано, как сдвинулись ребра в результате оптимизации. Шпангоуты стянулись ближе к винту, а стрингеры слились в плотные группы. В результате такой оптимизации излучаемая в салон энергия снизилась на 1.8 дБ. Оптимизация положения ребер здесь проводилась без всяких ограничений. Полученное решение имеет недопустимо большие расстояния между ребрами с точки зрения статической прочности конструкции. Для получения практически значимых результатов оптимизацию нужно было бы проводить, например, с ограничением на максимальное расстояние между ребрами.

При оптимизации высоты стоек профилей бралось исходное регулярное расположение ребер. Высоты стоек изменялись в пределах 10–140 мм при исходном значении 70 мм, а у стрингера в пределах 10–50 мм при исходном значении 19.5 мм. На рис. 6а, 6б показаны полученные оптимальные высоты профилей стрингеров и шпангоутов отдельно для каждого ребра. Расчет выдал почти все шпангоуты максимальной высоты, а стрингеры увеличил только вдаль от винта, а в средней зоне оставил без изменения. Эффект такого изменения высоты профилей составил 2.7 дБ.

Жесткость ребер можно менять, варьируя ширину верхних планок в Z-образном профиле. Здесь мы не ограничивали сверху ширину планок, но ограничили суммарное увеличение массы ребер на 30 кг. Снизу ширина планки ограничивалась значением 5 мм. При превышении сум-

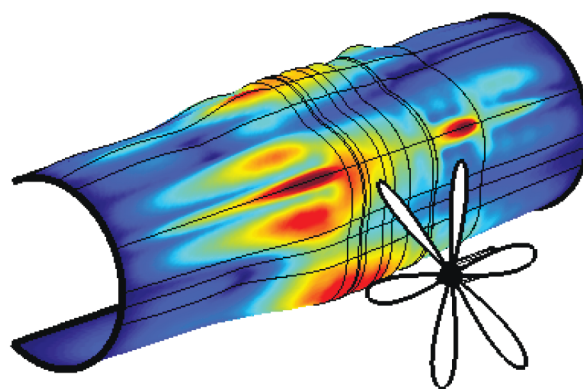
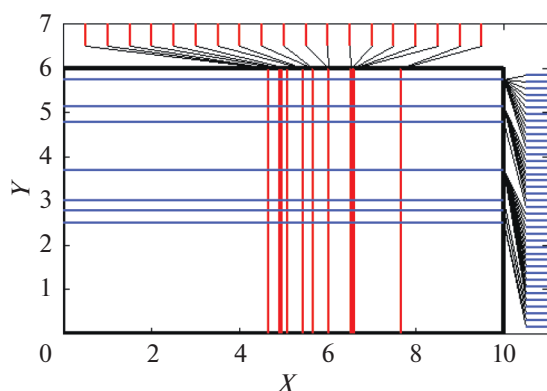


Рис. 5. Оптимизированное расположение ребер: (а) – положение ребер, (б) – колебания (амплитуда).

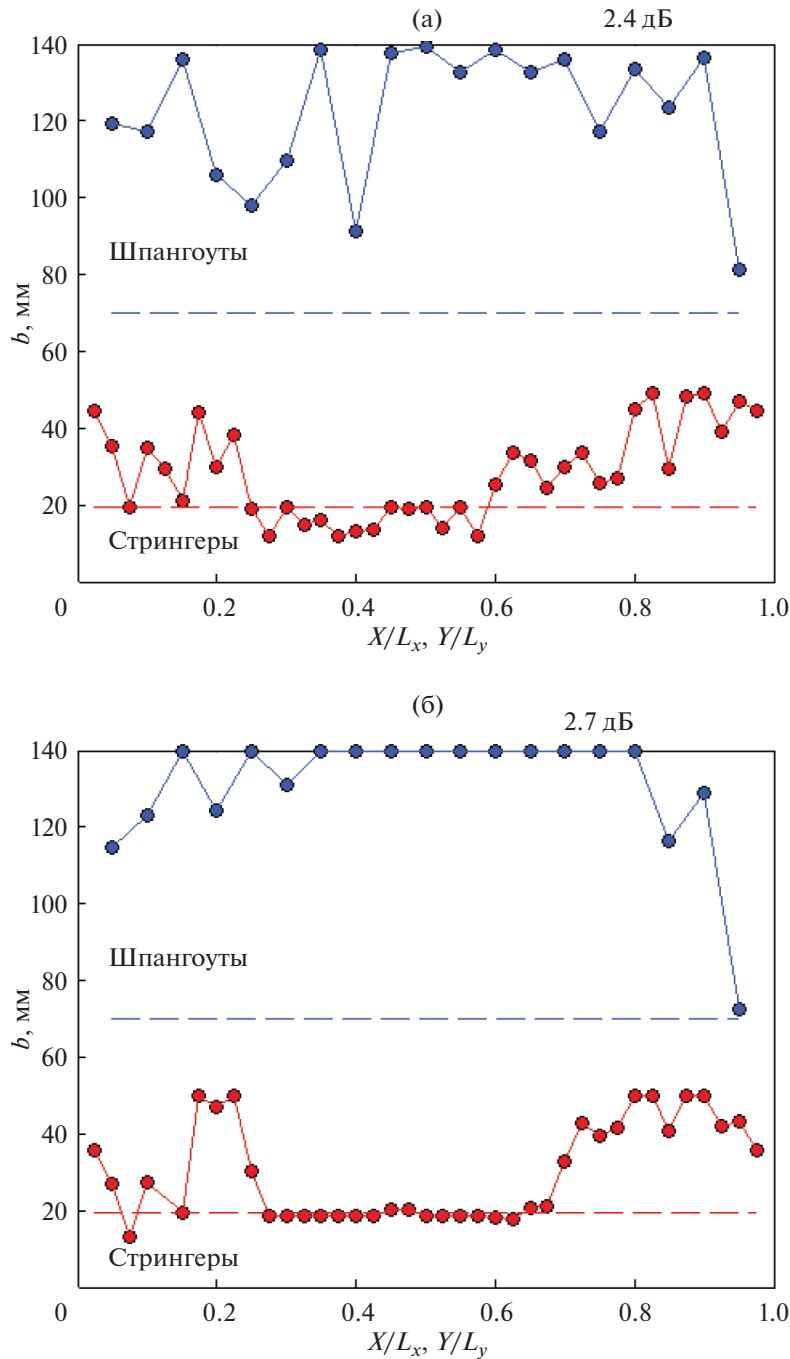


Рис. 6. Высоты профилей, оптимизированные (а) способом случайных изменений, (б) методом наискорейшего спуска.

марной массы в ходе оптимизации планки всех ребер уменьшались пропорционально. В результате расчета получилось, что необходимо усилить шпангоуты в области винта, так что их планка будет занимать половину пролета (рис. 7). А стрингеры в левой половине необходимо сузить до минимума, расширив стрингеры в правой половине. При этом эффект составил 1.8 дБ.

Изменить жесткость ребер возможно за счет изменения толщины их профилей. Диапазон изменения толщин профилей был 0.5–2.5 мм (при исходной толщине 1 мм). После оптимизации все шпангоуты, кроме крайних, становятся максимальной толщины (рис. 8). Левая половина стрингеров стала минимальной толщины, а правая около 2 мм. Эффект такого изменения составил всего 1.1 дБ.

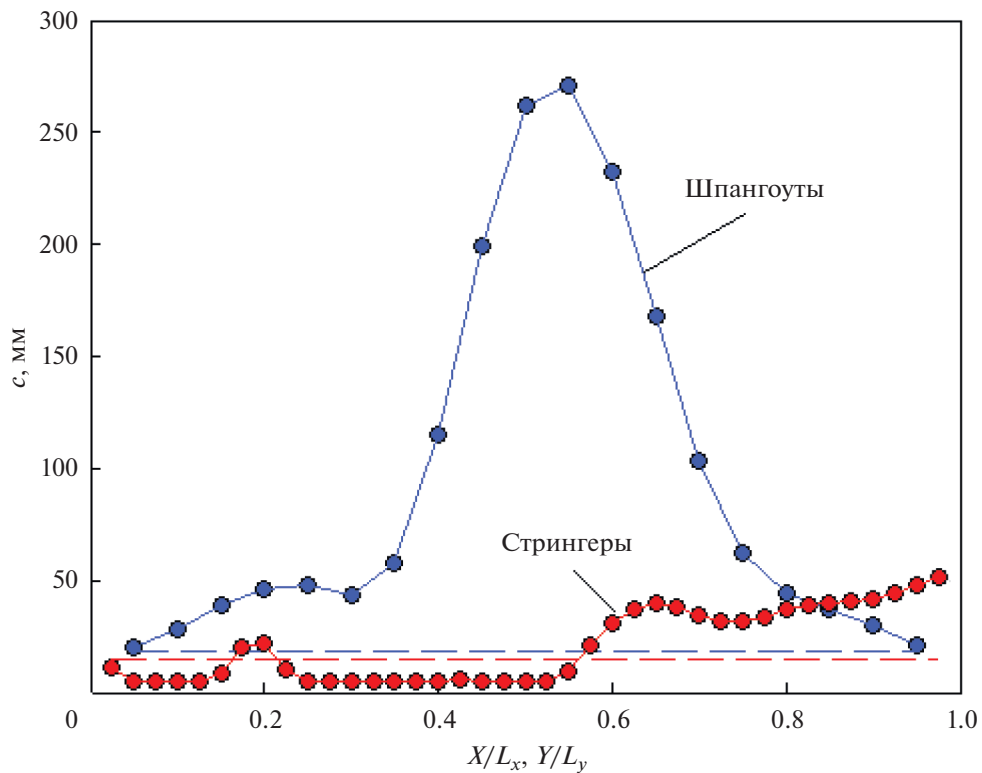


Рис. 7. Оптимальные ширины верхних планок ребер.

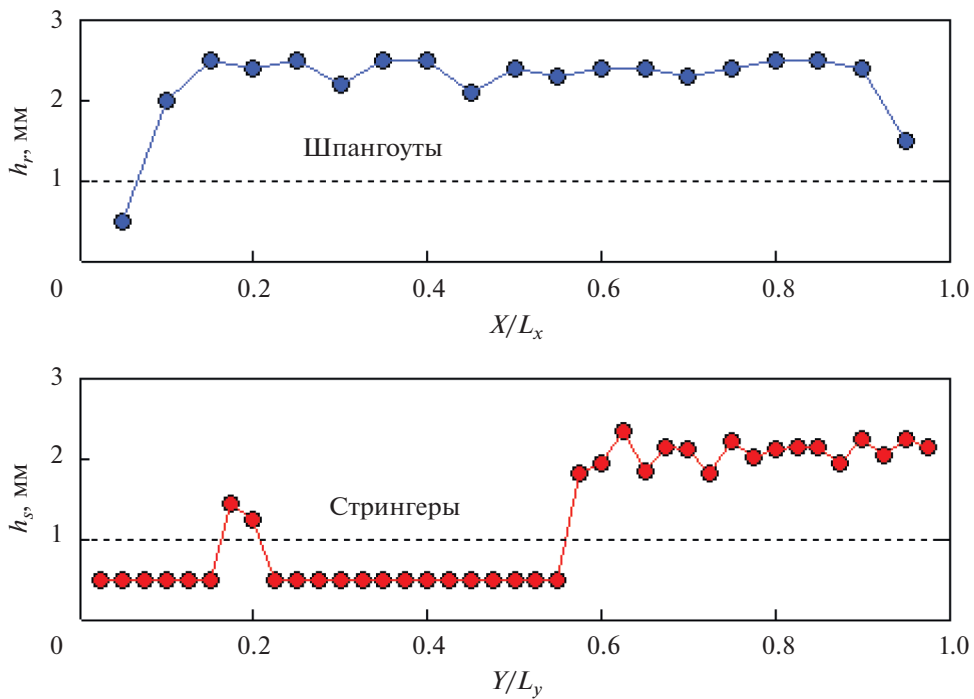


Рис. 8. Оптимальные толщины профилей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен численный расчет пульсаций давления на поверхности фюзеляжа при воздействии акустического поля винта. Получено пространственное распределение амплитуды и фазы на первых трех гармониках винта. На основании численного расчета и разработанного ранее метода расчета колебаний и акустического излучения подкрепленной оболочки, имитирующей фюзеляж самолета, проведена оценка уровней шума внутри этой оболочки. Проведены параметрические расчетные исследования влияния перемещения стрингеров и шпангоутов, изменения высоты и ширины полок их профилей на звукоизолирующую способность бортовой конструкции. Показано, что оптимизация силового набора позволяет добиться снижения уровней шума внутри самолета на 2.7 дБ (при увеличении массы ребер на 30 кг).

Работа авторов А.Ю. Голубева и Л.А. Лазарева выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), проект 21-71-30016.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титарев В.А.* Программный комплекс “Гербера” для расчета аэроакустических характеристик воздушных самолетных винтов // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ N 2020616696 от 22.06.2020.
2. *Копьев В.Ф., Титарев В.А., Беляев И.В.* Разработка нового подхода к расчету шума винтов с использованием суперкомпьютеров // Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV. № 2. С. 78–106.
3. *Titarev V.A., Faranosov G.A., Chernyshev S.A., Batrakov A.S.* Numerical modeling of the influence of the relative positions of a propeller and pylon on turboprop aircraft noise // *Acoust. Phys.* 2018. V. 64. № 6. P. 760–773.
4. *Cao X., Hua H., Zhang Zh.* Sound radiation from shear deformable stiffened laminated plates // *J. Sound Vibr.* 2011. V. 330. P. 4047–4063.
5. *Langley R.S., Cotroni V.* The direct field boundary impedance of two-dimensional periodic structures with application to high frequency vibration prediction // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127(4). P. 2118–2128.
6. *Efimtsov B.M., Lazarev L.A.* Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners // *J. Sound Vibr.* 2009. V. 327. P. 41–54.
7. *Ефимцов Б.М., Лазарев Л.А.* Аналитическая модель для расчета акустического поля в салоне самолета, учитывающая дискретность стрингерного набора фюзеляжа // Труды ЦАГИ. 2009. Вып. 2681. С. 82–93.
8. *Efimtsov B.M., Lazarev L.A.* Sound pressure in cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners excited by a random fields of forces // *J. Sound Vibr.* 2011. V. 330. P. 3684–3697.
9. *Ефимцов Б.М., Лазарев Л.А.* Комплекс аналитических моделей для прогноза шума в салоне самолета // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 4. С. 443–449.
10. *Ефимцов Б.М., Лазарев Л.А.* Расчет колебаний шпангоутов в подкрепленной оболочке, моделирующей фюзеляж самолета // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 5. С. 518–525.

ПАССИВНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ ТЕРМОМЕТРИЯ ГРУДНОЙ КЛЕТКИ  
ЧЕЛОВЕКА, ПЕРЕНЕСШЕГО COVID-19© 2022 г. А. А. Аносов<sup>а, б, \*</sup>, А. В. Ерофеев<sup>а, б</sup>, М. И. Щербаков<sup>б</sup>, А. Д. Мансфельд<sup>с</sup><sup>а</sup>ФГАОУ ВО Первый МГМУ им. И.М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский Университет),  
ул. Большая Пироговская 2, стр. 4, Москва, 119435 Россия<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая 11, корп. 7, Москва, 125009 Россия<sup>с</sup>Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

\*e-mail: andreyanosov1961@gmail.com

Поступила в редакцию 03.08.2021 г.

После доработки 03.08.2021 г.

Принята к публикации 30.11.2021 г.

С помощью пассивной акустической термометрии (ПАТ) исследована динамика изменения температуры грудной клетки человека, перенесшего COVID-19, в течение примерно двух с половиной недель после карантина. ПАТ, позволяющая измерять глубинную температуру тела, показала, что интегральная температура тканей, окружающих легкие, выросла с  $32.2 \pm 0.07$  до  $33.0 \pm 0.03$  °C через приблизительно 10 дней после окончания карантина. Это может свидетельствовать об усилении кровенаполнения легких, т.е. может указывать на восстановление пациента. Использование для контроля восстановления инфракрасной термометрии не дало результатов.

*Ключевые слова:* пассивная акустическая термометрия, тепловое акустическое излучение, акустостеркостная температура, ИК-термометрия, COVID-19

DOI: 10.31857/S0320791922020010

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительное количество людей перенесло вызванное пандемией COVID-19 воспаление легких. Одной из задач является поиск объективных методов наблюдения за восстановлением таких пациентов. Для диагностики и объективного контроля заболевания в ходе лечения используются проверенные медицинские методы, в том числе предполагающие рентгеновское исследование, сопутствующие риски применения которого представляются оправданными в свете ценности получаемой информации. Однако для контроля за восстановлением пациента частое использование рентгеновского излучения нежелательно, и требуются другие методы наблюдения. При легочных патологиях ухудшается кровоснабжение легких и бронхов, что может вызывать снижение температуры. Таким образом, термометрия легких, проводимая после выписки пациента, может дать информацию о восстановлении кровенаполнения легких и, в конечном итоге, о восстановлении пациента после перенесенной пневмонии.

Для решения этой задачи можно предложить пассивную акустическую термометрию (ПАТ),

основанную на регистрации собственного теплового акустического излучения организма человека в мегагерцовом диапазоне [1–5]. Расчеты [6] и модельные эксперименты [7] показывают, что предлагаемый метод позволяет измерить температуру на глубине 3–8 см, в объеме около 1 см<sup>3</sup> с точностью 0.5–1 К за время порядка одной минуты. Если проводить акустотермометрию грудной клетки и спины пациента, то под измерительным датчиком будут расположены мышечная, соединительная, костные ткани и заполненные воздухом легкие. Однако из воздуха акустический сигнал из-за большого отражения в тело человека проникнуть не может. Аналогичная ситуация возникает на границе костной и мягких тканей: любая акустическая неоднородность вызывает рассеяние сигнала. Таким образом, регистрируется многократно рассеянное акустическое излучение из мягких тканей, расположенных между поверхностью кожи и легкими. Измеряемый сигнал несет информацию о температуре этих тканей, которая зависит и от температуры легких, которая в свою очередь зависит от их кровенаполнения.



Отметим, что ПАТ уже использовалась в медицинских исследованиях: в ЦКБ РАН контролировали лазерную гипертермию молочной и щитовидной желез [8], в НИИ нейрохирургии им. академика Н.Н. Бурденко измеряли температуру мозга пациентов, у которых частично отсутствовали кости черепа [9]. Были проведены измерения при УВЧ-нагреве кисти испытуемых [10] и глюкозном тесте [11].

Для контроля изменения температуры легких также использовалась инфракрасная термометрия (ИКТ). ИКТ дает информацию о температуре поверхности кожи и в основном определяется приповерхностным кровотоком, отчасти зависящим от температуры подлежащих тканей [12]. Поэтому мы надеялись, что эти данные можно также использовать для получения информации о глубинной температуре.

В работе поставлена цель – измерить, как меняется температура торса человека, перенесшего COVID-19, и показать, что ПАТ можно использовать для объективизации процесса выздоровления пациента.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В исследовании участвовал испытуемый А (59 лет), переболевший COVID-19. Он находился в больнице, дважды прошел исследования на мультиспиральном рентгеновском компьютерном томографе, которые подтвердили двустороннее поражение легочной ткани. На 16-й день после проявления первых симптомов болезни испытуемый А был выписан из больницы и находился на карантине еще 14 дней, после чего вернулся к обычному режиму жизнедеятельности. Измерения проводились в интервале с 31-го по 47-й день после появления симптомов с периодичностью в два-три дня между измерениями. При проведении ИКТ для получения контрольных данных в исследовании участвовал неболевший испытуемый Б.

Для измерений теплового акустического излучения был использован многоканальный акустотермограф [13], разработанный в ИПФ РАН (полоса пропускания 1.6–2.5 МГц, пороговая чувствительность при времени интегрирования 10 с – 0.2 К). Принимаемые акустические сигналы преобразовывались в электрические, которые усиливались, проходили через квадратичный детектор и усреднялись в течение 30 мс. С выходов многоканального акустотермографа сигналы подавались на 14-разрядный многоканальный АЦП Е14-140 (ЗАО “L-Card”, Москва, Россия) с частотой дискретизации 1 кГц на один канал. Разрабо-

танная программа проводила дальнейшее усреднение данных.

Акустические измерения проводили следующим образом. Датчик находился в держателе, который являлся акустическим черным телом, при комнатной температуре. Температуру держателя контролировали цифровыми термометрами DS18S20P (Maxim Integrated, Сан-Хосе, США) с точностью 0.3 К. На поверхность объекта наносили гель для ультразвуковых исследований “Меди-агель”. В течение 10–15 с осуществлялись измерения теплового акустического излучения участка тела. После измерения датчик возвращали в держатель.

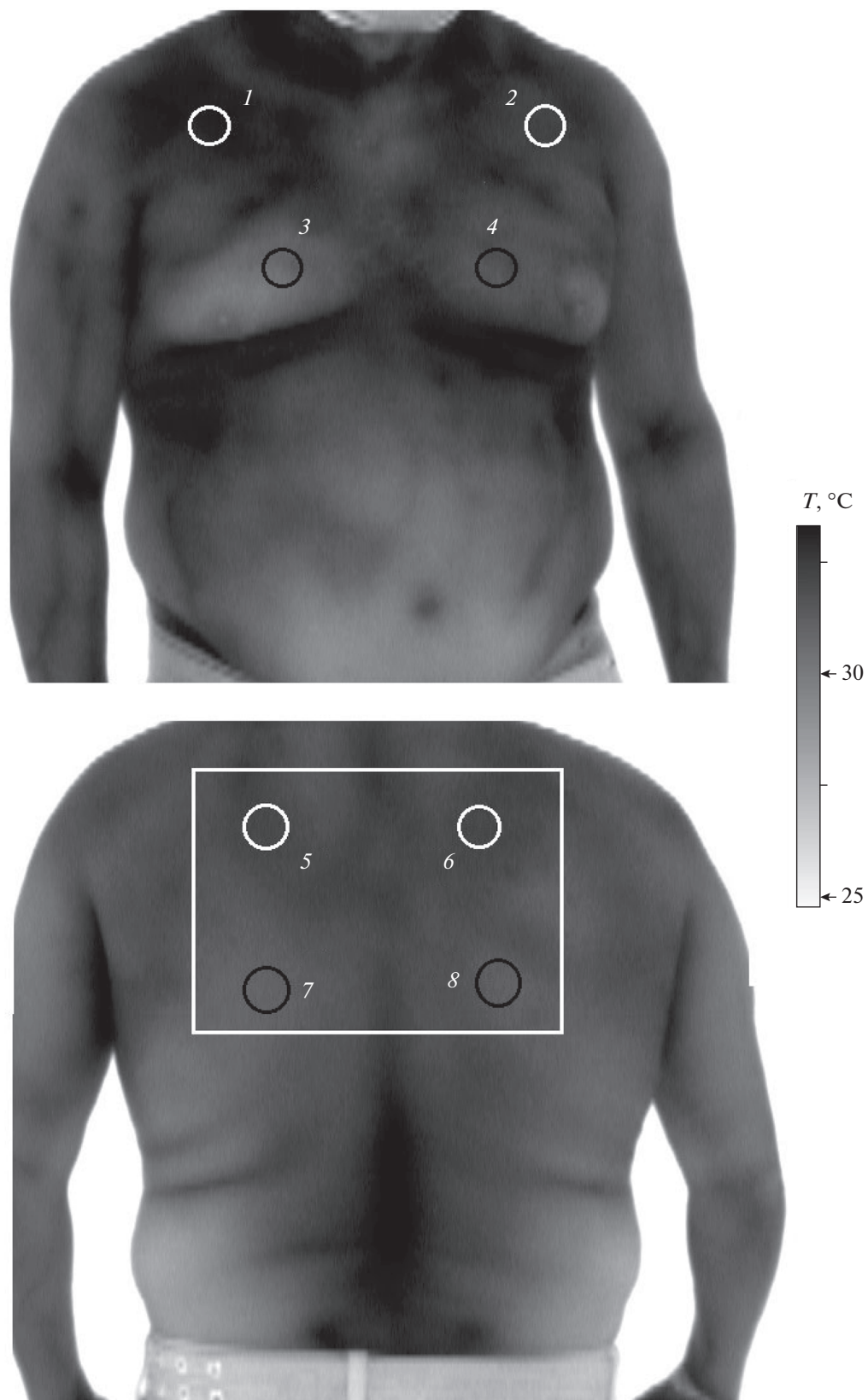
Акустояркостьную температуру измеряли на груди и на спине в восьми точках: в четырех спереди и четырех сзади (см. рис. 1). Каждое измерение повторяли три раза. Средняя акустояркостьная температура легочной зоны получена путем усреднения данных во всех восьми точках. Средняя по груди температура получена путем усреднения данных в точках 1–4. Средняя по спине температура получена путем усреднения данных в точках 5–8.

Для измерения поверхностной температуры использовался портативный компьютерный термограф ИРТИС-2000 (ООО “Иртис”, Москва, Россия) с чувствительностью к перепаду температур (на уровне 30°C) 0.05 К, регистрирующий тепловое электромагнитное излучение в ИК-диапазоне 3–5 мкм [14]. Снимали ИК-термограммы двух испытуемых со стороны грудной клетки и со спины. Испытуемые находились на расстоянии 1.5 м от камеры термографа, установленной на уровне грудной клетки. В каждом измерении получали по пять кадров и для грудной клетки, и для спины. Были выполнены все рекомендации к помещению, настройке оборудования и подготовке человека к ИКТ, указанные в работе [15]. Компьютерная программа, поставляемая вместе с прибором, позволяла визуализировать распределение температуры по поверхности тела испытуемого, а также использовалась для расчета средней температуры в прямоугольной области, показанной на рис. 1.

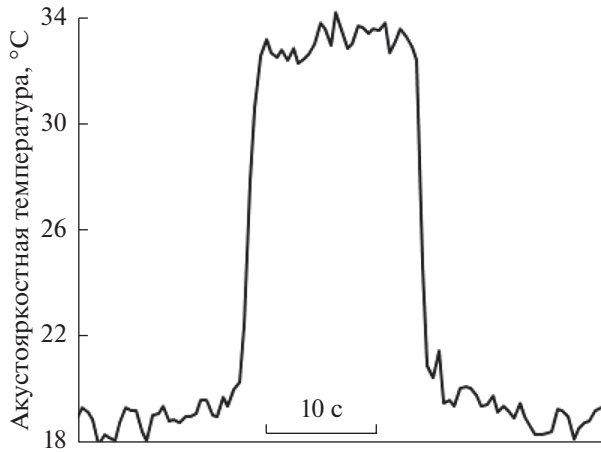
Комнатную температуру определяли, используя фон ИК термограмм.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Измерялась акустояркостьная температура объекта (участка тела человека) – интегральная характеристика, равная температуре акустического черного тела, создающего такую же плотность потока теплового акустического излучения, как и исследуемый объект [16]. На рис. 2 для при-



**Рис. 1.** Типичная термограмма испытуемого А со стороны груди и со спины. Указаны места (1–8) установки акустических приемников и исследуемая методом инфракрасной термометрии прямоугольная область.

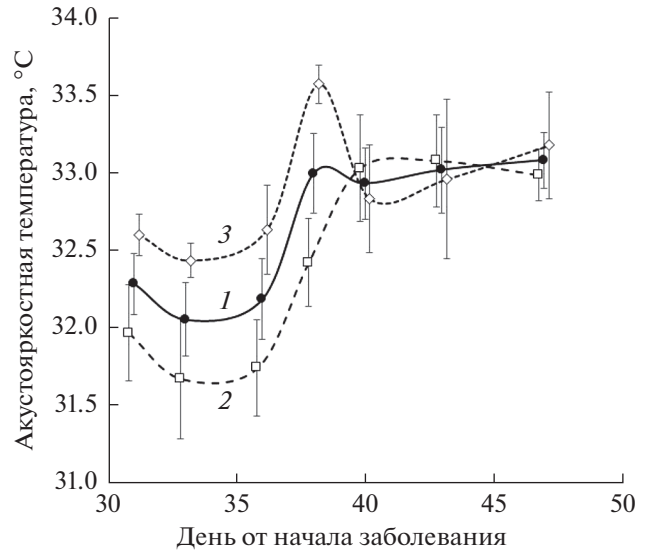


**Рис. 2.** Записи акустяркостной температуры, измеряемой в держателе с датчиком (низкий уровень сигнала) и в положении  $\delta$  (рис. 1) на спине испытуемого А (высокий уровень). Время интегрирования – 3 с.

мера представлена временная зависимость акустяркостной температуры испытуемого, полученная в 47-й день после начала болезни. Низкий уровень сигнала  $19.2 \pm 0.2^\circ\text{C}$  соответствует акустяркостной температуре держателя, которая близка к комнатной температуре. Высокий уровень  $33.1 \pm 0.3^\circ\text{C}$  показывает акустяркостную температуру, полученную в положении  $\delta$  (рис. 1) на спине испытуемого.

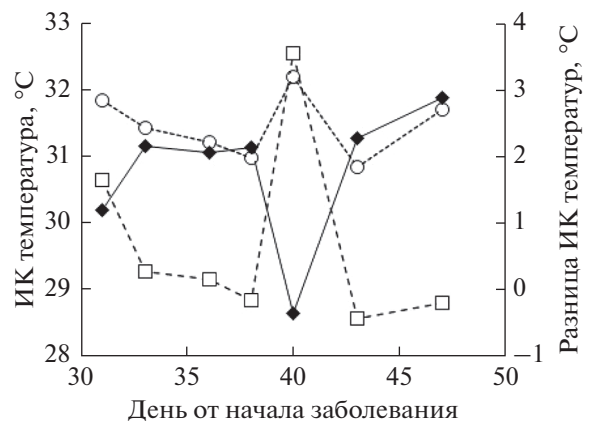
На рис. 3 представлены изменения во времени измеренной акустяркостной температуры. Получены следующие экспериментальные зависимости: средняя акустяркостная температура легочной зоны (кривая 1) увеличилась на 38-й день с начала заболевания с  $32.2 \pm 0.07$  до  $33.0 \pm 0.03^\circ\text{C}$  и вышла на постоянный уровень. При этом в первый период измерений, с 31-го по 38-й день, средняя акустяркостная температура со стороны груди (кривая 2) была на  $0.86 \pm 0.11^\circ\text{C}$  меньше средней температуры спины (кривая 3), а потом эти температуры сравнялись: разница составила  $-0.04 \pm 0.12^\circ\text{C}$ . Коэффициент корреляции между средней акустяркостной температурой и температурой комнаты равен  $-0.14$ , т.е. корреляция отсутствует.

На рис. 4 представлены результаты ИКТ прямоугольной области, показанной на рис. 1. Временная зависимость средней ИК температуры испытуемого А не позволяет выделить никакой тенденции. По-видимому, это связано с тем, что ИК температура поверхности кожи сильно зависит от внешних факторов, что маскирует искомую тенденцию, или никакой тенденции просто нет. Чтобы минимизировать влияние изменений комнатной температуры были измерены ИК тер-



**Рис. 3.** Экспериментальные зависимости акустяркостной температуры испытуемого. Представлены средняя температура торса (1), средние температуры, измеренные со стороны груди (2) и со спины (3).

мограммы испытуемого Б (см. рис. 4) и рассчитаны разности ИК температур в исследуемых зонах испытуемых А и Б (рис. 4). С помощью временной зависимости разности температур никакой тенденции также обнаружено не было. Аналогичные ИКТ были проведены со стороны грудной клетки у обоих испытуемых, что тоже не дало результатов. Полученные данные говорят о невозможности использовать ИКТ для объективизации процесса восстановления пациента, перенесшего воспаление легких.



**Рис. 4.** Экспериментальные временные зависимости ИК температур, усредненных по прямоугольной области, показанной на рис. 1, для испытуемых А (○) и Б (□) и разности ИК температур (◆). Погрешность измерения меньше размера маркера.

Возможность использования ИКТ для диагностики пневмонии обсуждается несколько десятилетий (например, [17, 18]), и в настоящий момент господствует скептическое отношение научного сообщества к этой идее. Исследований об использовании термометрии для мониторинга процесса выздоровления мы не нашли.

Полученные акустотермометрические данные показывают, что средняя температура торса испытуемого А повысилась на 10-й день после окончания карантина (или на 40-й день после появления симптомов болезни). Это может говорить о том, что улучшилось кровоснабжение легочной ткани, что может свидетельствовать о восстановлении ранее болевшего.

Ограничением ПАТ является то, что метод находится в стадии разработки. Идеальное исследование должно было бы включать магнитно-резонансную термометрию как контрольный метод измерения глубинной температуры, с результатами которого сравнивались бы результаты ПАТ. В теории возможно и введение в мышечную ткань испытуемого игл с термометрами для контроля, но организаторы исследования решительно отказались от подобных экспериментов. Отметим, что использовавшаяся ПАТ гораздо практичнее и дешевле магнитно-резонансной термометрии.

Отметим также, что представленное исследование носит предварительный характер: наличие одного испытуемого не позволяет делать статистически обоснованные выводы, что, впрочем, и не являлось целью нашего исследования. Мы хотели показать, что использование ПАТ для измерения температуры легочной ткани человека, перенесшего ковидное воспаление легких, позволяет получить объективизированную информацию о его восстановлении. Мы занимались испытуемым, перенесшим COVID-19 и прошедшим период реабилитации. Однако, возможно, в этот момент процесс восстановления еще продолжался, и, как нам представляется, нам удалось его проследить.

Дальнейшее совершенствование методики очевидным образом связано с увеличением объема выборки, что послужило бы независимой проверкой выводов данного исследования. Представленная работа лишь обозначает одно из возможных направлений будущих исследований.

Все процедуры, выполненные в исследовании с участием людей, соответствуют этическим стандартам институционального комитета по исследовательской этике и Хельсинской декларации 1964 г. и ее последующим изменениям.

От каждого включенного в исследование участников было получено информированное добровольное согласие.

Авторы выражают благодарность Д.Ф. Ничипорову за плодотворное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 18-29-02052 мк, № 20-02-00759), а также в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (№ государственной регистрации АААА-А19-119041590070-01). Разработка многоканального акустотермографа профинансирована Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0030-2021-0014.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bowen T. Acoustic radiation temperature for non-invasive thermometry // *Automedica* (New York). 1987. V. 8(4). P. 247–267.
2. Krotov E.V., Zhadobov M.V., Reyman A.M., Volkov G.P., Zharov V.P. Detection of thermal acoustic radiation from laser-heated deep tissue // *Appl. Phys. Lett.* 2002. V. 81(21). P. 3918–3920. <https://doi.org/10.1063/1.1521245>
3. Буров В.А., Дмитриев К.В., Румянцева О.Д., Юрченко С.А. Принцип получения изображений в корреляционной акустической томографии с фокусировкой // *Известия Российской академии наук. Серия физическая.* 2019. Т. 83(1). С. 70–75.
4. Миргородский В.И., Герасимов В.В., Пешин С.В. Экспериментальные исследования особенностей пассивной корреляционной томографии источников некогерентного акустического излучения мегагерцового диапазона // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 5. С. 606–612.
5. Anosov A.A., Kazansky A.S., Subochev P.V., Mansfel'd A.D., Klinshov V.V. Passive estimation of internal temperatures making use of broadband ultrasound radiated by the body // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. V. 137(4). P. 1667–1674. <https://doi.org/10.1121/1.4915483>
6. Аносов А.А., Гаврилов Л.Р. Восстановление распределения глубинной температуры биообъектов с помощью линейных фазированных решеток // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51(4). С. 447–455.
7. Anosov A.A., Subochev P.V., Mansfeld A.D., Sharakshane A.A. Physical and computer-based modeling in internal temperature reconstruction by the method of passive acoustic thermometry // *Ultrasonics.* 2018. V. 82. P. 336–344. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.09.015>
8. Аносов А.А., Сергеева Т.В., Алехин А.И., Беляев Р.В., Вилков В.А., Иванникова О.Н., Казанский А.С., Кузнецова О.С., Лесс Ю.А., Луковкин А.В., Мансфельд А.Д., Санин А.Г., Шараханэ А.С. Акустотермометрическое сопровождение лазериндуцированной интерстициальной гипертермии молочной и щитовидной желез // *Биомедицинские технологии и радиоэлектроника.* 2008. № 5. С. 56–64.
9. Аносов А.А., Балашов И.С., Беляев Р.В., Вилков В.А., Гарсков Р.В., Казанский А.С., Мансфельд А.Д., Шербаков М.И. Акустическая термометрия головного

- мозга пациентов с черепно-мозговой травмой // Биофизика. 2014. Т. 59. № 3. С. 545–551.
10. *Аносов А.А., Ерофеев А.В., Пешкова К.Ю., Щербаков М.И., Беляев Р.В., Мансфельд А.Д.* Совместное использование пассивной акустической и инфракрасной термометрии для контроля УВЧ-нагрева // Акуст. журн. 2020. Т. 66(6). С. 690–696.
  11. *Аносов А.А., Балашов И.С., Ерофеев А.В., Жданкина Ю.С., Шаракианэ А.А., Мансфельд А.Д.* Измерения глубинной температуры тела человека методом пассивной акустической термометрии // Общ. реаниматология. 2019. Т. 15(1).
  12. *Jones V.F.* A reappraisal of the use of infrared thermal image analysis in medicine // IEEE transactions on medical imaging. 1998. V. 17(6). P. 1019–1027. <https://doi.org/10.1109/42.746635>
  13. *Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Дворникова М.В., Дворникова В.В., Казанский А.С., Курятникова Н.А., Мансфельд А.Д.* Акустотермометрический контроль кисти человека при гипертермии и гипотермии // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 109–114.
  14. *Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Казанский А.С., Курятникова Н.А., Мансфельд А.Д.* Акустотермометрические данные о кровотоке и теплопродукции в предплечье при физической нагрузке // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 539–544.
  15. *Ring E.F.J., Ammer K.* The technique of infrared imaging in medicine // Thermology international. 2000. V. 10(1). P. 7–14.
  16. *Passechnik V.I.* Verification of the physical basis of acoustothermography // Ultrasonics. 1994. V. 32(4). P. 293–299. [https://doi.org/10.1016/0041-624X\(94\)90009-4](https://doi.org/10.1016/0041-624X(94)90009-4)
  17. *Potantin C.* Thermographic patterns of pulmonary disease // Chest. 1970. V. 58(5). P. 491–496.
  18. *Wang L.T., Cleveland R.H., Binder W., Zwerdling R.G., Stamoulis C., Ptak T., Hibberd P.* Similarity of chest X-ray and thermal imaging of focal pneumonia: a randomised proof of concept study at a large urban teaching hospital // BMJ open. 2018. V. 8(1). P. e017964. <https://doi.org/10.1136/bmjopen-2017-017964>

АКУСТИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ.  
БИОМЕДИЦИНСКАЯ АКУСТИКА

УДК 599.537:534.28

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЧМ-СИГНАЛОВ (СВИСТОВ)  
НОВОРОЖДЕННОЙ ЧЕРНОМОРСКОЙ АФАЛИНЫ  
(*TURSIOPS TRUNCATUS*)

© 2022 г. В. А. Рябов\*

Карадагская научная станция им. Т.И. Вяземского — природный заповедник РАН, филиал ФГБУН ФИЦ  
“Институт биологии южных морей имени А.О. Ковалевского РАН”,  
ул. Науки 24, п. Курортное, Феодосия, Крым, 298188 Россия

\*e-mail: ryaboff@inbox.ru

Поступила в редакцию 17.02.2021 г.

После доработки 09.09.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Известно, что неонатальные дельфины начинают издавать ЧМ-сигналы (свисты) сразу после рождения. Цель нашей работы — изучение динамики параметров ЧМ-сигналов новорожденной в первые дни ее жизни. Акустические сигналы новорожденной самки дельфина афалины (*Tursiops truncatus*) и ее родителей были записаны с помощью двухканальной системы в полосе частот 0.1–220 кГц с динамическим диапазоном 81 дБ, через 22, 46, 46.5 и 47 ч после рождения. ЧМ-сигналы сопоставлены с дельфинами, измерены и проанализированы параметры сигналов, особенности их динамики и распределения значений. Показано, что новорожденная периодически продуцирует серии ЧМ-сигналов путем перебора их частотных контуров и значений параметров в случайном порядке без повторений. При этом большинство параметров ЧМ-сигналов имеют квазинормальное распределение значений, поэтому более 90% сигналов не имеют экстремальных (максимальных и минимальных) значений соответствующих параметров. Рассмотренные механизмы формирования ЧМ-сигналов новорожденной, вероятно, играют ключевую роль в оптимизации развития и тестирования совместной работы органов и систем их генерации, рецепции и слуховой обработки в раннем постнатальном онтогенезе.

**Ключевые слова:** дельфин афалина (*Tursiops truncatus*), новорожденная самка, ЧМ-сигнал (свист), перебор частотных контуров без повторений в случайном порядке

**DOI:** 10.31857/S032079192203011X

## ВВЕДЕНИЕ

Дельфины живут в водной среде несколько десятков миллионов лет. Основными сенсорными посредниками животных в этой среде являются звуки. Они общаются и воспринимают мир вокруг себя с помощью различных акустических сигналов и эхолокационной системы [1]. Однако на сегодняшний день знаний об акустических сигналах, их функциональности и обработке слухом дельфинов недостаточно (см. [2] и др.).

Сигналы взрослых дельфинов модифицируются на протяжении всей жизни под воздействием множества факторов, поэтому представляет интерес изучение сигналов новорожденных дельфинов с оригинальными акустическими характеристиками [3]. Наибольшее количество работ на сегодняшний день посвящено изучению частотно-модулированных (ЧМ) сигналов дельфинов, известных как свисты [1–19] и др. Однако реги-

страция этих сигналов производилась в основном только в полосе частот до 22 кГц или меньше.

У изученных представителей семейства дельфинов (*Delphinidae*) взрослые особи используют свисты для поддержания сплоченности и координации действий между собой и группами дельфинов, рассредоточенными в пространстве на расстояниях до 10–12 км [5, 8–10]. Каждый дельфин имеет собственный отличительный свист, с уникальной для каждой особи формой частотного контура, играющий индивидуально опознавательную роль, так называемый “автограф”. Форма частотного контура “свиста-автографа” воспроизводится дельфином с сохранением легко узнаваемого паттерна с небольшими изменениями и является доминирующей в индивидуальном репертуаре звуков особи (до 90%), что подтверждается большим количеством работ [5, 9–13] и др. Есть также свисты с вариабельным контуром, фрагментарные свисты и другие, роль которых пока не ясна [14].



С точки зрения теории сигналов, ЧМ-сигналы относятся к классу шумоподобных сигналов или сигналов с расширенным спектром [15–18]. База этих сигналов, т.е. произведение длительности сигналов на их диапазон частот,  $TW \gg 1$ , где  $T$  – средняя длительность сигнала,  $W$  – средний диапазон частот. Для свистов взрослых дельфинов диапазон их основных частот может достигать 1–42 кГц, а длительность от 0.048 до 4.11 с, и  $TW \approx 10^4$ – $10^5$  [15, 16, 5, 18–21]. Число гармоник свиста может изменяться от 1 до 50 и более, и в соответствии с ним изменяется частотное расстояние между гармониками. Диапазон частот ЧМ-сигналов дельфинов, учитывая гармоники, может занимать всю полосу частот их слуха, 1–140 кГц. Скорость изменения основной частоты свистов может составлять от 0 до 250–420 кГц/с [15, 16, 11]. Взрослые дельфины умеют плавно и с высокой точностью изменять частоту ЧМ-сигналов. Вместе с тем, ЧМ-сигналы дельфина рассматриваются в качестве зондирующих сигналов эхолота со сжатием импульса и Доплеровского сонара [17, 18]. ЧМ-сигналы дельфинов, как это следует из их характеристик, по-видимому, самые сложные среди сигналов дельфинов.

При рассмотрении ЧМ-сигнала дельфина мы обычно используем термины его спектрограммы, которая представляет собой график зависимости частоты от времени, или просто частотный контур свиста.

Китообразные анализируют ЧМ-сигналы обычным слухом. В то же время в работах [2, 15–18, 22, 23] авторы обсуждают возможность использования их в качестве зондирующих сигналов ЧМ-сонара и обработки отражений свистов (эха) в согласованном фильтре слуха животных, который, по-видимому, организует их слуховая система для каждого ЧМ-сигнала.

Таким образом, несмотря на сложные особенности ЧМ-сигналов, их неоднозначную роль и различные методы обработки [2, 17, 18, 22, 23], известно, что неонатальные дельфины начинают их продуцировать сразу после рождения [3, 4, 11, 25].

Цель нашей работы – изучение динамики параметров ЧМ-сигналов новорожденной афалины (*Tursiops truncatus*) в первые дни ее жизни. Для этого звуковые сигналы новорожденной и ее родителей были записаны двухканальной системой записи в широком диапазоне частот 0.1–220 кГц с широким динамическим диапазоном 81 дБ. Сигналы были сопоставлены с дельфинами. Параметры ЧМ-сигналов и особенности их динамики измерены и проанализированы. Изучено акустическое поведение дельфинов.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

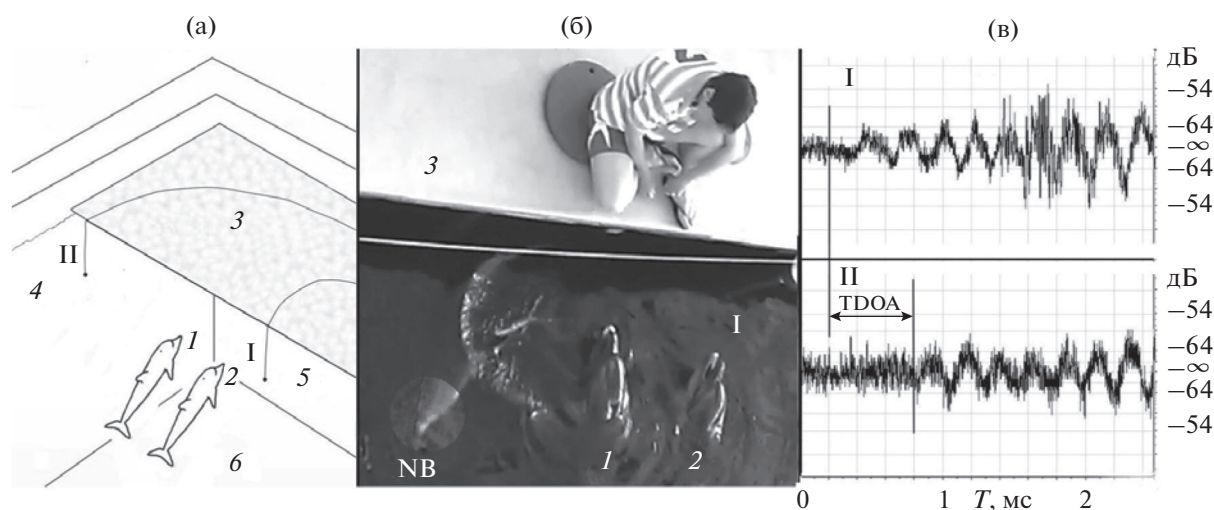
### Метод

Новорожденная (самка) и ее родители, черноморские дельфины афалины (*Tursiops truncatus*) с именами Яна (22 года, ♀) и Яша (32 года, ♂), размещались в закрытом бассейне (размером 27.5 × 9.5 × 4.5 м) Карадагской научной станции им. Т.И. Вяземского – природный заповедник РАН – филиал ФГБУН ФИЦ “Институт биологии южных морей имени А.О. Ковалевского РАН”. Новорожденная родилась 08.06.2015 г. и находилась в бассейне вместе с родителями. Других дельфинов в бассейне не было.

Вскоре после рождения новорожденная начала свистеть, что было слышно в бассейне невооруженным ухом, когда она проплывала рядом. Первая запись ее сигналов была сделана примерно через 22 часа после рождения, в первой половине дня. Всего было сделано четыре записи акустических сигналов новорожденной и ее родителей одновременно с видеозаписями их положения относительно гидрофонов и друг друга в бассейне, примерно через 22, 46, 46.5 и 47 ч после рождения, соответственно. Продолжительность каждой записи около 9 мин, всего около 36 мин.

Акустические сигналы дельфинов регистрировались двухканальной системой синхронно с видеозаписью их положения друг относительно друга и записывающих гидрофонов I и II каналов записи во время их кормления (рис. 1) возле мостков 3. Расстояние между гидрофонами I и II было выбрано равным 5 м для получения необходимой межканальной разности временных задержек и амплитуд уровней звуковых давлений (УЗД) каждого сигнала. Гидрофоны располагались таким образом (рис. 1), что гидрофон I располагался ближе к середине бассейна, а гидрофон II ближе к стенке. Запись видео производилась с балкона, расположенного вдоль бассейна на высоте около 5 м над уровнем воды. Новорожденная в это время обычно плавала вокруг родителей и, соответственно, вокруг гидрофонов (по дуге радиусом 1–5 м). Иногда она заплывала под мостки, иногда в противоположный конец бассейна (около 23 м). Яна в этих случаях, через какое-то время, следовала за ней, несколько минут они могли там оставаться, но потом вместе возвращались к мосткам 3. Яша во время записи сигналов, как правило, находился у мостков.

Гидрофоны I и II (рис. 1) пьезокерамические, сферические, диаметром 14 мм и калиброванной чувствительностью –203.5 и –206 дБ отн. 1 В/мкПа, или 66.5 и 50 мкВ/Па соответственно. Неравномерность АЧХ гидрофонов не превышала  $\pm 3$  дБ на частотах около 160 кГц и  $\pm 10$  дБ на частотах около 220 кГц. Каждый канал записи сигналов состоял из гидрофона, фильтра верхних частот (0.1 кГц), усилителя напряжения (40 дБ) и



**Рис. 1.** Схема эксперимента. (а) — 1, 2 — дельфины Яша и Яна соответственно. I и II — гидрофоны первого и второго каналов регистрации, соответственно, расположены на расстоянии 5 м друг от друга и на глубине 1 м. 3 — мостки, расположены на высоте 0.2 м над уровнем воды. 4, 5 и 6 — длинная, короткая стенка и дно бассейна, соответственно. Расстояние между гидрофоном II и стенкой 4 составляет 0.4 м. Расстояние от гидрофонов I и II до стенки 5 — 3 м. Уровень воды в бассейне 4 м. (б) — Один из кадров видеозаписи. NB — новорожденная, 1 — Яша, 2 — Яна, 3 — мостки, I — гидрофон первого канала записи. (в) — Межканальная временная задержка ЧМ-сигнала (TDOA), который NB продуцировала из местоположения, показанного на рис. 1б.

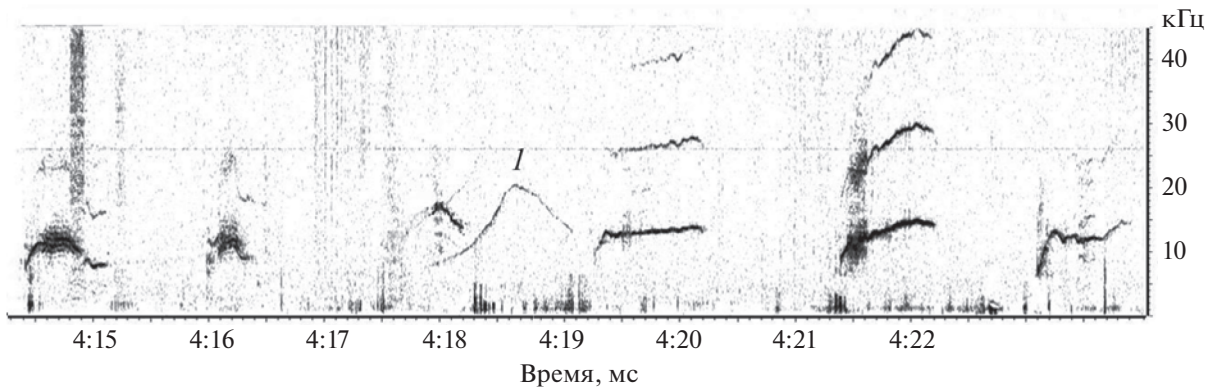
одного из каналов многоканального 14-разрядного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) USB-3000. АЦП одновременно оцифровывал сигналы дельфинов с I и II каналов регистрации с частотой дискретизации каждого из них 1 МГц. После АЦП сигналы непрерывно записывались на жесткий диск ноутбука в двухканальном PGC файле для последующего анализа и обработки. Динамический диапазон АЦП и тракта приема сигналов составлял 81 дБ (0.2–3000 Па).

Для определения принадлежности ЧМ-сигнала конкретному дельфину исследователи используют технику записи акустических сигналов с одновременной видеозаписью поведения всех дельфинов. Проанализировав видео, они пытаются определить свист по его аккомпанементу пузыряющейся струей, которая часто исходит от дельфина, производящего свист, особенно у новорожденных [3, 4, 6, 25]. Хотя также известно, что не каждый свист дельфина сопровождается пузырьками воздуха [26]. В некоторых случаях исследователи помешают дельфинов в отдельные бассейны, чтобы определить свисты конкретного дельфина. Следовательно, использование этих методов вызывает определенные трудности и нечеткости при определении производителя сигнала.

Учитывая эти проблемы, мы попытались определить ЧМ-сигналы новорожденной с учетом всех доступных нам для анализа признаков. С этой целью мы записали акустические сигналы новорожденной афалины на два канала в широком диапазоне частот и с широким динамическим диапазоном. Для идентификации свистов

новорожденной учитывалась межканальная временная задержка свиста (time difference of arrival — TDOA) на I и II гидрофонах (рис. 1). Например, для определения производителя свиста мы измеряли TDOA свиста в эксперименте (рис. 1в) и сравнивали с рассчитанным TDOA (CTDOA). Последний рассчитывался с учетом разницы расстояний от головы новорожденной до I и II гидрофонов по синхронному видео (рис. 1б). Расстояния рассчитывались с учетом известного расстояния между гидрофонами и других известных видимых размеров объектов и углов, а также известных тригонометрических соотношений. Расчетные расстояния от головы новорожденной до I и II гидрофонов составляют 2.3 и 3.1 м, разница между этими расстояниями составляет 0.8 м, что с учетом скорости звука составляет CTDOA около 0.53 мс, что, в свою очередь, соответствует измеренному TDOA, около 0.5–0.6 мс (рис. 1в). Расчетные расстояния от головы Яши (Яны) до I и II гидрофонов составляют 1.6 и 4.2 м (1.1 и 4.5 м), разница между этими расстояниями составляет 2.6 м (3.4 м), что с учетом скорости звука составляет CTDOA около 1.7 мс (2.2 мс), что не соответствует измеренному TDOA около 0.5–0.6 мс (рис. 1в). Следовательно, свист, показанный на рис. 1, был произведен новорожденной. Максимальное значение TDOA для расстояния между гидрофонами 5 м составляет 3.33 мс.

Вместе с тем, полученные записи позволили идентифицировать сигналы новорожденной по характеру их спектрограмм и спектру, а также по другим признакам. Важнейшие признаки спек-



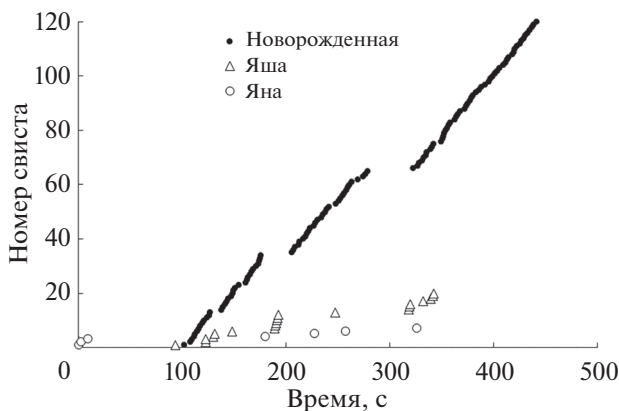
**Рис. 2.** Пример последовательности ЧМ-сигналов новорожденной, а также Яны (отмечена на рисунке цифрой 1). (Спектрограмма фрагмента первой записи).

программ свистов новорожденной, отличающие их от ЧМ-сигналов взрослых, — динамика продуцирования сигналов во времени. Новорожденная издает ЧМ-сигналы сериями с интервалами времени между свистами, соизмеримыми с длительностью свистов (рис. 2, 3, 5). В этом случае любой ЧМ-сигнал родителей не будет синхронизирован с серией, т.е. неизбежно будет перекрываться с сигналами новорожденной, что легко различить, рис. 2 (линия 1). Когда случались такие редкие случаи (например, как на рис. 3), ЧМ-сигналы, как правило, были свистами-автографами родителей или характерными для них свистами, которые нам хорошо известны, поскольку мы записывали их много раз раньше (в течение примерно 10 лет). Другой важный признак ЧМ-сигналов новорожденной — несовершенство характеристик, например, по сравнению со свистом Яны, рис. 2 (линия 1). Видно, что изменение частоты ЧМ-сигналов новорожденной происходит не плавно, а с заметным тремором, часто с перебойми в их генерации, возбуждением шума (размытость спектро-

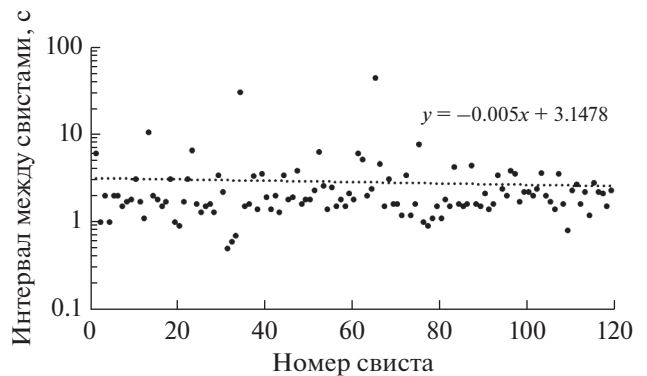
грамм), более широким спектром их основных частот и частот гармоник, что отмечалось и в работах [3, 5, 25].

Запись, визуализация и обработка записанных акустических сигналов дельфинов выполнены с помощью программных пакетов PowerGraph 3.3.8, Adobe Audition 3.0 и Excel 2016 с пакетом “Анализ данных”. Для анализа были отобраны все записанные ЧМ-сигналы, т.к. они имели достаточно высокое отношение сигнал/шум. Среднеквадратичные значения (*rms*) УЗД ЧМ-сигналов на расстоянии 1 м от дельфина были рассчитаны для всего массива выборок каждого ЧМ-сигнала с использованием функции RMS в окне “обработка сигналов” PowerGraph 3.3.8 с учетом дальности животного от гидрофона, чувствительности гидрофона и усиления приемного тракта.

Для статистического анализа записей новорожденной были измерены и рассчитаны различные параметры ЧМ-сигналов, традиционно используемые для этих целей (табл. 2), такие как:



**Рис. 3.** Распределение свистов новорожденной и родителей (Яны и Яши) в первой записи.



**Рис. 4.** Распределение интервалов между свистами новорожденной в первой записи (рис. 3). Линия тренда — модель простой линейной регрессии ( $p = 0.001, r = 0.183$ ).

начальная частота, конечная частота, минимальная частота, максимальная частота, диапазон частот, количество гармоник, длительность, количество точек перегиба основной частоты, а также максимальная частота свиста с учетом гармоник, диапазон его частот с гармониками, произведение длительности свиста на его диапазон частот и тоже самое с учетом гармоник, а также максимальное и минимальное значения этих параметров, соответственно.

Учитывая, что поток энергии излучающей системы ЧМ-сигналов дельфина, в свете теории сигналов и эхолокации, определяют такие их параметры как длительность, межсигнальный интервал и широкополосность, для анализа этих параметров были использованы модели простой линейной регрессии.

Отметим, что диапазон частот свиста дельфина с учетом гармоник ( $WH$ ) определялся как  $WH = F_{\max}(NoH) - F_{\min}$ , где  $F_{\max}$  – максимальная основная частота свиста,  $F_{\min}$  – его минимальная основная частота,  $NoH$  – количество гармоник свиста. Учитывая, что частоты гармоник свиста кратны его основной частоте, максимальная частота свиста с учетом гармоник ( $FH_{\max}$ ) определялась как  $FH_{\max} = F_{\max}(NoH)$ , где  $F_{\max}$  – максимальная основная частота,  $NoH$  – количество гармоник свиста.

Учитывая широкий частотный диапазон регистрирующей системы 0.1–220 кГц, мы впервые для зубатых китов измерили базу ЧМ-сигналов новорожденной, т.е. произведение длительности свиста на диапазон его частот ( $ТW$ ) и то же самое с учетом гармоник ( $ТWH$ ), где  $T$  – средняя длительность, а  $W$  – средний диапазон частот ЧМ-сигнала (табл. 2).

Параметры ЧМ-сигналов, их спектры и спектрограммы рассчитаны с помощью Adobe Audition 3.0 с использованием 2048-точечного БПФ с весовой функцией Хэмминга. Статистический и количественный анализ параметров ЧМ-сигналов, генерация гистограмм распределения их значений и построение простых линейных моделей

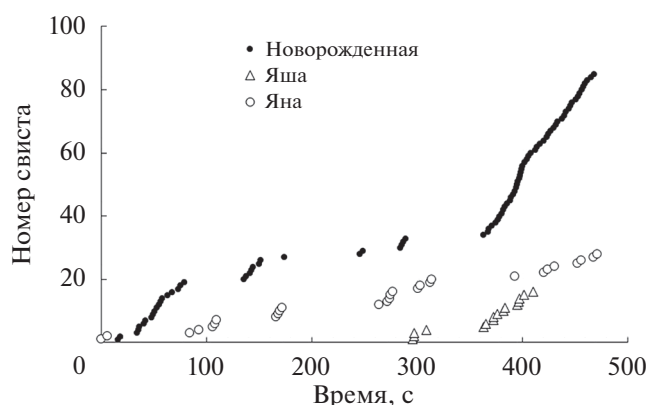


Рис. 5. Распределение свистов новорожденной и родителей во второй записи.

регрессии выполнены в электронной таблице Excel 2016 с пакетом “Анализ данных”.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Новорожденная продуцировала свисты сериями до 54 сигналов подряд с заметными временными паузами между сериями. Паузы между сериями ЧМ-сигналов изменялись от нескольких секунд до 100 с. Условимся, что пауза больше 10 с разделяет одну серию свистов от другой.

Во время первой записи новорожденная издала 120 свистов в течение 339 с (рис. 2, 3, 4, табл. 1), т.е. каждый свист она издавала приблизительно через  $339/120 = 2.8$  с. Величина среднего значения интервалов между свистами, на протяжении первой записи, в соответствии с моделью простой линейной регрессии имела тенденцию к уменьшению с 3.1 до 2.6 с ( $p = 0.001$ ;  $r = 0.183$ ).

Скорость сигнализации при этом составляла 31.2, 31, 24.5 и 27.2 мин<sup>-1</sup> для первой, второй, третьей и четвертой серии свистов, соответственно. При этом межсигнальные интервалы (60/скорость сигнализации) составляли: 1.92, 1.93, 2.44, и 2.2 с, соответственно, и их среднее арифметическое значение составляет 2.12 с. Отметим, что минимальное значение этого интервала могло до-

Таблица 1. Количество свистов дельфинов в разных записях. В скобках указано количество свистов-автографов

Номер записи	Количество свистов (свисты-автографы)			Время записи, с
	Яна	Яша	Новорожденная	
1	7(0)	20(17)	120	543
2	28(0)	16(11)	85	532
3	8(3)	10(10)	77	544
4	24(17)	3(3)	69	534
Всего	67(20)	49(41)	351	2153

**Таблица 2.** Среднее значение  $\pm$  стандартное отклонение, максимальное (max) и минимальное (min) значения различных параметров ЧМ-сигналов новорожденной в первой (1) и второй (2) записях, соответственно

	Среднее значение		max		min	
	1	2	1	2	1	2
Номер записи						
Начальная частота, кГц	8.55 $\pm$ 2.79	7.01 $\pm$ 2.28	18.12	13.63	2.50	1.73
Конечная частота, кГц	11.77 $\pm$ 2.41	13.2 $\pm$ 2.93	17.51	22.40	7.01	7.05
Максимальная частота, кГц	13.43 $\pm$ 2.23	14.51 $\pm$ 2.42	18.20	22.40	7.51	8.23
Максимальная частота с гармониками, кГц	36.52 $\pm$ 17.67	38.56 $\pm$ 20.32	116.10	90.21	6.16	11.17
Минимальная частота, кГц	8.01 $\pm$ 2.20	6.94 $\pm$ 2.19	14.12	12.40	2.50	1.73
Диапазон частот с гармониками, кГц	28.51 $\pm$ 18.01	31.62 $\pm$ 21.10	108.21	84.24	3.24	12.25
Диапазон частот, кГц	5.42 $\pm$ 2.70	7.57 $\pm$ 3.50	14.23	16.85	0.51	4.25
Число гармоник	2.72 $\pm$ 1.22	2.58 $\pm$ 1.19	8	6	1	1
Длительность, с	0.66 $\pm$ 0.23	0.57 $\pm$ 0.22	1.34	1.20	0.07	0.08
Число точек перегиба	1.80 $\pm$ 1.39	0.87 $\pm$ 1.15	7	6	0	0
(TWH)/10 <sup>4</sup>	1.88 $\pm$ 1.19	2.2 $\pm$ 1.21	7.13	4.81	0.21	0.71
(TW)/10 <sup>4</sup>	0.36 $\pm$ 0.18	0.43 $\pm$ 0.2	0.94	0.96	0.20	0.20

стигать 0.5 с (рис. 4). Учитывая среднюю длительность свистов первой записи, 0.66 с (табл. 2), средний интервал между свистами при измерении его от конца первого сигнала до начала следующего, составит 1.46 с.

Во время второй записи новорожденная издала 85 свистов за 453 с (рис. 5, 6), т.е. каждый свист она издавала приблизительно через  $453/85 = 5.3$  с. Скорость сигнализации составляла 21.4 и 29.2 мин<sup>-1</sup> для первой и последней серии, соответственно. При этом межсигнальные интервалы (60/скорость сигнализации) составляли: 2.8 и 2.05 с, соответственно, и среднее арифметическое значение этого интервала составляет 2.45 с. Учитывая среднюю длительность свистов второй записи, 0.57 с (табл. 2), средний интервал между свистами (при измерении их от конца первого до начала следующего) составит 1.88 с. Отметим, что на наиболее крутом участке графика от 391 с до 400 с (рис. 5) скорость сигнализации достигала даже 60 мин<sup>-1</sup>. На протяжении второй записи средние значения частотного диапазона, частотного диапазона с гармониками и длительности свистов (рис. 6), при аппроксимации их моделью простой линейной регрессии, имели тенденцию к увеличению с 5.5 до 10 кГц ( $p = 0.002$ ;  $r = 0.121$ ), с 13 до 30 кГц ( $p = 0.007$ ;  $r = 0.195$ ) и с 0.54 до 0.59 с ( $p = 0.005$ ;  $r = 0.191$ ), соответственно.

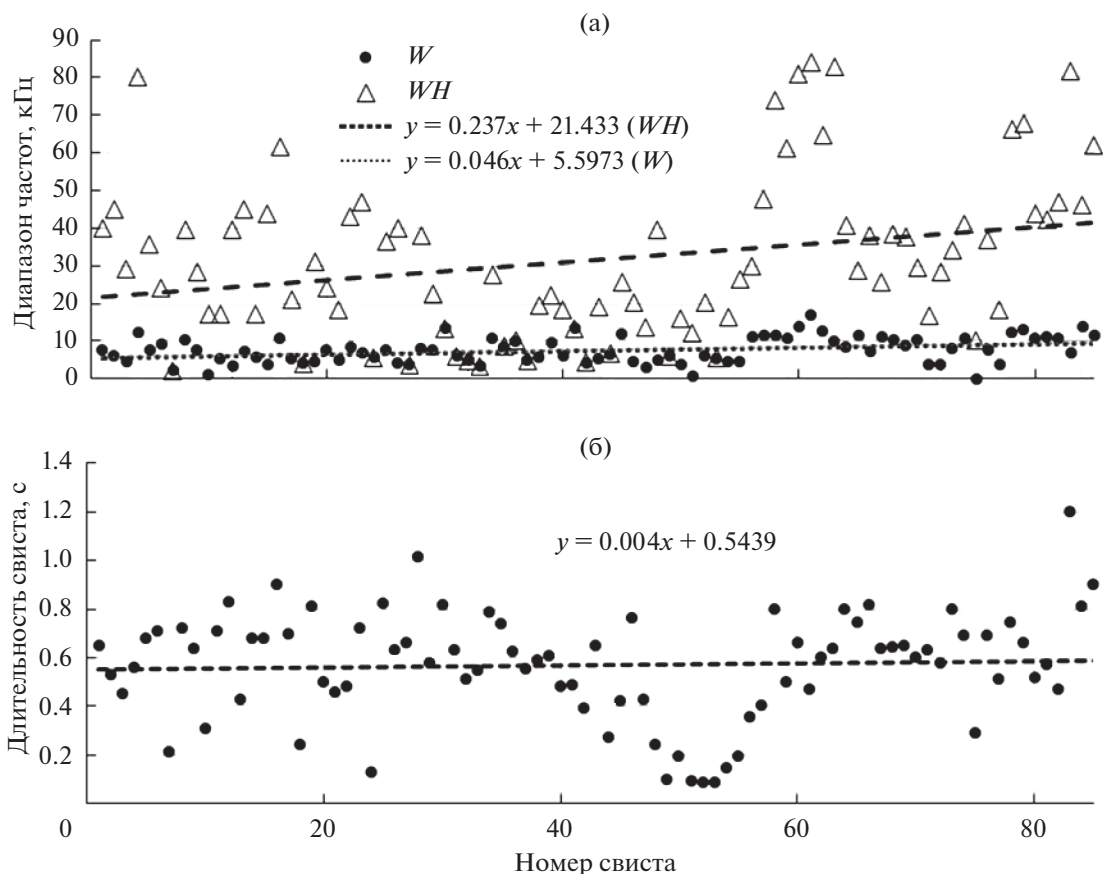
В третьей записи она издала 72 свиста за 177 с. В среднем каждый через 2.46 с, и еще 5 свистов были очень редкими (табл. 1). Во время четвертой записи новорожденная издала 44 свиста регулярно за 159 с, в среднем каждый через 3.61 с, и еще 22 свиста за 60 с, т.е. в среднем каждый через 2.72 с, а еще 3 свиста были очень редкими.

Впервые для зубатых китов мы измерили УЗД свистов новорожденной. Амплитуда УЗД составила 126–142 дБ отн. 1 мкПа в области гидрофонов и 128–159 дБ отн. 1 мкПа на расстоянии 1 м. Рассчитанные среднеквадратичные (*rms*) значения УЗД в области гидрофонов составили 112–129 дБ отн. 1 мкПа (*rms*) и 115.6–146 дБ отн. 1 мкПа (*rms*) на расстоянии 1 м. Рассчитанные *rms* значения УЗД для ЧМ-сигналов наших дельфинов были на 11.7–16 дБ, т.е. в среднем примерно на 13 дБ меньше амплитудных.

У Яны УЗД свистов, приведенный к 1 м, достигал 140–158 дБ отн. 1 мкПа и 127–145 дБ отн. 1 мкПа (*rms*). У Яши УЗД свистов, приведенный к 1 м, достигал 138–161 дБ отн. 1 мкПа и 125–148 дБ отн. 1 мкПа (*rms*). В целом УЗД свистов новорожденной в этих записях находился на уровне свистов родителей.

ЧМ-сигналы новорожденной с первых же суток жизни уже достаточно широкополосные, средние значения  $\pm$  стандартное отклонение их максимальной частоты с учетом гармоник в первой и второй записях составляют  $36.52 \pm 17.67$  кГц и  $38.56 \pm 20.32$  кГц, а максимальные значения около 116 и 90 кГц, соответственно (табл. 2). Средние значения  $\pm$  стандартное отклонение частотного диапазона ЧМ-сигналов с учетом гармоник в первой и второй записях составляют  $28.51 \pm 18.01$  кГц и  $31.62 \pm 21.10$  кГц с максимальными значениями 108 и 84 кГц, соответственно. Средние значения длительности свиста в первой и второй записях составляют  $0.66 \pm 0.23$  с и  $0.57 \pm 0.22$  с, а максимальные значения около 1.34 и 1.20 с соответственно. ЧМ-сигналы уже могут иметь до 11 гармоник (рис. 8). Средние значения базы свистов, т.е. произведения длительно-





**Рис. 6.** (а) – Распределение диапазона частот ( $W$ ) и диапазона частот с гармониками ( $WH$ ), а также (б) – длительности свистов новорожденной во второй записи. Приведены линии тренда – модели простой линейной регрессии: (а) для  $W$  ( $p = 0.002$ ,  $r = 0.121$ ); для  $WH$  ( $p = 0.007$ ,  $r = 0.195$ ); (б) ( $p = 0.005$ ,  $r = 0.191$ ).

сти на диапазон частот свиста ( $TW$ ) в первой и второй записях составляют  $(0.36 \pm 0.18) \times 10^4$  и  $(0.43 \pm 0.21) \times 10^4$ , а максимальные значения  $0.94 \times 10^4$  и  $0.96 \times 10^4$ , соответственно. Средние значения этого произведения с учетом гармоник ( $TWH$ ) составляют примерно  $(1.88 \pm 1.19) \times 10^4$  и  $(2.2 \pm 1.21) \times 10^4$ , а максимальные значения  $7.13 \times 10^4$  и  $4.81 \times 10^4$ , соответственно.

Впервые для зубатых китов визуальный анализ наших записей показал, что новорожденная периодически продуцировала серии ЧМ-сигналов, форма частотных контуров которых формально различная и не повторялась. При этом большинство параметров свиста (начальная частота, конечная частота, минимальная частота, максимальная частота, максимальная частота с учетом гармоник, длительность, количество гармоник, количество точек перегиба, межсигнальные интервалы) изменялись случайным образом от свиста к свисту (рис. 2, 4, 6, 7) с распределением значений, когда только около 10% из них являются экстремальными. Назовем условно такой закон распределения значений квазинормальным. Од-

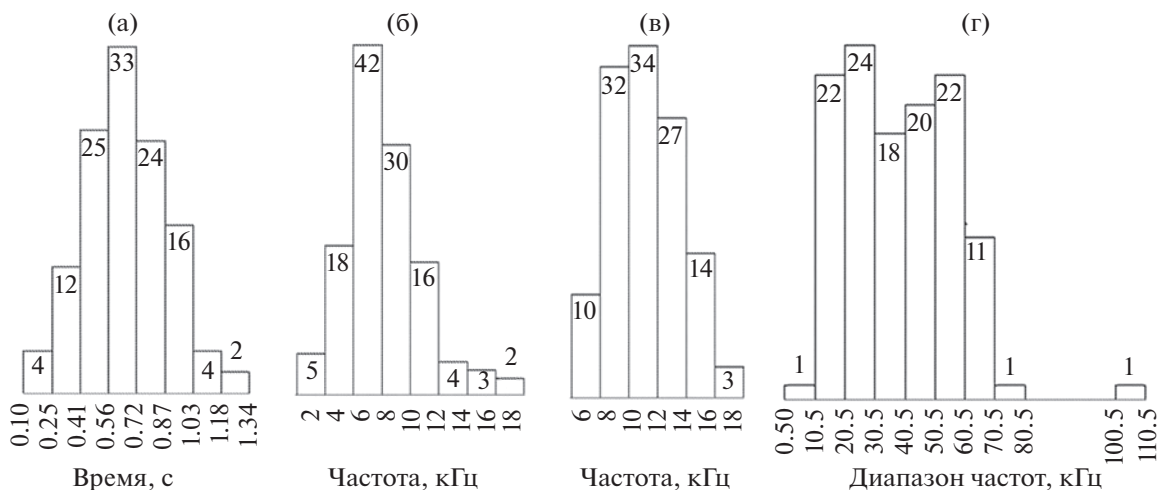
нако такие параметры ЧМ-сигналов, как диапазон частот и диапазон частот с гармониками, меняются от свиста к свисту случайным образом, но имеют квазиравномерное распределение значений (рис. 7).

Факты сложного акустического поведения дельфинов также были зафиксированы, рис. 3, 5.

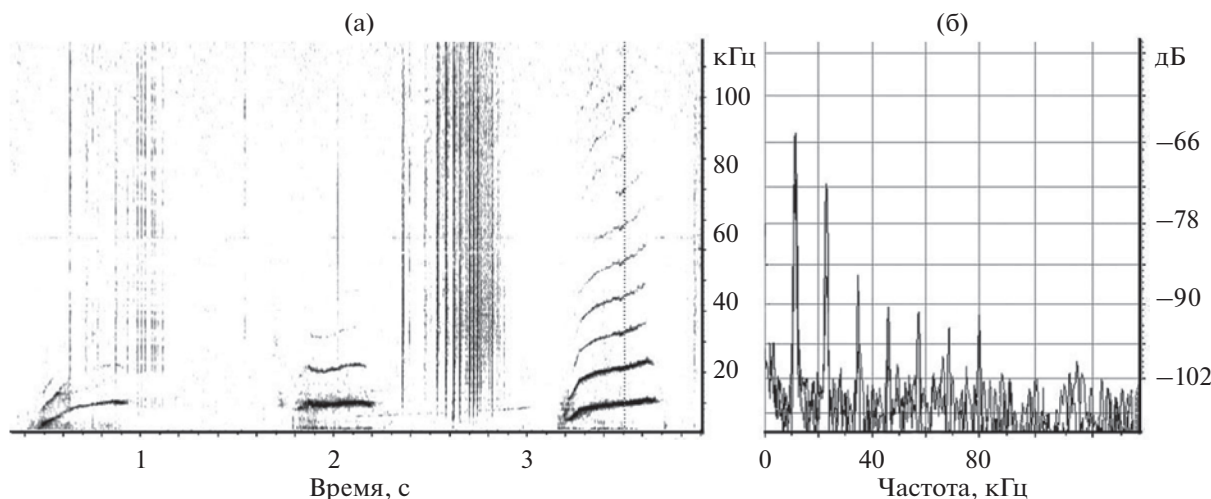
## ОБСУЖДЕНИЕ

Вскоре после рождения новорожденная афалина периодически продуцировала серии ЧМ-сигналов в течение дня и ночи. Примеры записи ее сигналов и их характеристики показаны на рис. 2–8. Измеренные нами УЗД свистов новорожденной и ее родителей в этих записях принципиально не различались. В то же время амплитуда УЗД ее свистов, 128–159 дБ отн. 1 мкПа на расстоянии 1 м и рассчитанные среднеквадратичные значения их УЗД 115.6–146 дБ отн. 1 мкПа ( $rms$ ) на расстоянии 1 м, были существенно ниже, чем известные из литературы максимальные УЗД взрослых дельфинов афалин в бассейне 173 дБ отн. 1 мкПа на 1 м [27, табл. 7.2] и





**Рис. 7.** Гистограммы распределения (а) – длительности, (б) – начальной и (в) – конечной частот, а также (г) – диапазона частот с гармониками ЧМ-сигналов новорожденной в первой записи. Значения на гистограммах показывают количество ЧМ-сигналов.



**Рис. 8.** (а) – Спектрограмма трех последовательных свистов новорожденной из четвертой записи и (б) – спектр свиста в момент времени 3.5 с.

на открытой воде – 169 дБ отн. 1 мкПа (*rms*) на 1 м [28], соответственно.

Измеренные и рассчитанные нами значения характеристик свистов новорожденной, традиционно используемых для количественного и статистического анализа (рис. 2–6, табл. 1, 2), в целом согласуются с результатами работ других авторов [3, 7], с учетом времени, прошедшего с момента рождения и полосы частот регистрации. Учитывая широкий частотный диапазон нашей регистрирующей системы 0.1–220 кГц, мы впервые для зубатых китов измерили диапазон частот и максимальную частоту свистов новорожденной с учетом гармоник, количество гармоник, базу сигналов, т.е. произведение длительности ЧМ-

сигналов на их диапазон частот (*TW*) и то же с учетом гармоник (*TWH*), а также максимальное и минимальное значения этих параметров, соответственно (табл. 2). Следует отметить, что максимальные значения (*TWH*) в первой и второй записях достигают  $7.13 \times 10^4$  и  $4.81 \times 10^4$ , соответственно, т.е. они практически достигают уровней, характерных для взрослых дельфинов  $10^4$ – $10^5$  [15, 16].

Во время записи новорожденная продуцировала в несколько раз больше свистов (351), чем ее родители – Яна (67) и Яша (49), соответственно (табл. 1), однако среди разнообразных контуров ее свистов специфического повторяющегося

контура не было. Другими словами, свист-автограф новорожденной не зарегистрирован.

Частота продуцирования ЧМ-сигналов новорожденной (рис. 2–6) составляла 24–60 мин<sup>-1</sup>. Средние значения межсигнальных временных интервалов (от конца первого до начала следующего) составляли от 1.46 до 1.88 с, а минимальный интервал между свистами мог составлять всего 0.5 с, в первой и второй записях соответственно. Количество свистов, издаваемых новорожденной в этих записях, даже по самым умеренным оценкам, может достигать примерно 500 ч<sup>-1</sup>. Хотя в работах с косвенным подсчетом свистов, по наличию пузырьков воздуха одновременно со свистом, это количество на 1–2 порядка меньше. Например, по данным работ [3, 7] количество свистов у новорожденных дельфинов увеличивалось в течение 30 дней от нескольких свистов в час до 50–80 ч<sup>-1</sup>. Возможно, это было связано с консервативным методом определения продуцента ЧМ-сигнала в этих экспериментах. Тот факт, что новорожденная издает в несколько раз больше свистов, чем родители (рис. 3, 5, табл. 1), согласуется с представлением о том, что свисты новорожденных способствуют воссоединению их с матерью, поскольку косвенно передают информацию об их местонахождении [6, 7].

В работах разных авторов отмечалось, что новорожденные издают свист сразу после рождения, и большинство сигналов еще не совершенно. Они не такие сложные и менее чистые, чем ЧМ-сигналы взрослых дельфинов. Считается, что система продуцирования свистов у новорожденных еще недостаточно развита [11, 25].

Из-за несовершенства ЧМ-сигналов в первые часы жизни их называют свистами-криками [11, 25]. В то же время новорожденные могли издавать отчетливый свист уже в первые 48 ч жизни, но пока не могли делать это надежно [3, 4, 25], что также подтверждается в нашей работе. Присутствие свистов-криков предполагает, что новорожденные дельфины должны развивать мышцы и управление ими, прежде чем они смогут должным образом воспроизводить ЧМ-сигналы [25]. Вокальная тренировка новорожденных для продуцирования ЧМ-сигналов обсуждалась в работах различных авторов [5, 7, 9].

Впервые для зубатых китов анализ динамики параметров ЧМ-сигналов новорожденной показал, что она периодически продуцирует серии ЧМ-сигналов, форма которых формально различная и не повторяется. Другими словами, она продуцирует ЧМ-сигналы путем перебора их частотных контуров без повторений в случайном порядке. При этом большинство параметров сигналов (начальная частота, конечная частота, минимальная частота, максимальная частота, максимальная частота с учетом гармоник, длитель-

ность, количество гармоник, количество точек перегиба, временные интервалы между свистами) меняются от свиста к свисту случайным образом и имеют квазинормальное распределение значений (рис. 2, 4, 6, 7). Благодаря этому более 90% ЧМ-сигналов не имеют экстремальных (минимальных и максимальных) значений соответствующих параметров, что, по-видимому, увеличивает эффективность развития органов, продуцирующих звук, поскольку это согласуется с общими представлениями о том, что сигналы со средними значениями параметров широкого диапазона легче воспроизводить без сбоев и искажений. Однако такие параметры ЧМ-сигналов, как диапазон частот и диапазон частот с гармониками, имели квазиравномерное распределение значений (рис. 7). Это может свидетельствовать о том, что механизмы изменения таких параметров, как глубина частотной модуляции и количество гармоник в сигналах, уже хорошо развиты, и новорожденная, видимо, проверяла правильность формирования ЧМ-сигналов с различными значениями параметров. Благодаря рассмотренному механизму формирования ЧМ-сигналов, по-видимому, развиваются оптимальная подвижность и управление органов продуцирования ЧМ-сигналов новорожденной. В информатике полный перебор, также известный как генерация и проверка, является общим методом решения проблем. В нашем случае новорожденная, вероятно, систематически воспроизводит все необходимые ей частотные контуры ЧМ-сигналов и проверяет верность их воспроизведения, слушая каждый из них. Можно также предположить, что она пыталась исправлять воспроизведение сигналов, но это трудно проверить и не заметно на рис. 2. Рассмотренные механизмы формирования ЧМ-сигналов новорожденной, вероятно, играют ключевую роль в оптимизации развития и тестирования совместной работы органов и систем их генерации, рецепции и слуховой обработки в раннем постнатальном онтогенезе. Об этом также говорят тенденции изменения таких параметров свистов как: длительность, межсигнальный интервал, диапазон частот и диапазон частот с гармониками, проанализированные с помощью регрессионного анализа, примеры которых показаны на рис. 4, 6. Эти параметры определяют поток энергии звукоизлучающей системы ЧМ-сигналов дельфина. Величина среднего значения интервалов между свистами (рис. 4) в соответствии с моделью простой линейной регрессии имела тенденцию к уменьшению с 3.1 до 2.6 с ( $p = 0.001$ ;  $r = 0.183$ ), что указывает на возрастание потока энергии в результате уменьшения паузы звукоизлучения. Вместе с тем, это указывает на уменьшение времени готовности системы продуцирования ЧМ-сигналов новорожденной для излучения следующего сигнала и, следовательно, на развитие системы зву-

коизлучения. Средние значения частотного диапазона, частотного диапазона с гармониками и длительности свистов (рис. 6), при аппроксимации их моделью простой линейной регрессии, имели тенденцию к увеличению с 5.5 до 10 кГц ( $p = 0.002$ ;  $r = 0.121$ ), с 13 до 30 кГц ( $p = 0.007$ ;  $r = 0.195$ ) и с 0.54 до 0.59 с ( $p = 0.005$ ;  $r = 0.191$ ), соответственно, что также может указывать на развитие системы продуцирования свистов новорожденной.

Наши результаты согласуются с данными работы [3], где было показано, что новорожденные произвольно издавали различные типы свистов, за исключением нескольких типов, таких как возрастающий по частоте (Rise). По мнению авторов, новорожденные в эти ранние периоды жизни практикуются для получения стабильного свиста.

Зубатые киты анализируют ЧМ-сигналы обычным слухом. В то же время “щелчки” ремнезуба (*Mesoplodon densirostris*) и клюворыла кювьера (*Ziphius cavirostris*) являются ЧМ-сигналами [2, 22], поэтому авторы рассматривают возможность слуховой обработки их отражений (эхо) от жертвы с помощью согласованного фильтра со сжатием импульсов. В работах [15–18] обсуждается возможность использования дельфином свистов в качестве зондирующих сигналов его ЧМ-гидролокатора со сжатием импульсов и ЧМ-Доплеровского гидролокатора. Таким образом, дельфин, по-видимому, обрабатывает эхо этих сигналов в согласованном фильтре, который его слуховая система организует для каждого конкретного ЧМ-сигнала, как у летучих мышей. Эхолокационная система летучей мыши использует зондирующие ЧМ-сигналы [24] и др., аналогичные ЧМ-сигналам зубатых китов. Они охватывают тот же частотный диапазон, содержат гармоники, сопоставимы по длительности, их частотные контуры подобны. ЧМ-сигналы широко используются в эхолокационной технике на различных частотах (сонары, радары и лазеры). Для оптимального приема эха ЧМ-сигнала в технике эхолокации используется согласованная фильтрация или корреляционный прием.

Обращают на себя внимание сложные формы акустического поведения новорожденной. Например, на протяжении первой записи она, по-видимому, продуцировала свои ЧМ-сигналы независимо от наличия ЧМ-сигналов родителей (рис. 3). Хотя они пытались продуцировать свисты в паузе от 175 до 205 с – Яна здесь вставила свист с ростом частоты, а Яша издал серию свистов-автографов. Во время паузы с 278 до 322 с Яша продуцировал еще несколько своих свистов-автографов. Однако во время второй записи (рис. 5) новорожденная замолкала каждый раз, когда ее мать продуцировала ЧМ-сигналы и, по-видимо-

му, слушала их. Она возобновляла свисты только тогда, когда мать замолкала. Это повторилось пять раз. Причем во время паузы с 289 до 362 с она, по-видимому, слушала свисты обоих родителей. Но так продолжалось только до 360-х с, после чего она снова продуцировала свисты независимо от наличия ЧМ-сигналов родителей. Этот обмен свистами новорожденная и ее мать совершили в динамичном движении с погружениями, Яша в это время находился у мостков. К сожалению, анализ спектрограмм ЧМ-сигналов ничего не добавил к пониманию этого сложного акустического поведения дельфинов. Но можно предположить, что все дельфины пытались поддерживать контакт с детенышем и друг с другом, как это отмечается и в работах других авторов [29], или показывали свои ЧМ-сигналы друг другу, чтобы оптимизировать правильное продуцирование этих сигналов новорожденной.

Следует отметить, что Яша 41 раз продуцировал свои свисты-автографы (табл. 1), так же, как и Яна 20 раз во время 3-й и 4-й записи. Сложное акустическое поведение дельфинов может свидетельствовать об относительно высоком уровне социального познания у новорожденной с первых дней жизни.

Это исследование выполнено в рамках темы государственного задания (121032300019-0).

Автор выражает благодарность сотрудникам лаборатории биоакустики Карадагской научной станции им. Т.И. Вяземского – природный заповедник РАН, особенно тренерам Светлане Яхно и Надежде Жуковой за неоценимую помощь при проведении исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Au W.W.L.* The sonar of dolphins. New York (NY), 1993.
2. *Johnson M., Madsen P.T., Zimmer W.M.X., Aguilar de Soto N., Tyack P.* Foraging Blainville's beaked whales (*Mesoplodon densirostris*) produce distinct click types matched to different phases of echolocation // *J. Exp. Biol.* 2006. V. 209. P. 5038–5050.
3. *Morisaka T., Shinohara M., Taki M.* Underwater sounds produced by neonatal bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*): I. Acoustic characteristics // *Aquatic Mammals*. 2005. V. 31(2). P. 248–257. <https://doi.org/10.1578/AM.31.2.2005.248>
4. *Reiss D.* Observations on the development of echolocation in young bottlenose dolphins // In: *Animal Sonar: Processes and performance*. Eds. Nachtigall P.E., Moore P.W.B. New York (NY): Plenum Press, 1988. P. 121–127.
5. *Caldwell M.C., Caldwell D.K., Tyack P.L.* Review of the signature-whistle hypothesis for the Atlantic bottlenose dolphin // In: *The bottlenose dolphin: Recent progress in research*. Eds. *Leatherwood S., Reeves R.* San Diego: Academic Press. 1990. P. 199–234.

6. *Smolker R., Mann J., Smuts B.* Use of signature whistles during separations and reunions by wild bottlenose dolphin mothers and infants // Behavioral Ecology and Sociobiology. 1993. V. 33. P. 393–402.
7. *Jones B.L.* The ontogeny of whistle production in infant atlantic bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) during the first thirty days of life. *Master's Theses*. 2014. 46 p.
8. *Janik V.M., Slater P.J.B.* Context-specific use suggests that bottlenose dolphin signature whistles are cohesion calls // Animal Behavior. 1998. V. 56. P. 829–838.
9. *Janik V.M.* Whistle matching in wild bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) // Science. 2000. V. 289. P. 1355–1357.
10. *Rasmussen M.H., Lammers M.O., Beedholm K., Miller L.A.* Source levels and harmonic content of whistles in white-beaked dolphins (*Lagenorhynchus albirostris*) // J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 120(1). P. 510–517.  
<https://doi.org/10.1121/1.2202865>
11. *Caldwell M.C., Caldwell D.K.* The whistle of the Atlantic bottlenose dolphin (*Tursiops truncatus*) – ontogeny // In: Behavior of Marine Animals, Cetaceans. Eds. Winn H.E., Olla B.L. New York (NY): Plenum Press, 1979. V. 3. P. 369–401.
12. *Janik V.M., Dehnhardt G., Todt D.* Signature whistle variations in a bottlenosed dolphin, *Tursiops truncatus* // Behavioral Ecology and Sociobiology. 1994. V. 35. P. 243–248.
13. *Sayigh L.S., Tyack P.L., Wells R.S., Scott M.D.* Signature whistles of free-ranging bottlenose dolphins, *Tursiops truncatus*: Stability and mother-offspring comparisons // Behavioral Ecology and Sociobiology. 1990. V. 26. P. 247–260.
14. *Agafonov A.V., Panova E.M.* Individual patterns of tonal (whistling) signals of bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) kept in relative isolation // Biology Bulletin. 2012. V. 5. P. 430–440.  
<https://doi.org/10.1134/S1062359012050020>
15. *Ryabov V.A.* Some aspects of analysis of dolphins' acoustical signals // Open J. Acoustics. 2011. V. 1. P. 41–54.  
<https://doi.org/10.4236/oja.2011>
16. *Ryabov V.A.* Acoustic signals and echolocation system of the dolphin // Biophysics. 2014. V. 59(1). P. 135–147.
17. *Ryabov V.A.* Hydroacoustical regularities of food behavior of dolphins // Marine Biological J. 2018. V. 3(2). P. 81–97.  
<https://doi.org/10.21072/mbj.2018.03.2.07>
18. *Ryabov V.A.* Some aspects of reflection of dolphin FM-signals (Whistles) in an experimental tank // Acoust. Phys. 2019. V. 65(6). P. 750–756.  
<https://doi.org/10.1134/S1063771019060125>
19. *Wang D., Würsig B., Evans E.* Whistles of bottlenose dolphins: Comparisons among populations // Aquatic Mammals. 1995. V. 21. P. 65–77.
20. *Buckstaff K.C.* Effects of watercraft noise on the acoustic behavior of bottlenose dolphins, *Tursiops truncatus*, in Sarasota Bay, Florida // Marine Mammal Science. 2004. V. 20. P. 709–725.
21. *May-Collado L.J., Wartzok D.A.* Comparison of bottlenose dolphin whistles in the Atlantic Ocean: Factors promoting whistle variation // J. Mammalogy. 2008. V. 89. P. 1229–1240.
22. *Zimmer W.M.X., Johnson M.P., Madsen P.T., Tyack P.L.* Echolocation clicks of free-ranging Cuvier's beaked whales (*Ziphius cavirostris*) // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. P. 3919–3927.  
<https://doi.org/10.1121/1.1910225>
23. *Mercado III E.* The Sonar Model for Humpback Whale Song Revised // Front. Psychol. 2018. V. 9. P. 1156.  
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01156>
24. *Mayberry H.W., Faure P.A.* Morphological, olfactory, and vocal development in big brown bats // Biology Open. 2015. V. 4. P. 22–34.  
<https://doi.org/10.1242/bio.201410181>
25. *Killebrew D.E., Mercado III E., Herman L.M., Pack A.A.* Sound production of a neonate bottlenose dolphin // Aquatic Mammals. 2001. V. 27. P. 34–44.
26. *Fripp D.* Bubblestream whistles are not representative of a bottlenose dolphin's whistle repertoire // Marine Mammal Science. 2005. V. 21. P. 29–44.
27. *Richardson W.J., Greene C.R., Malme C.I., Thomson D.H.* Marine Mammals and Noise. San Diego: Academic Press, 1995. 576 p.
28. *Janik V.M.* Source levels and the estimated active space of bottlenose dolphin *Tursiops truncatus* whistles in the Moray Firth, Scotland // J. Comp. Physiol. A. 2000. V. 186. P. 673–680.  
<https://doi.org/10.1007/s003590000120>
29. *Nakahara F., Miyazaki N.* Vocal exchanges of signature whistles in bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*) // J. Ethol. 2011. 29. P. 309–320.

**ПАМЯТИ ВИКТОРА ВАСИЛЬЕВИЧА ТЮТЕКИНА (3.12.1928–30.12.2021)**

DOI: 10.31857/S0320791922030157



30 декабря 2021 г. на 94 году ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор, ученый, внесший большой вклад в современную акустику, Виктор Васильевич Тютюкин.

Будучи студентом Горьковского государственного университета, В.В. Тютюкин выполнил в акустической лаборатории ФИАН под руководством Л.М. Бреховских дипломную работу, посвященную распространению звука в только что открытом тогда подводном звуковом канале.

Окончив в 1952 г. радиофизический факультет Горьковского государственного университета, он поступает в аспирантуру ФИАН, которую успешно заканчивает в 1955 г. Его научными руководителями были Ю.М. Сухаревский и Г.Д. Малюжинец.

С 1955 г. и до конца жизни Виктор Васильевич работал в Акустическом институте им. академика Н.Н. Андреева, пройдя должности от младшего научного сотрудника до заведующего отделом.

Начало научной карьеры Виктора Васильевича совпало с началом развития средств снижения шумности – разработок звуко- и вибропоглощающих покрытий. Первые его работы направлены на построение искусственных акустических сред и их теоретическое и экспериментальное исследование

[1]. Используемые подходы, как и полученные им научные и прикладные результаты намного опередили зарубежные исследования в этом направлении (акустические метаматериалы в современной терминологии). Созданные и освоенные промышленностью специальные гидроакустические покрытия, совмещающие в себе звукопоглощение, звукоизоляцию и вибродемпфирование, нашли широкое практическое применение.

Им был экспериментально обнаружен, а затем, совместно с М.А. Исаковичем и В.И. Кашиной, теоретически объяснен эффект волноводной изоляции [2]. Эффект заключается в том, что цепочка одинаковых резонаторов обеспечивает изоляцию звука/вибрации в широком диапазоне частот.

Исключительные результаты получены Виктором Васильевичем в области активных систем гашения. Используя теоретические основы построения активных систем, разработанные Г.Д. Малюжиным и М.В. Федорюком, он создал и экспериментально исследовал несколько макетов одномерных и пространственных конфигураций, подтвердив принципиальную реализуемость и эффективность активных методов гашения в различных постановках [3, 4]. Важным этапом развития теоретической акустики стала разработка методов решения задач распространения волн по структурам, описываемым дифференциальными уравнениями высоких порядков, с переменными коэффициентами. Для решения такого рода задач Виктор Васильевич ввел матрицу импедансов и соответствующую систему нелинейных уравнений, обобщающих известное уравнение Рикатти [5]. Этот подход позволил впервые провести расчет радиально неоднородных цилиндрических волноводов и стержней переменной толщины.

Исследования Виктора Васильевича характеризуются, с одной стороны, их максимально возможной простотой и наглядностью и, с другой стороны, прикладной ориентацией. Отметим предложенный и реализованный им метод измерения характеристик нормальных волн в многомодовых волноводах, основанный на Доплер-эффекте, возникающем при движении приемника.

Им получено более 50 авторских свидетельств на изобретения, более половины из которых внедрены в народное хозяйство и в практику научных исследований. За эту изобретательскую деятельность Виктор Васильевич был удостоен почетного звания Заслуженный изобретатель РСФСР.

Основные научные результаты В.В. Тюткина опубликованы в Акустическом журнале, развитию которого Виктор Васильевич отдал много сил как член редколлегии журнала, а в последние годы в составе его Редакционного совета.

Генератор идей, Виктор Васильевич был доброжелательным руководителем, интересным и конструктивным собеседником. Его уход является существенной потерей для российской акустики.

Редколлегия Акустического журнала выражает свое глубокое соболезнование родным и близким Виктора Васильевича Тюткина в связи с уходом из жизни родного для них человека.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вовк А.Е., Пастернак Р.Н., Тюткин В.В.* Экспериментальное исследование волновых свойств среды с цилиндрическими каналами // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 1. С. 24–32.
2. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тюткин В.В.* Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импедансными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384–389.
3. *Мазанников А.А., Тюткин В.В.* Исследование активных автономных систем гашения акустических полей в одномодовых волноводах // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 5. С. 729–734.
4. *Коротаев Е.В., Тюткин В.В.* Экспериментальное исследование активной гасящей системы плоской формы // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 1. С. 84–88.
5. *Тюткин В.В., Шкварников А.И.* Внутренние изгибные импедансы и их применение для задач распространения изгибных волн по неоднородным стержням // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 2. С. 275–281.