
СОДЕРЖАНИЕ

Том 65, номер 4, 2020

К 100-летию Якова Соломоновича Шифрина

Яков Соломонович Шифрин (23.04.1920–06.08.2019)

315

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Новый тип резонатора-накопителя для компрессора электромагнитных импульсов

П. Н. Мележик, Ю. К. Сиренко

317

Метод интегральных уравнений для решения дифракционных задач о расчете скрученных направляющих структур

С. М. Гаранин, И. Н. Данилов, С. Б. Раевский, А. Ю. Седаков

330

Электродинамический анализ одномерной решетки со случайными параметрами

С. Е. Банков

342

Синтез анизотропной импедансной плоскости по заданному направлению и поляризации отраженной волны

Ю. В. Юханов, Т. Ю. Привалова

353

Эвристическое решение задачи дифракции на сверхпроводящей полуплоскости

С. Е. Банков, М. В. Весник, В. Ф. Кравченко

363

Алгоритмы гибридного проекционного метода для анализа возбуждения неоднородного диэлектрического тела вращения радиальным магнитным диполем

Е. И. Семерня, С. П. Скобелев

372

Математическая модель двухэлементной микрополосковой излучающей структуры с подложкой из кирального метаматериала

А. Л. Бузов, Д. С. Клюев, Д. А. Копылов, А. М. Нещерет

380

Изменение структуры поля метачастиц при распространении импульсного волнового поля, направленно излученного апертурным источником

В. В. Шевченко

388

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Восстановление сигналов с помощью новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко в случае представления измерительного процесса сверточной моделью

В. Ф. Кравченко, В. И. Пустовойт, А. В. Юрин

390

ЯКОВ СОЛОМОНОВИЧ ШИФРИН (23.04.1920–06.08.2019)

DOI: 10.31857/S0033849420040038



23 апреля 2020 г. исполняется сто лет со дня рождения Якова Соломоновича Шифрина, доктора технических наук, профессора, который многие годы принимал участие в работе редколлегии журнала “Радиотехника и электроника”.

Я.С. Шифрин – крупный ученый в области радиофизики и прикладной электродинамики, создатель статистической теории антенн. Его работы широко известны в нашей стране и за рубежом. Также хорошо известна созданная им научная школа, из которой вышли более пятидесяти кандидатов наук и двадцать докторов наук.

Яков Соломонович в 1941 г. с отличием закончил физический факультет Ленинградского государственного университета, где специализировался в области теоретической физики.

С самого начала Великой Отечественной войны Я.С. Шифрин воевал в составе Ленинградской армии народного ополчения. Затем он был откомандирован на учебу в Военную Краснознаменную академию связи им. С.М. Буденного, после окончания которой продолжил участие в боевых действиях в составе войск противовоздушной обороны. Летом и осенью 1943 г. Яков Соломонович принимал активное участие в боях за освобождение Украины в составе войск 3-го Украинского фронта.

После окончания войны Яков Соломонович с 1946 г. по 1948 г. – первый преподаватель радиолокации в Житомирском училище зенитной артиллерии, а с 1948 г. по 1951 гг. – адъюнкт первого набора Артиллерийской радиотехнической академии (АРТА) в г. Харькове. С 1951 по 1956 гг. Я.С. Шифрин преподавал в АРТА, а с 1957 по 1980 гг. был начальником кафедры антенн и распространения радиоволн этой академии. С 1980 г. по 2019 г. Яков Соломонович преподавал в Харьковском национальном университете радиоэлектроники, где был профессором, затем заведующим кафедрой и главным научным сотрудником.

В 1952 г. Яков Соломонович защитил кандидатскую диссертацию, посвященную теории приборов бегущей волны, а в 1965 г. – докторскую диссертацию, посвященную статистической теории антенн. В 1966 г. ему присвоено ученое звание профессора.

Яков Соломонович внес фундаментальный вклад в некоторые направления современной радиофизики. Он является основателем нового научного направления – статистической теории антенн (СТА). Эта теория, определяемая как теория антенн со случайными источниками, позволила впервые исследовать в полном объеме свойства и потенциальные возможности реальных антенн, являющихся по существу излучающими системами со случайными источниками.

Исследования Я.С. Шифрина по СТА, охватывающие почти 55-летний период, можно разбить на два этапа. Итогом первого этапа явилась его широко известная монография “Вопросы статистической теории антенн” (М.: Сов. радио, 1970 г.). Эта монография Я.С. Шифрина стала настольной книгой не только научных работников и инженеров, работающих в области антенн, но и специалистов, занимающихся распространением волн, радиолокацией, акустикой, оптикой. Почти сразу после выхода она была переведена на английский язык (“Statistical Antenna Theory”, Golem Press, 1971) и получила широкое распространение и признание за рубежом.

На втором этапе Я.С. Шифриным и его учениками выполнена серия работ, направленных на развитие общей СТА и решение прикладных задач: разработку основ статистического синтеза антенн, обобщение СТА на зону Френеля и построение статистической теории антенн, сфоку-

сированных в зону Френеля. Актуальность этих исследований обусловлена, с одной стороны, ростом электрических размеров ряда современных антенн, повлекшим увеличение протяженности и, соответственно, значимости зоны Френеля, а с другой – обострением проблемы электромагнитной совместимости (ЭМС). СТА послужила также исходной и при разработке Я.С. Шифриным с коллегами основ статистической теории антенных измерений. Эта теория позволяет корректно оценить потенциальные возможности голографического и коллиматорного методов антенных измерений, сформулировать требования к соответствующей измерительной аппаратуре, к антенным эталонам.

В 1983 г. Президиум АН СССР присудил Якову Соломоновичу премию им. А.С. Попова с формулировкой “За работы в области СТА, внесшие фундаментальный вклад в теорию и технику антенн”. В 1998 г. он был избран действительным членом Института инженеров электротехники и электроники (Fellow IEEE) с формулировкой “За фундаментальный вклад в теорию и технологию антенн”.

Вторым направлением фундаментальных исследований Я.С. Шифрина и его школы явились первые в СССР экспериментальные исследования дальнего тропосферного распространения (ДТР) радиоволн. Они выполнялись в течение длительного времени (1956–1962 гг.) на трассах различной протяженности, в разных диапазонах волн и в различное время года.

Для понимания и правильной интерпретации наблюдаемых при ДТР эффектов широко привлекалась СТА. Такой подход позволил установить ряд новых закономерностей, присущих ДТР, выяснить роль различных механизмов этого явления в зависимости от ряда факторов (сезона года, времени суток, длины трассы и т.д.). Полученные результаты изложены в двух монографиях: “Экспериментальное исследование дальнего тропосферного распространения УКВ” (Харьков: АРТА, 1964) и “Дальнее тропосферное распространение УКВ” (М.: Сов. радио, 1965), получивших широкую известность и высокую оценку специалистов.

Третье направление исследований Якова Соломоновича – теория антенн с нелинейными элементами (АНЭ). Актуальность этих исследований связана, во-первых, с внедрением в радиотехническую практику разных типов АНЭ: антенн-выпрямителей (ректенн), смесительных антенн, антенн-умножителей, антенн-генераторов, а во-вторых, с проблемой ЭМС. Исследования Я.С. Шифрина и его учеников в течение более 20 лет привели к разработке достаточно общей теории антенн с сосредоточенными нелинейными элементами. Одним из важнейших результатов этих работ явилась де-

тальная разработка теории и практики построения ректенных систем, являющихся оконечными устройствами систем беспроводной передачи энергии.

Четвертое направление исследований Я.С. Шифрина связано с диагностикой фазовых антенных решеток (ФАР). Им с коллегами было предложено два новых перспективных метода безфазовой диагностики ФАР. Важное практическое значение имеет и разработанный ими же экспериментальный метод определения матрицы взаимовлияния излучателей ФАР. Зная эту матрицу, можно уже на этапе разработки ФАР предусмотреть алгоритмическую компенсацию эффектов взаимовлияния излучателей, что существенно облегчает реализацию сканирования луча ФАР в широком секторе.

За более чем 50 лет преподавательской работы Я.С. Шифриным подготовлено много высококачественных учебных пособий, среди них выделяется книга “Антенны” (Харьков: ВИРТА им. Л.А. Говорова, 1976 г.), которая служила и служит до сих пор учебником в ряде военных, а также гражданских вузов СНГ.

Яков Соломонович уделял много сил организации и проведению международных конференций по теории и технике антенн (известных в мире как International Conference on Antenna Theory and Techniques – ICATT), которые стали преемниками известных “пистольковских” антенных конференций, проходивших ранее в СССР на протяжении многих лет. В 2002 г. Я.С. Шифрин инициировал проведение новых конференций – по сверхширокополосным и сверхкоротким импульсным сигналам (UltraWideBand and UltraShort Impulse Signals – UWBUSIS). Труды этих конференций издаются на английском языке и расходятся по всему миру.

Научные и организаторские заслуги Я.С. Шифрина высоко оценила международная научная общественность. В 2014 г. Европейская микроволновая ассоциация присудила ему награду: именную медаль “EuMA Outstanding career Award 2014”. В 2015 г. Яков Соломонович был удостоен награды общества Аэрокосмических и электронных систем Института инженеров электротехники и электроники: “Pioneer Award IEEE, AESS 2015” за фундаментальный вклад в радиофизику и статистическую теорию антенн.

За свою научную, педагогическую и общественную деятельность Я.С. Шифрин был избран Почетным гражданином г. Харькова.

Редакция и редколлегия журнала “Радиотехника и электроника”, ученики и коллеги подготовили этот выпуск журнала в знак памяти об ученом с мировым именем и замечательном человеке – Якове Соломоновиче Шифрине.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.86;517.958

НОВЫЙ ТИП РЕЗОНАТОРА-НАКОПИТЕЛЯ ДЛЯ КОМПРЕССОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ

© 2020 г. П. Н. Мележик^а, Ю. К. Сиренко^а, *

^аИнститут радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова Национальной академии наук Украины,
ул. Академика Проскуры, 12, Харьков, 61085 Украина

*E-mail: yks2002sky@gmail.com

Поступила в редакцию 12.06.2019 г.

После доработки 20.06.2019 г.

Принята к публикации 25.06.2019 г.

Изучена возможность использования резонатора-накопителя нового типа – открытого резонатора, рабочее колебание в котором формируется встречными поверхностными волнами открытого диэлектрического волновода, в активном компрессоре электромагнитных импульсов. Детально рассмотрена простейшая модель такого устройства, однако результаты, полученные при ее строгом электродинамическом анализе, позволяют сделать вывод о том, что данное устройство перспективно для использования при решении ряда актуальных задач физики и техники миллиметровых и субмиллиметровых волн.

DOI: 10.31857/S0033849420040063

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] впервые были представлены и реализованы основные принципы модельного синтеза активных прямооточных компрессоров электромагнитных импульсов на отрезках регулярных круглых и коаксиальных волноводов. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах [2–6], в которых впервые строго рассчитаны динамические характеристики накопителей на отрезках прямоугольных и круглых волноводов; синтезированы замки, позволяющие эффективно, быстро и в нужное время сбрасывать накопленную энергию в отводящие волноводы и в свободное пространство; предложены новые схемы формирования и излучения мощных, коротких, направленных радиоимпульсов; рассмотрены ключевые вопросы, связанные с возможностью использования для накопления энергии открытых резонансных систем. Основным итогом проведенных исследований заключается в демонстрации важности достоверного электродинамического моделирования, обоснованного численного анализа и оптимизации процессов, реализуемых в активных компрессорах. Было показано, что для создания устройств с заданными характеристиками, необходимо широкомасштабное моделирование, что позволяет значительно упростить и сделать гораздо менее затратным поиск оптимальных конструкций.

Метод точных поглощающих условий (Method of Exact Absorbing Conditions, ЕАС-метод) [2, 6–15] – его модели использовались в [1–6] – по-видимому, лучше других популярных методов вычислительной электродинамики, базирую-

щихся на дискретизации начально-краевых задач [16, 17], пространство счета которых ограничивается приближенными или эвристическими поглощающими условиями [18–24], приспособлен для решения задач анализа и синтеза активных компрессоров и их функциональных узлов. Он достаточно быстрый и не искажает физику моделируемых процессов. Его вычислительные схемы устойчивы и практически без потерь в точности пробегает миллионы и десятки миллионов временных слоев, необходимость просмотра которых диктуется спецификой рассматриваемых задач [16]. ЕАС-метод мы используем и в данной работе. Ее основное содержание связано с моделированием и анализом компрессора с накопителем нового типа – открытым резонатором, рабочее колебание в котором формируется встречными поверхностными волнами открытого диэлектрического волновода. Такой компрессор можно было бы ориентировать на работу в миллиметровом диапазоне длин волн. Его тепловые потери значительно меньше, а дифракционные потери сравнимы с теми, которые характерны для компрессоров с резонатором-накопителем в виде отрезка регулярного металлического волновода. Важно также и то, что при стандартном способе подачи энергии в такой накопитель из питающего волновода через запредельную диафрагму в нем не возбуждаются колебания с поперечным индексом большим единицы – фактический спектр открытого резонатора даже с большим поперечным размером оказывается хорошо разреженным.

Мы используем систему СИ для всех физических параметров, за исключением “времени” t

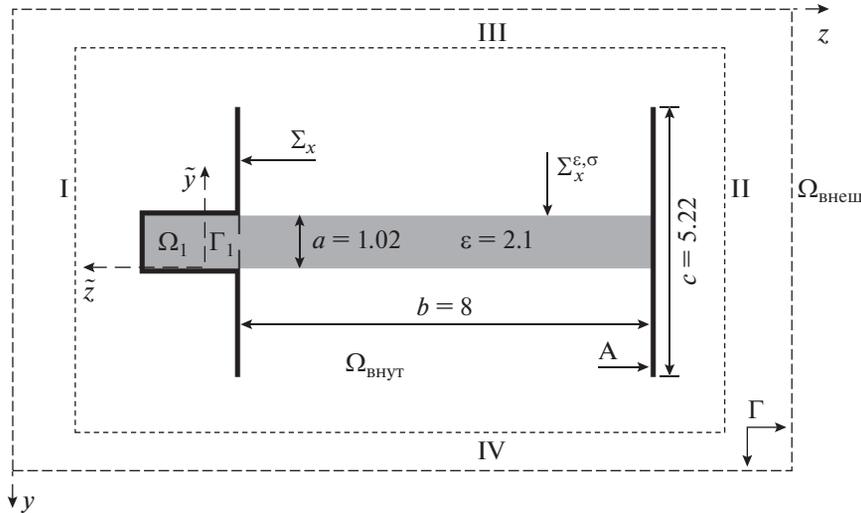


Рис. 1. Геометрия задачи: структура симметрична относительно плоскости $\tilde{y} = a/2$; толщина диафрагмы, отделяющей резонансный объем от питающего волновода, равна 0.02; толщина зеркал и металлических стенок волновода – 0.1. На условных границах I...IV рассчитывается энергия, излучаемая в свободное пространство (в область $\Omega_{\text{внеш}}$).

(измеряется в метрах) – его величина определяется произведением истинного времени и скорости распространения света в вакууме. В статье размерности опущены, т.е. все результаты приведены для линейных размеров объектов и длин волн, заданных в метрах. Очевидно, что эти результаты при использовании стандартных методов масштабирования могут быть распространены и на любые другие геометрически подобные структуры.

1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Анализ рассматриваемого модельного двумерного объекта – компактного в плоскости yOz и бесконечного, однородного в направлении x открытого резонатора с виртуальным питающим плоско-параллельным волноводом Ω_1 (рис. 1) – проводится на основе численного решения начально-краевой задачи [3, 4, 6]:

$$\begin{cases}
 \left[-\varepsilon(g) \partial_t^2 - \eta_0 P + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right] U(g, t) = 0; \\
 t > 0, \quad g \in \Omega_{\text{внут}} \\
 U(g, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t U(g, t)|_{t=0} = 0; \\
 g = \{y, z\} \in \Omega_{\text{внут}} \\
 \vec{E}_{\text{тг}}(q, t) \text{ и } \vec{H}_{\text{тг}}(q, t) \\
 \text{непрерывны при пересечении } \Sigma^{\varepsilon, \sigma}, \\
 \vec{E}_{\text{тг}}(q, t)|_{q=\{x, y, z\} \in \Sigma} = 0 \text{ и } D[U(g, t)]|_{g \in \Gamma} = 0, \\
 D_1[U(g, t) - U_p^i(g, t)]|_{g \in \Gamma_1} = 0, \quad t \geq 0.
 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь в случае E -поляризации поля ($\partial_x \equiv 0, E_y = E_z = H_x \equiv 0$) неизвестная действительная функция $U(g, t) = E_x(g, t)$ и $P[U] \equiv \partial_t [\sigma(g, t) U(g, t)]$, а в случае H -поляризации ($\partial_x \equiv 0, H_y = H_z = E_x \equiv 0$) – $U(g, t) = H_x(g, t)$ и $P[U] \equiv \sigma(g, t) \partial_t U(g, t)$; $\vec{E}(g, t) = \{E_x, E_y, E_z\}$ и $\vec{H}(g, t) = \{H_x, H_y, H_z\}$ – векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно; $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g, t)$ (кусочно-постоянные функции пространственных координат) – относительная диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость немагнитной и недисперсной среды распространения волн; $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ – импеданс свободного пространства; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные вакуума; $\Sigma = \Sigma_x \times \{|x| \leq \infty\}$ и $\Sigma^{\varepsilon, \sigma} = \Sigma_x^{\varepsilon, \sigma} \times \{|x| \leq \infty\}$ – поверхности идеальных проводников и поверхности разрыва функций $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g, t)$; $\Omega_{\text{внут}}$ – область анализа задачи (1), ограниченная контурами Σ_x и виртуальными границами Γ_1, Γ (см. рис. 1).

Резонатор возбуждается через виртуальную границу Γ_1 в поперечном сечении питающего волновода Ω_1 импульсной TE_{0p} - или TM_{0p} -волной

$$U_p^i(\tilde{g}, t) = v_p(\tilde{z}, t) \mu_p(\tilde{y}).$$

Здесь $\tilde{g} = \{\tilde{y}, \tilde{z}\}$ – локальная система координат, связанная с виртуальным волноводом Ω_1 (см. рис. 1); $v_p(\tilde{z}, t)$ – пространственно-временные амплитуды волны $U_p^i(\tilde{g}, t)$; $\mu_p(\tilde{y}) = \sqrt{2/a} \sin(\lambda_p \tilde{y})$ ($p = 1, 2, 3, \dots$) в случае E -поляризации и $\mu_p(\tilde{y}) =$

$= \sqrt{(2 - \delta_0^p)/a} \cos(\lambda_p \tilde{y})$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) в случае H -поляризации; $\lambda_p = p\pi/a$; δ_0^p – символ Кронекера.

Точные поглощающие условия $D[U(g, t)]_{g \in \Gamma} = 0$ и $D_1[U(g, t) - U_p^i(g, t)]_{g \in \Gamma_1} = 0$ на виртуальных границах Γ_1 и Γ являются ключевыми элементами корректно поставленной начально-краевой задачи (1). С их помощью классическая принципиально открытая задача, описывающая пространственно-временные трансформации электромагнитных волн в объектах, подобных рассматриваемым, превращается в эквивалентную закрытую задачу [6, 12], т.е. в задачу, которую можно решить численно стандартными сеточными методами [16, 17]. Соответствующие результаты $f(t)$ легко конвертируются в необходимые для анализа амплитудно-частотные характеристики $\tilde{f}(k)$ с использованием преобразования

$$\tilde{f}(k) = \int_0^T f(t) \exp(ikt) dt \quad \text{или} \quad \tilde{f}(k) \leftrightarrow f(t).$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число (λ – длина волны в свободном пространстве), $0 < T < \infty$ – верхний предел интервала времени наблюдения. Подробное изложение теории ЕАС-метода, приемов эффективного счета при его реализации, а также аналитическую форму точных поглощающих условий, представленных здесь интегро-дифференциальными операторами $D[\dots]$ и $D_1[\dots]$, можно найти в работах [2, 6–15].

2. РЕЗОНАТОР-НАКОПИТЕЛЬ – ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Пусть ширина d окна диафрагмы равна 0.3. Возбудим резонатор импульсной TE_{01} -волной (E -поляризация поля) со следующими характеристиками:

$$U_1^i(\tilde{g}, t) : v_1(0, t) = 4 \sin[\Delta k(t - \tilde{T})] \times (t - \tilde{T})^{-1} \cos[\tilde{k}(t - \tilde{T})] \chi(\tilde{T} - t) = F_1(t); \quad (2)$$

$$\tilde{k} = 4.0, \quad \Delta k = 1.6, \quad \tilde{T} = 75, \quad \bar{T} = 150.$$

Здесь и дальше $\chi(\dots)$ – ступенчатая функция Хевисайда, \tilde{k} – центральная частота сигнала, \tilde{T} и \bar{T} – его время запаздывания и длительность. Параметр Δk определяет полосу частот $\tilde{k} - \Delta k \leq k \leq \tilde{k} + \Delta k$ ($2.4 \leq k \leq 5.6$) [2, 8], которую занимает волна (2). Для значений k из этой полосы из всех TE_{0n} -волн, отраженных в питающий волновод Ω_1 , одна только TE_{01} -волна $U_1^s(\tilde{g}, t) = u_1(\tilde{z}, t)\mu_1(\tilde{y})$ распространяется здесь без затуха-

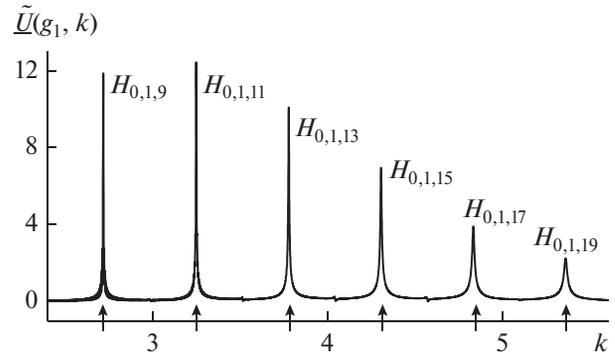


Рис. 2. Спектральные амплитуды свободных симметричных колебаний поля в резонаторе, возбужденных широкополосным TE_{01} -импульсом (2). Стрелками показано положение величин $\text{Re } \bar{k}$, отвечающих $H_{0,1,m}$ свободным колебаниям поля.

ния. Ее критическая частота $k_1^+ \approx 2.1254$. Критическая частота $k_2^+ \approx 4.2508$ TE_{02} -волны также попадает в рассматриваемый диапазон частот $2.4 \leq k \leq 5.6$ ($1.12 < \lambda < 2.62$), но эта волна не возбуждается вследствие симметрии структуры и первичной волны $U_1^i(\tilde{g}, t)$. По этой же причине поля всех возбуждаемых в резонаторе колебаний симметричны относительно плоскости $\tilde{y} = a/2$. Диафрагма, связывающая резонансный объем и питающий волновод, остается запредельной до значения $k \approx 7.2263$.

Рассчитаем функцию $U(g, t)$, $0 < t \leq T = 2000$ в точке $g = g_1$, лежащей в плоскости симметрии структуры на равных расстояниях от ее зеркал. Затем согласно [2, 8, 25–28] определим по резонансам на кривых $\tilde{U}(g_1, k) \leftrightarrow U(g_1, t) \chi(t - \bar{T}) \chi(T - t)$ (рис. 2) действительные части комплексных собственных частот $\bar{k} = \text{Re } \bar{k} + i \text{Im } \bar{k}$ ($2.4 \leq \text{Re } \bar{k} \leq 5.6$, $\text{Im } \bar{k} < 0$) резонатора, которым отвечают $H_{0,1,m}$ свободные колебания поля с нечетным значением индекса m (с нечетным числом вариаций поля вдоль оси z). Колебания $H_{0,n,m}$ с нечетным значением n , большим единицы, не возбуждаются в случае как нечетных, так и четных m . В этом заключается одно из основных отличий рассматриваемого резонатора от других подобных ему достаточно добротных резонаторов – конфокального и полуконфокального [2, 5, 28].

Остановимся подробнее на анализе первых трех колебаний, которым на рис. 2 отвечают наибольшие спектральные амплитуды (спектральные амплитуды импульса $F_1(t)$ распределены на интервале $\tilde{k} - \Delta k \leq k \leq \tilde{k} + \Delta k$ практически равномерно [2, 8]). Действительные части их собственных частот равны соответственно $\text{Re } \bar{k}_1 \approx 2.721$ (колебание

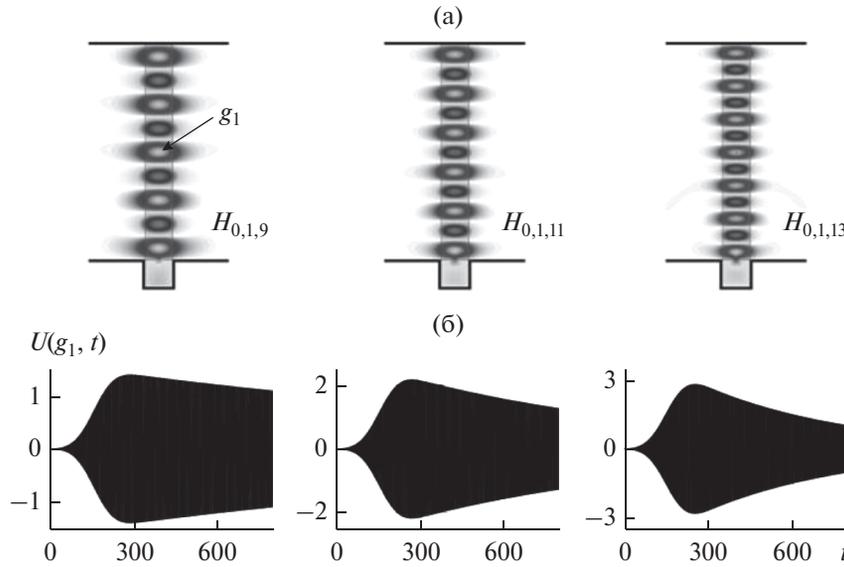


Рис. 3. Возбуждение резонатора импульсной волной (3). Конфигурация полей свободных колебаний (распределение значений $E_x(g,t) = U(g,t)$, $g \in \Omega_{\text{внут}}$, $t = 800$) (а) и амплитуды функций $E_x(g_1,t) = U(g_1,t)$ (б).

$H_{0,1,9}$), $\text{Re } \bar{k}_2 \approx 3.251$ ($H_{0,1,11}$) и $\text{Re } \bar{k}_3 \approx 3.778$ ($H_{0,1,13}$). Конфигурацию поля и добротность $Q = \text{Re } \bar{k} / 2 |\text{Im } \bar{k}|$ этих колебаний определяем, возбуждая резонатор узкополосным гауссовским импульсом:

$$\begin{aligned}
 U_1^i(\tilde{g}, t) : v_1(0, t) &= \exp\left[-(t - \tilde{T})^2 / 4\tilde{\alpha}^2\right] \times \\
 &\times \cos[\tilde{k}(t - \tilde{T})] \chi(\tilde{T} - t) = F_2(t); \\
 \tilde{k} &= \text{Re } \bar{k}, \quad \tilde{\alpha} = 40, \quad \tilde{T} = 150, \quad \bar{T} = 150, \\
 &T = 800.
 \end{aligned} \tag{3}$$

После выключения источника в поле резонатора доминирует колебание, действительная часть собственной частоты \bar{k} которого задает центральную частоту \tilde{k} сигнала $F_2(t)$, а поведение модуля огибающей $A \exp[\text{Im } \bar{k}(t - \bar{T})]$ функции

$U(g_1, t) \chi(t - \bar{T}) \chi(T - t)$, $\bar{T} < t \leq T$ однозначно определяет величину $\text{Im } \bar{k}$ (рис. 3, см. также работы [2, 8, 25–28]). Результаты, полученные в описанных выше экспериментах, приведены в табл. 1.

Способность резонатора накапливать энергию при использовании в качестве рабочего одного из трех рассмотренных колебаний будем оценивать в рамках следующего вычислительного эксперимента (рис. 4). Возбуждаем структуру длинным квазимонохроматическим импульсом

$$\begin{aligned}
 U_1^i(\tilde{g}, t) : v_1(0, t) &= P(t) \cos[\tilde{k}(t - \tilde{T})] = F_3(t); \\
 \tilde{k} &= \text{Re } \bar{k}, \quad \tilde{T} = 0.5, \quad P(t; 0.01, 5, 4995, 5000),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $P(t; T_1, T_2, T_3, T_4)$ – трапециевидная огибающая, равная единице при $T_2 < t < T_3$ и нулю при $t < T_1$ и $t > T_4 = \bar{T}$. Динамика реализуемого физического процесса достаточно полно характеризуется [1–3] следующими факторами:

- поведением пространственно-временных амплитуд $u_1(0, t) TE_{01}$ -волны, отраженной в питающий волновод;
- параметрами роста амплитуд функции $U(g_1, t) = E_x(g_1, t)$ – напряженности поля в пучности поля рабочего колебания;
- изменением функции $\eta_{\text{накоп}}(t) = [W^i(t; 0) - W^s(t; 0) - W^{\text{изл}}(t; 0)] / W^i(t; 0)$ – мгновенной эффективности накопления подводимой энергии в поле рабочего колебания;

Таблица 1. Часть спектральных характеристик резонатора с шириной d окна диафрагмы, равной 0.3

Колебание	Собственная частота	Добротность
$H_{0,1,9}$	$\bar{k}_1 \approx 2.721 - i0.0004863$	$Q_1 \approx 2798$
$H_{0,1,11}$	$\bar{k}_2 \approx 3.251 - i0.001057$	$Q_2 \approx 1537$
$H_{0,1,13}$	$\bar{k}_3 \approx 3.778 - i0.001933$	$Q_3 \approx 977$

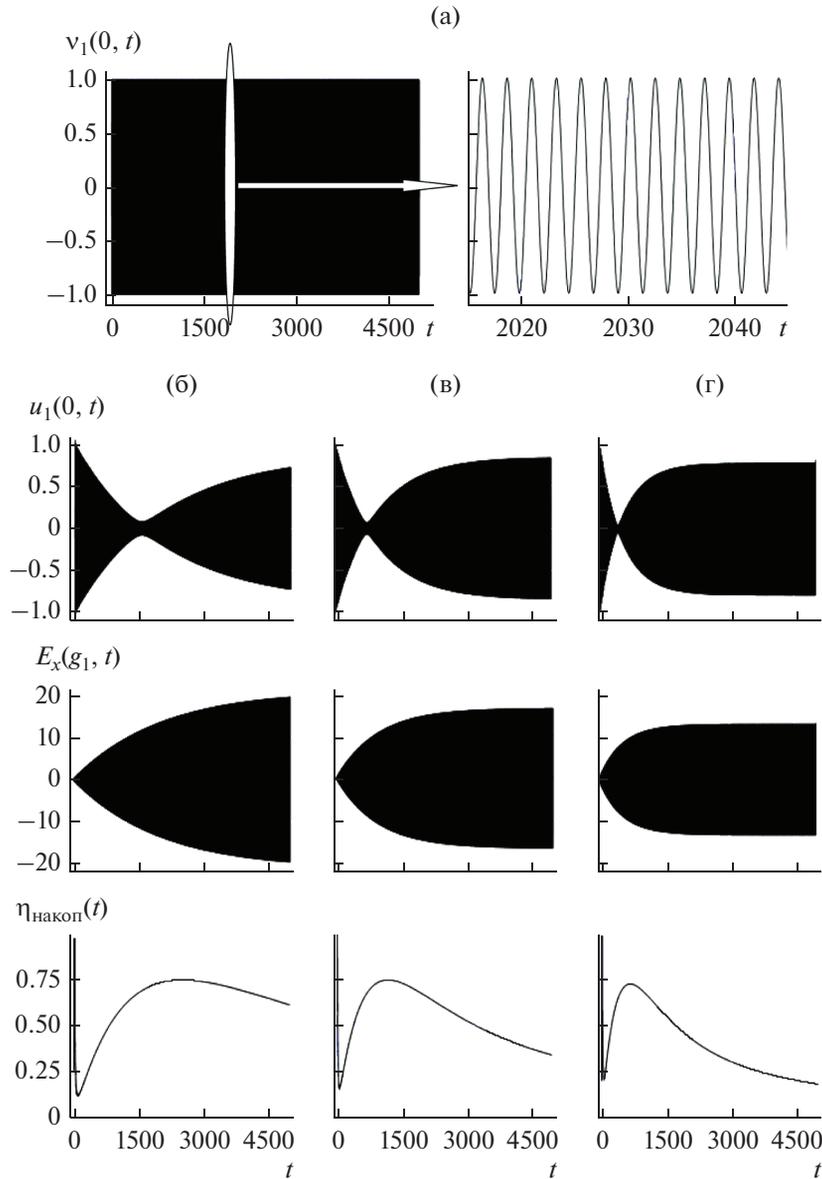


Рис. 4. Возбуждение резонатора длинным квазимонохроматическим импульсом (4). Амплитуды $v_1(0, t)$ первичной волны при мелком и крупном временном шаге (а), функции $u_1(0, t)$, $E_x(g_1, t) = U(g_1, t)$ и $\eta_{\text{накоп}}(t)$, характеризующие процесс накопления энергии на временном интервале $0 < t \leq 5000$ и в трех различных свободных колебаниях поля: $\tilde{k} = 2.721$ (б), $\tilde{k} = 3.251$ (в) и $\tilde{k} = 3.778$ (г).

— достигнутым к моменту времени t уровнем напряженности поля в пучности поля рабочего колебания

$$\alpha(t) = \max_{0 < \tau \leq t} |U(g_1, \tau)| / \max_{\tau > 0} |U(g_1, \tau)|.$$

Здесь $W^i(t_2; t_1)$, $W^s(t_2; t_1)$ и $W^{\text{изл}}(t_2; t_1) = W_I^{\text{изл}}(t_2; t_1) + W_{II}^{\text{изл}}(t_2; t_1) + W_{III}^{\text{изл}}(t_2; t_1) + W_{IV}^{\text{изл}}(t_2; t_1)$ — энергия, подведенная к накопителю через виртуальную границу Γ_1 , отведенная через эту

же границу в питающий волновод Ω_1 и излученная в свободное пространство через условные границы I...IV за промежуток времени $t_1 \leq t \leq t_2$. Все эти величины определяются интегрированием по t в интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ значений мгновенных мощностей, “переносимых” через соответствующие границы (см. работы [1–3] и рис. 1).

На рис. 4 приведены данные о трех характеристиках из четырех перечисленных выше: функции $u_1(0, t)$ отражают основные мгновенные потери

Таблица 2. Часть спектральных характеристик резонатора с шириной d окна диафрагмы, равной 0.22

Колебание	Собственная частота	Добротность
$H_{0,1,9}$	$\bar{k}_1 \approx 2.7245 - i0.0001122$	$Q_1 \approx 12132$
$H_{0,1,11}$	$\bar{k}_2 \approx 3.2555 - i0.0002355$	$Q_2 \approx 6910$
$H_{0,1,13}$	$\bar{k}_3 \approx 3.784 - i0.0004186$	$Q_3 \approx 4520$

подводимой энергии, связанные с возбуждением отраженных в питающий волновод TE_{01} -волн; функции $U(g_1, t) = E_x(g_1, t)$ предопределяют мгновенный уровень амплитуды сигнала, на который можно выйти в результате компрессии, скорость нарастания этого уровня и его предельные значения. Вместе функции $\eta_{\text{накоп}}(t)$ и $U(g_1, t)$ позволяют судить о том, в какой момент времени следует останавливать процесс накопления и определяют длительность \bar{T} возбуждающего импульса, превысив которую мы существенно понизим эффективность устройства, не добившись значительного роста амплитуды сжатого импульса. Четвертая характеристика, $\alpha(t)$, — вспомогательная (не приводится здесь), значения соответствующих функций полностью определяются поведением (наблюдаемым и прогнозируемым) огибающих функций $U(g_1, t)$.

При фиксированной добротности резонатора-накопителя (при фиксированном размере окна связи и конкретном выборе рабочего колебания) эффективность накопления зависит только от длительности накачки, а характер этой (достаточно сложной) зависимости практически одинаков для резонаторов с большей и меньшей добротностью (см. рис. 4 и работы [2, 3, 6]). Повышение добротности приводит к удлинению временного интервала, необходимого для выхода на то же значение $\eta_{\text{накоп}}$ и к росту предельного значения амплитуды формируемого в накопителе сигнала.

Как видно, вариантов, которые необходимо критически оценить при модельном синтезе компрессоров, достаточно много, но без такого исследования создание эффективно работающих устройств невозможно. Первый и важный шаг в этом направлении, как подсказывает сравнение рассмотренных характеристик и характеристик накопителей на отрезках закрытых волноводов [2, 3, 6], должен обеспечить существенное повышение добротности рабочего колебания в резонаторе-накопителе на встречных поверхностных

волнах диэлектрического волновода. Нужный результат можно получить, изменяя параметр d — ширину окна диафрагмы или ширину окна связи резонансного объема с питающим волноводом. Положим $d = 0.22$ (диафрагма остается предельной до значения $k \approx 9.8541$). Электродинамические характеристики структуры приведены в табл. 2 и на рис. 5. Представленные данные позволяют остановиться на варианте резонатора-накопителя с $d = 0.22$ и перейти к анализу физических особенностей в процессах, связанных не только с компрессией энергии длинных монохроматических импульсов, но и с ее излучением в коротких мощных радиоимпульсах. Для этого используем простейшие модели, которые в дальнейшем при решении задач синтеза можно будет сделать более реалистичными, отвечающими конкретным требованиям, вытекающим из предполагаемых условий эксплуатации создаваемых устройств.

3. ФОРМИРОВАНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ МОЩНЫХ КОРОТКИХ РАДИОИМПУЛЬСОВ

Предположим, что зеркало А резонатора-накопителя (см. рис. 1) выполнено не из идеального металла, а из материала, относительная диэлектрическая проницаемость которого равна единице, а удельная проводимость $\sigma(g, t)$, равная 57 000 при $0 < t \leq \bar{T}$ и нулю при $t \geq \bar{T} + 1$, линейно убывает в моменты времени $\bar{T} \leq t \leq \bar{T} + 1$. Собственные частоты резонатора-накопителя и добротность отвечающих им свободных колебаний при такой модификации зеркала изменятся незначительно: новые значения $\text{Re } \bar{k}$ для колебаний $H_{0,1,9}$, $H_{0,1,11}$ и $H_{0,1,13}$ равны соответственно $\text{Re } \bar{k}_1 = 2.7213$, $\text{Re } \bar{k}_2 = 3.2517$ и $\text{Re } \bar{k}_3 = 3.7795$.

Возбудим структуру длинным квазимонохроматическим импульсом $U_1^i(\bar{g}, t) : v_1(0, t) = F_3(t)$, $\bar{k} = \text{Re } \bar{k}$, $\bar{T} = 0.5$, $P(t; 0.01, 5, \bar{T} - 5, \bar{T})$ (см. формулу (4)) и продлим время наблюдения T до $T = \bar{T} + 100$. В момент времени $t = \bar{T} + 1$ зеркало А компрессора полностью “откроется” и накопленная энергия должна выброситься в свободное пространство (в основном, через условную границу II) в виде мощного короткого радиоимпульса. Пространственная длительность такого импульса обычно лишь ненамного превышает удвоенную электрическую длину ($2b\sqrt{\epsilon} \approx 23.2$) резонатора-накопителя [1–4, 6]. Время \bar{T} , исходя из результатов, представленных на рис. 5, выберем равным $\bar{T} = 10\,000$. Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 6–8.

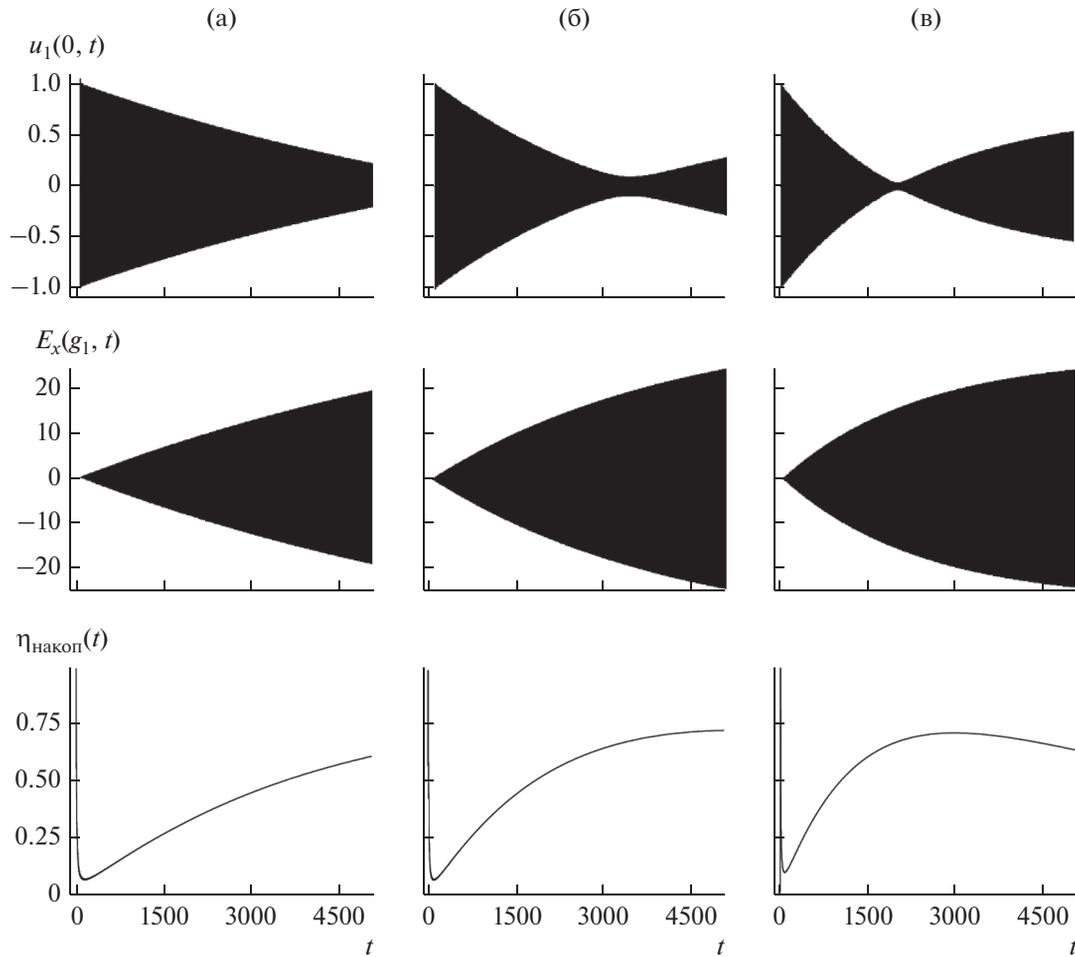


Рис. 5. Возбуждение резонатора-накопителя с шириной окна связи $d = 0.22$ импульсом (4). Функции $u_1(0, t)$, $E_x(g_1, t) = U(g_1, t)$ и $\eta_{\text{накоп}}(t)$, характеризующие процесс накопления энергии в трех различных свободных колебаниях поля: $\tilde{k} = 2.7245$ (а), $\tilde{k} = 3.2555$ (б) и $\tilde{k} = 3.7840$ (в).

Левый ряд рисунков характеризует процесс накопления энергии, а правый – процесс ее излучения в свободное пространство. Длительность $\bar{T}^s \approx 24$ и амплитуды главной части излученных импульсов практически одинаковы для всех трех рассмотренных случаев (для компрессоров с отличающимися типами рабочих колебаний). За главными частями излученных импульсов следуют резко убывающие по амплитуде послеимпульсы такой же длительности, на которые в сумме приходится меньше 4% энергии, излученной в свободное пространство через границу II. Появление этих послеимпульсов связано с отражением от конца диэлектрического волновода вытекающих из накопителя волн в плоскости, в которой в течение всего процесса накопления располагалось металлическое зеркало. Излученный импульс сконцентрирован вблизи плоскости сим-

метрии структуры – в большей степени для более высокой рабочей частоты компрессора.

При практически одинаковой степени компрессии $\beta = \bar{T}/\bar{T}^s \approx 417$ значительно различаются показатели, характеризующие энергетическую эффективность устройства с накопителем, который использует в качестве рабочих разные свободные колебания поля (см. табл. 3; здесь рабочая частота $k_{\text{раб}} = \text{Re } \bar{k}$, эффективность накопления – $\eta_{\text{накоп}}(\bar{T})$, энергетическая эффективность компрессора – $\eta = W_{\text{II}}^{\text{изл}}(\bar{T} + 3\bar{T}^s; \bar{T})/W^i(\bar{T}; 0)$, усиление по мощности – $\theta = \beta\eta$). Очевидно (см. рис. 6–8), что при работе на более длинных интервалах времени накопления $0 < t \leq \bar{T}$ компрессор с колебаниями $H_{0,1,11}$ и $H_{0,1,13}$ может поднять амплитуды излучаемых импульсов лишь незначительно и только за

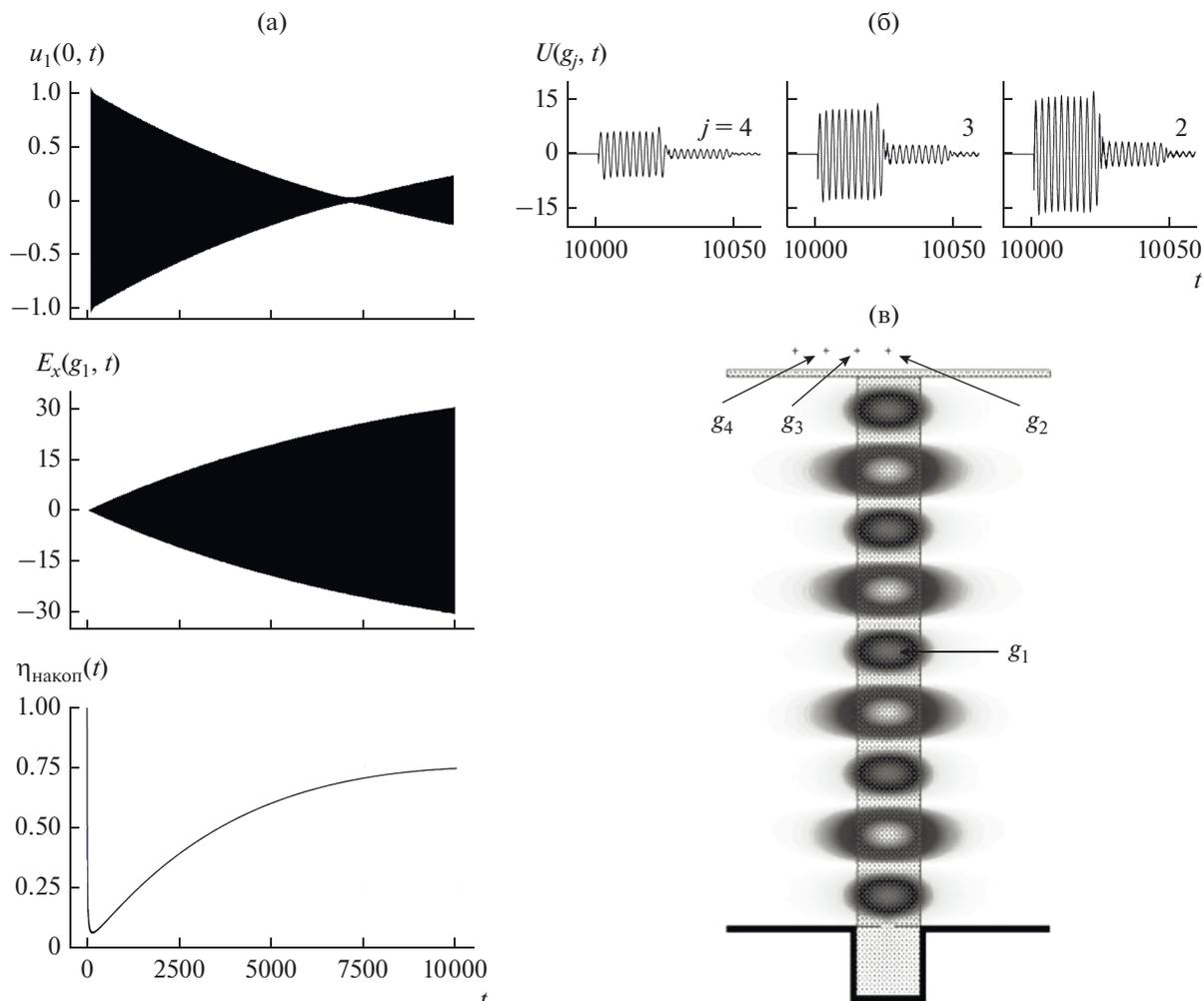


Рис. 6. Компрессор электромагнитных импульсов на колебании $H_{0,1,9}$ ($\vec{k} = \text{Re } \vec{k}_1 = 2.7213$). Функции $u_1(0,t)$, $E_x(g_1,t) = U(g_1,t)$ и $\eta_{\text{накоп}}(t)$, характеризующие процесс накопления энергии (а). Амплитуды излученного импульса $U(g,t) = E_x(g,t)$ в точках $g = g_j$, $j = 2, 3, 4$ (б). Распределение значений $U(g,t) = E_x(g,t)$, $g \in \Omega_{\text{внут}}$ в поле рабочего колебания в момент времени $t = 10000$ (в).

счет значительного снижения показателей, характеризующих его энергетическую эффективность. У компрессора с рабочим колебанием $H_{0,1,9}$

перспективы в этом отношении гораздо более благоприятные. Это подтверждают и результаты вычислительного эксперимента, приведенные на

Таблица 3. Характеристики компрессора

Колебание	Рабочая частота	Эффективность накопления	Энергетическая эффективность компрессора	Усиление по мощности
$H_{0,1,9}$	2.7213	0.744	0.71	296
$H_{0,1,11}$	3.2517	0.62	0.592	247
$H_{0,1,13}$	3.7795	0.4	0.38	158

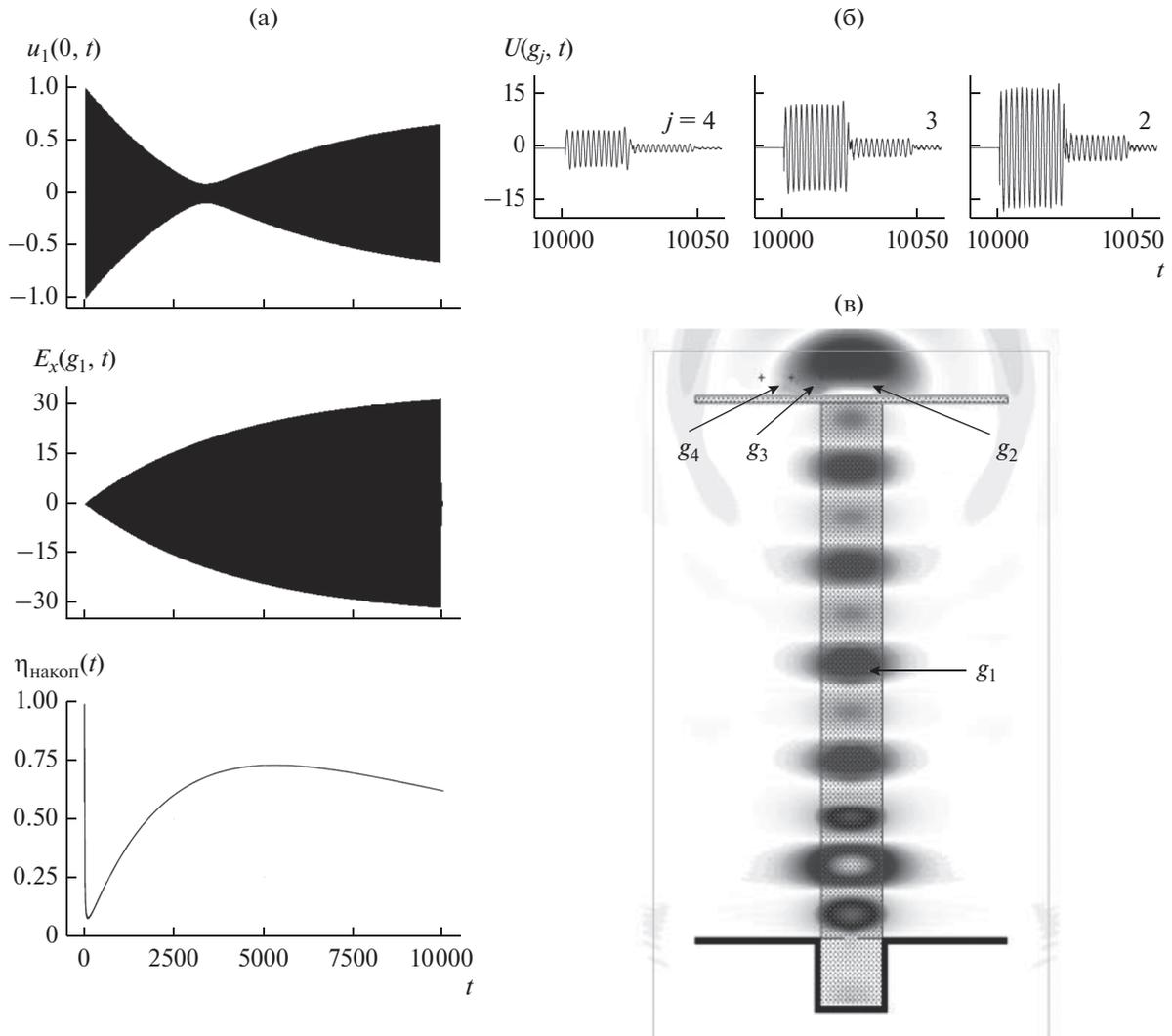


Рис. 7. Компрессор электромагнитных импульсов на колебании $H_{0,1,11}$ ($\tilde{k} = \text{Re } \bar{k}_2 = 3.2517$). Функции $u_1(0,t)$, $E_x(g_1,t) = U(g_1,t)$ и $\eta_{\text{накоп}}(t)$, характеризующие процесс накопления энергии (а). Амплитуды излученного импульса $U(g,t) = E_x(g,t)$ в точках $g = g_j$, $j = 2,3,4$ (б). Распределение значений $U(g,t) = E_x(g,t)$, $g \in \Omega_{\text{внут}}$ в поле компрессора с “открытым” зеркалом А в момент времени $t = 10010$ (в).

рис. 9. Здесь при $k_{\text{раб}} = \text{Re } \bar{k}_1$ и повышении времени накопления до $\bar{T} = 15000$ (степени компрессии до $\beta = \bar{T}/\bar{T}^s \approx 625$) максимальная напряженность поля в накопителе выросла на 21%, амплитуды главной части излученного импульса – на 22.5%, а усиление по мощности – на 46% (до $\theta \approx 432$). Эффективность накопления понизилась лишь на 2.4% (до $\eta_{\text{накоп}}(\bar{T}) \approx 0.726$), а энергетическая эффективность компрессора – на 2.5% (до $\eta \approx 0.692$). В общем, эти характеристики компрессора даже выше тех, которые фиксировались в случае резонаторов-накопителей на отрезках регулярных прямоугольных и круглых волноводов [2, 3, 6].

4. ВОЗМОЖНЫЕ СПОСОБЫ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ИМПУЛЬСА, “ВЫБРОШЕННОГО” КОМПРЕССОРОМ

От послеимпульсов в излученном из компрессора поле, обусловленных отражением от конца диэлектрического волновода при “открытом” зеркале А, можно избавиться, изменив материальные параметры и геометрию (см. рис. 10, фрагмент б) модельной структуры следующим образом. Удельная проводимость $\sigma(g,t)$ открывающегося в моменты времени $\bar{T} \leq t \leq \bar{T} + 1$ зеркала А, как и раньше, изменяется на этом временном интервале от значения 57000 до нуля. Но его относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon(g)$ теперь

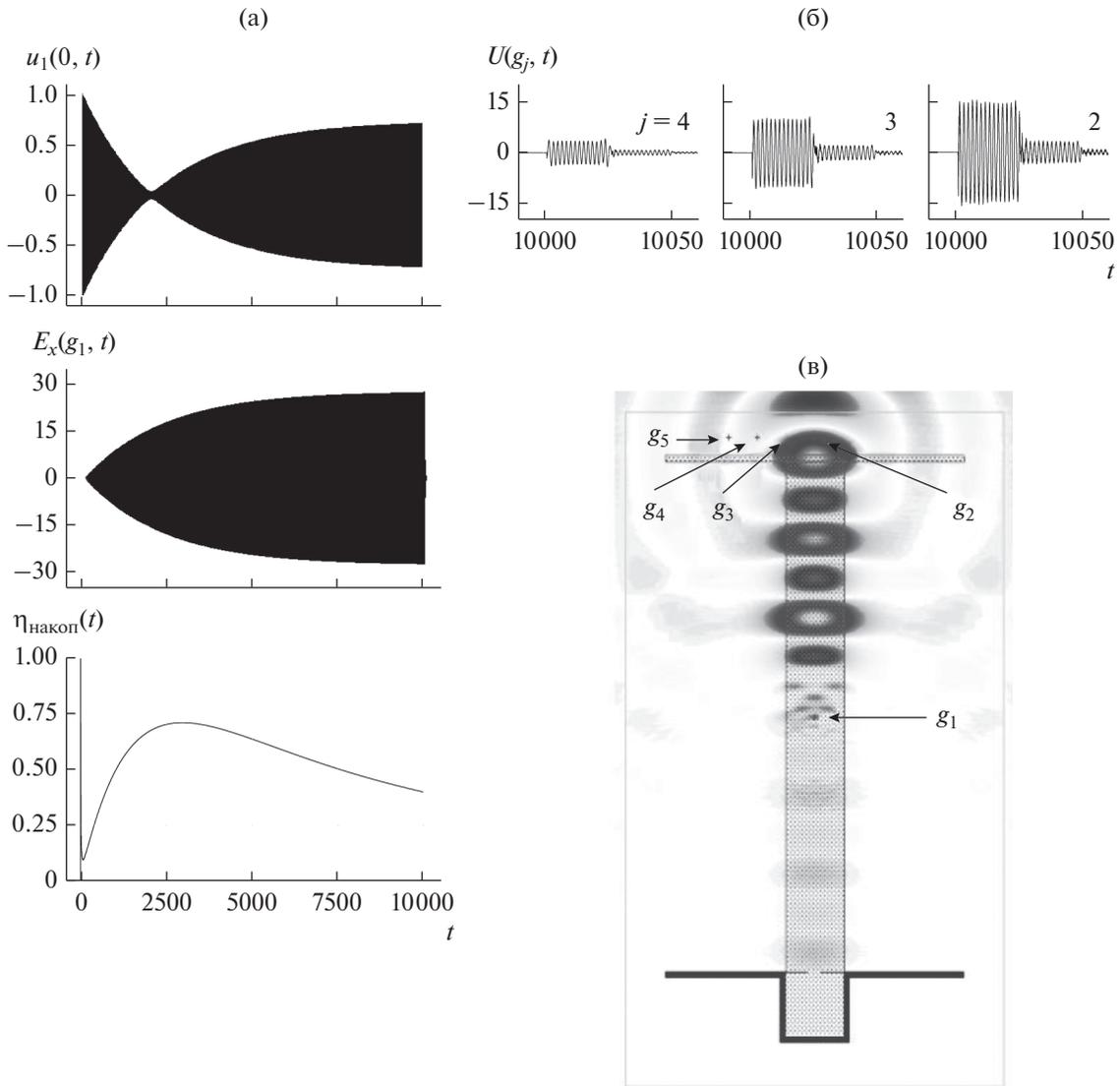


Рис. 8. Компрессор электромагнитных импульсов на колебании $H_{0,1,13}$ ($\tilde{k} = \text{Re } \bar{k}_3 = 3.7795$). Функции $u_1(0,t)$, $E_x(g_1,t) = U(g_1,t)$ и $\eta_{\text{накоп}}(t)$, характеризующие процесс накопления энергии (а). Амплитуды излученного импульса $U(g,t) = E_x(g,t)$ в точках $g = g_j, j = 2,3,4$ (б). Распределение значений $U(g,t) = E_x(g,t), g \in \Omega_{\text{внут}}$ в поле компрессора с “открытым” зеркалом А в момент времени $t = 10020$ (в).

равна единице только на крыльях, выступающих за диэлектрический волновод. В центральной части зеркала, примыкающей к торцу диэлектрического волновода, $\varepsilon(g) = 2.1$. За зеркалом А диэлектрический волновод “продолжается” таким же диэлектрическим клином, длина которого равна 4.9. Таким образом, при открытом зеркале А (в режиме сброса накопленной энергии) мы получаем классический штыревой излучатель [2] в виде сужающейся на конце диэлектрической пластины, общая длина которого равна $8 + 0.1 + 4.9 = 13$.

Накачивая модифицированный таким образом компрессор длинным квазимонохроматическим импульсом ($\tilde{k} = k_{\text{раб}} = \text{Re } \bar{k}_1, \bar{T} = 15000$), приходим к результатам, представленным на рис. 10. После импульсы в излученном компрессором поле исчезли; направленность излучения улучшилась (сравнение характера убывания предельных амплитуд функций $U(g,t)$ в точках $g = g_j, j = 6 \dots 9$ на рис. 10 и в точках $g = g_j, j = 2 \dots 5$ на рис. 9 позволяет говорить о заметном выравнивании фронта излученной волны); электромагнитное поле из объема накопителя практически полностью излу-

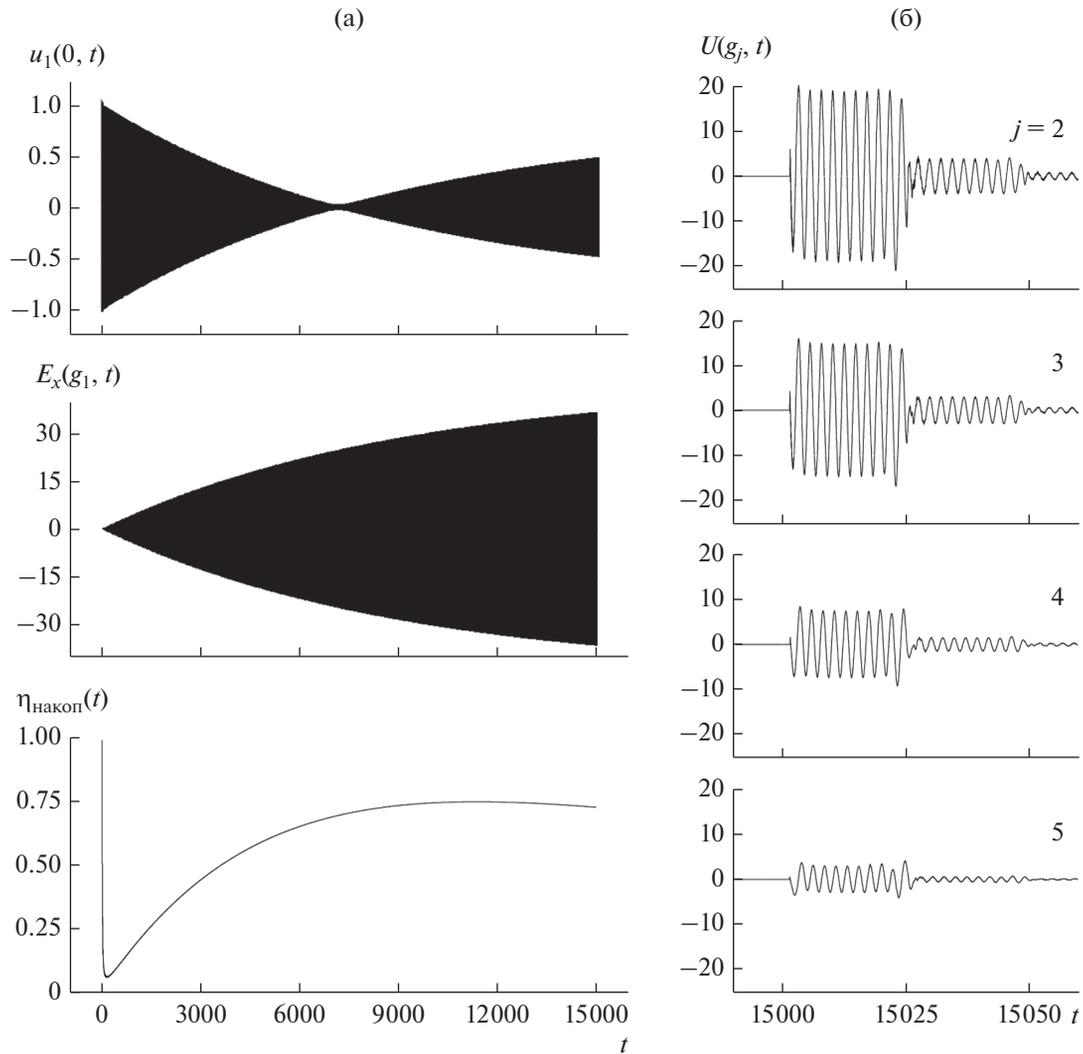


Рис. 9. Характеристики компрессора электромагнитных импульсов на колебании $H_{0,1,9}$ ($k_{\text{раб}} = \tilde{k} = \text{Re } \bar{k}_1 = 2.7213$, $\bar{T} = 15000$). Функции $u_1(0, t)$, $E_x(g_1, t) = U(g_1, t)$ и $\eta_{\text{накоп}}(t)$, характеризующие процесс накопления энергии (а). Амплитуды излученного импульса $U(g, t) = E_x(g, t)$ в точках $g = g_j$, $j = 2-5$ (б).

чается за время, равное удвоенной электрической длине резонатора и пространственной длительности \bar{T}^s излученного импульса (см. нижние фрагменты рис. 10: распределение значений $E_x(g, t) = U(g, t)$, $g \in \Omega_{\text{внут}}$ в моменты времени $t = 15000$, $t = 15010$ и $t = 15020$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что открытые резонаторы, свободные колебания поля в которых формируются встречными поверхностными волнами диэлектрических волноводов, могут быть ис-

пользованы в качестве накопителей активных компрессоров электромагнитных импульсов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн. Результаты получены в вычислительных экспериментах с упрощенными, идеализированными моделями, на которых изучены принципиальные для реальных устройств особенности процессов накопления энергии, формирования и направленного излучения мощных коротких радиоимпульсов. Предполагается, что все функционально значимые детали создаваемых устройств будут включаться в расчетные модели на этапе их оптимизации.

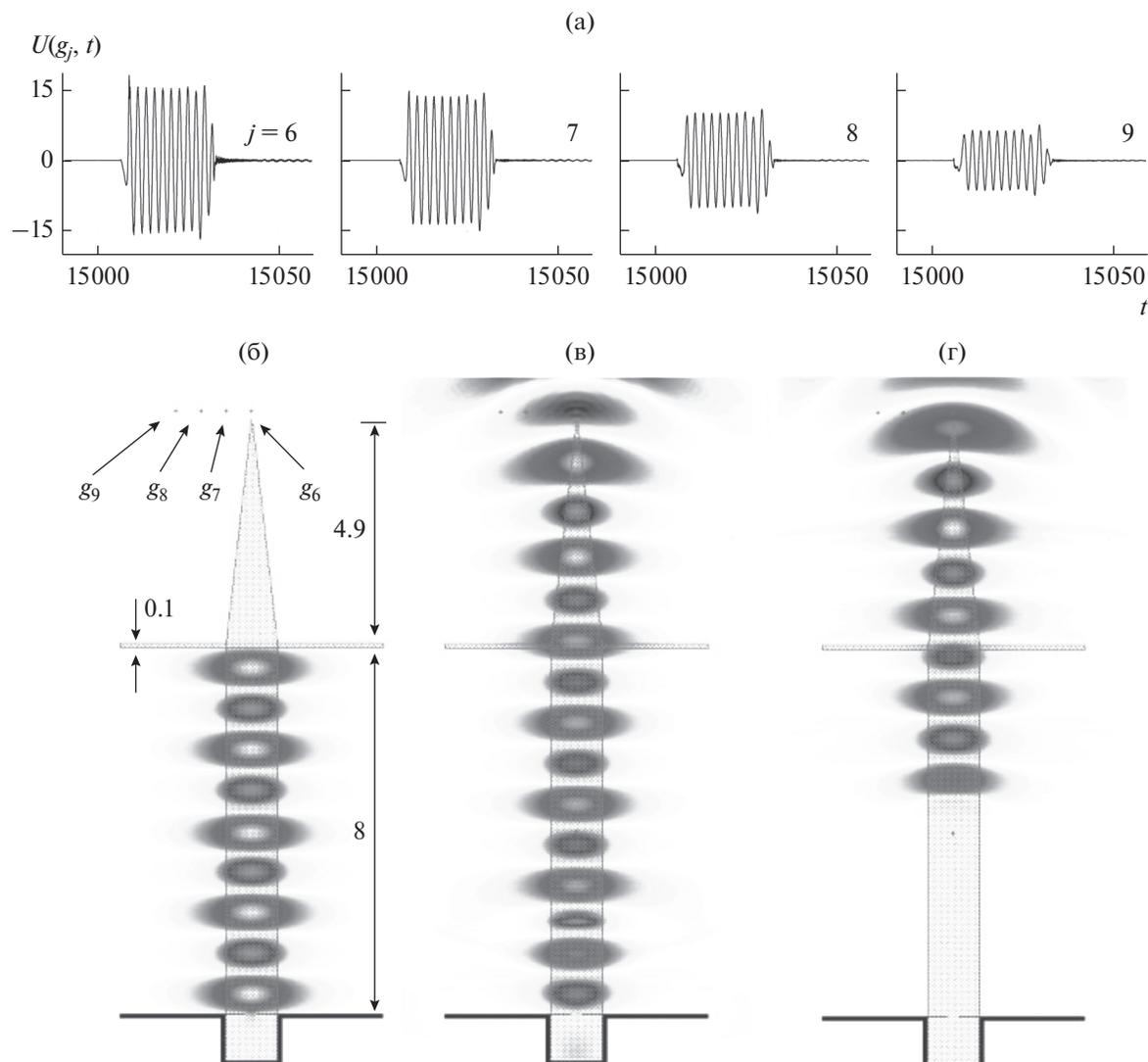


Рис. 10. Излучение короткого мощного радиоимпульса компрессором с модифицированной геометрией ($k_{\text{раб}} = \vec{k} = \text{Re } \vec{k}_1 = 2.7213$, $\bar{T} = 15000$). Амплитуды излученного импульса $U(g, t) = E_x(g, t)$ в точках $g = g_j$, $j = 6-9$ (а). Распределение значений $U(g, t) = E_x(g, t)$, $g \in \Omega_{\text{внут}}$ в поле компрессора с “открытым” зеркалом А в моменты времени $t = 15000$ (б), $t = 15010$ (в) и $t = 15020$ (г).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuzmichev I., Melezhyk P., Pazynin V. et al.* // Радиофизика и электроника. 2008. Т. 13. № 2. С. 166.
2. *Кравченко В., Сиренко Ю., Сиренко К.* Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. М.: Физматлит, 2011.
3. *Sirenko K., Pazynin V., Sirenko Y., Bagci H.* // Progress in Electromagnetics Research. 2011. V. 116. P. 239.
4. *Sirenko K., Pazynin V., Sirenko Y., Bagci H.* // Progress in Electromagnetics Research. 2011. V. 116. P. 271.
5. *Burambayeva N., Sautbekov S., Sirenko Y., Vertiy A.* // Telecommunications and Radio Engineering. 2015. V. 74. № 1. P. 29.
6. *Electromagnetic Waves in Complex Systems: Selected Theoretical and Applied Problems* / Eds. Sirenko Y., Velychko L. N.Y.: Springer, 2016.
7. *Sirenko K., Sirenko Y.* // Computational Mathem. Mathem. Phys. 2005. V. 45. № 3. P. 490.
8. *Sirenko Y., Strom S., Yashina N.* Modeling and Analysis of Transient Processes in Open Resonant Structures. New Methods and Techniques. N.Y.: Springer, 2007.
9. *Modern Theory of Gratings. Resonant Scattering: Analysis Techniques and Phenomena* / Eds. Sirenko Y., Strom S. N.Y.: Springer, 2010.
10. *Sirenko K., Pazynin V., Sirenko Y., Bagci H.* // Progress in Electromagnetics Research. 2011. V. 111. P. 331.
11. *Shafalyuk O., Sirenko Y., Smith P.* Simulation and Analysis of Transient Processes in Open Axially-Symmetri-

- cal Structures: Method of Exact Absorbing Boundary Conditions. Rijeka: InTech, 2011. P. 99.
12. *Shafalyuk O., Smith P., Velychko L.* // Progress in Electromagnetics Research B. 2012. V. 41. P. 231.
 13. *Sautbekov S., Sirenko Y., Velychko L., Vertiy A.* // Intern. J. Antennas and Propagation. 2014. V. 2014. ID 745413.
 14. *Orazbekova M., Pazyinin V., Sautbekov S. et al.* // Физ. основы приборостроения. 2014. Т. 3. № 4. С. 40.
 15. *Пазынин В., Сиренко К., Сиренко Ю., Яшина Н.* // Физ. основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 4. С. 4.
 16. *Taflove A., Hagness S.* Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House, 2000.
 17. *Jin J.* The Finite Element Method in Electromagnetics. N.Y.: John Wiley & Sons, 2002.
 18. *Engquist B., Majda A.* // Mathematics of Computation. 1977. V. 31. № 139. P. 629.
 19. *Mur G.* // IEEE Trans. 1981. V. EC-23. № 4. P. 377.
 20. *Tirkas P., Balanis C., Renaut R.* // IEEE Trans. 1992. V. AP-40. № 10. P. 1215.
 21. *Mei K., Fang J.* // IEEE Trans. 1992. V. AP-40. № 9. P. 1001.
 22. *Berenger J.* // J. Comput. Phys. 1994. V. 114. № 1. P. 185.
 23. *Berenger J.* // J. Comput. Phys. 1996. V. 127. № 2. P. 363.
 24. *Sacks Z., Kingsland D., Lee R., Lee J.* // IEEE Trans. 1995. V. AP-43. № 12. P. 1460.
 25. *Сиренко Ю., Сухаревский И., Сухаревский О., Яшина Н.* Фундаментальные и прикладные задачи теории рассеяния электромагнитных волн. Харьков: Крок, 2000.
 26. *Sirenko Y., Velychko L., Erden F.* // Progress in Electromagnetics Research. 2004. V. 44. P. 57.
 27. *Velychko L., Sirenko Y., Velychko O.* // Progress in Electromagnetics Research. 2006. V. 61. P. 1.
 28. *Velychko L., Sirenko Y.* // Progress in Electromagnetics Research, B. 2009. V. 16. P. 85.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.372.831

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ
О РАСЧЕТЕ СКРУЧЕННЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СТРУКТУР

© 2020 г. С. М. Гаранин^а, *, И. Н. Данилов^а, С. Б. Раевский^б, А. Ю. Седаков^а

^аНаучно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова,
Бокс-486, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

^бНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

*E-mail: garanin_s.m@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2018 г.

После доработки 20.12.2018 г.

Принята к публикации 11.01.2019 г.

Предложен метод интегральных уравнений для расчета нерегулярных скрученных направляющих структур. Метод основан на интегральном соотношении Лоренца и позволяет решать внутренние дифракционные задачи для волноводов, экранирующая поверхность которых описывается аналитическими функциями.

DOI: 10.31857/S0033849420020060

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена описанию численно-аналитического метода расчета характеристик передачи скрученного волновода прямоугольного поперечного сечения. Указанный метод является одним из вариантов метода интегральных уравнений, сформулированного в работах [1, 2] на основе интегральной формы записи леммы Лоренца. Впервые идеология метода была изложена в работе [3].

Волноводная скрутка представляет собой нерегулярный участок экранированной волноведущей структуры прямоугольного поперечного сечения, в которой в зависимости от продольной координаты меняются не форма или размеры контура поперечного сечения, а только его положение. Положение контура определяется зависящим от продольной координаты z углом его поворота $\Phi(z)$ относительно аналогичного контура начала скрутки. Нерегулярные участки СВЧ-тракта типа скрутки наиболее часто применяются в антенных устройствах [4] для поворота плоскости поляризации.

При решении дифракционной задачи для волноводной скрутки можно использовать такие распространенные и электродинамически обоснованные методы, как метод поперечных сечений [5, 6] и метод частичных областей (МЧО) [7, 8]. Первый метод используется для расчета характеристик передачи нерегулярных направляющих структур с медленно меняющимися по продольной координате параметрами [5]. В связи с

этим его применение для расчета коротких по продольной координате волноводных скруток с относительно большим значением угла поворота плоскости поляризации (компактных скруток) приводит к получению результатов, содержащих значительную погрешность. Второй метод (МЧО) применим к расчету скруток с любыми значениями длин и углов поворота плоскости поляризации, однако требует больших затрат машинного времени и громоздкой процедуры алгебраизации расчетного алгоритма.

Предлагаемый в данной работе численно-аналитический метод расчета характеристик передачи продольно-азимутально нерегулярных волноводных направляющих структур имеет преимущества по отношению к указанным выше методам как в скорости счета, так и в достаточно простой процедуре алгебраизации задачи.

1. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ О РАСЧЕТЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕДАЧИ ВОЛНОВОДНОЙ СКРУТКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассматриваемая направляющая структура схематически изображена на рис. 1. Она представляет собой объем V , ограниченный поверхностями $S = S_1 + S_2 + S_3$ и $S_{\perp 1,2}$, в котором существу-

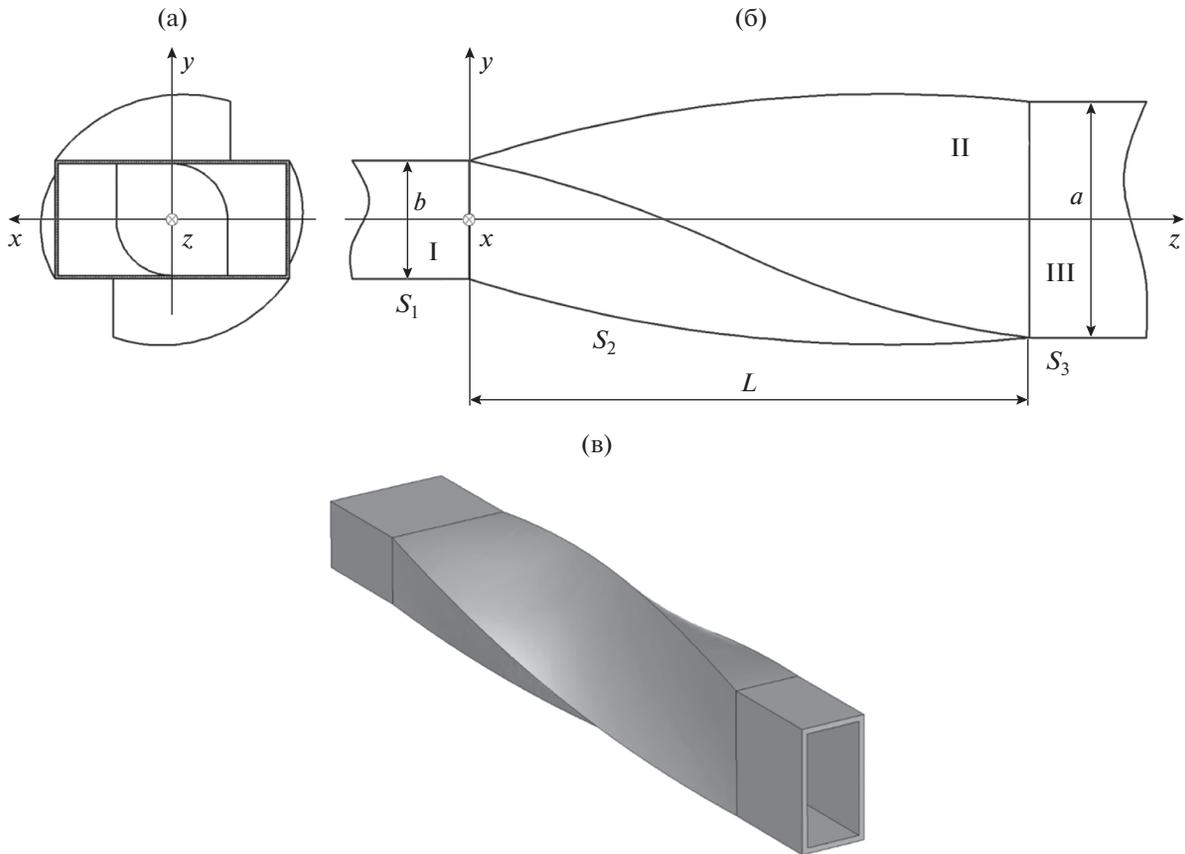


Рис. 1. Волноводная скрутка, соединяющая соосные регулярные прямоугольные экранированные волноводы, повернутые друг относительно друга на угол 90° вокруг оси z : а – вид спереди; б – вид сбоку; в – общий вид.

ют электромагнитные поля $(\vec{E}_1; \vec{H}_1)$ и $(\vec{E}_2; \vec{H}_2)$, созданные соответственно источниками $\vec{j}_1^{e,m}$ и $\vec{j}_2^{e,m}$. Здесь S_1 и S_3 – боковые поверхности первого (область I) и второго (область III) регулярных волноводов соответственно, S_2 – боковая поверхность нерегулярной области волноводной скрутки (область II), которая имеет длину L по продольной координате z ; $S_{\perp 1,2}$ – плоскости поперечных сечений, ограничивающие область рассматриваемой направляющей структуры по продольной координате z .

Указанные поля и источники согласно лемме Лоренца связаны соотношением

$$\oint_{S+S_{\perp 1,2}} (([\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1]), d\vec{S}) = \int_V (\vec{j}_1^e, \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e, \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m, \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m, \vec{H}_1) dV. \quad (1)$$

В качестве полей \vec{E}_1 и \vec{H}_1 возьмем решения уравнений Максвелла, которые соответствуют волне, распространяющейся в направляющей структуре, и удовлетворяют на поверхности S граничным условиям непрерывности касательной компоненты

электрического поля и нормальной компоненты магнитного поля:

$$E_{\tau}|_S = 0, \quad H_n|_S = 0. \quad (2)$$

Источники $\vec{j}_2^{e,m}$ являются вспомогательными и располагаются в конечной области внутри направляющей структуры вблизи плоскости $z = 0$. Они создают поле сферической волны, удовлетворяющее нулевому граничному условию в точках, бесконечно удаленных от источников. Своеобразие формулировки леммы Лоренца в данном случае заключается в том, что она записывается для полей, соответствующих различным краевым задачам в одном и том же объеме. Одна краевая задача для нерегулярного волновода, другая для неограниченного пространства. Такую формулировку леммы Лоренца можно назвать обобщенной.

В соответствии с методикой, предложенной в работе [1], бесконечно удаляя сечения $S_{\perp 1,2}$ от начала координат ($z_{1,2} \rightarrow \pm\infty$) и учитывая, что источники $\vec{j}_1^{e,m}$, отнесенные в $z_{1,2}$, в открытом пространстве создают поле сферической волны $(\vec{E}_0; \vec{H}_0)$, удовлетворяющие условиям

$$|\vec{E}_0(\vec{r}_{j_2^{e,m}})| \ll |\vec{E}_1(\vec{r}_{j_2^{e,m}})|, \quad |\vec{H}_0(\vec{r}_{j_2^{e,m}})| \ll |\vec{H}_1(\vec{r}_{j_2^{e,m}})|$$

в месте расположения вспомогательных источников, исключаем из уравнения (1) токи $\vec{j}_1^{e,m}$ и, выбрав в качестве вспомогательных источников элементарные электрические и магнитные диполи, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода:

$$\int_S ([\vec{H}_1, \vec{E}_2], d\vec{S}) = -I_0^e L E_1(\vec{r}_{j_2^e}), \quad (3)$$

$$\int_S ([\vec{H}_1, \vec{E}_2], d\vec{S}) = I_0^m L H_1(\vec{r}_{j_2^m}). \quad (4)$$

Решая интегральные уравнения (3), (4) при граничных условиях (2), определяем искомые поля \vec{E}_1 и \vec{H}_1 в нерегулярной направляющей структуре. При этом отсутствуют ограничения на длину волноводной скрутки по продольной координате и на значение угла поворота контура поперечного сечения второго регулярного волновода относительно того же контура первого волновода.

Рассмотрим направляющую структуру, схематически изображенную на рис. 1. Поперечные размеры первого (область I), второго (область III) волноводов, а также области волноводной скрутки (область II) одинаковы: a – размер широкой стенки, b – размер узкой стенки поперечного сечения. Пусть со стороны первого волновода падает одна из его собственных волн. В результате дифракции этой волны, происходящей в нерегулярной области волноводной скрутки, в первом волноводе возбуждается бесконечный набор отраженных волн с коэффициентами отражения R_{mn}^E (для E -волн) и R_{mn}^H (для H -волн). Во втором волноводе образуется бесконечный набор прошедших волн с коэффициентами прохождения B_{mn}^E (для E -волн) и B_{mn}^H (для H -волн).

Продольные составляющие электрического и магнитного полей в области I ($-\infty < z \leq 0$) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{z1}(x, y, z) &= (\chi_{mn}^{(1)})^2 \sin\left(\frac{\pi m}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \times \\ &\times \sin\left(\frac{\pi n}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(-j\beta_{mn}^{(1)}z) + \\ &+ \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn}^E (\chi_{mn}^{(1)})^2 \sin\left(\frac{\pi m}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \times \\ &\times \sin\left(\frac{\pi n}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(j\beta_{mn}^{(1)}z), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H_{z1}(x, y, z) &= (\chi_{mn}^{(1)})^2 \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(-j\beta_{mn}^{(1)}z) + \\ &+ \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn}^H (\chi_{mn}^{(1)})^2 \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(j\beta_{mn}^{(1)}z), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\chi_{mn}^{(1)}$ – поперечное волновое число прямоугольного волновода I, $\beta_{mn}^{(1)}$ – продольное волновое число прямоугольного волновода I.

Остальные компоненты электрического и магнитного полей электромагнитных волн выражаются (см., например, [9]) через составляющие (5) и (6) из уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}, \quad (7)$$

где ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно.

Из уравнений (7) получаем выражения для поперечных компонент напряженностей полей волн электрического типа:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}, \quad H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ E_y &= \frac{1}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z}, \quad H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поперечные компоненты полей волн магнитного типа выражаем через продольные:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega\mu}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_x = \frac{1}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z}, \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{1}{\chi_{mn}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя соотношения (5), (6), (8) и (9), можно записать все компоненты электромагнитных полей волн H - и E -типов в волноводе I.

Связь волновых чисел в области I ($-\infty < z \leq 0$) выглядит следующим образом:

$$\epsilon\mu\omega^2 = (\chi_{mn}^{(1)})^2 + (\beta_{mn}^{(1)})^2. \quad (10)$$

Поперечные волновые числа в области I определяются как:

$$\chi_{mn}^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}. \quad (11)$$

Так как поперечные размеры областей I, II и III остаются неизменными, соотношения (10) и (11) справедливы для всей рассматриваемой направляющей структуры:

$$\chi_{mn}^{(I)} = \chi_{mn}^{(II)} = \chi_{mn}^{(III)} = \chi_{mn}, \quad \beta_{mn}^{(I)} = \beta_{mn}^{(II)} = \beta_{mn}^{(III)} = \beta_{mn}.$$

Для решения рассматриваемой дифракционной задачи требуется иметь выражения для компонент полей волн E - и H -типов на поверхности нерегулярной области, а также на поверхности второго регулярного экранированного прямоугольного волновода. Для записи компонент полей на поверхности и нахождения значений поверхностных интегралов нерегулярной области рассматриваемой направляющей структуры каж-

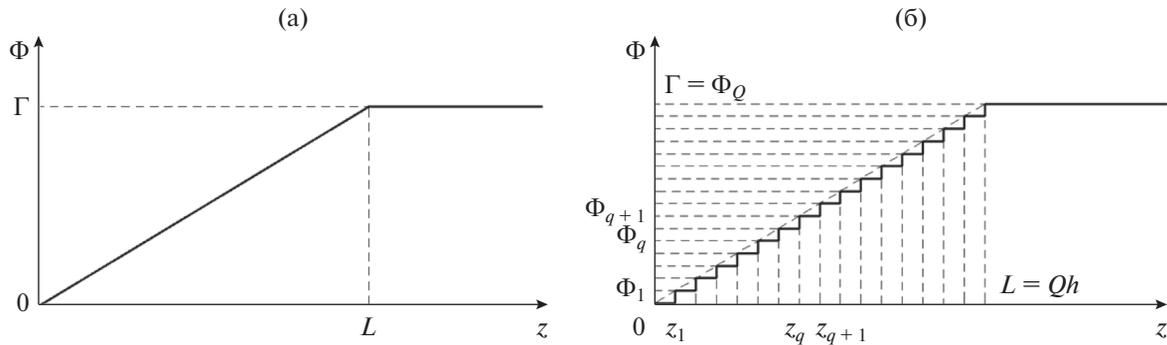


Рис. 2. Зависимость угла поворота плоскости поляризации волноводной скрутки от координаты z : а – зависимость $\Phi(z)$; б – ступенчатая аппроксимация зависимости $\Phi(z)$.

дому ее поперечному сечению сопоставляется вспомогательный регулярный волновод сравнения (ВС) [5] с теми же сечением и распределением параметров заполняющей среды. Искомое поле ищется в виде суперпозиции полей собственных волн ВС. Сшивание полей на торцевых границах ВС проводится не в явном виде через граничные условия, а косвенно – через интегральные уравнения (3) и (4) [2]. Амплитудные коэффициенты электромагнитных волн определяются как решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Таким образом, нерегулярную область скрутки фактически удается представить как каскадное соединение конечного числа Q отрезков направляющих структур в виде регулярных ВС с размером h по продольной координате z . Размер широкой стенки в поперечном сечении каждого такого волновода равен a , размер узкой стенки – b . Декартову систему (x, y, z) будем называть базовой системой координат (БСК). Каждый ВС, имеющий размеры $a \times b \times h$, повернут вокруг оси z БСК на угол $\Phi = \Phi(z)$, зависящий от значения продольной координаты z . На рис. 2а изображена зависимость $\Phi(z)$ в нерегулярной области Π ($0 < z < L$) и в области второго регулярного волновода ($L \leq z < \infty$). На рис. 2б изображена ступенчатая аппроксимация линейной зависимости $\Phi(z)$, соответствующая представлению нерегулярной области в виде каскада ВС. Индекс q на рисунке соответствует порядковому номеру регулярного ВС, Q – количество указанных регулярных ВС в скрутке, h – размер шага дискретизации скрутки (длина ВС по продольной координате z). Угол Γ является углом поворота контура поперечного сечения второго регулярного волновода относительно такого же контура первого волновода. Этот угол (при $z \geq L$) не зависит от продольной координаты z , поэтому на рис. 2а и 2б при $z \geq L$ зависимость $\Phi(z)$ представляет прямую, параллельную оси z .

На рис. 3 изображена взаимная ориентация первого регулярного волновода и q -го ВС. Пока-

занную на рисунке декартову систему координат (x'_q, y'_q, z'_q) будем называть локальной системой координат (ЛСК) q -го ВС (далее – ЛСК $_q$). Она жестко привязана к поверхности q -го ВС. А именно, две оси ЛСК $_q$ (оси x'_q и y'_q) лежат в поперечном сечении ВС, как изображено на рисунке, направление оси z'_q совпадает с вектором фазовой скорости распространяющейся в волноводной скрутке электромагнитной волны (совпадает с осью z). Из рисунка видно, что ЛСК $_q(x'_q, y'_q, z'_q)$ в нерегулярной области поворачивается относительно БСК (x, y, z) вокруг оси z на тот же угол, что и контур рассматриваемого поперечного сечения в области волноводной скрутки.

Для определения связи между БСК и ЛСК $_q$ необходимо использовать формулы преобразования координат, которые имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} x'_q &= x \cos(\Phi_q) + y \sin(\Phi_q), \\ y'_q &= -x \sin(\Phi_q) + y \cos(\Phi_q), \\ z'_q &= z - qh. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя соотношения (5), (6), (8), (9) и (12), можно записать все компоненты полей волн H - и E -типов в нерегулярной области волноводной скрутки. Заменив в формуле (12) Φ_q на Γ и используя указанные соотношения, получаем запись компонент полей электромагнитных волн в области второго регулярного волновода.

В исходных интегральных уравнениях (3) и (4) присутствуют поля вспомогательных источников, в качестве которых выбраны продольно ориентированные элементарные электрические и магнитные диполи. В сферической системе координат компо-

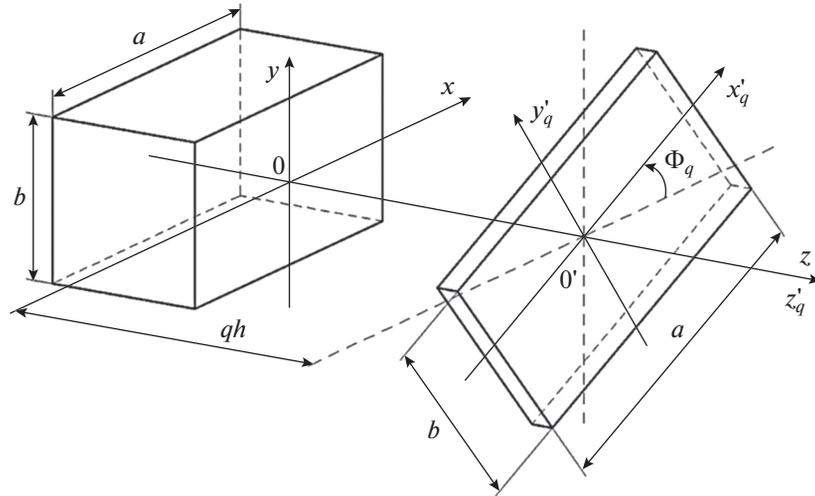


Рис. 3. Взаимная ориентация БСК и ЛСК_q в исследуемой волноведущей структуре.

ненты электромагнитного поля, создаваемого магнитным диполем, представимы в виде

$$E_{\gamma}^{m,(i)} = \frac{jkI_0^m L}{4\pi} \sin(\theta^{(i)}) \frac{\exp(-jk\rho^{(i)})}{\rho^{(i)}} \left(1 + \frac{1}{jk\rho^{(i)}}\right),$$

$$H_{\rho}^{m,(i)} = \frac{I_0^m L}{2\pi j\omega\mu} \cos(\theta^{(i)}) \times$$

$$\times \exp(-jk\rho^{(i)}) \left(\frac{1}{(\rho^{(i)})^3} + \frac{jk}{(\rho^{(i)})^2}\right),$$

$$H_{\theta}^{m,(i)} = \frac{I_0^m L}{4\pi j\omega\mu} \sin(\theta^{(i)}) \exp(-jk\rho^{(i)}) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(\rho^{(i)})^3} + \frac{jk}{(\rho^{(i)})^2} - \frac{k^2}{\rho^{(i)}}\right),$$

а компоненты поля, создаваемого электрическим диполем, – в виде

$$H_{\gamma}^{e,(i)} = \frac{jkI_0^e L}{4\pi} \sin(\theta^{(i)}) \frac{\exp(-jk\rho^{(i)})}{\rho^{(i)}} \left(1 + \frac{1}{jk\rho^{(i)}}\right),$$

$$E_{\rho}^{e,(i)} = \frac{I_0^e L}{2\pi j\omega\epsilon} \cos(\theta^{(i)}) \exp(-jk\rho^{(i)}) \left(\frac{1}{(\rho^{(i)})^3} + \frac{jk}{(\rho^{(i)})^2}\right),$$

$$E_{\theta}^{e,(i)} = \frac{I_0^e L}{4\pi j\omega\epsilon} \sin(\theta^{(i)}) \exp(-jk\rho^{(i)}) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(\rho^{(i)})^3} + \frac{jk}{(\rho^{(i)})^2} - \frac{k^2}{\rho^{(i)}}\right).$$

Здесь $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, i – номер вспомогательного источника [9]. Формулы, связывающие сфериче-

скую систему координат $(\rho^{(i)}, \theta^{(i)}, \gamma^{(i)})$, в которой описываются компоненты полей вспомогательных источников, и БСК (x, y, z) , в которой записываются компоненты полей рассматриваемой направляющей структуры (рис. 4а и рис. 4б), имеют вид:

$$\rho^{(i)} = \sqrt{(x_1^{(i)})^2 + (y_1^{(i)})^2 + (z_1^{(i)})^2} =$$

$$= \sqrt{(x - x_u^{(i)})^2 + (y - y_u^{(i)})^2 + (z - z_u^{(i)})^2},$$

$$\theta^{(i)} = \arctg \frac{\sqrt{(x_1^{(i)})^2 + (y_1^{(i)})^2}}{z_1^{(i)}} =$$

$$= \arctg \frac{\sqrt{(x - x_u^{(i)})^2 + (y - y_u^{(i)})^2}}{(z - z_u^{(i)})},$$

$$\gamma^{(i)} = \arctg \frac{y_1^{(i)}}{x_1^{(i)}} = \arctg \frac{(y - y_u^{(i)})}{(x - x_u^{(i)})}.$$

При продольном расположении вспомогательных источников компоненты создаваемых ими полей в декартовой системе координат (x, y, z) имеют вид [11]:

$$E_x^{m,(i)} = -E_{\gamma}^{m,(i)} \sin(\gamma^{(i)}),$$

$$E_x^{e,(i)} = E_{\rho}^{e,(i)} \sin(\theta^{(i)}) \cos(\gamma^{(i)}) +$$

$$+ E_{\theta}^{e,(i)} \cos(\theta^{(i)}) \cos(\gamma^{(i)}),$$

$$E_y^{m,(i)} = E_{\gamma}^{m,(i)} \cos(\gamma^{(i)}),$$

$$E_y^{e,(i)} = E_{\rho}^{e,(i)} \sin(\theta^{(i)}) \sin(\gamma^{(i)}) +$$

$$+ E_{\theta}^{e,(i)} \sin(\gamma^{(i)}) \cos(\theta^{(i)}),$$

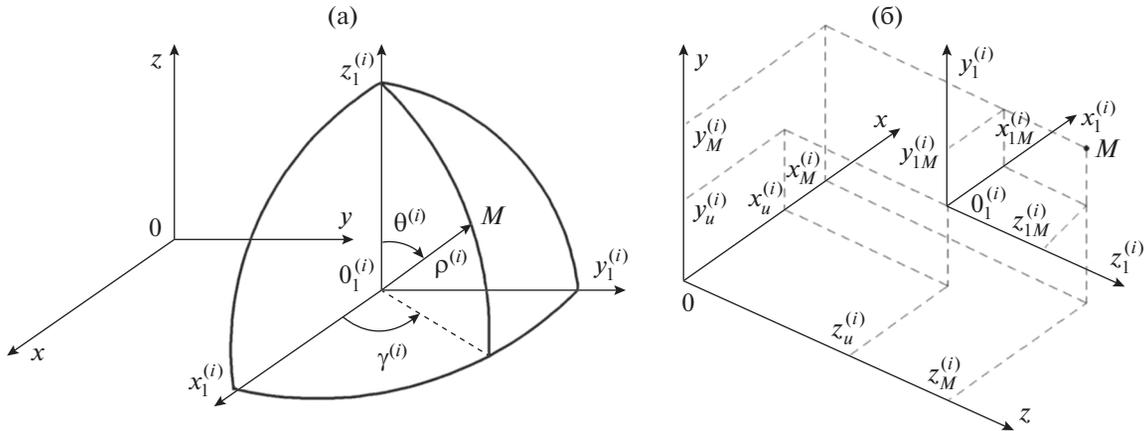


Рис. 4. Взаимная ориентация: БСК и сферической системы координат, в которой описывается поле вспомогательного источника (а); БСК и вспомогательной системы координат $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$ (б).

$$\begin{aligned}
 E_z^{m,(i)} &= 0, \quad E_z^{e,(i)} = E_\rho^{e,(i)} \cos(\theta^{(i)}) - E_\theta^{e,(i)} \sin(\theta^{(i)}), \\
 H_x^{m,(i)} &= H_\rho^{m,(i)} \sin(\theta^{(i)}) \cos(\gamma^{(i)}) + \\
 &+ H_\theta^{m,(i)} \cos(\theta^{(i)}) \cos(\gamma^{(i)}), \\
 H_x^{e,(i)} &= -H_\gamma^{e,(i)} \sin(\gamma^{(i)}), \\
 H_y^{m,(i)} &= H_\rho^{m,(i)} \sin(\theta^{(i)}) \sin(\gamma^{(i)}) + \\
 &+ H_\theta^{m,(i)} \cos(\theta^{(i)}) \sin(\gamma^{(i)}), \\
 H_y^{e,(i)} &= H_\gamma^{e,(i)} \cos(\gamma^{(i)}),
 \end{aligned}$$

$$H_z^{m,(i)} = H_\rho^{m,(i)} \cos(\theta^{(i)}) - H_\theta^{m,(i)} \sin(\theta^{(i)}), \quad H_z^{e,(i)} = 0.$$

Левая часть уравнения (4), в котором присутствует вспомогательное поле, создаваемое магнитным диполем, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 I_0^m L H_1(\vec{r}_{j_2^m}) &= I_0^m L (\chi_{mn})^2 \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_u^{(i)} + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(y_u^{(i)} + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(-j\beta_{mn} z_u^{(i)}) + \\
 &+ I_0^m L \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn}^H (\chi_{mn})^2 \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_u^{(i)} + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(y_u^{(i)} + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(j\beta_{mn} z_u^{(i)}) + \\
 &+ I_0^m L \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{mn}^H (\chi_{mn})^2 \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_u^{(i)} \cos(\Gamma) + y_u^{(i)} \sin(\Gamma) + \frac{a}{2}\right)\right) \times \\
 &\times \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(-x_u^{(i)} \sin(\Gamma) + y_u^{(i)} \cos(\Gamma) + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(-j\beta_{mn} z_u^{(i)}).
 \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (3), в котором присутствует вспомогательное поле, создаваемое электрическим диполем, записывается в виде

$$\begin{aligned}
 \int_S ([\vec{H}_1, \vec{E}_2^e], d\vec{S}) &= \int_{S_1} ([(\vec{H}_1^{E(I)} + \vec{H}_1^{H(I)}), \vec{E}_2^e], d\vec{S}) \Big|_{-\infty < z \leq 0} + \\
 &+ \int_{S_2} ([(\vec{H}_1^{E(II)} + \vec{H}_1^{H(II)}), \vec{E}_2^e], d\vec{S}) \Big|_{0 < z < L} + \int_{S_3} ([(\vec{H}_1^{E(III)} + \vec{H}_1^{H(III)}), \vec{E}_2^e], d\vec{S}) \Big|_{L \leq z < \infty}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_S ([\vec{H}_1, \vec{E}_2^m], d\vec{S}) &= \\
 &= \int_{S_1} ([(\vec{H}_1^{E(I)} + \vec{H}_1^{H(I)}), \vec{E}_2^m], d\vec{S}) \Big|_{-\infty < z \leq 0} + \\
 &+ \int_{S_2} ([(\vec{H}_1^{E(II)} + \vec{H}_1^{H(II)}), \vec{E}_2^m], d\vec{S}) \Big|_{0 < z < L} + \\
 &+ \int_{S_3} ([(\vec{H}_1^{E(III)} + \vec{H}_1^{H(III)}), \vec{E}_2^m], d\vec{S}) \Big|_{L \leq z < \infty},
 \end{aligned}$$

где S_1 – боковая поверхность регулярной области I ($-\infty < z \leq 0$), S_2 – боковая поверхность нерегулярной области II ($0 < z < L$), S_3 – боковая поверхность регулярной области III ($L \leq z < \infty$).

Правая часть этого уравнения имеет вид:

Правая часть уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 -I_0^e L E_1(\vec{r}_{j_2}) = & -I_0^e L (\chi_{mn})^2 \sin\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_u^{(i)} + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}\left(y_u^{(i)} + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(-j\beta_{mn} z_u^{(i)}) - \\
 & - I_0^e L \sum_{m,n=0}^{\infty} R_{mn}^E (\chi_{mn})^2 \sin\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_u^{(i)} + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b}\left(y_u^{(i)} + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(j\beta_{mn} z_u^{(i)}) - \\
 & - I_0^e L \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{mn}^E (\chi_{mn})^2 \sin\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_u^{(i)} \cos(\Gamma) + y_u^{(i)} \sin(\Gamma) + \frac{a}{2}\right)\right) \times \\
 & \times \sin\left(\frac{\pi n}{b}\left(-x_u^{(i)} \sin(\Gamma) + y_u^{(i)} \cos(\Gamma) + \frac{b}{2}\right)\right) \exp(-j\beta_{mn} z_u^{(i)}).
 \end{aligned}$$

Далее, записываем интегральные уравнения (3) и (4) в $4N$ точках (N – номер приближения), в которых располагаем продольно ориентированные элементарные электрические и магнитные диполи. Подставляя компоненты полей в указанные интегральные уравнения, находим численные значения поверхностных интегралов. В результате получаем неоднородную систему $4N$ линейных алгебраических уравнений, решая которую, находим неизвестные амплитудные коэффициенты волн E - и H -типов.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕДАЧИ ВОЛНОВОДНОЙ СКРУТКИ

На рис. 5 представлены результаты расчета зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения основной волны H_{10} прямоугольного волновода от нормированной частоты ka при различных значениях длины волноводной

скрутки L . Угол поворота волноводной скрутки $\Gamma = 90^\circ$. Результаты получены в диапазоне нормированных частот $3.14 \leq ka \leq 6.28$, соответствующем одномодовому режиму работы направляющей структуры в первом приближении при учете одной волны H_{10} в областях регулярных волноводов и волноводной скрутки.

На рисунке кривые 1 и 2 – соответственно модули коэффициентов отражения и прохождения волны H_{10} при длине скрутки $L = a$, кривые 3 и 4 – при $L = 2a$, кривые 5 и 6 – при $L = 3a$, кривые 7 и 8 – при $L = 4a$, кривые 9 и 10 – при $L = 5a$. Из рисунка видно, что при $L \geq 2a$ величина коэффициента стоячей волны по напряжению (КСВН) в полосе нормированных частот $3.6 \leq ka \leq 6.28$ не превышает значения 1.06. Данный факт свидетельствует о хорошем согласовании волноводов во всем исследуемом диапазоне частот.

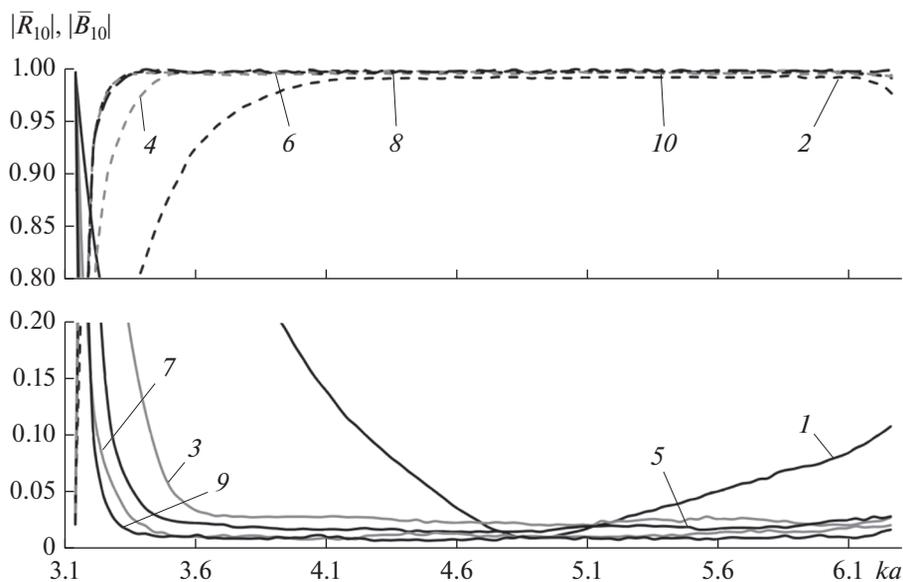


Рис. 5. Зависимости модулей коэффициентов отражения $|\bar{R}_{10}|$ (сплошные линии) и прохождения $|\bar{B}_{10}|$ (штриховые линии) волны H_{10} от нормированной частоты при различных значениях длины волноводной скрутки в одномодовом диапазоне частот.

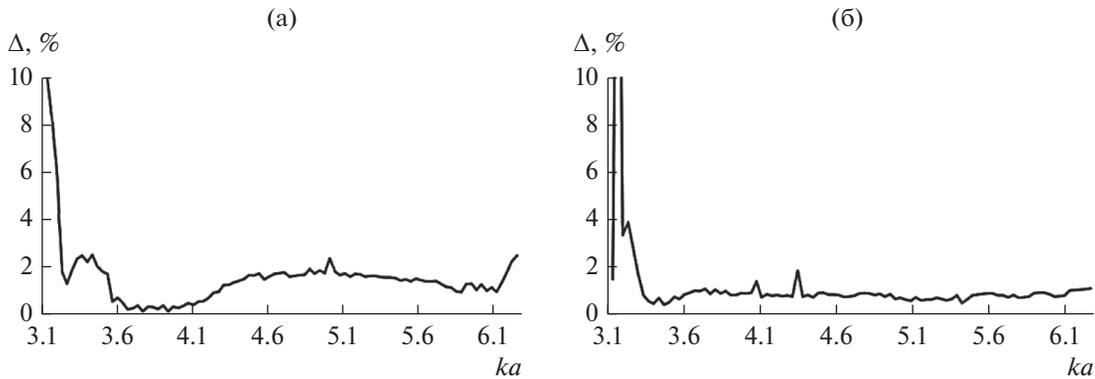


Рис. 6. Зависимости относительных погрешностей выполнения ЗСЭ волны H_{10} от нормированной частоты в одномодовом диапазоне при длинах волноводной скрутки L : a (а) и $3a$ (б).

Для оценки точности полученных результатов при численной реализации разработанного алгоритма были найдены зависимости относительных погрешностей выполнения закона сохранения энергии (ЗСЭ) от нормированной частоты при различных значениях длины волноводной скрутки L . Относительная погрешность выполнения ЗСЭ определяется как

$$\Delta = \left| \sum_{m,n} \left| \bar{R}_{mn}^{E,H} \right|^2 F^{E,H} + \sum_{m,n} \left| \bar{B}_{mn}^{E,H} \right|^2 K^{E,H} - 1 \right| \times 100\%,$$

$$F^E = \frac{\beta_{mn}}{\beta_{10}} \frac{\epsilon}{\mu} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right), \quad K^E = \frac{\beta_{mn}}{\beta_{10}} \frac{\epsilon}{\mu} \left(m^2 \frac{ab}{ab} + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right),$$

$$F^H = \frac{\beta_{mn}}{\beta_{10}} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right), \quad K^H = \frac{\beta_{mn}}{\beta_{10}} \left(m^2 \frac{ab}{ab} + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right),$$

где β_{10} – продольное волновое число волны H_{10} , β_{mn} – продольные волновые числа волн H_{mn} и E_{mn} , m и n – индексы волн по широкой и узкой стенкам направляющей структуры соответственно. Результаты расчета частотной зависимости относительной погрешности выполнения ЗСЭ представлены на рис. 6.

Из рисунка видно, что значения относительной погрешности выполнения ЗСЭ не превышают 2.5% во всем исследуемом диапазоне нормированных частот, за исключением области вблизи критической частоты основной волны H_{10} . При решении поставленной дифракционной задачи были использованы четыре вспомогательных источника магнитного типа (элементарные магнитные диполи). В рамках использованного приближения можно утверждать, что выбранное месторасположение вспомогательных источников обеспечивает выполнение условия непревышения указанной относительной погрешности предельно допустимого значения, составляющего 5%.

В рамках данной работы были рассчитаны характеристики передачи волноводной скрутки в

более широком диапазоне нормированных частот $3.14 \leq ka \leq 12.56$, соответствующем многомодовому режиму ее работы. На рис. 7 представлены результаты расчета зависимостей модулей коэффициентов отражения и прохождения основной волны прямоугольного волновода H_{10} от нормированной частоты при различных значениях длины волноводной скрутки. Угол поворота волноводной скрутки $\Gamma = 90^\circ$. Результаты расчета получены в шестом приближении.

На рис. 7 кривые 1 и 2 – соответственно модули коэффициентов отражения и прохождения волны H_{10} при длине скрутки $L = a$, кривые 3 и 4 – при $L = 3a$, кривые 5 и 6 – при $L = 5a$.

В частотном диапазоне, соответствующем многомодовому режиму работы, кривые модулей коэффициентов отражения и прохождения волны H_{10} имеют сложную частотную зависимость, связанную с особенностями энергетического обмена волны H_{10} с другими волнами, распространяющимися в исследуемой направляющей структуре. Наблюдаются локальные максимумы и минимумы частотных зависимостей характеристик передачи вблизи критических частот волн высших типов, что может быть объяснено возникновением ее взаимодействия с одной из указанных волн.

На рис. 8 представлены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения волн H_{10} , H_{20} , H_{01} , H_{21} , E_{21} и H_{30} при длине волноводной скрутки $L = 5a$. Угол поворота волноводной скрутки $\Gamma = 90^\circ$.

Из рисунка видно, что в частотном диапазоне, соответствующем многомодовому режиму работы волноводной скрутки, в результате дифракции волны H_{10} возбуждаются и распространяются в регулярных волноводах также волны H_{20} , H_{01} , H_{21} , E_{21} и H_{30} . Кривые 1 и 2 на рис. 8 – соответственно модули коэффициентов отражения и прохождения волны H_{10} , кривые 3 и 4 – волны H_{20} , кривые

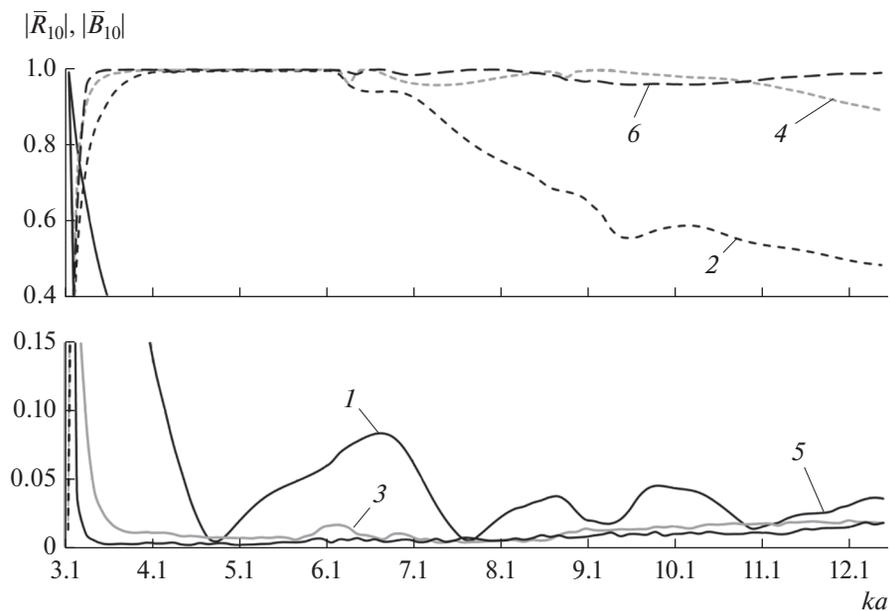


Рис. 7. Зависимости модулей коэффициентов отражения $|\bar{R}_{10}|$ (сплошные линии) и прохождения $|\bar{B}_{10}|$ (штриховые линии) волны H_{10} от нормированной частоты при различных значениях длины волноводной скрутки в многомодовом диапазоне частот.

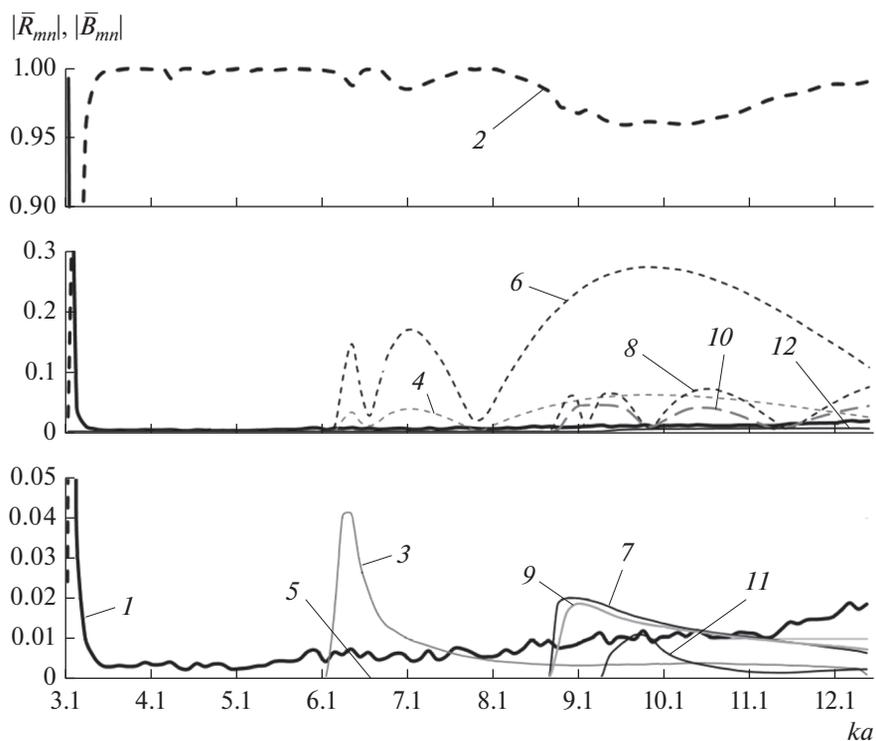


Рис. 8. Зависимости модулей коэффициентов отражения $|\bar{R}_{mn}|$ (сплошные линии) и прохождения $|\bar{B}_{mn}|$ (штриховые линии) волн H_{mn} и E_{ln} от нормированной частоты при длине волноводной скрутки $L = 5a$ в многомодовом диапазоне частот.

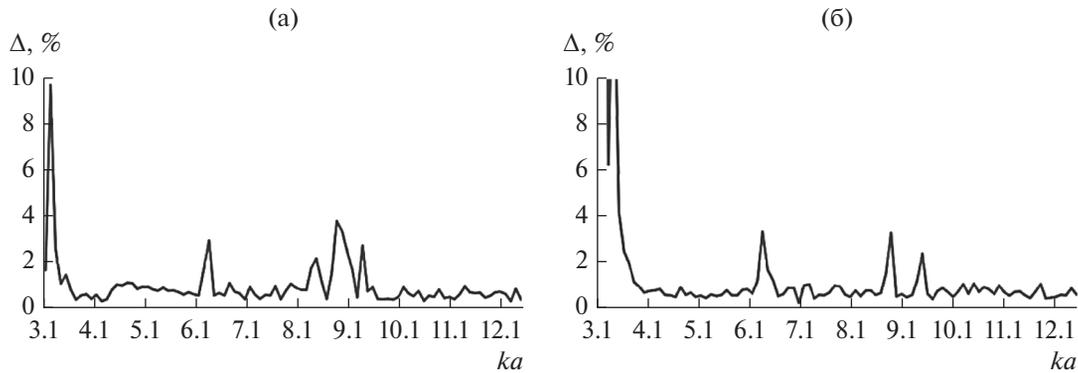


Рис. 9. Зависимости относительных погрешностей выполнения ЗСЭ от нормированной частоты в многомодовом диапазоне при длинах волноводной скрутки L : a (а) и $3a$ (б).

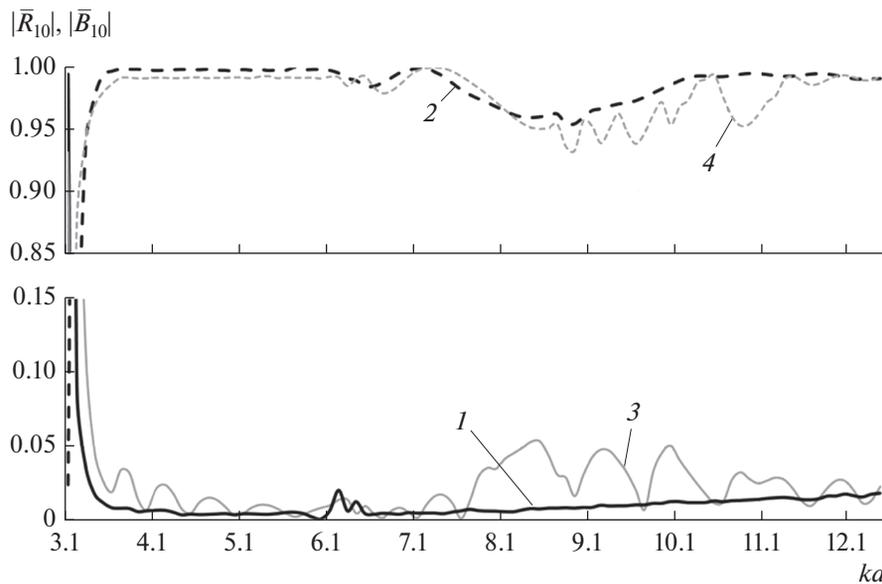


Рис. 10. Зависимости модулей коэффициентов отражения $|\bar{R}_{10}|$ (сплошные линии) и прохождения $|\bar{B}_{10}|$ (штриховые линии) волны H_{10} от нормированной частоты при длине волноводной скрутки $L = 4a$ в многомодовом диапазоне частот.

5 и 6 – волны H_{01} , 7 и 8 – волны H_{21} , кривые 9 и 10 – волны E_{21} , кривые 11 и 12 – волны H_{30} .

На рис. 9 представлены зависимости относительной погрешности выполнения ЗСЭ от нормированной частоты в многомодовом частотном диапазоне при различных значениях длины волноводной скрутки. Указанные зависимости найдены с целью оценки точности результатов расчета при численной реализации разработанного алгоритма. Из рисунка видно, что относительная погрешность выполнения ЗСЭ во всем рассматриваемом диапазоне нормированных частот, за исключением области вблизи критической частоты волны H_{10} , не превышает 4%. Вблизи критических частот волн высших типов наблюдаются “всплески” погрешности выполнения ЗСЭ.

Исходя из представленных выше частотных зависимостей относительной погрешности вы-

полнения ЗСЭ можно сделать вывод о выполнении условия неперевышения указанной погрешности порогового значения (5%). Задача решена в приближении $N = 6$ при учете пяти волн H -типа и одной волны E -типа. В соответствии с этим вблизи нерегулярной области направляющей структуры располагались двадцать продольно ориентированных магнитных диполей и четыре электрических диполя. При определении их координат использовались рекомендации, приведенные в работах [12, 13].

Для того чтобы подтвердить достоверность полученных результатов расчета характеристик передачи волноводной скрутки с помощью разработанного алгоритма, было проведено их сравнение с результатами расчета, полученными с использованием средства автоматизированного проектирования (САПР) CST Microwave Studio. На рис. 10 представлены результаты расчета характеристик

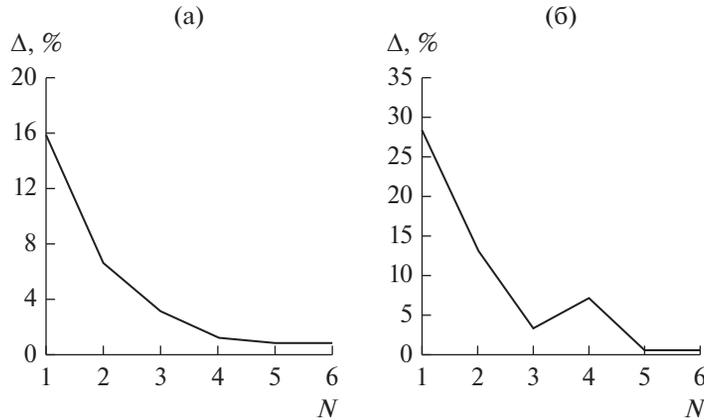


Рис. 11. Зависимости относительной погрешности выполнения ЗСЭ от номера приближения при решении задачи для волноводной скрутки длиной $L = 3a$ при ka : 7.46 (а) и 11.38 (б).

передачи рассматриваемой направляющей структуры при длине волноводной скрутки $L = 4a$, полученные посредством предлагаемого алгоритма и САПР. Угол поворота волноводной скрутки $\Gamma = 90^\circ$.

На рисунке кривые 1 и 2 – соответственно модули коэффициентов отражения и прохождения, полученные с помощью разработанного алгоритма, кривые 3 и 4 – полученные при помощи САПР. Сравнение характеристик передачи позволяет сделать вывод о качественном и количественном совпадении результатов. Отклонение результатов расчета, полученных с помощью САПР, от результатов, полученных с использованием разработанного алгоритма, не превышает 3.5%, что подтверждает корректность алгоритма в диапазоне нормированных частот, соответствующем многомодовому режиму работы волноводной скрутки, при учете конечного набора волн высших типов.

Для оценки обоснованности предлагаемого в данной работе метода расчета и созданного на его основе алгоритма, а также достоверности полученных результатов проведено исследование сходимости решений поставленной дифракционной задачи. Результаты исследования представлены на рис. 11. Из рисунка видно, что при увеличении номера приближения относительная погрешность выполнения ЗСЭ Δ уменьшается и стремится к нулю. При этом различие между численными значениями характеристик передачи в пятом и шестом приближениях не превышает 0.2%. Дальнейшее увеличение номера приближения приводит к незначительному изменению численных значений модулей коэффициентов отражения и прохождения и одновременно к значительному увеличению порядка СЛАУ. Проведенное исследование позволяет выбрать “рабочее” приближение $N = 6$ для расчета характеристик передачи волноводной скрутки прямоугольного поперечного сечения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен численно-аналитический метод расчета характеристик передачи продольно-азимутально нерегулярной направляющей структуры в виде волноводной скрутки прямоугольного поперечного сечения. Представленный алгоритм построен на основе метода интегральных уравнений [1–3, 8]. Для записи компонент полей на поверхности нерегулярного волновода и нахождения значений поверхностных интегралов, входящих в исходные интегральные уравнения, каждому участку нерегулярной области рассматриваемой направляющей структуры сопоставляется регулярный волновод сравнения. Искомое поле ищется в виде суперпозиции полей собственных волн соответствующих волноводов сравнения. Сшивание полей на границах указанных участков разбиения нерегулярной области осуществляется косвенно через интегральные уравнения (3) и (4).

С использованием разработанного алгоритма найдены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения основной волны H_{10} волноводных скруток различных длин как в одномодовом, так и в многомодовом режимах. Рассчитаны характеристики передачи волн высших типов и исследовано их влияние на коэффициенты отражения и прохождения основной волны H_{10} . Точность и корректность результатов расчетов подтверждена приведенными в работе зависимостями относительной погрешности выполнения закона сохранения энергии от нормированной частоты и сравнением с результатами, полученными с помощью САПР. Обоснованность применения метода интегральных уравнений и построенного на его основе численно-аналитического алгоритма подтверждена исследованием сходимости результатов расчета в зависимости от номера приближения, в котором решалась дифракционная задача. Одним из главных досто-

инств предлагаемого метода является хорошо контролируемая достоверность полученных результатов. Метод обладает нестандартной процедурой вывода интегральных уравнений и достаточной общностью в применении к решению внутренних краевых дифракционных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раевский С.Б.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2009. Т. 12. № 3. С. 34.
2. *Иларионов Ю.А., Раевский А.С., Раевский С.Б., Седаков А.Ю.* Устройства СВЧ и КВЧ диапазонов. Методы расчета. Алгоритмы. Технологии изготовления. М.: Радиотехника, 2013.
3. *Белов Ю.Г., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 10. С. 1523.
4. *Метрикин А.А.* Антенны и волноводы РРЛ. М.: Связь, 1977.
5. *Каценеленбаум Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
6. *Шевченко В.В.* Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1975.
7. *Майстренко В.К., Радионов А.А., Раевский С.Б.* // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. 1994. № 4. С. 87.
8. *Иларионов Ю.А., Раевский С.Б., Сморгонский В.Я.* Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов / Под ред. Сморгонского В.Я. М.: Сов. радио, 1980.
9. *Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П.* Электродинамика и распространение радиоволн. Учебное пособие для вузов. М.: Сов. радио, 1979.
10. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
12. *Данилов И.Н., Майстренко В.К., Пилипосян С.Е.* // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2010. № 1(80). С. 120.
13. *Гаранин С.М., Новоселова Н.А., Раевский С.Б.* // Антенны. 2016. № 11. С. 62.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКИ
СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2020 г. С. Е. Банков*

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

**E-mail: sbankov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 26.09.2019 г.

После доработки 26.09.2019 г.

Принята к публикации 25.10.2019 г.

Предложен метод электродинамического анализа бесконечных одномерных антенных решеток со случайными параметрами. Представленный подход основан на использовании метода компенсирующих источников и метода обобщенной матрицы рассеяния, которые позволяют анализировать бесконечные неоднородные антенные решетки, содержащие дефекты периодической структуры в виде элементов с параметрами, отличающимися от параметров регулярной структуры. Решетка анализируется в предположении малых отклонений ее параметров от средних значений. В указанном приближении получены оценки для дисперсии амплитуд отраженных от входов решетки волн и дисперсии некогерентного поля излучения. Рассмотрен режим квазипериодического возбуждения решетки. Предложенный метод использован для анализа решетки ленточных вибраторов со случайной длиной. Получена зависимость дисперсии коэффициента отражения решетки от ее параметров. Показано, что теоретическая оценка дисперсии совпадает с ее значением, полученным методом статистических испытаний, при помощи которого анализируется вибраторная решетка конечной длины.

DOI: 10.31857/S0033849420040026

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статистический анализ радиоэлектронного устройства является типовым этапом его разработки [1], позволяющим оценить устойчивость технического решения к погрешностям, которые неизбежно возникают в ходе изготовления. В полной мере данное утверждение относится к фазированным антенным решеткам (ФАР), которые в настоящее время представляют собой сложные радиоэлектронные комплексы, выполняющие широкий набор функций [2].

Актуальность задачи статистического анализа ФАР не вызывает сомнений. В настоящее время теоретической основой ее решения является статистическая теория антенн (СТА), созданная Я.С. Шифриным [3]. В наиболее полном виде современное ее состояние отражено в монографии [4]. Отмеченная выше теория позволяет получать оценки для статистических параметров полей излучения, которые создаются случайными источниками.

Такой подход оказывается весьма эффективным, когда источник статистических отклонений параметров решетки находится вне излучающего полотна. Как правило, источниками таких откло-

нений считают электронные компоненты, формирующие амплитудно-фазовое распределение поля в раскрыте решетки: фазовращатели, усилители и другие элементы приемо-передающих модулей. Статистическая теория антенн позволяет эффективно оценивать их влияние на диаграмму направленности ФАР. Следует отметить, что при этом предполагается, что излучающая часть решетки, которую часто называют излучающим полотном, является объектом с детерминированными параметрами.

В то же время необходимо сказать, что, как всякий физический объект, излучающее полотно также имеет случайные параметры, которые обусловлены погрешностями изготовления и установки элементарных излучателей (ЭИ). Поэтому оценка их влияния на функционирование ФАР является актуальной задачей. При определенных допущениях мы можем использовать СТА для ее решения. В частности, к ним относится предположение о пренебрежимо малом влиянии взаимодействия ЭИ в решетке. Однако неоднократно было показано (см., например, [5]), что такое предположение является весьма грубым приближением, использование которого может привести к качественно неверным выводам.

Учет взаимодействия ЭИ ставит под сомнение возможность непосредственного использования СТА, поскольку само распределение случайных источников становится результатом решения сложной электродинамической задачи. Ее сложность связана с тем, что решетка со случайными параметрами, строго говоря, является непериодической структурой, так как все ее элементы отличаются друг от друга. При этом наибольшую проблему представляет анализ ФАР больших электрических размеров с большим коэффициентом усиления (КУ).

В связи с тем, что задача электродинамического анализа ФАР с большими размерами даже для одинаковых ЭИ представляет весьма значительную сложность, в этом случае можно эффективно использовать приближение бесконечной решетки [6]. Если решетка бесконечна и однородна, то граничная задача для нее сводится к анализу одного периода, который часто называют каналом Флоке [7]. Его электрические размеры относительно невелики, и поэтому эффективное решение граничной задачи может быть получено с использованием современных систем электродинамического моделирования, таких как HFSS и CST MWS [8].

Для решетки со случайными параметрами строго использовать приближение канала Флоке невозможно, так как даже бесконечная структура оказывается непериодической. Поэтому единственным подходом для оценки характеристик такой ФАР оказывается прямое численное решение граничной задачи для решетки больших, но конечных электрических размеров. Очевидно, что реализация такого решения потребует очень больших затрат временных и компьютерных ресурсов.

Целью данной работы является получение теоретических статистических оценок для показателей качества решетки со случайными параметрами. При этом под решеткой понимаем исключительно излучающую часть ФАР. Мы будем рассматривать бесконечные одномерные или линейные решетки. Известно, что понятие диаграммы направленности для бесконечной структуры неприменимо [5], так как она, вне зависимости от типа ЭИ, имеет вид дельта-функции. Поэтому наибольший интерес для нас представляет такой показатель качества как коэффициент отражения ЭИ. Мы получим теоретическую оценку дисперсии модуля амплитуды волны, отраженной от входа ЭИ.

Для решения поставленной выше задачи нам необходимо определенным образом описать антенную решетку. Теоретический задел такого описания представлен в [9]. В ней развит метод компенсирующих источников (МКИ) для случая бесконечных линейных ФАР. Впервые МКИ был предложен в работе [10]. Он был использован для электродинамического анализа двумерных неоднородных фотонных и электромагнитных кри-

сталлов. Развитие МКИ для анализа излучающих структур потребовало его существенной модификации, которая связана с использованием метода обобщенной матрицы рассеяния (ОМР). Метод ОМР (МОМР) был разработан и использован для анализа ФАР с большими электрическими размерами [11, 12].

Известно несколько модификаций МОМР. Все они основаны на разделении поля в окрестности ЭИ на возбуждающее и рассеянное поля, связанные друг с другом с помощью оператора рассеяния. Оба вида полей должны быть записаны в стандартной форме в виде разложений по некоторой системе функций. В качестве таких функций будем использовать векторные сферические гармоники (ВСГ), которые являются решениями уравнений Максвелла в сферических координатах. Пример применения метода МОМР с разложением по ВСГ (РВСГ) для анализа больших линейных решеток представлен в [13].

Достоинством МОМР и построенного на его основе МКИ является то, что они простым образом учитывают индивидуальные особенности ЭИ, которые полностью описываются при помощи операторов рассеяния. При использовании РВСГ оператор рассеяния имеет вид матрицы, связывающей амплитуды рассеянных и возбуждающих ВСГ.

Операторы рассеяния однократно определяются для уединенных излучателей, а затем многократно используются в рамках МОМР и МКИ для описания взаимодействия ЭИ. Такое разделение этапов позволяет существенно повысить эффективность алгоритмов численного решения сложной граничной задачи.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОМР-МКИ

Основные положения МОМР. В данном разделе мы изложим основные положения и уравнения МОМР и МКИ, полученные в работе [9] для линейной бесконечной решетки. Они необходимы нам для решения поставленных выше задач. Будем описывать положение ЭИ в линейной решетке, ориентированной вдоль оси $0x$, с помощью индекса v , который изменяется от минус до плюс бесконечности.

Для определения типа ВСГ используем один векторный индекс N :

$$N = (n, m), \quad (1)$$

где n – угломестный индекс ВСГ, а m – азимутальный индекс.

Введем по аналогии с работой [13] векторы $\vec{E}_{i,sv}$, $\vec{H}_{i,sv}$, $A_{i,sv}$. Векторы $\vec{E}_{i,sv}$, $\vec{H}_{i,sv}$ формируются из векторов электрического и магнитного полей возбуждающих и рассеянных ВСГ (нижние индексы i, s), а векторы $A_{i,sv}$ состоят из амплитуд

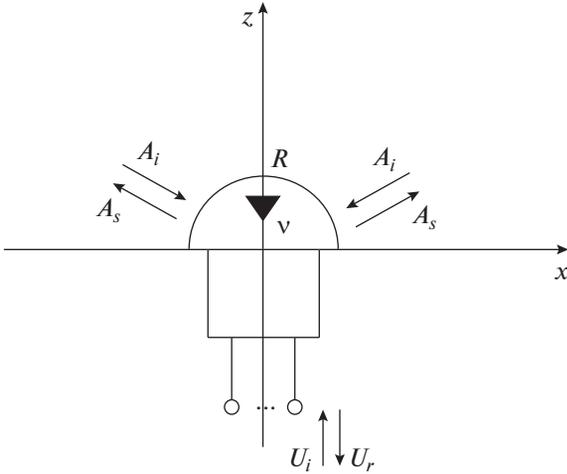


Рис. 1. Определение возбуждающих и рассеянных волн.

указанных ВСГ. Важно отметить, что поля ВСГ задаются в локальных системах координат, связанных с ЭИ с номером ν . Явные выражения для полей ВСГ можно найти в [14].

Каждый ЭИ окружен полусферой с электрическим радиусом R (рис. 1). Важно, что полусферы соседних ЭИ не имеют точек пересечения. Источником возбуждающих волн для μ -го ЭИ являются волны рассеянные всеми элементами решетки, за исключением μ -го. Источником рассеянных волн этого излучателя является дифракция возбуждающих волн на нем, а также падающие волны на его входы. Предполагаем, что таких входов может быть не один, а несколько. Объединяя амплитуды падающих волн $U_{i\mu,j}$ (j – номер входа), получаем вектор падающих волн μ -го ЭИ- $U_{i\mu}$. Аналогично можно получить вектор отраженных волн $U_{r\mu}$.

Отметим, что при отсутствии пересечений сфер, окружающих ЭИ, они оказываются расположенными вне областей, занятых источниками, что позволяет нам представить поля на них в виде разложений по ВСГ:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\nu &= \vec{E}_{i\nu} + \vec{E}_{s\nu}, \quad \vec{H}_\nu = \vec{H}_{i\nu} + \vec{H}_{s\nu}, \\ \begin{pmatrix} \vec{E}_{i,s\nu} \\ \vec{H}_{i,s\nu} \end{pmatrix} &= \mathbf{A}_{i,s\nu} \begin{pmatrix} \vec{E}_{i,s\nu} \\ \vec{H}_{i,s\nu} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

Нам необходимо различать векторы в пространстве ВСГ, а также векторы отраженных/падающих волн от векторов, заданных в физическом пространстве. Для обозначения векторов первых типов используем символы вида \mathbf{A} , а для обозначения векторов физического пространства используем стрелки \rightarrow . В этом случае символ \vec{E} обозначает вектор в пространстве ВСГ, элементами

которого являются векторы из физического пространства, символ \mathbf{A} описывает вектор из пространства ВСГ, элементами которого являются скалярные величины. Произведение вида $\mathbf{A}\vec{E}$ – это скалярное произведение в пространстве ВСГ, результатом которого является вектор из физического пространства.

Следующий этап МОМР – определение связи между амплитудами волн, рассеянных ν -м ЭИ и амплитудами волн, падающих на μ -й ЭИ. Для определения указанной связи нам необходимо осуществить разложение поля рассеянной волны ν -го ЭИ в системе координат μ -го ЭИ. Вне зависимости от способа решения этой задачи мы приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{A}_{i\mu} = \mathbf{K}_{\mu,\nu} \mathbf{A}_{s\nu}. \quad (3)$$

Матрицы \mathbf{K} описывают искомую связь между амплитудами рассеянных на ν -м и возбуждающих на μ -м элементах волн. Назовем их матрицами связи.

Далее необходимо ввести оператор рассеяния ЭИ, который связывает амплитуды возбуждающих и рассеянных волн ЭИ. Отметим, что наряду с ВСГ он может возбуждаться волноводными волнами со стороны своих портов. Оператор рассеяния находим в результате решения электродинамической граничной задачи. Будем полагать, что оно известно и может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{s\mu} &= \mathbf{L}_{ss\mu} \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{sw\mu} \mathbf{U}_{i\mu}, \\ \mathbf{U}_{r\mu} &= \mathbf{L}_{ws\mu} \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{ww\mu} \mathbf{U}_{i\mu}, \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{L} – искомые операторы рассеяния. Для однородной решетки с одинаковыми ЭИ все операторы рассеяния также идентичны, поэтому для них индекс μ можно опустить.

Суммируя в выражении (3) по всем ЭИ, кроме μ -го, и подставляя в него соотношения (4), получаем основные уравнения МОМР:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} {}^{(\mu)}\mathbf{L}_{ss} \mathbf{K}_{\mu,\nu} \mathbf{A}_{s\nu} + \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mu}, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{r\mu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} {}^{(\mu)}\mathbf{L}_{ws} \mathbf{K}_{\mu,\nu} \mathbf{A}_{s\nu} + \mathbf{L}_{ww} \mathbf{U}_{i\mu}. \quad (6)$$

Верхний символ (μ) означает суммирование по всем ЭИ кроме μ -го. Наибольший интерес представляет записанная в матричной форме система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (5), которая описывает взаимодействие ЭИ через свободное пространство.

Основные положения МКИ. Определим компенсирующий источник (КИ) следующим образом. Он ассоциирован с некоторым ЭИ с индексом ξ и создает рассеянные волны с амплитудным век-

тором V_ξ . Тогда уравнение (5) при наличии КИ приобретает новый вид:

$$A_{s\mu} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} {}^{(\mu)}W_{\mu,v} A_{sv} + L_{sw} U_{i\mu} + V_\xi \delta_{\mu,\xi}, \quad (7)$$

$$W_{\mu,v} = L_{ss} K_{\mu,v},$$

где $\delta_{\mu,\xi}$ – символ Кронекера, равный единице при совпадении индексов μ, ξ . Назовем матрицы $W_{\mu,v}$ матрицами взаимодействий. Отметим, что в силу периодичности решетчатой матрицы взаимодействий зависит только от разности индексов $\mu - v$, т.е. является матрицей Тейлора.

Определим матрицу взаимодействий при $\mu - v = 0$ как нулевую матрицу. Тогда в СЛАУ (7) можем распространить суммирование на все элементы решетки. Применим далее к соотношению (7) дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Предварительно введем функции $a_{i,s}(\kappa)$, $\omega(\kappa)$, $u(\kappa)$, являющиеся ДПФ соответственно последовательностей $A_{i,s\mu}$, W_{μ} , $U_{i\mu}$. Теперь можем записать результат применения ДПФ к выражению (7) и найти вектор a_s :

$$a_s(\kappa) = (E - \omega(\kappa))^{-1} (L_{sw} u(\kappa) + V_\xi \exp(i\kappa\xi P)), \quad (8)$$

где P – период решетки.

С помощью обратного ДПФ находим искомые векторы $A_{s\mu}$:

$$A_{s\mu} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} G_{s\mu,v} L_{sw} U_{iv} + G_{s\mu,\xi} V_\xi. \quad (9)$$

$$G_{s\mu,\xi} = \frac{P}{2\pi} \int_{-\pi/P}^{\pi/P} (E - \omega(\kappa))^{-1} \exp(-i\kappa(\mu - \xi)P) d\kappa. \quad (10)$$

Если в решетке присутствует множество КИ, то в формуле (9) необходимо осуществить суммирование по всем источникам. Назовем функцию индексов $\mu, \xi - G_{s\mu,\xi}$ функцией Грина бесконечной решетки для рассеянных волн. Нам будет полезно получить выражение для функции Грина возбуждающих волн $G_{i\mu,\xi}$, которая связывает векторы $A_{i\mu}$ с КИ:

$$G_{i\mu,\xi} = \frac{P}{2\pi} \times \int_{-\pi/P}^{\pi/P} Q(\kappa) (E - \omega(\kappa))^{-1} \exp(-i\kappa(\mu - \xi)P) d\kappa. \quad (11)$$

$$A_{i\mu} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} G_{i\mu,v} L_{sw} U_{iv} + \sum_{\xi} G_{i\mu,\xi} V_\xi. \quad (12)$$

Приведем соотношение, связывающее функции $G_{i\mu,\xi}$ и $G_{s\mu,\xi}$:

$$L_{ss} G_{i\mu,\xi} + E \delta_{\mu,\xi} = G_{s\mu,\xi}. \quad (13)$$

Режим квазипериодического возбуждения решетки является типовым режимом работы ФАР. В этом режиме векторы U_{iv} имеют вид

$$U_{iv} = U_0 \exp(-i\kappa_0 v P), \quad (14)$$

где κ_0 – заданный параметр, определяющий фазовые сдвиги между каналами решетки в квазипериодическом режиме. Кроме того, этот вектор определяет углы излучения решетки в свободное пространство. Находим ДПФ последовательности векторов $U_{iv} - u(\kappa)$, применяя формулу суммирования Пуассона [5]:

$$u(\kappa) = 2\pi U_0 \delta(\kappa - \kappa_0) / P, \quad (15)$$

где $\delta(\kappa - \kappa_0)$ – дельта функция. Выражения для амплитудных векторов в квазипериодическом режиме имеют следующий вид:

$$A_{s\mu} = q_{s0} U_0 \exp(-i\kappa_0 \mu P) + \sum_{\xi} G_{s\mu,\xi} V_\xi,$$

$$A_{i\mu} = q_{i0} U_0 \exp(-i\kappa_0 \mu P) + \sum_{\xi} G_{i\mu,\xi} V_\xi, \quad (16)$$

$$q_{i0} = Q(\kappa_0) (E - \omega(\kappa_0))^{-1} L_{sw},$$

$$q_{s0} = (E - \omega(\kappa_0))^{-1} L_{sw}.$$

Приведем далее СЛАУ, к которой сводится граничная задача о решетке с дефектами. Под дефектом мы понимаем любой ЭИ, имеющий операторы рассеяния L^d , отличающиеся от операторов рассеяния L регулярной решетки. Соотношения (4) для дефекта имеют вид

$$A_{s\mu} = L_{ss\mu}^d A_{i\mu} + L_{sw\mu}^d U_{i\mu}, \quad (17)$$

$$U_{r\mu} = L_{ws\mu}^d A_{i\mu} + L_{ww\mu}^d U_{i\mu}.$$

Их можно рассматривать в качестве граничных условий для амплитудных векторов на дефекте в регулярной решетке. В большей степени нас интересует первое уравнение из (17), так как оно позволяет найти векторы $A_{i,s\mu}$. И затем с помощью второго соотношения (17) не составляет труда найти векторы $U_{r\mu}$.

Допустим, что анализируемая неоднородная решетка является по-прежнему однородной, но в ЭИ с дефектами введены КИ. Тогда из уравнений (7) и (17) получаем

$$V_\xi = (L_{ss\xi}^d - L_{ss}) A_{i\xi} + (L_{sw\xi}^d - L_{sw}) U_{i\xi}. \quad (18)$$

С использованием найденной выше функции Грина можем выразить амплитудные векторы $A_{i\xi}$

через КИ и получить для них искомую СЛАУ, описывающую решетку с дефектами:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\xi - \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{i\xi,v} \mathbf{V}_v &= \\ = \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{i\xi,v} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{iv} + \Delta \mathbf{L}_{sw\xi} \mathbf{U}_{i\xi}, & (19) \\ \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} &= \mathbf{L}_{ss\xi}^d - \mathbf{L}_{ss}, \\ \Delta \mathbf{L}_{sw\xi} &= \mathbf{L}_{sw\xi}^d - \mathbf{L}_{sw}. \end{aligned}$$

В правой части (19) находятся известные величины. В квазипериодическом режиме уравнение (19) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\xi - \Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{i\xi,v} \mathbf{V}_v &= \\ = (\Delta \mathbf{L}_{ss\xi} \mathbf{q}_{i0} + \Delta \mathbf{L}_{sw\xi}) \mathbf{U}_0 \exp(-i\kappa_0 \xi P). & (20) \end{aligned}$$

В заключение данного раздела приведем соотношения, описывающие эффективный алгоритм вычисления матрицы $\mathbf{Q}(\kappa)$, необходимой для применения МКИ:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\kappa) &= \sum_{\mu=-\mu_m}^{\mu_m} {}^{(0)}(\mathbf{K}_\mu - \mathbf{K}_{a\mu}) \exp(i\kappa\mu P) + \mathbf{Q}_a(\kappa), \\ \mathbf{Q}_a(\kappa) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} {}^{(0)}\mathbf{K}_{a\mu} \exp(i\kappa\mu P). \end{aligned} \quad (21)$$

В первом выражении (21) суммирование ведется в конечных пределах, задаваемых параметром μ_m , а во втором – в бесконечных пределах по всем элементам решетки, за исключением нулевого. Асимптотическое выражение для матрицы связи $\mathbf{K}_{a\mu}$ взято из работы [13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{a\mu} &= (\tilde{\mathbf{a}}_{1\mu} (|\mu| P)^{-1} + \tilde{\mathbf{a}}_{2\mu} (|\mu| P)^{-2}) \exp(-ik|\mu| P), \\ \tilde{\mathbf{a}}_{1,2\mu,N,M} &= \mathbf{a}_{1,2N,M} \exp(-i(m_N - m_M)\varphi_\mu), \end{aligned} \quad (22)$$

где M – номер пространственной гармоники μ -го ЭИ, а N – номер гармоники нулевого ЭИ, m – азимутальный индекс гармоник, r_μ, φ_μ – радиальная и азимутальная координаты μ -го ЭИ в системе координат нулевого ЭИ, $\mathbf{a}_{1,2}$ – известные матрицы. Отметим, что для линейной решетки угол φ_μ принимает два значения: 0 при $\mu > 0$ и π при $\mu < 0$.

Для матрицы $\mathbf{Q}_a(\kappa)$ в работе [9] получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_a(\kappa) &= \mathbf{a}_1 (S_1((k - \kappa)P)\mathbf{q} + S_1((k + \kappa)P))/P + \\ &+ \mathbf{a}_2 (S_2((k - \kappa)P)\mathbf{q} + S_2((k + \kappa)P))/P^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{N,M} &= \exp(-i\pi(m_N - m_M)), \\ S_1(x) &= \ln(1/(1 - \exp(-ix))). \end{aligned} \quad (24)$$

Ряд для функции $S_2(x)$ суммировать аналитически не удастся, но для него можно предложить приближенное выражение, выбирая в котором параметр N_m достаточно большим, можно рассчитать искомую функцию с любой требуемой точностью:

$$\begin{aligned} S_2(x) &= (1 + (\exp(ix) - 1) \ln(1 - \exp(-ix))) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N_m} \exp(-inx) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

На практике достаточно взять параметр N_m в пределах 5...7.

3. АНАЛИЗ РЕШЕТКИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим теперь непериодическую решетку. Пусть причина непериодичности связана с тем, что некоторый параметр x разный у разных ЭИ. Таким образом, мы можем говорить о множестве значений параметра x_μ . Представим x_μ следующим образом:

$$x_\mu = x + \Delta x_\mu,$$

где x – некоторое номинальное среднее значение параметра, а Δx_μ – его отклонение, которое, как мы предполагаем, является малой величиной.

Отклонение параметра x_μ от номинала приводит к изменениям операторов рассеяния (4):

$$\mathbf{L}'_\mu = \mathbf{L} + \Delta x_\mu \mathbf{L}', \quad (26)$$

где \mathbf{L}' – производная оператора \mathbf{L} в точке $x_\mu = x$. Мы предполагаем, что соотношения вида (26) могут быть записаны для всех четырех типов операторов (4).

Нетрудно видеть, что выражение (26) является разложением оператора \mathbf{L}_μ в ряд Тейлора, в котором удержаны только линейные слагаемые. Отклонение Δx_μ должно быть достаточно малым, чтобы приближенное равенство (26) выполнялось с приемлемой точностью.

В соответствии с МКИ каждый ЭИ, отличающийся от номинального, является дефектом решетки, который мы описываем при помощи КИ \mathbf{V}_ξ . С учетом (26) и (18) получаем

$$\mathbf{V}_\xi = \Delta x_\xi \left(\mathbf{L}'_{ss} \mathbf{A}_{i\xi} + \mathbf{L}'_{sw} \mathbf{U}_{i\xi} \right). \quad (27)$$

С точностью до слагаемых пропорциональных первой степени малых параметров Δx_ξ нам достаточно найти вектора $\mathbf{A}_{i\xi}$ в нулевом приближении, то есть для периодической решетки с номинальными параметрами. Сделаем это для наиболее интересного режима квазипериодического возбуждения, воспользовавшись соотношением (16):

$$\mathbf{A}_{i\xi} = \mathbf{q}_{i0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\kappa_0 \xi P). \quad (28)$$

В формуле (16) мы приняли во внимание только первое слагаемое, имеющее нулевой порядок малости. Подставим далее выражение (28) в (27):

$$\mathbf{V}_\xi = \Delta x_\xi \left(\mathbf{L}'_{ss} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}'_{sw} \right) \mathbf{U}_0 \exp(-i\kappa_0 \xi P). \quad (29)$$

Соотношение (29) теперь представляет КИ через известные параметры решетки.

Амплитуды рассеянных волн в нулевом приближении имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \mathbf{q}_{s0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\kappa_0 \mu P). \quad (30)$$

Добавка к ним $\Delta \mathbf{A}_{s\mu}$, обусловленная отклонениями параметра Δx_μ , находится с помощью функции Грина (10):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}_{s\mu} &= \sum_{\xi} \Delta x_\xi \mathbf{G}_{s\mu, \xi} \mathbf{v}_0 \exp(-i\kappa_0 \xi P), \\ \mathbf{v}_0 &= \left(\mathbf{L}'_{ss} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}'_{sw} \right) \mathbf{U}_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Добавка к амплитудам возбуждающих волн $\Delta \mathbf{A}_{i\mu}$ находится аналогично (31) с помощью соотношения (11):

$$\Delta \mathbf{A}_{i\mu} = \sum_{\xi} \Delta x_\xi \mathbf{G}_{i\mu, \xi} \mathbf{v}_0 \exp(-i\kappa_0 \xi P). \quad (32)$$

Соотношения (31), (32) дают в первом приближении решение граничной задачи для непериодической бесконечной решетки. Далее будем считать параметр Δx случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x . Соотношения (31), (32) являются базовыми для вывода интересующих нас статистических оценок характеристик решетки.

4. ДИСПЕРСИЯ ОТРАЖЕННЫХ ОТ ВХОДОВ РЕШЕТКИ ВОЛН

Найдем теперь, используя соотношение (6), поправки к амплитудам отраженных от входов ЭИ волн $\Delta \mathbf{U}_{r\mu}$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{r\mu} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} {}^{(u)} \left(\mathbf{L}_{ws} \mathbf{K}_{\mu, \nu} \Delta \mathbf{A}_{s\nu} + \Delta x_\mu \mathbf{L}'_{ws} \mathbf{K}_{\mu, \nu} \mathbf{A}_{s\nu} \right) + \\ &+ \Delta x_\mu \mathbf{L}'_{ww} \mathbf{U}_{i\mu}. \end{aligned} \quad (33)$$

В квазипериодическом режиме для этого же можем воспользоваться соотношениями (30), (31):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{r\mu} &= \\ &= \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \Delta x_\xi \left(\mathbf{L}_{ws} \mathbf{G}_{i\mu, \xi} \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \delta_{\mu, \xi} \right) \exp(-i\kappa_0 \xi P), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{L}'_{ws} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}'_{ww},$$

где $\delta_{\mu, \xi}$ – символ Кронекера.

Выражение (34) описывает добавки к амплитудам отраженных от входов ЭИ волн, которые обусловлены отклонениями параметра x от своего номинального значения.

Далее найдем усредненные значения величин $|\Delta \mathbf{U}_{r\mu}|^2$, которые равны $\sigma_{u\mu}$ – дисперсии модуля случайной составляющей амплитуды отраженной волны. При этом будем исходить из того, что случайные параметры Δx_ξ статистически независимы и имеют одинаковые значения дисперсии.

С учетом этих допущений получаем

$$\sigma_{u\mu}^2 = \sigma_x^2 \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \left| \mathbf{L}_{ws} \mathbf{G}_{i\mu, \xi} \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \delta_{\mu, \xi} \right|^2. \quad (35)$$

Для вычисления ряда в формуле (35) воспользуемся выражением (11) и также учтем, что

$$\delta_{\mu, \xi} = \frac{P}{2\pi} \int_{-\pi/P}^{\pi/P} \exp(-i\kappa(\mu - \xi)P) d\kappa. \quad (36)$$

В результате получаем

$$\sigma_{u\mu}^2 = \frac{\sigma_x^2 P}{2\pi} \int_{-\pi/P}^{\pi/P} \left| \mathbf{L}_{ws} \mathbf{Q}(\kappa) \mathbf{d}(\kappa) \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \right|^2 d\kappa, \quad (37)$$

где $\mathbf{d}(\kappa) = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\kappa))^{-1}$.

Как видно из выражения (37), дисперсия отраженной волны не зависит от номера ЭИ μ , поэтому соответствующий индекс в обозначении дисперсии опущен.

Соотношение (37) описывает интересующую нас дисперсию случайной составляющей отраженной волны. Важно отметить, что статистически, т.е. в рамках усредненных параметров, решетка осталась однородной, также как исходная структура с номинальными значениями параметров. Данный результат не означает, что однородной будет каждая конкретная реализация решетки, которая должна состоять из неодинаковых ЭИ.

Если ЭИ имеет несколько независимых случайных параметров, то в рамках линейного приближения необходимо суммировать квадраты дисперсий σ_{ui}^2 (i – номер параметра). При этом все они находятся с помощью выражения (37).

5. НЕКОГЕРЕНТНОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И ЕГО СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Соотношение (31), которое описывает приращение амплитуд рассеянных волн, является основой для определения статистических параметров поля излучения. Случайное нарушение периодичности решетки приводит к появлению в пространстве случайного некогерентного поля. Наша задача состоит в том, чтобы выразить его через отклонения пара-

метра Δx_ξ и найти дисперсию его вектора Пойнтинга.

Для последующего анализа соотношения (31) исходными являются формулы, связывающие приращения электрического и магнитного полей $\Delta \vec{E}$ и $\Delta \vec{H}$ через приращения амплитуд (31):

$$\Delta \vec{E} = \sum_{\mu} \Delta A_{s\mu} \vec{E}_{s\mu}, \quad \Delta \vec{H} = \sum_{\mu} \Delta A_{s\mu} \vec{H}_{s\mu}, \quad (38)$$

(векторы $\vec{E}_{s\mu}$, $\vec{H}_{s\mu}$ введены выше, см. формулу (2)).

Для дальнейшего анализа нам удобно воспользоваться представлением ВСГ в виде двойных интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{E}_{s\mu} \\ \vec{H}_{s\mu} \end{bmatrix} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \vec{e}_s \\ \vec{h}_s \end{bmatrix} \exp(-i\kappa_1(x - \mu P) - \\ &- i\kappa_2 y - iqz) d\kappa_1 d\kappa_2, \quad (39) \\ q &= \sqrt{k^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2}. \end{aligned}$$

Функции \vec{e}_s , \vec{h}_s известны [15] и выражаются весьма громоздким образом, поэтому мы их не приводим в явном виде.

Нам также будут полезны соотношения (10), (37), представляющие функцию Грина в виде интеграла Фурье. Подставим их и выражение (39) в формулы (38) и осуществим суммирование по индексу μ с помощью формулы Пуассона [5], которая сводит сумму экспонент к сумме дельта-функций. Используя свойство дельта-функции, берем интеграл по κ_1 . В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/P}^{\pi/P} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\kappa_{1n}, \kappa_2) \times \\ &\times \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \kappa_{1n}x + \kappa_2 y + q_n z)) d\alpha d\kappa_2, \quad (40) \\ \kappa_{1n} &= \alpha + 2\pi n/P, \quad q_n = \sqrt{k^2 - \kappa_{1n}^2 - \kappa_2^2}. \end{aligned}$$

Соотношение (40) описывает полное поле, создаваемое решеткой. Нас интересует только его часть – поле излучения, которое переносит энергию на бесконечность. Используем данное обстоятельство для преобразования соотношения (40). Соотношение (40) является разложением поля по гармоникам Флоке. Номер гармоники совпадает с индексом суммирования в выражении (40) n . В типовом случае только небольшая часть гармоник является распространяющимися. Ограничимся анализом ситуации, в которой распространяется только одна гармоника Флоке с нулевым номером. Отметим, что при произвольном угле сканирования этому ограничению удовлетворяет решетка с периодом, меньшим половины длины волны в свободном пространстве.

Таким образом, мы можем избавиться от ряда в соотношении (40), оставив только нулевой его член:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \int_{-k}^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \kappa_2) \times \\ &\times \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \alpha x + \kappa_2 y + q_0 z)) d\alpha d\kappa_2. \quad (41) \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования связаны с интегралом по переменной κ_2 . Как следует из соотношения (41), он описывает зависимость поля от координат y , z . Найдем его приближенное выражение в дальней зоне. Для этого введем полярные координаты:

$$y = \rho \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi. \quad (42)$$

Здесь угол φ отсчитывается от оси $0z$. Его не следует путать с углом в сферической системе координат. Радиус ρ задает расстояние от оси $0x$ до точки наблюдения.

Введем также новую переменную интегрирования:

$$\kappa_2 = k_e \sin \psi, \quad q_0 = k_e \cos \psi, \quad k_e = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \int_{-k}^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \kappa_2) \times \\ &\times \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \alpha x + \\ &+ k_e \rho \cos(\psi - \varphi)) k_e \cos \psi) d\alpha d\psi. \quad (44) \end{aligned}$$

В формуле (41) мы изменили пределы интегрирования по переменной α . Данное изменение обусловлено тем, что параметр k_e является действительной величиной при $|\alpha| < k$. При мнимых значениях k_e соотношение (44) описывает затухающие на бесконечности поля. Далее методом перевала [14] вычислим интеграл (44) при условии $k_e \rho \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \int_{-k}^k \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \lambda) \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \\ &+ \alpha x + k_e \rho)) \cos \varphi \sqrt{\frac{2\pi k_e}{\rho}} d\alpha, \quad \lambda(\varphi) = k_e \sin \varphi. \quad (45) \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно без труда получить для вектора магнитного поля, заменяя $\vec{e}_s(\alpha, \lambda)$ на $\vec{h}_s(\alpha, \lambda)$. Найдем продольную компоненту вектора Пойнтинга Π_{ρ} :

$$\Pi_{\rho} = \frac{1}{2} [\vec{E} \vec{H}^*]_{\rho}. \quad (46)$$

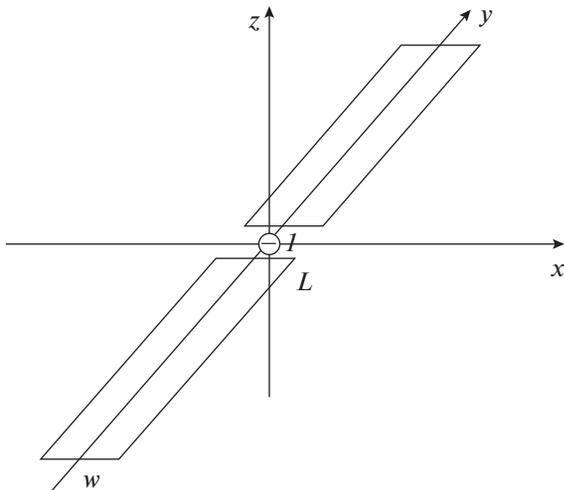


Рис. 2. Ленточный вибратор.

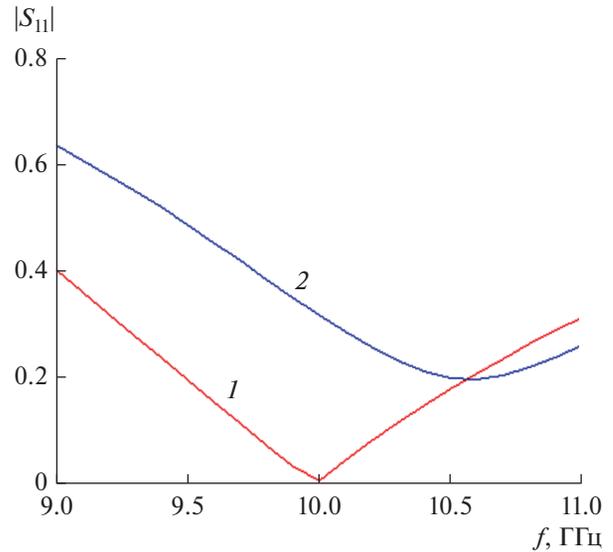


Рис. 3. Частотная зависимость модуля коэффициента отражения для одиночного вибратора (1) и для вибратора в составе бесконечной решетки (2).

Будем искать усредненное по реализациям значение вектора Пойнтинга. Тогда с учетом отсутствия корреляции между отклонениями Δx_ξ получаем

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_p &= \frac{\sigma_x^2}{2} \sum_{\xi} \int_{-k}^k \int_{-k}^k \left[\bar{R}_e(\alpha) \bar{R}_h^*(\beta) \right]_p \times \\ &\times \exp(-i(\xi P(\beta - \alpha)) d\alpha d\beta, \\ \bar{R}_{e,h}(\alpha) &= \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_s(\alpha, \lambda) \\ \bar{\mathbf{h}}_s(\alpha, \lambda) \end{bmatrix} \times \\ &\times \exp(-i(\alpha x + k_e \rho)) \cos \varphi \sqrt{\frac{2\pi k_e}{\rho}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Сумма по ξ вычисляется с помощью упомянутой выше формулы Пуассона, которая также позволяет взять интеграл по β , используя свойство дельта-функции $\delta(\beta - \alpha)$:

$$\begin{aligned} \Pi_p &= \frac{2\pi^2 \sigma_x^2 \cos^2 \varphi}{P\rho} \times \\ &\times \int_{-k}^k k_e^2 \left[(\mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \bar{\mathbf{e}}_s(\alpha, \lambda)) (\mathbf{d}^*(\alpha) \mathbf{v}_0^* \bar{\mathbf{h}}_s^*(\alpha, \lambda)) \right]_p d\alpha. \end{aligned} \quad (48)$$

Формула (48) описывает пространственное распределение дисперсии потока мощности некогерентного поля. Как видим, дисперсия вектора Пойнтинга не зависит от координаты x , но она изменяется в плоскости YOZ . Энергетическая диаграмма направленности некогерентного поля может быть получена из (48).

6. АНАЛИЗ РЕШЕТКИ ЛЕНТОЧНЫХ ВИБРАТОРОВ

Для проверки представленной выше теории ее использовали при анализе решетки ленточных виб-

раторов со случайными длинами (рис. 2). В работе [13] приведена реализация метода МОМР-РВСГ для случая ленточной вибраторной решетки. В ней описан алгоритм расчета операторов рассеяния \mathbf{L} . Алгоритм вычисления функции Грина бесконечной вибраторной решетки строится по соотношениям из разд. 1 [9].

Наряду с исследованием бесконечной решетки были проведены расчеты статистических характеристик линейки с конечным, но достаточно большим числом вибраторов N_v , которое в численных экспериментах было равно 21. В такой структуре достаточно удаленные от краев элементы ведут себя также, как элементы бесконечной решетки. Отметим, что моделируемая решетка состояла из неодинаковых вибраторов со случайными длинами. Для нее провели серию статистических испытаний, состоящую из N_t расчетов. При этом набор длин вибраторов L_ξ при каждом испытании задавался генератором случайных чисел с математическим ожиданием L и дисперсией σ_L .

Для центрального элемента решетки рассчитывали амплитуду отраженной волны и находили дисперсию ее модуля. Исследовали зависимость дисперсии от параметра N_t с целью определения предела при $N_t \rightarrow \infty$. Предельное значение дисперсии использовали для сравнения с результатом, получаемым по формуле (37).

На рис. 3 и 4 показаны характеристики бесконечной решетки с детерминированными параметрами: $P = 17$, $L = 13.85$, $w = 1$. Здесь и далее все размеры приводятся в миллиметрах. На рис. 3 представлена зависимость модуля коэффициента отражения S_{11}

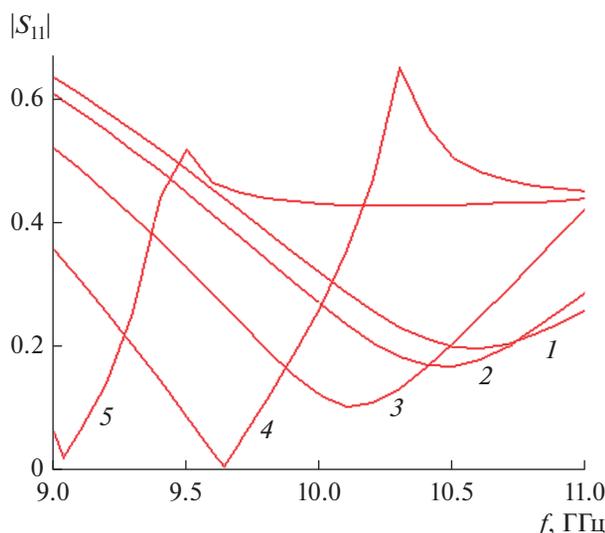


Рис. 4. Частотная зависимость модуля коэффициента отражения вибраторной решетки в режиме сканирования при $\theta = 0$ (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4), 60 град (5).

от входа излучателя для одиночного вибратора и для вибратора в составе синфазной решетки ($\theta = 0$), на рис. 4 – частотная зависимость модуля коэффициента отражения бесконечной решетки для углов сканирования $\theta = 0, 15, 30, 45, 60$ град. Сканирование идет в плоскости XOZ . Видно, что увеличение угла θ сначала улучшает согласование структуры. Однако начиная с некоторого критического угла, наблюдается резкий всплеск коэффициента отражения, который связан с появлением побочного дифракционного лепестка.

На рис. 5 показана частотная зависимость дисперсии модуля амплитуды отраженной волны для углов сканирования $\theta = 0, 15, 30, 45, 60$ град. Дисперсия длины вибратора σ_L принята равной 0.2. Видно, что существенные изменения частотной зависимости дисперсии σ_u наблюдаются в зоне появления побочных дифракционных лепестков.

Интересно рассмотреть различные приближенные способы вычисления дисперсии σ_u . Кривые 1–5 на рис. 5 были получены с помощью соотношения (37). В нем разные члены учитывают разные виды взаимодействий волн в решетке.

Наиболее простой смысл имеет слагаемое L'_{ws} , входящее в параметр w_0 . Оно описывает вклад в изменение амплитуды отраженной волны, который порождает изменение коэффициента отражения уединенного вибратора. При этом взаимодействие элементов решетки через свободное пространство никак не учитывается. Можно сказать, что обсуждаемое слагаемое описывает дис-

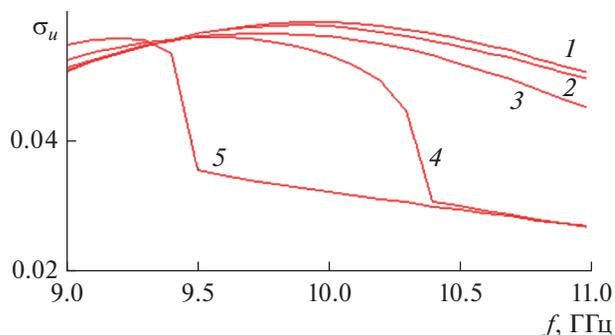


Рис. 5. Частотная зависимость дисперсии амплитуды отраженной волны при $\theta = 0$ (1), 15 (2), 30 (3), 45 (4), 60 град.

персию отраженной волны в приближении элементарной теории антенных решеток.

Более сложный смысл имеет слагаемое $L'_{ws} \mathbf{q}_{10}$. Оно учитывает вклад в случайную составляющую отраженной волны, порождаемый полем решетки нулевого приближения, т.е. решетки с детерминированными номинальными параметрами. При этом случайный характер отраженных волн возникает благодаря тому, что оператор L_{ws} содержит случайную составляющую, пропорциональную в линейном приближении его производной L'_{ws} .

Наиболее сложный вид имеет слагаемое из формулы (37), пропорциональное оператору L_{ws} . Оно описывает вклад в отраженную волну от случайной части поля в решетке. В линейном приближении он пропорционален детерминированной части оператора рассеяния L_{ws} .

Расчет дисперсии σ_u можно проводить, учитывая одно, два и, наконец, все три слагаемых, т.е. по наиболее сложной формуле (37), получая при этом приближения разной степени точности. Присвоим им номера 1, 2, 3. Отметим, что в вычислительном смысле первые два приближения намного проще третьего, так как интеграл в них берется элементарно, а при использовании соотношения (37) возникает необходимость численного интегрирования весьма сложной функции.

На рис. 6 показана частотная зависимость дисперсии σ_u для геометрических параметров, приведенных выше, и нулевого угла сканирования. Номер кривой совпадает с номером приближения. Видно, что наиболее грубое приближение 1 весьма сильно отличается от точного результата, который соответствует кривой 3. При этом приближение 2 весьма близко к расчету по формуле (37). Отметим, что указанная близость сохраняется в весьма широком диапазоне изменения параметров решетки и углов сканирования, что позволяет

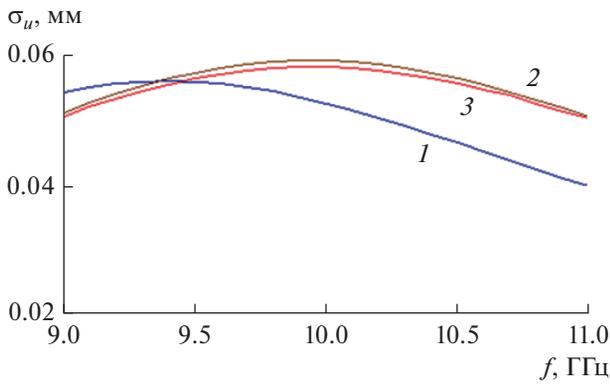


Рис. 6. Частотная зависимость дисперсии амплитуды отраженной волны рассчитанная при помощи моделей 1–3 (кривые 1–3 соответственно).

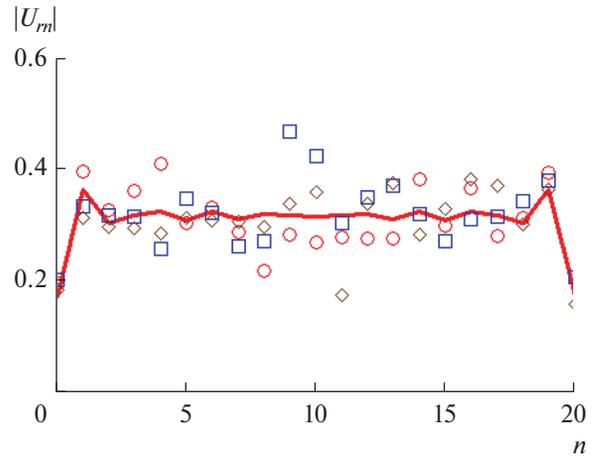


Рис. 7. Распределение амплитуд отраженных волн в каналах решетки при статистических испытаниях для решетки с детерминированными параметрами (кривая 1), также показаны три реализации (кружочки, квадраты и ромбы) с разными случайными наборами длин вибраторов.

предположить, что она не является результатом случайного сочетания параметров, а отражает важную особенность взаимодействия поля в решетке.

Рассмотрим результаты численного эксперимента по прямому определению дисперсии амплитуд отраженных волн методом статистических испытаний (схема численного эксперимента описана в начале данного раздела). На рис. 7 показан пример расчета амплитуд отраженных волн в вибраторной решетке с $N_v = 21$. Сплошная кривая получена для решетки с детерминированными параметрами, а также показаны три реализации с разными случайными наборами длин вибраторов. Дисперсия длины σ_L , как и раньше, равна 0.2.

В решетке был выделен центральный элемент, параметры которого близки к параметрам элемента в составе бесконечной решетки. Подтверждением этого может служить кривая на рис. 7. Видно, что на краях решетки наблюдаются достаточно большие осцилляции в распределении амплитуд отраженных волн. В центре они ослаблены настолько, что ими можно уже пренебречь. Затухание осцилляций является свидетельством того, что влияние краевых эффектов в данной области решетки незначительно и ее параметры близки к параметрам бесконечной структуры.

На рис. 8 показана зависимость параметра $\Delta\sigma_u$ от числа испытаний N_t . Указанный параметр определяется следующим образом:

$$\Delta\sigma_u = \left| \frac{\sigma_u(N_t) - \sigma_t}{\sigma_t} \right|, \quad (49)$$

где σ_t – теоретическая оценка дисперсии, а $\sigma_u(N_t)$ – дисперсия, определяемая по методу статистических испытаний. Таким образом, параметр

$\Delta\sigma_u$ имеет смысл относительной погрешности теоретического расчета дисперсии.

Кривая на рис. 8 получена для синфазной решетки с параметрами, приведенными выше. Видна явная тенденция к уменьшению погрешности $\Delta\sigma_u$ при увеличении числа испытаний. Таким образом, можно сделать вывод, что построенная теоретическая схема расчета статистических параметров решетки находит подтверждение при использовании прямого метода статистических испытаний.

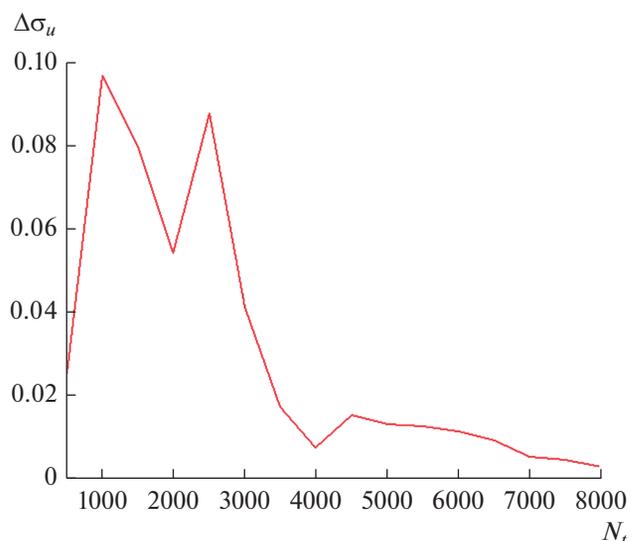


Рис. 8. Зависимость относительной погрешности дисперсии от числа статистических испытаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гупта К., Гардж Р., Чадха Р.* Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1987.
2. *Воскресенский Д.И., Котов Ю.В., Овчинникова Е.В.* // Антенны. 2005. № 11. С. 7.
3. *Шифрин Я.С.* Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. радио, 1970.
4. *Инденбом М.В.* Антенные решетки подвижных обзорных РЛС. Теория, расчет, конструкции. М.: Радиотехника, 2015.
5. *Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир, 1974.
6. *Mailoux R.J.* Phased array antennas handbook. N.-Y.: Artech House, 2005.
7. *Банков С.Е., Курушин А.А., Гутцайт Э.М.* Решение оптических и СВЧ задач с помощью HFSS. М.: Оркада, 2012.
8. *Банков С.Е., Курушин А.А.* Электродинамика для пользователей САПР СВЧ. М.: Солон-Пресс, 2018.
9. *Банков С.Е.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 2. С. 118.
10. *Банков С.Е.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 9. С. 23.
11. *Xiao G.B., Mao J.F., Yuan B.* // IEEE Trans. 2008. V. AP-56. № 12. P. 3723.
12. *Xiang S., Xiao G., Tian X., Mao J.* // IEEE Trans. 2013. V. AP-61. № 11. P. 5453.
13. *Банков С.Е.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 1. С. 31.
14. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.
15. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехтеориздат, 1948.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 538.574.6

СИНТЕЗ АНИЗОТРОПНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ
ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ
И ПОЛЯРИЗАЦИИ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

© 2020 г. Ю. В. Юханов^а, *, Т. Ю. Привалова^а

^аЮжный федеральный университет,
ул. Большая Садовая, 105/42, Ростов-на-Дону, 344006 Российская Федерация

*E-mail: yu_yukhanov@mail.ru

Поступила в редакцию 12.11.2019 г.

После доработки 21.11.2019 г.

Принята к публикации 25.11.2019 г.

Решена задача синтеза неоднородной анизотропной импедансной плоскости, отражающей однородную плоскую волну в заданном направлении с требуемой трансформацией поляризации. Для неоднородной анизотропной импедансной плоскости получены коэффициенты отражения. Впервые сформулированы ограничения на класс диаграмм рассеяния, реализуемых с помощью частой решетки ортогональных реактансных полос с неизменной ориентацией вдоль структуры. Задача синтеза решена для заданных направлений отражения волны и по заданным однородным плоским волнам, отраженным в заданном направлении с требуемой поляризацией. Приведены численные результаты.

DOI: 10.31857/S0033849420040117

ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов создания стелс-объектов является размещение на их поверхности электродинамических структур с управляемыми характеристиками излучения и рассеяния, так называемых “умных” обшивок [1–5]. Концепция умных поверхностей, связанная с управляемым рассеянием объектов, сформировалась еще в 60–70-е гг. XX в. [6–9]. Электрофизические свойства многих из таких структур можно описать с помощью импедансных граничных условий [10–12]. Обоснованность применения импедансных граничных условий подтверждена как для плоских, так и для криволинейных поверхностей, в том числе для сверхпроводников гладких и шероховатых поверхностей, и устройств на их основе [13]. В работах [14, 15] впервые продемонстрирована возможность эффективного управления полем рассеяния объектов с помощью сосредоточенных и распределенных комплексных импедансных нагрузок.

Проектирование объектов с заданными излучающими и рассеивающими свойствами предполагает постановку и решение обратных задач электродинамики или задач синтеза. Известно немало работ, посвященных синтезу граничных условий на телах различной формы по заданным характеристикам излучения и рассеяния (например, [16–25]), где рассмотрены задачи синтеза двумерных изотропных импедансных поверхно-

стей по заданным характеристикам излучения и рассеяния на согласованной поляризации. Так, в работе [16] предложен метод решения обратной задачи для импедансной антенны, реактансный рельеф которой выбирался параллельным вещественной части вектора Пойнтинга. На найденной поверхности затем определялся закон распределения реактанса. Позднее в работе [17] предложенный в [16] метод был обобщен на случай синтеза цилиндрических импедансных рассеивателей. Здесь по известному падающему полю и заданной диаграмме рассеяния из уравнений Максвелла определена форма реактансного рассеивателя, совпадающая с одной из замкнутых поверхностей, на которой вещественная часть вектора Пойнтинга равна нулю. В работах [18, 19] форма объекта полагалась заданной (плоская [18] или цилиндрическая [19]), а поверхностный реактанс определялся по требуемой диаграмме направленности (ДН). Условие чистой реактивности импеданса достигнуто за счет специально вводимых медленных (непространственных) волн. Система ограничений на значения комплексных амплитуд токов, связанная с условием чистой реактивности импеданса, сведена к поиску условного экстремума квадратичной формы при наличии квадратных ограничений типа равенств на значения неизвестных.

В [20, 21] рассмотрены задачи синтеза пассивного импеданса ($\text{Re}Z \geq 0$), что, по замыслу авторов,

должно было дать дополнительные возможности по управлению характеристиками рассеяния объектов. Задача решалась приближенно — методом линейного программирования путем сведения интегрального уравнения к переопределенной системе алгебраических уравнений.

В работах [22, 23] строго и в приближении физической оптики решены задачи синтеза для плоскости и для двумерных тел произвольной формы. В отличие от работ [16–21] здесь законы распределения изотропного неоднородного импеданса найдены в явном виде. Получены выражения для коэффициентов отражения, определен класс реализуемых диаграмм для пассивных отражателей ($\text{Re}Z \geq 0$).

Функциональные возможности импедансных отражателей с управляемыми характеристиками можно дополнительно расширить за счет перевода отраженной волны на кросс-поляризацию [24–26]. Так, в [24] методом интегральных уравнений исследовано анизотропное импедансное “умное” покрытие (смарт-покрытие), обеспечивающее перевод поля рассеяния произвольного цилиндра на кросс-поляризацию. Показано, что при этом на согласной поляризации цилиндрическая поверхность эквивалентна “черному” телу закона Кирхгофа [27]. В работах [25, 26] в результате решения задачи синтеза удалось в явном виде получить законы распределения реактансов частой решетки ортогональных импедансных полос и их ориентации на плоскости, которые обеспечивают переотражение падающей волны линейной поляризации в заданном направлении с одновременным поворотом плоскости поляризации на 90° .

Дальнейшее совершенствование умных покрытий возможно за счет трансформации поляризации отраженного поля по любому наперед заданному закону.

Работы, посвященные этой проблематике, существуют и связаны в основном с антенной тематикой (см., например, [28–33]). Так, в [28] дана обширная библиография работ по разработке поляризаторов отражательного типа. В [30] сообщается о свойствах поляризационного преобразования частотно-селективных поверхностей на примере микрополосковых структур, преобразующих линейную поляризацию в круговую. Однако они рассчитаны на ограниченный диапазон углов падения. Преимущества отражательного поляризатора, предложенного в работах [28, 29], включают в себя: низкий профиль, небольшие масса и размер, широкополосная работа, низкие тепловые потери и угловая стабильность. В [31] разработан аналитический метод синтеза бианизотропных рассеивателей, расположенных в узлах квадратной сетки, для проектирования поляризационных трансформаторов. Для упрощения синтеза предложенный метод рассматривается только для нормального

падения волны. Численные результаты показали хорошее соответствие экспериментальных результатов и теории. Однако в работах [28–31] рассмотрены структуры, работающие только при нормальном падении волны либо на зеркально отраженных лучах.

В отличие от указанных выше работ в [32, 33] рассмотрены задачи синтеза анизотропных структур, переотражающих падающие поля в заданном (незеркальном) направлении с поворотом (трансформацией) ее плоскости поляризации, безотносительно к реализующим их конструкциям. Показано, что такой эффект возможно достичь только с помощью частой решетки ортогональных неоднородных реактансных полос, имеющих помимо неоднородного реактанса еще и переменную на импедансной плоскости ориентацию. Законы распределения реактанса и ориентации полос получены в явном виде. Очевидно, что в практических приложениях реализация реактансных структур с переменной ориентацией может оказаться весьма трудоемкой, неоправданно дорогостоящей задачей, особенно на поверхности рассеивателя сложной формы. Таким образом, ранее решались задачи синтеза анизотропной плоскости, переводящей отраженную волну на кросс-поляризацию. Задача синтеза анизотропной импедансной структуры по заданному направлению и поляризации (трансформации поляризации падающей волны в требуемую, в том числе круговую) при ограничениях на конструкцию реализующей импеданс (конструктивный синтез) ставится впервые.

Цель данной работы — решение задачи синтеза анизотропной плоскости в виде частой решетки ортогональных реактансных полос фиксированной ориентации, по заданному направлению отражения электромагнитной волны с требуемой трансформацией поляризации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на идеально проводящей плоскости $S(y=0)$ (рис. 1а, 1б) реализована анизотропная структура в виде частой решетки ортогональных импедансных полос (лент) Z_E, Z_M , вплотную прилегающих друг к другу и ориентированных под углом α к оси z (см. рис. 1б). В этом случае на плоскости S выполняются импедансные граничные условия Леонтовича [12]:

$$[\vec{n}, \vec{E}] = -\hat{Z}[\vec{n}[\vec{n}, \vec{H}]], \quad (1)$$

где в системе координат $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{n} = -\vec{i}_y\}$ (см. рис. 1б) тензор импеданса \hat{Z} имеет диагональный вид

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} Z_E & 0 \\ 0 & Z_M \end{vmatrix}; \quad (2)$$

$$E_u = -Z_E H_v; \quad E_v = Z_M H_u. \quad (3)$$

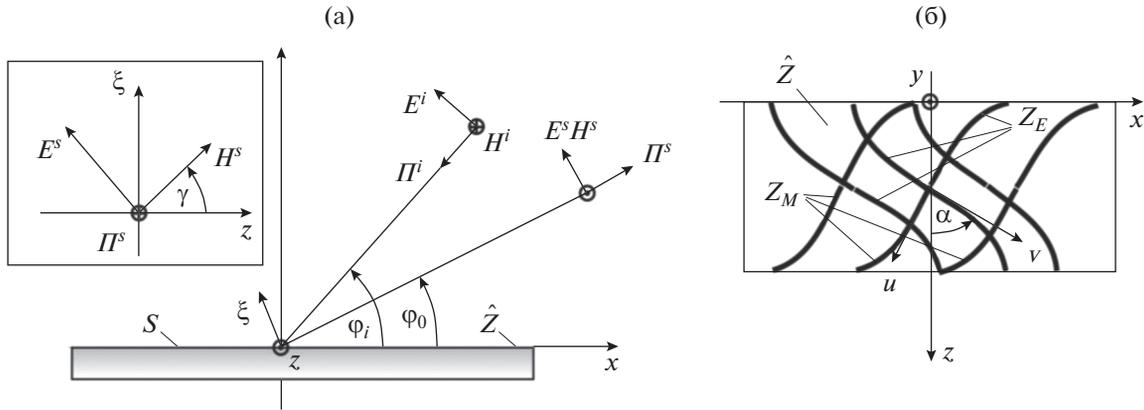


Рис. 1. Постановка задачи.

Здесь и далее компоненты тензора импеданса и вектор напряженности электрического поля нормированы на характеристическое сопротивление свободного пространства $W = 120\pi$ Ом. В общем случае, как показано в работах [32, 33], параметры структуры могут меняться вдоль оси x ($Z_E(x)$, $Z_M(x)$ и $\alpha(x)$). Вдоль оси z система однородна (см. рис. 1), следовательно, задача двумерна.

На плоскость S с направления φ_i падает плоская электромагнитная волна (см. рис. 1а) с векторами \vec{E}^i, \vec{H}^i :

$$\begin{aligned} E_z^i &= E_0^i \exp(ikx \cos \varphi_i); & H_x^i &= -\sin \varphi_i E_z^i; \\ H_z^i &= H_0^i \exp(ikx \cos \varphi_i); & E_x^i &= \sin \varphi_i H_z^i, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ (λ – длина падающей волны).

Необходимо найти компоненты $Z_E(x)$, $Z_M(x)$ тензора (2) реактанса

$$Z_E = iX_E(x); \quad Z_M = iX_M(x); \quad (5)$$

с постоянной ориентацией полос системы $(x) = \text{const}$, обеспечивающие отражение волны \vec{E}^s, \vec{H}^s от плоскости $y=0$ в заданном направлении φ_0 с требуемой поляризацией:

$$\begin{aligned} H_z^s &= H_0 \exp(i\Psi_0 - ikx \cos \varphi_0); \\ E_x^s &= -\sin \varphi_0 H_z^s; \\ E_z^s &= E_0 \exp(i\Phi_0 - ikx \cos \varphi_0); \\ H_x^s &= \sin \varphi_0 E_z^s, \end{aligned} \quad (6)$$

где $E_0 = YH_0$ и Φ_0, Ψ_0 – заданные амплитуды и фазы ортогональных составляющих отраженного поля, определяющие поляризацию отраженной волны.

2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Поскольку падающие (4) и отраженные (6) волны являются однородными плоскими волнами, то можно ввести в рассмотрение коэффициенты отражения $P_{m,n}$ ($m = 1, 2; n = 1, 2$) [34] следующим образом:

$$E_z^s = P_{11}E_z^i + P_{12}H_z^i; \quad H_z^s = P_{21}E_z^i + P_{22}H_z^i. \quad (7)$$

Запишем импедансные граничные условия (3) в декартовой системе координат:

$$E_x \cos \alpha - E_z \sin \alpha = Z_E H_x \sin \alpha + Z_E H_z \cos \alpha; \quad (8)$$

$$E_x \sin \alpha + E_z \cos \alpha = -Z_M H_x \cos \alpha + Z_M H_z \sin \alpha. \quad (9)$$

Представляя полные поля в виде суммы падающих (4) и отраженных (6) волн и выражая E_x и H_x через H_z и E_z (см. формулы (4), (6)), из (8) и (9) получим представление рассеянных полей E_z^s, H_z^s через падающие E_z^i, H_z^i :

$$\begin{aligned} E_z^s &= \frac{(Z_{22} \sin \varphi_0 - 1) \sin \varphi_0 + \sin \varphi_i Z_E Z_M - Z_{11}}{\Delta} E_z^i + \\ &+ \sin \alpha \cos \alpha \frac{(\sin \varphi_0 + \sin \varphi_i)(Z_M - Z_E)}{\Delta} H_z^i; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H_z^s &= \sin \alpha \cos \alpha \frac{(\sin \varphi_0 + \sin \varphi_i)(Z_M - Z_E)}{\Delta} E_z^i + \\ &+ \frac{\sin \varphi_i (1 + Z_{22} \sin \varphi_0) - \sin \varphi_0 Z_M Z_E - Z_{11}}{\Delta} H_z^i, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \cos^2 \alpha Z_E + \sin^2 \alpha Z_M; \\ Z_{22} &= \cos^2 \alpha Z_M + \sin^2 \alpha Z_E; \\ \Delta &= \{ \cos^2 \alpha (\sin \varphi_0 + Z_E)(\sin \varphi_0 Z_M + 1) + \\ &+ \sin^2 \alpha (\sin \varphi_0 + Z_M)(1 + \sin \varphi_0 Z_E) \}. \end{aligned}$$

Сопоставляя формулы (10) и (11) с формулами (7) и учитывая формулы Вайнштейна–Сивова для Z_{11} и Z_{22} , получим выражения для $P_{m,n}$ неоднородной анизотропной плоскости с системой ортогональных полос (лент) Z_M, Z_E (см. рис. 1б):

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{\sin^2 \alpha (\sin \varphi_0 + Z_M) (\sin \varphi_i Z_E - 1) - \cos^2 \alpha (\sin \varphi_0 + Z_E) (1 - \sin \varphi_i Z_M)}{\Delta}, \\ P_{22} &= \frac{\sin^2 \alpha (1 + \sin \varphi_0 Z_E) (\sin \varphi_i - Z_M) + \cos^2 \alpha (\sin \varphi_0 Z_M + 1) (\sin \varphi_i - Z_E)}{\Delta}, \\ P_{12} = P_{21} &= \sin \alpha \cos \alpha (Z_M - Z_E) \frac{\sin \varphi_i + \sin \varphi_0}{\Delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) для однородной импедансной плоскости, когда $\varphi_0 = \pi - \varphi_i$, переходят в общеизвестные [34].

Строго говоря, полученные соотношения справедливы только в том случае, когда импедансная структура обеспечивает отражение единственной однородной плоской волны (6). На самом деле, в силу требований физической ($\operatorname{Re}(Z_E) \geq 0; \operatorname{Re}(Z_M) \geq 0$) и технической (например, $\alpha(x) = \text{const}$) реализации пассивного импеданса (не требующего размещения на поверхности синтезируемого рефлектора дополнительных источников ЭМВ) создать структуру, обеспечивающую условия (6) возможно, как показано в работе [23] на примере решения задач синтеза и анализа неоднородной изотропной плоскости, только для направления обратного рассеяния. В остальных случаях помимо заданного луча появляется как минимум еще одна плоская однородная волна, отраженная в зеркальном направлении. В общем же случае [23] помимо заданной неоднородная импедансная плоскость будет порождать множество других отраженных однородных плоских и поверхностных волн, тогда выражения (12) уже нельзя считать строгими.

На данном же этапе считаем, что полученные коэффициенты отражения являются неоднородными функциями (зависящими от координаты x) и содержат в общем случае неизвестные пока функции $Z_E(x); Z_M(x)$ и $\alpha(x)$. О них известно лишь то, что они должны обеспечить синтезируемой структуре заданный режим отражения однородной плоской волны и подлежат определению из требуемых диаграмм рассеяния. В процессе решения задачи синтеза (см. далее разд. 4) будут определены условия реализации таких структур (класс реализуемых диаграмм рассеяния).

3. ДИАГРАММА РАССЕЯНИЯ

В точке наблюдения $p(r, \varphi)$, расположенной в дальней зоне ($r \rightarrow \infty$), в цилиндрической системе координат диаграммы рассеяния в E - и H -плоскостях ($F_E(\varphi)$ и $F_H(\varphi)$) для фрагмента реактансной

плоскости $x \in [-L, L]$ можно представить через коэффициенты отражения (7) и соотношения (4), (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_z^s(p) &= H_0^{(2)}(kr) F_E(\varphi); \\ H_z^s(p) &= H_0^{(2)}(kr) F_H(\varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} F_E(\varphi) &= F_{E\parallel}(\varphi) + F_{E\perp}(\varphi); \\ F_H(\varphi) &= F_{H\parallel}(\varphi) + F_{H\perp}(\varphi); \\ F_{E\parallel}(\varphi) &= F_{\tau E} + \frac{k}{4} \int_{-L}^L (\sin \varphi + \sin \varphi_0) \times \\ &\quad \times P_{11} E_z^i \exp(ikx \cos \varphi) dx; \\ F_{H\parallel}(\varphi) &= F_{\tau H} + \frac{k}{4} \int_{-L}^L (\sin \varphi + \sin \varphi_0) \times \\ &\quad \times P_{22} H_z^i \exp(ikx \cos \varphi) dx; \\ F_{\tau E, H}(\varphi) &= \frac{k}{4} \left\{ \begin{matrix} E_0^i \\ H_0^i \end{matrix} \right\} \int_{-L}^L (\sin \varphi - \sin \varphi_i) \times \\ &\quad \times \exp(ikx (\cos \varphi + \cos \varphi_i)) dx; \\ F_{H\perp}(\varphi) &= \frac{k}{4} \int_{-L}^L (\sin \varphi + \sin \varphi_0) \times \\ &\quad \times P_{12} H_z^i \exp(ikx \cos \varphi) dx; \\ F_{E\perp}(\varphi) &= \frac{k}{4} \int_{-L}^L (\sin \varphi + \sin \varphi_0) \times \\ &\quad \times P_{21} E_z^i \exp(ikx \cos \varphi) dx. \end{aligned}$$

Как видим, составляющие $F_{\tau E, H}(\varphi)$ диаграммы направленности определяют теневой лепесток (поле рассеяния “черного” тела Кирхгофа) и не зависят ни от поверхностного импеданса, ни от поляризации падающей волны, имеют одинаковую форму и отличаются только комплексными амплитудами.

Полученные формулы позволят найти пока еще неизвестные законы распределения импеданса полос Z_M, Z_E , обеспечивающих заданный режим отражения волн на согласной и крессовой поляризациях.

4. СИНТЕЗ РЕАКТАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим задачу синтеза на примере анизотропной плоскости, переотражающей падающую с направления φ_i однородную плоскую H -поляризованную волну (4) ($E_z^i = 0, H_0^i = 1 A/m$) в отраженную волну заданной поляризации ($Y, \Delta\Psi = \Phi_0 - \Psi_0$) в направлении φ_0 . Необходимые законы распределения чисто реактивного импеданса (реактанса) полос (3) $Z_E = iX_E(x), Z_M = iX_M(x)$ и их ориентацию α на плоскости S , обеспечивающие максимумы диаграмм рассеяния в направлении $\varphi = \varphi_0$, можно найти непосредственно из подынтегральных выражений для диаграмм рассеяния (13), которые с учетом (7) примут вид

$$F_{H\perp}(\varphi) = \frac{k}{4}(\sin\varphi + \sin\varphi_0) \times \int_{-L}^L P_{12}(x) \exp(i\chi(x, \varphi)) dx; \quad (14)$$

$$F_H(\varphi) = F_{shH}(\varphi) + F_{H\parallel}(\varphi) = \frac{k}{4} \int_{-L}^L U(x, \varphi) \Delta^{-1} \exp(i\chi(x, \varphi)) dx, \quad (15)$$

где $U(x, \varphi) = \{(\sin\varphi - \sin\varphi_i)\Delta + (\sin\varphi + \sin\varphi_0)P_{22}\Delta\}; \chi(x, \varphi) = kx(\cos\varphi + \cos\varphi_i)$.

Подынтегральные выражения в формулах (14) и (15) представляют собой в общем случае быстро осциллирующие функции. Очевидно, что максимальная амплитуда отраженной волны в заданном направлении может быть достигнута за счет такого выбора реактансов, при которых в (14) и (15) будут выполняться условия:

$$\begin{cases} U(x, \varphi_0) \Delta^{-1} \exp(i\chi(x, \varphi_0)) = H_0 \exp(i\Psi_0); \\ 2 \sin\varphi_0 P_{12}(x) \exp(i\chi(x, \varphi_0)) = E_0 \exp(i\Phi_0). \end{cases} \quad (16)$$

Равенства (16) в подынтегральных выражениях (14) и (15) означают, что реактансная структура (см. рис. 1) создает в заданном направлении $\varphi = \varphi_0$ однородную плоскую волну. Это система двух комплексных уравнений относительно четырех неизвестных действительных функций: $X_E(x), X_M(x), \alpha(x)$ и H_0 .

Исследования [23] показывают, что отражение на согласной поляризации только однородной плоской волны возможно лишь для углов $\varphi_0 = \varphi_i$ и $\varphi_0 = \pi - \varphi_i$. При этом ее амплитуда равна амплитуде падающей волны $H_0 = H_0^i$.

Отраженная однородная плоская волна только на крессовой поляризации (твист-эффект) возможна [25] в любом направлении, но с амплитудой $E_0 = \sqrt{\sin\varphi_i/\sin\varphi_0} H_0^i$. Ориентация полос в этом случае оказывается переменной величиной $\alpha(x)$. Система (16) для реактансной структуры (3), поворачивающей плоскость поляризации отраженной волны на произвольный угол (E_0 и $H_0 \neq 0$) в заданном направлении ($\varphi_0 \neq \varphi_i$ и $\varphi_0 \neq \pi - \varphi_i$), строгого решения не имеет [33].

Рассмотрим приближенное решение системы (16). Условия возникновения отраженных лучей на обеих поляризациях в направлении $\varphi = \varphi_0$ можно получить и непосредственно из равенства только аргументов в формулах (16):

$$\begin{cases} \arg(U(x, \varphi_0)) - \arg\Delta + \chi(x, \varphi_0) = \Psi_0; \\ \arg(P_{12}) + \chi(x, \varphi_0) = \Phi_0, \end{cases} \quad (17)$$

где $\arg(P_{12}) = \pi/2 - \arg\Delta$.

Это система двух действительных уравнений, и из нее можно найти только две действительные функции, $X_E(x)$ и $X_M(x)$. В этом случае неизвестный угол $\alpha(x)$ либо необходимо задавать, либо находить из дополнительных условий, например, из условия получения максимальной амплитуды отраженного в заданном направлении поля. Параметры Υ и H_0 в уравнениях не входят и поэтому будут неконтролируемыми. В результате амплитуда H_0 отраженной волны на импедансной поверхности ($|U(x, \varphi_0) \Delta^{-1}|$) будет функцией координаты $x (H_0(x))$, т.е. отраженная волна окажется неоднородной. Поскольку мы синтезируем поляризатор с заданным параметром Υ , то эту систему следует дополнить еще одним уравнением, содержащим Υ . Так, разделив в системе (16) одно уравнение на другое, получим еще одно комплексное уравнение:

$$2 \sin\varphi_0 P_{12}(x) \Delta = \Upsilon \exp(i\Delta\Psi) U(x, \varphi_0). \quad (18)$$

Выражения (17), (18) представляют собой систему четырех действительных уравнений относительно

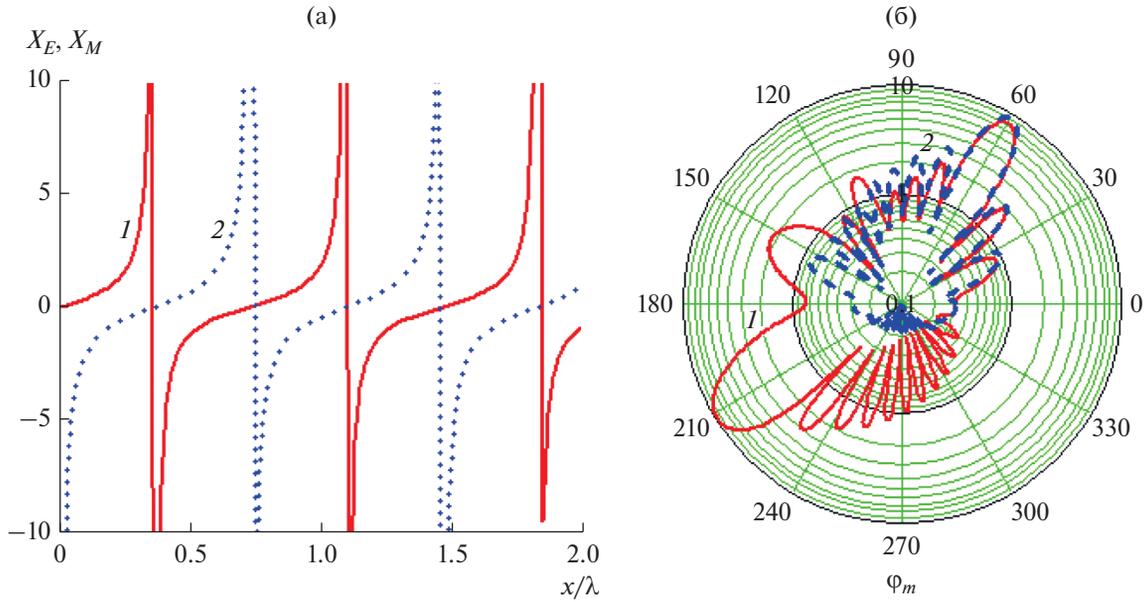


Рис. 2. Распределения (а) $X_E(x)$ (кривая 1) и $X_M(x)$ (кривая 2) и диаграммы рассеяния Fh_m (кривая 1) и Fe_m (кривая 2) (б) для $\varphi_i = 30^\circ$, $\varphi_0 = 60^\circ$, $\Delta\Psi = 0$, $\alpha(x) = 22.6^\circ$ и $\Upsilon = 1$.

но трех неизвестных действительных функций $X_E(x)$, $X_M(x)$, $\alpha(x)$:

$$\begin{cases} -\frac{2}{\Upsilon} \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \alpha (X_M - X_E) \cos \Delta\Psi = \\ = (\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \varphi_0) X_M + (1 - \sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \alpha) X_E; \\ \sin 2\alpha (X_M - X_E) \sin \Delta\Psi = \Upsilon (1 + X_M X_E); \\ (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \varphi_i \sin \varphi_0) X_E + \\ + (\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin \varphi_i \sin \varphi_0) X_M = \\ = -\operatorname{ctg} \Delta\Psi (\sin \varphi_i + \sin \varphi_0 X_E X_M); \\ (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_0) X_E + (\operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \varphi_0) X_M = \\ = -\sin \varphi_0 (1 - X_M X_E) \operatorname{ctg} (\chi - \Delta\Psi). \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом, система (19) оказывается переопределенной, ее можно решить приближенно – методом “обмена” Штифеля [35].

В качестве примера рассмотрим два частных случая: отраженное поле имеет линейную поляризацию и имеет круговую поляризацию. Поскольку задача синтеза здесь решена приближенно, то диаграммы рассеяния получены строго [36] (методом интегральных уравнений) для фрагмента импедансной структуры длиной L (см. рис. 1).

1. *Линейная поляризация* – $\Delta\Psi = 0$. В соответствии с [35] получим приближенную взаимосвязь между реактансами полос, дающую равную невязку (разность между их решениями) решений второго и третьего уравнений системы (19):

$$X_M = -\frac{1 + \sin \varphi_i}{1 + \sin \varphi_0} \frac{1}{X_E}. \quad (20)$$

Из первого уравнения системы (19) с учетом (20) найдем ориентацию системы полос на плоскости в допущении, что она фиксирована $\alpha(x) = \operatorname{const}$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha \approx \frac{\Upsilon (1 + \sin^2 \varphi_0)}{2 \sin \varphi_0}. \quad (21)$$

В результате из четвертого уравнения (17) найдем искомые значения реактанса полос:

$$X_E = \sqrt{\frac{(1 + \sin \varphi_i)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi_0)}{(1 + \sin \varphi_0)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_0)}} \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}. \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрим синтез реактансной структуры, поворачивающей параллельно поляризованную падающую под углом $\varphi_i = 30^\circ$ волну на 45° ($\Upsilon = 1$), переотражая ее в направлении $\varphi_0 = 60^\circ$. Законы распределения $X_E(x)$ и $X_M(x)$ приведены на рис. 2а, а диаграммы рассеяния для фрагмента плоскости $L = 6$ с такой структурой – на рис. 2б. В соответствии с (21) угол α в этом случае равен 22.6° . Здесь кривая 1 соответствует диаграмме на согласной поляризации $Fh(\varphi)$, а кривая 2 – крессовой $Fe(\varphi)$.

Для структуры с заданными $\varphi_i = 60^\circ$, $\varphi_0 = 30^\circ$ и $\Upsilon = 1$ на рис. 3а приведены распределения реактанса, а на рис. 3б – диаграммы рассеяния.

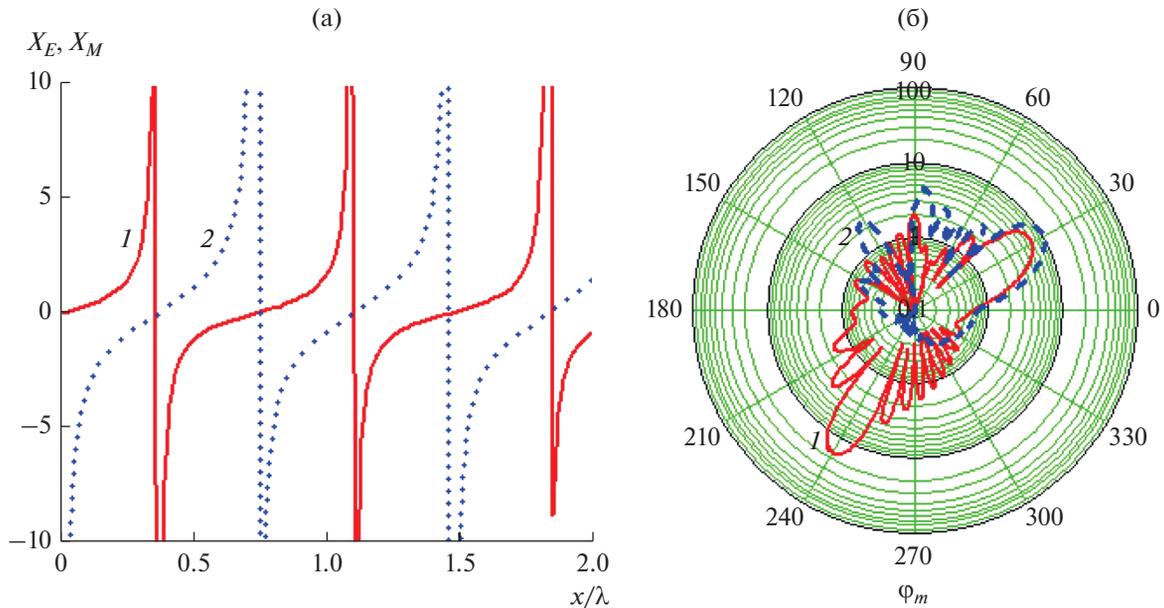


Рис. 3. Распределения (а) $X_E(x)$ (кривая 1) и $X_M(x)$ (кривая 2) и диаграммы рассеяния Fh_m (кривая 1) и Fe_m (кривая 2) (б) для $\varphi_i = 60^\circ$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $\alpha = 25.7^\circ$ и $\Upsilon = 1$.

Анализ полученных результатов показывает, что помимо основного лепестка в отраженном поле появляются ярко выраженные дополнительные лепестки. В первом случае (см. рис. 2) это зеркальный лепесток на согласной поляризации. Во втором случае (см. рис. 3) – зеркальный лепесток на кросс-поляризации и лепесток на обеих поляризациях в направлении, близком к нормали ($\varphi \approx 90^\circ$).

2. *Круговая поляризация* – $\Delta\Psi = \pi/2$, $\Upsilon = 1$. В системе уравнений (19) положим $\Psi_0 = 0$; $\Phi_0 = \Delta\Psi$. Из первого и третьего уравнений системы (19) для угла ориентации реактансных полос получим [32] следующее решение:

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{\sin \varphi_0 (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_i) X_M - 2X_E}{2X_M - \sin \varphi_0 (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_i) X_E}. \quad (23)$$

Закон распределения реактансов полос можно найти из второго и четвертого уравнений (21).

$$X_E = \frac{-((\sin \varphi_0 + \sin \varphi_i) \cos \chi + \Upsilon \sin \chi) + \sqrt{(\Upsilon^2 + 1)(1 + 2 \sin \varphi_0 \sin \varphi_i \cos^2 \chi)}}{(\sin \chi - \Upsilon (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_i) \cos \chi)},$$

$$X_M = \frac{\Upsilon + X_E}{1 - \Upsilon X_E}.$$

На рис. 4а–4в приведены результаты синтеза структуры по заданным параметрам $\varphi_i = 30^\circ$, $\varphi_0 = 60^\circ$, $\Delta\Psi = 90^\circ$, $\alpha(x) = 45^\circ$ и $\Upsilon = 1$.

При этом $X_E(x)$, $X_M(x)$ являются функциями координаты x импедансной плоскости. В соответствии с (23) угол $\alpha(x)$ также является переменной величиной. Приближенное решение для постоянной ориентации реактансных полос ($\alpha = \text{const}$) примет [32] вид

$$\text{tg}^2 \alpha = 1. \quad (24)$$

Таким образом, если для постоянной ориентации полос в случае линейной поляризации эта величина зависит от угла φ_0 (см. (21)), то для круговой поляризации вне зависимости от углов падения и отражения система имеет постоянную ориентацию на плоскости, равную $\alpha = \pi/4$. Из (23), строго говоря, это решение следует только при углах $\varphi_i = \varphi_0 = \pi/2$.

С учетом (20) из второго и четвертого уравнений системы (19) для реактанса получим

Как видим, диаграммы на согласной и кроссовой поляризациях практически полностью совпадают в секторе $\pm 60^\circ$ относительно основного ле-

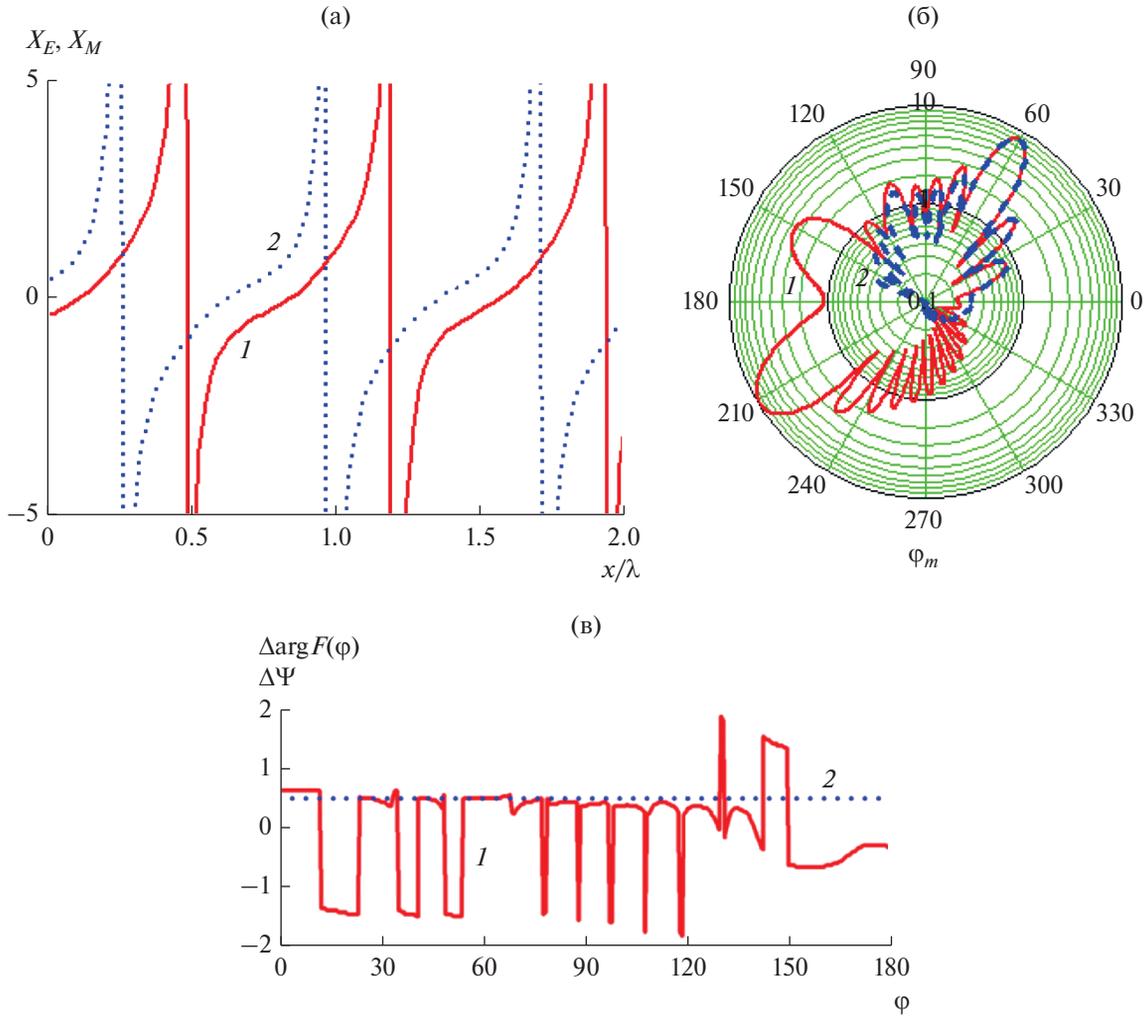


Рис. 4. Распределения (а) $X_E(x)$ (кривая 1) и $X_M(x)$ (кривая 2), диаграммы рассеяния Fh (кривая 1) и Fe (кривая 2) (б) и разность фаз диаграмм рассеяния $\Delta \arg F(\phi) = \frac{\arg(Fe) - \arg(Fh)}{\pi}$ (кривая 1), $\Delta \Psi$ (кривая 2) (в) структуры с параметрами $\phi_i = 30^\circ$, $\phi_0 = 60^\circ$, $\Delta \Psi = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ и $\Upsilon = 1$.

пестка $\phi_0 = 60^\circ$. Кроме того, разность фаз (см. рис. 4в) между ними в этом же секторе составляет $\Delta \Psi = 90^\circ$ (скачки кривой равны 2π). Следовательно, отраженное поле в секторе углов $0^\circ \dots 120^\circ$ имеет круговую поляризацию. Вместе с тем на согласной поляризации наблюдается зеркальный луч (см. рис. 4а и 4б).

На рис. 5а–5в приведены результаты синтеза структуры с параметрами $\phi_i = 60^\circ$, $\phi_0 = 30^\circ$, $\Delta \Psi = 90^\circ$, $\alpha(x) = 45^\circ$ и $\Upsilon = 1$. И в данном случае в отраженном поле на обеих поляризациях появляются неконтролируемые лепестки. Причем в направлении нормали амплитуда дополнительного лепестка становится соизмеримой с уровнем основного. На согласной поляризации появляются

дополнительно еще и лепестки в направлениях 120° и 150° .

Отраженное поле в секторе углов $\phi_0 \pm 60^\circ$ ($-30^\circ \dots 110^\circ$) имеет круговую поляризацию (амплитуды лучей на обеих поляризациях одинаковы, а сдвиг фаз $\Delta \Psi$ равен 90°) (см. рис. 5в).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, впервые решена задача синтеза анизотропной реактансной структуры, ориентированной под фиксированным углом, переотражающей падающую линейно поляризованную волну в заданном направлении на требуемой поляризации. Получены выражения для коэффициентов отражения. В явном виде найдены компоненты

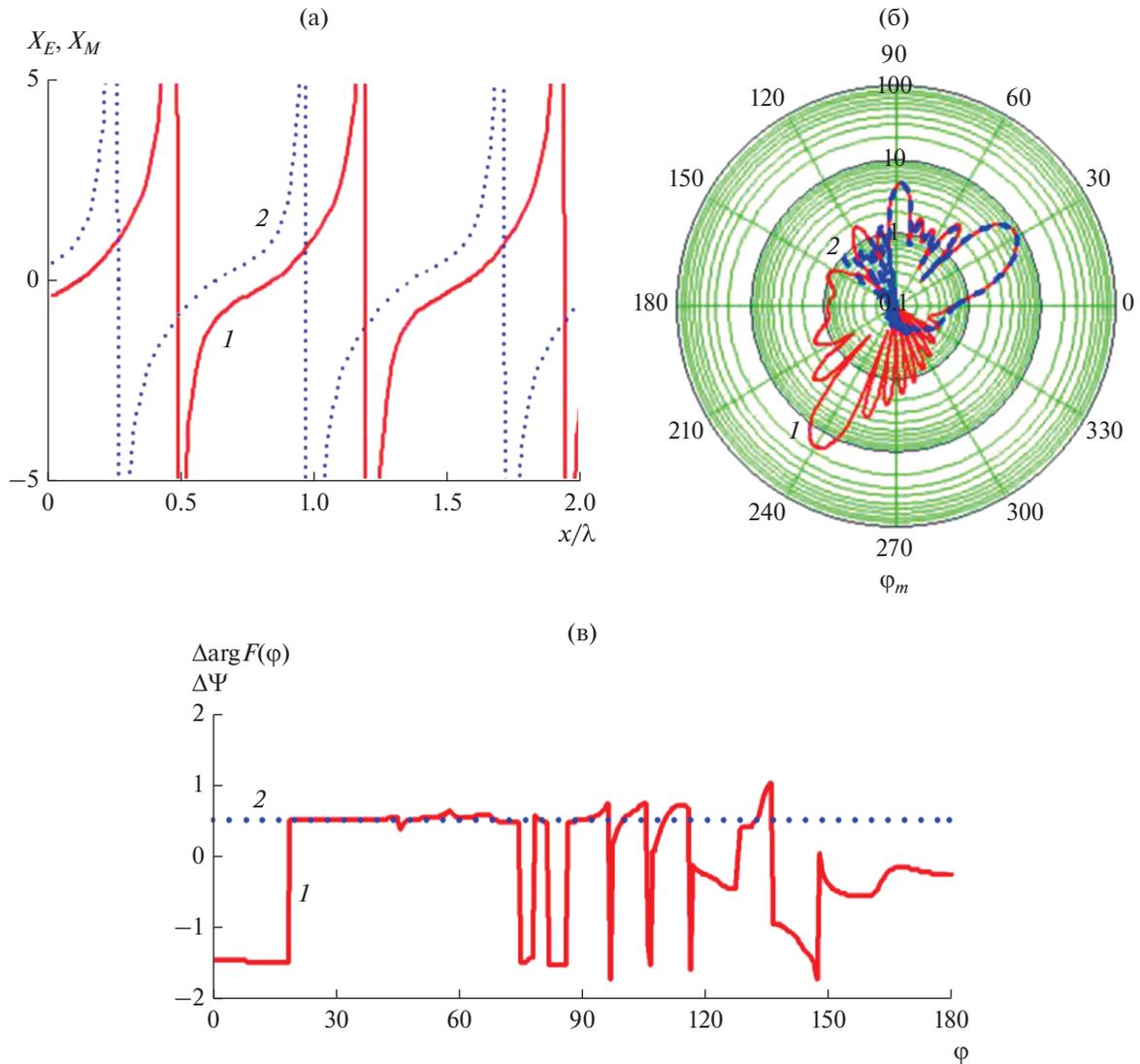


Рис. 5. Распределения (а) $X_E(x)$ (кривая 1) и $X_M(x)$ (кривая 2), диаграммы рассеяния Fh (кривая 1) и Fe (кривая 2) (б) и разность фаз диаграмм рассеяния $\Delta \arg F(\varphi) = \frac{\arg(Fe) - \arg(Fh)}{\pi}$ (кривая 1), $\Delta \Psi$ (кривая 2) (в) структуры с параметрами $\varphi_i = 60^\circ$, $\varphi_0 = 30^\circ$, $\Delta \Psi = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ и $\Upsilon = 1$.

тензора анизотропного импеданса. Найден класс реализуемых с помощью реактансной структуры диаграмм рассеяния. Предложенные решения дают высокую точность в основном и ближайших боковых лепестках. При $\varphi_i < \varphi_0$ в секторе углов $\varphi_0 \pm 60^\circ$. Вне этих углов могут появляться неконтролируемые лепестки значительной амплитуды. Показано, что если необходимо получить результаты в более широком секторе углов, то необходимо решать задачу синтеза по заданной диаграмме рассеяния в данном секторе с привлечением методов оптимизации. В этом случае предложенные решения могут выступать в качестве первого приближения решения задачи. Как показали много-

численные расчеты при $\varphi_i < \varphi_0$ точность предложенных решений достаточна.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10537). Исследования проведены в Центре коллективного пользования “Прикладная электродинамика и антенные измерения” (<http://aedam.rtf.sfedu.ru/>) Южного федерального университета при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomas T.L.* // Proc. 40th Conf. Electronic Components and Technology. Las Vegas. 20–23 May 1990. N.Y.: IEEE, 1990. V. 1. P. 131.
2. *Klingler E.H.* Tunable Absorber. Pat. US 3309704A. Publ. 14.03.1967.
3. *Warren K.A.J.* Reducing Reflections of Electromagnetic Signals. UK Patent The General Electric Co pls. № 84109479. Publ. 19.8.98.
4. *Chambers B.* // Smart Mater. Struct. 1999. № 1. P. 1.
5. *Chambers B., Ford K.L.* // Electron. Lett. 2000. V. 36. № 15. P. 1304.
6. *Schindler J.K., Mack R.B., Blacksmith P., Jr.* // Proc. IEEE. 1965. V. 53. P. 993.
7. *Harrington R., Mautz J.* // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. № 4. P. 446.
8. *Петров Б.М., Семенухин А.И.* // Зарубеж. радиоэлектрон. 1994. № 6. С. 9.
9. *Kasyanov A.O., Obukhovets V.A.* // Антенны. 2001. № 4. С. 4.
10. *Whites K.W., Mittra R.* // Digest Antennas and Propagation Society Int. Symp. “Merging Technologies for the 90’s”. Dallas. 7–11 May. 1990. N.Y.: IEEE, 1990. V. 2. P. 870.
<https://doi.org/10.1109/APS.1990.115246>
11. *Smith P.D., Rawlins A.D.* // Proc. 15th Int. Conf. on Electromagnetics in Advanced Appl. (ICEAA). Turin. 9–13 Sept. 2013. N.Y.: IEEE, 2013. P. 1297
<https://doi.org/10.1109/ICEAA.2013.6632459>
12. *Miller M.A., Talanov V.I.* // Radiophysics. 1961. V. 4. № 5. С. 795.
13. *Кравченко В.Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. М.: Физматлит, 2006.
14. *Lawrie R.E., Peters L.* // IEEE Trans. 1966. V. AP-14. № 6. P. 798.
15. *Short J.R., Chen K.M.* // IEEE Trans. 1969. V. AP-17. № 3. P. 315.
16. *Терешин О.Н.* // РЭ. 1963. Т. 6. № 1. С. 65.
17. *Ерохин Г.А., Кочержевский В.Г.* // РЭ. 1974. V. 19. № 1. P. 30.
18. *Чаплин А.Ф., Аксельрод А.М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 12. С. 1905.
19. *Чаплин А.Ф., Кондратьев А.С.* // РЭ. 1977. Т. 22. № 3. С. 505.
20. *Петров Б.М., Шарварко В.Г.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1975. Т. 18. № 9. С. 90.
21. *Петров Б.М., Шарварко В.Г.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1979. Т. 22. С. 1.
22. *Петров Б.М., Юханов Ю.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1980. Т. 23. № 9. С. 59.
23. *Юханов Ю.В.* // РЭ. 2000. Т. 45. № 4. С. 404.
24. *Semenikhin A.I.* // Антенны. 2001. № 4. P. 20.
25. *Yukhanov Y.V.* // 4th Intern. Conf. on Antenna Theory and Techniques. Sevastopol. 9–12 Sept. 2003. N.Y.: IEEE, 2003. V. 1. P. 121.
<https://doi.org/10.1109/ICATT.2003.1239164>
26. *Yukhanov Y.V., Privalova T.Y.* // Proc. Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC). Seoul 5–8 Nov. 2013. N.Y.: IEEE, 2013. P. 582.
<https://doi.org/10.1109/APMC.2013.6694871>
27. *Захарьев Л.Н., Леманский А.А.* Рассеяние волн “черными” телами. М.: Сов. радио, 1972.
28. *Doumanis E., Goussetis G., Gomez-Tornero J.L. et al.* // Proc. 5th Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EUCAP). Rome 11–15 Apr. 2011. N.Y.: IEEE, 2011. P. 1666.
29. *Doumanis E., Goussetis G., Gomez-Tornero J.L. et al.* // IEEE Trans. 2012. V. AP-60. № 1. P. 212.
30. *Kärkkäinen K., Stuchly M.* // IEE Proc. Microwave and Antennas Propagation. 2002. V. 149. № 5. P. 248.
31. *Niemi T., Karilainen A., Tretyakov S.* // IEEE Trans. 2013. V. AP-61. № 6. P. 3102.
32. *Yukhanov Y.V., Privalova T.Y.* // Proc. 24th Telecommunications Forum (TELFOR). Belgrade. 22–23 Nov. 2016. N.Y.: IEEE, 2016. P. 7818848.
<https://doi.org/10.1109/TELFOR.2016.7818848>
33. *Privalova T.Yu.* // Proc. 2016 IEEE 5th Asia-Pacific Conf. on Antennas and Propagation (APCAP). Kaohsiun. 26–29 July 2016. N.Y.: IEEE, 2016. P. 233.
<https://doi.org/10.1109/APCAP.2016.7843185>
34. *Курушин Е.П., Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т.* Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах. М.: Наука, 1975.
35. *Stiefel E.I.* // Numerische Mathematik. 1959. V. 1. S. 1.
36. *Юханов Ю.В., Климов А.В.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1989. Т. 32. № 11. С. 86.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

ЭВРИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ
НА СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

© 2020 г. С. Е. Банков^{а, *}, М. В. Весник^{а, **}, В. Ф. Кравченко^а

^аИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: sbankov@yandex.ru

**E-mail: vesnik@cplire.ru

Поступила в редакцию 12.11.2019 г.

После доработки 12.11.2019 г.

Принята к публикации 19.11.2019 г.

Представлена численная реализация строгого решения по методу Винера–Хопфа задачи дифракции плоской волны на полуплоскости с обобщенными двухсторонними импедансными граничными условиями, которые описывают различные виды структур, в том числе тонкие сверхпроводящие слои с толщиной, сравнимой с толщиной скин-слоя. Получены выражения для рассеянного полуплоскостью поля в дальней зоне. Для строгого решения построена эвристическая формула, приближенно описывающая рассеянное поле. Показано, что эвристические соотношения качественно и во многих случаях количественно верно описывают характеристики рассеяния полуплоскости. Предложена физическая интерпретация строгого решения, основанная на полученных эвристических соотношениях.

DOI: 10.31857/S0033849420040014

ВВЕДЕНИЕ

Задачи рассеяния на полубесконечных структурах — клиньях, полуплоскостях и полупластинах — относятся к числу классических задач электродинамики. Несмотря на то что первая из них была решена около 100 лет назад [1], интерес к анализу подобных объектов не ослабевает до настоящего времени. Такие структуры являются ключевыми в том смысле, что их исследование позволяет объяснить процессы рассеяния электромагнитных волн в значительно более широком классе объектов, чем сами по себе идеализированные полубесконечные структуры. Интерес к ним обусловлен также рядом практически важных приложений, связанных с расчетом характеристик рассеяния сложных объектов. Оказывается, что основной вклад в рассеянное поле вносят острые кромки, входящие в структуру такого объекта. В ряде работ для них предложен специальный термин — центры рассеяния [2]. Для корректного их описания весьма полезными оказываются компактные и простые аналитические решения граничных задач для ключевых структур. Такие задачи можно по аналогии назвать ключевыми задачами [3].

Импедансные полуплоскости также относятся к числу традиционных ключевых задач электродинамики. Обычно под импедансной плоско-

стью/полуплоскостью понимают поверхность, на которой выполняются граничные условия Леонтовича [4]. Такая структура является непрозрачной. Она полностью отражает электромагнитные волны. Задачи дифракции на таких полуплоскостях решались начиная с 50-х годов XX в. Здесь уместно отметить работы Т. Сениора [5, 6].

Наряду с непрозрачными импедансными полуплоскостями известны полупрозрачные структуры, которые описываются двухсторонними импедансными граничными условиями (см., например, [7]). Они связывают поля на двух поверхностях бесконечно тонкой пленки при помощи одного параметра, который можно рассматривать в качестве поверхностного импеданса пленки. Такие структуры исследовались значительно менее интенсивно, чем их непрозрачные аналоги. Можно отметить решение задачи о дифракции на тонком слое диэлектрика [8], а также работу [9], в которой рассматривается полупрозрачная пленка, расположенная на поверхности диэлектрической пластины.

Следует сказать, что двухсторонние импедансные граничные условия [7] являются лишь частным случаем граничных условий, описывающих полупрозрачные структуры. Например, можно отметить граничные условия [10] на поверхности металлического слоя с конечной проводимостью. Назовем их обобщенными двухсторонними им-

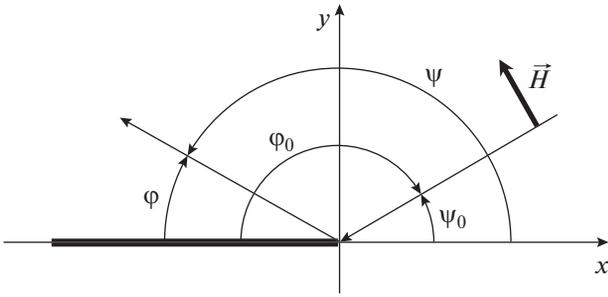


Рис. 1. Исследуемая структура.

педансными граничными условиями. Они, так же как и условия [7], связывают поля на двух поверхностях слоя, однако указанная связь описывается не одним, а двумя параметрами. Достоинством таких граничных условий является возможность с их помощью описать переход от слоя, толщина которого много меньше глубины скин-слоя, к слою с толщиной много большей указанной глубины. Интересно, что в первом предельном случае обобщенные граничные условия переходят в двухсторонние граничные условия, а в другом случае – в условия Леонтовича.

Обобщенные двухсторонние граничные условия приводятся в книге [11]. С их помощью удастся описать тонкий слой сверхпроводящего материала. Особенно ценно, что они дают возможность корректного описания динамики поведения сверхпроводящей структуры при переходе температуры через критическое значение.

Отметим, что обобщенные двухсторонние импедансные граничные условия могут использоваться не только для построения моделей проводящих и сверхпроводящих слоев, но и для описания более широкого класса объектов, содержащих такие структуры как слои магнито-диэлектриков, периодические структуры и т.д. Интерес к полупрозрачным импедансным структурам заметно вырос в последние годы, что связано с активным применением частотно-селективных экранов и подобных им структур [12], которые могут при определенных условиях описываться с помощью двухсторонних граничных условий.

Следует сказать, что граничные условия с двумя параметрами хорошо описывают только слои, обладающие определенной симметрией. Они должны иметь одинаковые свойства на обеих поверхностях. При отсутствии такой симметрии и при наличии невзаимных сред граничные условия наиболее общего вида включают четыре параметра. В данной работе мы ограничимся анализом симметричных структур.

Цель данной работы – исследование симметричной полупрозрачной полуплоскости с обобщенными двухсторонними импедансными гранич-

ными условиями на ее поверхностях. Основой исследования является работа [10], в которой решена задача о рассеянии плоской волны на такой полуплоскости. Решение получено строгим методом Винера–Хопфа [13] в виде интеграла Фурье. В нашей работе представлена численная реализация аналитического решения [10]. Далее на основе анализа строгого решения в работе предложены приближенные эвристические соотношения, которые с приемлемой для многих ситуаций точностью описывают поведение рассеянного полуплоскостью поля в дальней зоне.

1. ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО МЕТОДУ СИММЕТРИИ

Исследуемая структура показана на рис. 1. Задача двумерная, поле не зависит от координаты z . В двумерной структуре поле разделяется на электрические и магнитные волны, для которых граничная задача решается по отдельности. Оба решения аналогичны. Поэтому рассмотрим только случай электрических или E -волн. Такие волны имеют компоненты поля E_z, H_x, H_y .

На симметричной полуплоскости при $x < 0$, $y = 0$ выполняются обобщенные импедансные двухсторонние граничные условия:

$$\begin{aligned} -Z_1 H_x^+ + Z_2 H_x^- &= E_z^+, \\ -Z_2 H_x^+ + Z_1 H_x^- &= E_z^-, \end{aligned} \quad (1)$$

где $Z_{1,2}$ – импедансы полуплоскости, знак плюс соответствует полям на верхней поверхности, а минус – на нижней. Импеданс Z_1 описывает собственные свойства поверхности, а импеданс Z_2 – связь полей на разных сторонах полуплоскости.

Приведем граничные условия (1) для частного случая тонкого слоя металла с толщиной d , сравнимой с толщиной скин-слоя δ . Отметим, что они справедливы также для сверхпроводящих слоев [11]. Граничные условия имеют структуру, совпадающую с соотношениями (1). Параметры $Z_{1,2}$ в них описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{ikW_0\delta}{2} \left(\frac{1}{\text{th } d/2\delta} + \text{th } d/2\delta \right), \\ Z_2 &= \frac{ikW_0\delta}{2} \left(\frac{1}{\text{th } d/2\delta} - \text{th } d/2\delta \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где k, W_0 – волновое число и волновое сопротивление свободного пространства. Отметим, что соотношения (2) получены для зависимости от времени $\exp(i\omega t)$, ω – круговая частота.

Поле падающей волны зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{z0} &= e_0 \exp(ik_0x + i\gamma_0y), \\ \kappa_0 &= k \cos \psi_0, \quad \gamma_0 = k \sin \psi_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ψ_0 – угол падения плоской волны.

При решении граничной задачи учтем симметрию структуры относительно плоскости $y = 0$. Воспользуемся методом симметрии [14], последовательно решая две задачи – для четного и нечетного возбуждения. Отметим, что при четном возбуждении для $E_z^{\text{ч}}$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_z^{\text{ч}}(x, y) &= E_z^{\text{ч}}(x, -y), \\ H_x^{\text{ч}}(x, y) &= -H_x^{\text{ч}}(x, -y), \\ E_z^{\text{ч}} &= e_0 \exp i\kappa_0x \cos \gamma_0y, \end{aligned} \quad (4)$$

аналогично при нечетном возбуждении для поля $E_z^{\text{н}}$ получаем – соотношения

$$\begin{aligned} E_z^{\text{н}}(x, y) &= -E_z^{\text{н}}(x, -y), \\ H_x^{\text{н}}(x, y) &= H_x^{\text{н}}(x, -y), \\ E_z^{\text{н}} &= ie_0 \exp i\kappa_0x \sin \gamma_0y. \end{aligned} \quad (5)$$

Верхние индексы ч,н показывают соответствие данной величины четному или нечетному возбуждению. Нетрудно увидеть, что исходные поля связаны с четными и нечетными полями следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{z0} &= E_{z0}^{\text{ч}} + E_{z0}^{\text{н}}, \\ E_z(x, y) &= E_z^{\text{ч}}(x, y) + E_z^{\text{н}}(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (4), (5) позволяют связать поля на поверхностях полуплоскости при $y = \pm 0$:

$$E_z^{\text{ч,н}\pm} = \pm E_z^{\text{ч,н}\mp}, \quad H_x^{\text{ч,н}\pm} = \mp H_x^{\text{ч,н}\mp}, \quad (7)$$

где верхний знак берется для четного случая, а нижний для нечетного. Соотношения (7) позволяют получить из (1) два граничных условия для четного и нечетного возбуждения соответственно:

$$\begin{aligned} -Z_{\text{ч,н}} H_x^{\text{ч,н}} &= E_z^{\text{ч,н}}, \quad Z_{\text{ч}} = (Z_1 + Z_2)/2, \\ Z_{\text{н}} &= (Z_1 - Z_2)/2. \end{aligned} \quad (8)$$

Оба условия (8) получены для поля на верхней поверхности. Поэтому индекс “плюс” в них опущен. Отметим, что граничные условия (8) выполняются при $x < 0, y = 0$. Из соотношений (4), (5) следует, что при четном возбуждении при $x > 0, y = 0$, равно нулю тангенциальное магнитное поле, а при нечетном возбуждении тангенциальное электрическое:

$$H_x^{\text{ч}} = 0, \quad E_z^{\text{н}} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, при четном возбуждении мы имеем при $x > 0, y = 0$ магнитную стенку, а при нечетном возбуждении – электрическую. Можно сделать вывод, что решение исходной граничной задачи с использованием метода симметрии свелось к анализу двух парциальных структур. В них поле существует только в верхнем полупространстве. При $x < 0, y = 0$ выполняются граничные условия Леонтовича (8), а при $x > 0, y = 0$ граничные условия (9). Возбуждаются парциальные структуры полями $E_{z0}^{\text{ч,н}}$.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО МЕТОДУ ВИНЕРА–ХОПФА

Вывод интегральных уравнений для полубесконечных структур и переход к функциональным уравнениям многократно описаны в литературе, а также в цитированной работе [10], поэтому подробно останавливаться на нем не имеет смысла. Перейдем к численной реализации решения, основным этапом которого является факторизация двух функций $G^{\text{ч,н}}(\kappa)$:

$$\begin{aligned} G^{\text{ч,н}}(\kappa) &= G_+^{\text{ч,н}}(\kappa)G_-^{\text{ч,н}}(\kappa), \\ G^{\text{ч}}(\kappa) &= \left(1 + \frac{ikW_0}{\gamma Z^{\text{ч}}}\right)Z^{\text{ч}}, \quad G^{\text{н}}(\kappa) = \left(1 + \frac{ikW_0}{Z^{\text{н}}\gamma}\right)\gamma, \\ \gamma &= \sqrt{\kappa^2 - k^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где k – волновое число, W_0 – сопротивление свободного пространства, индексы \pm означают, что данная функция регулярна соответственно в верхней или нижней полуплоскости комплексного аргумента.

Отметим, что факторизация функции γ осуществляется элементарно [13]. Поэтому мы можем свести факторизацию функций $G(\kappa)$ к факторизации функции $K(\kappa)$ при помощи, используя следующие соотношения:

$$\begin{aligned} G(\kappa) &= Z \frac{K(\kappa)\gamma_e}{L(\kappa)\gamma}, \quad K(\kappa) = \left(\frac{\gamma}{\gamma_e} + \frac{ikW_0}{Z\gamma_e}\right)L(\kappa), \\ L(\kappa) &= \begin{cases} \kappa^2 + \alpha_0^2, & \text{при} \\ \kappa^2 - \kappa_0^2, & \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{Re}\left(\frac{iW_0}{Z}\right) < 0 \wedge \text{Im}\left(\frac{iW_0}{Z}\right) = 0, & \\ 1, & \text{в других случаях,} \end{cases} \\ \chi_0 &= \sqrt{k^2 + \left(\frac{ikW_0}{Z}\right)^2}, \quad \gamma_e = \sqrt{\kappa^2 + \xi^2} \end{aligned} \quad (11)$$

(здесь индексы ч, н опущены). Еще раз отметим, что факторизация сомножителей $L(\kappa), \gamma, \gamma_e$ эле-

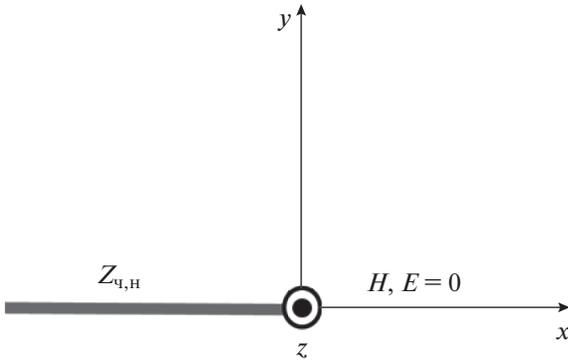


Рис. 2. Парциальные структуры.

ментарно находится аналитически. Для требуемого представления функции $K(\kappa)$ воспользуемся теоремой о факторизации [13]:

$$K_{\pm}(\kappa) = \exp\left(\pm \frac{\kappa}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\ln K(\alpha)}{\alpha^2 - \kappa^2} d\alpha\right). \quad (12)$$

Формула (12) записана с учетом четности функции $K(\kappa)$.

Численно взять интеграл из (12) невозможно, так как он имеет особенности на контуре интегрирования. Для исключения этих особенностей, а также для улучшения сходимости интеграла на бесконечности мы использовали эквивалентные преобразования:

$$K_{\pm}(\kappa) = \exp\left(\pm \frac{\kappa}{\pi i} \int_0^{\alpha_m} \left(\frac{\ln K(\alpha) - Q(\alpha) \ln K(\kappa)}{\alpha^2 - \kappa^2} - \frac{ikW_0}{Z(\alpha^2 + \alpha_2^2)^{3/2}}\right) d\alpha + q_{1\pm}(\kappa) + q_{2\pm}(\kappa)\right), \quad (13)$$

$$Q(\alpha) = \frac{\kappa^2 + \alpha_1^2}{\alpha^2 + \alpha_1^2},$$

$$q_{1\pm}(\kappa) = \pm \frac{i(\kappa \mp i\alpha_1)}{2\alpha_1} \ln K(\kappa), \quad q_{2\pm}(\kappa) = \pm \frac{\kappa k W_0}{Z\pi\alpha_2^2}.$$

Постоянные $\alpha_{0,1,2}, \xi$ выбираются произвольным образом из соображений удобства численных расчетов. Слагаемое, пропорциональное $\ln K(\kappa)$, устраняет особенности подынтегральной функции в точках $\alpha = \pm\kappa$, второе слагаемое под интегралом улучшает скорость сходимости несобственного интеграла на бесконечности, что позволяет нам заменить бесконечный предел конечным α_m . Таким образом, соотношение (13) пригодно для численных расчетов.

Рассеянное полуплоскостью поле представляется интегралом Фурье:

$$E_z^u = -\frac{ikW_0e_0^u}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikx - \gamma y) d\kappa}{i(\kappa + \kappa_0)G_-^u(\kappa)G_+^u(-\kappa_0)\gamma}, \quad (14)$$

$$E_z^H = -\frac{e_0^H}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikx - \gamma y) d\kappa}{i(\kappa + \kappa_0)G_-^H(\kappa)G_+^H(-\kappa_0)}.$$

Последний этап решения состоит в определении рассеянного поля в дальней зоне. Для этого целесообразно использовать цилиндрические координаты, изображенные на рис. 1. Декартовы координаты x, y связаны с ними известным образом:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi. \quad (15)$$

Для применения к соотношениям (14) метода перевала введем замену переменной:

$$\kappa = k \cos \alpha, \quad \gamma = ik \sin \alpha. \quad (16)$$

С учетом (15), (16) преобразуем выражения для полей (14):

$$E_z^u = \frac{W_0e_0^u}{2\pi i} \times \int_C \frac{\exp(-ikr \cos(\psi - \alpha)) d\alpha}{(\cos \alpha + \cos \psi_0)G_-^u(k \cos \alpha)G_+^u(-k \cos \psi_0)}, \quad (17)$$

$$E_z^H = -\frac{e_0^H k \sin \psi_0}{2\pi i} \times \int_C \frac{\sin \alpha \exp(-ikr \cos(\psi - \alpha)) d\alpha}{(\cos \alpha + \cos \psi_0)G_-^H(k \cos \alpha)G_+^H(-k \cos \psi_0)}.$$

При $kr \rightarrow \infty$ подынтегральные функции имеют точку стационарной фазы при $\alpha = \psi$, что позволяет приближенно взять интегралы в (17):

$$E_z^u = \frac{W_0e_0^u}{\sqrt{2\pi ikr}} \times \frac{\exp(-ikr)}{(\cos \psi + \cos \psi_0)G_-^u(k \cos \psi)G_+^u(-k \cos \psi_0)}, \quad (18)$$

$$E_z^H = -\frac{e_0^H k}{\sqrt{2\pi ikr}} \times \frac{\sin \psi_0 \sin \psi \exp(-ikr)}{(\cos \psi + \cos \psi_0)G_-^H(k \cos \psi)G_+^H(-k \cos \psi_0)}.$$

Соотношения (18) дают решение граничных задач для парциальных структур (рис. 2). Решение для исходной задачи находится из выражений (6).

3. ЭВРИСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ИМПЕДАНСНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Математически строгое решение отражает комплексное воздействие на решение всех параметров постановки задачи. Численные решения не имеют аналитических выражений. Форма аналитического

решения зачастую бывает громоздкой, при этом влияние отдельных факторов неразлично.

В отличие от математически строгих подходов, эвристические формулы основаны на физических принципах [15–18]. Эвристическая формула представляет собой гипотезу о поведении решения на основе нашего понимания физики процесса и известных аналитических решений простейших задач. Наличие математически строгого решения не делает бесполезным применение аналитических эвристических формул, потому что они помогают лучше разобраться в физике решения. Эвристические формулы позволяют выразить зависимость от физических характеристик в наиболее компактной и понятной форме. В отличие от математически строгих формул, эвристические формулы нуждаются в верификации при помощи решения, точность которого известна.

Функциональная зависимость от условий задачи компактно входит в эвристические формулы в явном виде. С физической точки зрения граничные условия удобно описывать коэффициентами отражения и прохождения R и T , наглядно выражающими взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. К задаче физической интерпретации результатов относится выявление факторов влияния условий задачи на те или иные характеристики решения.

При взаимодействии волны с безграничной поверхностью с граничными условиями (1), (8) коэффициенты отражения и прохождения R и T определяются так:

$$R = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{Z_n q_0}{k W_0}}{1 + \frac{Z_n q_0}{k W_0}} + \frac{1 - \frac{Z_q q_0}{k W_0}}{1 + \frac{Z_q q_0}{k W_0}} \right), \quad (19)$$

$$T = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{Z_n q_0}{k W_0}}{1 + \frac{Z_n q_0}{k W_0}} - \frac{1 - \frac{Z_q q_0}{k W_0}}{1 + \frac{Z_q q_0}{k W_0}} \right).$$

Здесь $W_0 = 120\pi$, $q_0 = k \sin(\psi_0)$, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $Z_q = iX_q$, $Z_n = iX_n$ (X_q и X_n – действительные параметры, характеризующие величину реактивных импедансов Z_q и Z_n). Отметим, что для R и T выполняется соотношение $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Если в (19) выполняется условие

$$X_q = X_n, \quad (20)$$

то при любых значениях X_q имеем:

$$T = 0, \quad |R| = 1, \quad R = \exp(i \arg R), \quad \ln(R) = i \arg R. \quad (21)$$

Этот случай соответствует сверхпроводящему слою, толщина которого существенно превышает толщину скин-слоя. При этих условиях сверхпроводящий слой становится непрозрачным, а на его поверхностях выполняются условия Леонтовича. Построим эвристическое решение задачи дифракции на полуплоскости (1) при выполнении условия (20).

Для удобства представления результатов введем вспомогательную переменную β :

$$\beta = 1 - \exp\left(-\frac{X_q}{2W_0}\right). \quad (22)$$

В то время как $0 < X_q < \infty$, вспомогательная переменная меняется в пределах $0 < \beta < 1$.

Из строгого решения задачи дифракции на идеальной проводящей полуплоскости [17–19] можно получить дифракционные коэффициенты:

для TM - и TE -полей соответственно

$$f(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) \quad (23)$$

$$g(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right).$$

Обозначения TM и TE характеризуют перпендикулярность кромке векторов магнитного и электрического полей соответственно.

В работах [17, 18, 20] в рамках концепции метода базовых компонентов (МБК) была рассмотрена эвристическая формула обобщенного дифракционного коэффициента (ОДК), основанного на дифракционных коэффициентах (23) и на коэффициентах отражения и прохождения для безграничной поверхности R и T

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - T}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{R}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right). \quad (24)$$

Первое слагаемое в правой части (24) можно условно сопоставить с рассеянием падающего поля на кромке, второе слагаемое – с рассеянием отраженного поля [17]. Для поверхности с идеальными граничными условиями имеет место $T = 0$ и $R = -1$ (TM) или $R = 1$ (TE), причем эти значения не зависят от угла падающей волны. Нетрудно видеть, что подстановка этих значений в (24) приведет к выражениям (23).

При подстановке в (24) других значений R и T получим эвристическую формулу для дифракционного коэффициента полуплоскости с неидеальными граничными условиями. В отличие от ди-

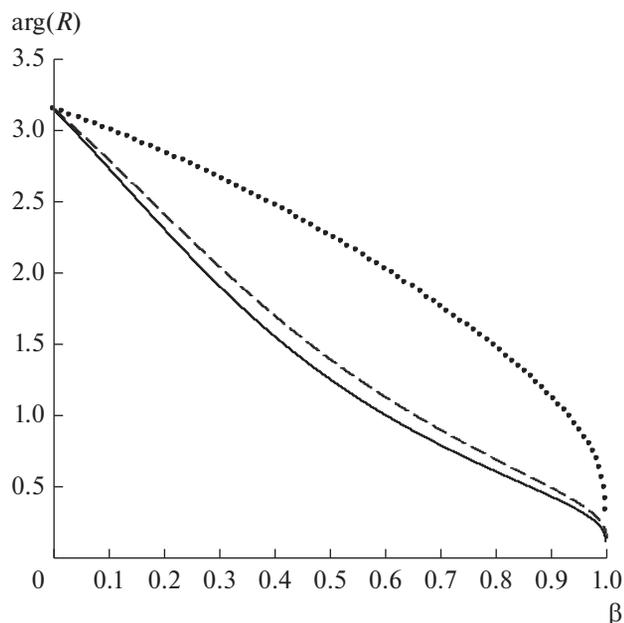


Рис. 3. График функции $\arg(R)$ при $\psi_0 = 90^\circ$ (сплошная кривая), 120° (штриховая) и 160° (пунктирная).

фракционных коэффициентов (23), формула (24) не является строгой, поэтому нуждается в верификации для каждого вида граничных условий. В рамках МБК, помимо верификации, проводят еще и настройку, т.е. коррекцию эвристической формулы с целью повышения ее точности до необходимых значений.

Следует отметить, что эвристические формулы, аналогичные (24), применялись в работах [21–23] и др. Однако в отличие от МБК в этих работах отсутствовала процедура настройки, что не позволяло проводить дальнейшее увеличение точности решения.

В данной работе проведена верификация и настройка эвристической формулы (24) с коэффициентом отражения (21) для ряда углов падения и ряда значений параметра X_q . Исследуя численные результаты, сравнивая их с результатами счета по эвристической формуле (24) и проводя коррекцию этой формулы, можно осуществить настройку эвристической формулы и провести физическую интерпретацию численного решения.

Геометрия задачи рассеяния на полуплоскости поляризованного TM -поля показана на рис. 1. Полуплоскость расположена в области отрицательных значений координаты x . Для удобства сравнения результатов данной работы с другими источниками введены две пары углов. Углы направления на источник и точки наблюдения φ_0 и φ отсчитываются в отрицательном направлении от

внутренней нормали к кромке. Углы направления на источник и точки наблюдения ψ_0 и ψ отсчитываются в положительном направлении от внешней нормали к кромке. Связь между углами характеризуется выражениями $\varphi_0 = \pi - \psi_0$ и $\varphi = \pi - \psi$.

Формальное применение формулы ОДК (24) не принесло желаемых результатов. Выяснилось, что формула ОДК плохо воспроизводит ноль амплитуды диаграммы рассеяния (ДР) из-за наличия у R мнимой части. При построении эвристических выражений для дифракционного коэффициента на основе выражения (24) следует принять во внимание, что $T = 0$ и $|R| = 1$, поэтому для выражения зависимости дифракционного коэффициента от свойств поверхности остается только функция $\arg(R)$ (21). График зависимости этой функции от вспомогательной переменной β показан на рис. 3 для случаев: $\psi_0 = 90, 120$ и 160 град. На первом этапе построения эвристических формул дополнительный множитель введен только ко второму слагаемому.

В процессе настройки эвристических формул на основе численного решения задачи дифракции (1) была получена следующая эвристическая формула для дифракционного коэффициента:

$$fgH(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1 - 2\arg(R)/\pi + C}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right). \quad (25)$$

Здесь C – функция входных параметров, не зависящая от φ и характеризующая поправку к множителю $[1 - 2\arg(R)/\pi + C]$, стоящему в (25), для заданного набора параметров (X_q, ψ_0). В большинстве случаев можно ограничиться эвристическим выражением без этой поправки (положив $C = 0$). Однако на участке изменения параметра X_q от 0 до ∞ значение множителя $[1 - 2\arg(R)/\pi + C]$ проходит через нулевую точку, и в окрестности этой точки добавка небольшой величины C может существенно уточнить значения диаграммы рассеяния.

Эвристическая формула (25) в будущем может быть уточнена за счет ее усложнения, однако физическую интерпретацию решения можно провести уже на данном этапе работы. Физическая интерпретация при помощи МБК не только позволяет дать аналитическое описание таких общих характеристик численного решения, как его поведение в окрестности сингулярностей, но и выявить тонкую структуру решения, а именно – его изменения в зависимости от параметров граничных условий.

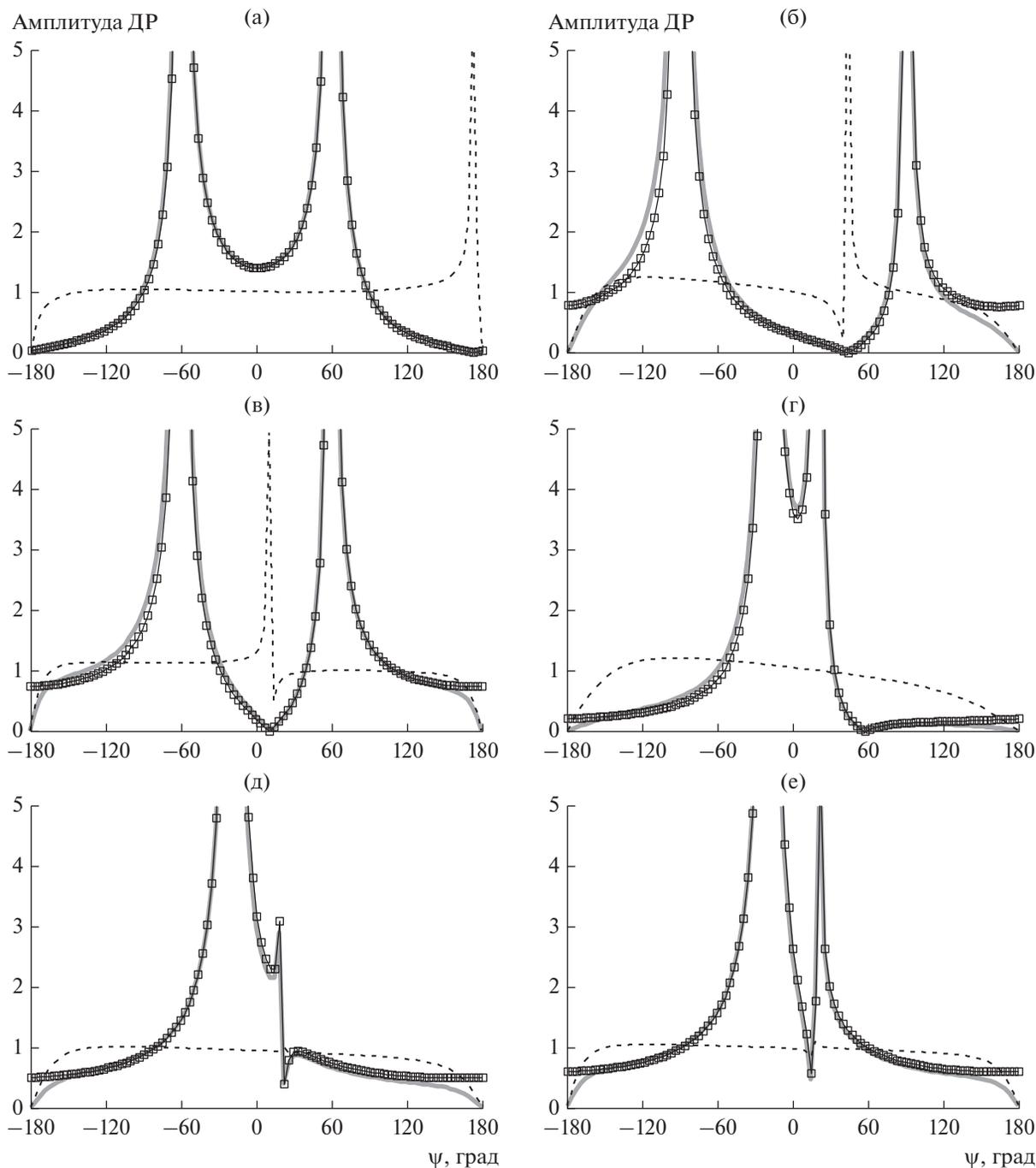


Рис. 4. Диаграммы рассеяния амплитуды численного решения (1) (сплошная кривая), амплитуды эвристического решения (25), нормированного для удобства сравнения (кривая с точками) и отношения амплитуд численного и эвристического решений (пунктир) при различных параметрах: а) $X_q = 20, \psi_0 = 120, C = 0$; б) $X_q = 800, \psi_0 = 90, C = 0$; в) $X_q = 2000, \psi_0 = 120, C = 0$; г) $X_q = 400, \psi_0 = 160, C = 0.0457$; д) $X_q = 1000, \psi_0 = 160, C = 0.011$; е) $X_q = 1400, \psi_0 = 160, C = -0.037$.

По мере изменения реактивного импеданса X_q поведение множителя из эвристической формулы (25) характеризуется следующим образом:

$$\begin{aligned} X_q \rightarrow 0: C = 0, \quad 1 - 2 \arg(R)/\pi + C &\rightarrow -1, \\ X_q \rightarrow \infty: C = 0, \quad 1 - 2 \arg(R)/\pi + C &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (26)$$

В точке, где множитель равен нулю, он меняет знак. В целом характер диаграммы рассеяния непрозрачной полуплоскости с реактивным импедансом постепенно меняется от $f(\varphi, \varphi_0)$ при $X_q \rightarrow 0$ к $g(\varphi, \varphi_0)$ при $X_q \rightarrow \infty$ (см. также выражения (23)).

На рис. 4 представлены результаты сравнения диаграмм рассеянного поля численного решения (1) и эвристического решения (25) для различных значений X_q и ψ_0 и при выполнении условия (20), а также отношение амплитуд численного и эвристического решений. Чем ближе это отношение к 1, тем лучше совпадают численное и эвристическое решения. Выбросы в графиках отношения амплитуд характеризуют неточность положения нуля эвристического решения относительно нуля численного решения и не свидетельствуют о сильном расхождении между ними.

Рассмотрим диаграммы рассеяния для случая $C = 0$ (см. рис. 4а–4в). При $X_q = 20$ численное решение практически совпадает с дифракционным коэффициентом $f(\varphi, \varphi_0)$ (3), при $X_q = 2000$ численное решение практически совпадает с дифракционным коэффициентом $g(\varphi, \varphi_0)$ (3), случай $X_q = 800$ представляет собой промежуточный вариант решения.

Диаграммы рассеяния для случая $C \neq 0$ показаны на рис. 4г–4е. Коррекцию множителя $[1 - 2\arg(R)/\pi + C]$ пришлось проводить в связи с тем, что чувствительность решения к значению параметра C возрастала. Это происходило из-за того, что значения множителя для соответствующих комбинаций входных параметров (X_q, ψ_0) были близки к нулю. Несмотря на стремление множителя к нулю, совпадение численного и эвристического решений в окрестности этих точек можно считать хорошим.

Таким образом, мы получили достаточно простую эвристическую аналитическую формулу, пригодную для описания тонких особенностей решения и позволившую провести его физическую интерпретацию.

Полученное в данной работе эвристическое решение для дифракционного коэффициента импедансной полуплоскости (25) значительно отличается от полученных ранее эвристических формул для полупрозрачной полуплоскости с реактивным импедансом [18, 20]. В данных работах показано, что по мере того как реактивный импеданс изменяется от 0 к ∞ , характер диаграммы рассеяния полупрозрачной полуплоскости постепенно меняется от $f(\varphi, \varphi_0)$ к $f^0(\varphi, \varphi_0)$, где $f^0(\varphi, \varphi_0)$ – дифракционный коэффициент решения соответствующей задачи в приближении физической оптики [17–20].

Таким образом, в задаче дифракции на полупрозрачной полуплоскости [20] амплитуда диаграммы рассеяния зависит только от амплитуды коэффициента отражения R , а в задаче дифракции на непрозрачной полуплоскости (25) – только от фазы R . И, что очень важно, оба эти эвристических решения получили существенные отличия от пер-

воначальной формулы (24) после процедуры настройки.

Цель применения МБК состоит не в том, чтобы получить как можно больше аналитических решений для новых типов граничных условий. Для большинства задач реально получить только численные решения, что связано с быстрым развитием компьютерной техники и вычислительных методов, в то время как развитие аналитических методов происходит гораздо медленнее. Поэтому получать новые строгие аналитические решения становится все сложнее, а новые численные решения – все проще.

Задача МБК состоит в том, чтобы разработать универсальную (т.е. для разных типов задач и не зависящую от способа верификации) методику получения простых и физически ясных эвристических аналитических формул на основе численных, строгих аналитических решений или экспериментальных результатов. Такие формулы могут оказаться критически важными в практических задачах при необходимости увеличения быстродействия компьютерного вычислителя, при необходимости увеличения максимального размера рассеивателя, который можно исследовать, для проведения физической интерпретации численного решения или при необходимости решения обратных задач [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sommerfeld A.* // Math. Ann. 1896. V. 47. P. 317.
2. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
3. *Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т.* Полосковые линии передачи. М.: Наука, 1980.
4. *Леонтович М., Левин М.* // ЖТФ. 1944. Т. 14. С. 481.
5. *Senior T.B.A.* // Proc. Roy. Soc. A. 1952, V. 213. № 1115. P. 436.
6. *Senior T.B.A.* // Radio Sci. 1975. V. 10. № 6. P. 645.
7. *Банков С.Е.* Интегральная СВЧ-оптика. М.: Физматлит, 2018.
8. *Курушин Е.П., Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т.* Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах. М.: Наука, 1975.
9. *Банков С.Е.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 10. С. 1002.
10. *Senior T.B.A.* // Radio Sci. 1975. V. 10. № 10. P. 911.
11. *Кравченко В.Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. М.: Физматлит, 2006.
12. *Munk B.* Frequency Selective Surfaces: Theory and Design. N.-Y.: John Wiley, 2000.
13. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

14. *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ. М.: Высш. школа, 1988.
15. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
16. *Kravtsov Y.A., Ning Yan Zhu.* Theory of Diffraction: Heuristic Approaches. Oxford: Alpha Sci. Intern. Ltd., 2010.
17. *Vesnik M.V.* The Method of the Generalized Eikonal. New Approaches in the Diffraction Theory. Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015.
18. *Весник М.В.* // СМФН. 2016. Т. 6. С. 32.
19. *Уфимцев П.Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962.
20. *Весник М.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1103.
21. *Raman C.V., Krishnan K.S.* // Proc. Roy Soc. Lond. A. 1927. V. 116. P. 254.
22. *Shmoys J.* // IRE Trans. on Antennas and Propagation. 1959. V. 7. № 5. P. 88.
23. *El-Sallabi H.M., Rekanos I.T., Vainikainen P.* // IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett. 2002. V. 1. P. 165.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.4;519.6

АЛГОРИТМЫ ГИБРИДНОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ РАДИАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ДИПОЛЕМ

© 2020 г. Е. И. Семерня^а, С. П. Скобелев^{а, б, *}

^аМосковский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация

^бПАО “Радиофизика”,
ул. Героев Панфиловцев, 10, Москва, 125363 Российская Федерация

*E-mail: s.p.skobelev@mail.ru

Поступила в редакцию 16.04.2019 г.

После доработки 16.04.2019 г.

Принята к публикации 23.04.2019 г.

Рассмотрена задача возбуждения тела вращения, состоящего из однородной диэлектрической сферы и внешнего неоднородного диэлектрического слоя, магнитным диполем, расположенным на оси вращения. Разработаны алгоритмы решения, основанные на гибридном проекционном методе, включающем проектирование электромагнитных полей на поперечные сферические функции и применение одномерного метода конечных элементов для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритмы также обобщены на случай идеально проводящей внутренней сферы. Приведены результаты сравнения, характеризующие эффективность метода, а также результаты расчета диаграммы направленности диполя в присутствии проводящей сферы, окруженной неоднородной диэлектрической оболочкой в форме вытянутого сфероида в одном случае и плазменной оболочкой такой же формы в другом.

DOI: 10.31857/S0033849420040087

ВВЕДЕНИЕ

Задача рассеяния электромагнитных волн на неоднородных диэлектрических телах вращения представляет большой интерес для моделирования линзовых антенн, биологических образований в медицине, осадков в метеорологии и радиолокационных целей, включая возвращаемые космические аппараты, метеоритные следы и струи от ракетных двигателей.

В общем случае эта задача в строгой постановке может быть решена только численными методами. К таким методам относятся проекционные методы [1–3], метод конечных элементов [4, 5], метод, основанный на слоистой модели неоднородного тела с однородными слоями, с последующим применением метода интегральных уравнений для эквивалентных токов на поверхностях слоев [6], и метод интегральных уравнений для токов поляризации [7, 8].

Цель данной работы – разработка алгоритма решения задачи на основе гибридного проекционного метода (ГПМ), примененного ранее к электродинамическому анализу неоднородных

сфер и цилиндров [9, 10]. Такой подход представляет интерес, так как он обладает некоторыми потенциальными преимуществами, отмеченными в [9, 10], по сравнению с методами, перечисленными выше. Далее рассмотрен случай возбуждения тела вращения радиальным магнитным диполем, расположенным на оси вращения вблизи поверхности тела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Продольное сечение диэлектрического тела вращения, расположенного в свободном пространстве в декартовых координатах x, y, z и сферических координатах r, θ, φ , показано на рис. 1. Тело состоит из однородной сферы радиусом a_1 и относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_1 с центром, расположенным в начале координат. Указанная сфера окружена неоднородным внешним слоем с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(r, \theta)$. Неоднородность слоя может проявляться также и отличием его внешней поверхности от сферической поверхно-

сти. Относительная магнитная проницаемость сферы и неоднородного слоя считается равной единице.

Здесь мы предполагаем, что рассматриваемое тело возбуждается радиальным магнитным диполем, расположенным на оси вращения z на расстоянии r_0 от начала координат. Цель задачи – определить поле, излученное диполем в присутствии тела, включая диаграмму направленности (ДН) диполя, и определить поле внутри тела.

Так как поле диполя является осесимметричным, а диполь – магнитным, то ненулевыми составляющими векторного поля остаются только азимутальная составляющая напряженности электрического поля E_φ , радиальная составляющая напряженности магнитного поля H_r и меридиональная составляющая напряженности магнитного поля H_θ . Указанные составляющие должны удовлетворять уравнениям Максвелла:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = -i\omega\epsilon_0 \hat{\epsilon} E_\varphi, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta E_\varphi)}{\partial \theta} = i\omega\mu_0 H_r - j_r^m, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = i\omega\mu_0 H_\theta, \quad (3)$$

где ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные свободного пространства соответственно, $\hat{\epsilon}$ – относительная диэлектрическая проницаемость соответствующей области,

$$j_r^m(r, \theta, \varphi) = I^m l \frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta - 0)\delta(\varphi - 0)}{r^2 \sin\theta} \quad (4)$$

– плотность магнитного тока диполя с дипольным моментом, определяемым магнитным током I^m и длиной l , и ω – круговая частота в гармонической зависимости полей от времени, взятой в виде $\exp(-i\omega t)$.

Определяя H_r и H_θ из (2) и (3) и подставляя их в (1), получим уравнение

$$\frac{\partial^2(rE_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(rE_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} \right] + k^2 \hat{\epsilon} r E_\varphi = -\frac{\partial j_r^m}{\partial \theta}, \quad (5)$$

где $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda$ – волновое число (λ – длина волны в свободном пространстве).

Введем в рассмотрение сферу радиусом a с центром, расположенным в начале координат, которая охватывает рассматриваемое тело и диполь, как показано на рис. 1, и рассмотрим уравнение (5) в областях $r \geq a$, $a_1 \leq r \leq a$ и $0 \leq r \leq a_1$. В первой области $\hat{\epsilon} = 1$, а правая часть в (5) равна

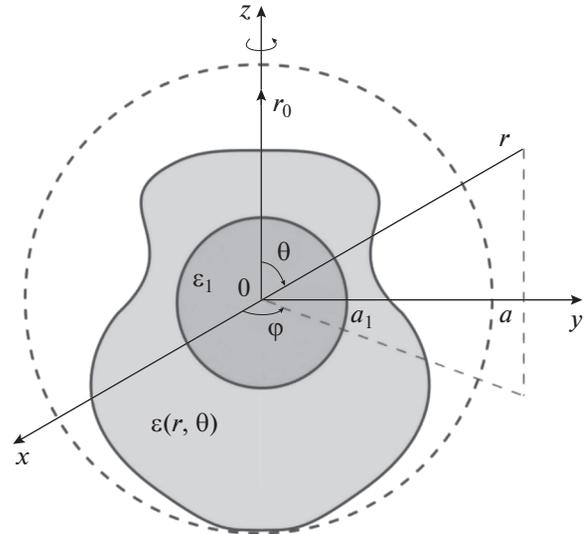


Рис. 1. Неоднородное диэлектрическое тело вращения, возбуждаемое радиальным диполем.

нулю. Уравнение (5) в этом случае решается хорошо известным методом разделения переменных [11, с. 81–82], применяя который можно записать решение в виде суперпозиции сферических волн, расходящихся от рассеивателя:

$$E_\varphi(r, \theta) = \frac{E_0}{kr} \sum_{q=1}^{\infty} R_q \zeta_q(kr) T_q(\theta), \quad (6)$$

где R_q – неизвестные коэффициенты, $\zeta_q(kr)$ – функции Риккати–Ханкеля первого рода,

$$T_q(\theta) = \sqrt{\frac{2q+1}{2q(q+1)}} P_q^1(\cos\theta) \quad (7)$$

– ортонормированные поперечные функции, определяемые присоединенными функциями Лежандра $P_q^1(\cos\theta)$ [11], и

$$E_0 = \frac{ik^2 I^m l}{4\pi} \quad (8)$$

– множитель, через который поле диполя в дальней зоне можно определить по формуле

$$E_{\varphi\infty}(r, \theta) = E_0 \frac{\exp(ikr)}{kr} \exp(-ikr_0 \cos\theta) \sin\theta. \quad (9)$$

Решение уравнения (5) для поля в центральной области, не содержащей источников и где $\hat{\epsilon} = \epsilon_1$, может быть записано в виде разложения

$$E_\varphi(r, \theta) = \frac{E_0}{kr} \sum_{q=1}^{\infty} B_q \psi_q(k_1 r) T_q(\theta), \quad (10)$$

где B_q – неизвестные коэффициенты, $\psi_q(k_1 r)$ – функции Риккати–Бесселя и $k_1 = k\sqrt{\epsilon_1}$.

Решение уравнения (5) для поля в области $a_1 \leq r \leq a$, где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(r, \theta)$ внутри слоя и $\hat{\varepsilon} = 1$ вне слоя, будем искать в виде разложения

$$E_\varphi(r, \theta) = E_0 \sum_{q=1}^{\infty} E_q(r) T_q(\theta) \quad (11)$$

по поперечным функциям (7) с неизвестными переменными коэффициентами $E_q(r)$.

Электрические поля (6), (10) и (11), а также соответствующие поперечные магнитные поля, определяемые из уравнения (3), должны быть непрерывными на сферических поверхностях при $r = a_1$ и $r = a$. Проектирование указанных граничных условий на поперечные функции (7) с весом $\sin\theta$ дает следующие соотношения для коэффициентов разложения:

$$B_p \Psi_p(k_1 a_1) - k a_1 E_p(a_1) = 0, \quad (12)$$

$$\left. \frac{d[rE_p(r)]}{dr} \right|_{r=a_1} = \sqrt{\varepsilon_1} B_p \Psi'_p(k_1 a_1), \quad (13)$$

$$k a E_p(a) - R_p \zeta_p(k a) = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{d[rE_p(r)]}{dr} \right|_{r=a} = R_p \zeta'_p(k a), \quad (15)$$

где $p = 1, 2, \dots$.

Электрическое поле (11) должно удовлетворять уравнению (5). Подставляя (11) в (5) и проектируя (5) на поперечные функции (7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 U_p}{dr^2} - \frac{p(p+1)}{r^2} U_p + k^2 \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} U_q = -i k A_p \delta(r - r_0), \quad (16)$$

где $U_q(r) = k r E_q(r)$,

$$W_{pq}(r) = \int_0^\pi \hat{\varepsilon}(r, \theta) T_p(\theta) T_q(\theta) \sin\theta d\theta, \quad (17)$$

$$A_p = \frac{\sqrt{2p+1} \sqrt{2p(p+1)}}{(k r_0)^2}, \quad (18)$$

и $p = 1, 2, \dots$

Решение уравнений (16) осуществляется аналогично работам [9, 10] с использованием одномерного метода конечных элементов. Согласно последнему решению ищем в виде разложения

$$U_q(r) = \sum_{n=1}^N U_{nq} f_n(r), \quad (19)$$

где U_{nq} — постоянные коэффициенты разложения, подлежащие определению, N — число узлов с координатами $r_n = a_1 + (n-1)\Delta$, $\Delta = (a - a_1)/(N-1)$, и

$f_n(r)$ — треугольные функции [12] с вершинами в указанных узлах. Следующая операция состоит в проектировании (16) на треугольные функции $f_n(r)$. Интегрирование первого слагаемого в (16) по частям и учет (13) и (15) сводит (16) к следующим алгебраическим уравнениям:

$$-\sqrt{\varepsilon_1} \Psi'_p(k_1 a_1) B_p \delta_{n1} + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^{\infty} Z_{n'n}^{pq} U_{nq} + \zeta'_p(k a) R_p \delta_{n'N} = -i A_p f_n(r_0), \quad (20)$$

где $\delta_{n'n}$ — символ Кронекера и

$$Z_{n'n}^{pq} = I_{n'n}^{(1)} - [q(q+1)I_{n'n}^{(2)} + I_{n'n}^{(3)}] \delta_{pq} \quad (21)$$

— матричные элементы, определяемые интегралами

$$I_{n'n}^{(1)} = k \int_{a_1}^a f_n f_n W_{pq} dr, \quad (22)$$

$$I_{n'n}^{(2)} = \frac{1}{k} \int_{a_1}^a \frac{f_n f_n}{r^2} dr, \quad (23)$$

$$I_{n'n}^{(3)} = \frac{1}{k} \int_{a_1}^a \frac{df_n}{dr} \frac{df_n}{dr} dr \quad (24)$$

для $n' = 1, 2, \dots, N$.

Уравнение (12), где $k a_1 E_p(a_1) = U_{1p}$, уравнение (20) и уравнение (14), где $k a E_p(a) = U_{Np}$, образуют полную систему линейных алгебраических уравнений, размер которой после усечения равен $(N+2)L$, где L — число учитываемых меридиональных гармоник в (6), (10) и (11). Как и в работах [10, 12], матрица системы имеет блочную трехдиагональную структуру. После решения системы мы можем рассчитать поля в центральной области и неоднородном слое, а также поле, излученное в свободное пространство. В частности, используя асимптотическое выражение $\zeta_q(kr) \approx (-i)^{q+1} \exp(ikr)$ для функций Риккати—Ханкеля при больших kr и представляя поле (6) в форме (9), мы можем рассчитать ДН диполя в присутствии тела вращения

$$F(\theta) = \sum_{q=1}^L (-i)^{q+1} R_q T_q(\theta), \quad (25)$$

как множитель, стоящий после произведения $E_0 \exp(ikr)/(kr)$.

2. МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА

Если магнитный диполь оказывается вне сферы, введенной для решения задачи, т.е. если $r_0 > a$, то алгоритм, описанный выше, может быть модифицирован следующим образом. Полное

поле в свободном пространстве вне указанной сферы вместо (6) представляется в виде

$$E_\varphi(r, \theta) = \frac{E_0}{kr} \sum_{q=1}^{\infty} [A_q^- \psi_q(kr) + R_q \zeta_q(kr)] T_q(\theta), \quad (26)$$

где

$$A_q^- = -A_q \zeta_q(kr_0) \quad (27)$$

— соответствует полю диполя, падающему на сферу.

Соотношения (14) и (15), следующие из граничных условий, должны быть заменены формулами

$$kaE_p(a) - R_p \zeta_p(ka) = A_p^- \psi_p(ka), \quad (28)$$

$$\frac{d[rE_p(r)]}{dr} \Big|_{r=a} = A_p^- \psi_p'(ka) + R_p \zeta_p'(ka), \quad (29)$$

правая часть в уравнении (16) должна быть равна нулю, а правые части в уравнениях (20), которые должны решаться совместно с (8) и (28), должны иметь вид $-A_p^- \psi_p'(ka) \delta_{n'N}$.

Наконец, ДН (25) должна быть модифицирована как

$$F(\theta) = \exp(-ikr_0 \cos \theta) \sin \theta + \sum_{q=1}^{\infty} (-i)^{q+1} R_q T_q(\theta), \quad (30)$$

где первое слагаемое в правой части — ДН диполя в отсутствие тела.

Вторая модификация связана со случаем, когда вместо диэлектрической сферы внутри тела находится идеально проводящая сфера. Электрическое поле в слое (11) в этом случае должно быть равно нулю на поверхности сферы, т.е. $E_p(a_1) = 0$. Это условие исключает уравнение (12) из дальнейшего рассмотрения, а первая треугольная функция в разложении (19) должна быть также исключена. Это обстоятельство приводит к исключению первого слагаемого из уравнений (20). Координаты узлов, в которых расположены вершины треугольных функций, теперь будут определяться как $r_n = a_1 + n\Delta$, где $\Delta = (a - a_1)/N$ и $n = 1, 2, \dots, N$. В результате порядок усеченной системы алгебраических уравнений (20) и (14) становится равным $(N + 1)L$ вместо $(N + 2)L$ в предыдущем случае. После решения системы характеристики излучения диполя могут быть рассчитаны так же, как и в случае диэлектрической сферы.

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Алгоритм и его модификации, описанные выше, были реализованы в нескольких программах в среде МАТЛАБ. Вычисление интегралов (23) и (24), не зависящих от $\hat{\epsilon}$, проводилось с использо-

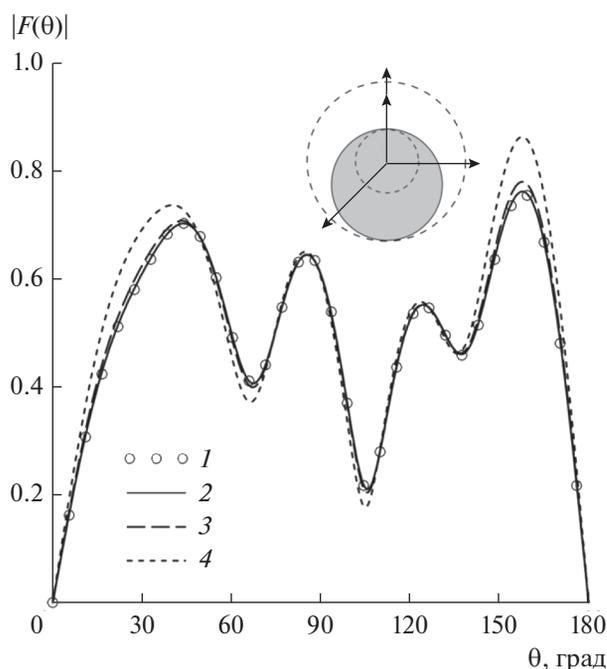


Рис. 2. Амплитудная ДН диполя в присутствии однородной диэлектрической сферы с параметрами $a_0 = 0.5\lambda$, $\epsilon = 5 + 0.2i$: 1 — расчет по строгой формуле (33) при учете $L = 17$ членов ряда (32), 2–4 — расчет ГПМ при $N = 41$ (2), 21 (3) и 11 (4). На вставке — геометрия задачи для смещения сферы.

ванием явных выражений, не приведенных здесь для краткости. Вычисление интеграла (22) проводилось с использованием разложения функции $W_{pq}(r)$ по треугольным функциям, как в (19), с последующим аналитическим интегрированием произведений указанных функций [13, Приложение 5.1]. Работа программ контролировалась несколькими способами, включая сравнение результатов с данными, полученными другими методами, применимыми к случаю слоя из однородного диэлектрика. Некоторые характерные результаты приведены ниже.

В качестве первого примера рассмотрим однородную диэлектрическую сферу (радиус a_0 и диэлектрической проницаемостью ϵ), возбуждаемую диполем, расположенным на расстоянии h от ее поверхности. Задача в этом случае имеет строгое аналитическое решение. В частности, ДН диполя может быть рассчитана согласно (30), где $r_0 = a_0 + h$,

$$R_q = -A_q^- \frac{m\psi_q'(m\alpha)\psi_q(\alpha) - \psi_q(m\alpha)\psi_q'(\alpha)}{m\psi_q'(m\alpha)\zeta_q(\alpha) - \psi_q(m\alpha)\zeta_q'(\alpha)}, \quad (31)$$

$m = \sqrt{\epsilon}$ и $\alpha = ka_0$. Сместим теперь эту сферу вниз из начала координат на расстояние z_0 , как показано во вставке на рис. 2, и применим ГПМ для решения задачи. Входные параметры задачи в этом случае определим следующим образом:

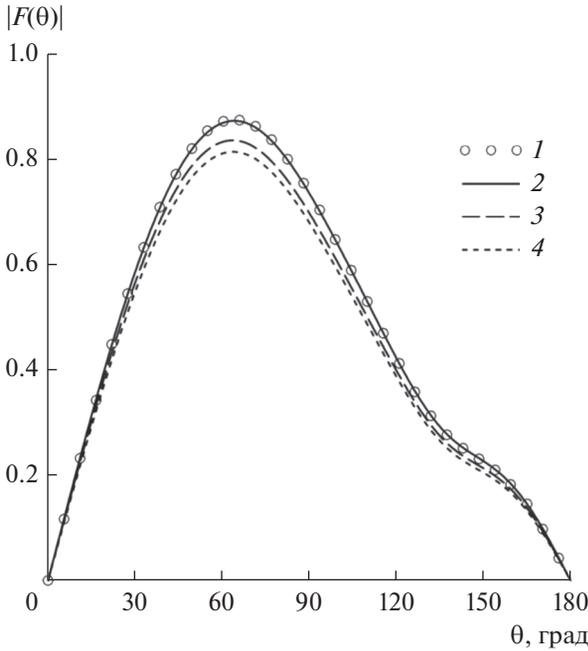


Рис. 3. Амплитудная ДН диполя в присутствии однородной плазменной сферы с параметрами $a_0 = 0.5\lambda$, $\epsilon = -5 + 0.2i$: 1 – расчет по строгой формуле (33) при учете $L = 17$ членов ряда (32), 2–4 – расчет ГПМ при $N = 41$ (2), 11 (3) и 7 (4).

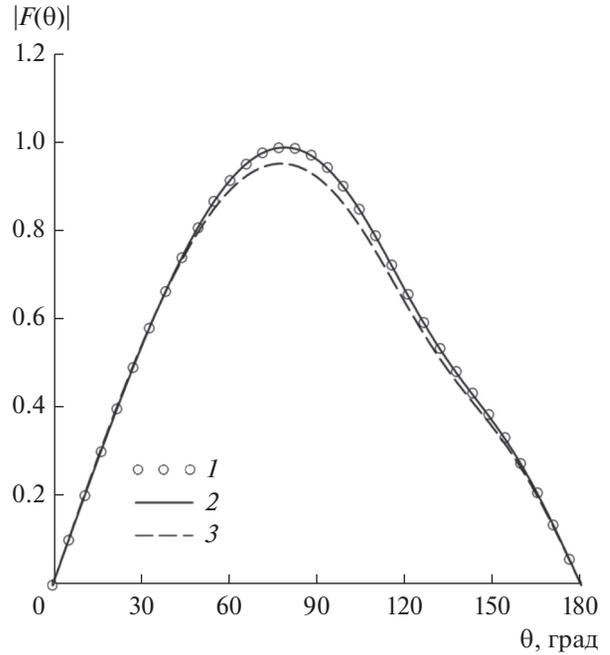


Рис. 4. Амплитудная ДН диполя в присутствии однородной плазменной сферы с параметрами $a_0 = 0.5\lambda$, $\epsilon = 0.4 + 0.2i$: 1 – расчет по строгой формуле (33) при учете $L = 17$ членов ряда (32), 2 и 3 – расчет ГПМ при $N = 11$ и 5 соответственно.

$a_1 = a_0 - z_0$, $a = a_0 + z_0$, $r_0 = a_1 + h$ и $\epsilon(r, \theta) = \epsilon_1 = \epsilon$. Интеграл (17) в этом случае определяется формулой

$$W_{pq} = \delta_{pq} + (\epsilon - 1)N_p N_q \int_{-1}^{x_r} P_p^1 P_q^1 dx, \quad (32)$$

где N_q – нормировочный коэффициент, указанный перед P_q^1 в (7), и

$$x_r(r) = \cos\theta_r = \frac{aa_1 - r^2}{(a - a_1)r} \quad (33)$$

– косинус угловой координаты точки на поверхности смещенной сферы, а интеграл от произведения присоединенных функций Лежандра вычисляется с использованием соотношений, которые мы вывели для неопределенных интегралов:

$$F_{p,q}^1 = \int P_p^1 P_q^1 dx = \frac{1}{p+q+1} \times \left[x P_p^1 P_q^1 + \frac{(q+1)P_{q-1}^1 P_p^1 - (p+1)P_{p-1}^1 P_q^1}{p-q} \right] \quad (34)$$

для $q \neq p$,

$$F_{p,p}^1 = \frac{(2p-1)(p+1)}{(2p+1)(p-1)} F_{p-1,p-1}^1 + \frac{p}{p-1} \left[\frac{2p-1}{2p+1} F_{p+1,p-1}^1 - F_{p,p-2}^1 \right] \quad (35)$$

для $p > 1$ и $F_{1,1}^1 = x(1 - x^2/3)$.

Амплитудная ДН диполя при $a_0 = 0.5\lambda$, $\epsilon = 5 + 0.2i$ и $h = 0.1\lambda$ была рассчитана с использованием строгой формулы (31) при учете $L = 17$ членов ряда (30), а также с применением ГПМ для сферы, смещенной вниз на расстояние $z_0 = 0.2\lambda$ (рис. 2). Входные параметры были заданы следующим образом: $a = a_0 + z_0 = 0.7\lambda$, $a_1 = a_0 - z_0 = 0.3\lambda$, $r_0 = 0.4\lambda$ и $\epsilon = \epsilon_1 = 5 + 0.2i$. Расчеты проведены с учетом $L = 17$ членов ряда (25) при числе треугольных функций N в (19), использованных на интервале $a - a_1 = 0.4\lambda$, равном 11, 21 и 41. Как видим, результаты, соответствующие ГПМ, сходятся к точному решению при увеличении N . Мы также наблюдаем, что ДН диполя имеет несколько лепестков, что объясняется проникновением поля диполя внутрь сферы с последующими переотражениями там.

Амплитудные ДН диполя в задаче с геометрическими параметрами, указанными выше, но для сферы с проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1 = -5 + 0.2i$, что соответствует плазме на частоте ниже плазменной частоты [14], и с проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1 = 0.4 + 0.2i$, соответствующей частоте, превышающей плазменную частоту, приведены на рис. 3 и 4 соответственно. Здесь также наблюдаем сходимость результатов, полученных предлагаемым методом при $L = 17$ и увеличении числа используемых треугольных функций N , к результатам точного решения. Однолепестковая форма ДН в этих случаях существенно отличается от предыдущего случая, что объясняется резким снижением уровня поля

внутри сферы при удалении точки наблюдения от ее поверхности. Аналогичную форму имеет ДН магнитного диполя в присутствии идеально проводящей сферы.

Второй пример соответствует магнитному диполю, расположенному над идеально проводящей сферой радиусом a_1 , расположенной внутри диэлектрического сфероида, один из фокусов которого совпадает с центром сферы, как показано во вставке на рис. 5. Размеры сфероида задаются его апофокусным расстоянием, совпадающим с радиусом внешней сферы a , и перифокусным расстоянием b . Указанные параметры определяют размер большой полуоси $a_e = (a + b)/2$ и фокусное расстояние $f_e = (a - b)/2$, через которые можно определить размер малой полуоси $b_e = \sqrt{a_e^2 - f_e^2} = \sqrt{ab}$. Будем считать, что проницаемость сфероида зависит только от радиальной координаты и зададим эту зависимость линейной функцией

$$\epsilon(r) = \frac{(\epsilon_a - \epsilon_{a_1})r + \epsilon_{a_1}a - \epsilon_a a_1}{a - a_1}, \quad (36)$$

где $\epsilon_{a_1} = \epsilon(a_1)$ и $\epsilon_a = \epsilon(a)$. Функция (17) в этом случае определяется формулой $W_{pq}(r) = \delta_{pq}\epsilon(r)$ для $a_1 \leq r \leq b$ и формулой (32) для $b \leq r \leq a$, где ϵ следует заменить на $\epsilon(r)$, а косинус угловой координаты точки на поверхности тела теперь определяется формулой

$$x_r = (p_e - r)/(x_e r), \quad (37)$$

полученной с использованием уравнения эллипса $r(\theta) = p_e/(1 + x_e \cos \theta)$, записанного в полярных координатах с полюсом в фокусе, где $p_e = b_e^2/a_e = 2ab/(a + b)$ – фокальный параметр и $x_e = f_e/a_e = (a - b)/(a + b)$ – эксцентриситет.

Амплитудные ДН диполя, соответствующие геометрическим параметрам $a_1 = 0.4\lambda$, $a = 1.5\lambda$, $b = 0.5\lambda$ и $r_0 = 0.7\lambda$, приведены на рис. 5. Задача для однородного сфероида может быть также решена, например, хорошо известным методом вспомогательных источников (МВИ) [14], представленных в виде осесимметричных кольцевых азимутальных электрических токов. Кольцевые источники в количестве 160×2 были расположены на софокусных сфероидальных вспомогательных поверхностях с размерами больших полуосей, равных $a_e \pm 0.05\lambda$. Кроме того, 40 кольцевых источников были расположены на сферической вспомогательной поверхности радиусом $a_1 - 0.05\lambda$ внутри центральной сферы. Угловые координаты источников на сфероидах задавались параметрически [15], что обеспечивало наиболее быстрое уменьшение невязки выполнения граничных условий, а на сфере – равномерно. Указанные параметры

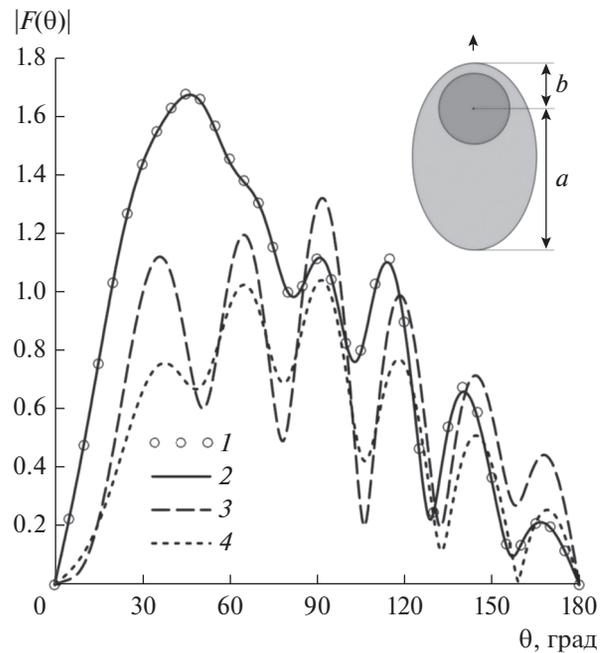


Рис. 5. Амплитудная ДН диполя в присутствии идеально проводящей сферы, расположенной внутри диэлектрического сфероида: 1 – $\epsilon_{a_1} = \epsilon_a = 5$, МВИ; 2 – $\epsilon_{a_1} = \epsilon_a = 5$, ГПМ, $L = 29$, $N = 51$; 3 – $\epsilon_{a_1} = 5$, $\epsilon_a = 1$; 4 – $\epsilon_{a_1} = 5 + 0.4i$, $\epsilon_a = 1$, ГПМ, $L = 29$, $N = 51$. На вставке – геометрия задачи для сферы внутри сфероида.

обеспечивали выполнение граничных условий на поверхности диэлектрического сфероида и на поверхности внутренней сферы с погрешностью, не превышающей 10^{-6} . ДН диполя, соответствующая МВИ, использовалась в качестве эталона. Кривая 2, совпадающая с 1, соответствует ГПМ с использованием $L = 21$ меридиональных гармоник и $N = 100$ треугольных функций. ДН 3, полученная ГПМ с использованием указанного количества гармоник и треугольных функций, соответствует неоднородному сфероиду без потерь с $\epsilon_{a_1} = 5$ и $\epsilon_a = 1$, а ДН 4 – сфероиду с потерями при $\epsilon_{a_1} = 5 + 0.4i$ и $\epsilon_a = 1$. Как видим, и неоднородный диэлектрик, и наличие потерь в этом случае может заметно влиять на форму ДН диполя.

Амплитудные ДН диполя, соответствующие геометрическим параметрам, указанным выше, но со сферой, находящейся внутри плазменного сфероида, приведены на рис. 6. Кривые, соответствующие однородному сфероиду с $\epsilon_{a_1} = \epsilon_a = -5 + 0.2i$, получены с использованием МВИ и ГПМ с входными параметрами, такими же, как и в предыдущем случае. Кривая 3, полученная с использованием ГПМ, соответствует неоднородному плазменному сфероиду с $\epsilon_{a_1} = -5 + 0.2i$ и $\epsilon_a = 1$. Результаты, полученные при исследовании влияния прони-

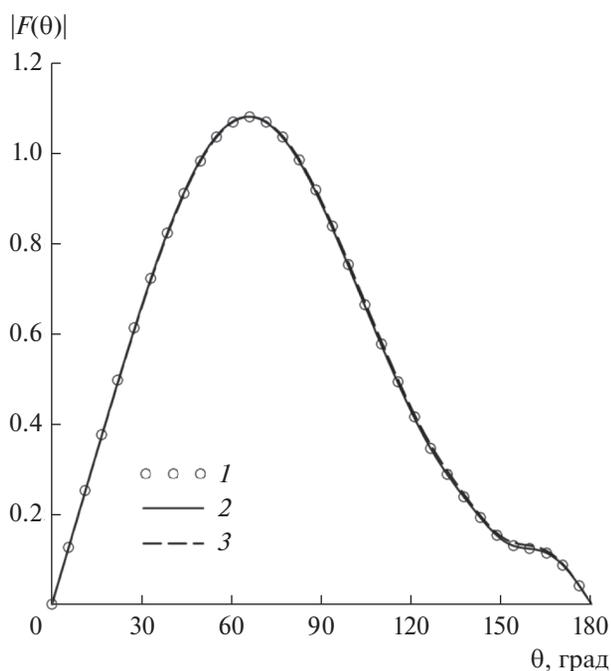


Рис. 6. Амплитудная ДН диполя в присутствии идеально проводящей сферы, расположенной внутри плазменного сфероида: 1 – $\epsilon_1 = \epsilon_a = -5$, МВИ; 2 – $\epsilon_1 = \epsilon_a = -5$, ГПМ, $L = 29$, $N = 51$; 3 – $\epsilon_1 = -5$, $\epsilon_a = 1$, ГПМ.

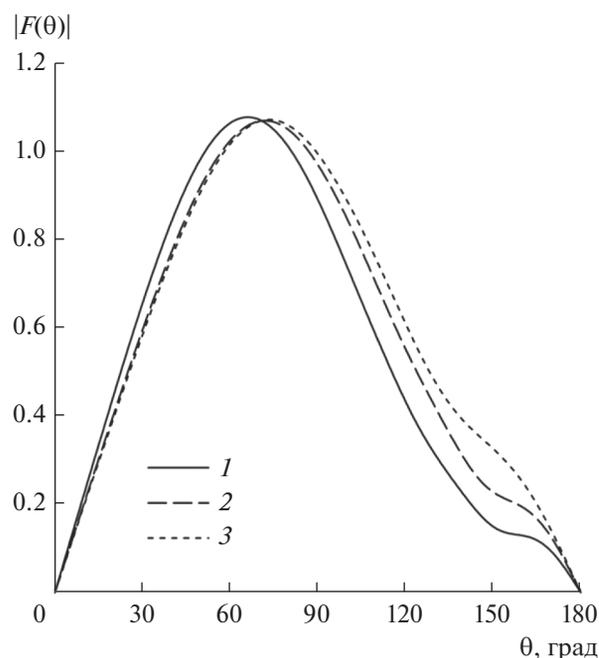


Рис. 7. Амплитудная ДН диполя в присутствии идеально проводящей сферы, расположенной внутри плазменного сфероида: 1 – $\epsilon_{a1} = -5 + 0.4i$, $\epsilon_a = 1$, $L = 29$, $N = 51$; 2 – $\epsilon_{a1} = 0.4 + 0.4i$, $\epsilon_a = 1$; 3 – $\epsilon_{a1} = \epsilon_a = 1$.

цаемости плазмы на ДН диполя, приведены на рис. 7. Кривая 1 и 2 соответствуют проницаемостям сфероида у поверхности сферы $\epsilon_{a1} = -5 + 0.4i$ и $\epsilon_{a1} = 0.4 + 0.4i$, а $\epsilon_a = 1$ в обоих случаях. Кривая 3 соответствует отсутствию плазмы, т.е. $\epsilon_{a1} = \epsilon_a = 1$. Результаты, приведенные на рис. 7, показывают, что ДН диполя имеет однолепестковую форму, которая практически не зависит ни от неоднородности плазменного шлейфа, ни от потерь в нем, что объясняется резким снижением уровня поля при увеличении расстояния от поверхности сфероида до точки наблюдения. Поле диполя отражается в основном от освещенной поверхности сфероида. Согласно рис. 7 форма ДН диполя также слабо зависит от действительной части проницаемости плазмы и близка к форме ДН диполя в присутствии идеально проводящей сферы без оболочки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрена задача возбуждения неоднородного диэлектрического тела вращения в виде однородной диэлектрической или идеально проводящей сферы, окруженной неоднородной диэлектрической оболочкой, радиальным магнитным диполем, расположенным на оси вращения. Для решения задачи было разработано несколько алгоритмов, основанных на ГПМ, включающих проектирование электромагнитных полей на

поперечные сферические функции и применение одномерного метода конечных элементов для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработанные алгоритмы были реализованы в соответствующих программах на языке МАТЛАБ, работа которых была проверена несколькими способами. Проверки включали рассмотрение однородной диэлектрической сферы, задача возбуждения которой допускает строгое аналитическое решение. ГПМ в этом случае был применен для сферы с центром, смещенным из начала координат, и продемонстрирована сходимость результатов к точному решению при увеличении числа функций, учитываемых в разложении искомых полей. Вторым объектом, использованным для проверки, была идеально проводящая сфера, расположенная внутри однородного вытянутого диэлектрического сфероида. Результаты решения задачи с использованием ГПМ в этом случае сравнивались с результатами, полученными методом вспомогательных источников с контролируемой точностью выполнения граничных условий на поверхностях сферы и сфероида.

В работе также получены новые результаты для ДН диполя в присутствии проводящей сферы, окруженной неоднородной диэлектрической оболочкой в форме вытянутого сфероида с зависимостью проницаемости сфероида от радиаль-

ной координаты по линейному закону. Показано, что ДН диполя в случае оболочки из обычного диэлектрика заметно отличается от ДН диполя для случая однородной оболочки. Результаты также показывают заметное влияние потерь в оболочке на форму ДН, что объясняется проникновением поля диполя внутрь сфероида и переотражениями между поверхностью последнего и поверхностью внутренней сферы.

Результаты, полученные для случая плазменной оболочки, показывают, что ДН диполя имеет однолепестковую форму, которая слабо зависит как от неоднородности шлейфа, так и от потерь в нем. Этот факт объясняется слабым проникновением поля внутрь плазменного сфероида, что приводит к формированию ДН в основном только освещенной частью поверхности сфероидальной оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильинский А.С., Свешников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11. № 4. С. 960.
2. Малушков Г.Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 2. С. 269.
3. Stout B., Neviere M., Popov E. // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22. № 11. P. 2385.
4. Morgan M.A., Mei K.K. // IEEE Trans. 1979. V. AP-27. № 2. P. 202.
5. Greenwood A.D., Jin J.-M. // IEEE Trans. 1999. V. AP-47. № 8. P. 1260.
6. Govind S., Wilton D.R., Glisson A.W. // IEEE Trans. 1984. V. AP-32. № 11. P. 1163.
7. Kucharski A.A. // IEEE Trans. 2000. V. AP-48. № 8. P. 1202.
8. Маненков С.А. // РЭ. 2018. Т. 63. № 1. С. 3.
9. Gabdullina A.R., Smolnikova O.N., Skobelev S.P. // Proc. 11th Eur. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP'2017). Paris, France, 19–24 March 2017. P. 1096.
10. Nekrasova E.S., Skobelev S.P. // Proc. 2017 Fourth Intern. Conf. on Engineering and Telecommunication (En&T 2017), Moscow, Russia, 29–30 November 2017. P. 82.
11. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
12. Скобелев С.П., Япарова А.А. // РЭ. 2007. Т. 52. № 3. С. 311.
13. Скобелев С.П. Фазированные антенные решетки с секторными парциальными диаграммами направленности. М.: Физматлит, 2010.
14. Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Негорожина Е.С. // РЭ. 2006. Т. 51. № 11. С. 1285.
15. Коробкина А.В., Скобелев С.П. // Радиотехника. 2017. № 4. С. 60.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СТРУКТУРЫ С ПОДЛОЖКОЙ ИЗ КИРАЛЬНОГО МЕТАМАТЕРИАЛА

© 2020 г. А. Л. Бузов^а, Д. С. Ключев^{б, *}, Д. А. Копылов^а, А. М. Нещерет^а

^аАО “Самарское инновационное предприятие радиосистем”,
просп. Кирова, 26, Самара, 443022 Российская Федерация

^бПоволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Льва Толстого, 23, Самара, 443010 Российская Федерация

*E-mail: klyuevd@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.12.2018 г.

После доработки 17.01.2019 г.

Принята к публикации 25.01.2019 г.

Представлена математическая модель двухэлементной антенной решетки, подложка которой выполнена из кирального метаматериала. На основе метода сингулярного интегрального представления поля получена система интегральных уравнений относительно неизвестных функций распределений поверхностных плотностей токов по излучателям антенной решетки. Приведены результаты расчета токовых функций, а также зависимость развязки между излучателями от параметра киральности.

DOI: 10.31857/S0033849420020035

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с все более интенсивным развитием систем подвижной радиосвязи и, соответственно, ужесточением требований, предъявляемых к ним, происходит перенасыщение объектов связи (например, башен, мачт, опор и т.п.) радиосредствами различных диапазонов частот, типов и назначения. Следствием этого является ухудшение и без того сложной электромагнитной обстановки, напрямую влияющей на обеспечение работоспособности систем радиосвязи. Поэтому вопросы обеспечения электромагнитной совместности (ЭМС) радиоэлектронных средств (РЭС) на данный момент особенно актуальны и нуждаются в дальнейшей проработке.

Вследствие того, что обычно РЭС, а точнее, их составные части — антенны, располагаются на компактных площадках, традиционные подходы к обеспечению ЭМС (пространственное разнесение антенн в случае направленных антенн, их разворот относительно друг друга и т.д.) не всегда применимы. В связи с этим в настоящее время существует потребность в разработке новых мер к обеспечению ЭМС РЭС, компактно располагаемых на объектах. Перспективный подход к совершенствованию ЭМС связан с использованием искусственных композитных структур с проводящими включениями зеркально-асимметричной формы — киральных метаматериалов [1, 2] в каче-

стве подстилающих поверхностей, а также средств дополнительного экранирования.

Как показывает анализ отечественной и зарубежной литературы, а также результаты исследований [3], использование в составе антенных систем дополнительных экранов и подстилающих поверхностей на основе киральных метаматериалов позволяет существенно уменьшить взаимное влияние между излучателями и тем самым повысить развязку между ними.

В виду того, что киральные метаматериалы представляют собой сложную электродинамическую структуру, возникает ряд сложностей, связанных с их электродинамическим анализом. На сегодняшний день наиболее распространенным подходом к анализу подобных структур является использование зарубежных программных комплексов EMCoS, CST Microwave Studio, HFSS, Feko и т.п. В основу данных комплексов положены численные методы, предполагающие разбиение исследуемой структуры на элементарные ячейки. При этом очень важным является выбор шага дискретизации структуры. В случае если этот шаг будет относительно большим, то разбиение будет достаточно грубым и исходные свойства структуры могут существенным образом искажаться. Особенно это касается резонансных структур, в том числе и киральных метаматериалов, где небольшие отклонения в геометрии структуры могут привести к большим погрешностям результатов рас-

чета. Безусловно, при уменьшении шага дискретизации точность результатов расчета будет повышаться, однако будут существенно расти и требования к вычислительным ресурсам. Кроме того, ввиду “закрытости” используемых в данных комплексах алгоритмов, вопрос доверия к полученным результатам по-прежнему остается открытым.

Перспективными методами анализа подобных антенных систем, содержащих структуры из киральных метаматериалов, являются проекционные методы [4]. В данной работе был использован метод сингулярных интегральных представлений электрического поля, приводящий к неоднородному сингулярному интегральному уравнению или системе таких уравнений. В отличие от самосоглазованного подхода к решению краевых задач электродинамики [5–7] данный подход предполагает наличие заданных сторонних источников электромагнитного поля, но не накладывает ограничения на их вид (т.е. может использоваться источник ЭДС, электромагнитная волна и т.п.). В работах [8, 9] была разработана математическая модель микрополосковой структуры с одиночным излучателем, расположенным на подложке из кирального метаматериала. Поверхность подложки считалась однородной. Метод интегральных уравнений в задачах отражения электромагнитных волн от неоднородных границ раздела сред подробно описан в [10–12]. Было получено сингулярное интегральное уравнение с особенностью Коши относительно неизвестной функции распределения поверхностной плотности тока по излучателю. Как показали результаты исследований, подобный подход обладает рядом достоинств, основными из которых являются высокая точность и сходимость получаемых результатов расчета, а также относительно невысокие требования к вычислительным ресурсам. Следует также отметить, что численное решение сингулярных интегральных уравнений является корректной математической задачей по Адамару.

Цель данной работы – проанализировать двухэлементную микрополосковую структуру (МПС) с подложкой из кирального метаматериала.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ СТРУКТУРЫ С КИРАЛЬНОЙ ПОДЛОЖКОЙ

Рассмотрим МПС, представляющую собой подложку из кирального метаматериала конечной толщины d , металлизированную с нижней стороны, на которой параллельно друг к другу на расстоянии S расположены два плоских прямоугольных излучателя (рис. 1). Длина излучателей $2l_1$ и $2l_2$, а ширина $2a_1$ и $2a_2$ соответственно. Относительные диэлектрические и магнитные прони-

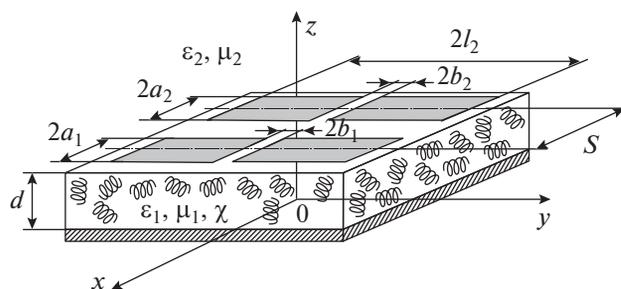


Рис. 1. Геометрия двухэлементной МПС с киральной подложкой.

цаемости киральной подложки равны ϵ_1 и μ_1 . Кроме того, при описании кирального метаматериала вне зависимости от типа проводящих включений зеркально-асимметричной формы также используется некий коэффициент, а именно параметр киральности χ [1, 2], связывающий векторы напряженностей поля с векторами индукции в материальных уравнениях [1, 2, 13, 14]:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_1 \vec{E} \mp i \chi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_1 \vec{H} \pm i \chi \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \vec{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ϵ_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

В выражениях (1), верхние знаки соответствуют киральной среде на основе правосторонних элементов (например, правовинтовых спиралей), а нижние – на основе левосторонних.

Над киральной подложкой и, соответственно, над излучателями расположено диэлектрическое полупространство с параметрами ϵ_2, μ_2 .

Будем считать, что напряженность сторонних электрических полей, возбуждающих излучатели, имеет лишь одну продольную составляющую $\vec{E}_1^{\text{ст}} = (0, E_{1y}^{\text{ст}}, 0)$ и $\vec{E}_2^{\text{ст}} = (0, E_{2y}^{\text{ст}}, 0)$. Ширина излучателей много меньше как их длины, так и длины волны λ ($2a_1, 2a_2 \ll 2l_1, 2l_2, \lambda$), поэтому значение продольной компоненты плотности поверхностного тока η_y будет гораздо больше значения поперечной компоненты η_x . Исходя из данных соображений поперечной компонентной плотности поверхностного тока η_x можно пренебречь. Предполагается также, что излучатели являются идеально проводящими и бесконечно тонкими. Считается, что источники электродвижущей силы (ЭДС), приложенные к зазорам излучателей, являются гармоническими и формируемые ими токи являются непрерывными как в областях зазоров, так и на плечах. Ширина зазоров излучателей при этом равна $2b_1$ и $2b_2$ соответственно. На поверхности излучателей должны выполняться

следующие граничные условия для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля ($E_{1\tau}$, $E_{2\tau}$) и продольных составляющих плотности поверхностного тока (η_{1y} , η_{2y}):

$$\begin{aligned} \eta_{1y}(x, -l_1) = \eta_{1y}(x, l_1) = 0, \quad x \in [-a_1, a_1], \\ \eta_{2y}(x, -l_2) = \eta_{2y}(x, l_2) = 0, \quad (2a) \\ x \in [S - a_2, S + a_2], \end{aligned}$$

$$E_{1\tau}(x, y) = \begin{cases} -E_{1\tau}^{ct} & \text{при } x \in [-a_1, a_1], \\ & y \in [l_{01} - b_1, l_{01} + b_1], \\ 0 & \text{при } x \in [-a_1, a_1], \\ & y \in [-l_1, l_{01} - b_1] \cup [l_{01} + b_1, l_1], \end{cases} \quad (26)$$

$$E_{2\tau}(x, y) = \begin{cases} -E_{2\tau}^{ct} & \text{при } x \in [S - a_2, S + a_2], \\ & y \in [l_{02} - b_2, l_{02} + b_2], \\ 0 & \text{при } x \in [S - a_2, S + a_2], \\ & y \in [-l_2, l_{02} - b_2] \cup [l_{02} + b_2, l_2], \end{cases}$$

где l_{01} и l_{02} – координаты центров зазоров излучателей 1 и 2 соответственно (точки питания).

Как и в случае одноэлементной МПС [8, 9], на поверхностях излучателей фурье-образы $\vec{T}_\tau = \{T_x, T_y\}$ тангенциальных составляющих напряженностей электрических полей \vec{E}_τ связаны с фурье-образами $\vec{F} = \{F_x, F_y\}$ поверхностных плотностей токов $\vec{\eta}$ через матрицу поверхностных импедансов $[Z]$ границы раздела диэлектрик–киральная среда с односторонней металлизацией:

$$\begin{bmatrix} T_y \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ F_x \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где Z_{ij} ($i, j = 1, 2$) – элементы матрицы поверхностных импедансов $[Z]$, которые являются функциями переменных β , h фурье-пространства: $Z_{ij} = Z_{ij}(\beta, h)$.

Поскольку матрица поверхностных импедансов связывает именно фурье-образы, то возникает необходимость разложения напряженностей электрического и магнитного полей, а также поверхностных плотностей токов в интегралы Фурье.

Следует отметить, что на поверхности подложки предполагается выполнение следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)}, \\ \eta_x = H_y^{(2)} - H_y^{(1)}, \quad \eta_y = H_x^{(2)} - H_x^{(1)}, \end{aligned}$$

где $E_x^{(1)}$ и $E_x^{(2)}$, $E_y^{(1)}$ и $E_y^{(2)}$ – x - и y -составляющие вектора напряженности электрического поля на границе раздела в киральном слое 1 и в диэлектрическом полупространстве 2 соответственно, $H_x^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$, $H_y^{(1)}$ и $H_y^{(2)}$ – x - и y -составляющие век-

тора напряженности магнитного поля на границе раздела в киральном слое 1 и в диэлектрическом полупространстве 2 соответственно, η_x , η_y – x - и y -составляющие вектора плотности тока на поверхностях излучателей.

Аналогичные граничные условия справедливы и для соответствующих фурье-образов напряженностей электрического и магнитного полей и поверхностных плотностей токов.

Метод определения матрицы поверхностных импедансов границы раздела диэлектрик–киральная среда с односторонней металлизацией, подробно описан в [15, 16], там же приведены аналитические выражения для определения ее элементов.

Определим T_y из (3) и выполним обратное преобразование Фурье, предварительно найдя Z_{11} [15] и не забывая при этом, что согласно выбранной физической модели $\eta_{1x} = \eta_{2x} = 0$. В результате получаем следующее выражение для E_y на поверхности подложки $z = d$:

$$\begin{aligned} E_y(x, y) = \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-a_1}^{a_1} \eta_{1y}(x', y') G(x', y'; x, y) dx' dy' + \\ + \int_{-l_2}^{l_2} \int_{S-a_2}^{S+a_2} \eta_{2y}(x', y') G(x', y'; x, y) dx' dy', \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} G(x', y'; x, y) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{11}(\beta, h) \exp[-i\beta(x - x')] \times \\ \times \exp[-ih(y - y')] d\beta dh. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку ширина излучателей много меньше длины волны, то поперечные вариации продольных составляющих поверхностных плотностей токов можно считать квазистатическими [17, 18]. В связи с этим функции распределения плотностей токов $\eta_{1y}(x', y')$ и $\eta_{2y}(x, y)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \eta_{1y}(x, y) = \frac{f_1(y)}{\sqrt{1 - (x/a_1)^2}}, \\ \eta_{2y}(x, y) = \frac{f_2(y)}{\sqrt{1 - ((x - S)/a_2)^2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(y)$ – функции, описывающие продольные распределения поверхностных плотностей токов на излучателях.

Несобственный интеграл в выражении (5) является расходящимся, поскольку асимптотическое

представление элемента матрицы поверхностных импедансов $Z_{11}(\beta, h)$ при $|h| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$Z_{11}^\infty(h) = C|h|, \quad C = \frac{i\omega\mu_0(\mu_1 + \mu_2)}{(k^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\mu_1 + \mu_2) - (k\chi)^2)}.$$

Используя аналитические условия излучения для слоистых сред [19], выделим аналитически особенность в представлении (5). Для этого прибавим и вычтем в подынтегральном выражении

в (5) слагаемые с асимптотическим множителем $Z_{11}^\infty(h)$. Затем, подставив (6) в (4), учитывая граничные условия для плотности поверхностного тока на концах излучателей (2а), производя интегрирование по y' по частям и выполняя ряд математических преобразований, получим сингулярное интегральное представление (СИП) u -составляющей напряженности электрического поля на поверхности подложки ($z = d$):

$$E_y(x, y, z = d) = -\frac{a_1}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_1} f_1'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\beta a_1)}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \exp[-i\beta x - ih(y - y')] d\beta dh dy' -$$

$$- a_1 \zeta(a_1, x) \frac{C}{\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{f_1'(y')}{y' - y} dy' - \frac{a_2}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_2} f_2'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\beta a_2)}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \exp[-i\beta(x - S) - ih(y - y')] \times$$

$$\times d\beta dh dy' - a_2 \zeta(a_2, x - S) \frac{C}{\pi} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{f_2'(y')}{y' - y} dy', \quad (7)$$

где

$$f_1'(y') = \frac{df_1(y')}{dy'}, \quad f_2'(y') = \frac{df_2(y')}{dy'},$$

$$\Delta Z_{11}(\beta, h) = Z_{11}(\beta, h) - Z_{11}^\infty(\beta, h),$$

$$\zeta(a, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

После подстановки СИП (7) в граничные условия (2б) получим систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) относительно неизвестных функций $f_1'(y')$ и $f_2'(y')$:

$$-E_{1y}^{ct}(x, y) = -\frac{a_1}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_1} f_1'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\beta a_1)}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \exp[-ih(y - y')] d\beta dh dy' -$$

$$- a_1 \zeta(a_1, x) \frac{C}{\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{f_1'(y')}{y' - y} dy' - \frac{a_2}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_2} f_2'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\beta a_2)}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \exp[i\beta S - ih(y - y')] d\beta dh dy',$$

$$-E_{2y}^{ct}(x, y) = -\frac{a_1}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_1} f_1'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\beta a_1)}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \exp[-i\beta S - ih(y - y')] d\beta dh dy' -$$

$$- \frac{a_2}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_2} f_2'(y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(\beta a_2)}{ih} \Delta Z_{11}(\beta, h) \exp[-ih(y - y')] d\beta dh dy' - a_2 \zeta(a_2, x - S) \frac{C}{\pi} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{f_2'(y')}{y' - y} dy'. \quad (8)$$

Здесь учтено, что СИП (7) справедливо на всей поверхности подложки, включая оси симметрии излучателей 1 ($x = 0$) и 2 ($x = S$).

Для решения полученной системы СИУ (8) предлагается использовать метод моментов. В качестве базисных функций были использованы полиномы Чебышева 1-го рода:

$$f_1'(y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n T_n(y')}{\sqrt{1 - (y'/l_1)^2}},$$

$$f_2'(y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n} T_n(y')}{\sqrt{1 - (y'/l_2)^2}}.$$

Кроме того, в целях упрощения процедуры интегрирования, в ядрах данной системы СИУ экспоненты были разложены в ряды по функциям Бесселя и полиномам Чебышева 1-го и 2-го рода [19]:

$$\exp[-ihy] = \frac{2i}{hl} \sum_{k=1}^{\infty} i^{-k} k J_k(hl) U_{k-1}(y/l),$$

$$\exp[ihy'] = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{(1 + \delta_{0,p})} J_p(hl) T_p(y'/l),$$

где $\delta_{0,p}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{0,p} = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

Также было использовано известное соотношение для полиномов Чебышева [20]

$$\int_{-l}^l \frac{T_n(y'/l)}{\sqrt{1 - (y'/l)^2}} dy' = \pi U_{n-1}(y'/l).$$

Результаты исследований показали, что при определенном количестве членов аппроксимирующего ряда данный метод позволяет достичь необходимой точности вычисления.

Функции продольных распределений поверхностных плотностей токов на излучателях определяются в соответствии со следующим выражением:

$$f_{1,2}(y) = -\sqrt{1 - (y/l)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{1,2n}}{n} U_{n-1}(y/l).$$

В свою очередь, функция распределения тока определяется как:

$$I_y(y) = \int_{-a}^a \eta_y(x, y) dx =$$

$$= \int_{-a}^a \frac{f(y)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} dx = \pi f(y).$$

2. АПРОБАЦИЯ РАЗРАБОТАННОЙ МОДЕЛИ ДУХЭЛЕМЕНТНОЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ СТРУКТУРЫ С КИРАЛЬНОЙ ПОДЛОЖКОЙ

При разработке новых моделей любых электродинамических структур непременно возникает ряд вопросов, связанных с достоверностью и точностью получаемых с ее помощью результатов расчета. В целях апробации разработанной модели двухэлементной МПС с киральной подложкой было проведено сравнение токовых функций, вычисленных на основе данной математической модели, а также с помощью программного комплекса Feko 7.0, на примере решения тестовой за-

дачи. В обоих случаях модель представляла собой диэлектрическую подложку (параметр киральности равен нулю) толщиной $d = 0.1\lambda$, металлизированную с нижней стороны, на которой параллельно расположены два прямоугольных плоских излучателя длиной $2l_1 = 2l_2 = 0.5\lambda$ и шириной $2a_1 = 2a_2 = 0.05\lambda$. При этом излучатели расположены на расстоянии, равном $S = \lambda$. Диэлектрическая и магнитная проницаемости подложки и диэлектрического полупространства равны $\epsilon_1 = \mu_1 = \epsilon_2 = \mu_2 = 1$.

На рис. 2 представлены функции распределения тока по излучателю 1 и излучателю 2, полученные для разных вариантов возбуждения. В частности, на рис. 2а приведены токовые функции для случая синфазного возбуждения излучателей, а на рис. 2б – для случая квадратурного возбуждения (фаза напряжения, приложенного к зазору излучателя 2, сдвинута относительно фазы напряжения, приложенного к зазору излучателя 1, на $\pi/2$).

Из данных графиков видно, что вычисленные с помощью различных методов функции распределения тока практически совпадают, что в свою очередь свидетельствует об адекватности разработанной модели.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе разработанной математической модели двухэлементной микрополосковой излучающей структуры с киральной подложкой были рассчитаны функции распределения тока по излучателям для синфазного (рис. 3а) и квадратурного (рис. 3б) способов возбуждения, а также для различных типов киральных подложек, а именно подложек на основе левосторонних элементов и правосторонних элементов, при следующих общих параметрах: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $2a_1 = 2a_2 = 0.05\lambda$, $2b = 0.02\lambda$, $d = 0.1\lambda$, $2l_1 = 2l_2 = 0.5\lambda$, $S = 0.25\lambda$, $\chi = 0.2$.

Как видно из графиков, приведенных на рис. 3, распределение тока по излучателям сильно зависит от типа киральной подложки.

При проведении расчетов значение амплитуды напряжения в зазоре излучателя было принято равным 1 В ($V = 2bE_0 = 1$ В, где E_0 – амплитуда напряженности стороннего электрического поля, приложенного к зазору излучателя).

Для определения возможности уменьшения взаимного влияния между излучателями (в контексте обеспечения ЭМС – повышения развязки) было проведено исследование двухэлементной МПС с киральной подложкой с целью определения зависимости развязки от параметров структуры, в частности, от параметра киральности. На

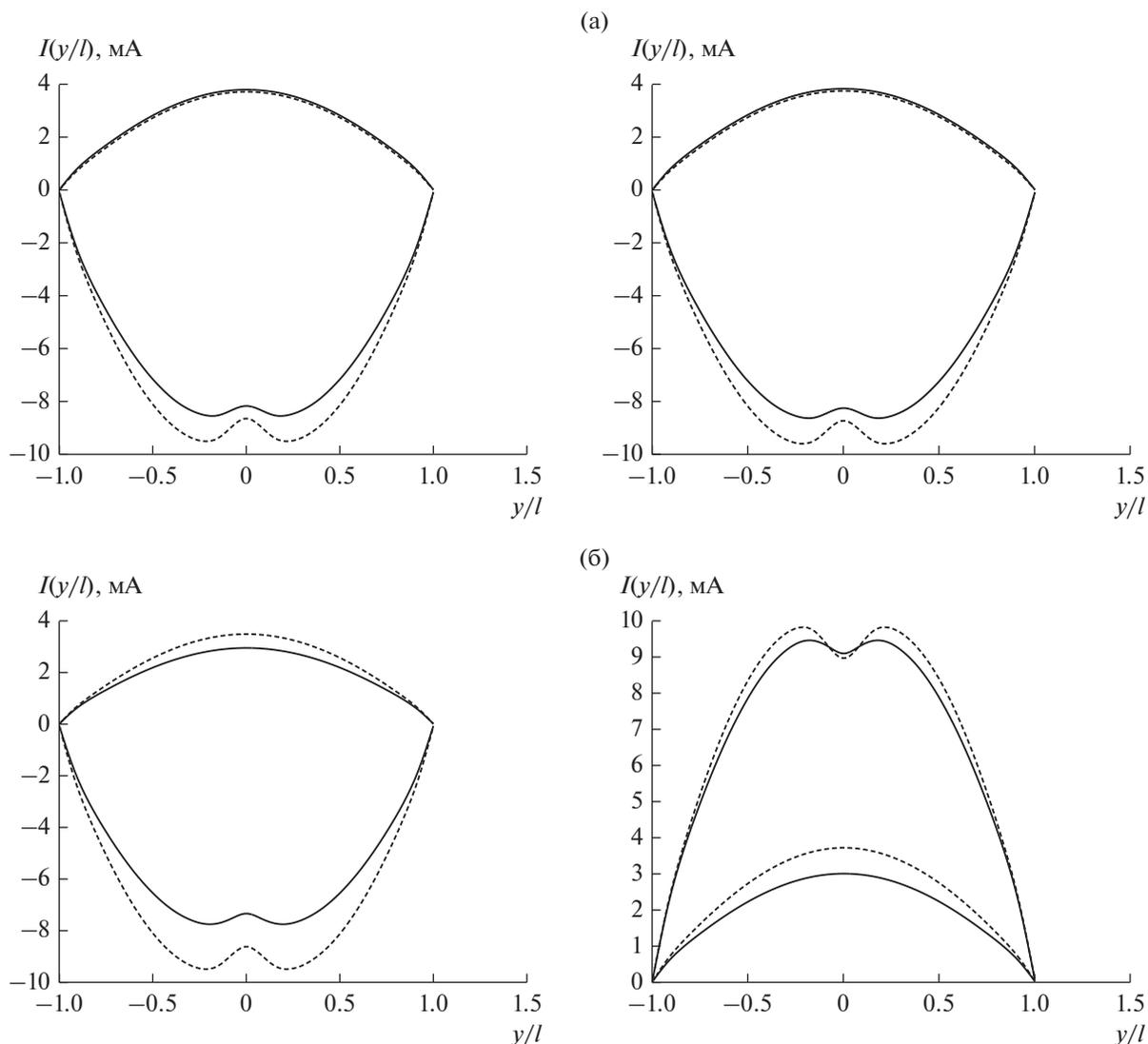


Рис. 2. Функции распределения токов по излучателю 1 (слева) и излучателю 2 (справа) МПС с диэлектрической подложкой, полученные с помощью разработанной модели (сплошные линии) и Feko 7.0 (штриховые) для синфазного (а) и квадратурного (б) способов возбуждения.

рис. 4 приведена зависимость развязки между излучателем 1 и излучателем 2 МПС от параметра киральности при следующих параметрах: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $2a_1 = 2a_2 = 0.05\lambda$, $2b = 0.02\lambda$, $d = 0.1\lambda$, $2l_1 = 2l_2 = 0.5\lambda$, $S = 0.5\lambda$. Как уже было упомянуто, нулевое значение параметра киральности соответствует подложке, выполненной из диэлектрика. Положительные значения параметра киральности соответствуют киральной подложке на основе правосторонних элементов, отрицательные – на основе левосторонних. Из рис. 4 видно, что при некоторых параметрах использование подстилающих поверхностей из кирального метаматериала позволяет повысить уровень развязки между излучателями.

* * *

Таким образом, в работе предложена математическая модель двухэлементной микрополосковой излучающей структуры с подложками из кирального метаматериала различных типов, позволяющая определять функции распределения плотности тока на поверхностях излучателей, которые, в свою очередь, позволяют рассчитывать поле в любой точке пространства, включая ближнюю зону, а кроме того, определять другие характеристики структуры. Проведена апробация разработанной модели. На основании представленных зависимостей уровней развязки между излучателями от параметра киральности, был сделан вывод о перспективности применения подстилающих поверхностей на основе киральных метаматериалов

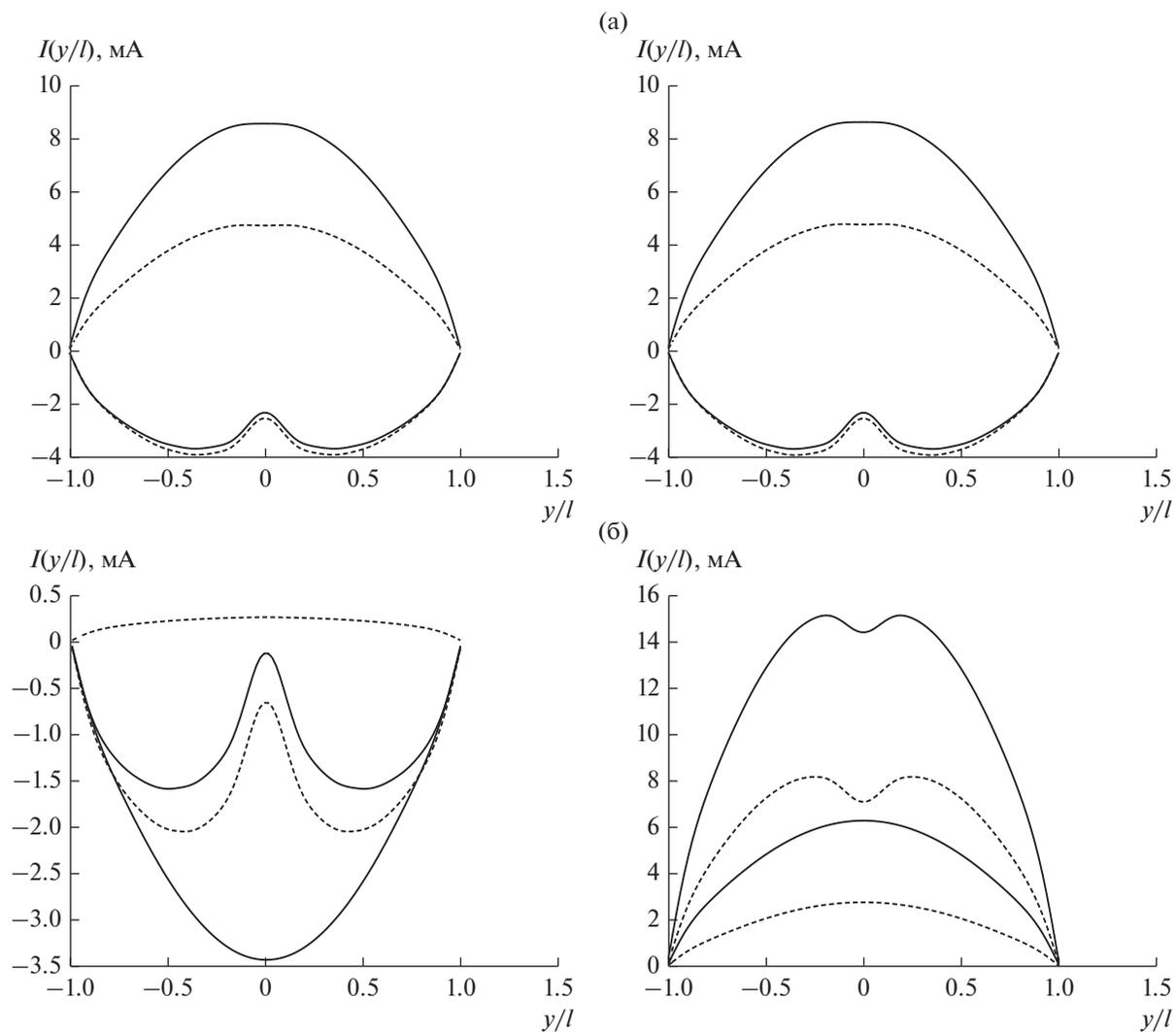


Рис. 3. Функции распределения токов по излучателю 1 (слева) и излучателю 2 (справа) МПС с киральной подложкой на основе лево- (сплошные линии) и правосторонних (штриховые) элементов для синфазного (а) и квадратурного (б) способов возбуждения.

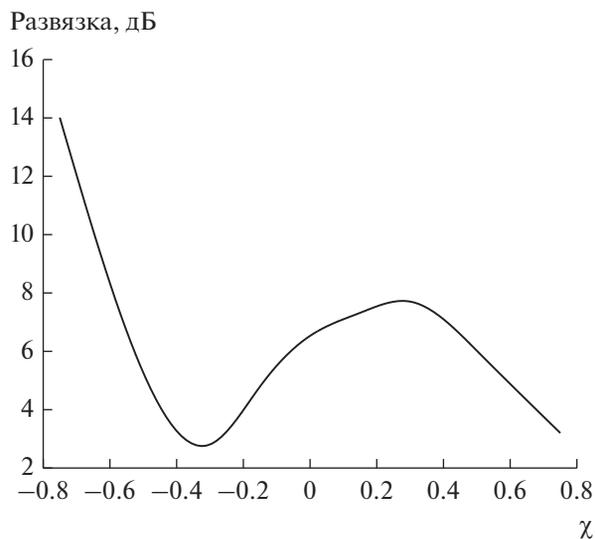


Рис. 4. Зависимость уровней развязки между излучателями МПС от параметра киральности.

в антенных системах с целью совершенствования обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неганов В.А., Осипов О.В.* Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006.
2. *Lindell I.V., Sihvola A.H., Tretyakov S.A. et al.* Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media. Boston, London: Artech House, 1994.
3. *Бадалов В.В., Беляев С.О., Копылов Д.А., Нещерет А.М.* // Антенны. 2017. № 11. С. 31.
4. *Ильинский А.С.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 2. С. 134.
5. *Вдовиченко И.А., Раевский А.С., Раевский С.Б.* // Антенны. 2016. № 11. С. 68.
6. *Михалицын Е.А., Раевский А.С., Седаков А.Ю.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 2. С. 33.
7. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 1. С. 14.
8. *Бузова М.А., Клюев Д.С., Минкин М.А. и др.* // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 11. С. 80.
9. *Бузова М.А., Дементьев А.Н., Клюев Д.С. и др.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 533.
10. *Ильинский А.С., Галишикова Т.Н.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 1. С. 46.
11. *Ильинский А.С.* // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1284.
12. *Ильинский А.С., Галишикова Т.Н.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 9. С. 829.
13. *Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V.* Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media. Lecture notes in physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
14. *Semchenko I.V., Tretyakov, S.A., Serdyukov A.N.* // Progress in Electromagnetics Research (PIER). 1996. V. 12. P. 335.
15. *Клюев Д.С., Нещерет А.М., Осипов О.В., Почепцов А.О.* // Успехи соврем. радиоэлектроники. 2015. № 11. С. 67.
16. *Нещерет А.М.* // Радиотехника. 2016. № 4. С. 118.
17. *Дементьев А.Н., Клюев Д.С., Неганов В.А., Соколова Ю.В.* Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн. М.: Радиотехника, 2015.
18. *Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-шелевые структуры сверх- и крайневых частот. М.: Физматлит, 1996.
19. *Тихонов А.Н., Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* // Проблемы вычислительной математики. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 57.
20. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби) / Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Физматгиз, 1961.
21. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Физматгиз, 1979.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 538.566.2;621.372.8

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ МЕТАЧАСТИЦ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ИМПУЛЬСНОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ, НАПРАВЛЕННО ИЗЛУЧЕННОГО АПЕРТУРНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2020 г. В. В. Шевченко*

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: sto@cplire.ru

Поступила в редакцию 31.10.2019 г.

После доработки 31.10.2019 г.

Принята к публикации 05.11.2019 г.

Приведены результаты анализа изменения поперечного размера эффективной формы и радиуса кривизны фазового волнового фронта поля метачастиц при их направленном распространении от апертурного источника импульсного волнового поля.

DOI: 10.31857/S0033849420030171

1. В работах [1–3] были введены понятия и рассмотрены некоторые свойства метачастиц импульсных волновых полей (электромагнитного, акустического), направленно излученных апертурными источниками (антеннами, лазерами, акустическими мембранами) и распространяющихся в свободном пространстве и в однородных изотропных средах. В данной работе приводятся преобразованные выражения для параметров структурных функций поля метачастиц: поперечного размера эффективной формы и радиуса кривизны фазового волнового фронта поля метачастиц, которые изменяются в процессе распространения метачастиц от апертуры источника. При этом изменяющаяся часть эффективной формы поля метачастиц является цилиндрической в ближней области от апертуры источника, квазичилиндрической в области дифракции Френеля, квазиконусной в области дифракции Фраунгофера и конусной в дальней области от апертуры источника импульсного волнового поля.

2. Функциональная зависимость

$$w_a(z) = a \left[1 + \left(\frac{z}{S} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1)$$

$$S = ka^2 = 2\pi a^2 / \lambda = a / \delta_a,$$

показывает (рис. 1) изменение полуширины (радиуса) эффективной формы поля метачастиц при прохождении расстояния $z = vt$ в процессе распространения метачастиц от излучающей апертуры источника импульсного волнового поля [1–3]. Здесь приняты следующие обозначения: a – ра-

диус круглой излучающей апертуры источника импульсного волнового поля,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \delta_a = \frac{1}{ka}, \quad (2)$$

ω – круговая частота волнового поля, v – скорость распространения, λ – длина волны поля метачастиц, при этом

$$\delta_a = \frac{1}{\pi 2a}, \quad \delta_a^2 \ll 1 \quad \text{при} \quad \frac{\lambda}{2a} \leq 1. \quad (3)$$

Значение $z = S$ можно интерпретировать как расстояние от апертуры источника поля до условной границы перехода импульсного волнового поля из области дифракции Френеля в область дифракции Фраунгофера (см. также ниже).

3. Функциональная зависимость

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{S}{z} \right)^2 \right] \quad (4)$$

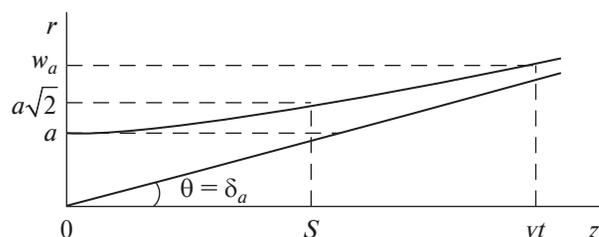


Рис. 1.

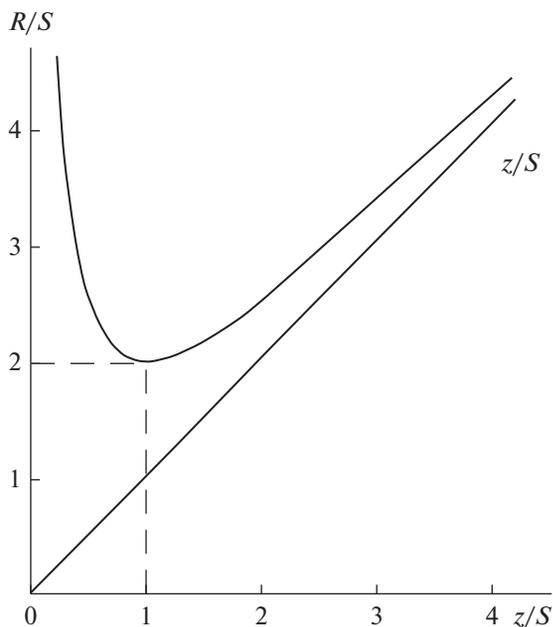


Рис. 2.

показывает (рис. 2) изменение радиуса кривизны фазового волнового фронта поля метачастиц при их распространении от апертуры источника импульсного волнового поля [1]. Из графика рис. 2

видно, что радиус кривизны фазового волнового фронта поля метачастиц имеет минимальное значение $R_{\min} = 2S$ при $z = S$. При этом $w_a(S) = a\sqrt{2}$ (см. рис. 1).

Приведенный результат указывает на то, что расстояние $z = S$ от апертуры источника поля соответствует не условной, а вполне определенной границе перехода от набранной фокусировки (уменьшения радиуса кривизны фронта) поля метачастиц к началу расфокусировки (увеличения радиуса кривизны фронта) поля метачастиц в процессе их распространения от источника поля. Сказанное относится и к импульсному волновому полю в целом, направленно излученному с $R(0) = \infty$, т.е. с плоским фазовым фронтом поля на апертуре источника.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевченко В.В. // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 899.
2. Шевченко В.В. // РЭ. 2019. Т. 64. № 3. С. 265.
3. Шевченко В.В. // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1122.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ
НОВЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ЧАСТОТНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ
ВЕЙВЛЕТОВ КРАВЧЕНКО В СЛУЧАЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА СВЕРТОЧНОЙ МОДЕЛЬЮ© 2020 г. В. Ф. Кравченко^{a, b, c, *}, В. И. Пустовойт^a, А. В. Юрин^{c, **}^aИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация^bНаучно-технологический центр уникального приборостроения РАН,
ул. Бутлерова, 15, Москва, 117342 Российская Федерация^cМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005 Российская Федерация

*E-mail: kvf-ok@mail.ru

**E-mail: yuaalex@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.10.2019 г.

После доработки 03.11.2019 г.

Принята к публикации 05.11.2019 г.

Построена новая биортогональная система вейвлет-базисов, ориентированных на восстановление полезного сигнала измерительной системы в случае представления измерительного процесса сверточной моделью. Новые биортогональные вейвлет-базисы получаются посредством модификации аппаратной функцией измерительной системы ортогональных вейвлетов Кравченко с финитным спектром. Проведено исследование свойств новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов и построены цифровые фильтры, реализующие быстрые вычислительные алгоритмы. Предложены схемы кратномасштабного анализа, позволяющие при выполнении дискретного вейвлет-преобразования сразу решать задачи по восстановлению полезного сигнала, а также по эффективному подавлению шума, что позволяет значительно ускорить вычислительный процесс.

DOI: 10.31857/S0033849420040051

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В различных областях физики (радиоастрономии, радиолокации, радиотеплолокации, различных видах микроскопии и других типов измерений) требуется учитывать влияние измерительного тракта технической системы и канала связи (инерционность среды, по которой распространяется сигнал) на регистрируемые сигналы или изображения. При этом имеют место искажения реального распределения сигнала, зависящие от аппаратной функции технической системы, и добавляется шум. Если форма аппаратной функции известна, то задача восстановления полезного сигнала или, по крайней мере, задача повышения качества регистрируемого распределения сигнала сводится к решению интегрального уравнения, которое связывает регистрируемое и исходное распределения искомой величины. При математическом описании данной задачи достаточно широко используется сверточная модель представления измерительного процесса, в которой рассматривается решение интегрального уравне-

ния Фредгольма 1-го рода типа свертки. Как известно, такая задача является некорректной, т.е. неустойчивой к сколь угодно малым погрешностям измерений. Поэтому при ее решении выполняется оценка полезного сигнала на основе имеющейся априорной информации о сигнале, шуме, аппаратной функции и технических требованиях к системе обработки.

Общая форма записи интегрального уравнения типа свертки имеет вид

$$\int \lambda(t - \tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$y(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad \lambda(t) \in L^1(\mathbb{R}), \quad x(t) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Оператор свертки \mathcal{L} определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} : x(t) \rightarrow \int \lambda(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

С точки зрения практического применения наиболее интересна следующая постановка задачи: выполнить оценку полезного сигнала $x(t)$ пер-

воначально искаженного импульсной характеристикой $\lambda(t)$ линейной стационарной системы с последующим действием шума $n(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}x(t) + n(t) = (\lambda * x)(t) + n(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Шум $n(t)$ предполагается аддитивным и белым гауссовским (АБГШ) с дисперсией σ^2 . АБГШ в качестве модели хорошо подходит для математического описания многих физических процессов.

Для решения (1) существует много разнообразных методов [1–7]. На основе преобразования Фурье (ПФ) наиболее широкое распространение получили методы ПФ с регуляризацией Тихонова, метод фильтрации Винера, которые используют регуляризующий компонент $R(\omega)$.

Ослабление усиленного шума $\hat{n}(\omega)/\hat{\lambda}(\omega)$ выполняется с помощью фильтра с частотной характеристикой [1–7]

$$\hat{K}(\omega) = \frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)}. \quad (3)$$

Отметим, что при $R \rightarrow 0$ спектр $\hat{K}(\omega)$ переходит в выражение для инверсной или псевдоинверсной фильтрации. Таким образом, задача становится некорректной, а решение неустойчивым.

Для ПФ оценки полезного сигнала x_p , вычисленное с помощью методов регуляризации ПФ, имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(\omega) = \hat{y}(\omega)\hat{K}(\omega) = \hat{x}(\omega) \frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} + \\ + \frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)} \left(\frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right) = \hat{x}_p(\omega) + \frac{\hat{n}_p(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \hat{x}_p и $\hat{n}_p/\hat{\lambda}$ – слагаемые спектра решения \hat{x}_p соответственно ПФ очищенного сигнала x_p и прошедшего шума $\mathcal{L}^{-1}n_p$, входящие в состав оценки полезного сигнала \tilde{x}_p .

Отличительной особенностью использования ПФ для решения (1) является компактное представление шума $\mathcal{L}^{-1}n$, поскольку ПФ действует как разложение Карунена–Лоэва [10–12] и декоррелирует шум $\mathcal{L}^{-1}n$. Поэтому среди всех линейных преобразований при ПФ основная энергия шума $\mathcal{L}^{-1}n$ концентрируется в минимально возможном числе коэффициентов. Наилучших результатов в решении интегрального уравнения типа свертки методами ПФ удается достичь, когда неискаженный сигнал $x(t)$ является равномерно гладким и эффективно аппроксимируется базисом Фурье.

Однако базис Фурье хорошо выделяет частоты, но не дает информации о резких и коротких всплесках, перепадах, точках разрыва, изолированных особенностях и вообще о локальном поведении функции, так как базис $\exp(j\omega t)$ покрывает всю вещественную прямую, а ПФ функции $\hat{x}(\omega)$ зависит от значений $x(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ [13–23]. В лучшем случае локальная особенность будет иметь очень широкий спектр, а энергия сигнала сосредоточена в значительном числе коэффициентов Фурье. Ошибка оценки полезного сигнала $x(t)$ сконцентрирована в окрестности особых точек. В таком случае для компактного представления сигнала $x(t)$, имеющего указанные особенности, желательно, чтобы элементы базиса были как можно лучше локализованы по времени и частоте. Вейвлет-базисы удовлетворяют такому требованию. Кроме того, накладываются и дополнительные условия, такие как ортогональность базиса, компактность носителей вейвлетов и т.д. В дальнейшем, выполняя пороговую обработку коэффициентов разложения в подходящем базисе вейвлетов согласно [13, 14, 24], можно добиться почти оптимальной оценки полезного сигнала $x(t)$.

Применение вейвлет-преобразования (ВП) предполагает, что выбор вейвлет-базиса делается на основе его свойств. Так как решение интегрального уравнения типа свертки реализуется в спектральной области, то необходимо выбирать вейвлет-базис, который имеет компактный носитель в частотной области, достаточно быстрое убывание и небольшое число коэффициентов вейвлет-фильтров. Оптимальным с этой точки зрения являются вейвлеты Кравченко [25–28], которые имеют лучшие характеристики по сравнению с известными системами вейвлетов с финитным спектром (вейвлеты Мейера, Котельникова–Шеннона). Кроме того, можно применить вейвлеты финитные во временной области (например, вейвлеты Добеши), имеющие хорошую крутизну фронтов в частотной области. Возникающая при этом систематическая погрешность должна оцениваться для каждого конкретного случая.

Таким образом, Фурье и вейвлет-базисы обладают рядом преимуществ в представлении и обработке сигналов. Эти преимущества можно использовать для создания комбинированного подхода к решению интегрального уравнения типа свертки (1), который должен состоять из отдельных блоков [29]: быстрое ПФ (БПФ), деконволюции, обратное быстрое ПФ (ОБПФ), дискретное ВП (ДВП), пороговая обработка коэффициентов, обратное дискретное ВП (ОДВП). Это неизбежно приводит к дополнительным аппаратным и временным затратам. Для обеспечения максимальной эффективности при минимальных затратах вычислительных ресурсов необходимо объединить в одном вейвлетном преобразовании

решения нескольких задач обработки. Это делается в рамках ДВП с помощью модификации выбранной ортогональной системы вейвлетов Кравченко [25–28]. При этом модифицированные вейвелты Кравченко должны отвечать всем требованиям теории кратномасштабного анализа (КМА), чтобы можно было построить блоки фильтров быстрых вейвлетных преобразований. Такая модификация порождает нестационарный КМА на основе семейства биортогональных вейвлет-базисов Кравченко.

2. ВЕЙВЛЕТ-АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

Пусть масштабирующие функции и вейвелты $\{\varphi_{j_0,k}(t), \psi_{j,k}(t) : j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}\}$ формируют ортогональное кратномасштабное разложение $L^2(\mathbb{R})(-\infty, \infty)$. Рассмотрим кратномасштабную аппроксимацию кусочно-непрерывной функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, которая имеет ограниченную вариацию

$$\|f(t)\|_V < \infty, \quad \|f(t)\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| dt.$$

В случае недифференцируемости функции полная вариация $f(x)$ может быть вычислена путем рассмотрения производных в смысле обобщенных функций [13, 30–32]. При масштабе J ортогональная проекция $f(t)$ на $V_J \subset L^2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$f_J(t) = P_J f(t) = P_{j_0} f(t) + Q_{j_0} f(t) + \dots + Q_{J-1} f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (5)$$

где P_{j_0}, Q_j – операторы ортогонального проектирования на подпространства V_{j_0} и W_j , параметр $j = j_0, \dots, J-1$, а j_0 – самый грубый масштаб; $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$, $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ – сдвиги/сжатия масштабирующих и вейвлет-функций; $a_{j,k} = \int f(t) \varphi_{j,k}(t) dt$, $b_{j,k} = \int f(t) \psi_{j,k}(t) dt$ – коэффициенты разложения по базису масштабирующих и вейвлет-функций.

Так как V_J допускает ортонормированный базис $\{\varphi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, то эта проекция может быть переписана в виде конечной суммы масштабирующих функций при масштабе J с равномерным сдвигом k

$$f_J = P_J f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \varphi_{J,k}(t). \quad (6)$$

Вейвелты могут эффективно аппроксимировать равномерно гладкие сигналы конечным числом базисных функций. Погрешность аппроксимации связана с дифференцируемостью по Собо-

леву [30, 31]. Она может быть вычислена для разрывных сигналов, имеющих ограниченную вариацию [39, 40]. Пространства функций Соболева $H^s(\mathbb{R})$, которые s раз дифференцируемы являются пространствами функций $f \in L^2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых удовлетворяет неравенству

$$\int |\omega|^{2s} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < +\infty.$$

Здесь рассматриваем вейвлет $\psi(t) \in C^q$, имеющий быстрое убывание и q нулевых моментов. Это означает, что для любого $0 \leq p \leq q$ и $m \in \mathbb{Z}$ существует константа C_m такая, что

$$|\psi^{(p)}(t)| \leq C_m (1 + |t|^m)^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Вейвлет-преобразование можно рассматривать как многомасштабный дифференциальный оператор порядка q [13, 14]. Это устанавливает связь между дифференцируемостью функции f и убыванием ее вейвлет-преобразования при малых масштабах [13]. Поэтому для эффективной аппроксимации $f \in H^s(\mathbb{R})$ требуется $q > s$. Согласно [13] гладкость по Соболеву эквивалентна быстрому убыванию вейвлет-коэффициентов $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ при убывании масштаба j . Если f – кусочно-гладкая функция, то более эффективной является нелинейная вейвлет-аппроксимация, при которой масштаб аппроксимации уточняется в окрестности каждой особенности. Тогда аппроксимация вычисляется по коэффициентам вейвлет-разложения наибольшей амплитуды, что может быть получено с применением пороговой обработки вейвлет-коэффициентов линейной аппроксимации. Для изучения реализации нелинейных вейвлет-аппроксимаций используются пространства Бесова $B_{\beta,\gamma}^s$, которые являются естественным обобщением пространств Соболева в случае дробного порядка дифференцирования. При этом во многих случаях получены соответствующие теоремы вложения [13, 33, 34]:

$$B_{\beta,1}^s \subset W_{\beta}^s \subset B_{\beta,\infty}^s, \quad 1 \leq \beta < \infty, \quad s > 0.$$

Пространства Бесова содержат функции, которые не дифференцируемы s раз во всех точках. Если даже f разрывна, но число разрывов конечно и f удовлетворяет равномерному условию Липшица α между этими разрывами, то $f \in B_{\beta,\gamma}^s$ (при $1/p < \alpha + 1/2$, $p = \beta = \gamma$).

Для удобства обозначения будем считать, что в (5) не нарушается последовательность масштабов j и сдвигов k , а нелинейная аппроксимация получается, когда часть коэффициентов $b_{j,k}$ принимает нулевые значения в результате пороговой обработки.

Уравнение (5) в частотной области имеет вид

$$\hat{f}_J(\omega) = a_{j_0}(\omega)\hat{\phi}_{j_0}(\omega) + \sum_{j=j_0}^{J-1} b_j(\omega)\hat{\psi}_j(\omega). \quad (7)$$

Здесь $\hat{\phi}_{j_0}(\omega) = 2^{-j/2}\hat{\phi}(\omega/2^{j_0})$, $\hat{\psi}_j(\omega) = 2^{-j/2}\hat{\psi}(\omega/2^j)$, а $a_{j_0}(\omega)$ и $b_j(\omega)$ – периодические частотные функции с периодом $2^{j_0+1}\pi$ и $2^{j+1}\pi$, получаемые из коэффициентов разложения $a_{j_0,k}$ и $b_{j,k}$

$$a_{j_0}(\omega) = \sum_k a_{j_0,k} \exp(-ik\omega/2^{j_0}),$$

$$b_j(\omega) = \sum_k b_{j,k} \exp(-ik\omega/2^j),$$

$$\{a_{j_0,k}\} \in l^2, \{b_{j,k}\} \in l^2, k \in \mathbb{Z}.$$

Запишем (6) в частотной области

$$\hat{f}_J(\omega) = a_J(\omega)\hat{\phi}_J(\omega). \quad (8)$$

Используя масштабирующие уравнения [13–20]

$$\hat{\phi}_{J-1}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2^J}\right)\hat{\phi}_J(\omega), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{J-1}(\omega) &= \\ &= e^{i\omega/2^J} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^J} + \pi\right)}\hat{\phi}_J(\omega) = G_0\left(\frac{\omega}{2^J}\right)\hat{\phi}_J(\omega), \end{aligned} \quad (10)$$

покажем, что $a_J(\omega)$ можно получить из частотных функций $a_{J-1}(\omega)$ и $b_{J-1}(\omega)$. В (9) и (10) $H_0(\omega) = 1/\sqrt{2} \sum_k h_k \exp(-ik\omega) = 1/\sqrt{2} H(\omega)$ – частотная функция отклика масштабирующей функции с коэффициентами фильтра $\{h_k : k \in \mathbb{Z}\}$; $G_0(\omega) = 1/\sqrt{2} \sum_k g_k \exp(-ik\omega) = 1/\sqrt{2} G(\omega)$ – частотная функция отклика вейвлета с коэффициентами фильтра $\{g_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Преобразование Фурье $\hat{f}_J(\omega)$ определяется уравнением (8) при масштабе J и с помощью $\hat{\phi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ при масштабе $J-1$

$$\hat{f}_J(\omega) = a_{J-1}(\omega)\hat{\phi}_{J-1}(\omega) + b_{J-1}(\omega)\hat{\psi}_{J-1}(\omega). \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_J(\omega)\hat{\phi}_J(\omega) &= a_{J-1}(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^J}\right)\hat{\phi}_J(\omega) + \\ &+ b_{J-1}(\omega)\overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^J} + \pi\right)}\hat{\phi}_J(\omega)\exp(i\omega/2^J). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, формула для восстановления $a_J(\omega)$ по $a_{J-1}(\omega)$ и $b_{J-1}(\omega)$ имеет вид

$$\begin{aligned} a_J(\omega) &= a_{J-1}(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^J}\right) + \\ &+ b_{J-1}(\omega)\overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^J} + \pi\right)}\exp(i\omega/2^J). \end{aligned} \quad (13)$$

Похожим образом с помощью масштабирующих уравнений (9), (10) можно получить [13–20] алгоритм разложения в частотной области

$$a_{J-1}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2^J}\right)a_J(\omega), \quad (14)$$

$$b_{J-1}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2^J} + \pi\right)a_J(\omega)\exp(i\omega/2^J). \quad (15)$$

Рассмотрим аппроксимацию вейвлетами решения интегрального уравнения типа свертки (1) в частотной области в случае $\lambda \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$ при ограниченной правой части $y(t) \in H^p$

$$\hat{x}_p(\omega) = \hat{y}(\omega)\hat{K}(\omega) = \hat{y}(\omega)\left[\frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)}\right]. \quad (16)$$

В случае применения вейвлетов Кравченко с финитным спектром справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $y(t) \in \mathbf{V}_J$, $\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ и $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$ при $\hat{\phi}_J(\omega) \neq 0$, $\text{supp } \hat{\phi}_J(\omega) = [-2^J(4\pi/3); 2^J(4\pi/3)]$. Тогда интегральное уравнение типа свертки (1) имеет единственное решение в подпространстве \mathbf{V}_{J+1} .

Доказательство. Если $y \in \mathbf{V}_J$ то $y(t) = P_J y(t) = y_J(t) = \sum_k a_{J,k}^y \phi_{J,k}(t) dt$, где $a_{J,k}^y = \int y(t)\phi_{J,k}(t) dt$, $\{a_{J,k}^y\} \in l^2, k \in \mathbb{Z}$. Отсюда в частотной области $\hat{y}_J(\omega) = a_J^y(\omega)\hat{\phi}_J(\omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $a_J^y(\omega)$ – периодическая функция с периодом $2^{J+1}\pi$.

С помощью частотной функции $\hat{K}(\omega)$ ПФ регуляризованного решения интегрального уравнения типа свертки (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(\omega) &= \hat{K}(\omega)\hat{y}_J(\omega) = \\ &= \left(\hat{K}(\omega)\Big|_{\omega \in [-2^J \frac{4\pi}{3}, 2^J \frac{4\pi}{3}]}\right) a_J^y(\omega)\hat{\phi}_J(\omega). \end{aligned}$$

Так как

$$\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) = H_0\left(\frac{\omega}{2^{J+1}}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{J+1}}\right),$$

то

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(\omega) &= \left(\hat{K}(\omega)\Big|_{\omega \in [-2^J \frac{4\pi}{3}, 2^J \frac{4\pi}{3}]}\right) \times \\ &\times a_J^y(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^{J+1}}\right)\hat{\phi}_{J+1}(\omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Функция $H_0(\omega/2^{J+1})$ периодическая с периодом $2^{J+2}\pi$ и не равна нулю на интервалах $[-2^J(4\pi/3) + 2^{J+2}\pi k; 2^J(4\pi/3) + 2^{J+2}\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

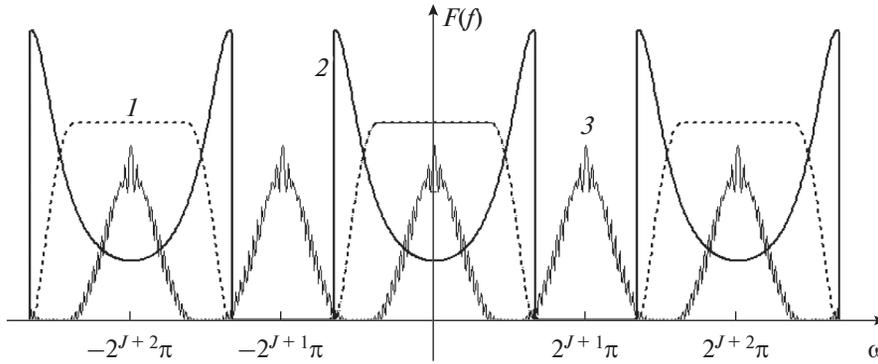


Рис. 1. Расположение образов Фурье функций в случае использования вейвлетов Кравченко $\{\tilde{u}^p\}$: кривая 1 – $H_0(\omega/2^{J+1})$, кривая 2 – $\left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^{J+1} \frac{4\pi}{3}, 2^{J+1} \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{J+2}\pi}$, кривая 3 – $a_j^y(\omega)$.

Так как $a_j^y(\omega)$ имеет период $2^{J+1}\pi$, то произведение $a_j^y(\omega)H_0(\omega/2^{J+1})$ – $2^{J+2}\pi$ -периодическая функция. Если $\hat{K}(\omega)$ будет периодически продолжено с периодом $2^{J+2}\pi$, то это не изменит (17)

$$\hat{x}_p(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^{J+1} \frac{4\pi}{3}, 2^{J+1} \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{J+2}\pi} \times a_j^y(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^{J+1}}\right)\hat{\phi}_{J+1}(\omega), \tag{18}$$

где $\left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^{J+1} \frac{4\pi}{3}, 2^{J+1} \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{J+2}\pi}$ – $2^{J+2}\pi$ -периодическое продолжение функции $\hat{K}(\omega)$, ограниченной интервалом $\left[-2^J(4\pi/3); 2^J(4\pi/3) \right]$.

Таким образом, произведение первых трех членов в выражении (18) является $2^{J+2}\pi$ -периодической функцией (рис. 1).

Введем обозначение

$$a_{J+1}^{\tilde{x}_p}(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^{J+1} \frac{4\pi}{3}, 2^{J+1} \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{J+2}\pi} a_j^y(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^{J+1}}\right) - 2^{J+2}\pi\text{-периодическая частотная функция.}$$

Получим, что

$$\hat{x}_p(\omega) = 2^{-(J+1)/2} a_{J+1}^{\tilde{x}_p}(\omega)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{J+1}}\right) = a_{J+1}^{\tilde{x}_p}(\omega)\hat{\phi}_{J+1}(\omega). \tag{19}$$

Следовательно, $\tilde{x}_p \in \mathbf{V}_{J+1}$. Вместе с тем, если частотная характеристика $\hat{\lambda}(\omega)$ непрерывна и не равна нулю на $\left[-2^J(4\pi/3); 2^J(4\pi/3) \right]$, то и частотная функция $\hat{K}(\omega)$ обладает такими же свойствами. Тогда (1) имеет единственное решение, что и требовалось доказать.

Если $y(t) \notin \mathbf{V}_J$, то осуществляем проекцию $y(t)$ на пространство масштабирующих функций са-

мого точного масштаба \mathbf{V}_J . В результате уравнение свертки преобразуется к виду

$$(\lambda^*x)(t) = y_J(t), \text{ где } y_J(t) = P_J y(t). \tag{20}$$

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{x}_{J+1}(t) \in \mathbf{V}_{J+1}$ такое, что $(\lambda^*\tilde{x}_{J+1})(t) = y_J(t)$. Таким образом, $\tilde{x}_{J+1}(t)$ является вейвлет-аппроксимацией точного решения \bar{x} и можно получить оценку.

Теорема 2. Пусть ядро интегрального уравнения типа свертки $\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ имеет ненулевое преобразование Фурье, $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$ на $\text{supp}(\hat{\phi})$, где $\phi(t)$ – масштабирующая функция из вейвлет-систем Кравченко. Если α, β – действительные числа такие, что $1 \leq \alpha \leq \beta$, $\hat{\lambda}(\omega) \geq C(1 + \omega^2)^{-\alpha/2}$, $y \in H^\beta$, то имеет место следующая оценка:

$$\|x - \tilde{x}_{J+1}\|_{L^2} \leq C \|y - y_J\|_{H^\beta}. \tag{21}$$

Доказательство. Используя унитарность преобразования Фурье, запишем

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}_{J+1}\|_{L^2} &= \left(\int |\hat{K}(\omega)(\hat{y} - \hat{y}_J)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right] \frac{|y - y_J|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2} d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как регуляризирующий компонент $R(\omega)$ всегда положительный и $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$, то стабилизирующий мно-

житель принимает значение $0 < \frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \leq 1$.

Тогда

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right] |\hat{y} - \hat{y}_J|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \left(C^2 \int |\hat{y} - \hat{y}_J|^2 (1 + \omega^2)^\beta d\omega \right)^{1/2} \leq C \|y - y_J\|_{H^\beta}.$$

Теорема доказана.

Согласно теореме 1, если функция правой части $y(t) \in \mathbf{V}_J$, то

$$\tilde{x}_p(t) = P_{J+1} \tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^{\tilde{x}_p} \Phi_{J+1,k}(t). \quad (22)$$

Так как наблюдается не сигнал $x(t)$, а его линейное преобразование $\mathcal{L}x(t)$, то коэффициенты разложения в (22) вычислить сразу нельзя. Поэтому будем использовать последовательность функций $\{\xi_{J,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ таких, что

$$(x(t), \Phi_{J,k}(t)) = (\mathcal{L}x(t), \xi_{J,k}(t)).$$

Так как преобразование \mathcal{L} однородно, то функция $\xi_{J,k}(t)$ также представляет собой сдвиги и растяжения/сжатия некоторой функции $\xi(t)$. При этом семейство функций $\{\xi_{J,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ уже не обладает свойством ортонормированности, но образует устойчивый базис. Следовательно, должны существовать такие константы $0 < A \leq B < \infty$, что

$$A \sum_k c_{J,k}^2 \leq \left\| \sum_k c_{J,k} \xi_{J,k} \right\|^2 \leq B \sum_k c_{J,k}^2$$

для всех квадратично суммируемых последовательностей $\{c_{J,k}\}$ (доказательство см. ниже).

Задача построения функций $\xi_{J,k}(t)$ может быть решена с использованием двойственного базиса $\tilde{\xi}_{J,k}(t)$ в $L^2(\mathbb{R})$. Известно [13–15], что базис $\tilde{\xi}_{J,k}(t)$, удовлетворяющий соотношениям двойственности $(\xi_{J,n}(t), \tilde{\xi}_{J,k}(t)) = \delta_{n,k}$, существует и более того, допускает построение биортогональной системы вейвлетов [13–15], с помощью которой можно выполнить оценку полезного сигнала $x(t)$ первоначально искаженного импульсной характеристикой $\lambda(t)$ с последующим действием шума $n(t)$.

3. ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ЧАСТОТНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВЕЙВЛЕТОВ

Пусть неизвестная функция $x(t)$ в (1) принадлежит пространству масштабирующих функций $\mathbf{V}_{J+1} = \overline{\cup \{\Phi_{J+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$, где $\Phi(t)$ – ортонормированная масштабирующая функция с финитным спектром. В качестве $\Phi(t)$ в соответствии с описанными ранее преимуществами примем масштабирующую

функцию из семейства вейвлет-базисов Кравченко $\{\tilde{u}_p(\omega)\}$ [25–28]. Представим оценку полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ в виде разложения по $\{\Phi_{J+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^{\tilde{x}_p} \Phi_{J+1,k}(t). \quad (23)$$

Если (4) записать в виде $\hat{K}(\omega)^{-1} \hat{x}_p(\omega) = \hat{y}(\omega)$, то получим

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{K}(\omega)^{-1} \hat{\Phi}_{J+1}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{J+1}) = \hat{y}(\omega). \quad (24)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{j,k}(\omega) &= \hat{K}(\omega)^{-1} \hat{\Phi}_{j,k}(\omega) = \\ &= \hat{K}(\omega)^{-1} \times 2^{-j} \hat{\Phi}(2^{-j}\omega) \exp(-ik\omega/2^j), \end{aligned} \quad (25)$$

тогда уравнение (24) примет следующий вид:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\xi}_{J+1}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{J+1}) = \hat{y}(\omega). \quad (26)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения типа свертки (1) относительно неизвестной функции $x(t)$ соответствует решению (26) относительно неизвестной последовательности коэффициентов разложения $\{a_{J+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$, которые находятся как скалярное произведение известной функции $y(t)$ и функций $\{\tilde{\xi}_{J,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, являющихся двойственным базисом по отношению к $\{\xi_{J,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$.

С учетом того, что в практике обработки сигналов существуют разные способы задания стабилизирующего множителя $\hat{K}(\omega)$, а иногда требуется и дополнительная коррекция этой частотной характеристики сигнала, введем функцию $\hat{D}(\omega)$ модифицирующую $\hat{\Phi}_{j,k}(\omega)$, которая допускает представление (25) в виде $\hat{\xi}_{j,k}(\omega) = \hat{D}(\omega) \hat{\Phi}_{j,k}(\omega)$.

Для решения (1) с использованием ДВП необходима новая биортогональная вейвлет-система, которая включает модифицированные в частотной области масштабирующие функции и вейвлеты, образующие две пары функций $\xi(t)$, $\gamma(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$ такие, что $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ порождают пространство масштабирующих функций \mathbf{U}_j и пространство вейвлетов \mathbf{S}_j , а функции $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ образуют двойственные базисы. Как это следует из [13–21, 35], подпространства \mathbf{S}_j , $\tilde{\mathbf{S}}_j$ получаются как ортогональное дополнение к вложенной системе подпространств \mathbf{U}_j , $\tilde{\mathbf{U}}_j$

$$\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j.$$

Подпространства \mathbf{S}_j , $\tilde{\mathbf{S}}_j$ взаимно ортогональны и образуют ортогональное разложение $L^2(\mathbb{R})$. Рас-

смотрим функции $\xi_{j,k}(t) = \xi_j(t - 2^{-j}k)$, $\gamma_{j,k}(t) = \gamma_j(t - 2^{-j}k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{j,k}(\omega) &= \hat{D}(\omega)\hat{\phi}_{j,k}(\omega) = \\ &= \hat{D}(\omega) \times 2^{-\frac{j}{2}} \hat{\phi}(2^{-j}\omega) \exp(-ik\omega/2^j), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{j,k}(\omega) &= \hat{D}(\omega)\hat{\psi}_{j,k}(\omega) = \\ &= \hat{D}(\omega) \times 2^{-\frac{j}{2}} \hat{\psi}(2^{-j}\omega) \exp(-ik\omega/2^j), \end{aligned} \tag{28}$$

где $\hat{\phi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ – спектры функций из ортонормированной вейвлет-системы (ранее приняты вейвлеты Кравченко $\{\widetilde{up}(\omega)\}$). Преобразования (27), (28) осуществляют линейное отображение подпространств КМА \mathbf{V}_j и \mathbf{W}_j в новые подпространства \mathbf{U}_j и \mathbf{S}_j . Новые функции $\xi_{j,k}$, $\gamma_{j,k}$ являются образами масштабирующей функции $\phi_{j,k}$ и вейвлета $\psi_{j,k}$ в подпространствах \mathbf{U}_j и \mathbf{S}_j . Согласно требованиям КМА [13–21, 35] эти функции должны образовывать базис Рисса.

Лемма 1. Если $j < j_{\max}$, то системы функций $\{\xi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\gamma_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ являются базисом Рисса подпространств \mathbf{U}_j и \mathbf{S}_j .

Доказательство. Линейная оболочка $\{\xi_{j,k}(t) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ плотна в $L^2(\mathbb{R})$. Для доказательства того, что $\xi_{j,k}(t)$ образует базис Рисса, покажем, что существуют положительные константы A и B ($0 < A \leq B < \infty$) в \mathbf{U}_0 такие, что

$$A \|\{c_k\}\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_k c_k \xi_{j,k} \right\|_{l_2}^2 \leq B \|\{c_k\}\|_{l_2}^2, \tag{29}$$

$$j = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

для всех бесконечных суммируемых с квадратом последовательностей $\{c_k\}$.

Согласно определению нормы и равенству Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{\phi}(\omega)|^2 |\hat{D}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Пусть при некотором $|\omega| \geq \Omega$, $\hat{\phi}(\omega) \approx 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 &\leq \left(\sup_{|\omega| \geq \Omega} |\hat{D}(\omega)|^2 \right) \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega = B \sum_k |c_k|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 &\geq \left(\inf_{|\omega| \leq \Omega} |\hat{D}(\omega)|^2 \right) \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega = A \sum_k |c_k|^2. \end{aligned}$$

При значениях масштаба $j \geq j_{\max}$ ($j_{\max} > 0$) может возникнуть ситуация, когда $B = \sup_{\omega \in [-2^{j_{\max}}\Omega, 2^{j_{\max}}\Omega]} |\hat{D}(\omega)|^2$ становится бесконечно большим и условие устойчивости (29) нарушается. В другом случае, когда $j \leq j_{\min}$ ($j_{\min} < 0$) может оказаться, что

$$\begin{aligned} \inf_{\omega \in [-2^{j_{\min}}\Omega, 2^{j_{\min}}\Omega]} |\hat{D}(\omega)|^2 &= \\ &= \sup_{\omega \in [-2^{j_{\min}}\Omega, 2^{j_{\min}}\Omega]} |\hat{D}(\omega)|^2 \end{aligned}$$

и система функций $\xi_{j,k}(t)$ вырождается в ортонормированный базис. При $j \neq 0$ лемма доказывается аналогично. Повторяя приведенные выше действия для случая $\gamma_{j,k}(t)$ можно доказать, что $\gamma_{j,k}(t)$ образует базис Рисса.

Следующая лемма показывает, что подпространства $\{\mathbf{U}_j\}$ образуют вложенную последовательность и удовлетворяют таким пунктам определения КМА

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j = \{0\}, \tag{30}$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j} = L^2(\mathbb{R}). \tag{31}$$

Лемма 2. Последовательность вложенных подпространств $\{\mathbf{U}_j\}$ удовлетворяет всем требованиям КМА и $\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$.

Доказательство. Преобразование (27) переводит любую функцию $f(t) \in \mathbf{V}_j$ в соответствующий единственный элемент $u(t) \in \mathbf{U}_j$. Так как $\{\mathbf{V}_j\}$ образуют вложенную систему подпространств, то $f(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$, следовательно, справедливо, что $u(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ и существует цепочка

$$\dots \subset \mathbf{U}_{-2} \subset \mathbf{U}_{-1} \subset \mathbf{U}_0 \subset \mathbf{U}_1 \subset \mathbf{U}_2 \subset \dots$$

Таким образом, $\{\mathbf{U}_j\}$ образуют последовательность вложенных подпространств.

Требование $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j = \{0\}$ из определения КМА проверяется от обратного.

Утверждение КМА $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j} = L^2$ будет доказано, если $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$ и $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$.

Пусть некоторая функция $f(t) \in \mathbf{V}_j$, тогда $f(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ если

$$\hat{f}(\omega) = a_{j+1}^f(\omega) \xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \tag{32}$$

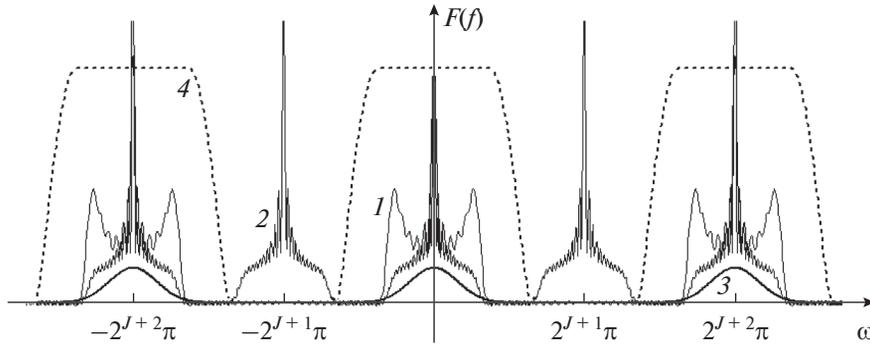


Рис. 2. Графики функций: кривая 1 – $a_{j+1}^f(\omega)$, кривая 2 – $b_j^f(\omega)$, кривая 3 – $\left[\hat{D}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}, 2^j \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{j+2}\pi}$, кривая 4 – $H_0(\omega/2^{j+1})$.

где $a_{j+1}^f(\omega)$ – должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией. Поскольку $f(t) \in \mathbf{V}_j$, то

$$\hat{f}(\omega) = b_j^f(\omega) \varphi\left(\frac{\omega}{2^j}\right), \quad (33)$$

где $b_j^f(\omega)$ – $2^{j+1}\pi$ -периодическая функция, а масштабирующая функция φ принадлежит вейвлет-системе Кравченко. С учетом масштабирующего уравнения в частотной области имеем

$$\hat{f}(\omega) = b_j^f(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (34)$$

где произведение первых двух членов является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией, поскольку функция $H_0(\omega/2^{j+1})$ периодическая с периодом $2^{j+2}\pi$, а также не равна нулю на интервалах $\left[-2^j(4\pi/3) + 2^{j+2}\pi k; 2^j(4\pi/3) + 2^{j+2}\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$.

Из (18) и (27) получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= a_{j+1}^f(\omega) \hat{D}(\omega) \varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) = \\ &= a_{j+1}^f(\omega) \left[\hat{D}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}, 2^j \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{j+2}\pi} \varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Равенства (34) и (35) эквивалентны, когда $a_{j+1}^f(\omega)$ – $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, а $\hat{D}(\omega)$ периодически продолжена с периодом $2^{j+2}\pi$ (рис. 2). Следовательно, $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$.

Справедливость вложенности подпространств $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$ можно показать, если предположить, что некоторая функция $f(t) \in \mathbf{U}_j$. Тогда $f(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$, если

$$\hat{f}(\omega) = b_{j+1}^f(\omega) \varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (36)$$

где $b_{j+1}^f(\omega)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, а функция φ также из вейвлет-системы Кравченко. Поскольку $f(t) \in \mathbf{U}_j$, то $\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}(\omega/2^j)$, где $a_j^f(\omega)$ – $2^{j+1}\pi$ -периодическая функция. После преобразования это равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= a_j^f(\omega) \hat{D}(\omega) \varphi\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \\ &= a_j^f(\omega) \left[\hat{D}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}, 2^j \frac{4\pi}{3} \right]} \right]_{2^{j+2}\pi} H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \end{aligned} \quad (37)$$

где произведение первых трех членов является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией $b_{j+1}^f(\omega)$ (рис. 3). Следовательно, $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$ и выполняется требование КМА $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j = L^2$, так как $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j = L^2$.

Обобщив условия $\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j$ и $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, получим доказательство утверждения $\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$. Выполнение условия, чтобы сдвиги частотно-модифицированной масштабирующей функции $\{\xi_j(t - 2^{-j}k) : k \in \mathbb{Z}\}$ образовывали базис Рисса, следует из леммы 1.

Покажем справедливость соотношения масштабируемости. Пусть некоторая функция $f(t) \in \mathbf{U}_j$. Тогда

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}(\omega/2^j), \quad (38)$$

где $a_j^f(\omega)$ – $2^{j+1}\pi$ -периодическая функция.

Если $f(2t) \in \mathbf{U}_{j+1}$, то

$$\hat{f}(\omega/2) = a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}(\omega/2^{j+1}), \quad (39)$$

где $a_{j+1}^f(\omega)$ должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией.

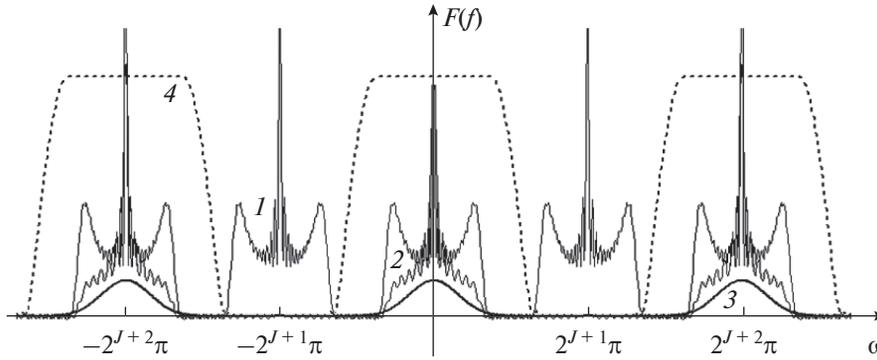


Рис. 3. Графики функций: кривая 1 – $a_j^f(\omega)$, кривая 2 – $b_{j+1}^f(\omega)$, 3 – $\left[\hat{D}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^{j+2}\pi/3, 2^{j+2}\pi/3 \right]} \right]_{2^{j+2}\pi}$, кривая 4 – $H_0(\omega/2^{j+1})$.

Действительно, производя замену переменной $w = \omega/2$ в (38), получим $a_{j+1}^f(\omega) = a_j^f(\omega/2)$. Следовательно, $a_{j+1}^f(\omega)$ является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией. При этом справедливо соотношение масштабируемости $f(t) \in U_j \Leftrightarrow f(2t) \in U_{j+1}$. От соотношения масштабируемости классического КМА это отличается тем, что пространства $\{U_j\}$ образуют нестационарные по отношению к масштабу функции ξ_j , что следует из (27). При каждом значении масштаба j функция $\xi_j(t)$ уже не является результатом растяжения/сжатия одной функции, как в случае классического КМА. В зависимости от масштаба j изменяется носитель функции $\hat{\phi}_j(\omega)$, а также охватываемый $\hat{\phi}_j(\omega)$ частотный поддиапазон функции $\hat{D}(\omega)$. Поэтому функции ξ_j существуют только в диапазоне масштабов, которые ограничены частотным диапазоном функции $\hat{D}(\omega)$. На практике другие значения масштабов не используются, так как спектр наблюдаемого сигнала всегда находится в пределах спектрального диапазона функции $\hat{D}(\omega)$. Сформулируем требования к подпространству модифицированных вейвлет-функций.

Лемма 3. Если $j < j_{\max}$, то подпространства S_j являются ортогональным дополнением к вложенной системе подпространств U_j

$$U_{j+1} = U_j \oplus S_j.$$

Доказательство. Преобразование (27) переводит любую функцию $f(t) \in V_{j+1}$ в соответствующий единственный элемент $u(t) \in U_{j+1}$. Так как $\{V_j\}$ образуют КМА, то для каждого j существует ортогональное дополнение W_j к пространству V_j в пространстве V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad W_j \subset V_{j+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= a_{j+1}^f(\omega)\phi_{j+1}(\omega) = \\ &= a_j^f(\omega)\phi_j(\omega) + b_j^f(\omega)\psi_j(\omega). \end{aligned} \tag{40}$$

Исходя из того, что $\{U_j\}$ удовлетворяют всем требованиям КМА и $u(t) \in U_{j+1}$ является проекцией $f(t)$ из $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, имеет место представление $U_{j+1} = U_j \oplus S_j$, $U_j \subset U_{j+1}$, $S_j \subset U_{j+1}$. Базисом для подпространства S_j являются сдвиги и масштабирование одной функции γ .

Таким образом, с учетом нестационарности по отношению к масштабу запишем

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_{j+1}^u(\omega)\xi_{j+1}(\omega) = \\ &= a_j^u(\omega)\xi_j(\omega) + b_j^u(\omega)\gamma_j(\omega). \end{aligned} \tag{41}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $U_j = U_{j-1} \oplus S_{j-1}$. Следовательно, $U_{j+1} = U_{j-1} \oplus S_{j-1} \oplus S_j$. Продолжая эту процедуру, получим ортогональное разложение пространства $U_{j+1} : U_{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^j S_k$. Свойство КМА $\bigcup_{j \in Z} U_j = L^2$ формально позволяет представить $L^2 = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} S_k$. Так же как и для модифицированных масштабирующих функций $\xi(t)$, для вейвлет-функций $\gamma(t)$ существует ограничение по масштабу $j < j_{\max}$, больше которого условие устойчивости нарушается. На рис. 4 показано взаимное расположение образов Фурье функций $\hat{\phi}(\omega/2^{j_{\max}})$, $\hat{\psi}(\omega/2^{j_{\max}})$, $\hat{D}(\omega)$.

Получается, что если даже произведение $\hat{D}(\omega)\hat{\phi}(\omega/2^{j_{\max}})$ ограничено, то $\hat{D}(\omega)\hat{\psi}(\omega/2^{j_{\max}})$ может выйти за динамический диапазон измерения.

С помощью теоремы о двойственном базисе [13–15] и с учетом доказанных выше лемм найдем остальные модифицированные функции

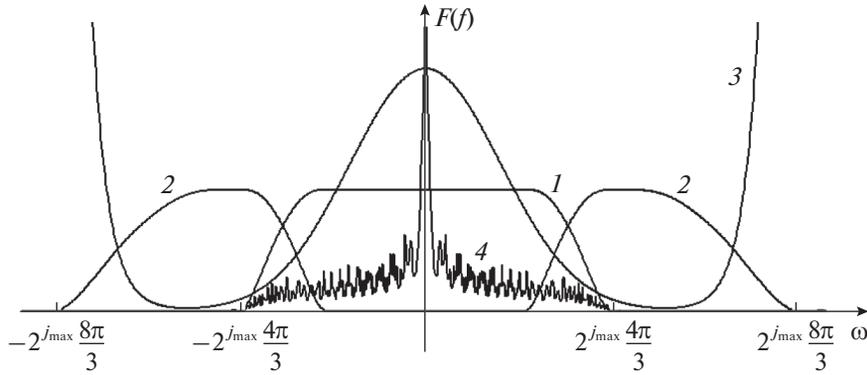


Рис. 4. Графики функций: кривая 1 – $\hat{\phi}(\omega/2^{j_{max}})$, кривая 2 – $\hat{\psi}(\omega/2^{j_{max}})$, кривая 3 – $\hat{D}(\omega)$, кривая 4 – $\hat{f}(\omega)$.

$\xi_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, которые образуют двойственные базисы к $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, порождают пространство масштабирующих функций \tilde{U}_j и пространство вейвлетов \tilde{S}_j такие, что $U_j \perp \tilde{S}_j$, $\tilde{U}_j \perp S_j$, $S_j \perp \tilde{S}_l$ при $j \neq l$, $\tilde{U}_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$, $\tilde{U}_j \cap \tilde{S}_j = \{0\}$, $\tilde{U}_j \subset \tilde{U}_{j+1}$, $\tilde{S}_j \subset \tilde{U}_{j+1}$.

Непосредственное применение теоремы о двойственном базисе из [13–15] определяет преобразование Фурье базисной функции, двойственной к $\xi_j(t)$, в том смысле, что $(\xi_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) = \delta_{n,k}$, следующим образом:

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \frac{\xi_j(\omega)}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\xi_j(\omega + 2\pi p)|^2}. \quad (42)$$

Знаменатель в (42) ограничен почти всюду с границами Рисса [13–15] A и B , $0 < A \leq B < \infty$, которые получены в доказательстве леммы 1

$$A \leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\xi_j(\omega + 2\pi p)|^2 \leq B.$$

Поскольку $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\xi_j(\omega + 2\pi p)|^2$ ограничена снизу положительной константой, очевидно, что $1/\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\xi_j(\omega + 2\pi p)|^2$ также 2π -периодическая функция, принадлежащая $L^1(0, 2\pi)$.

Таким же образом [13–15] определим преобразование Фурье двойственного к вейвлет-функции $\gamma_j(t)$ базиса $\tilde{\gamma}_j(t)$, для которого справедливо равенство $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{j,l} \delta_{n,k}$

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = \frac{\tilde{\gamma}_j(\omega)}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{\gamma}_j(\omega + 2\pi p)|^2}. \quad (43)$$

Так как соотношение двойственности $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{j,l} \delta_{n,k}$ коммутативно, то $\tilde{\gamma}_j(t)$ –

двойственное вейвлета $\gamma_j(t)$, само является вейвлетом с двойственным $\tilde{\gamma}_j(t)$.

Полученные пары модифицированных функций удовлетворяют соотношениям биортогональности $(\xi_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) = \delta_{n,k}$, $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{j,l} \delta_{n,k}$, но нарушаются обязательные условия существования биортогональной вейвлет-системы $(\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) = 0$, $(\gamma_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) = 0$. Поэтому необходимо перейти к новой стратегии формирования модифицированных двойственных базисов.

Для этого введем 2π -периодическую функцию $E_j^\xi(\omega) \in L_1(0, 2\pi)$:

$$E_j^\xi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{D}(2^j(\omega + 2\pi n)) \hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2. \quad (44)$$

Из (44) следует, что $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\xi_j(\omega + 2\pi p)|^2 = E_j^\xi(\omega/2^j)$ и $E_j^\xi(\omega)$ также ограничена почти всюду константами A и B , $0 < A \leq B < \infty$, $A \leq E_j^\xi(\omega) \leq B$. Тогда $1/E_j^\xi(\omega)$ является ограниченной 2π -периодической функцией в $L^1(0, 2\pi)$, $1/B \leq 1/E_j^\xi(\omega) \leq 1/A$. Обращаясь к масштабирующим уравнениям в частотной области сформулируем теорему.

Теорема 3. Пусть масштабирующая функция $\xi_{j,k}(t) \in U_j$, определяемая (27), порождает КМА в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, а вейвлет $\gamma_{j,k}(t) \in S_j$ при разложении $U_{j+1} = U_j \oplus S_j$ задан (28). Тогда существуют двойственные базисы $\xi_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, заданные формулами

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \frac{\xi_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}, \quad (45)$$

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = \frac{\tilde{\gamma}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}, \quad (46)$$

где

$$E_j^\xi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{D}(2^j(\omega + 2\pi n)) \hat{\phi}(\omega + 2\pi n) \right|^2,$$

такие, что

а) системы функций $\{\xi_{j,k}(t): k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{\gamma}_{j,k}(t): k \in \mathbb{Z}\}$ являются базисами Рисса подпространств \tilde{U}_j и \tilde{S}_j ;

б) вложенная система базисных подпространств $\{\tilde{U}_j\}$ с ортогональными дополнениями \tilde{S}_j образует, возможно, новый КМА и $V_{j-1} \subset \tilde{U}_j \subset V_{j+1}$, $\tilde{U}_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$;

в) справедливо соотношение масштабируемости $f(t) \in \tilde{U}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \tilde{U}_{j+1}$;

г) обладают свойствами

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) &= 0, \\ (\gamma_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) &= 0 \quad \text{при } j \neq l. \end{aligned}$$

Таким образом, $U_j \perp \tilde{S}_j$, $\tilde{U}_j \perp S_j$ и $S_j \perp \tilde{S}_j$ при $j \neq l$. Следовательно, две пары функций $\xi(t)$, $\gamma(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$ формируют биортогональную вейвлет-систему.

Доказательство. Сначала покажем, что $\xi_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ двойственные базисы. Из непосредственного применения равенства Парсеваля и периодичности функций $H_0(\omega)$, $1/E_{j+1}^\xi(\omega)$ при $p = k - n$ получим

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) &= \int \xi_j(t) \overline{\xi_{j,p}(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\xi}_j(\omega)} \exp(-ip\omega/2^j) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \times \\ &\times \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |D(2^{j+1}(\omega + 2\pi q)) \hat{\phi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} \exp(i2p\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\xi_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \exp(i2p\omega) d\omega.$$

Исходя из того, что $H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \exp(-in\omega)$, получим

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \xi_{j,k}(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \exp(-im\omega) \right) \times \\ &\times \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \exp(-il\omega) \right)} \exp(i2p\omega) d\omega = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_{m-2p}} = \delta_{0p}. \end{aligned}$$

Также доказывается биортогональность по сдвигу для модифицированных вейвлетов $\gamma_{j,n}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{l,k}(t)$. При $j = l$ и $p = k - n$

$$\begin{aligned} (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) &= \int \gamma_j(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j,p}(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\gamma}_j(\omega) \overline{\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega)} \exp(ip\omega/2^j) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega + \pi) \overline{H_0(\omega + \pi)} \exp(i2p\omega) d\omega = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_{m-2p}} = \delta_{0p}. \end{aligned}$$

Ортогональность относительно масштаба при $j \neq l$ будет доказана ниже.

Доказательство того, что $\xi_{j,k}(t)$ образует базис Рисса проведем аналогично лемме 1. Пусть существуют положительные константы \tilde{A} и \tilde{B} ($0 < \tilde{A} \leq \tilde{B} < \infty$) в \tilde{U}_0 такие, что

$$\tilde{A} \| \{c_k\} \|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_k c_k \xi_{j,k} \right\|_{l_2}^2 \leq \tilde{B} \| \{c_k\} \|_{l_2}^2, \quad (47)$$

$$j = 0, k \in \mathbb{Z},$$

для всех $\| \{c_{j,k}\} \|_{l_2}^2 = \sum_k |c_{j,k}|^2 < \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \xi_0(t - k) \right\|_{l_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int \left| \hat{\xi}_0(\omega) / E_1^\xi \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi A} \int \left| \hat{\xi}_0(\omega) \right|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Пусть при некотором $|\omega| \geq \Omega$, $\hat{\phi}(\omega) \approx 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \xi_0(t - k) \right\|_{l_2}^2 &\leq \left(\sup |D(\omega)| \right)_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\pi A} \times \\ &\times \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega = \tilde{B} \sum_k |c_k|^2. \end{aligned}$$

Подобным образом,

$$\left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 \geq \left(\inf |D(\omega)|^2 \right)_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\pi B} \times \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k \exp(-ik\omega) \right|^2 d\omega = \tilde{A} \sum_k |c_k|^2.$$

При $j \neq 0$ доказательство проводится аналогично. Для $\xi_{j,k}(t)$ также будет существовать ограничение на значения масштаба $j \geq j_{\max}$ ($j_{\max} > 0$), при котором условие устойчивости (47) нарушается. Похожим образом проводится доказательство того, что $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ образует базис Рисса.

Справедливость того, что последовательность вложенных подпространств $\{\tilde{U}_j\}$ образует новый КМА и $\mathbf{V}_{j-1} \subset \tilde{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, а также то, что подпространства \tilde{S}_j являются ортогональным дополнением к базисной системе $\{\tilde{U}_j\}$ и $\tilde{U}_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$ доказывается, так же как в лемме 2 и лемме 3.

Покажем справедливость соотношения масштабируемости в соответствии с ранее проведенным доказательством в лемме 2. Пусть некоторая функция $f(t) \in \tilde{U}_j$, следовательно

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}(\omega/2^j), \quad (48)$$

где $a_j^f(\omega) - 2^{j+1}\pi$ -периодическая функция.

Тогда $f(2t) \in \tilde{U}_{j+1}$, если

$$\hat{f}(\omega/2) = a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}(\omega/2^{j+1}), \quad (49)$$

где $a_{j+1}^f(\omega)$ должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией.

Производя замену переменной $w = \omega/2$ в (48) получим $a_{j+1}^f(\omega) = a_j^f(\omega/2)$. Следовательно, $a_{j+1}^f(\omega)$ это $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция и справедливо соотношение масштабируемости $f(t) \in \tilde{U}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \tilde{U}_{j+1}$.

Отметим, что пространства $\{\tilde{U}_j\}$ также образуют нестационарные по отношению к масштабу функции ξ_j .

Чтобы показать, что удовлетворяется свойство ортогональности подпространств $U_j \perp \tilde{S}_j$ и $\tilde{U}_j \perp S_j$, определим соответствующее скалярное произведение порождающих функций

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) &= \int \xi_j(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j,p}(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\gamma}_j(\omega)} \exp(ip\omega/2^j) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \exp(-i\omega) H_0(\omega + \pi) \exp(-i2p\omega) d\omega = \\ &= \sum_{m \in Z} (-1)^m h_{2p-1-m} h_m = 0. \end{aligned}$$

Поступая аналогично для доказательства ортогональности $\tilde{U}_j \perp S_j$, имеем

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \gamma_{j,k}(t)) &= \int \xi_j(t) \overline{\gamma_{j,p}(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\gamma}_j(\omega)} \exp(ip\omega/2^j) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \exp(-i\omega) H_0(\omega + \pi) \exp(i2p\omega) d\omega = \\ &= \sum_{m \in Z} (-1)^m h_{2p-1-m} h_m = 0. \end{aligned}$$

Покажем биортогональность относительно масштаба для модифицированных вейвлетов $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{n,k} \delta_{j,l}$. Ранее был рассмотрен случай при $j = l$. Если $j \neq l$, то для $l < j$ имеем $\tilde{\gamma}_{l,k} \in \tilde{S}_l$, $k \in \mathbb{Z}$ и $\tilde{S}_l \subset \tilde{U}_{l+1} \subset \dots \subset \tilde{U}_{j-1} \subset \tilde{U}_j$. Исходя из утверждения $\tilde{U}_j \perp S_j$, получим $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = 0$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Для $l > j$ могут быть сделаны такие же заключения с использованием второго утверждения $U_j \perp \tilde{S}_j$.

Это завершает доказательство теоремы. Таким образом, из теоремы следует, что две пары функций ξ, γ и $\tilde{\xi}, \tilde{\gamma}$ формируют биортогональную вейвлет-систему (рис. 5).

При этом обеспечивается выполнение следующих необходимых условий на вейвлеты и масштабирующую функции [13–21]:

$$\begin{aligned} \int \xi(t) dt &= \hat{D}(0), \quad \int \tilde{\xi}(t) dt = \overline{\hat{D}}^{-1}(0), \\ \int \gamma(t) dt &= 0, \quad \int \tilde{\gamma}(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, новые модифицированные базисные функции полученной вейвлет-системы:

- образуют биортогональную систему базисных функций, формирующих нестационарный кратномасштабный анализ сигналов в $L^2(\mathbb{R})$;
- являются нестационарными по отношению к масштабу j , так как в зависимости от j изменяется носитель спектра функций $\phi_j(t)$, $\psi_j(t)$ и, соответственно, интервал охватываемого ими частотного поддиапазона функции $\hat{D}(\omega)$;
- вырождаются при $\hat{D}(\omega) = \text{const}$ в соответствующие исходные функции $\phi_j(t)$ и $\psi_j(t)$.

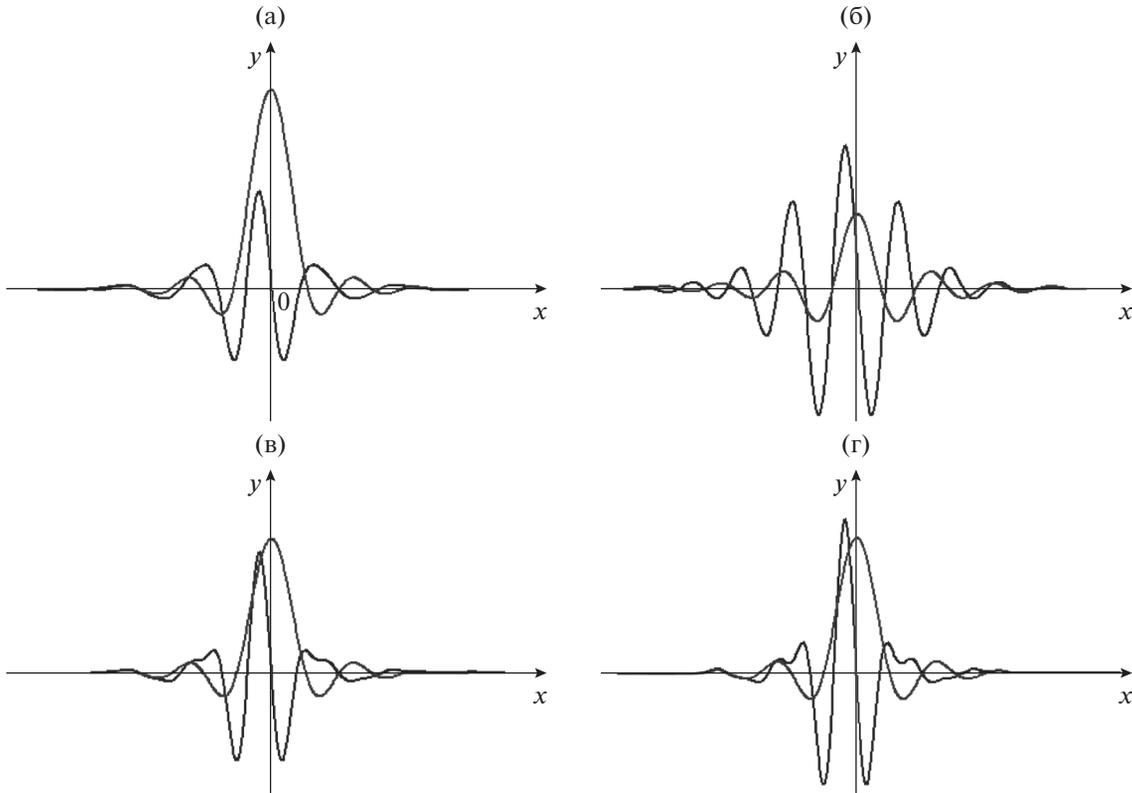


Рис. 5. Графики биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко $\{\tilde{u}_p\}$: $\xi_{j,0}(t), \gamma_{j,0}(t)$ (а), $\xi_{j,0}(t), \tilde{\gamma}_{j,0}(t)$ (б), $\xi_{j-2,0}(t), \gamma_{j-2,0}(t)$ (в), $\xi_{j-2,0}(t), \tilde{\gamma}_{j-2,0}(t)$ (г).

4. МАСШТАБИРУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ЧАСТОТНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВЕЙВЛЕТОВ

Так как базисные подпространства U_j и \tilde{U}_j формируют КМА, то функции $\xi_j \in U_j, \gamma_j \in S_j, \tilde{\xi}_j \in \tilde{U}_j, \tilde{\gamma}_j \in \tilde{S}_j$ аналогично классическим масштабирующим уравнениям [13–21, 35] могут быть выражены в виде линейной комбинации своих масштабирующих функций $\xi_{j+1} \in U_{j+1}$ или $\tilde{\xi}_{j+1} \in \tilde{U}_{j+1}$.

Для функции $\xi_{j,k}(t)$ имеем соотношение

$$\xi_{j,n}(t) = \sum_k (\xi_{j,n}, \xi_{j+1,k}) \xi_{j+1,k}(t), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (50)$$

Скалярное произведение под знаком суммы будет равно

$$(\xi_{j,n}, \xi_{j+1,k}) = \int \xi_{j,n}(t) \overline{\xi_{j+1,k}(t)} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_{j,n}(t) &= \sum_k h_{k-2n} \xi_{j+1,k}(t) = \\ &= \sqrt{2^{j+1}} \sum_k h_{k-2n} \xi(2^{j+1}t - k), \end{aligned} \quad (51)$$

$j, n, k \in \mathbb{Z},$

или в области частот

$$\hat{\xi}_j(\omega) = H(\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (52)$$

Аналогичным образом определим скалярное произведение для масштабирующего соотношения

$$\begin{aligned} \xi_{j,n}(t) &= \sum_k (\tilde{\xi}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) \tilde{\xi}_{j+1,k}(t), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}, \\ (\tilde{\xi}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) &= \int \tilde{\xi}_{j,n}(t) \overline{\xi_{j+1,k}(t)} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n}. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \xi_{j,n}(t) &= \sum_k h_{k-2n} \tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \\ &= \sqrt{2^{j+1}} \sum_k h_{k-2n} \tilde{\xi}(2^{j+1}t - k), \end{aligned} \quad (54)$$

$j, n, k \in \mathbb{Z},$

$$\hat{\tilde{\xi}}_j(\omega) = H(\omega/2^{j+1}) \hat{\tilde{\xi}}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (55)$$

Построим масштабирующие соотношения, которым должны удовлетворять модифицированные вейвлет-функции $\gamma_{j,n}$ и $\tilde{\gamma}_{j,n}$. Для $\gamma_{j,n}$ имеем

$$\gamma_{j,n}(t) = \sum_k (\gamma_{j,n}, \xi_{j+1,k}) \xi_{j+1,k}(t), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (56)$$

В результате вычисления коэффициентов фильтра получим

$$\begin{aligned} (\gamma_{j,n}, \xi_{j+1,k}) &= \int \gamma_{j,n}(t) \overline{\xi_{j+1,k}(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\gamma}_j(\omega) \exp(-in\omega/2^j) \overline{\hat{\xi}_{j+1}(\omega)} \exp(ik\omega/2^{j+1}) d\omega = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n}. \end{aligned}$$

Теперь (56) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{j,n}(t) &= \sum_k g_{k-2n} \xi_{j+1,k}(t) = \\ &= \sqrt{2^{j+1}} \sum_k g_{k-2n} \xi(2^{j+1}t - k), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (57)$$

После преобразования Фурье это соотношение примет вид

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = G(\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (58)$$

Аналогичным образом для $\tilde{\gamma}_{j,n}$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{j,n}(t) &= \sum_k g_{k-2n} \tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \\ &= \sqrt{2^{j+1}} \sum_k g_{k-2n} \tilde{\xi}(2^{j+1}t - k), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (59)$$

В частотной области это соотношение принимает вид

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = G(\omega/2^{j+1}) \hat{\tilde{\xi}}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (60)$$

Свойства частотных функций построенной биортогональной вейвлет-системы хорошо известны [13–21, 35], так как они же являются соответствующими частотными функциями исходных вейвлет-базисов $H(\omega)$ для $\hat{\phi}(\omega)$ и $G(\omega)$ для $\hat{\psi}(\omega)$. Условие на биортогональные частотные функции

$$\bar{H}(\omega)\tilde{H}(\omega) + \bar{H}(\omega + \pi)\tilde{H}(\omega + \pi) = 2 \quad (61)$$

полностью подтверждается условием для ортонормированного случая [13–21, 35]

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2. \quad (62)$$

Согласно утверждениям леммы 2 и теоремы 3 о вложенности подпространств

$$\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}, \quad \mathbf{V}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{V}_{j+1},$$

можно получить другие масштабирующие соотношения. Так как $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, $\xi_j \in \mathbf{U}_j$, $\phi_{j+1} \in \mathbf{V}_{j+1}$, то существует такая $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция $\Theta_{j+1}(\omega/2^{j+1})$, что

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \Theta_{j+1}(\omega/2^{j+1}) \hat{\phi}_{j+1}(\omega). \quad (63)$$

Для определения Θ_{j+1} воспользуемся уравнением

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \hat{D}(\omega)H(\omega/2^{j+1})\hat{\phi}_{j+1}(\omega).$$

Здесь произведение первых двух членов должно образовывать $2^{j+2}\pi$ -периодическую функцию. Для

этого введем $2^{j+2}\pi$ -периодическое продолжение функции $\hat{D}(\omega)$ с промежутком $[-2^j(4\pi/3); 2^j(4\pi/3)]$ на \mathbb{R} (в случае использования вейвлетов Кравченко).

Тогда

$$\hat{\xi}_j(\omega) = D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})H(\omega/2^{j+1})\hat{\phi}_{j+1}(\omega). \quad (64)$$

Здесь $D_{j+1} * (\omega)$ – 2π -периодическая функция, определяемая равенством

$$\begin{aligned} D_{j+1} * (\omega) &= \\ &= \sum_l \chi_{\omega \in [-2^j \frac{4\pi}{3}, 2^j \frac{4\pi}{3}]}(2^{j+1}(\omega + 2\pi l)) \hat{D}(2^{j+1}(\omega + 2\pi l)), \end{aligned} \quad (65)$$

где $\chi_{\omega \in [-2^j \frac{4\pi}{3}, 2^j \frac{4\pi}{3}]}(\omega)$ – характеристическая функция интервала $[-2^j(4\pi/3); 2^j(4\pi/3)]$, при котором имеет место равенство $\hat{D}(\omega) = D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})$.

Следовательно,

$$\Theta_{j+1}(\omega/2^{j+1}) = D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})H(\omega/2^{j+1}). \quad (66)$$

В результате обратного преобразования Фурье выражения (64) с учетом произвольного значения сдвига n имеем

$$\xi_{j,n}(t) = \sum_k \theta_{j+1,k-2n} \phi_{j+1,k}(t). \quad (67)$$

Исходя из (66) формула для вычисления $\theta_{j+1,k}$ будет следующей:

$$\theta_{j+1,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{D}(2^{j+1}\omega)H(\omega) \exp(ik\omega) d\omega \quad (68)$$

Поступая аналогичным образом, получим выражение для преобразования Фурье модифицированного вейвлета $\gamma_{j,n}(t)$

$$\gamma_{j,n}(\omega) = N_{j+1}(\omega/2^{j+1})\hat{\phi}_{j+1}(\omega) \exp(-in\omega/2^j), \quad (69)$$

где $N_{j+1}(\omega/2^{j+1})$ является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{j,n}(\omega) &= D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})G(\omega/2^{j+1}) \times \\ &\times \hat{\phi}_{j+1}(\omega) \exp(-in\omega/2^j), \end{aligned} \quad (70)$$

$$N_{j+1}(\omega/2^{j+1}) = D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})G(\omega/2^{j+1}). \quad (71)$$

Тогда масштабирующее соотношение с коэффициентами фильтра можно представить в виде

$$\gamma_{j,n}(t) = \sum_k \eta_{j+1,k-2n} \phi_{j+1,k}(t), \quad (72)$$

$$\eta_{j+1,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{D}(2^{j+1}\omega)G(\omega) \exp(ik\omega/2^j) d\omega \quad (73)$$

Сдвиги биортогональной к $\xi_j \in U_j$ масштабирующей функции ξ_j порождают подпространство \tilde{U}_j , а согласно теореме 3 выполняется условие вложенности подпространств $\tilde{U}_j \subset V_{j+1}$. Следовательно, существует такая $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция $\tilde{\Theta}(\omega)$, что

$$\hat{\xi}_{j,n}(\omega) = \tilde{\Theta}_{j+1}(\omega/2^{j+1})\hat{\phi}_{j+1}(\omega) \exp(-in\omega/2^j). \quad (74)$$

После соответствующих преобразований имеем

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \frac{D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})H(\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}\hat{\phi}_{j+1}(\omega). \quad (75)$$

Тогда справедливо равенство

$$\tilde{\Theta}_{j+1}(\omega/2^{j+1}) = \frac{D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})H(\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}. \quad (76)$$

В (74) представим $\tilde{\Theta}_{j+1}(\omega/2^{j+1})$ в виде разложения в ряд Фурье

$$\hat{\xi}_{j,n}(\omega) = \left(\sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) \hat{\phi}_{j+1}(\omega) \exp(-in\omega/2^j), \quad (77)$$

где

$$\tilde{\theta}_{j+1,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{D}(2^{j+1}\omega)H(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega)} \exp(ik\omega) d\omega \quad (78)$$

В результате преобразования Фурье получим масштабирующее соотношение

$$\xi_{j,n}(t) = \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} \Phi_{j+1,k}(t). \quad (79)$$

Аналогично для вейвлет-функции $\tilde{\gamma}_{j,n}$ соответствующие выражения в частотной области будут иметь вид

$$\tilde{\gamma}_{j,n}(\omega) = \tilde{N}_{j+1}(\omega/2^{j+1})\hat{\phi}_{j+1}(\omega) \exp(-in\omega/2^j), \quad (80)$$

где $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция $\tilde{N}_{j+1}(\omega/2^{j+1})$, которая определяется следующим образом:

$$\tilde{N}_{j+1}(\omega/2^{j+1}) = \frac{D_{j+1} * (\omega/2^{j+1})G(\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}. \quad (81)$$

После обратного преобразования Фурье масштабирующее соотношение (80) во временной области представим в виде

$$\tilde{\gamma}_{j,n}(t) = \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} \Phi_{j+1,k}(t), \quad (82)$$

где

$$\tilde{\eta}_{j+1,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{D}(2^{j+1}\omega)G(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega)} \exp(in\omega) d\omega \quad (83)$$

Рассмотрим некоторые свойства коэффициентов фильтров $\{\theta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{\theta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\eta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$. Коэффициенты $\{\theta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\tilde{\theta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ биортогональны по отношению к двойному сдвигу

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \bar{\tilde{\theta}}_{j,n-2p} = \delta_{p,0}. \quad (84)$$

Это следует из равенства $(\xi_{j-1,0}(t), \tilde{\xi}_{j-1,p}(t)) = \delta_{p,0}$.

Коэффициенты масштабирующих $\{\theta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ и вейвлетных $\{\tilde{\eta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ фильтров обладают свойствами

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \bar{\tilde{\eta}}_{j,n-2p} = 0, \quad (85)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\theta}_{j,n} \bar{\eta}_{j,n-2p} = 0. \quad (86)$$

Кроме того, выполняются следующие условия на сумму коэффициентов

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} = \sqrt{2}D(0), \quad (87)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\theta}_{j,n} = \sqrt{2}D^{-1}(0), \quad (88)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\eta}_{j,k} = 0. \quad (89)$$

Соответствующие частотные функции должны удовлетворять соотношению, аналогичному (61)

$$\overline{\Theta_j(\omega)\tilde{\Theta}_j(\omega)} + \overline{\Theta_j(\omega + \pi)\tilde{\Theta}_j(\omega + \pi)} = 2. \quad (90)$$

Рассмотрим скалярное произведение при $p = k - n$

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \int \xi_j(t) \overline{\tilde{\xi}_{j,p}(t)} dt.$$

Используем равенство Парсеваля и полученные выше масштабирующие соотношения

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\tilde{\xi}}_j(\omega)} \exp(-ip\omega/2^j) d\omega = \\ &= \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int \Theta_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \times \\ &\times \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \exp(-ip\omega/2^j)} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(i2p\zeta) \frac{1}{2} \left\{ \overline{\Theta_{j+1}(\zeta) \tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta)} + \right. \\ &\left. + \overline{\Theta_{j+1}(\zeta + \pi) \tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi)} \right\} d\zeta = \delta_{p,0}. \end{aligned}$$

Полученное равенство имеет место только в том случае, когда

$$\overline{\Theta_{j+1}(\zeta) \tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta)} + \overline{\Theta_{j+1}(\zeta + \pi) \tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi)} = 2.$$

Это равенство справедливо для произвольного значения масштаба $j < j_{\max}$.

Еще один новый комплекс масштабирующих уравнений удается получить на основе построенной биортогональной системы функций, если выполнить преобразование формулы для двойственных базисов (45) с помощью соотношения (52)

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \frac{\xi_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})} = \frac{H(\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})} \hat{\xi}_{j+1}(\omega).$$

Здесь $H(\omega/2^{j+1})$ и $1/E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) - 2^{j+2}\pi$ -периодические функции и их произведение, также является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией. Откуда следует справедливость масштабирующего уравнения в частотной области для $\hat{\xi}_j \in \tilde{U}_j$ и $\hat{\xi}_{j+1} \in U_{j+1}$

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \tilde{H}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (91)$$

где

$$\tilde{H}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) = \frac{H(\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}. \quad (92)$$

Если переписать соотношение для двойственного базиса (45) в виде $\hat{\xi}_j(\omega) = E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_j(\omega)$, то таким же образом с учетом (55) получается масштабирующее уравнение в частотной области, которое выражает функцию $\xi_j \in U_j$ через масштабированную версию своего дуального базиса $\xi_{j+1} \in \tilde{U}_{j+1}$

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \tilde{H}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (93)$$

где $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция имеет вид

$$\tilde{H}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) = E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) H(\omega/2^{j+1}). \quad (94)$$

Переписав соотношение (46) в виде $\hat{\gamma}_j(\omega) = E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\gamma}_j(\omega)$, аналогичным образом построим новые масштабирующие уравнения для вейвлет-функций $\tilde{\gamma}_j \in \tilde{S}_j$ и $\gamma_j \in S_j$

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \tilde{G}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\gamma}_{j+1}(\omega), \quad (95)$$

где

$$\tilde{G}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) = \frac{G(\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}, \quad (96)$$

и

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \tilde{G}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\gamma}_{j+1}(\omega), \quad (97)$$

где

$$\tilde{G}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) = E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) G(\omega/2^{j+1}). \quad (98)$$

Обращаясь к полученным масштабирующим уравнениям в частотной области можно сформулировать теорему.

Теорема 4. Если $j < j_{\max}$, то справедлива вложенность подпространств

$$U_{j-1} \subset \tilde{U}_j \subset U_{j+1}, \quad \tilde{U}_{j-1} \subset U_j \subset \tilde{U}_{j+1},$$

а подпространства S_j и \tilde{S}_j являются также ортогональным дополнением к вложенной системе подпространств U_j и \tilde{U}_j до \tilde{U}_{j+1} и U_{j+1} соответственно

$$U_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j, \quad \tilde{S}_j \subset U_{j+1}, \quad \tilde{U}_{j+1} = U_j \oplus S_j, \\ S_j \subset \tilde{U}_{j+1}.$$

Доказательство. Для того чтобы показать вложенность масштабирующих подпространств, достаточно убедиться, что $\tilde{U}_j \subset U_{j+1}$ и $U_j \subset \tilde{U}_{j+1}$. Для доказательства $\tilde{U}_j \subset U_{j+1}$ предположим, что некоторая функция $f(t) \in \tilde{U}_j$. Тогда $f(t) \in U_{j+1}$, если $\hat{f}(\omega) = \tilde{a}_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega)$, а $\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)$ должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией. Поскольку $f(t) \in \tilde{U}_j$, то $\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega)$. Преобразование этого равенства дает

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \tilde{H}_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega),$$

где произведение двух первых членов является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией $\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)$. Следовательно, $\tilde{U}_j \subset U_{j+1}$. Аналогичным образом доказывается, что $U_j \subset \tilde{U}_{j+1}$. Обобщив эти условия, получим доказательство утверждений $U_{j-1} \subset \tilde{U}_j \subset U_{j+1}$ и $\tilde{U}_{j-1} \subset U_j \subset \tilde{U}_{j+1}$.

Для доказательства второй части теоремы $\tilde{U}_{j+1} = U_j \oplus S_j$ необходимо показать, что семейство функций $\{\xi_{j,n}(t), \gamma_{j,k}(t) : n, k \in \mathbb{Z}\}$ образует базис всего подпространства \tilde{U}_{j+1} . Согласно теореме 3 справедливо условие $\tilde{U}_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$, тогда если $f(t) \in \tilde{U}_{j+1}$, то $\hat{f}(\omega) = a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega)$, где $a_{j+1}^f(\omega)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция.

Итак,

$$a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega) + b_j^f(\omega) \tilde{\gamma}_j(\omega),$$

где $a_j^f(\omega)$ и $b_j^f(\omega) - 2^{j+1}\pi$ -периодические функции. Преобразуем дуальные базисы масштабирующей функции и вейвлета в правой части этого выражения

$$a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega) \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})} + b_j^f(\omega) \frac{\hat{\gamma}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega/2^{j+1})}.$$

Тогда

$$a_{j+1}^f(\omega)E_{j+1}^{\xi}(\omega/2^{j+1})\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega)\hat{\xi}_j(\omega) + b_j^f(\omega)\hat{\gamma}_j(\omega),$$

а произведение первых двух членов в правой части представляет собой по-прежнему $2^{j+2}\pi$ -периодическую функцию, что доказывает $\tilde{U}_{j+1} = U_j \oplus S_j$ и $S_j \subset \tilde{U}_{j+1}$.

Аналогичным образом, если $f(t) \in U_{j+1}$ и $\hat{f}(\omega) = \tilde{a}_{j+1}^f(\omega)\hat{\xi}_{j+1}(\omega)$, то согласно условию леммы 3

$$\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \tilde{a}_j^f(\omega)\hat{\xi}_j(\omega) + \tilde{b}_j^f(\omega)\hat{\gamma}_j(\omega),$$

где $\tilde{a}_{j+1}^f(\omega) - 2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, $\tilde{a}_j^f(\omega)$ и $\tilde{b}_j^f(\omega) - 2^{j+1}\pi$ -периодические функции.

Следовательно,

$$\frac{\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)}{E_{j+1}^{\xi}(\omega/2^{j+1})}\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \tilde{a}_j^f(\omega)\hat{\xi}_j(\omega) + \tilde{b}_j^f(\omega)\hat{\gamma}_j(\omega).$$

Тогда $U_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$, $\tilde{S}_j \subset U_{j+1}$, что и требовалось доказать.

Коэффициенты масштабирующих и вейвлет-фильтров будем искать исходя из того, что частотные функции модифицированной вейвлет-системы в (91), (93), (95), (97), представляют собой произведение частотной функции исходной ортонормированной вейвлет-системы с коэффициентами фильтров $\{h_k : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{g_k : k \in \mathbb{Z}\}$, которые известны, и периодической функции $E_{j+1}^{\xi}(\omega)$. Для $E_{j+1}^{\xi}(\omega)$ коэффициенты фильтра определяют следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_{j+1,n} &= \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_0^{2^{j+2}\pi} E_{j+1}^{\xi}(\omega/2^{j+1}) \exp(in\omega/2^{j+1}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{j+1}^{\xi}(\omega) \exp(in\omega) d\omega = \\ &= \int \zeta_{j+1}(t-n) \overline{\zeta_{j+1}(t)} dt. \end{aligned} \quad (99)$$

Коэффициенты фильтра для $1/E_{j+1}^{\xi}(\omega)$ можно получить так

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{j+1,n} &= \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_0^{2^{j+2}\pi} \frac{\exp(in\omega/2^{j+1})}{E_{j+1}^{\xi}(\omega/2^{j+1})} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(in\omega)}{E_{j+1}^{\xi}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sum_k \zeta_{j+1,k-n} \exp(-ik\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Тогда масштабирующее уравнение (91) запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_j(\omega) &= \\ &= \sum_p \left(\sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} h_{p-k} \right) \exp(-ip\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \end{aligned} \quad (100)$$

Введем обозначение коэффициентов фильтра для (100), которые представляют собой свертку известных числовых последовательностей:

$$\tilde{h}_{j+1,p}^{\xi} = \sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} h_{p-k}. \quad (101)$$

Тогда

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \sum_p \tilde{h}_{j+1,p}^{\xi} \exp(-ip\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \quad (102)$$

Во временной области масштабирующее уравнение имеет вид

$$\xi_j(t) = \sum_k \tilde{h}_{j+1,k}^{\xi} \xi_{j+1,k}(t). \quad (103)$$

Аналогично для (93) имеем

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \sum_p \tilde{h}_{j+1,p}^{\xi} \exp(-ip\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (104)$$

где

$$\tilde{h}_{j+1,p}^{\xi} = \sum_k \zeta_{j+1,k} h_{p-k}. \quad (105)$$

После выполнения обратного преобразования Фурье масштабирующее уравнение (104) примет вид

$$\xi_j(t) = \sum_k \tilde{h}_{j+1,k}^{\xi} \xi_{j+1,k}(t). \quad (106)$$

Подобным образом для вейвлет-функций имеем

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \sum_p \tilde{g}_{j+1,p}^{\xi} \exp(-ip\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (107)$$

где

$$\tilde{g}_{j+1,p}^{\xi} = \sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} g_{p-k}. \quad (108)$$

Во временной области (107) имеет вид

$$\tilde{\gamma}_j(t) = \sum_k \tilde{g}_{j+1,k}^{\xi} \xi_{j+1,k}(t). \quad (109)$$

Аналогичным образом для выражения

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = E_{j+1}^{\xi}(\omega/2^{j+1}) \hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega), \quad (110)$$

получим

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = \sum_p \tilde{g}_{j+1,p}^{\xi} \exp(-ip\omega/2^{j+1}) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (111)$$

где

$$\tilde{g}_{j+1,p}^{\xi} = \sum_k \zeta_{j+1,k} g_{p-k}. \quad (112)$$

Во временной области (111) примет вид

$$\gamma_j(t) = \sum_k \tilde{g}_{j+1,k}^{\xi} \xi_{j+1,k}^{\xi}(t). \quad (113)$$

Коэффициенты фильтров $\{\tilde{h}_{j,k}^{\xi} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{h}_{j,k}^{\xi} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{g}_{j,k}^{\xi} : k \in \mathbb{Z}\}$ обладают следующими свойствами:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,k}^{\xi} \overline{\tilde{h}_{j,k-2p}^{\xi}} = \delta_{p,0}, \quad (114)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,n}^{\xi} \overline{\tilde{g}_{j,n-2p}^{\xi}} = 0, \quad (115)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,n}^{\xi} \overline{\tilde{g}_{j,n-2p}^{\xi}} = 0, \quad (116)$$

$$\sum_k \tilde{h}_{j,k}^{\xi} = \sqrt{2} E_{j+1}^{\xi}(0), \quad (117)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,k}^{\xi} = \frac{\sqrt{2}}{E_{j+1}^{\xi}(0)}, \quad (118)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j,k}^{\xi} = 0, \quad (119)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j,k}^{\xi} = 0. \quad (120)$$

В биортогональном случае частотные функции $\tilde{H}_j^{\xi}(\omega)$ и $\tilde{H}_j^{\xi}(\omega)$ удовлетворяют равенству

$$\overline{\tilde{H}_j^{\xi}(\omega)} \tilde{H}_j^{\xi}(\omega) + \overline{\tilde{H}_j^{\xi}(\omega + \pi)} \tilde{H}_j^{\xi}(\omega + \pi) = 2. \quad (121)$$

Выполнение этого равенства легко показать с помощью непосредственной подстановки соотношений (92) и (94) в (121).

5. КРАТНОМАСШТАБНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ЧАСТОТНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВЕЙВЛЕТОВ КРАВЧЕНКО

Как было показано ранее, решение интегрального уравнения типа свертки (1) заключается в получении оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ на основе регуляризованного спектра решения [1–7]

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \hat{y}(\omega) \hat{D}^{-1}(\omega), \quad (122)$$

где $\hat{D}(\omega)$ – стабилизирующий множитель, который может быть задан как $\hat{D}(\omega) = \hat{K}^{-1}(\omega)$.

Воспользовавшись интегральным уравнением типа свертки в частотной области $\hat{y}(\omega) = \hat{\lambda}(\omega) \hat{x}(\omega) + \hat{n}(\omega)$, из (122), получим оценку $\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \hat{\lambda}(\omega) \hat{D}^{-1}(\omega) \hat{x}(\omega) + \hat{D}^{-1}(\omega) \hat{n}(\omega)$. Если $\hat{D}(\omega) = \hat{\lambda}(\omega)$, то оценка полезного сигнала имеет

вид инверсного фильтра. В случае отсутствия шума решение (122) позволяет точно восстановить сигнал $\hat{x}(\omega)$, искаженный импульсной характеристикой $\hat{\lambda}(\omega)$ линейной стационарной системы. При наличии шума происходит его бесконечное усиление на частотах, при которых $\hat{\lambda}(\omega) \rightarrow 0$, что и приводит к необходимости использования математических подходов эффективного подавления шума, к которым относится вейвлет-фильтрация [13–21].

Согласно (22) оценка полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ определяется так

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \Phi_{j+1,k}(t),$$

где $\Phi_{j+1,k}(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$ – исходные масштабирующие функции, выбранные из ортонормированных вейвлет-систем Кравченко; $a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} = (x(t), \Phi_{j+1,k}(t))$ – коэффициенты разложения $x(t)$ по масштабирующим функциям $\{\Phi_{j+1,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Таким образом, решение интегрального уравнения типа свертки (1) относительно функции $x(t)$ сводится к нахождению неизвестной последовательности коэффициентов разложения $\{a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ [29, 36–41]. Представим (22) в частотной области

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\Phi}_{j+1}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j+1}). \quad (123)$$

Умножив (123) слева и справа на $\hat{D}(\omega)$, получим

$$\begin{aligned} \hat{D}(\omega) \hat{\tilde{x}}_p(\omega) &= \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega) \hat{\Phi}_{j+1}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j+1}). \end{aligned} \quad (124)$$

С учетом (27), (122) можно показать, что коэффициенты $\{a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ определяются в виде разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисной системе функций $\xi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, в котором $a_{j+1,k}^y = a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p}$. Действительно, так как

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega) \hat{\Phi}_{j+1}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j+1}) = y(\omega), \quad (125)$$

то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^y \xi_{j+1}^{\xi}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j+1}) = \hat{y}(\omega). \quad (126)$$

Следовательно, $y(\omega) \in \mathbf{U}_{j+1}$ и условие теоремы 1 выполняется, так как $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$ согласно лемме 2.

Итак, оценка полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ будет определяться следующим разложением по базису $\Phi_{J+1,k}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^y \hat{\Phi}_{J+1}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j+1})$$

$$\text{или } \tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^y \Phi_{J+1,k}(t). \quad (127)$$

Подлежащие определению коэффициенты $\{a_{J+1,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ находятся исходя из существования биортогональной системы функций $\xi_{j,k}(t)$, $\xi_{j,k}^*(t)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$a_{J+1,k}^y = (y(t), \xi_{J+1,k}^*(t)). \quad (128)$$

Здесь оценка приближенного решения интегрального уравнения типа свертки (1) в виде (127) сводится к определению коэффициентов (128). Исходя из того, что предложенная и обоснованная биортогональная система вейвлет-функций $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ и $\xi_{j,k}^*(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ порождает две цепочки КМА, любую функцию из U_{J+1} можно представить в виде ортогонального разложения по базисам подпространств низшего масштаба U_j , S_j так, что $U_{j+1} = U_j \oplus S_j$. Тогда для создания вычислительных алгоритмов оценки полезного сигнала будем искать $\tilde{x}_p(t)$ в виде разложения

$$\tilde{x}_p(t) = P_{j+1} \tilde{x}_p(t) =$$

$$= \sum_k a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p} \Phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^{\tilde{x}_p} \Psi_{j,k}(t), \quad (129)$$

которое описывает ДВП классического КМА по вейвлетам, обладающим компактным носителем в частотной области, в частности, по вейвлетам Кравченко [25–28].

В частотной области (129) имеет вид

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\Phi}_{j_0}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j_0}) +$$

$$+ \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\Psi}_j(\omega) \exp(-ik\omega/2^j). \quad (130)$$

Коэффициенты $\{a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ являются результатом ДВП $\tilde{x}_p(t)$ при разложении до некоторого масштаба j_0 так, что $\tilde{x}_p(t)$ представляется как сумма грубой аппроксимации $P_{j_0} \tilde{x}_p(t) \in V_{j_0}$ и множества деталей $Q_j \tilde{x}_p(t) \in W_j$

$$a_{j,k}^{\tilde{x}_p} = (\tilde{x}_p(t), \Phi_{j,k}(t)), \quad (131)$$

$$b_{j,k}^{\tilde{x}_p} = (\tilde{x}_p(t), \Psi_{j,k}(t)). \quad (132)$$

Согласно концепции КМА коэффициенты вейвлет-разложения при более грубом приближении могут быть получены рекурсивно. Действительно, пусть некоторый сигнал $f(t)$ задан отсчетами в

моменты времени $t_m = m2^{-N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, умножив скалярно масштабирующие уравнения $\Phi_{j,n}(t) = \sum_k h_{k-2n} \Phi_{j+1,k}(t)$, $\Psi_{j,n}(t) = \sum_k g_{k-2n} \Phi_{j+1,k}(t)$ слева и справа на $f(t)$, для произвольного масштаба j можно получить рекурсивные формулы расчета коэффициентов вейвлет-разложения от более точного масштаба $j+1$ к более грубому масштабу j [13–21]

$$a_{j,n}^f = \sum_k h_{k-2n} a_{j+1,k}^f, \quad (133)$$

$$b_{j,n}^f = \sum_k g_{k-2n} a_{j+1,k}^f. \quad (134)$$

Графически алгоритм вейвлет-разложения сигнала $f(t)$ можно представить в виде схемы (рис. ба). Данный алгоритм реализуется с помощью многокаскадного последовательного соединения блоков фильтров, обеспечивающих быстрые вычисления ДВП.

Начальные значения коэффициентов $a_{j,k}^f$ определяются формулами $a_{j,k}^f = (f(t), \Phi_{j,k}(t))$, $b_{j,k}^f = (f(t), \Psi_{j,k}(t))$ при таком значении масштаба j , при котором в пределах спектрального диапазона сигнала $\hat{f}(\omega)$ функция $\hat{\Phi}_j(\omega)$ остается практически постоянной, т.е. чтобы аппроксимация вейвлетами достаточно точно отражала сигнал $f(t)$. Такой расчет является трудоемким и может не обеспечить необходимую точность вычисления. Так как сигнал $f(t)$ практически задан своими значениями, то при большом масштабе j коэффициенты $\{a_{j,k}^f : k \in \mathbb{Z}\}$ можно положить равными отсчетам функции

$$a_{j,k}^f = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\Phi}_j(\omega)} \exp(-ik\omega/2^j) d\omega \approx$$

$$\approx \frac{\hat{\Phi}_j(0)}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) \exp(-ik\omega/2^j) d\omega$$

Отсюда следует, что при выборе вейвлет-системы Кравченко $a_{j,k}^f \approx f(t)|_{t=k2^{-j}} = f_k$.

Следовательно, быстрое вычисление ДВП позволяет представить оценку приближенного решения (1) в дискретном виде как последовательность коэффициентов $\{a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j,k}^{\tilde{x}_p} : j_0 \leq j \leq J, k \in \mathbb{Z}\}$, по которым раскладывается $\tilde{x}_p(t)$ в (129).

Как показано в (122), оценка полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$, определяемая обработкой наблюдаемого сигнала $y(t)$ фильтром с частотным откликом $\hat{D}^{-1}(\omega)$, соответствует вейвлет-разложению наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базису $\xi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ на самом точном масштабе J . Аналогичным образом

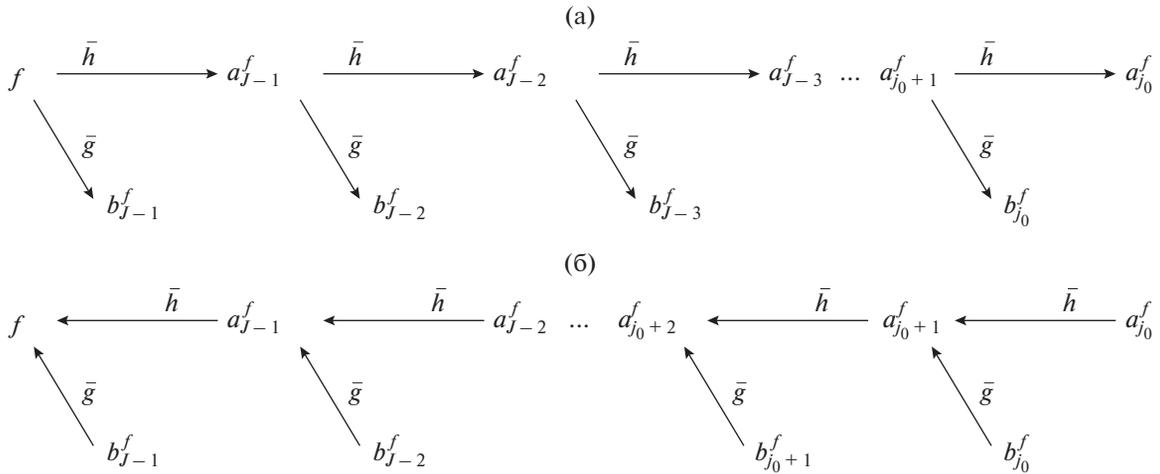


Рис. 6. Классические схемы вейвлет-разложения (а) и восстановления (б) сигнала $f(t)$.

получим разложение $\hat{x}_p(t)$ в виде ДВП, умножая слева и справа выражение (130) на $\hat{D}(\omega)$

$$\hat{D}(\omega)\hat{x}_p(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega)\hat{\phi}_{j_0}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j_0}) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega)\hat{\psi}_j(\omega) \exp(-ik\omega/2^j). \quad (135)$$

С учетом (27), (28) имеем

$$\hat{y}(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^y \hat{\xi}_{j_0}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{j_0}) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^y \hat{\gamma}_j(\omega) \exp(-ik\omega/2^j). \quad (136)$$

Следовательно, коэффициенты $\{a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ получаются при разложении наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисной системе функций $\xi_{j,k}(t), \gamma_{j,k}(t), k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J$, в котором $a_{j_0,k}^y = a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j,k}^y = b_{j,k}^{\tilde{x}_p}$. Таким образом, оценка приближенного решения (1) будет определяться следующим разложением по базисам $\phi_{j_0,k}(t), \psi_{j,k}(t), k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J$:

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_k a_{j_0,k}^y \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^y \psi_{j,k}(t), \quad (137)$$

где $\{a_{j_0,k}^y, b_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J\}$ – коэффициенты разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по частотно-модифицированным биортогональным вейвлетам $\xi_{j,k}(t), \gamma_{j,k}(t), k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J$.

Предложенная и обоснованная биортогональная система функций $\xi_{j,k}(t), \gamma_{j,k}(t)$ и $\tilde{\xi}_{j,k}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t), k \in \mathbb{Z}$ порождает КМА, поэтому для эффективного решения задачи (1) по оценке полезного сигнала

$\tilde{x}_p(t)$, искаженного импульсной характеристикой $\lambda(t)$, необходимо разработать алгоритм быстрого вычисления вейвлет-коэффициентов $\{a_{j_0,k}^y, b_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J\}$ исходя из полученных ранее масштабирующих уравнений (51), (54), (57), (59), (67), (72), (79), (82), (103), (106), (109), (113), а также масштабирующих и вейвлет-фильтров $\{h\}, \{g\}, \{\theta_j\}, \{\eta_j\}, \{\tilde{\theta}_j\}, \{\tilde{\eta}_j\}, \{\tilde{h}_j^{\tilde{\xi}}\}, \{\tilde{g}_j^{\tilde{\xi}}\}, \{\tilde{h}_j^{\tilde{\gamma}}\}, \{\tilde{g}_j^{\tilde{\gamma}}\}$, затем провести эффективное подавление шума и компенсировать его бесконечное усиление с использованием математических подходов обработки вейвлет-коэффициентов [13–21, 42, 43].

Разработанные частотно-модифицированные биортогональные вейвлеты позволяют получить рекурсивные алгоритмы для вычисления коэффициентов ДВП с учетом локализации и компенсации частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$ за счет существования масштабирующих уравнений (51), (54), (57), (59), (67), (72), (79), (82), (103), (106), (109), (113). Масштабирующие уравнения (103), (106), (109), (113) позволяют осуществлять переходы при вейвлет-разложении наблюдаемого сигнала $y(t)$ от базиса $\xi_{j+1,k}(t)$ к базисам $\xi_{j,k}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ или от базиса $\xi_{j+1,k}(t)$ к базисам $\xi_{j,k}(t), \gamma_{j,k}(t)$ (следующий уровень разложения выполняется по биортогональному базису) в рамках единого ДВП в необходимых частотных диапазонах, где свойства вейвлет-базисов $\xi_{j,k}(t), \gamma_{j,k}(t)$ или $\tilde{\xi}_{j,k}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ позволяют лучшим образом аппроксимировать сигнал $y(t)$. Из этого следует, что в едином алгоритме ДВП становится возможным оптимизировать процесс получения коэффициентов вейвлет-разложения для дальнейшей их обработки с целью

эффективного восстановления сигнала $x(t)$, подавления шума и компенсации его бесконечного усиления. Для масштабирующих функций подпространства \mathbf{U}_j и соответствующих вейвлет-функций подпространства \mathbf{S}_j справедливы масштабирующие соотношения (51), (57), (67), (72), (106), (113), а для подпространств $\tilde{\mathbf{U}}_j$ и $\tilde{\mathbf{S}}_j$ – масштабирующие соотношения (54), (59), (79), (82), (103), (109).

Коэффициенты разложения $\{a_{j,k}^y, b_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ в (137) при произвольном значении масштаба j определяются по формулам

$$a_{j,k}^y = (y(t), \xi_{j,k}(t)), \quad (138)$$

$$b_{j,k}^y = (y(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)). \quad (139)$$

Рекурсивные алгоритмы для вычисления этих коэффициентов получим, подставляя в (138), (139) вместо $\xi_{j,k}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ масштабирующие соотношения (54), (59), (79), (82), (103), (109). Воспользовавшись (54), (59), получим

$$a_{j,n}^y = \sum_k h_{k-2n} a_{j+1,k}^y, \quad (140)$$

$$b_{j,n}^y = \sum_k g_{k-2n} a_{j+1,k}^y. \quad (141)$$

Из масштабирующих уравнений (51), (57), (67), (72), (79), (82), (103), (106), (109), (113) также следует, что возможны другие рекурсивные алгоритмы вычисления как коэффициентов разложения $\{a_{j_0,k}^y, b_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисным функциям $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, так и коэффициентов разложения $y(t)$ по биортогональным к этим базисам функциям $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$.

Введем обозначения для коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисным функциям $\xi_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ при произвольном масштабе j

$$\tilde{a}_{j,k}^y = (y(t), \xi_{j,k}(t)), \quad (142)$$

$$\tilde{b}_{j,k}^y = (y(t), \gamma_{j,k}(t)), \quad (143)$$

а для коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по исходным вейвлет-базисам $\varphi_{j,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$

$$c_{j,k}^y = (y(t), \varphi_{j,k}(t)), \quad (144)$$

$$d_{j,k}^y = (y(t), \psi_{j,k}(t)). \quad (145)$$

Из (79), (82) следуют

$$a_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (146)$$

$$b_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y. \quad (147)$$

Используя (103), (109), имеем

$$a_{j,n}^y = \sum_k \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{a}_{j+1,k}^y, \quad (148)$$

$$b_{j,n}^y = \sum_k \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{a}_{j+1,k}^y. \quad (149)$$

Рекурсивный алгоритм для вычисления коэффициентов разложения $\{\tilde{a}_{j_0,k}^y, \tilde{b}_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисным функциям $\xi_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ представляется аналогично рассмотренным выше случаям следующим образом:

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k h_{k-2n} \tilde{a}_{j+1,k}^y, \quad (150)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k g_{k-2n} \tilde{a}_{j+1,k}^y, \quad (151)$$

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k \theta_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (152)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k \eta_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (153)$$

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j+1,k}^y, \quad (154)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j+1,k}^y. \quad (155)$$

Как и в случае классического КМА, полученные рекурсивные алгоритмы для вычисления коэффициентов $\{a_{j_0,k}^y, b_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ или $\{\tilde{a}_{j_0,k}^y, \tilde{b}_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ требуют, чтобы были известны соответствующие начальные значения коэффициентов разложения $a_{j,k}^y$ или $\tilde{a}_{j,k}^y$ при самом точном масштабе J . Для вычисления начальных коэффициентов $\{a_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ по известным отсчетам наблюдаемого сигнала $y(t)$ подставим в (138) масштабирующее соотношение (79)

$$\begin{aligned} a_{j,n}^y &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \overline{\tilde{\xi}_J(\omega)} \exp(-in\omega/2^J) d\omega \approx \\ &\approx \sum_k \tilde{\theta}_{J+1,k-2n} \frac{\overline{\hat{\Phi}_{J+1}(0)}}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{J+1}) d\omega \end{aligned}$$

Откуда при выборе вейвлет-системы Кравченко получаем

$$a_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\theta}_{J+1,k-2n} y_k. \quad (156)$$

Подобным образом согласно (82), (139) запишем

$$\begin{aligned} b_{j,n}^y &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \overline{\tilde{\gamma}_J(\omega)} \exp(-in\omega/2^J) d\omega \approx \\ &\approx \sum_k \tilde{\eta}_{J+1,k-2n} \frac{\overline{\hat{\Phi}_{J+1}(0)}}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \exp(-ik\omega/2^{J+1}) d\omega \end{aligned}$$

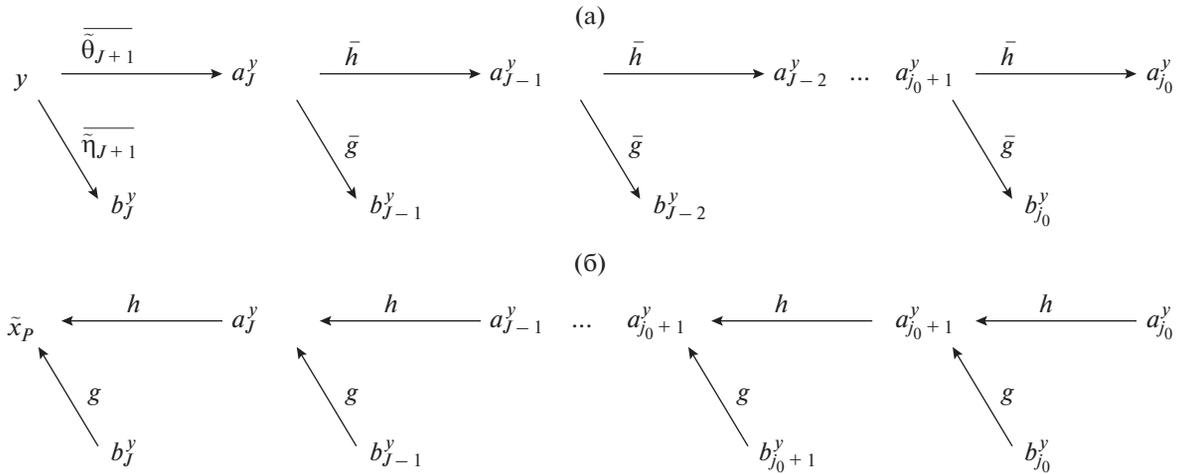


Рис. 7. Схемы разложения (а) наблюдаемого сигнала $y(t)$ и последующего восстановления (б) полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по базису частотно-модифицированных вейвлет-функций.

Отсюда при выборе вейвлет-системы Кравченко имеем

$$b_{J,n}^y = \sum_k \tilde{\eta}_{J+1,k-2n} y_k. \quad (157)$$

Аналогично вычисляются начальные коэффициенты $\{\tilde{a}_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ по известным отсчетам наблюдаемого сигнала $y(t)$ с использованием (67) и (142), (72) и (143)

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k \theta_{j+1,k-2n} y_k, \quad (158)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k \eta_{j+1,k-2n} y_k. \quad (159)$$

Таким образом, воспользовавшись формулами (140), (141), (146)–(159), можно получить различные варианты рекурсивного алгоритма разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по его отсчетам от более точного разрешения J к грубому разрешению j_0 . Для вычисления каждого последующих коэффициентов из предыдущих с большим масштабом, характеризующим более широкополосный процесс, лучше использовать базисные функции и их масштабирующие и вейвлет-фильтры в (140), (141), (146)–(159), которые учитывают и компенсируют частотно-временные особенности наблюдаемого сигнала $y(t)$ и частотных функций $\hat{\lambda}(\omega), \hat{D}(\omega)$ в соответствующем диапазоне. Схема одного из возможных алгоритмов вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ показана на рис. 7а.

В отличие от классической схемы вейвлет-разложения [13–21] отсчеты наблюдаемого сигнала $y(t)$ в первом каскаде обрабатываются низкочастотным и высокочастотным фильтрами $\{\bar{\theta}_{j+1}\}, \{\bar{\eta}_{j+1}\}$. Фильтры

на последующих этапах обработки не изменяются.

Далее получим рекурсивный алгоритм восстановления аппроксимирующих коэффициентов, характеризующих низкочастотную составляющую сигнала с большим масштабом, из коэффициентов вейвлет-разложения меньшего масштаба (один уровень обратного дискретного вейвлет преобразования). Тогда, учитывая, что $\tilde{U}_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$, масштабирующую функцию $\tilde{\xi}_{j,k}(t), k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде суммы

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \tilde{y}_{j,n}(t). \quad (160)$$

Умножая (160) скалярно слева и справа на $y(t)$, получим

$$(y(t), \tilde{\xi}_{j+1,k}(t)) = \sum_n h_{k-2n} (y(t), \tilde{\xi}_{j,n}(t)) + \sum_n g_{k-2n} (y(t), \tilde{y}_{j,n}(t)),$$

что соответствует следующему представлению коэффициентов разложения $a_{j+1,k}^y$:

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} a_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} b_{j,n}^y. \quad (161)$$

Таким образом, по формуле (161) получен рекурсивный алгоритм восстановления оценки $\tilde{x}_p(t)$ по коэффициентам вейвлет-разложения от грубого к точному разрешению с использованием фильтров исходных вейвлет-базисов $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$. Схема восстановления отсчетов оценки $\tilde{x}_p(t)$ не отличается от схемы классического КМА (см. рис. 7б).

Благодаря предложенному и обоснованному конструктивному подходу получения частотно-мо-

дифицированных вейвлет-базисов схема разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ и восстановления коэффициентов вейвлет-разложения оценки $\tilde{x}_p(t)$ не единственная. В схеме разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ могут использоваться другие рекурсивные формулы (148)–(159). По полученным в результате коэффициентам вейвлет-разложения должна быть восстановлена оценка $\tilde{x}_p(t)$.

Для подпространств U_{j+1} и \tilde{U}_{j+1} масштабирующих функций $\xi_{j+1,k}(t)$ и $\tilde{\xi}_{j+1,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ справедливы ортогональные разложения $U_{j+1} = U_j \oplus S_j$, $U_{j+1} = \tilde{U}_j \oplus \tilde{S}_j$, $\tilde{U}_{j+1} = U_j \oplus S_j$. Тогда масштабирующие функции $\xi_{j+1,k}(t)$, $\tilde{\xi}_{j+1,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде сумм

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \xi_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \gamma_{j,n}(t), \quad (162)$$

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (163)$$

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\tilde{\xi}} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\tilde{\xi}} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (164)$$

из которых следуют формулы для коэффициентов разложения $a_{j+1,k}^y$ и $\tilde{a}_{j+1,k}^y$:

$$\tilde{a}_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} \tilde{a}_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} \tilde{b}_{j,n}^y, \quad (165)$$

$$\tilde{a}_{j+1,k}^y = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j,n}^y + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} b_{j,n}^y, \quad (166)$$

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\tilde{\xi}} \tilde{a}_{j,n}^y + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\tilde{\xi}} \tilde{b}_{j,n}^y. \quad (167)$$

Следовательно, с использованием рекурсивных соотношений (161) и (165) можно восстанавливать коэффициенты разложения большего масштаба по коэффициентам разложения того же базиса меньшего масштаба, а с помощью соотношений (166) и (167) восстанавливаются коэффициенты разложения большего масштаба по коэффициентам разложения биортогонального базиса меньшего масштаба. Кроме того, возможны смешанные рекурсивные соотношения, где коэффициенты разложения большего масштаба получаются из коэффициентов разложения по масштабирующим функциям той же или биортогональной вейвлет-системы и вейвлет-функциям биортогональной или той же вейвлет-системы при меньшем масштабе. Действительно, если воспользоваться (160), а затем (45), (46) и (92), (96), то во временной области получим

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\tilde{\xi}} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (168)$$

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\gamma}_{j,n}(t). \quad (169)$$

Аналогичным образом, из (163) с учетом (45), (46) и (94), (98) во временной области имеем

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \xi_{j,n}(t) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (170)$$

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \gamma_{j,n}(t). \quad (171)$$

Тогда смешанные рекурсивные формулы восстановления аппроксимирующих коэффициентов разложения $a_{j+1,k}^y$, $\tilde{a}_{j+1,k}^y$ имеют следующий вид:

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} b_{j,n}^y, \quad (172)$$

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} a_{j,n}^y + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{b}_{j,n}^y, \quad (173)$$

$$\tilde{a}_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} \tilde{a}_{j,n}^y + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{b}_{j,n}^y, \quad (174)$$

$$\tilde{a}_{j+1,k}^y = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\tilde{\xi}} \tilde{a}_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} \tilde{b}_{j,n}^y. \quad (175)$$

Таким образом, получены рекурсивные формулы для одного уровня ДВП и ОДВП, позволяющие строить гибкие вычислительные схемы кратномасштабной аппроксимации решения интегрального уравнения типа свертки (1) с учетом частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Обобщенная схема, реализующая кратномасштабный алгоритм восстановления оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$, показана на рис. 8.

Полезный сигнал $x(t)$, первоначально искаженный импульсной характеристикой $\lambda(t)$ с последующим действием шума $n(t)$ в виде временных отсчетов $y_n = y(t_n)$, подвергается вейвлет-разложению с использованием низкочастотного фильтра $\{\overline{\theta}_{j+1,k}\}$ (или $\{\overline{\theta}_{j+1,k}\}$) и высокочастотного фильтра $\{\overline{\eta}_{j+1,k}\}$ (или $\{\eta_{j+1,k}\}$). В результате получают аппроксимирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cA_j = \{a_j^y\}$ (или $cA_j = \{\tilde{a}_j^y\}$) и детализирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cD_j = \{b_j^y\}$ (или $cD_j = \{\tilde{b}_j^y\}$) масштаба J . Далее каждые аппроксимирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cA_j = \{a_j^y\}$ (или $cA_j = \{\tilde{a}_j^y\}$) при $j_0 - 1 \leq j \leq J$ должны быть обработаны низкочастотным фильтром $\{\overline{h}_k\}$ (или $\{\overline{h}_{j,k}^{\xi}\}$, или $\{\overline{h}_{j,k}^{\tilde{\xi}}\}$) и высокочастотным фильтром $\{g_k\}$ (или $\{g_{j,k}^{\xi}\}$, или $\{g_{j,k}^{\tilde{\xi}}\}$). Итак, образуется дискретная последовательность коэффициентов вейвлет-разложения $\{cA_{j_0}, cD_j : j_0 \leq j \leq J\}$. Детализирующие коэффициенты $\{cD_j : j_0 \leq j \leq J\}$ впоследствии подвергаются пороговой обработке.

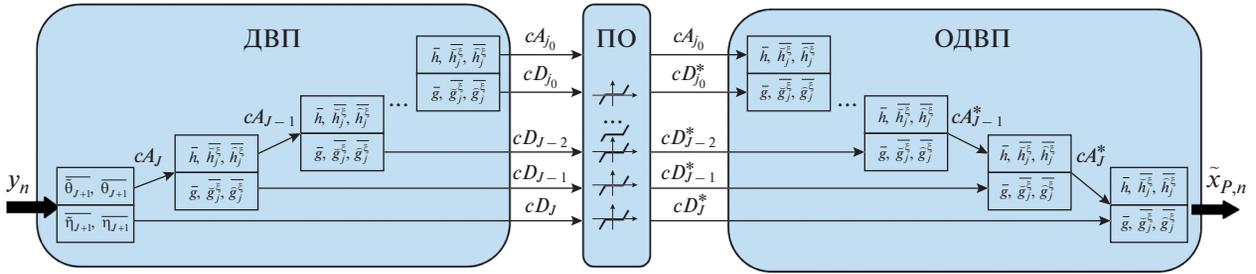


Рис. 8. Обобщенная схема, реализующая кратномасштабный алгоритм восстановления оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$.

После этого выполняется ОДВП с использованием низкочастотного фильтра $\{h_k\}$ (или $\{\tilde{h}_{j,k}^c\}$, или $\{\tilde{h}_{j,k}^s\}$) и высокочастотного фильтра $\{g_k\}$ (или $\{\tilde{g}_{j,k}^c\}$, или $\{\tilde{g}_{j,k}^s\}$). При этом схема вейвлет-восстановления должна обеспечивать решение интегрального уравнения (1).

Получение оценки полезного сигнала \tilde{x}_p с помощью кратномасштабного алгоритма с использованием новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов проводится в несколько этапов.

1. *Выбор частотной модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$.* На этом этапе для выбора частотной модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$ учитывается априорная информация о полезном и наблюдаемом сигнале $x(t)$, $y(t)$, импульсной характеристике $\lambda(t)$, параметрах шума $n(t)$.

На практике для подавления бесконечного усиления шума используют фильтр, регуляризирующий усиление на высоких частотах (3), который может быть использован при построении функции $\hat{D}(\omega)$ в виде $\hat{D}(\omega) = \hat{K}(\omega)^{-1}$. Подавление бесконечного усиления шума также может быть достигнуто применением оконной функции $w(\omega)$, в том числе масштабирующей функции $\hat{\phi}_j(\omega)$, которая при самом точном разрешении J должна удовлетворять следующим требованиям:

- бесконечный рост высокочастотной части спектра $\hat{\lambda}(\omega)^{-1}$ должен быть скомпенсирован убыванием высокочастотной части масштабирующей функции;
- спектр масштабирующей функции $\hat{\phi}_j(\omega)$ в пределах спектральной полосы $\hat{y}(\omega)$ должен быть максимально плоским;
- масштабирующая функция $\hat{\phi}_j(\omega)$ должна быть достаточно гладкая для устранения эффекта Гиббса (как можно большее число раз непрерывно дифференцируемой).

Указанными свойствами обладают масштабирующие функции из вейвлет-систем Кравченко [25–28].

Дополнительно частотная характеристика системы может быть подвергнута коррекции. Для этого функцию $\hat{D}(\omega)$ необходимо умножить на подходящий полином от ω .

2. *Выбор ортонормированного вейвлет-базиса $\varphi(t)$, $\psi(t)$ с оптимальными свойствами.* Для достижения большей точности и получения вычислительных преимуществ вейвлет-базис должен обладать финитным спектром, малым числом коэффициентов фильтров $\{h_k\}$, $\{g_k\}$, непрерывной дифференцируемостью как можно большее число раз. Такими свойствами обладают масштабирующие функции из вейвлет-систем Кравченко [25–28].

Исходя из частотно-временных свойств выбранного вейвлет-базиса определяются значения масштабов $J \geq j \geq j_0$, при которых должно быть выполнено ДВП.

3. *Получение биортогональной частотно-модифицированной вейвлет-системы $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$.* Первоначально из выбранного ортонормированного вейвлет-базиса $\varphi_{j,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$ и модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$ должны быть получены функции $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ по формулам (27), (28). Далее вводится функция $E_j^{\xi}(\omega)$ по формуле (44), с использованием которой строятся биортогональные вейвлет-базисы $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ согласно (45), (46). Дополнительно, модифицирующая функция $\hat{D}(\omega)$ может быть подвергнута частотной коррекции.

4. *Расчет дискретных фильтров новой биортогональной частотно-модифицированной вейвлет-системы.* Для проведения прямого ДВП наблюдаемого сигнала $y(t)$ и получения оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ с помощью ОДВП известные дискретные фильтры $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ ортонормированного вейвлет-базиса $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дополняются расчетом следующих фильтров:

– по формулам (68), (73), (78), (83) вычисляются коэффициенты фильтров $\{\tilde{\theta}_{j+1,k}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j+1,k}\}$ и $\{\theta_{j+1,k}\}$, $\{\eta_{j+1,k}\}$, которые определяют первый уровень ДВП;

– по формулам (101), (105), (108), (112) вычисляются коэффициенты фильтров $\{\tilde{h}_{j,k}^{\xi}\}$, $\{\tilde{g}_{j,k}^{\xi}\}$ и $\{\hat{h}_{j,k}^{\xi}\}$, $\{\hat{g}_{j,k}^{\xi}\}$, которые наряду с $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ могут применяться в расчете последующих уровней ДВП и в ОДВП. Следует, отметить, что коэффициенты этих фильтров не требуют расчета обратного преобразования Фурье для каждого разрешения. Они вычисляются дискретной сверткой известных коэффициентов фильтров $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ с предварительно рассчитанной последовательностью коэффициентов $2^{j+2}\pi$ -периодической функции $E_{j+1}^{\xi}(\omega)$ и обратной к ней функции $1/E_{j+1}^{\xi}(\omega)$ соответственно $\{\zeta_{j+1,n}\}$, $\{\tilde{\zeta}_{j+1,n}\}$. При этом коэффициенты $\{\zeta_{j+1,n}\}$ могут быть вычислены из коэффициентов $\{\tilde{\zeta}_{j+1,n}\}$. Таким образом, наибольших вычислительных затрат требует однократное вычисление коэффициентов фильтров $\{\tilde{\theta}_{j+1,k}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j+1,k}\}$ и $\{\theta_{j+1,k}\}$, $\{\eta_{j+1,k}\}$.

5. Получение начальных коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$. На первом этапе разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ вычисляются коэффициенты $\{a_{j,n}^y, b_{j,n}^y : n \in \mathbb{Z}\}$ или $\{\tilde{a}_{j,n}^y, \tilde{b}_{j,n}^y : n \in \mathbb{Z}\}$ с помощью дискретных фильтров $\{\tilde{\theta}_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ или $\{\theta_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\eta_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ по формулам (156)–(159). Указанные фильтры получены в частотной области по формулам (66), (71), (76), (81) и учитывают особенности модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$, которая может значительно возрасти в области высоких частот. При этом из (66), (71), (76), (81) следует, что частотные фильтры $\tilde{\Theta}_j(\omega)$, $\tilde{N}_j(\omega)$ могут обеспечивать рост частотных составляющих обрабатываемого сигнала при $\hat{\lambda}(\omega) \rightarrow 0$ (в полосе частот наблюдаемого сигнала $\hat{y}(\omega)$), если эти особенности недостаточно скомпенсированы соответствующим выбором $\hat{D}(\omega)$. В частности, может значительно увеличиваться высокочастотная составляющая сигнала, содержащая основной шум. Фильтры $\Theta_j(\omega)$, $N_j(\omega)$, напротив, не усиливают такие частотные компоненты обрабатываемого сигнала, и могут служить альтернативным подходом для расчета коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ на первом этапе ДВП. Последующие этапы ДВП проводятся фильтрами с меньшей полосой пропускания, где в высокочастотной части рост модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$, как правило, существенно меньше. Поэто-

му последующие этапы ДВП чаще всего менее критичны к выбору фильтров разложения.

6. ДВП наблюдаемого сигнала $y(t)$. В ходе ДВП подбирается оптимальная схема вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по формулам (140), (141), (148)–(151), (154), (155) при выбранных значениях масштабов $j_0 \geq j \geq J$ с учетом частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Также применяется избыточное ДВП (вейвлет-коэффициенты не отбрасываются в результате децимации), при котором может достигаться лучшее подавление шума.

7. Пороговая обработка вейвлет-коэффициентов. Процесс очистки наблюдаемого сигнала от шума с помощью вейвлетов может быть выполнен пороговой обработкой вейвлет-коэффициентов [13–21, 42, 43]. Достоинство нелинейных методов пороговой обработки вейвлет-коэффициентов состоит в скорости алгоритмов построения оценок; возможности лучшей адаптации к функциям, имеющим на разных участках различную степень регулярности. Помимо задачи удаления шума, пороговая обработка позволяет решить задачу сжатия сигнала. При пороговой обработке проводится ограничение уровня детализирующих коэффициентов с использованием пороговой функции $p_T(x)$. Вместо аргумента x в функцию $p_T(x)$ подставляются детализирующие коэффициенты для каждого уровня разложения j (cD_j , $j_0 \leq j \leq J$).

Обычно используется функция жесткой или мягкой пороговой обработки с порогом T . Функция жесткой пороговой обработки описывается следующим выражением:

$$p_T(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| > T, \\ 0 & \text{при } |x| \leq T. \end{cases}$$

Очевидно, что функция жесткой пороговой обработки имеет разрыв. Это может привести к нежелательным особенностям обработки достаточно гладкой функции сигнала. Мягкая пороговая обработка задается непрерывной пороговой функцией

$$p_T(x) = \begin{cases} x - T & \text{при } x > T, \\ x + T & \text{при } x < -T, \\ 0 & \text{при } |x| \leq T. \end{cases}$$

Вид функций жесткой и мягкой пороговой обработки показан на рис. 9.

Следовательно, при таком подходе наиболее эффективное удаление шума будет достигаться, когда энергия сигнала в результате ДВП сосредоточена в минимальном числе коэффициентов выше порогового уровня, а энергия шума распределена в максимальном числе коэффициентов ниже

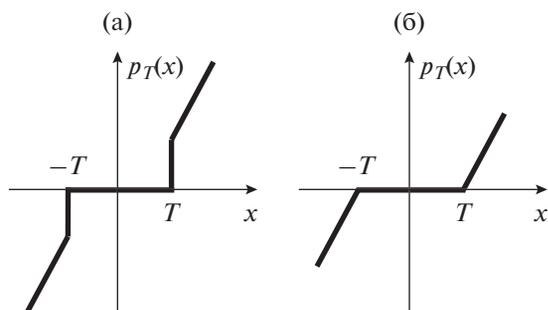


Рис. 9. Функции жесткой (а) и мягкой (б) пороговой обработки.

порогового уровня. Это происходит, когда выбранный вейвлет-базис хорошо коррелирован с сигналом. Для каждого масштаба j выбирается порог T_j , который в соответствии с [42, 43] определяется так

$$T_U = \sigma\sqrt{2 \ln N}.$$

Этот порог получил название “универсальный”, так как он не зависит от наблюдаемых данных (зависит только от дисперсии шума). При выборе порога T_U обеспечивается близость среднеквадратического риска к минимальному [42–45], а из сигнала удаляется почти весь шум. Дисперсия шума σ^2 может быть вычислена с помощью калибровочной процедуры устройства регистрации сигнала. Однако, зачастую дисперсия σ^2 неизвестна и вместо ее точного значения необходимо использовать некоторую оценку σ_0^2 . Оценка дисперсии может быть получена по наблюдаемым данным $y_n = y(t_n)$ путем вычисления медианы M_b вейвлет-коэффициентов cD_j на самом точном масштабе J , так как в силу (157) (или (159)) эти коэффициенты фактически содержат только шум $\sigma_0 = M_b/0.6745$. Кроме того, в качестве дисперсии σ_0^2 может быть использована выборочная дисперсия. Выборочная дисперсия является самой популярной оценкой величины σ_0^2 , а в случае отсутствия выбросов, она наиболее предпочтительна. Тогда, если сигнал y_n длиной N имеет $N/2$ вейвлет-коэффициентов cD_j наименьшего масштаба $j = J-1$, то σ_0^2 оценивается следующим образом:

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{N} \sum_{n=N/2+1}^N y_n^2 - \bar{y}^2,$$

$$\text{где } \bar{y} = \frac{2}{N} \sum_{n=N/2+1}^N y_n.$$

8. Восстановление оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ с использованием ОДВП. В ходе ОДВП проводится

восстановление дискретных значений оценки сигнала $\tilde{x}_{p,n} = \tilde{x}_p(t_n)$ по коэффициентам вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y_n = y(t_n)$, которые прошли пороговую обработку. Так как при заданных аппроксимирующих и детализирующих коэффициентах на каждом масштабе j ($j_0 \leq j \leq J$) возможно восстанавливать аппроксимирующие коэффициенты $\{a_{j+1}^y\}$ или $\{\tilde{a}_{j+1}^y\}$ в зависимости от фильтров в формулах (161), (165)–(167), (172)–(175), то следующий этап ОДВП может быть проведен с учетом частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. При этом на последнем этапе восстановления должны применяться формулы, обеспечивающие восстановление $\tilde{x}_{p,n}$.

9. Визуализация и интерпретация результатов. Оценка погрешности решения задачи. Полученный результат визуализируется и подвергается дальнейшей обработке (статистической, сравнительной, эмпирической и т.д.) с целью более полного изучения предмета исследования и оценки погрешности решения задачи.

ВЫВОДЫ

Обосновано применение вейвлетных подходов при восстановлении полезного сигнала в случае представления измерительного процесса сверточной моделью. Для реализации алгоритма решения задачи (1) предлагается использовать ортогональные вейвлеты Кравченко с финитным спектром [25–28]. Показано, что можно выполнить модификацию вейвлетов с компактным носителем в частотной области таким образом, чтобы стало возможным проводить оценку полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ в рамках быстрых вычислительных алгоритмов на основе ДВП. Предложен и обоснован способ получения новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов, формирующих две цепочки КМА на основе модифицирующей функции с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Функция $\hat{D}(\omega)$ позволяет осуществлять построение вейвлетов с учетом стабилизации решения интегрального уравнения типа свертки (1) и эффективного подавления шума. Получены несколько видов масштабирующих уравнений и формулы вычисления вейвлет-коэффициентов для этих уравнений. Предлагаемые биортогональные частотно-модифицированные вейвлеты нестационарны по отношению к масштабу, т.е. они не являются результатом сдвига и масштабирования одной масштабирующей и вейвлетной функций. Однако они формируют эффективный кратномасштабный алгоритм аппроксимации решения интегрального уравнения

типа свертки (1). Полученные вейвлетные системы позволяют при ДВП и ОДВП оптимизировать процесс получения и восстановления вейвлет-коэффициентов с точки зрения компенсации частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Предложены несколько вариантов ДВП и ОДВП на основе новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов, которые можно использовать в различных физических приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1978.
4. Сизиков В.С. Интегральные уравнения и MatLab в задачах томографии, иконки и спектроскопии. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2011.
5. Петров Ю.П., Сизиков В.С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: Учеб. пособие для вузов. СПб.: Политехника, 2012.
6. Сизиков В.С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab. СПб.: Лань, 2017.
7. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab. СПб.: Лань, 2011.
8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
9. Оптенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Пер. с англ. Издание 3-е, исправленное. М.: Техносфера, 2006.
10. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
11. Френкс Л. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
12. Бумагин А.В., Гондарь А.В., Стешенко В.Б. и др. // Компоненты и технологии. 2010. Т. 105. № 4. С. 113.
13. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
14. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
15. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
16. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
17. Блаттер К. Вейвлет анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2004.
18. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2014.
19. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет преобразования. СПб.: ВУС, 1999.
20. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.
21. Штарк Г.Г. Применение вейвлетов для ЦОС. М.: Техносфера, 2007.
22. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ. М.: Физматлит, 2003.
23. Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В., Колкер А.Б. Фильтрации сигналов и изображений: Фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010.
24. Donoho D., Johnstone I. // Biometrika. 1994. V. 81. P. 425.
25. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники / Под ред. Кравченко В.Ф. М.: Техносфера, 2018.
26. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами / Под ред. Кравченко В.Ф. М.: Техносфера, доп. тираж 300 экз., 2019.
27. Кравченко В.Ф., Кравченко О.В., Пустовойт В.И. и др. // РЭ. 2015. Т. 60. № 2. С. 109.
28. Кравченко В.Ф., Юрин А.В. // Успехи совр. радиоэлектроники. 2008. Т. 13. № 5. С. 3.
29. Neelamani R., Choi H., Baraniuk R. ForWaRD: Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned // IEEE Trans. 2004. V. SP-52. № 2. P. 418.
30. Ziemer W.P. Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Function of Bounded Variation. N.-Y.: Springer-Verlag, 1989.
31. Корпусов М.О., Панин А.А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. В 2-х тт. М.: Изд-во МГУ, 2016.
32. Фалалеев М.В. Обобщенные функции и действия над ними: Учебно-метод. пособие. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2011.
33. Härdle W., Kerkycharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, Approximation and Statistical Applications. N.-Y.: Springer, 1998.
34. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
35. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов: Учеб. пособие. СПб.: МОДУС+, 1999.
36. Donoho D.L. // Appl. Comput. Harmonic Analysis. 1995. V. 2. № 2. P. 101.
37. Abramovich F., Silverman B. // Biometrika. 1998. V. 85. № 1. P. 115.
38. Neelamani R., Choi H., Baraniuk R. // IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1999. V. 6. P. 3241.
39. Johnstone I., Kerkycharian G., Picard D., Raimondo M. // J. Royal Statistical Soc. Ser. B (Statistical Methodology). 2004. V. 66. № 3. P. 547.
40. Новиков Л.В. // ПТЭ. 2007. № 1. С. 69.
41. Новиков Л.В. // ПТЭ. 2005. № 6. С. 13.
42. Donoho D.L. // IEEE Trans. 1995. V. IT-41. № 3. P. 613.
43. Donoho D.L., Johnstone I.M. // Bernoulli. 1996. V. 2. № 1. P. 39.
44. Шестаков О.В. // Информатика и ее применения. 2012. Т. 6. № 2. С. 122.
45. Bigot J., Van Belleghem S. // Scand. J. Statistics. 2009. V. 36. № 4. P. 749.