СОДЕРЖАНИЕ

Том 66, номер 8, 2021

НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

ВАСИЛИЙ ИВАНОВИЧ ТИХОНОВ (21.08.1921–03.09.2006)

DOI: 10.31857/S0033849421080118

21 августа 2021 г. исполняется 100 лет со дня рождения, выдающегося российского ученого в области статистической радиотехники и оптимального построения радиоэлектронных систем, лауреата Государственной премии, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, генерал-майора авиации, доктора технических наук, профессора Василия Ивановича Тихонова

Василий Иванович родился в крестьянской семье в деревне Чеварда Лукояновского района Горьковской области. Учился в Ново-Майданской семилетней школе, затем окончил Арзамасский педрабфакультет. В 1938 году он поступил на физико-математический факультет Горьковского государственного университета. Но после трех лет обучения был призван в ряды Советской армии и направлен на учебу в Военно-Воздушную академию им. Н.Е. Жуковского. В 1945 году В.И. Тихонов с отличием окончил академию и был направлен в научно-исследовательский институт № 17 Министерства авиационной промышленности, где работал сначала инженером, а с 1946 года – ведущим инженером лаборатории радиоприемных устройств. В 1947 г. В.И. Тихонов перешел на работу в Военно-воздушную инженерную Академию имени профессора Н.Е. Жуковского и на следующий год был принят в адъюнктуру академии на кафедру теоретической радиотехники. Его научным руководителем являлся профессор (впоследствии – академик) В.В. Мигулин. В 1949 г. Василий Иванович успешно защитил кандидатскую диссертацию “Исследования шумфактора приемника сантиметровых волн”. В 1953 г. ему было присуждено ученое звание доцента.

С 1952 г. В.И. Тихонов начал заниматься исследованиями, связанными с анализом влияния шумов на работу радиоэлектронных устройств и систем. Сначала им совместно с сотрудниками Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова был разработан оригинальный и весьма эффективный математический аппарат, позволяющий с необходимой для практики точностью исследовать преобразование статистических характеристик случайных процессов при их прохождении через широким класс линейных и нелинейных радиотехнических систем.

Этот аппарат был применен В.И. Тихоновым к анализу конкретных систем. Результаты исследований были опубликованы в отечественных научных журналах и вошли в докторскую диссертацию “Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства”, которую Тихонов защитил в 1957 году. Его консультантом по диссертации являлся один из основоположников отечественной радиолокации, академик Ю.Б. Кобзарев.

После защиты диссертации в 1958 г. В.И. Тихонов возглавил кафедру радионавигации и радиосвязи академии, которой бессменно руководил в течение 30 лет. В последующие годы жизни он являлся профессором этой кафедры.

Под руководством В.И. Тихонова на кафедре были развернуты масштабные научные исследования по многим направлениям статистической теории связи. Фактически Василий Иванович является создателем крупнейшей отечественной научной школы, многие представители которой стали видными учеными и внесли значительный вклад в развитие статистической теории связи. За годы работы на кафедре В.И. Тихоновым были подготовлены более 60 кандидатов наук, 12 из которых впоследствии стали докторами наук.

В 1979 году Василию Ивановичу Тихонову было присвоено воинское звание “генерал-майор авиации”.

В.И. Тихонов – автор 12 монографий, шести учебников, более 170 научных статей. В 1986 г. в составе авторского коллектива за цикл работ “Теория фазовой синхронизации в радиотехнике и связи”, Василий Иванович был удостоен звания лауреата Государственной премии СССР.

В России и за ее пределами Василий Иванович хорошо известен благодаря своим замечательным книгам. Так, его монография “Статистическая радиотехника”, изданная в 1966 г. (М.: Радио и связь) и переизданная в 1982 г. представляет собой содержательную и, по сути, энциклопедическую работу в строгом и полном соответствии с требованиями, которые предъявляются к этой области знаний. Книга “Выбросы случайных процессов” (М.: Наука, 1970 г.) явилась существенным шагом вперед в развитии теории случайных процессов. Монография В.И. Тихонова и М.А. Миронова “Марковские процессы” (М.: Советское радио, 1977 г.) содержит теоретические основы различных видов марковских процессов и всевозможные технические приложения. Во многом благодаря именно этой книге в последней трети XX века аппарат марковских процессов стал рабочим и привычным для научных сотрудников НИИ и КБ и предприятий промышленности. Фундаментальные книги: В.И. Тихонов, Н.К. Кульман “Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов” (М.: Советское радио, 1975 г.), В.И. Тихонов “Оптимальный прием сигналов” (М.: Радио и связь, 1983 г.) до сих пор широко используются промышленными и научно-исследовательскими организациями в разработках авиационно-космических систем связи и спутниковых радионавигационных систем.

Василий Иванович Тихонов умер 3 сентября 2006 г. на 87 году жизни.

Ученики и коллеги В.И. Тихонова успешно продолжают развивать и углублять его исследования. Большая часть данного номера представляет полученные ими результаты.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 733–747

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.391.2

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ В ПЕРСПЕКТИВНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2021 г. М. С. Ярлыков[a], *, С. М. Ярлыкова[b], **

[a]*Редакция журнала "Радиотехника и электроника",*
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

[b]*Институт кибернетики Российского технологического университета МИРЭА,*
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

**E-mail: red@cplire.ru*

***E-mail: yarlykova@mirea.ru*

Поступила в редакцию 18.12.2020 г.
После доработки 18.12.2020 г.
Принята к публикации 11.01.2021 г.

Разработаны субоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов, предназначенных для применения в современных и перспективных глобальных навигационных спутниковых системах (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Евросоюз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). Постановка задачи выполнена применительно к векторному дискретно-непрерывному марковскому случайному процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторный диффузионный марковский процесс, а дискретная часть характеризуется простой цепью Маркова на несколько положений. Принято, что полезные ВОС-сигналы наблюдаются на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Получены аналитические соотношения для субоптимальной оценки и матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания выборки вектора непрерывных параметров. Представлены структурные схемы тех модулей субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС, которые отличаются от соответствующих модулей квазиоптимальной системы. Результаты работы полностью применимы в случаях шумоподобных сигналов современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

DOI: 10.31857/S0033849421080106

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением [1], в которой путем решения задачи синтеза были получены аналитические соотношения для оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных шумоподобных сигналов (ШПС) и, в частности, быстро развивающихся ВОС-сигналов (binary offset carrier modulated signals), перспективных глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай) [2–4].

При практической реализации синтезированных квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов с учетом области применения и круга решаемых задач на них, как правило, накладываются дополнительные ограничения и приближения. В результате на практике применяются субоптимальные (более простые) алгоритмы.

Для определенности рассуждений в работе всюду при конкретизации положений полагаем, что навигационная аппаратура пользователей (НАП) установлена на высокодинамичном подвижном объекте, в частности летательном аппарате (ЛА), таком как самолет, вертолет, беспилотный ЛА и т.д.

Определение местоположения и динамики перемещения подвижного объекта с использованием НАП в ГНСС основывается на псевдодальномерном беззапросном методе, при котором требуется одновременная видимость минимум четырех навигационных космических аппаратов (НКА) [5, 6].

Чтобы на основе измеренных псевдодальностей вычислить прямоугольные координаты пользователя (например, в системе ПЗ-90 или WGS-84), в НАП, кроме того, необходимо для каждого НКА иметь сведения об эфемеридах, альманахе, поправках к бортовой шкале времени (ШВ) и т.д., полученные с помощью принятой навигационной служебной информации (СИ).

В соответствии с этим при формировании субоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС аналогично [1] полагаем, что принимаемый НАП полезный радиосигнал от j-го НКА ($j=\overline{1,J}$) является нелинейной функцией от векторного дискретно-непрерывного процесса (ДНП) [1–4]. Векторный ДНП $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ (T – символ транспонирования) имеет непрерывную часть, представляющую собой векторный диффузионный марковский случайный процесс $\mathbf{X}(t)$ (или его выборку), и дискретную часть в виде дискретного процесса (ДП) $\Theta_j(t)$, который содержит навигационную СИ от j-го НКА, $j=\overline{1,J}$, и аппроксимирован простой цепью Маркова на M положений. В принимаемом от j-го НКА ВОС-сигнале ДП $\Theta_j(t)$ является манипулируемой фазой.

Компоненты векторного непрерывного процесса (НП) $\mathbf{X}(t)$, как правило, характеризуют запаздывание принимаемого радиосигнала (содержащее информацию о пространственном положении и динамике перемещения НАП), его фазу, доплеровский сдвиг частоты и т.д. [7].

В [1] задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов решена методами марковской теории оценивания (МТО) случайных процессов [8–11].

Как известно, у навигационных, в том числе и у ВОС-сигналов, время корреляции компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ много больше длительности такта цепи Маркова, характеризующей ДП $\Theta_j(t)$ ($j=\overline{1,J}$) [4, 10, 11]. В силу этого в [1] вектор НП $\mathbf{X}(t)$ в пределах каждого тактового интервала принимаемого радиосигнала был аппроксимирован векторным квазислучайным процессом, что позволило при решении задачи синтеза применить метод поэтапного решения уравнения Стратоновича [10, 12].

По этой же причине в [1] при разложении совместной апостериорной плотности вероятности (АПВ) векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ в задаче синтеза был использован метод с обратными связями по ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$ [10, 11].

При получении субоптимальных алгоритмов каждый многомерный дискриминатор в структуре НАП разрабатывается применительно к частному пространству состояний, которое соответствует принимаемому от j-го НКА ВОС-сигналу

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{Y}_j(t)$ – вектор параметров радиосигнала (ПРС), $j=\overline{1,J}$ [1, 7, 13].

Компоненты вектора ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ представляют собой параметры, от которых принимаемый сигнал $s_j(t)$ непосредственно зависит (псевдодальность пользователя, его псевдоскорость, фаза сигнала и т.п.).

Для j-го вектора ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и вектора НП $\mathbf{X}(t)$ выполняется соотношение [1, 7, 13]:

$$\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}$ – известная нелинейная векторная функция, вектор-столбец $\mathbf{Y}_j(t)$ имеет размер $(m\times 1)$, вектор-столбец $\mathbf{X}(t)$ имеет размер $(n\times 1)$. Число векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ равно J – числу всех одновременно видимых НКА.

Важную роль при разработке субоптимальных алгоритмов играют матрицы Якоби, характеризующие функциональные связи между компонентами вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$.

Каждая матрица Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ определяется как частная производная вектора-столбца $\mathbf{Y}_j(t)$ по вектору-столбцу $\mathbf{X}(t)$ [7, 10, 14]:

$$\mathbf{L}'_j(t) \triangleq \frac{\partial \mathbf{Y}_j(t)}{\partial \mathbf{X}(t)}, \quad j=\overline{1,J}. \tag{3}$$

Видно, что каждая матрица Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ имеет размер $(m\times n)$.

Для ряда приложений в области навигации, в том числе и применительно к ГНСС, изменения элементов матриц Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, во времени на тактовых полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, пренебрежимо малы, и при разработке субоптимальных алгоритмов их полагаем постоянными [7, 10, 13].

Цель работы – получить аналитические соотношения для субоптимальных оценок векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ и ковариационной матрицы субоптимальных ошибок оценивания вектора НП $\mathbf{X}(t)$, а также на этой основе разработать соответствующие структурные схемы модулей, которыми субоптимальная система приема и обработки ВОС-сигналов перспективных ГНСС отличается от соответствующей квазиоптимальной системы.

В иллюстрирующих примерах опираемся на sinBOC-сигналы с меандровой модуляцией типа BOC(1,1) на несущей частоте $f_{\text{Н}}$ = 1575.42 МГц при базовой (опорной) частоте $f_{\text{ОП}}$ = 1.023 МГц, которые характерны для E1OS сигналов ГНСС Galileo и для L1C сигналов ГНСС GPS применительно к спутникам нового поколения GPS III [4, 6, 15, 16].

В работе всюду каждый вектор представляет собой вектор-столбец; производная от скалярной функции по вектору-столбцу понимается как вектор-строка, а выражения вида $\left[\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^*_{jk}}\right]$ рассматриваются как операторы, воздействующие на функции, расположенные после них.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть векторное наблюдение на входе приемника НАП имеет вид

$$\Xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_j(t), \ldots, \xi_J(t)]^T, \ t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{4}$$

и определяется соотношением

$$\mathbf{\Xi}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{G}_\Xi(t)\mathbf{N}(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_j(t), \ldots, s_J(t)]^T \tag{6}$$

– вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов от всей совокупности J одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС;

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \ldots, n_j(t), \ldots, n_J(t)]^T$$

– вектор аддитивных независимых стандартных белых гауссовских шумов (БГШ) с известными характеристиками; J – общее число всех одновременно видимых в данный момент времени НКА, j – номер НКА.

Входящая в (5) переходная матрица $\mathbf{G}_\Xi(t)$ определяет матрицу интенсивностей помех $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$:

$$\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t) = \mathbf{G}_\Xi(t)\mathbf{G}_\Xi^T(t), \tag{7}$$

где матрица $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}(t)$ – невырожденная, т.е. $\mathbf{B}_{\Xi\Xi}^{-1}(t)$ существует.

Наблюдение на входе приемника НАП от j-го НКА $\xi_j(t)$ представляет собой согласно (5) аддитивную смесь полезного сигнала и шума:

$$\xi_j(t) = s_j(t) + n_j(t), \quad t \in [t_0, t), \quad j = \overline{1, J}, \tag{8}$$

где $s_j(t)$ – принимаемый полезный ВОС-сигнал от j-го НКА на входе приемника НАП, характеризуемый (6); $n_j(t)$ – аддитивная флуктуационная помеха в наблюдении $\xi_j(t)$ от j-го НКА.

Флуктуационная помеха $n_j(t)$, аппроксимируемая стационарным БГШ, имеет статистические характеристики, определяемые согласно (7), которые представим в виде

$$M[n_j(t)] = 0; \quad M[n_j(t)n_j(t+\tau)] = \frac{1}{2}N_{0j}\delta|\tau|, \tag{9}$$

где N_{0j} – интенсивность j-го БГШ, $M[\cdot]$ – символ усреднения по множеству реализаций.

Полезные ВОС-сигналы на входе приемника НАП достаточно детально рассмотрены в [1].

Принятый от j-го НКА полезный ВОС-сигнал $s_j(t)$ с использованием многопозиционной фазовой манипуляции (ФМ) для передачи СИ согласно [1] описывается следующим выражением:

$$s_j(t) = A_j d_j(t - \tau_{3j}) \cos\Big[(\omega_{\text{H}j} + \Delta\omega_{Dj} + \Delta\omega_j) \times \times (t - \tau_{3j}) + \Theta_j(t_k - \tau_{3j})\frac{2\pi}{M} + \varphi_j(t)\Big], \quad j = \overline{1, J}, \tag{10}$$

где A_j – амплитуда ВОС-сигнала от j-го НКА; $d_j(t)$ – модулирующая функция (МФ) ВОС-сигнала $s_j(t)$, отражающая специфику навигационных ШПС и собственно ВОС-сигналов; $\Theta_j(t_k)$ – информационный ДП, предназначенный для передачи СИ от j-го НКА; $\omega_{j\text{H}} = 2\pi f_{j\text{H}}$ – круговая несущая частота радиосигнала; $f_{j\text{H}}$ – несущая частота ВОС-сигнала; $\varphi_j(t)$ – фаза радиосигнала; τ_{3j} – запаздывание принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ на трассе от j-го НКА до НАП; $\Delta\omega_{Dj}$ – доплеровский сдвиг несущей частоты принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ на трассе от j-го НКА до НАП; $\Delta\omega_j$ – медленный сдвиг несущей частоты $\omega_{j\text{H}}$, возникающий в канале распространения радиосигнала $s_j(t)$ и в измерительном устройстве приемника.

В формуле (10) $M = 2^n$ представляет собой показатель многопозиционности ФМ, n – целое положительное число. Так, например, при $M = 2$ $(i = \overline{1, 2})$ имеем двоичную ФМ; при $M = 4$ $(i = \overline{1, 4})$ – квадратурную ФМ. Начало отсчета в (10) принято равным $t_0 = 0$.

Отметим, что в (10) и далее используется более общая модель ФМ (многопозиционная ФМ на M положений) по сравнению с двоичной ФМ, которая используется в навигационных сигналах ГНСС сегодня.

Характеризующий в (10) многопозиционную ФМ ДП $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}$ применительно к j-му НКА определяется соотношением: $\vartheta_i = i - 1$, т.е. $\Theta_j(t_k) = \{i - 1\}$, где i – номер состояния ДП

$$\Theta_j(t_k), \quad i = \overline{1, M}. \tag{11}$$

У навигационных ВОС-сигналов $s_j(t)$ (10) МФ $d_j(t)$ в простейшем случае является результатом перемножения двух двоичных последовательностей: псевдослучайной последовательности (ПСП) дальномерного кода $g_j(t)$ и меандрового поднесущего колебания $r_j(t)$ (специфика ВОС-сигналов) [2–4].

Следовательно, МФ навигационного ВОС-сигнала $d_j(t)$ записывается в виде [2–4]:

$$d_j(t-t_0) = g_j(t-t_0)\, r_j(t-t_0), \qquad (12)$$

где $g_j(t)$ – ПСП дальномерного кода, характеризующая навигационный ШПС применительно к j-му НКА, $r_j(t)$ – меандровое поднесущее колебание, отражающее специфику собственно ВОС-сигнала $s_j(t)$.

Каждая из последовательностей $g_j(t)$ и $r_j(t)$ состоит из чередующихся единичных видеоимпульсов соответствующей длительности, меняющих свою полярность по определенным законам согласно кодовым коэффициентам, значения которых на каждом такте равны +1 или –1.

Запаздывание $\tau_{3\,j}$ принимаемого радиосигнала $s_j(t)$ (10) на трассе от j-го НКА до НАП имеет вид [1, 5, 7]

$$\tau_{3\,j} = \tau_{Dj} + \Delta\tau_{\Sigma}, \qquad (13)$$

где $\tau_{D\,j}(t)$ – задержка принимаемого радиосигнала $s_j(t)$, обусловленная дальностью трассы между j-м НКА и НАП; $\Delta\tau_{\Sigma}$ – суммарная задержка сигнала $s_j(t)$, вызванная сдвигами ШВ j-го НКА и НАП; задержкой сигнала за счет неточного прогноза эфемерид; ионосферной и тропосферной задержками сигнала $s_j(t)$ и т.п.

Задержка $\tau_{D\,j}(t)$ принимаемого радиосигнала $s_j(t)$, обусловленная дальностью трассы между j-м НКА и НАП, характеризуется выражением

$$\tau_{Dj}(t) = D_j(t)/c, \qquad (14)$$

где $D_j(t)$ – дальность трассы между j-м НКА и НАП; c – скорость распространения радиоволн.

Таким образом, видно, что согласно (1) и (2) ВОС-сигнал $s_j(t)$ (10), принимаемый от j-го НКА, является известной нелинейной функцией векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$:

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{X}(t)\right], \qquad (15)$$

где $\Theta_j(t)$ – ДП, представляющий собой манипулируемую фазу сигнала $s_j(t)$, с помощью которой передается навигационная СИ, и $\mathbf{X}(t)$ – вектор НП, содержащий информацию о положении и динамике движения НАП и НКА, а также об условиях распространения радиоволн и стабильности несущей частоты.

Вектор принимаемых полезных ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t)$ (6) от всей совокупности J одновременно видимых в данный момент НКА группировки ГНСС может быть представлен в виде

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}\left[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}(t)\right], \qquad (16)$$

где $\mathbf{\Theta}_k = [\Theta_{1k}, \Theta_{2k}, \ldots, \Theta_{jk}, \ldots, \Theta_{Jk}]^T$ – вектор ДП применительно ко всей совокупности J одновременно видимых НКА, $\Theta_{jk} = \Theta_j(t_k)$ – ДП принимаемого ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) от j-го НКА.

Свойства вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и его взаимосвязь с векторами ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$, изложены в [1].

Для характеристики вектора НП $\mathbf{X}(t)$ используем типовую математическую модель (ММ) динамики объектов навигации на основе прямоугольной гринвичской системы координат, описывающую положение объекта (например, ЛА), на котором установлена НАП, в пространстве и его движение применительно к небольшим отрезкам времени [1, 7].

В соответствии с принятой ММ динамики ЛА имеем, что вектор НП $\mathbf{X}(t)$ представляет собой многокомпонентный диффузионный гауссовский марковский процесс, который в общем виде может быть описан линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением [1, 7, 9, 10]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_X(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}_X(t)\mathbf{U}_{\text{упр}}(t) + \mathbf{G}_X(t)\mathbf{N}_X(t), \qquad (17)$$
$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

где $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), .., x_n(t)]^T$ – вектор-столбец НП размером $(n \times 1)$; n – число компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$; $\mathbf{A}_{\mathbf{X}}(t)$ – матрица состояния размером $(n \times n)$; $\mathbf{U}_{\text{упр}}(t)$ – детерминированный вектор управления; $\mathbf{C}_X(t)$ – матрица управления; $\mathbf{N}_X(t)$ – вектор стандартных БГШ; $\mathbf{G}_X(t)$ – матрица интенсивностей шумов; $\mathbf{B}_{XX}(t) = \mathbf{G}_X(t)\mathbf{G}_X^T(t)$ – матрица коэффициентов диффузии вектора НП $\mathbf{X}(t)$.

Взаимосвязь вектора НП $\mathbf{X}(t)$ (17) и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ согласно (2), (10), (13) и (14) в типовом случае характеризуется соотношением [1, 7]:

$$\mathbf{Y}_j(t) = \mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\} =$$
$$= \left[l_{j1}\{\mathbf{X}(t)\}\, l_{j2}\{\mathbf{X}(t)\}\, l_{j3}\{\mathbf{X}(t)\}\, l_{j4}\{\mathbf{X}(t)\}\right]^T, \qquad (18)$$

где $\mathbf{Y}_j(t) = \left[y_{j1}(t) y_{j2}(t) y_{j3}(t) y_{j4}(t)\right]^T$, $j = \overline{1, J}$.

Компоненты нелинейной векторной функции $\mathbf{L}_j\{\mathbf{X}(t)\}$ в (18) равны [1, 7, 13]:

$$y_{j1}(t) = l_{j1}\{\mathbf{X}(t)\} = D_{j\text{изм}}(t) =$$
$$= \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2} + \delta D,$$
$$y_{j2}(t) = l_{j2}\{\mathbf{X}(t)\} = \frac{d}{dt} D_{j\text{изм}} = \qquad (19)$$
$$= K_x(V_x - W_{jx}) + K_y(V_y - W_{jy}) + K_z(V_z - W_{jz}),$$
$$y_{j3}(t) = l_{j3}\{\mathbf{X}(t)\} = \varphi_j(t), \quad y_{j4}(t) = l_{j4}\{\mathbf{X}(t)\} = \Delta\omega_{D\,j},$$

где x_j, y_j, z_j – прямоугольные координаты j-го НКА; x, y, z – прямоугольные координаты объекта (например, ЛА), на котором установлена НАП; $D_{\text{изм}}(t)$ – измеренное значение дальности $D(t)$; δD – неизвестная постоянная на время измерения ошибка (например, за счет расхождения ШВ j-го НКА и НАП);

$$V_x(t) = \frac{d}{dt}x(t),\;\; V_y(t) = \frac{d}{dt}y(t),\;\; V_z(t) = \frac{d}{dt}z(t) \quad (20)$$

– проекции скорости объекта (например, ЛА), на котором установлена НАП;

$$W_{jx}(t) = \frac{d}{dt}x_j(t),\;\; W_{jy}(t) = \frac{d}{dt}y_j(t),\;\; W_{jz}(t) = \frac{d}{dt}z_j(t)$$

– проекции скорости j-го НКА;

$$K_x = \frac{x_j - x}{D_{\text{изм}}(t)},\;\; K_y = \frac{y_j - y}{D_{\text{изм}}(t)},\;\; K_z = \frac{z_j - z}{D_{\text{изм}}(t)}$$

– направляющие косинусы; $\varphi_j(t)$ – фаза сигнала $s_j(t)$; $\Delta\omega_{Dj}$ – доплеровский сдвиг несущей частоты сигнала $s_j(t)$.

Информационный ДП $\Theta_j(t_k)$ сигнала $s_j(t)$ согласно (11) применительно к j-му НКА записывается в виде $\Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}_j = \{i-1\}_j$, где i – состояние ДП $\Theta_j(t_k)$. ДП $\Theta_j(t_k)$ представляет собой простую цепь Маркова на M положений и в каждый момент времени принимает одно из значений $\vartheta_i = i-1$, где $i = \overline{1,M}$ [17].

Возможные моменты перехода ДП $\Theta_j(t_k)$ из одного состояния в другое являются дискретными и определяются выражением

$$t_k = t_0 + kT,$$

где $T = \text{const}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Длительность такта $T = t_{k+1} - t_k$ ДП $\Theta_j(t_k)$ для ГНСС типа GPS, Galileo и ГЛОНАСС равна длительности посылки СИ: $T = \tau_{\text{СИ}} = 20$ мс [5, 6].

У принимаемого сигнала $s_j(t)$ (10) моменты времени t_k возможного перехода ДП $\Theta_j(t_k)$ из одного состояния в другое в общем случае являются случайными, поскольку они зависят от случайного запаздывания принимаемого сигнала τ_{3j} (13).

На каждом тактовом полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0,1,2,\ldots$, ДП $\Theta_j(t_k)$ остается постоянным, и он описывается следующим уравнением:

$$\frac{d\Theta_j(t_k)}{dt} = 0, \quad \text{где} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0,1,2,\ldots. \quad (21)$$

Матрица одношаговых вероятностей перехода и вектор вероятностей начального состояния ДП $\Theta_j(t_k)$ соответственно имеют вид [10, 11, 17]:

$$\boldsymbol{\pi}(t_k) = [\pi_{il}(t_k)], \quad (22)$$

где $\pi_{il}(t_k) = P\{\Theta_j(t_k+0) = \vartheta_l | \Theta_j(t_k-0) = \vartheta_i\}$, $i, l = \overline{1,M}$;

$$\mathbf{P}_\theta(t_0) = \{P_{\vartheta i}(t_0)\}, \text{ где } i = \overline{1,M}.$$

В начале k-го такта $[t_k, t_{k+1})$ вероятности состояний ДП $\Theta_j(t_k)$

$$P_{\vartheta i}(t_k+0) \triangleq P(t_k+0,\; \Theta_j(t_k+0) = \vartheta_i)$$

определяются формулой [17]

$$P_{\vartheta i}(t_k+0) = \sum_{m=1}^{M} \pi_{mi}(t_k) P_{\vartheta m}(t_k-0),\;\; i = \overline{1,M}, \quad (23)$$

где $P_{\vartheta m}(t_k-0)$ – вероятность состояния ДП $\Theta_j(t_k)$ в конце $(k-1)$-го такта $[t_{k-1}, t_k)$.

Далее применительно к ДП $\Theta_j(t_k)$ в обозначениях индекс j там, где это не затрудняет понимания, для простоты не приводится.

В [1] при решении задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки векторного ДНП было применено поэтапное решение уравнения Стратоновича [10, 12].

Возможность решения уравнения Стратоновича для АПВ оцениваемых ДНП поэтапно (в два этапа) обусловлена спецификой непрерывных (17) и дискретных (21)–(23) компонент векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\; \Theta_j(t)]^T$, где $j = \overline{1,J}$. Использование метода поэтапного решения уравнения Стратоновича за счет обоснованного упрощения ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ позволяет заметно повысить конструктивность решения задачи синтеза.

Суть такого упрощения ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ заключается в аппроксимации его компонент на каждом тактовом полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0,1,2,..$ (применительно к ГНСС на длительности тактового полуинтервала для передачи СИ $\tau_{\text{СИ}} = 20$ мс) квазислучайными процессами [10, 13].

В таких случаях применяется обработка векторного наблюдения на входе приемника НАП $\Xi(t)$ (4)–(6) в два этапа. На первом этапе применительно к каждому k-му такту $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0,1,2,\ldots$, обрабатывается только вектор НП $\mathbf{X}(t)$, так как ДП $\Theta_j(t)$ векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\; \Theta_j(t)]^T$ при этом остается постоянным. В силу аппроксимации ММ вектора НП $\mathbf{X}(t)$ (17) векторным квазислучайным процессом на первом этапе удается найти точное решение уравнения Стратоновича как решение нелинейной задачи оценки параметров.

На втором этапе обработка осуществляется в дискретном времени в точках t_k+0 $(k=0,1,2,\ldots)$, т.е. в точках возможной смены состояния ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$.

При этом оценки компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, полученные на первом этапе обработки, используются в качестве начальных значений для второго этапа обработки векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$.

Применительно к (17) в дискретные моменты времени t_k $(k=0,1,2,\ldots)$ выборка вектора НП $\mathbf{X}_k=\mathbf{X}(t_k)$ описывается эквивалентным линейным векторно-матричным стохастическим разностным уравнением

$$\mathbf{X}_k=\mathbf{\Phi}_{XX}(t_k,t_{k-1})\mathbf{X}_{k-1}+ \\ +\mathbf{\Psi}_{XU}(t_k,t_{k-1})U_{\text{упр}k}+\mathbf{\Gamma}_X(t_k,t_{k-1})\mathbf{N}_{Xk}, \quad (24)$$

где $\mathbf{\Phi}_{XX}$, $\mathbf{\Psi}_{XU}$ и $\mathbf{\Gamma}_X$ – известные матрицы, $\mathbf{N}_{Xk}=\mathbf{N}_X(t_k)$ – вектор формирующих стандартных дискретных БГШ, $\mathbf{U}_{\text{упр}\,k}$ – дискретный вектор управления.

Аппроксимируя на каждом полуинтервале $[t_k,t_{k+1})$, где $k=0,1,2,\ldots$, в принимаемом ВОС-сигнале $s_j(t)$ (15) вектор НП $\mathbf{X}(t)$ векторным квазислучайным процессом, запишем [1, 10, 12, 13]:

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k),\quad t\in[t_k,t_{k+1}), \\ k=0,1,2,\ldots,\quad \mathbf{X}_0=\mathbf{X}(t_0), \quad (25)$$

где $\mathbf{f}(\cdot)$ – детерминированная векторная функция; $\mathbf{X}_k=\mathbf{X}(t_k)$; $\mathbf{X}_k=\mathbf{f}(t_k,\mathbf{X}_k)$ – начальное значение вектора НП $\mathbf{X}(t)$ на k-м такте.

Функция $\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)$ имеет вид [1, 10, 12, 13]

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)=\mathbf{\Phi}_{XX}(t,t_k)\mathbf{X}_k,\quad t\in[t_k,t_{k+1}), \quad (26)$$

где $\mathbf{\Phi}_{XX}(t,t_k)$ – переходная матрица состояния, входящая в (24).

В соответствии с (25) принимаемый от j-го НКА полезный ВОС-сигнал $s_j(t)$ (15) в пределах одного тактового полуинтервала принимает вид

$$s_j(t)=s\left[t,\Theta_j(t_k),\ \mathbf{f}(t_k,\mathbf{X}_k)\right],\quad t\in[t_k,t_{k+1}), \\ k=0,1,2,\ldots,\quad j=\overline{1,J}. \quad (27)$$

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ И БЛИЗКИЕ К НИМ ОЦЕНКИ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

Решенная в [1] задача синтеза состоит в том, чтобы на k-м такте $[t_k,t_{k+1})$, где $k=0,1,2,\ldots$, располагая наблюдениями (5) и имея априорные сведения (11) и (17) об оцениваемом векторном ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\Theta_j(t)]^T$, с использованием метода обратных связей по ДП получить оптимальную оценку $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и оптимальные оценки $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$.

Оптимальная оценка $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$, полученная в [1], удовлетворяет критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь. Оптимальной оценкой $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$, удовлетворяющей этому критерию, является апостериорное математическое ожидание $M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}]$ выборки вектора НП $\mathbf{X}(t)$ [9–11]:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1}=M_{ps}[\mathbf{X}_{k+1}]=\int\limits_{\mathbf{X}_{k+1}}\mathbf{X}_{k+1}p_{ps}(t,\mathbf{X}_{k+1})\,d\mathbf{X}_{k+1}, \quad (28)$$

где $\hat{\mathbf{X}}(t)$ – оптимальная оценка вектора НП $\mathbf{X}(t)$;

$$p_{ps}(t,\mathbf{X}_{k+1})\triangleq p(t,\mathbf{X}_{k+1}|\Xi^{t_{k+1}})$$

– АПВ выборки $\mathbf{X}_{k+1}$;

$$\Xi^{t_{k+1}}=\{\Xi(\tau):\tau\in[t_0,t_{k+1}]\}$$

– реализация векторного наблюдения на входе приемника НАП $\Xi(t)$ на отрезке $[t_0,t_{k+1}]$.

Если АПВ $p_{ps}(t,\mathbf{X}_{k+1})$ является унимодальной и гауссовской, то оптимальная оценка $\hat{\mathbf{X}}(t)$ согласно критерию (28) и критерию максимума АПВ совпадают [9–11], что и используем в дальнейшем.

В соответствии с [1] оптимальная оценка $\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, применительно к j-му НКА удовлетворяет критерию минимума апостериорного риска при простой функции потерь, что эквивалентно критерию максимума апостериорной вероятности (АВ) ДП $\Theta_j(t)$ [9–11]:

$$\hat{\Theta}_j(t_{k+1}-0)=\vartheta_i\!:\max_{\vartheta_1\le\vartheta_i\le\vartheta_M}\{P_{i\,ps}(t_{k+1}-0)\}, \quad (29)$$

где $P_{i\,ps}(t_{k+1}-0)$ – АВ состояния ДП $\Theta_j(t)$ в момент времени $t=t_{k+1}-0$.

Под оценками и алгоритмами, близкими к оптимальным, понимаем квазиоптимальные и субоптимальные (еще более упрощенные) оценки и алгоритмы. Применение в ГНСС квазиоптимальных и субоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов) существенно снижает трудности при разработке приемников НАП.

Чтобы упростить синтезированные оптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов, в [1], как обычно, был применен метод гауссовской аппроксимации и получены аналитические соотношения для квазиоптимальной оценки

$\mathbf{X}^*_{k+1}$ и квазиоптимальных оценок $\Theta^*_{j(k+1)}$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, [1, 8–11].

В соответствии с методом гауссовской аппроксимации в [1] при формировании квазиоптимальных оценок векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ были приняты следующие два допущения [1, 8–11]:

1) АПВ $p_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)$ выборки оцениваемого вектора НП $\mathbf{X}_k$ является гауссовской

$$p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)=N\left\{\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k,\mathbf{K}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)\right\},\quad(30)$$

где $\mathbf{X}^*_k$ – квазиоптимальная оценка вектора НП $\mathbf{X}_k$;

$$\mathbf{K}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)=M^*_{ps1}\left\{\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]^T\right\}= \\ =\int\limits_{\mathbf{X}_k}\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathbf{X}^*_k\right]^T p^*_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)\,d\mathbf{X}_k\quad(31)$$

– матрица апостериорных одномерных центральных моментов второго порядка (матрица ковариаций) квазиоптимальных ошибок оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в момент времени $t_{k+1}-0$; индекс “1” означает первый этап обработки; индекс * означает, что АПВ $p_{ps1}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)$ аппроксимирована гауссовской кривой (30); N – символ гауссовского закона распределения.

2) для условных АВ $P_{ips}(t_k\,|\mathbf{X}^*_k)$ ДП $\Theta_j(t_k)$ применительно к j-му НКА, где $j=\overline{1,J}$, при достаточно высокой апостериорной точности оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ выполняются приближенные равенства:

$$P_{ips}(t_k)\approx P_{ips}(t_k\,|\mathbf{X}_k)\approx P_{ips}(t_k\,|\mathbf{X}^*_k),\quad\text{где}\quad i=\overline{1,M}.\quad(32)$$

Если на алгоритмы накладываются только эти два ограничения, то такие алгоритмы (и соответствующие им оценки) называются квазиоптимальными.

При формировании субоптимальных оценок (и соответствующих им алгоритмов) векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\Theta_j(t)]^T$ полагаем, что дополнительно выполняется (к уже отмеченным двум) еще одно ограничение, накладываемое на динамику элементов вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, которое заключается в следующем: *матрицы Якоби* $\mathbf{L}'_j(t)$ (3), *где* $j=\overline{1,J}$, *связывающие элементы вектора НП* $\mathbf{X}(t)$ *и векторов ПРС* $\mathbf{Y}_j(t)$, *считаются постоянными на каждом такте* $[t_k,t_{k+1})$, *где* $k=0,1,2,\ldots$, [10, 11, 13].

3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[X^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

Аналитические соотношения, определяющие квазиоптимальную оценку (по критерию максимума АПВ) $\mathbf{X}^*_{k+1}$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ и квазиоптимальные оценки $\Theta^*_{j(k+1)}$ ДП $\Theta_j(t)$, где $j=\overline{1,J}$, а также матрицу ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$, получены в [1] с использованием метода обратных связей по ДП. Ниже в соответствии с [1] приведем итоговые выражения этих соотношений.

3.1. Первый этап обработки

Согласно методу гауссовской аппроксимации (30)–(32) имеем, что квазиоптимальная оценка (по критерию максимума АПВ) $\mathbf{X}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, с учетом того, что

$$P_{ips}(t_{k+1}-0)\approx P_{ips}(t_{k+1}-|0\,\mathbf{X}^*_k),\ \ i=\overline{1,M},$$

определяется следующим соотношением [1]:

$$\mathbf{X}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)=\mathbf{X}^*(t_k)+\mathbf{K}^*(t_k\,|t_{k+1}-0)\times \\ \times\sum_{i=1}^{M}P_{ips}(t_{k+1}-0)\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}^*(t_k)),\quad(33)$$

где

$$\Phi'_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))\triangleq\left[\frac{\partial\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T= \\ =\int\limits_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T d\tau\quad(34)$$

– первая производная по вектору $\mathbf{X}^*(t_k)$ парциального (i-го) логарифма функционала правдоподобия (ЛФП) $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$, представляющая собой вектор-столбец размером $(n\times1)$;

$$\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\int\limits_{t_k}^{t}F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}_k)d\tau\quad(35)$$

– парциальный (i-й) ЛФП (т.е. ЛФП, соответствующий i-му значению компонент вектора ДП $\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\}$, где $i=\overline{1,M}$), применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА;

$$F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)=\frac{d\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)}{dt}$$

– производная по времени парциального (i-го) ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА [1, 10, 17].

Отметим, что принятое в работе обозначение типа $\mathbf{X}^*(t_k|t_{k+1}-0)$ соответствует тому, что оценка формируется на момент времени t_k по наблюдению $\Xi(t)$ до момента времени $t=t_{k+1}-0$.

В соответствии с (32) имеем в (33), что условная АВ ДП $\Theta_j(t)$ в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, равна

$$P_{ips}(t_{k+1}-0|\mathbf{X}^*(t_k))\approx P_{ips}(t_{k+1}-0),\ \text{где}\ i=\overline{1,M}. \quad (36)$$

Производная по времени от парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$ (т.е. ЛФП, соответствующего i-му значению компонент вектора ДП $\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\}$, где $i=\overline{1,M}$) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ (9) и (26) от всех одновременно видимых J НКА в соответствии с (25) характеризуется следующим выражением [1, 9–11]:

$$\begin{gathered}F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)\triangleq F_\Sigma[t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)]=\\ =\mathbf{S}^T(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)\times\\ \times\mathbf{B}^{-1}_{\Xi\Xi}\left[\Xi(t)-\frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)\right],\end{gathered} \quad (37)$$

где $i=\overline{1,M}$; $\mathbf{\Theta}_k=[\Theta_{1k},\Theta_{2k},\ldots,\Theta_{jk},\ldots\Theta_{Jk}]^T$ – вектор ДП применительно ко всей совокупности J одновременно видимых НКА.

Наряду с производной по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}_k)$, которая характеризуется выражением (37), в алгоритмах также используется производная по времени ЛФП $F_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ (26) от всех одновременно видимых J НКА, которая имеет вид [1, 10, 13]:

$$\begin{gathered}F_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)=F_\Sigma[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{f}(t,\mathbf{X}_k)]=\\ =\mathbf{S}^T(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)\mathbf{B}^{-1}_{\Xi\Xi}\left[\Xi(t)-\frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)\right],\end{gathered} \quad (38)$$

где

$$F_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)=\frac{d\Phi_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)}{dt}$$

– производная по времени ЛФП $\Phi_\Sigma(t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t,\mathbf{\Theta}_k,\mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА [1, 10, 17].

Матрица ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется следующей формулой [1]:

$$\begin{gathered}\mathbf{K}^*(t_k|t_{k+1}-0)=\left[[\mathbf{K}^*(t_k)]^{-1}-\sum_{i=1}^{M}P_{ips}(t_{k+1}-0|\mathbf{X}^*_k)\times\right.\\ \times\left\{\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}^*_k)-\left[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}^*_k)-\right.\right.\\ \left.-\sum_{g=1}^{M}P_{gps}(t_{k+1}-0|\mathbf{X}^*_k)\Phi'_{\Sigma g}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}^*_k)\right]\times\\ \left.\left.\times\left[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}^*_k)\right]^T\right\}\right]^{-1},\end{gathered} \quad (39)$$

$$\begin{gathered}\text{где}\quad \Phi''_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))\triangleq\frac{\partial^2\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))}{(\partial\mathbf{X}^*(t_k))^2}=\\ =\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T\frac{\partial\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}=\\ =\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T\left[\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau,\mathbf{X}^*(t_k))}{\partial\mathbf{X}^*(t_k)}\right]^T d\tau\end{gathered} \quad (40)$$

– вторая производная по вектору $\mathbf{X}^*(t_k)$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\mathbf{X}^*(t_k))$, представляющая собой матрицу размером $(n\times n)$.

Решение о квазиоптимальной оценке ДП $\Theta^*_{j(k+1)}$ на полуинтервале $[t_k,t_{k+1})$, принимается на основе (29) с учетом (32) в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}-0$, согласно следующему правилу [1, 10, 11]:

$$\Theta^*_{j(k+1)}=\vartheta_i:\max_{\vartheta_1\le\vartheta_i\le\vartheta_M}\{P_{ips}(t_{k+1}-0)\}, \quad (41)$$

где $P_{ips}(t_{k+1}-0)$ – АВ-состояния ДП $\Theta_j(t)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) в момент времени $t=t_{k+1}-0$.

Квазиоптимальная оценка ДП $\Theta^*_{j(k+1)}$ на k-м такте применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) получена в [1] с использованием приближения первого порядка (32).

3.2. Второй этап обработки

Обработка информации на втором этапе k-го такта производится в дискретном времени в точке перехода от одного такта к следующему, т.е. в момент времени $t=t_{k+1}+0$, где $k=0,1,2,\ldots$.

При этом на втором этапе обработки учитывается как априорное изменение на k-м такте вектора НП от $\mathbf{X}_k$ до $\mathbf{X}_{k+1}$ как квазислучайного процесса согласно (25) и (26), так и возможная смена состояния ДП $\Theta_j(t)$ в момент времени $t = t^{k+1} + 0$, где $k = 0,1,2,\ldots$, в соответствии с (23) [1].

Следуя [1], приведем соотношения для квазиоптимальной оценки выборки вектора НП $\mathbf{X}^*_{k+1}$ и для матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_{k+1}+0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_{k+1}$ на втором этапе обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}+0$, $k = 0,1,2,\ldots$, при условии, что $\overset{*}{p}_{ps1}(t_{k+1}-0, \mathbf{X}_k)$ (30) аппроксимирована гауссовской кривой.

Учитывая, что вектор НП $\mathbf{X}(t)$ на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ аппроксимирован векторным квазислучайным процессом (25) и (26), соотношение для квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_{k+1}+0)$ на втором этапе обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}+0$, имеет вид [1, 10, 13]

$$\mathbf{X}^*(t_{k+1}+0) = \mathbf{\Phi}_{XX}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{X}^*(t_k \,|t_{k+1}-0), \qquad (42)$$

где квазиоптимальная оценка $\mathbf{X}^*(t_k \,|t_{k+1}-0)$ вычисляется в конце первого этапа обработки в соответствии с (33), а переходная матрица состояния $\mathbf{\Phi}_{XX}(t_{k+1}, t_k)$ имеет размер $(n \times n)$ и определяется согласно (24).

Матрица ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_{k+1}+0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_{k+1}$ на втором этапе обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}+0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, в соответствии с (37) и (39) при учете (24)–(26) характеризуется следующим выражением [1, 10, 13]:

$$\mathbf{K}^*(t_{k+1}+0) = \\ = \mathbf{\Phi}_{XX}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{K}^*(t_k \,|t_{k+1}-0)\,\mathbf{\Phi}^T_{XX}(t_{k+1}, t_k). \qquad (43)$$

Кроме того, на втором этапе обработки на k-м такте с учетом квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*_{k+1}$ (42) производится формирование начальных значений АВ ДП $\Theta_j(t)$ для первого этапа обработки применительно к следующему ($(k+1)$-му) такту, т.е. вычисляются значения $P_{ips}(t_{k+1}+0)$.

Отметим, что в [1] при получении аналитических соотношений для квазиоптимальных оценок векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t), \Theta_j(t)]^T$ и ковариационной матрицы квазиоптимальных ошибок оценивания вектора НП $\mathbf{X}(t)$ особенностями, учитывающими специфику навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов), являлись следующие два фактора.

1. В алгоритмах при разложении совместной АПВ $p_{ps}(t, \Theta_j, \mathbf{X})$ векторного ДНП $[\mathbf{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$ был применен метод с обратными связями по ДП $\Theta_j(t)$, где $j = \overline{1, J}$.

2. Для вычисления АПВ $p_{ps1}(t, \mathbf{X})$ было использовано не уравнение Стратоновича для совместной АПВ $p_{ps1}(t, \Theta_{jk}, \mathbf{X}_k)$, а его решение. Это особенно значимо в случае применения навигационных ШПС (в частности, ВОС-сигналов), для которых характерно малое отношение сигнал/шум на входе приемника НАП, и при обработке принимаемого ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) необходимо накопление определенного числа элементарных посылок ПСП дальномерного кода $g_j(t)$ (12).

4. СУБОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВЕКТОРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА $[\mathrm{X}^T(t),\ \Theta_j(t)]^T$

При получении субоптимальных алгоритмов приема и обработки навигационных ШПС (в том числе и ВОС-сигналов) необходимо учитывать то обстоятельство, что приемник НАП является многоканальным и состоит из J каналов, где J – число всех одновременно видимых НКА.

При этом каждый канал обработки радиосигналов функционирует применительно к своему принимаемому сигналу $s_j(t)$ (10) и, следовательно, к своему вектору ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ (18), соответствующему j-му НКА.

По этой причине, переходя от квазиоптимальных алгоритмов (33) и (39) к субоптимальным, следует отразить факт взаимосвязи компонент векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, что характеризуется зависимостями согласно (18)–(20).

Кроме того, при получении аналитических соотношений субоптимальных алгоритмов с целью их упрощения учитывается ограничение, накладываемое на динамику компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, состоящее в том, что матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$ (3), $j = \overline{1, J}$, считаются постоянными на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0,1,2,\ldots$

В качестве исходных рассмотрим соотношения для квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_k \,|t_{k+1}-0)$ (33) и матрицы ковариаций квазиоптимальных ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k \,|t_{k+1}-0)$ (39).

Из (33) и (39) видно, что при переходе от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным подвергаются преобразованиям, обусловленным взаимосвязями компонент векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ и компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$, первая $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ (34) и вторая $\Phi''_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ (40) производные по вектору $\mathbf{X}^*(t_k)$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$.

Первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ (34) и вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ (40) получены применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА.

Производная по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$ (35) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6) от всех одновременно видимых J НКА в соответствии с (25) характеризуется выражением (37).

При рассмотрении зависимостей производных $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$ и $\Phi''_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$ от векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, $j = \overline{1, J}$, в этих выражениях следует переходить к использованию производной по времени ЛФП $F_j(t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_{jk})$ и производной по времени парциального (i-го) ЛФП

$$F_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk}) \triangleq F_j(t, \Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}, \mathbf{Y}_{jk})$$

применительно к какому-либо одному ВОС-сигналу

$$s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, а не от всей совокупности принимаемых сигналов от J НКА.

Производная по времени ЛФП $F_j(t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_j(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)\right]$, принимаемому от j-го НКА, характеризуется следующим выражением [1, 10, 13]:

$$F_j(t, \mathbf{Y}_{jk}) = \frac{2}{N_{0j}}\left[\xi_j(t) s_j(t, \mathbf{Y}_{jk}) - \frac{1}{2} s_j^2(t, \mathbf{Y}_{jk})\right]. \quad (44)$$

Производная по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_{ji}(t) = s_j[t, \Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}, \mathbf{Y}_j(t)]$, принимаемому от j-го НКА, записывается в виде [1, 10, 13]:

$$F_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk}) = \frac{2}{N_{0j}}\left[\xi_j(t) s_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk}) - \frac{1}{2} s_{ji}^2(t, \mathbf{Y}_{jk})\right], \quad i = \overline{1, M}. \quad (45)$$

Формула связи между производной по времени ЛФП $F_\Sigma\left(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k\right)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА и производной по времени ЛФП $F_j(t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу $s_j[t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_j(t)]$, принимаемому от j-го НКА, определяется соотношением [1, 10, 13]:

$$F_\Sigma\left(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k\right) = \sum_{j=1}^{J} F_j(t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_{jk}). \quad (46)$$

Соответствующая формула связи между производной по времени от парциального (i-го) ЛФП $F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t, \mathbf{\Theta}_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА и производной по времени парциального (i-го) ЛФП $F_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk})$ применительно к ВОС-сигналу

$$s_{ji}(t) = s_j\left[t, \Theta_j(t_k) = \{\vartheta_i\}, \mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, имеет вид

$$F_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) = \sum_{j=1}^{J} F_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk}), \quad \text{где} \quad i = \overline{1, M}. \quad (47)$$

Формулы связи, аналогичные (46) и (47), для самих ЛФП могут быть представлены в виде

$$\Phi_\Sigma\left(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k\right) = \sum_{j=1}^{J} \Phi_j(t, \Theta_j(t_k), \mathbf{Y}_{jk}), \quad (48)$$

где $\Phi_\Sigma\left(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k\right)$ – ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА;

$$\Phi_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k) = \sum_{j=1}^{J} \Phi_{ji}(t, \mathbf{Y}_{jk}), \quad (49)$$

где $\Phi_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k)$ – парциальный (i-й) ЛФП применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t, \mathbf{\Theta}_k = \{\vartheta_i\}, \mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Как следует из рассмотрения (33) и (39), чтобы согласно (34) и (40) найти первую $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ и вторую $\Phi''_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*(t_k))$ производные, необходимо знать

$$\frac{\partial F_{\Sigma i}(\tau, \mathbf{X}^*(t_k))}{\partial \mathbf{X}^*(t_k)}$$

и, следовательно, с учетом (47) требуется получить

$$\frac{\partial F_{ji}(t, \mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{X}(t)},$$

где $F_{ji}(t, \mathbf{Y}_j(t))$ определяется формулой (45).

Видно, что

$$\frac{\partial F_{ji}(t, \mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{X}(t)} = \frac{\partial F_{ji}(t, \mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{Y}_j(t)} \frac{\partial \mathbf{Y}_j(t)}{\partial \mathbf{X}(t)}, \quad (50)$$

где $\mathbf{Y}_j(t) = \left[y_{j1}(t), y_{j2}(t), \ldots, y_{jm}(t)\right]^T$ – вектор-столбец размером $(m \times 1)$; $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$ – вектор-столбец размером $(n \times 1)$;

$$\mathbf{L}'_j(t) \triangleq \frac{\partial \mathbf{Y}_j(t)}{\partial \mathbf{X}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{j1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{j1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_{j1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_{j2}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{j2}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_{j2}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial y_{jm}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{jm}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_{jm}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (51)$$

– матрица Якоби размером $(m \times n)$.

С учетом (51) производная (50) принимает вид

$$\frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{X}(t)} = \frac{\partial F_{ji}(t,\mathbf{Y}_j(t))}{\partial \mathbf{Y}_j(t)} \mathbf{L}_j^{'}(t), \quad j=\overline{1,J}, \quad i=\overline{1,M}. \tag{52}$$

4.1. Разностное уравнение для субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0)$

Субоптимальная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется как

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0) = \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p_{ps1}^{*}(t_{k+1}-0,\mathbf{X}_k)\,d\mathbf{X}_k = \\ = \int_{\mathbf{X}_k} \mathbf{X}_k p^{*}(t,\mathbf{X}_{k+1}|\boldsymbol{\Xi}^{t_{k+1}-0})\,d\mathbf{X}_k.$$

На основании (33)–(35) с учетом (36) субоптимальная оценка $\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0)$ характеризуется следующим разностным уравнением:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0) = \tilde{\mathbf{X}}_k + \tilde{\mathbf{K}}(t_k|t_{k+1}-0)\times \\ \times \sum_{i=1}^{M} P_{ips}(t_{k+1}-0)\,\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k), \tag{53}$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_k = \tilde{\mathbf{X}}(t_k)$ – субоптимальная оценка выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в момент времени t_k; $\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – первая производная, характеризуемая согласно (34); $j=\overline{1,J}$; $i=\overline{1,M}$; $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$.

Первая производная $\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ представляет собой вектор-столбец размером $(n\times 1)$.

Далее найдем аналитическое соотношение, определяющее первую производную по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\boldsymbol{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Следуя формуле связи (49), сначала получим соотношение, характеризующее $\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к ВОС-сигналу

$$s_{ji}(t) = s_j\left[t,\Theta_j(t_k)=\{\vartheta_i\},\mathbf{Y}_j(t)\right],$$

принимаемому от j-го НКА, где $j=\overline{1,J}$.

Производная $\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ с учетом (52) может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial \tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T d\tau = \\ = \int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}_j^{'}(\tau)\right]^T d\tau, \tag{54}$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}=\tilde{\mathbf{Y}}_j(t_k)$ – субоптимальная оценка выборки вектора ПРС $\mathbf{Y}_{jk}$ в соответствии с (18) и (19), $\mathbf{L}_j^{'}(t)$ – матрица Якоби (51), $j=\overline{1,J}$.

Используя правило транспонирования произведения матриц, можно представить производную (54) следующим образом:

$$\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \int_{t_k}^{t}[\mathbf{L}_j^{'}(\tau)]^T\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau. \tag{55}$$

Как отмечали, при разработке субоптимальных алгоритмов полагаем, что выполнено ограничение, накладываемое на матрицы Якоби $\mathbf{L}_j^{'}(t)$ (51), об их постоянстве во времени на каждом тактовом полуинтервале, т.е.

$$\mathbf{L}_j^{'}(t) = \mathbf{L}_j^{'} = \text{const}, \quad t\in[t_k,t_{k+1}), \quad k=0,1,2,\ldots \tag{56}$$

С учетом ограничения (56) производная $\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ принимает вид

$$\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = [\mathbf{L}_j^{'}]^T\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau, \tag{57}$$

где $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$

Первые производные $\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ и $\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ на основании формулы (49) взаимосвязаны следующим образом

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J}\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k). \tag{58}$$

Подставив (57) в соотношение (58), находим, что первая производная парциального (i-го) ЛФП $\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (34) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\boldsymbol{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующей итоговой формулой:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma i}^{'}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k) = \sum_{j=1}^{J}[\mathbf{L}_j^{'}]^T\int_{t_k}^{t}\left[\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T d\tau, \tag{59}$$

где $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (45).

Таким образом, разностное уравнение для субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k|t_{k+1}-0)$ выборки вектора

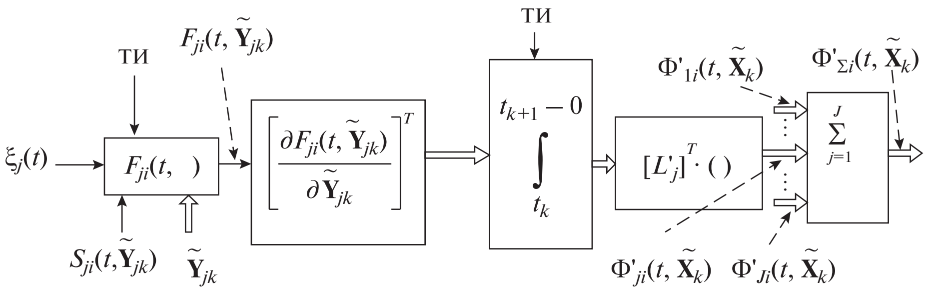

Рис. 1. Структурная схема модуля формирования первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$.

НП $\mathbf{X}_k$ согласно (53) и с учетом (36), (56) и (59) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t = t_{k+1} - 0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6), (16) от всех одновременно видимых J НКА принимает вид

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0) = \tilde{\mathbf{X}}_k + \tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{M} P_{i\,ps}(t_{k+1} - 0) \left[\sum_{j=1}^{J} [\mathbf{L}'_j]^T \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} \left[\frac{\partial F_{ji}(\tau, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}_{jk}} \right]^T d\tau \right], \quad (60)$$

где $F_{ji}(\tau, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется согласно (45); матрица Якоби $\mathbf{L}'_j$ характеризуется в соответствии с (51) и (56); $j = \overline{1, J}$, $i = \overline{1, M}$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Из сопоставления (33), (53) и (60) видно, что разностные уравнения для квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ и субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ различаются соотношениями, определяющими производные $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}_k^*)$ (34) и $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (59).

При формировании субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ производная $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ вычисляется по менее точной, но более простой формуле (59), чем при вычислении квазиоптимальной оценки $\mathbf{X}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$.

Структурная схема модуля формирования первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов, выполненная в соответствии с алгоритмами (45), (56) и (59), представлена на рис. 1, где обозначено ТИ – тактовые импульсы.

На вход модуля формирования первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ поступают сигнал $\xi_j(t)$ (8) от j-го НКА, представляющий собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) и шума $n_j(t)$ (9), а также опорный ВОС-сигнал $\mathrm{S}_{ji}(t, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$. На выходной сумматор модуля поступает как сформированный сигнал первой производной $\Phi'_{ji}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, так и сигналы первых производных $\Phi'_{li}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, $l \neq j$, $l = \overline{1, J}$, поступающие с других модулей. С выхода модуля снимается результирующий сигнал первой производной $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$. Векторные связи на рис. 1 показаны двойными линиями.

4.2. Разностное уравнение для матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$

Матрица ковариаций (матрица апостериорных одномерных центральных моментов второго порядка) субоптимальных ошибок оценивания выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1} - 0$, определяется как

$$\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0) = M_{ps1}^{*}\left\{ [\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k][\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k]^T \right\} =$$
$$= \int_{\mathbf{X}_k} [\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k][\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k]^T p_{ps1}^{*}(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k)\, d\mathbf{X}_k =$$
$$= \int_{\mathbf{X}_k} [\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k][\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k]^T p^*(t_{k+1} - 0, \mathbf{X}_k | \mathbf{\Xi}^{t_{k+1}-0})\, d\mathbf{X}_k.$$

На основании (39) и (40) с учетом (36) матрица ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ с учетом (36) и (56) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1} - 0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6) и (16) от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующим разностным уравнением:

$$\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0) = \Big[[\tilde{\mathbf{K}}(t_k)]^{-1} - \sum_{i=1}^{M} P_{ips}(t_{k+1} - 0) \times$$
$$\times \Big\{ \Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) - \Big[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) -$$
$$- \sum_{g=1}^{M} P_{gps}(t_{k+1} - 0)\, \Phi'_{\Sigma g}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) \Big] \times \quad (61)$$
$$\times \Big[\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1} - 0, \tilde{\mathbf{X}}_k) \Big]^T \Big\} \Big]^{-1},$$

где $\Phi'_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (35) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется соотношением (34); $\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (35) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1}-0$, определяется соотношением (40); $j=\overline{1,J}$; $i=\overline{1,M}$; $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$. Вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t_{k+1}-0,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ представляет собой матрицу размером $(n\times n)$.

Первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi'_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА вычисляется по формуле (59).

Далее найдем аналитическое соотношение, определяющее вторую производную по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА.

Следуя формуле связи (49), для вторых производных можно записать

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\sum_{j=1}^{J}\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k), \tag{62}$$

где $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ – вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15).

Вторая производная $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ с учетом (40) может быть вычислена по формуле

$$\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}. \tag{63}$$

Применительно к (63) в соответствии с (50) выполняется следующее соотношение:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}\right]^T=\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T, \tag{64}$$

где в силу принятого ограничения (56) матрица Якоби имеет вид

$$\mathbf{L}'_j\triangleq\frac{\partial\mathbf{Y}_j}{\partial\mathbf{X}}=\text{const}\quad\text{при}\quad t\in[t_k,t_{k+1}),$$
$$k=0,1,2,\ldots$$

Первая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) согласно (35) и (52) с учетом (56) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{X}}_k}=\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j. \tag{65}$$

Подставив (64) и (65) в (63), окончательно получим, что вторая производная по вектору $\tilde{\mathbf{X}}_k$ парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15) характеризуется следующим соотношением:

$$\Phi''_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j, \tag{66}$$

где $j=\overline{1,J}$, $i=\overline{1,M}$, $t\in[t_k,t_{k+1})$, $k=0,1,2,\ldots$.

На основании (62) с учетом (66) находим, что вторая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (40) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА равна:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=\sum_{j=1}^{J}\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\mathbf{L}'_j, \tag{67}$$

где по аналогии с (35)

$$\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})=\int_{t_k}^{t}F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})d\tau \tag{68}$$

– парциальный (i-й) ЛФП применительно к принимаемому от j-го НКА полезному ВОС-сигналу $s_j(t)$ (15); $F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (45).

Согласно (68) можно записать, что

$$\frac{\partial\Phi_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}=\int_{t_k}^{t}\frac{\partial F_{ji}(t,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}d\tau. \tag{69}$$

Тогда на основании (67) с учетом (69) имеем, что вторая производная парциального (i-го) ЛФП $\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)$ (40) применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}(t,\mathbf{\Theta}_k=\{\vartheta_i\},\mathbf{X}_k)$ от всех одновременно видимых J НКА характеризуется следующей итоговой формулой:

$$\Phi''_{\Sigma i}(t,\tilde{\mathbf{X}}_k)=$$
$$=\sum_{j=1}^{J}\left[\mathbf{L}'_j\right]^T\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}\right]^T\left[\int_{t_k}^{t}\frac{\partial F_{ji}(\tau,\tilde{\mathbf{Y}}_{jk})}{\partial\tilde{\mathbf{Y}}_{jk}}d\tau\right]\mathbf{L}'_j, \tag{70}$$

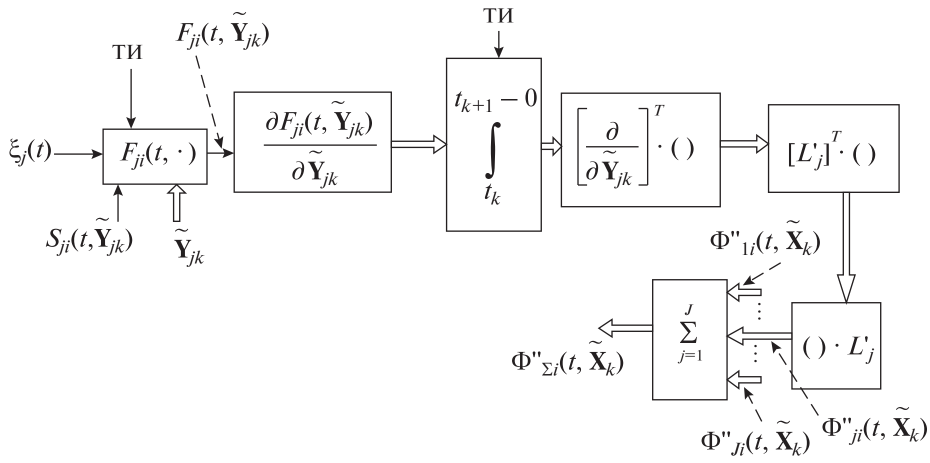

Рис. 2. Структурная схема модуля формирования второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$.

где $F_{ji}(\tau, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$ определяется в соответствии с (45); $j = \overline{1, J}$, $i = \overline{1, M}$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, разностное уравнение для матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$ с учетом (36) и (56) в конце первого этапа обработки на k-м такте, т.е. в момент времени $t_{k+1} - 0$, применительно к совокупности принимаемых ВОС-сигналов $\mathbf{S}[t, \mathbf{\Theta}_k, \mathbf{X}_k]$ (6) и (16) от всех одновременно видимых J НКА имеет вид (61), где первая $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ и вторая $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ производные определяются итоговыми формулами (59) и (70) соответственно.

Из сопоставления (39) и (61) видно, что разностные уравнения для матриц ковариаций квазиоптимальных оценок ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$ и субоптимальных оценок ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ различаются соотношениями, определяющими первые производные $\Phi'_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*_k)$ (34) и $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (59) и вторые производные $\Phi''_{\Sigma i}(t, \mathbf{X}^*_k)$ (40) и $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (70).

При вычислении матрицы ковариаций субоптимальных оценок ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ первая производная $\Phi'_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (59) и вторая производная $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ (70) вычисляются по менее точным, но более простым формулам, чем при вычислении матрицы ковариаций квазиоптимальных оценок ошибок оценивания $\mathbf{K}^*(t_k | t_{k+1} - 0)$.

Структурная схема модуля формирования второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ субоптимальной системы приема и обработки ВОС-сигналов, выполненная в соответствии с алгоритмами (45), (56) и (70), представлена на рис. 2.

На вход модуля формирования второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$ поступают сигнал $\xi_j(t)$ (8) от j-го НКА, представляющий собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала $s_j(t)$ (10) и шума $n_j(t)$ (9), а также опорный ВОС-сигнал $S_{ji}(t, \tilde{\mathbf{Y}}_{jk})$. На выходной сумматор модуля поступает как сформированный сигнал второй производной $\Phi''_{ji}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, так и сигналы вторых производных $\Phi''_{li}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$, $l \neq j$, $l = \overline{1, J}$, поступающие с других модулей. С выхода модуля снимается результирующий сигнал второй производной $\Phi''_{\Sigma i}(t, \tilde{\mathbf{X}}_k)$. Векторные связи на рис. 2 показаны двойными линиями.

Все соотношения субоптимальных алгоритмов для вычисления оценок ДП $\tilde{\Theta}_{j(k+1)}$, $j = \overline{1, J}$, остаются теми же, что и при квазиоптимальных алгоритмах [1, формула (79)]. В случае субоптимальных алгоритмов обработка сигналов на втором этапе на каждом такте производится по тем же алгоритмам, что при квазиоптимальных алгоритмах [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены прием и обработка навигационных ШПС и, в частности, быстро развивающихся ВОС-сигналов (меандровых ШПС), которые предназначены для применения в современных и перспективных ГНСС, таких как GPS (США), Galileo (Европейский союз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай).

Данная статья является продолжением [1], в которой на базе МТО дискретно-непрерывных случайных процессов с использованием метода поэтапного решения уравнения Стратоновича и метода обратных связей по ДП были синтезированы аналитические соотношения оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС. В представленной работе получены более простые аналитические соотношения – субоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов в ГНСС, что необходимо для практической реализации.

При переходе от квазиоптимальных алгоритмов к субоптимальным учтено то, что в многоканальном приемнике НАП, установленном, например, на ЛА, каждый канал обработки радиосигналов функционирует применительно к своему принимаемому от j-го НКА сигналу $s_j(t)$ и к своему вектору ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$, соответствующему j-му НКА, где $j = \overline{1,J}$ (J – число всех одновременно видимых НКА).

Кроме того, при получении аналитических соотношений субоптимальных алгоритмов с целью их упрощения на динамику компонент вектора НП $\mathbf{X}(t)$ и векторов ПРС $\mathbf{Y}_j(t)$ наложено ограничение, состоящее в том, что матрицы Якоби $\mathbf{L}'_j(t)$, где $j = \overline{1,J}$, (51) были приняты постоянными на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2,\ldots$ (56).

Основной научный результат работы состоит в том, что получены аналитические выражения для субоптимальной оценки $\tilde{\mathbf{X}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ и матрицы ковариаций субоптимальных ошибок оценивания $\tilde{\mathbf{K}}(t_k | t_{k+1} - 0)$ выборки вектора НП $\mathbf{X}_k$.

Результаты работы также полностью применимы в случаях ШПС современных ГНСС, у которых ВОС-сигналы пока не используются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ярлыков М.С.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 1. С. 39.
2. *Betz J.W.* // Proc. 1999 National Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION – NTM'99), San Diego. 25–27 Jan. Manassas: 1999, P. 639.
3. *Betz J.W.* // Navigation. J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
4. *Ярлыков М.*С. Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
5. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1993.
6. *Соловьев Ю.А.* Системы спутниковой навигации. М.: Эко-Трендз, 2000.
7. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
8. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
9. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
10. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
11. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991.
12. *Ярлыков М.С., Шишкин В.Ю.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 2. С. 260.
13. *Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 8. С. 933.
14. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
15. *Betz J.W., Blanco M.A., Cahn Ch.R. et al.* // Proc. 19th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2006). Fort Worth. 26–29 Sep. 2006. Manassas: ION, 200 P. 2080.
16. *Wallner S., Hein G.W., Avila-Rodriguez J.-A.* // Proc. European Space Agency, Navitec 2006, Noordwijk, the Netherlands, Dec. 2006. CD ROM.
17. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1982.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 748–759

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.396.96

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПО НАБЛЮДАЕМЫМ ЦИФРОВЫМ СИГНАЛАМ

© 2021 г. А. Н. Детков*

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
ул. Викторенко, 7, Москва, 125319 Российская Федерация

**E-mail: detkov@gosniias.ru*

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.
После доработки 20.03.2021 г.
Принята к публикации 22.03.2021 г.

На основе теории условных марковских процессов синтезированы рекуррентные оптимальный и квазиоптимальный алгоритмы оценивания дискретно-непрерывных марковских процессов по наблюдаемым цифровым сигналам. Эффективность квазиоптимального алгоритма подтверждена статистическим моделированием.

DOI: 10.31857/S0033849421080027

ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач оптимальной обработки сигналов широкое применение находит теория условных марковских процессов, основы которой были разработаны Р.Л. Стратоновичем [1]. Помимо основных четырех видов марковских процессов [2, 3] могут быть более сложные – дискретно-непрерывные марковские процессы (ДНМП), часть компонентов которых принимает непрерывное, а часть дискретное множество значений [4]. Описание радиоэлектронных систем, успешно функционирующих в сложной динамически изменяющейся сигнально-помеховой обстановке, с помощью аппарата ДНМП оказалось чрезвычайно эффективным. Впервые аппарат ДНМП был применен для решения задачи фильтрации сообщений при непрерывных наблюдениях в работах В.И. Тихонова [5, 6] и затем получил развитие в многочисленных работах других авторов [7–11]. В них получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию апостериорной плотности вероятности ДНМП.

Цифровая реализация полученных на основе аппарата ДНМП при непрерывных наблюдениях алгоритмов встречает значительные трудности, вызванные сильной зависимостью точности и устойчивости алгоритмов от величины шага дискретизации. Дальнейшее развитие этот подход получил при решении задач оптимальной обработки ДНМП в дискретном времени [7, 12]. При формировании же цифровых сигналов погрешность квантования ДНМП носит шумовой характер и может моделироваться путем добавления аддитивного шума к сигналу, что не всегда справедливо, так как погрешность квантования аналого-цифровых преобразователей (АЦП) далеко не случайна и, как правило, коррелирована с процессом. Конечно, уменьшение погрешности квантования возможно путем увеличения числа уровней квантования. Однако в системах передачи аналоговых сообщений по цифровым каналам связи [13] и радиолокации [14] это не всегда возможно, кроме того, в некоторых случаях необходимо учитывать статистические характеристики квантователей при расчете коэффициентов чувствительности показателя качества систем управления конечным положением в условиях противодействия среды [15].

Все эти факторы вызывают необходимость разработки методов оптимального оценивания ДНМП в дискретном времени с учетом статистических характеристик квантователей АЦП, адекватных реальным задачам цифровой обработки сигналов радиоэлектронных систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теория построения алгоритмов распознавания и оценивания состояний ДНМП рассмотрена достаточно полно в [5–11], где получены непрерывные уравнения для законов распределения фазовых координат, их моментов и вероятностей состояний дискретных компонентов ДНМП. Для реализации этих уравнений на цифровых вычислительных машинах указанные алгоритмы необходимо синтезировать в дискретной форме в виде рекуррентных соотношений. В связи с этим при синтезе оптимальных алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных компонентов ДНМП центральным является вопрос о статистически эквивалентном дискретном представлении стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) непрерывных компонентов ДНМП и алгебраических уравнений измерений. Традиционно при формулировке эквивалентной задачи с дискретным временем используются два подхода.

1. Дискретные модели записываются непосредственно для этих уравнений (см., например, в [12]).

2. Априорные уравнения объекта и измерителя в непрерывном времени записываются в разностной форме с интервалом дискретизации Δ. При этом в уравнении измерений непрерывный белый гауссовский шум (БГШ) приближенно заменяется его допредельной моделью – некоррелированной последовательностью центрированных случайных величин с ковариационной матрицей $\mathbf{I}/\Delta$ (например, в [4]), где $\mathbf{I}$ – единичная матрица интенсивностей исходного непрерывного БГШ. Применительно к задачам цифровой фильтрации непрерывных компонентов ДНМП это представление является некорректным уже потому, что оно не согласовано с каким-либо техническим способом формирования отсчетов непрерывного измеряемого процесса, а также противоречит физике рассматриваемых явлений [16]. В частности, при увеличении интервала дискретизации Δ точность оценивания непрерывных компонентов будет увеличиваться, так как будет уменьшаться интенсивность шумов измерений.

Следует отметить, что физически процессы, протекающие в радиоэлектронных системах, являются непрерывными случайными процессами, поэтому для этих систем актуальна задача оптимизации алгоритмов оценивания ДНМП по наблюдаемым цифровым сигналам на основе корректного эквивалентного дискретного представления непрерывных компонентов ДНМП.

Рассмотрим задачу оценивания n_x-мерного вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, описывающего в пространстве состояний динамику фазовых координат ДНМП. Пусть СДУ вектора состояния и уравнение измерений имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\left(t, a_j(t_k)\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_x\left(t, a_j(t_k)\right)\boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{H}\left(t, b_m(t_k)\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_y\left(t, b_m(t_k)\right)\boldsymbol{\zeta}(t), \quad t \in [t_0, t), \tag{2}$$

где $\mathbf{v}(t)$ – n_y-мерный вектор измерений; $\mathbf{s}(t_k) = \left[a_j(t_k), b_m(t_k)\right]^T$ – дискретная компонента ДНМП – условная марковская цепь с матрицами вероятностей переходов, T – знак транспонирования.

$$\mathbf{\Pi}_1(k-1,k) = \left\{\pi_{ij}(k-1,k)\right\} = \left\{P\left(a_j(t_k) \middle| a_i(t_{k-1})\right)\right\}, \quad i,j = \overline{1,M_1},$$

$$\mathbf{\Pi}_2(k-1,k) = \left\{\pi_{nm}(k-1,k)\right\} = \left\{P\left(b_m(t_k) \middle| b_n(t_{k-1})\right)\right\}, \quad n,m = \overline{1,M_2}$$

смена состояний которой может происходить только в фиксированные моменты времени $t_k = t_0 + k\Delta$, $k = 1, 2, \ldots$, разделенные постоянным интервалом $\Delta = t_k - t_{k-1}$; M_1, M_2 – число значений дискретных параметров a_j, b_m соответственно; $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\zeta}(t)$ – независимые между собой n_ξ-, n_ζ-мерные векторы БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными матрицами интенсивностей соответствующей размерности.

По условию задачи известны матрицы $\mathbf{F}(\cdot)$, $\mathbf{G}_x(\cdot)$, $\mathbf{H}(\cdot)$, $\mathbf{G}_y(\cdot)$, а также начальные распределения марковского вектора $\left[\mathbf{x}^T(t), \mathbf{v}^T(t), a_j(t_k), b_m(t_k)\right]^T$, причем компонент марковской цепи $b_m(t_k)$, характеризующий нарушения в канале измерения, не зависит от процесса $\mathbf{x}(t)$ и от компонента $a_j(t_k)$, характеризующего изменения статистических свойств непрерывных компонентов ДНМП. Непрерывный процесс $\mathbf{v}(t)$ подвергается дискретизации с постоянным шагом Δ в моменты времени $t_k = t_0 + k\Delta$ и амплитудному квантованию по уровням в квантователях многоканального АЦП измерителя. Особенностью задачи является то, что для оценивания отсчетов $\mathbf{x}(t)$ непосредственному наблюдению доступны только цифровые выходные сигналы АЦП. Требуется по наблюдаемым цифровым сигналам

$$\mathbf{D}_1^k \triangleq \left\{\mathbf{d}(1), \mathbf{d}(2), \ldots, \mathbf{d}(k)\right\}$$

найти апостериорное распределение отсчетов вектора $\mathbf{x}(t)$ и дискретной компоненты ДНМП $\mathbf{s}(t_k)$ с точным учетом характеристик АЦП: нормированных оптимальных уровней и порогов квантования, а также нормированного равномерного шага квантования. Здесь и далее знак $\triangleq$ обозначает равенство по определению.

2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Для корректного статистически эквивалентного дискретного представления непрерывных моделей вектора состояния ДНМП и измерителя воспользуемся методами теории условных марковских процессов [1], в соответствии с которыми модели (1), (2) описываются в виде совместного условно-марковского процесса. При помощи равенства [15]

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{v}(t) \tag{3}$$

введем векторный процесс $\mathbf{y}(t)$, статистическая динамика которого согласно (2) описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{H}\left(t, b_m(t_k)\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_y\left(t, b_m(t_k)\right)\zeta(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = 0. \tag{4}$$

Согласно (1), (4) совместный процесс $\mathbf{z} = \left[\mathbf{x}^T(t), \mathbf{y}^T(t)\right]^T$ является условно-марковским и описывается СДУ

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{F}_z\left(t, \mathbf{s}(t_k)\right)\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}_z\left(t, \mathbf{s}(t_k)\right)\mathbf{n}_z(t), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{F}\left(a_j(t_k)\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\left(b_m(t_k)\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x\left(a_j(t_k)\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_y\left(b_m(t_k)\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{n}_z = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

Уравнение (5) может быть представлено в статистически эквивалентной форме [2] в виде разностного уравнения с шагом дискретизации Δ

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{\Phi}_{zz}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k))\mathbf{z}(k-1) + \\ + \mathbf{\Gamma}_{zz}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k))\mathbf{N}_z(k-1), \tag{6}$$

в котором используются обозначения

$$\mathbf{\Phi}_{zz}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{xx}(k, k-1, a_j(t_k)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{yx}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k)) & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_{zz}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{xx}(k, k-1, a_j(t_k)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Gamma}_{yx}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k)) & \mathbf{\Gamma}_{yy}(k, k-1, a_j(t_k), b_m(t_k)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{N}_z$ — $(n_x + n_y)$-мерный вектор независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Элементы блочных матриц $\mathbf{\Phi}_{zz}$, $\mathbf{\Gamma}_{zz}$, где $\mathbf{\Gamma}_{zz}$ — нижняя треугольная матрица априорной корреляционной матрицы $\mathbf{B}_{zz}(k, k-1, \mathbf{s}(t_k))$, определяются из решения системы уравнений [2, 6]

$$\frac{d\mathbf{\Phi}_{zz}}{dt} = \mathbf{F}_z\left(\mathbf{s}(t_k)\right)\mathbf{\Phi}_{zz}(t, t_0), \quad \mathbf{\Phi}_{zz}(t_0, t_0) = \mathbf{I},$$

$$\frac{d\mathbf{B}_{zz}}{dt} = \mathbf{F}_z\left(\mathbf{s}(t_k)\right)\mathbf{B}_{zz}(t, t_0) + \mathbf{B}_{zz}(t, t_0)\mathbf{F}_z^T\left(\mathbf{s}(t_k)\right) + \\ + \mathbf{G}_z\left(\mathbf{s}(t_k)\right)\mathbf{G}_z^T\left(\mathbf{s}(t_k)\right), \quad \mathbf{B}_{zz}(t_0, t_0) = \mathbf{0},$$

где блочная корреляционная матрица $\mathbf{B}_{zz}$ имеет вид

$$\mathbf{B}_{zz}(k, k-1, \mathbf{s}(t_k)) = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx}(k, k-1, \mathbf{s}(t_k)) & \mathbf{B}_{xy}(k, k-1, \mathbf{s}(t_k)) \\ \mathbf{B}_{yx}(k, k-1, \mathbf{s}(t_k)) & \mathbf{B}_{yy}(k, k-1, \mathbf{s}(t_k)) \end{bmatrix}.$$

Эквивалентное дискретное представление (6) непрерывных моделей векторов состояния маневрирующего объекта (1) и измерения (3) является абсолютно точным в том смысле, что для любых $t_k - t_{k-1} > 0$ оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, что и решение СДУ (6), без погрешностей аппроксимации [16]. Особенность задачи состоит в том, что требуемые уравнения апостериорного закона распределения ненаблюдаемого вектора состояния эквивалентной дискретной системы $\left[\mathbf{x}^T(k), \mathbf{y}^T(k), \mathbf{s}^T(t_k)\right]^T$ определяются по наблюдаемым цифровым сигналам $\mathbf{d}(k)$, которые формируются квантователями АЦП путем амплитудного квантования n_y-мерного вектора

$$\mathbf{y}(k) = \left[y_1(k), \ldots, y_u(k), \ldots, y_{n_y}(k)\right]^T.$$

Каждый квантователь АЦП представляет собой устройство с нулевой памятью и осуществляет безынерционную нумерацию областей квантования, в которые попадает входная величина $y_u(k)$, $u = \overline{1, n_y}$. Динамический диапазон u-го квантователя разбит на соприкасающиеся области $\Omega_u[k, l_u]$, $l_u = \overline{1, L_u}$ [17]. Каждая область ограничивается порогами квантования $\eta^{(u)}(k, l_u - 1)$ и $\eta^{(u)}(k, l_u)$. Цифровой сигнал $d_u(k)$, $\forall\, u = \overline{1, n_y}$, формируется в соответствии с алгоритмом [18]

$$d_u(k) = \begin{cases} d_u(k,1), y_u(k) \in \Omega_u[k,1], \\ \dots \\ d_u(k,l_u), y_u(k) \in \Omega_u[k,l_u], \\ \dots \\ d_u(k,L_u), y_u(k) \in \Omega_u[k,L_u], \end{cases} \quad (7)$$

$$\Omega_u[k,l_u] = \left[\eta^{(u)}(k,l_u-1),\ \eta^{(u)}(k,l_u) l_u\right) = \overline{1,L_u},$$

где L_u – число областей квантования. Если условие (7) выполняется для всех компонентов вектора $\mathbf{y}(k)$, то формируется вектор цифровых сигналов $\mathbf{d}(k) = \left[d_1(k),\dots,d_u(k),\dots,d_{n_y}(k)\right]^T$.

3. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАСШИРЕННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

На основании свойств марковских процессов в дискретном времени запишем рекуррентные уравнения, описывающие апостериорную плотность вероятности вектора

$$\left[\mathbf{x}^T(k), \mathbf{y}^T(k), \mathbf{s}(t_k)\right]^T = \left[\mathbf{z}^T(k), a_j(t_k), b_m(t_k)\right]^T$$

по наблюдаемым цифровым сигналам $\mathbf{D}_1^k \triangleq \triangleq \{\mathbf{d}(1), \mathbf{d}(2), \dots, \mathbf{d}(k)\}$

$$\begin{gathered} f\left(\mathbf{z}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^k\right) = \hat{f}\left(\mathbf{z}(k), a_j, b_m\right) = \\ = \frac{1}{P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int f\left(\mathbf{z}(k) \mid \mathbf{z}(k-1), a_j, b_m\right) \times \\ \times \hat{f}\left(\mathbf{z}(k-1), a_i(t_{k-1}), b_n(t_{k-1})\right) d\mathbf{z}(k-1), \end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered} P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \sum_j \sum_m \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int_\Omega \int f\left(\mathbf{y}(k)\middle|\mathbf{z}(k-1), a_j, b_m\right) \times \\ \times \hat{f}\left(\mathbf{z}(k-1), a_i, b_n\right) d\mathbf{z}(k-1)\, d\mathbf{y}(k), \end{gathered} \quad (9)$$

$$\sum_j \triangleq \sum_{j=1}^{M_1},\ \ \sum_i \triangleq \sum_{i=1}^{M_1},\ \ \sum_m \triangleq \sum_{m=1}^{M_2},\ \ \sum_n \triangleq \sum_{n=1}^{M_2}.$$

В (8) и далее для простоты записи аргументы k, $k-1$, t_k, t_{k-1} всех функций, где это возможно и не вызывает сомнений, опущены, а интегрирование по переменной $\mathbf{z}$ ведется в области $\Re^{n_x} \times \Omega$ $\left(\Omega \subset \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n_y}\right)$.

Представим апостериорную плотность вероятности вектора $\mathbf{z}$ при условии $a_j(t_k)$, $b_m(t_k)$ – (8) в виде системы рекуррентных уравнений

$$\begin{gathered} \hat{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = \hat{f}\left(\mathbf{z}(k), a_j, b_m\right) = \\ = \frac{1}{P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)), \end{gathered} \quad (10)$$

$$\begin{gathered} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}_{in}(k-1) \times \\ \times \int f\left(\mathbf{z}(k)\middle|\mathbf{z}(k-1), a_j, b_m\right) \hat{f}_{in}(\mathbf{z}(k-1))\, d\mathbf{z}(k-1), \end{gathered} \quad (11)$$

где $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = f\left(\mathbf{z}(k)\middle| a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right)$ – условная плотность вероятности вектора $\left[\mathbf{z}^T(k), a_j(t_k), b_m(t_k)\right]^T$.

Апостериорная вероятность дискретной компоненты ДНМП при условии $a_j(t_k)$, $b_m(t_k)$ – $\hat{P}_{jm}(k)$ описывается системой рекуррентных уравнений:

$$\begin{gathered} \hat{P}_{jm}(k) = P\left(a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^k\right) = \\ = \frac{P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right)}{P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \tilde{P}_{jm}(k), \end{gathered} \quad (12)$$

$$\tilde{P}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}_{in}(k-1), \quad (13)$$

$$\begin{gathered} P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \\ = \int_\Omega f\left(\mathbf{y}(k)\middle| a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right) d\mathbf{y}(k), \end{gathered} \quad (14)$$

где $P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right)$ – условная вероятность одношагового предсказания наблюдаемого цифрового сигнала (вывод уравнений (8)–(14) приведен в Приложении).

Для замыкания систем уравнений (10)–(14) необходимо выполнить двухмоментную параметрическую гауссовскую аппроксимацию условной плотности вероятности $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k))$. Эта аппроксимация состоит в замене неизвестных функций $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k))$ некоторыми известными функциями, в частности $\tilde{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m)$, $\tilde{\mathbf{R}}_{zz}(k, a_j, b_m)$ – математического ожидания и корреляционной функции условной плотности вероятности $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k))$ соответственно [19].

4. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО НАБЛЮДАЕМЫМ ЦИФРОВЫМ СИГНАЛАМ

Задача оценивания считается практически решенной, если на выходе рекуррентного цифрового фильтра (ЦФ) на каждом k-м шаге формируется безусловная оптимальная оценка, соответствующая определенному критерию оптимальности. Байесовское решение может быть получено на основе минимизации условного апостериорного риска (УАР), которая выполняется в два этапа: сначала по непрерывному компоненту (при каждом фиксированном значении дискретного компонента), а затем по дискретному компоненту. На втором этапе на основе сравнения УАР $\gamma_{jm}(k)$ выбираются оптимальные оценки $\hat{a}_j(t_k)$, $\hat{b}_m(t_k)$дискретных параметров, если выполняется условие

$$\gamma_{jm}(k) \le \gamma_{in}(k), \quad i, j = \overline{1, M_1}, \quad n, m = \overline{1, M_2}, \quad i \ne j, \quad m \ne n. \tag{15}$$

В (15) выражение УАР для функции потерь простой по дискретному и квадратичной по непрерывному компонентам имеет вид [12]

$$\begin{gathered}\gamma_{jm}(k) = \sum_{\mu}\sum_{\nu} \hat{P}_{j\mu}(k)\hat{P}_{m\nu}(k)\{\alpha_{jm\mu\nu} + \\ + \beta_{jm\mu\nu}\operatorname{Tr}\{\breve{\mathbf{R}}(k, a_\mu, b_\nu) + \\ + (\hat{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m) - \breve{\mathbf{z}}(k, a_\mu, b_\nu)) \times \\ \times (\hat{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m) - \breve{\mathbf{z}}(k, a_\mu, b_\nu))^T\}\},\end{gathered} \tag{16}$$

где $\hat{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m)$ – оптимальная условная оценка [20],

$$\hat{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m) = \frac{\sum_{\mu}\sum_{\nu} \hat{P}_{j\mu}(k)\hat{P}_{m\nu}(k)\beta_{jm\mu\nu}\breve{\mathbf{z}}(k, a_\mu, b_\nu)}{\sum_{\mu}\sum_{\nu} \hat{P}_{j\mu}(k)\hat{P}_{m\nu}(k)\beta_{jm\mu\nu}}, \tag{17}$$

$$\alpha_{jm\mu\nu} = 1 - g_{\mu\nu}\delta_{jm\mu\nu}, \quad \beta_{jm\mu\nu} = g_{\mu\nu}c_{\mu\nu}\delta_{jm\mu\nu}, \tag{18}$$

$\breve{\mathbf{z}}(k, a_\mu, b_\nu)$, $\breve{\mathbf{R}}(k, a_\mu, b_\nu)$ – математическое ожидание и корреляционная матрица условной апостериорной плотности вероятности $\hat{f}_{\mu\nu}(\mathbf{z}(k))$ соответственно; $g_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ – коэффициенты потерь; $\delta_{jm\mu\nu}$ – символ Кронекера.

При выполнении условия (15) за окончательную оценку отсчетов вектора состояния $\mathbf{z}(k)$ принимается соответствующая условная оценка $\hat{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m)$. Из (15) и (16) следует, что в качестве оценок дискретных компонентов $\hat{a}_j(t_k)$, $\hat{b}_m(t_k)$ берется решение, для которого взвешенная сумма потерь (выражение в фигурных скобках в (16)) минимальна. Причем эта сумма растет с уменьшением апостериорной точности фильтрации вектора $\mathbf{z}(k)$, что является важным для практических приложений [21]. Для определения УАР $\gamma_{jm}(k)$, $\forall j = \overline{1, M_1}$, $m = \overline{1, M_2}$, может быть использован квазиоптимальный алгоритм цифровой фильтрации непрерывных компонентов вектора состояния ДНМП, который описывается системой рекуррентных уравнений и получен с учетом гауссовской аппроксимации условной плотности вероятности $\tilde{f}(\mathbf{z}(k), a_j, b_m)$ и оптимизации процедуры квантования

$$\tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) = \sum_i \sum_n \frac{\pi^a_{ij}\pi^b_{nm}\hat{P}_{in}(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \mathbf{\Phi}_{xx}(a_j)\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n), \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) = \sum_i \sum_n \frac{\pi^a_{ij}\pi^b_{nm}\hat{P}_{in}(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ \times \{\mathbf{\Phi}_{xx}(a_j)\hat{\mathbf{R}}(k-1, a_i, b_n)\mathbf{\Phi}^T_{xx}(a_j) + \mathbf{B}_{xx}(a_j) + \\ + [\mathbf{\Phi}_{xx}(a_j)\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m)] \times \\ \times [\mathbf{\Phi}_{xx}(a_j)\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m)]^T\},\end{gathered} \tag{20}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m) = \sum_i \sum_n \frac{\pi^a_{ij}\pi^b_{nm}\hat{P}_{in}(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \mathbf{\Phi}_{yx}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n), \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k, a_j, b_m) = \sum_i \sum_n \frac{\pi^a_{ij}\pi^b_{nm}\hat{P}_{in}(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ \times \hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n)(\mathbf{\Phi}_{xx}(a_j, b_m) \times \\ \times \hat{\mathbf{R}}_{xx}(k-1, a_i, b_n)\mathbf{\Phi}^T_{yx}(a_j, b_m) + \mathbf{B}_{xy}(a_j, b_m)),\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{R}}_{yy}(k, a_j, b_m) = \sum_i \sum_n \frac{\pi^a_{ij}\pi^b_{nm}\hat{P}_{in}(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ \times \{\mathbf{\Phi}_{yx}(a_j)\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k-1, a_i, b_n)\mathbf{\Phi}^T_{yx}(a_j) + \mathbf{B}_{xx}(a_j) + \\ + [\mathbf{\Phi}_{yx}(a_j)\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m)] \times \\ \times [\mathbf{\Phi}_{yx}(a_j)\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m)]^T\} = \\ = \mathbf{T}_{yy}(k, a_j, b_m)\mathbf{T}^T_{yy}(k, a_j, b_m),\end{gathered} \tag{23}$$

$$\mathbf{K}(k, a_j, b_m) = \tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k, a_j, b_m)\mathbf{T}^{-1}_{yy}(k, a_j, b_m), \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) = \tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m) + \\ + \mathbf{K}(k, a_j, b_m)\mathbf{Y}_{\text{opt}}(k, \mathbf{d}(k)),\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) = \tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m) + \\ + \tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k, a_j, b_m)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}_{yy}(k, a_j, b_m) \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{E}_{kb}]\tilde{\mathbf{R}}^T_{xy}(k, a_j, b_m),\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_{yy}(k, a_j, b_m)\mathbf{H}_{\text{opt}}(k, l_u - 1) < \\ < \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{v}(\tau)d\tau - \tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m) \le \mathbf{T}_{yy}(k, a_j, b_m)\mathbf{H}_{\text{opt}}(k, l_u),\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{\text{opt}}(k, l_u) = [\eta^{(1)}_{\text{opt}}, \ldots, \eta^{(u)}_{\text{opt}}, \ldots, \eta^{(n_y)}_{\text{opt}}]^T, \\ \mathbf{Y}_{\text{opt}}(k, l_u) = [y^{(1)}_{\text{opt}}, \ldots, y^{(u)}_{\text{opt}}, \ldots, y^{(n_y)}_{\text{opt}}]^T, \\ \forall u = \overline{1, n_y}, \quad \eta^{(u)}_{\text{opt}} = (l_u - L_u/2)\delta^{(u)}_{\text{opt}}, \\ y^{(u)}_{\text{opt}} = (l_u - (L_u + 1)/2)\delta^{(u)}_{\text{opt}}, \quad d^{(u)}_k = y^{(u)}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{E}_{kb} = [\varepsilon^{(u)}_{\text{opt}}\delta_{uw}], \quad u, w = \overline{1, n_y}.\end{gathered} \tag{28}$$

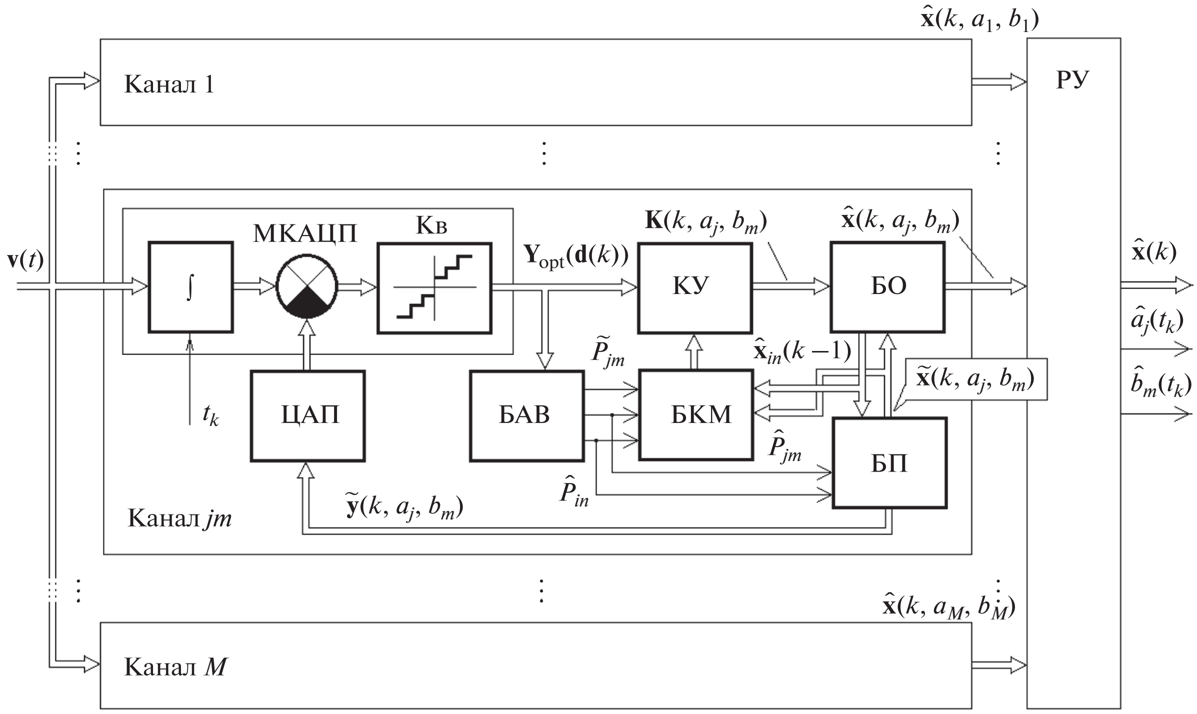

Рис. 1. Квазиоптимальный M-канальный цифровой фильтр дискретно-непрерывного марковского процесса (условные обозначения см. в тексте).

Уравнения оценивания дискретных компонентов вектора состояния (10), (11) остаются без изменения, при этом условная вероятность одношагового предсказания наблюдаемого цифрового сигнала имеет вид

$$P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \prod_{u=1}^{n_y}\left\{F\left\{\frac{\eta_{\text{opt}}^{(u)}(l_u) - \tilde{y}_u(k, a_j, b_m)}{\tau_u(k)}\right\} - F\left\{\frac{\eta_{\text{opt}}^{(u)}(l_u - 1) - \tilde{y}_u(k, a_j, b_m)}{\tau_u(k)}\right\}\right\}, \tag{29}$$

где $\tilde{y}_u(k, a_j, b_m)$ – u-й элемент вектора $\tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m)$; τ_u $(u = \overline{1, n_y})$ – диагональный элемент нижней треугольной матрицы $\mathbf{T}_{yy}\left(k, a_j, b_m\right)$; $F\{\cdot\}$ – интеграл вероятности. Значения $\delta_{\text{opt}}^{(u)}$, $\varepsilon_{\text{opt}}^{(u)}$ оптимального равномерного шага и среднего квадрата ошибок квантования для заданного числа уровней квантования L_u приведены в [13]. Квазиоптимальный ЦФ, реализующий алгоритм (10), (11), (17)–(28), является многоканальным с числом каналов $M = M_1 \times M_2$ (рис. 1). Каждый канал состоит из многоканального АЦП (МКАЦП), цифроаналогового преобразователя ЦАП; блока вычисления коэффициента усиления КУ $\mathbf{K}(k, a_j, b_m)$, блока оценки БО, в котором вычисляются $\hat{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m)$, $\hat{\mathbf{x}}(k-1, a_i, b_n)$; блока прогноза БП, в котором вычисляются $\tilde{\mathbf{x}}(k, a_j, b_m)$, $\tilde{\mathbf{y}}_{jm}(k)$; блока апостериорных вероятностей БАВ, в котором вычисляются $\hat{P}_{jm}(k)$, $\hat{P}_{in}(k-1)$, $\tilde{P}_{jm}(k)$, и блока корреляционных матриц БКМ, в котором вычисляются $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m)$, $\tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k, a_j, b_m)$, $\tilde{\mathbf{R}}_{yy}(k, a_j, b_m)$, $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k, a_j, b_m)$ и $\hat{\mathbf{R}}_{xx}\left(k-1, a_i, b_n\right)$. Окончательное решение о принятии оценок $\hat{\mathbf{x}}(k)$, $\hat{a}_j(t_k)$, $\hat{b}_m(t_k)$ производится в решающем устройстве РУ.

Основной особенностью МКАЦП является формирование значений вектора $\mathbf{y}(k)$ накоплением аналоговым путем измеряемого процесса $\mathbf{v}(t)$ на интеграторе со сбросом в конце каждого интервала дискретизации. Полученная таким образом последовательность $\mathbf{y}(k)$ преобразуется квантователем Кв в цифровые сигналы $\mathbf{d}(k)$, которые далее участвуют в алгоритме формирования оценок.

Пример. В качестве примера использования полученных квазиоптимальных алгоритмов рассмотрим задачу синтеза цифрового фильтра ДНМП вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + \sqrt{2\alpha\sigma_x^2\left(a_j(t_k)\right)}\xi(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad j = 1, 2, \tag{30}$$

где α – коэффициент, характеризующий ширину спектральной плотности ДНМП; $\sigma_x^2\left(a_j(t_k)\right)$ – дисперсия оцениваемого ДНМП, значение которой изменяется по закону марковской цепи в дискретные моменты времени t_k; $\xi(t)$ – стандартный БГШ с нулевым математическим ожиданием и единичной интенсивностью.

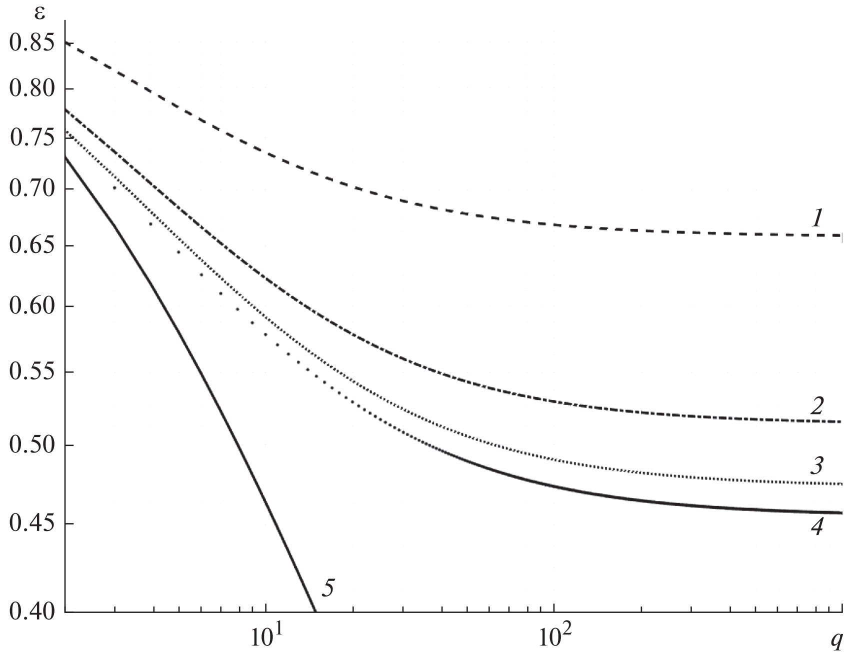

Рис. 2. Зависимость относительного среднего квадрата ошибки цифровой фильтрации ε от отношения сигнал/шум q при различных значениях числа уровней квантования $L = 2$ (*1*), 4 (*2*), 8 (*3*), $L \to \infty$ (*4*), $\alpha\Delta \to 0$ (*5*).

Пусть на вход АЦП цифрового фильтра поступает непрерывный случайный процесс

$$v(t) = hx(t) + \sqrt{\frac{N_0}{2}}\varsigma(t), \qquad (31)$$

где h – известный коэффициент; $\varsigma(t)$ – стандартный БГШ с нулевым математическим ожиданием и единичной интенсивностью, N_0 – спектральная плотность БГШ. Требуется по наблюдаемым цифровым сигналам получить текущую оценку $\hat{x}(t_k)$ отсчетов ДНМП $x(t)$, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (30).

С учетом (4) совместный марковский процесс $\mathbf{z} = [x \;\; y]^T$ в этом случае описывается уравнением (5), в котором

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_z(a_j(t_k)) = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha\sigma_x^2(a_j(t_k))} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{N_0}{2}} \end{bmatrix}.$$

Элементы фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}_{zz}(\Delta)$ и матрица $\mathbf{B}_{zz}(\Delta, a_j(t_k))$ определяются соотношениями

$$\Phi_{xx} = \exp\{-\alpha\Delta\}, \quad \Phi_{xy} = 0,$$
$$\Phi_{yx} = \chi(1 - \exp\{-\alpha\Delta\}),$$
$$\Phi_{yy} = 1, \quad B_{xx} = 1 - \exp\{-2\alpha\Delta\},$$
$$B_{xy} = B_{yx} = \chi(1 - \exp\{-\alpha\Delta\})^2, \quad B_{yy}(a_j(t_k)) =$$
$$= \chi^2\left(\alpha\Delta\left(2 + q^{-1}(a_j(t_k))\right) - \left((2 - \exp\{-\alpha\Delta\})^2 - 1\right)\right),$$
$$q(a_j(t_k)) = \frac{2h^2 a_j(t_k)}{\alpha N_0},$$

где $\alpha\Delta$, $\chi = h/\alpha$ – безразмерные коэффициенты; q – отношение сигнал–шум; $\Delta = t_k - t_{k-1}$ – интервал дискретизации.

Алгоритм оценивания ДНМП $x(t)$ по наблюдаемым цифровым сигналам описывается уравнениями (19)–(29). Оценка дискретного компонента определяется по решающему правилу (12)–(14). Квазиоптимальный ЦФ, реализующий алгоритм (12)–(14), (19)–(29), является двухканальным. Окончательное решение о принятии оценок $\hat{x}(k)$, $\hat{a}_j(t_k)$ производится в РУ.

Проверка качества квазиоптимального алгоритма проведена с помощью статистического моделирования на ЭВМ для случая, когда параметры уравнений (30), (31): $\alpha = 0.1$ с$^{-1}$, $\Delta = 1$ с, $h = 1$, $q = 1 \ldots 1000$, а цепь Маркова принимает значения $a_1 = 1$, $a_2 = 10$. Вероятности перехода $\pi_{11} = 0.8$; $\pi_{12} = 0.2$. В целях повышения наглядности функционирования алгоритма была сформирована тестовая реализации для дискретного компонента $A(k)$. При этом было принято, что длина реализации $k = \overline{1,50}$, а цепь Маркова принимает значения

$$A(k) = \begin{cases} a_1, & 10 \le k < 20 \\ a_2, & 1 \le k < 10, \;\; 20 \le k < 50 \end{cases}.$$

При определении статистических характеристик квазиоптимальных алгоритмов фильтрации методом Монте-Карло проводилось 100 испытаний, при этом тестовая реализация дискретной цепи Маркова $A(k)$ сохранялась неизменной, а независимые гауссовские последовательности $n_x(k)$, $n_y(k)$ формировались с помощью датчика случайных чисел.

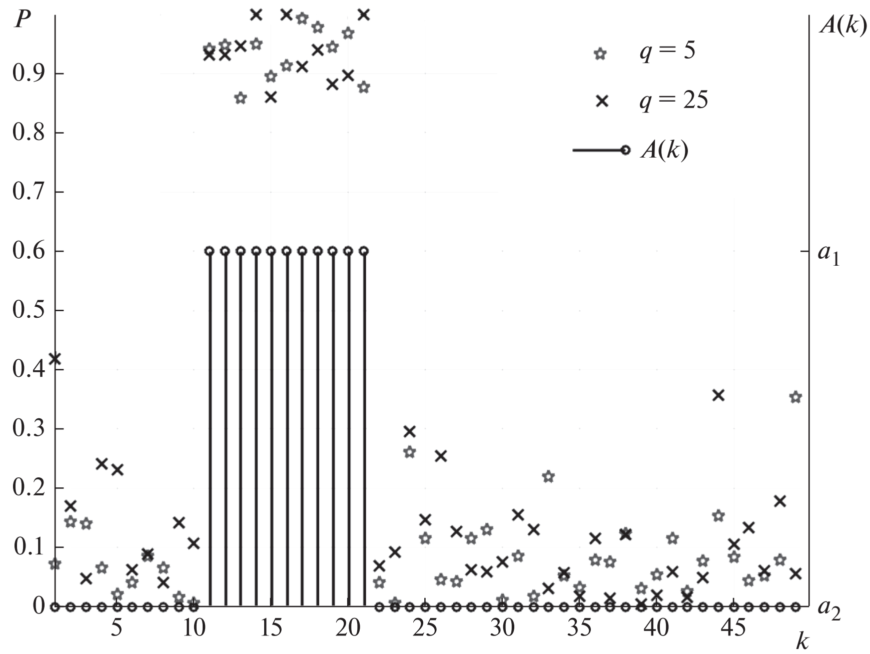

Рис. 3. Зависимость вероятности правильного определения значений марковской цепи $A(k)$ от дискретного времени при различных отношениях сигнал/шум q и тестовая последовательность марковской цепи $A(k)$.

На рис. 2 представлены графики зависимости относительного среднего квадрата ошибки цифровой фильтрации ε от отношения сигнал/шум q при различных значениях числа уровней квантования L. Здесь же для сравнения приведена зависимость ε от q при аналоговой оптимальной фильтрации ДНМП [5]. Все кривые получены интерполяцией значений оценок ε, полученных при моделировании.

Следует отметить, что полученное при синтезе ЦФ ДНМП значение отношения сигнал/шум q (исходя из его физической сущности) является единым для цифровых (дискретных) и аналоговых алгоритмов фильтрации [16]. Это позволяет достаточно просто сравнить точность и помехоустойчивость квазиоптимальной цифровой, дискретной и аналоговой фильтрации.

На рис. 3 представлены зависимости вероятности правильного определения значений марковской цепи $A(k)$ от дискретного времени при различных отношениях сигнал/шум q. Здесь же приведена тестовая последовательность марковской цепи $A(k)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для оптимизации алгоритмов оценивания дискретно-непрерывных марковских процессов по наблюдаемым цифровым сигналам применено эквивалентное дискретное представление непрерывных компонентов этих процессов. Полученный квазиоптимальный алгоритм оценивания вектора состояния дискретно-непрерывных марковских процессов позволяет построить практически реализуемый ЦФ на базе высокопроизводительной вычислительной техники.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя правило умножения вероятностей и основные свойства марковских процессов, запишем выражения для закона распределения вектора состояния $\left[\mathbf{z}^T(k), \mathbf{s}^T(k)\right]^T$:

$$
\begin{gathered}
f\left(\mathbf{z}(k), \mathbf{s}(k) \middle| \mathbf{D}_1^k\right) = \frac{1}{P\left(\mathbf{D}_1^k\right)} f\left(\mathbf{z}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{D}_1^k\right) = \frac{1}{P\left(\mathbf{D}_1^k\right)} \times \\
\times \sum_{\mathbf{s}(k-1)} \cdots \sum_{\mathbf{s}(1)} \int \cdots \int f\left(\mathbf{z}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{d}(k), \ldots, \mathbf{z}(1), \mathbf{s}(1), \mathbf{d}(1)\right) \times \\
\times \prod_{g=1}^{k-1} d\mathbf{z}_g = \frac{P\left(\mathbf{D}_1^{k-1}\right)}{P\left(\mathbf{D}_1^k\right)} \sum_{\mathbf{s}(k-1)} \int f\left(\mathbf{z}(k), \mathbf{s}(k), \mathbf{d}(k) \middle| \mathbf{z}(k-1), \mathbf{s}(k-1), \mathbf{d}(k-1)\right) \times \\
\times f\left(\mathbf{z}(k-1), \mathbf{s}(k-1) \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right) d\mathbf{z}(k-1),
\end{gathered} \tag{П.1}
$$

где интегрирование по переменной $\mathbf{z}$ осуществляется в области $\Re^{n_x} \times \Omega \left(\Omega \subset \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n_y}\right)$.

Преобразуем первую условную плотность вероятности в подынтегральном выражении:

$$f(\mathbf{z}(k),\mathbf{s}(k),\mathbf{d}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1),\mathbf{d}(k-1)) = \\ = f(\mathbf{z}(k),\mathbf{s}(k),\mathbf{d}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1)).$$

Здесь отсутствие $\mathbf{d}(k-1)$ не имеет значения при заданном $\mathbf{z}(k-1)$. Используя свойство условных плотностей вероятности, запишем

$$\begin{gathered} f(\mathbf{z}(k),\mathbf{s}(k),\mathbf{d}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1)) = \\ = f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1),\mathbf{s}(k))\times \\ \times P(\mathbf{s}(k)|\mathbf{s}(k-1),\mathbf{z}(k-1))\times \\ \times P(\mathbf{d}(k)|\mathbf{z}(k),\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k),\mathbf{s}(k-1)). \end{gathered} \quad (\text{П.2})$$

Ввиду однозначного преобразования $\mathbf{z}(k)$ в $\mathbf{d}(k)$ при квантовании условная вероятность цифрового сигнала [17] имеет вид

$$P(\mathbf{d}(k) \mid \mathbf{z}(k),\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k),\mathbf{s}(k-1)) = \\ = \begin{cases} 1, & \mathbf{y}(k) \in \Omega \\ 0, & \mathbf{y}(k) \notin \Omega \end{cases}. \quad (\text{П.3})$$

С учетом тождеств –

$$P(\mathbf{s}(k)|\mathbf{s}(k-1),\mathbf{z}(k-1)) \equiv P(\mathbf{s}(k)|\mathbf{s}(k-1)),$$

$$f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1),\mathbf{s}(k)) \equiv \\ \equiv f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k)),$$

которые выполняются по условиям постановки задачи, и (П.3) перепишем (П.2):

$$f(\mathbf{z}(k),\mathbf{s}(k),\mathbf{d}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1)) = \begin{cases} f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k))\,P(\mathbf{s}(k)|\mathbf{s}(k-1)), & \mathbf{y}_k \in \Omega \\ 0, & \mathbf{y}_k \notin \Omega \end{cases}. \quad (\text{П.4})$$

После подстановки (П.4) в (П.1) имеем

$$\begin{gathered} f\left(\mathbf{z}(k),\mathbf{s}(k)\middle|\mathbf{D}_1^k\right) = \frac{1}{P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \sum_{\mathbf{s}(k-1)} \int f(\mathbf{z}(k) \mid \mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k))\times \\ \times P(\mathbf{s}(k)|\mathbf{s}(k-1))\, f\left(\mathbf{z}(k-1),\mathbf{s}(k-1)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right) d\mathbf{z}(k-1). \end{gathered} \quad (\text{П.5})$$

С учетом соотношений

$$\mathbf{s}(k) \triangleq [a_j(t_k), b_m(t_k)]^T; \quad P(\mathbf{s}(k)|\mathbf{s}(k-1)) \triangleq \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b$$

перепишем (П.5):

$$\begin{gathered} f\left(\mathbf{z}(k),a_j,b_m\middle|\mathbf{D}_1^k\right) = \hat{f}(\mathbf{z}(k),a_j,b_m) = \frac{1}{P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),a_j,b_m) \hat{f}(\mathbf{z}(k-1),a_i(t_{k-1}),b_n(t_{k-1}))\, d\mathbf{z}(k-1). \end{gathered} \quad (\text{П.6})$$

$$\begin{gathered} P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \sum_j \sum_m \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \int\int f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),a_j,b_m)\times \\ \times \hat{f}(\mathbf{z}(k-1),a_i(t_{k-1}),b_n(t_{k-1}))\, d\mathbf{z}(k-1)\, d\mathbf{z}(k). \end{gathered} \quad (\text{П.7})$$

Для нахождения вероятности одношагового предсказания наблюдаемого цифрового сигнала $P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)$ проинтегрируем (П.7) по переменной $\mathbf{z}(k)$ с учетом того, что $\mathbf{z}(k) = \left[\mathbf{x}^T(k), \mathbf{y}^T(k)\right]^T$:

$$\begin{gathered} P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \sum_j \sum_m \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int\int_{\Omega} f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{z}(k-1),a_j,b_m)\times \\ \times \hat{f}(\mathbf{z}(k-1),a_i,b_n)\, d\mathbf{z}(k-1)\, d\mathbf{y}(k). \end{gathered} \quad (\text{П.8})$$

Представим апостериорную плотность вероятности вектора $\mathbf{z}$ при условии $a_j(t_k)$, $b_m(t_k)$ – (П.6) в виде системы рекуррентных уравнений

$$\begin{gathered} \hat{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = \hat{f}(\mathbf{z}(k),a_j,b_m) = \\ = \frac{1}{P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)), \end{gathered} \quad (\text{П.9})$$

где $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = f\left(\mathbf{z}(k)\middle|a_j,b_m,\mathbf{D}_1^{k-1}\right)$ – условная плотность вероятности вектора $\left[\mathbf{z}^T(k), a_j(t_k), b_m(t_k)\right]^T$:

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}_{in}(k-1) \int f(\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}(k-1),a_j,b_m) \hat{f}_{in}(\mathbf{z}(k-1))\, d\mathbf{z}(k-1). \quad (\text{П.10})$$

Для нахождения апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП $P\left(a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^k\right)$ проинтегрируем (П.6) по переменным $\mathbf{z}(k)$, $\mathbf{z}(k-1)$

$$P\left(a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^k\right) = \hat{P}(a_j, b_m) = \frac{1}{P\left(\mathbf{d}(k) \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \times$$
$$\times \int_\Omega f\left(\mathbf{y}(k) \mid a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right) d\mathbf{y}(k) \times$$
$$\times \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}(a_i(t_{k-1}), b_n(t_{k-1})) = \quad (\text{П}.11)$$
$$= \frac{P\left(\mathbf{d}(k) \mid a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right)}{P\left(\mathbf{d}(k) \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \times$$
$$\times \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}(a_i(t_{k-1}), b_n(t_{k-1})).$$

С учетом обозначений

$$\tilde{P}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}(a_i(t_{k-1}), b_n(t_{k-1})), \quad (\text{П}.12)$$

перепишем (П.11) в виде

$$\hat{P}_{jm}(k) = \hat{P}(a_j(t_k), b_m(t_k)) =$$
$$= \frac{P\left(\mathbf{d}(k) \middle| a_j(t_k), b_m(t_k), \mathbf{D}_1^{k-1}\right)}{P\left(\mathbf{d}(k) \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right)} \tilde{P}_{jm}(k), \quad (\text{П}.13)$$

где $P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right)$ – условная вероятность одношагового предсказания наблюдаемого цифрового сигнала:

$$P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right) =$$
$$= \int_\Omega f\left(\mathbf{y}(k) \middle| a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right) d\mathbf{y}(k). \quad (\text{П}.14)$$

Выражение (П.6) соответствует формуле (8); выражения (П.8)–(П.10) соответствует формулам (9)–(11), выражения (П.12)–(П.14) – формулам (13), (12), (14), соответственно.

Для вывода квазиоптимальных алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных компонентов вектора состояния ДНМП (19)–(26) воспользуемся допущением о нормальности апостериорной плотности вероятности $\hat{f}_{in}(\mathbf{z}(k-1))$ на предыдущем $k-1$-м такте цифровой фильтрации [19]:

$$\hat{f}_{in}(\mathbf{z}(k-1)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+n_y} \det \hat{\mathbf{R}}_{zz}(k-1, a_i, b_n)}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}(k-1) - \hat{\mathbf{z}}(k-1, a_i, b_n))^T \times \right. \quad (\text{П}.15)$$
$$\left. \times \hat{\mathbf{R}}_{zz}^{-1}(k-1, a_i, b_n)(\mathbf{z}(k-1) - \hat{\mathbf{z}}(k-1, a_i, b_n))\right\}.$$

На основании линейного преобразования (6) условно-гауссовской случайной величины $\mathbf{z}(k-1)$ и с учетом (П.15) перепишем (П.10):

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+n_y}}} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}_{in}(k-1) \frac{1}{\sqrt{\det \breve{\mathbf{R}}_{zz}(k, a_j, b_m)}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}(k) - \breve{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m))^T \breve{\mathbf{R}}_{zz}^{-1}(k, a_j, b_m)(\mathbf{z}(k) - \breve{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m))\right\}, \quad (\text{П}.16)$$

где

$$\breve{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m) = \mathbf{\Phi}_{zz}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{z}}(k-1, a_i, b_n),$$
$$\breve{\mathbf{R}}_{zz}(k, a_j, b_m) = \mathbf{\Phi}_{zz}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{R}}_{zz}(k-1, a_i, b_n) \times$$
$$\times \mathbf{\Phi}_{zz}^T(a_j, b_m) + \mathbf{B}_{zz}(k, a_j, b_m).$$

В результате двухмоментной гауссовской аппроксимации экстраполяционной плотности вероятности (П.16) запишем

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{z}(k)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+n_y} \det \tilde{\mathbf{R}}_{zz}(k, a_j, b_m)}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}(k) - \tilde{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m))^T \times \right. \quad (\text{П}.17)$$
$$\left. \times \tilde{\mathbf{R}}_{zz}^{-1}(k, a_j, b_m)(\mathbf{z}(k) - \tilde{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m))\right\},$$

где

$$\tilde{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m) = \frac{1}{\tilde{P}_{jm}(k)} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}_{in}(k-1) \mathbf{\Phi}_{zz}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{z}}(k-1, a_i, b_n), \quad (\text{П}.18)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{zz}(k, a_j, b_m) = \frac{1}{\tilde{P}_{jm}(k)} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \hat{P}_{in}(k-1)\left(\mathbf{\Phi}_{zz}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{R}}_{in}^{(zz)}(k-1)\mathbf{\Phi}_{zz}^T(a_j, b_m) + \right.$$
$$+ \mathbf{B}_{zz}(k, a_j, b_m) + (\mathbf{\Phi}_{zz}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{z}}(k-1, a_i, b_n)\hat{\mathbf{z}}_{in}(k-1) - \tilde{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m)) \times \quad (\text{П}.19)$$
$$\left. \times (\mathbf{\Phi}_{zz}(a_j, b_m)\hat{\mathbf{z}}(k-1, a_i, b_n) - \tilde{\mathbf{z}}(k, a_j, b_m))^T\right).$$

С учетом

$$\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m) \triangleq \left[\tilde{\mathbf{x}}^T(k,a_j,b_m),\tilde{\mathbf{y}}^T(k,a_j,b_m)\right]^T$$

из (П.18), (П.19) легко получить выражения (19)–(23).

Обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+n_y}\det\tilde{\mathbf{R}}_{zz}(k,a_j,b_m)}}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{z}(k)-\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right)^T\times\right. \\ \left.\times\tilde{\mathbf{R}}_{zz}^{-1}(k,a_j,b_m)\left(\mathbf{z}(k)-\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right)\right\}= \\ = f\left(\mathbf{z}(k)\middle|a_j,b_m,\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right).$$

Тогда вместо (П.9) имеем

$$\hat{f}_{jm}(\mathbf{z}_k)=\theta_1 f\left(\mathbf{z}(k)\middle|a_j,b_m,\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right), \qquad (\text{П.20})$$

где $\theta_1^{-1}=P\left(\mathbf{d}(k)\middle|\mathbf{D}_1^{k-1}\right)$. Учитывая что $\mathbf{z}\triangleq\left[\mathbf{x}^T,\mathbf{y}^T\right]^T$ и применяя формулу умножения вероятностей, запишем

$$f\left(\mathbf{x}(k),\mathbf{y}(k)\middle|a_j,b_m,\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right)= \\ = f\left(\mathbf{y}(k)\middle|a_j,b_m,\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right)\times \\ \times f\left(\mathbf{x}(k)\middle|\mathbf{y}(k),a_j,b_m,(k,a_j,b_m)\right).$$

Первая условная плотность вероятности является гауссовской [17]

$$f\left(\mathbf{y}(k)\middle|a_j,b_m,\tilde{\mathbf{z}}(k,a_j,b_m)\right)= \\ =\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y}\det\hat{\mathbf{R}}_{yy}(k,a_j,b_m)}}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}(k)-\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)\right)^T\times\right. \\ \left.\times\hat{\mathbf{R}}_{yy}^{-1}(k,a_j,b_m)\left(\mathbf{y}(k)-\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)\right)\right\}. \qquad (\text{П.21})$$

Вторая условная плотность вероятности имеет вид

$$f\left(\mathbf{x}(k)\middle|\mathbf{y}(k),a_j,b_m,(k,a_j,b_m)\right)= \\ =\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x}\det\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k,a_j,b_m)}}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)\right)^T\times\right. \\ \left.\times\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}(k,a_j,b_m)\left(\mathbf{x}(k)-\hat{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)\right)\right\}, \qquad (\text{П.22})$$

где $\hat{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)$; $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k,a_j,b_m)$ – условные оценки дискретной фильтрации и корреляционные матрицы их ошибок, определяемые из [19]. Используя методику [17], с учетом (П.21), (П.22) запишем условные оценки цифровой фильтрации и корреляционные матрицы их ошибок

$$\hat{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)=\tilde{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)+\tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k,a_j,b_m)\times \\ \times\tilde{\mathbf{R}}_{yy}^{-1}(k,a_j,b_m)\left(\hat{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)-\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)\right). \qquad (\text{П.23})$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k,a_j,b_m)=\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(k,a_j,b_m)+ \\ +\tilde{\mathbf{R}}_{xy}(k,a_j,b_m)\tilde{\mathbf{R}}_{yy}^{-1}(k,a_j,b_m)\times \\ \times\left[\mathbf{I}-\mathbf{E}_{kb}\right]\tilde{\mathbf{R}}_{xy}^T(k,a_j,b_m). \qquad (\text{П.24})$$

На основе оптимизации процедуры квантования запишем [18]

$$\hat{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)=\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)+ \\ +\mathbf{T}_{yy}(k,a_j,b_m)\mathbf{Y}_{\text{opt}}(k,\mathbf{d}(k)). \qquad (\text{П.25})$$

Подставив (П.25) в (П.23), окончательно получим

$$\hat{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)=\tilde{\mathbf{x}}(k,a_j,b_m)+ \\ +\mathbf{K}(k,a_j,b_m)\mathbf{Y}_{\text{opt}}(k,\mathbf{d}(k)), \qquad (\text{П.26})$$

где $\mathbf{Y}_{\text{opt}}(k,\mathbf{d}(k))=\left[y_{\text{opt}}^{(1)},\ldots,y_{\text{opt}}^{(u)},\ldots,y_{\text{opt}}^{(n_y)}\right]^T$, $u=\overline{1,n_y}$ – вектор оптимальных уровней квантования. При оптимальном равномерном квантовании с шагом δ_{opt} значения $y_{\text{opt}}^{(u)}$ и $\eta_{\text{opt}}^{(u)}$ нормированных оптимальных уровней и порогов квантования определяются по формулам [13]

$$y_{\text{opt}}^{(u)}=\left(l_u-\frac{L_u+1}{2}\right)\delta_{\text{opt}}^{(u)},\quad \eta_{\text{opt}}^{(u)}=\left(l_u-\frac{L_u}{2}\right)\delta_{\text{opt}}^{(u)}. \quad (\text{П.27})$$

Значения $\delta_{\text{opt}}^{(u)}$ приведены в [13, табл. 3.2]. Там же имеются значения $\varepsilon_{\text{opt}}^{(u)}$ – минимальных средних квадратов ошибок квантования, которые используются для определения нормированной корреляционной матрицы ошибок квантования [17]

$$\mathbf{E}_{kb}=\left[\varepsilon_{\text{opt}}\delta_{uw}\right],\quad u,w=\overline{1,n_y}.$$

Пусть условием формирования цифровых сигналов являются постоянные пороги квантования, а на входе квантователей АЦП квантуется разность $\mathbf{y}(k)-\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)$, где

$$\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)= \\ =\sum_i\sum_n\frac{\pi_{ij}^a\pi_{nm}^b\hat{P}_{in}(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)}\mathbf{\Phi}_{yx}(a_j,b_m)\hat{\mathbf{x}}(k-1,a_i,b_n),$$

– оптимальное предсказанное значение вектора $\mathbf{y}(k)$. Тогда из условий можно записать

$$\mathbf{T}_{yy}(k,a_j,b_m)\mathbf{H}_{\text{opt}}(k,l_u-1)<\mathbf{y}(k)- \\ -\tilde{\mathbf{y}}(k,a_j,b_m)\le\mathbf{T}_{yy}(k,a_j,b_m)\mathbf{H}_{\text{opt}}(k,l_u), \qquad (\text{П.28})$$

где

$$\mathbf{H}_{\text{opt}}=[\eta_{\text{opt}}^{(1)},\ldots,\eta_{\text{opt}}^{(u)},\ldots,\eta_{\text{opt}}^{(n_y)}]^T,\quad u=\overline{1,n_y},$$

– вектор оптимальных порогов квантования, определяемых из (П.27).

С учетом условия (3) $\mathbf{y}(k) = \int \mathbf{v}(\tau)\, d\tau$, $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$, выражение (П.28) имеет вид

$$\mathbf{T}_{yy}(k, a_j, b_m)\mathbf{H}_{\text{opt}}(k, l_u - 1) < \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{v}(\tau) d\tau - \tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m) \le \mathbf{T}_{yy}(k, a_j, b_m)\mathbf{H}_{\text{opt}}(k, l_u).$$

Для вывода условной вероятности одношагового предсказания наблюдений (14) из (П.13) определим вероятность цифрового сигнала

$$P\left(\mathbf{d}(k) \middle| a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \int_{\Omega} f\left(\mathbf{y}(k) \middle| a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right) d\mathbf{y}(k). \qquad (\text{П.29})$$

Рассматривая выражения (П.13), (П.20), (П.21), можно сделать вывод, что подынтегральная условная ПВ в (П.29) является гауссовской:

$$\begin{gathered} f\left(\mathbf{y}(k) \middle| a_j, b_m, \mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det \tilde{\mathbf{R}}_{yy}(k, a_j, b_m)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m)\right) \tilde{\mathbf{R}}_{yy}^{-1}(k, a_j, b_m) \left(\mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m)\right)\right\}. \end{gathered} \qquad (\text{П.30})$$

С учетом этого перепишем (П.30) в виде

$$\begin{gathered} P\left(\mathbf{d}(k), a_j, b_m \middle| \mathbf{D}_1^{k-1}\right) = \\ = \prod_{u=1}^{n_y} \left\{ F\left\{ \frac{\eta_{\text{opt}}^{(u)}(l_u) - \tilde{y}_u(k, a_j, b_m)}{\tau_u(k)} \right\} - \right. \\ \left. - F\left\{ \frac{\eta_{\text{opt}}^{(u)}(l_u - 1) - \tilde{y}_u(k, a_j, b_m)}{\tau_u(k)} \right\} \right\}, \end{gathered}$$

где $\tilde{y}_u(k, a_j, b_m)$ – u-й элемент вектора $\tilde{\mathbf{y}}(k, a_j, b_m)$; τ_u – диагональный элемент нижней треугольной матрицы $\mathbf{T}_{yy}(k, a_j, b_m)$; $F\{\cdot\}$ – интеграл вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
2. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
3. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
4. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
5. *Тихонов В.И., Степанов Д.С.* // РЭ. 1973. Т. 18. № 7. С. 1376.
6. *Тихонов В.И., Харисов В.Н., Смирнов В.А.* // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1442.
7. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
8. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории оценивания случайных процессов в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
9. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
10. *Чердынцев В.А.* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1975. № 2. С. 102.
11. *Чердынцев В.А.* Статистическая теория совмещенных радиотехнических систем. Минск: Высш. школа, 1980.
12. *Жук С.Я.* // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1988. Т. 31. № 1. С. 33.
13. *Величкин А.И.* Передача аналоговых сообщений по цифровым каналам связи. М.: Радио и связь, 1983.
14. *Горбунов Ю.Н.* Цифровая обработка радиолокационных сигналов в условиях использования грубого (малоразрядного) квантования. М.: ЦНИРТИ им. акад. А.И. Берга, 2008.
15. *Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С.* Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. М.: Наука, 1989.
16. *Миронов М.А.* // РЭ. 1993. Т. 38. № 1. С. 109.
17. *Величкин А.И.* // РЭ. 1990. Т. 35. № 7. С. 1471.
18. *Детков А.Н.* // РЭ. 1995. Т. 42. № 5. С. 1406.
19. *Детков А.Н.* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 73.
20. *Детков А.Н.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 6. С. 556.
21. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.391.26

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСАХ ПОДВИЖНЫХ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

© 2021 г. А. В. Иванов[a, *], В. Ю. Шишкин[b], Д. В. Бойков[c], А. А. Иванов[d], Н. А. Лежнева[e]

[a]*Тамбовский государственный технический университет, ул. Ленинградская, 1, Тамбов, 392036 Российская Федерация*

[b]*Главное управление научно-исследовательской деятельности и технологического сопровождения передовых технологий (инновационных исследований) Министерства обороны Российской Федерации, Фрунзенская набережная, 22/2, Москва, 119160 Российская Федерация*

[c]*Главное организационно-мобилизационное управление Генерального штаба Вооруженных сил, Фрунзенская набережная, 22/2, Москва, 119160 Российская Федерация*

[d]*МИРЭА — Российский технологический университет, просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация*

[e]*Представительство компании “Эрпорт Менеджмент Компани Лимитед”, Аэропорт “Домодедово”, 1, Домодедово Московской обл., 142015 Российская Федерация*

**E-mail: aleksandr-ivanov68@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.11.2020 г.
После доработки 25.03.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Методами марковской теории оптимального оценивания случайных процессов синтезированы комплексные адаптивные алгоритмы обработки информации в навигационных комплексах подвижных наземных объектов на основе спутниковых радионавигационных систем. Алгоритмы позволяют выявлять аномальные измерения на выходе аппаратуры приема радиосигналов спутниковых радионавигационных систем, а также дополнительно осуществлять контроль целостности навигационных данных спутниковых радионавигационных систем на основе использования информации от барометрического высотомера. Разработана структурная схема обработки информации в навигационном комплексе. Проведено компьютерное моделирование полученных адаптивных алгоритмов.

DOI: 10.31857/S0033849421080040

ВВЕДЕНИЕ

Бортовое оборудование современных подвижных наземных объектов для определения координат местоположения, параметров движения и пространственного положения продольных осей объекта включает навигационные комплексы (НК). В состав НК могут входить: датчик скорости движения; барометрический высотомер (БВ); гироскопическая система определения пространственного положения продольных осей объекта или инерциальная навигационная система (ИНС), которая помимо пространственного положения позволяет определять вектор скорости (ускорения) объекта; аппаратура приема сигналов спутниковой радионавигационной системы (СРНС); доплеровский измеритель скорости; цифровой вычислитель; система отображения информации [1]. Состав навигационных комплексов может быть различным, но в любом случае он должен обеспечить решение задачи счисления координат местоположения подвижного объекта и коррекцию результатов счисления, а также отображение информации о местоположении объекта.

Для синтеза алгоритмов обработки информации в НК широкое распространение получили статистические методы обработки информации — методы марковской теории оптимального оценивания случайных процессов, позволяющие получить оптимальные алгоритмы обработки [2–4]. При этом для создания алгоритмов комплексной оптимальной обработки информации в НК целесообразнее использовать методы марковской теории оптимального комплексирования измерителей [5]. Разработанные этими методами комплексные алгоритмы позволяют обеспечить высокую точность определения текущих координат местоположения и параметров движения объекта за счет совместной обработки информации, а также обеспечить несколько режимов работы НК, что повышает его надежность.

Для коррекции координат местоположения подвижных наземных объектов в современных НК используется аппаратура приема (АП) сигналов СРНС. Основными достоинствами СРНС являются глобальность и высокая точность определения координат местоположения и параметров движения объекта. Однако применение СРНС приводит к ряду проблем.

Первая проблема связана с тем, что в произвольный момент времени на точность выходных данных АП СРНС существенное влияние оказывают ошибки, возникающие при выполнении процедуры измерений. Данные ошибки обусловлены следующими причинами: возможность кратковременного отсутствия радиосигналов на входе АПСРНС из-за затенения приемной антенны; влияние канала распространения на радиосигнал (ионосферные задержки сигнала; тропосферные задержки сигнала); возникновением многолучевости распространения радиосигнала; радиопомехи. В результате измерения оказываются аномальными (искаженными).

Аномальные измерения возникают вследствие захвата следящей системой шумовых выбросов радиосигнала. Это возможно, например, в случае использования моделирующей псевдослучайной последовательности (ПСП), описываемой последовательностью импульсов прямоугольной формы, и малых отношениях сигнал/шум на входе приемного устройства.

Случай малых отношений сигнал/шум на входе приемного устройства характерен для СРНС, использующих шумоподобные сигналы. Подтверждением возможности аномальных измерений в АП СРНС является проведенное в [5] моделирование апостериорного распределения задержки ПСП, которое показало, что апостериорное распределение является многомодальным и сильно изрезанным. При этом положение точки максимума апостериорного распределения может существенно отличаться от истинного значения.

Величина ошибки определения псевдодальности до навигационного космического аппарата (НКА) следящей системой аппаратуры приема связана с длительностью импульса $\tau_и$ элементарной посылки псевдослучайной последовательности и лежит в пределах

$$[D_i^{ист} - c\tau_и,\ D_i^{ист} + c\tau_и],$$

где $D_i^{ист}$ – истинное значение псевдодальности до i-го, $i = \overline{1,4}$, НКА рабочего созвездия, c – скорость света. Вероятность захвата шумовых выбросов распределена по равномерному закону [6], поэтому дисперсия ошибки определения псевдодальности до НКА при значении длительности импульса элементарной посылки псевдослучайной последовательности $\tau_и = 1 \times 10^{-6}$ с составляет 7500 м^2, а максимальная ошибка радиальной погрешности определения координат местоположения объекта при пересечении линий положения под углом 90° имеет значение порядка 245 м. Для исключения аномальных измерений целесообразно использовать подходы, предложенные в [7] и основанные на методе анализа вектора обновляемой последовательности или вектора невязок измеренийдля разработки адаптивных алгоритмов обработки информации.

Вторая проблема связана с тем, что навигационные данные, передаваемые с помощью радиосигналов СРНС, могут быть искажены под влиянием преднамеренных помех. Если АП СРНС является совмещенной и может работать по радиосигналам американской СРНС типа GPS, то существует возможность передачи ложной информации потребителям на определенных территориях о координатах НКА. Влияние преднамеренных помех или искусственный ввод неточных данных о координатах НКА приводит к существенным ошибкам определения текущих координат местоположения. Для борьбы с данным явлением необходимо использовать контроль целостности навигационных данных. Для создания автономной системы контроля целостности целесообразно ввести в состав НК дополнительно БВ [8].

Цель данной работы – методами марковской теории оптимального оценивания случайных процессов получить для НК подвижных наземных объектов комплексные адаптивные алгоритмы обработки информации, позволяющие выявлять аномальные измерения, а также дополнительно осуществлять контроль целостности навигационных данных СРНС.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть положение подвижного объекта в нормальной земной системе координат $OX_gY_gZ_g$, начало которой удалено от центра Земли на величину R_0, определяется координатами x, y, z. При этом ось OX_g направлена на север, ось OY_g – на восток, ось OZ_g – вверх по местной вертикали. В начальный момент времени t_0 объект имеет координаты x_0, y_0, z_0.

Считаем, что на подвижном объекте установлен НК, включающий в свой состав датчик скорости (ДС) движения; ИНС и M-канальную АП сигналов СРНС, а также для контроля целостности навигационного обеспечения в состав навигационного комплекса введен БВ.

Рассмотрим определение координат и параметров движения подвижного объекта в горизонтальной плоскости OX_gY_g (горизонтальный канал) и вдоль вертикальной оси (вертикальный канал). При этом вертикальный канал дополнительно используем для решения задачи целостности навигационного обеспечения с использованием информации от БВ.

Пусть ИНС представляет собой стабилизируемую в горизонтальной плоскости свободную в азимуте платформу, на которой установлены акселерометры. Начало инерциальной системы координат $OX_иY_иZ_и$ совпадает с центром масс объекта. Начальная выставка осуществлена, при этом ось $OX_и$ направлена на север, оси $OY_и$ – на восток и $OZ_и$ – вверх по местной вертикали. Сигналы на выходе ИНС дискретизированы по времени и имеют следующий вид [9]:

$$\begin{gathered} a_X^{ИНС}(t_{k+1}) = a_X(t_{k+1}) + \\ + \Delta_{aX}(t_{k+1}) + \sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aX}(t_{k+1}); \\ a_Y^{ИНС}(t_{k+1}) = a_Y(t_{k+1}) + \Delta_{aY}(t_{k+1}) + \\ + \sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aY}(t_{k+1}); \\ a_Z^{ИНС}(t_{k+1}) = a_Z(t_{k+1}) + \Delta_{aZ}(t_{k+1}) + \\ + g + \sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aZ}(t_{k+1}), \end{gathered} \quad (1)$$

где $a_X^{ИНС}(t_{k+1})$, $a_Y^{ИНС}(t_{k+1})$ и $a_Z^{ИНС}(t_{k+1})$ – измеренные значения составляющих вектора ускорения; g – ускорение свободного падения; α_a – коэффициент, характеризующий ширину спектра погрешности, σ_a^2 – дисперсия флуктуационной погрешности; $t_{k+1} - t_k = T$ – интервал дискретизации; $n_{aX}(t_{k=1})$, $n_{aY}(t_{k+1})$, $n_{aZ}(t_{k+1})$ – взаимонезависимые выборки гауссовских процессов с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями; $\Delta_{aX}(t_{k+1})$, $\Delta_{aY}(t_{k+1})$, $\Delta_{aZ}(t_{k+1})$ – постоянные составляющие погрешностей измерения ускорений

$$\begin{gathered} \Delta_{aX}(t_{k+1}) = \Delta_{aX}(t_k), \quad \Delta_{aY}(t_{k+1}) = \Delta_{aY}(t_k), \\ \Delta_{aZ}(t_{k+1}) = \Delta_{aZ}(t_k). \end{gathered} \quad (2)$$

Полагаем, что измерение относительной высоты при помощи БВ осуществляется относительно уровня, соответствующего точки начального движения подвижного наземного объекта. Удаление данной точки от центра Земли в геоцентрической (сферической) системе координат может быть задано значением $R_0 = R + H_р$, где R радиус-вектор геоцентрической (сферической) системы координат, $H_р$ – высота рельефа местности в точке начального движения подвижного наземного объекта. Наблюдение на выходе БВ в непрерывном времени описано в [10], для дискретных моментов времени оно будет иметь вид

$$H_{ОТН}^{БВ}(t_{k+1}) = H_{ОТН}(t_{k+1}) + \Delta H(t_{k+1}) + u_{БВ}(t_{k+1}), \quad (3)$$

где $\Delta H(t_{k+1})$ и $u_{БВ}(t_{k+1})$ соответственно постоянная ошибка и флуктуационная погрешность, описываемые выражениями

$$\begin{gathered} \Delta H(t_{k+1}) = \Delta H(t_k), \\ u_{БВ}(t_{k+1}) = \varphi_{uu}(t_{k+1}, t_k) u_{БВ}(t_k) + \gamma_u(t_{k+1}, t_k) n_u(t_k), \\ u_{БВ}(t_0) = u_{БВ0}, \end{gathered} \quad (4)$$

в которых $\varphi_{uu}(t_{k+1}, t_k) = \exp(-\gamma_{БВ}T)$; $\gamma_u(t_{k+1}, t_k) = \sigma_{БВ}[1 - \varphi_{uu}^2(t_{k+1}, t_k)]^{0.5}$; $\gamma_{БВ}$ – коэффициент, характеризующий ширину спектра погрешности, $\sigma_{БВ}^2$ – дисперсия флуктуационной погрешности; $n_u(t_k)$ – независимые выборки гауссовского процесса с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Датчик скорости движения определяет земную скорость объекта вдоль продольной оси. Выходной сигнал датчика используем только для горизонтального канала. Зная пространственное положение продольной оси на основе информации от ИНС, можно определить проекции скорости на оси OX_g и OY_g. Выходные сигналы в дискретные моменты времени запишем в виде

$$\begin{gathered} V_X^{ДС}(t_{k+1}) = V_X(t_{k+1}) + \sigma_{Vx} n_{Vx}(t_{k+1}); \\ V_Y^{ДС}(t_{k+1}) = V_Y(t_{k+1}) + \sigma_{Vy} n_{Vy}(t_{k+1}), \end{gathered} \quad (5)$$

где $V_X^{ДС}(t_{k+1}), V_Y^{ДС}(t_{k+1})$ – измеренные значения составляющих скорости объекта; $n_{Vx}(t_{k+1})$, $n_{Vy}(t_{k+1})$ – выборки взаимонезависимых гауссовских процессов с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями; σ_{Vx}, σ_{Vy} – среднеквадратические ошибки измерения скорости объекта.

Аппаратура приема сигналов СРНС обеспечивает прием радиосигналов СРНС ГЛОНАСС. Считаем, что преобразование выходных данных о местоположении объекта из системы координат ПЗ-90, в которой работает СРНС ГЛОНАСС, в нормальную земную систему координат выполнено.

В этом случае сигналы о координатах местоположения объекта в горизонтальной плоскости и по высоте относительно центра Земли на выходе АП в дискретные моменты времени аналогично [8] представим в виде

$$\begin{gathered} x^{СРНС}(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + \sigma_x n_x(t_{k+1}); \\ y^{СРНС}(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) + \sigma_y n_y(t_{k+1}); \\ H^{СРНС}(t_{k+1}) = H_{ОТН}(t_{k+1}) + R_0 + \sigma_z n_z(t_{k+1}), \end{gathered} \quad (6)$$

где $x^{СРНС}(t_{k+1})$, $y^{СРНС}(t_{k+1})$, $H^{СРНС}(t_{k+1})$ – измеренные значения координат местоположения объекта; $n_x(t_k)$, $n_y(t_k)$, $n_z(t_k)$ – выборки взаимонезависимых гауссовских процессов с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;

$\sigma_x(t_k), \sigma_y(t_k), \sigma_z(t_k)$ – среднеквадратические ошибки измерения координат местоположения объекта.

Представление "полезного" сигнала $H^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$ на выходе вертикального канала в АП сигналов СРНС через радиус-вектор R_0 позволяет определить относительную высоту $H_{\text{ОТН}}(t_{k+1})$ по выходным данным СРНС. Сравнение относительной высоты объекта, определенной СРНС, с данными БВ позволяет оценить постоянную ошибку определения относительной высоты БВ. Значение последней, как правило, не превышает некоторой максимально допустимой величины $\Delta H_{\max}$. В случае сбоя в работе АП сигналов СРНС или передачи неточных данных о координатах НКА значение относительной высоты, определяемой СРНС, будет значительно отличаться от относительной высоты, определяемой БВ. Если разница высот превысит максимально допустимую ошибку $\Delta H_{\max}$, то можно утверждать, что использовать информацию от данного рабочего созвездия НКА нельзя.

Задание математической модели объекта предполагает описание изменения его координат и параметров движения во времени. Изменение координат во времени можно задать системой дифференциальных уравнений вида [10]

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} = V_X(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = V_Y(t), \quad \frac{dH_{\text{ОТН}}(t)}{dt} = V_Z(t);\\ \frac{dV_X(t)}{dt} = a_X(t), \quad \frac{dV_Y(t)}{dt} = a_Y(t), \quad \frac{dV_Z(t)}{dt} = a_Z(t).\end{gathered} \tag{7}$$

Дальнейшее задание модели требует задания модели изменения во времени ускорения объекта. Данная задача является довольно сложной, так как зависит от типа объекта, вида совершаемого им движения, и может быть решена только для отдельных случаев движения объекта, например движения с постоянным ускорением $a_X(t) = \text{const}$, $a_Y(t) = \text{const}$, $a_Z(t) = \text{const}$. Поэтому для задания модели объекта применим принцип распределения информации [10] между векторами наблюдения и управления. Согласно этому принципу значения составляющих ускорения объекта в математической модели (7) заменим на измеренные ИНС, т.е. выходные сигналы ИНС используем в качестве компонент вектора управления. В результате для дискретных моментов времени получим

$$\begin{gathered}x(t_{k+1}) = x(t_k) + TV_X(t_k) + 0.5T^2 a_X^{\text{ИНС}}(t_k) -\\ - 0.5T^2\Delta_{aX}(t_k) - 0.5T^2\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aX}(t_k);\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}y(t_{k+1}) = y(t_k) + TV_Y(t_k) + 0.5T^2 a_Y^{\text{ИНС}}(t_k) -\\ - 0.5T^2\Delta_{aY}(t_k) - 0.5T^2\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aY}(t_k),\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}V_X(t_{k+1}) = V_X(t_k) + Ta_X^{\text{ИНС}}(t_k) - T\Delta_{aX}(t_k) -\\ - T\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aX}(t_k);\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}V_Y(t_{k+1}) = V_Y(t_k) + Ta_Y^{\text{ИНС}}(t_k) -\\ - T\Delta_{aY}(t_k) - T\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aY}(t_k);\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}H_{\text{ОТН}}(t_{k+1}) = H_{\text{ОТН}}(t_k) + TV_Z(t_k) +\\ + 0.5T^2 a_Z^{\text{ИНС}}(t_k) - 0.5T^2\Delta_{aZ}(t_k) -\\ - 0.5T^2 g - 0.5T^2\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aZ}(t_k),\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}V_Z(t_{k+1}) = V_Z(t_k) + Ta_Z^{\text{ИНС}}(t_k) - T\Delta_{aZ}(t_k) -\\ - Tg - T\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5} n_{aZ}(t_k).\end{gathered} \tag{13}$$

В горизонтальном канале подлежащий оцениванию вектор состояния

$$\mathbf{X}_\Gamma(t_k) = [x(t_k), y(t_k), V_X(t_k), V_Y(t_k), \Delta_{aX}(t_k), \Delta_{aY}(t_k)]^T$$

включает шесть компонент и в соответствии с (2), (8)–(11) описывается разностным векторно-матричным стохастическим уравнением

$$\begin{gathered}\mathbf{X}_\Gamma(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{X}_\Gamma(t_k) +\\ + \mathbf{\Psi}_\Gamma(t_{k+1}, t_k)\mathbf{W}_\Gamma(t_k) + \mathbf{\Gamma}_{x\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{N}_{x\Gamma}(t_k),\end{gathered} \tag{14}$$

где $\mathbf{W}_\Gamma = [a_X^{\text{ИНС}}, a_Y^{\text{ИНС}}]^T$ – известный вектор управления; $\mathbf{N}_{x\Gamma}(t_k) = [n_{aX}(t_k), n_{aY}(t_k)]^T$ – вектор формирующих стандартных гауссовских случайных величин; $\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}$ – фундаментальная матрица размером (6 × 6) с ненулевыми элементами

$$\begin{gathered}\varphi_{xx\Gamma_{11}} = \varphi_{xx\Gamma_{22}} = \varphi_{xx\Gamma_{33}} = \varphi_{xx\Gamma_{44}} = \varphi_{xx\Gamma_{55}} = \varphi_{xx\Gamma_{66}} = 1,\\ \varphi_{xx\Gamma_{13}} = \varphi_{xx\Gamma_{24}} = T,\\ \varphi_{xx\Gamma_{15}} = \varphi_{xx\Gamma_{26}} = -0.5T^2,\\ \varphi_{xx\Gamma_{35}} = \varphi_{xx\Gamma_{46}} = -T;\end{gathered}$$

$\mathbf{\Psi}_\Gamma$ – переходная матрица управления размером (6 × 2) с ненулевыми элементами

$$\psi_{\Gamma_{11}} = \psi_{\Gamma_{22}} = 0.5T^2, \quad \psi_{\Gamma_{31}} = \psi_{\Gamma_{42}} = T;$$

$\mathbf{\Gamma}_{x\Gamma}$ – переходная матрица возмущения размером (6 × 2) с ненулевыми элементами

$$\begin{gathered}\gamma_{x\Gamma_{11}} = \gamma_{x\Gamma_{22}} = -0.5T^2\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5},\\ \gamma_{x\Gamma_{31}} = \gamma_{x\Gamma_{42}} = -T\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5}.\end{gathered}$$

Вектор наблюдения для горизонтального канала

$$\begin{gathered}\mathbf{\Xi}_\Gamma(t_{k+1}) =\\ = [x^{\text{СРНС}}(t_{k+1}), y^{\text{СРНС}}(t_{k+1}), V_X^{\text{ДС}}(t_{k+1}), V_Y^{\text{ДС}}(t_{k+1})]^T\end{gathered}$$

включает сигналы на выходе СРНС и датчика скорости движения, и в дискретные моменты времени t_{k+1}, $k = 0,1,2,\ldots$, в соответствии с (5), (6) описывается выражением

$$\Xi_{\Gamma}(t_{k+1}) = \mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1})\mathbf{X}_{\Gamma}(t_{k+1}) + \mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma}(t_{k+1})\mathbf{N}_{\Xi\Gamma}(t_{k+1})], \quad (15)$$

где $\mathbf{N}_{\Xi\Gamma}(t_{k+1}) = [n_x(t_{k+1}), n_y(t_{k+1}), n_{Vx}(t_{k+1}), n_{Vy}(t_{k+1})]^T$ – вектор шумов наблюдения; $\mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1})$ – матрица наблюдения размером (4 × 6) с ненулевыми элементами $h_{\Gamma 11} = h_{\Gamma 22} = h_{\Gamma 33} = h_{\Gamma 44} = 1$; $\mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma}(t_{k+1})$ – матрица шумов наблюдения размером (4 × 4) с ненулевыми элементами

$$\gamma_{\Xi\Gamma 11} = \sigma_x, \quad \gamma_{\Xi\Gamma 22} = \sigma_y, \quad \gamma_{\Xi\Gamma 33} = \sigma_{Vx}, \quad \gamma_{\Xi\Gamma 44} = \sigma_{Vy}.$$

В вертикальном канале подлежащий оцениванию вектор состояния $\mathbf{X}_{\text{В}}(t_k) = [H_{\text{ОТН}}(t_k), V_Z(t_k), \Delta H(t_k), \Delta_{aZ}(t_k)]^T$ включает четыре компоненты и в соответствии с (2), (4), (12), (13) описывается разностным векторно-матричным стохастическим уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{В}}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{X}_{\text{В}}(t_k) + \\ + \mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) + \mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1}, t_k)N_{xB}(t_k), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{W}_{\text{В}} = [a_Z^{\text{ИНС}}, g]^T$ – известный вектор управления; $N_{x\text{В}}(t_k) = n_{aZ}(t_k)$ – формирующие стандартные гауссовские случайные величины; $\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}$ – фундаментальная матрица размером (4 × 4) с ненулевыми элементами $\varphi_{xx\text{В}_{11}} = \varphi_{xx\text{В}_{22}} = \varphi_{xx\text{В}_{33}} = \varphi_{xx\text{В}_{44}} = 1$, $\varphi_{xx\text{В}_{12}} = T$, $\varphi_{xx\text{В}_{14}} = -0.5T^2$, $\varphi_{xx\text{В}_{24}} = -T$; $\mathbf{\Psi}_{\text{В}}$ – переходная матрица управления размером (4 × 2) с ненулевыми элементами $\psi_{\text{В}_{11}} = 0.5T^2$, $\psi_{\text{В}_{12}} = -0.5T^2$, $\psi_{\text{В}_{21}} = T$, $\psi_{\text{В}_{22}} = -T$; и $\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}$ – переходной вектор возмущения размером (4 × 1) с ненулевыми элементами

$$\gamma_{x\text{В}_{11}} = -0.5T^2\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5}, \quad \gamma_{x\text{В}_{21}} = -T\sigma_a(2T/\alpha_a)^{0.5}.$$

Вектор наблюдения для вертикального канала $\Xi_{\text{В}}(t_{k+1}) = [\xi_1(t_{k+1}), \xi_2(t_{k+1})]^T$ включает наблюдения на выходе БВ $\xi_1(t_{k+1}) = H_{\text{ОТН}}^{\text{БВ}}(t_{k+1})$ и аппаратуры приема сигналов СРНС $\xi_2(t_{k+1}) = H^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$, которые в дискретные моменты времени t_{k+1}, $k = 0,1,2,\ldots$, в соответствии с (3), (6) описываются выражениями

$$\begin{aligned} \xi_1(t_{k+1}) = \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{X}_{\text{В}}(t_{k+1}) + u_{\text{БВ}}(t_{k+1}); \\ \xi_2(t_{k+1}) = \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{X}_{\text{В}}(t_{k+1}) + V_2 + \Gamma_2(t_{k+1})N_2(t_{k+1}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ – векторы наблюдения размером (1 × 4) с ненулевыми элементами $h_{1_{11}} = h_{1_{13}} = 1$, $h_{2_{11}} = 1$; $V_2 = R_0$ – известная величина; $\Gamma_2 = \sigma_z$; $N_2(t_{k+1}) = n_z(t_{k+1})$ – шум наблюдения.

Получим для НК подвижных наземных объектов комплексные адаптивные алгоритмы обработки информации в горизонтальном канале для наблюдения (15) с учетом модели изменения вектора состояния (14) и в вертикальном канале для наблюдения (16) с учетом модели изменения (17). Алгоритмы должны выявлять аномальные измерения на выходе АП СРНС, а также осуществлять контроль целостности навигационных данных СРНС.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСАХ ПОДВИЖНЫХ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

Для получения алгоритмов комплексной оптимальной обработки информации в НК используем методы марковской теории оптимального оценивания.

Для горизонтального канала, когда уравнение наблюдения (15) и модель изменения вектора состояния (14) являются линейными, оптимальная оценка определяется выражением [2–4, 10]

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Gamma}^*(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{X}_{\Gamma}^*(t_k) + \mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k) + \\ + \mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1})\big[\Xi_{\Gamma}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1}) \times \\ \times \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{X}_{\Gamma}^*(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k)\big], \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1})$ – матрица оптимальных коэффициентов передачи размером (6 × 6) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1}) = \mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1}|t_k)\mathbf{H}_{\Gamma}^T(t_{k+1}) \times \\ \times \left[\mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1})\mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1}|t_k)\mathbf{H}_{\Gamma}^T(t_{k+1}) + \mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma}(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma}^T(t_{k+1})\right]^{-1}; \\ \mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1}, t_k) = \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{P}_{\Gamma}(t_k)\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}^T(t_{k+1}, t_k) + \\ + \mathbf{\Gamma}_{x\Gamma}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{\Gamma}_{x\Gamma}^T(t_{k+1}, t_k); \\ \mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1}) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1})\mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1})]\mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1}, t_k), \end{aligned} \quad (19)$$

в которых $\mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1}|t_k)$ – матрица вторых центральных моментов (ковариаций) ошибок прогнозирования размером (6 × 6); $\mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1})$ – матрица вторых центральных моментов (ковариаций) ошибок оценивания размером (6 × 6); $\mathbf{I}$ – единичная матрица размером (6 × 6).

Представим матрицы, входящие в (18), в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\Gamma 1}(t_{k+1}) \\ \mathbf{H}_{\Gamma 2}(t_{k+1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1}) = [\mathbf{K}_{\Gamma 1}(t_{k+1}) \vdots \mathbf{K}_{\Gamma 2}(t_{k+1})], \\ \Xi_{\Gamma}(t_{k+1}) = [\Xi_{\Gamma 1}^T(t_{k+1}) \vdots \Xi_{\Gamma 2}^T(t_{k+1})]^T, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\mathbf{H}_{\Gamma 1}(t_{k+1})$ и $\mathbf{H}_{\Gamma 2}(t_{k+1})$ – матрицы размером (2 × 6); $\mathbf{K}_{\Gamma 1}(t_{k+1})$ и $\mathbf{K}_{\Gamma 2}(t_{k+1})$ – матрицы размером (6 × 2); $\Xi_{\Gamma 1}(t_{k+1}) = [x^{\text{СРНС}}(t_{k+1}), y^{\text{СРНС}}(t_{k+1})]^T$ – вектор, включающий сигналы на выходе СРНС; $\Xi_{\Gamma 2}(t_{k+1}) =$

$= [V_X^{ДС}(t_{k+1}), V_Y^{ДС}(t_{k+1})]^T$ – вектор, включающий сигналы на выходе датчика скорости движения.

С учетом представления матриц, входящих в алгоритм оценивания (18) в виде (20), алгоритм для оптимальной оценки (18) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^*_\Gamma(t_{k+1}) &= \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_\Gamma(t_k) + \mathbf{\Psi}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\Gamma(t_k) + \\ &+ \mathbf{K}_{\Gamma1}(t_{k+1})\Big[\Xi_{\Gamma1}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k) \times \\ &\times \mathbf{X}^*_\Gamma(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\Gamma(t_k)\Big] + \\ &+ \mathbf{K}_{\Gamma2}(t_{k+1})\Big[\Xi_{\Gamma2}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k) \\ &\times \mathbf{X}^*_\Gamma(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\Gamma(t_k)\Big].\end{aligned} \quad (21)$$

Для выявления аномальных измерений аналогично [7] в алгоритме оценивания (19)–(21) используем критерий вида

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^T_{\Gamma1}(t_{k+1})\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma1}(t_{k+1}) &\le \tilde{\gamma}\,\mathrm{tr}\,[\mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\times \\ &\times [\mathbf{P}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Phi}^T_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_{\Gamma1}(t_{k+1}) + \\ &+ \mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}^T_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})\Big],\end{aligned} \quad (22)$$

где $\tilde{\gamma}$ – весовой коэффициент, выбираемый из практических соображений; tr[…]– обозначение следа матрицы, стоящей в квадратных скобках; $\mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})$ – матрица размером (2 × 2) с ненулевыми элементами $\gamma_{\Xi\Gamma1_{11}} = \sigma_x$, $\gamma_{\Xi\Gamma1_{22}} = \sigma_y$; $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma1}(t_{k+1})$ – вектор обновляемой последовательности или вектор невязок измерений горизонтального канала

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma1}(t_{k+1}) &= \Xi_{\Gamma1}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_\Gamma(t_k) - \\ &- \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\Gamma(t_k),\end{aligned}$$

имеющий гауссовский закон распределения с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей вида

$$\begin{aligned}M[\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma1}(t_{k+1})\boldsymbol{\varepsilon}^T_{\Gamma1}(t_{k+1})] &= \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{P}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Phi}^T_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_{\Gamma1}(t_{k+1}) &+ \mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}^T_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1}).\end{aligned}$$

В соответствии с критерием (22), аномальными считаются измерения, если сумма квадратов компонент вектора невязок в момент времени t_{k+1}, $k = 0,1,2,\ldots$, превышает величину, стоящую в правой части выражения (22). Для случая взаимонезависимых компонент вектора невязок можно показать, что если необходимо обеспечить выполнение условия (22) с вероятностью 0.997, то необходимо взять весовой коэффициент равным $\tilde{\gamma} = 9$, а если с вероятностью 0.954, то необходимо взять $\tilde{\gamma} = 4$. Таким образом, величину аномального уровня можно варьировать с помощью весового коэффициента $\tilde{\gamma}$.

Для вертикального канала, когда наблюдения описываются уравнениями (17), а модель изменения вектора состояния – уравнением (16), оптимальная оценка определяется выражением [2–4, 10]:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^*_\text{В}(t_{k+1}) &= \mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_\text{В}(t_k) + \mathbf{\Psi}_\text{В}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\text{В}(t_k) + \\ &+ \mathbf{K}_1(t_{k+1})[\xi_1(t_{k+1}) - \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\xi_1(t_k) - \\ &- \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_\text{В}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\text{В}(t_k) + \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\times \\ &\times \mathbf{H}_1(t_k)\mathbf{X}^*_\text{В}(t_k) - \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_\text{В}(t_k)] + \\ &+ \mathbf{K}_2(t_{k+1})[\xi_2(t_{k+1}) - \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_\text{В}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\text{В}(t_k) - \\ &- V_2 - \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_\text{В}(t_k)],\end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathbf{K}_1(t_{k+1})$ и $\mathbf{K}_2(t_{k+1})$ вектор-столбцы размером (4 × 1) матрицы оптимальных коэффициентов передачи

$$\mathbf{K}(t_{k+1}) = [\mathbf{K}_1(t_{k+1}) \vdots \mathbf{K}_2(t_{k+1})],$$

определяемой соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(t_{k+1}) &= [\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_\text{В}(t_k)\mathbf{\Phi}^T_{yx}(t_{k+1},t_k) + \\ &+ \mathbf{B}_{xy}][\mathbf{B}^{-1}_{yy} + \mathbf{\Phi}_{yx}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_\text{В}(t_k)\mathbf{\Phi}^T_{yx}(t_{k+1},t_k)]^{-1}; \\ \mathbf{P}_\text{В}(t_{k+1}) &= \mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_\text{В}(t_k)\mathbf{\Phi}^T_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k) - \\ &- \mathbf{K}(t_{k+1})[\mathbf{B}_{xy} + \mathbf{\Phi}_{xx}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_\text{В}(t_k)\mathbf{\Phi}^T_{yx}(t_{k+1},t_k)]^T,\end{aligned} \quad (24)$$

в которых $\mathbf{P}_\text{В}(t_{k+1})$ – матрица вторых центральных моментов (ковариаций) ошибок оценивания размером (4 × 4); $\mathbf{\Phi}_{yx}(t_{k+1},t_k)$, $\mathbf{B}_{xy}$, $\mathbf{B}_{yy}$ – блочные матрицы:

$$\mathbf{\Phi}_{yx}(t_{k+1},t_k) = \left[\frac{\mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k) - \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}_1(t_k)}{\mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)}\right];$$

$$\mathbf{B}_{xy} = [\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_1(t_{k+1}) | \mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1})];$$

$$\mathbf{B}_{yy} = \left[\begin{array}{c|c}\dfrac{\mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{xB}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_1(t_{k+1}) - \varphi^2_{uu}(t_{k+1},t_k)}{\mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_1(t_{k+1})} & \dfrac{\mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1})}{\mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1}) + \Gamma^2_2(t_k)}\end{array}\right].$$

Для выявления аномальных измерений в алгоритме оценивания (23), (24), аналогично, как и в горизонтальном канале, используем критерий вида

$$\begin{aligned}\varepsilon^2_{\text{В}2}(t_{k+1}) &\le \tilde{\gamma}\,\mathrm{tr}[\mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_\text{В}(t_k)\times \\ &\times \mathbf{\Phi}^T_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1}) + \Gamma_2(t_{k+1})\,\Gamma_2(t_{k+1})],\end{aligned} \quad (25)$$

где $\varepsilon_{\text{В}2}(t_{k+1})$ – величина обновляемой последовательности или невязка измерения в вертикальном канале

$$\varepsilon_{\text{В}2}(t_{k+1}) = \xi_2(t_{k+1}) - \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) - \\ - V_2 - \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k), \tag{26}$$

представляющая собой гауссовскую случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$M[\varepsilon^2_{\text{В}2}(t_{k+1})] = \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_{\text{В}}(t_k)\times \\ \times \mathbf{\Phi}^T_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1}) + \Gamma_2(t_{k+1})\,\Gamma_2(t_{k+1}).$$

Исходя из представленного критерия (25) аномальными считаются измерения, если квадрат невязки в момент времени t_{k+1}, $k = 0,1,2,\ldots$, превышает величину, стоящую в правой части выражения (25). Значение коэффициента $\tilde{\gamma}$ выбирается аналогично, как и в горизонтальном канале.

С учетом изложенного выше комплексные алгоритмы обработки информации в НК подвижных наземных объектов имеют различный вид.

Если выполняются совместно два условия:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T_{\Gamma1}(t_{k+1})\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma1}(t_{k+1}) \le \\ \le \tilde{\gamma}\,\mathrm{tr}[\mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{\Phi}^T_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_{\Gamma1}(t_{k+1}) + \mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}^T_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})],$$

и

$$\varepsilon^2_{\text{В}2}(t_{k+1}) \le \\ \le \tilde{\gamma}\,\mathrm{tr}[\mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xxB}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_B(t_k)\mathbf{\Phi}^T_{xxB}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{H}^T_2(t_{k+1}) + \Gamma_2(t_{k+1})\,\Gamma_2(t_{k+1}) + \\ + \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{xB}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{xB}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1})],$$

то оценки $\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_{k+1})$ и $\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_{k+1})$ определяются выражениями:

$$\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_k) + \mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k) + \\ + \mathbf{K}_{\Gamma1}(t_{k+1})\Big[\mathbf{\Xi}_{\Gamma1}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k)\Big] + \\ + \mathbf{K}_{\Gamma2}(t_{k+1})[\mathbf{\Xi}_{\Gamma2}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k)\Big], \tag{27}$$

$$\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k) + \mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) + \\ + \mathbf{K}_1(t_{k+1})[\xi_1(t_{k+1}) - \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\xi_1(t_k) - \\ - \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) + \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{H}_1(t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k) - \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k)] + \\ + \mathbf{K}_2(t_{k+1})[\xi_2(t_{k+1}) - \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) - \\ - V_2 - \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k)]. \tag{28}$$

Если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T_{\Gamma1}(t_{k+1})\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma1}(t_{k+1}) > \\ > \tilde{\gamma}\mathrm{tr}[\mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\times \\ \times \mathbf{\Phi}^T_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_{\Gamma1}(t_{k+1}) + \mathbf{\Gamma}_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}^T_{\Xi\Gamma1}(t_{k+1}) \tag{29}$$

или

$$\varepsilon^2_{\text{В}2}(t_{k+1}) > \tilde{\gamma}\mathrm{tr}[\mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{P}_{\text{В}}(t_k)\times \\ \times \mathbf{\Phi}^T_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1}) + \Gamma_2(t_{k+1})\,\Gamma_2(t_{k+1}) + \\ + \mathbf{H}_2(t_{k+1})\mathbf{\Gamma}_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{\Gamma}^T_{x\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}^T_2(t_{k+1})], \tag{30}$$

то оценки $\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_{k+1})$ и $\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_{k+1})$ определяются выражениями:

$$\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_k) + \mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k) + \\ + \mathbf{K}_{\Gamma2}(t_{k+1})\Big[\mathbf{\Xi}_{\Gamma2}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})\times \\ \times \mathbf{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\Gamma}(t_k)\Big], \tag{31}$$

$$\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k) + \\ + \mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) + \\ + \mathbf{K}_1(t_{k+1})[\xi_1(t_{k+1}) - \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\xi_1(t_k) - \\ - \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Psi}_{\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_{\text{В}}(t_k) + \\ + \varphi_{uu}(t_{k+1},t_k)\mathbf{H}_1(t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k) - \\ - \mathbf{H}_1(t_{k+1})\mathbf{\Phi}_{xx\text{В}}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_k)]. \tag{32}$$

Входящие в выражение (27), (31) матрицы $\mathbf{H}_{\Gamma1}(t_{k+1})$, $\mathbf{H}_{\Gamma2}(t_{k+1})$, $\mathbf{K}_{\Gamma1}(t_{k+1})$, $\mathbf{K}_{\Gamma2}(t_{k+1})$ являются составными матрицами блочных матриц $\mathbf{H}_{\Gamma}(t_{k+1})$ и $\mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1})$. При этом матрица $\mathbf{K}_{\Gamma}(t_{k+1})$ определяется в соответствии с выражениями (19).

Входящие в выражение (28), (32) $\mathbf{K}_1(t_{k+1})$ и $\mathbf{K}_2(t_{k+1})$ являются вектор-столбцами матрицы оптимальных коэффициентов передачи

$$\mathbf{K}(t_{k+1}) = [\mathbf{K}_1(t_{k+1}) \vdots \mathbf{K}_2(t_{k+1})],$$

которая определяется выражениями (24).

Алгоритмы (27)–(32) представляют собой комплексные адаптивные алгоритмы обработки информации в НК подвижных объектов и позволяют произвести оценивание координат местоположения и составляющих вектора скорости движения объекта при аномальных измерениях.

Для контроля целостности, аналогично [8], дополнительно предлагается использовать оценку постоянной составляющей ошибки относительной высоты ΔH^* БВ. Определение оценки постоянной составляющей ошибки относительной высоты ΔH^*, измеряемой БВ, и сравнение этого значения с максимально допустимым значением $\Delta H_{\max}$ позволяет осуществить контроль целостности нави-

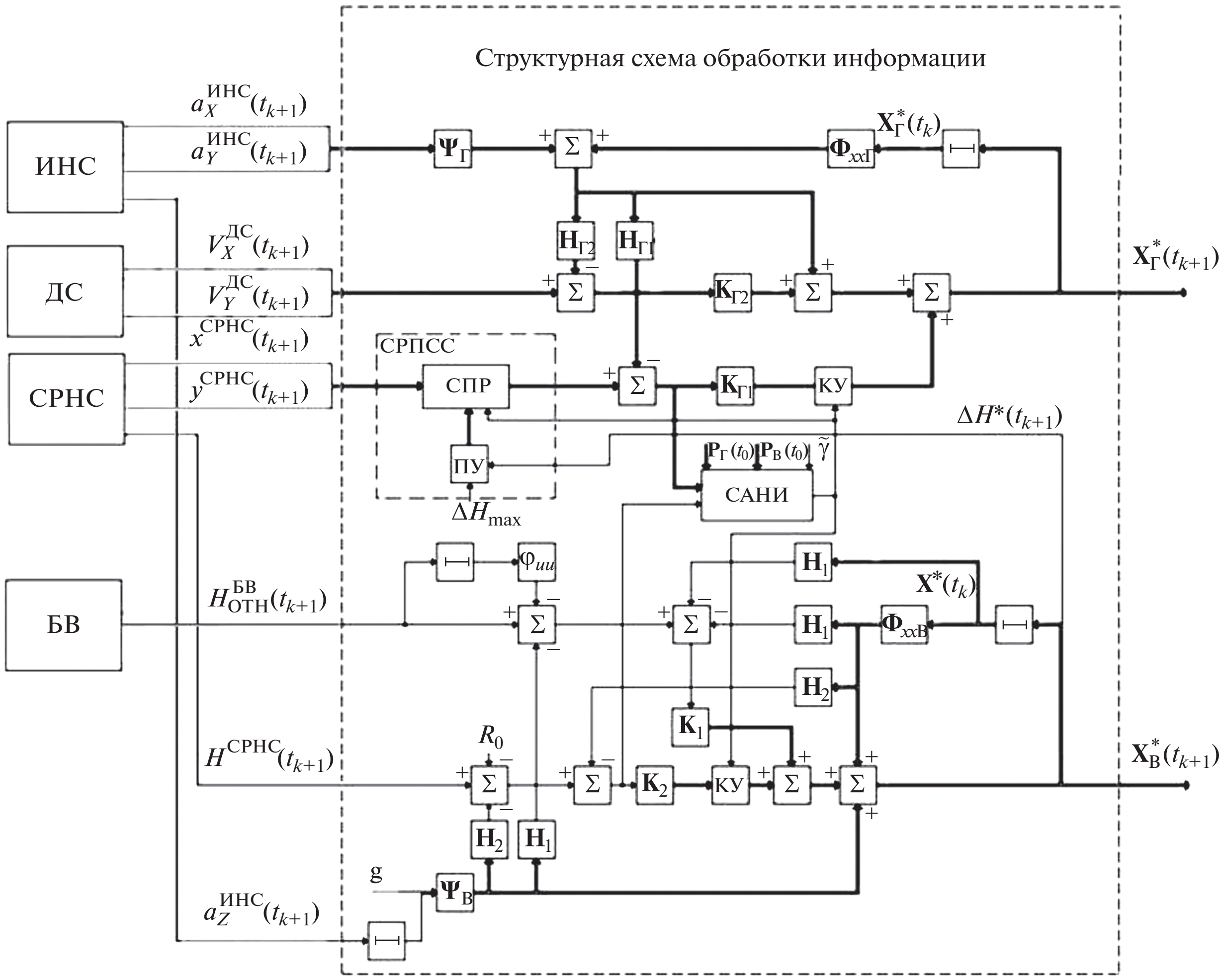

Рис. 1.

гационного обеспечения для случая медленных изменений навигационных данных.

Структурная схема обработки информации в НК подвижных объектов, синтезированная в соответствии с алгоритмом (27)–(32), представлена на рис. 1. В состав схемы входят сумматоры, усилители, ключевые устройства и линии задержки. Отличительной особенностью предложенной схемы обработки информации является возможность выявления аномальных измерений и адаптация к ним. С этой целью в состав схемы введена схема анализа невязок измерений (САНИ) СРНС и ключевые устройства (КУ), которые разрешают или запрещают прохождение сигналов СРНС. На САНИ поступают сигналы с выходов сумматоров, представляющие собой невязку измерений $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma 1}(t_{k+1})$ сигналов СРНС в горизонтальной плоскости и невязку измерений $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{В}2}(t_{k+1})$ сигналов СРНС в вертикальной плоскости. В САНИ проверяются условия (29), (30), для этого на схему также подаются значения матриц вторых центральных моментов (ковариаций) ошибок оценивания $\mathbf{P}_{\Gamma}(t_0)$ и $\mathbf{P}_{\text{В}}(t_0)$ в начальный момент времени и значение коэффициента γ, определяющего уровень допустимых значений отклонений. Вычисление значений матриц вторых центральных моментов (ковариаций) ошибок оценивания $\mathbf{P}_{\Gamma}(t_k)$ и $\mathbf{P}_{\text{В}}(t_k)$ в схеме осуществляется в соответствии с выражениями (19) и (24) соответственно. Сигнал с выхода САНИ поступает на ключевые устройства, которые разрешают или запрещают использование невязок измерений для корректирования оценок векторов состояния $\mathbf{X}^*_{\Gamma}(t_{k+1})$ и $\mathbf{X}^*_{\text{В}}(t_{k+1})$, а также на схему принятия решения (СПР).

Для контроля целостности медленно изменяющихся навигационных данных СРНС используется схема разрешения использования сигналов спутников (СРИСС). Схема включает в свой состав СПР и пороговое устройство (ПУ), порог которого соответствует максимально допустимому значению постоянной составляющей ошибки относительной высоты $\Delta H_{\max}$. На вход ПУ поступает оценка постоянной составляющей ошибки относительной высоты $\Delta H^*(t_{k+1})$. ПУ выдает сигнал на СПР при превышении значения оценки постоянной составляющей ошибки относительной высоты максимально допустимого значения $\Delta H_{\max}$. СПР запрещает прохождение выходных сигналов АП СРНС $x^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$ и $y^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$ для определения горизонтальных координат местоположения и параметров движения подвижного объекта только в том случае, если выполняется условие $\Delta H^*(t_{k+1}) \geq \Delta H_{\max}$ и отсутствует сигнал от САНИ.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСАХ ПОДВИЖНЫХ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

Проверка работоспособности разработанных алгоритмов, позволяющих осуществлять контроль целостности навигационного обеспечения, проводилась путем статистического компьютерного моделирования. Рассматривалось два случая: в первом моделировались алгоритмы без использования анализа невязок измерений, во втором случае проводилось сравнение невязок измерений с заданными порогами и оценки находились в соответствии с выражениями (27)–(32).

3.1. Моделирование алгоритмов вертикального канала

Моделирование сигнала $H^{\text{СРНС}}(t_{k+1}), k = 0,1,2...$, на выходе АП радиосигналов СРНС, описываемого выражением (6), проводилось при значениях $R_0 = 6\,371\,110$ м; $H_{\text{ОТН}}(t_k) = 1000$ м, $k = 0,1,2...$; $\sigma_z = 7$ м.

Моделирование сигнала $H_{\text{ОТН}}^{\text{БВ}}(t_{k+1}), k = 0,1,2...$, на выходе БВ, описываемого выражениями (3), (4), осуществлялось при следующих исходных данных: $\Delta H(t_{k+1}) = 7$ м, $k = 0,1,2...$; $T = 0.02$ с; $\gamma_{\text{БВ}} = 10$ с$^{-1}$ и $\sigma_{\text{БВ}} = 1$ м. Предполагалось, что объект движется на высоте, которая превышает радиус-вектор геоцентрической системы координат R на 1000 м.

Моделирование сигнала $a_Z^{\text{ИНС}}(t_{k+1}),\ k = 0,1,2...$, на выходе ИНС, описываемого выражениями (1), (2), осуществлялось при следующих исходных данных: $\alpha_a = 50$ с$^{-1}$; $\sigma_a = 0.03$ м/с^2; $\Delta_{aZ}(t_{k+1}) = 0,2$ м/с^2, $k = 0,1,2....$

Для вычисления оценок вектора состояния $\mathbf{X}_{\text{В}}(t_{k+1})$ использовали выражение (23), для вычисления матрицы оптимальных коэффициентов передачи $\mathbf{K}(t_{k+1})$ – выражение (24). Начальные значения вторых центральных моментов ошибок оценивания компонент вектора состояния вертикального канала брали следующими: $p_{11}(t_0) = 300$ м^2, $p_{22}(t_0) = 20$ м^2/с^2, $p_{33}(t_0) = 625$ м^2, $p_{44}(t_0) = 0.01$ м^2/с^4.

Значение порога $\delta_{\text{В}}$ вычисляли в соответствии с правой частью выражения (25) при значении $\tilde{\gamma} = 9$, значение невязки измерений – в соответствии с выражением (26).

Был рассмотрен случай, когда на 6-й секунде произошло аномальное измерение псевдодальности до одного из НКА рабочего созвездия и значение измеренной высоты на выходе АП по данным СРНС изменилось в виде резкого скачка, став больше высоты по данным БВ на 100 м. Длительность аномальных измерений составила 10 с. Результаты моделирования представлены на рис. 2.

Реализация изменения во времени выходного сигнала $H^{\text{СРНС}}(t_{k+1}),\ k = 0,1,2...$, АП СРНС изображена на рис. 2а, реализации изменения во времени квадрата невязки измерений $\varepsilon_{\text{В2}}^2(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, и порога $\delta_{\text{В}}$ – на рис. 2б.

На рис. 2в представлены реализации изменения во времени оценки относительной высоты объекта $H_{\text{ОТН}}^*(t_{k+1}),\ k = 0,1,2...$, с использованием (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) разработанных алгоритмов.

На рис. 2г представлены реализации изменения во времени оценки вертикальной составляющей скорости объекта $V_Z^*(t_{k+1}),\ k = 0,1,2...$, с использованием (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) разработанных алгоритмов.

На рис. 2д представлены реализации изменения во времени оценки постоянной составляющей ошибки относительной высоты $\Delta H^*(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, БВ с использованием (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) разработанных алгоритмов.

Разработанные алгоритмы позволяют повысить точность оценивания относительной высоты объекта (отклонение оценки от истинного значения уменьшилось со 140 до 8 м), вертикальной составляющей скорости объекта (отклонение оценки от истинного значения уменьшилось с 50 до 2.5 м/с) и постоянной составляющей ошибки относительной высоты (отклонение оценки от истинного значения уменьшилось с 65 до 1.5 м) за счет выявления аномальных измерений выходного сигнала АП СРНС и исключения невязки измерений данного сигнала из алгоритмов обработки.

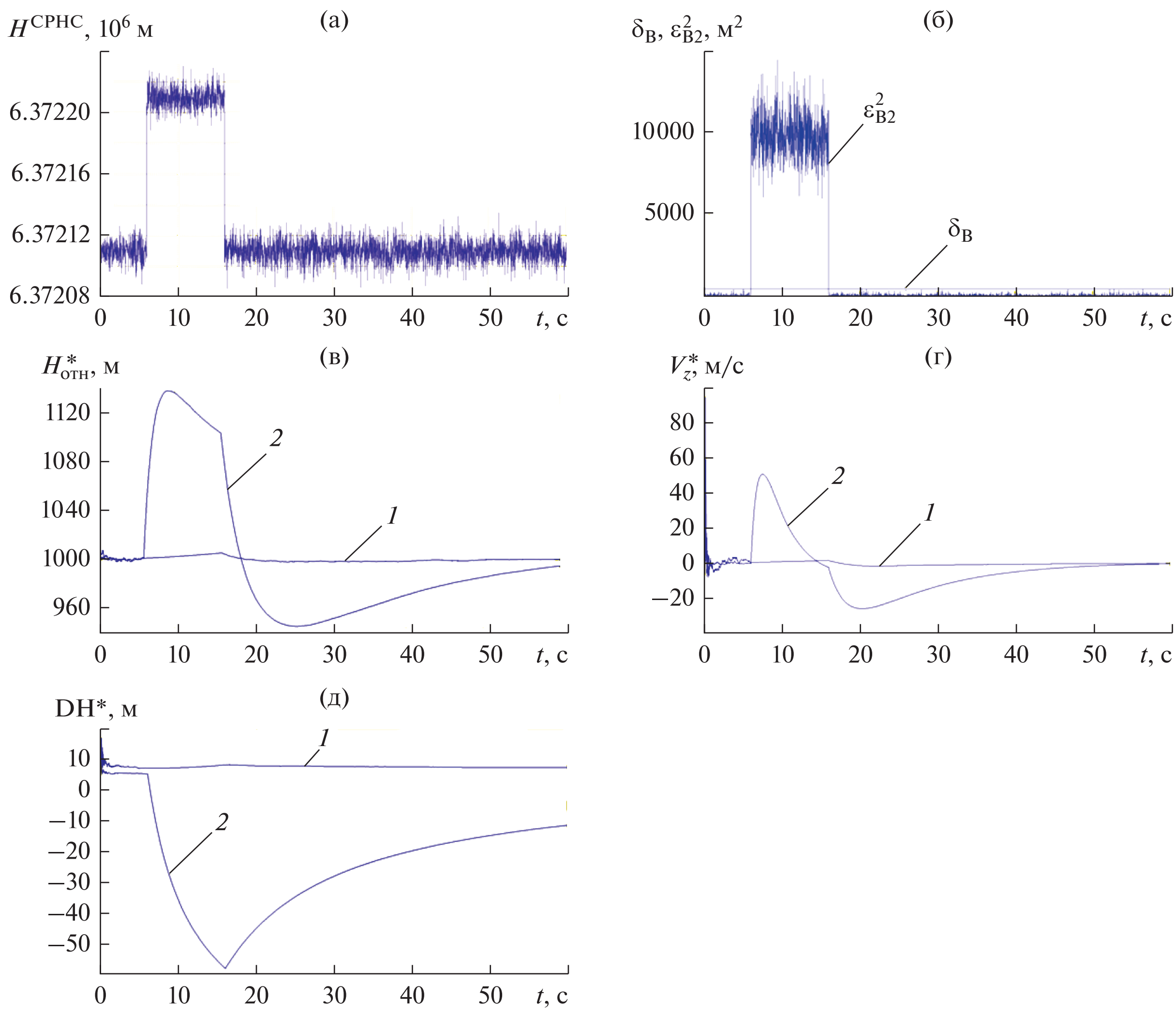

Рис. 2.

3.2. Моделирование алгоритмов горизонтального канала

Моделирование сигналов $x^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2\ldots$, и $y^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2\ldots$, на выходе АП радиосигналов СРНС, описываемых выражением (6), проводилось при значениях $\sigma_x(t_k) = 5$ м, $\sigma_y(t_k) = 5$ м.

Моделирование составляющих вектора скорости объекта $V_X^{\text{ДС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2\ldots$, и $V_Y^{\text{ДС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2\ldots$, на выходе ДС, описываемых выражениями (5), осуществлялось при следующих исходных данных: $\sigma_{Vx} = \sigma_{Vy} = 2$ м/с. Предполагалось, что объект двигается с постоянной скоростью по осям OX_g и OY_g. При этом составляющие вектора скорости имеют значения $V_X(t_{k+1}) = V_Y(t_{k+1}) = 8$ м/с.

Моделирование сигналов $a_X^{\text{ИНС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2\ldots$, и $a_Y^{\text{ИНС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2\ldots$, на выходе ИНС, описываемых выражениями (1) и (2), осуществлялось при следующих исходных данных: $\alpha_a = 50$ с$^{-1}$; $\Delta_{aX}(t_{k+1}) = \Delta_{aY}(t_{k+1}) = 0.2$ м/с^2, $k = 0,1,2\ldots$; $\sigma_a = 0,03$ м/с^2.

Для вычисления оценок вектора состояния $\mathbf{X}_\Gamma(t_{k+1})$ было использовано выражение (18), для вычисления матрицы оптимальных коэффициентов передачи $\mathbf{K}_\Gamma(t_{k+1})$ – выражение (19). Начальные значения вторых центральных моментов ошибок оценивания компонент вектора состояния горизонтального канала брали следующими: $p_{11}(t_0) = 300$ м^2, $p_{22}(t_0) = 300$ м^2, $p_{33}(t_0) = 20$ м^2/с^2, $p_{44}(t_0) = 20$ м^2/с^2, $p_{55}(t_0) = 0.01$ м^2/с^4, $p_{66}(t_0) = 0.01$ м^2/с^4.

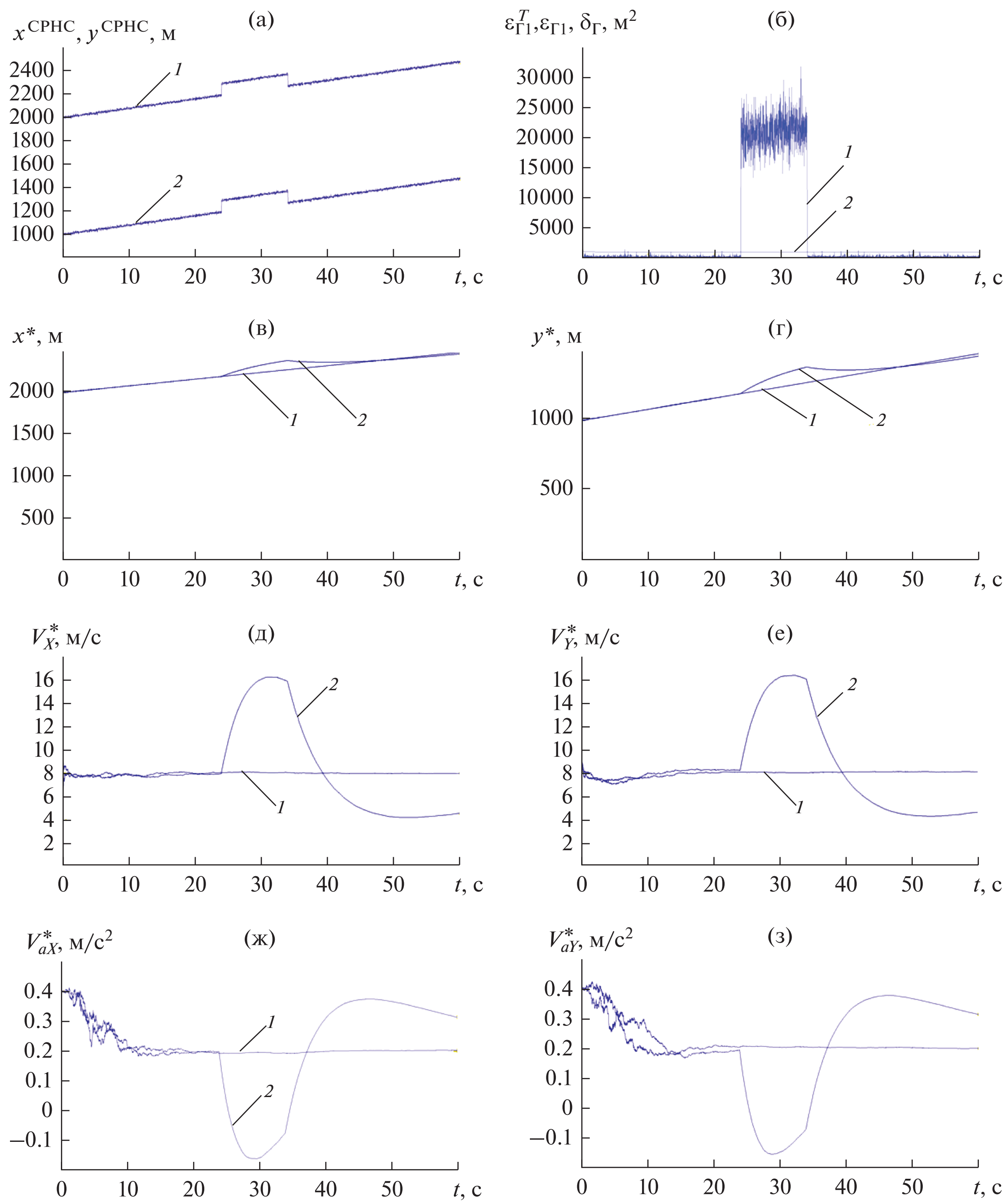

Рис. 3.

Значение порога δ_Γ вычисляли в соответствии с правой частью выражения (22) при значении $\tilde{\gamma} = 9$. Вектор невязок измерений горизонтального канала вычисляли в соответствии с выражением

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma 1}(t_{k+1}) = \boldsymbol{\Xi}_{\Gamma 1}(t_{k+1}) - \mathbf{H}_{\Gamma 1}(t_{k+1})\boldsymbol{\Phi}_{xx\Gamma}(t_{k+1},t_k)\mathbf{X}^*_\Gamma(t_k) - \mathbf{H}_{\Gamma 1}(t_{k+1})\boldsymbol{\Psi}_\Gamma(t_{k+1},t_k)\mathbf{W}_\Gamma(t_k).$$

Был рассмотрен случай, когда на 24-й секунде произошло аномальное измерение псевдодальности до одного из НКА рабочего созвездия и значения измеренных координат по осям OX_g и OY_g на выходе АП по данным СРНС изменились в виде резкого скачка на 100 м. Длительность аномальных измерений составила 10 с. Результаты проведенного моделирования представлены на рис. 3.

На рис. 3а представлены реализации изменения во времени выходных сигналов $x^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$,

$k = 0,1,2...$ (кривая *1*) и $y^{\text{СРНС}}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$ (кривая *2*) аппаратуры приема СРНС.

На рис. 3б представлены реализации изменения во времени случайной величины $\boldsymbol{\varepsilon}^T_{\Gamma 1}(t_{k+1})\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma 1}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$ (кривая *1*), где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma 1}(t_{k+1})$ вектор невязок измерений горизонтального канала, и порога δ_Γ (кривая *2*), соответствующего правой части соотношения (22). Возникновение аномальных измерений сигнала на выходе АП СРНС в измерениях координат объекта по осям OX_g и OY_g (см. рис. 3а) в виде скачков на величину 100 м приводит к резкому изменению величины $\boldsymbol{\varepsilon}^T_{\Gamma 1}(t_{k+1})\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma 1}(t_{k+1})$ и превышению ею величины порога δ_Γ.

На рис. 3в и 3г представлены реализации изменения во времени оценок координат местоположения объекта по оси $OX_g\, x^*(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, и по оси $OY_g\, y^*(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, соответственно, с использованием (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) разработанных алгоритмов.

На рис. 3д и 3е представлены реализации изменения во времени оценок скоростей передвижения объекта по оси $OX_g V^*_X(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, и по оси $OY_g\, V^*_Y(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, соответственно, с использованием (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) разработанных алгоритмов. На рис. 3ж и 3з представлены реализации изменения во времени оценок постоянных составляющих погрешностей измерения ускорения акселерометром по оси $OX_g \Delta^*_{aX}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, и по оси OY_g $\Delta^*_{aY}(t_{k+1})$, $k = 0,1,2...$, соответственно, с использованием (кривая *1*) и без использования (кривая *2*) разработанных алгоритмов.

Анализ зависимостей изменения оценок координат местоположения объекта, оценок скоростей передвижения объекта и оценок постоянных составляющих погрешностей измерений ускорений акселерометрами по осям OX_g и OY_g без использования разработанных алгоритмов (кривая *2*) показывает, что возникновение аномальных измерений сигнала на выходе АП СРНС приводит к их изменению в сторону увеличения. Величины отклонения от истинного значения по осям OX_g и OY_g максимальны к окончанию воздействия аномального измерения и составляют: для координат местоположения объекта порядка 200 м; для скоростей передвижения объекта порядка 8 м/с; для постоянных составляющих погрешностей измерения ускорений акселерометрами порядка 0.35 м/с^2 (кривые *1* на рисунках).

Разработанные алгоритмы позволяют повысить точность оценивания за счет выявления аномальных измерений выходных сигналов АП СРНС и исключения невязок измерений данных сигналов из алгоритмов обработки (кривые *1* на рисунках). Так, например, отклонения оценок скоростей объекта по осям OX_g и OY_g от истинных значений не превышают по абсолютной величине 0.5 м/с, а отклонения оценок постоянныхсоставляющих погрешностей измерений ускорений акселерометрами не превышают по абсолютной величине 0.01 м/с^2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами марковской теории оптимального оценивания случайных процессов синтезированыкомплексные адаптивные алгоритмы обработки информации в НК подвижных наземных объектов на основе СРНС. Синтезированные алгоритмы позволяют по анализу вектора обновляемой последовательности (вектора невязок измерений) выявлять появление аномальных измерений на выходе АП радиосигналов СРНС и исключать их из обработки информации, а также дополнительно осуществлять контроль целостности навигационныхданных СРНС. Проведенное математическое моделирование синтезированных алгоритмов подтвердило их работоспособность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А.В., Иванова Н.А.* Навигация наземных объектов. Saarbrucken: Lambert Acad. Publ., 2013.
2. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
3. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
4. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
5. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
6. *Гришин Ю.П., Ипатов В.П., Казаринов Ю.М. и др.* Радиотехнические системы. М.: Высш. школа, 1990.
7. *Кузовков Н.Т., Салычев О.С.* Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение, 1982.
8. *Иванов А.В.* // Радиотехника.2010. № 12. С. 15.
9. *Бабич О.А.* Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
10. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория. М.: Радио и связь, 1985.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 772–781

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.391.8:519.246.2

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ АДДИТИВНОЙ СМЕСИ БЕЛОГО ГАУССОВСКОГО ШУМА И ЛИНЕЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2021 г. А. Г. Вострецов[a, b, *], С. Г. Филатова[a]

[a]*Новосибирский государственный технический университет, просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073 Российская Федерация*

[b]*Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения РАН, Красный просп., 54, Новосибирск, 630091 Российская Федерация*

**E-mail: vostreczov@corp.nstu.ru*

Поступила в редакцию 18.12.2020 г.
После доработки 08.02.2021 г.
Принята к публикации 19.03.2021 г.

Предложен алгоритм оценки параметров импульсных сигналов неизвестной формы, наблюдаемых на фоне аддитивной смеси белого гауссовского шума и линейной составляющей с неизвестными параметрами. Показано, что предлагаемый подход, основанный на использовании метода контраста, метода моментов и свойств полных достаточных статистик, обеспечивает эффективность оценок и не требует априорной информации о форме, временном положении, длительности и амплитуде импульсного сигнала, а также о параметрах фоновой составляющей. Проведено сравнение с алгоритмами, рассчитанными на известную форму сигнала.

DOI: 10.31857/S003384942108009X

ВВЕДЕНИЕ

Проблема оценки параметров импульсных сигналов, наблюдаемых на фоне аддитивных помех, является важной задачей, вызывающей большой интерес специалистов по обработке сигналов, включая радио- и гидролокацию, мобильную связь, беспроводные сенсорные сети и др. К ключевым задачам, связанным с современными цифровыми информационными системами, относятся обеспечение высокой эффективности обработки оцифрованных сигналов, повышение скорости обработки и обеспечение возможности автоматической адаптации к условиям эксперимента. Задача оценки параметров импульсных сигналов заданной формы, наблюдаемых на фоне аддитивного белого гауссовского шума, стала классической и имеет множество применений, таких как радиотехнические системы, включая радиолокацию и радионавигацию [1–3], связь [4], медицина [5], оценка местоположения источника сигнала (например, излучающего радио-, акустические или оптические сигналы) и т.п. [6].

Существует множество практических приложений, требующих оценки параметров импульсного сигнала неизвестной формы и длительности, регистрируемого на фоне шума с неизвестными характеристиками. Такие задачи рассматривались, например, в работах [7, 8], посвященных исследованию источников помех в прецизионных, в том числе криогенных, измерительных системах. Работа [9] посвящена измерению времени прихода импульса артериального давления при оценке кардиоваскулярного риска. В работах [10, 11] предложены алгоритмы оценки параметров импульсных сейсмических сигналов в распределенных системах охраны протяженных периметров. При оценке параметров сигналов в рассмотренных работах авторы, как правило, используют модель аддитивного белого гауссовского шума, аппроксимацию сигнала известной функцией и стандартные методы оценки (байесовский, максимального правдоподобия и т.п.). Здесь качество оценки во многом определяется точностью аппроксимации сигнала и адекватностью применяемой модели аддитивного белого шума.

Существуют задачи обнаружения и оценки сигналов, форма которых априори полностью не известна (обнаружение несанкционированных источников излучения, сейсмолокация и др.). Кроме того, при прецизионных низкочастотных измерениях существенное влияние на качество оценок оказывают фликкер-шум и низкочастотные электромагнитные наводки, параметры которых трудно предсказать на каждом конкретном интервале измерений. При достаточно коротких интервалах наблюдения временная реализация фликкер-шума или низкочастотной наводки хорошо аппроксимируется линейной функцией. Все это делает рассматриваемую в данной работе задачу разработки алгоритмов оценки параметров импульсных сигналов неизвестной формы, наблюдаемых на фоне аддитивной смеси белого гауссовского шума и линейной составляющей с неизвестными параметрами, актуальной.

Целью данной работы является синтез алгоритмов оценки параметров фоновой составляющей, энергетического параметра, временного положения и длительности импульсных сигналов неизвестной формы, наблюдаемых на фоне аддитивной смеси белого гауссовского шума и линейной составляющей с неизвестными параметрами, а также исследование характеристик алгоритмов методами имитационного моделирования.

1. МОДЕЛЬ НАБЛЮДАЕМОГО ПРОЦЕССА

В качестве модели наблюдаемого на временном интервале T_x процесса $x(t)$ примем аддитивную смесь полезного сигнала $s(t)$ и фоновой составляющей $\eta(t)$: $x(t) = s(t) + \eta(t)$, при этом сигнал $s(t)$ имеет конечную длительность τ_0 и полностью находится в пределах интервала наблюдения T_x, т.е. $\tau_0 \le T_x$.

Характер фона во многом зависит от конкретного приложения. Например, в прецизионных системах низкочастотных измерений существенную роль играет фликкер-шум и электромагнитные наводки. В том случае, когда интервал наблюдения много меньше времени корреляции фликкер-шума или периода электромагнитной наводки, текущую реализацию фона можно представить в виде суммы квазидетерминированной линейной составляющей $g(t) = a_0 + a_1 t$ с неизвестными параметрами a_0, a_1 и белого гауссовского шума $\xi(t)$ с нулевым средним и неизвестной спектральной плотностью: $\eta(t) = a_0 + a_1 t + \xi(t)$.

Таким образом, наблюдаемый процесс в общем случае будет иметь вид

$$x(t) = s(t) + a_0 + a_1 t + \xi(t). \tag{1}$$

Сигнал $s(t)$, наблюдаемый на интервале T_x, характеризуется энергией, временным положением и длительностью. Введем понятие текущей энергии сигнала $E(t)$, накопленной в интервале наблюдения T_x к текущему моменту времени t:

$$E(t) = \int_0^t s^2(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Тогда полная энергия полезного сигнала на интервале T_x определится как

$$E_s = E(T_x) = \int_0^{T_x} s^2(t)dt,$$

а распределение накопленной на интервале T_x энергии сигнала будет определяться функциями нормированных текущей энергии

$$e(t) = E(t)/E_s = \int_0^t s^2(\tau)d\tau \Big/ \int_0^{T_x} s^2(\tau)d\tau$$

и “плотности” распределения энергии

$$p_e(t) = \frac{de(t)}{dt} = s^2(t) \Big/ \int_0^{T_x} s^2(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим теперь понятия временного положения и длительности сигнала. В литературе имеются различные подходы к их определению. Одним из них является “энергетический” подход, при котором временное положение сигнала $\overline{t}$ определяется как координата центра тяжести текущей энергии сигнала на интервале наблюдения T_x:

$$\overline{t} = \int_0^{T_x} t p_e(t)dt = \int_0^{T_x} t s^2(t)dt \Big/ \int_0^{T_x} s^2(t)dt.$$

Аналогично при энергетическом подходе за длительность сигнала принимают эффективную длительность – среднеквадратическое отклонение от координаты центра тяжести:

$$\tau_e = \sqrt{\int_0^{T_x} \left(t - \overline{t}\right)^2 p_e(t)dt}.$$

Альтернативным способом оценки временных параметров сигнала является подход, предложенный авторами в работе [12], также основанный на энергетических свойствах сигнала. За положение T_0 сигнала на оси времени принимается медиана распределения накопленной энергии на интервале T_x, т.е. решение уравнения $e(T_0) = L_0 = 1/2$, а длительность сигнала определяется длительностью интервала $\tau = T_2 - T_1$, в течение которого энергия сигнала возрастет от $E_{T_1} = L_1 E_s$ до $E_{T_2} = L_2 E_s$, где L_1, L_2 – относительные пороговые уровни текущей энергии, T_1, T_2 – моменты времени, в которые происходит пересечение соответствующего порогового уровня. Эти определения временного положения и длительности сигнала используются в данной работе.

На рис. 1а приведены три импульсных сигнала: прямоугольный, двойной экспоненциальный и косинус-квадрат с гармоническим заполнением. Все импульсы имеют одинаковые энергии $E_s = 1$ и длительность по основанию τ_0. На рис. 1б при-

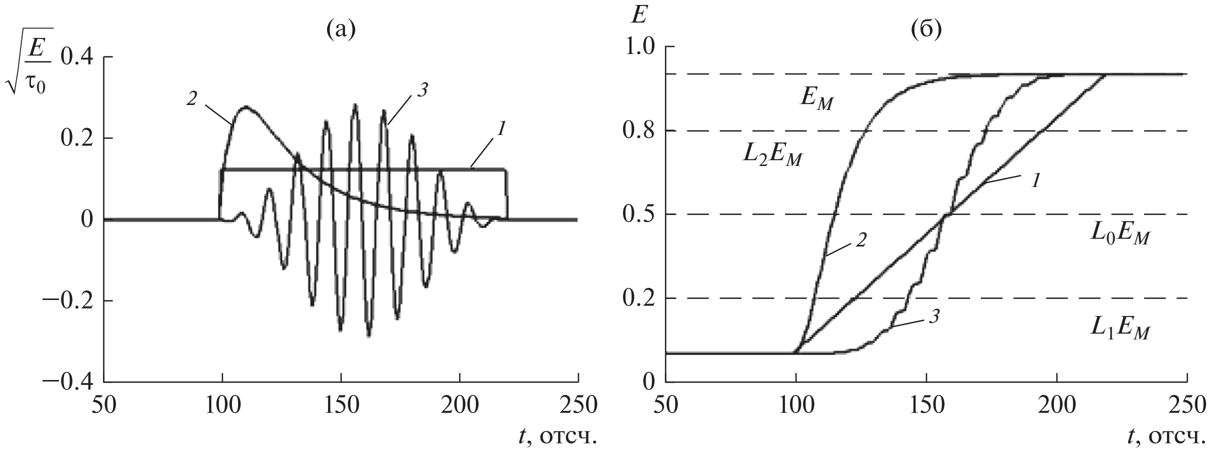

Рис. 1. Временные диаграммы сигналов и их текущей энергии: а – импульсные сигналы, б – зависимости текущей энергии от времени; *1* – прямоугольный импульс, *2* – двойной экспоненциальный импульс, *3* – косинус-квадрат импульс с гармоническим заполнением.

ведены графики зависимости текущей энергии от времени для этих же импульсов (сплошные линии) и пороговые значения энергии (пунктир). Относительные пороговые значения энергии приняты равными $L_0 = 0.5$, $L_1 = 0.2$ и $L_2 = 0.8$.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА И ФОНОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

В качестве исходных данных для синтеза алгоритмов оценки параметров фоновой составляющей, энергетического параметра и параметров временного положения и длительности импульсных сигналов примем M-мерный выборочный вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_M\}^T$, составленный из статистически независимых отсчетов наблюдаемого процесса (1), взятых в моменты времени $k\Delta t$, $k = 1, ..., M$, где Δt – шаг дискретизации, $M\Delta t = T_x$, $\{\cdot\}^T$ означает транспонирование. Вектор $\vec{x}$ в общем случае представляет собой сумму векторов полезного сигнала $\vec{s} = \{s_1, s_2, ..., s_M\}^T$, линейной составляющей фона

$$\vec{g} = \{a_0 + a_1\Delta t, a_0 + 2a_1\Delta t, ..., a_0 + Ma_1\Delta t\}^T$$

и шума $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_M\}^T$:

$$\vec{x} = \vec{s} + \vec{g} + \vec{\xi}. \tag{3}$$

Компоненты вектора $\vec{s}$, параметры a_0 и a_1 вектора $\vec{g}$ являются априорно неопределенными детерминированными величинами, а компоненты вектора $\vec{\xi}$ – статистически независимыми гауссовскими величинами с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией σ^2.

Поскольку исходными данными для синтеза алгоритма является дискретная выборка из наблюдаемого процесса, то вместо выражения (2) будем пользоваться его дискретным аналогом:

$$E_m = \sum_{k=1}^{m} s_k^2 \Delta t \approx E(m\Delta t). \tag{4}$$

Очевидно, что полная энергия сигнала на интервале наблюдения T_x, подлежащая оценке, равна E_M.

Плотность распределения вероятностей вектора $\vec{x}$ имеет следующий вид:

$$w(\vec{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^M \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{M}\left(x_k - a_0 - a_1 k\Delta t - s_k\right)^2\right\}. \tag{5}$$

Если дисперсия шумовой составляющей фона σ^2, параметры a_0, a_1 и форма сигнала неизвестны, то число неизвестных параметров распределения (5) на 3 больше числа отсчетов M наблюдаемого процесса к моменту времени M, поэтому необходима дополнительная информация о характеристиках наблюдаемого процесса. Поскольку форма сигнала по условию является неизвестной, то единственной возможностью получения дополнительной информации является расширение интервала наблюдения за счет включения в него участка T_y, заведомо содержащего только фоновый процесс. Воспользуемся методом контраста, известным из теории обнаружения сигналов [13]. Указанный метод состоит в том, что на интервале времени $T_y = N\Delta t$, в котором заведомо отсутствует полезный сигнал, формируется "фоновый" выборочный вектор $\vec{y} = \{y_1, y_2, ..., y_N\}^T$, а затем на интервале T_x – выборочный вектор $\vec{x}$, содержащий отсчеты полезного сигнала и фоновой составляющей. Будем полагать, что интервалы T_y и T_x следуют непосредственно друг за другом.

Совместное распределение вероятностей выборочных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеет следующий вид:

$$w(\vec{x},\vec{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{N+M} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{n=1}^{N}(y_n - a_0 - a_1 n\Delta t)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{k=1}^{M}\left[x_k - a_0 - a_1(N+k)\Delta t - s_k\right]^2\right]\right\}. \tag{6}$$

Для удобства синтеза алгоритма оценки параметров сигнала и фона представим выражение (6) в следующем виде:

$$w(\vec{y},\vec{x}) = C\left(\vec{s}, a_0, a_1, \sigma^2\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{n=1}^{N} y_n^2 + \sum_{k=1}^{M} x_k^2\right) + \right. \\ + \frac{a_0}{\sigma^2}\left(\sum_{n=1}^{N} y_n + \sum_{k=1}^{M} x_k\right) + \\ \left. + \frac{a_1\Delta t}{\sigma^2}\left[\sum_{n=1}^{N} n y_n + \sum_{k=1}^{M}(N+k)x_k\right] + \sum_{k=1}^{M}\frac{s_k}{\sigma^2}x_k\right\}, \tag{7}$$

где

$$C\left(\vec{s}, a_0, a_1, \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{N+M} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=1}^{M} s_k^2 + (N+M)a_0^2\right] - \right. \\ - \frac{a_1^2\Delta t^2}{2\sigma^2}\left[\sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{k=1}^{M}(N+k)^2\right] - \\ - \frac{a_0 a_1 \Delta t}{\sigma^2}\left[\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{k=1}^{M}(N+k)\right] - \\ \left. - \frac{a_0}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{M} s_k - \frac{a_1\Delta t}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{M}(N+k)s_k\right\}$$

– нормирующий множитель.

Полученное распределение принадлежит экспоненциальному семейству, характеризуется $(M + 3)$ параметрами с достаточными статистиками:

для параметра $-1/(2\sigma^2)$ –

$$Z_0 = \sum_{n=1}^{N} y_n^2 + \sum_{k=1}^{M} x_k^2,$$

для параметра a_0/σ^2 –

$$Y_0 = \sum_{n=1}^{N} y_n + \sum_{k=1}^{M} x_k,$$

для параметра $a_1\Delta t/\sigma^2$ –

$$Y_1 = \sum_{n=1}^{N} n y_n + \sum_{k=1}^{M}(N+k)x_k$$

и $Z_k = x_k$ для параметров s_k/σ^2, $k = 1, \ldots, M$. При неизвестных σ^2, a_0, a_1, s_1, ..., s_M вектор параметров

$$\vec{\theta} = \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{a_0}{\sigma^2}, \frac{a_1\Delta t}{\sigma^2}, \frac{s_1}{\sigma^2}, \ldots, \frac{s_M}{\sigma^2}\right\}^T$$

принимает значения из области $(-\infty, 0) \times (-\infty, \infty) \times \times (-\infty, \infty) \times \ldots \times (-\infty, \infty)$, т.е. содержит $(M + 3)$-мерный интервал, поэтому достаточные статистики являются полными [14].

Для оценки дисперсии шума σ^2, параметров линейной составляющей a_0, a_1 и текущей энергии сигнального импульса E_m воспользуемся методом, аналогичным методу моментов. Классический метод моментов предполагает выражение моментов распределения вероятностей наблюдаемых данных нескольких порядков через искомые параметры и отыскание последних решением полученной системы уравнений. Затем истинные моменты заменяются выборочными, и при больших объемах выборки полученная оценка стремится к истинному значению. В нашем случае для составления системы уравнений будем использовать выражения для начальных моментов первого и второго порядка полных достаточных статистик. В полученном решении истинные моменты заменим значениями полных достаточных статистик в соответствующей степени. Полученные таким образом оценки будут зависеть от исходной выборки только через полные достаточные статистики. Особенность оценок, зависящих от полных достаточных статистик, состоит в том, что если искомый параметр представляет собой линейную комбинацию моментов полных достаточных статистик произвольного порядка, то полученная оценка будет эффективной (несмещенной и с минимальным значением квадратичной функции потерь) [13], причем эта оценка будет существенно единственной [16]. Если же зависимость оценки от полных достаточных статистик нелинейная, то полученная оценка может иметь смещение, однако и в этом случае она будет минимизировать квадратичную функцию потерь в классе K_b оценок, имеющих смещение b, и будет существенно единственной [17].

Получим выражения для следующих начальных моментов полных достаточных статистик:

$$\mathbf{M}\{Z_0\} = \sigma^2(M+N) + a_0^2(M+N) + \\ + a_1^2\Delta t^2 \frac{(2M+2N+1)(M+N+1)(M+N)}{6} + \\ + a_0a_1\Delta t(M+N)(M+N+1) + 2a_0\sum_{k=1}^{M} s_k + 2a_1\Delta t\sum_{k=1}^{M}\left[(N+k)s_k\right] + \sum_{k=1}^{M} s_k^2; \tag{8}$$

$$\mathbf{M}\{Y_0\} = a_0(M+N) + a_1\Delta t\frac{(M+N)(M+N+1)}{2} + \sum_{k=1}^{M} s_k; \tag{9}$$

$$\mathbf{M}\{Y_1\} = a_0\frac{(M+N)(M+N+1)}{2} + \\ + a_1\Delta t\frac{(M+N)(M+N+1)(2M+2N+1)}{6} + \sum_{k=1}^{M}\left[(N+k)s_k\right]; \tag{10}$$

$$\mathbf{M}\{Z_k\} = a_0 + a_1\Delta t(N+k) + s_k,\ \ k = 1,\ldots,M; \tag{11}$$

$$\mathbf{M}\left\{Z_k^2\right\} = \sigma^2 + a_0^2 + s_k^2 + a_1^2\Delta t^2(N+k)^2 + 2a_0a_1\Delta t(N+k) + 2a_1\Delta t s_k(N+k) + 2a_0s_k, \\ k = 1,\ldots,M. \tag{12}$$

В выражениях (8)–(12) $\mathbf{M}\{\cdot\}$ означает вычисление математического ожидания.

Решая систему уравнений (8)–(12) относительно σ^2, a_0, a_1, $\sum_{k=1}^{M} s_k^2$, получим

$$a_0 = \frac{2(2N+1)\mathbf{M}\{Y_0\} - 6\mathbf{M}\{Y_1\} + 2\sum_{k=1}^{M}\left[(N+3k-1)\mathbf{M}\{Z_k\}\right]}{N(N-1)}; \tag{13}$$

$$a_1 = \frac{12\mathbf{M}\{Y_1\} - 6(N+1)\mathbf{M}\{Y_0\} - 6\sum_{k=1}^{M}\left[(N+2k-1)\mathbf{M}\{Z_k\}\right]}{N(N^2-1)\Delta t}; \tag{14}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6N}\Big[6\mathbf{M}\{Z_0\} - 6Na_0^2 - a_1^2\Delta t^2N(2N^2+3N+1) - \\ - 6Na_0a_1\Delta t(N+1) - 6\sum_{k=1}^{M}\mathbf{M}\left\{Z_k^2\right\}\Big]; \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{M} s_k^2 = \Big[\sum_{k=1}^{M}\mathbf{M}\left\{Z_k^2\right\} + a_0^2(2N+M) - \\ - M\sigma^2 - 2a_0\mathbf{M}\{Y_0\} + a_0a_1\Delta t \times \\ \times\left[M^2 + 2MN + M + 2N^2 + 2N\right] - \\ - 2a_1\Delta t\mathbf{M}\{Y_1\} + a_1^2\Delta t^2 \times \\ \times\frac{(M+2N+1)(2M^2+2MN+M+2N^2+2N)}{6}\Big]. \tag{16}$$

Заменяя в выражениях (13)–(16) моменты $\mathbf{M}\{\cdot\}$ полными достаточными статистиками, получим выражения для оценок интересующих параметров:

$$\hat{a}_0 = \frac{2(2N+1)Y_0 - 6Y_1 + 2\sum_{k=1}^{M}\left[(N+3k-1)Z_k\right]}{N(N-1)}; \tag{17}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{12Y_1 - 6(N+1)Y_0 - 6\sum_{k=1}^{M}\left[(N+2k-1)Z_k\right]}{N(N^2-1)\Delta t}; \tag{18}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{6N}\Big[6Z_0 - 6N\hat{a}_0^2 - \hat{a}_1^2\Delta t^2N(2N^2+3N+1) - \\ - 6N\hat{a}_0\hat{a}_1\Delta t(N+1) - 6\sum_{k=1}^{M}Z_k^2\Big]; \tag{19}$$

$$\hat{E}_M = \left(\sum_{k=1}^{M} s_k^2\right)\Delta t = \\ = \Big[\sum_{k=1}^{M}Z_k^2 + \hat{a}_0^2(2N+M) - M\sigma^2 - 2\hat{a}_0Y_0 + \\ + \hat{a}_0\hat{a}_1\Delta t\left[M^2 + 2MN + M + 2N^2 + 2N\right] - \\ - 2\hat{a}_1\Delta tY_1 + \hat{a}_1^2\Delta t^2 \times \\ \times\frac{(M+2N+1)(2M^2+2MN+M+2N^2+2N)}{6}\Big]\Delta t. \tag{20}$$

Для получения оценки текущей энергии $\hat{E}_m$ в выражении (20) следует заменить M на m. В принципе, в выражении (20) в силу случайного характера компонентов выборочных векторов может получиться отрицательное значение энергии, особенно при малых объемах выборки, как это имеет место на начальном этапе оценивания текущей энергии $\hat{E}_m$. В этом случае следует принять $\hat{E}_m = 0$.

Окончательные выражения полученных оценок нетрудно получить, заменив $Y_0, Y_1, Z_0, Z_1, \ldots, Z_M$ их значениями. Приведем окончательные выражения для оценок параметров фоновой составляющей:

$$\hat{a}_0 = \frac{2\sum_{n=1}^{N}(2N+1-3n)\,y_n}{N(N-1)}; \tag{21}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{6\sum_{n=1}^{N}(2n-N-1)\,y_n}{N(N-1)(N+1)\Delta t}; \tag{22}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\left\{N(N-1)(N+1)\sum_{n=1}^{N} y_n^2 + 12(N+1)\left[\sum_{n=1}^{N}(ny_n)\right]\left(\sum_{n=1}^{N} y_n\right) - 2(2N^2+3N+1)\left(\sum_{n=1}^{N} y_n\right)^2 - 12\left[\sum_{n=1}^{N}(ny_i)\right]^2\right\}}{N^2(N-1)(N+1)}. \tag{23}$$

Из выражений (21)–(23) видно, что параметры фона оцениваются только по фоновой выборке на интервале T_y. На интервале T_x выделить фоновую составляющую не представляется возможным, так как ни уровень, ни форма сигнала, ни его длительность и положение на временной оси неизвестны.

Оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ – несмещенные и эффективные, так как они являются линейными комбинациями полных достаточных статистик. Оценки $\widehat{\sigma^2}$ и $\hat{E}_m$ представляют собой нелинейные функции полных достаточных статистик, поэтому требуют отдельного исследования на несмещенность.

Для оценки временного положения T_0 и длительности τ сигнала выберем моменты времени, когда оценка текущей энергии $\hat{E}_m$ достигает значений $E_{T_0} = L_0\hat{E}_M$, $E_{T_1} = L_1\hat{E}_M$ и $E_{T_2} = L_2\hat{E}_M$. Соответствующие моменты времени $\hat{T}_0$, $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ будут оценками временного положения, начала и окончания сигнала, а величина $\hat{\tau} = \hat{T}_2 - \hat{T}_1$ – оценкой его длительности.

3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ

Как уже отмечалось, оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ являются несмещенными, их дисперсии $\sigma^2_{\hat{a}_0}$ и $\sigma^2_{\hat{a}_1}$ легко вычисляются аналитически:

$$\mathbf{D}(\hat{a}_0) = \sigma^2_{\hat{a}_0} = \frac{2(2N+1)}{N(N-1)}\sigma^2; \tag{24}$$

$$\mathbf{D}(\hat{a}_1) = \sigma^2_{\hat{a}_1} = \frac{12}{N(N+1)(N-1)(\Delta t)^2}\sigma^2, \tag{25}$$

где $\mathbf{D}(\cdot)$ означает вычисление дисперсии, σ^2 – дисперсия гауссовского шума.

Анализ эффективности оценок оставшихся параметров выполнялся методом статистических испытаний на ЭВМ по 10000 экспериментов. Для этого на интервалах T_y и T_x в соответствии с формулой (3) моделировались выборочные векторы $\vec{y}$ и $\vec{x}$ размерностью соответственно N и M при следующих значениях параметров: $\sigma^2 = 1$, $a_0 = -2\sigma$, $a_1 = 10^{-3}\sigma/\Delta t$, $\Delta t = 1$. В качестве сигналов использовались рассмотренные ранее прямоугольный, двойной экспоненциальный и косинус-квадрат с гармоническим заполнением импульсы (см. рис. 1) одинаковой длительности по основанию $\tau_0 = 120$ отсчетов. Энергия сигналов принималась одинаковой, и ее значение зависело от задаваемого отношения сигнал/шум (ОСШ) $q^2 = E_M/(\tau_0\sigma^2)$.

На рис. 2 показаны полученные в результате моделирования зависимости относительного среднеквадратического отклонения (СКО) оценки

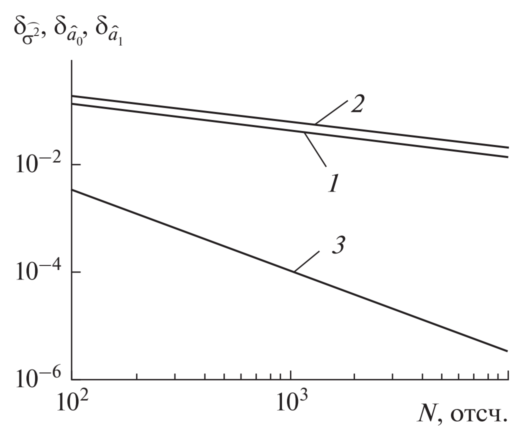

Рис. 2. Зависимость относительных СКО оценок дисперсии $\delta_{\widehat{\sigma^2}}$ (*1*) гауссовского шума и оценок коэффициентов линейной составляющей фона $\delta_{\hat{a}_0}$ (*2*) и $\delta_{\hat{a}_1}$ (*3*) от объема шумовой выборки N.

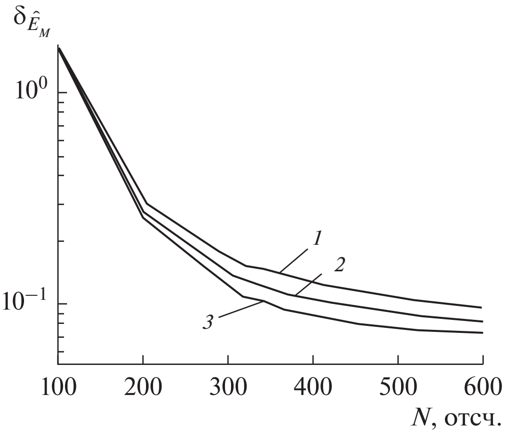

Рис. 3. Зависимость относительного СКО оценки энергии $\delta_{\hat{E}_M}$ от объема шумовой выборки (а) и ОСШ (б): *1* – прямоугольный импульс, *2* – двойной экспоненциальный импульс, *3* – косинус-квадрат импульс с гармоническим заполнением.

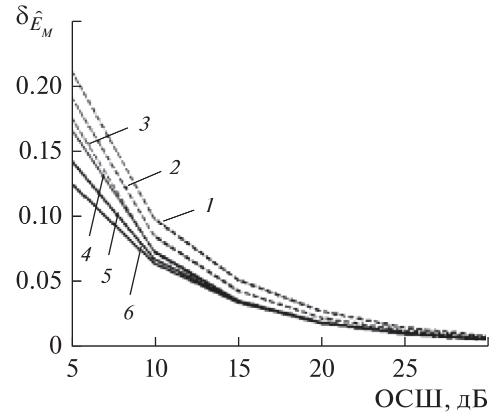

Рис. 4. Зависимость относительного СКО оценки энергии $\delta_{\hat{E}_M}$ от ОСШ при $\tau_0 = 120$: $N = 600$ (*1–3*), 5000 (*4–6*), $M = 1000$ (*1*, *4*), 600 (*2*, *5*) и 300 (*3*, *6*).

$\widehat{\sigma^2}$ дисперсии гауссовского шума ($\delta_{\widehat{\sigma^2}}$, кривая *1*), оценок коэффициентов линейной составляющей фона $\hat{a}_0$ ($\delta_{\hat{a}_0}$, кривая *2*) и $\hat{a}_1$ ($\delta_{\hat{a}_1}$, кривая *3*) от объема шумовой выборки. Нормировка производилась для оценки $\widehat{\sigma^2}$ – к дисперсии гауссовского шума σ^2, для оценки $\hat{a}_0$ – к среднеквадратическому значению σ, для $\hat{a}_1$ – к параметру $\sigma/\Delta t$.

Как уже отмечалось, оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ являются несмещенными. Их характеристики, полученные в результате моделирования, хорошо совпали с результатами аналитических расчетов. Оценка $\widehat{\sigma^2}$ также является практически несмещенной, величина смещения по результатам моделирования оказалась более чем на порядок меньше СКО оценки.

На рис. 3 приведены зависимости относительного СКО $\delta_{\hat{E}_M}$ оценки энергии сигналов трех типов от объема шумовой выборки N при фиксированном ОСШ, равном 10 дБ, объеме сигнальной выборки $M = 600$ и длительности сигнала $\tau_0 = 120$ отсчетов. Нормировка производилась к истинной энергии импульса E_M. При объеме шумовой выборки $N < 200$ относительное СКО оценки энергии становится больше 0.3, практически не зависит от формы сигнала и определяется в основном только объемом выборки. При больших объемах шумовой выборки различие в относительных СКО оценки энергии для рассматриваемых сигналов не превышало 0.01.

На рис. 4 представлены зависимости относительного СКО $\delta_{\hat{E}_M}$ оценки энергии сигналов трех типов от ОСШ при фиксированных длительности сигнала $\tau_0 = 120$ отсчетов и объемах шумовой выборки $N = 600$ и 5000. Объем сигнальной выборки $M = 1000$, 600 и 300. Видно, что при малых ОСШ СКО оценки зависит от формы импульса, соотношения длительности импульса и длины временного интервала, на котором формировалась сигнальная выборка, а также от объема шумовой выборки. Чем меньше доля импульса в сигнальном интервале и чем меньше шумовая выборка, тем менее точными получаются оценки. При больших отношениях сигнал/шум и рассматриваемых объемах выборки эта разница для рассматриваемых трех сигналов становится незначительной.

На рис. 5а–5в приведены зависимости относительных СКО $\delta_{\hat{T}}$ оценок временного положения точек пересечения текущей энергией сигнала соответствующих пороговых уровней от величины этих порогов для трех типов сигналов: прямоугольный импульс, двойной экспоненциальный импульс и косинус-квадрат импульс с гармоническим заполнением. Значения СКО получены при ОСШ = 5, 10 и 15 дБ. Длительность сигнала $\tau_0 = 120$ отсчетов и объем шумовой выборки $N = 5000$ оставались неизменными, объемы сигнальных выборок принимались равными $M = 300$, 600 и 1000. Нормировка осуществлялась к длительности импульса.

Из рисунка видно, что оценка временного положения существенно зависит от формы импульсов, при этом наименьшая ошибка оценки времени пересечения порога наблюдается на участках сигнала, имеющих наибольшую крутизну. Поэтому, если это возможно, значения порогов L_1, L_2, используемых при оценке длительности сигнала, следует выбирать таким образом, чтобы крутизна кривой текущей энергии в окрестности уровней $E_{T_1} = L_1 E_M$ и $E_{T_2} = L_2 E_M$ была максимальной. При

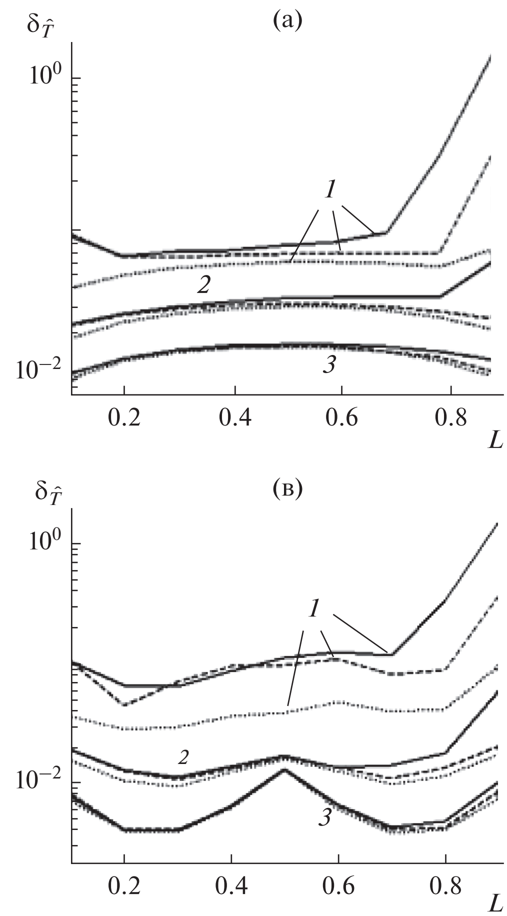

Рис. 5. Зависимость относительного СКО оценки $\delta_{\hat{T}}$ временного положения точки пересечения порогового уровня от величины порога: а – прямоугольный импульс, б – двойной экспоненциальный импульс, в – косинус-квадрат импульс с гармоническим заполнением; ОСШ = 5 (*1*), 10 (*2*), 15 (*3*), $M = 1000$ (сплошные кривые), 600 (штриховые) и 300 (пунктирные).

ОСШ более 10 дБ для прямоугольного импульса эти значения находятся в диапазоне 0.1...0.3 и 0.7...0.9, а для косинус-квадрат импульса с гармоническим заполнением оптимальными являются пороги в диапазоне 0.2...0.4 и 0.6...0.8. При малых ОСШ (5 дБ) при пороговых уровнях больше $0.7E_M$ алгоритм становится неработоспособным, ошибки превышают 0.2 и только в случае, когда сигнал занимает не менее 40% от длительности сигнального интервала, относительное СКО не превышает 0.1.

Влияние объема шумовой выборки на точность оценки временного положения точки пересечения порогового уровня показано в табл. 1.

Видно, что размер шумовой выборки существенно влияет на точность оценки при малых ОСШ, а также при больших пороговых уровнях, что имеет особое значение при оценке длительности импульса. При ОСШ = 5 дБ относительные СКО различаются при пороге 0.9 на 70...100%, при пороге 0.8 – на 20...40%, при пороге меньше 0.7 – меньше чем на 10%. Но уже при ОСШ 10 дБ объем шумовой выборки существенен только для порога 0.9. Таким образом, если при построении алгоритма оценки временного положения не представляется возможным использовать достаточно объемную шумовую выборку для оценки параметров шума, то следует выбрать пороги, не превышающие 0.7.

Для сравнения приведем характеристики алгоритмов, предложенных в работе [18] для оценки временного положения прямоугольного импульса с известной длительностью и полностью известным статистическим описанием наблюдаемых данных и в работе [19] – для импульса известной формы, наблюдаемого на фоне гауссовского шума с неизвестными параметрами. По данным работы [18], при ОСШ = 10 дБ относительное СКО оценки временного положения прямоугольного импульса составляет величину 0.425%. Это значительно меньше значения, полученного предложенным методом (1.4%), однако требует полной информа-

Таблица 1. Относительные СКО $\delta_{\hat{T}}$ оценок временных положений точек пересечения текущей энергией импульса пороговых уровней от величины порога (%)

N, отсч.	Пороговый уровень L	ОСШ, дБ			
		5	10	15	20
Прямоугольный импульс					
600	0.7	12.8	3.7	1.7	0.9
	0.8	31.6	3.7	1.6	0.8
	0.9	95.0	11.1	1.4	0.7
5000	0.7	6.9	3.1	1.6	0.9
	0.8	7.1	2.9	1.4	0.8
	0.9	31.7	2.6	1.2	0.6
Двойной экспоненциальный импульс					
600	0.7	9.5	1.5	0.7	0.4
	0.8	39.5	2.3	1	0.5
	0.9	117.4	15.3	1.7	0.8
5000	0.7	2.5	1.1	0.6	0.4
	0.8	3.6	1.4	0.7	0.4
	0.9	16.5	2.5	1.1	0.6
Косинус-квадрат импульс с гармоническим заполнением					
600	0.7	6.7	1.5	0.4	0.2
	0.8	29	2	0.5	0.2
	0.9	101	10.2	1.3	0.4
5000	0.7	8.3	1.1	0.4	0.2
	0.8	9.1	1.4	0.4	0.2
	0.9	37.3	2.1	0.9	0.4

ции о форме сигнала и шуме. При неизвестных параметрах шума, но известной форме сигнала [19] СКО оценок временного положения имеют тот же порядок (2...8%), что и приведенные в табл. 1. Существенным преимуществом предлагаемого метода является то, что он допускает присутствие линейно изменяющейся помехи в фоновой составляющей наблюдаемого процесса и не требует априорной информации ни о параметрах фона, ни о параметрах и форме импульсного сигнала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена проблема оценки параметров импульсных сигналов неизвестной формы и временного положения, наблюдаемых на фоне аддитивной смеси белого гауссовского шума и линейной составляющей с неизвестными параметрами. Данная проблема особенно актуальна для пассивной локации источников неизвестных сигналов. С использованием метода контраста и свойств полных достаточных статистик получены оценки энергии сигнала и параметров фоновой составляющей. Использование метода контраста обеспечивает автоматическую подстройку алгоритма под параметры фоновой составляющей, а использование полных достаточных статистик гарантирует минимизацию квадратичной функции потерь для полученных оценок. Для оценки временного положения и длительности импульса предложено использовать статистики времен пересечения оценкой текущей энергии импульса пороговых значений.

Результаты расчетов и моделирования показали, что полученные оценки параметров линейной составляющей фона строго несмещенные, оценки дисперсии шума, энергии сигнала и его временных параметров имеют смещение почти на порядок меньше значений СКО. Предложенный алгоритм оценивания обеспечивает достаточную для большого числа практических приложений точность, соизмеримую с точностью известных, разработанных для оценки параметров сигналов заданной формы на фоне гауссовского шума с неизвестными параметрами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSUN-2020-007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Woodward P.M.* Probability and Information Theory with Applications to Radar. N.Y.: McGraw-Hill, 1953.
2. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1982.
3. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
4. *Van Trees H.L.* Detection, Estimation, and Modulation Theory. Pt. I. N.Y.: Wiley, 1968.
5. *Sijber J., den Dekker A.J.* // Magnetic Resonance in Medicine. 2004. V. 51. № 3. P. 586.
6. *Xinya Li, Zhiqun D.D., Rauchenstein L., Carlson TJ.* // Rev. Sci. Instrum. 2016. V. 87. № 4. P. 041502.
7. *Rachpon K., Laucht A., Dehollain J.P. et al.* // Rev. Sci. Instrum. 2016. V. 87. № 7. P. 073905.
8. *Иванов Б.И., Грайцар М., Новиков И.Л. и др.* // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. № 7. С. 90.
9. *Sol'a J., Vetter R., Renevey Ph. et al.* // Physiol. Meas. 2009. V. 30. P. 603.
10. *Succi G.P., Clapp D., Gampert R., Prado G.* // Proc. SPIE. 2001. V. 4393. P. 22.
11. *Филатова С.Г., Спектор А.А.* // Автометрия. 2008. № 4. С. 68.
12. *Курленя М.В., Вострецов А.Г., Кулаков Г.И., Яковицкая Г.Е.* // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1999. № 4. С. 61.
13. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др.* / Под ред. П.А. Бакута. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
14. *Lehman E.L.* Testing Statistical Hypotheses. N.Y.: Wiley, 1959.
15. *Вострецов А.Г.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 5. С. 551.
16. *Zacks S.* The Theory of Statistical Inference. N.Y.: Wiley, 1971.
17. *Боровков А.А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
18. *Zehavi E.* // IEEE Trans. 1984. V. AES-20. № 6. P.742.
19. *Jingjing Pan, Meng Sun, Yide Wang et al.* // Signal Processing. 2020. V. 176. P. 107654.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 782–790

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.396

АНАЛИЗ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ И ШУМА

© 2021 г. Б. И. Шахтарин*

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская ул., Москва, 105005 Российская Федерация
**E-mail: shakhtarin@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.10.2020 г.
После доработки 27.10.2020 г.
Принята к публикации 24.03.2021 г.

Рассмотрены приоритетные работы В.И. Тихонова в изучении статистических характеристик фазовой автоподстройки (ФАП), когда на ее вход воздействует помеха в форме шума. В продолжение работ В.И. Тихонова получены основные соотношения метода гармонического баланса, и в процессе их вывода отмечены стадии упрощения, по которым можно судить о степени точности полученных соотношений. В частном случае уравнения совпадают с соотношениями, полученными автором ранее. Найдены значения выходных параметров предполагаемого решения ДУ ФАП.

DOI: 10.31857/S0033849421080076

ВВЕДЕНИЕ

Воздействие помех на системы синхронизации в устройствах радионавигации (ГЛОНАСС, GPS и др.), радиосвязи и радиолокации рассматривалось в ряде работ [1–16]. Среди помех особое внимание уделяется шумовым и активным помехам, к которым, в частности, относятся гармонические прицельные и перестраиваемые помехи. Особое внимание в последние годы уделяется воздействию гармонических помех на системы фазовой автоподстройки.

Определяющая роль в исследовании воздействия помех на систему фазовой автоподстройки (ФАП) принадлежит В.И. Тихонову. Основные статистические характеристики ФАП при воздействии шумовых и гармонических помех получены В.И. Тихоновым и его ближайшими учениками.

К статистическим характеристикам ФАП относятся плотность распределения вероятности (ПРВ) сигнала ошибки, его числовые характеристики в стационарном и переходящих режимах, частота вращательных движений, время достижения указанным сигналом соответствующих порогов и, в частности, среднее время до срыва слежения.

Первые исследования приведенных характеристик были начаты В.И. Тихоновым. К этим работам он активно привлекал своих учеников. В результате комплекса работ была создана теория ФАП, функционирующая под воздействием помех, что имело большое практическое значение и породило массу работ его последователей.

При содействии В.И. Тихонова начато исследование ФАП и при воздействии на нее гармонических помех [11], которое продолжилось в работах [12, 13] на основе применения метода гармонического баланса [17].

В [17, 18] методом гармонического баланса найден ряд динамических характеристик ФАП при условии, что частота гармонической помехи лежит за пределами полосы синхронизации ФАП, причем в [17] это сделано при условии малой амплитуды биений.

1. РАБОТЫ В.И. ТИХОНОВА И ЕГО БЛИЖАЙШИХ УЧЕНИКОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗДЕЙСТВИЯ ШУМОВ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОМЕХ НА СИСТЕМУ ФАП

Рассмотрим подробно вывод основного соотношения метода гармонического баланса, из которого видна степень приближения полученного результата и, следовательно, возможность оценки его точности. В работе [1, с. 1192] была получена ставшая общеизвестной формула Тихонова

$$W(x) = \frac{1}{2\pi I_0(r)} \exp(r\cos x), \quad |x| \le \pi, \qquad (1)$$

где $W(x)$ – ПРВ сигнала рассогласования ФАП, r – отношение сигнал/шум (ОСШ), $I_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

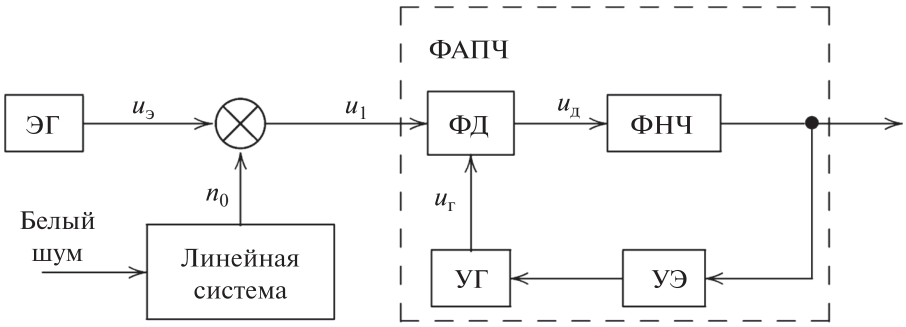

Рис. 1. Структурная схема ФАП (по В.И. Тихонову): ЭГ – эталонный генератор, ФД – фазовый детектор (дискриминатор), ФНЧ – фильтр низкой частоты, УЭ – управляющий элемент, УГ – управляемый генератор, сигналы $u_э$ – эталонный, $u_г$ – от генератора, $u_д$ – от дискиминатора, u_1 – на входе ФАП.

Формула Тихонова (1) соответствует нулевой начальной расстройке $Д_0$ по частоте сигналов, подаваемых на фазовый дискриминатор (рис. 1).

Там же [1] представлена ПРВ $W(x)$ в интегральной форме для случая $Д_0 \neq 0$ [1, ф-ла (21)] с нормирующим множителем N, в который входит квадрат модуля модифицированной функции Бесселя с мнимым индексом $|I_{iv}(r)|^2, (v = Д_0)$. В этом случае при вычислениях ПРВ $W(x)$ требовалось использовать известные таблицы Моргана.

В работе [3, ф-ла (9)] интегральная формула Тихонова была преобразована в быстросходящийся ряд по модифицированным функциям Бесселя с целочисленным индексом и исследована на сходимость полученного ряда. Величина $|I_{iv}(r)|^2$ была представлена (рис. 2) [1, рис. 2.2; 4, ф-ла (XIX)] в форме ряда

$$|I_{iv}(r)|^2 = \frac{\operatorname{sh}(\pi v)}{\pi v}\left[I_0^2(r) + 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(r)}{n^2 + v^2}\right], \quad (2)$$

что исключало обращение к неудобным таблицам Моргана.

Впервые результаты расчета ПРВ $W(x)$ (при $Д_0 \neq 0$) опубликованы в работе [5].

С учетом оценки сходимости ряда для ПРВ $W(x)$ [3] при точности $\varepsilon = 10^{-4}$ получено, что число слагаемых отрезка ряда равно $N = 4, 7, 10, 15, 22, 26$ при ОСШ $r = 1, 2.7, 4.5, 7.4, 12.2, 17$. На рис. 3 приведены ПРВ $W(x)$ при $r = 7.4$ и различных значениях $v = Д_0$ [3].

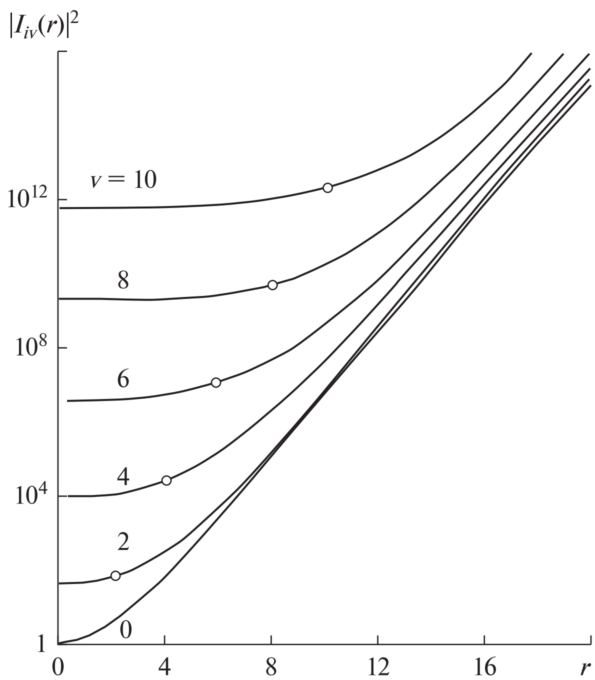

Рис. 2. Зависимость квадрата модуля модифицированной функции Бесселя от аргумента и чисто мнимого порядка *iv*.

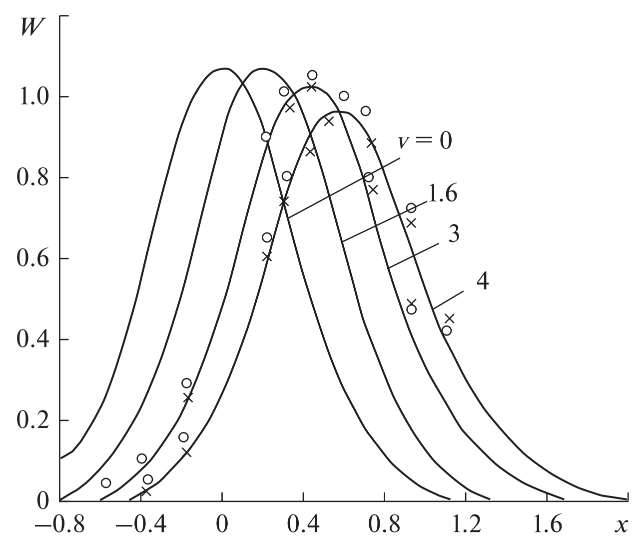

Рис. 3. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки при отношении сигнал/шум $r = 7.4$ и разных значениях частотной расстройки, приближенные значения ПРВ отмечены крестиками и кружками.

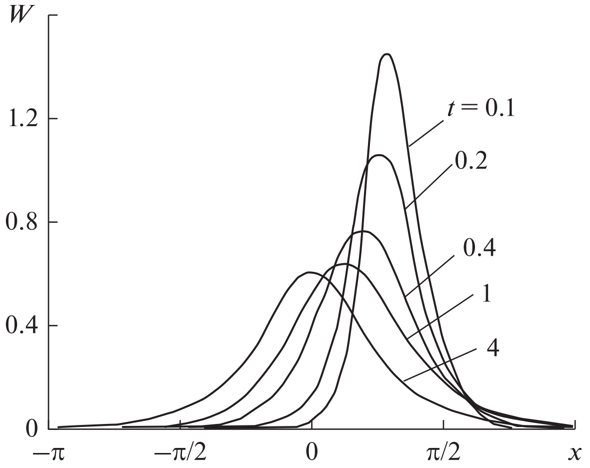

Рис. 4. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки $W(x, t)$ в переходном режиме при $r = 2.5$ и нулевой расстройке по частоте.

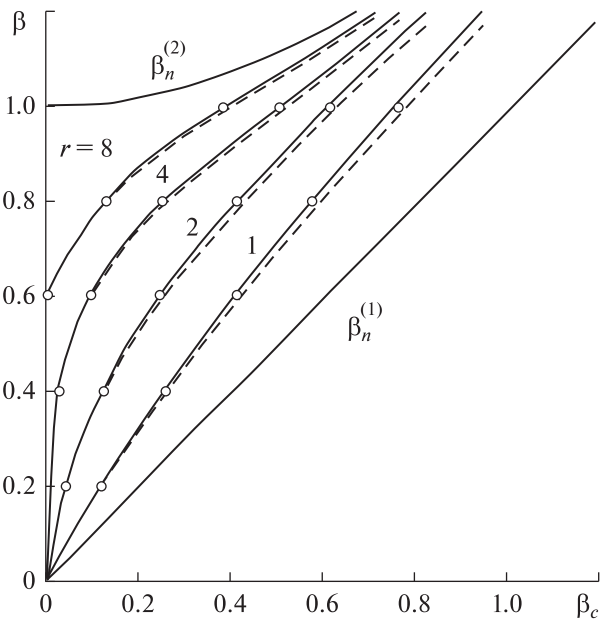

Рис. 5. Характеристика вращательных движений ФАП (сплошные кривые), где $\beta = v/r$, β_c – нормированная частота вращательных движений; асимптотика β_c для систем ФАП второго порядка (штриховые).

На основе ПРВ $W(x)$ в форме рядов получены формулы для начальных моментов m_{1x} и m_{2x} сигнала рассогласования ФАП [4], а также формула дисперсии (при $v = 0$) [7]:

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(r)}{n^2 I_0(r)}. \qquad (3)$$

Была разработана разностная схема для уравнения [1, ф-ла (13)] и найдена ПРВ $W(x,t)$ в пере-

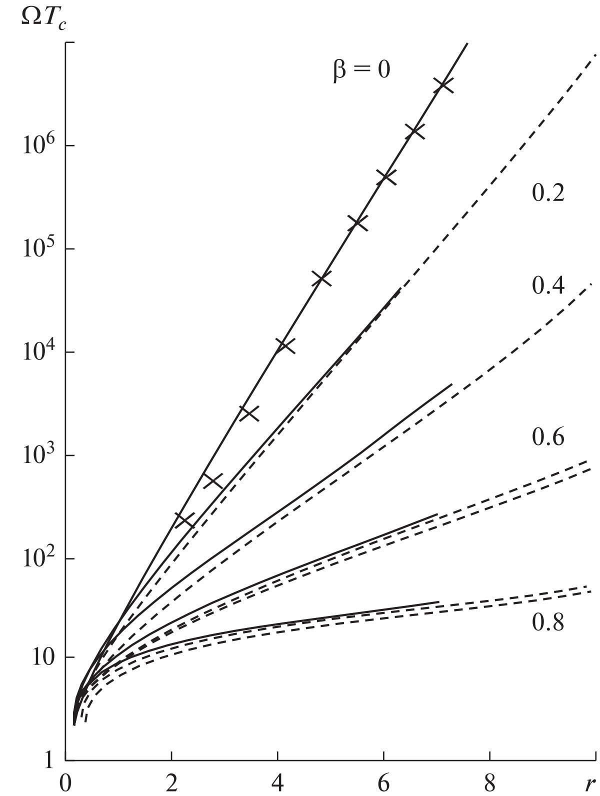

Рис. 6. Зависимости нормированного среднего значения времени до срыва слежения от параметров ФАП (сплошные кривые), расчет по асимптотическим формулам (штриховые) и нормированное среднеквадратическое значение времени до срыва слежения (крестики).

ходном режиме (рис. 4) при $r = 2.5$; $v = 0$ и $x_0 = 1$; $W_0(x) = \delta(x - x_0)$.

Следует отметить, что в первой работе [1] В.И. Тихоновым решена и другая (в отличие от ПРВ $W(x)$) проблема статистической динамики ФАП, а именно получена характеристика вращательных движений β_c в системе ФАП, которая после преобразований может быть представлена в виде [4]

$$\beta_c = \frac{2\pi}{r} c(v, r), \qquad (4)$$

где $c(v,r) = \mathrm{sh}(\pi v) / 2\pi^2 |I_{iv}(r)|^2$. Эта зависимость представлена на рис. 5, где $\beta = v/r$.

В работе [10], а также [5, 8] аналитически, экспериментально и посредством моделирования была детально исследована проблема срыва слежения в системе ФАП. В частности, рассмотрена задача достижения границ марковским процессом [10], найдены формулы для начальных моментов времени T_1 до срыва слежения. Показано, что нормированное среднее время $\gamma_c = \Omega T_c$ (Ω –

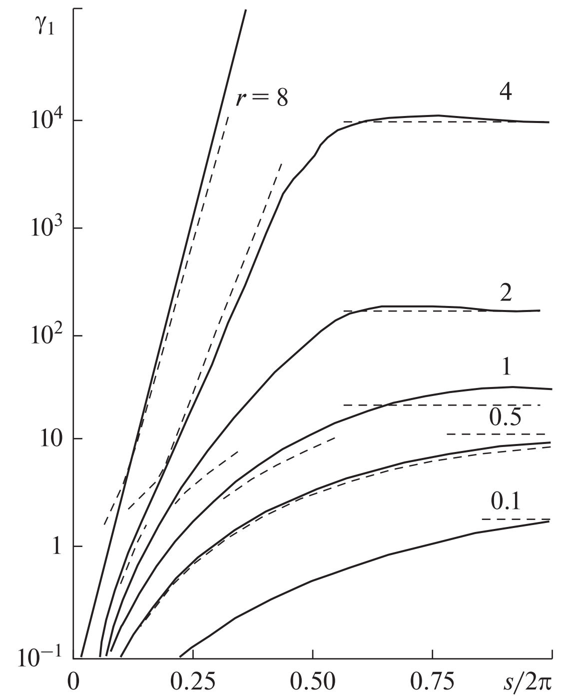

Рис. 7. Зависимость нормированного среднего значения времени достижения порога s.

полоса синхронизации ФАП, $T_c = T_1$) может быть представлено в виде (рис. 6, $\beta = v/r$)

$$\gamma_c = rc^{-1}(v,r)\,\mathrm{th}(\pi v). \tag{5}$$

Получены также зависимости $\gamma_1(s) = \Omega T_1(s)$ от порога s (рис. 7). Найдена вероятность срыва слежения (рис. 8) на основе разностной схемы уравнения Понтрягина.

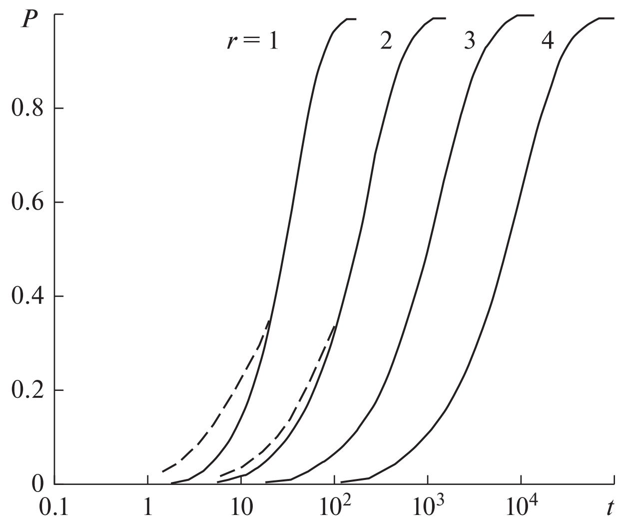

Рис. 8. Зависимость вероятности срыва слежения от времени и отношения сигнал/шум.

Экспериментально показано, что срыв слежения в системе ФАП определяется не только простым пересечением сигналом рассогласования фазовых уровней $\pi/2$ и π, а также циклом вращения вокруг фазового цилиндра с последующим переходом от от состояния равновесия к соседнему (рис. 9). Данные явления срыва подтверждены результатами моделирования ФАП (рис. 10).

Исследования В.И. Тихонова шумовых воздействий на ФАП продолжены его учениками. В результате наряду с шумовыми помехами рассмотрены и воздействия на ФАП и гармонических помех [11–13].

Рис. 9. Осциллограммы при физическом моделировании срыва слежения.

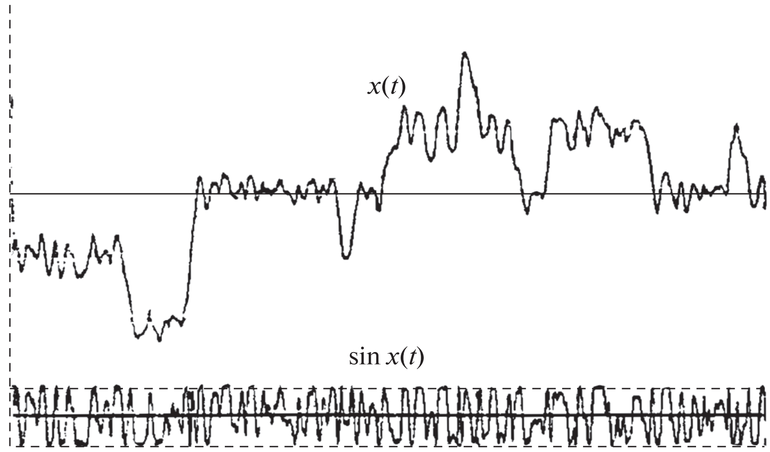

Рис. 10. Зависимости, полученные при математическом моделирование срыва слежения.

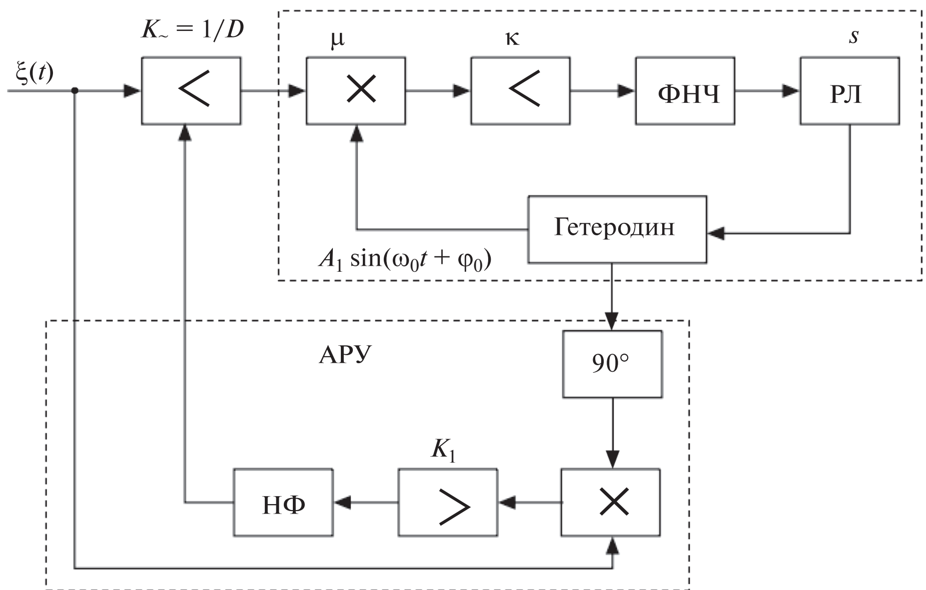

Рис. 11. Структурная схема оптимальной (по В.И. Тихонову) системы ФАП: АРУ – автоматическая регулировка усиления, НФ – нелинейный фильтр, РЛ – управляющий элемент.

Следует отметить, что наряду с анализом ФАП под воздействием помех В.И. Тихонов получил ряд результатов в области синтеза оптимальных систем ФАП [7, 14] (рис. 11).

2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ НА СИСТЕМУ ФАП

2.1. Основные соотношения метода гармонического баланса

Можно показать, что при воздействии на ФАП наряду с сигналом и гармонической помехи дифференциальное уравнение ФАП имеет вид [17]

$$px = \beta - F(p)\left[\sin x + \varepsilon \sin\left(x + dt + \Delta\theta\right)\right], \quad (6)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; $t = \Omega t_1$; t_1 – время в с; Ω – полоса синхронизации ФАП; $x = x(t)$ – сигнал рассогласования; $\beta = \Omega_0/\Omega$; $\Omega_0 = \omega_c - \omega_0$ – расстройка по частоте сигнала ω_c и частотой управляемого генератора (УГ) ω_0; $\varepsilon = A_п/A_c$ – отношение амплитуд помехи $A_п$ и сигнала A_c (ОПС); $d = \Delta\Omega/\Omega$; $\Delta\Omega = \omega_п - \omega_c$ – разность частот помехи и сигнала.

Предполагаемое решение дифференциального уравнения (6) в методе гармонического баланса при учете лишь одной гармоники принимается в виде [17]

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos\left(dt + \Delta\theta + \varphi\right) = x_0 + x_1 \cos\Phi. \quad (7)$$

Параметры предполагаемого решения (7) – постоянная составляющая x_0, амплитуда первой гармоники x_1 и фазовый угол Φ – найдены в процессе гармонического баланса подстановкой (7) в левую и правую части дифференциального уравнения (6).

В работе [17] эти параметры были нами найдены при условии малого значения амплитуды x_1 и при условии $d > 1$, что обусловило использование приближенных соотношений [17] (нулевое приближение):

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_0 + x_1 \cos x_0 \cos\Phi, \\ \cos x &= \cos x_0 - x_1 \sin x_0 \cos\Phi. \end{aligned} \tag{8}$$

Затем нами были получены уточняющие соотношения на основе первого приближения.

В данной статье при использовании дифференциального уравнения (6) и предполагаемого решения в форме (7) используем более строгий подход (второе приближение), когда вместо (8) используются приближения более высокого порядка, в связи с чем повышается точность полученных результатов: динамических характеристик и критических значений параметров ФАП и помехи.

В данном случае используются отрезки рядов

$$\begin{aligned} \sin(x_1\cos\Phi) &= 2J_1 \cos\Phi, \\ \cos(x_1\cos\Phi) &= J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi, \end{aligned} \tag{9}$$

где $J_0 = J_0(x_1)$, $J_1 = J_1(x_1)$, $J_2 = J_2(x_1)$ – функции Бесселя соответствующих порядков, причем здесь добавляется в разложении (9) вторая гармоника $\cos 2\Phi$.

В результате вместо (8) используются соотношения

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_0 [J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi] + \\ &+ \cos x_0 [2J_1 \cos\Phi], \\ \cos x &= \cos x_0 [J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi] - \\ &- \sin x_0 [2J_1 \cos\Phi]. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя предполагаемое решение (2) в исходное дифференциальное уравнение (6), получим

$$\begin{gathered} -dx_1 \sin\Phi = \beta - F(p)\{\sin x + \varepsilon \sin(x + dt + \Delta\theta)\} = \\ = \beta - F(p)\{\sin[x_0 + x_1 \cos\Phi] + \\ + \varepsilon \sin x \cos(\Phi - \psi) + \varepsilon \cos x \sin(\Phi - \psi)\} = \\ = \beta - F(p)\{\sin x_0 \cos(x_1 \cos\Phi) + \\ + \cos x_0 \sin(x_1 \cos\Phi) + \varepsilon \sin(x_0 + x_1 \cos\Phi) \times \\ \times (\cos\Phi \cos\psi + \sin\Phi \sin\psi) + \\ + \varepsilon \cos(x_0 + x_1 \cos\Phi)(\sin\Phi \cos\psi - \cos\Phi \sin\psi) = \\ = \beta - F(p)\{\sin x_0 \cos(x1 \cos\Phi) + \\ + \cos x_0 \sin(x_1 \cos\Phi) + \varepsilon[\sin x_0 \cos(x_1 \cos\Phi) + \\ + \cos x_0 \sin x_1 \cos\Phi][\cos\Phi \cos\psi + \sin\Phi \sin\psi] + \\ + \varepsilon[\cos x_0 \cos(x_1 \cos\Phi) - \sin x_0 \sin(x_1 \cos\Phi)] \\ \times [\sin\Phi \cos\psi - \cos\Phi \sin\psi]\}. \end{gathered}$$

Воспользуемся соотношением (9). В результате получим (первая стадия упрощения)

$$\begin{gathered} -dx_1 \sin\Phi = \beta - F(p)\{\sin x_0 (J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) + \\ + \cos x_0 2J_1 \cos\Phi + \varepsilon[\sin x_0 (J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) + \\ + \cos x_0 2J_1 \cos\Phi][\cos\Phi \cos\psi + \sin\Phi \sin\psi + \\ + \varepsilon[\cos x_0 (J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) - \sin x_0 2J_1 \cos\Phi] \times \\ \times [\sin\Phi \cos\psi - \cos\Phi \sin\psi]\}. \end{gathered}$$

На второй стадии упрощения пренебрегаем второй гармоникой во втором слагаемом в фигурных скобках, при перемножении воспользуемся приближенными равенствами (отбросим третьи гармоники):

$$\cos 2\Phi \cos\Phi \approx \frac{1}{2}\cos\Phi; \quad \cos 2\Phi \sin\Phi \approx -\frac{1}{2}\sin\Phi,$$

а также отбросим вторые гармоники, возникающие в произведениях,

$$2\sin\Phi\cos\Phi = \sin 2\Phi; \quad \cos^2\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Phi) \approx \frac{1}{2}.$$

В результате в правой части приведенного соотношения останутся лишь первые гармоники вида $\sin\Phi$ и $\cos\Phi$:

$$\begin{gathered} -dx_1 \sin\Phi = \beta - F(p)\{J_0 \sin x_0 + \\ + \cos x_0 2J_1 \cos\Phi + \varepsilon J_0 \sin x_0 \times \\ \times (\cos\Phi \cos\psi + \sin\Phi \sin\psi) - \varepsilon J_2 \sin x_0 \times \\ \times \cos\psi \cos\Phi + \varepsilon J_2 \sin x_0 \sin\psi \sin\Phi + \\ + \varepsilon J_1 \cos x_0 \cos\psi + \varepsilon J_0 \cos x_0 \times \\ \times (\sin\Phi \cos\psi - \cos\Phi \sin\psi) + \varepsilon J_2 \cos x_0 \times \\ \times \cos\psi \sin\Phi + \varepsilon J_2 \cos x_0 \sin\psi \times \\ \times \cos\Phi + \varepsilon J_1 \sin x_0 \sin\psi\}. \end{gathered}$$

Выделим в правой части данного соотношения постоянную составляющую

$$\beta - M_0 [J_o \sin x_0 + \varepsilon J_1 \cos(x_0 - \psi)] = 0, \tag{11}$$

где $M_0 = F(0)$.

В результате оставшиеся переменные характеризуются соотношениями

$$-dx_1 \sin\Phi = F(p)(A\cos\Phi - B\sin\Phi), \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} A = -2J_1 \cos x_0 - \varepsilon(J_0 - J_2)\sin(x_0 - \psi), \\ B = \varepsilon(J_0 + J_2)\cos(x_0 - \psi). \end{gathered}$$

Запишем передаточную функцию фильтра в комплексной форме

$$F(p) = M \exp(iP), \tag{13}$$

где $M = |F(p)|$, $P = \arg F(p)$.

В результате из (12) с учетом (13) находим

$$-\frac{dx_1}{M}\sin\Phi = A\cos(\Phi + P) - B\sin(\Phi + P) = \\ = A(\cos\Phi\cos P - \sin\Phi\sin P) - \\ - B(\sin\Phi\cos P + \cos\Phi\sin P) = \\ = (A\cos P - B\sin P)\cos\Phi - \\ - (A\sin P + B\cos P)\sin\Phi.$$

После гармонического баланса по $\sin\Phi$ и $\cos\Phi$ получим два уравнения относительно величин $\cos P$ и $\sin P$:

$$A\cos P - B\sin P = 0, \\ B\cos P + A\sin P = \frac{dx_1}{M}. \qquad (18)$$

Определитель Δ системы уравнений (14) имеет вид

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2.$$

В результате решения системы уравнений (14) находим искомые величины $\cos P$ и $\sin P$ в виде

$$\cos P = \Delta_1/\Delta;\ \sin P = \Delta_2/\Delta. \qquad (15)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -B \\ \frac{dx_1}{M} & -A \end{vmatrix} = B\frac{dx_1}{M} = \frac{dx_1}{M}\varepsilon(J_0 + J_2)\cos(x_0 - \psi),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & \frac{dx_1}{M} \end{vmatrix} = A\frac{dx_1}{M} = \frac{dx_1}{M}\varepsilon(J_0 - J_2)\times \\ \times\sin(\psi - x_0) - 2J_1\cos x_0.$$

Очевидно, что

$$\sin^2 P + \cos^2 P = \frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} + \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} = 1.$$

Отсюда имеем

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = \frac{dx_1}{M}\left(A^2 + B^2\right) = \left(\frac{dx_1}{M}\right)^2\Delta = \Delta^2.$$

Таким образом, эквивалентная запись определителя имеет вид

$$\Delta = \left(\frac{dx_1}{M}\right)^2.$$

Поэтому окончательно получим

$$\cos P = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{M^2}{(dx_1)^2}\frac{dx_1}{M}B = \frac{M}{dx_1}B,$$

$$\sin P = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{M^2}{(dx_1)^2}\frac{dx_1}{M}A = \frac{M}{dx_1}A,$$

или в другой форме —

$$dx_1\cos P = \varepsilon M(J_0 + J_2)\cos(\psi - x_0), \qquad (16)$$

$$dx_1\sin P = \\ = M\left[\varepsilon(J_0 - J_2)\sin(\psi - x_0) - 2J_1\cos x_0\right], \qquad (17)$$

где $J_0 = J_0(x_1)$, $J_1 = J_1(x_1)$, $J_2 = J_2(x_1)$.

Полученные соотношения (11), (16), (17) совпадают с соответствующими уравнениями (7)—(9), приведенными в [18] без вывода, теперь по приведенному процессу их вывода можно судить о степени приближенности найденных соотношений.

При $J_2 = J_2(x_1) = 0$ по (16), (17) следует частный случай, полученный ранее.

2.2. Соотношения для параметров x_0, x_1, ψ предполагаемого решения дифференциального уравнения

По (16) и (17) может быть найдена система уравнений относительно величин $\cos\psi$ и $\sin\psi$, имеющая вид

$$\cos x_0\cos\psi + \sin x_0\sin\psi = c_1, \\ -\sin x_0\cos\psi + \cos x_0\sin\psi = c_2, \qquad (18)$$

где

$$c_1 = \frac{dx_1}{\varepsilon M(J_0 + J_2)}\cos P,$$

$$c_2 = \frac{dx_1}{\varepsilon M(J_0 - J_2)}\sin P - \frac{2\cos x_0}{\varepsilon(J_0 - J_2)}J_1.$$

Определитель системы (18) равен единице, поэтому

$$\cos\psi = \Delta_1,\ \ \sin\psi = \Delta_2, \qquad (19)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{dx_1}{\varepsilon M\left(J_0^2 - J_2^2\right)}\left[J_0\cos(P + x_0) - J_2\cos(P - x_0)\right] - \\ - \frac{J_1}{\varepsilon(J_0 - J_2)} - \sin 2x_0 = \gamma_1 F_1,\ \ \Delta_2 = \frac{dx_1}{\varepsilon M\left(J_0^2 - J_2^2\right)}\times \\ \times\left[J_0\sin(x_0 + P) - J_2\sin(x_0 - P)\right] + \\ + \frac{2J_1}{\varepsilon(J_0 - J_2)}\cos^2 2x_0 = \gamma_1 F_2,\ \ \gamma_1 = \frac{dx_1}{\varepsilon M\left(J_0^2 - J_2^2\right)},$$

$$F_1 = d\left[J_0\cos(P + x_0) - J_2\cos(P - x_0))\right] - \\ - \frac{1}{2}\frac{2}{x_1}J_1 M(J_0 + J_2)\sin 2x_0,$$

$$F_2 = d\left[J_0\cos(P + x_0) + J_2\cos(P - x_0))\right] - \\ - \frac{2}{x_1}J_1 M(J_0 + J_2)\cos^2 2x_0.$$

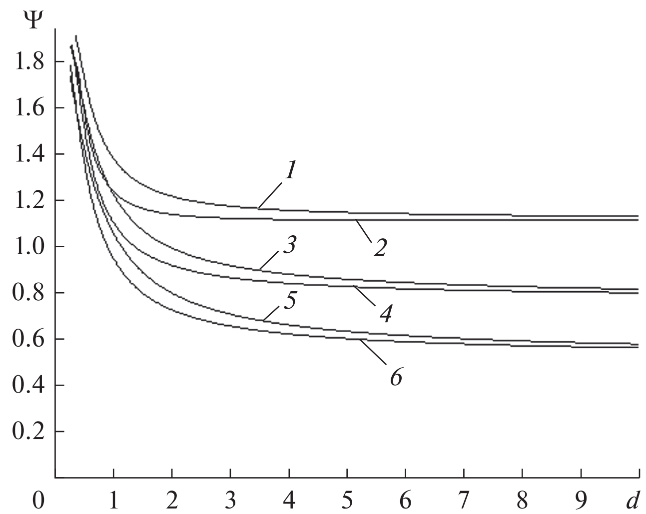

Рис. 12. Зависимость фазового угла ψ от относительной разности частот d помехи и сигнала при $\varepsilon = 0.5$; $a = 0.8$; $\Omega\tau = 6.25$ (τ – постоянная времени фильтра) и различных $\beta = 0.9$ (*1*, *2*); 0.7 (*3*, *4*); 0.5 (*5*, *6*) в случае невырожденного (*1*, *3*, *5*) и вырожденного фильтров (*2*, *4*, *6*).

При малых значениях амплитуды x_1 функция $J_2(x_1) \approx 0$, поэтому в этом случае из (19) находим

$$\Delta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon M J_0} \times \left[d\cos(P + x_0) - \frac{1}{2}\frac{2}{x_1} J_1 M \sin 2x_0 \right] = \gamma_{10} F_{10}, \tag{20}$$

$$\Delta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon M J_0} \times \left[d\cos(P + x_0) - \frac{2}{x_1} J_1 M \cos^2 x_0 \right] = \gamma_{20} F_{20}. \tag{21}$$

Далее из (17) находим

$$\sin(\psi - x_0) = \frac{1}{\varepsilon M (J_0 - J_2)} \times \left(\frac{dx_1}{M} \sin P + 2J_1 \cos x_0 \right) = G.$$

Тогда

$$\psi = \begin{cases} x_0 + \varphi, & \text{при} \quad d > 0,\ \beta > 0, \\ x_0 - \varphi + \pi, & \text{при} \quad d < 0,\ \beta > 0; \end{cases} \tag{22}$$

где $\varphi = \arcsin G$.

Графики зависимости $\psi = f(d)$ представлены на рис. 12 при $\varepsilon = 0.5$, $a = 0.8$; $\alpha_0^{-2} = 6.25$, при невырожденном и вырожденном фильтре для $\beta = 0.9$, 0.7 и 0.5.

Соотношение для постоянной составляющей x_0 находится по (11) с учетом (16) и имеет вид

$$\sin x_0 = \frac{1}{J_0}\left[\frac{\beta}{M_0} - J_1 \frac{dx_1 \cos P}{M(J_0 + J_2)} \right]. \tag{23}$$

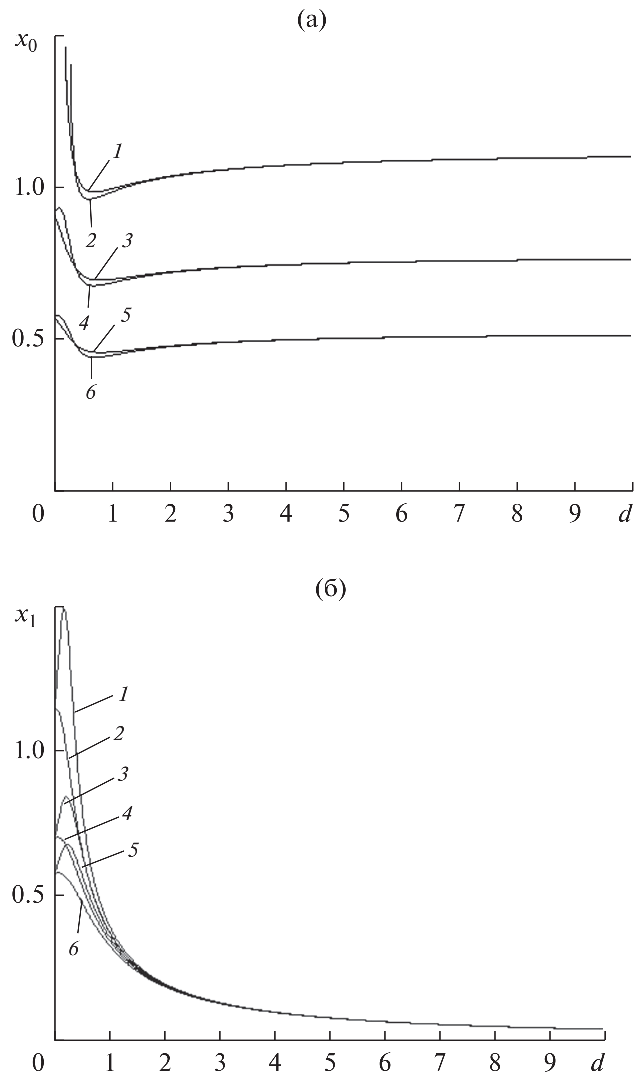

Рис. 13. Зависимость постоянной составляющей x_0 (а) и амплитуды первой гармоники x_1 (б) от относительной разности частот d помехи и сигнала при $\varepsilon = 0.5$; $a = 0.8$; $\Omega\tau = 6.25$ и различных $\beta = 0.9$ (*1*, *2*); 0.7 (*3*, *4*); 0.5 (*5*, *6*) в случае невырожденного (*1*, *3*, *5*) и вырожденного фильтров (*2*, *4*, *6*).

Графики зависимости $x_0 = f(d)$ изображены на рис. 13а при $\varepsilon = 0.5$; $a = 0.8$; $\alpha_0^{-2} = 6.25$ при невырожденном и вырожденном фильтре для $\beta = 0.9$, 0.7 и 0.5.

Остается найти зависимость амплитуды x_1 первой гармоники предполагаемого решения от параметров ФАП и отстройки d. По (19) находим неявную зависимость

$$x_1^2 = \frac{(\varepsilon M)^2 \left(J_0^2 - J_2^2\right)^2}{d^2 \left(F_1^2 + F_2^2\right)^2}. \tag{24}$$

При больших отстройках d находим

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon J_0^2}{d^2 + [2J_1/x_1]^2 \cos x_0} \approx \frac{\varepsilon^2}{d^2 + 1 - \beta^2}. \qquad (25)$$

Графики зависимости $x_1 = f(d)$ представлены на рис. 13б при тех же параметрах, что и на рис. 13а.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, определяющая роль в создании теории ФАП под воздействием помех принадлежит В.И. Тихонову и его ближайшим ученикам. Были создали не только методы анализа стохастической ФАП, но и ее синтеза на основе нелинейной теории оптимальной фильтрации Р.Л. Стратоновича [19] (научным руководителем Р.Л. Стратоновича на раннем этапе его творчества был В.И. Тихонов).

Следует также отметить заметный вклад В.И. Тихонова в исследование теории выбросов случайных процессов [20] и теории передачи сообщений [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов В.И.* // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20. № 9. С. 1188.
2. *Тихонов В.И.* // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 3. С. 301.
3. *Тихонов В.И., Шахтарин Б.И.* // Автоматика и телемеханика 1965. Т. 26. № 9. С. 1563.
4. *Шахтарин Б.И.* // РЭ. 1968. Т. 13. № 2. С. 247.
5. *Челышев К.Б.* // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. № 7. С. 942.
6. *Тихонов В.И., Челышев К.Б.* // РЭ. 1963. Т. 8. № 2. С. 331.
7. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
8. *Шахтарин Б.И., Щепкин Ю.Н.* Электросвязь. 1966. № 9. С. 18.
9. *Тихонов В.И., Журавлев А.Г.* Радиотехника. 1962. Т. 17. № 9. С. 40.
10. *Тихонов В.И.* // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. 1972. Т. 15. № 4. С. 413.
11. *Журавлев А.Г.* // Радиотехника. 1963. Т. 18. № 9. С. 38.
12. *Шахтарин Б.И.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 6. С. 649.
13. *Шахтарин Б.И.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 8. С. 858.
14. *Ярлыков М.С.* Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
15. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Горячая линия – Телеком, 2015.
16. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
17. *Шахтарин Б.И.* Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998.
18. *Karsi M.F., Lindsey W.C.* // IEEE Trans. 2000. V. 48. № 5. P. 886.
19. *Шахтарин Б.И.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 11. С. 1324.
20. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
21. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 791–797

К 100-ЛЕТИЮ
В.И. ТИХОНОВА

УДК 551.463.621.391

МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЗНОСТИ ФАЗ СИГНАЛОВ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОГО ГИДРОЛОКАТОРА БОКОВОГО ОБЗОРА

© 2021 г. В. И. Каевицер[a], Л. Е. Назаров[a], И. В. Смольянинов[a], *

[a]Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

*E-mail: ilia159@mail.ru

Поступила в редакцию 23.09.2020 г.
После доработки 24.12.2020 г.
Принята к публикации 28.12.2020 г.

Предложены методы обработки отраженных от шероховатой поверхности акустических сигналов интерферометрических гидролокаторов бокового обзора (ИГБО) с целью повышения точности вычисления их разности фаз. Показано, что при использовании этих методов возможно ослабление искажающих помех декорреляции для интерферометрических систем с большой базой, а также увеличение значений сигнал/помеха при оценивании разности фаз канальных сигналов. Даны результаты моделирования алгоритмов обработки сигналов ИГБО для рассматриваемых методов.

DOI: 10.31857/S0033849421080052

ВВЕДЕНИЕ

Акустическое картирование рельефа морского дна с помощью интерферометрических гидролокаторов бокового обзора (ИГБО) основано на измерениях наклонных дальностей от антенн интерферометра до разрешаемых элементов морского дна и углов прихода эхо-сигналов, вычисленных по разности времени их прихода на разнесенные по вертикали акустические приемники [1, 2]. Точность и однозначность вычислений углов прихода эхо-сигналов зависит от базы интерферометра, дальности до зондируемого участка дна и точности вычисления интерферометрической разности фаз эхо-сигналов [1, 2]. Для повышения точности картирования рельефа дна необходимо увеличить полосу частот спектра зондирующих сигналов и базу интерферометра, при этом нарушается условие пространственно-временной узкополосности эхо-сигналов ИГБО [3]. При разработке алгоритма вычисления разности фаз эхо-сигналов ИГБО с пространственно-временной широкополосностью необходимо учитывать их декорреляцию в пространственно-разнесенных антенных приемных датчиках и уменьшение отношения сигнал/помеха при увеличении дальности до зондируемого участка дна [3, 4]. Основные декорреляционные факторы для шероховатой отражающей поверхности рассмотрены в работе [4], где показано, что их влияние можно оценить через дополнительный эквивалентный аддитивный шум (помеха декорреляции), уровень которого растет с уменьшением коэффициента взаимной корреляции между сигналами в каналах приема.

Актуальной является проблема разработки и апробации алгоритмов цифровой обработки эхо-сигналов ИГБО с целью повышения точности вычисления интерферометрической разности фаз по отношению к известным методам, описанным в [2, 5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общий принцип вычисления рельефа морского дна с помощью систем ИГБО приведен в ряде работ [2, 5] и поясняется на рис. 1. Для вычисления рельефа морского дна с помощью интерферометрических систем используются, как минимум, две приемные антенны [2]. Приемопередающую антенну *1* будем условно называть опорной, приемную антенну *2* – рабочей. Приемопередающая антенна излучает зондирующий сигнал. Антенны *1* и *2* принимают эхо-сигналы от участков морского дна. Элемент разрешения морского дна описывается дальностью до него R и направлением φ на него. Дальность однозначно связана с запаздыванием $\tau = 2R/V$, где V – скорость распространения звука и, следовательно, рельеф дна описывается функцией $\varphi(\tau)$ для каждой строки съемки [2].

Антенны ИГБО устанавливаются на подвижный носитель. Диаграмма направленности антенн имеет ширину 60°...80° в вертикальной плоскости и 1°...3°

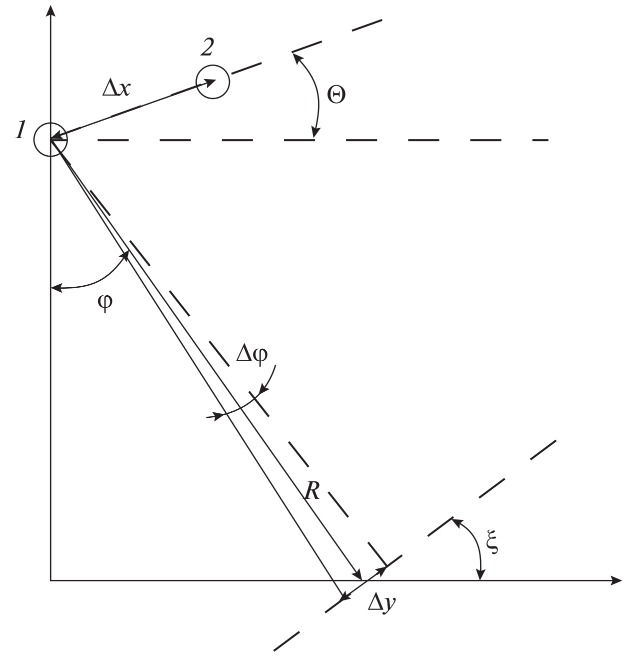

Рис. 1. Геометрия измерений интерферометрических систем: *1* – приемопередающая антенна, *2* – приемная антенна.

вдоль линии движения носителя, что позволяет формировать построчное картирование рельефа дна. Для максимального бокового обзора дна апертура антенной системы ИГБО наклоняется на угол θ. Предполагается, что используется зондирующий сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) с центральной частотой f_0, длительностью T_c и девиацией частоты ΔF.

Общая теория оценок параметров сигналов при наличии помех определяет их оптимальную обработку в виде согласованной фильтрации с опорным сигналом, представляющем решение интегрального уравнения Фредгольма с ядром функции корреляции канального шума [6]. Решение этого уравнения содержит линейный член относительно зондирующего сигнала, а также аддитивные члены в виде функционалов от зондирующего сигнала [6, 7]. В приложениях и теоретических исследованиях, как правило, используется согласованная фильтрация только для линейного члена, что существенно упрощает реализацию решения задач оценок параметров сигналов, в частности, решение рассматриваемой задачи оценивания интерферометрической разности фаз канальных эхо-сигналов. В соответствии с этим сигналы с антенн *1* и *2* поступают на фильтры, согласованные с ЛЧМ-сигналом.

Отражающую поверхность будем считать шероховатой. Для такой поверхности в работе [3] приведена в общем виде модель отраженных сигналов. Используя результаты этой работы, для комплексных огибающих сигнальных $\dot{Z}_1(t)$ и $\dot{Z}_2(t)$ на выходе согласованных фильтров в случае однозначной поверхности (функции $\varphi(\tau)$), находящейся в дальней зоне, получаем следующие соотношения [4]:

$$\dot{Z}_1(t) = \int \dot{h}(\tau)\dot{\rho}_s(t-\tau)\exp(-j2\pi f_0\tau)d\tau, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\dot{Z}_2(t) = \int \dot{h}(\tau)\dot{\rho}_s\left(t-\tau+\frac{\Delta x}{V}\beta(\tau)\right)\times \\ \times\exp\left(-j2\pi f_0\left(\tau-\frac{\Delta x}{V}\beta(\tau)\right)\right)d\tau.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь Δx – база антенн, $\dot{\rho}_s(t)$ – нормированная автокорреляционная функция (АКФ) комплексной огибающей зондирующего сигнала; $\dot{h}(\tau)$ – коэффициент, характеризующий отражающие свойства поверхности и дополнительные эффекты, возникающие при распространении звуковых волн; $\beta(\tau)$ – координатная функция, связанная с направлением на источник сигнала $\varphi(\tau)$ соотношением

$$\beta(\tau) = \sin[\theta - \varphi(\tau)].$$

В соотношениях (1), (2) для шероховатой поверхности функция $\dot{h}(\tau)$ полагается реализацией комплексного нормального случайного процесса с нулевым средним [3].

Полный сигнал на выходе согласованных фильтров представляет собой сумму сигнальной составляющей и аддитивного шума

$$\dot{Y}_1(t) = \dot{Z}_1(t) + \dot{n}_1(t),$$

$$\dot{Y}_2(t) = \dot{Z}_2(t) + \dot{n}_2(t).$$

Здесь $\dot{n}_1(t)$, $\dot{n}_2(t)$ – помеховые составляющие, содержащие аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ), коррелированный шум флуктуационной многолучевости эхо-сигналов, помехи декорреляции.

Разность фаз сигналов ИГБО вычисляется с использованием выражения

$$\varepsilon(\tau) = \arg(\dot{Y}_2(t)) - \arg(\dot{Y}_1(t)). \tag{3}$$

Здесь $\arg(\dot{Y})$ – фаза случайной величины $\dot{Y}$.

Точность вычисления разности фаз $\varepsilon(\tau)$ определяется значением сигнал/помеха на входе ИГБО и факторами декорреляции, возникающими при несоблюдении условия пространственно-временной узкополосности эхо-сигналов ИГБО [4].

В данной работе рассматриваются предлагаемые методы обработки сигналов $\dot{Y}_2(t), \dot{Y}_1(t)$, которые перспективны для использования при вычислении разности их фаз $\varepsilon(\tau)$ с целью повышения точности ее вычисления: на основе коррекции времени дискретизации сигналов в каналах ИГБО и на усреднении функционалов сигналов вдоль линии зондирования.

2. МЕТОД КОРРЕКЦИИ ВРЕМЕНИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИГНАЛОВ В КАНАЛАХ ИГБО

При применении цифровой обработки сигналов в каналах приема ИГБО выборочные отсчеты отраженного сигнала берутся с заданной частотой дискретизации. Разность фаз между сигналами в каналах приема ИГБО вычисляют, используя отсчеты с выходов согласованных фильтров. При большой базе интерферометра возникают декорреляционные эффекты [4]. Снизить их влияние можно, применяя коррекцию времени взятия отсчетов в каналах ИГБО. При этом требуется вычисление отсчетов сигналов на выходе согласованных фильтров с вариацией времени дискретизации, что обусловливает необходимость решения задачи интерполяции с использованием отсчетов с заданной частотой дискретизации.

Задача интерполяции относится к классу некорректных задач, решение которых основывается на использовании дополнительной информации количественного или качественного характера [8]. Информация качественного характера (например, гладкость решения) задает решения на основе регуляризирующего оператора Тихонова, частным случаем которого является фильтрация Виннера–Колмогорова [6]. Информация количественного характера задает квазирешения, основанные на ограничении решений, например, интерполяцией полиномами [9].

Исходя из возможностей современной цифровой техники, диапазона и ширины частотной полосы сигналов ΔF, применяемых в гидроакустике [2, 5], рассмотрим эффективность увеличения частоты дискретизации сигнала при использовании интерполяции многочленом первой степени (ступенчатая и линейная интерполяции на основе двух интерполирующих отсчетов). Эти виды интерполяции наиболее простые для реализации и теоретического анализа без привлечения теории фильтрации.

Пусть из стационарного случайного комплексного сигнала $\dot{Y}(t)$ с мощностью σ_Y^2 на выходе согласованного фильтра производятся равномерные выборки $\dot{Y}(nT_g)$ с интервалом T_g. Ступенчатая интерполяция осуществляется с использованием правила:

$$\hat{\dot{Y}}(nT_g + \tau) = \dot{Y}(nT_g), \qquad (4)$$

где $|\tau| \le T_g/2$.

Средняя относительная погрешность при применении этого вида интерполяции определяется как

$$L(\tau) = \frac{\sqrt{\left\langle\left|\Delta\dot{Y}(\tau)\right|^2\right\rangle}}{\sigma_Y} = \frac{\sqrt{\left\langle\left|\hat{\dot{Y}}(nT_g+\tau) - \dot{Y}(nT_g)\right|^2\right\rangle}}{\sigma_Y} = \sqrt{2(1 - \mathrm{Re}(\dot{\rho}_Y(\tau)))}. \qquad (5)$$

Здесь $\dot{\rho}_Y(\tau) = \left\langle \dot{Y}(t)\hat{\dot{Y}}^*(t+\tau)\right\rangle / \sigma_Y^2$ – нормированная автокорреляционная функция ($\dot{\rho}_Y(0) = 1$); знак $\langle\ \rangle$ – усреднение по реализациям; $()^*$ – комплексное сопряжение. Функция $L(\tau)$ (5) симметрична относительно $\tau = 0$.

Для реализаций $\dot{Y}(t)$, соответствующих зондирующим сигналам с равномерной плотностью мощности огибающей в полосе частот $|f| \le \Delta F/2$ и равной нулю вне этой полосы, справедливо соотношение

$$\rho_Y(\tau) = \frac{\sin(\pi\Delta F\tau)}{\pi\Delta F\tau}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), имеем

$$L = \sqrt{2\left(1 - \frac{\sin(\pi b\zeta)}{\pi b\zeta}\right)},$$

где $b = \Delta F T_g$, $\zeta = \tau/T_g$.

При применении линейной интерполяции оценка аппроксимируемого отсчета линейной интерполяции $\hat{\dot{Y}}(nT_g + \tau)$ осуществляется с использованием правила

$$\hat{\dot{Y}}(nT_g + \tau) = \dot{Y}(nT_g) + \frac{\tau(\dot{Y}((n+1)T_g) - \dot{Y}(nT_g))}{T_g}. \qquad (7)$$

Средняя относительная погрешность в этом случае задается соотношением

$$L(\tau) = \sqrt{2[1-\rho_Y(\tau)] - 2\frac{\tau}{T_g}[1 + \rho_Y(T_g - \tau) - \rho_Y(T_g) - \rho_Y(\tau)] + 2\left(\frac{\tau}{T_g}\right)^2[1 - \rho_Y(T_g)]}, \qquad (8)$$

где $0 \le \tau \le T_g$, функция $L(\tau)$ (8) симметрична относительно $\tau = T_g/2$.

На рис. 2 представлены зависимости погрешностей интерполяции от относительного смещения ζ для ступенчатой и линейной интерполяции, вычисленные с использованием соотношений (5), (6) и (8).

Погрешность интерполяции можно рассматривать как дополнительную помеху, которая сни-

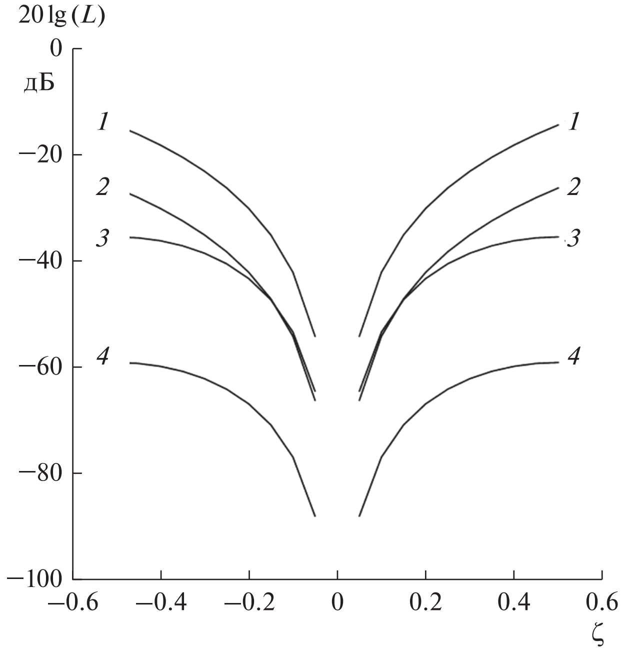

Рис. 2. Зависимости погрешности ступенчатой (*1*, *2*) и линейной (*3*, *4*) интерполяции от относительного смещения ζ, вычисленные для частоты дискретизации $2\Delta F$ (*1*, *3*) и $4\Delta F$ (*2*, *4*).

жает общее отношение сигнал/помеха при обработке сигналов ИГБО. Из рис. 2 видно, что для ступенчатой интерполяции при сдвиге на интервал $\tau = T_g/2$ для частоты дискретизации $2\Delta F$ эквивалентное отношение сигнал/помеха за счет помехи аппроксимации не менее 14 дБ, при увеличении частоты дискретизации это отношение увеличивается и для частоты $4\Delta F$ не менее 26 дБ. Линейная аппроксимация является более эффективной по отношению к ступенчатой аппроксимации относительно мощности помехи аппроксимации – в этом случае при $\tau = T_g/2$ для частоты дискретизации $2\Delta F$ отношение сигнал/помеха за счет помехи аппроксимации не менее 35 дБ, при частоте дискретизации $4\Delta F$ не менее 60 дБ.

3. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ СИГНАЛОВ ИГБО

При увеличении наклонной дальности влияние факторов декорреляции вдоль линии зондирования ИГБО уменьшается [4], при этом за счет пространственного распространения сигналов уменьшается отношение сигнал/помеха. Повышение значений сигнал/помеха при вычислении интерферометрической разности фаз возможно путем накопления сигнальной составляющей ИГБО вдоль линии зондирования.

Пусть $\dot{Y}_1(l)$, $\dot{Y}_2(l)$ – последовательность пар отсчетных значений на выходе согласованных фильтров ИГБО, разнесенных по времени запаздывания:

$$\dot{Y}_1(l) = \dot{Z}_1(lT_g) + \dot{n}_1(lT_g),$$

$$\dot{Y}_2(l) = \dot{Z}_2(lT_g) + \dot{n}_2(lT_g).$$

Полагаем, что отсчеты сигналов $\dot{Y}_2(l)$ в антенне *2* скорректированы по времени по отношению к отчетам $\dot{Y}_1(l)$. Сигнальные и помеховые компоненты – комплексные гауссовские случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_Z^2 и σ_N^2 соответственно. Полагаем также, что сигнальные и помеховые компоненты в парах статистически независимые, при условии $l_0 \le l \le l_0 + L$ координатная функция $\beta(t)$ и, соответственно, фаза $\varepsilon(t)$ постоянны. При этих условиях известен квазиоптимальный алгоритм оценки разности фаз сигналов ИГБО [10]:

$$\hat{\varepsilon} = -\arg \sum_{l=l_0}^{l=l_0+L} \dot{Y}_1(l)\dot{Y}_2^*(l). \tag{9}$$

Отношение мощностей сигнальной S и помеховой компонент P в (9) определяется соотношением

$$\frac{S}{P} = (L+1)\frac{\sigma_Z^4}{\sigma_N^4 + 2\sigma_Z^2\sigma_N^2}. \tag{10}$$

Таким образом, при увеличении длительности L пропорционально увеличиваются также значения S/P, что определяет повышение точности оценивания интерферометрической разности фаз $\hat{\varepsilon}$.

Алгоритм (9) определяет метод обработки сигналов ИГБО с накоплением. Принятые условия относительно функционирования алгоритма являются достаточно проблематичными. Например, постоянство координатной функции при изменении запаздывания (расстояния) выполняется лишь в случае совпадения наклона зондируемого участка поверхности с направлением на антенную систему. Вместе с тем рассматриваемый алгоритм с накоплением при некоторых дополнительных условиях является эффективным. Ниже приведены общие положения, доказывающие это утверждение.

Аппроксимируем $\varepsilon(l) = 2\pi\beta(l)X/\lambda$ линейной модельной зависимостью

$$\varepsilon(l) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(l - l_0); \quad l_0 \le l \le l_0 + L. \tag{11}$$

Здесь ε_0, $\Delta\varepsilon$ – параметры модели.

В этом случае имеем

$$\left\langle \sum_{l=l_0}^{l=l_0+L} Y_1(l)Y_2^*(l) \right\rangle = \\ = \sigma_Z^2 \exp(-j\left(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon\, L/2\right)) \frac{\sin \Delta\varepsilon\,(L+1)/2}{\sin \Delta\varepsilon/2}. \quad (12)$$

В предположении $\Delta\varepsilon/2 \ll 1$ и счетов статистической независимости разнесенных пар отсчетов справедливо условие – дисперсия случайной помеховой компоненты в сумме (9) будет такая же, как при постоянной $\varepsilon(l)$. В этом случае отношение сигнал/помеха вычислим по формуле

$$\frac{S}{P} \cong (L+1)\frac{\sigma_Z^4}{\sigma_N^4 + 2\sigma_Z^2\sigma_N^2}\left(\frac{\sin \Delta\varepsilon\,(L+1)/2}{\Delta\varepsilon\,(L+1)/2}\right)^2. \quad (13)$$

Если приращение фазы на интервале усреднения будет большим, то по отношению к (10) наблюдается проигрыш в отношении S/P, но если приращение фазы на участке удовлетворяет условию $\Delta\varepsilon(L+1) \le \pi/2$, то проигрыш (13) по сравнению с (10) составляет не более 1 дБ.

Таким образом, накопление может значительно повысить соотношение сигнал/помеха при вычислении разности фаз сигналов ИГБО. Однако применение его на практике требует разработки рекомендаций по выбору интервалов накопления. Интервал накопления зависит от скорости изменения фазы ε и, соответственно, координатной функции β в зависимости от задержки lT_g. Задержка, в свою очередь, пропорциональна дальности до отражающего участка. На первом этапе обработки относительно координатной функции можно принять наиболее правдоподобную гипотезу в виде горизонтальной отражающей поверхности, расположенной на глубине, определяемой по моменту первого обнаружения эхо-сигналов. Рассмотрим количественные соотношения для принятия этой гипотезы.

Пусть $t = lT_g$ – время задержки, а $t_0 = l_0T_g$ – момент первого обнаружения, определяемый по яркостной картине. Для горизонтальной поверхности $\cos\varphi = t_0/t$ производная координатной функции по задержке имеет вид

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{t_0}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\cos(\theta-\varphi). \quad (14)$$

Приращение фазы ε за интервал времени $\Delta\tau = LT_g$ пропорционально производной. Допустимый интервал накопления $L(l)$ определяем как интервал, при котором приращение достигает некоторого значения (приращение может достигать величины $\pi/2$ и более). С учетом отклонения гипотетической координатной функции от истинной приращение задается меньшим $\pi/2$. Задавая значение приращения $\pi/4$ для горизонтальной поверхности, определяем соотношение для допустимого интервала накопления:

$$L(l) = \frac{1}{8}\frac{\lambda}{X}\frac{l_0}{p(\varphi)}, \quad (15)$$

где $p(\varphi)$ – множитель при $-1/t_0$ в соотношении (14).

При значениях $l \approx l_0$ интервалы накопления незначительны, т.е. накопление в этом случае нецелесообразно. Вместе с тем при интервале дискретизации, меньшем разрешающей способности по задержке ($1/\Delta F$), допустимо усреднение на начальном участке на временном интервале длительностью $L = 1/(\Delta F T_g)$.

Из (15) следует, что интервал накопления существенно увеличивается с увеличением угла φ. Так, при $\varphi = 80°$ интервал накопления можно увеличить в 70 раз по сравнению с углом в 20°. Учитывая, что с увеличением угла увеличивается дальность и, соответственно, затухание, увеличение интервала накопления частично компенсирует затухание. Реализация этого полезного свойства осуществляется с помощью переменного интервала накопления, увеличивающегося с увеличением номера отсчета l. При этом интервал накопления определяется как интервал, на котором гипотетическая фаза изменяется на некоторую заданную величину, например $\pi/8$.

В целом алгоритм с накоплением осуществляет некоторое сглаживание поведения фазы в зависимости от задержки, внося при этом некоторые систематические погрешности и снижая погрешности, обусловленные аддитивной помехой. Поэтому для исключения систематической погрешности при хорошем отношении сигнал/помеха, т.е. при малых дальностях, интервал накопления нужно брать минимальным, равным $1/(\Delta F T_g)$. При большой дальности до поверхности морского дна погрешности за счет аддитивной помехи могут оказаться чрезвычайно высокими и возникнет необходимость увеличения интервала накопления.

4. АППРОБАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ

Проверка эффективности рассматриваемых методов обработки зондирующих сигналов выполнена с использованием экспериментальных данных. На основе этих данных вычислены разности фаз сигналов ИГБО, представленные в виде полутонового изображения с использованием гипотезы слабопересеченного рельефа. Экспериментальные данные были получены для параметров ИГБО: размер антенной базы $\Delta x/\lambda = 17$, где λ – длина волны зондирующего сигнала; цен-

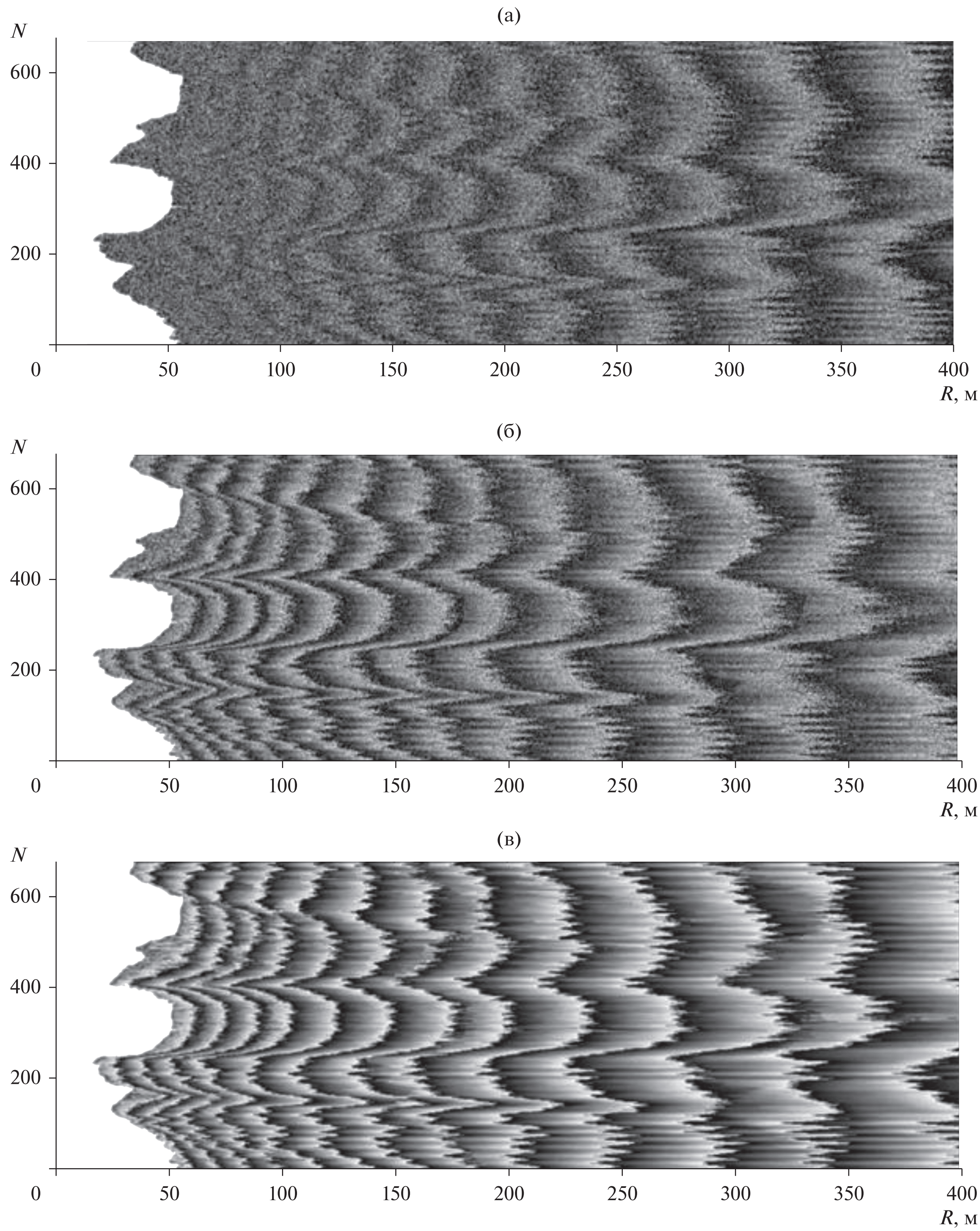

Рис. 3. Разность фаз сигналов в каналах ИГБО, полученная без использования коррекции и накопления (а), с использованием алгоритма коррекции времени выборки и без накопления (б), с использованием алгоритмов коррекции и накопления (в); R – наклонная дальность от антенны ИГБО до поверхности морского дна, N – номер линии зондирования ИГБО.

тральная частота сигнала f_0 равна 70 кГц; ширина полосы частот $\Delta F = 8$ кГц; ориентировочная глубина 100 м. При выборе переменных интервалов накопления предполагалось, что набег фазы ε не превышал $\pi/8$. Учитывая, что при переходе к координатной функции осуществляется деление на 2π и на размер антенной базы, такой допуск представляется вполне приемлемым.

На рис. 3а представлена разность фаз сигналов в каналах ИГБО, построенная в виде полутонового изображения, вычисленная без использования коррекции времени дискретизации сигналов и усреднения вдоль линии зондирования. На рис. 3б представлена разность фаз сигналов в каналах ИГБО, вычисленная с использования коррекции времени дискретизации (использовалась коррекция моментов взятия отсчетов). На рис. 3в представлена разность фаз сигналов в каналах ИГБО, вычисленная с использования коррекции времени дискретизации сигналов и усреднением вдоль линии зондирования. Отметим, что для исключения ошибок за счет действия гиростабилизации антенн последняя не функционировала, поэтому влияние качки и вертикальных перемещений носителя явно видны на фазограммах.

Из рис. 3а–3в видно, что в предположении слабопересеченного рельефа морского дна и без использования информации от датчиков гиростабилизации носителя предложенные алгоритмы существенно уменьшают шумовую составляющую на полутоновом изображении интерферометрической разности фаз сигналов ИГБО.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате теоретического анализа разработаны и обоснованы методы оценивания разностей фаз канальных сигналов интерферометрического гидролокатора бокового обзора, применение которых существенно повышает точность производимых оценок. Предлагаемые методы и разработанные алгоритмы цифровой обработки канальных сигналов при оценивании разностей их фаз основаны на коррекции времени дискретизации сигналов в каналах ИГБО, а также на когерентном усреднении сигналов вдоль линии зондирования в предположении стационарности акустических каналов распространения.

Эффективность рассмотренных алгоритмов подтверждена экспериментально при обработке реальных сигналов ИГБО. Реализация предложенных алгоритмов зависит от конкретной, априорно неизвестной координатной функции β [4] и от функционирования датчиков гиростабилизации носителя.

Для учета однозначности реальной координатной функции можно предложить ИГБО с тремя и более антеннами, где одна база интерферометра будет удовлетворять условию пространственно-временной узкополосности и использоваться для приближенной и однозначной оценки координатной функции, остальные – для увеличения детальности картирования дна. Развитие этого направления составляет перспективное исследование для теории и практических приложений систем ИГБО.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (№ 0030-2019-0008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Разманов В.М., Кривцов А.П., Долотов С.А.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 1. С. 58.
2. *Каевицер В.И., Разманов В.М.* // Радиотехника. 2005. № 12. С. 9.
3. *Калькович С.Е., Пономарев В.И., Шкварко Ю.В.* Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в каналах с рассеянием. М.: Радио и связь, 1989.
4. *Каевицер В.И., Смольянинов В.М., Смольянинов И.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 8. С. 798.
5. *Каевицер В.И., Разманов В.М., Кривцов А.П. и др.* // Радиотехника. 2008. № 8. С. 35.
6. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 2004.
7. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином; Лаборатория знаний, 2020.
10. *Каевицер В.И., Назаров Л.Е., Смольянинов В.М., Смольянинов И.В.* // РЭ. 1995. Т. 40. № 1. С. 6.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 798–804

К 100-ЛЕТИЮ В.И. ТИХОНОВА

УДК 621.391

СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛА В ПРИЕМНИКЕ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАНИЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕЙ ПРОЦЕДУРЫ И МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© 2021 г. Н. Е. Поборчая*

Московский технический университет связи и информатики,
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация
**E-mail: n.poborchaya@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.12.2020 г.
После доработки 04.02.2021 г.
Принята к публикации 19.04.2021 г.

Рассмотрен синтез нелинейного алгоритма совместного оценивания параметров сигнала в условиях априорной неопределенности относительно законов распределения шумов с использованием теории регуляризации и метода нелинейной фильтрации в скользящем временном окне постоянной длины. Показано, что помехоустойчивость предложенного алгоритма выше, чем у нелинейной фильтрации, а также что он обладает вычислительной сложностью меньше, чем известная процедура совместного оценивания, и позволяет в некоторых случаях сократить количество арифметических операций по сравнению с регуляризующим алгоритмом.

DOI: 10.31857/S0033849421080064

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При синтезе алгоритмов совместного оценивания неизвестных параметров сигнала, как правило, используют методы минимума средней квадратической ошибки (СКО), максимального правдоподобия (МП), максимальной апостериорной плотности распределения вероятности [1–4]. Недостатком такого подхода является необходимость знания законов распределения случайных процессов, входящих в модель наблюдаемого сигнала [5]. При гауссовских шумах хорошо известным результатом является рекуррентная фильтрация Калмана для линейной модели процессов и рекуррентная фильтрация Стратоновича для нелинейной. Большой вклад в развитие теории оценивания и оптимальной рекуррентной фильтрации внес В.И. Тихонов [6–11]. Если же законы распределения неизвестны, то используют метод наименьших квадратов (МНК) или усреднение по времени. МНК не встречает математических трудностей при выводе алгоритма оценивания неизвестных параметров, если модель процессов линейная [12, 13]. При нелинейной модели встает вопрос о том, каким методом решать систему нелинейных уравнений, чтобы не было расходимости алгоритма. Кроме того, процедуры оценивания при этом обладают высокой вычислительной сложностью [14]. Усреднение по времени при нахождении оценок параметров сигнала требует большого объема выборки наблюдаемого процесса. Существует много работ, посвященных процедурам раздельного оценивания параметров, но они уступают по точности алгоритмам совместной оценки, также часто оценивается только часть неизвестных параметров, остальные не учитываются в модели сигнала или считаются известными [1, 2, 15–21]. В работе [3] приведен алгоритм совместной оценки искажений сигнала в тракте приемника прямого преобразования, который обладает высокой точностью оценивания и полностью решает задачу определения значений амплитудно-фазового дисбаланса, сдвига частоты и постоянных составляющих для систем с одной передающей и приемной антенной (SISO), с несколькими передающими и приемными антеннами (MIMO), а также для систем со многими несущими с ортогональным частотным разделением (OFDM). Но предложенная процедура требует большого количества арифметических операций. Для оценки частоты записан только критерий, в который она входит нелинейно и в неявном виде. Поэтому остается открытым вопрос по ее поиску. Для остальных искажений получены замкнутые выражения для оценок, зависящие от полученной ранее оценки сдвига частоты. В работе [4] рассматривается совместная оценка приведенных выше искажений, полученная по критерию максимального правдоподобия при гауссовских шумах. Данный критерий приводит к системе сложных нелинейных уравнений, которые были решены итерационно, без описания метода. Эти обстоятельства обусловливают необходимость разработки вычислительно эффективных методов определения значений амплитудно-фазового дисбаланса, сдвига частоты и постоянных составляющих для систем SISO, MIMO и OFDM.

Рассмотрим квадратуры сигнала $\mathbf{y}_i = (y_{ci}, y_{si})^T$ на фоне аддитивного шума $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{ci}, \mu_{si})^T$ в тракте приемника прямого преобразования на примере сигнала М позиционной квадратурной амплитудной модуляции (M-QAM) в системе SISO:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i + \boldsymbol{\mu}_i. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{z}_i = (z_{ci}, z_{si})^T = \mathbf{S}_i(\boldsymbol{\Theta}_i)$, $i = \overline{1,m}$ – дискретное время, $m = T_0/\Delta t$, T_0 – время наблюдения, Δt – интервал дискретизации, $\mathbf{S}_i(\bullet)$ – нелинейная вектор-функция, описывающая квадратурные компоненты сигнала z_{is}, z_{ic}:

$$z_{ic} = A\sum_{k=1}^{i} g(\Delta t i - kT - \tau_i)(I_{kq}\cos(\varphi_{ci}) - \\ - J_{kr}\sin(\varphi_{ci})) + b_{ci},$$

$$z_{is} = \gamma_i A\sum_{k=1}^{i} g(\Delta t i - kT - \tau_i)(I_{kq}\sin(\varphi_{si}) + \\ + J_{kr}\cos(\varphi_{si})) + b_{si},$$

где $\varphi_{ci} = \Delta\omega_i(\Delta t i - \tau_i) + \varphi_i$, $\varphi_{si} = \varphi_{ci} + \Delta\varphi_i$, I_{kq}, J_{kr} – информационные амплитуды, принимающие дискретные значения, $q, r = \overline{1:\sqrt{M}}$, $g(t)$ – импульсная характеристика канала, частотная характеристика которого имеет вид “приподнятого косинуса”, A – амплитуда сигнала, φ_i – случайная фаза, образованная фазами генераторов на приемной и передающей стороне и задержкой в канале распространения, Δf_i – частота, оставшаяся от снятия несущей, $\Delta\omega_i = 2\pi\Delta f_i$, τ_i – задержка сигнала, возникающая при работе генератора тактовой синхронизации, $(j-1)T \le \Delta t i - \tau_i \le jT$, T – длительность символа $I_{kq}(J_{kr})$ (тестового или информационного), $j = \overline{1:n}$, $n = T_0/T$, γ_i, $\Delta\varphi_i$ – дисбаланс по амплитуде и фазе соответственно, b_{ci}, b_{si} – медленно меняющиеся “постоянные” составляющие квадратурных компонент сигнала.

Квадратуры z_{ci}, z_{si} сигнала можно переписать в следующей форме:

$$z_{ic} \cong \sum_{l=1}^{p} a_l(I_{i-l+1,q}\cos(\varphi_{ci}) - J_{i-l+1,r}\sin(\varphi_{ci})) + b_{ci},$$

$$z_{is} \cong \gamma_i\sum_{l=1}^{p} a_l(I_{i-l+1,q}\sin(\varphi_{si}) + J_{i-l+1,r}\cos(\varphi_{si})) + b_{si}.$$

Вектор $\boldsymbol{\Theta}_i$ оцениваемых параметров в этом случае имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \left(a_{1i}, \ \ldots, \ a_{pi} \ \ \varphi_i \ \ \Delta f_i \ \ \gamma_i \ \ \Delta\varphi_i \ \ b_{ci} \ \ b_{si}\right)^T,$$

где $a_{1i}, \ldots, a_{pi}$ – амплитуды основного импульса сигнала и $p-1$ “хвостов” прошлых импульсов в i-й момент времени, полученных в результате межсимвольной интерференции.

Задача оценивания неизвестных параметров решалась по тестовой последовательности вида информационного сигнала при следующих условиях:

1. процесс $\boldsymbol{\mu}_i$ – стационарный, $E\boldsymbol{\mu}_i = \overline{\mathbf{0}}_{2\times 1}$, $E\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^T = \sigma_\mu^2\mathbf{I}_{2\times 2}$ – ковариационная матрица шумов наблюдения, $E\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_j^T = \mathbf{0}_{2\times 2}$ при $i \ne j$, E – оператор математического ожидания, $\mathbf{I}_{2\times 2}$ – единичная матрица размером 2×2,
2. $\varphi_i = \varphi_0 + \alpha_i, \alpha_i = b_0\zeta_{i\varphi} + b_1\zeta_{i-1\varphi} + b_2\zeta_{i-2\varphi}$ – фазовый шум, $E\zeta_{i\varphi} = 0$, $E\zeta_{i\varphi}^2 = \sigma_{\zeta\varphi}^2$, $E\zeta_{i\varphi}\zeta_{j\varphi} = 0$ при $i \ne j$,
3. $\Delta f_i \ne 0 = \mathrm{const}$,
4. $b_{ci} = \mathrm{const}$, $b_{si} = \mathrm{const}$,
5. $\Delta\varphi_i = \mathrm{const}$, $\gamma_i = \mathrm{const}$,
6. амплитуда сигнала и импульсная характеристика канала неизвестны,
7. амплитуды $a_{1i}, \ldots, a_{pi}$ за время наблюдения не зависят от времени, $a_{ki} = a_k, k = 1, \ldots, p$,
8. шаг дискретизации $\Delta t = T$, т.е. взят один отсчет на тестовый символ, $m = n$.

Требуется по выборке $\mathbf{y}_i$ найти оценку $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ вектора $\boldsymbol{\Theta}$.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАНИЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА И НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Поставленная задача была решена с помощью регуляризующего алгоритма и процедуры нелинейной фильтрации с тейлоровской аппроксимацией до первого приближения нелинейной вектор-функции $\mathbf{S}_i(\bullet)$ наблюдений, которые описаны в [22–28]. Регуляризующий алгоритм итерационно обрабатывает целиком всю выборку, нелинейная фильтрация – отсчеты квадратур сигнала в каждый момент времени. Начальная тактовая синхронизация осуществлена, как показано в [23].

Регуляризующий алгоритм применялся также в системах с MIMO и OFDM, нелинейная фильтрация использовалась для уточнения некоторых параметров OFDM-сигнала [26–28].

Была произведена приближенная оценка вычислительной сложности для рассматриваемых процедур: количество арифметических операций у регуляризующего алгоритма пропорционально mM_0, где M_0 – количество итераций, причем, как правило, $M_0 < m$; у нелинейной фильтрации – пропорционально m, а у алгоритма из [3] – пропорционально m^3.

Для возможности уменьшения количества вычислительных операций в данной работе предлагается совместить регуляризующий алгоритм с процедурой фильтрации [6–8] в скользящем временном окне, длина которого $m_0 < m$.

С использованием (1) сформируем вектор наблюдений

$$\mathbf{Y}_i = \left(\mathbf{y}_i^T \ \mathbf{y}_{i-1}^T \ \cdots \ \mathbf{y}_{i-m_0+1}^T\right)^T,$$

где $\mathbf{y}_i = (y_{is} \ y_{ic})^T$, $i = m_0, m_0+1, \ldots$ – дискретное время. Тогда получим модель наблюдаемого сигнала в виде

$$\mathbf{Y}_i = \overline{\mathbf{S}}_i(\boldsymbol{\Theta}_i) + \overline{\boldsymbol{\mu}}_i, \tag{2}$$

где

$$\overline{\mathbf{S}}_i(\boldsymbol{\Theta}_i) = \left(\mathbf{S}_i^T(\boldsymbol{\Theta}_i) \ \mathbf{S}_{i-1}^T(\boldsymbol{\Theta}_i) \ \cdots \ \mathbf{S}_{i-m_0+1}^T(\boldsymbol{\Theta}_i)\right)^T,$$

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}_i = \left(\boldsymbol{\mu}_i^T \ \boldsymbol{\mu}_{i-1}^T \ \cdots \ \boldsymbol{\mu}_{i-m_0+1}^T\right)^T.$$

Так как оцениваемый вектор параметров медленно изменяется со временем, то его можно представить в виде авторегрессии первого порядка:

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\Theta}_{i-1} + \boldsymbol{\xi}_i. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}_i$ – вектор белого шума с нулевым средним значением и ковариационной матрицей $E\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i^T = \sigma_\xi^2\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размером $(p+6)\times(p+6)$. Разложим нелинейную вектор-функцию уравнения (2) в ряд Тейлора до первого приближения в точке $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1}$, тогда (2) можно переписать в следующей форме:

$$\mathbf{Y}_i \cong \overline{\mathbf{D}}_{i-1}\mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}_i) + \overline{\boldsymbol{\mu}}_i, \tag{4}$$

где

$$\overline{\mathbf{D}}_{i-1} = \left(\overline{\mathbf{d}}_{i-1,0} \ \overline{\mathbf{d}}_{i-1,1}\right),$$

$$\overline{\mathbf{d}}_{i-1,0} = \overline{\mathbf{S}}_i(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1}) - \overline{\mathbf{S}}_i'(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1})\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1},$$

$$\overline{\mathbf{d}}_{i-1,1} = \overline{\mathbf{S}}_i'(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1}),$$

$\overline{\mathbf{S}}_i'(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1})$ – первая производная функции $\overline{\mathbf{S}}_i(\bullet)$ в точке $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1}$,

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\Theta}_i \end{pmatrix}_{(p+7)\times 1}.$$

Далее возьмем от левой и правой части выражения (3) функцию $\mathbf{F}(\bullet)$ и разложим правую часть получившегося равенства в ряд Тейлора до первого приближения в точке $\boldsymbol{\Theta}_{i-1}$, в результате получим

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}_i) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}_{i-1}) + \mathbf{W}\boldsymbol{\xi}_i, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times(p+6)} \\ \mathbf{I}_{(p+6)\times(p+6)} \end{pmatrix}.$$

Учитывая (4) и (5), запишем модифицированный метод наименьших квадратов в виде функционала Тихонова относительно переменной $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Theta}_i)$ (причем $\boldsymbol{\Theta}_i = \mathbf{L}\mathbf{f}_i$, $\mathbf{L} = \mathbf{W}^T$):

$$\Phi(\mathbf{f}_i) = \left\|\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{D}}_{i-1}\mathbf{f}_i\right\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 + \lambda_i\left\|\mathbf{f}_i - \widehat{\mathbf{f}}_{i-1}\right\|_{\mathbf{P}_i^{-1}}^2, \quad i = m_0, \ m_0+1, \ldots \tag{6}$$

Здесь λ_i – регуляризующий множитель Лагранжа, эвклидовы нормы определяются с учетом весовых матриц $\mathbf{Q}, \mathbf{P}_i$:

$$\left\|\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{D}}_{i-1}\mathbf{f}_i\right\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 = (\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{D}}_{i-1}\mathbf{f}_i; \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{D}}_{i-1}\mathbf{f}_i)),$$

$$\left\|\mathbf{f}_i - \widehat{\mathbf{f}}_{i-1}\right\|_{\mathbf{P}_i^{-1}}^2 = (\mathbf{f}_i - \widehat{\mathbf{f}}_{i-1}; \mathbf{P}_i^{-1}(\mathbf{f}_i - \widehat{\mathbf{f}}_{i-1})),$$

$(\bullet;\bullet)$ – скалярное произведение. Оценка $\widehat{\mathbf{f}}_i$ ищется с помощью минимизации (6) : $\widehat{\mathbf{f}}_i = \arg\min_{\mathbf{f}_i}\Phi(\mathbf{f}_i)$ в условиях ограничения

$$\frac{\left\|\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{S}}_i(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i)\right\|^2}{2(m_0-1)} = \sigma_\mu^2.$$

В результате получаем следующие выражения:

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i = \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1} + \mathbf{L}\mathbf{K}_i(\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{S}}_i(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1})), \ i = m_0, \ m_0+1, \ldots \tag{7}$$

где

$$\mathbf{K}_i = (\sigma_\mu^2\mathbf{I} + \lambda_i\mathbf{P}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1}^T\overline{\mathbf{D}}_{i-1})^{-1}\lambda_i\mathbf{P}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1}^T,$$

$$\mathbf{P}_i = \boldsymbol{\Gamma}_{i-1} + \mathbf{W}\mathbf{W}^T\sigma_\xi^2,$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1})\mathbf{P}_i(\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1})^T + \mathbf{K}_i\mathbf{Q}\mathbf{K}_i^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1})\mathbf{P}_{i-1f\mu}\mathbf{K}_i^T + \mathbf{K}_i\mathbf{P}_{i-1f\mu}^T(\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1})^T,$$

$$\mathbf{P}_{i-1f\mu} = E(\hat{\mathbf{f}}_{i-1}\boldsymbol{\mu}^T) = \mathbf{K}_{i-1}\mathbf{Q} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i-1}\mathbf{D}_{i-2})\mathbf{P}_{i-2f\mu},$$

$$\mathbf{Q} = \sigma_\mu^2\mathbf{I}_{2m_0\times 2m_0},$$

$\mathbf{I}$ – единичная матрица размером $(p+7)\times(p+7)$, $\mathbf{I}_{2m_0\times 2m_0}$ – единичная матрица размером $2m_0\times 2m_0$, $\sigma_\xi^2 \to 0$, начальные условия: $\mathbf{P}_{m_0f\mu} = \mathbf{0}_{(p+7)\times 2m_0}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{m_0}, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{m_0}$ – из априорных сведений. Множитель Лагранжа рассчитывается по формуле

$$\lambda_i \approx \frac{\sqrt{2m_0}\,\sigma_\mu\left(\dfrac{\left\|\mathbf{Y}_i - \overline{\mathbf{S}}_i(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i-1})\right\|}{\sqrt{2(m_0-1)}} - \sigma_\mu\right)}{\left\|\mathrm{diag}(\overline{\mathbf{D}}_{i-1}\mathbf{P}_i\overline{\mathbf{D}}_{i-1}^T)\right\|}. \tag{8}$$

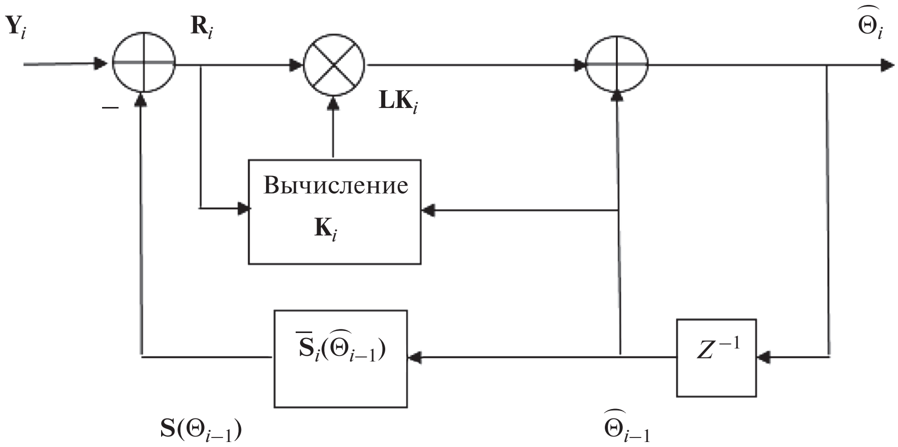

Рис. 1. Структурная схема алгоритма оценивания (7).

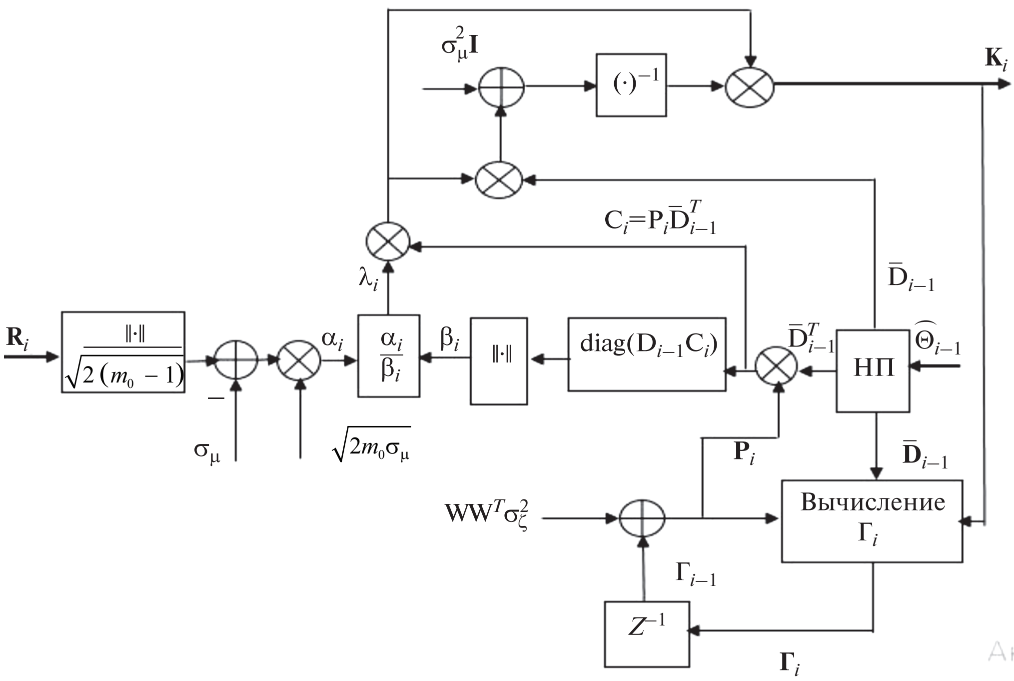

Рис. 2. Структурная схема формирования матрицы $\mathbf{K}_i$ из алгоритма (7) и регуляризующего множителя Лагранжа (8); НП – нелинейный преобразователь.

На рис. 1 представлена структурная схема алгоритма оценивания (7), на рис. 2 – структура формирования матрицы $\mathbf{K}_i$ с учетом определения регуляризующего множителя Лагранжа (8), на рис. 3 – структура формирования ковариационной матрицы ошибок фильтрации $\mathbf{\Gamma}_i$.

Получены приближенные выражения для вычислительной сложности соответственно регуляризующего алгоритма и процедуры (7), (8):

$$N_{\text{рег}} \cong 0.5\big((36(p+6)^2 + 36(p+6) + 20)m + \\ + 8(p+6)^3 + 7(p+6)^2 + 11(p+6) + 12\big) M_0,$$

$$N_{(7),(8)} \cong 0.5\big((36(p+6)^2 + 36(p+6) + 20)m_0 + \\ + 8(p+6)^3 + 7(p+6)^2 + 11(p+6) + 12\big) M_0.$$

Различие между данными процедурами состоит в том, что регуляризующий алгоритм обрабатывает итерационно всю выбору длиной m целиком, а (7), (8) – выборку длиной m_0 в скользящем временном окне, причем при количестве итераций $M_0 = m - m_0$ он в результате для оценивания использует тот же объем сигнала m, что и регуляризующий алгоритм. При одинаковых количестве итераций у обоих процедур и длине скользящего окна для (7), (8) $m_0 = m - M_0$ можно достичь некоторого сокращения вычислительной сложности относительно регуляризующего алгоритма, рассчитанного по формуле

$$\delta = \frac{N_{\text{рег}} - N_{(7),(8)}}{N_{\text{рег}}} \times 100\%. \tag{9}$$

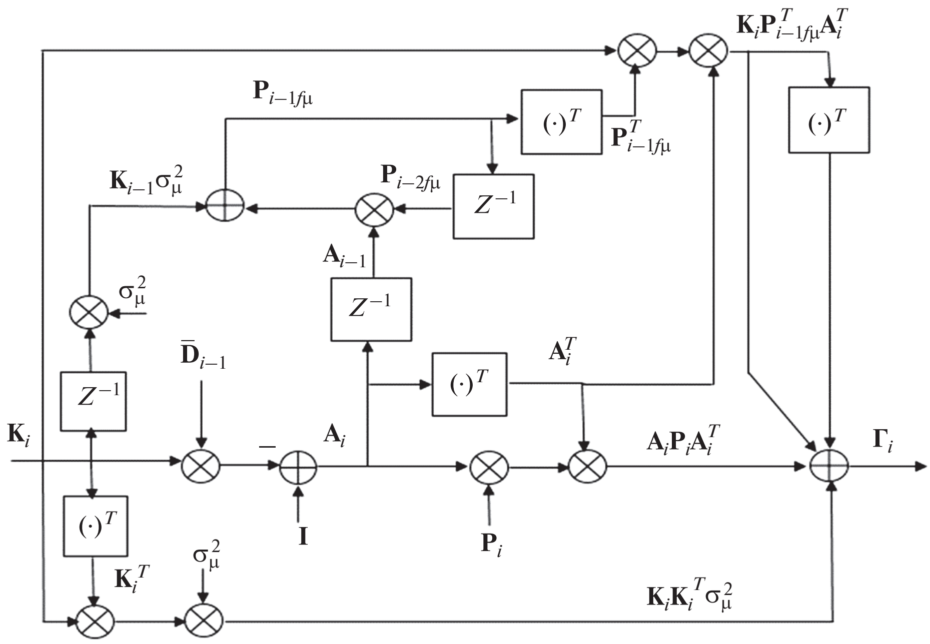

Рис. 3. Структурная схема формирования ковариационной матрицы ошибок фильтрации Γ_i.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проведено сравнение помехоустойчивости приема сигнала 64-QAM на фоне аддитивного белого гауссовского шума при использовании для оценки неизвестных параметров сигнала регуляризующего алгоритма, процедуры нелинейной фильтрации и известного совместного алгоритма оценивания [3] (рис. 4). Оценка частоты в известном алгоритме [3] производилась методом перебора Q_0 значений частоты из априори выбранного интервала и подстановкой их в критерий оптимальности. На рис. 5 представлены зависимости помехоустойчивости приема сигнала 64-QAM при использовании для оценивания его параметров алгоритмов, представленных на рис. 4, и комбинированной процедуры (7), (8). Предложенный алгоритм (7), (8) делал $m - m_0$ итераций. Моделирование проводили при следующих условиях: $p = 1$, $\gamma = 0.5$, $\Delta f = 180.7$ Гц, $T = 0.25$ мкс, $\varphi_0 = \pi/12$, $\Delta\varphi = \pi/18$, $b_c = 1.3$, $b_s = 2$, СКО фазового шума – один градус, объем анализируемой выборки тестового сигнала $m = 500$, длина информационной последовательности – 2000 символов. Длина оцениваемого вектора у всех трех алгоритмов одинаковая и равна 7.

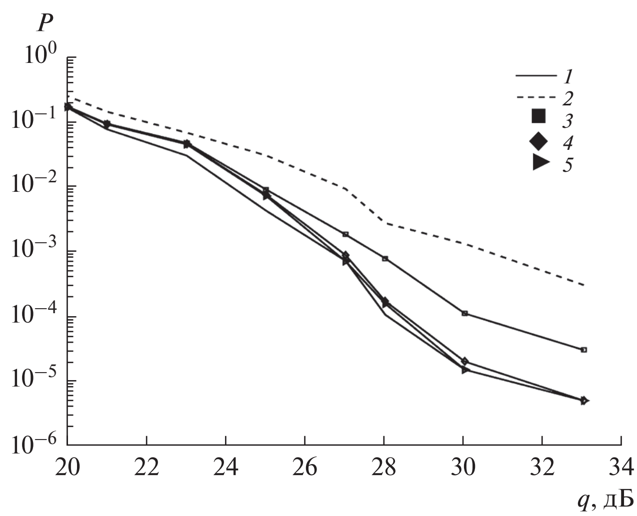

Рис. 4. Зависимости экспериментальной вероятности ошибки на символ P приема сигнала 64-QAM от отношения сигнал/шум q, полученные при использовании регуляризующего алгоритма [24] (кривая *1*), нелинейной фильтрации [24] (кривая *2*) и алгоритма совместного оценивания из [3] при $Q_0 = 25$ (*3*), 50 (*4*) и 100 (*5*).

Из рис. 4 видно, что регуляризующий алгоритм имеет выигрыш в помехоустойчивости перед процедурой нелинейной фильтрации от 1 до 5.5 дБ и сравним с известным алгоритмом при $Q_0 = 50;100$. Если же $Q_0 = 25$, то он выигрывает у известной совместной процедуры оценивания до 4 дБ. Исходя из рис. 4 можно сделать вывод, что самым предпочтительным является регуляризующий алгоритм.

Уменьшение длины скользящего окна приводит к потере в энергетической эффективности (см. рис. 5, кривые *4*–*6*), поэтому необходимо ис-

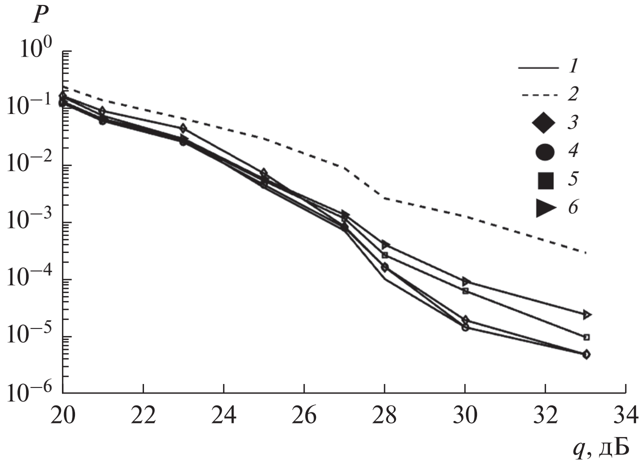

Рис. 5. Зависимости экспериментальной вероятности ошибки на символ P приема сигнала 64-QAM от отношения сигнал/шум q, полученные при использовании разных алгоритмов оценивания параметров сигнала: регуляризующий алгоритм (кривая *1*), нелинейная фильтрация (кривая *2*), алгоритм совместного оценивания из [3] при $Q_0 = 50$(*3*), алгоритм (7), (8) при $m_0 = 480$ (*4*), 450 (*5*) и 400 (*6*).

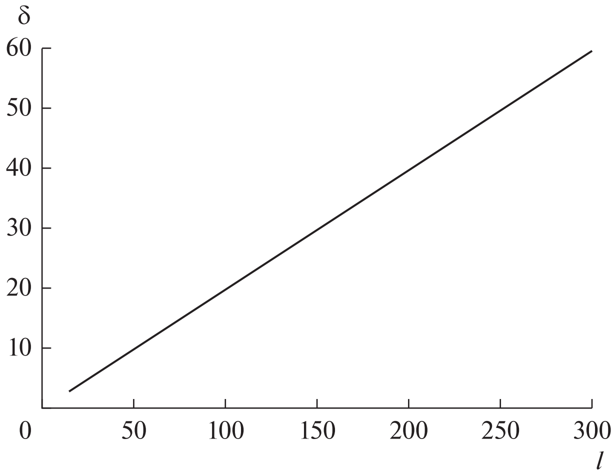

Рис. 6. Зависимость сокращения числа арифметических операций δ от числа итераций l.

кать компромисс между длиной временного окна m_0, помехоустойчивостью и вычислительной сложностью.

На рис. 6 показана количественная оценка сокращения вычислительной сложности у (7), (8) относительно регуляризующего алгоритма при $p = 1$, $p + 6 = 7$, $m = 500$, рассчитанная по формуле (9).

Так, при объеме анализируемой выборки сигнала 500, количестве оцениваемых параметров, равном 7, и числе итераций 50 упрощение составляет около 10%.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предложенный алгоритм (7), (8) совместного оценивания неизвестных параметров случайного процесса, прошедшего тракт приемника прямого преобразования, позволяет при правильно подобранных длине скользящего окна и объеме выборки тестовой последовательности сократить вычислительную сложность при приемлемой потере в энергетической эффективности относительно известных алгоритмов совместного оценивания искажений сигнала. Например, при длине выборки в 500 тестовых символов, количестве итераций $M_0 = 20$ и длине скользящего окна $m_0 = 480$ упрощение составляет 4% без потери в энергетической эффективности, а при $M_0 = 50$, $m_0 = 450$ сложность падает на 10%, практически без потерь в помехоустойчивости при отношении сигнал/шум 23...27 дБ. При более высоких значениях отношения сигнал/шум (28...33 дБ) потери в энергетической эффективности составят от 0.5 до 2 дБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gappmair W., Koudelka O.* // Proc. 2012 8th Int. Symp. Commun. Systems, Networks and Digital Signal Processing (CSNDSP). Poznan, 18–20 Jul. N.Y.: IEEE, 2012. P. 6292650.
2. *Gappmair W.* // Adv. Electronics and Telecommun. 2013. V. 3. № 5. P. 32.
3. *Hsu Ch.-J., Cheng R., Sheen W.-H.* // IEEE Trans. 2009. V. VT-58. № 5. P. 2201.
4. *Weikert O.* // Proc. 14th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Commun. (SPAWC). Darmstadt, 16–19 Jun. N.Y.: IEEE, 2013. P. 520.
5. *Aziz M., Ghannouchi F.M., Helaoui M.* // Sensors. 2017. V. 17. № 12. P. 2948.
6. *Тихонов В.И., Кульман. Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
7. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
8. *Тихонов В.И., Харисов В.Н., Смирнов В.А.* // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1441.
9. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
10. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
11. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
12. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. М: Высш. школа, 2005.
13. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М: Мир, 1999.

14. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М: Высш. школа, 1994.
15. *Yoshida T., Nojima D., Nagao Y. et al.* // Proc. Int. Conf. on Advanced Technologies for Communications (ATC 2011). Da Nang, 2–4 Aug. N.Y.: IEEE, 2011. P. 327.
16. *Пестряков А.В., Хасьянова Е.Р.* // Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. 2015. Т. 6. № 3. С. 115.
17. *Хасьянова Е.Р.* Исследование и разработка методов компенсации погрешностей квадратурного преобразования в цифровых радиоприемниках с нулевой промежуточной частотой. Дис. ... канд. техн. наук. М: МТУСИ, 2019. 112 с.
18. *Chen Y., Li Y., Gao X., Xia X.-G.* // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 1542.
19. *Khanum K.N., Reddy G.R.* // Proc. Int. Conf. on Emerging Trends in Inform. Technology and Engineering (ic-ETITE 2020). Vellore, 24–25 Feb. N.Y.: IEEE, 2020. P. 1.
20. *Sahoo M., Sahoo H.K.* // 5th Intern. Conf. for Convergence in Technology (I2CT). Bombay, 29–31 Mar. N.Y.: IEEE, 2019. P. 9033748.
21. *Wang X., Hua H., Xu Y.* // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 44936.
22. *Поборчая Н.Е.* // Электросвязь. 2010. № 3. С. 24.
23. *Поборчая Н.Е.* // Электросвязь. 2012. № 5. С. 17.
24. *Поборчая Н.Е.* // Электросвязь. 2013. № 5. С. 24.
25. *Поборчая Н.Е.* // Электросвязь. 2016. № 12. С. 64.
26. *Поборчая Н.Е., Пестряков А.В.* // T-Comm. 2019. Т. 13. № 10. С. 13.
27. *Поборчая Н.Е.* // Электросвязь. 2020. № 6. С. 74.
28. *Poborchaya N.E.* // Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Svetlogorsk, 1–3 Jul. N.Y.: IEEE, 2020. P. 9166068.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 805–809

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.2

ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА СПУТНИКОВЫХ ЛИНИЙ СВЯЗИ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В КЛИМАТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ АРКТИКИ

© 2021 г. М. Н. Андрианов[a], Д. А. Корбаков[b], В. Н. Пожидаев[b, *]

[a]Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп., 53, Москва, 119991 Российская Федерация

[b]Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: vicnic@cplire.ru

Поступила в редакцию 30.09.2020 г.
После доработки 16.01.2021 г.
Принята к публикации 31.03.2021 г.

Рассмотрена возможность применения в условиях Арктики спутниковых линий связи миллиметрового (ММ) диапазона для обеспечения надежной и высокоскоростной связи. Основной проблемой для применения ММ-волн являются возможные метеорологические условия для распространения радиоволн в холодное время года. Вертикальные профили метеорологических данных для пары островов в Северном Ледовитом океане использовались для вычисления молекулярного поглощения на возможной линии связи. Предложена очень простая модель ослабления радиоволн в дождях на такой линии. Орбиты спутников для вычисления запаса линии на затухание предполагались как в существующей спутниковой системе "Гонец", работающей на частотах 300/400 МГц. Результаты вычислений показывают, что спутниковая связь в ММ-диапазоне в Арктике возможна.

DOI: 10.31857/S0033849421080015

Основными проблемами при исследовании возможности реализации спутниковых линий связи для Арктики являются выбор орбиты движения спутника (спутников), оценка затухания в свободном пространстве на трассе распространения радиоволн, поглощение радиоволн атмосферными газами при характерных метеорологических условиях и возможное затухание в гидрометеорах. Эта работа является продолжением работы [1], где проводился расчет такой линии связи и была дана оценка возможности осуществления передачи информации по высокоскоростному каналу миллиметровых (ММ) волн в Арктических широтах. В этой работе проводятся дальнейшие оценки, посвященные влиянию турбулентности на пропускную способность линии связи в тех же условиях.

Повторим кратко некоторые оценки, проведенные в работе [1].

В качестве прототипа спутника (космического аппарата) (КА) была выбрана существующая спутниковая система "Гонец". Двенадцать спутников расположены на высоте около 1400 км, движутся почти по круговым орбитам с полным временем обращения 114 мин. Линии связи работают на частотах 300/400 МГц. Эта система обеспечивает подвижную связь и передачу данных в удаленных и труднодоступных районах, включая территории Крайнего Севера. Поэтому принимаем существующие параметры орбит движения аппаратов и исследуем применимость для связи гигагерцового (ММ-волн) диапазона волн в климатических условиях Арктики. Связь осуществляется по системе: наземный терминал–спутник–спутник–наземный терминал. Один из спутников всегда будет находиться в заданной точке для осуществления приема-передачи информации. В северных широтах время ожидания сеанса связи абонентом для системы из 12 КА составляет ноль минут, т.е. обмен данными с абонентом происходит в режиме реального времени. Применение ММ-диапазона позволит организовать высокоскоростной канал.

Для конкретных расчетов выберем два острова: о. Визе (79° с.ш.) и о. Врангеля (70° с.ш.).

Если смоделировать траекторию движения спутника как круг радиусом 7800 км вокруг сферической Земли, то из геометрических соображений можно определить и углы места на спутник из точки наблюдения, и дальности до спутника при его непрерывном движении по орбите. Если мы примем, что связь со спутником реализуется только тогда, когда его угол места более 10°, то

Таблица 1. Характерные приземные значения среднемесячных параметров воздуха

Пункт	Месяц	P, мбар	T, С	a, г/м^3
о. Визе	Январь	1013	−27.0	0.39
о. Визе	Июль	1007	0.0	3.95
о. Врангеля	Январь	1024	−23.8	0.43
о. Врангеля	Июль	1011	2.1	4.25

Таблица 2. Значения зенитного поглощения (в дБ)

Пункт	Месяц	f, ГГц				
		30	40	70	80	90
о. Визе	Январь	0.22	0.58	2.05	0.51	0.30
о. Визе	Июль	0.21	0.45	2.08	0.71	0.58
о. Врангеля	Январь	0.22	0.57	2.10	0.57	0.32
о. Врангеля	Июль	0.22	0.45	2.09	0.75	0.65

получаются следующие величины: время пролета спутника через точку зенита над приемным пунктом 16.5 мин, дальность до спутника, когда его угол места 10°, составляет около 3480 км. При движении спутника эта дальность уменьшается до 1400 км, когда он в зените, и снова нарастает до 3480 км. При этом углы места увеличиваются от 10° до 90°, а затем также спадают.

Рассмотрим величины ослабления радиоволн на указанных спутниковых линиях связи в Арктике. Найдем молекулярное поглощение, которое будет присутствовать всегда, и ослабление в дождях в летнее время года. Другие метеоявления (облака, туманы) рассматривать не будем из-за малой вероятности их появления в данных метеоусловиях.

Зенитное поглощение для выбранных географических пунктов рассчитано для января и июля по опубликованным данным по высотным профилям метеоэлементов [2]. Характерные приземные значения среднемесячных параметров воздуха: давления P, температуры T и абсолютной влажности a для двух месяцев приведены в табл. 1.

Расчеты молекулярного поглощения на каждой из заданных высот были проведены по приближенной методике [3], после чего проводили интегрирование по высоте и были получены значения зенитного поглощения (табл. 2).

Для расчета поглощения радиоволн на наклонных трассах с углами места θ более 10° табличные значения надо разделить на $\sin\theta$. Для $\theta = 10°$ величина $1/\sin\theta$ равна 5.67, т.е. это максимальное число, на которое могут быть умножены данные табл. 2.

В данной работе не проводятся конкретные расчеты молекулярного поглощения на рассматриваемой линии связи, поскольку это связано с взаимным положением наземного пункта и движущимся спутником, так что углы места трассы непрерывно меняются. Требования к запасу линии связи на затухание также непрерывно меняются из-за движения спутника. Однако в 80-х годах XX в. проводились многочисленные эксперименты по изучению работоспособности спутниковых линий связи в гигагерцовом диапазоне при связи между наземным пунктом и искусственным спутником Земли на геостационарной орбите. Высота орбиты спутника при этом составляет 36000 км, что существенно больше характерных дальностей в нашем случае. Поскольку аппаратура для диапазона ММ-волн стабильно работала при таких дальностях, то и для наших задач (несмотря на меньшие размеры приемо-передающих антенн) ее работоспособность должна реализовываться. Наиболее предпочтительным для связи является диапазон около 30 ГГц, обладающий наименьшим затуханием.

Расчет возможного ослабления радиоволн в гидрометеорах не является приоритетным, поскольку дожди могут быть только летом, а в сухих снегопадах ослабление радиоволн мало. Но этот расчет представляет собой непростую задачу из-за сугубо вероятностного распределения параметров зоны дождя. Так, для каждого пункта существует вероятностное распределение (по времени) дождей различной интенсивности, причем эти распределения могут существенно меняться год от года. Пространственное распределение интенсивности дождя внутри зоны дождя носит случайный характер, и существующие пространственные модели получены в результате усреднения по большому числу дождей.

В материалах Международного союза электросвязи [4] земной шар условно разбит на несколько зон дождя, причем Арктике соответствует зона А. Ниже приведено среднее вероятностное распределение интенсивности дождя R для этой зоны:

P, %	1.0	0.3	0.1	0.03	0.01	0.003	0.001
R, мм/ч	<0.1	0.8	2	5	8	14	33

Здесь P – это вероятность появления дождя с такой или меньшей интенсивностью за год. Практически эта вероятность выражается в количестве минут за год. Модель погонного ослабления в дожде γ_R, выраженная в дБ/км и используемая в методах прогнозирования, имеет вид $\gamma_R = kR^{\alpha}$, где коэффициенты k и α частотно зависимы [5]. Модель высоты слоя дождя h_R, также используемая в методах прогнозирования, для арктического региона задается простой формулой

$$h_R = 5 - 0.075(\varphi - 23),$$

где φ – широта местности, в град, а h_R, в км [6]. Для арктических районов примем, что $h_R = 1.5$ км.

Обратимся теперь к пространственной модели зоны дождя. Если в окрестностях станции присутствует ячейка дождя, то с учетом того, что линия визирования следит за спутником в течение 16 мин (или меньше, если трасса связи не проходит через зенит), зону дождя можно считать неподвижной, а линия связи ее пересекает ("разрезает"), так что на трассе возникают потери в дожде. Такой подход был применен ранее [7]. Там для упрощения расчетов ячейки дождя считаются круговыми цилиндрами однородного дождя с диаметром, зависящим от интенсивности: $D = 2.2(100/R)^{0.4}$. Для приведенных выше двух крайних значений интенсивности дождя, <0.1 и 33 мм/ч, диаметры ячеек составляют 15 и 3.5 км соответственно. И хотя единичная ячейка дождя в природе далека от подобной модели, но метод расчета статистики ослабления, основанный на ней, дает результаты, близкие к экспериментальным [8].

Для наших расчетов воспользуемся следующей моделью. Примем, что спутник движется по зенитной орбите над наземной станцией. Центры цилиндрических зон дождя располагаются на земной проекции орбиты, причем в любой точке. При движении спутника, когда его углы места меняются от 10° до 90° и обратно, линия визирования будет пересекать зону дождя, причем размеры зон пересечения также будут меняться. Нами были проведены расчеты этих размеров в зависимости от интенсивности дождя и, соответственно, от диаметров его зон. Полученные результаты, обозначенные S, усреднялись по всем углам места и по всем положениям ячеек дождя для данной его интенсивности. Эти средние значения приведены в табл. 3. Там же указаны средние величины ослабления радиоволн A с частотами 30 и 90 ГГц на трассе.

Данные, приведенные в табл. 3 для частоты 30 ГГц, несколько отличаются от данных в аналогичной таблице работы [1], поскольку расчеты были выполнены более корректно. Из табл. 3 видно, что ослабление радиоволн в дождях в этом климате имеет небольшую величину, что связано с довольно малой интенсивностью дождя по сравнению со средними широтами. Согласно табл. 3 общая длительность дождя с интенсивностью 33 мм/ч в субарктических районах 52 мин в год и, соответственно, столько же времени может быть ослабление в дождях величиной 4.7 дБ на частоте 30 ГГц. Следует также учитывать, что наша модель расчета дает наибольшие значения длин секущих, поскольку в реальности орбита может не быть зенитной, а центры ячеек дождя могут быть смещены от проекции орбиты, что уменьшит длины пересечения и, соответственно, ослабление радиоволн.

Таблица 3. Возможные величины ослабления в дождях радиоволн для двух частот при спутниковой связи в Арктике

R, мм/ч	S, км	A, дБ	
		30 ГГц	90 ГГц
0.8	1.9	0.2	0.8
2	1.65	0.5	2.9
5	1.4	1.2	5.0
8	1.25	1.6	6.3
14	1.1	2.6	8.5
33	0.85	4.7	12.3

Таким образом, применение ММ-волн для спутниковой связи в Арктике вполне допустимо с точки зрения ослабления радиоволн на трассе.

Определим теперь значение отношения сигнал/шум (ОСШ) на входе приемника для следующих параметров; расстояния от КА до приемной антенны 3.48×10^6 м, диаметры передающей и приемной антенн соответственно 0.5 и 3 м, с коэффициентами использования поверхности и КПД 0.5 и 0.95, мощность передатчика 10 Вт. Мощность сигнала на входе приемника при этих параметрах в соответствии с основным уравнением радиосвязи [8] составит 1.606×10^{-9} Вт.

Шумовая температура приемной системы состоит из шумов антенны и собственных шумов приемника.

Шумовая температура антенны включает:

– атмосферный шум, который в рассматриваемом диапазоне при угле места антенны 10° [9] (рис. 1) составит примерно 70 К;

– шум реликтового излучения, который составит примерно 3 К;

– планковскую поправку температуры ($h\nu/k$), где h и k – соответственно постоянные Больцмана (1.38×10^{-23} Дж/К) и Планка (6.626×10^{-34} Дж/Гц), а частота излучения ($\nu \sim 30$ ГГц), так что шумовая температура составит 1.44 К.

Таким образом:

– шумовая температура антенны составит примерно 74.5 К;

– температура собственных шумов неохлаждаемого (~300 К) приемника, с учетом потерь от переоблучения рупором зеркала антенны (~0.49 дБ), потерь в волноводах (~0.1 дБ) и коэффициента шума приемника 1.5 дБ, составит 185.67 К;

– общая шумовая температура приемной системы $T_{сис}$ составит 260.17 К;

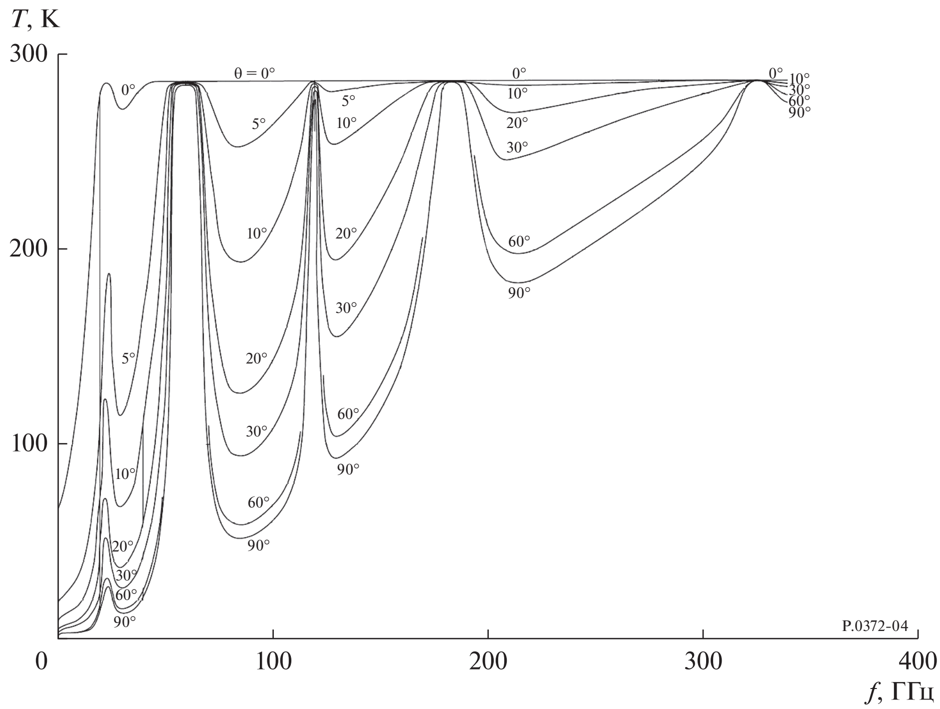

Рис. 1. Яркостная температура атмосферы (T) в зависимости от частоты при различных углах места антенн (цифры на кривых).

– мощность шума на входе приемника при общей полосе сигнала в диапазоне 4 ГГц (30...34 ГГц) составит 1.436×10^{-11} Вт;

– ОСШ на входе приемника составит 14.86 дБ.

При этом приняты следующие значения: 1) необходимый энергозапас 3 дБ; 2) максимальное затухание сигнала в тропосфере (1.27 дБ) при минимальном угле места 10° с учетом максимального зенитного затухания в тропосфере 0.22 дБ и максимального затухания в дожде 4.7 дБ (на несущей частоте 30 ГГц).

Исходя из описанного выше, можно сделать вывод, что применение ММ-волн в спутниковых линиях связи в условиях Арктики вполне возможно. Их применение существенно увеличивает скорость передачи вследствие увеличения полосы частот канала, особенно в сравнении с линиями связи дециметрового и сантиметрового диапазонов радиоволн.

Однако флуктуации амплитуды сигнала, возникающие вследствие турбулентности атмосферы, снижают помехоустойчивость канала связи и скорость передачи данных по нему. Атмосферная турбулентность характеризуется величиной C_ε^2, где C_ε — структурная постоянная (структурная функция диэлектрической проницаемости воздуха). К сожалению, мы не нашли данных о величинах структурной постоянной в Арктике. Но судя по экспериментальным данным работы [11], измеренные значения структурной постоянной составляли для середины января при –8.6°C величину 0.091×10^{-6} м$^{-1/3}$, для середины мая при +17.6°C величину 0.28×10^{-6} м$^{-1/3}$, а в летний период величину 0.5×10^{-6} м$^{-1/3}$. Поэтому можно сделать вывод, что турбулентность воздуха для условий Арктики будет существенно меньше, чем в средней полосе, что должно повысить достоверность передачи данных по спутниковому каналу связи.

Отметим следующие особенности использования радиоволн этого диапазона при организации спутниковых каналов связи:

1. Угол места антенны нецелесообразно снижать менее 10°, поскольку в этом случае существенно возрастает путь радиосигнала в тропосфере, что увеличивает затухание сигнала.

2. Дальнейшего анализа заслуживает энергетика исследуемых линий связи при уточнении возможных траекторий движения спутников.

3. Флуктуации диэлектрической проницаемости воздуха, приводящие к флуктуациям амплитуды радиосигналов, должны быть меньше для условий Арктики, чем в средней полосе России.

4. Формируемая система передачи представляется гибкой; например, возможно снижение скорости передачи с 8 до 4 Гбит/с, что является также очень высокой скоростью, но при этом ОСШ на входе приемника увеличивается на 3 дБ. Возмож-

но, не снижая общей скорости передачи, незначительно уменьшить информационную скорость, например с 8 до 7.7...7.65 Гбит/с, применив тем самым современный помехоустойчивый код, параметры которого можно дистанционно изменять при длительном процессе работы спутниковой группировки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрианов М.Н., Корбаков Д.А., Пожидаев В.Н.* // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 8. http://jre.cplire.ru/jre/aug20/13/text.pdf.
2. Рекомендация МСЭ-R P.676-3. Ослабление в атмосферных газах. М.: Междунар. союз электросвязи, 2005.
3. Рекомендация МСЭ-R PN.837-1. Характеристики осадков, используемые при моделировании распространения радиоволн. М.: Междунар. союз электросвязи, 1994.
4. Рекомендация МСЭ-R 838. Модель погонного ослабления в дожде. М.: Междунар. союз электросвязи, 2005
5. Рек. МСЭ-R P.839-1. Модель высоты слоя дождя. М.: Междунар. союз электросвязи, 2005
6. *Пожидаев В.Н.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 12. С. 1455.
7. *Пожидаев В.Н., Святогор В.В.* // Труды НИИР. 1989. № 1. С. 37.
8. *Андрианов М.Н., Костенко В.И., Лихачев С.Ф.* // Космич. исслед. 2018. Т. 56. № 1. С. 85.
9. Рекомендация МСЭ-R. P.372-13. Радиошум. М.: Междунар. союз электросвязи, 2013.
10. *Загорин Г.К., Зражевский А.Ю., Коньков Е.В. и др.* // Журн. радиоэлектроники. 2001. № 9. http://jre.cplire.ru/jre/aug01/9/text.html.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 810–814

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 519.725;512.62

ЛИНЕЙНАЯ СЛОЖНОСТЬ НЕДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГОРДОНА–МИЛЛСА–ВЕЛЧА

© 2021 г. В. Г. Стародубцев[a, b, *]

[a]*Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,*
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация
[b]*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,*
Кронверкский просп., 49, Санкт-Петербург, 197101 Российская Федерация
**E-mail: vgstarod@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.03.2020 г.
После доработки 22.11.2020 г.
Принята к публикации 23.11.2020 г.

Представлено выражение для определения эквивалентной линейной сложности (ЭЛС) l_S p-ичных ($p > 2$) последовательностей Гордона–Миллса–Велча (ГМВП) с периодом $N = p^S - 1$, формируемых в конечных полях $GF(p^S) = GF[(p^m)^n]$, для значения параметра $n = 2$. Выражение получено на основе анализа ЭЛС известных троичных с периодами $N = 80$, 728 и пятеричных ГМВП с периодами $N = 24$, 124, 624, а также с учетом особенностей вычисления ЭЛС для двоичных последовательностей. Определены значения ЭЛС для троичных, пятеричных, семеричных, одиннадцатеричных и тринадцатеричных ГМВП, алгоритмы формирования которых в известной литературе отсутствуют.

DOI: 10.31857/S003384942107010X

Существующие системы передачи цифровой информации (СПЦИ), включающие системы управления, связи, навигации и радиолокации, характеризуются широким применением сигналов с расширенным спектром (СРС), которые формируются на основе псевдослучайных последовательностей (ПСП) [1–4]. В настоящее время в основном используются двоичные ПСП, обладающие как хорошими периодическими автокорреляционными (ПАКФ) и взаимно корреляционными функциями (ПВКФ), так и структурной скрытностью, в качестве показателя которой выступает эквивалентная линейная сложность (ЭЛС), численно равная степени проверочного полинома, на основании которого формируется данная последовательность [5–7].

В качестве ПСП часто используются как М-последовательности (МП), так и последовательности, формируемые на их основе, такие как последовательности Голда, малого и большого множеств Касами [3, 6]. Основной причиной широкого применения МП является то, что данная последовательность является минимаксной, т.е. имеющей минимально возможный для бинарных кодов боковой лепесток ПАКФ. При этом ЭЛС как двоичных, так и недвоичных МП, формируемых в конечных полях $GF(p^S) = GF[(p^m)^n]$, равна $l_S = S$ [2, 6–8].

Наряду с МП к классу минимаксных последовательностей относятся последовательности Гордона–Миллса–Велча (ГМВП). Однако ЭЛС ГМВП существенно превышает ЭЛС МП, причем в зависимости от периода выигрыш может составлять от 2 до 50 и более раз [8–10]. Данное обстоятельство определяет целесообразность применения ГМВП вместо МП в СПЦИ, в которых требуются минимаксные ПСП с повышенной структурной скрытностью.

Одним из направлений повышения эффективности функционирования СПЦИ является переход к многопозиционным сигналам, которые формируются на основе недвоичных ПСП. Вопросам разработки алгоритмов формирования и анализа корреляционных и структурных свойств недвоичных ПСП посвящено большое количество работ как в нашей стране, так и за рубежом [11–20]. В [11] разработан алгоритм формирования и проведен анализ корреляционных свойств семейства p-ичных последовательностей с небольшими значениями взаимной корреляционной функции. В [12] проведен достаточно подробный анализ состояния вопроса формирования недвоичных ПСП и систем ПСП с заданными корреляционными и структурными свойствами. В работах [13, 14] выполнен анализ свойств недвоичных последовательностей, формируемых путем децимации недвоичных МП. В [15] проведен анализ применения недвоичных последовательностей для контроля функционирования устройств декодирования помехоустойчивых кодов. В [16] разработан алгоритм формирования и выполнена оценка линейной сложности пятеричных ГМВП с периодом $N = 624$. В [17, 18] приведены результаты по формированию семейств недвоичных последовательностей с низкими уровнями взаимно корреляционных функций. В работах [19, 20] рассмотрены вопросы формирования и оценки корреляционных и структурных свойств ГМВП.

Для формирования недвоичных СРС с заданными характеристиками предварительно требуется определить корреляционные и структурные свойства ПСП. Для двоичных ГМВП известны выражения для ЭЛС данных последовательностей [5, 8–10]. Для недвоичных ГМВП выражения для ЭЛС в известной литературе отсутствуют.

Алгоритмы формирования троичных и пятеричных ГМВП с периодами $N = 80$, 728 и $N = 24$, 124, 624 рассмотрены в [16, 21], где приведены величины ЭЛС данных последовательностей для различных значений параметра r.

Цель статьи – получение выражений для ЭЛС недвоичных ГМВП.

Формирование недвоичных ГМВП с периодом $N = p^{mn} - 1$ осуществляется над конечными полями

$$GF[(p^m)^n] = GF(p^S), \quad S = mn.$$

Символы d_i ($i = 0...N - 1$) ГМВП определяются выражением [5, 9, 10]

$$d_i = \mathrm{tr}_{m1}[(\mathrm{tr}_{mn,m}(\alpha^i))^r], \quad 1 \le r < p^m - 1, \quad (r, p^m - 1) = 1, \tag{1}$$

где $\mathrm{tr}_{a,b}(\alpha)$ – след элемента α из поля $GF(p^a)$ в поле $GF(p^b)$; $\alpha \in GF[(p^m)^n]$ – примитивный элемент; параметр r – натуральное число, взаимно простое с порядком мультипликативной группы подполя $GF(p^m)$, равным $p^m - 1$.

ЭЛС двоичных ГМВП определяется выражением [5, 8, 9]

$$l_S = mn^{g(r)}, \tag{2}$$

где $g(r)$ – количество единиц в двоичном представлении числа r в (1).

Известно, что любая двоичная ГМВП может быть представлена в виде суммы по mod 2 нескольких ПСП, формируемых на основе неприводимых проверочных полиномов $h(x)$ степени $S = mn$ [9, 10]. В качестве ПСП могут выступать как МП с периодом $N = 2^S - 1$, так и последовательности с периодами, являющимися делителями периода N. Тогда выражение (2) может быть представлено в виде

$$l_S = mnM, \tag{3}$$

где $M = n^{g(r) - 1}$ – число суммируемых двоичных последовательностей.

Важным следствием выражения (3) является то, что число суммируемых последовательностей при формировании ГМВП определяется только параметрами n и r и не зависит от параметра m.

При формировании МП функция $g(r) = 1$, поэтому в суммировании участвует только одна последовательность, образуемая на основании примитивного полинома степени $S = mn$. Параметр r в этом случае может принимать значения 1, 2, 4, ..., 2^{m-1}, для которых $g(r) = 1$.

При формировании ГМВП функция $g(r) > 1$. Добавление каждой единицы в двоичном представлении параметра r приводит к увеличению числа суммируемых последовательностей и линейной сложности формируемой ГМВП в n раз. С точки зрения структурных свойств конечных полей увеличение числа единиц при вычислении p-сопряженных элементов для элемента α соответствует аналогичному увеличению числа переходов через границу, равную порядку мультипликативной группы подполя $GF(2^m)$. Например, в подполе $GF(2^4)$ при вычислении p-сопряженных элементов для примитивного элемента α^{11}, т.е. при $r = 11_{10} = 1011_2$ и $g(r) - 1 = 2$, наблюдается два перехода через α^{15}:

$$\alpha^{11}, \alpha^{22 \bmod 15} = \alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{28 \bmod 15} = \alpha^{13}.$$

А в подполе $GF(2^5)$ для примитивного элемента α^{15}, т.е. при $r = 15_{10} = 1111_2$ и $g(r) - 1 = 3$, наблюдается три перехода через α^{31}:

$$\alpha^{15}, \alpha^{30}, \alpha^{60 \bmod 31} = \\ = \alpha^{29}, \alpha^{58 \bmod 31} = \alpha^{27}, \alpha^{54 \bmod 31} = \alpha^{23}.$$

Соответственно, ЭЛС ГМВП увеличивается в n^2 или в n^3 раз по сравнению с ЭЛС МП.

Можно дать следующую интерпретацию изменения ЭЛС в зависимости от параметра r при синтезе МП и ГМВП. В силу свойства цикличности расширенное поле $GF[(2^m)^n]$, его подполе $GF(2^m)$ и простое поле $GF(2)$ можно представить в виде вложенных окружностей различных радиусов, пропорциональных числу элементов полей, с распределением данных элементов по окружностям. Тогда функции следа $\mathrm{tr}_{a,b}(\alpha)$ отображаются в виде ребер, соединяющих элементы расширенного поля $GF[(2^m)^n]$ с элементами подполя $GF(2^m)$ и далее с элементами простого поля $GF(2)$. При формировании МП функция $g(r) = 1$ и ребра проходят напрямую через подполе $GF(2^m)$, т.е.

$$\mathrm{tr}_{m,1}[\mathrm{tr}_{mn,m}(\alpha^i)] = \mathrm{tr}_{mn,1}(\alpha^i).$$

При формировании ГМВП увеличение функции $g(r)$ соответствует изменению значения функции следа $[\mathrm{tr}_{mn,m}(\alpha^i)]^r$ элемента α^i в подполе $GF(2^m)$ и вычислению функции следа в поле $GF(2)$ для элемента, отличного от элемента $\mathrm{tr}_{mn,m}(\alpha^i)$. Данное преобразование можно рассматривать как сдвиг подполя $GF(2^m)$ относительно поля $GF[(2^m)^n]$. Величина сдвига пропорциональна значению $g(r) - 1$, что приводит к соответственному увеличению линейной сложности ГМВП.

В общем случае функциональная зависимость ЭЛС от параметров конечного поля имеет вид $l_S = f(p, m, n, r)$, где параметр r принимает значения, являющиеся взаимно простыми с порядком мультипликативной группы подполя $GF(p^m)$, равным $(p^m - 1)$. В отличие от выражения (2) для ЭЛС двоичных ГМВП, в котором применяется функция $g(r)$, при решении задачи определения ЭЛС недвоичных ГМВП над конечными полями $GF[(p^m)^n] = GF(p^S)$ используются непосредственно значения и кратности разрядов p-ичного представления параметра r.

При выводе выражения для ЭЛС недвоичных ГМВП использован подход, аналогичный двоичному случаю. Данный подход связан с определением числа переходов через границу, равную порядку мультипликативной группы подполя $GF(p^m)$, в зависимости от структуры p-ичного представления параметра r, а именно от значений p-ичных разрядов и их кратности. Анализ проведен на основании результатов определения ЭЛС троичных и пятеричных ГМВП, полученных в [16, 21].

Формирование недвоичных ГМВП, как и в случае двоичных ГМВП, осуществляется путем суммирования нескольких ПСП с проверочными полиномами степени $S = mn$. В качестве ПСП могут выступать как недвоичные МП с периодом $N = p^{mn} - 1$, так и недвоичные ПСП с периодами, являющимися делителями периода N. Для заданных значений m и n величина ЭЛС двоичных и недвоичных ГМВП отличается только значением числа суммируемых последовательностей. Поэтому выражение (3) для недвоичных ГМВП принимает вид

$$l_S = mnM_p, \tag{4}$$

где M_p – число суммируемых p-ичных последовательностей.

Таким образом, задача определения ЭЛС недвоичных ГМВП сводится к вычислению параметра M_p, т.е. числа суммируемых последовательностей.

При выводе выражения для ЭЛС недвоичных ГМВП анализ проведен для троичных и пятеричных последовательностей, построенных в конечных полях

$$GF[(p^m)^n] = GF[(p^m)^2],$$

т.е. для значения $n = 2$. Данные последовательности обладают максимальным значением ЭЛС при фиксированном значении параметра $S = mn$ и могут быть представлены в виде матрицы размерности $[(p^m - 1) \times (p^m + 1)]$, ненулевые столбцы которой являются различными циклическими сдвигами короткой МП с периодом $J = p^m - 1$ [9, 10].

Сводные исходные данные для анализа ЭЛС представлены в табл. 1. Анализ показал, что число суммируемых последовательностей M_p при фиксированном значении параметра $n = 2$ зависит только от p-ичного представления параметра r , а именно от значений p-ичных разрядов этого представления и их кратности, и не зависит от значений параметров p и m. Например, в строках 1–3, 5, 6, 11 число $M_p = 3$, так как разложение параметра r содержит одну единицу и одну двойку, хотя параметры p и m, а также ЭЛС l_S ГМВП имеют различные значения. Аналогичная картина наблюдается для строк 4, 8, 9, в которых число $M_p = 9$, а разложение параметра r содержит одну единицу и две двойки.

Рассмотрение p-сопряженных элементов для элемента α в степени r показало, что значение каждого разряда p-ичного представления параметра r определяет число переходов через границу, равную порядку мультипликативной группы подполя $GF(p^m)$, при вычислении очередного p-сопряженного значения.

Например, в подполе $GF(5^m) = GF(5^2)$ при вычислении p-сопряженных элементов для элемента α^{13}, т.е. при $r = 13_{10} = 23_5$, наблюдаются два перехода через порядок мультипликативной группы от элемента α^{13} к элементу $\alpha^{13 \times 5 \bmod 24} = \alpha^{65 \bmod 24} = \alpha^{17}$ и три перехода от элемента α^{17} обратно к элементу $\alpha^{17 \times 5 \bmod 24} = \alpha^{85 \bmod 24} = \alpha^{13}$. А при $r = 19_{10} = 34_5$ – три и четыре перехода соответственно (табл. 1, строки 14, 15).

Для двоичных ГМВП, построенных над $GF[(2^m)^2]$, т.е. при $n = 2$, добавление единицы в двоичном представлении параметра r приводит к увеличению ЭЛС в два раза. Для p-ичных ГМВП, построенных над $GF[(p^m)^2]$, наличие разряда со значением $1 < i < p$ приводит к увеличению параметра M_p и ЭЛС l_S в $(i + 1)$ раз. При наличии двух одинаковых разрядов увеличение будет в $(i + 1)^2$ раз, т.е. увеличение кратности разряда p-ичного представления параметра r приводит к росту ЭЛС в степенной зависимости. При отсутствии разряда, равного единице, ЭЛС уменьшается в два раза.

Таблица 1. Значения ЭЛС недвоичных ГМВП с периодами $N < 6561$ при $n = 2$

№	Период N	p	m	r_{10}	r_p	M_p	ЭЛС l_S
1	$3^4 - 1 = 80$	3	2	5	12	3	12
2	$3^6 - 1 = 728$	3	3	5	12	3	18
3		3	3	7	21	3	18
4		3	3	17	122	9	54
5	$3^8 - 1 = 6560$	3	4	7	21	3	24
6		3	4	11	102	3	24
7		3	4	13	111	4	32
8		3	4	17	122	9	72
9		3	4	23	212	9	72
10		3	4	41	1112	12	96
11		3	4	53	1222	27	216
12	$5^2 - 1 = 24$	5	1	3	3	2	4
13	$5^4 - 1 = 624$	5	2	7	12	3	12
14		5	2	13	23	6	24
15		5	2	19	34	10	40

Таким образом, выражение для числа суммируемых последовательностей при формировании p-ичных ГМВП, построенных в конечных полях $GF[(p^m)^2]$, может быть представлено в виде произведения множителей, пропорциональных значениям и кратности разрядов p-ичного разложения параметра r

$$M_p = 0.5\prod_{i=1}^{p-1}(i+1)^{t_i}, \quad (5)$$

где t_i – кратность разрядов, равных i, в p-ичном представлении параметра r.

Тогда ЭЛС недвоичных ГМВП при значении параметра $n = 2$ определяется выражением (4) при подстановке числа суммируемых последовательностей из (5)

$$l_S = m\prod_{i=1}^{p-1}(i+1)^{t_i}. \quad (6)$$

В качестве примера определим число суммируемых последовательностей M_p при формировании троичных ГМВП с периодом $N = 3^8–1 = 6560$ для значений параметра $r = 41_{10} = 1112_3$ и $r = 53_{10} = 1222_3$:

$$M_p(r_{10} = 41) = 2^{3-1} \times 3^1 = 12;$$
$$M_p(r_{10} = 53) = 2^{1-1} \times 3^3 = 27.$$

Число M_p при формировании пятеричных ГМВП с периодом $N = 5^4–1 = 624$ для значений параметра $r = 7_{10} = 12_5$ и $r = 19_{10} = 34_5$:

$$M_p(r_{10} = 7) = 2^{1-1} \times 3^1 = 3;$$
$$M_p(r_{10} = 19) = 0.5 \times 4^1 \times 5^1 = 10,$$

где отсутствие единичных разрядов в p-ичном представлении соответствует делению на два.

Полученные результаты совпадают с приведенными в табл. 1, что подтверждает справедливость выражений (5) и (6).

Кроме того, при $p = 2$ и $n = 2$ выражение (6) переходит в (2) для ЭЛС ГМВП, так как $t_1 = g(r)$, а выражение под знаком произведения становится равным $n^{g(r)}$. Таким образом, выражение (2) для ЭЛС двоичных последовательностей является частным случаем для ЭЛС недвоичных ГМВП при $n = 2$.

В соответствии с выражениями (5) и (6) были получены значения числа суммируемых последовательностей M_p и, соответственно, ЭЛС l_S для троичных, пятеричных, семеричных, одиннадцатеричных и тринадцатеричных ГМВП с периодами $N = 3^{10} – 1$, $N = 5^6 – 1$, $N = 7^4 – 1$, $N = 11^4 – 1$, $N = 11^6 – 1$, $N = 13^6 – 1$ для некоторых значений параметра r. Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таким образом, в статье получено выражение для числа суммируемых последовательностей и

Таблица 2. Значения ЭЛС недвоичных ГМВП при различных N, p, m и $n = 2$

r_{10}	r_p	M_p	l_S
$N = 3^{10} - 1 = 59\,048$, $p = 3$, $m = 5$			
61	2021	9	90
67	2111	12	120
79	2221	27	270
131	11212	36	360
161	12222	81	810
$N = 5^6 - 1 = 15\,624$, $p = 5$, $m = 3$			
3	3	2	12
7	12	3	18
47	142	15	90
63	223	18	108
99	344	50	300
$N = 7^2 - 1 = 48$, $p = 7$, $m = 1$			
5	5	3	6
$N = 7^4 - 1 = 2400$, $p = 7$, $m = 2$			
5	5	3	12
19	25	9	36
25	34	10	40
41	56	21	84
$N = 11^2 - 1 = 120$, $p = 11$, $m = 1$			
3	3	2	4
9	9	5	10
$N = 11^4 - 1 = 14\,640$, $p = 11$, $m = 2$			
7	7	4	16
13	12	3	12
43	3A	22	88
109	9A	55	220
$N = 11^6 - 1 = 1771\,560$, $p = 11$, $m = 3$			
1209	9AA	605	3630
$N = 13^6 - 1 = 4826\,808$, $p = 13$, $m = 3$			
1507	8BC	702	4212
2027	BCC	1014	6084

ЭЛС недвоичных ГМВП, формируемых в конечных полях $GF[(p^m)^2]$.

Недвоичные ГМВП могут быть использованы вместо МП при формировании недвоичных сигналов с расширенным спектром с повышенной структурной скрытностью в системах передачи цифровой информации, системах навигации и радиолокации, функционирующих в условиях радиоэлектронного противодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ипатов В.П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения / Пер. с англ. М.: Техносфера, 2007.
2. *Вишневский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В.* Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005.
3. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. 2-е изд. / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003.
4. *CDMA*: прошлое, настоящее, будущее. М.: МАС, 2003.
5. *Golomb S.W., Gong G.* Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
6. *Ипатов В.П.* Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992.
7. *Rizomiliotis P., Kalouptsidis N.* // IEEE Trans. 2005. V. IT-51. № 4. P. 1555.
8. *Wang Q.* // IEEE Trans. 2010. V. IT-56. № 8. P. 4046.
9. *Chung H.B., No J.S.* // IEEE Trans. 1999. V. IT-45. № 6. P. 2060.
10. *Стародубцев В.Г.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 2. С. 169.
11. *Lee Wijik, Kim Ji-Youp, No J.S.* // IEICE Trans. on Commun. 2014. V. E97-B. № 1. P. 2311.
12. *Tasheva Z.* // J. Scientific Appl. Research. 2014. V. 2. P. 17.
13. *Cho Chang-Min, Kim Ji-Youp, No J.S.* // IEICE Trans. Commun. 2015. V. E98. № 7. P. 1268.
14. *Liang H., Tang Y.* // Finite Fields and Their Appl. 2015. V. 31. P. 137.
15. *Самойленко Д.В., Еремеев М.А., Финько О.А., Диченко С.А.* // Труды СПИИРАН. 2018. Вып. 4. С. 31.
16. *Стародубцев В.Г.* // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 4. С. 912.
17. *Liang H., Chen W., Luo J., Tang Y.* // Adv. Mathem. Commun. 2017. V. 11. P. 671.
18. *Shi X., Zhu X., Huang X., Yue Q.* // IEEE Commun. Lett. 2019. V. 23. № 7. P. 1132.
19. *No J.S.* // IEEE Trans. 1996. V. IT-42. № 1. P. 260.
20. *Zhu J., Cheng F., Tong L, Zhou S., Hua J.* // 2nd Intern. Conf. Inform. Science and Engineering. 4-6 Dec. 2010, Hangzhou, China. 2010. P. 716.
21. *Стародубцев В.Г., Ткаченко В.В., Боброва Е.А.* // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 5. С. 405.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 815–824

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874;537.624

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДЕРЖКА ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ

В. С. Власов[a], А. П. Иванов[a], В. Г. Шавров[b,] *, В. И. Щеглов[b,] **

[a]*Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина, Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация*

[b]*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

**E-mail: shavrov@cplire.ru*

***E-mail: vshcheg@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.01.2021 г.
После доработки 09.03.2021 г.
Принята к публикации 12.03.2021 г.

Рассмотрена задача о возбуждении нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в ферритовой пластине магнитострикционного преобразователя на основе модели из двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным. В режиме умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого обнаружен эффект нестационарного запаздывания возбуждения колебаний во времени, сопровождаемый последующим скачкообразным ростом их амплитуды на один-два порядка и более. Отмечен пороговый характер запаздывания по амплитуде возбуждения. Для интерпретации запаздывания предложена модель динамического потенциала, отражающая колебания первого осциллятора при использовании амплитуды второго в качестве параметра. В ограничении амплитуды колебаний отмечена решающая роль кубической нелинейности.

DOI: 10.31857/S0033849421080088

ВВЕДЕНИЕ

Возбуждение ультразвуковых колебаний сверхвысоких частот с помощью магнитострикционных преобразователей издавна привлекает внимание исследователей [1–4]. Особый интерес представляет возбуждение колебаний намагниченности в нелинейном режиме, что позволяет повысить мощность генерируемого ультразвука на порядок и более [5, 6]. Геометрия преобразователя в этом случае представляет собой нормально намагниченную ферритовую пластину, что обеспечивает возможность возбуждения намагниченности с большими углами прецессии (до 20°...40°) [7–9], недостижимыми при других видах геометрии из-за параметрического возбуждения обменных спиновых волн [10–14]. Высокоамплитудная прецессия намагниченности сопровождается нестационарными колебаниями, в том числе автомодуляционного характера, некоторые из которых описаны в обобщающей работе [15].

В стационарном режиме возможно возбуждение особо высокочастотного гиперзвука (до десятков гигагерц) путем умножения частоты возбуждения [16]. При этом эффективность возбуждения возрастает тем более, чем выше амплитуда возбуждающего сигнала. Однако такое возбуждение при достаточной амплитуде сопровождается нестационарными явлениями, одним из которых является значительное скачкообразное запаздывание развития колебаний относительно момента включения возбуждающего сигнала. Некоторые особенности такого запаздывания отмечены в работе [17]. Однако проведенное там рассмотрение является неполным и отражает лишь качественную описательную сторону явления. Некоторые характерные особенности отмечены в работах [18–20], однако предложенное там описание является разрозненным, не представляющим цельной картины явления.

Данная работа является развитием проведенных ранее исследований, с целью более последовательного их обобщения и создания единой модели нелинейного запаздывания магнитоупругих колебаний, возбуждаемых в режиме умножения частоты.

1. ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Геометрия задачи, совпадающая с принятой в работах [5, 21–28], показана на рис. 1. В ее основе лежит плоскопараллельная пластина толщины d,

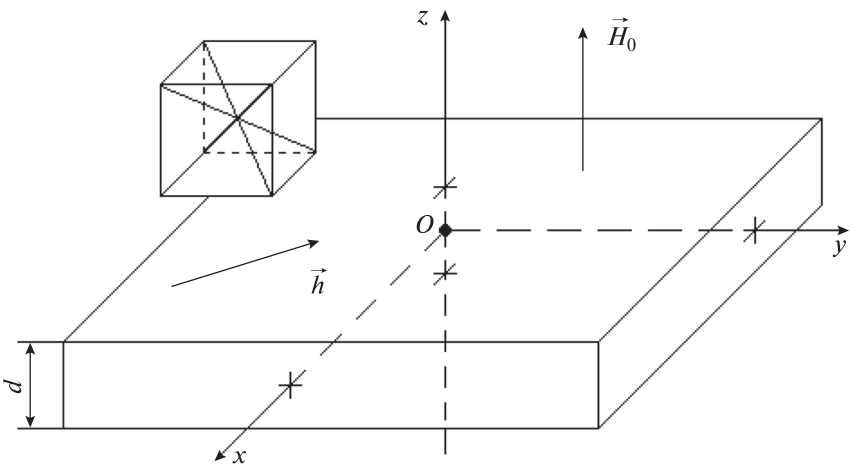

Рис. 1. Геометрия задачи и схема кристаллографической ячейки (слева).

обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины. Внешнее постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$ приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле $\vec{h}$ действует в плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью пластины, а оси Ox, Oy и Oz параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат O находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам $z = \pm d/2$.

Система уравнений движения для нормированных на намагниченность насыщения M_0 компонент намагниченности имеет вид [5, 21, 22]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}\times \\ \times\left[\left(m_y + \alpha m_x m_z\right)H_z - \left(m_z - \alpha m_y m_x\right)H_y - \right. \\ \left. - \alpha\left(m_y^2 + m_z^2\right)H_x\right],\end{aligned} \quad (1)$$

а уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z. Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta\frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho}\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (2)$$

граничные условия

$$c_{44}\left.\frac{\partial u_{x,y}}{\partial z}\right|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (3)$$

В этих выражениях $m_{x,y,z}$ — нормированные компоненты вектора намагниченности, $u_{x,y}$ — компоненты упругого смещения, $H_{x,y,z}$ — эффективные поля, определяемые как производные от плотности энергии по компонентам намагниченности, γ — гиромагнитная постоянная, α — параметр магнитного затухания по Гильберту, c_{44} — модуль упругости, β — параметр упругого затухания, ρ — плотность материала магнитной пластины, B_2 — константа магнитоупругого взаимодействия.

В полном виде система (1)–(3) сводится к решению семи связанных уравнений первого порядка. Однако в работах [23, 24] показано, что с высокой точностью такую систему в квадратичном приближении можно приблизить к более простой, содержащей всего два уравнения второго порядка, описывающих колебания системы из двух осцилляторов — магнитного и упругого:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1\frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \\ + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = A\cos(\omega_0 t);\end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2\frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (5)$$

Здесь x_1 и x_2 — нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины, β_1 и β_2 — параметры затухания той и другой компоненты, ω_1 и ω_2 — собственные частоты осцилляторов, γ_1 и γ_2 — константы их линейной связи, δ — параметр кубической нелинейности, η — параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым, A и ω_0 — амплитуда и частота переменного поля соответственно.

Замечание. Ввиду сложности исходной системы (1)–(3) обратимся далее к упрощенной системе (4), (5) с целью выявить возможные особенности колебаний на модельном уровне. Будем рассматривать приведенные далее результаты не более чем стимулирующую подсказку для исследования полной системы (1)–(3). В то же время, учитывая весьма нетривиальный собственный характер системы (4), (5), можно полагать, что ее подробное исследование представляет самостоятельный математический интерес, поэтому на подробности ее численного решения также обратим повышенное внимание.

Полагая частоту ω для ферромагнитного резонанса (ФМР) в поле 3000 Э порядка 10^{11} с$^{-1}$, находим, что порядок величин слагаемых в обоих уравнениях будет около 10^{22} с$^{-2}$. Для удобства работы с небольшими безразмерными числами далее все параметры задачи будем нормировать на квадрат этой частоты. Выражения коэффициентов уравнений (4), (5) через параметры материала и геометрии задачи приведены в работе [24], здесь не повторяются. Для дальнейшего рассмотрения важен коэффициент η, связанный с исходными параметрами задачи следующим образом:

$$\eta = -\frac{2\gamma^2 B_2}{M_0 d}\left[3\left(H_0 - 4\pi M_0\right) - 2\pi M_0\right]. \qquad (6)$$

Видим, что в зависимости от величины поля H_0 знак параметра η будет меняться. Критическое значение поля равно

$$H_C = \frac{14}{3}\pi M_0, \qquad (7)$$

т.е. при $H_0 > H_C$ параметр η отрицателен, а при $H_0 < H_C$ положителен.

Оценим величину параметра η по формуле (6) для типичной экспериментальной ситуации [12] в случае пленки железо-иттриевого граната толщиной 15 мкм. При этом M_0 = 140 Гс, $B_2 = 6.96 \times 10^6$ эрг см$^{-3}$, а также $\gamma = 1.76 \times 10^7$ Э$^{-1}$ с$^{-1}$. Критическое значение поля (7) равно H_C = 2052 Э. Так как для реализации запаздывания параметр η должен быть отрицательным, положим поле большим критического: H_0 = 3000 Э. При этом из (6) получаем $\eta = -5.8836 \times 10^{25}$ с$^{-2}$. Численная оценка показывает, что все слагаемые в уравнении (4) по порядку близки друг к другу, так что параметр η, нормированный на квадрат частоты, имеет величину порядка $10^2...10^3$ с$^{-2}$.

2. РАЗВИТИЕ КОЛЕБАНИЙ ВО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим численное решение системы (4), (5) в режиме умножения частоты. С учетом нормировки на 10^{22}с$^{-2}$ зададим следующие величины параметров: $\omega_1 = 5$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 10$, $\delta = 5$, $\eta = -200$. Будем рассматривать умножение частоты на три, так что $\omega_2 = 15$. Примем, что частота возбуждения равна $\omega_0 = 5$, амплитуда $A = 50$. Принципиально важным для настоящего рассмотрения является сильное различие параметров затухания осцилляторов, поэтому возьмем два случая: первый – $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.1$; второй – $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 1.0$. Развитие колебаний во времени для обоих осцилляторов показано на рис. 2а, 2б.

Из рисунка видно, что развитие колебаний того и другого осцилляторов происходит подобным образом, с тем отличием, что амплитуда второго в ~40 раз меньше амплитуды первого. Можно полагать, что такое различие вызвано тем, что именно на первый осциллятор действует возбуждающая сила, тогда как второй раскачивается только за счет возбуждения первого.

Развитие колебаний сначала идет крайне медленно, однако начиная с некоторого момента времени амплитуда колебаний обоих осцилляторов скачком увеличивается сразу на один-два порядка, после чего меняется сравнительно медленно, стремясь к постоянному значению. То есть в обоих случаях наблюдается нестационарное запаздывание развития колебаний. В первом случае (см. рис. 2а) характерное время запаздывания составляет 12 отн. ед., во втором случае (см. рис. 2б) несколько меньшее – около 5 отн. ед.

Значительное отличие параметров затухания осцилляторов друг от друга является для реализации запаздывания принципиально необходимым. При равенстве обоих параметров затухания запаздывание полностью отсутствует. При принятых параметрах затухания время релаксации для осциллятора с $\beta = 1.0$ составляет 2.2 отн. ед., а для осциллятора с параметром затухания $\beta = 0.1$ – 22 отн. ед. То есть время запаздывания находится между временами релаксации обоих осцилляторов.

Интересно проследить за характерными периодами процесса колебаний обоих осцилляторов. Так, частоте возбуждения $\omega_0 = 5$ соответствует период 1.2 отн. ед. времени, а утроенной частоте $\omega_2 = 15$ соответствует период 0.4 отн. ед. времени. До скачка амплитуды колебания того и другого осцилляторов происходят именно с этими частотами. После скачка в первом случае период колебаний уменьшается до 0.25 отн. ед., а во втором – до 0.30 отн. ед. Во втором случае при времени около 20 отн. ед. имеет место дополнительный скачок амплитуды – примерно в два раза вниз по величине, причем период колебаний еще более уменьшается, до величины 0.14 отн. ед.[1]

Из рис. 2 видим, что оба случая, хотя и содержат нестационарную задержку развития колебаний,

[1] Более подробно вопрос о частотах колебаний здесь не исследовался. Некоторые данные можно найти в работах [19, 20]. Следует отметить, однако, что природа изменения частоты до конца остается не выясненной, т.е. требуется дополнительное исследование (как отмечено в [20]).

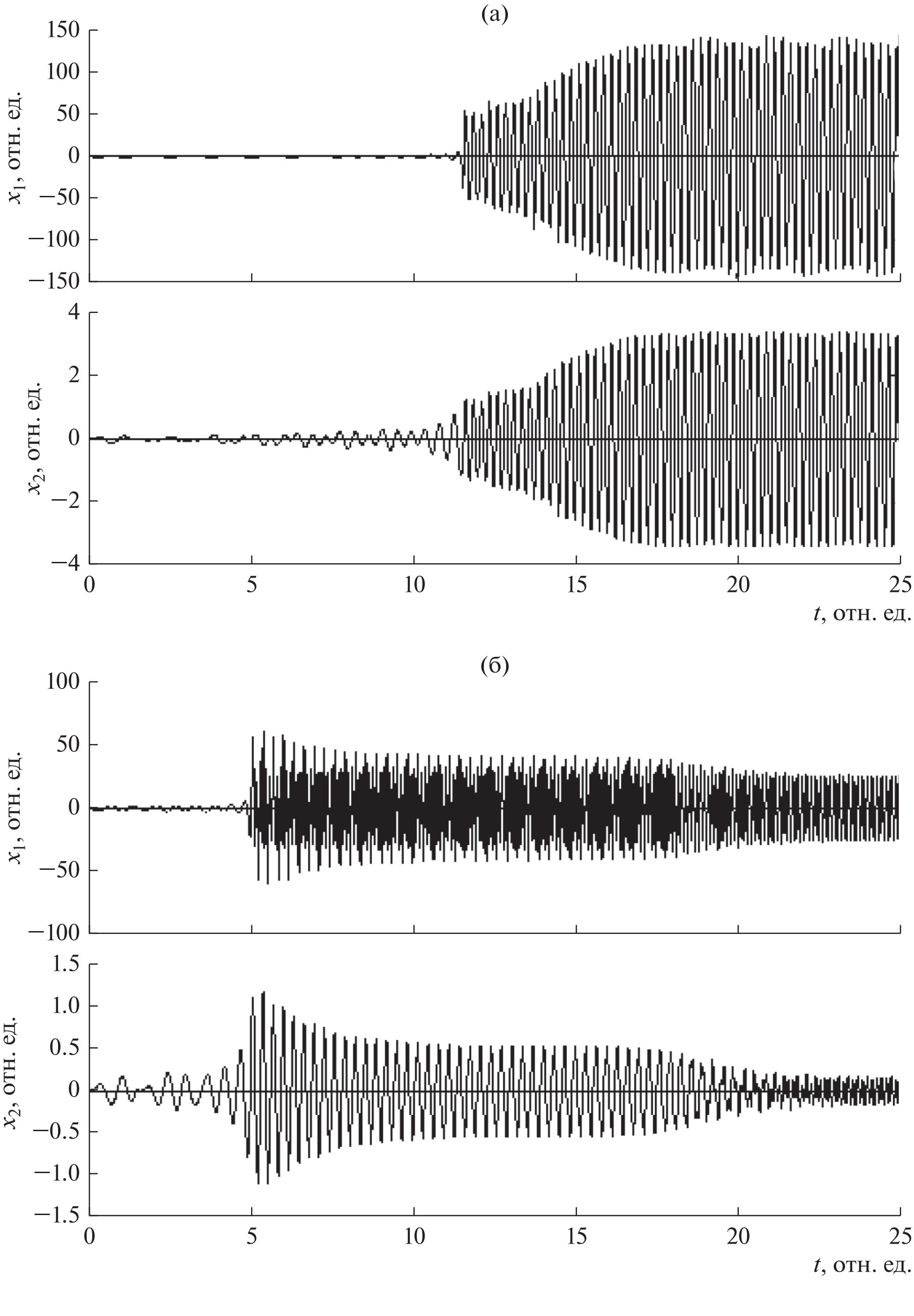

Рис. 2. Развитие колебаний во времени для первого x_1 и второго x_2 осцилляторов при различных соотношениях параметров затухания: а) $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.1$; б) $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 1.0$.

однако не являются полностью эквивалентными. Можно полагать, что наблюдаемое различие обусловлено тем, что первый осциллятор является сильно нелинейным, тогда как второй – чисто линейным. Ограничимся далее первым случаем: $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.1$.

3. ПОРОГОВЫЙ ХАРАКТЕР ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Запаздывание возбуждения колебаний имеет порог по амплитуде вынуждающей силы. При принятых параметрах критическое значение амплитуды, выше которого запаздывание имеется, а ниже отсутствует, составляет около $A = 30$ отн. ед. На рис. 3а, 3б показана зависимость времени запаздывания и амплитуды установившихся колебаний от амплитуды возбуждения A.

Из рис. 3а видно, что до критического значения амплитуды A_S, равного 30.880 отн. ед., запаздывание отсутствует, а при достижении амплитудой этого значения, время запаздывания τ_S резким скачком возрастает, при $A = 30.881$ составляет 153 отн. ед. (за пределами рисунка). Максимум времени запаздывания $\tau_S = 155$ отн. ед. приходится на $A = 30.884$ отн. ед. При дальнейшем увеличении амплитуды время запаздывания спадает:

A, отн. ед.	31	32	33	34
τ_S, отн. ед.	86	48	54	37

и далее по рисунку.

Времена запаздывания для обоих осцилляторов практически совпадают, а при амплитуде возбуждения, больше критической, довольно близко описываются эмпирической зависимостью типа обратной пропорциональности:

$$\tau_S = \frac{220}{A - 27} - 0.5.$$

Из рис. 2 можно видеть, что после скачкообразного увеличения амплитуды, колебания обоих осцилляторов устанавливаются на стационарном постоянном уровне. Более подробно зависимости амплитуды установившихся колебаний обоих осцилляторов от амплитуды возбуждения показаны на рис. 3б. Характерным свойством обеих зависимостей является резкий скачок амплитуды колебаний при критическом значении амплитуды возбуждения. Зависимости, приведенные на рис. 3б сплошными линиями, построены по эмпирическим формулам типа гиперболического тангенса: $x_{10} = 65\,\mathrm{th}(A - 36) + 65$; $x_{20} = 17\,\mathrm{th}(A - 36) + 17$.

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Механизм образования запаздывания можно интерпретировать на основе введения динамического потенциала [18, 19]. Так, из уравнения (4) можно видеть, что потенциал имеет вид

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} x_1^2 + \gamma_1 x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} x_1^4 + \frac{\eta}{3} x_1^3 x_2. \quad (8)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальную группу слагаемых уравнения (6). При этом переменную x_2 следует рассматривать как постоянный параметр.

Рассмотрим зависимость динамического потенциала (8) от амплитуды колебаний первого осциллятора (рис. 4) при различных значениях амплитуды

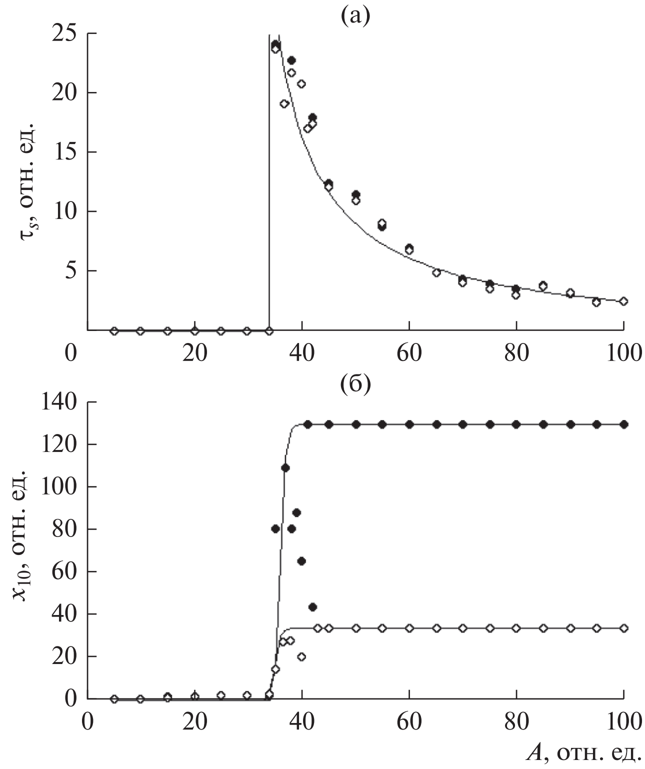

Рис. 3. Зависимость времени запаздывания (а) и амплитуды установившихся колебаний (б) от амплитуды возбуждения для первого (темные точки) и второго осцилляторов (светлые точки), б – значения амплитуды второго осциллятора (x_{20}) увеличены в 10 раз; параметры затухания: $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.1$.

второго осциллятора (индекс 0 при значении амплитуды далее не приводим).

Как видно из рисунка, в отсутствие колебаний второго осциллятора потенциал имеет минимум, приходящийся на $x_1 = 0$. При $x_2 = 1$ отн. ед. минимум еще остается на прежнем месте (в нуле), но потенциальная кривая несколько расширяется. При $x_2 = 2$ отн. ед. проявляется новый минимум, приходящийся на $x_1 = 95$ отн. ед. При дальнейшем увеличении x_2 минимум потенциала углубляется и смещается в сторону больших значений x_1. Так, при $x_2 = 5$ отн. ед. минимум приходится уже на $x_1 = 205$ отн. ед. При дальнейшем увеличении x_2 минимум смещается еще дальше. При критическом значении $x_2 = x_{2C}$ около 1.2 отн. ед. минимум при $x_1 = 0$ заменяется перегибом и резко смещается в сторону больших значений x_1, что проявляется как скачкообразный рост амплитуды колебаний.

Построенный таким образом потенциал (8) является динамическим, т.е. его величина меняется в такт с изменением смещения второго осциллятора x_2. То есть если в течение первого полупериода

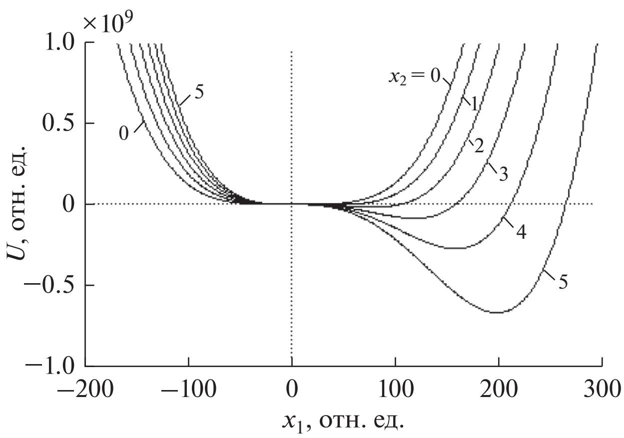

Рис. 4. Зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях амплитуды второго осциллятора: $x_2 = 0, ..., 5$ отн. ед. (цифры на кривых).

смещения x_2 потенциал имеет вид, показанный на рис. 4, то в течение следующего полупериода x_2 картина зеркально поворачивается относительно вертикальной оси.

До момента достижения амплитуды второго осциллятора критического значения x_{2C} для первого осциллятора не остается ничего другого, как колебаться в пределах единственного минимума в ближайшей окрестности точки $x_1 = 0$. Амплитуда его колебаний остается малой. При превышении амплитуды второго осциллятора критического значения x_{2C}, благодаря динамичности потенциала, для первого осциллятора открывается возможность колебаться в пределах, определяемых двумя минимумами кривой потенциала, расположенными симметрично по обе стороны от точки $x_1 = 0$, значительно от нее удаленными. Такой “выход на свободу” для первого осциллятора проявляется как резкое увеличение его амплитуды. При этом благодаря обратной связи между осцилляторами амплитуда колебаний второго осциллятора также возрастает, что приводит к еще большему увеличению амплитуды первого осциллятора. Развивается лавинообразно нарастающий процесс, что и проявляется как резкий скачкообразный рост амплитуды колебаний обоих осцилляторов.

Можно полагать, что динамический характер потенциала требует определенного синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов, однако при равенстве частот запаздывание отсутствует при любых значениях параметров. Тем не менее синхронизм может проявляться и при кратном соотношении частот осцилляторов между собой. Видимо, требование синхронизма и является причиной, почему запаздывание проявляется только в режиме умножения частоты. Проверка показывает, что кратность умножения должна быть обязательно нечетной. Лучше всего запаздывание проявляется при умножении частоты на три, несколько хуже на пять, еще хуже на семь, а далее уже не реализуется. Если полагать, что условием синхронизма является совпадение периода частоты первого осциллятора с несколькими периодами второго, то можно видеть, что “интеграл перекрытия” периодов обоих осцилляторов отличен то нуля только при нечетном их соотношении, причем величина его будет тем более значительной, чем кратность периодов меньше.

5. ПАРАМЕТР КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Из постоянных параметров системы уравнений (3), (4) весьма важным является параметр кубической нелинейности δ. Из выражения для потенциала (8) видно, что некоторые слагаемые являются нечетными относительно x_1. Это означает, что при достаточной величине x_1 потенциал может уйти на бесконечность, что противоречит физическому смыслу. Однако потенциал содержит параметр кубической нелинейности δ, который, будучи наиболее высоким по показателю степени x_1, при достаточной величине препятствует уходу на бесконечность при любом соотношении других параметров.

На рис. 5 приведена зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях параметра δ. Амплитуда колебаний второго осциллятора задана равной $x_2 = 5$ отн. ед., так что кривая *1* здесь совпадает с кривой на рис. 4, где x_2 также равен 5 отн. ед. Остальные параметры совпадают с принятыми на рис. 4.

Из рис. 5 видно, что по мере увеличения параметра кубической нелинейности динамический минимум потенциала смещается к меньшим значениям x_1 и его глубина убывает. То есть по мере увеличения кубической нелинейности амплитуда колебаний убывает. На кривой *7* минимум становится незначительным, а на кривой *8* переходит в нулевую точку по оси x_1, так что амплитуда колебаний первого осциллятора стремится к нулю, т.е. при этих условиях запаздывание полностью подавляется.

На рис. 6 представлена зависимость времени запаздывания от параметра кубической нелинейности. Как видно из рисунка, устойчивые колебания большой амплитуды существуют только в области изменения параметра δ между 5 и 53 отн. ед. При $\delta < 5$ отн. ед. колебания большой амплитуды возникают, но продолжаются сравнительно небольшой промежуток времени, после чего система ухо-

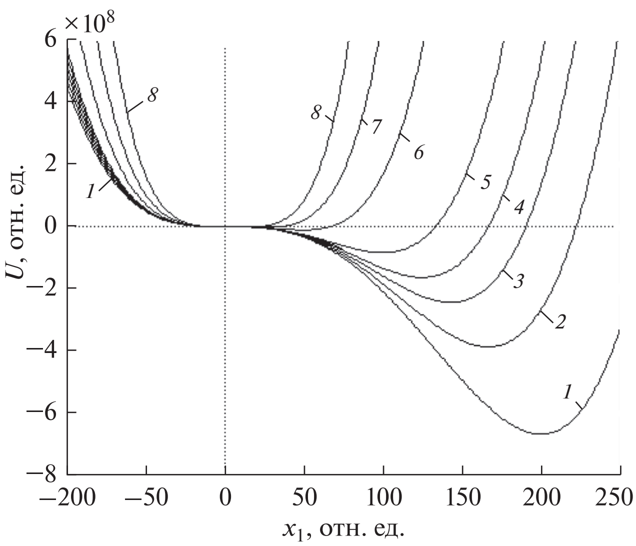

Рис. 5. Зависимость динамического потенциала от амплитуды колебаний первого осциллятора при различных значениях параметра кубической нелинейности (отн. ед.): $x_1 = 5$ (*1*), 6 (*2*), 7 (*3*), 8 (*4*), 10 (*5*), 20 (*6*), 40 (*7*), 80 (*8*); амплитуда колебаний второго осциллятора $x_2 = 5$ отн. ед.

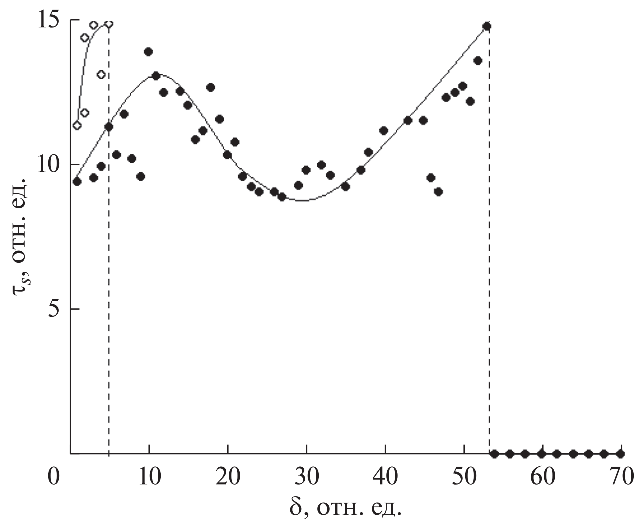

Рис. 6. Зависимость времени запаздывания от параметра кубической нелинейности: темные точки соответствуют скачкообразному увеличению амплитуды колебаний, светлые точки – уходу системы на бесконечность.

дит на бесконечность. При $\delta > 5$ отн. ед. величина этого параметра уже достаточна, чтобы предотвратить уход на бесконечность. При $\delta > 53$ отн. ед. колебания большой амплитуды отсутствуют, т.е. происходит подавление запаздывания.

Как видим, скачкообразное увеличение амплитуды колебаний имеет большой разброс по вертикали (темные точки). При изменении параметра нелинейности всего на 3...5 отн. ед. время запаздывания меняется на величину, доходящую до 20...30%. Можно полагать, что функциональная зависимость здесь является сложной и носит стохастический характер, поэтому сплошные линии проведены эмпирически через области, соответствующие максимальному сгущению точек.

Вообще говоря, такой весьма нерегулярный характер расположения точек, колеблющихся в окрестности величины $\tau_S = (12 \pm 2)$ ед., дает повод полагать, что во всем интервале изменения параметра нелинейности δ, от нуля до его критического значения, время запаздывания от этого параметра практически не зависит.

6. АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ ПОСЛЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает параметр кубической нелинейности на характер колебаний после запаздывания. На рис. 7 представлена зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины этого параметра. Из рисунка видно, что установившаяся амплитуда при увеличении параметра кубической нелинейности более или менее монотонно спадает. Особенно резкий спад наблюдается при малых значениях параметра δ (до 10...15 отн. ед., а также на вставке), после чего спад постепенно замедляется. Начиная со значения δ порядка 53 отн. ед. амплитуда резко уменьшается, что соответствует подавлению запаздывания при достижении параметром δ критического значения δ_C (показано стрелкой).

Наблюдаемый характер спада зависимости x_{10} от δ позволяет приблизить ее эмпирическими кривыми, соответствующими закону обратной пропорциональности на основном рисунке и на вставке соответственно:

$$x_{10} = \frac{600}{\delta - 4} - 8, \quad x_{10} = \frac{600}{\delta} + 45.$$

7. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СПАДА АМПЛИТУДЫ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим отмеченный спад амплитуды на основе механизма потенциала при кубической нелинейности. Так, из выражения (8) можно видеть, что кубическая нелинейность соответствует слагаемому, имеющему вид

$$U_\delta = \frac{\delta}{4} x_1^4. \tag{9}$$

Потенциал U_δ представляет собой симметричную яму, сужающуюся по мере увеличения параметра δ. Края ямы при заданном значении потенциала

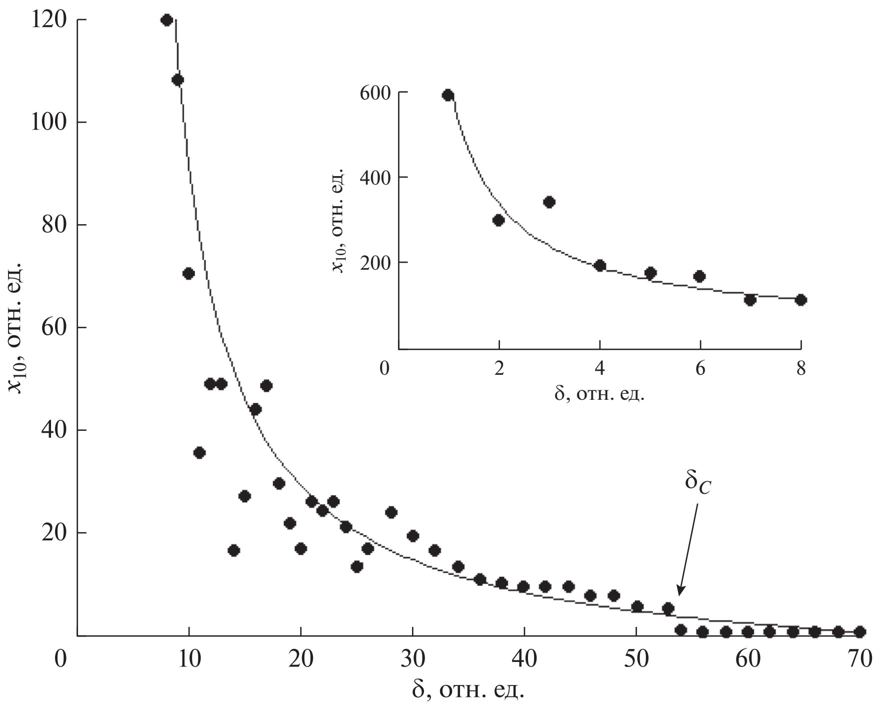

Рис. 7. Зависимость амплитуды колебаний в установившемся режиме от величины параметра кубической нелинейности; на вставке – та же зависимость при малых значениях параметра δ.

определяют интервал допустимых значений смещения первого осциллятора. То есть чем выше потенциал, тем может быть больше размах колебаний. Проверка показывает, что зависимость допустимой амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра кубической нелинейности может быть приближена эмпирической формулой, имеющей структуру обратной пропорциональности:

$$x_{10} = \frac{30}{\delta - 8} + 2.$$

Возвращаясь к формуле (9), отметим, что обе ветви потенциала вследствие его четности стремятся к плюс бесконечности, так что колебания по амплитуде всегда остаются ограниченными. Поскольку степень потенциала (8) по первой переменной x_1 равна четырем, а все остальные его слагаемые при постоянной величине x_2 имеют по переменной x_1 степень не выше третьей, то этот потенциал при достаточной величине своего параметра δ перевешивает остальные слагаемые и колебания всегда остаются конечными.

Наблюдаемый в некоторых случаях уход системы на бесконечность (см. рис. 6, светлые точки) наблюдается только при довольно малых значениях параметра δ (менее 5 отн. ед.). Следовательно, может иметь место преобладающая роль слагаемого со смешанной нелинейностью с параметром η, где первая переменная, хотя и имеет всего третью степень, но в динамике к ней добавляется еще вторая переменная, т.е. результирующая степень становится четвертой. Возникающая при этом конкуренция двух четвертых степеней x_1^4 и $x_1^3 x_2$ при малом значении параметра δ, но достаточно большой величине η, приводит к уходу системы на бесконечность.

8. ВЛИЯНИЕ ДРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛА

Как отмечено выше, главными параметрами, определяющими характер нестационарного запаздывания, являются параметры затухания β_1, β_2, а также параметр кубической нелинейности δ. Однако потенциал (8) содержит также параметр линейной связи γ_1 и параметр нелинейной связи η. Отметим роль этих параметров в формировании эффекта запаздывания.

Параметры линейной связи γ_1 и γ_2, по-видимому, должны быть равными друг другу, как это следует из единства потенциала для обоих осцилляторов [28]. Их величина довольно критична, но резкого порога не имеет и сильно зависит от соотношения других параметров. В общем случае можно полагать, что при слишком слабой связи для достижения запаздывания надо значительно повышать другие параметры, в первую очередь амплитуду возбуждения, а при слишком сильной связи время запаздывания падает и стремится к времени релаксации того осциллятора, для которого это время меньше. В данной работе параметры линейной связи полагались равными 10 отн. ед., что позволило не слишком увеличивать остальные параметры, а также получить время запаздывания примерно посередине между временами релаксации обоих осцилляторов.

Параметр нелинейной связи η обязательно должен быть отрицательным, так как при положительном параметре запаздывание отсутствует при любом наборе других параметров. Далее, его величина также имеет некоторое среднее значение, ниже которого запаздывание отсутствует, а выше наблюдаются другие нестационарные режимы, такие как многоступенчатое запаздывание и автомодуляционные процессы, в том числе стохастического характера. В данной работе параметр нелинейной связи полагался равным –200 отн. ед., что позволило реализовать запаздывание в его простейшем варианте. Некоторые особенности влияния параметров линейной и нелинейной связи отмечены в работах [19, 20]. Более подробному их рассмотрению авторы предполагают посвятить отдельную работу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о возбуждении нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине. Рассмотрение проведено на основе упрощенной модели системы из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромагнитными свойствами.

Для типичных параметров задачи о возбуждении гиперзвука СВЧ-диапазона в пленке железоиттриевого граната выполнена численная оценка коэффициента нелинейного слагаемого, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора. Выявлено критическое значение постоянного поля, при котором знак коэффициента нелинейной связи меняется на противоположный.

Выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более, после чего амплитуда развившихся колебаний стремится к стационарному значению.

Выявлены необходимые условия реализации нестационарного запаздывания. Показано, что важнейшим условием является значительное (не менее чем в несколько раз) различие времен релаксации осцилляторов, причем время запаздывания приходится на интервал между временами релаксации обоих осцилляторов.

Отмечен пороговый характер реализации запаздывания по отношению к амплитуде возбуждения и критический характер по параметру кубической нелинейности первого осциллятора.

Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии наряду с основным дополнительного минимума потенциала системы, отделенного от основного потенциальным барьером. На основании предложенной гипотезы построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при условии использования амплитуды второго осциллятора в качестве параметра.

В рамках предложенной модели подробно исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено критическое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания.

Подробно исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Выявлена решающая роль кубической нелинейности в ограничении амплитуды возбуждаемых колебаний. Отмечен нижний критический уровень параметра кубической нелинейности, необходимый для реализации такого ограничения. Показано, что при значении параметра, ниже критического, запаздывание имеет место, но через некоторое время возбуждаемые колебания теряют устойчивость и система уходит на бесконечность. Обнаружен верхний критический уровень параметра кубической нелинейности, выше которого запаздывание пропадает, т.е. происходит как бы его подавление. Наблюдаемые нижний и верхний критические уровни параметра кубической нелинейности интерпретированы на основе модели динамического потенциала с учетом четной (четвертой) степени потенциала кубической нелинейности.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кикучи Е.* Ультразвуковые преобразователи. М.: Мир, 1972.
2. *Голямина И.П.* Физика и техника мощного ультразвука. Кн.1. Источники мощного ультразвука. М.: Наука, 1967.
3. *Comstock R.L., LeCraw R.C.* // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 10. P. 3022.

4. *Ле-Кроу Р., Комсток Р.* // Физическая акустика. Т. 3Б. Динамика решетки / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1968. С. 156.
5. *Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
6. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 5. С. 482.
7. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязев А.Г., Тихомирова М.П.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 10. С. 1262.
8. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Темирязев А.Г., Тихомирова М.П.* // ФТТ. 2000. Т. 42. № 6. С. 1062.
9. *Alvarez L.F., Pla O., Chubykalo O.* // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. № 17. P. 11613.
10. *Suhl H.* // J. Phys. Chem. Sol. 1957. V. 1. № 4. P. 209.
11. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1960.
12. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.
13. *Моносов Я.А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
14. *Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С.* // Успехи физ. наук. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
15. *Семенцов Д.И., Шутый А.М.* // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 8. С. 831.
16. *Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. № 9. С. 25.
17. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Сб. трудов XXV Междунар. конф. “Электромагнитное поле и материалы”. М.: НИУ МЭИ, 2017. С. 222.
18. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 7. http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf.
19. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 8. http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf.
20. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 8. http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf.
21. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 1. С. 79.
22. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 3. С. 297.
23. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2013. № 11. http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf.
24. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 1. http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf.
25. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 5. http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf.
26. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 6. http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf.
27. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 9. http://jre.cplire.ru/jre/sep15/4/text.pdf.
28. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 10. http://jre.cplire.ru/jre/oct15/1/text.pdf.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 8, с. 825–832

НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.3.049.774.2

ОПЫТ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МУЛЬТИСКОРОСТНОГО ПРИЕМОПЕРЕДАТЧИКА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ПО КМОП ТЕХНОЛОГИИ 90 нм И ПРЕДНАЗНАЧЕННОГО ДЛЯ РАБОТЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КАНАЛЕ SPACEFIBRE

Д. А. Доможаков*

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Каширское шоссе, 31, Москва, 115409 Российская Федерация

**E-mail: dadomozhakov@mephi.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2021 г.
После доработки 25.02.2021 г.
Принята к публикации 28.02.2021 г.

Систематизированы архитектурные и схемотехнические решения, применимые при проектировании цифровых частей мультискоростных приемопередатчиков последовательных каналов. Обоснованы такие варианты решений, которые позволяют максимально использовать возможности доступной технологии для расширения этого диапазона, особенно в его высокочастотной части. С использованием предложенных решений спроектирован по КМОП-технологии 90 нм мультискоростной приемопередатчик последовательного канала SpaceFibre. Изготовленный приемопередатчик работает в диапазоне битовых скоростей от 5 Мбит/с до 3.125 Гбит/с и по совокупности измеренных параметров не уступает ближайшим зарубежным аналогам.

DOI: 10.31857/S0033849421080039

ВВЕДЕНИЕ

Развитие бортовых сетей передачи данных и соответствующих стандартов портов SpaceFibre, SpaceWire/GigaSpaceWire [1, 2] в сторону увеличения битовых скоростей передачи делает актуальной задачу разработки сложно-функциональных (СФ) блоков высокоскоростных и более востребованных на практике мультискоростных приемопередатчиков последовательных каналов (МСПП). Под мультискоростными понимаются приемопередатчики со скоростью передачи, перестраиваемой в диапазоне двух или более декад от высоких до ультравысоких значений, если провести аналогию с диапазонами частот, которые указаны в регламенте Международного союза электросвязи [3]. Под это определение не попадают так называемые мультипротокольные приемопередатчики, выпускаемые фирмами Maxim Integrated и Texas Instruments, так как первые работают в диапазоне, включающим средние скорости (частоты), а вторые – в пределах одной декады ультравысоких скоростей (частот). Постановка задачи проектирования МСПП, заведомо более сложной, чем проектирование относительно “узкодиапазонных” или относительно низкоскоростных приемопередатчиков, вызвана необходимостью покрытия потребностей в наиболее актуальных отечественных приложениях, связанных с высокоскоростной передачей данных.

Для достижения повышенных битовых скоростей передачи необходимо в первую очередь повысить быстродействие критичных блоков в составе МСПП. К критичным блокам можно отнести блоки, функционирующие на частотах, равных или кратных скорости транслируемого битового потока данных. Накопленный опыт проектирования показывает, что для стандартной объемной КМОП технологии уровня 180...90 нм физические ограничения быстродействия блоков становятся существенными на скоростях передачи данных 2...3 Гбит/с и выше. В данной работе представлены и обоснованы особенности архитектурных и схемотехнических решений для приемопередатчиков подобного рода и назначения на примере МСПП, изготовленного по объемной КМОП технологии 90 нм и работающего в диапазоне битовых скоростей от 5 Мбит/с до 3.125 Гбит/с. Особое внимание уделено контролю в процессе проектирования частоты возникновения битовых ошибок (в англоязычной литературе Bit Error Rate, или BER).

Цифровые части СФ-блоков МСПП включают в себя конвейер данных, который подразделяется на две подсистемы: конвейер кодовых групп, образованных параллельными 10-разрядными данными, и конвейер битов в составе последовательных данных. К групповым операциям относятся, например, поиск служебных символов, выравнивание кодовых групп и низкоуровневое тестирование. Последовательные операции выполняют функцию сериализации и десериализации последовательного потока данных.

Одной из основных количественных характеристик высокоскоростных приемопередатчиков является частота возникновения битовых ошибок [4]. Причинами повышения BER МСПП могут быть проблемы, связанные со сложностью программирования битовых скоростей на высокой частоте, с технологическими ограничениями быстродействия библиотечных компонентов, а также с неоптимальными архитектурными и схемотехническими решениями устройства блоков. Для обеспечения надежной работы МСПП необходимо решение каждой из перечисленных проблем. В случае отсутствия функциональных ошибок работы величина BER зависит от джиттера транслируемого потока данных.

1. ПРОБЛЕМЫ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ СФ-БЛОКОВ МСПП И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1.1. Архитектурные особенности ранее разработанных МСПП

В работе [5] рассмотрены следующие архитектурные и схемотехнические особенности ранее разработанных приемопередатчиков, критичные с точки зрения их влияния на показатель BER в гигабитном диапазоне скоростей передаваемых данных.

— Сложная структура цифровой части устройства фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Работа в широком диапазоне битовых скоростей приводит к необходимости использования частотно-перестраиваемых ФАПЧ. В режиме работы на максимальной частоте повышается сложность фазовой синхронизации тактового дерева в конвейере данных как передатчика, так и приемника.

— Отсутствие специальных мер защиты цепей питания ФАПЧ от шумового воздействия схем цифрового ядра СФ-блока. По причине отсутствия изолированного питания смешанных аналого-цифровых блоков ФАПЧ растет джиттер тактовых сигналов.

— Архитектура СФ-блоков предполагает наличие сложной программируемой схемы коммутаций высокочастотных цепей данных и битовой синхронизации, перестраиваемой в соответствии с заданной скоростью передачи. Использование элементов стандартных библиотек в процессе цифрового синтеза блоков битовых операций не обеспечивает достижение предельного для данной технологии быстродействия и может привести к фазовой рассинхронизации высокочастотных сигналов.

— Ступень конвейера, выполняющая функцию сериализации или десериализации, также является критичным фрагментом СФ-блока по быстродействию. Фазовое соответствие высокочастотной битовой и групповой синхронизации трудно достижимо в диапазоне рабочих условий эксплуатации микросхемы при наличии сложных программируемых коммутаций битовых и групповых цепей.

Перечисленные проблемы относятся к критичным блокам в составе цифровых частей проектируемых МСПП в предположении, что аналоговые (интерфейсные) части имеют достаточный запас по быстродействию. При реализованной в данном проекте методике восходящего проектирования (от частного к общему) разработка аналоговых частей — отдельная и успешно решенная в итоге задача, если судить по приведенным в п. 9 данной статьи результатам измерений опытного образца МСПП. Автор участвовал в разработке аналоговых частей приемопередатчиков, причем накопленный при этом опыт обобщен в статье [6].

Отмеченные проблемы с быстродействием СФ-блоков МСПП приводят к увеличению трудоемкости их проектирования, появлению необходимости в дополнительном контроле фазовых соотношений между высокочастотными сигналами в критичных блоках. Приведенные далее архитектурные и схемотехнические решения позволяют упростить процесс проектирования и увеличить быстродействие критичных блоков МСПП.

1.2. Программирование битовой скорости

Программирование скорости передачи в широких пределах в области битовых операций ведет к снижению запаса по быстродействию вследствие необходимости построения сложных схем синхронизации цепей передачи данных и тактовых сигналов. Программирование битовой скорости в области групповых операций позволяет снизить требования по быстродействию за счет некритичного увеличения занимаемой площади (рис. 1).

Например, 2-битовый отрезок “12” на скорости 1.25 Гбит/с представляется кодовой группой “1122” на скорости 2.5 Гбит/с (2.5/1.25 = 2), что соответствует одному и тому же сигналу во временных координатах. В результате форматирования данных все скорости программируемой сетки неразличимы в работе скоростных участков конвейера битов. Работа конвейера данных приемника состоит в проведении обратной операции и основана на таком же принципе. Высокочастотные узлы всегда функционируют на максимальной битовой скорости. Функции поиска служебных

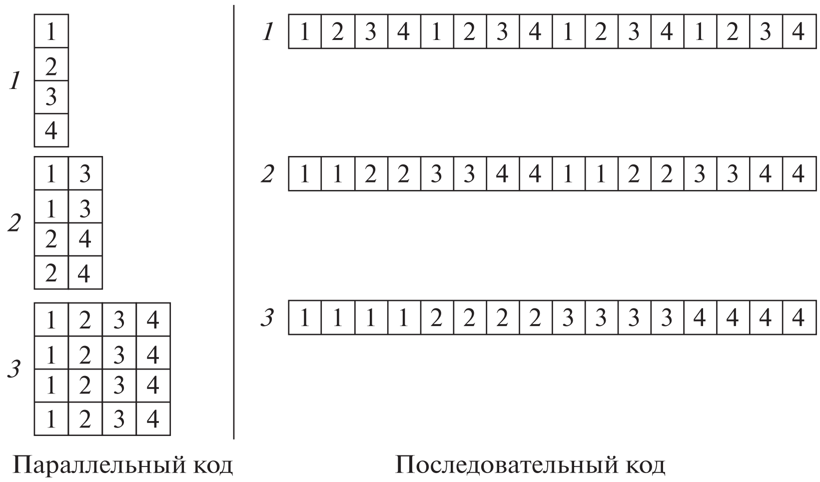

Рис. 1. Принцип форматирования данных на верхнюю битовую скорость: 2.5 (*1*), 1.25 (*2*), 0.625 Гбит/с (*3*).

символов и выравнивание кодовых групп реализованы в низкочастотной части конвейера, после обратного форматирования битовой скорости.

1.3. Выбор разрядности шины тактовых сигналов битовых операций

В передатчике группы форматированных данных поступают на вход сдвигового регистра. Принцип первичной сериализации данных сдвиговым регистром передатчика представлен на рис. 2. Сдвиговый регистр выполняет функцию первичной свертки данных перед выходным мультиплексором. В сдвиговом регистре приемника частично развернутые демультиплексором данные преобразуются в группы принятых бит. Сдвиговый регистр можно считать блоком как битовых операций (параллельная загрузка в передатчике и выгрузка данных в приемнике), так и групповых операций сдвига параллельных потоков бит.

Параллельный поток данных Data_In разрядностью N поступает на вход сдвигового регистра. Параллельная запись происходит по разрешающему сигналу Load. Разрядность k тактовых сигналов CLK и сигналов Load зависит от числа параллельных потоков частично сериализованных данных Stream и разрядности выходного мультиплексора передатчика. Когда Load[i] не активен, на каждом такте CLK[i] происходит сдвиг Stream[i].

Разрядность шины тактовых сигналов оказывает влияние на работу цифрового блока. Так, увеличение разрядности приводит к следующему:

• снижению частоты работы сдвигового регистра;

• увеличению максимально допустимого уровня джиттера на входе мультиплексора передатчика и сдвигового регистра приемника;

• снижению требований по быстродействию для блока генерации сигналов Load – сигналов параллельной загрузки передаваемых данных в сдвиговый регистр передатчика.

Вместе с тем увеличение разрядности приводит также:

• к усложнению стабилизации взаимных фаз между элементами шины тактовых сигналов;

• повышению требований по быстродействию для многофазного генератора, управляемого напряжением (ГУН), в составе ФАПЧ (PLL).

Таким образом, при выборе разрядности шины тактовых сигналов необходимо достижение компромисса. Далее в подразделе 1.5 показано, что мультиплексор 4 в 1, выполненный на p-канальных транзисторах, является предпочтительным вариантом в указанном смысле. В цифровой части передатчика и приемника блоки битовых

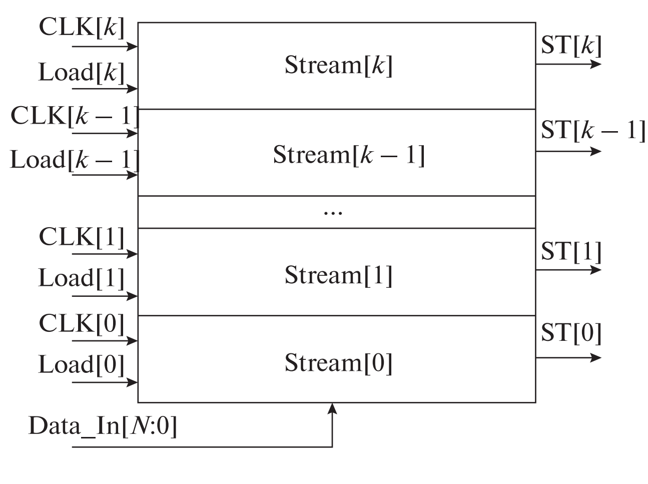

Рис. 2. Принцип первичной сериализации данных в сдвиговом регистре передатчика.

Таблица 1. Сравнение разработанных мультиплексоров

Тип	Экономичность потребления	Наличие трансляторов уровней	Максимально допустимый джиттер на входе, UI
КМОП 2 в 1	+	На выходе	2
CML 4 в 1	–	На входе	4
Ключи 5 в 1	+	Нет	5
Ключи 4 в 1	+	Нет	4

операций (мультиплексор, сдвиговые регистры и сдвигатель фаз) также предлагается тактировать шиной из четырех тактовых сигналов как наиболее оптимальной.

1.4. Применение фазового сдвига промежуточного потока данных для снижения требований по быстродействию для блоков цифровой части передатчика

В предыдущем подразделе определено назначение сигналов Load цифровой части передатчика. Функция генерации сигналов CLK и Load возлагается на делитель тактовой частоты ГУН ФАПЧ. Применительно к МСПП, работающим на предельных скоростях для конкретной технологической платформы, существует проблема генерации многофазного потока Load. Это связано с тем, что частота переключения делителя и сдвигового регистра соответствует максимальной предусмотренной битовой скорости. Сигнал Load[k] имеет длительность, равную одному полупериоду CLK[k], и формируется с использованием схем комбинационной логики, что не приводит к трудностям контроля запасов быстродействия. Однако формирование остальных сигналов Load[k – 1:0] сопряжено с перезащелкиванием Load[k] тактовыми сигналами CLK[k – 1:0], что приводит к нарушению требований по минимальным временам Setup и Hold для используемых триггеров. Это зачастую приводит к невозможности применения стандартного маршрута синтеза цифровых блоков.

Данная проблема может быть решена путем применения блока фазового сдвига после сдвигового регистра. В таком случае параллельная загрузка и сам сдвиг в сдвиговом регистре производятся только по одной фазе сигналов Load[k] и CLK[k]. Частично сериализованные сигналы Stream[k:0] попадают на вход сдвигателя фаз, где формируется поток Stream_shifted[k:0], и каждый элемент Stream_shifted[i] тактируется своим сигналом CLK[i]. Принцип фазового сдвига состоит в перезащелкивании потока данных тактовым сигналом, фаза которого запаздывает относительно предыдущего на 0.75 от периода. Такая схема сдвига позволяет удовлетворить требованиям по минимальным временам Setup и Hold.

1.5. Анализ вариантов реализации выходного мультиплексора передатчика

Выходной мультиплексор передатчика является одним из наиболее важных блоков, так как он является последней ступенью свертки передаваемого потока данных. Такая свертка является битовой операцией.

Были проанализированы следующие варианты реализации выходного мультиплексора передатчика: КМОП-мультиплексор, состоящий из элементов стандартной цифровой библиотеки; мультиплексор, выполненный в CML-базисе; мультиплексор, построенный на транзисторных ключах. Каждый вариант реализации выходного мультиплексора передатчика пригоден для определенного диапазона битовых скоростей.

Мультиплексор, синтезированный с использованием стандартной КМОП-библиотеки, пригоден для приемопередатчиков, работающих на относительно низких битовых скоростях. Если периферийный драйвер передатчика содержит CML-каскады, то на стыке внутренней и периферийной частей передатчика необходим транслятор уровней КМОП-CML, который является дополнительным источником детерминированного джиттера.

Проблему трансляции уровней способен решить мультиплексор в базисе CML, но он имеет высокий уровень потребления. При высоком быстродействии CML-мультиплексора тем не менее сохраняется необходимость контроля допустимого уровня джитттера сигналов на его входах, если мультиплексор работает вблизи верхней границы рабочего диапазона скоростей.

Также были разработаны и применены на практике два мультиплексора (5 в 1 и 4 в 1), состоящие из p-канальных ключей. Ключи, построенные на p-канальных транзисторах, не требуют транслятора уровней на входе. Их выходные сигналы имеют приближенные к CML уровни, что исключает необходимость встраивания транслятора уровней на входе драйвера передатчика. Использование p-канальных мультиплексоров облегчает контроль джиттера сигналов на входе. Однако появляется необходимость контроля джиттера большего числа тактовых сигналов (пять и четыре сигнала в данном случае). В табл. 1 приведены

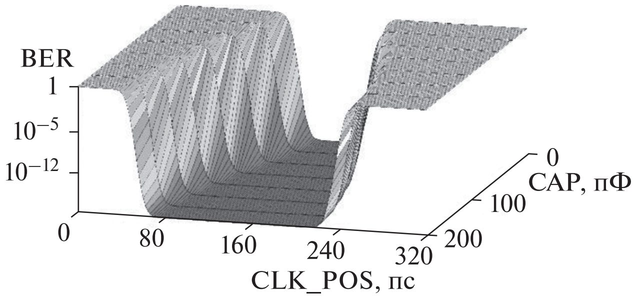

Рис. 3. Трехмерное представление U-образной кривой в зависимости от демпфирующей емкости стабилизаторов напряжения передатчика CAP и положения тактового сигнала внутри бита данных CLK_POS.

сравнительные данные разработанных мультиплексоров по основным показателям.

В целом мультиплексор 4 в 1 на основе ключей является компромиссным и универсальным решением для широкого диапазона битовых скоростей. Применение принципа сериализации 4 в 1 (Quarter Rate) довольно распространено (см. [7]).

1.6. Оптимизация стабилизатора питающего напряжения

Синхронное переключение блоков в составе конвейера данных вызывает паразитные пульсации напряжения в цепях питания и общего вывода (“земли”), что приводит к увеличению джиттера сигналов тактового дерева. С целью исключения данного эффекта домены питания разделены на цифровое и аналоговое. Аналоговые блоки, такие как ФАПЧ, получают питание от понижающих стабилизаторов напряжения. По результатам проектирования МСПП, описанным в работе [8], выбран оптимальный номинал демпфирующей емкости стабилизатора. На рис. 3 приведено трехмерное представление U-образной кривой, описывающей параметрическую зависимость частоты ошибок от демпфирующей емкости стабилизаторов напряжения передатчика.

В соответствии с полученной зависимостью был выбран номинал конденсатора, равный 100 пФ, как компромиссный с точки зрения величины джиттера данных и занимаемой площади. На рис. 4 изображена топология разработанного стабилизатора питания. Большую часть площади занимает демпфирующий конденсатор.

1.7. Программирование тока зарядно-разрядного блока восстановления тактовых сигналов и данных

Блоки восстановления тактовых сигналов и данных (ВТСД), основанные на архитектуре ФАПЧ, имеют в своем составе контур обратной связи по фазе. В контур входят ГУН, зарядно-разрядный блок, фильтр нижней частоты и фазовый детектор. Качество подстройки и устойчивость к джиттеру данных зависят от соотношения параметров контура. При изменении напряжения питания, рабочей температуры или под воздействием технологического разброса значения этих параметров подвержены дрейфу.

В проекте SpaceFibre по технологии 90 нм было принято решение использовать зарядно-разрядный блок с программируемым током (1.5, 3.0 и 4.5 мкА) с целью компенсации дрейфа параметров контура. На рис. 5 представлена схема используемого зарядно-разрядного блока с настройкой выходного тока.

2. РАЗРАБОТАННЫЙ МСПП

Разработанный МСПП представляет собой приемопередатчик последовательных каналов, спроектированный и изготовленный с использованием объемной КМОП-технологии 90 нм. Поддерживаются битовые скорости в двух диапазонах:

1) низкочастотный (НЧ): 5...200 Мбит/с с шагом 5 Мбит/с.

2) высокочастотный (ВЧ): 1250, 1562.5, 2500 и 3125 Мбит/с.

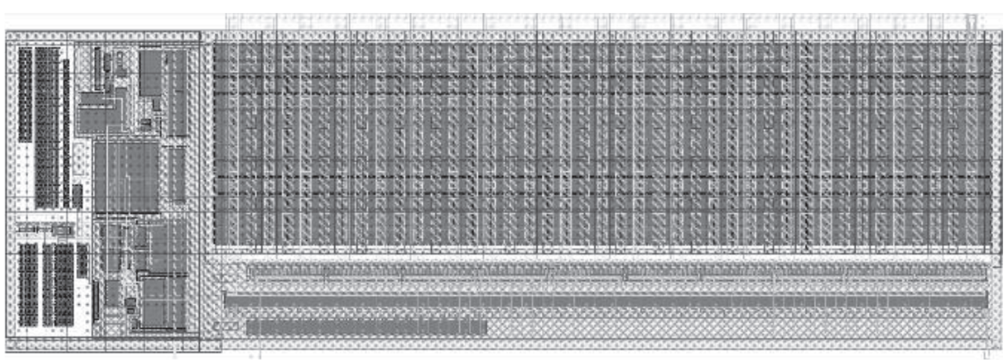

Рис. 4. Вид разработанного стабилизатора питания.

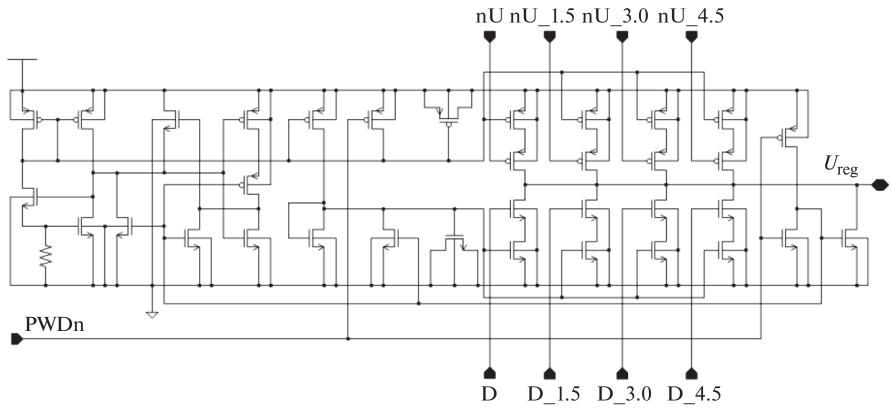

Рис. 5. Схема зарядно-разрядного блока с настройкой выходного тока: PWDn – сигнал включения режима пониженного потребления, nU* и D* – сигналы управления током заряда и разряда емкости фильтра ВТСД, U_{reg} – напряжение на конденсаторе фильтра.

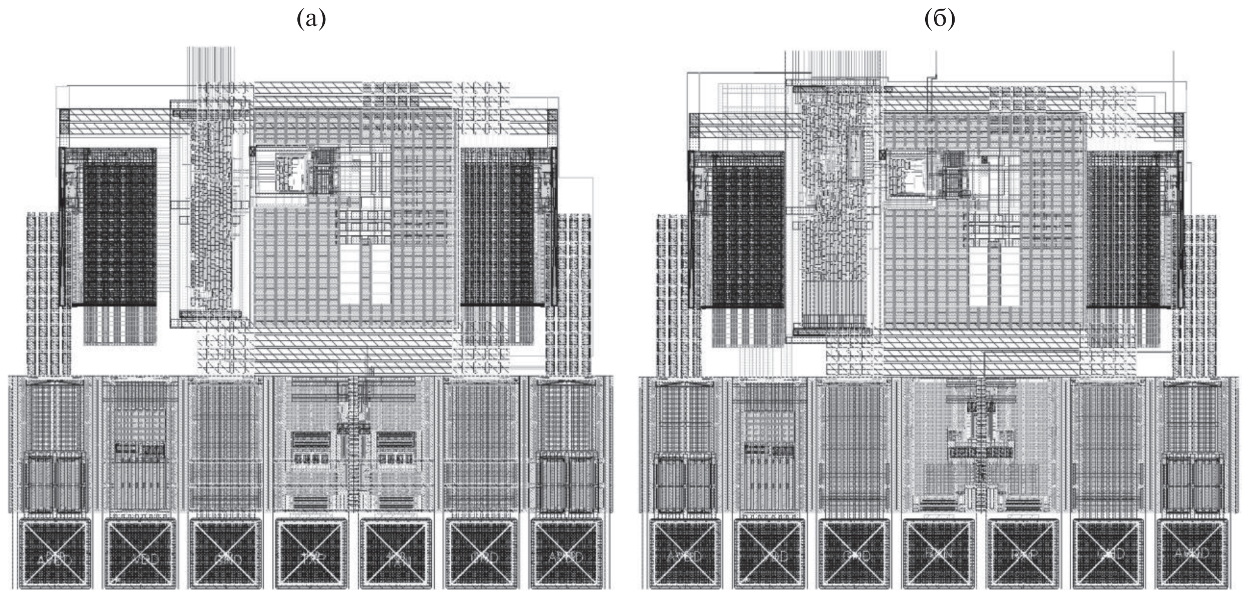

Рис. 6. Разработанные передатчик (а) и приемник (б) по стандарту передачи SpaceFibre по КМОП-технологии с нормами 90 нм.

Переключение между парными битовыми скоростями 1250 и 1562.5 Мбит/с, 2500 и 3125 Мбит/с осуществляется путем изменения частоты опорного сигнала ФАПЧ: 125 МГц в первом случае и 156.25 МГц во втором. На рис. 6а, 6б представлен общий вид топологии передатчика и приемника, разработанные по стандарту передачи SpaceFibre. Ширина и высота каждого из блоков без контактных площадок составляют 640 и 493 мкм соответственно.

На рис. 7 приведен общий вид тестовой платы в процессе измерений изготовленного МСПП.

При нормальных условиях (комнатная температура воздуха и напряжение питания 1.8 В) при битовых скоростях 1250, 2500 и 3125 Мбит/с и при передаче псевдослучайной последовательности данных измеренный уровень BER не превысил 10^{-13} с доверительной вероятностью более 95%. Также была подтверждена передача данных без ошибок в диапазоне нижних битовых скоростей.

На рис. 8 представлены измеренные глазковые диаграммы для скоростей 1250, 2500 и 3125 Мбит/с на конце коаксиального кабеля длиной 1.5 м.

Согласно стандарту SpaceFibre [9] в диапазоне скоростей от 1 до 3.125 Гбит/с на дальнем (Far-End) конце линии передачи требуемое раскрытие глазка по вертикали должно быть не менее ±100 мВ, а допустимая величина джиттера не должна превышать 0.55 от единичного интервала UI (UI = = 320 пс в данном случае). По результатам изме-

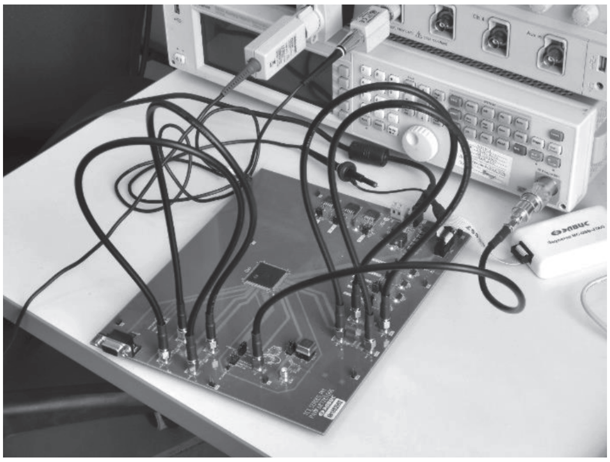

Рис. 7. Тестовая плата и измерительная система.

рений (см. рис. 8) на скорости 3.125 Гбит/с параметры глазковой диаграммы для сигнала на выходе тракта с исследуемым приемопередатчиком близки к указанным предельным значениям, однако это не приводит к росту числа ошибок при приеме. Ниже приведена зависимость измеренного уровня BER от битовой скорости в ВЧ-диапазоне и на начальном участке выше этого диапазона при передаче данных по кабелю длиной 1.5 м:

Битовая скорость, Гбит/с	BER
1.25	$<10^{-12}$
2.5	$<10^{-12}$
3.125	$<10^{-12}$
3.34	$<10^{-12}$
3.35	0.00167×10^{-12}
3.355	0.05×10^{-12}
3.36	1.23×10^{-12}
3.365	7.12×10^{-12}
3.37	1.99×10^{-11}
3.375	5.77×10^{-11}
3.38	2.29×10^{-10}

Результаты измерений показывают, что при преодолении некоторого порога битовой скорости передачи, в данном случае 3.35 Гбит/с, часто-

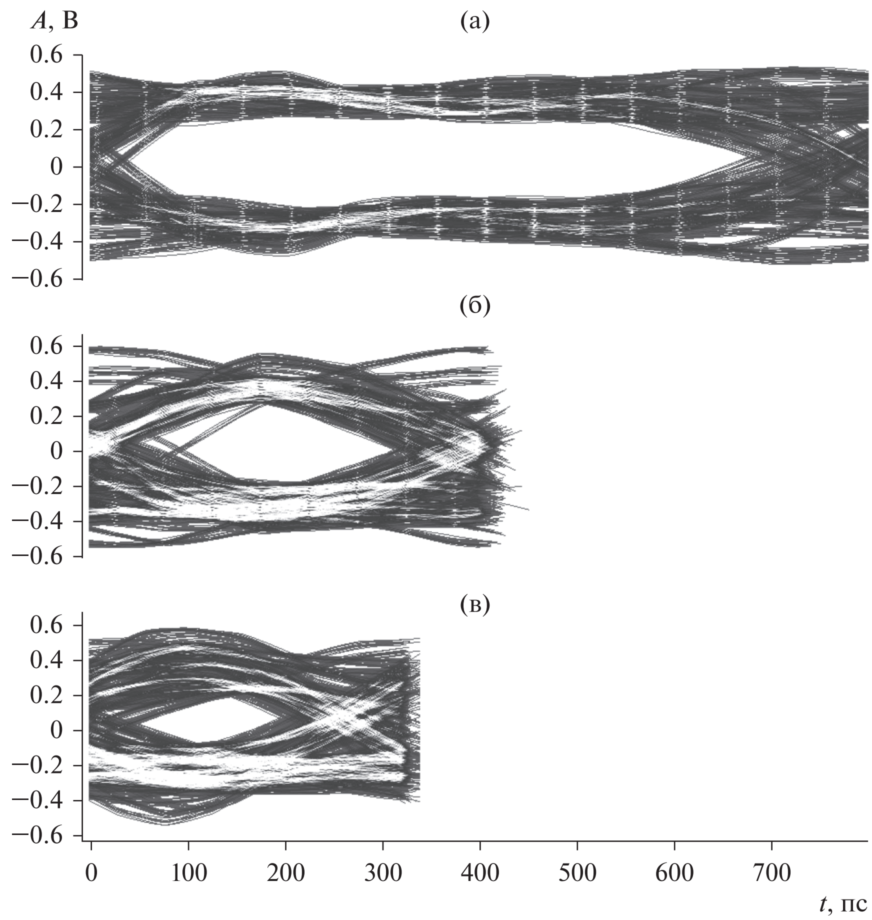

Рис. 8. Глазковые диаграммы данных на конце линии передачи при скоростях 1.25 (а), 2.25 (б), 3.125 Гбит/с (в).

Таблица 2. Сравнение параметров разработанного МСПП с зарубежными аналогами

Параметр	Собственная разработка	MAX9259/MAX9260	DS1021
Диапазон битовых частот, Мбит/с	5...3125	500...3125	230...3200
Технология изготовления	КМОП 90 нм	КМОП 180 нм	КМОП 65 нм
Напряжение питания, В	1.2/2.5	1.8/3.3	1.2/3.3
Джиттер на частоте 3.125 Гбит/с не более, UI	0.125	0.25	0.35
BER	$<10^{-13}$	$<10^{-12}$	$<10^{-12}$
Интерфейс обмена	CML	CML	CML
Рабочая температура, °C	–60...125	–40...120	–40...100
Тип корпуса	LQFP-176	TQFP-64	WLCS

та появления битовых ошибок быстро возрастает. Полученные результаты подтверждают наличие запаса как по битовой скорости, так и по длине кабеля.

В табл. 2 приведено сравнение разработанного МСПП с зарубежными аналогами, имеющими ту же или близкую максимальную скорость передачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в данной работе архитектурные и схемотехнические решения актуальны для широкого класса мультискоростных приемопередатчиков. Они позволяют реализовать большой диапазон скоростей передачи, максимально используя возможности доступной технологии для расширения этого диапазона в его высокочастотной части. Эффективность предложенных решений подтверждена по результатам измерений мультискоростного приемопередатчика, изготовленного с использованием объемной КМОП-технологии 90 нм и предназначенного для работы в последовательном канале SpaceFibre. По совокупности параметров разработанный и изготовленный мультискоростной приемопередатчик не уступает ближайшим зарубежным аналогам, а по общему реализованному диапазону скоростей существенно их превосходит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яблоков Е.Н.* // Изв. Самар. научного центра РАН. 2016. Т. 18. № 1. С. 428.
2. *Parkes S., Florit A.F., Villafranca A.G. et al.* // Proc. 2017. IEEE Aerospace Conf. Big Sky 4–11 Mar. N.Y.: IEEE, 2017. P. 7943805.
3. Регламент радиосвязи. Статьи. Женева: Междунар. союз электросвязи, 2016.
4. *Buchs K., Zabinski P., Coker J.* // Special Purpose Processor Development Group Mayo Clinic. 2004. P. 51.
5. *Алексеев И.Н., Байков В.Д., Глушков А.В. и др.* // Наноиндустрия. 2019. Спецвыпуск. С. 610.
6. *Доможаков Д.А., Кондратенко С.В.* // Вопросы радиоэлектроники. Сб. науч. тр. ЦНИИ “Электроника”. 2018. С. 6.
7. *Zheng X., Zhang C., Lv F., Zhao F. et al.* // Proc. 42nd Europ. Solid-State Circuits Conf. (ESSCIRC). Lausanne. 13–15 Sep. 2016. N.Y.: IEEE, 2016. P. 305.
8. *Байков В.Д., Доможаков Д.А., Дубинский А.В.* // Наноиндустрия. 2019. Спецвыпуск. С. 287.
9. SpaceFibre – Very high-speed serial link. ECSS-E-ST-50_11c. Noordwijk: ECSS Secretariat. ESA-ESTEC Requirements & Standards Division, 2019.